Конспекти лекцій з математичного аналізу Анікушина А.В. Модуль 3.

Автор текста @bezkorstanislav
Если есть ошибки, пишите ему в телеграм
Афтар выражает благодарность @vic778 за многочисленные поправки

November 2019

Диференціальне числення функції однієї змінної

Означення похідної. Основні правила диференційонування

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деяка функція однієї змінної, $x_0 \in D_f,\ x_0 \in (D_f)'$
.

Означення. Якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то функція f називається **диференційованою** в точці x_0, а сама границя називається **похідною функції** f в точці x_0. І позначається $f'(x_0)$ або $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Зауваження 1. Для функції однієї змінної ми ототожнили диференційованість та існування похідної, що не завжди є правдою для функцій багатьох змінних.

Зауваження 2.

$$x - x_0 = \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$$

Отже, похідна дорівнює відношенню зміни приросту функції до приросту аргументу, що породжує цей приріст.

Зауваження 3. Із теорії границі функції, якщо функція f є диференційованою в точці x_0, то:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longleftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Приріст функції є лінійним до приросту аргументу:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Отже, якщо має місце рівність:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0) \Longrightarrow \exists f'(x_0) = A$$

Теорема. (Необхідна умова диференційованості). Функція f є диференційованою в x_0 тільки тоді, коли f — неперервна в точці x_0. (Але не завжди неперервна функція є диференційованою)

Доведення. Щоб існувала похідна треба, щоб

$$f(x) - f(x_0) \to 0, x \to x_0$$

. З цього випливає, що f неперервна в точці x_0.

Теорема. (Диференційованість композиції функцій). Нехай дано функції f і g. Точка $x_0 \in D_{f\circ g},\ x_0 \in (D_{f\circ g})'$.

Якщо g диференційована в точці x_0, а f диференційована в точці $y_0 = g(x_0)$, то $f \circ g$ диференційована в точці x_0 і має місце рівність:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$$

Доведення.

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) =$$

$$= f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0) = f'(y_0)(g(x) - g(x_0)) + o(y - y_0) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(y - y_0) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) =$$
$$= f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))$$

Отже,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(y_0)(g'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f'(y_0)(g'(x_0)(1 + o(1))) + o(g(x_0) + o(1)) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f'(y_0)g'(x_0)(1 + o(1)) + o(1) = f'(y_0)g'(x_0)$$

Теорема. (Лінійність похідної). Нехай f і g — диференційовані в точці x_0. Тоді $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Доведення.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(x_0)}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha f(x)-\alpha f(x_0)}{x-x_0}+\frac{\beta g(x)-\beta g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\alpha\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\beta\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$$

Теорема. Похідна добутку. Нехай f і g диференційовані в точці x_0.

Тоді функція $f\cdot g$ теж диференційована в точці x_0, причому справедливе наступне співвідношення:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Доведення. За означенням:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}+\frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}=$$

Оскільки f — диференційована в точці x_0, то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

Абсолютно аналогічно $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$.

Окрім того f — диференційована в точці x_0, а значить f — неперервна в точці x_0, а значить:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

Отже:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}+\frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}=$$
$$=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$$

Теорема. Похідна частки. Нехай f і g диференційовані в точці x_0 і $g(x_0)\neq 0$.

Тоді, $\frac{f}{g}$ теж диференційована в точці x_0 і $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доведення. Аналогічно. Це доведення на дз :).

Приклад. Обчислити похідну від f від функції f в точці x_0.

1. $f(x) = x^3$.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = \ldots = 3x_0^2$$

2. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

   (a) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \frac{x^3-8}{x-2} = 3 \cdot 4 = 12$.

   (b) $x_0 \neq 2$. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = 3x_0^2$.

3. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

   (a) $x_0 \neq 2$. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = 3x_0^2$.

   (b) $x_0 = 2$. $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-7}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{8-7}{2-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{0} = +\infty$.

   Похідна не може дорівнювати нескінченності, отже $\nexists f'(2)$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 2 \\ 12x-16, & x < 2 \end{cases}$

   Як **не треба** робити:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

   Як **треба** робити:

   Розглядаємо 3 випадки:

(a) $x_0 > 2$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = 3x_0^2$$

(b) $x_0 < 2$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 12$$

(c) $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 12$$

Отже, функція диференційована на всіх дійсній прямій.

Теорема. (Про диференційованість оберненої функції). Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — оборотна, то $x_0 \in D_f$ і $x_0 \in (D_f)'$, $y_0 = f(x_0)$. Якщо існує $f'(x_0) \neq 0$ і обернена функція f^{-1} — неперервна в точці y_0, то вона диференційовна в цій точці. Якщо, крім того, y_0 — гранична точка множини $E_f = D_{f^{-1}}$, то

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доведення. Лектор не дав:(

Зауваженн. Функція f називається диференційованою на множині A якщо f має похідну в кожній точці $x_0 \in A$. Це позначається як $f \in D(A)$, де $D(A)$ — множина диференційованих на A функцій.

Односторонні похідні

Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$. Це рівносильно тому, що

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D_f : x_n < x_0,\ x_n \to x_0, n \to \infty$$

Границя $\lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ називається **лівосторонньою похідною** f в точці x_0. Позначаємо її як $f'_{\text{л}}(x_0)$.

Аналогічно, $f'_{\text{п}}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Приклади:

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

$$f'_{\text{л}}(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$f'_{\text{п}}(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty \Longrightarrow \nexists f'_{\text{п}}(x_0)$$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

$$f'_{\text{л}}(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$f'_{\text{п}}(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

Теорема. (Критерій диференційованості.)
Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$. Тоді:

$$\exists f'(x_0) \Longleftrightarrow \exists f'_{\text{л}}(x_0),\ \exists f'_{\text{п}}(x_0),\ f'_{\text{л}}(x_0) = f'_{\text{п}}(x_0)$$

Доведення.

$$\exists f'(x_0) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\ \exists \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\ \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Longleftrightarrow \exists f'_{\text{п}}(x_0),\ \exists f'_{\text{л}}(x_0),\ f'_{\text{п}}(x_0) = f'_{\text{л}}(x_0)$$

Зауваження.

$$f'_{\text{л}}(x_0) \neq \lim_{x \to x_0-} f'(x)$$

Розглянемо параметрично задану функцію $y(x)$:

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \Psi(t) \end{cases}$$

$$y(x) = \varphi(\Psi^{-1}(x))$$

Часом виразити y через x може бути просто, як тут:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \Longrightarrow y = x^{\frac{3}{5}}$$

Але буває, що не дуже просто:

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 + t \end{cases} \Longleftrightarrow y = ???$$

Але ж **так** хочеться знайти похідну...

Припустимо, що $\exists\varphi'$ і $\exists(\Psi^{-1})'$ і $\Psi' \neq 0$.

$$\text{Тоді } y'_x = \varphi'(\Psi^{-1}(x)) \cdot (\Psi^{-1})'(x) = \varphi'(t)\frac{1}{\Psi'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\Psi'(t)}$$

Приклад:

1. Знайти похідну y_x

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^5 \end{cases} \Longleftrightarrow y = x^{\frac{3}{5}}$$

Ми уже знайшли, що $y = x^{\frac{3}{5}}$, отже:

$$y'_x = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}(t^5)^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}t^{-2}$$

Але давайте спробуємо *по-нормальному*, застосувавши нашу формулу:

$$y'_x = \frac{(t^3)'}{(t_5)'} = \frac{3}{5}\frac{t^2}{t^4} = \frac{3}{5}t^{-2}$$

2.

$$\begin{cases} y = \cos^2 t \\ x = \sin^2 t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{2\cos t(-\sin t)}{2\sin t\cos t} = -1$$

Як цікавий факт можна помітити, що $y = 1 - x$, де $x \in [0;1]$

Похідні вищих порядків

Кажуть, що порядок похідної є вищим, якщо цей порядок більше за 1.

Нехай $f \in D((a,b))$. Припустимо, що f' є диференційованою в точці $x_0 \in (a,b)$. Тоді функція f є двічі диференційованою в точці x_0, а число $(f')'(x_0)$ називається **другою похідною функції** f в точці x_0. Вона позначається як $f''(x_0)$.

Наприклад:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = (f')'(x) = 6x$$

Аналогічно у функції f існує $n-$та похідна $f^{(n)}(x)$ на проміжку (a,b) і вона є диференційованою в точці $x_0 \in (a,b)$, того f має $(n+1)$-шу похідну в точці x_0.

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})|_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}$$

Приклад:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = 2\frac{1}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^4} = -6\frac{1}{x^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

Якщо f має n-ту похідну $f^{(n)}(x)$ у кожній точці проміжку I, то кажуть, що f є n разів диференційованою і позначається це так:

$$f \in D^{(n)}(I)$$

Якщо при цьому $f^n \in C(I)$, то кажуть, що $f \in C^{(n)}(I)$, то кажуть, що $f \in C^{(n)}(I)$.

$$C(I) \subset D(I) \subset C^{(1)}(I) \subset D^{(1)}(I) \subset C^{(2)}(I) \subset \dots$$

Домашня робота. Якщо у функції є похідна, чи обов'язково похідна неперервна?

Якщо $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists f^{(n)}$ на I, то кажуть, що f — нескінченно диференційована на I. Позначається так:

$$f \in C^{\infty}(I)$$

Дві властивочті n-тої похідної

Теорема. (Лінійність n-тої похідної). Нехай $f, g \in D^{(n)}(I)$, тоді

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \alpha f + \beta g \in D^{(n)}(I)$$

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

Теорема. Формула Лейбніца. Нехай $f, g \in D^{(n)}(I)$, тоді:

$$f \cdot g \in D^{(n)}(I)$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Доведення. Це вам нам Д/З. (Підзказка: воно доводиться так само, як формула бінома Ньютона).

Приклад:

1. Обчислити n-ту похідну від $f(x) = x^2 \ln x$.

$$(x^2 \ln x)^{(n)} = C_n^0 (x^2)^{(n)} \ln x + C_n^1 (x^2)^{(n-1)} (\ln x)^{(1)} + C_n^2 (x^2)^{(n-2)} (\ln x)^{(2)} + \ldots +$$
$$+ \ldots + C_n^{n-3} (x^2)^{(3)} (\ln x)^{(n-3)} + C_n^{n-2} (x^2)^{(2)} (\ln x)^{(n-2)} + C_n^{n-1} (x^2)^{(1)} (\ln x)^{(n-1)} +$$
$$+ C_n^n (x^2)^{(0)} (\ln x)^{(n)}$$

Тепер варто помітити, що:

$$(x^2)^{(1)} = 2x$$
$$(x^2)^{(2)} = 2$$
$$(x^2)^{(3)} = 0$$
$$(x^2)^{(n)} = 0, \ n > 3$$

Отже виходить, що наша сума дорівнює наступному:

$$C_n^{n-2}\frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}+C_n^{n-1}\frac{2x(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}+C_n^{n}\frac{x^2(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}}$$

2. Обчислити $(\frac{1}{a-x})^{(n)}$

$$(\frac{1}{a-x})^{(0)} = \frac{1}{a-x}$$
$$(\frac{1}{a-x})^{(1)} = \frac{1}{(a-x)^2}$$
$$(\frac{1}{a-x})^{(2)} = \frac{2}{(a-x)^3}$$
$$(\frac{1}{a-x})^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

3. Обчислити n-ту похідну від $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}\frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x}\frac{1}{2-x} =$$

З формули Лейбніца:

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(n-k)} \Big(\frac{1}{2-x}\Big)^{(k)}$$

А тепер використовуємо формулу з прикладу 2.

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(\frac{(n-k)!}{(1-x)^{n-k+1}}\Big)\Big(\frac{(k!)}{(2-x)^{k+1}}\Big)$$

Цікавий факт: конкретно у цьому завданні можна було зробити набагато простіше:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$$

Як обчислити похідну вищого порядку від параметрично заданої функції?

Ось *приклад*:

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t^3 + t \end{cases}$$
$$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{(t^2)'}{(t^3+t)'} = \frac{2t}{3t^2+1}$$

Початкова система задавала залежність y від x. Тепер ми можемо побудувати систему залежності y' від x:

$$\begin{cases} y'_x(t) = \frac{2t}{3t^2+1} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$
$$y''_x = (y'_x)' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{2t}{3t^2+1}\right)'}{(t^3+t)'} = \frac{-6t^2+2}{(3t^2+1)^3}$$

Тепер ми можемо побудувати залежність y''_x від x:

$$\begin{cases} y''_x(t) = \frac{-6t^2+2}{(3t^2+1)^3} \\ x = t^3 + t \end{cases}$$

І так далі...

Диференціал функції

Функція f називається диференційованою в точці x_0, якщо:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Нехай $x - x_0 = \Delta x$. Тоді:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)$$

Домножимо все на Δx:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0) + o(\Delta x)$$

Отже, $\Delta x f'(x_0)$ — головна частина приросту функції.

Означення. Лінійне відображення

$$L(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Називається **диференціалом функції** f в точці x_0. Це позначається так:

$$d_{x_0} f(h) = f'(x_0) \cdot h$$

Приклад:

$$f(x) = x^3, \ x_0 = 1$$

$$f'(x_0) = 3$$

$$d_{x_0} f(h) = 3h$$

Геометричний зміст диференціалу. Диференціал задає рівняння прямої, яка паральна дотичній до графіку функції у точці x_0 і проходить через початок координат.

Розглянемо $f(x) = x$. Тоді:

$$f'(x_0) = 1, \text{ для } \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Тоді:

$$d_{x_0} x(h) = 1 \cdot h = h$$

А тепер нехай g — довільна диференційована в x_0 функція:

$$(d_{x_0}g)(h) = g'(x_0) \cdot h = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x(h)$$

Якщо ми приберемо h, отримуємо:

$$d_{x_0}g = g'(x_0) \cdot d_{x_0}x$$

Запис, який ще часто можна зустріти:

$$dg = g'(x_0)dx$$

Зауваження. Диференціал функції f у точці x_0 $d_{x_0}f$ ще позначають $df|_{x_0}$, $df(x_0)$.

Інколи точку x_0 взагалі не пишуть і пишуть просто df.

Зауваження. З теореми про лінійність похідної, похідної частки, добутку та суперпозиції випливають наступні правила дій з диференціалом:

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$
$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$
$$d\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$
$$d(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot dg(x)$$

Ці властивості справедливі при виконанні умов відповідних теорем.

Приклад:

$$f = \ln(e^{u^2} + v)$$

$$df = d\ln(e^{u^2} + v) = \frac{1}{e^{u^2} + v} \cdot d(e^{u^2} + v) = \frac{de^{u^2} + dv}{e^{u^2} + v} =$$
$$= \frac{e^{u^2} \cdot du^2 + dv}{e^{u^2} + v} = \frac{e^{u^2} \cdot 2 \cdot u \cdot du + dv}{e^{u^2} + v}$$

Домашнє завдання. Познайомитися з поняттям подвійної похідної та властивостями другого диференціалу.

(Лектор сказав, що такого на іспиті не буде і взагалі ця тема буде використана у другому семетрі, тож не зробиши цього багато не втратите.)

Теорема про середні

Означення. Нехай $x_0 \in D'_f \cap D_f$.

Функція f має **локальний максимум** в точці x_0, якщо $\exists$ деяких ε-окіл точки x_0 $U_\varepsilon(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$:

$$\forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f)\ f(x) \le f(x_0)$$

Аналогічно означається локальний мінімум.

Означення. Якщо в точці x_0 f має локальний максимум і при цьому

$$\forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f) \setminus \{x_0\}\ f(x) < f(x_0)$$

Тоді кажуть, що в точці x_0 f має **строгий локальний максимум**.

Теорема Ферма. Нехай $x_0 \in (D_f \cap (-\infty, x_0))' \cap (D_f \cap (x_0, +\infty))' \cap D_f$.

Якщо f має локальний екстремум (тобто мінімум або максимум) в точці x_0 і є диференційованою в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Згідно критерію диференційованості:

$$\exists f'(x_0) \Longleftrightarrow \exists f'_{\text{л}}(x_0), f'_{\text{п}}(x_0), f'_{\text{л}}(x_0) = f'_{\text{п}}(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Розглянемо випадок, коли f має локальний мінімум. Випадок з максимумом доводиться аналогічно.

Якщо f має локальний мінімум в точці x_0, то:

$$\forall x \in U_\varepsilon \cap D_f$$

$$f(x_0) \le f(x) \Longrightarrow f(x) - f(x_0) \ge 0$$

При $x \to x_0-$:

$$x - x_0 < 0$$

$$f(x) - f(x_0) \ge 0, \text{ отже:}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0, \text{для } \forall x \in (U_\varepsilon \cap D_f), \text{ отже:}$$

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

Аналогічно

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$

$$0 \geq \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Отже:

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Longrightarrow$$

$$f'(x_0) = 0$$

Зауваження. Зворотнє твердження не є правдивим. Наприклад функція $f = x^3$ не має екстремуму в $x_0 = 0$, але $f'(0) = 0$.

Теорема Ролля. Нехай $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$.

$$\text{Якщо } f(a) = f(b), \text{ то } \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$$

Доведення. Використаємо теорему Вейерштрасса. Тоді f досягає на $[a,b]$ свого максимального і мінімального значення. Нехай

$$f(x^*) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$f(x_*) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

Якщо хоча б одне з цих чисел x^*, x_* потрапляє на інтервал (a,b), то виконано всі умови теореми Ферма, а отже f' в цій точці дорівнює нулю за теоремою Ферма.

Якщо обидві точки не належать інтервалу (a,b), то $\{x^*, x_*\} \subset \{a,b\}$.

Зважаючи, що $f(a) = f(b)$, тоді

$$f(x^*) = f(x_*) \Longrightarrow f \text{ є сталою на } [a,b]$$

Тоді $\forall \xi \in (a,b)$ $f'(\xi) = 0$

Приклад: Нехай $f \in D([0,1])$ і $f(0) = f(1) = 0$. Тоді $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ рівняння

$$f'(x) + \alpha f(x) = 0$$

Має розв'язок на $[0,1]$. *Доведення.* Розглянемо функцію

$$F(x) = e^{\alpha x} f(x)$$

$$F(0) = 0, \ F(1) = 0$$

Тоді за теоремою Ролля $\exists \xi \in [a,b]$:

$$F'(\xi) = 0$$

$$F'(x) = e^{\alpha x} \cdot f'(x) + \alpha e^{\alpha x} \cdot f(x)$$
$$e^{\alpha \xi} \cdot f'(\xi) + \alpha e^{\alpha \xi} \cdot f(\xi) = 0$$

Поділимо вираз на $e^{\alpha \xi}$.

$$f'(\xi) + \alpha f(\xi) = 0$$

Теорема Дарбу. Нехай $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ і $f'_{\text{п}}(a) \cdot f'_{\text{л}}(b) < 0$. Тоді $\exists \xi : f'(\xi) = 0$.

Доведення. Використаємо теорему Вейерштрасса. Тоді f досягає на $[a,b]$ свого максимального і мінімального значення. Нехай

$$f(x^*) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$f(x_*) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

Якщо хоча б одне з цих чисел x^*, x_* потрапляє на інтервал (a,b), то виконано всі умови теореми Ферма, а отже f' в цій точці дорівнює нулю за теоремою Ферма.

Якщо обидві точки не належать інтервалу (a,b), то $\{x^*, x_*\} \subset \{a,b\}$.

Тепер у нас можливі два випадки:

- Якщо $x^* = x_*$, то за теоремою Ролля все працює.
- Якщо $x^* \neq x_*$.

  Нехай $x^* = a,\ x_* = b$, тоді:

$$f'_{\text{п}}(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$$x - a > 0,\ f(x) - f(a) \leq 0 \Longrightarrow$$
$$f'_{\text{п}}(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

  Аналогічно

$$f'_{\text{л}}(b) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$$

Виходить, що:

$$f'_{п}(a) \cdot f'_{л}(b) \geq 0$$

Що суперечить умові.

Теорема про проміжні значення похідної. Нехай $f \in D([a,b])$. Тоді f' приймає всі значення між $f'_{п}(a)$ та $f'_{л}(b)$.

Доведення. Нехай α — дійсне число між $f'_{п}(a)$ та $f'_{л}(b)$. Розглянемо

$$F(x) = f(x) - \alpha \cdot x$$

$$F \in D([a,b])$$

$$F'_{п}(a) = f'_{п}(a) - \alpha < 0$$

$$F'_{л}(b) = f'_{л}(b) - \alpha > 0$$

Отже, ми точно знаємо, що

$$F'_{п}(a) \cdot F'_{л}(b) < 0$$

Отже, всі умови теореми Дарбу виконано, отже:

$$\exists \xi : F'(\xi) = 0 \Longrightarrow f'(\xi) - \alpha = 0 \Longrightarrow f'(\xi) = \alpha$$

Теорема Лагранжа. Нехай $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$.

$$\text{Тоді } \exists \xi \in (a,b) :$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

$$F \in C([a,b]) \cap D((a,b))$$

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a =$$

$$\frac{bf(a) - af(a) - af(b) + f(a)a}{b - a} =$$

$$\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

Аналогічними перетвореннями отримуємо

$$F(b)=\frac{-f(b)a+f(a)b}{b-a}$$

Виходить, що $F(a)=F(b)$

Отже, за теоремою Ролля $\exists\xi\in(a,b):F'(\xi)=0$

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Longrightarrow$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Наслідок. Нехай $f\in D([a,b])$ і $\forall x\in(a,b)\ f'(x)=0$, тоді

$$f=const \text{ на } (a,b)$$

Доведення. $\forall x_1,x_2\in(a,b)$.
Використаємо теорему Лагранжа для $[x_1,x_2]$

$$\text{Тоді } \exists\xi\in(x_1,x_2):$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)$$

$$f'(\xi)=0\Longrightarrow f(x_1)-f(x_2)=0\Longrightarrow f(x_1)=f(x_2)$$