УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Вычислительная математика

Малышева Татьяна Алексеевна, доцент, к.т.н.

Санкт-Петербург, 2021

Численные методы решения нелинейных уравнений

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение вида **f(x)= 0,** где **f(x)** — заданная алгебраическая или трансцендентная (включает в себя тригонометрические или экспоненциальные функции) функция.

f(x)= $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ (имеет *n*-корней)

f(x)= $\sin x+0{,}1x^2$ (имеет *бесконечное множество* решений)

Решить уравнение – это найти такое $x^* \in R$: **f**(x^*)=0. Значение x^* называют *корнем уравнения*.

Методы делятся на:

- **точные** (позволяют найти решение непосредственно с помощью формул)
- **итерационные** (приближенные)

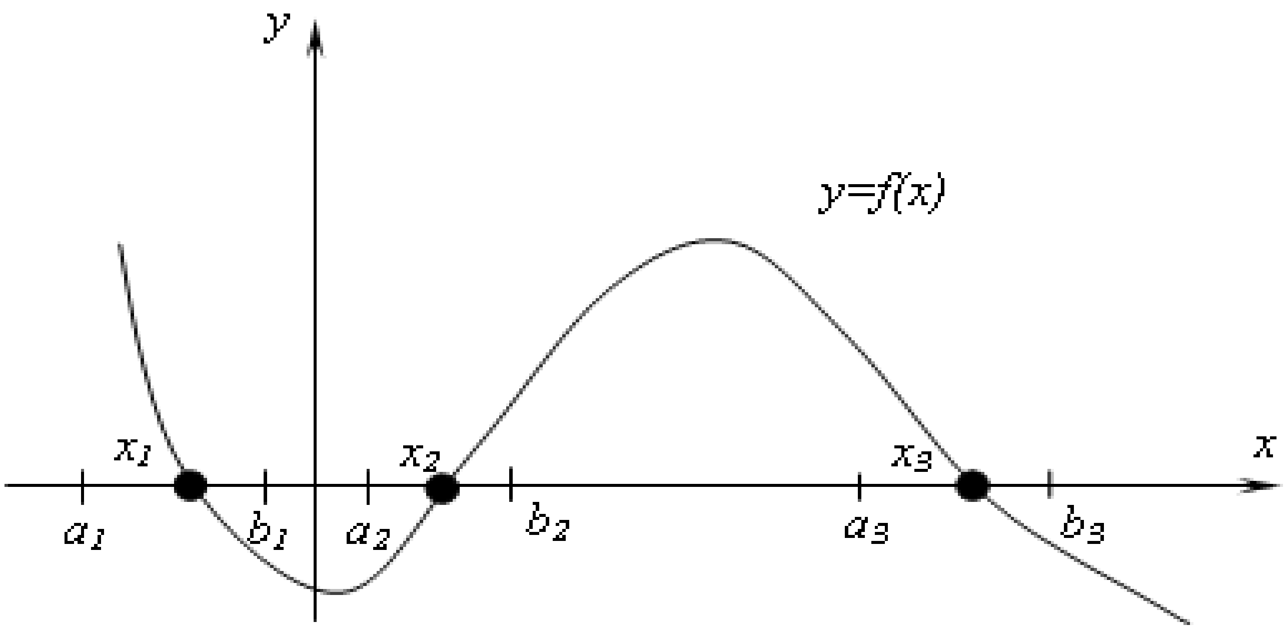
Этапы приближенного решения нелинейных уравнений

- Отделение (локализация) корней, т.е. определение интервала [a,b], на котором содержится только один корень уравнения **f(x)=0**. Такой интервал называется интервалом изоляции корня
- Уточнение корней до заданной точности

Способы отделения корней

- графический
- табличный
- аналитический

Графическое отделение корней



Табличное отделение корней

Аналитический способ состоит в нахождении экстремумов функции $f(x)$, исследование ее поведения при $x \to \pm\infty$ и нахождении участков возрастания и убывания функции.

Табличный способ – это построение таблицы табулирования функции.

О наличии корней свидетельствуют перемены знака функции. Чтобы не произошла потеря корней, шаг изменения аргумента должен быть достаточно мелким, а интервал изменения достаточно широким.

x	*f(x)*
-3	-29,280
-2,5	-13,818
-2	-3,330
-1,5	2,933
-1	5,720
-0,5	5,783
0	3,870
0,5	0,733
1	-2,880
1,5	-6,218
2	-8,530
2,5	-9,068
3	-7,080
3,5	-1,818
4	7,470
4,5	21,533
5	41,120

Теоремы существования корней

- ***Необходимое условие существования корня уравнения на отрезке* [a,b]:**

Теорема 1. Если непрерывная функция **f(x)** на концах отрезка [a; b] принимает значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то на этом отрезке содержится хотя бы один корень уравнения.

- ***Достаточное условие единственности корня* на отрезке [a,b]:**

Теорема 2. Если непрерывная функция **f(x)** на отрезке [a; b] принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная **f'(x)** сохраняет знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения **f(x) = 0**.

Методы уточнения приближенных значений действительных корней

- *метод половинного деления (метод дихотомии);*
- *метод хорд*
- *метод Ньютона (метод касательных) ;*
- *модифицированный метод Ньютона (метод секущих);*
- *метод простых итераций ;*
- и др.

Основные требования и показатели численных методов

- устойчивость;
- сходимость;
- эффективность (скорость сходимости);

Алгоритм считается устойчивым, если он обеспечивает нахождение существующего и единственного решения при различных исходных данных (малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в результате расчетов)

Алгоритм сходится, если итерационная последовательность приближений x_1, x_2,…,x_n→x* , $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

Скорость сходимости (эффективность) – обозначает количество итераций, затраченных алгоритмом для достижения приемлемой точности решения задачи. Чем выше скорость, тем меньше итераций необходимо выполнить.

Различают линейную, сверхлинейную, квадратичную скорость:

$|x^n - x^*| \leq \alpha |x^{n-1} - x^*|^\beta, \quad \alpha \in (0,1), \quad \beta = 1$ − линейная,

$1 < \beta < 2$ − сверхлинейная, $\beta = 2$ − квадратичная.

Метод половинного деления

Идея метода: начальный интервал изоляции корня делим пополам, получаем начальное приближение к корню:

$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$$

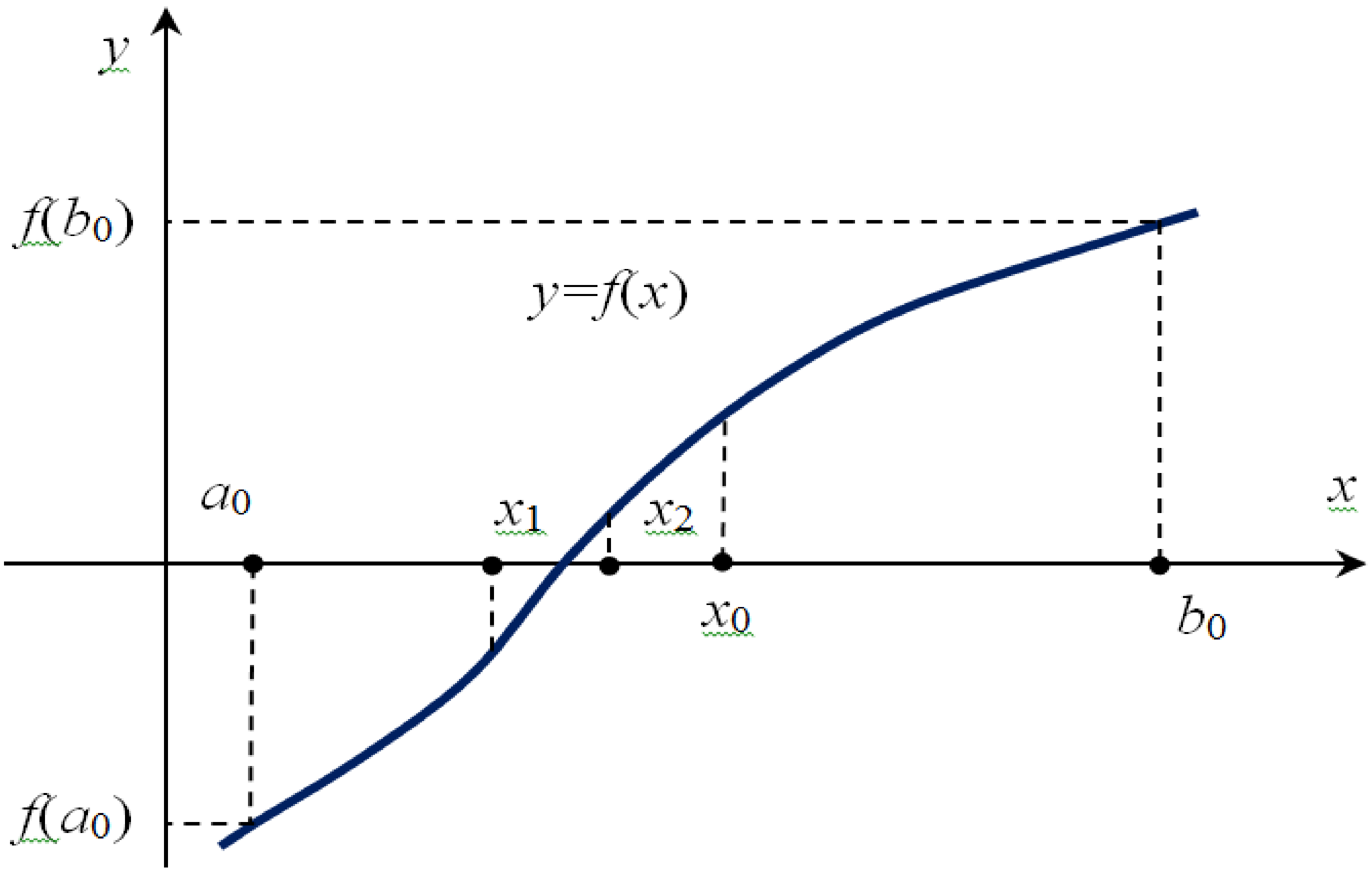
Вычисляем $f(x_0)$. В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0,x_0]$ либо $[b_0,x_0]$. Другую половину отрезка $[a_0, b_0]$, на которой функция $f(x)$ знак не меняет, отбрасываем. Новый интервал вновь делим пополам, получаем очередное приближение к корню: $x_1=(a_1+b_1)/2$. и т.д.

Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_i = \frac{a_i+b_i}{2}}$

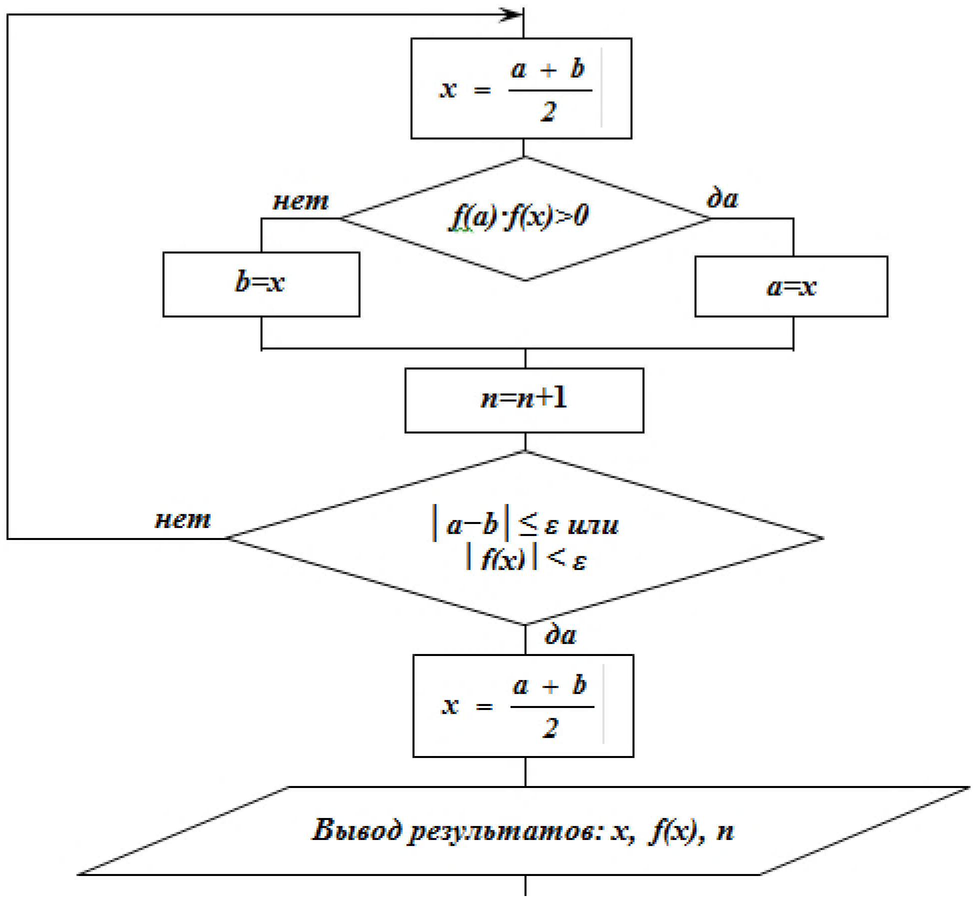
Критерий окончания итерационного процесса: $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$ или $|f(x_n)| \leq \varepsilon$.

Приближенное значение корня: $x^* = \frac{a_n+b_n}{2}$ или $x^* = a_n$ или $x^* = b_n$

Визуализация метода половинного деления



Блок-схема метода половинного деления



Достоинства и недостатки метода ПД

Достоинства:

- прост и надежен.
- обладает абсолютной сходимостью (близость получаемого численного решения задачи к истинному решению.)
- устойчив к ошибкам округления.

Рекомендация: применять когда требуется высокая надежность счета, а скорость несущественна.

Недостатки:

- если интервал содержит несколько корней, то неизвестно к какому относится вычислительный процесс.
- медленный метод: имеет линейную сходимость.

Оценка числа итераций

$$|a_1 - b_1| = \frac{|a_0 - b_0|}{2}, \; |a_2 - b_2| = \frac{|a_1 - b_1|}{2} = \frac{|a_0 - b_0|}{2^2}$$

$$|a_k - b_k| = |a_0 - b_0| \cdot 2^{-k}$$

$$|a_0 - b_0| \cdot 2^{-k} \leq \varepsilon$$

$$k \geq \log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon}$$

Для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$, при $|a_0 - b_0| = 1$

$$k = 9{,}966 \approx 10$$

Пример 1. Метод половинного деления

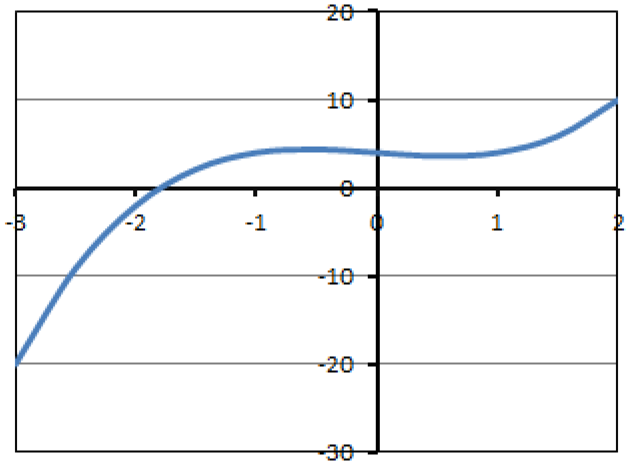
Найти корень уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$n = 7$

$$x^* \approx \frac{|a_7 + b_7|}{2} 1{,}79297$$



№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	|a-b|
0	-2,00000	-1,00000	-1,50000	-2,00000	4,00000	2,12500	1
1	-2,00000	-1,50000	-1,75000	-2,00000	2,12500	0,39063	0,5
2	-2,00000	-1,75000	-1,87500	-2,00000	0,39063	-0,71680	0,25
3	-1,87500	-1,75000	-1,81250	-0,71680	0,39063	-0,14185	0,125
4	-1,81250	-1,75000	-1,78125	-0,14185	0,39063	0,12961	0,0625
5	-1,81250	-1,78125	-1,79688	-0,14185	0,12961	-0,00480	0,03125
6	-1,79688	-1,78125	-1,78906	-0,00480	0,12961	0,06273	0,015625
7	-1,79688	-1,78906	-1,79297	-0,00480	0,06273	0,02905	0,0078125

Метод хорд

Идея метода: функция *y=f(x)* на отрезке [a, b] заменяется хордой и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью абсцисс.

Уравнение хорды, проходящей через точки A(*a, f(a))* и B *(b, f(b)):*

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

Точка пересечения хорды с осью абсцисс (*y=0):*

$$x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

Вычисляем x_0, *f(*x_0*).* В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: [a_0,x_0] либо [b_0,x_0].

Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_0 = b \rightarrow \quad x_i = b - \frac{(a-b)}{f(a)-f(b)} f(b) \qquad x_0 = a \rightarrow \quad x_i = a - \frac{(b-a)}{f(b)-f(a)} f(a)}$$

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \text{ или } |f(x_n)| \le \varepsilon.$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Метод хорд

Идея метода: функция *y=f(x)* на отрезке [a, b] заменяется хордой и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью абсцисс.

Уравнение хорды, проходящей через точки A(*a, f(a))* и B *(b, f(b)):*

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

Точка пересечения хорды с осью абсцисс (*y=0):* $x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$

1 шаг: Вычисляем x_0:

$$x_0 = a_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} f(a_0)$$

2 шаг: Вычисляем $f(x_0)$.

3 шаг: В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0, x_0]$ либо $[b_0, x_0]$.

4 шаг: Вычисляем x_1 и т.д (повторяем 1-3 шаги).

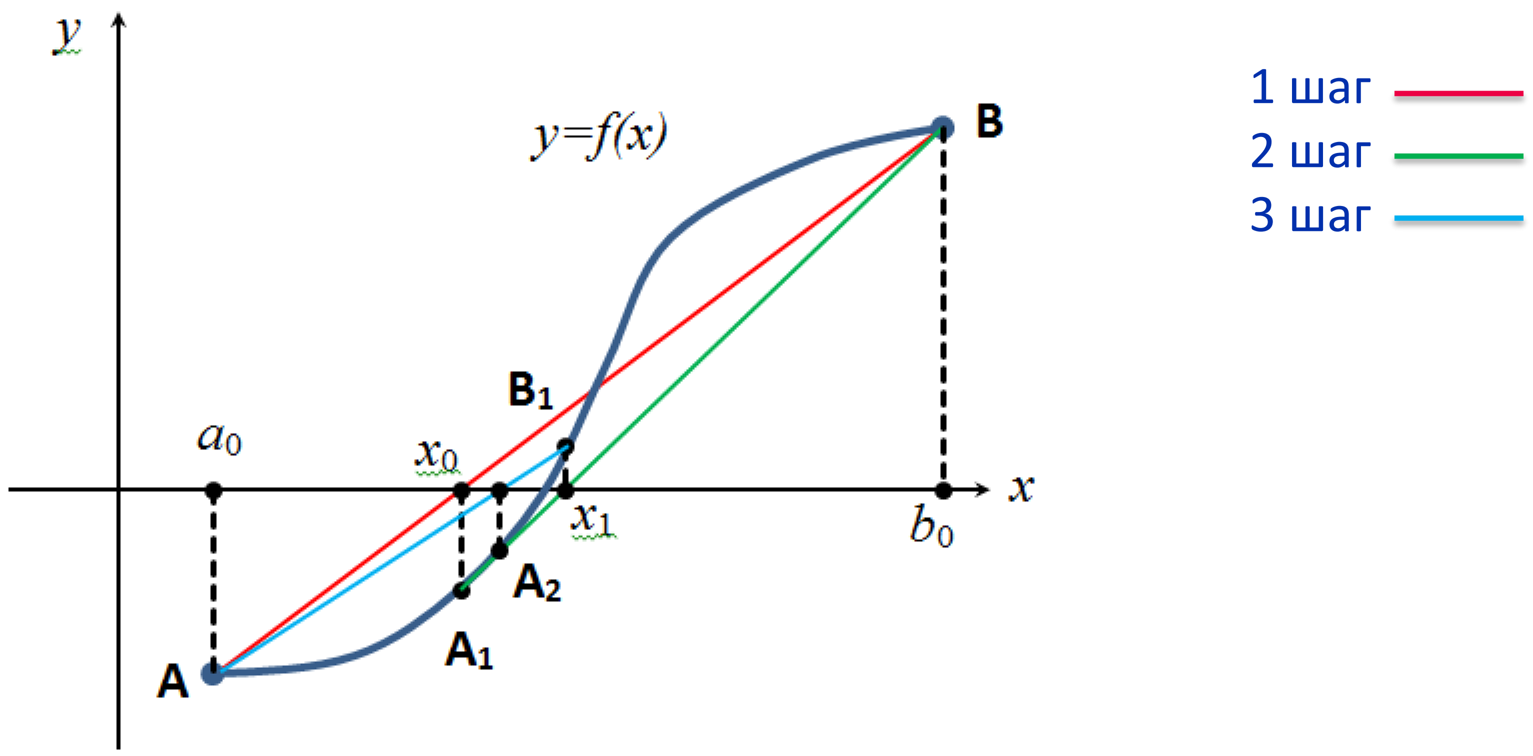
Рабочая формула метода:

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

Критерий окончания итерационного процесса: $|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon$ или $|f(x_i)| \le \varepsilon$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Визуализация метода хорд



Условия сходимости метода хорд

Достаточное условие сходимости метода:

- функция *y= f(x)* определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- *f(a)·f(b) < 0* (на концах отрезка [*a;b*] функция имеет разные знаки);
- производные *f'(x)* и *f''(x)* сохраняют знак на отрезке [*a;b*];

Выбор начального приближения $x_0 \in [a; b]$

Метод обеспечивает быструю *сходимость*, если выполняется условие:

$f(x) \cdot f''(x) > 0$ (тот конец интервала, для которого знаки функции и второй производной совпадают)

$$f(a) \cdot f''(a) > 0 \rightarrow x_0 = a$$
$$f(b) \cdot f''(b) > 0 \rightarrow x_0 = b$$

Метод хорд

Семейство *хорд* может строиться:

а) при фиксированном левом конце *хорд*, тогда x_0=b (рис. 1а)

Рабочая формула метода:

$$x_{i+1} = x_i \frac{a-x_i}{f(a)-f(x_i)} f(x_i)$$

б) при фиксированном правом конце *хорд*, тогда x_0=a (рис. 1б)

Рабочая формула метода:

$$x_{i+1} = x_i \frac{b-x_i}{f(b)-f(x_i)} f(x_i)$$

В этом случае **НЕ** надо определять на каждой итерации новые значения a, b

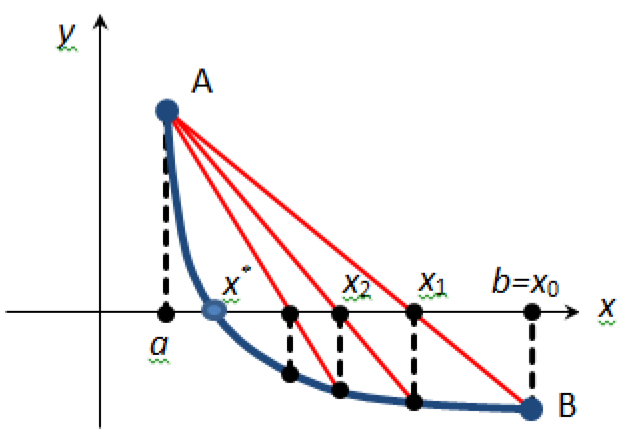


Рис. 1а

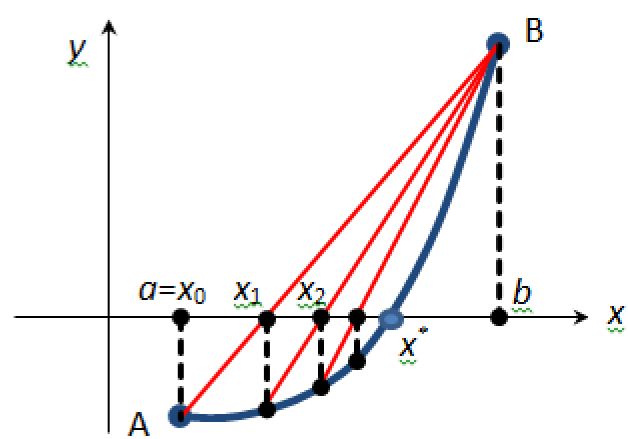


Рис. 1б

Достоинства и недостатки метода хорд

Достоинства:

- Простота реализации

Недостатки:

- Скорость сходимости – линейная. Порядок сходимости метода хорд выше, чем у метода половинного деления.
- Выбор начального приближения.

Пример 2. Метод хорд

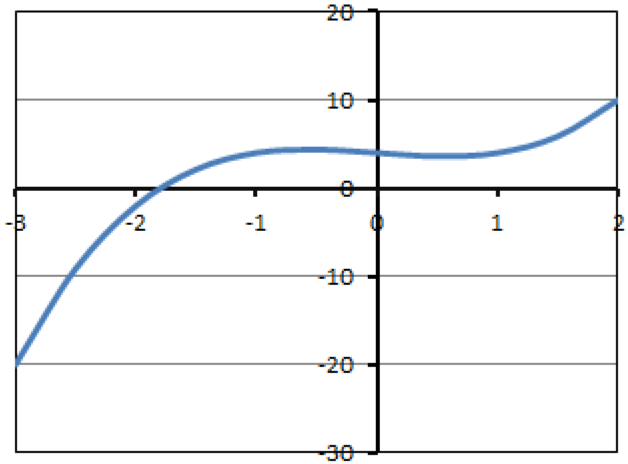
Найти корень уравнения:
$x^3 - x + 4 = 0$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f''(x) = 6x$
$f(-2) < 0 \;\; f(-1) > 0$

$f''(-2) < 0 \rightarrow x_0 = -2$
$n = 3$

$x^* \approx 1{,}79611$



№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	-2,00000	-1,00000	-1.66667	-2,00000	4,00000	1.03704	-
1	-2,00000	-1.66667	-1.78049	-2,00000	1.03704	0.13610	0.11382
2	-2,00000	-1.78049	-1.79447	-2,00000	0.13610	0.01603	0.01399
3	-2,00000	-1.79447	-1.79611	-0,71680	0.01603	0.00186	0.00163

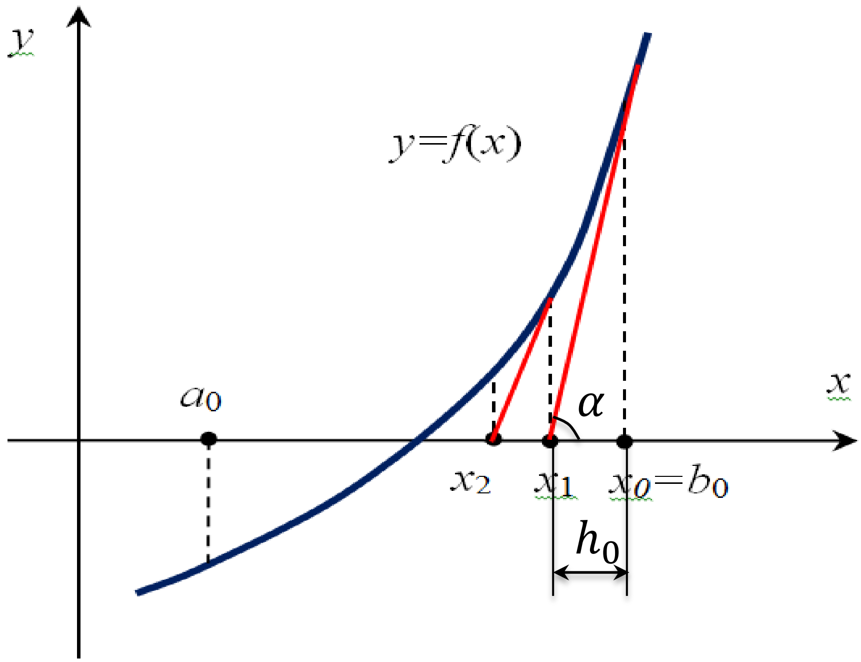
Метод Ньютона (касательных)

Идея метода: функция *y=f(x)* на отрезке [a, b] заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня $x^*=x_n$ принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

$$x_1 = x_0 - h_0$$

$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\tan\alpha} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}}$$

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \le \varepsilon$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Условия сходимости метода Ньютона

Достаточное условие сходимости метода Ньютона:

Метод Ньютона применяется в том случае, если выполняются условия:

- функция *y= f(x)* определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- *f(a)·f(b) < 0* (на концах отрезка [*a;b*] функция имеет разные знаки);
- производные *f'(x)* и *f''(x)* сохраняют знак на отрезке [*a;b*];
- производная *f'(x)≠0*

Выбор начального приближения $x_0 \in [a; b]$:

Метод обеспечивает быструю *сходимость*, если выполняется условие:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

(тот конец интервала, для которого знаки функции и второй производной совпадают)

Достоинства и недостатки метода Ньютона

Достоинства:

- квадратичная сходимость .

Недостатки:

- необходимость вычисления производной на каждой итерации.
- выбор начального приближения.

Пример 3. Метод Ньютона

Найти корень уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

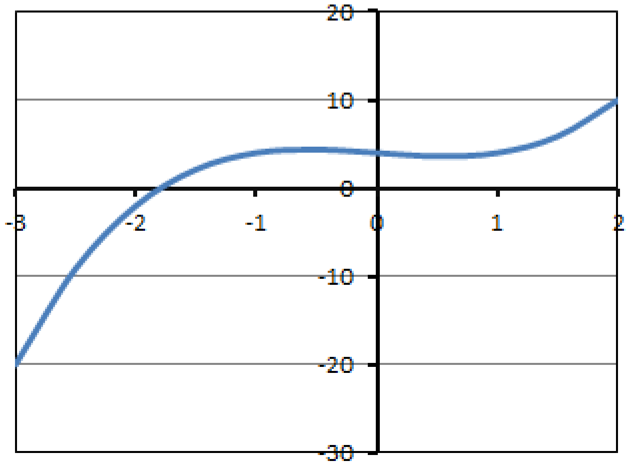
с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f''(x) = 6x$

$f(-2) < 0 \quad f(-1) > 0$

$f''(-2) < 0 \rightarrow x_0 = -2$

$n = 2 \quad x^* \approx 1{,}79632$



№ итерации	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	-2,00000	-2,00000	11.00000	-1.81818	-
1	-1.81818	-0.19234	8.91736	-1.79661	0.02157
2	-1.79661	-0.00253	8.68345	-1.79632	0.00029

Метод секущих

Упростим метод Ньютона, заменив $f'(x)$ разностным приближением:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)} \qquad i = 1,2\ldots$$

Метод секущих является *<u>двухшаговым</u>*, т.е. новое приближение x_{i+1} определяется двумя предыдущими итерациями x_i и x_{i-1}.

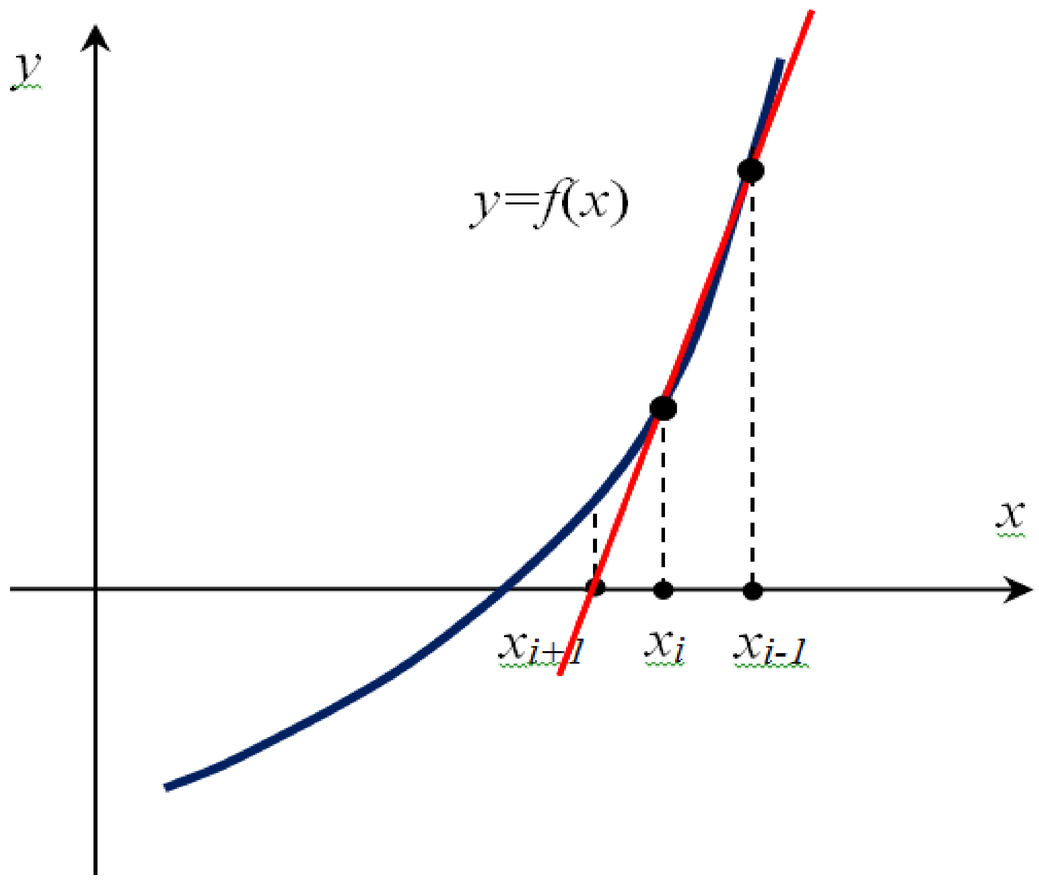
Выбор x_0 определяется как и в методе Ньютона, x_1- выбирается рядом с начальным самостоятельно.

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \text{ или } |f(x_n)| \leq \varepsilon.$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Визуализация метода секущих



Достоинства и недостатки метода секущих

Достоинства:

Меньший объем вычислений по сравнению с методом Ньютона, т.к. не требуется вычислять производную.

Недостатки:

Порядок сходимости метода секущих ниже, чем у метода касательных и равен золотому сечению ≈1,618 (сверхлинейная).

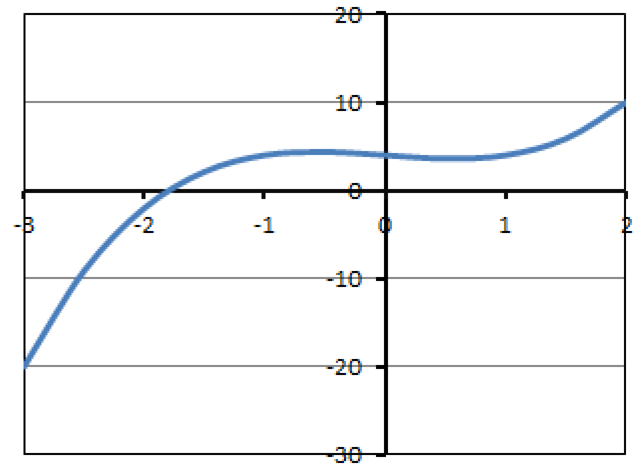
Пример 4. Метод секущих

Найти корень уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$x_0 = -2 \quad x_1 = -1{,}5$



$n = 2 \quad x^* \approx 1{,}79612$

№ итерации	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-2,00000	-1.50000	-1.75758	2.12500	0.25758
1	-1.50000	-1.75758	-1.80464	0.32830	0.04706
2	-1.75758	-1.80464	-1.79612	-.07258	0.00852

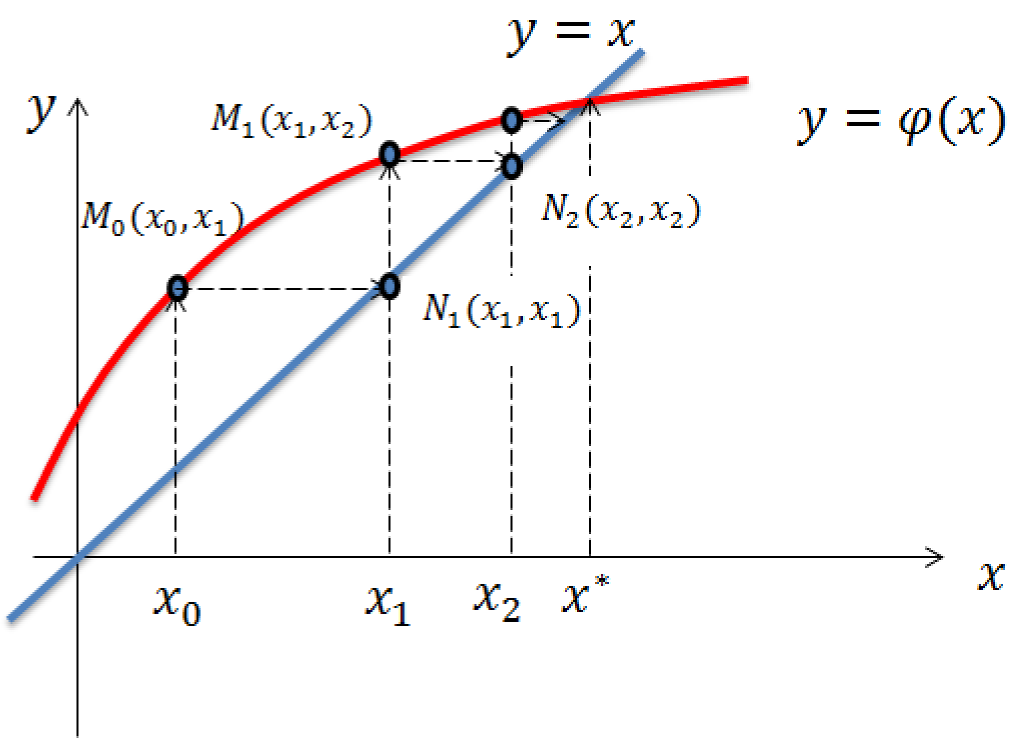
Метод простой итерации

Уравнение $f(x) = 0$ приведем к эквивалентному виду
$x = \varphi(x)$
Выбор начального приближения: $x_0 \in [a, b]$
$x_1 = \varphi(x_0) \to x_2 = \varphi(x_1) \dots$
Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_{i+1} = \varphi(x_i)}$
Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.
Теорема. Если на отрезке локализации $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема и удовлетворяет неравенству:
$|\varphi'(x)| < q$, где $0 \leq q < 1$, то независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ итерационная последовательность $\{x_n\}$ метода будет сходится к корню уравнения.

Достаточное условие сходимости метода:
$|\varphi'(x)| \leq q < 1$, где q – некоторая константа (коэффициент Липшица или коэффициент сжатия)

Критерий окончания итерационного процесса:
$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$ (при $0 < q \leq 0{,}5$)
$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$ (при $0{,}5 < q < 1$)

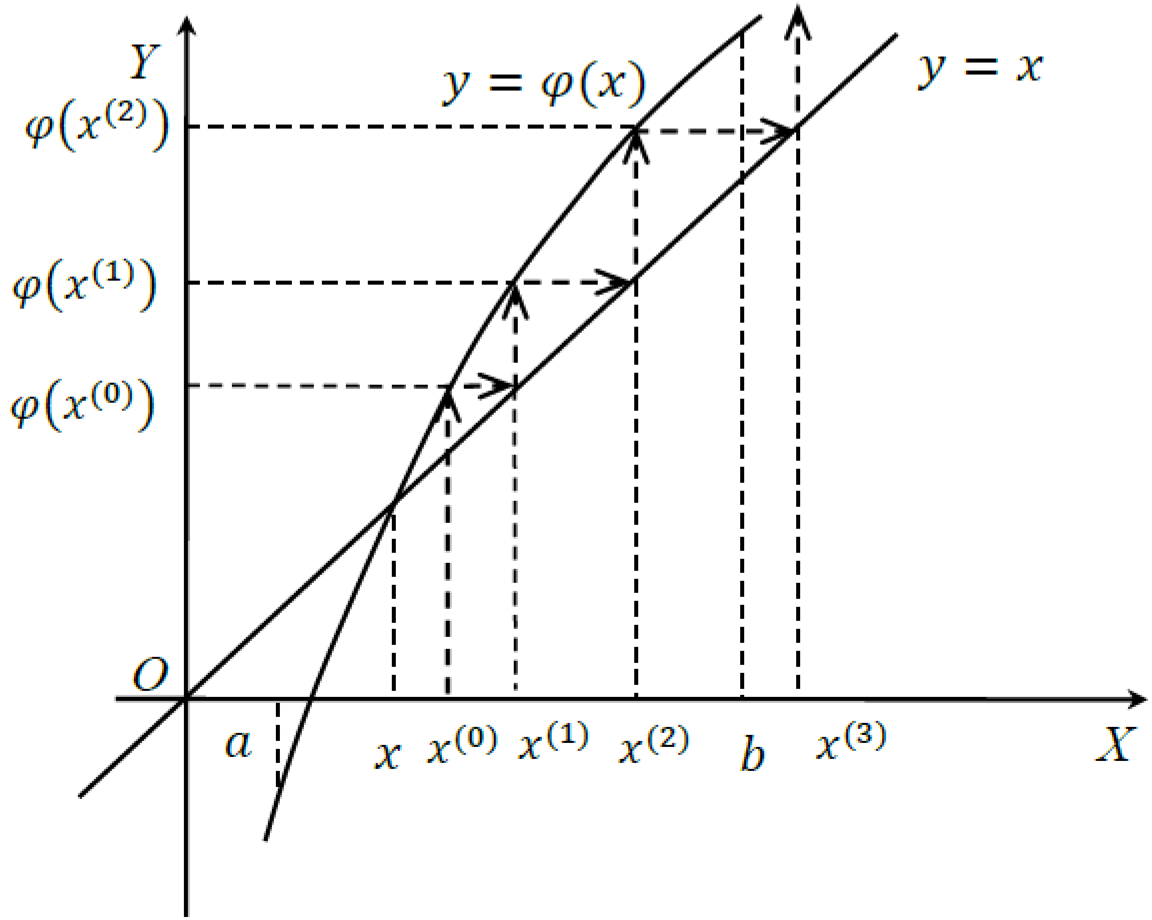
Геометрический смысл метода простой итерации



При итерационном процессе получается ломаная линия $M_0N_1M_1N_2M_2\ldots$, где абсциссы M_n- последовательные приближения x_n к решению x^*

Последовательность итераций на рисунке сходится к точному значению корня: предел последовательности $\{(x^k)\}$ существует и совпадает с корнем.

Геометрический смысл метода простой итерации



Последовательность $\{(x^k)\}$ может расходиться.
Это не значит, что уравнение не имеет корня.
Просто, последовательность к нему не сходится.

Достоинства и недостатки метода простой итерации

Достоинства:

Простота

Недостатки:

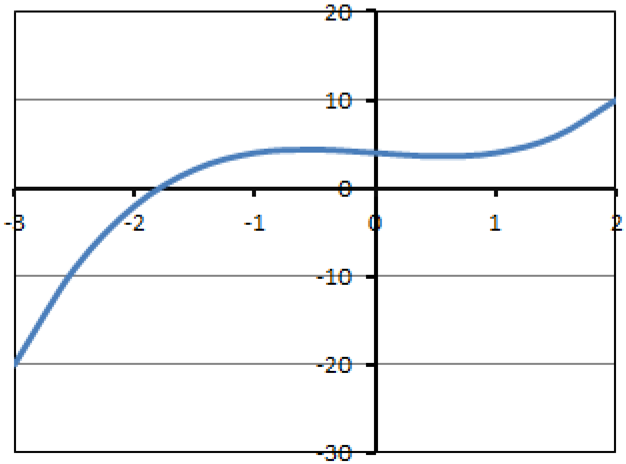
Недостатком этого метода является его сходимость в малой окрестности корня и вытекающая отсюда необходимость выбора начального приближения к корню из этой малой окрестности. В противном случае итерационный процесс расходится или сходится к другому корню этого уравнения.

Если $|\varphi'(x)| \approx 1$, то сходимость может быть очень медленной.

Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$



1 способ:

Преобразуем уравнение к виду $x = \varphi(x)$

$\varphi(x) = x^3 + 4 = 0$

$\varphi'(x) = 3x^2 \quad \varphi'(-2) = 12 > 1$

$\varphi'(-1) = 3 > 1$ Условие сходимости НЕ выполняется

2 способ:

$\varphi(x) = \sqrt[3]{x - 4}$

$\varphi'(x) = 1/3(x-4)^{-2/3} \quad |\varphi'(-2)| < 1 \quad |\varphi'(-1)| < 1$

Условие сходимости выполняется

Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

3 способ:

Если непосредственное преобразование уравнения к виду $x = \varphi(x)$ не позволяет получить уравнение, для которого выполняются условия сходимости метода, применяем более общий прием введения параметра λ

1. преобразуем уравнение $f(x) = 0$ к равносильному (при $\lambda \neq 0$) $\lambda f(x) = 0$
2. прибавим x в обеих частях: $x = x + \lambda f(x)$
3. $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$, $\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$
4. высокая скорость сходимости обеспечивается при $q = \max\limits_{[a,b]} |\varphi'(x)| \approx 0.$

Тогда $\lambda = -\frac{1}{\max\limits_{[a,b]} f'(x)}$

$\varphi(x) = x^3 + 4 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f'(-2) = 11 \quad f'(-1) = 2 \quad \lambda = -\frac{1}{\max\limits_{[a,b]} f'(x)} = -\frac{1}{11}$

$$x = x + \lambda f(x) \rightarrow x = x + \lambda(x^3 - x + 4) = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11}$$

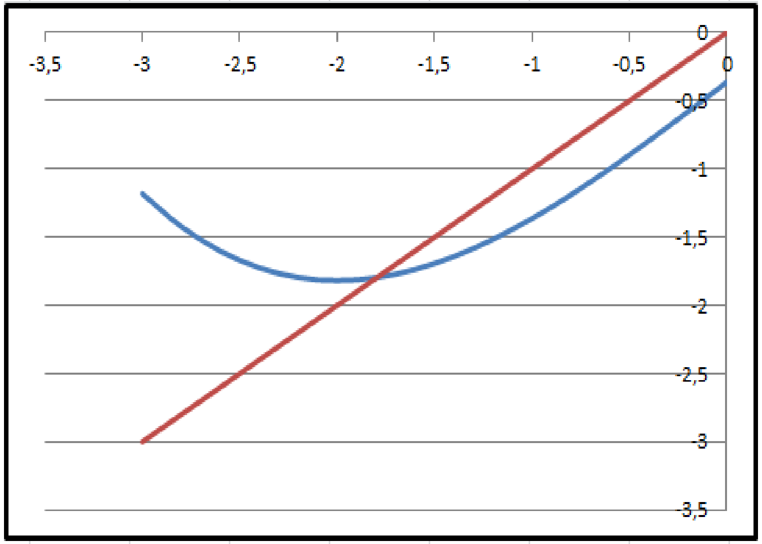
Метод простой итерации

$$x = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11}$$

$$x_0 = -2$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \frac{12}{11}x_0 - \frac{1}{11}{x_0}^3 - \frac{4}{11} \approx 1.8182$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \frac{12}{11}x_1 - \frac{1}{11}{x_1}^3 - \frac{4}{11} \approx 1.8007$$



№ итерации	x_i	x_{i+1}	$\varphi(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-2,0000	-1.8182	-1.8007	-0.19234	0.1818
1	-1.8182	-1.8007	-1.7972	-0.03808	0.0175
2	-1.8007	-1.7972	-1.7965	-0.00793	0.0035