

Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 3.

Автор текста @bezkorstanislav

Если есть ошибки, пишите ему в телеграм

Афтар выражает благодарность @vic778 за многочисленные поправки

November 2019

Диференціальне числення функції однієї змінної

Означення похідної. Основні правила диференціювання

Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — деяка функція однієї змінної, $x_0 \in D_f$, $x_0 \in (D_f)'$.

Означення. Якщо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то функція f називається **диференційованою** в точці x_0 , а сама границя називається **похідною функції** f в точці x_0 . І позначається $f'(x_0)$ або $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Зауваження 1. Для функції однієї змінної ми ототожнили диференційованість та існування похідної, що не завжди є правдою для функцій багатьох змінних.

Зауваження 2.

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \Delta x \\f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \Delta f(x_0)\end{aligned}$$

Отже, похідна дорівнює відношенню зміни приросту функції до приросту аргументу, що породжує цей приріст.

Зауваження 3. Із теорії границі функції, якщо функція f є диференційованою в точці x_0 , то:

$$\begin{aligned}f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1) \iff \\&\iff f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\end{aligned}$$

Приріст функції є лінійним до приросту аргументу:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Отже, якщо має місце рівність:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \implies \exists f'(x_0) = A$$

Теорема. (Необхідна умова диференційованості). Функція f є диференційованою в x_0 тільки тоді, коли f — неперервна в точці x_0 . (Але не завжди неперервна функція є диференційованою)

Доведення. Щоб існувала похідна треба, щоб

$$f(x) - f(x_0) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$$

. З цього випливає, що f неперервна в точці x_0 .

Теорема. (Диференційованість композиції функцій). Нехай дано функції f і g . Точка $x_0 \in D_{f \circ g}$, $x_0 \in (D_{f \circ g})'$.

Якщо g диференційована в точці x_0 , а f диференційована в точці $y_0 = g(x_0)$, то $f \circ g$ диференційована в точці x_0 і має місце рівність:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) = \\ &= f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0) = f'(y_0)(g(x) - g(x_0)) + o(y - y_0) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(y - y_0) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) = \\ &= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(y_0)(g'(x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0) + o(1)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(y_0)g'(x_0)(1 + o(1)) + o(1) = f'(y_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

Теорема. (Лінійність похідної). Нехай f і g — диференційовані в точці x_0 . Тоді $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} = \\
& \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} + \frac{\beta g(x) - \beta g(x_0)}{x - x_0} = \\
& \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)
\end{aligned}$$

Теорема. Похідна добутку. Нехай f і g диференційовані в точці x_0 .

Тоді функція $f \cdot g$ теж диференційована в точці x_0 , причому справедливе наступне співвідношення:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Доведення. За означенням:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
& = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
& = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} =
\end{aligned}$$

Оскільки f — диференційована в точці x_0 , то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Абсолютно аналогічно $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$.

Окрім того f — диференційована в точці x_0 , а значить f — неперервна в точці x_0 , а значить:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Отже:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \\
& = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)
\end{aligned}$$

Теорема. Похідна частки. Нехай f і g диференційовані в точці x_0 і $g(x_0) \neq 0$.

Тоді, $\frac{f}{g}$ теж диференційована в точці x_0 і $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доведення. Аналогічно. Це доведення на дз :).

Приклад. Обчислити похідну від f від функції f в точці x_0 .

1. $f(x) = x^3$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \dots = 3x_0^2$$

2. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(a) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 3 \cdot 4 = 12$.

(b) $x_0 \neq 2$. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2$.

3. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(a) $x_0 \neq 2$. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2$.

(b) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 7}{2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{0} = +\infty$.

Похідна не може дорівнювати нескінченності, отже $\nexists f'(2)$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 2 \\ 12x - 16, & x < 2 \end{cases}$

Як **не** треба робити:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

Як **треба** робити:

Розглядаємо 3 випадки:

(a) $x_0 > 2$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = 3x_0^2$$

(b) $x_0 < 2$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 12$$

(c) $x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 12$$

Отже, функція диференційована на всіх дійсній прямій.

Теорема. (Про диференційованість оберненої функції). Нехай функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — оборотна, то $x_0 \in D_f$ і $x_0 \in (D_f)'$, $y_0 = f(x_0)$. Якщо існує $f'(x_0) \neq 0$ і обернена функція f^{-1} — неперервна в точці y_0 , то вона диференційовна в цій точці. Якщо, крім того, y_0 — гранична точка множини $E_f = D_{f^{-1}}$, то

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доведення. Лектор не дав:(

Зауваження. Функція f називається диференційованою на множині A якщо f має похідну в кожній точці $x_0 \in A$. Це позначається як $f \in D(A)$, де $D(A)$ — множина диференційованих на A функцій.

Односторонні похідні

Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$. Це рівносильно тому, що

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D_f : x_n < x_0, x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$$

Границя $\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ називається **лівосторонньою похідною** f в точці x_0 . Позначаємо її як $f'_{\text{л}}(x_0)$.

$$\text{Аналогічно, } f'_{\text{п}}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Приклади:

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'_\text{л}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$f'_\text{п}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty \implies \nexists f'_\text{п}(x_0)$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'_\text{л}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$f'_\text{п}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

Теорема. (Критерій диференційованості.)

Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$. Тоді:

$$\exists f'(x_0) \iff \exists f'_\text{л}(x_0), \exists f'_\text{п}(x_0), f'_\text{л}(x_0) = f'_\text{п}(x_0)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \exists f'(x_0) &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff \\ &\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \exists \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\iff \exists f'_\text{п}(x_0), \exists f'_\text{л}(x_0), f'_\text{п}(x_0) = f'_\text{л}(x_0) \end{aligned}$$

Зауваження.

$$f'_\text{л}(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} f'(x)$$

Розглянемо параметрично задану функцію $y(x)$:

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \Psi(t) \end{cases}$$

$$y(x) = \varphi(\Psi^{-1}(x))$$

Часом виразити y через x може бути просто, як тут:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \implies y = x^{\frac{3}{5}}$$

Але буває, що не дуже просто:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 + t \end{cases} \iff y = ???$$

Але ж **так** хочеться знайти похідну...

Припустимо, що $\exists \varphi'$ і $\exists (\Psi^{-1})'$ і $\Psi' \neq 0$.

$$\text{Тоді } y'_x = \varphi'(\Psi^{-1}(x)) \cdot (\Psi^{-1})'(x) = \varphi'(t) \frac{1}{\Psi'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\Psi'(t)}$$

Приклад:

1. Знайти похідну y_x

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \iff y = x^{\frac{3}{5}}$$

Ми уже знайшли, що $y = x^{\frac{3}{5}}$, отже:

$$y'_x = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} (t^5)^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} t^{-2}$$

Але давайте спробуємо *по-нормальному*, застосувавши нашу формулу:

$$y'_x = \frac{(t^3)'}{(t^5)'} = \frac{3t^2}{5t^4} = \frac{3}{5} t^{-2}$$

- 2.

$$\begin{cases} y = \cos^2 t \\ x = \sin^2 t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{2 \cos t (-\sin t)}{2 \sin t \cos t} = -1$$

Як цікавий факт можна помітити, що $y = 1 - x$, де $x \in [0; 1]$

Похідні вищих порядків

Кажуть, що порядок похідної є вищим, якщо цей порядок більше за 1.

Нехай $f \in D((a, b))$. Припустимо, що f' є диференційованою в точці $x_0 \in (a, b)$. Тоді функція f є двічі диференційованою в точці x_0 , а число $(f')'(x_0)$ називається **другою похідною функції f** в точці x_0 . Вона позначається як $f''(x_0)$.

Наприклад:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = (f')'(x) = 6x$$

Аналогічно у функції f існує n -та похідна $f^{(n)}(x)$ на проміжку (a, b) і вона є диференційованою в точці $x_0 \in (a, b)$, того f має $(n+1)$ -шу похідну в точці x_0 .

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}$$

Приклад:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = 2\frac{1}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^4} = -6\frac{1}{x^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n}$$

Якщо f має n -ту похідну $f^{(n)}(x)$ у кожній точці проміжку I , то кажуть, що f є n разів диференційованою і позначається це так:

$$f \in D^{(n)}(I)$$

Якщо при цьому $f^n \in C(I)$, то кажуть, що $f \in C^{(n)}(I)$, то кажуть, що $f \in C^{(n)}(I)$.

$$C(I) \subset D(I) \subset C^{(1)}(I) \subset D^{(1)}(I) \subset C^{(2)}(I) \subset \dots$$

Домашня робота. Якщо у функції є похідна, чи обов'язково похідна неперервна?

Якщо $\forall n \in \mathbb{N} \exists f^{(n)}$ на I , то кажуть, що f — нескінченно диференційована на I . Позначається так:

$$f \in C^\infty(I)$$

Дві властивості n -тої похідної

Теорема. (Лінійність n -тої похідної). Нехай $f, g \in D^{(n)}(I)$, тоді

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g \in D^{(n)}(I)$$

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

Теорема. Формула Лейбніца. Нехай $f, g \in D^{(n)}(I)$, тоді:

$$f \cdot g \in D^{(n)}(I)$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Доведення. Це вам нам Д/З. (Підказка: воно доводиться так само, як формула бінома Ньютона).

Приклад:

1. Обчислити n -ту похідну від $f(x) = x^2 \ln x$.

$$\begin{aligned} (x^2 \ln x)^{(n)} &= C_n^0 (x^2)^{(n)} \ln x + C_n^1 (x^2)^{(n-1)} (\ln x)^{(1)} + C_n^2 (x^2)^{(n-2)} (\ln x)^{(2)} + \dots + \\ &+ \dots + C_n^{n-3} (x^2)^{(3)} (\ln x)^{(n-3)} + C_n^{n-2} (x^2)^{(2)} (\ln x)^{(n-2)} + C_n^{n-1} (x^2)^{(1)} (\ln x)^{(n-1)} + \\ &+ C_n^n (x^2)^{(0)} (\ln x)^{(n)} \end{aligned}$$

Тепер варто помітити, що:

$$\begin{aligned}
(x^2)^{(1)} &= 2x \\
(x^2)^{(2)} &= 2 \\
(x^2)^{(3)} &= 0 \\
(x^2)^{(n)} &= 0, \quad n > 3
\end{aligned}$$

Отже виходить, що наша сума дорівнює наступному:

$$C_n^{n-2} \frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} + C_n^{n-1} \frac{2x(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}} + C_n^n \frac{x^2(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

2. Обчислити $\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(0)} &= \frac{1}{a-x} \\
\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(1)} &= \frac{1}{(a-x)^2} \\
\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(2)} &= \frac{2}{(a-x)^3} \\
\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} &= \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}
\end{aligned}$$

3. Обчислити n -ту похідну від $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} \frac{1}{2-x} =$$

З формули Лейбніца:

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)} \left(\frac{1}{2-x}\right)^{(k)}$$

А тепер використовуємо формулу з прикладу 2.

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{(n-k)!}{(1-x)^{n-k+1}} \right) \left(\frac{(k!)}{(2-x)^{k+1}} \right)$$

Цікавий факт: конкретно у цьому завданні можна було зробити набагато простіше:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$$

Як обчислити похідну вищого порядку від параметрично заданої функції?

Ось *приклад*:

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{(t^2)'}{(t^3 + t)'} = \frac{2t}{3t^2 + 1}$$

Початкова система задавала залежність y від x . Тепер ми можемо побудувати систему залежності y' від x :

$$\begin{cases} y'_x(t) = \frac{2t}{3t^2+1} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

$$y''_x = (y'_x)' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{2t}{3t^2+1} \right)'}{(t^3 + t)'} = \frac{-6t^2 + 2}{(3t^2 + 1)^3}$$

Тепер ми можемо побудувати залежність y''_x від x :

$$\begin{cases} y''_x(t) = \frac{-6t^2+2}{(3t^2+1)^3} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

І так далі...

Диференціал функції

Функція f називається диференційованою в точці x_0 , якщо:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Нехай $x - x_0 = \Delta x$. Тоді:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)$$

Домножимо все на Δx :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0) + o(\Delta x)$$

Отже, $\Delta x f'(x_0)$ — головна частина приросту функції.

Означення. Лінійне відображення

$$L(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Називається **диференціалом функції f** в точці x_0 . Це позначається так:

$$d_{x_0} f(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Приклад:

$$f(x) = x^3, \quad x_0 = 1$$

$$f'(x_0) = 3$$

$$d_{x_0} f(h) = 3h$$

Геометричний зміст диференціалу. Диференціал задає рівняння прямої, яка паралельна дотичній до графіку функції у точці x_0 і проходить через початок координат.

Розглянемо $f(x) = x$. Тоді:

$$f'(x_0) = 1, \quad \text{для } \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Тоді:

$$d_{x_0} x(h) = 1 \cdot h = h$$

А тепер нехай g — довільна диференційована в x_0 функція:

$$(d_{x_0}g)(h) = g'(x_0) \cdot h = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x(h)$$

Якщо ми приберемо h , отримуємо:

$$d_{x_0}g = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x$$

Запис, який ще часто можна зустріти:

$$dg = g'(x_0)dx$$

Зауваження. Диференціал функції f у точці x_0 $d_{x_0}f$ ще позначають $df|_{x_0}$, $df(x_0)$.

Іноколи точку x_0 взагалі не пишуть і пишуть просто df .

Зауваження. З теореми про лінійність похідної, похідної частки, добутку та суперпозиції випливають наступні правила дій з диференціалом:

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$

$$d(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot dg(x)$$

Ці властивості справедливі при виконанні умов відповідних теорем.

Приклад:

$$f = \ln(e^{u^2} + v)$$

$$\begin{aligned} df &= d\ln(e^{u^2} + v) = \frac{1}{e^{u^2} + v} \cdot d(e^{u^2} + v) = \frac{de^{u^2} + dv}{e^{u^2} + v} = \\ &= \frac{e^{u^2} \cdot du^2 + dv}{e^{u^2} + v} = \frac{e^{u^2} \cdot 2 \cdot u \cdot du + dv}{e^{u^2} + v} \end{aligned}$$

Домашнє завдання. Познайомитися з поняттям подвійної похідної та властивостями другого диференціалу.

(Лектор сказав, що такого на іспиті не буде і взагалі ця тема буде використана у другому семестрі, тож не зробиши цього багато не втратите.)

Теорема про середні

Означення. Нехай $x_0 \in D'_f \cap D_f$.

Функція f має **локальний максимум** в точці x_0 , якщо \exists деяких ε -окіл точки x_0 $U_\varepsilon(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$:

$$\forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогічно означається локальний мінімум.

Означення. Якщо в точці x_0 f має локальний максимум і при цьому

$$\forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f) \setminus \{x_0\} \quad f(x) < f(x_0)$$

Тоді кажуть, що в точці x_0 f має **строгий локальний максимум**.

Теорема Ферма. Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$.

Якщо f має локальний екстремум (тобто мінімум або максимум) в точці x_0 і є диференційованою в точці x_0 , то $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Згідно критерію диференційованості:

$$\exists f'(x_0) \iff \exists f'_\text{л}(x_0), f'_\text{п}(x_0), f'_\text{л}(x_0) = f'_\text{п}(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Розглянемо випадок, коли f має локальний мінімум. Випадок з максимумом доводиться аналогічно.

Якщо f має локальний мінімум в точці x_0 , то:

$$\forall x \in U_\varepsilon \cap D_f$$

$$f(x_0) \leq f(x) \implies f(x) - f(x_0) \geq 0$$

При $x \rightarrow x_0 -$:

$$x - x_0 < 0$$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \text{ отже:}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ для } \forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f), \text{ отже:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Аналогічно

$$\lim_{x \rightarrow x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$0 \geq \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \implies f'(x_0) = 0$$

Зауваження. Зворотнє твердження не є правдивим. Наприклад функція $f = x^3$ не має екстремуму в $x_0 = 0$, але $f'(0) = 0$.

Теорема Ролля. Нехай $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$.

Якщо $f(a) = f(b)$, то $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Доведення. Використаємо теорему Вейерштрасса. Тоді f досягає на $[a, b]$ свого максимального і мінімального значення. Нехай

$$f(x^*) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$f(x_*) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

Якщо хоча б одне з цих чисел x^*, x_* потрапляє на інтервал (a, b) , то виконано всі умови теореми Ферма, а отже f' в цій точці дорівнює нулю за теоремою Ферма.

Якщо обидві точки не належать інтервалу (a, b) , то $\{x^*, x_*\} \subset \{a, b\}$.

Зважаючи, що $f(a) = f(b)$, тоді

$$f(x^*) = f(x_*) \implies f \text{ є сталою на } [a, b]$$

Тоді $\forall \xi \in (a, b) \ f'(\xi) = 0$

Приклад: Нехай $f \in D([0, 1])$ і $f(0) = f(1) = 0$. Тоді $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ рівняння

$$f'(x) + \alpha f(x) = 0$$

Має розв'язок на $[0, 1]$. *Доведення.* Розглянемо функцію

$$F(x) = e^{\alpha x} f(x)$$

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 0$$

Тоді за теоремою Ролля $\exists \xi \in [a, b]$:

$$F'(\xi) = 0$$

$$F'(x) = e^{\alpha x} \cdot f'(x) + \alpha e^{\alpha x} \cdot f(x)$$

$$e^{\alpha \xi} \cdot f'(\xi) + \alpha e^{\alpha \xi} \cdot f(\xi) = 0$$

Поділимо вираз на $e^{\alpha \xi}$.

$$f'(\xi) + \alpha f(\xi) = 0$$

Теорема Дарбу. Нехай $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ і $f'_\Pi(a) \cdot f'_\Pi(b) < 0$. Тоді $\exists \xi : f'(\xi) = 0$.

Доведення. Використаємо теорему Вейерштрасса. Тоді f досягає на $[a, b]$ свого максимального і мінімального значення. Нехай

$$f(x^*) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$f(x_*) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

Якщо хоча б одне з цих чисел x^*, x_* потрапляє на інтервал (a, b) , то виконано всі умови теореми Ферма, а отже f' в цій точці дорівнює нулю за теоремою Ферма.

Якщо обидві точки не належать інтервалу (a, b) , то $\{x^*, x_*\} \subset \{a, b\}$. Тепер у нас можливі два випадки:

- Якщо $x^* = x_*$, то за теоремою Ролля все працює.
- Якщо $x^* \neq x_*$.

Нехай $x^* = a$, $x_* = b$, тоді:

$$f'_\Pi(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$x - a > 0, \quad f(x) - f(a) \leq 0 \implies$$

$$f'_\Pi(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Аналогічно

$$f'_\Pi(b) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$$

Виходить, що:

$$f'_{\Pi}(a) \cdot f'_{\Lambda}(b) \geq 0$$

Що суперечить умові.

Теорема про проміжні значення похідної. Нехай $f \in D([a, b])$.
Тоді f' приймає всі значення між $f'_{\Pi}(a)$ та $f'_{\Lambda}(b)$.

Доведення. Нехай α — дійсне число між $f'_{\Pi}(a)$ та $f'_{\Lambda}(b)$. Розглянемо

$$F(x) = f(x) - \alpha \cdot x$$

$$F \in D([a, b])$$

$$F'_{\Pi}(a) = f'_{\Pi}(a) - \alpha < 0$$

$$F'_{\Lambda}(b) = f'_{\Lambda}(b) - \alpha > 0$$

Отже, ми точно знаємо, що

$$F'_{\Pi}(a) \cdot F'_{\Lambda}(b) < 0$$

Отже, всі умови теореми Дарбу виконано, отже:

$$\exists \xi : F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \alpha = 0 \implies f'(\xi) = \alpha$$

Теорема Лагранжа. Нехай $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$.

Тоді $\exists \xi \in (a, b) :$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

$$F \in C([a, b]) \cap D((a, b))$$

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a =$$

$$\frac{bf(a) - af(a) - af(b) + f(a)a}{b - a} =$$

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Аналогічними перетвореннями отримуємо

$$F(b) = \frac{-f(b)a + f(a)b}{b - a}$$

Виходить, що $F(a) = F(b)$

Отже, за теоремою Ролля $\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Наслідок. Нехай $f \in D([a, b])$ і $\forall x \in (a, b) f'(x) = 0$, тоді

$$f = \text{const на } (a, b)$$

Доведення. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$.

Використаємо теорему Лагранжа для $[x_1, x_2]$

Тоді $\exists \xi \in (x_1, x_2) :$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$$

$$f'(\xi) = 0 \implies f(x_1) - f(x_2) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

Приклад. Довести, що для $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$$

$f(x) = \arctg x$ задовольняє усі умови теореми Лагранжа на $[x, y]$. Тоді:

$\exists \xi \in (x, y) :$

$$\frac{\arctg x - \arctg y}{x - y} = (\arctg x)'|_{x=\xi} = \frac{1}{1 + \xi^2}$$

$$\left| \frac{\arctg x - \arctg y}{x - y} \right| = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

Домноживши обидві частини на $|x - y|$ отримаємо:

$$|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$$

Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа. Якщо $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$, то завжди можна провести дотичну до функції f , паралельну до відрізка, о сполучає точки $(a, f(a))$ та $(b, f(b))$.

Теорема Коші. Нехай $f, g \in C([a, b]) \cap D((a, b))$. Тоді $\exists \xi \in (a, b)$:

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

1. $F \in C([a, b]) \cap D((a, b))$
2. $F(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - g(b)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$
 $F(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) + f(b)g(a) - g(b)f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$ Отже, $F(a) = F(b)$.

Тоді за теоремою Ролля

$$\exists \xi : F'(\xi) = 0$$

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0 \iff$$

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

Наслідок. Якщо в умовах теореми Коші $\forall x \in (a, b) \ g'(x) \neq 0$, то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Чому у нас не буде раптом ділення на нуль?

Очевидно, що з $\forall x \in (a, b) \ g'(x) \neq 0$ слідує те, що $g'(\xi) \neq 0$.

Подивимось на $g(b) - g(a)$. Якби $g(b) - g(a) = 0$, то за теоремою Ролля $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$, що суперечить умові.

Теорема про неперервність похідної. Нехай $f \in (D((a, b)) \setminus \{x_0\})$, $f \in C((a, b))$, $x_0 \in (a, b)$.

$$\text{Якщо } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lambda \implies \exists f'(x_0) = \lambda$$

Доведення. Розглянемо проміжки $[x_0, x]$, $[x, x_0]$.

- Розглянемо $[x_0, x]$. За теоремою Лагранжа:

$$\exists \xi \in [x_0, x] : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$x_0 < \xi < x$$

Тож при $x \rightarrow x_0$, $\xi \rightarrow x_0$. Отже:

$$\begin{aligned} f'(\xi) \rightarrow \lambda &\implies \\ \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lambda \end{aligned}$$

- Аналогічно, розглядаючи проміжок $[x, x_0]$ доводимо, що

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$$

Теорема. Типи розривів похідної.

Нехай $f \in D((a, b))$ тоді $\forall x \in (a, b)$.

f' або є неперервною в точці x або має розрив другого роду.

Доведення. Розглянемо

$$f'(x_0 + 0), f'(x_0 - 0)$$

1. Якщо $f'(x - 0)$ або $f'(x + 0)$ не існує або дорівнює нескінченності, то f' має розрив другого роду.
2. Якщо $\exists f'(x - 0)$ і $\exists f'(x + 0)$.

Тоді за попередньою теоремою

$$\exists f'_\text{л}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f'(x), \exists f'_\text{п}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f'(x)$$

- Якщо $f'_\text{л}(x) \neq f'_\text{п}(x)$. Тоді $\nexists f'(x_0)$. Протиріччя.
- Якщо $f'_\text{л}(x) = f'_\text{п}(x) \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Тоді за попередньою теоремою $\exists f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Отже, f' — неперервна в точці x_0 .

Приклад.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

При $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Інакше:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Чи буде f' неперервна в точці x_0 ?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) = - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = \\ &= - \lim_{y \rightarrow \infty} \cos y = \text{не існує} \end{aligned}$$

Отже $f'(x)$ має розрив другого роду у точці 0.

Правило Лопіталя. Нехай $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема. Нехай $f, g \in D((a, b))$ і при цьому:

1.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$$

2.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

3.

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\text{Тоді} \exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Доведення. Доозначимо функції f і g у точці a . Розглянемо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \end{cases}$$

Аналогічно

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ g(x), & x \in (a, b) \end{cases}$$

F та G задовольняють умови наслідку з теореми Коші на проміжку $[a, x]$, $x \in (a, b)$. Тоді $\exists \xi$:

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} &= \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \\ x \rightarrow a+, \quad a < \xi < x, &\implies \xi \rightarrow a+ \implies \\ \implies \exists \lim_{\xi \rightarrow a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} &\implies \exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \end{aligned}$$

Зауважте, що слідування йде тільки в одну сторону.

Аналогічна теорема при $x \rightarrow +\infty$: **Теорема.** $f, g : [a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in D((a, +\infty))$.

1.

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

2.

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

3.

$$\forall x \in (a, +\infty) g'(x) \neq 0$$

$$\text{Тоді } \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Зауваження. Умову $\lim f = \lim g = 0$ можна замінити на $\lim f = \lim g = \infty$ і правило Лопітала теж буде виконуватись. Головне, щоб функції прямували до 0 або ∞ одночасно.

Приклад:

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} - 1$$

•

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$