

Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 3.

Автор текста @bezkorstanislav

Если есть ошибки, пишите ему в телеграм

Афтар выражает благодарность @vic778 за многочисленные поправки

October 2019

Диференціальне числення функції однієї змінної

Означення похідної. Основні правила диференціювання

Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — деяка функція однієї змінної, $x_0 \in D_f$, $x_0 \in (D_f)'$.

Означення. Якщо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то функція f називається **диференційованою** в точці x_0 , а сама границя називається **похідною** в точці x_0 . І позначається $f'(x)$ або $\frac{df(x)}{dx}$.

Зауваження 1. Для функції однієї змінної ми ототожнили диференційованість та існування похідної.

Зауваження 2.

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \Delta x \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \Delta f(x)\end{aligned}$$

Отже, похідна дорівнює відношенню зміни приросту функції до приросту аргументу, що породжує цей приріст.

Зауваження 3.

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1) \\ f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\end{aligned}$$

Отже, якщо має місце рівність:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \implies \exists f'(x_0) = A$$

Теорема. (Необхідна умова диференційованості). Функція f є диференційованою в x_0 тільки тоді, коли f — неперервна в точці x_0 .

Доведення. Щоб існувала похідна треба, щоб

$$f(x) - f(x_0) \rightarrow 0, \rightarrow x \rightarrow x_0$$

. З цього випливає, що f неперервна в точці x_0 .

Теорема. (Диференційованість композиції функцій). Нехай дано функції f і g . точка $x_0 \in D_{f \circ g}$, $x_0 \in (D_{f \circ g})'$.

Якщо g диференційована в точці x_0 , а f диференційована в точці $y_0 = g(x_0)$, то $f \circ g$ диференційована в точці x_0 і має місце рівність:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) = \\ &= f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0) = f'(y_0)(g(x) - g(x_0)) + o(y - y_0) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(y - y_0) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x) - g(x_0)) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(y_0)(g'(x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0) + o(1)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(y_0)g'(x_0)(1 + o(1)) + o(1) = f'(y_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

Теорема. (Лінійність похідної). Нехай f і g — диференційовані в точці x_0 , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\beta g(x) - \beta g(x_0)}{x - x_0} = \\ &\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \end{aligned}$$