Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 3.

Автор текста @bezkorstanislav
Если есть ошибки, пишите ему в телеграм
Афтар выражает благодарность @vic778 за многочисленные поправки

October 2019

Диференціальне числення функції однієї змінної

Означення похідної. Основні правила диференційонування

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деяка функція однієї змінної, $x_0 \in D_f,\ x_0 \in (D_f)'$
.

Означення. Якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то функція f називається **диференційованою** в точці x_0, а сама границя називається **похідною** в точці x_0. І позначається $f'(x)$ або $\frac{df(x)}{dx}$.

Зауваження 1. Для функції однієї змінної ми ототожнили диференційованість та існування похідної.

Зауваження 2.

$$x - x_0 = \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x)$$

Отже, похідна дорівнює відношенню зміни приросту функції до приросту аргументу, що породжує цей приріст.

Зауваження 3.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1)$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Отже, якщо має місце рівність:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \Longrightarrow \exists f'(x_0) = A$$

Теорема. (Необхідна умова диференційованості). Функція f є диференційованою в x_0 тільки тоді, коли f — неперервна в точці x_0.

Доведення. Щоб існувала похідна треба, щоб

$$f(x) - f(x_0) \to 0, \to x \to x_0$$

. З цього випливає, що f неперервна в точці x_0.

Теорема. (Диференційованість композиції функцій). Нехай дано функції f і g. точка $x_0 \in D_{f \circ g},\ x_0 \in (D_{f \circ g})'$.

Якщо g диференційована в точці x_0, а f диференційована в точці $y_0 = g(x_0)$, то $f \circ g$ диференційована в точці x_0 і має місце рівність:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(y_0))g'(x_0)$$

Доведення.

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) =$$

$$= f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0) = f'(y_0)(g(x) - g(x_0)) + o(y - y_0) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(y - y_0) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x) - g(x_0)) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))$$

Отже,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f'(y_0)(g'(x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0) + o(1)) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f'(y_0)g'(x_0)(1 + o(1)) + o(1) = f'(y_0)g'(x_0)$$

Теорема. (Лінійність похідної). Нехай f і g — диференційовані в точці x_0, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Доведення.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\beta g(x) - \beta g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Теорема. Похідна добутку. Нехай f і g диференційовані в точці x_0.

Тоді функція $f \cdot g$ теж диференційована в точці x_0, при чому справедливе наступне співвідношення:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Доведення. За означенням:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} =$$

Оскільки f — диференційована в точці x_0, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Абсолютно аналогічно $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$.

Окрім того f — диференційована в точці x_0, а значить f — неперервна в точці x_0, а значить:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Отже:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

Теорема. Похідна частки. Нехай f і g диференційовані в точці x_0 і $g(x_0) \neq 0$.

Тоді, $\frac{f}{g}$ теж диференційована в точці x_0 і $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доведення. Аналогічно. Це доведення на дз :).

Приклад. Обчислити похідну від f від функції f в точці x_0.

1. $f(x) = x^3$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \ldots = 3x_0^2$$

2. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(a) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \frac{x^3-8}{x-2} = 3 \cdot 4 = 12$.

(b) $x_0 \neq 2$. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2$.

3. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(a) $x_0 \neq 2$. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2$.

(b) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-7}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{8-7}{2-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{0} = +\infty$.

Похідна не може дорівнювати нескінченності, отже $\nexists f'(2)$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 2 \\ 12x - 16, & x < 2 \end{cases}$

Як **не треба** робити:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

Як **треба** робити:

Розглядаємо 3 випадки:

(a) $x_0 > 2$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 2x_0^2$$

(b) $x_0 < 2$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 12$$

(c) $x = 2$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 12$$

Отже, функція диференційована на всіх дійсній прямій.

Теорема. (Про диференційованість оберненої функції). Формулювання і доведення на додому.

Зауваженн. Функція f називається диференційованою на множині A якщо f має похідну в кожній точці $x_0 \in A$. Це позначається як $f \in D(A)$, де $D(A)$ — множина диференційованих на A функцій.

Односторонні похідні

Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$. Це рівносильно тому, що

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D_f : x_n < x_0,\ x_n \to x_0, n \to \infty$$

Границя $\lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ називається лівосторонньою похідною f в точці x_0. Позначаємо її як $f'(x)$.

Аналогічно, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Приклади:

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1 - 0}{x - 0} = +\infty \Longrightarrow \nexists f_n'(x_0)$$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

Теорема. (Критерій диференційованості.)
Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap x_0 \in D_f$. Тоді:

$$\exists f'(x_0) \Longleftrightarrow \exists f' \exists f', f' = f'$$

Доведення.

$$\exists f'(x_0) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \exists \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Longleftrightarrow \exists f'(x_0),\ \exists f'(x_0),\ f'(x_0) = f'(x_0)$$

Зауваження.

$$f' \neq \lim_{x \to x_0-} f'(x)$$