Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 3.

Автор текста @bezkorstanislav
Если есть ошибки, пишите ему в телеграм
Афтар выражает благодарность @vic778 за многочисленные поправки

November 2019

Диференціальне числення функції однієї змінної

Означення похідної. Основні правила диференційонування

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деяка функція однієї змінної, $x_0 \in D_f,\ x_0 \in (D_f)'$
.

Означення. Якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то функція f називається **диференційованою** в точці x_0, а сама границя називається **похідною функції** f в точці x_0. І позначається $f'(x_0)$ або $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Зауваження 1. Для функції однієї змінної ми ототожнили диференційованість та існування похідної, що не завжди є правдою для функцій багатьох змінних.

Зауваження 2.

$$x - x_0 = \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$$

Отже, похідна дорівнює відношенню зміни приросту функції до приросту аргументу, що породжує цей приріст.

Зауваження 3. Із теорії границі функції, якщо функція f є диференційованою в точці x_0, то:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1) \iff$$

$$\iff f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Приріст функції є лінійним до приросту аргументу:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Отже, якщо має місце рівність:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \Longrightarrow \exists f'(x_0) = A$$

Теорема. (Необхідна умова диференційованості). Функція f є диференційованою в x_0 тільки тоді, коли f — неперервна в точці x_0. (Але не завжди неперервна функція є диференційованою)

Доведення. Щоб існувала похідна треба, щоб

$$f(x) - f(x_0) \to 0, x \to x_0$$

. З цього випливає, що f неперервна в точці x_0.

Теорема. (Диференційованість композиції функцій). Нехай дано функції f і g. Точка $x_0 \in D_{f\circ g},\ x_0 \in (D_{f\circ g})'$.

Якщо g диференційована в точці x_0, а f диференційована в точці $y_0 = g(x_0)$, то $f \circ g$ диференційована в точці x_0 і має місце рівність:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$$

Доведення.

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) =$$

$$= f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0) = f'(y_0)(g(x) - g(x_0)) + o(y - y_0) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(y - y_0) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))$$

Отже,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f'(y_0)(g'(x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0) + o(1)) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f'(y_0)g'(x_0)(1 + o(1)) + o(1) = f'(y_0)g'(x_0)$$

Теорема. (Лінійність похідної). Нехай f і g — диференційовані в точці x_0. Тоді $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Доведення.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha f(x)-\alpha f(x_0)}{x-x_0}+\frac{\beta g(x)-\beta g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\alpha\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\beta\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$$

Теорема. Похідна добутку. Нехай f і g диференційовані в точці x_0.

Тоді функція $f\cdot g$ теж диференційована в точці x_0, причому справедливе наступне співвідношення:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Доведення. За означенням:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}+\frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}=$$

Оскільки f — диференційована в точці x_0, то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

Абсолютно аналогічно $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$.

Окрім того f — диференційована в точці x_0, а значить f — неперервна в точці x_0, а значить:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

Отже:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}+\frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$$

Теорема. Похідна частки. Нехай f і g диференційовані в точці x_0 і $g(x_0)\neq 0$.

Тоді, $\frac{f}{g}$ теж диференційована в точці x_0 і $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доведення. Аналогічно. Це доведення на дз :).

Приклад. Обчислити похідну від функції f в точці x_0.

1. $f(x) = x^3$.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = \ldots = 3x_0^2$$

2. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

   (a) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \frac{x^3-8}{x-2} = 3\cdot 4 = 12$.

   (b) $x_0 \neq 2$. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = 3x_0^2$.

3. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

   (a) $x_0 \neq 2$. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = 3x_0^2$.

   (b) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-7}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{8-7}{2-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{0} = +\infty$.

   Похідна не може дорівнювати нескінченності, отже $\nexists f'(2)$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 2 \\ 12x-16, & x < 2 \end{cases}$

   Як **не треба** робити:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

   Як **треба** робити:

   Розглядаємо 3 випадки:

(a) $x_0 > 2$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = 3x_0^2$$

(b) $x_0 < 2$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 12$$

(c) $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 12$$

Отже, функція диференційована на всіх дійсній прямій.

Теорема. (Про диференційованість оберненої функції). Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — оборотна, то $x_0 \in D_f$ і $x_0 \in (D_f)'$, $y_0 = f(x_0)$. Якщо існує $f'(x_0) \neq 0$ і обернена функція f^{-1} — неперервна в точці y_0, то вона диференційовна в цій точці. Якщо, крім того, y_0 — гранична точка множини $E_f = D_{f^{-1}}$, то

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доведення. Лектор не дав:(

Зауваженн. Функція f називається диференційованою на множині A якщо f має похідну в кожній точці $x_0 \in A$. Це позначається як $f \in D(A)$, де $D(A)$ — множина диференційованих на A функцій.

Односторонні похідні

Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$. Це рівносильно тому, що

$$\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D_f : x_n < x_0,\ x_n \to x_0, n \to \infty$$

Границя $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ називається **лівосторонньою похідною** f в точці x_0. Позначаємо її як $f'_{\text{л}}(x_0)$.

Аналогічно, $f'_{\text{п}}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Приклади:

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

$$f'_{л}(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$f'_{п}(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty \Longrightarrow \nexists f'_{п}(x_0)$$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

$$f'_{л}(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$f'_{п}(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

Теорема. (Критерій диференційованості.)
Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$. Тоді:

$$\exists f'(x_0) \Longleftrightarrow \exists f'_{л}(x_0),\ \exists f'_{п}(x_0),\ f'_{л}(x_0) = f'_{п}(x_0)$$

Доведення.

$$\exists f'(x_0) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\ \exists \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\ \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Longleftrightarrow \exists f'_{п}(x_0),\ \exists f'_{л}(x_0),\ f'_{п}(x_0) = f'_{л}(x_0)$$

Зауваження.

$$f'_{л}(x_0) \neq \lim_{x \to x_0-} f'(x)$$

Розглянемо параметрично задану функцію $y(x)$:

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \Psi(t) \end{cases}$$

$$y(x) = \varphi(\Psi^{-1}(x))$$

Часом виразити y через x може бути просто, як тут:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \implies y = x^{\frac{3}{5}}$$

Але буває, що не дуже просто:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 + t \end{cases} \iff y = ???$$

Але ж **так** хочеться знайти похідну...

Припустимо, що $\exists \varphi'$ і $\exists (\Psi^{-1})'$ і $\Psi' \neq 0$.

$$\text{Тоді } y'_x = \varphi'(\Psi^{-1}(x)) \cdot (\Psi^{-1})'(x) = \varphi'(t)\frac{1}{\Psi'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\Psi'(t)}$$

Приклад:

1. Знайти похідну y_x

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \iff y = x^{\frac{3}{5}}$$

Ми уже знайшли, що $y = x^{\frac{3}{5}}$, отже:

$$y'_x = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}(t^5)^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}t^{-2}$$

Але давайте спробуємо *по-нормальному*, застосувавши нашу формулу:

$$y'_x = \frac{(t^3)'}{(t_5)'} = \frac{3}{5}\frac{t^2}{t^4} = \frac{3}{5}t^{-2}$$

2.

$$\begin{cases} y = \cos^2 t \\ x = \sin^2 t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{2\cos t(-\sin t)}{2\sin t \cos t} = -1$$

Як цікавий факт можна помітити, що $y = 1 - x$, де $x \in [0; 1]$

Похідні вищих порядків

Кажуть, що порядок похідної є вищим, якщо цей порядок більше за 1.

Нехай $f \in D((a,b))$. Припустимо, що f' є диференційованою в точці $x_0 \in (a,b)$. Тоді функція f є двічі диференційованою в точці x_0, а число $(f')'(x_0)$ називається **другою похідною функції** f в точці x_0. Вона позначається як $f''(x_0)$.

Наприклад:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = (f')'(x) = 6x$$

Аналогічно у функції f існує $n-$та похідна $f^{(n)}(x)$ на проміжку (a,b) і вона є диференційованою в точці $x_0 \in (a,b)$, того f має $(n+1)$-шу похідну в точці x_0.

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})|_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}$$

Приклад:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = 2\frac{1}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^4} = -6\frac{1}{x^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

Якщо f має n-ту похідну $f^{(n)}(x)$ у кожній точці проміжку I, то кажуть, що f є n разів диференційованою і позначається це так:

$$f \in D^{(n)}(I)$$

Якщо при цьому $f^{(n)} \in C(I)$, то кажуть, що $f \in C^{(n)}(I)$.

$$C(I) \supset D(I) \supset C^{(1)}(I) \supset D^{(1)}(I) \supset C^{(2)}(I) \supset \dots$$

Домашня робота. Якщо у функції є похідна, чи обов'язково похідна неперервна?

Якщо $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists f^{(n)}$ на I, то кажуть, що f — нескінченно диференційована на I. Позначається так:

$$f \in D^{\infty}(I)$$

Дві властивості n-тої похідної

Теорема. (Лінійність n-тої похідної). Нехай $f, g \in D^{(n)}(I)$, тоді

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \alpha f + \beta g \in D^{(n)}(I)$$

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

Теорема. Формула Лейбніца. Нехай $f, g \in D^{(n)}(I)$, тоді:

$$f \cdot g \in D^{(n)}(I)$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Доведення. Це вам нам Д/З. (Підзказка: воно доводиться так само, як формула бінома Ньютона).

Приклад:

1. Обчислити n-ту похідну від $f(x) = x^2 \ln x$.

$$(x^2 \ln x)^{(n)} = C_n^0 (x^2)^{(n)} \ln x + C_n^1 (x^2)^{(n-1)} (\ln x)^{(1)} + C_n^2 (x^2)^{(n-2)} (\ln x)^{(2)} + \dots +$$
$$+ \dots + C_n^{n-3} (x^2)^{(3)} (\ln x)^{(n-3)} + C_n^{n-2} (x^2)^{(2)} (\ln x)^{(n-2)} + C_n^{n-1} (x^2)^{(1)} (\ln x)^{(n-1)} +$$
$$+ C_n^n (x^2)^{(0)} (\ln x)^{(n)}$$

Тепер варто помітити, що:

$$(x^2)^{(1)} = 2x$$
$$(x^2)^{(2)} = 2$$
$$(x^2)^{(3)} = 0$$
$$(x^2)^{(n)} = 0,\ n > 3$$

Отже виходить, що наша сума дорівнює наступному:

$$C_n^{n-2}\frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}+C_n^{n-1}\frac{2x(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}+C_n^n\frac{x^2(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

2. Обчислити $(\frac{1}{a-x})^{(n)}$

$$(\frac{1}{a-x})^{(0)} = \frac{1}{a-x}$$
$$(\frac{1}{a-x})^{(1)} = \frac{1}{(a-x)^2}$$
$$(\frac{1}{a-x})^{(2)} = \frac{2}{(a-x)^3}$$
$$(\frac{1}{a-x})^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

3. Обчислити n-ту похідну від $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}\frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x}\frac{1}{2-x} =$$

З формули Лейбніца:

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(n-k)}\Big(\frac{1}{2-x}\Big)^{(k)}$$

А тепер використовуємо формулу з прикладу 2.

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(\frac{(n-k)!}{(1-x)^{n-k+1}}\Big)\Big(\frac{(k!)}{(2-x)^{k+1}}\Big)$$

Цікавий факт: конкретно у цьому завданні можна було зробити набагато простіше:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$$

Як обчислити похідну вищого порядку від параметрично заданої функції?

Ось *приклад*:

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{(t^2)'}{(t^3+t)'} = \frac{2t}{3t^2+1}$$

Початкова система задавала залежність y від x. Тепер ми можемо побудувати систему залежності y' від x:

$$\begin{cases} y'_x(t) = \frac{2t}{3t^2+1} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y''_x = (y'_x)' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{2t}{3t^2+1}\right)'}{(t^3+t)'} = \frac{-6t^2+2}{(3t^2+1)^3}$$

Тепер ми можемо побудувати залежність y''_x від x:

$$\begin{cases} y''_x(t) = \frac{-6t^2+2}{(3t^2+1)^3} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

І так далі...

Диференціал функції

Функція f називається диференційованою в точці x_0, якщо:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Нехай $x - x_0 = \Delta x$. Тоді:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)$$

Домножимо все на Δx:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0) + o(\Delta x)$$

Отже, $\Delta x f'(x_0)$ — головна частина приросту функції.
Означення. Лінійне відображення

$$L(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Називається **диференціалом функції** f в точці x_0. Це позначається так:

$$d_{x_0} f(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Приклад:

$$f(x) = x^3, \ x_0 = 1$$
$$f'(x_0) = 3$$
$$d_{x_0} f(h) = 3h$$

Геометричний зміст диференціалу. Диференціал задає рівняння прямої, яка паральна дотичній до графіку функції у точці x_0 і проходить через початок координат.

Розглянемо $f(x) = x$. Тоді:

$$f'(x_0) = 1, \text{ для } \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Тоді:

$$d_{x_0} x(h) = 1 \cdot h = h$$

А тепер нехай g — довільна диференційована в x_0 функція:

$$(d_{x_0}g)(h) = g'(x_0) \cdot h = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x(h)$$

Якщо ми приберемо h, отримуємо:

$$d_{x_0}g = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x$$

Запис, який ще часто можна зустріти:

$$dg = g'(x_0)dx$$

Зауваження. Диференціал функції f у точці x_0 $d_{x_0}f$ ще позначають $df|_{x_0}$, $df(x_0)$.

Інколи точку x_0 взагалі не пишуть і пишуть просто df.

Зауваження. З теореми про лінійність похідної, похідної частки, добутку та суперпозиції випливають наступні правила дій з диференціалом:

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$
$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$
$$d\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$
$$d(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot dg(x)$$

Ці властивості справедливі при виконанні умов відповідних теорем.

Приклад:

$$f = \ln(e^{u^2} + v)$$

$$df = d\ln(e^{u^2} + v) = \frac{1}{e^{u^2} + v} \cdot d(e^{u^2} + v) = \frac{de^{u^2} + dv}{e^{u^2} + v} =$$
$$= \frac{e^{u^2} \cdot du^2 + dv}{e^{u^2} + v} = \frac{e^{u^2} \cdot 2 \cdot u \cdot du + dv}{e^{u^2} + v}$$

Домашнє завдання. Познайомитися з поняттям подвійної похідної та властивостями другого диференціалу.

(Лектор сказав, що такого на іспиті не буде і взагалі ця тема буде використана у другому семетрі, тож не зробиши цього багато не втратите.)

Теорема про середні

Означення. Нехай $x_0 \in D'_f \cap D_f$.

Функція f має **локальний максимум** в точці x_0, якщо $\exists$ деяких ε-окіл точки x_0 $U_\varepsilon(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$:

$$\forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f)\ f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогічно означається локальний мінімум.

Означення. Якщо в точці x_0 f має локальний максимум і при цьому

$$\forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f) \setminus \{x_0\}\ f(x) < f(x_0)$$

Тоді кажуть, що в точці x_0 f має **строгий локальний максимум**.

Теорема Ферма. Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$.

Якщо f має локальний екстремум (тобто мінімум або максимум) в точці x_0 і є диференційованою в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Згідно критерію диференційованості:

$$\exists f'(x_0) \Longleftrightarrow \exists f'_{\text{л}}(x_0), f'_{\text{п}}(x_0), f'_{\text{л}}(x_0) = f'_{\text{п}}(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Розглянемо випадок, коли f має локальний мінімум. Випадок з максимумом доводиться аналогічно.

Якщо f має локальний мінімум в точці x_0, то:

$$\forall x \in U_\varepsilon \cap D_f$$

$$f(x_0) \leq f(x) \Longrightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$$

При $x \to x_0-$:

$$x - x_0 < 0$$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \text{ отже:}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{для } \forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f), \text{ отже:}$$

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Аналогічно

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$0 \geq \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Отже:

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Longrightarrow$$

$$f'(x_0) = 0$$

Зауваження. Зворотнє твердження не є правдивим. Наприклад функція $f = x^3$ не має екстремуму в $x_0 = 0$, але $f'(0) = 0$.

Теорема Ролля. Нехай $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$.

$$\text{Якщо } f(a) = f(b), \text{ то } \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$$

Доведення. Використаємо теорему Вейєрштрасса. Тоді f досягає на $[a, b]$ свого максимального і мінімального значення. Нехай

$$f(x^*) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$f(x_*) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

Якщо хоча б одне з цих чисел x^*, x_* потрапляє на інтервал (a, b), то виконано всі умови теореми Ферма, а отже f' в цій точці дорівнює нулю за теоремою Ферма.

Якщо обидві точки не належать інтервалу (a, b), то $\{x^*, x_*\} \subset \{a, b\}$.

Зважаючи, що $f(a) = f(b)$, тоді

$$f(x^*) = f(x_*) \Longrightarrow f \text{ є сталою на } [a, b]$$

Тоді $\forall \xi \in (a, b)\ f'(\xi) = 0$

Приклад: Нехай $f \in D([0, 1])$ і $f(0) = f(1) = 0$. Тоді $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ рівняння

$$f'(x) + \alpha f(x) = 0$$

Має розв'язок на $[0, 1]$. *Доведення.* Розглянемо функцію

$$F(x) = e^{\alpha x} f(x)$$

$$F(0) = 0,\ F(1) = 0$$

Тоді за теоремою Ролля $\exists \xi \in [a,b]$:

$$F'(\xi) = 0$$

$$F'(x) = e^{\alpha x} \cdot f'(x) + \alpha e^{\alpha x} \cdot f(x)$$
$$e^{\alpha \xi} \cdot f'(\xi) + \alpha e^{\alpha \xi} \cdot f(\xi) = 0$$

Поділимо вираз на $e^{\alpha \xi}$.

$$f'(\xi) + \alpha f(\xi) = 0$$

Теорема Дарбу. Нехай $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ і $f'_{\text{п}}(a) \cdot f'_{\text{л}}(b) < 0$. Тоді $\exists \xi : f'(\xi) = 0$.

Доведення. Використаємо теорему Вейерштрасса. Тоді f досягає на $[a,b]$ свого максимального і мінімального значення. Нехай

$$f(x^*) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$f(x_*) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

Якщо хоча б одне з цих чисел x^*, x_* потрапляє на інтервал (a,b), то виконано всі умови теореми Ферма, а отже f' в цій точці дорівнює нулю за теоремою Ферма.

Якщо обидві точки не належать інтервалу (a,b), то $\{x^*, x_*\} \subset \{a,b\}$.

Тепер у нас можливі два випадки:

- Якщо $x^* = x_*$, то за теоремою Ролля все працює.
- Якщо $x^* \neq x_*$.

  Нехай $x^* = a,\ x_* = b$, тоді:

$$f'_{\text{п}}(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$$x - a > 0,\ f(x) - f(a) \leq 0 \Longrightarrow$$
$$f'_{\text{п}}(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

  Аналогічно

$$f'_{\text{л}}(b) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$$

Виходить, що:

$$f'_{\text{п}}(a) \cdot f'_{\text{л}}(b) \geq 0$$

Що суперечить умові.

Теорема про проміжні значення похідної. Нехай $f \in D([a,b])$. Тоді f' приймає всі значення між $f'_{\text{п}}(a)$ та $f'_{\text{л}}(b)$.

Доведення. Нехай α — дійсне число між $f'_{\text{п}}(a)$ та $f'_{\text{л}}(b)$. Розглянемо

$$F(x) = f(x) - \alpha \cdot x$$

$$F \in D([a,b])$$

$$F'_{\text{п}}(a) = f'_{\text{п}}(a) - \alpha < 0$$

$$F'_{\text{л}}(b) = f'_{\text{л}}(b) - \alpha > 0$$

Отже, ми точно знаємо, що

$$F'_{\text{п}}(a) \cdot F'_{\text{л}}(b) < 0$$

Отже, всі умови теореми Дарбу виконано, отже:

$$\exists \xi : F'(\xi) = 0 \Longrightarrow f'(\xi) - \alpha = 0 \Longrightarrow f'(\xi) = \alpha$$

Теорема Лагранжа. Нехай $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$.

$$\text{Тоді } \exists \xi \in (a,b) :$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

$$F \in C([a,b]) \cap D((a,b))$$

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a =$$

$$\frac{bf(a) - af(a) - af(b) + f(a)a}{b - a} =$$

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Аналогічними перетвореннями отримуємо

$$F(b) = \frac{-f(b)a + f(a)b}{b - a}$$

Виходить, що $F(a) = F(b)$

Отже, за теоремою Ролля $\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Longrightarrow$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Наслідок. Нехай $f \in D([a, b])$ і $\forall x \in (a, b)\ f'(x) = 0$, тоді

$$f = const \text{ на } (a, b)$$

Доведення. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$.
Використаємо теорему Лагранжа для $[x_1, x_2]$

$$\text{Тоді } \exists \xi \in (x_1, x_2) :$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$$

$$f'(\xi) = 0 \Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Приклад. Довести, що для $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ задовольняє усі умови теореми Лагранжа на $[x, y]$. Тоді:

$$\exists \xi \in (x, y) :$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y}{x - y} = (\operatorname{arctg} x)'|_{x=\xi} = \frac{1}{1 + \xi^2}$$

$$\Big|\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y}{x - y}\Big| = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

Домноживши обидвы частини на $|x-y|$ отримаємо:

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x-y|$$

Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа. Якщо $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$, то завжди можна провести дотичну до функції f, паралельну до відрізка, о сполучає точки $(a, f(a))$ та $(b, f(b))$.

Теорема Коші. Нехай $f, g \in C([a,b]) \cap D((a,b))$. Тоді $\exists \xi \in (a,b)$:

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(a) - g(b))f'(\xi)$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

1. $F \in C([a,b]) \cap D((a,b))$

2. $F(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - g(b)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$

   $F(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) + f(b)g(a) - g(b)f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$ Отже, $F(a) = F(b)$.

Тоді за теоремою Ролля

$$\exists \xi : F'(\xi) = 0$$

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

Наслідок. Якщо в умовах теореми Коші $\forall x \in (a,b)$ $g'(x) \neq 0$, то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Чому у нас не буде раптом ділення на нуль?

Очевидно, що з $\forall x \in (a,b)$ $g'(x) \neq 0$ слідує те, що $g'(\xi) \neq 0$.

Подивимось на $g(b) - g(a)$. Якби $g(b) - g(a) = 0$, то за теоремою Ролля $\exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$, що суперечить умові.

Теорема про неперервність похідної. Нехай $f \in (D((a,b)) \setminus \{x_0\})$, $f \in C((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$.

$$\text{Якщо } \exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \lambda \Longrightarrow \exists f'(x_0) = \lambda$$

Доведення. Розглянемо проміжки $[x_0, x]$, $[x, x_0]$.

- Розглянемо $[x_0, x]$. За теоремою Лагранжа:

$$\exists \xi \in [x_0, x] : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$x_0 < \xi < x$$

Тож при $x \to x_0$, $\xi \to x_0$. Отже:

$$f'(\xi) \to \lambda \implies$$

$$\implies \exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$$

- Аналогічно, розглядаючи проміжок $[x, x_0]$ доводимо, що

$$\exists \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$$

Теорема. Типи розривів похідної.
Нехай $f \in D((a, b))$ тоді $\forall x \in (a, b)$.
f' або є неперервною в точці x або має розрив другого роду.
Доведення. Розглянемо

$$f'(x_0 + 0), \ f'(x_0 - 0)$$

1. Якщо $f'(x - 0)$ або $f'(x + 0)$ не існує або дорівнює нескінченності, то f' має розрив другого роду.

2. Якщо $\exists f'(x - 0)$ і $\exists f'(x + 0)$.

   Тоді за попередньою теоремою

$$\exists f'_{\text{л}}(x) = \lim_{x \to x_0-} f'(x), \ \exists f'_{\text{п}}(x) = \lim_{x \to x_0+} f'(x)$$

   - Якщо $f'_{\text{л}}(x) \neq f'_{\text{п}}(x)$. Тоді $\nexists f(x_0)$. Протиріччя.
   - Якщо $f'_{\text{л}}(x) = f'_{\text{п}}(x) \implies \exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Тоді за попередньою теоремою $\exists f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Отже, f' — неперервна в точці x_0.

Приклад.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$
При $x \neq 0$:
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},\ x \neq 0$$
Інакше:
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} =$$
$$= \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$
Чи буде f' неперервна в точці x_0?
$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x \sin frac1x - \cos \frac{1}{x}) = -\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} =$$
$$-\lim_{y \to \infty} \cos y \text{ — не існує}$$
Отже $f'(x)$ має розрив другого роду у точці 0.

Правило Лопіталя. Нехай $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Теорема. Нехай $f, g \in D((a, b))$ і прицьому:

1.
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$$

2.
$$\exists \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

3.
$$g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$$

$$\text{Тоді} \exists \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Доведення. Доозначимо функції f і g у точці a. Розглянемо
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \end{cases}$$

Аналогічно

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ g(x), & x \in (a,b) \end{cases}$$

F та G задовольняють умови наслідку з теореми Коші на проміжку $[a,x]$, $x \in (a,b)$. Тоді $\exists \xi$:

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$x \to a+,\ a < \xi < x, \Longrightarrow \xi \to a+ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{\xi \to a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Longrightarrow \exists \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Зауважте, що слідування йде тільки в одну сторону.

Аналогічна теорема при $x \to +\infty$: **Теорема.** $f, g : [a, +\infty] \to \mathbb{R},\ f, g \in D((a, +\infty))$.

1. $$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

2. $$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

3. $$\forall x \in (a, +\infty) g'(x) \neq 0$$

$$\text{Тоді } \exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Зауваження. Умову $\lim f = \lim g = 0$ можна замінити на $\lim f = \lim g = \infty$ і правило Лопіталя теж буде виконуватись. Головне, щоб функції прямували до 0 або ∞ одночасно.

Приклад:

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{e^x} - 1$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

- $$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Формула Тейлора

Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R},\ D_f=(a,b)$.
Многочлен

$$P_{n,x}(x_0)=\sum_{k=0} n\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot(x-x_0)^k=$$

$$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

називається **многочленом Тейлора** n-того порядку для функції f в точці x_0.

$$r(x)=f(x)-P(x)$$

Називається **залишковим членом**.

$$f(x)=P(x)+r(x)$$

Теорема. Формула Тейлора із залишкоим членом у формі Пеано.

Нехай $f\in D^{(n)}((a,b))\cap D^{(n+1)}(\{x_0\}),\ x_0,x\in(a,b)$. Тоді при $x\to x_0$:

$$r(x)=o((x-x_0)^n)$$

Тобто:

$$f(x)=\sum_{k=0} n\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

Доведення.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{k=0} n\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-\sum_{k=0} n\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot(x-x_0)^k)'}{((x-x_0)^n)'}$$

$$\Big(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\Big)' = \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}, \text{ отже:}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f(x)-\sum_{k=0} n\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot(x-x_0)^k)'}{((x-x_0)^n)'} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)-\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(f'(x)-f'(x_0)-\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1})'}{(n(x-x_0)^{n-1})'} =$$

$$= \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{n-1}(x)-f^{n-1}(x_0)-\frac{f^{n}(x_0)}{1}(x-x_0)}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\Big)$$

Оскільки $f \in D^{(n+1)}(\{x_0\})$, то:

$$\exists f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

Отже:

$$\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\Big) =$$

$$\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}(f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)) = 0$$

Доведено.

Теорема. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа. Нехай $f \in D^{(n+1)}((a,b)),\ x, x_0 \in (a,b)$, тоді:

$$\exists \xi \in (x_0, x):$$

$$r(x) = \frac{f^(n+1)(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Тобто

$$f(x) = \sum_{k=0} n\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot(x-x_0)^k + \frac{f^(n+1)(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Теорема. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Коші.

$$\exists \xi \in (x, x_0):$$

$$r(x) = \frac{\theta^n}{n!}(x - x_0)^n f^{(n+1)}(\xi)$$

Що таке θ? Це деяке число, яке належить проміжку $[0, 1]$. Завдяки цьому виходить, що:

$$\theta x_0 + (1 - \theta)x \in [x, x_0]$$

Оскільки $\xi \in (x, x_0)$, то:

$$\xi = \theta x_0 + (1 - \theta x,\ \theta \in (0, 1)$$

Домашнє завдання:

1. Виразити θ через ξ і позбавити форму Коші від неї.

2. Прочитати доведення цих двох теорем.

3. Послабити умову теореми.

Приклад: При $x_0 = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + r(x),\ x \in [0, 1]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin \xi}{4!}x^4$$

$$\sin x - (x - \frac{x^3}{3!}) = \left|\frac{\sin \xi}{4!}x^4\right| \leq \frac{1}{24}$$

Дослідження функцій за допомогою похідних

Нехай $f : (a, b) \to \mathbb{R},\ D_f = (a, b)$.
Теорема. Нехай $f \in D((a, b))$. Тоді:

1. $f \nearrow$ (нестрого зростає) на $(a, b) \Longleftrightarrow \forall x \in (a, b)\ f'(x) \geq 0$.

2. $f \searrow$ (нестрого спадає) на $(a, b) \Longleftrightarrow \forall x \in (a, b)\ f'(x) \geq 0$.

3. $f \uparrow$ (строго зростає) на $(a, b) \Longleftarrow \forall x \in (a, b)\ f'(x) \geq 0$.

4. $f \downarrow$ (строго спадає) на $(a, b) \Longleftarrow \forall x \in (a, b)\ f'(x) \geq 0$.

Доведення.

1. $\Longrightarrow$. $\forall x_0 \in (a, b)$:
$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
Оскільки функція нестрого зростає, то при $x > x_0$:
$$f(x) - f(x_0) \geq 0,\ x - x_0 > 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$
Аналогічно:
$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$
Отже й $f'(x) \geq 0$.

   $\Longleftarrow$. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$: Нехай $x_1 < x_2$. За теоремою Лагранжа можна записати наступне:
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$
Оскільки $f'(\xi) \geq 0,\ x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$

   Отже, при $x_1 < x_2$ $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Longleftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, що й треба було довести.

2. Доводиться абсолютно аналогічно з попереднім.

3. $\Longleftarrow$. Доводиться аналогічно з 1. Але, обернена твердження ($\Longrightarrow$) тепер не є правдою, бо, наприклад:
$$f(x) = x^3 \text{— строго зростнає на } \mathbb{R}, \text{ але:}$$
$$f'(x) = 2x^2 \Longrightarrow f'(0) = 0$$
Отже, навіть якщо функція строго зростає, f' все одно може набувати нульове значення.

4. Абсолютно аналогічно з попереднім.

Означення. Функція f називається зростаючою в точці x_0, якщо:

$$\exists \varepsilon > 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)\ f(x) > f(x_0)$$
$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)\ f(x) < f(x_0)$$

Аналогічно означується спадна, неспадна та зростаюча функції у точці

Теорема. Якщо $f'(x_0) > 0$, то функція зростає в точці x_0.
Доведення.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Longrightarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Отже:

$$x < x_0 \Longrightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Longleftrightarrow f(x) < f(x_0)$$
$$x > x_0 \Longrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Longleftrightarrow f(x) > f(x_0)$$

Доведення рівностей та нерівностей

1. Довести, що $\forall a, b\ a^2 + b^2 = (a - b)(a + b)$.

   Розглянемо функцію $f(x) = x^2 - b^2 - (x - b)(x + b)$. Тепер нам треба довести, що $\forall x\ f(x) = 0$.

   $$f'(x) = 2x - (x + b + x - b) = 2x - 2x = 0 \Longrightarrow f(x) = const \in \mathbb{R}$$

   Тепер нам достатньо перевірити значення функції в будь-якій точці. Нехай це буде точка b:

   $$f(b) = b^2 - b^2 - (b - b)(b + b) = 0 - 0 = 0$$

2. Довести, що

   - $\sin x \leq x,\ x > 0$
   - $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2},\ x > 0$

- $f(x) = x - \sin x$. Треба довести, що $f(x) \geq 0$ для всіх $x > 0$.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \Longrightarrow f(x) \text{ — неспадна. Отже:}$$

$$\min f(x) = f(0)$$
$$\forall x \geq 0 \ \ f(x) \geq f(0) = 0$$

- Треба довести, що $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0,\ x > 0$.

$$f'(x) = e^x - 1 - x$$

Позначимо нову функцію $g(x)$ наступним чином:

$$g(x) = e^x - 1 - x$$

$$g'(x) = e^x - 1 > 0 \ \forall x > 0$$

Це означає, що $g'(x) > 0 \Longrightarrow g(x)$ — строго монотонно зростаюча на проміжку $(0, +\infty)$.

$$g(x) \in C(\mathbb{R})$$
$$g(x) > g(0) = 0$$

Отже $g(x) > 0 \ \forall x > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \ \forall x > 0$.

$$f(x) \in C(\mathbb{R}), \text{ а отже:}$$

$$f(x) > f(0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0 \ \forall x > 0$$

3. Довести, що
$$\frac{2}{2x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}),\ x > 0$$

Є два способи:

- $$f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{2}{2x+1}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Отже, лишилося лише довести, що $f'(x) < 0$ при $x > 0$. Це ми можемо зробити аналогічно з минулими прикладами.

- Замінимо x на іншу змінну y наступним чином:

$$y = \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$$

$$\frac{2}{\frac{2}{y}+1} < \ln(1+y) \Longleftrightarrow \ln(1+y) > \frac{2y}{2+y}$$

$$f(y) = \ln(1+y) - \frac{2y}{2+y}$$

$$f(0) = 0$$

Отже, нам варто довети, що $f'(y) > 0$ при $y > 0$.

Означення. Кажуть, що f змінює знак з $+$ на $-$ в точці x_0, якщо:

$$\exists \varepsilon > 0 :$$

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)\ f(x) > 0$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)\ f(x) < 0$$

Аналогічно означується зміна знаку з $-$ на $+$.

Наприклад,

- x^3 змінує знак з мінуса на плюс у точці 0.
- $\sin x$ змінює знак з плюса на мінус у точці $\frac{\pi}{2}$.
- Функція $x^2 \sin(\frac{1}{x})$ в точці $x_0 = 0$ не змінює знак, бо ми не можемо визначити точне ε з означення зміни знаку. Хоча, звичайно, ця функція не є знакосталою.

Означення. Точка x_0 називається стаціонарною, якщо $f'(x_0) = 0$.

Теорема. (Перша достатня умова екстремуму). Нехай $f \in D(I_\varepsilon(x_0)) \setminus \{x_0\}$ і $f \in C(\{x_0\})$.

Якщо f' в точці x_0 змінює знак з мінуса на плюс, то f має в точці x_0 локальний мінімум, а якщо f змінює знак з плюса на мінус, то в точці x_0 f має локальний максимум.

Доведення. $\forall x \in I_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ розглянемо проміжок $[x_0, x]$. За теоремою Лагранжа:

$$\exists \xi \in (x_0, x) :$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

Якщо $x < x_0 \Longrightarrow x - x_0 < 0$, при цьому на проміжку (x, x_0) f' примає значення менше 0, отже $f'(\xi) < 0$.

$$f'(\xi) < 0,\ x - x_0 < 0 \Longrightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > 0$$

. Отже, $f(x) > f(x_0)$.

Аналогічно доводиться, що на проміжку $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ $f(x) > f(x_0)$.

Отже, $\forall x \in I_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ $f(x) - f(x_0) > 0$, тобто x_0 — точка локального максимуму.

Цікавий випадок: До функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Дану теорему при $x_0 = 0$ застосувати не можемо, бо не можемо сказати, як вона змінює знак у точці 0.

До речі лектор сказав, що ця функція це якийсь **жарт**, тож її на модулі **не буде**.

Теорема. (Друга достатня умова екстремуму). Нехай в стаціонарній точці x_0 $\exists f''(x_0)$.

- Якщо $f''(x_0) > 0$, то в точці x_0 функція f має локальний мінімум.
- Якщо $f''(x_0) < 0$, то в точці x_0 функція f має локальний максимум.

Доведення. Доведемо для випадку $f''(x_0) > 0$. Випадок $f''(x_0) < 0$ доводиться аналогічно.

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

$$\text{Якщо для деякої функції } \Phi \lim_{x \to x_0} \Phi(x) > 0, \text{ то}$$

$$\exists \varepsilon : \forall x \in I_\varepsilon(x_0)\ \Phi(x) > 0$$

У нашому випадку виходить, що:

$$\exists \varepsilon : \forall x \in I_\varepsilon(x_0)\ \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

- Якщо $x > x_0$, то $f'(x) - f'(x_0) > 0$
- Якщо $x < x_0$, то $f'(x) - f'(x_0) < 0$

Оскільки x_0 — стаціонарна точка, то $f'(x_0) = 0$, отже:

- Якщо $x > x_0$, то $f'(x) > 0$
- Якщо $x < x_0$, то $f'(x) < 0$

Отже, f' змінює знак з $-$ на $+$ у точці x_0. З попередньої теореми отримуємо, що в f має у точці x_0 локальний мінімум.