Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 3.

Автор текста @bezkorstanislav
Если есть ошибки, пишите ему в телеграм
Афтар выражает благодарность @vic778 за многочисленные поправки

October 2019

Диференціальне числення функції однієї змінної

Означення похідної. Основні правила диференційонування

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деяка функція однієї змінної, $x_0 \in D_f,\ x_0 \in (D_f)'$
.

Означення. Якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то функція f називається **диференційованою** в точці x_0, а сама границя називається **похідною** в точці x_0. І позначається $f'(x)$ або $\frac{df(x)}{dx}$.

Зауваження 1. Для функції однієї змінної ми ототожнили диференційованість та існування похідної.

Зауваження 2.

$$x - x_0 = \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x)$$

Отже, похідна дорівнює відношенню зміни приросту функції до приросту аргументу, що породжує цей приріст.

Зауваження 3.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longleftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1)$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Отже, якщо має місце рівність:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \Longrightarrow \exists f'(x_0) = A$$

Теорема. (Необхідна умова диференційованості). Функція f є диференційованою в x_0 тільки тоді, коли f — неперервна в точці x_0.

Доведення. Щоб існувала похідна треба, щоб

$$f(x) - f(x_0) \to 0, \to x \to x_0$$

. З цього випливає, що f неперервна в точці x_0.

Теорема. (Диференційованість композиції функцій). Нехай дано функції f і g. точка $x_0 \in D_{f\circ g},\ x_0 \in (D_{f\circ g})'$.

Якщо g диференційована в точці x_0, а f диференційована в точці $y_0 = g(x_0)$, то $f \circ g$ диференційована в точці x_0 і має місце рівність:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(y_0))g'(x_0)$$

Доведення.

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) =$$

$$= f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0) = f'(y_0)(g(x) - g(x_0)) + o(y - y_0) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(y - y_0) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x) - g(x_0)) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))$$

Отже,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f'(y_0)(g'(x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0) + o(1)) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f'(y_0)g'(x_0)(1 + o(1)) + o(1) = f'(y_0)g'(x_0)$$

Теорема. (Лінійність похідної). Нехай f і g — диференційовані в точці x_0, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Доведення.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\beta g(x) - \beta g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Теорема. Похідна добутку. Нехай f і g диференційовані в точці x_0.

Тоді функція $f \cdot g$ теж диференційована в точці x_0, при чому справедливе наступне співвідношення:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Доведення. За означенням:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} =$$

Оскільки f — диференційована в точці x_0, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Абсолютно аналогічно $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$.

Окрім того f — диференційована в точці x_0, а значить f — неперервна в точці x_0, а значить:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Отже:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

Теорема. Похідна частки. Нехай f і g диференційовані в точці x_0 і $g(x_0) \neq 0$.

Тоді, $\frac{f}{g}$ теж диференційована в точці x_0 і $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доведення. Аналогічно. Це доведення на дз :).

Приклад. Обчислити похідну від f від функції f в точці x_0.

1. $f(x) = x^3$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \ldots = 3x_0^2$$

2. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   (a) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \frac{x^3-8}{x-2} = 3 \cdot 4 = 12$.

   (b) $x_0 \neq 2$. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = 3x_0^2$.

3. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   (a) $x_0 \neq 2$. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = 3x_0^2$.

   (b) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-7}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{8-7}{2-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{0} = +\infty$.
   Похідна не може дорівнювати нескінченності, отже $\nexists f'(2)$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 2 \\ 12x - 16, & x < 2 \end{cases}$

   Як **не треба** робити:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

   Як **треба** робити:

   Розглядаємо 3 випадки:

   (a) $x_0 > 2$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 2x_0^2$$

(b) $x_0 < 2$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 12$$

(c) $x = 2$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 12$$

Отже, функція диференційована на всіх дійсній прямій.

Теорема. (Про диференційованість оберненої функції). Формулювання і доведення на додому.

Зауваженн. Функція f називається диференційованою на множині A якщо f має похідну в кожній точці $x_0 \in A$. Це позначається як $f \in D(A)$, де $D(A)$ — множина диференційованих на A функцій.

Односторонні похідні

Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$. Це рівносильно тому, що

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D_f : x_n < x_0,\ x_n \to x_0, n \to \infty$$

Границя $\lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ називається лівосторонньою похідною f в точці x_0. Позначаємо її як $f'(x)$.

Аналогічно, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Приклади:

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1 - 0}{x - 0} = +\infty \implies \nexists f'_n(x_0)$$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

Теорема. (Критерій диференційованості.)
Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap x_0 \in D_f$. Тоді:

$$\exists f'(x_0) \Longleftrightarrow \exists f' \exists f', f' = f'$$

Доведення.

$$\exists f'(x_0) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \exists \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Longleftrightarrow \exists f'(x_0),\ \exists f'(x_0),\ f'(x_0) = f'(x_0)$$

Зауваження.

$$f' \ne \lim_{x \to x_0-} f'(x)$$

Розглянемо параметрично задану функцію $y(x)$:

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \Psi(t) \end{cases}$$

$$y(x) = \varphi(\Psi^{-1}(x))$$

Часом виразити y через x може бути просто, як тут:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \Longleftrightarrow y = x^{\frac{3}{5}}$$

Але буває, що не дуже просто:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 + t \end{cases} \iff y = ???$$

Але ж **так** хочеться знайти похідну...

Припустимо, що $\exists\varphi'$ і $\exists(\Psi^{-1})'$ і $\Psi' \neq 0$.

$$\text{Тоді } y'_x = \varphi'(\Psi^{-1}(x)) \cdot (\Psi^{-1})'(x) = \varphi'(t)\frac{1}{\Psi'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\Psi'(t)}$$

Приклад:

1. Знайти похідну y_x

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \iff y = x^{\frac{3}{5}}$$

Ми уже знайшли, що $y = x^{\frac{3}{5}}$, отже:

$$y'_x = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}(t^5)^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}t^{-2}$$

Але давайте спробуємо *по-нормальному*, застосувавши нашу формулу:

$$y'_x = \frac{(t^3)'}{(t_5)'} = \frac{3}{5}\frac{t^2}{t^4} = \frac{3}{5}t^{-2}$$

2.

$$\begin{cases} y = \cos^2 t \\ x = \sin^2 t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{2\cos t(-\sin t)}{2\sin t \cos t} = -1$$

Як цікавий факт можна помітити, що $y = 1 - x$, де $x \in [0; 1]$

Похідні вищих порядків

Кажуть, що порядок похідної є вищим, якщо цей порядок більше за 1.

Нехай $f \ inD((a,b))$. Припустимо, що f' є диференційованою в точці $x_0 \in (a,b)$. Тоді функція f є двічі диференційованою в точці x_0, а число $(f')'(x_0)$ називається **другою похідною функції** f в точці x_0. Вона позначається як $f''(x_0)$.

Наприклад:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = (f')'(x) = 6x$$

Аналогічно у функції f існує $n-$та похідна $f^{(n)}(x)$ на проміжку (a,b) і вона є диференційованою в точці $x_0 \in (a,b)$, того f має $(n+1)$-шу похідну в точці x_0.

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}$$

Приклад:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \Big(\frac{1}{x}\Big)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \Big(-\frac{1}{x^2}\Big)' = 2\frac{1}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^4} = -6\frac{1}{x^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

Якщо f має n-ту похідну $f^(n)(x)$ у кожній точці проміжку I, то кажуть, що f є n разів диференційованою і позначається це так:

$$f \in D^{(n)}(I)$$

Якщо при цьому $f^n \in C(I)$, то кажуть, що $f \in C^{(n)}(I)$, то кажуть, що $f \in C^{(n)}(I)$.

$$C(I) \subset D(I) \subset C^{(1)}(I) \subset D^{(1)}(I) \subset C^{(2)}(I) \subset \dots$$

Домашня робота. Якщо у функції є похідна, чи обов'язково похідна неперервна?

Якщо $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists f^{(n)}$ на I, то кажуть, що f — нескінченно диференційована на I. Позначається так:

$$f \in C^{\infty}(I)$$

Дві властивочті n-тої похідної

Теорема. (Лінійність n-тої похідної). Нехай $f, g \in D^{(n)}(I)$, тоді

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \alpha f + \beta g \in D^{(n)}(I)$$

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

Теорема. Формула Лейбніца. Нехай $f, g \in D^{(n)}(I)$, тоді:

$$f \cdot g \in D^{(n)}(I)$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Доведення. Це вам нам Д/З. (Підсказка: воно доводиться також само, як формула бінома Ньютона).

Приклад:

1. Обчислити n-ту похідну від $f(x) = x^2 \ln x$.

$$(x^2 \ln x)^{(n)} = C_n^0 (x^2)^{(n)} \ln x + C_n^1 (x^2)^{(n-1)} (\ln x)^{(1)} + C_n^2 (x^2)^{(n-2)} (\ln x)^{(2)} + \dots +$$
$$+ \dots + C_n^{n-3} (x^2)^{(3)} (\ln x)^{(n-3)} + C_n^{n-2} (x^2)^{(2)} (\ln x)^{(n-2)} + C_n^{n-1} (x^2)^{(1)} (\ln x)^{(n-1)} +$$
$$+ C_n^n (x^2)^{(2)} (\ln x)^{(n-2)}$$

Тепер варто помітити, що:

$$(x^2)^{(1)} = 2x$$

$$(x^2)^{(2)} = 2$$
$$(x^2)^{(3)} = 0$$
$$(x^2)^{(n)} = 0,\ n > 3$$

Отже виходить, що наша сума дорівнює наступному:

$$C_n^{n-2}\frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}+C_n^{n-1}\frac{2x(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}+C_n^{n}\frac{x^2(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}}$$

2. Обчислити $(\frac{1}{a-x})^{(n)}$

$$(\frac{1}{a-x})^{(0)} = \frac{1}{a-x}$$
$$(\frac{1}{a-x})^{(1)} = \frac{1}{(a-x)^2}$$
$$(\frac{1}{a-x})^{(2)} = \frac{2}{(a-x)^3}$$
$$(\frac{1}{a-x})^{(n} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

3. Обчислити n-ту похідну від $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}\frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x}\frac{1}{2-x} =$$

З формули Лейбніца:

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(n-k)}\Big(\frac{1}{2-x}\Big)^{(k)}$$

А тепер використовуємо формулу з прикладу 2.

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(\frac{(n-k)!}{(1-x)^{n-k+1}}\Big)\Big(\frac{(k!)}{(2-x)^{k+1}}\Big)$$

Цікавий факт: конкретно у цьому завданні можна було зробити набагато простіше:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$
$$f^n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$$

Як обчислити похідну вищого порядку від параметрично заданої функції?

Ось *приклад*:

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{(t^2)'}{(t^3+t)'} = \frac{2t}{3t^2+1}$$

Початкова система задавала залежність y від x. Тепер ми можемо побудувати систему залежності y' від x:

$$\begin{cases} y'_x(t) = \frac{2t}{3t^2+1} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y''_x = (y'_x)' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{2t}{3t^2+1}\right)'}{(t^3+t)'} = \frac{-6t^2+2}{(3t^2+1)^3}$$

Тепер ми можемо побудувати залежність y''_x від x:

$$\begin{cases} y''_x(t) = \frac{-6t^2+2}{(3t^2+1)^3} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

І так далі...

Диференціал функції

Функція f називається диференційованою в точці x_0, якщо:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Нехай $x - x_0 = \Delta x$. Тоді:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x-0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)$$

Домножимо все на Δx:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{=} \Delta x \cdot f'(x_0) + o(\Delta x)$$

Отже, $\Delta x f'(x_0)$ — головна частина приросту функції.

Означення. Лінійне відображення

$$L(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Називається диференціалом функції f в точці x_0. Це позначається так:

$$d_{x_0} f(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Приклад:

$$f(x) = x^3,\ x_0 = 1$$
$$f'(x_0) = 3$$
$$d_{x_0} f(h) = 3h$$

Геометричний зміст диференціалу. Диференціал задає рівняння прямої, яка паральна дотичній до графіку функції у точці x_0 і проходить через центр координат.

Розглянемо $f(x) = x$. Тоді:

$$f'(x_0) = 1, \text{ для } \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Тоді:

$$d_{x_0}x(h) = 1 \cdot h = h$$

А тепер нехай g — довільна диференційована в x_0 функція:

$$(d_{x_0}g)(h) = g'(x_0) \cdot h = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x(h)$$

Якщо ми приберемо h, отримуємо:

$$d_{x_0}g = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x$$

Запис, який ще часто можна зустріти:

$$dg = g'(x_0)dx$$