

# Предисловие

В учебном пособии изложен цикл практических работ по дисциплине "Дискретные системы управления" с приложениями к синтезу дискретных систем автоматического управления. Всего представлено  $n$  работ, охватывающих следующие разделы дисциплины: tbd. В каждой работе приведены сжатые теоретические сведения, необходимые для успешного решения поставленной в работе задачи, наглядный пример выполнения задания, порядок выполнения работы и список вариантов.

Практикум рекомендован к использованию в качестве пособия к лабораторным или практическим работам при реализации таких дисциплин как "Дискретные системы управления", "Цифровые системы управления", "Специальные разделы теории управления" и других дисциплин, включающих в себя разделы, связанные с анализом и синтезом дискретных систем автоматического управления.

Учебное пособие рассчитано на студентов направлений Робототехника, Интеллектуальная робототехника и Управление в технических системах, однако оно может быть рекомендовано также аспирантам и молодым специалистам, которым по роду своей образовательной и практической деятельности приходится иметь дело с проблемами канализации информации, обеспечения её помехозащиты при передаче и хранении, а также разработки устройств дискретной автоматики и устройств преобразования кодов.

# 1 Дискретные системы управление. Моделирование и устойчивость

Любая система автоматического управления состоит из набора элементов, определяющих функционирование системы. Для каждого из элементов системы связь между входной и выходной переменными описывается алгебраическими, дифференциальными, разностными уравнениями, либо уравнениями в частных производных. Под дискретными системами будем понимать такие системы, в структуре которых имеет место хотя бы один элемент, для которого непрерывному изменению входного сигнала соответствует дискретное по времени изменение выходного сигнала. Так, для регулятора, который реализуется на микроконтроллере, требуется алгоритм, заданный в виде рекуррентного соотношения с дискретным временем (разностного уравнения). Получение разностного уравнения может производиться по непрерывной модели регулятора, путем замены дифференциальных уравнений разностными [8, 18]. Возможно получение разностного уравнения для описания регулятора по дискретной модели исходного ОУ на основе аналитических методов проектирования дискретных регуляторов.

Рассмотрим структурный элемент системы с входной  $x_1$  и выходной  $x_2$  переменными, графическое изображение которого показано на рисунке 1а. Будем говорить, что элемент — дискретного принципа действия, если при непрерывном изменении входной переменной выходная переменная изменяется только в дискретные моменты времени. Для элемента дискретного принципа действия характерно, что если изменение входной переменной описывается непрерывной функцией  $x_1(t)$ , то изменение выходной переменной описывается функцией  $x_2(t)$ , значения которой изменяются только в дискретные моменты времени  $t = mT$ , где  $T$  — интервал дискретности, а  $m = 0, 1, 2, \dots$  — целое число, определяющее номер интервала дискретности. На рисунке 1б показан пример экстраполяции дискретных значений входного сигнала с периодом квантования (запоминающий элемент).

Рассмотрим уравнение экстраполяции нулевого порядка для произвольного момента времени  $t$  на интервале времени  $mT \leq t \leq (m+1)T$ :

$$\begin{aligned}x_2(t) &= x_1(mT), \\t &= mT + \tau, \\0 &\leq \tau < T, \\x_2(mT + \tau) &= x_1(mT).\end{aligned}\tag{1}$$

Элемент, описание которого задается уравнением (1), называют запоминающим элементом или экстраполятором нулевого порядка.

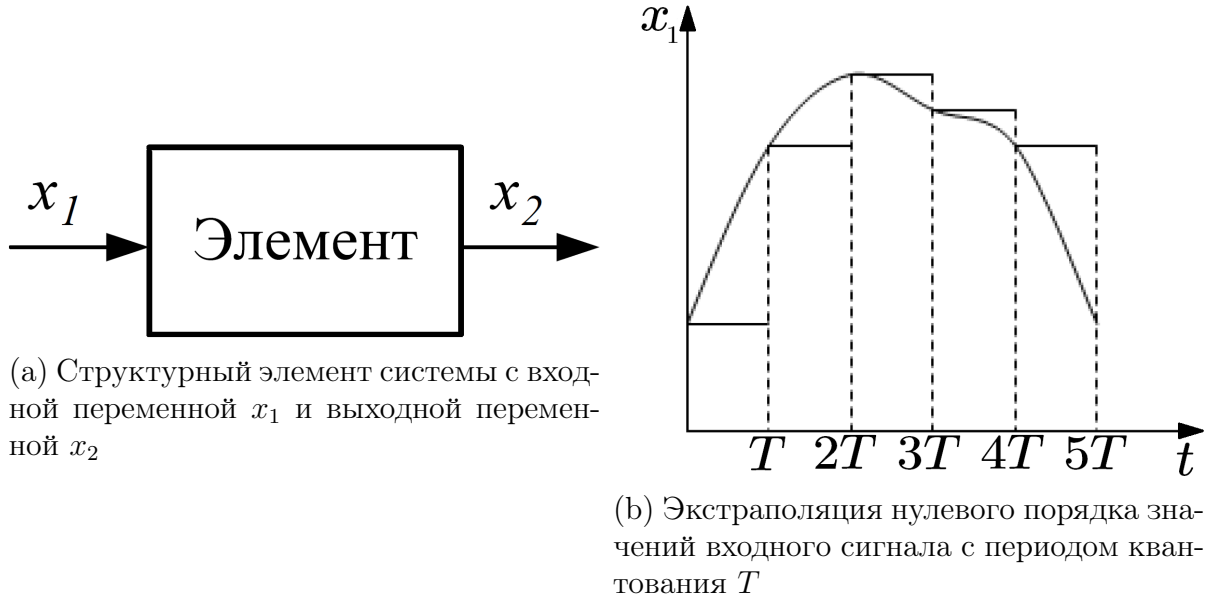


Рис. 1

Рассмотрим общую ситуацию амплитудно-импульсной модуляции, когда имеет место устройство, генерирующее импульсы определенной формы и заданной длительности с постоянным интервалом дискретности и амплитудой, пропорциональной значению входного сигнала в предшествующий момент времени. Рассматриваемая ситуация иллюстрируется рисунком 2.

Зададим описание импульса, который имеет место на каждом интервале дискретности  $0 \leq \tau < T$ . Положим, что форма нормированного импульса задается функцией  $\varphi(\tau)$ , определенной на промежутке времени  $0 \leq \tau < \tau_1$ , где  $\tau_1$  – длительность импульса, и функция  $\varphi(\tau) = 0$  при  $\tau_1 \leq \tau < T$ , тогда для произвольного момента времени  $mT \leq t < (m+1)T$  имеем:

$$x_2(mT + \tau) = \varphi(\tau) x_1(mT),$$

$$t = mT + \tau,$$

то есть уравнение определяет связь входной и выходной переменных импульсного элемента при амплитудно-импульсной модуляции.

Рассмотрим структурное представление импульсного элемента, осуществляющего амплитудно-импульсную модуляцию [9]. Для отражения процесса дискретизации по времени в структуру системы вводится элемент «ключ», замыкание которого происходит только в дискретные моменты времени  $t = mT$ , как показано на рисунке 3а. Полагается, что импульсы на выходе ключа имеют бесконечно малую длительность, а их амплитуда равна значению входного сигнала в дискретные моменты времени  $t = mT$ .

Для отражения формы импульсов, определяющих изменение выходного сигнала при амплитудно-импульсной модуляции, вводится понятие «импульсный

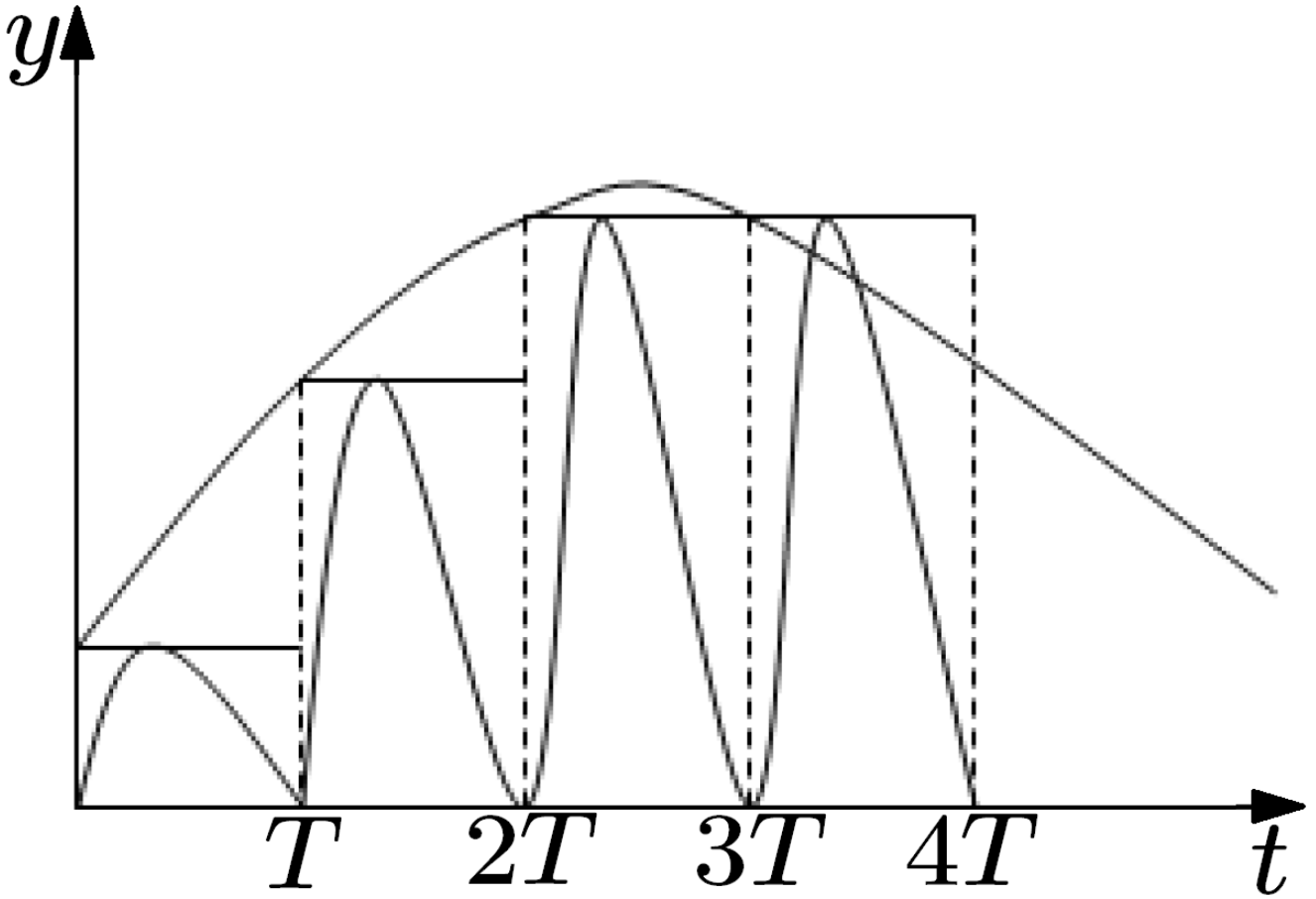


Рис. 2: Иллюстрация амплитудно-импульсной модуляции

элемент». Под импульсным элементом (ИЭ) будем понимать элемент структурной схемы, который формирует импульс длительности  $\tau_1$  ( $\tau_1 < T$ ) описание формы которого задается функцией  $\varphi(\tau)$  на интервале  $0 \leq \tau < \tau_1$  и эти импульсы генерируются с периодом, равным интервалу дискретности  $T$  в моменты времени  $t = mT$ . Пример импульсного элемента приведен на рисунке 3б.

Рассмотрим последовательное соединение ИЭ, осуществляющего амплитудно-импульсную модуляцию, и непрерывной линейной части (НЛЧ) системы, описание которой задается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, как показано на рисунке 4.

На рисунке 4 обозначены:  $u$  – входной сигнал ИЭ;  $\varepsilon$  – сигнал, подаваемый на вход НЛЧ;  $y$  – выходной сигнал НЛЧ.

Будем полагать, что НЛЧ описывается уравнением движения в пространстве состояний в форме «вход-состояние-выход»:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\text{н}}x + B_{\text{н}}\varepsilon \\ y = Cx \end{cases},$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния непрерывной линейной части (НЛЧ);  $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$  –

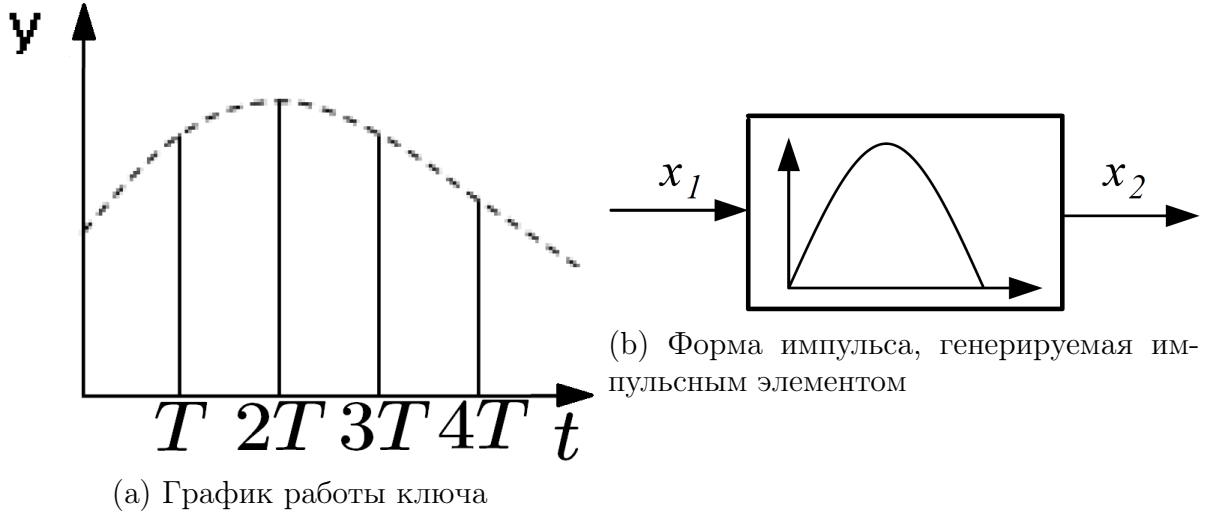


Рис. 3

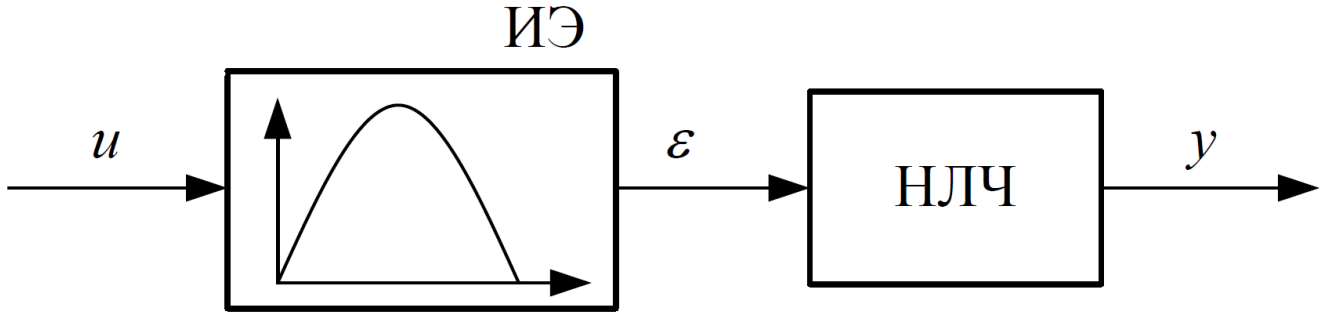


Рис. 4: Последовательное соединение ИЭ и НЛЧ

входной сигнал для НЛЧ;  $y \in \mathbb{R}^1$  – выходной сигнал (выходная переменная) НЛЧ. Матрицы описания модели «вход-состояние-выход» имеют следующие размерности:  $A_n - n \times n$ ;  $B_n - n \times 1$ ;  $C - 1 \times n$ .

Описание ИЭ при амплитудно-импульсной модуляции определяется соотношениями

$$\begin{aligned} t &= mT + \tau, \\ \varepsilon(mT + \tau) &= \varphi(\tau) u(mT), \\ 0 &< \tau < T. \end{aligned}$$

Получим модель, связывающую значения входной и выходной переменных последовательного соединения ИЭ и НЛЧ в дискретные моменты времени  $t = mT$  [15]. Для этого рассмотрим решение уравнения НЛЧ для произвольного момента времени  $t$  ( $mT \leq t < (m+1)T$ ):

$$x(t) = e^{A_n(t-mT)} x(mT) + \int_{mT}^t e^{A_n(t-\theta)} B_n \varepsilon(\theta) d\theta.$$

При описании процессов по граничным значениям времени на интервале дискретности получим разностное уравнение совместного описания ИЭ и НЛЧ:

$$x((m+1)T) = e^{A_n T} x(mT) + \int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_n((m+1)T-\theta)} B_n \varepsilon(\theta) d\theta.$$

С учётом уравнения описания ИЭ для интегральной составляющей получим:

$$\begin{aligned} \int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_n((m+1)T-\theta)} B_n \varepsilon(\theta) d\theta &= \int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_n((m+1)T-\theta)} B_n \varphi(\theta - mT) u(mT) d\theta = \\ &= \int_0^T e^{A_n(T-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \cdot B_n u(mT), \end{aligned}$$

где  $\theta = mT + \tau$ .

Отметим, что полученное интегральное выражение не зависит от номера интервала дискретности и результат его вычисления дает постоянную матрицу для любого из номеров интервалов дискретности  $m$ . Обозначим значение данного интегрального выражения через матрицу

$$B = \int_0^T e^{A_n(T-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \cdot B_n, \quad (2)$$

тогда окончательно для интегральной составляющей имеет место соотношение

$$\int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_n((m+1)T-\theta)} B_n \varepsilon(\theta) d\theta = Bu(mT).$$

При этом уравнение движения при последовательном соединении ИЭ и НЛЧ для дискретных моментов времени  $t = mT$  (будем далее опускать обозначение интервала дискретности  $T$ ) определяется разностным уравнением с постоянными параметрами

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}, \quad (3)$$

где  $A = e^{A_n T}$  – постоянная матрица дискретной модели;  $B$  – матрица входов по управлению, которая определяется по выражению (5).

Полученное совместное описание импульсного элемента и НЛЧ в виде разностного уравнения задает связь значения вектора состояния на последующем интервале дискретности со значениями вектора состояния и входных сигналов на предшествующих интервалах дискретности. Стоит помнить, что разностные уравнения задают описание процессов в системе только в дискретные моменты времени  $t = mT$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , где  $T$  – интервал дискретности, а  $m$  – номер интервала дискретности.

Рассмотрим в качестве примера последовательное соединение запоминающего элемента (экстраполятора нулевого порядка), описываемого уравнением

$$\varepsilon(mT + \tau) = u(mT), \quad 0 \leq \tau \leq T,$$

с непрерывной линейной частью (НЛЧ) вида

$$\dot{x}(t) = A_{\text{н}}x(t) + B_{\text{н}}\varepsilon(t).$$

Рассмотрим поведение этой системы в дискретные моменты времени  $t = mT$ , для чего запишем

$$x((m+1)T) = e^{A_{\text{н}}T}x(mT) + \int_{mT}^{(m+1)T} e^{A_{\text{н}}((m+1)T-\theta)} B_{\text{н}}\varepsilon(\theta) d\theta.$$

Вычислим значение интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{A_{\text{н}}(T-\tau)} d\tau &= e^{A_{\text{н}}T} \int_0^T e^{-A_{\text{н}}\tau} d\tau = e^{A_{\text{н}}T} A_{\text{н}}^{-1} (I - e^{-A_{\text{н}}T}) = A_{\text{н}}^{-1} (e^{A_{\text{н}}T} - I) = \\ &= A_{\text{н}}^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{A_{\text{н}}^i T^i}{i!} - I \right) = A_{\text{н}}^{-1} \left( I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{н}}^i T^i}{i!} - I \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{н}}^{i-1} T^i}{i!}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрицы  $A$  и  $B$  дискретной модели будут равны

$$A = e^{A_{\text{н}}T} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{н}}^i T^i}{i!},$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{н}}^{i-1} T^i}{i!} B_{\text{н}}.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  могут быть вычислены приближенно с использованием конечного числа членов разложения экспоненты в степенной ряд. Выделим

первые  $k$  членов ряда, тогда приближенное вычисление матриц описания движений дискретной модели можно задать равенствами

$$A = \sum_{i=1}^k \frac{A_{\text{н}}^i T^i}{i!}, \quad (4)$$

$$B = \sum_{i=1}^k \frac{A_{\text{н}}^{i-1} T^i}{i!} B_{\text{н}}. \quad (5)$$

Чем большее количество членов ряда  $k$  используется при вычислении матриц, тем точнее вычисляются значения элементов матрицы.

Аналитическое решение разностного уравнения (3) можно записать в двух эквивалентных формах:

$$x(m) = A^m x(0) = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} A^i B u(m-1-i)$$

и

$$x(m) = A^m x(0) = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} A^{m-1-i} B u(i),$$

причем слагаемые, содержащие суммы, подобны записи интеграла типа Дюамеля для непрерывного объекта или системы.

В аналитическом решении разностного уравнения 1-е слагаемое, порожденное ненулевыми начальными условиями, определяет свободное движение дискретной системы или объекта, а 2-е слагаемое, порожденное внешней функцией, определяет вынужденное движение системы. Из анализа решения разностного уравнения следует, что матрица  $A$  описания движения исходного объекта, а именно ее свойства (характеристический полином, корни характеристического полинома), определяют решение уравнения или поведение процессов для ОУ (системы).

## Построение линейных дискретных генераторов внешних воздействий

В ряде задач анализа и синтеза систем управления возникает необходимость построения дискретной эталонной модели желаемого поведения. Такая задача возникает при построении дискретных моделей внешних воздействий (называемых генераторами команд), т. е. эталонных сигналов и возмущений.



Дискретная модель внешнего воздействия описывается в пространстве состояний следующими разностными уравнениями:

$$\xi(k+1) = \Gamma_d \xi(k), \quad (6)$$

$$g(k) = H \xi(k), \quad (7)$$

где  $\xi(k)$  –  $n$ -мерный вектор состояния дискретного командного генератора,  $g(k)$  – дискретное внешнее воздействие,  $\Gamma$  – матрица динамики дискретного генератора размерности  $n \times n$ ,  $H$  – матрица выходов дискретного генератора размерности  $1 \times n$ .

Решение системы уравнений (6)-(7) задает класс дискретных внешних воздействий в виде:

$$g(k) = H \Gamma_d^k \xi(0).$$

Дискретные внешние воздействия генерируются путем изменения начальных условий  $g(0)$ .

Общий метод построения моделей внешних воздействий заключается в последовательном взятии разностей. Рассмотрим этот метод на примере. Предположим, что требуется построить модель дискретного генератора следующего внешнего воздействия:

$$g(k) = A + BkT + C(kT)^2,$$

где  $A$  – начальная амплитуда дискретного сигнала,  $B$  – скорость нарастания дискретного сигнала,  $C$  – ускорение дискретного сигнала. Алгоритм построения модели дискретного генератора внешнего воздействия состоит из следующих шагов:

1. Выберем в качестве первой координаты вектора состояния дискретного генератора сам сигнал:

$$\xi_1(k) = g(k). \quad (8)$$

2. Возьмем первую разность и выберем вторую переменную вектора состояния в виде этой разности

$$g(k+1) = A + BkT + BT + C(kT)^2 + 2CkT^2 + CT^2. \quad (9)$$

Подставим (8) в (9):

$$\xi_2(k) = g(k+1) = g(k) + BT + 2CkT^2 + CT^2. \quad (10)$$

3. Возьмем вторую разность и выберем третью переменную вектора состояния в виде этой разности

$$g(k+2) = g(k+1) + BT + 2CkT^2 + 2CT^2 + CT^2. \quad (11)$$

Выразим слагаемое  $BT + 2CkT^2 + CT^2$  из (10):

$$BT + 2CkT^2 + CT^2 = g(k+1) - g(k). \quad (12)$$

Третью переменную вектора состояния получим путем подстановки (12) в (11):

$$\xi_3(k) = 2g(k+1) - g(k) + CT^2. \quad (13)$$

4. Возьмем третью разность и выберем четвертую переменную вектора состояния в виде этой разности

$$g(k+3) = 2g(k+2) - g(k+1) + CT^2. \quad (14)$$

Выразим слагаемое  $CT^2$  из (13):

$$CT^2 = g(k+1) - g(k). \quad (15)$$

Подставим (15) в (14) и получим:

$$\xi_4(k) = 3g(k+2) - 3g(k+1) + g(k). \quad (16)$$

Наконец, получим следующую систему выражений:

$$\begin{cases} \xi_1(k+1) = \xi_2(k), \\ \xi_2(k+1) = \xi_3(k), \\ \xi_3(k+1) = \xi_1(k) - 3\xi_2(k) + 3\xi_3(k), \\ g(k) = \xi_1(k). \end{cases}$$

Рассмотрим выражения (6), (7), (10), (13), (16) при  $k = 0$  и получим вектор начальных условий:

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} A \\ A + BT + CT^2 \\ A + 2BT + 3CT^2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, после выполнения всех указанных шагов командный генератор будем строить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix},$$

$$g(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix},$$

где

$$\Gamma_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Схема моделирования рассчитанного генератора в среде Matlab Simulink приведена на рисунке 5. График выходного сигнала командного генератора при заданных параметрах приведен на рисунке 6.

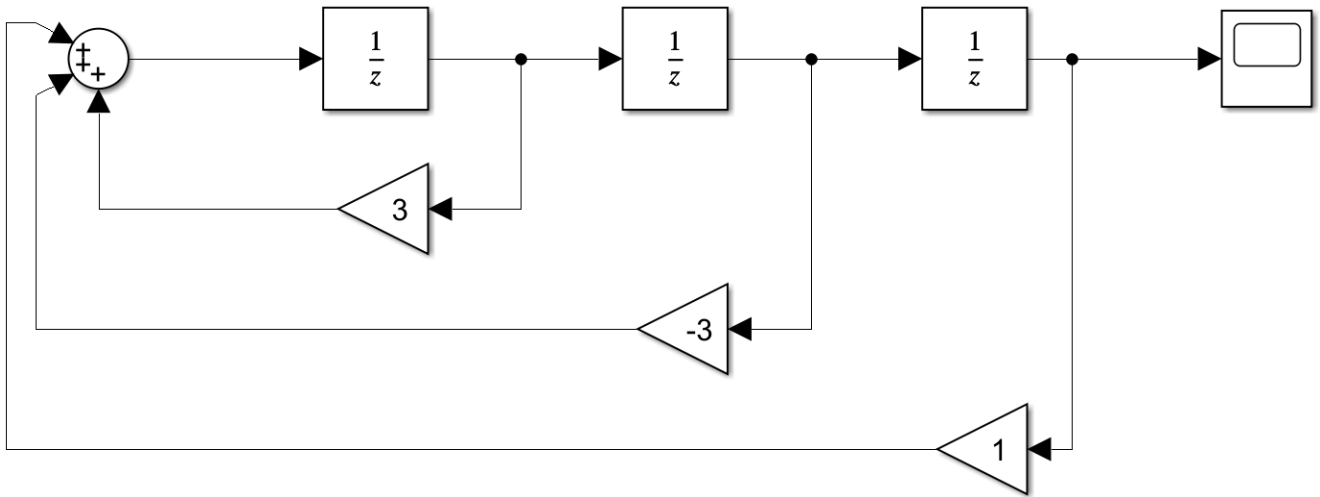


Рис. 5: Схема моделирования.

## Устойчивость дискретных систем

Рассмотрим невозмущенное уравнение движения дискретной системы, заданное в пространстве состояний:

$$x(m+1) = F(x(m)),$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния,  $F$  –  $n$ -мерная нелинейная векторнозначная функция векторного аргумента такая, что при  $x = 0$   $F(0) = 0$ , и решение исходного разностного уравнения при произвольных начальных условиях единственно.

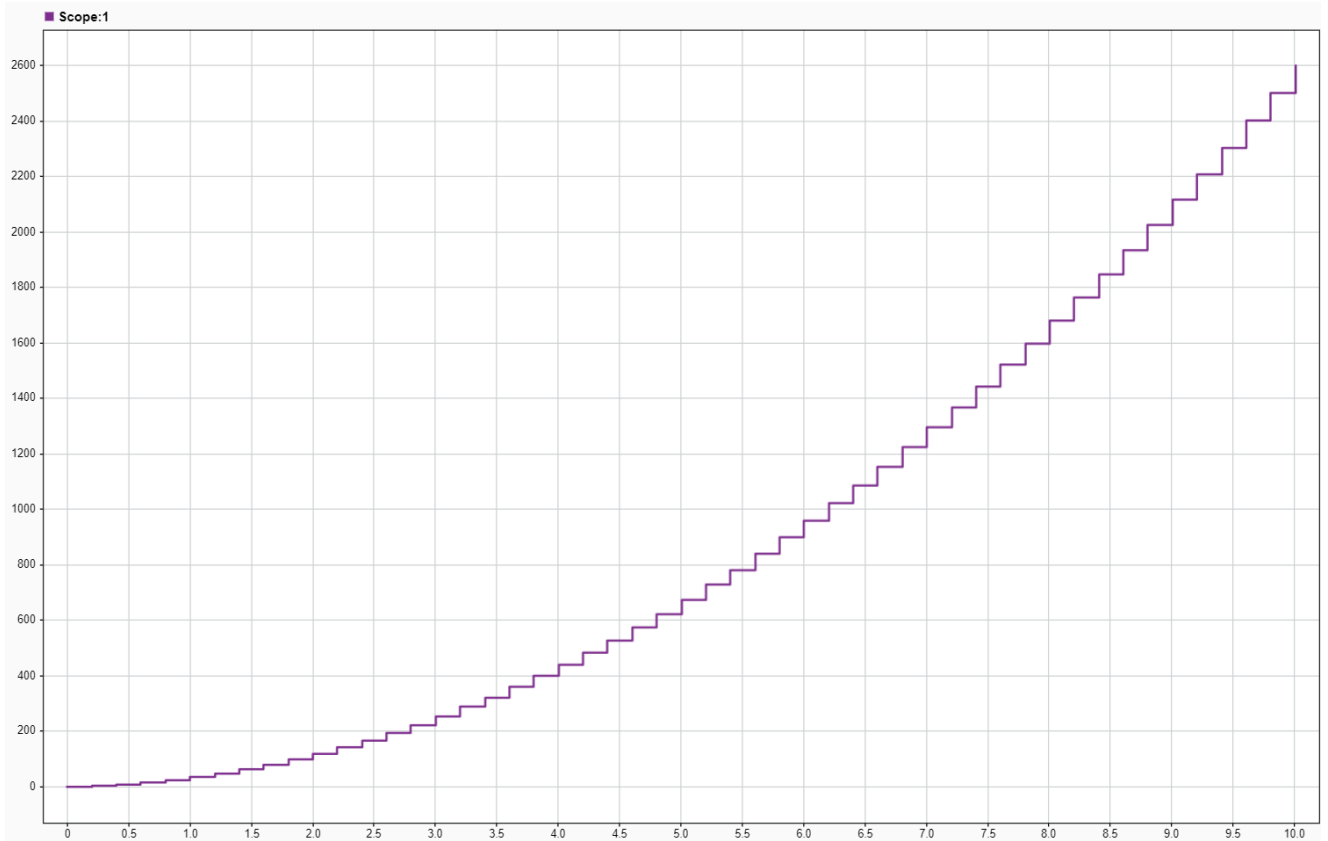


Рис. 6: Выход генератора при  $A = 0.5$ ,  $B = 1$ ,  $C = 2$ .

## Асимптотическая устойчивость

Будем говорить, что положение равновесия  $x = 0$  асимптотически устойчиво во всем пространстве состояний, если для всех траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных состояний  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , выполняется предельное соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x(m)\| = 0,$$

т.е. вектор состояния, с течением времени (ростом номера интервала дискретности) стремится к началу координат.

Асимптотическая устойчивость говорит о стремлении траекторий движений к положению равновесия, но о скорости сходимости траекторий движений системы к устойчивому положению информация отсутствует. Для нелинейных систем свойство асимптотической устойчивости может иметь место в ограниченной области пространства состояний, а поэтому понятие асимптотической устойчивости нелинейных систем подразделяют на устойчивость в «большом» – во всем пространстве состояний и на устойчивость в «малом» – в ограниченной области пространства состояний.

## Экспоненциальная устойчивость

Будем говорить, что положение равновесия  $x = 0$  экспоненциально устойчиво, если существуют такие положительные числа  $\beta \geq 1$  и  $0 < \alpha < 1$ , что для всех траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных состояний  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , и для любого номера интервала дискретности  $m = 0, 1, 2, \dots$  выполняется неравенство:

$$\|x(m)\| \leq \beta \cdot \alpha^m \cdot \|x(0)\|.$$

Параметр  $\alpha$  характеризует скорость сходимости процессов к положению равновесия, и чем меньше его значение, тем быстрее процессы стремятся к положению равновесия. Косвенно этот параметр характеризует быстродействие системы. Геометрическая интерпретация данного вида сходимости показана на рисунке 7.

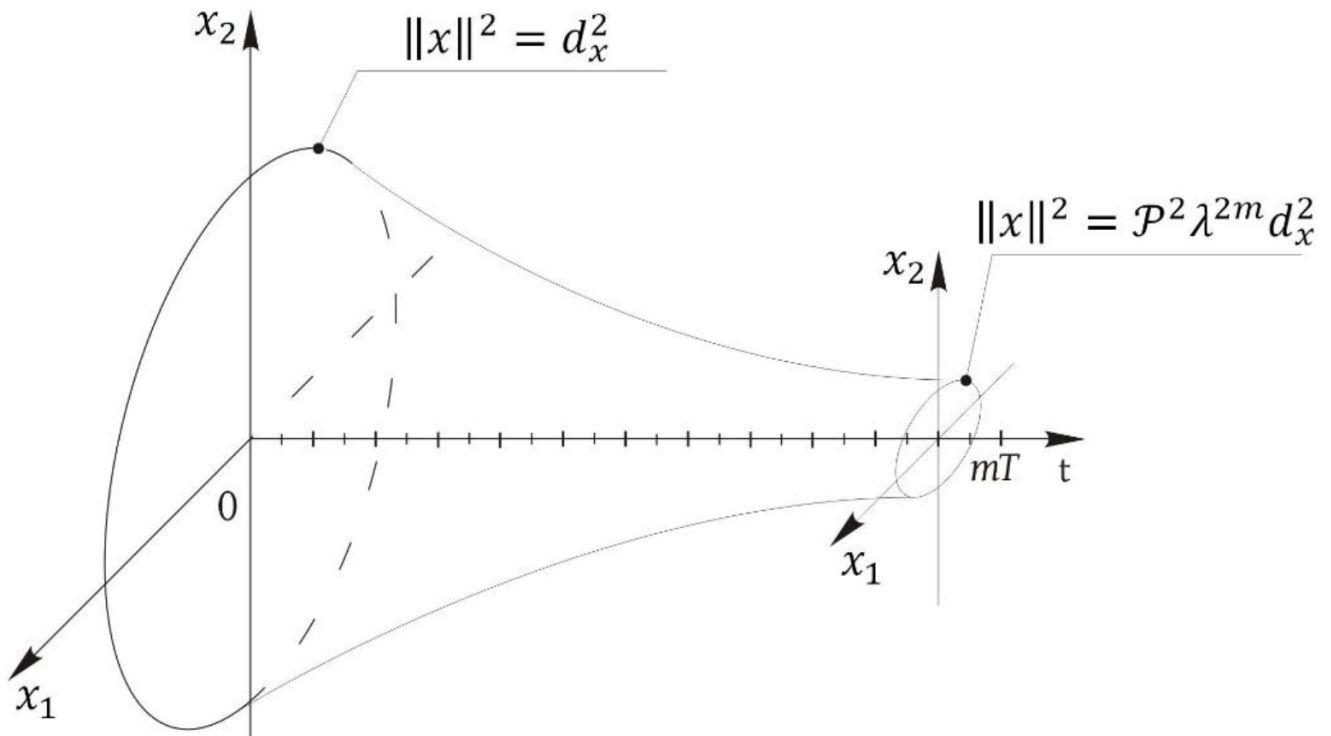


Рис. 7: Геометрическая интерпретация экспоненциально устойчивых движений

Как и для асимптотической устойчивости, в общем случае для нелинейных систем различают экспоненциальную устойчивость в «большом», т. е. во всем пространстве состояний, и в «малом» – в ограниченной области пространства состояний.

## Корневой критерий устойчивости

Рассмотрим невозмущенное уравнение движения дискретной системы:

$$x(m+1) = Fx(m),$$

$$x \in \mathbb{R}^n, F - n \times n.$$

Определим характеристическое уравнение

$$\det(zI - F) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0$$

и найдем его корни  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Положим, что все корни вещественные и различные.

Найдем условие, когда система будет асимптотически устойчивой, т. е.

$$x(m) = F^m x(0),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} F^m x(0) = 0.$$

Для анализа динамических процессов заменим базис в исходной системе таким образом, чтобы в новых координатах матрицы  $F$  была бы в диагональном виде, т. е. произведем замену переменных

$$x = M\xi,$$

где  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , а матрица  $M$  размерности  $n \times n$  такая, что существует обратная матрица  $M^{-1}$ . Тогда исходное уравнение движения можно привести к виду

$$\xi(m+1) = M^{-1}FM\xi(m).$$

Матрица  $M$  приводит матрицу динамики исходной системы к диагональной форме:

$$M^{-1}FM = F_g = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_n \end{bmatrix},$$

тогда уравнения движения системы в новом базисе приобретают вид

$$\begin{bmatrix} \xi_1(m+1) \\ \xi_2(m+1) \\ \vdots \\ \xi_n(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(m) \\ \xi_2(m) \\ \vdots \\ \xi_n(m) \end{bmatrix}.$$

Из полученных уравнений следует, что для каждой из переменных вектора состояния в новом базисе последующее значение этой переменной определяется соотношением

$$\xi_i(m+1) = z_i \xi_i(m), \quad i = \overline{1, n}.$$

Другими словами, описание движения исходной системы эквивалентно системе из  $n$  скалярных разностных уравнений. Запишем решение для каждого из  $n$  скалярных уравнений по каждой из переменных в зависимости от начальных значений:

$$\xi_i(m) = z_i^m \xi_i(0),$$

откуда следует, что каждая из переменных вектора состояния с течением времени будет стремиться к нулю, т. е. будет выполняться предельное соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_i(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} z_i^m \xi_i(0) = \xi_i(0) \lim_{m \rightarrow \infty} z_i^m = 0,$$

тогда и только тогда, когда модуль каждого из корней по модулю меньше единицы  $|z_i| < 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Для того, чтобы линейная дискретная система была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения по модулю были меньше единицы. Если хотя бы один из корней по модулю больше единицы, то система неустойчивая.

## Порядок выполнения работы

1. Исследование влияния дискретного элемента на непрерывную систему.

- (а) В среде Matlab Simulink реализовать схему, изображенную на рисунке 8 with parameters chosen in accordance with the student's variant.

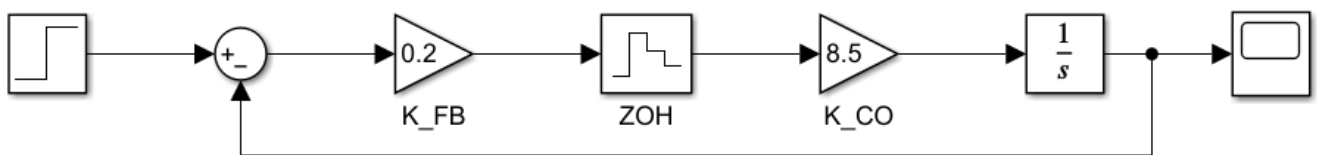


Рис. 8: Simulation scheme.

- (b) Путем настройки коэффициента  $K_{FB}$  найти такое его значение, которое соответствует границам устойчивости (нейтральной и колебательной) замкнутой системы. Представить переходные процессы для выхода системы.
- (c) Сделайте вывод о том, каким образом экстраполятор нулевого порядка влияет на свойства устойчивости замкнутой системы.

- (d) Исследовать влияние коэффициента  $K_{FB}$  на колебательность процесса. Найти значения коэффициента  $K_{FB}$ , соответствующие максимальной колебательности и отсутствию колебаний. Представить переходные процессы для выхода системы.
- (e) Путем настройки найти значение коэффициента  $K_{FB}$ , соответствующее оптимальному по быстродействию процессу. Представить переходные процессы для выхода системы.

## 2. Исследование устойчивости дискретных систем

- (a) Рассматривается непрерывный ОУ, заданный уравнением  $\ddot{y} = u$ , где  $u(t)$  – управляющее воздействие,  $y(t)$  – выходная величина. Необходимо получить модель данной системы в форме вход-состояние-выход и дискретизировать ее с использованием выражений (4), (5).
- (b) Задать управляющее воздействие в виде

$$u(k) = -Kx(k) = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

и рассчитать матрицу динамики замкнутой системы  $F = A - BK$  с учетом неизвестных коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ .

- (c) Для пяти наборов корней  $z_1, z_2$  из таблицы 2 составить пять желаемых характеристических полиномов. Найти такие наборы коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ , которые бы обеспечили матрице динамики замкнутой системы соответствующие наборы собственных чисел.
- (d) Осуществить моделирование полученных систем с начальными условиями  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ . Представить переходные процессы для выхода системы.

## 3. Построение дискретных командных генераторов

- (a) Синтезировать командный генератор гармонического сигнала вида  $g(k) = A \sin(kT\omega)$  с параметрами, приведенными в таблице 3.
- (b) Собрать схему моделирования дискретного генератора. В отчет внести рисунки со схемой моделирования и сигналом  $g(k)$ .
- (c) Синтезировать дискретную математическую модель возмущения «вход-состояние-выход», используя параметры, приведенные в таблице 4.
- (d) Собрать схему моделирования дискретного генератора. В отчет внести рисунки со схемой моделирования и сигналом  $g(k)$ . Период дискретизации задать  $T = 0.25$  с.



## Варианты задания

Таблица 1: Варианты значений коэффициента передачи ОУ и периода дискретизации для задания 1.

Вариант	$T, \text{с}$	$K_{CO}$	Вариант	$T, \text{с}$	$K_{CO}$	Вариант	$T, \text{с}$	$K_{CO}$
1	0.2	1	25	0.4	3.7	49	0.75	5.6
2	0.2	2	26	0.4	4.3	50	0.75	6.4
3	0.2	4	27	0.4	5.5	51	0.75	7.7
4	0.2	8	28	0.4	10.5	52	1	6.7
5	0.2	1.7	29	0.4	6.6	53	0.75	9.2
6	0.2	4.5	30	0.4	7.1	54	0.75	6
7	0.2	9.8	31	0.4	8.3	55	0.75	0.3
8	0.2	3.4	32	0.4	9.6	56	0.75	1.2
9	0.2	5.7	33	0.4	0.35	57	0.75	2.7
10	0.2	6.3	34	0.4	1.8	58	0.75	3
11	0.2	7.2	35	0.4	2.4	59	0.75	4.8
12	0.25	2.3	36	0.4	3.3	60	0.75	5.3
13	0.25	10	37	0.5	4.6	61	1	5
14	0.25	3.5	38	0.5	5.2	62	1	6.5
15	0.25	4.2	39	0.5	6.2	63	1	7
16	0.25	0.7	40	0.5	7.3	64	1	8.4
17	0.25	5.4	41	0.5	8.6	65	1	9.7
18	0.25	6.1	42	0.5	9	66	1	0.5
19	0.25	7.4	43	0.5	11	67	1	1.7
20	0.25	8.8	44	0.5	0.45	68	1	2.2
21	0.25	9.5	45	0.5	1.6	69	1	3.6
22	0.25	0.2	46	0.5	2.5	70	1	4.7
23	0.25	1.5	47	0.5	3.2	71	1	5.2
24	0.25	2.6	48	0.5	4.4	72	0.75	8.5

Таблица 2: Варианты желаемых собственных чисел и периоды дискретизации для задания 2.

Вариант	Желаемые собственные числа										
	$T, \text{ sec}$	1		2		3		4		5	
		$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$
1	0.20	1	0.80	−1	−0.8	0	−0.2	$j$	− $j$	$−0.1 + 0.9j$	$−0.1 − 0.9j$
2	0.20	0.9	1	−0.9	−1	0	0.2	$0.1j$	− $0.1j$	$−0.2 + 0.8j$	$−0.2 − 0.8j$
3	0.20	0.2	0.8	0.5	−0.8	0.1	−0.3	$0.2j$	− $0.2j$	$−0.3 + 0.7j$	$−0.3 − 0.7j$
4	0.20	0.7	0.3	−0.4	−0.2	0.8	−0.4	$0.3j$	− $0.3j$	$−0.4 + 0.6j$	$−0.4 − 0.6j$
5	0.20	0.6	0.4	1.2	−0.8	1	−0.3	$0.4j$	− $0.4j$	$−0.5 + 0.5j$	$−0.5 − 0.5j$

6	0.20	0.5	0.5	-0.1	-1.8	0.4	-0.6	0.5j	-0.5j	-0.6 + 0.6j	-0.6 - 0.6j
7	0.20	0.6	0.1	0.3	-0.6	0.3	-0.1	0.6j	-0.6j	-0.1 + 0.7j	-0.1 - 0.7j
8	0.20	0.8	0.2	1	-0.3	0.6	-0.3	0.7j	-0.7j	-0.3 + 0.8j	-0.3 - 0.8j
9	0.20	0.9	0.1	-0.1	-0.8	0.2	0	0.8j	-0.8j	-0.2 + 0.9j	-0.2 - 0.9j
10	0.20	0.3	0	0.6	-0.1	0.1	0.3	0.9j	-0.9j	-0.3 + 1.7j	-0.3 - 1.7j
11	0.20	0.1	0.7	-1.2	-0.4	0.1	0.5	1.2j	-1.2j	-0.8 + 0.7j	-0.8 - 0.7j
12	0.25	0.4	0.6	0.8	-0.7	0.5	-0.7	1.1j	-1.1j	-0.9 + 0.7j	-0.9 - 0.7j
13	0.25	0.12	0.28	-0.43	-1.67	0.32	0.17	2.2j	-2.2j	-0.13 + 0.11j	-0.13 - 0.11j
14	0.25	-0.69	1.25	-0.9	-1.44	0.39	0.82	0.15j	-0.15j	-1.60 + 0.26j	-1.60 - 0.26j
15	0.25	-2.17	-1.01	0.5	-0.5	0.38	-0.02	0.32j	-0.32j	0.42 + 0.89j	0.42 - 0.89j
16	0.25	-0.38	1.48	0.12	1.44	0.62	0.94	0.23j	-0.23j	1.08 + 0.13j	1.08 - 0.13j
17	0.25	0.72	0.82	1.19	-0.8	0.97	-0.33	0.37j	-0.37j	1.47 + 0.05j	1.47 - 0.05j
18	0.25	0.13	0.46	-0.26	1.32	0.81	-0.01	1.33j	-1.33j	1.13 + 0.68j	1.13 - 0.68j
19	0.25	0.55	0.25	-0.85	-0.12	0.48	-0.15	1.54j	-1.54j	-0.61 + 1.35j	-0.61 - 1.35j
20	0.25	1.59	1.02	-0.08	-0.69	0.29	-0.06	0.31j	-0.37j	-1.35 + 1.02j	-1.35 - 1.02j
21	0.25	1.96	1.86	-1.14	-1.19	0.63	0.55	2j	-2j	-0.32 + 1.23j	-0.32 - 1.23j
22	0.25	0.94	-0.64	-1.02	1.25	-0.69	0.01	0.25j	-0.25j	-0.07 + 0.88j	-0.07 - 0.88j
23	0.25	0.48	-0.28	1.86	0.1	0.68	0.99	0.13j	-0.13j	-0.7 + 0.28j	-0.7 - 0.28j
24	0.25	-0.25	0.24	-0.34	-0.7	-0.94	1.66	0.45j	-0.45j	0.07 + 0.31j	0.07 - 0.31j
25	0.40	0.54	-0.01	-1	-0	0.32	-0.62	0.65j	-0.65j	-0.89 + 0.14j	-0.89 - 0.14j
26	0.40	0.28	-1.5	-0.57	-0.15	0.18	0.25	0.72j	-0.72j	-0.02 + 0.28j	-0.02 - 0.28j
27	0.40	-2.45	0.12	-0.65	-0.8	-0.04	-0.33	1.28j	-1.28j	0.8 + 0.04j	0.8 - 0.04j
28	0.40	0.97	1.34	-0.41	-0.2	0.57	-0.08	0.57j	-0.57j	-0.97 + 0.44j	-0.97 - 0.44j
29	0.40	0.75	1.86	1.3	1.34	0.39	0.23	0.94j	-0.94j	-0.07 + 0.28j	-0.07 - 0.28j
30	0.40	0.67	0.85	0.62	-1.5	0.46	-0.47	1.32j	-1.32j	0.02 + 0.41j	0.02 - 0.41j
31	0.40	-0.21	0.38	1.48	1.87	-0.78	0.11	2.38j	-2.38j	-0.18 + 0.17j	-0.18 - 0.17j
32	0.40	0.23	-0.15	-0.87	-0.24	-0.36	-0.14	0.38j	-0.38j	-0.38 + 0.53j	-0.38 - 0.53j
33	0.40	-2.42	-0.06	-0.2	1.13	0.37	-0.54	0.88j	-0.88j	-0.22 + 0.28j	-0.22 - 0.28j
34	0.40	-0.15	0.08	1.62	-0.09	-0.46	-0.34	0.75j	-0.75j	0.08 + 0.77j	0.08 - 0.77j
35	0.40	1.26	-0.31	-0.99	-0.54	0.17	0.54	1.5j	-1.5j	-0.33 + 0.79j	-0.33 - 0.79j
36	0.40	-1.3	-1.5	-0.28	-0.69	0.89	-0.07	0.59j	-0.59j	-2.64 + 0.03j	-2.64 - 0.03j
37	0.50	-0.35	1.57	-0.03	0.75	0.52	-0.75	0.15j	-0.15j	2.69 + 0.29j	2.69 - 0.29j
38	0.50	1.14	-1.38	0.44	0.24	0.76	-0.95	0.52j	-0.52j	-0.78 + 0.75j	-0.78 - 0.75j
39	0.50	1.68	0.79	-0.16	-0.19	-0.52	-0.27	0.12j	-0.12j	-0.51 + 0.24j	-0.51 - 0.24j
40	0.50	0.48	0.09	-0.34	-0.38	0.23	-0.58	0.04j	-0.04j	-1.03 + 0.76j	-1.03 - 0.76j
41	0.50	0.02	0.71	0.11	-0.79	-0.09	-0.94	1.15j	-1.15j	-1.72 + 0.81j	-1.72 - 0.81j
42	0.50	1.15	0.81	-0.1	-0.37	0.29	-1.57	0.17j	-0.17j	-1.64 + 0.83j	-1.64 - 0.83j
43	0.50	-0.53	1.05	-0.04	-0.28	-1.08	-0.91	1.26j	-1.26j	0.11 + 1.48j	0.11 - 1.48j
44	0.50	0.76	0.13	-0.98	-0.01	-0.89	0.11	1.3j	-1.3j	-0.51 + 0.23j	-0.51 - 0.23j
45	0.50	0.28	-0.01	0.77	1.23	-1.65	0.68	0.68j	-0.68j	-1.34 + 0.47j	-1.34 - 0.47j
46	0.50	-0.58	0.24	0.31	0.53	0.76	0.67	0.73j	-0.73j	-0.77 + 0.15j	-0.77 - 0.15j
47	0.50	0.39	0.62	-1.37	-0.33	0.29	0.24	1.21j	-1.21j	0.21 + 0.58j	0.21 - 0.58j
48	0.50	0.76	1.53	1.11	-0.38	0.82	-0.93	1.67j	-1.67j	0.55 + 0.41j	0.55 - 0.41j
49	0.75	0.34	0.66	0.89	0.85	1.32	1.31	0.15j	-0.15j	-0.42 + 0.62j	-0.42 - 0.62j
50	0.75	0.29	0.81	0.12	0.57	1.13	1.47	0.57j	-0.57j	-2.24 + 1.09j	-2.24 - 1.09j
51	0.75	-0.45	0.45	0.79	-0.14	-1.65	-0.74	0.46j	-0.46j	-1.01 + 0.34j	-1.01 - 0.34j
52	0.75	0.71	0.23	-0.85	-0.11	0.68	0.74	0.48j	-0.48j	0.33 + 0.07j	0.33 - 0.07j
53	0.75	-1.01	0.56	0.78	1.54	0.63	-0.31	0.36j	-0.36j	-0.21 + 0.42j	-0.21 - 0.42j
54	0.75	-1.43	0.46	-0.3	1.09	-0.13	0.21	1.76j	-1.76j	0.72 + 1.59j	0.72 - 1.59j
55	0.75	-1.23	-0.3	-0.53	-0.89	-0.75	0.57	0.32j	-0.32j	1.29 + 0.38j	1.29 - 0.38j
56	0.75	-0.91	-0.06	-1.16	0.29	1.13	-0.28	1.04j	-1.04j	1.28 + 0.13j	1.28 - 0.13j
57	0.75	-0.71	-0.05	0.67	-3.03	1	1.5	0.16j	-0.16j	-0.59 + 1.57j	-0.59 - 1.57j
58	0.75	-0.26	-1.27	0.59	-1.35	0.24	0.74	0.58j	-0.58j	0.86 + 0.26j	0.86 - 0.26j

59	0.75	-0.34	0.29	-2.53	-0.35	-0.41	1.23	0.76j	-0.76j	-0.25 + 1.29j	-0.25 - 1.29j
60	0.75	-0.53	0.44	0.89	1.04	1.34	0.21	0.19j	-0.19j	-0.79 + 0.8j	-0.79 - 0.8j
61	1.00	0.39	-2.33	-1.82	0.14	0.56	-0.68	0.72j	-0.72j	0.19 + 1.46j	0.19 - 1.46j
62	1.00	1.96	0.94	-0.81	1.05	0.19	0.46	0.62j	-0.62j	0.86 + 0.64j	0.86 - 0.64j
63	1.00	-0.07	-0.78	0.98	1.47	0.64	-0.38	0.43j	-0.43j	0.51 + 1.19j	0.51 - 1.19j
64	1.00	1.68	0.69	0.36	-1.04	0.48	-0.37	1.62j	-1.62j	-1.17 + 0.41j	-1.17 - 0.41j
65	1.00	-0.53	1.09	2.77	0.43	-0.54	-0.11	0.91j	-0.91j	1.55 + 0.42j	1.55 - 0.42j
66	1.00	-0.07	0.21	0.02	1.88	-1.44	-0.57	0.84j	-0.84j	-1.73 + 0.44j	-1.73 - 0.44j
67	1.00	1.29	0.13	-0.26	0.81	0.65	1.83	0.21j	-0.21j	0.33 + 1.03j	0.33 - 1.03j
68	1.00	0.74	-0.14	0.81	1.23	-0.27	-0.93	0.35j	-0.35j	1.34 + 0.97j	1.34 - 0.97j
69	1.00	0.64	0.19	0.73	0.62	-1.11	-1.35	2.07j	-2.07j	0.75 + 0.94j	0.75 - 0.94j
70	1.00	-0.68	-0.02	-0.91	-0.32	0.83	-1.92	2.4j	2.4j	0.94 + 0.52j	0.94 - 0.52j
71	1.00	1.01	0.67	-1.61	0.68	0.53	0.35	0.55j	-0.55j	0.75 + 0.91j	0.75 - 0.91j
72	1.00	0.47	1.63	-0.81	1.29	0.22	-0.11	0.41j	-0.41j	0.87 + 0.81j	0.87 - 0.81j

Таблица 3: Варианты параметров дискретного гармонического сигнала.

Вариант	$T$ , с	$A$	$\omega$	Вариант	$T$ , с	$A$	$\omega$	Вариант	$T$ , с	$A$	$\omega$
1	0.2	-1.24	0.09	25	0.4	7.7	0.14	49	0.75	3.86	0.33
2	0.2	-1.42	0.02	26	0.4	-4.8	0.77	50	0.75	8.41	0.37
3	0.2	1	0.08	27	0.4	0.71	0.21	51	0.75	1.75	0.11
4	0.2	0.29	0.61	28	0.4	-8	0.26	52	0.75	-2.5	0.67
5	0.2	0.3	0.94	29	0.4	-1.66	0.64	53	0.75	9.5	0.07
6	0.2	-1.08	0.65	30	0.4	1.33	0.86	54	0.75	-1.54	0.14
7	0.2	-0.5	0.25	31	0.4	-1.25	0.12	55	0.75	-11.7	0.73
8	0.2	1.3	0.37	32	0.4	3	0.32	56	0.75	8.16	0.91
9	1	9.8	0.18	33	0.4	-1.85	0.18	57	0.75	5.55	0.27
10	0.2	0.32	0.15	34	0.4	1.05	0.82	58	0.75	8.5	0.67
11	0.2	-1.3	0.87	35	0.4	1.28	0.02	59	0.75	9.35	0.52
12	0.25	2.7	0.17	36	0.4	-0.79	0.72	60	0.75	6.85	0.15
13	0.25	-0.57	0.50	37	0.5	8.6	0.16	61	1	5.78	0.4
14	0.25	-0.8	0.05	38	0.5	-0.82	0.57	62	1	0.35	0.06
15	0.25	4.2	0.2	39	0.5	9.2	0.51	63	1	-16.6	0.23
16	0.25	9.7	0.3	40	0.5	6.9	0.74	64	1	0.7	0.32
17	0.25	-0.99	0.96	41	0.5	8.6	0.01	65	1	1.53	0.28
18	0.25	6.5	0.04	42	0.5	0.18	0.02	66	1	12.6	0.43
19	0.25	7.8	0.6	43	0.5	12.2	0.4	67	1	5.7	0.45
20	0.25	-8.5	0.7	44	0.5	-1.56	0.12	68	1	6.7	0.07
21	0.25	-2.4	0.57	45	0.5	-2.42	0.9	69	1	2	0.63
22	0.25	0.77	0.35	46	0.5	-1.16	0.28	70	1	3.5	0.22
23	0.25	1.52	0.55	47	0.5	1.85	0.75	71	1	13.5	0.7
24	0.25	8.45	0.65	48	0.5	4.65	0.22	72	0.2	-0.67	0.25

Таблица 4: Варианты параметров внешнего возмущения.

Вариант	Возмущение	Вариант	Возмущение
1	$2e^{-kT} \sin(3kT) + 0.5kT$	37	$3 \sin(5kT) + 3.2(kT)^2$
2	$2 \sin(2kT) + 3 \cos(5kT)$	38	$1.3e^{-0.6kT} \sin(2kT) + 4.2kT$
3	$2e^{-kT} \sin(3kT) + 0.1(kT)^2$	39	$7 \sin(3kT) + 0.02(kT)^2$
4	$4 \sin(2kT) + 0.5kT$	40	$6 \sin(5kT) - 7 \cos(4kT)$
5	$2 + 3kT + 0.5(kT)^2$	41	$0.2e^{-6kT} \sin(2kT) + 0.65(kT)^2$
6	$2e^{-7kT} + 0.5kT + 6(kT)^2$	42	$0.4e^{-5kT} \cos(kT) + 0.09(kT)^2$
7	$3e^{-kT} \sin(2kT) + 1.5kT$	43	$0.6 \sin(5kT) + 0.02(kT)^2$
8	$4 \sin(kT) + 1.5 \cos(2.5kT)$	44	$2.5e^{3.5kT} \sin(kT) + 0.06kT$
9	$e^{-5kT} \sin(6kT + 2.5) + 0.03kT$	45	$10 \sin(3kT) + (kT)^2$
10	$0.5 \sin(6kT) + 0.8kT$	46	$8 \sin(0.5kT) + 2 \cos(1.5kT)$
11	$5 + 5.5kT + 1.5(kT)^2$	47	$1.5e^{-2kT} \sin(3kT) + 0.35(kT)^2$
12	$2.3e^{-2kT} - 0.5kT + 5(kT)^2$	48	$0.5e^{-3kT} \cos(4kT) + 0.65(kT)^2$
13	$2.5e^{-2kT} \sin(4kT) + 4.5kT$	49	$2e^{0.1kT} \sin(3kT + 1)$
14	$3.2 \sin(4kT) - 5.5 \cos(2kT)$	50	$4 \sin(kT) + 3 \cos(4kT)$
15	$6.2e^{-kT} \sin(4kT) + 0.05(kT)^2$	51	$4e^{-0.5kT} \sin(2kT - 1)$
16	$0.5 \sin(4kT) + 3.5kT$	52	$4 \sin(2kT) + 0.3(kT)^2$
17	$8 + 6.5kT + 0.05(kT)^2$	53	$3e^{-kT} \cos(3kT) + 0.8kT$
18	$4e^{-5kT} + 5kT + 0.6(kT)^2$	54	$12e^{-0.5kT} \sin(5kT + 1.5) + 0.3kT$
19	$0.3e^{-7kT} \sin(3kT) - 0.05kT$	55	$3e^{0.2kT} \sin(4kT + 1)$
20	$0.4 \sin(2kT) + 2.5 \cos(6kT)$	56	$2 \sin(4kT) + 2.5 \cos(4kT)$
21	$0.25e^{-4kT} \sin(2kT) - 0.08(kT)^2$	57	$2e^{0.5kT} \sin(2kT + 1)$
22	$0.8 \sin(7kT) + 0.6kT$	58	$3.5 \sin(3kT) + 0.7(kT)^2$
23	$0.8 + 4.5kT + 0.15(kT)^2$	59	$6.5e^{-2kT} \cos(kT) - 0.5kT$
24	$2.5e^{-4kT} + 0.7kT + 0.04(kT)^2$	60	$1.2e^{-1.5kT} \sin(3kT + 0.5) + 0.4kT$
25	$5 \sin(3kT) + 0.2(kT)^2$	61	$4.4e^{0.3kT} \sin(4kT - 1)$
26	$2e^{-0.5kT} \sin(kT) + 0.2kT$	62	$5 \sin(3kT) + 8 \cos(2kT)$
27	$3 \sin(2kT) + 0.1(kT)^2$	63	$2.5e^{-1.5kT} \sin(4kT - 0.5)$
28	$2 \sin(3kT) - 4 \cos(7kT)$	64	$0.4 \sin(2.5kT) + 0.03(kT)^2$
29	$2e^{-9kT} \sin(3kT) + 0.5(kT)^2$	65	$0.3e^{-2kT} \cos(4kT) + 0.08kT$
30	$4e^{-3kT} \cos(5kT) + 0.9(kT)^2$	66	$1.2e^{-1.5kT} \sin(kT + 0.5) + 0.03kT$
31	$6 \sin(4kT) + 1.2(kT)^2$	67	$0.3e^{-2kT} \sin(7kT - 0.5)$
32	$1.5e^{0.5kT} \sin(2kT) - 0.3kT$	68	$2.5 \sin(2kT) + 5 \cos(kT)$
33	$1.8 \sin(5kT) - 0.1(kT)^2$	69	$4e^{0.25kT} \sin(4kT - 0.4)$
34	$5 \sin(8kT) + 3 \cos(9kT)$	70	$2.5 \sin(kT) + 0.07(kT)^2$
35	$2.5e^{-4kT} \sin(2kT) + 3.5(kT)^2$	71	$0.15e^{-4kT} \cos(2kT) + 0.6kT$

36	$3e^{-4kT} \cos(7kT) + 0.25(kT)^2$	72	$0.5e^{-2kT} \sin(6kT) + 0.8(kT)^2$
----	------------------------------------	----	-------------------------------------

## 2 Классические регуляторы для дискретных систем

Рассмотрим объект управления (ОУ) с уравнением движения

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}, \quad (17)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $y \in \mathbb{R}^k$  – вектор регулируемых переменных,  $u \in \mathbb{R}^k$  – вектор управляющих воздействий,  $A$  – матрица динамики системы размерности  $n \times n$ ,  $B$  – матрица входов по управлению размерности  $n \times k$ ,  $C$  – матрица выходов размерности  $k \times n$ .

Будем полагать, что пара матриц  $A, B$  полностью управляема, т. е. с помощью управлений можно воздействовать на все собственные движения объекта.

Будем говорить, что ОУ — с полной информацией, если все переменные вектора состояния доступны для измерения. Если число измерений меньше, чем порядок объекта, то объект — с неполной информацией.

Для ОУ с полной информацией будем искать управление на основе принципа Беллмана как функцию всех переменных состояния, а именно линейную функцию, в виде

$$u(m) = -Kx(m), \quad (18)$$

где знак минус, стоящий перед алгебраическим выражением, отражает отрицательность обратных связей, а матрица  $K$  размерности  $k \times n$  называется матрицей линейных стационарных обратных связей (ЛСОС), и ее элементы определяют коэффициенты отрицательных обратных связей (ООС) по соответствующим переменным вектора состояния.

Регулятор, который вырабатывает подобное управление, будем называть линейным статическим регулятором или пропорциональным регулятором. Примеры аналитического синтеза дискретных систем управления можно найти в [12, 13, 14].

Получим уравнение движения для вектора состояния замкнутой системы

$$x(m+1) = Ax(m) - BKx(m) = Fx(m),$$

где  $F = A - BK$  – матрица динамики замкнутой системы размерности  $n \times n$ .

Задача синтеза пропорционального регулятора (стабилизирующих управлений) заключается в отыскании таких параметров матрицы обратных связей  $K$ , которая обеспечивает замкнутой системе, динамика которой определяется матрицей  $F = A - BK$ , наперед заданные желаемые свойства.

## Синтез модального управления

Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы в виде

$$\det (F - zI) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0,$$

где  $\alpha_i, i = \overline{0, n-1}$  – коэффициенты характеристического полинома,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  – корни характеристического уравнения (системы).

Задача модального управления заключается в выборе желаемых коэффициентов характеристического полинома  $\alpha_i^*$  или желаемых корней системы  $z_i^*$  по заданным показателям качества и обеспечения желаемых коэффициентов (корней) с помощью параметров матрицы обратных связей  $K$ , т. е.

$$F = A - BK,$$

$$\det (F - zI) = z^n + \alpha_{n-1}^*z^{n-1} + \dots + \alpha_1^*z + \alpha_0^* = 0$$

или желаемых корней  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ .

Введем в рассмотрение эталонную модель, определяющую желаемые свойства замкнутой проектируемой системы, а именно желаемые корни или коэффициенты характеристического уравнения. Эталонную модель зададим уравнениями движения:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) \\ v(m) = -H\eta(m) \end{cases}, \quad (19)$$

где  $\eta$  – вектор состояния эталонной модели, по размерности совпадающий с вектором состояния объекта;  $v$  – вектор выхода эталонной модели, по размерности совпадающий с вектором управления;  $\Gamma$  – квадратичная матрица размерности  $n \times n$ , определяющая свойства эталонной модели и такая, что ее характеристический полином или собственные числа совпадают с желаемым характеристическим полиномом, или желаемыми корнями замкнутой системы;  $H$  – матрица выходов размерности  $k \times n$  пара  $H, \Gamma$  полностью наблюдаема, т. е. в выходах проявляются все собственные движения эталонной модели. Характеристический полином матрицы  $\Gamma$

$$\det (\Gamma - zI) = z^n + \alpha_{n-1}^*z^{n-1} + \dots + \alpha_1^*z + \alpha_0^* = 0,$$

и корни этого уравнения совпадают с желаемыми корнями  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ .

Потребуем, чтобы вектор состояния замкнутой системы с искомым управлением вел себя таким же образом, как и вектор состояния эталонной модели. Другими словами, потребуем, чтобы для любого момента времени  $mT$  вектор состояния замкнутой системы и эталонной модели были бы связаны линейным стационарным преобразованием, т. е.

$$x(m) = M\eta(m),$$

где  $M$  – квадратичная матрица размерности  $n \times n$ , задающая неособое линейное преобразование.

Подставим в уравнение движения замкнутой системы уравнение связи между ее вектором состояния и вектором состояния эталонной модели:

$$M\eta(m+1) = FM\eta(m),$$

$$\eta(m+1) = M^{-1}FM\eta(m).$$

Для обеспечения линейной связи между векторами состояния замкнутой системы и эталонной модели выберем матрицу  $M$  таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$M^{-1}FM = \Gamma.$$

Из свойств матриц следует совпадение характеристических полиномов матриц  $F$  и  $\Gamma$  и их собственных чисел. Получим эквивалентную форму записи  $F = A - BK$ . Подставим:

$$M\Gamma - AM = -BKM,$$

получили матричное уравнение с неизвестными матрицами  $M$  и  $K$ . Матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  заданы; матрица  $M$  размерности  $n \times n$  содержит  $n^2$  неизвестных; матрица  $K$  размера  $k \times n$  содержит  $k \times n$  неизвестных. Всего неизвестных  $n^2 + kn$ . Приравнивая левые и правые части, получим  $n^2$  уравнений.

Полученное матричное уравнение эквивалентно системе из  $n^2$  уравнений, а число неизвестных  $n^2 + kn$ . Следовательно, требуется получить дополнительное матричное уравнение, эквивалентное системе из  $k \cdot n$  уравнений.

Для получения дополнительного матричного уравнения потребуем, чтобы выход эталонной модели совпадал бы с желаемым управляемым воздействием, т. е. чтобы для любого  $m$  выполнялось

$$U(m) = V(m).$$

Свяжем управляющее воздействие и выход эталонной модели:

$$-Kx(m) = -H\eta(m),$$

$$KM\eta(m) = H\eta(m),$$

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^n : KM = H.$$

В итоге получаем систему матричных уравнений

$$\begin{cases} M\Gamma - AM = -BH \\ K = HM^{-1} \end{cases}. \quad (20)$$



Уравнение (20) является матричным уравнением, линейным относительно матрицы  $M$ . Это уравнение имеет единственное решение относительно матрицы  $M$ , причем матрица  $M$  имеет обратную  $M^{-1}$ , если на исходные матрицы описания объекта и эталонной модели накладываются следующие ограничения:

- пара  $A, B$  полностью управляема;
- пара  $H, \Gamma$  полностью наблюдаема;
- матрицы  $\Gamma$  и  $A$  не должны иметь одинаковые собственные числа (корни разомкнутой системы объекта не должны совпадать с желаемыми корнями замкнутой системы).

Второе соотношение в (20) позволяет по заданному решению матричного уравнения типа Сильвестра вычислять матрицу линейных обратных связей  $K$ , решающую задачу модального управления.

## Синтез регулятора со встроенной моделью

Метод встроенной модели позволяет улучшать точностные показатели качества системы, а именно позволяет получить нулевую ошибку в установившемся режиме для заданного класса внешних воздействий, модель которых задается автономным разностным уравнением.

Рассмотрим следящую систему с функциональной схемой, показанной на рисунке 9. На рисунке 9 обозначены:  $y$  – регулируемая переменная;  $g$  – задающее воздействие; MBV – модель внешних воздействий.

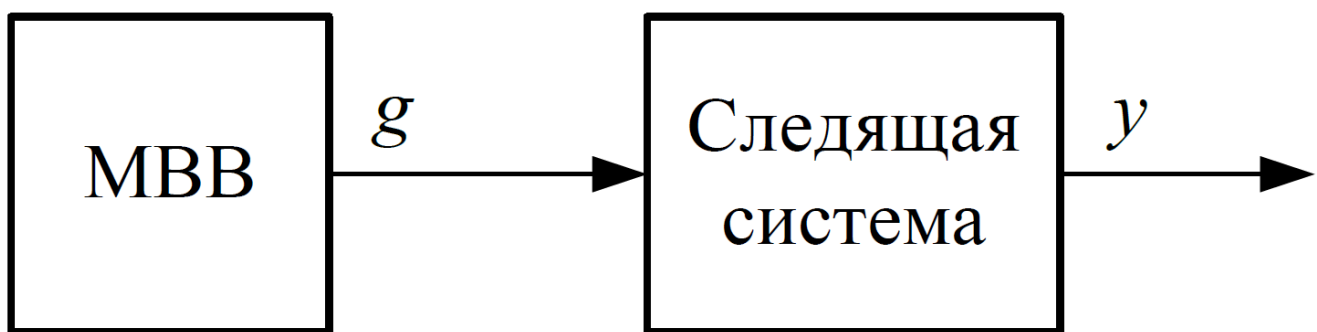


Рис. 9: Схема системы управления

На рисунке 10 показана структурная схема следящей системы со встроенной моделью. На рисунке обозначены:  $e$  – ошибка слежения  $e = g - y$ ;  $\eta$  –  $q$ -мерный вектор состояний встроенной модели,  $K_\eta$  – матрица размера  $1 \times q$  коэффициентов прямых связей по состоянию встроенной модели,  $K_\eta = [k_{1\eta} \ k_{2\eta} \ \dots \ k_{q\eta}]$ ;

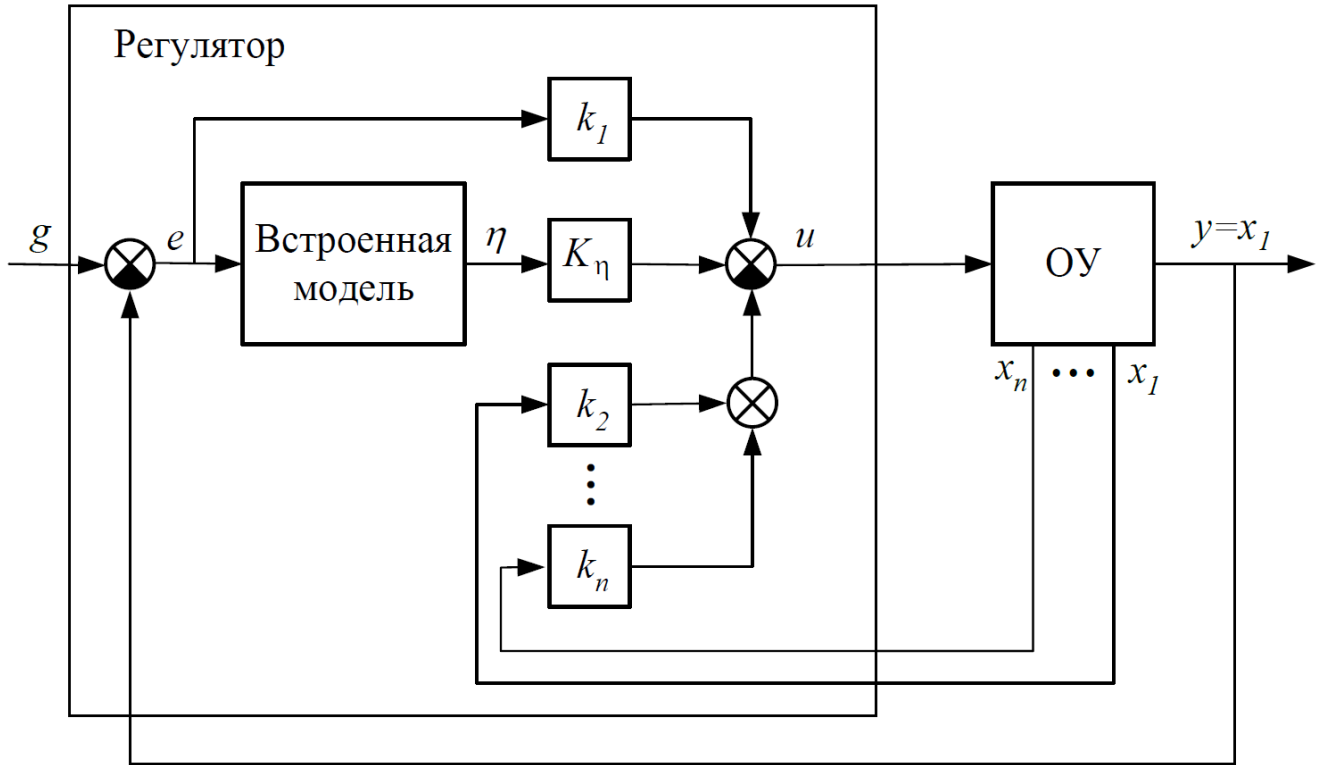


Рис. 10: Структурная схема следящей системы

$k_1, \dots, k_n$  – коэффициенты обратных связей по соответствующим переменным вектора состояния.

Будем полагать, что в результате анализа задающих воздействий выделены воздействия, приводящие к наиболее существенным ошибкам в установившемся режиме, и класс этих воздействий генерируется линейным автономным разностным уравнением. Другими словами, будем считать, что получена модель внешних воздействий (МВВ) в виде

$$\begin{aligned} \xi(m+1) &= \Gamma \xi(m) \\ g(m) &= H_\xi \xi(m) \end{aligned} \quad ,$$

где  $\xi \in \mathbb{R}^q$  – вектор состояния МВВ;  $\Gamma$  – матрица размерности  $q \times q$ , задание которой определяет виды внешних воздействий;  $H_\xi$  – матрица выходов МВВ размерности  $1 \times q$ .

Класс внешних воздействий, генерируемый моделью, определяется решением этого уравнения, т. е. определяется формулой

$$g(m) = H_\xi \Gamma^m \xi(0). \quad (21)$$

Задано уравнение движения ОУ в виде (17) с 1 входом и 1 выходом, причем  $C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ . Будем полагать, что измеряются ошибка  $e = g - y$  и переменные вектора состояния  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , а также что пара  $A, B$  полностью

управляема, а пара  $C, A$  полностью наблюдаема. Синтезируем регулятор со встроенной моделью, описание которого задается уравнениями

$$\begin{aligned} \eta(m+1) &= \Gamma\eta(m) + B_\eta e(m) \\ u(m) &= k_1 e(m) + K_\eta \eta(m) - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\eta \in \mathbb{R}^q$  – вектор состояния встроенной модели, по размерности совпадающий с вектором состояния внешних воздействий;  $\Gamma$  – матрица размерности  $q \times q$ , совпадающая с матрицей МВВ;  $B_\eta$  матрица входов встроенной модели (МВВМ).

МВВМ выбирается из условия полной управляемости пары  $\Gamma, B_\eta$ . Задача синтеза регулятора состоит в нахождении коэффициентов обратной связи  $k_1, k_2, \dots, k_n$  и матрицы коэффициентов  $K_\eta$ , обеспечивающих в замкнутой системе желаемое качество процессов.

Если воспользоваться методом модального управления, то искомые параметры регулятора должны обеспечивать в замкнутой системе желаемые корни или коэффициенты характеристического полинома, назначенного из требуемых показателей качества. Приведенная структура регулятора со встроенной моделью при условии устойчивости замкнутой системы обеспечивает нулевую установившуюся ошибку для заданного класса задающих воздействий (21).

Сведем задачу синтеза регулятора к задаче модального управления. Рассмотрим формирование задающих воздействий и подставим вместо ошибки разность  $g - y$ , получим

$$\begin{aligned} u(m) &= k_1 g(m) + K_\eta \eta(m) - k_1 x_1(m) - k_2 x_2(m) - \dots - k_n x_n(m) = \\ &= k_1 g(m) + K_\eta \eta(m) - Kx(m) = k_1 g(m) - [-K_\eta \ K] \begin{bmatrix} \eta(m) \\ x(m) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где  $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$  – матрица обратных связей.

Введем в рассмотрение расширенную модель ОУ, объединив уравнение движения объекта с уравнением встроенной модели:

$$\bar{x}(m+1) = \begin{bmatrix} \eta(m+1) \\ x(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(m) \\ x(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(m) + \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix} g(m). \quad (23)$$

Тогда, с учётом обозначений

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = [-K_\eta \ K]$$

получим в итоге для замкнутой системы

$$\bar{x}(m+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})\bar{x}(m) + (\bar{B}_1 + k_1\bar{B})g(m) = \bar{F}\bar{x}(m) + \bar{B}_g g(m),$$

где  $\bar{F} = \bar{A} - \bar{B}\bar{K}$  – матрица размерности  $(n + q) \times (n + q)$ , определяющая динамические свойства замкнутой системы;  $\bar{B}_g = \bar{B}_1 + k_1\bar{B}$  – матрица входов по задающему воздействию размерности  $(n + q) \times 1$ .

Если пара  $\bar{A}, \bar{B}$  полностью управляема, то выбором матрицы  $\bar{K}$  можно обеспечить произвольные желаемые корни характеристического полинома или коэффициенты уравнения замкнутой системы. Отметим, что пара  $\bar{A}, \bar{B}$  будет полностью управляема при выполнении следующих условий:

- пара  $A, B$  объекта полностью управляема, а пара  $C, A$  полностью наблюдаема;
- пара  $\Gamma, B_\eta$  полностью управляема.

## Синтез дискретных устройств оценки

Устройство оценки вектора состояния объекта управления предназначено для восстановления (выработки) недоступных для измерения переменных вектора состояния. Устройства оценки вырабатывают оценки переменных вектора состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

### Устройства оценки полной размерности

Рассмотрим уравнение движения ОУ с неполной информацией:

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y_{\text{и}}(m) = C_{\text{и}}x(m) \end{cases}, \quad (24)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^k$  – вектор управляющих воздействий,  $y_{\text{и}} \in \mathbb{R}^l$  – вектор измеряемых величин,  $A$  – матрица динамики ОУ размерности  $n \times n$ ,  $B$  – матрица входов ОУ размерности  $n \times k$ ,  $C_{\text{и}}$  – матрица измерений ОУ размерности  $l \times k$ . Предполагается, что для объекта с неполной информацией число измерений  $l$  меньше числа  $n$  переменных вектора состояния ОУ, т. е.  $l < n$ , и  $\text{rank} C_{\text{и}} = l$ , другими словами, нет дублирующих друг друга измерений.

Будем строить устройство оценки полной размерности как динамическую систему с уравнением движения

$$\hat{x}(m+1) = A\hat{x}(m) + Bu(m) + L(y_{\text{и}}(m) - C_{\text{и}}\hat{x}(m)),$$

где  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния устройства оценки, совпадающий по размерности с вектором состояния исходного ОУ, матрицы  $A, B$  и  $C_{\text{и}}$  совпадают с

соответствующими матрицами ОУ,  $L$  – матрица входов устройства оценки размерности  $n \times l$ .

Задача построения устройства оценки полной размерности состоит в отыскании такой матрицы входов данного устройства  $L$ , которая обеспечивает сходимость вектора оценки  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  к оцениваемому вектору  $x \in \mathbb{R}^n$  со скоростью сходимости, назначенной из желаемых динамических свойств.

Для определения условий, при которых рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки, вычтем из уравнения движения этой системы уравнение движения объекта, получим

$$\hat{x}(m+1) - x(m+1) = A\hat{x}(m) + Bu(m) + L(y_u(m) - C_u\hat{x}(m)) - Ax(m) - Bu(m).$$

Группируя члены этого уравнения, приходим к уравнению

$$\hat{x}(m+1) - x(m+1) = A(\hat{x}(m) - x(m)) - LC_u(\hat{x}(m) - x(m)),$$

откуда следует

$$\hat{x}(m+1) - x(m+1) = (A - LC_u)(\hat{x}(m) - x(m)).$$

Введем обозначение вектора невязки в виде

$$\tilde{x}(m) = \hat{x}(m) - x(m)$$

и матрицу динамики устройства оценки в виде

$$F_u = A - LC_u,$$

тогда уравнение движения относительно вектора невязки примет вид

$$\tilde{x}(m+1) = F_u\tilde{x}(m).$$

Полученное уравнение является автономным, поэтому свойство сходимости вектора невязки к нулю целиком и полностью определяется свойствами матрицы  $F_u$ . Таким образом, рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки с вектором оценки  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда матрица  $F_u = A - LC_u$  является устойчивой матрицей, то есть все корни ее характеристического полинома расположены в круге единичного радиуса с центром в начале координат.

Рассмотрим процедуру синтеза устройства оценки полной размерности на основе метода модального управления. Она складывается из следующей последовательности действий для вычисления матрицы входов устройства оценки  $L$ :

1. проверка пары матриц  $C_n, A$  на выполнение условия полной наблюдаемости;
2. назначение  $n$  желаемых корней устройства оценки  $z_{in}^*, i = \overline{1, n}$  (коэффициентов характеристического полинома), исходя из желаемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору. Как правило, эти корни назначаются несколько более "быстрыми чем корни для синтеза матрицы обратных связей;
3. по желаемым корням формирование матрицы эталонной модели  $\Gamma_n$  размерности  $n \times n$  и выбор матрицы выходов  $H_n$  размерности  $l \times n$  эталонной модели из условия полной наблюдаемости пары  $H_n, \Gamma_n$ ;
4. решение матричного уравнения типа Сильвестра

$$M_n \Gamma_n - A^T M_n = -C_n H_n$$

относительно матрицы  $M_n$ ;

5. вычисление матрицы входов устройства оценки  $L$  по соотношению

$$L = H_n M_n^{-1}.$$

Синтез устройства оценки полной размерности может быть выполнен на основе метода локальной оптимизации. При таком подходе предполагается, что на объект управления воздействуют шумы в управлении и имеют место шумы в измерениях. Матрица входов устройства оценки  $L$  в этом случае ищется из условия минимизации математического ожидания от квадратичного функционала, как правило, на бесконечном интервале времени, что сводится к решению матричного уравнения типа Риккати. Отметим, что устройство оценки полной размерности подобно по структуре фильтру Калмана. Отличия состоят в критерии нахождения матрицы входов устройства оценки  $L$  и модели исходного объекта.

### **Устройства оценки пониженной размерности**

Идеология построения устройства оценки пониженной размерности заключается в использовании измеряемых переменных при формировании вектора оценки. При этом удается понизить размерность устройства оценки по сравнению с размерностью оцениваемого вектора состояния на количество измерений, что упрощает реализацию устройства оценки. Устройства оценки как полной, так

и пониженной размерностей предназначены для выработки информации о поведении недоступных для измерения переменных состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Рассмотрим объект управления с неполной информацией с уравнением движения (24). Будем строить устройство оценки пониженной размерности в соответствии со следующим уравнением движения:

$$\begin{cases} \hat{z}(m+1) = F_{\text{н}}\hat{z}(m) + Gy_{\text{н}} + M_{\text{н}}Bu(m) \\ \hat{x}(m) = \begin{bmatrix} C_{\text{н}} \\ M_{\text{н}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_{\text{н}} \\ \hat{z}(m) \end{bmatrix} \end{cases},$$

где  $\hat{z} \in \mathbb{R}^{n-l}$  – вектор состояния устройства оценки, размерность которого меньше размерности оцениваемого вектора состояния на число измерений;  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  – вектор оценки, формируемый по вектору измеряемых переменных и вектору состояния устройства оценки;  $F_{\text{н}}$  – матрица размерности  $(n-l) \times (n-l)$ , определяющая динамические свойства устройства оценки;  $G$  – матрица входов устройства оценки размерности  $(n-l) \times l$ ;  $M_{\text{н}}$  – матрица линейных преобразований размерности  $(n-l) \times n$ , согласующая размерности векторов состояния ОУ и устройства оценки. Из уравнения движения устройства оценки следует, что задача построения устройства оценки пониженной размерности заключается в выборе таких матриц описания устройства  $F_{\text{н}}$  и матрицы входов  $G$ , а также матрицы преобразования  $M_{\text{н}}$ , которые позволяют получить вектор оценки при заданной скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору.

Определим условия, при которых рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки. Для этого вычтем из уравнения движения устройства оценки уравнение движения объекта управления, умноженное слева на матрицу преобразования  $M_{\text{н}}$ . Получим:

$$\begin{aligned} \hat{z}(m+1) - M_{\text{н}}x(m+1) &= F_{\text{н}}\hat{z}(m) + GC_{\text{н}}x(m) + M_{\text{н}}Bu(m) - \\ &\quad - M_{\text{н}}Ax(m) - M_{\text{н}}Bu(m) = \\ &= F_{\text{н}}\hat{z}(m) + (GC_{\text{н}} - M_{\text{н}}A)x(m). \end{aligned}$$

Предположим, что матрица  $M_{\text{н}}$  является решением матричного уравнения типа Сильвестра

$$M_{\text{н}}A - F_{\text{н}}M_{\text{н}} = GC_{\text{н}},$$

тогда можно записать

$$\hat{z}(m+1) - M_{\text{н}}x(m+1) = F_{\text{н}}(\hat{z}(m) - M_{\text{н}}x(m))$$

и, введя вектор невязки в виде

$$\tilde{z}(m) = \hat{z}(m) - M_{\text{н}}x(m),$$

получить модель невязки в виде уравнения

$$\tilde{z}(m+1) = F_{\text{н}} \tilde{z}(m).$$

Это уравнение является автономным, поэтому свойство сходимости вектора невязки к нулю целиком и полностью определяется свойствами матрицы  $F_{\text{н}}$ . Таким образом, рассматриваемая динамическая система будет устройством оценки с вектором оценки

$$\hat{x}(m) = \begin{bmatrix} C_{\text{н}} \\ M_{\text{н}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_{\text{н}}(m) \\ \hat{z}(m) \end{bmatrix}$$

тогда и только тогда, когда матрица  $F_{\text{н}}$  является устойчивой матрицей, то есть все корни ее характеристического полинома расположены в круге единичного радиуса с центром в начале координат.

В результате получаем следующую процедуру синтеза устройства оценки пониженной размерности:

1. формирование матриц описания устройства  $A$ ,  $B$  и  $C_{\text{н}}$ ;
2. проверка пары матриц  $C_{\text{н}}$ ,  $A$  на полную наблюдаемость,  $\text{rank} C_{\text{н}} = 1$ ;
3. исходя из требуемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору, назначение  $n-l$  желаемых корней характеристического полинома (или коэффициентов);
4. по желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома формирование матрицы описания устройства оценки  $F_{\text{н}}$  размерности  $(n-l) \times (n-l)$  в одном из канонических видов и выбор матрицы входов устройства оценки  $G$  размерности  $(n-l) \times l$  из условия полной управляемости пары  $F_{\text{н}}$ ,  $G$
5. решение относительно матрицы преобразования  $M_{\text{н}}$  размерности  $(n-l) \times n$  матричного уравнения типа Сильвестра

$$M_{\text{н}}A - F_{\text{н}}M_{\text{н}} = GC_{\text{н}};$$

6. нахождение произведения  $M_{\text{н}}B$  и вычисление матриц  $E$ ,  $D$  по соотношению

$$\begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} C_{\text{н}} \\ M_{\text{н}} \end{bmatrix}^{-1}.$$



## Проектирование динамического регулятора с устройством оценки полной размерности

Динамическим регулятором будем называть совокупность устройства оценки и регулятора, реализующего соотношение

$$u(m) = -K\hat{x}(m),$$

где  $u$  – вектор управляющих воздействий,  $K$  – матрица линейных стационарных обратных связей,  $\hat{x}$  – вектор оценки состояния ОУ.

Устройства оценки предназначены для выработки информации о поведении недоступных для измерения переменных состояния ОУ по текущим значениям измеряемых переменных и переменных управляющих воздействий.

Рассмотрим задачу синтеза динамического регулятора с устройством оценки полной размерности. Задано уравнение движения ОУ с неполной информацией (24). Будем строить динамический регулятор с устройством оценки полной размерности в соответствии со следующими уравнениями:

$$\hat{x}(m+1) = A\hat{x}(m) + Bu(m) + L(y_u - C_{\text{н}}\hat{x}(m)),$$

$$\hat{x}(0) = 0,$$

$$u(m) = -K\hat{x}(m),$$

где  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния устройства оценки;  $A, B, C_{\text{н}}$  – матрицы описания ОУ;  $L$  – матрица входов устройства оценки размерности  $(n \times l)$ ;  $K$  – матрица обратных связей размерности  $k \times n$ .

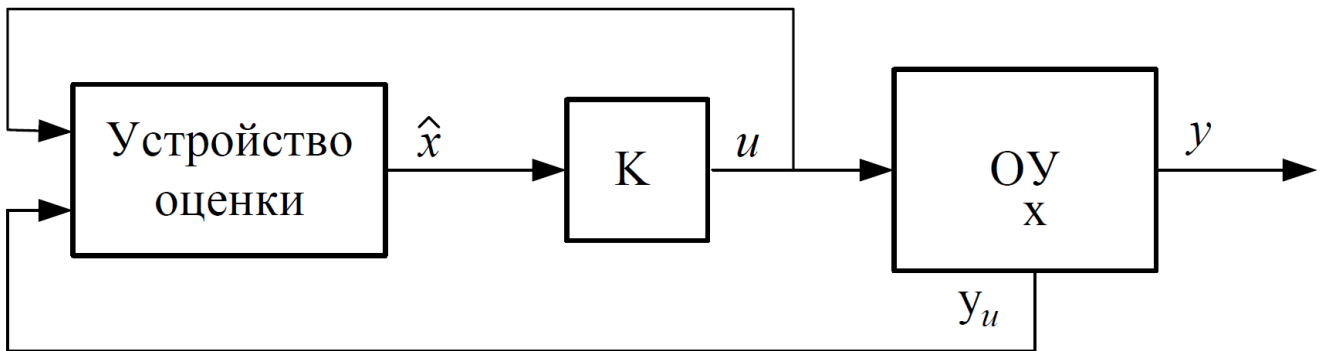


Рис. 11: Схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки полной размерности

Задача синтеза динамического регулятора состоит в отыскании таких неизвестных матриц  $L$  и  $K$ , которые обеспечивают желаемые динамические свойства в замкнутой системе. Схема дискретного динамического регулятора с

устройством оценки полной размерности представлена на рисунке 11. Объединим уравнение движения объекта и уравнение движения динамического регулятора:

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y_{\text{н}}(m) = C_{\text{н}}x(m) \\ \hat{x}(m+1) = A\hat{x}(m) + Bu(m) + L(y_{\text{н}} - C_{\text{н}}\hat{x}(m)) \\ u(m) = -K\hat{x}(m) \end{cases}.$$

Для упрощения описания вычтем из третьего уравнения уравнение описания устройства оценки, а из первого уравнения вычтем уравнение объекта. Получим:

$$\begin{aligned} \hat{x}(m+1) - x(m+1) &= A\hat{x}(m) + Bu(m) + L(y_{\text{н}} - C_{\text{н}}\hat{x}(m)) - \\ &- Ax(m) - Bu(m) = A(\hat{x}(m) - x(m)) - LC_{\text{н}}(\hat{x}(m) - x(m)) = \\ &= (A - LC_{\text{н}})(\hat{x}(m) - x(m)). \end{aligned}$$

Обозначим вектор невязки как  $\tilde{x}(m) = \hat{x}(m) - x(m)$  и  $F_{\text{н}} = A - LC_{\text{н}}$  и получим модель невязки в виде

$$\tilde{x}(m+1) = F_{\text{н}}\tilde{x}(m).$$

Перепишем уравнение движения замкнутой системы относительно вектора невязки

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) - BK\hat{x}(m) \\ \tilde{x}(m+1) = F_{\text{н}}\tilde{x}(m) \end{cases},$$

$$\hat{x}(m) = \tilde{x}(m) + x(m),$$

$$\begin{aligned} x(m+1) &= Ax(m) - BK\tilde{x}(m) - BKx(m) = \\ &= (A - BK)x(m) - BK\tilde{x}(m) = Fx(m) - BK\tilde{x}(m). \end{aligned}$$

Запишем полученные уравнения в блочно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} x(m+1) \\ \tilde{x}(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -BK \\ 0 & F_{\text{н}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(m) \\ \tilde{x}(m) \end{bmatrix}$$

и введем обозначение  $\bar{F} = \begin{bmatrix} F & -BK \\ 0 & F_{\text{н}} \end{bmatrix}$  как матрицу динамики замкнутой системы размерности  $2n \times 2n$ .

Из верхнетреугольного вида матрицы  $\bar{F}$  следует, что свойства замкнутой системы зависят от свойств матрицы  $F = A - BK$  и свойств матрицы  $F_{\text{н}} = A - LC_{\text{н}}$  определитель матрицы замкнутой системы равен произведению определителей матриц  $F$  и  $F_{\text{н}}$ , а корни характеристического уравнения объединяют корни характеристических уравнений матриц  $F$  и  $F_{\text{н}}$ ,

$$\det(\bar{F} - zI_{2n \times 2n}) = \det(F - zI_{n \times n}) \det(F_{\text{н}} - zI_{n \times n}) = 0.$$

Отсюда следует, что если  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$  – собственные числа матрицы  $F$ , а  $z_{1н}^*, z_{2н}^*, \dots, z_{nн}^*$  – собственные числа матрицы  $F_n$ , то корни матрицы  $\bar{F}$  будут равны совокупности этих собственных чисел.

Из полученного следует свойство разделения, которое заключается в следующем:

1.  $n$  желаемых корней замкнутой системы можно обеспечить выбором матрицы обратных связей  $K$ , т. е. если  $A, B$  – полностью управляемая пара, то существует матрица  $K$  такая, что  $n$  собственных чисел матрицы  $A - BK$  равны  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ ;
2. оставшиеся  $n$  желаемых корней можно обеспечить выбором матрицы входов устройства оценки  $C_n$ , т. е. если  $C_n, A$  – полностью наблюдаемая пара, то существует матрица  $L$  такая, что  $n$  желаемых собственных чисел матрицы  $F_n = A - LC_n$  равны  $z_{1н}^*, z_{2н}^*, \dots, z_{nн}^*$ .

В результате получаем следующую процедуру синтеза динамического регулятора с устройством оценки полной размерности на основе метода модального управления:

1. Синтез матрицы обратных связей  $K$ 
  - (а) проверка пары матриц  $A, B$  на полную управляемость;
  - (б) выбор  $n$  желаемых корней  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$  или желаемых коэффициентов характеристического полинома исходя из требуемых показателей качества;
  - (с) по желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома назначение матрицы эталонной модели  $\Gamma$  размерности  $n \times n$ , и выбор матрицы выходов эталонной модели  $H$  размерности  $l \times n$  из условия полной наблюдаемости;
  - (d) решение матричного уравнения Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH$$

относительно матрицы  $M$  размерности  $n \times n$  с последующим вычислением матрицы обратных связей

$$K = HM^{-1}.$$

2. Синтез матрицы входов устройства оценки  $L$ 
  - (а) проверка пары матриц  $C_n, A$  на полную наблюдаемость;

- (b) назначение оставшихся  $n$  желаемых корней замкнутой системы  $z_{1н}^*, z_{2н}^*, \dots, z_{nн}^*$  или коэффициентов характеристического полинома, исходя из желаемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору. Как правило, эти корни назначаются несколько более "быстрыми" чем корни для синтеза матрицы обратных связей  $K$ ;
- (с) по желаемым корням формирование матрицы эталонной модели  $\Gamma_n$  размерности  $n \times n$  и выбор матрицы выходов  $H_n$  эталонной модели из условия полной наблюдаемости пары  $H_n, \Gamma_n$ ;
- (d) решение матричного уравнения типа Сильвестра

$$M_n \Gamma_n - A^T M_n = -C_n H_n$$

относительно матрицы  $M_n$  размерности  $n \times n$  с последующим вычислением матрицы прямых связей

$$L^T = H_n M_n^{-1}.$$

## Проектирование динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности

Рассмотрим задачу синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности. Задано уравнение движения ОУ с неполной информацией (24). Будем строить динамический регулятор с устройством оценки пониженной размерности по следующим уравнениям движения замкнутой системы:

$$\begin{cases} \hat{z}(m+1) = F_n \hat{z}(m) + G y_n(m) + M_n B u(m), & \hat{z}(0) = 0 \\ \hat{x}(m) = \begin{bmatrix} C_n \\ M_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_n(m) \\ \hat{z}(m) \end{bmatrix} \\ u(m) = -K \hat{x}(m) \end{cases},$$

где  $\hat{z} \in \mathbb{R}^{n-l}$  – вектор состояния устройства оценки пониженной размерности;  $\hat{x}(m) \in \mathbb{R}^n$  – вектор оценки вектора состояния ОУ;  $F_n$  – матрица динамики устройства оценки размерности  $(n-l) \times (n-l)$ ;  $G$  – матрица входов устройства оценки размерности  $(n-l) \times l$ ;  $M_n$  – матрица линейных преобразований размерности  $(n-l) \times n$ , согласующая размерности векторов состояния ОУ и устройства оценки;  $K$  – матрица коэффициентов регулятора размерности  $k \times n$ .

Задача синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности заключается в выборе таких матриц описания устройства оценки  $F_n$  и  $G$ , а также матрицы преобразования  $M_n$  и матрицы обратных связей  $K$ , которые обеспечивают замкнутой системе желаемые динамические

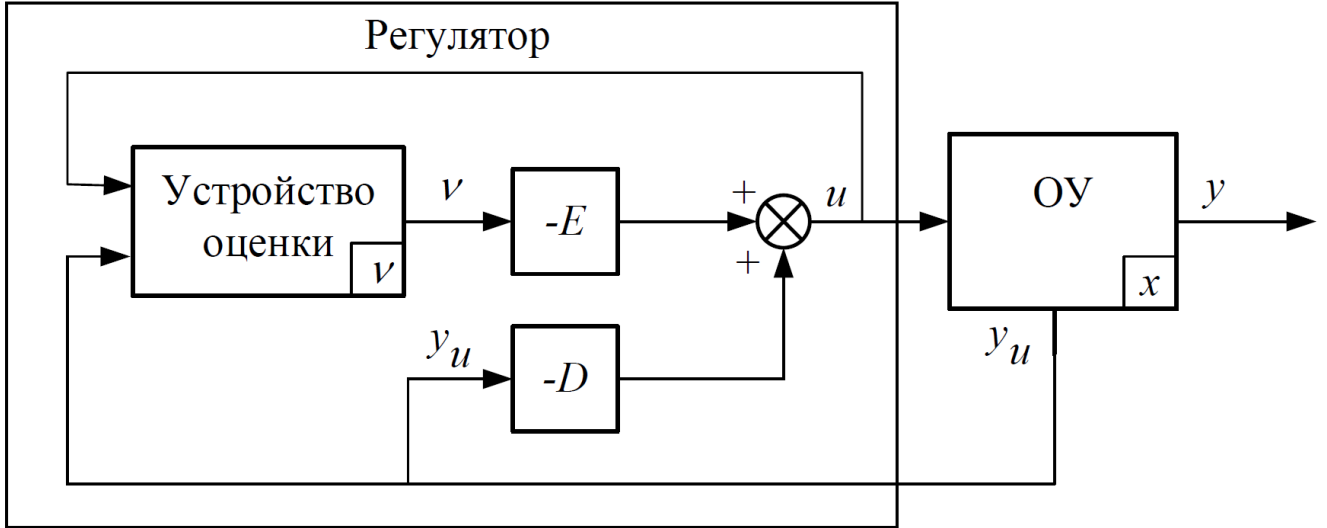


Рис. 12: Схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности

свойства. Структурная схема дискретного динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности представлена на рисунке 12.

Рассмотрим свойства замкнутой системы с законом управления

$$u(m) = -K\hat{x}(m) = -K \begin{bmatrix} C_{\text{н}} \\ M_{\text{н}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_{\text{н}}(m) \\ \hat{z}(m) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{\text{н}}(m) \\ \hat{z}(m) \end{bmatrix},$$

где введена блочная матрица  $\begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} C_{\text{н}} \\ M_{\text{н}} \end{bmatrix}^{-1}$ , определяющая матрицу коэффициентов пропорционального регулятора, т.е.  $\begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\text{н}} \\ M_{\text{н}} \end{bmatrix} = K$ , или  $K = EC_{\text{н}} + DM_{\text{н}}$ , причем матрица  $E$  имеет размерность  $k \times l$ , а матрица  $D$  имеет размерность  $k \times (n - l)$ .

Запишем уравнение движения замкнутой системы, объединив уравнения движения объекта и динамического регулятора:

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + bu(m) \\ y_{\text{н}}(m) = C_{\text{н}}x(m) \\ \hat{z}(m+1) = F_{\text{н}}\hat{z}(m) + Gy_{\text{н}}(m) + M_{\text{н}}Bu(m) \\ u(m) = -Ey_{\text{н}}(m) - D\hat{z}(m) \end{cases}.$$

Вычтем из уравнения движения устройства оценки уравнение движения объекта, слева умноженное на матрицу преобразования  $M_{\text{н}}$ , с учетом равенства  $M_{\text{н}}A - F_{\text{н}}M_{\text{н}} = GC_{\text{н}}$ :

$$\hat{z}(m+1) - Mx(m+1) = F_{\text{н}}\hat{z}(m) + GC_{\text{н}}x(m) + M_{\text{н}}Bu(m) - M_{\text{н}}Ax(m) - M_{\text{н}}Bu(m) =$$

$$= F_{\text{H}} \hat{z}(m) + (GC_{\text{H}} - M_{\text{H}}A)x(m) = F_{\text{H}}(\hat{z}(m) - M_{\text{H}}x(m)).$$

Введем в рассмотрение вектор невязки в виде  $\tilde{z}(m) = \hat{z}(m) - Mx(m)$ . Тогда для замкнутой системы справедливы следующие равенства

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ \tilde{z}(m+1) = F_{\text{H}}\tilde{z}(m) \\ u(m) = -EC_{\text{H}}x(m) - D\hat{z}(m) \end{cases},$$

$$\begin{aligned} x(m+1) &= Ax(m) - BEC_{\text{H}}x(m) - BD\hat{z}(m) = \\ &= (A - B(EC_{\text{H}} + DM_{\text{H}}))x(m) - BD\tilde{z}(m) = (A - BK)x(m) - BD\tilde{z}(m). \end{aligned}$$

С учетом обозначения  $F = A - BK$  можно записать

$$\begin{cases} x(m+1) = Fx(m) - BD\tilde{z}(m) \\ \tilde{z}(m+1) = F_{\text{H}}\tilde{z}(m) \end{cases}.$$

Перепишем уравнение движения системы в блочной матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x(m+1) \\ \tilde{z}(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -BD \\ 0 & F_{\text{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(m) \\ \tilde{z}(m) \end{bmatrix} = \bar{F} \begin{bmatrix} x(m) \\ \tilde{z}(m) \end{bmatrix},$$

где  $\bar{F}$  – матрица динамики замкнутой системы. Из верхнетреугольного вида матрицы  $\bar{F}$  следует, что характеристическое уравнение замкнутой системы определяется произведением характеристических уравнений матриц  $F$  и  $F_{\text{H}}$ , а собственные числа замкнутой системы есть объединение корней характеристических уравнений матриц  $F$  и  $F_{\text{H}}$ , т. е.

$$\det(\bar{F} - zI_{(2n-l) \times (2n-l)}) = \det(F - zI_{n \times n}) \det(F_{\text{H}} - zI_{(n-l) \times (n-l)}).$$

Если обозначить корни характеристического уравнения матрицы  $F$  как  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , а корни характеристического уравнения матрицы  $F_{\text{H}}$  как  $z_{1\text{H}}, z_{2\text{H}}, \dots, z_{(n-l)\text{H}}$ , то корни характеристического уравнения матрицы  $\bar{F}$  будут равны  $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{1\text{H}}, z_{2\text{H}}, \dots, z_{(n-l)\text{H}}$ .

В рассматриваемом случае также справедливо свойство разделения:

1.  $n$  желаемых корней замкнутой системы можно обеспечить выбором матрицы обратных связей  $K$ , т. е. для матрицы  $F = A - BK$ ;
2. оставшиеся  $n - l$  корней можно обеспечить назначением матрицы описания устройства оценки  $F_{\text{H}}$ .

Рассмотрим процедуру синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности с использованием метода модального управления. Динамический регулятор описывается уравнениями

$$\begin{cases} \hat{z}(m+1) = F_n \hat{z}(m) + G y_n(m) + M_n B u(m) \\ u(m) = -E y_n(m) - D \hat{z}(m) \end{cases} \quad \hat{z}(0) = 0,$$

причем для того, чтобы подсистема, описываемая первым уравнением, была бы устройством оценки, требуется выполнение матричного уравнения типа Сильвестра

$$K = EC_n + DM_n$$

и условия, что матрица  $F_n$  должна быть устойчивой матрицей.

Отсюда следует, что задача синтеза динамического регулятора с устройством оценки пониженной размерности состоит в отыскании матрицы линейных стационарных обратных связей  $K$ , обеспечивающих  $n$  желаемых корней в замкнутой системе, назначенных из требуемых показателей качества, предъявляемых к системе. Матрица  $F_n$ , определяющая динамические свойства устройства оценки, формируется по характеристическому полиному или его корням, назначенным из требуемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору. Матрица  $G$  выбирается из условия полной управляемости пары  $F_n, G$ . Матрица  $M_n$  находится из уравнения типа Сильвестра, а матрицы  $E$  и  $D$  — из формульной связи матриц  $K, E$  и  $D$ .

Процедура синтеза регулятора сводится к выполнению следующих шагов.

#### 1. Синтез матрицы обратных связей $K$

- (а) проверка пары матриц  $A, B$  на полную управляемость;
- (б) выбор  $n$  желаемых корней  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$  или желаемых коэффициентов характеристического полинома исходя из требуемых показателей качества;
- (с) по желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома назначение матрицы эталонной модели  $\Gamma$  размерности  $n \times n$ , и выбор матрицы выходов эталонной модели  $H$  размерности  $l \times n$  из условия полной наблюдаемости;
- (d) решение матричного уравнения Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH$$

относительно матрицы  $M$  размерности  $n \times n$  с последующим вычислением матрицы обратных связей

$$K = HM^{-1}.$$

## 2. Синтез матриц описания устройства оценки

- (a) проверка пары матриц  $C_n$ ,  $A$  на полную наблюдаемость и выполнение условия  $\text{rank} C_n = l$ ;
- (b) исходя из требуемой скорости сходимости вектора оценки к оцениваемому вектору состояния, назначение оставшихся  $n-l$  желаемых корней характеристического полинома (или его коэффициентов);
- (c) по желаемым корням или коэффициентам характеристического полинома формирование матрицы описания устройства оценки  $F_n$  размерности  $(n-l) \times (n-l)$  в одном из канонических базисов и выбор матрицы входов устройства оценки  $G$  размерности  $(n-l) \times l$  из условия полной управляемости пары матриц  $F_n$ ,  $G$ ;
- (d) решение уравнения типа Сильвестра

$$M_n A - F_n M_n = G C_n$$

относительно матрицы преобразования  $M_n$  размерности  $(n-l) \times n$ ;

- (e) нахождение произведения  $M_n B$  и вычисление матриц  $E$  и  $D$  из соотношения

$$\begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} C_n \\ M_n \end{bmatrix}^{-1}.$$

## Порядок выполнения работы

### 1. Проектирование дискретных стабилизирующих регуляторов

- (a) В среде Matlab Simulink реализовать схему ОУ, изображенную на рисунке 13 с параметрами согласно варианту из таблицы 5.
- (b) Перейти к дискретному описанию ОУ, период дискретизации взять согласно варианту из таблицы 5. Проверить структурные свойства ОУ.
- (c) Рассчитать матрицу линейных стационарных обратных связей методом модального управления. В качестве эталонной модели взять оптимальную по быстродействию дискретную систему, т. е. принять  $z_i^* = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .
- (d) Осуществить моделирование замкнутой системы, привести графики переменных вектора состояния и выходной переменной ОУ. Сделать выводы о соответствии полученных результатов желаемому поведению замкнутой системы.



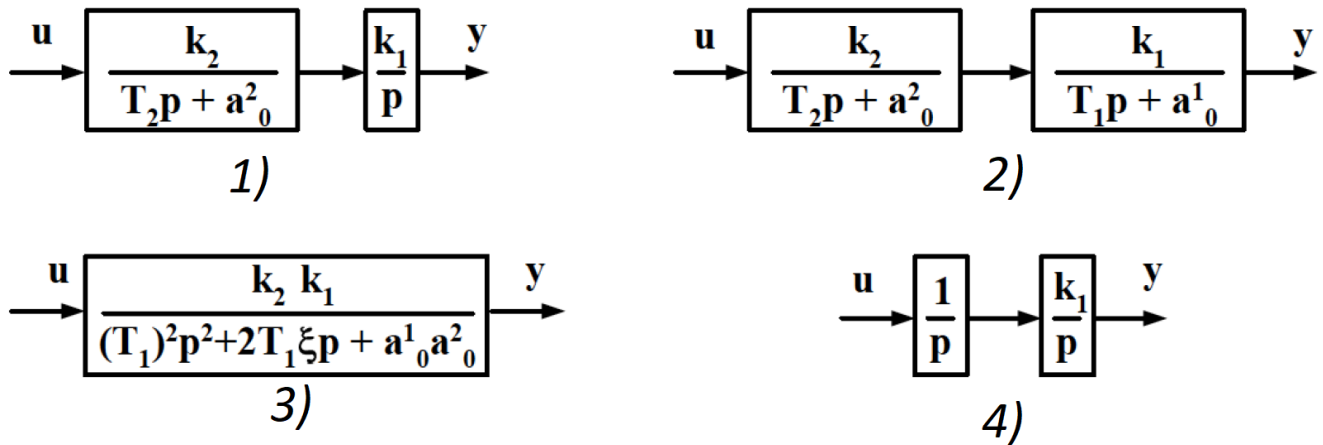


Рис. 13: Simulation scheme.

## 2. Проектирование дискретных следящих регуляторов

- (a) Синтезировать дискретный генератор задающего воздействия с параметрами, примененными в таблице 6. В качестве задающего воздействия могут выступать полиномиальная функция вида  $g(k) = g_0 + g_1 k T$  либо гармонический сигнал вида  $g(k) = A_g \sin \omega_g k T$ . Осуществить моделирование синтезированного генератора, привести график функции  $g(k)$ .
- (b) Для ОУ, полученного в пункте 1b синтезировать следящий регулятор методом внутренней модели. В качестве эталонной модели взять оптимальную по быстродействию дискретную систему, т. е. принять  $z_i^* = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .
- (c) Осуществить моделирование замкнутой системы. Привести графики выходной переменной и ошибки слежения. Сделать выводы о функционировании следящей системы.

## 3. Построение регуляторов для объектов с неполной информацией

- (a) Для ОУ, полученного в пункте 1b синтезировать устройство оценки вектора состояния. Для нечетных вариантов устройство оценки полной размерности, для нечетных – пониженной на 1. Эталонную модель выбрать оптимальной по быстродействию.
- (b) Осуществить моделирование замкнутой системы, полученной в пункте 1c в предположении о недоступности измерению переменных вектора состояния. Привести графики переменных вектора состояния ОУ и наблюдателя, вектора невязки наблюдателя и выходной переменной ОУ. Сделать выводы о соответствии полученных результатов желаемому поведению замкнутой системы.

- (с) Осуществить моделирование замкнутой системы, полученной в пункте 2b в предположении о недоступности измерению переменных вектора состояния. Привести графики переменных вектора состояния ОУ и наблюдателя, вектора невязки наблюдателя и выходной переменной ОУ. Сделать выводы о соответствии полученных результатов желаемому поведению замкнутой системы.

## Варианты задания

Таблица 5: Параметры ОУ для синтеза стабилизирующего регулятора

Вариант	Тип ОУ	$k_1$	$a_0^1$	$T_1$	$\xi$	$k_2$	$a_0^2$	$T_2$	$T$
1	2	5.95	1	2.9	0	2.5	1	0.72	0.5
2	1	1	0	1	0	0.56	1	0.95	0.5
3	3	3.26	1	9.5	0.36	1	1	0	1
4	1	1	0	1	0	1.68	1	0.36	0.4
5	1	1	0	1	0	7.02	1	0.90	0.4
6	1	1	0	1	0	4.21	1	4.4	0.4
7	3	9.56	1	0.65	0.34	1	1	0	0.2
8	4	3.20	0	1	0	1	0	2	0.75
9	2	7.29	1	0.38	0	9.46	1	1	0.25
10	4	3.48	0	3	0	1	0	1	0.75
11	1	1	0	2	0	1.12	1	0.81	0.75
12	1	1	0	1	0	9.84	1	0.86	0.25
13	4	3.58	0	4	0	1	0	1	1
14	1	1	0	1	0	4.03	1	0.26	0.25
15	2	5.06	1	0.84	0	1.21	1	4.7	0.5
16	1	1	0	3	0	9.83	1	0.98	0.75
17	2	2.39	1	2.1	0	3.71	1	0.92	0.75
18	4	0.51	0	1	0	1	0	2	0.5
19	1	1	0	1	0	8.20	1	3.5	0.5
20	4	9.71	0	1	0	1	0	4	1
21	3	8.24	1	0.60	0.52	1	1	0	0.2
22	4	5.75	0	5	0	1	0	1	1
23	4	5.48	0	3	0	1	0	1	0.5
24	1	1	0	2	0	1.68	1	0.26	0.5
25	3	4.29	1	5.5	0.66	1	1	0	0.25
26	2	4.86	1	0.59	0	3.97	1	0.58	0.2
27	2	3.70	1	1.50	0	8.47	1	0.75	0.5

28	3	7.94	1	2.2	0.46	1	1	0	0.25
29	1	1	0	4	0	2.25	1	0.57	1
30	1	1	0	1	0	3.25	1	0.98	0.2
31	2	1.43	1	0.87	0	2.78	1	0.82	0.5
32	4	3.86	0	1	0	1	0	1	0.25
33	2	7.67	1	5.9	0	7.92	1	0.21	1
34	2	1.19	1	0.45	0	0.34	1	6.7	0.5
35	2	8.35	1	0.76	0	9.44	1	4.2	0.4
36	3	7.53	1	2.94	0.82	1	1	0	0.75
37	1	1	0	1	0	1.59	1	0.93	0.2
38	4	3.76	0	1	0	1	0	1	0.4
39	1	1	0	1	0	2.70	1	0.47	0.25
40	3	8.11	1	0.88	0.96	1	1	0	0.2
41	1	1	0	2	0	8	1	0.14	0.75
42	4	4.70	0	1	0	1	0	1	0.4
43	1	1	0	1	0	9.85	1	4.3	1
44	2	4.05	1	0.88	0	2.78	1	3.6	0.4
45	1	1	0	1	0	0.11	1	0.20	0.4
46	2	9.86	1	0.63	0	2.81	1	0.51	0.2
47	2	2.32	1	2.8	0	8.75	1	0.85	1
48	3	8.90	1	2.84	0.90	1	1	0	1
49	4	5.91	0	1	0	1	0	1	0.4
50	1	1	0	1	0	3.25	1	0.84	0.25
51	1	1	0	5	0	0.86	1	0.45	1
52	3	7.8	1	2.8	0.77	1	1	0	0.5
53	4	5.07	0	3	0	1	0	1	0.75
54	4	1.44	0	1	0	1	0	2	0.75
55	2	3.57	1	0.53	0	4.55	1	5.1	1
56	4	9.34	0	1	0	1	0	1	0.4
57	3	1.63	1	2.2	0.46	1	1	0	1
58	1	1	0	1	0	1.13	1	4.6	0.4
59	3	7.34	1	0.95	0.60	1	1	0	0.4
60	3	6.94	1	6.2	0.63	1	1	0	0.75
61	1	1	0	1	0	7.42	1	2.51	0.5
62	4	9.57	0	1	0	1	0	1	0.4
63	4	8.61	0	1	0	1	0	1	0.25
64	4	9.37	0	1	0	1	0	3	1
65	4	9.11	0	2	0	1	0	1	1

66	3	5.62	1	4.51	0.05	1	1	0	1
67	1	1	0	1	0	2.26	1	2.72	0.75
68	3	9.94	1	6.9	0.44	1	1	0	0.5
69	4	1.29	0	1	0	1	0	1	0.25
70	3	2.03	1	9.7	0.74	1	1	0	0.75
71	3	5.84	1	4.6	0.34	1	1	0	0.75
72	4	0.70	0	1	0	1	0	1	0.25

Таблица 6: Варианты параметров задающего воздействия

Var.	$g_0$	$g_1$	$A_g$	$\omega_g$
1	9	0	0	0
2	4	0	0	0
3	2.8	0	0	0
4	9.7	4	0	0
5	0.24	7.65	0	0
6	0.33	2.14	0	0
7	0	0	1.48	0.6
8	0	0	2.06	7
9	0	0	7.68	0.3
10	3.28	0	0	0
11	4.35	0	0	0
12	7.07	0	0	0
13	7.88	2.88	0	0
14	2.15	3.85	0	0
15	7.51	6.2	0	0
16	0	0	2.4	0.5
17	0	0	2.2	0.4
18	0	0	1.68	0.6
19	5.46	0	0	0
20	2.12	0	0	0
21	7.63	0	0	0
22	8.18	1.9	0	0
23	2.12	7.66	0	0
24	3.47	7	0	0
25	0	0	6.06	0.4
26	0	0	9.89	0.3
27	0	0	3.1	0.7

28	0.96	0	0	0
29	2.75	0	0	0
30	0.37	0	0	0
31	1.95	1.54	0	0
32	5.55	8.9	0	0
33	4.52	5.88	0	0
34	0	0	2.55	0.1
35	0	0	1.16	0.3
36	0	0	7.05	0.3
37	8.65	0	0	0
38	0.35	0	0	0
39	0.97	0	0	0
40	7.63	5.38	0	0
41	9.9	0.45	0	0
42	4.53	7.17	0	0
43	0	0	1.18	0.5
44	0	0	1.9	0.3
45	0	0	2.17	8
46	4.13	0	0	0
47	5.48	0	0	0
48	4.28	0	0	0
49	4.76	5.27	0	0
50	7.74	1.6	0	0
51	1.53	5.85	0	0
52	0	0	7.83	0.6
53	0	0	0.78	0.5
54	0	0	5.46	0.8
55	3.7	0	0	0
56	9.8	0	0	0
57	0.81	0	0	0
58	0.7	5.92	0	0
59	9.75	4.02	0	0
60	5.94	3.68	0	0
61	0	0	5.27	0.5
62	0	0	3.23	0.5
63	0	0	7.13	0.4
64	6.1	0	0	0
65	9.27	0	0	0

66	9.18	0	0	0
67	2.4	9.84	0	0
68	7.3	8.95	0	0
69	7.8	5.55	0	0
70	0	0	0.98	0.4
71	0	0	7.88	0.8
72	0	0	0.58	0.3

### 3 Исследование системы автоматического управления с дискретным ПИД-регулятором

*Цель работы:* Интенсивное развитие современных вычислительных средств привело к разработке и внедрению цифровых систем управления. Целью лабораторной работы является изучение одного из часто используемых алгоритмов цифрового управления, полученного путем аппроксимации непрерывного ПИД-регулятора.

#### Дискретный ПИД-регулятор

Непрерывные ПИД-регуляторы получили широкое распространение в промышленности. Алгоритм работы ПИД-регулятора описывается выражением

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (25)$$

где  $k_p$ ,  $k_i$  и  $k_d$  – коэффициенты передачи соответственно для пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих выходного сигнала.

В цифровых системах управления входная величина  $e(t)$  регулятора квантуются в аналого-цифровом преобразователе (АЦП) по времени с интервалом дискретизации  $T$ , и на его вход поступает дискретная последовательность  $e(k)$ . Выходная последовательность  $u(k)$  дискретного ПИД-регулятора формируется в виде суммы

$$u(k) = u_p(k) + u_i(k) + u_d(k),$$

где  $u_p$ ,  $u_i$  и  $u_d$  – соответственно пропорциональная, интегральная и дифференциальная составляющие. В зависимости от выбранного метода перехода от непрерывных операторов к их дискретным аналогам возникают различные варианты уравнений, описывающих дискретные ПИД-регуляторы.

Пропорциональная составляющая определяется формулой

$$u_p(k) = k_p e(k). \quad (26)$$

Интегральную составляющую можно аппроксимировать конечной суммой, применив метод прямоугольников или трапеций. При использовании метода прямоугольников (см. рисунок 14а) получим

$$u_i(k) = k_i T \sum_{m=0}^{n-1} e(k). \quad (27)$$

В том случае, когда для выполнения операции интегрирования применяется метод трапеций (см. рисунок 14б), получим

$$u_i(k) = k_i T \left( \frac{e(0)}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} e(k) + \frac{e(k)}{2} \right). \quad (28)$$

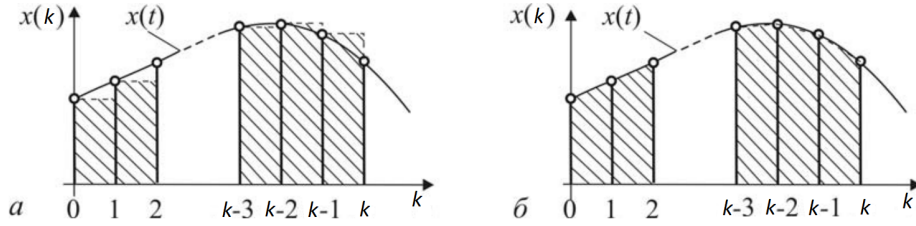


Рис. 14: Геометрическое представление процедуры интегрирования: а – аппроксимация по методу прямоугольников, б – аппроксимация по методу трапеций.

Производная функции  $e(t)$  в момент времени  $t = kT$  аппроксимируется обратной разностью. При этом

$$u_d(k) = k_d \frac{de(t)}{dt} \Big|_{t=kT} \approx k_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}. \quad (29)$$

Таким образом, при использовании метода прямоугольников алгоритм работы дискретного ПИД-регулятора описывается выражением

$$u(k) = k_p e(k) + k_i T \sum_{m=0}^{k-1} e(m) + \frac{k_d}{T} (e(k) - e(k-1)). \quad (30)$$

В этом алгоритме для формирования интегральной составляющей необходимо запоминать все предыдущие значения сигнала ошибки  $e(k)$  и суммировать их на каждом интервале дискретности. Это существенно увеличивает время вычисления текущего значения  $u(k)$  управляющего воздействия. Поэтому, как правило, используют рекуррентные алгоритмы, в которых для вычисления текущего значения  $u(k)$  используется предыдущее значение  $u(k-1)$ . Чтобы получить такой алгоритм, перепишем (30) в следующем виде:

$$u(k-1) = k_p e(k-1) + k_i T \sum_{m=0}^{k-2} e(m) + \frac{k_d}{T} (e(k-1) - e(k-2)). \quad (31)$$

После вычитания формулы (31) из (30) получим рекуррентное уравнение

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2), \quad (32)$$



где

$$q_0 = k_p + \frac{k_d}{T}; \quad q_1 = -k_p + k_i T - 2\frac{k_d}{T}; \quad q_2 = \frac{k_d}{T}. \quad (33)$$

Если интегрирование выполняется методом трапеций, уравнение дискретного ПИД-регулятора принимает вид

$$u(k) = k_p e(k) + k_i T \left( \frac{e(0)}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} e(k) + \frac{e(k)}{2} \right) + \frac{k_d}{T} (e(k) - e(k-1)). \quad (34)$$

Переходя аналогичным образом к рекуррентной форме, получим разностное уравнение регулятора:

$$u(k) = u(k-1) + g_0 e(k) + g_1 e(k-1) + g_2 e(k-2), \quad (35)$$

где

$$g_0 = k_p + \frac{k_i T}{2} + \frac{k_d}{T}; \quad g_1 = -k_p + \frac{k_i T}{2} - 2\frac{k_d}{T}; \quad g_2 = \frac{k_d}{T}. \quad (36)$$

Полученное разностное уравнение (35) по виду не отличается от уравнения (32), но значения его коэффициентов связаны с параметрами  $k_p$ ,  $k_i$  и  $k_d$  непрерывного ПИД-регулятора другими формулами.

Таким образом, если известны параметры непрерывного ПИД-регулятора, параметры дискретного ПИД-регулятора могут быть рассчитаны по формулам (33) или (36).

Если параметры дискретного ПИД-регулятора рассчитываются непосредственно по дискретной модели объекта управления, то необходимо выполнить требования на значения  $q_0$ ,  $q_1$  и  $q_2$ , при которых свойства дискретного ПИД-регулятора будут аналогичны свойствам непрерывного ПИД-регулятора.

Реакция дискретного ПИД-регулятора на единичное ступенчатое воздействие рассчитывается по уравнению (32):

$$\begin{aligned} u(0) &= q_0; \\ u(1) &= 2q_0 + q_1; \\ u(2) &= 3q_0 + 2q_1 + q_2; \\ &\dots \\ u(k) &= (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2. \end{aligned}$$

Реакция дискретного ПИД-регулятора на ступенчатое воздействие (см. рисунок 15) будет аналогична реакции непрерывного ПИД-регулятора, если выполняются условия:

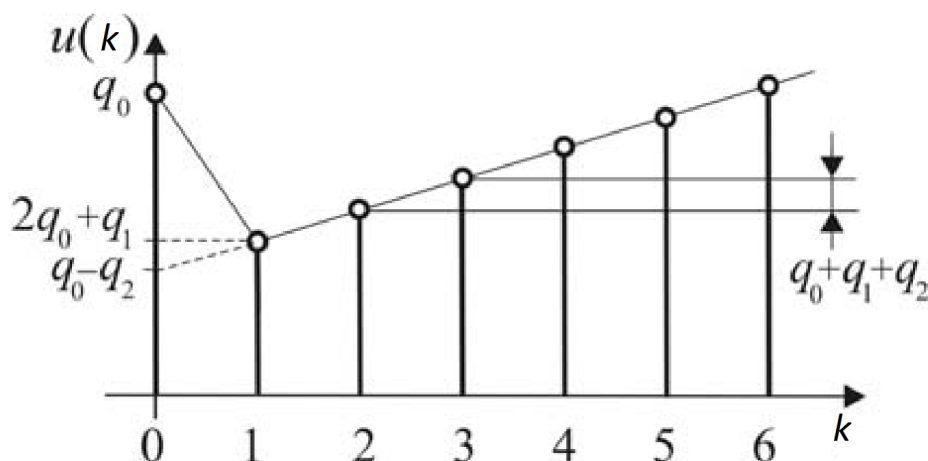


Рис. 15: Реакция дискретного ПИД-регулятора на ступенчатое воздействие.

- $u(0) > u(1)$ ;
- $u(k-1) < u(k)$  при  $k \geq 2$ .

Непосредственно из рисунка 15 следует, что указанные условия выполняются при следующих соотношениях между параметрами регулятора:

$$q_0 + q_1 < 0; \quad q_0 + q_1 + q_2 > 0; \quad q_0 - q_2 > 0.$$

## Выбор периода дискретизации и параметров регулятора

В общем случае выбор периода дискретизации в цифровых системах управления является сложной и неоднозначной задачей, поскольку приходится учитывать противоречивые требования. Так, если выбрать период дискретизации слишком малым, то возрастает время вычисления управляющего воздействия. При большом периоде дискретизации ухудшается качество регулирования. Поэтому выбор периода дискретизации — далеко не тривиальная задача и требует учета многих факторов.

Методы синтеза параметров дискретного ПИД-регулятора можно разделить на две группы.

К первой группе относятся методы, предполагающие использование непрерывного ПИД-регулятора в качестве аналога. Сначала тем или иным способом рассчитываются параметры непрерывного ПИД-регулятора, а затем по формуле (33) или (36), зависимости от выбранного метода аппроксимации интеграла — параметры дискретного ПИД-регулятора. При этом следует иметь в виду, что при переходе от непрерывных операторов к дискретным возникает погрешность и погрешность тем больше, чем больше период дискретизации  $T$ . Поэтому полученные дискретные уравнения регулятора можно считать эквивалентными

непрерывным только при условии, что  $e(t)$  изменяется незначительно в пределах интервала дискретизации.

Вторую группу образуют методы, основанные на использовании теории дискретных систем. В этих методах параметры регулятора  $q_0$ ,  $q_1$  и  $q_2$  (или  $g_0$ ,  $g_1$  и  $g_2$ ) определяются непосредственно по дискретным моделям объекта управления и регулятора с помощью специально разработанных методов.

В лабораторной работе используется метод компенсации полюсов объекта управления нулями дискретного ПИД-регулятора, относящийся ко второй группе.

## Цифровая САУ температуры

Операторно-структурная схема САУ температуры с цифровым регулятором показана на рисунке 16.

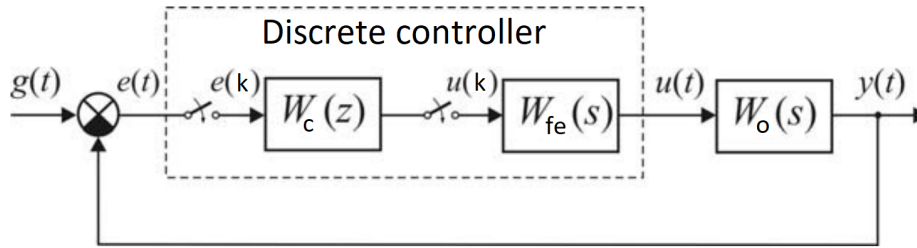


Рис. 16: Операторно-структурная схема цифровой САУ температуры.

Передаточная функция  $W_c(z)$  дискретного регулятора определяется по разностному уравнению

$$W_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_0}{z(z-1)}. \quad (37)$$

Формирующий элемент представляет собой экстраполятор нулевого порядка и описывается передаточной функцией

$$W_{fe}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (38)$$

Электрическая печь с нагревательным элементом представляет собой апериодическое звено второго порядка и имеет передаточную функцию

$$W_o(s) = \frac{k_o}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}. \quad (39)$$

Передаточная функция приведенной непрерывной части равна

$$W_r(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_o(s)}{s} \right\} = \frac{r_0 z + r_1}{(z-d_1)(z-d_2)}, \quad (40)$$

где  $d_1 = e^{-\frac{T}{T_1}}$  и  $d_2 = e^{-\frac{T}{T_2}}$  – полюса передаточной функции  $W_r(z)$ .

Согласно методу компенсации выберем передаточную функцию регулятора в следующем виде

$$W_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0(z-d_1)(z-d_2)}{z(z-1)} = q_0 \frac{z^2 + (-d_1 - d_2)z + d_1d_2}{z(z-1)}. \quad (41)$$

Схема моделирования цифровой САУ температуры показана на рисунке 17.

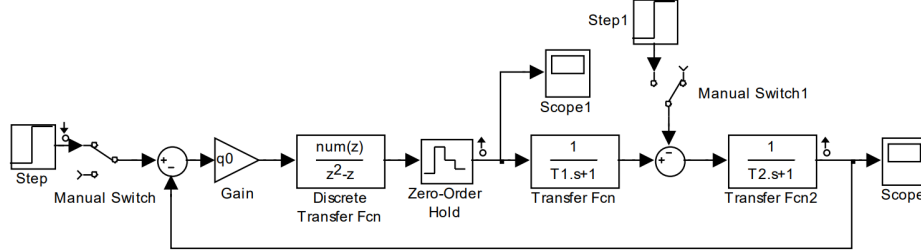


Рис. 17: Схема моделирования цифровой САУ температуры.

Настройка параметров модели включает следующие действия:

- установка значений постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$  модели объекта управления;
- установка выбранного значения периода дискретизации  $T$ ;
- расчёт значений полюсов  $z_1 = d_1 = e^{-\frac{T}{T_1}}$  и  $z_2 = d_2 = e^{-\frac{T}{T_2}}$  приведенной непрерывной части;
- расчёт и установка значений коэффициентов полинома  $num(z) = z^2 + (-d_1 - d_2)z + d_1d_2$  дискретного регулятора ( $num(z)$ ).

Рассмотрим для примера объект управления с постоянными времени  $T_1 = 0.9$ с и  $T_2 = 1.3$ с и периодом дискретизации  $T = 0.2$ с. Вычислим полюса

$$z_1 = d_1 = e^{-\frac{T}{T_1}} = e^{-\frac{0.2}{0.9}} \approx 0.8.$$

$$z_2 = d_2 = e^{-\frac{T}{T_2}} = e^{-\frac{0.2}{1.3}} \approx 0.8574.$$

Найдем коэффициенты числителя регулятора

$$num(z) = z^2 + (-d_1 - d_2)z + d_1d_2 = z^2 - 1.6574z + 0.68592.$$

Итоговая схема моделирования в среде Matlab/Simulink приведена на рисунке 18.

В лабораторной работе исследуется влияние периода дискретизации  $T$  и коэффициента передачи  $q_0$  дискретного ПИД-регулятора на показатели качества переходных процессов, вызванных изменением задающего и возмущающего воздействий.

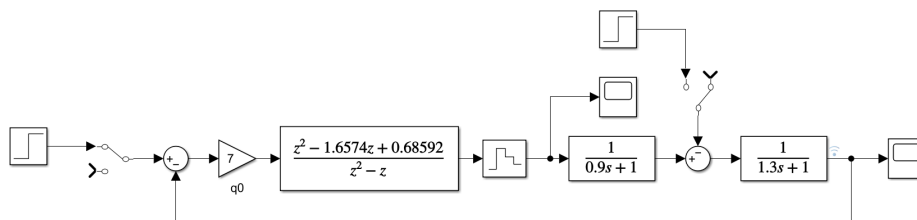


Рис. 18: Схема моделирования синтезированной цифровой САУ температуры.

## Порядок выполнения работы

1. Составить в среде моделирования MatLab/Simulink модель системы согласно схеме, приведенной на рисунке 17. Параметры ОУ приведены в таблице 7.
2. Установить значение периода дискретизации  $T = \frac{T_1}{2}$  в модели экстраполятора нулевого порядка. Рассчитать и установить значения параметров дискретного регулятора. Найти экспериментально (методом проб и ошибок) значение коэффициента передачи регулятора  $q_0$ , при котором система устойчива и имеет слабоколебательные переходные процессы.
3. Пронаблюдать и зафиксировать процессы на выходе дискретного регулятора и системы:
  - при ступенчатом изменении задающего воздействия;
  - ступенчатом изменении возмущающего воздействия;
  - возмущающем воздействии, изменяющемся по случайному закону.

Сделать выводы.

4. Исследовать влияние периода дискретизации  $T$  на качество процесса управления. Для этого установить значение периода дискретизации  $T = \frac{T_1}{4}$  в модели фиксатора нулевого порядка. Рассчитать и установить значения параметров дискретного регулятора. Пронаблюдать и зафиксировать процессы на выходе дискретного регулятора и системы при ступенчатом изменении возмущающего воздействия. Сравнить с соответствующими процессами, полученными в пункте 3, и сделать выводы. Значение коэффициента передачи  $q_0$  дискретного регулятора принять из пункта 3.
5. Исследовать влияние неточности компенсации полюсов объекта на качество процесса управления, увеличив и уменьшив значение постоянной времени  $T_2$  объекта управления на 20%. Для этих двух случаев Рассчитать и установить значения параметров дискретного регулятора. Пронаблюдать

и зафиксировать процессы на выходе дискретного регулятора и системы при ступенчатом изменении возмущающего воздействия. Сравнить с соответствующими процессами, полученными в пункте 3, и сделать выводы. Значение коэффициента передачи  $q_0$  дискретного регулятора принять из пункта 3.

## Варианты задания

Таблица 7: Варианты постоянных времени ОУ и периода дискретизации

Вариант	$T_1$	$T_2$	Вариант	$T_1$	$T_2$
1	0.5	1.1	26	1.55	1
2	0.55	1.3	27	1.1	0.5
3	0.6	0.9	28	1.3	0.55
4	0.65	1.8	29	0.9	0.6
5	0.7	0.8	30	1.8	0.65
6	0.8	1.1	31	0.8	0.7
7	0.75	1.25	32	1.1	0.8
8	0.9	1.05	33	1.25	0.75
9	0.85	0.95	34	1.05	0.9
10	0.95	1.15	35	0.95	0.85
11	0.45	1.35	36	1.15	0.95
12	0.35	0.75	37	1.35	0.45
13	0.4	0.9	38	0.75	0.35
14	1	1.1	39	0.9	0.4
15	1.05	1.2	40	1.1	1
16	1.2	0.85	41	1.2	1.05
17	1.1	0.65	42	0.85	1.2
18	1.15	0.7	43	0.65	1.1
19	1.25	1.15	44	0.7	1.15
20	1.35	1.2	45	1.15	1.25
21	1.3	1.05	46	1.2	1.35
22	1.4	1.35	47	1.05	1.3
23	1.45	1.65	48	1.35	1.4
24	1.6	1.3	49	1.65	1.45
25	1.5	1.4	50	1.3	1.6

## 4 Дискретные регуляторы с заданными характеристиками переходных процессов

*Цель работы* состоит в изучении различных дискретных алгоритмов управления с заданными характеристиками переходных процессов.

Проектирование цифровой системы управления в рамках группы методов, рассматриваемых в данной работе, начинается с задания точной модели процесса, которым необходимо управлять. Затем разрабатывается алгоритм управления, который обеспечит требуемую реакцию замкнутой системы. Обратная связь замыкается с использованием цифрового контроллера в качестве регулятора, который реализует алгоритм управления для достижения реакции системы с заданными характеристиками.

Для проектирования цифрового регулятора можно использовать несколько подходов. Во-первых, передаточная функция объекта управления (ОУ) может быть задана в  $s$ -плоскости, затем она преобразуется в  $z$ -плоскость и регулятор проектируется в  $z$ -плоскости. Во-вторых, передаточная функция ОУ может сразу быть задана в дискретной виде, и регулятор непосредственно проектируется в  $z$ -плоскости. В-третьих, изначально заданная непрерывной передаточная функция ОУ преобразуется в  $\omega$ -плоскость, после чего подходящий регулятор проектируется в  $\omega$ -плоскости с использованием известных методов анализа временных (например, корневой годограф) или частотных характеристик (например, диаграмма Боде). Окончательный проект преобразуется в  $z$ -плоскость, а алгоритм реализуется на цифровом контроллере.

В рамках данной работы рассматривается группа методов проектирования дискретных регуляторов с использованием первого подхода, т. е. ОУ изначально задан непрерывной математической моделью, а регулятор проектируется непосредственно в  $z$ -плоскости. Процедуру проектирования  $htuekznjhf$  в  $z$ -плоскости можно описать следующим образом:

- Вывод передаточной функции ОУ, используя математический подход или выполнив анализ частотных или временных характеристик.
- Преобразование полученной передаточной функции ОУ в  $z$ -плоскость.
- Разработка соответствующего регулятора в  $z$ -плоскости.
- Реализация полученного дискретного регулятора на цифровом контроллере.

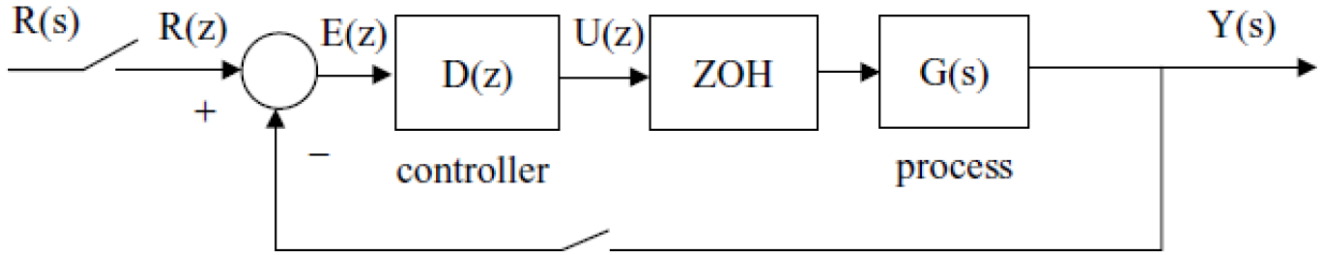


Рис. 19: Дискретная система с непрерывным задающим воздействием

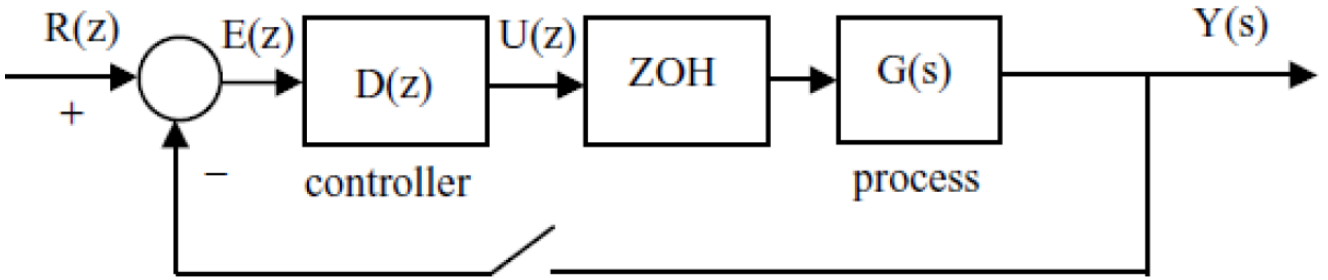


Рис. 20: Дискретная система с дискретным задающим воздействием

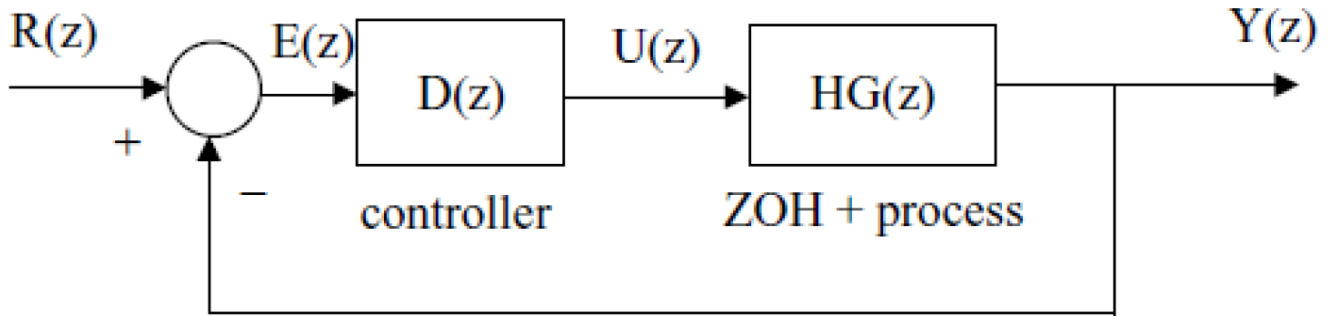


Рис. 21: Замкнутая дискретная система

Передаточная функция замкнутой системы, изображенной на рисунке 21 имеет вид

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z) HG(z)}{1 + D(z) HG(z)}, \quad (42)$$

где  $R(z)$  – задающее воздействие,  $E(z)$  – сигнал ошибки,  $U(z)$  – выход регулятора,  $Y(z)$  – выход системы, а  $HG(z)$  – дискретизированная передаточная функция ОУ вместе с экстраполятором нулевого порядка (ЭНП).

Зададим желаемую передаточную функцию замкнутой системы в виде

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}. \quad (43)$$

С учетом (42) и (43) передаточную функцию требуемого регулятора можно



определить как

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)}. \quad (44)$$

Выражение (44) утверждает, что требуемый регулятор  $D(z)$  может быть получен при условии точного знания модели управляемого процесса. Передаточная функция регулятора  $D(z)$  должна быть выбрана физически реализуемой, что означает, что порядок полинома в числителе передаточной функции регулятора не должен превосходить порядок полинома ее знаменателя.

## Апериодический регулятор

Задача синтеза апериодического регулятора состоит в поиске такого управляющего воздействия, которое бы приводило выход в устойчивое состояние за наименьшее число интервалов дискретности. Для линейной системы  $n$ -го порядка можно показать, что это минимальное количество шагов будет не более  $n$  (в зависимости от начальных условий), при условии, что система является нуль-управляемой (т. е. ее можно привести в нулевое состояние некоторым управлением). Решение состоит в применении обратной связи таким образом, чтобы все полюса передаточной функции замкнутого контура находились в начале координат  $z$ -плоскости. Этот подход прост для линейных систем, однако для нелинейных систем задача синтеза апериодического регулятора является открытой исследовательской задачей.

Иными словами, апериодический регулятор – это регулятор, который обеспечивает слежение за ступенчатым входным сигналом, но с задержкой в один или несколько периодов дискретности, т. е. требуется, чтобы реакция системы была равна единице для каждого интервала дискретности после приложения единичного ступенчатого входного воздействия. В таком случае желаемая передаточная функция будет иметь вид

$$T(z) = z^{-k}, \quad (45)$$

где  $k \geq 1$ .

Тогда передаточная функция регулятора может быть найдена из выражения

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)} = \frac{1}{HG(z)} \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}}. \quad (46)$$

Рассмотрим в качестве примера задачу синтеза апериодического регулятора для ОУ с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{1 + 10s}. \quad (47)$$

Требуется синтезировать для системы (47) дискретный апериодический регулятор с периодом дискретизации  $T = 1$ с. Дискретизованная передаточная функция ОУ с ЭНП может быть рассчитана следующим образом:

$$\begin{aligned}
 HG(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{e^{-2s}}{s(1 + 10s)} \right\} = \\
 &= (1 - z^{-1}) z^{-1} Z \left\{ \frac{1}{s(1 + 10s)} \right\} = (1 - z^{-1}) z^{-2} Z \left\{ \frac{1}{s(1 + 10s)} \right\} = \\
 &= (1 - z^{-1}) z^{-2} Z \left\{ \frac{\frac{1}{10}}{s(s + \frac{1}{10})} \right\} = (1 - z^{-1}) z^{-2} \frac{z(1 - e^{-0.1})}{(z - 1)(z - e^{-0.1})} = \\
 &= z^{-3} \frac{1 - e^{-0.1}}{1 - e^{-0.1}z^{-1}} = \frac{0.095z^{-3}}{1 - 0.904z^{-1}}. \quad (48)
 \end{aligned}$$

Основываясь на выражениях (44) и (46), получим передаточную функцию регулятора:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)} = \frac{1 - 0.904z^{-1}}{0.095z^{-3}} \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}}. \quad (49)$$

Из условия физической реализуемости выберем  $k \geq 3$ , тогда окончательно

$$D(z) = \frac{1 - 0.904z^{-1}}{0.095z^{-3}} \frac{z^{-3}}{1 - z^{-3}} = \frac{z^3 - 0.904z^2}{0.095(z^3 - 1)}. \quad (50)$$

Схема и результаты моделирования замкнутой системы с дискретизованным ОУ (48) и регулятором (50) представлены на рисунках 22-24.

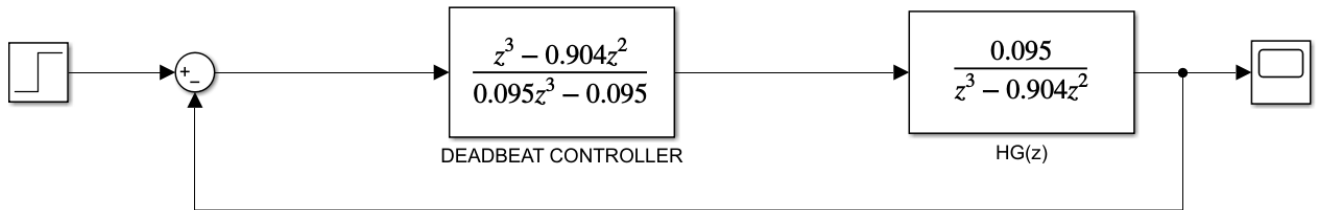


Рис. 22: Схема моделирования системы (48) с апериодическим регулятором (50).

Из рисунка 23 видно, что выход системы равен единице через 3с (три периода дискретизации) и остается на этом значении. Важно понимать, что выходной сигнал соответствует желаемому поведению только в моменты выборки, и может иметь колебательное поведение между моментами выборки. Управляющий сигнал, получаемый на выходе апериодического регулятора, показан

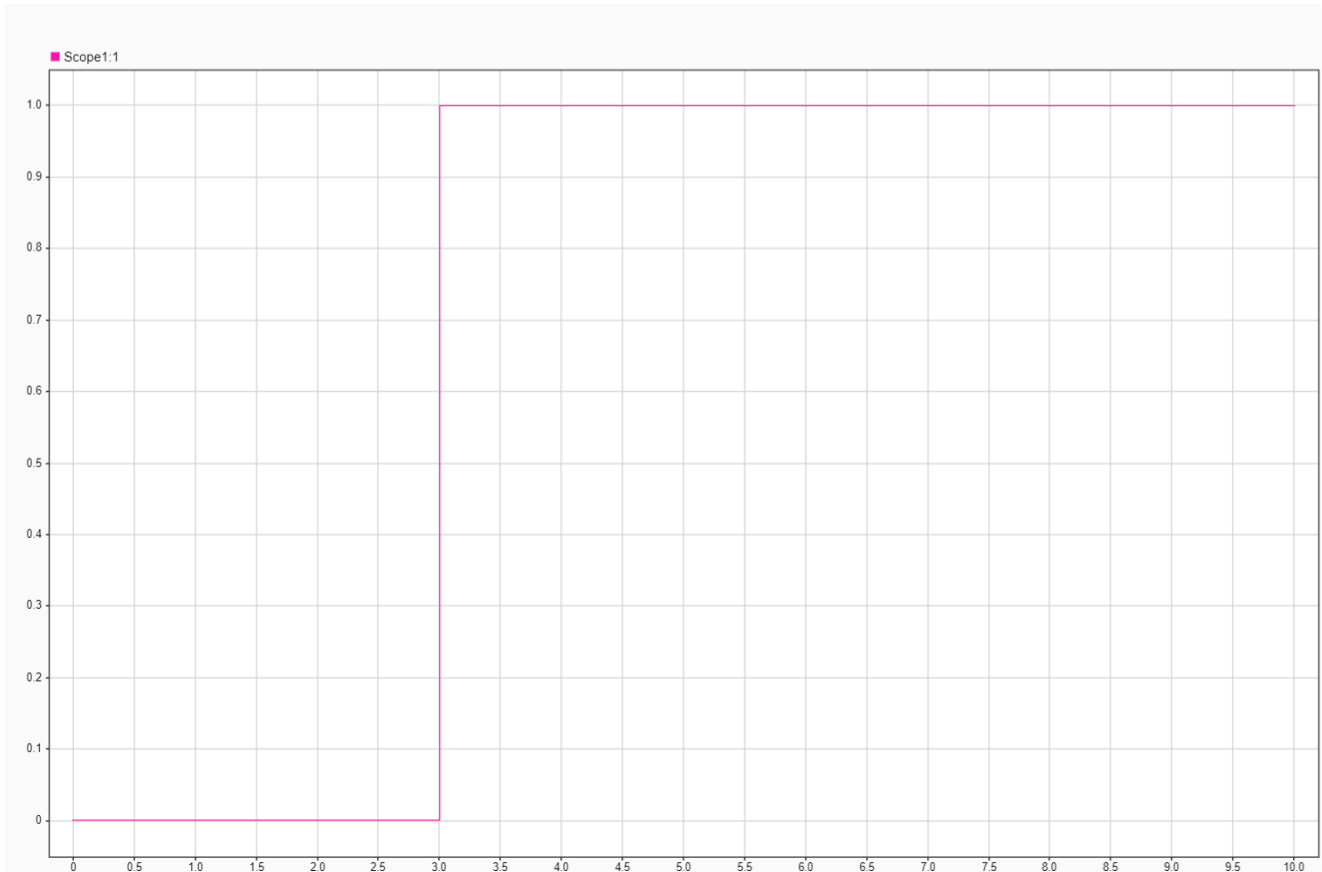


Рис. 23: Выход системы (48) с апериодическим регулятором (50) при  $T = 1$  с.

на рисунке 24. Из графика видно, что, хотя апериодический регулятор обеспечивает требуемое поведение выходной переменной, величина управляющего сигнала может быть неприемлемой, и на практике может приводить к насыщению. Апериодический регулятор очень чувствителен к точности модели ОУ, и небольшое изменение в его параметрах может привести к дребезгу или колебательной реакции (т. е. алгоритм не является робастным).

## Регулятор Далина

Регулятор Далина представляет собой модификацию апериодического регулятора и обеспечивает более плавный экспоненциальный отклик, чем у последнего. Желаемое поведение системы в  $s$ -плоскости задается выражением

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{e^{-as}}{1 + qs}, \quad (51)$$

где параметры  $a$  и  $q$  определяют численные параметры желаемого поведения выходной величины (см. рисунок 25).

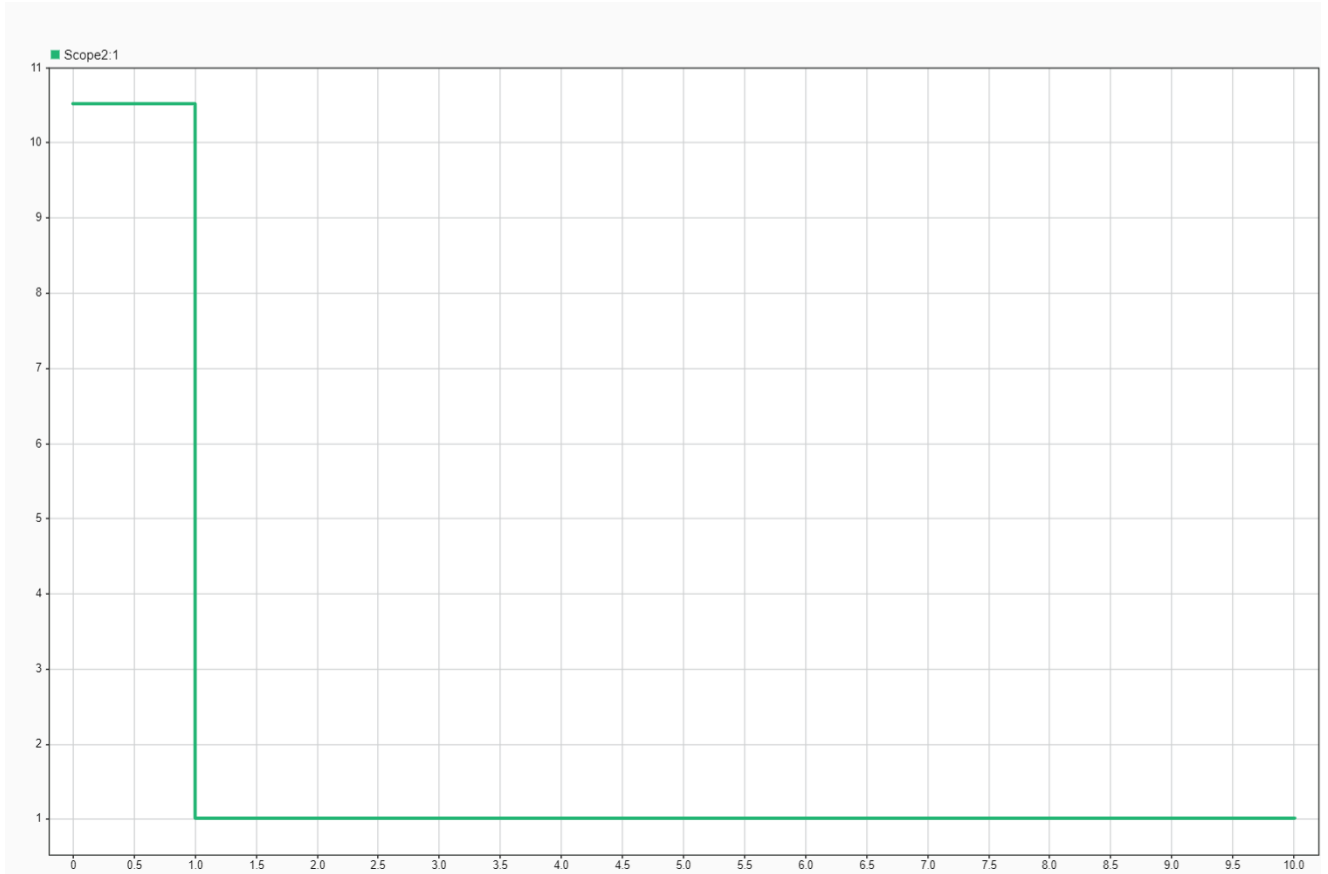


Рис. 24: Выходной сигнал аperiodического регулятора (50).

Осуществим  $Z$ -преобразование желаемой реакции системы, приняв  $a = kT$ :

$$Y(z) = \frac{z^{-k-1} \left(1 - e^{-\frac{T}{q}}\right)}{(1 - z^{-1}) \left(1 - e^{-\frac{T}{q}} z^{-1}\right)}. \quad (52)$$

Тогда желаемая передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z^{-k-1} \left(1 - e^{-\frac{T}{q}}\right) (1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1}) \left(1 - e^{-\frac{T}{q}} z^{-1}\right)} = \frac{z^{-k-1} \left(1 - e^{-\frac{T}{q}}\right)}{1 - e^{-\frac{T}{q}} z^{-1}}. \quad (53)$$

Передаточная функция требуемого регулятора (учитывая (44)) будет иметь вид

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{z^{-k-1} \left(1 - e^{-\frac{T}{q}}\right)}{1 - e^{-\frac{T}{q}} z^{-1} - \left(1 - e^{-\frac{T}{q}}\right) z^{-k-1}}. \quad (54)$$

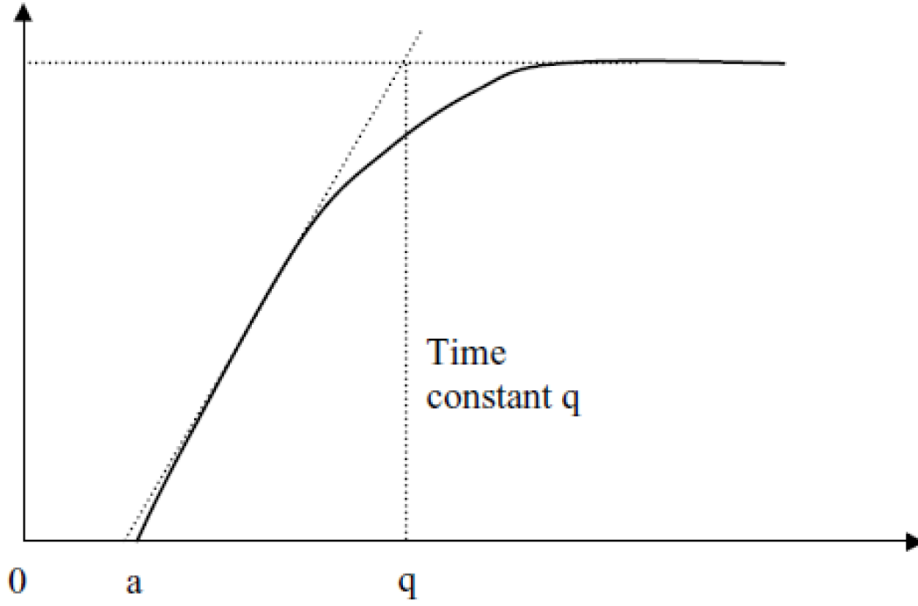


Рис. 25: Желаемое поведение выходной переменной в замкнутой системе с регулятором Далина.

Пусть ОУ задан непрерывной передаточной функцией

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{1 + 10s}. \quad (55)$$

Требуется синтезировать дискретный регулятор Далина с периодом дискретизации  $T = 1$ с. Передаточная функция ОУ с ЭНП будет иметь вид

$$\begin{aligned} HG(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{e^{-2s}}{s(1 + 10s)} \right\} = \\ &= (1 - z^{-1}) z^{-1} Z \left\{ \frac{1}{s(1 + 10s)} \right\} = (1 - z^{-1}) z^{-2} Z \left\{ \frac{1}{s(1 + 10s)} \right\} = \\ &= (1 - z^{-1}) z^{-2} Z \frac{z(1 - e^{-0.1})}{(z - 1)(z - e^{-0.1})} = z^{-3} \frac{1 - e^{-0.1}}{1 - e^{-0.1}z^{-1}} = \\ &= \frac{0.095z^{-3}}{1 - 0.904z^{-1}}. \end{aligned} \quad (56)$$

Transfer function of the controller with  $q = 10$

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1 - 0.904z^{-1}}{0.095z^{-3}} \frac{z^{-k-1}(1 - e^{-0.1})}{1 - e^{-0.1}z^{-1} - (1 - e^{-0.1})z^{-k-1}} = \\ &= \frac{1 - 0.904z^{-1}}{0.095z^{-3}} \frac{0.095z^{-k-1}}{1 - 0.904z^{-1} - 0.095z^{-k-1}}. \end{aligned} \quad (57)$$

С учетом требования физической реализуемости выберем  $k = 2$  и получим

$$D(z) = \frac{0.095z^3 - 0.0858z^2}{0.095z^3 - 0.0858z^2 - 0.009}. \quad (58)$$

Схема и результаты моделирования замкнутой системы с дискретизованным ОУ (56) и регулятором (58) представлены на рисунках 26-28.

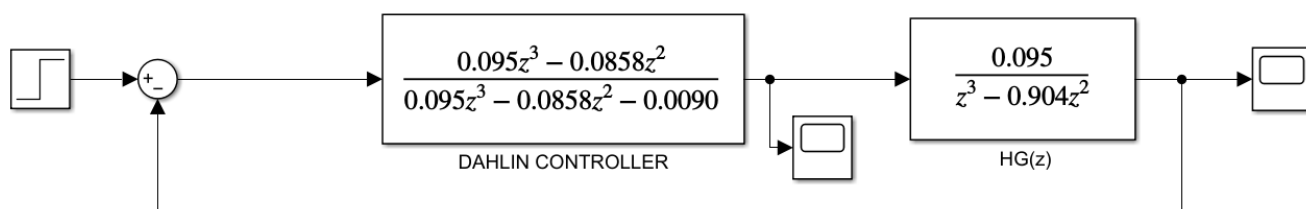


Рис. 26: Схема моделирования системы (56) с регулятором Далина (58).

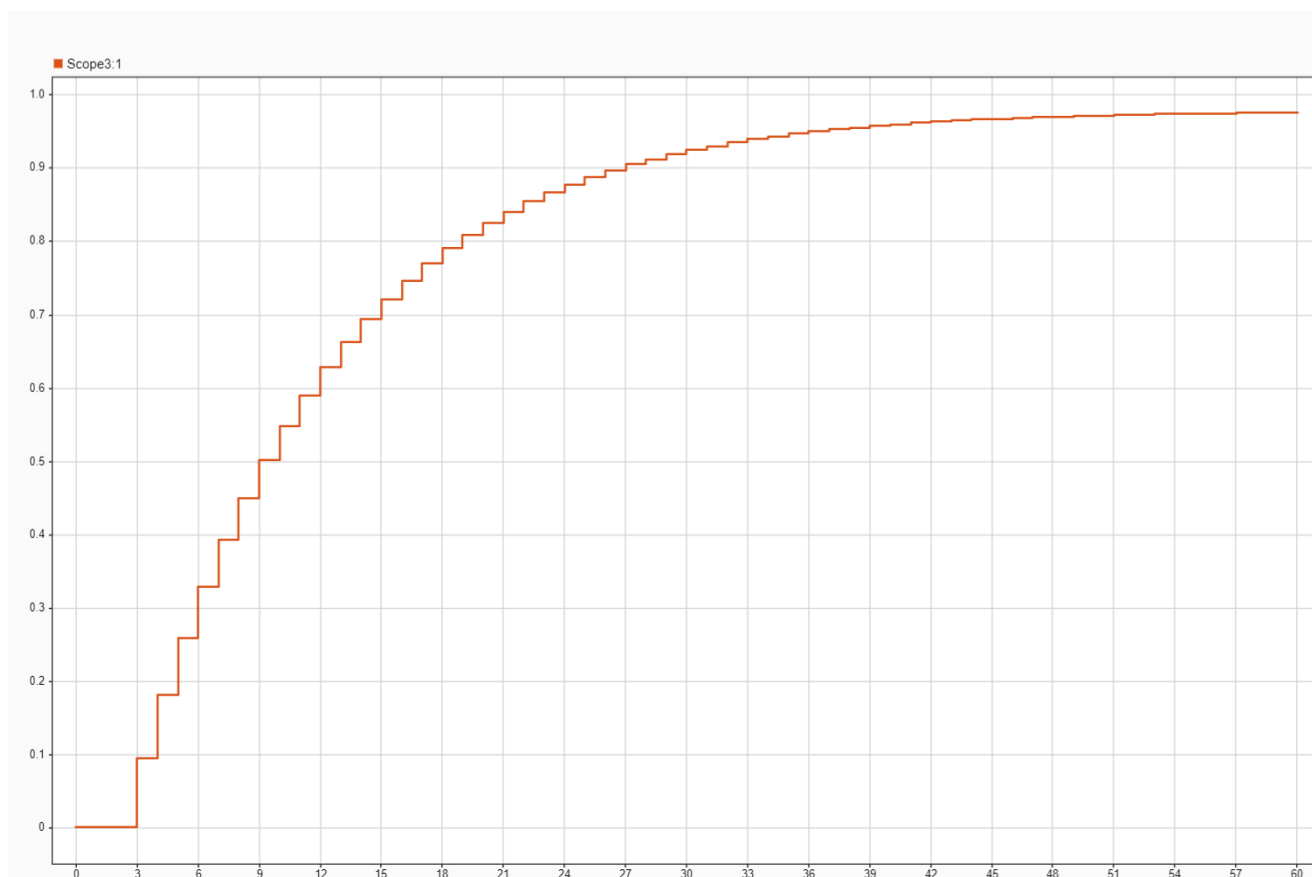


Рис. 27: Выход системы (56) с регулятором Далина (58) при  $T = 1$ с.

Из результатов моделирования видно, что, хотя реакция замкнутой системы медленнее, чем у системы с апериодическим регулятором, величина сигнала управления в случае применения регулятора Далина (см. рисунок 28) лежит в более приемлемых рамках.

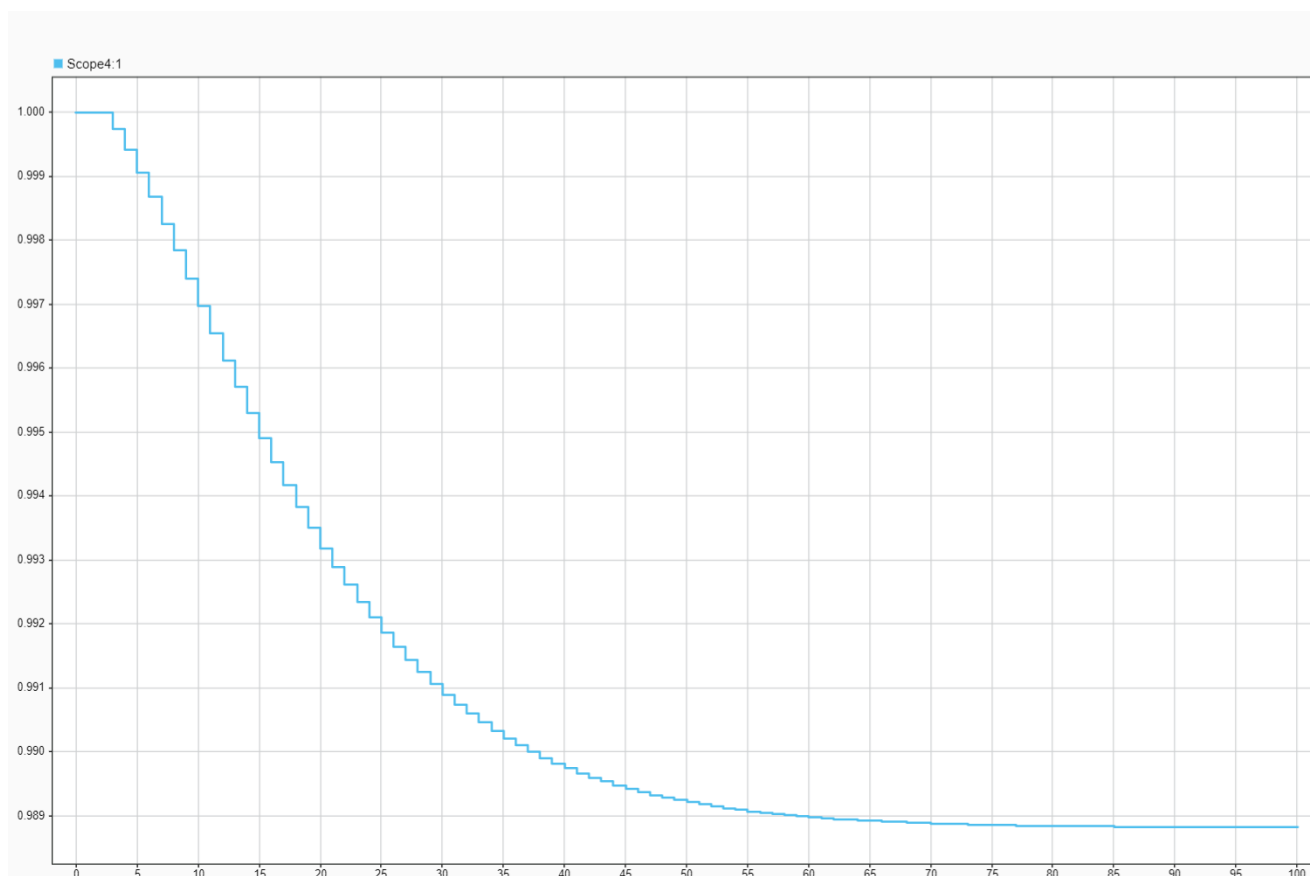


Рис. 28: Выходной сигнал регулятора Далина (58).

## Регулятор с заданным расположением полюсов

Реакция системы управления определяется расположением полюсов замкнутой системы. Таким образом, размещая полюса в требуемых точках, имеется возможность управлять реакцией системы. Для синтеза регулятора можно воспользоваться выражением (44) с учетом требований к расположению полюсов замкнутой системы. Тогда для  $T(z)$  (желаемая передаточная функция) знаменатель строится, исходя из заданного положения полюсов, а затем полином числителя может быть выбран для удовлетворения определенных критериев (например, точностных) в замкнутой системе.

Пусть передаточная функция ОУ вместе с ЭНП имеет вид

$$HG(z) = \frac{0.03(z + 0.75)}{z^2 - 1.5z + 0.5}. \quad (59)$$

Задача состоит в том, чтобы разработать дискретный регулятор такой, чтобы замкнутая система имела колебательный отклик с декрементом затухания  $\zeta = 0.6$  и частотой колебаний  $\omega_d = 3$  рад/с. Установившаяся ошибка для ступенчатого входа должна быть равна нулю, а установившаяся ошибка для линейно

нарастающего входа должна быть 0.2 при периоде дискретизации  $T = 0,2$  с.

Исходя из требований к отклику замкнутой системы, определим полюса передаточной функции:

$$z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T \pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\zeta\omega_n T} \left( \cos \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2} \pm \sin \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2} \right). \quad (60)$$

Требуемые полюса примут значения

$$z_{1,2} = e^{-0.6 \times 3.75 \times 0.2} (\cos (0.2 \times 3) \pm \sin (0.2 \times 3)) = 0.526 \pm j0.360. \quad (61)$$

Желаемая передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots}{(z - 0.526 + j0.360)(z - 0.526 - j0.360)} = \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots}{1 - 1.052z^{-1} + 0.405z^{-2}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Из соображений физической реализуемости,  $b_0 = 0$  и лишь коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$  будут ненулевыми. Выражение (62) примет вид

$$T(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - 1.052z^{-1} + 0.405z^{-2}} \quad (63)$$

Для определения коэффициентов числителя передаточной функции (63) воспользуемся заданными точностными характеристиками. Установившаяся ошибка имеет вид

$$E(z) = R(z)(1 - T(z)). \quad (64)$$

Для единичного ступенчатого входного сигнала установившуюся ошибку можно определить с помощью теоремы о конечном значении, т. е.

$$E_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-1} [v] = 1 - T(1). \quad (65)$$

Установившаяся ошибка примет нулевое значение при  $T(1) = 1$ . Из выражения (63) имеем

$$T(z) = \frac{b_1 + b_2}{0.353} = 1, \quad b_1 + b_2 = 0.353, \quad (66)$$

$$T(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 - 1.052z + 0.405}. \quad (67)$$



Пусть  $K_v$  – добротность по скорости замкнутой системы, тогда установившаяся ошибка при линейно нарастающем входном воздействии будет иметь вид

$$E_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{Tz}{(z-1)^2} [1 - T(z)] = \frac{1}{K_v} \quad (68)$$

или, используя правило Лопиталя

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=1} = -\frac{1}{K_v T}. \quad (69)$$

Теперь из (67) получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=1} &= \frac{b_1(z^2 - 1.052z + 0.405) - (b_1z + b_2)(2z - 1.052)}{(z^2 - 1.052z + 0.405)^2} = \\ &= -\frac{1}{K_v T} = -\frac{0.2}{0.2} = -1. \end{aligned} \quad (70)$$

что дает

$$\frac{0.353b_1 - (b_1 + b_2)0.948}{0.353^2} = -1 \Rightarrow 0.595b_1 + 0.948b_2 = 0.124. \quad (71)$$

Из выражений (66) и (71) можно вычислить  $b_1 = 0.596$  и  $b_2 = -0.243$ .

Теперь из выражения (67) получим желаемую передаточную функцию замкнутой системы в виде

$$T(z) = \frac{0.596z - 0.243}{z^2 - 1.052z + 0.405}. \quad (72)$$

Тогда передаточная функция регулятора будет иметь вид

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)} = \frac{z^2 - 1.5z + 0.5}{0.03(z + 0.75)} \frac{T(z)}{1 - T(z)} = \\ &= \frac{z^2 - 1.5z + 0.5}{0.03(z + 0.75)} \frac{0.596z - 0.243}{z^2 - 1.648z + 0.648} = \\ &= \frac{0.596z^3 - 1.137z^2 + 0.662z - 0.121}{0.03z^3 - 0.027z^2 - 0.018z + 0.015}. \end{aligned} \quad (73)$$

Схема и результаты моделирования замкнутой системы с дискретизованным ОУ (59) и регулятором (73) представлены на рисунках 29 и 30.

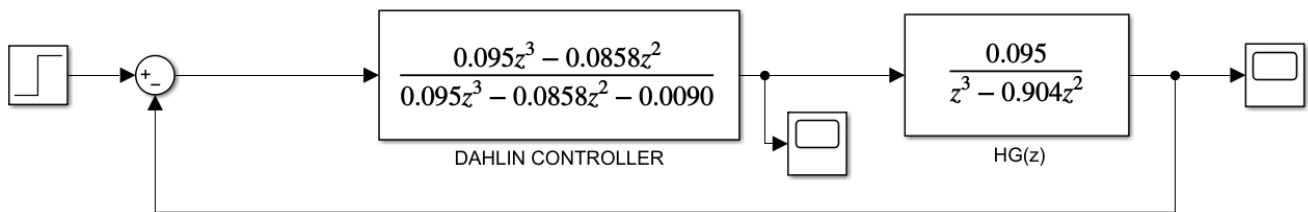


Рис. 29: Схема моделирования системы (59) с регулятором (73).

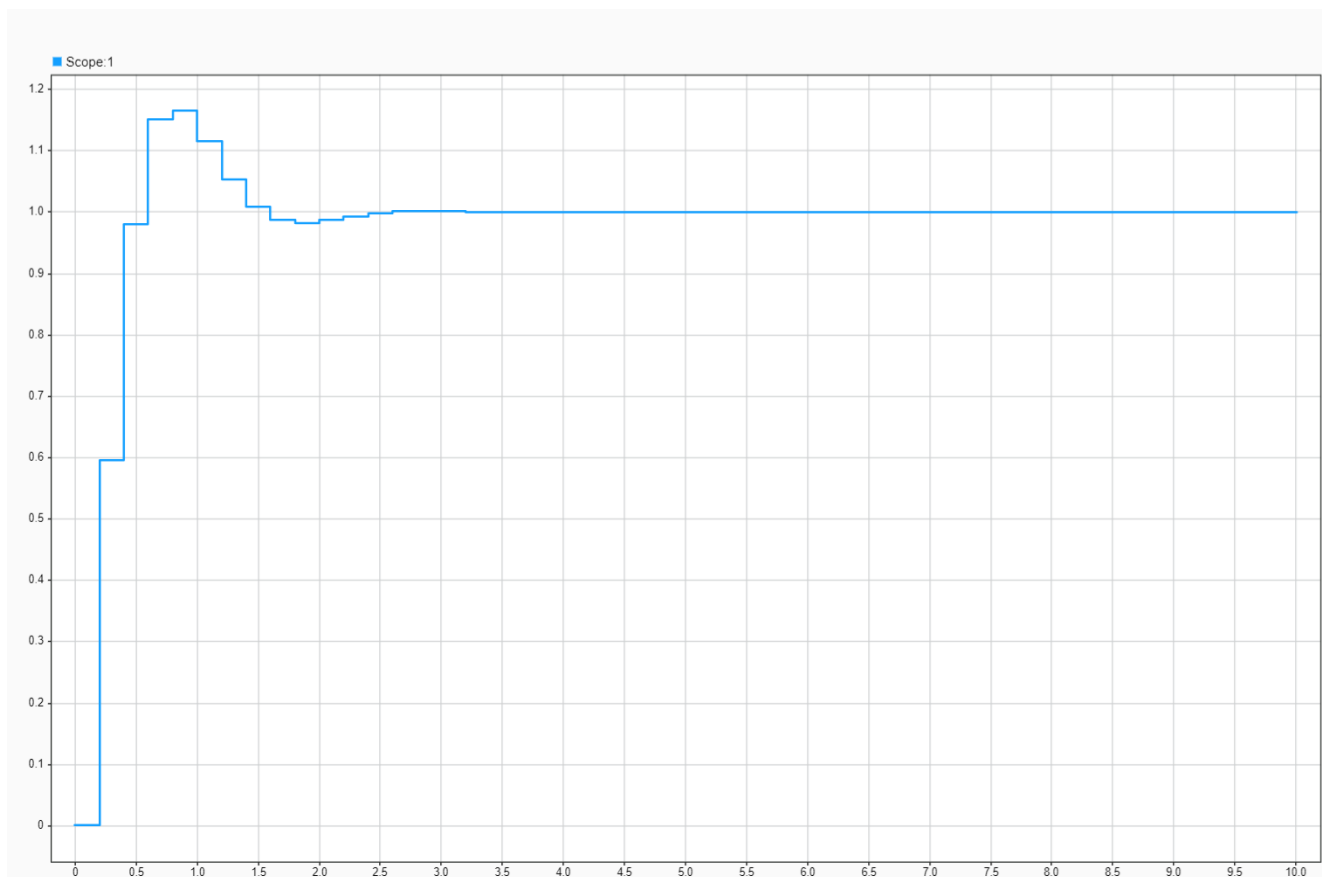


Рис. 30: Выход системы (59) с регулятором (73) при  $T = 1$ с.

## Порядок выполнения работы

1. ОУ задан непрерывной передаточной функцией

$$G(s) = \frac{e^{-as}}{1 + bs}.$$

Параметры ОУ приведены в таблице 8.

2. Для непрерывного ОУ синтезировать аperiодический регулятор. Период дискретизации принять  $T = 1$ .
3. Для непрерывного ОУ синтезировать регулятор Далина. Период дискре-

тизации принять  $T = 1$ .

4. Дискретизованный ОУ с ЭНП задан передаточной функцией

$$HG(z) = \frac{0.03(z + 0.75)}{z^2 - 1.5z + 0.5}.$$

Разработать дискретный регулятор, обеспечивающий заданное расположение полюсов замкнутой системы так, чтобы отклик замкнутой системы был бы колебательным с заданными  $\zeta$  и  $\omega_d$ . Установившаяся ошибка для ступенчатого входа должна быть равна нулю. Установившаяся ошибка для линейно нарастающего входа должна быть равна  $K_v$ . Период дискретизации  $T$ . Все переменные приведены в таблице 8.

## Варианты задания

Таблица 8: Варианты параметров ОУ и периода дискретизации

Variant	$T$	$a$	$b$	$\zeta$	$\omega_d$	$K_v$
1	0.1	1	8	0.6	3	0.15
2	0.15	1.5	5	0.5	4	0.1
3	0.2	2	4	0.7	5	0.25
4	0.25	2.5	9	0.8	2	0.22
5	0.3	3	11	0.4	3	0.21
6	0.35	3.5	10	0.55	8	0.17
7	0.4	2	7	0.45	6	0.12
8	0.45	2.4	8.5	0.78	4	0.14
9	0.5	1.8	7.7	0.69	5	0.1
10	0.55	1.7	10.2	0.62	3	0.17
11	0.1	1.9	6.5	0.45	4	0.25
12	0.15	2.2	7.2	0.39	5	0.23
13	0.2	2.1	10.1	0.47	2	0.19
14	0.25	1.7	11	0.52	3	0.11
15	0.3	2.6	9.3	0.67	8	0.16
16	0.35	3.1	8.8	0.28	6	0.1
17	0.4	2.9	6.7	0.9	4	0.27
18	0.45	1.9	12	0.82	5	0.22
19	0.5	1.7	13	0.77	3	0.14
20	0.55	1.1	10	0.35	4	0.1
21	0.1	2.8	9.9	0.56	5	0.21

22	0.15	2.7	7	0.45	2	0.15
23	0.2	2	13	0.6	3	0.22
24	0.25	3	9.5	0.5	8	0.12
25	0.3	1	8	0.7	6	0.18
26	0.35	8	1	0.4	4	0.15
27	0.4	5	1.5	0.8	5	0.1
28	0.45	4	2	0.58	3	0.16
29	0.5	9	2.5	0.45	4	0.26
30	0.55	11	3	0.65	5	0.19
31	0.1	10	3.5	0.74	2	0.23
32	0.15	7	2	0.26	3	0.13
33	0.2	8.5	2.4	0.34	8	0.1
34	0.25	7.7	1.8	0.86	6	0.22
35	0.3	10.2	1.7	0.74	4	0.19
36	0.35	6.5	1.9	0.69	5	0.15
37	0.4	7.2	2.2	0.25	3	0.11
38	0.45	10.1	2.1	0.64	4	0.23
39	0.5	11	1.7	0.44	5	0.1
40	0.55	9.3	2.6	0.46	2	0.13
41	0.1	8.8	3.1	0.26	3	0.18
42	0.15	6.7	2.9	0.38	8	0.22
43	0.2	12	1.9	0.45	6	0.25
44	0.25	13	1.7	0.42	4	0.14
45	0.3	10	1.1	0.71	5	0.18
46	0.35	9.9	2.8	0.36	3	0.23
47	0.4	7	2.7	0.63	4	0.15
48	0.45	13	2	0.55	5	0.1
49	0.5	9.5	3	0.51	2	0.17
50	0.55	8	1	0.6	3	0.13

## Список литературы

- [1] Григорьев В.В., Быстров С.В., Бойков В.И., Болтунов Г.И., Мансурова О.К. Цифровые системы управления: Учебное пособие. - Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2019. - 133 с.