Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 2.

Автор текста @bezkorstanislav
Если есть ошибки, пишите ему в телеграм
Афтар выражает благодарность @vic778 за многочисленные поправки

October 2019

Границя та неперервність функції

Означення. Точка x_0 називаться **граничною** для множини A якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ J_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing, \text{ де } J_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$$

Зауваження. Якщо x_0 — гранична точка для A, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ |J_\varepsilon(x_0) \cap A| = \infty$$

Більше того, x_0 є граничною для $A \iff$ існує послідовність $\{x\}_{n=1}^{+\infty} : x_n \subset \subset A, x_i \neq x_0, \ x_n \to x_0$.

$$(\textit{Точки дотику}) = (\textit{Граничні точки}) \cup (\textit{Ізольовані точки})$$

Ізользовані точки — це такі точки, які належать множині, але не є граничними.

Якщо x_0 не є граничною для A, то:

$$\exists \varepsilon > 0 \ J_\varepsilon(x_0) \cap A = \varnothing$$

Приклад:

$$A = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \middle| \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Єдина гранична точка множини A — точка 0.

Сукупність всіх граничних точок множини A називається **похідною множиною** A'.

Нехай дана функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і точка $x_0 \in D'_f$ (x_0 є граничною точкою D_f).

Означення границі функції за Гейне. Якщо $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \ x_n \in D_f, \ x_n \neq x_0, \ x_n \to x_0$ маємо $f(x_n) \to l$, то число l називається границею функції f в точці x_0. Позначається так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Той факт, що $x_n \neq x_0$ є дуже важливим.

Приклад

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{Якщо } x \neq 2 \\ 1, & \text{Якщо } x = 2 \end{cases}$$

$$x_n \to 2,\ x_n \neq 2 \Rightarrow f(x_n) = 0 \to 0 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 0$$

Якби означення було б без умови $x_n \neq x_0$, то $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ або $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$. (Тобто границі не було б).

Зауваження. У загальному випадку $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ніяким чином не залежить від $f(x_0)$.

Означення. Якщо $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in D_f,\ x_n \to x_0$ та $f(x_n) \to l$, то число l називається **частковою границею** функції у точці x_0.

Приклад:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

$$\nexists \lim_{x\to 0} f(x), \text{ але існують, наприклад, послідовності:}$$

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \to 0,\ \forall n\ f(x_n) = 0 \Rightarrow f(x_n) \to 0$$

$$x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0,\ \forall n\ f(x_n) = 1 \Rightarrow f(x_n) \to 1$$

Всі числа з інтервалу $[-1;1]$ є частковими границями функції $f(x)$ при $x \to 0$.

Означення границі функції за Коші:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in D_f,\ x, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Зауваження. Означення наведене вище працює для дійсного числа x_0. Означення для нескінченності у загальному випадку виглядає так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0 :$$

$$\forall x \ |x| > M \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Теорема. Озчення границі функції за Коші і за Гейне еквівалентні.
Доведення. Самі знайдете :)

Теорема про арифметичні дії з границями функцій. Нехай x_0 є граничною точкою для $D_f \cap D_g$. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha, \ \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \beta$. Тоді:

$$\exists \lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta$$

$$\text{Якщо } \beta \neq 0, \text{ то } \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Доведення. Якщо я хочу обчислити $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in D_f, \ x_n \to x_0, \ x_n \neq x_0 \ f(x_n) \to \alpha, g(x_n) \to \beta$$

.

З теореми про арифметичні дії з послідовностями отримуємо:

$$f(x_n) + g(x_n) \to \alpha + \beta$$

.

Інші твердження доводяться за тим же принципом.
Теорема про границю композиції

$$\text{Нехай } \lim_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0, \ \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \ t_0 \in D'_{f\circ\varphi}, \text{ тоді:}$$

$$\lim_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = y_0$$

Доведення:

$$\text{Розглянемо } \forall \{t_n\}_{n=1}^{\infty} : t_n \in D_{f\circ\varphi}, t_n \to t_0, t_n \neq t_0$$

$$x_n = \varphi(t_n) \to x_0. \text{ При } x_n \to x_0 \ f(x_n) \to y_0, \text{ отже:}$$

$$f(\varphi(x_0)) \to y_0$$

Зауваження. В умові теореми лектор залишив цікаву, але важкопомітну неточність. За версією Пані Вікторії ця умова це: існує такий окіл $J_\varepsilon(t_0)$, що $\forall t \in (J_\varepsilon(t_0) \cap D_{f\circ\varphi}) \setminus \{t_0\}, \varphi(t) \neq x_0$.

Означення. Нехай точка $x_0 \in (D_f \cap (-\infty; x_0))'$, тоді число α називаєтся **лівосторонньою границею** (або **границею зліва**) функції f в точці x_0, якщо:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in D_f, x_n \to x_0, x_n < x_0 \Longrightarrow f(x_n) \to \alpha$$

Позначається як $\lim\limits_{x \to x_0-}$ або $\lim\limits_{x \to x_0-0}$ або $f(x_0 - 0)$.

Аналогічно означуається **правостороння границя** функції.

Приклад:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 2 \\ x, & \text{якщо x} > 2 \\ 3, & \text{якщо x} = 2 \end{cases}$$

$$f(2-0) = 0$$

$$f(2) = 3$$

$$f(2+0) = 2$$

Теорема. (Критерій існування границі)

$$\text{Нехай } x_0 \in (D_f \cap (-\infty; x_0))' \text{ і } x_0 \in (D_f \cap (x_0; +\infty))'$$

$$\text{Тоді } \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \Longleftrightarrow \exists f(x_0 + 0) = \alpha, \exists f(x_0 - 0) = \alpha$$

Доведення.

- $\Longrightarrow$. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, то для $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in D_f, x_n \to x_0, x_n \neq x_0$ $f(x_n) \to \alpha$, тож для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in D_f, x_n \to x_0, x_n < x_0$ $f(x_n) \to \alpha$, тому $f(x_0 - 0) = \alpha$. Для правосторонньої границі аналогічно.

- $\Longleftarrow$. Нехай тепер $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$— довільна послідовність, така, що $x_n \in D_f, x_n \to x_0, x_n \neq x_0$. Розіб'ємо її на дві підпослідовності $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такі, що $\forall k \in \mathbb{N}$ $x_{n_k} > x_0, x_{m_k} < x_0$.

$$f(x_{n_k}) \to \alpha, f(x_{m_k}) \to \alpha \Longrightarrow f(x_n) \to \alpha$$

Означення. Функція f задовольняє умову Коші в точці x_0, якщо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in D_f$$

$$\begin{cases} 0 < |x_1 - x_0| < \delta \\ 0 < |x_2 - x_0| < \delta \end{cases} \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Теорема. Функція f має границю в точці $x_0 \in D'_f$ тоді й тільки тоді, коли f задовольняє умову Коші в точці x_0.

Доведення. Залишили на самоопрацювання :(

Нехай f і g — деякі функції. $D_f = D_g, x_0 \in D'_f$.

1. $f = O(g)$, якщо $\exists I_\varepsilon(x_0)$ (епсилон-окіл точки x_0) і $\exists M > 0$ такі, що $\forall x \in I_\varepsilon(x_0)\ |f(x)| \le M \cdot |g(x)|$.
2. f і g— функції одного порядку, якщо $f = O(g)$ і $g = O(f)$.
3. $f = o(g)$, якщо $\forall M > 0\ \exists I_\varepsilon(x_0) : \forall x \in I_\varepsilon(x_0)\ |f(x)| \le M \cdot |g(x)|$.
4. $f \sim g$, якщо $f - g = o(g)$.

Приклади:

Нехай $x_0 = 0$.

- $f = x^2, g = x^5$.

$$|x^2| \le M \cdot |x^5| \Longleftrightarrow \frac{1}{M} \le |x^3| \Longrightarrow x^2 \ne O(x^5)$$

- $f = x^2, g = 10x^2$.

$$|x^2| \le M|10x^2| \Longleftrightarrow \frac{1}{M} \le 1 \Longrightarrow x^2 = O(10x^2)$$

$$|10x^2| \le M|x^2| \Longleftrightarrow \frac{10}{M} \le 1 \Longrightarrow 10x^2 = O(x^2)$$

Отже, x^2 і $10x^2$— функції одного порядку.

- $f = x^5, g = x^2$.

$$|x^5| \le M \cdot |x^2| \Longleftrightarrow |x^3| \le M \Longrightarrow x^5 = o(x^2)$$

Зауваження. Такі властивості дуже залежать від обраної точки x_0. Наприклад, нехай $f = x^2, g = x^4$. При $x_0 = 0$ $x^4 = o(x^2)$, а при $x_0 = +\infty$ $x^2 = o(x^4)$.

Корисне зауваження.

- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C, C \neq \infty, C \neq 0,$ то функції f і g одного порядку в точці x_0
- Якщо в деякому околі точки x_0 $g(x) \neq 0$ та $f = O(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)}$ є обмеженою.
- $f = o(g) \iff \frac{f}{g} \to 0, x \to x_0$.
- $f \sim g \iff \frac{f}{g} \to 1, x \to x_0$.

Приклад:

$$\frac{\sin x}{x} \to 0, x \to +\infty \Longrightarrow \sin x = o(x), x \to +\infty$$

Означення. Функція f називається **обмеженою на множині** X, якщо $f(X)$ є обмеженою множиною.

Означення. Функція f називається **обмеженою в точці** x_0, якщо f обмежена в деякому околі точки x_0.

Приклад:

$$\text{Функція } f(x) = \frac{1}{x} \text{ є обмеженою в усіх точках, окрім 0.}$$

Зауваження. В околі деякої точки x_0:

$$f = O(1) \iff f\text{— обмежена в точці } x_0$$

$$f = o(1) \iff f \to 0, x \to x_0$$

Теорема. Нехай x_0 є граничною точкою $D_f = D_g$.

$$\begin{array}{cc} O(f)O(g) = O(f \cdot g) & c \cdot O(f) = O(f) \\ O(O(f)) = O(f) & o(f)O(g) = o(fg) \\ o(f)o(g) = o(fg) & c \cdot o(g) = o(g) \end{array}$$

Доведення. Розглянемо доведення $o(f)O(g) = o(fg)$ (інші доводяться аналогічно).

Припустимо, що $f \neq 0$ та $g \neq 0$ у деякому околі точки x_0.

$$\frac{o(f)O(g)}{fg} = \frac{o(f)}{f} \cdot \frac{O(g)}{g}$$

$\dfrac{o(f)}{f} \to 0,\ x \to x_0;\ \dfrac{O(g)}{g}$ є обмеженим в деякому околі точки x_0

Отже, за теоремою про добуток нескінченно малої та обмеженої отримуємо:

$$\frac{o(f)}{f} \cdot \frac{O(g)}{g} \to 0$$

Означення. Якщо $f(x) = g(x)+o(g(x))$ при $x \to x_0$, то $g(x)$ називається **головною частиною функції** f при $x \to x_0$.

Приклад:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x} = 0 \Longleftrightarrow \sin(x) - x = o(x)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

В цьому прикладі x є головною частиною функції $\sin x$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \Big(1+x\Big)^{\frac{1}{x}} = e \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x} = 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) = x + o(x)$$

В цьому прикладі x є головною частиною функції $\ln(x+1)$ при $x \to 0$.

Теорема. Розглянемо шкалу функцій $x^n,\ n, m \in \mathbb{N}$ і вважатимемо, що $x \to 0$.

$$x^m = o(x^n),\ m > n \text{ (Наприклад, } x^{10} = o(x^2))$$

$$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$$

$$O(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$$

$$o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$$

$$o(x^m) + o(x^n) = o(x^n), \text{ якщо } m \geq n$$
$$c \cdot o(x^n) = o(x^n)$$
$$o(x^m) = o(x^n), \text{ якщо } m \geq n$$

Приклади:

Обчислити:

$$(1 + x - 2x^2 + o(x^2))(x - x^2 + o(x^3)) =$$
$$= x - \cancel{x^2} + o(x^3) + \cancel{x^2} - x^3 + x \cdot o(x^3) - 2x^3 + 2x^4 - 2x^2 \cdot o(x^3) + x \cdot o(x^2) - x^2 \cdot o(x^2) + o(x^2) \cdot o(x^3) =$$
$$= x + o(x^3) + x \cdot o(x^3) - 3x^3 + 2x^4 - 2x^2 \cdot o(x^3) + x \cdot o(x^2) - x^2 \cdot o(x^2) + o(x^2) \cdot o(x^3) =$$
$$= x + o(x^3) + o(x^4) - 3x^3 + 2x^4 - 2o(x^5) + o(x^3) - o(x^4) + o(x^5) =$$
$$= x - 3x^3 + 2x^4 + o(x^3) + o(x^4) + o(x^5) + o(x^3) + o(x^4) + o(x^5) =$$
$$= x - 3x^3 + 2x^4 + o(x^3)$$

Оскільки $2x^4 = o(x^3)$, то:

$$x - 3x^3 + 2x^4 + o(x^3) = x - 3x^3 + o(x^3) + o(x^3) = x - 3x^3 + o(x^3)$$

Основні асимптотичні формули:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$
$$\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$$
$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + o(x^2)$$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$
$$\arcsin x = x + o(x^2)$$
$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$$
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

Приклади:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x^3+4x^4}{2x^2+x^5-x^6+x^7}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+o(1)}{2+o(1)}=\frac{1}{2}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^\alpha x}{(e^x-1)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))^\alpha}{(1+x+o(x)-1)(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))^\alpha}{(x+o(x))(x+o(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\alpha(-\frac{x^2}{2}+o(x^2))+o(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)))}{(x+o(x))(x+o(x))}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\alpha(-\frac{x^2}{2}+o(x^2))+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\frac{\alpha}{2}$$

Неперервність функції

Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0\in D_f$.

Означення неперервності за Гейне. Функцію f називають неперервною в точці x_0, якщо:

$$\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}: x_n\in D_f,\ x_n\to x_0 \Longrightarrow f(x_n)\to f(x_0)$$

Означення неперервності за Коші. Функцію f називають неперервною в точці x_0, якщо:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x\in D_f$$
$$|x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Теорема. Означення за Коші та Гейне еквівалентні.
Доведення. Це ж очевидно))0))000).
Приклад:

1. $f(x)=x^3,\ x_0=2,\ D_f=\mathbb{R}$. $x_n\to 2, f(x_n)=x_n^3\to 2^3=8=f(x_0)$. Отже, функція є неперервною в точці $x_0=2$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$

   $x_n \to 2,\ x_n \neq 2 \Longrightarrow f(x_n) = x_n^3 \to 8$, але $f(x_0) = 1$, отже функція не є неперервною в точці x_0.

3. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$

   $x_n \to 2,\ x_n < 2 \Longrightarrow f(x_n) = x_n^3 \to 8$ (Це фактично є лівосторонньою границею) $x_n \to 2,\ x_n > 2 \Longrightarrow f(x_n) = x_n \to 2$ (Це фактично є правосторонньою границею)

   Лівостороння границя не дорівнює значенню функції, отже функція не є неперервною.

4. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

   $x_n \to 2,\ f(x_n) \to \infty$

   Не є неперервною, бо $f(2) \notin \mathbb{R}$

Якщо функція f не є неперервною в точці $x_0 \in D_f$, то f називають **розривною** в точці x_0.

Якщо функція f є неперервною в усіх точках деякою множини S, то кажуть, що f **неперервна на множині** S. У такому випадку

$$f \in C(S),\ \text{де } C(S) \text{ — множина неперервних на S функцій}$$

Приклади позначення:

$$f \in C([1;2])$$
$$f \in C((0;1])$$
$$f \in C(\mathbb{R})$$

Приклад:
Функція Діріхле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ (x \text{ — ірраціональне}) \end{cases}$$

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$, тоді:

$$\exists\{p_k\}_{k=1}^{\infty} : p_k \in \mathbb{Q}, p_k \to x_0$$
$$\exists\{n_k\}_{k=1}^{\infty} : n_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, n_k \to x_0$$

$$f(p_k) = 1 \to 1,\ f(n_k) = 0 \to 0$$

Отже, f розривна в точці x_0. Також із цього слідує, що функція розривна в усіх точках.

Зауваження 1. Якщо x_0 є граничною точкою області визначення ($x_0 \in D_f \cap D'_f$), то поняття неперервності еквіваленте наступному виразу:

$$f \in C(\{x_0\}) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Зауваження 2. Якщо x_0 — ізольована точка з D_f, то $f \in C(\{x_0\})$

Домашнє завдання:

1. Придумати приклад фукнції, яка є неперервною рівно в одній точці.
2. Придумати приклад функції, яка є неперервною рівно в двох точках.
3. Чи існує функція, яка є неперервною в усіх раціональних точках і розривною в ірраціональних?
4. Чи існує функція, яка є неперервною в усіх ірраціональних точках та розривною в раціональних?

Теорема про арифметичні дії з неперервними функціями. Нехай $f, g \in C(\{x_0\})$. Тоді $f + g,\ f - g,\ f \cdot g$, неперервні в x_0. Якщо при цьому $g(x_0) \neq 0$, то й $\frac{f}{g} \in C(\{x_0\})$.

Доведення. Означення за Гейне + теорема про границі послідовностей.

Теорема про неперервність композиції. Нехай $f \in C(\{x_0\}),\ \varphi \in C(\{t_0\}),\ \varphi(t_0) = x_0$. Тоді $f(\varphi(t)) = \Phi(t)$ є неперервною в точці x_0.

Доведення. Якщо:

$$t_n \in D_\Phi = D_{f \circ \varphi},\ t_n \to t_0$$

$$\varphi(t_n) \to \varphi(t_0),\ t_n \to t_0,\ \varphi(t_n) \in D_f$$

$$f(x_n) \to f(x_0),\ x_n \to x_0$$

Отже, $f(\varphi(t_n)) \to f(\varphi(t_0))$, тобто $\Phi(t_n) \to \Phi(t_0)$.

Зауваження. $f \in C(\{x_0\}) \implies x_0 \in D_f$. Якщо функція не є неперервною в точці x_0, то вона розривна. x_0 може не належати D_f, але бути розривною. Але тоді треба, щоб x_0 була граничною.

Наприклад: $f(x) = \sqrt{x}$ Вона не є розривною в точці $x_0 = -2$, бо є вона не є граничою..

Означення. Нехай $x_0 \in D'_f$ і при цьому $x_0 \notin D_f$. Тоді вважають, що функція f **має розрив** у точці x_0.

Можливі такі ситуації:

1. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Тоді $f \in C(\{x_0\})$.
2. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ (або $f(x_0)$ не визначена). Тоді f має **усувний розрив** у точці x_0.
3. $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. Тоді x_0 має **розрив типу "стрибок"** у точці x_0.
4. Хоча б одна з границь $f(x_0 + 0),\ f(x_0 - 0)$ не існує або дорівнює ∞. Тоді кажуть, що f має **розрив другого роду** в точці x_0.

Розриви першого роду поділяються на усувний і на стрибок.

Властивості елементарних функцій

1. $y = ax + b$
2. $y = x^n$
3. $y = a^x$
4. $y = \log_a x$
5. $\sin,\ \cos,\ \mathrm{tg},\ \mathrm{ctg}$
6. $\arcsin,\ \arccos,\ \mathrm{arctg},\ \mathrm{arcctg}$
7. $y = |x|$

Теорема. Усі ці функції є неперервними на своїй області визначення.

Доведення. Розглянемо доведення тільки для $\sin x$. Треба довести, що $\sin x \in C(\{x_0\})$.

$$|\sin x - \sin y| = \left|2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2}\right| \leq$$
$$\leq \left|2 \sin \frac{y-x}{2}\right| \leq 2\left|\frac{y-x}{2}\right| = |y-x|$$
$$\text{Тоді } |\sin x_n - \sin x_0| \leq |x_n - x_0|$$
$$\text{Якщо } x_n \to x_0 \Longrightarrow \sin x_n \to \sin x_0$$

Приклади:

1. $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \Longrightarrow x^x \in C(0; +\infty))$
2. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{x^2+3}{x+2})$. ОДЗ функції: $x \neq -2$, $\frac{x^2+3}{x+2} \neq \pi k + \frac{\pi}{2}$. Функція є неперервною в усіх точках ОДЗ, але точки $x = -2$, $\frac{x^2+3}{x+2} = \pi k + \frac{\pi}{2}$ є підозрілими.

   Для того, щоб дослідити на неперервніть цю функцію треба використати теорему про суперпозицію (У кожній точці шукаємо лівосторонню і правосторонню границю і розглядаємо випадки).

Приклади використання попередніх теорем:

- Використання теореми про арифметичні дії.

  Дослідити на перерервність функцію $f(x) = \frac{x+1}{x-2} + 5 \cdot \frac{x^2}{x+5}$.

  З теореми про арифметичні дії отримуємо, що $\frac{x+1}{x+2}$ неперервна в усіх точках, окрім $x = -2$, а $5 \cdot \frac{x^2}{x+5}$ неперервна в усіх точках, окрім $x = -5$. А отже й уся функція неперервна в усіх точках, окрім $x = -2$, $x = -5$. Ці точки є підозрілими і їх варто розглядати окремо.

- Використання теорему про неперервність суперпозиції

  Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \operatorname{tg}([x^2])$.

  Функція $y = [x^2]$ неперервна в усіх точках, окрім таких, де x^2 — ціле число. Отже, $y = [x^2]$ неперервна в усіх точках, окрім точок виду $x = 0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \ldots$.

Функція $y = \text{tg}([x^2])$ неперервна в усіх точках, окрім тих, де $[x^2] = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. (Спойлер: можна довести, що таких точок не існує).

Отже функція є неперервною в усіх точках, окрім $x = x = 0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \ldots$. Такі точки є підозрілими і що робити з ними нам пояснять на практиці.

Означення. Функція f називається **монотонно зростаючою** на множині $X \subset D_f$, якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in X\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Аналогічно означуються **монотонно спадна**, **неспадна** та **незростаюча** функції

Наприклад:

Фунція $y = -x^2 + 3$ є монотонно зростаючою на множині $(-\infty; 0]$.

Теорема про розриви монотонної функції. Нехай f — монотонна функція і $x_0 \in (D_f \cap (-\infty; x_0))'$. Тоді $\exists f(x_0 - 0)$.

Доведення. Не втрачаючи загальності припустимо, що f — зростаюча.

Нехай $S = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$. Тоді треба довести, що $x_n \in D_f, x_n \to x_{0-} \Longrightarrow f(x_n) \to S$ (Тобто треба довести, що $S = f(x_0 - 0)$). Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді оскільки S — точка дотику множини $\{f(x), x < x_0\}$, значить $\{f(x), x < x_0\} \cap (S - \varepsilon; S) \neq \varnothing$,

$$\text{Тобто } \exists x^* \in D_f, x^* < x_0 : f(x^*) \in (S - \varepsilon; S)$$

Розглянемо окіл $I = (x^*; x + \varepsilon)$. Оскільки $x_n \to x_{0-}$, то $\exists N\ \forall n \geq N\ x_n \in I$, тоді $x_n > x^* \Longrightarrow f(x_n) > f(x^*) \longrightarrow f(x_n) \in (S - \varepsilon; S)$.

Наслідок. Нехай f — монотонна і $x_n \in (D_f \cap (-\infty; x_0))' \cap (D_f \cap (x_0; +\infty))'$. Тоді якщо функція має розрив в точці x_0, то цей розрив першого роду.

Означення. Множина $K \subset \mathbb{R}$ називається **компактом** або **компактною множиною**, якщо $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in K$ існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k} \to x_0 \in K$.

Приклади:

- $K = (0; +\infty)$ не є компактом, бо послідовність $x_n = n$ прямує до нескінченності, а отже й будь-яка її підпослідовність буде прямувати до нескінченності.

- $K = (0; 1)$ не є компактом, бо послідовність $x_n = \frac{1}{n}$ прямує до нуля, але нуль не належить множині K.

Теорема про обмеженість компакту. Нехай $K \subset \mathbb{R}$ і K — компакт. Тоді K — обмежена.

Доведення. Припустимо супротивне, тоді обов'язково існує $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \to \infty$. Тоді за означенням компакту в неї має бути збіжна послідовність, але $x_n \to \infty$, а отже й будь-яка її підпослідовність теж прямуватиме до нескінченності, яка не належить множині K. *Протиріччя із здоровим глуздом.*

Теорема. (Критерій компакту). Нехай $K \subset \mathbb{R}$. K — компакт $\Longleftrightarrow$ K є замкненою і обмеженою.

Доведення.

- $\Longrightarrow$. Обмеженість вже довели. Припустимо, що K не є замкненою, тоді $\exists x_0$ — точка дотику, яка не належить K. Іншими словами x_0 — гранична точка. Оберемо довільну послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in K, x_n \to x_0$. Будь-яка її підпослідовність теж збігатиметься до $x_0 \notin K$. Протиріччя.

- $\Longleftarrow$. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність така, що $x_n \in K$. $x_n \in K$, а K — обмежена множина, значить сама послідовність x_n є обмеженою.

  $$\text{Отже } \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty},\ x_{n_k} \in K,\ x_{n_k} \to x_0 \Longrightarrow x_0\text{— точка дотику}$$

  Але ми знаємо, що множина K є замкненою, а отже містить усі свої точки дотику. Отже, $x_0 \in K$.

Приклади:

- $[0; 1)$ — не компакт.

- $(-\infty; 0]$ — не комакт.

- $[0; 1]$ — компакт.

- $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right] = (0; 1)$ — не компакт.

Наслідок. Будь-який компакт має найбільший і найменший елемент.

Математичний жарт.
Розмова між хлопцем-математиком та дівчиною:

– *Ти у мене така компактна!*

– *А як це?*

– *Замкнена і обмежена.*

Теорема про неперервний образ компакту. Нехай $f \in C(K)$, K — компакт. Тоді $f(K)$ — теж компакт.

Доведення. Нехай $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність з $f(K)$. Оскільки $\forall n\ \exists x_n \in K : f(x_n) = y_n$, розглянемо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Оскільки K — компакт, то з $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна обрати збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. При цьому $x_{n_k} \to x_0 \in \mathbb{R}$.

Оскільки f — неперервна в точці x_0, то $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, а отже $y_{n_k} \to f(x_0) \in f(K)$.

Наслідок. **(Теорема Вейерштрасса).** Функція, що неперервна на компакті досягає там свого найбільшого та найменшого значень.

Теорема про неперервність оберненої функції. Нехай $f \in C(K)$, K — компакт, а f — оборотня функція (тобто існує обернена до неї функція). Тоді обернена функція теж є неперервною на K.

Доведення. Самі знайдете :) + вам варто зрозуміти чи працює теорема, якщо K не є компактом.

Теорема про монотонність оберненої функції. Нехай f — неперервна на компакті і монотонна. Якщо $\exists f^{-1}$ (обернена функція), то f^{-1} теж буде монотонною на цьому компакті.

Теорема Бореля-Лебега. Нехай K — компакт і $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність інтервалів і при цьому

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Тоді з $\{I_n\}$ можна обрати скінченну кількість інтервалів, які будуть покривати K.

Зауваження. У теоремі йдеться саме про відкриті інтервали.

Доведення. Розглянемо K. Оскільки K — обмежена, то $\exists [a, b]$, такий, що $K \subset [a, b]$. Розглянемо $K_l = K \cap [a; \frac{a+b}{2}], K_r = K \cap [\frac{a+b}{2}; b]$.

Якщо припустити, що K не можна покрити скінченною кількістю інтервалів, то те саме справделиве або для K_l або для K_r.

Нехай, наприклад, K_r не можна покрити скінченною кількістю інтервалів. Тоді перейдемо до K_r і зробимо аналогічне до того, що ми зробили з K.

Таким чином ми отримуємо послідовність вкладених замкнених непорожніх обмежених множин. За теоремою Кантора $\exists x_0$, яке належить усім цим відрізкам. $x_0 \in K$, тому воно має бути покрите деяким інтервалом I_n,

Зрозуміло, шо кінці відрізків, що отримані в нашому процесі прямують до x_0, тому існує відрізок, що повністю покривається I_n. Протиріччя.

Зауваження. Ця теорема працює для довільних відкритих множин.

Теорема Коші (Про проміжне значення). Нехай $f \in C([a; b])$ і $f(a)f(b) \leq 0$. Тоді
$$\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$$

Доведення. Припустимо, що це не так. Тобто, для $\forall x \in [a; b]$ $f(x) \neq 0$.

Не обмежуючи загальності $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$.

Лема. Якщо функція $f \in C(\{x_0\})$ і $f(x_0) > 0$ то $\exists (a; b) : x_0 \in (a, b)$, $\forall x \in (a, b) \cap D_f$ $f(x) > 0$.

Доведення. Нехай $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Тоді:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in D_f\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) - f(x_0) > -\varepsilon \Longrightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

$$\text{Тоді } \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)\ f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

.

Лема доведена, повертаємось до теореми.

Отже для кожної точки $x \in [a;b]$ згідно леми $\exists I_x$ такий, що $\forall y \in I_x \ f(y)f(x) > 0$.

Згідно теореми Бореля-Лебега можна обрати лише скінченну кількість інтервалів $I_{x_1}, I_{x_2}, \ldots, I_{x_n}$, такі. що:

$$[a;b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_{x_k}$$

Оскільки f не змінює знак на кожному I_{x_k}, то f не змінює знак на всьому $[a;b]$. Протиріччя.

Наслідок. Нехай f — неперервна на проміжку $[a;b]$. Тоді $f(x)$ приймає всі значення від $f(a)$ до $f(b)$.

Доведення. $\forall y \in [f(a); f(b)]$ можна створити функцію $\varphi(x) = f(x) - y$.

$$\varphi(a) < 0, \ \varphi(b) > 0 \Longrightarrow \text{За теоремою Коші } \exists x_0 : \varphi(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_0) = y$$

Приклад:

$$f \in C([0;1]), \ f(0) > 0, \ f(1) < 1$$

. Треба довести, що $\exists x : f(x) = (x)$.

Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x) = f(x) - x$. Тоді:

$$\varphi(0) = f(0) - 0 > 0$$

$$\varphi(1) = f(1) - 1 < 0$$

Отже за теоремою Коші $\exists x_0 \in [0;1] : \varphi(x_0) = 0 \Longrightarrow 0 = f(x_0) - x_0 \Longrightarrow x_0 = f(x_0)$.

Рівномірна неперервність

Означення рівномірної неперервності за Коші. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається рівномірно неперервною на множині $X \subset D_f$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta < 0 : \forall \{x', x''\} \subset X$$

$$|x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Приклад:

$$f(x) = \sin x, \ x \in \mathbb{R}$$

Покажемо, що вона рівномірно неперервна:

$$|f(x^{'}) - f(x^{''})| = \left|2\sin\frac{x^{'} - x^{''}}{2}\cos\frac{x^{'} + x^{''}}{2}\right| \leq \left|2\sin\frac{x^{'} - x^{''}}{2}\right| \leq$$

$$\leq 2\frac{|x^{'} - x^{''}|}{2} = |x^{'} - x^{''}| < \varepsilon$$

Як тільки $|x^{'} - x^{''}| - \delta = \varepsilon$

Зауваження. З означення слідує, що якщо функція рівномірно неперервна на множині X (рівномірно неперервна в кожній точці множини X), то $f \in C(X)$.

Означення ріномірної неперервності за Гейне. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається рівномірно неперервною на X якщо:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X,\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

$$x_n - y_n \to 0,\ n \to \infty \Longrightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0, n \to \infty$$

Теорема. Означення Коші та Гейне еквівалентні.
Доведення. Без доведення.
Приклад:

1. $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ Виберемо $x_n = \sqrt{n+1},\ y_n = \sqrt{n}$

$$x_n - y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0,\ n \to \infty$$
$$f(x_n) - f(y_n) = n + 1 - n = 1 \not\to 0, n \to \infty$$

   Отже за означенням Гейне функція не є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}$.

2. $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}. & x \in [-1; 1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   Функція розривається в точці x_0, тож вона не є неперервною, а отже й не є рівномірно неперервною.

Теорема. Лінійна властивість рівномірної неперервності. f і g — рівномірно неперервні на $X \subset D_f = D_g \Longrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \alpha f + \beta g$ — рівномірно неперервна на X.

Доведення. Очевидно з означення за Коші.

Теорема (Рівномірна неперервність на звуженні). f — рівномірно неперервна на $X \Longrightarrow \forall X_1 \subset X\ f|_{X_1}$ рівномірно неперервна на X_1. (Тут $f|_{X_1}$ позначає звуження f на X_1)

Теорема. (Рівномірна неперервність на об'єднанні). Якщо f — рівномірно неперервна на $(a, b]$ і $[b; c)$ $(a, c \in \overline{\mathbb{R}})$, то тоді f рівномірно неперервна на $(a; c)$.

Доведення. $\forall \varepsilon > 0 : x^{'}, x^{''} \in (a, c)$:

1. $x^{'}, x^{''} \in (a, b] \Longrightarrow$ очевидно неперервна.
2. $x^{'}, x^{''} \in [b, c) \Longrightarrow$ очевидно неперервна.
3. $x^{'} \in (a, b],\ x^{''} \in [b; c)$.

   $|f(x^{'}) - f(x^{''})| = |f((x^{'}) - f(b) + f(b) - f(x^{''})| \leq |f((x^{'}) - f(b)| + |f(b) - f(x^{''})|$

   З умови $\exists \delta_1 : |f((x^{'}) - f(b)| < \varepsilon,\ \exists \delta_2 : |f(b) - f(x^{''})| < \varepsilon$.

   Якщо ми поставимо $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, то отримаємо:

$$|f((x^{'}) - f(b)| + |f(b) - f(x^{''})| < 2\varepsilon$$

Теорема Кантора. f — неперервна на X і X — компакт, то f рівномірно неперервна на X.

Доведення. Нехай f не є рівномірно неперервною на X. Це ознаає заперечення означення Коші:

$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists \{x^{'}, x^{''}\} \subset X : |x^{'} - x^{''}| < \delta\ \ |f(x^{'}) - f(x^{''})| \geq \varepsilon$ Назвемо цю умову (1)

. Візьмемо деяку послідовність дельт таку, що $\delta_n = o(1)$, (Наприклад $\delta_n = \frac{1}{n}$).

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x^{'}, x^{''} : |x_n^{'} - x_n^{''}| < \delta_n\ |f(x_n^{'}) - f(x_n^{''})| \geq \varepsilon$$

$$\{x_n^{'}\}_{n=1}^{\infty} \subset X \Longrightarrow \exists \{x_{n_k}^{'}\}_{k=1}^{\infty} \to x_0 \in X$$

$$\text{Так як } |x_{n_k}^{'} - x_{n_k}^{''}| < \delta_{n_k} \to 0 \Longrightarrow x_{n_k}^{''} \to x_0$$

Враховуючи неперервність f в точці x_0, маємо:

$|f(x_{n_k}^{'}) - f(x_{n_k}^{''})| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0,\ k \to \infty$, що суперечить умові (1)

Теорема (Рівномірна неперервність на інтервалі). Якщо f — неперервна на скінченному інтервалі (a, b), то:

1. $$\exists \lim_{x\to a+0} = A \in \mathbb{R} \text{ і } \lim_{x\to b-0} f(x) = B \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$
   $$\Longrightarrow f \text{ — рівномірно неперервна на } (a, b)$$

2. Інакше, f не є рівномірно неперервною на (a, b).

Доведення.

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \\ A, & x = a \\ B, & x = b \end{cases}$$

То $F(x) \in C([a; b])$, отже, за теоремою Кантора, F — рівномірно неперервна на $[a, b]$. Отже, F рівномірно неперервна на (a, b) за теоремою про рівномірну неперервність на звуженні $F|_{(a,b)}$.

Друга частина без доведення.

Приклад:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

1. На проміжку $(-1; 0)$
   $$\lim_{x\to 1+0} f(x) = e^{-1}$$
   $$\lim_{x\to -0} f(x) = 0$$
   Отже, f рівномірно неперервна на $(-1, 0)$.

2. На проміжку $(0; 1)$
   $$\lim_{x\to +0} f(x) = +\infty$$
   Отже, f не рівномірно неперервна на проміжку $(0; 1)$.

Теорема (Рівномірна неперервніть на нескінченності).

$$f \in C([a;+\infty)) \text{ і } \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$$

Тоді f рівномірно неперервна на $[a;+\infty)$.

Доведення. Із існування границі на нескінченності:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 : \forall x \geq \Delta > a\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$[a;+\infty] = [a;\Delta] \cup [\Delta;+\infty]$$

Наша функція рівномірно неперервна на $[a;\Delta]$. Залишилось тільки дізнатись чи є вона такою на $[\Delta;+\infty)$. За теоремою Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$|f(x^{'}) - f(x^{''})| \leq |f(x^{'}) - A| + f(x^{''}) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \text{ як тільки:}$$
$$|x^{'} - x^{''}| < \delta\ \forall x^{'}, x^{''} \in [\Delta;+\infty]$$

Отже, на $[\Delta;+\infty]$ f рівномірно неперервна.

Приклад:

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}},\ x \in [1;+\infty]$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow f \text{ — рівномірно неперервна}$$

2. $f(x) = \sin x^2,\ x \in \mathbb{R}$. Візьмемо дві послідовності

$$x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n},\ y_n = \sqrt{2\pi n}$$

$$\text{При } n \to +\infty$$

$$x_n - y_n \to 0$$

$$\sin(x_n^2) - \sin(y_n^2) = 1 - 0 = 1$$

Отже, $f(x)$ не є неперервною за Гейне.