

# Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 3.

Автор текста @bezkorstanislav

Если есть ошибки, пишите ему в телеграм

Афтар выражает благодарность @vic778 за многочисленные поправки

October 2019

# Диференціальне числення функції однієї змінної

## Означення похідної. Основні правила диференціювання

Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — деяка функція однієї змінної,  $x_0 \in D_f$ ,  $x_0 \in (D_f)'$ .

**Означення.** Якщо  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , то функція  $f$  називається **диференційованою** в точці  $x_0$ , а сама границя називається **похідною** в точці  $x_0$ . І позначається  $f'(x)$  або  $\frac{df(x)}{dx}$ .

*Зауваження 1.* Для функції однієї змінної ми ототожнили диференційованість та існування похідної.

*Зауваження 2.*

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \Delta x \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \Delta f(x)\end{aligned}$$

Отже, похідна дорівнює відношенню зміни приросту функції до приросту аргументу, що породжує цей приріст.

*Зауваження 3.*

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1) \\ f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\end{aligned}$$

Отже, якщо має місце рівність:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \implies \exists f'(x_0) = A$$

**Теорема. (Необхідна умова диференційованості).** Функція  $f$  є диференційованою в  $x_0$  тільки тоді, коли  $f$  — неперервна в точці  $x_0$ .

**Доведення.** Щоб існувала похідна треба, щоб

$$f(x) - f(x_0) \rightarrow 0, \rightarrow x \rightarrow x_0$$

. З цього випливає, що  $f$  неперервна в точці  $x_0$ .

**Теорема. (Диференційованість композиції функцій).** Нехай дано функції  $f$  і  $g$ . точка  $x_0 \in D_{f \circ g}$ ,  $x_0 \in (D_{f \circ g})'$ .

Якщо  $g$  диференційована в точці  $x_0$ , а  $f$  диференційована в точці  $y_0 = g(x_0)$ , то  $f \circ g$  диференційована в точці  $x_0$  і має місце рівність:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) = \\ &= f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0) = f'(y_0)(g(x) - g(x_0)) + o(y - y_0) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(y - y_0) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x) - g(x_0)) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(y_0)(g'(x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0) + o(1)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(y_0)g'(x_0)(1 + o(1)) + o(1) = f'(y_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

**Теорема. (Лінійність похідної).** Нехай  $f$  і  $g$  — диференційовані в точці  $x_0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\beta g(x) - \beta g(x_0)}{x - x_0} = \\ &\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \end{aligned}$$

**Теорема. Похідна добутку.** Нехай  $f$  і  $g$  диференційовані в точці  $x_0$ .

Тоді функція  $f \cdot g$  теж диференційована в точці  $x_0$ , при чому справедливе наступне співвідношення:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

**Доведення.** За означенням:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \end{aligned}$$

Оскільки  $f$  — диференційована в точці  $x_0$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ .

Абсолютно аналогічно  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$ .

Окрім того  $f$  — диференційована в точці  $x_0$ , а значить  $f$  — неперервна в точці  $x_0$ , а значить:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Отже:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0) \end{aligned}$$

**Теорема. Похідна частки.** Нехай  $f$  і  $g$  диференційовані в точці  $x_0$  і  $g(x_0) \neq 0$ .

Тоді,  $\frac{f}{g}$  теж диференційована в точці  $x_0$  і  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

**Доведення.** Аналогічно. Це доведення на дз :).

*Приклад.* Обчислити похідну від  $f$  від функції  $f$  в точці  $x_0$ .

1.  $f(x) = x^3$ .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \dots = 3x_0^2$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$(a) \ x_0 = 2. f'(x_0) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 3 \cdot 4 = 12.$$

$$(b) \ x_0 \neq 2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$(a) \ x_0 \neq 2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2.$$

$$(b) \ x_0 = 2. f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 7}{2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{0} = +\infty.$$

Похідна не може дорівнювати нескінченності, отже  $\nexists f'(2)$ .

$$4. f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 2 \\ 12x - 16, & x < 2 \end{cases}$$

Як **не треба** робити:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

Як **треба** робити:

Розглядаємо 3 випадки:

$$(a) \ x_0 > 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2$$

(b)  $x_0 < 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 12$$

(c)  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 12$$

Отже, функція диференційована на всіх дійсній прямій.

**Теорема. (Про диференційованість оберненої функції).** Формулювання і доведення на додому.

*Зауваження.* Функція  $f$  називається диференційованою на множині  $A$  якщо  $f$  має похідну в кожній точці  $x_0 \in A$ . Це позначається як  $f \in D(A)$ , де  $D(A)$  — множина диференційованих на  $A$  функцій.

### Односторонні похідні

Нехай  $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$ . Це рівносильно тому, що

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D_f : x_n < x_0, x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$$

Границя  $\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  називається лівосторонньою похідною  $f$  в точці  $x_0$ . Позначаємо її як  $f'(x)$ .

$$\text{Аналогічно, } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Приклади:*

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - 0}{x - 0} = +\infty \implies \nexists f'_n(x_0)$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

**Теорема. (Критерій диференційованості.)**

Нехай  $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap x_0 \in D_f$ . Тоді:

$$\exists f'(x_0) \iff \exists f' \exists f', f' = f'$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned} \exists f'(x_0) &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff \\ \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \exists \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\iff \exists f'(x_0), \exists f'(x_0), f'(x_0) = f'(x_0) \end{aligned}$$

*Зауваження.*

$$f' \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} f'(x)$$

Розглянемо параметрично задану функцію  $y(x)$ :

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \Psi(t) \end{cases}$$

$$y(x) = \varphi(\Psi^{-1}(x))$$

Часом виразити  $y$  через  $x$  може бути просто, як тут:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \iff y = x^{\frac{3}{5}}$$

Але буває, що не дуже просто:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 + t \end{cases} \iff y = ???$$

Але ж **так** хочеться знайти похідну...

Припустимо, що  $\exists \varphi'$  і  $\exists (\Psi^{-1})'$  і  $\Psi' \neq 0$ .

$$\text{Тоді } y'_x = \varphi'(\Psi^{-1}(x)) \cdot (\Psi^{-1})'(x) = \varphi'(t) \frac{1}{\Psi'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\Psi'(t)}$$

*Приклад:*

1. Знайти похідну  $y_x$

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \iff y = x^{\frac{3}{5}}$$

Ми уже знайшли, що  $y = x^{\frac{3}{5}}$ , отже:

$$y'_x = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} (t^5)^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} t^{-2}$$

Але давайте спробуємо *по-нормальному*, застосувавши нашу формулу:

$$y'_x = \frac{(t^3)'}{(t^5)'} = \frac{3t^2}{5t^4} = \frac{3}{5} t^{-2}$$

2.

$$\begin{cases} y = \cos^2 t \\ x = \sin^2 t \end{cases}$$
$$y'_x = \frac{2 \cos t (-\sin t)}{2 \sin t \cos t} = -1$$

Як цікавий факт можна помітити, що  $y = 1 - x$ , де  $x \in [0; 1]$

## Похідні вищих порядків



Кажуть, що порядок похідної є вищим, якщо цей порядок більше за 1.

Нехай  $f \in D((a, b))$ . Припустимо, що  $f'$  є диференційованою в точці  $x_0 \in (a, b)$ . Тоді функція  $f$  є двічі диференційованою в точці  $x_0$ , а число  $(f')'(x_0)$  називається **другою похідною функції  $f$**  в точці  $x_0$ . Вона позначається як  $f''(x_0)$ .

*Наприклад:*

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 \\f'(x) &= 3x^2 \\f''(x) &= (f')'(x) = 6x\end{aligned}$$

Аналогічно у функції  $f$  існує  $n$ -та похідна  $f^{(n)}(x)$  на проміжку  $(a, b)$  і вона є диференційованою в точці  $x_0 \in (a, b)$ , того  $f$  має  $(n+1)$ -шу похідну в точці  $x_0$ .

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}$$

*Приклад:*

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln x \\f'(x) &= \frac{1}{x} \\f''(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\f'''(x) &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = 2\frac{1}{x^3} \\f^{(4)}(x) &= -3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^4} = -6\frac{1}{x^4} \\f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n}\end{aligned}$$

Якщо  $f$  має  $n$ -ту похідну  $f^{(n)}(x)$  у кожній точці проміжку  $I$ , то кажуть, що  $f$  є  $n$  разів диференційованою і позначається це так:

$$f \in D^{(n)}(I)$$

Якщо при цьому  $f^n \in C(I)$ , то кажуть, що  $f \in C^{(n)}(I)$ , то кажуть, що  $f \in C^{(n)}(I)$ .

$$C(I) \subset D(I) \subset C^{(1)}(I) \subset D^{(1)}(I) \subset C^{(2)}(I) \subset \dots$$

*Домашня робота.* Якщо у функції є похідна, чи обов'язково похідна неперервна?

Якщо  $\forall n \in \mathbb{N} \exists f^{(n)}$  на  $I$ , то кажуть, що  $f$  — нескінченно диференційована на  $I$ . Позначається так:

$$f \in C^\infty(I)$$

### Дві властивості $n$ -тої похідної

**Теорема. (Лінійність  $n$ -тої похідної).** Нехай  $f, g \in D^{(n)}(I)$ , тоді

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g \in D^{(n)}(I)$$

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

**Теорема. Формула Лейбніца.** Нехай  $f, g \in D^{(n)}(I)$ , тоді:

$$f \cdot g \in D^{(n)}(I)$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

**Доведення.** Це вам нам Д/З. (Підказка: воно доводиться також само, як формула бінома Ньютона).

*Приклад:*

1. Обчислити  $n$ -ту похідну від  $f(x) = x^2 \ln x$ .

$$\begin{aligned} (x^2 \ln x)^{(n)} = & C_n^0 (x^2)^{(n)} \ln x + C_n^1 (x^2)^{(n-1)} (\ln x)^{(1)} + C_n^2 (x^2)^{(n-2)} (\ln x)^{(2)} + \dots + \\ & + \dots + C_n^{n-3} (x^2)^{(3)} (\ln x)^{(n-3)} + C_n^{n-2} (x^2)^{(2)} (\ln x)^{(n-2)} + C_n^{n-1} (x^2)^{(1)} (\ln x)^{(n-1)} + \\ & + C_n^n (x^2)^{(2)} (\ln x)^{(n-2)} \end{aligned}$$

Тепер варто помітити, що:

$$(x^2)^{(1)} = 2x$$

$$\begin{aligned}(x^2)^{(2)} &= 2 \\ (x^2)^{(3)} &= 0 \\ (x^2)^{(n)} &= 0, \quad n > 3\end{aligned}$$

Отже виходить, що наша сума дорівнює наступному:

$$C_n^{n-2} \frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} + C_n^{n-1} \frac{2x(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}} + C_n^n \frac{x^2(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

2. Обчислити  $\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(0)} &= \frac{1}{a-x} \\ \left(\frac{1}{a-x}\right)^{(1)} &= \frac{1}{(a-x)^2} \\ \left(\frac{1}{a-x}\right)^{(2)} &= \frac{2}{(a-x)^3} \\ \left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} &= \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}\end{aligned}$$

3. Обчислити  $n$ -ту похідну від  $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ .

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} \frac{1}{2-x} =$$

З формули Лейбніца:

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)} \left(\frac{1}{2-x}\right)^{(k)}$$

А тепер використовуємо формулу з прикладу 2.

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{(n-k)!}{(1-x)^{n-k+1}}\right) \left(\frac{(k!)}{(2-x)^{k+1}}\right)$$

Цікавий факт: конкретно у цьому завданні можна було зробити набагато простіше:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$

$$f^n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$$

Як обчислити похідну вищого порядку від параметрично заданої функції?

Ось *приклад*:

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{(t^2)'}{(t^3 + t)'} = \frac{2t}{3t^2 + 1}$$

Початкова система задавала залежність  $y$  від  $x$ . Тепер ми можемо побудувати систему залежності  $y'$  від  $x$ :

$$\begin{cases} y'_x(t) = \frac{2t}{3t^2+1} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y''_x = (y'_x)' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{2t}{3t^2+1}\right)'}{(t^3 + t)'} = \frac{-6t^2 + 2}{(3t^2 + 1)^3}$$

Тепер ми можемо побудувати залежність  $y''_x$  від  $x$ :

$$\begin{cases} y''_x(t) = \frac{-6t^2+2}{(3t^2+1)^3} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

І так далі...

## Диференціал функції

Функція  $f$  називається диференційованою в точці  $x_0$ , якщо:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Нехай  $x - x_0 = \Delta x$ . Тоді:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \\ \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= f'(x_0) + o(1) \end{aligned}$$

Домножимо все на  $\Delta x$ :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0) + o(\Delta x)$$

Отже,  $\Delta x f'(x_0)$  — головна частина приросту функції.

*Означення.* Лінійне відображення

$$L(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Називається диференціалом функції  $f$  в точці  $x_0$ . Це позначається так:

$$d_{x_0} f(h) = f'(x_0) \cdot h$$

*Приклад:*

$$f(x) = x^3, \quad x_0 = 1$$

$$f'(x_0) = 3$$

$$d_{x_0} f(h) = 3h$$

*Геометричний зміст диференціалу.* Диференціал задає рівняння прямої, яка паралельна дотичній до графіку функції у точці  $x_0$  і проходить через центр координат.

Розглянемо  $f(x) = x$ . Тоді:

$$f'(x_0) = 1, \quad \text{для } \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Тоді:

$$d_{x_0}x(h) = 1 \cdot h = h$$

А тепер нехай  $g$  — довільна диференційована в  $x_0$  функція:

$$(d_{x_0}g)(h) = g'(x_0) \cdot h = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x(h)$$

Якщо ми приберемо  $h$ , отримуємо:

$$d_{x_0}g = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x$$

Запис, який ще часто можна зустріти:

$$dg = g'(x_0)dx$$