Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчёт по лабораторной работе №1
«Моделирование и устойчивость»
по дисциплине
«Дискретные системы управления»
Вариант 9

Выполнили: студенты потока 1.2

Дюжев В. Д.
Лалаянц К. А.

Преподаватель:

Краснов А.Ю.

Санкт-Петербург
2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Цель работы

Ознакомиться с методами синтеза и анализа дискретных системам. Получить опыт построения регуляторов и генераторов внешних воздействий для дискретных систем.

Теоретическая часть

Дискретизация

В ходе работы мы будем использовать модели дискретных элементов (при непрерывном изменении входной переменной выходная переменная изменяется только в дискретные моменты времени). В частности таким является экстраполятор нулевого порядка, задающийся уравнением 1.

$$\begin{cases} x_2(t) = x_1(mT) \\ t = mT + \tau \\ 0 \leq \tau \leq T \end{cases} \tag{1}$$

, где x_1 — непрерывный входной сигнал, x_2 — дискретный выходной сигнал, T — интервал дискретности, $m \in \mathbb{Z}_+$. Экстраполятор нулевого порядка (zero order hold, далее — ZOH) является частным случаем импульсного элемента.

Для преобразования непрерывной системы в дискретный вид рассмотрим последовательное соединение ZOH и непрерывной линейной системы (НЛС). Полученная система задается уравнениями 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + B_c \varepsilon \\ y = Cx \\ \varepsilon(mT+\tau) = u(mT), 0 \leq \tau \leq T \end{cases} . \tag{2}$$

Рассмотрим значения системы 2 в дискретные моменты времени $t = Tm$. Запишем решение ОДУ в виде свертки:

$$x((m+1)T) = e^{A_c T} x(mT) + \int\limits_{mT}^{(m+1)T} e^{A_c((m+1)T-\theta)} B_c \varepsilon(\theta) d\theta$$

Сделав замену $\theta = mT + \tau, 0 \leq \tau \leq T$ и заметив, что $\varepsilon(mT+\tau) = \varepsilon(mT)$ перепишем уравнение выше:

$$x((m+1)T) = e^{A_c T} x(mT) + \int\limits_{0}^{T} e^{A_c(T-\tau)} d\tau B_c \varepsilon(mT)$$

Вычислим значение интеграла:

$$\int_0^T e^{A_c(T-\tau)}\,d\tau = e^{A_cT}\int_0^T e^{-A_c\tau}\,d\tau = e^{A_cT}A_c^{-1}\left(I - e^{-A_cT}\right) = A_c^{-1}\left(e^{A_cT} - I\right) =$$

$$= A_c^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{A_c^iT^i}{i!} - I\right) = A_c^{-1}\left(I + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_c^iT^i}{i!} - I\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_c^{i-1}T^i}{i!}.$$

Таким образом, подставив выражение для интеграла, можем записать:

$$x((m+1)T) = Ax(mT) + B\varepsilon(mT) \tag{3}$$

, где $A = e^{A_cT} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{A_c^iT^i}{i!}$, $B = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{A_c^{i-1}T^i}{i!}B_c$.

Рекурсивно подставляя выражения для x в 3, получим аналитическое выражение состояния дискретной системы:

$$x(mT) = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1} A^i Bu(iT) \tag{4}$$

Построение линейных дискретных генераторов внешних воздействий

Рассмотрим построение дискретных моделей генераторов внешних возмущений $g(k)$.

Метод разностей

Основным методом построения дискретных моделей внешних возмущений является последовательное взятие разностей. Рассмотрим его на примере из задания 3(a):

$$g(k) = A_g\sin(kT\omega) \tag{5}$$

За первую компоненту вектора состояний возьмем сам сигнал $\xi_1(k) = g(k)$.

Выразим $g(k+1)$ на основе 5:

$$\xi_2(k) = \xi_1(k+1) = g(k+1) = A_g\sin(kT\omega)\cos(T\omega) + A_g\sin(T\omega)\cos(kT\omega) \tag{6}$$

Заметим, что $A_g\sin(kT\omega)\cos(T\omega) = g(k)\cos(\omega T)$.

Выразим $g(k+2)$ на основе 6:

$$\xi_2(k+1) = g(k+2) = g(k+1)\cos(\omega T) + A_g\sin(T\omega)\cos((k+1)T\omega) \tag{7}$$

Заметим:

$$A_g\sin(T\omega)\cos((k+1)T\omega) = A_g\sin(T\omega)(\cos(kT\omega)\cos(T\omega) - \sin(kT\omega)\sin(T\omega))$$

Подставив $A_g \sin(T\omega)\cos(kT\omega) = g(k+1) - g(k)\cos(\omega T)$ из 6 и выражение $g(k)$ из 5 получим:

$$A_g \sin(T\omega)\cos((k+1)T\omega) = g(k+1)\cos(\omega T) - g(k)\cos^2(\omega T) - g(k)\sin^2(\omega T)$$

Подставив полученный результат в 7:

$$\xi_2(k+1) = 2\cos(\omega T)\xi_2(k) - \xi_1(k) \tag{8}$$

Итого, получаем дискретную модель внешнего возмущения 5:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Gamma\xi(k), \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos(\omega T) \end{bmatrix} \\ g(k) = H\xi, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi(0) = \begin{bmatrix} 0 & A_g \sin(T\omega) \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{9}$$

Непрерывный аналог

Возможно также построить непрерывный аналог модели $g_c : g_c(kT) = g(k)$ предполагамого генератора и дискретизировать систему согласно уравнениям 2-3:

$$\begin{cases} g_c = C_g \xi_c \\ \dot{\xi}_c = \Gamma_c \xi_c \\ \xi(k+1) = \Gamma\xi(k) \\ g(k) = H\xi(k) = H\Gamma^k\xi(0) \end{cases} \tag{10}$$

Рассмотрим его на примере из задания 3(c):

$$g(k) = e^{-5kT}\sin(6kT + 2.5) + 0.03kT \tag{11}$$

Непрерывным аналогом данного сигнала является: $g_c = e^{-5t}\sin(6t + 2.5) + 0.03t$. Непрерывная система с такими модами может быть получена следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_c = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_c \\ g_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.03 & 0 \end{bmatrix} \xi_c \\ \xi_c(0) = \begin{bmatrix} \sin(2.5) & \cos(2.5) & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{12}$$

Дискретизовав систему изложенным выше образом (3), можем задать дискретную систему в виде:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Gamma\xi, \Gamma = \begin{bmatrix} 0.02027 & 0.2858 & 0 & 0 \\ -0.2858 & 0.02027 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ g(k) = H\xi, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.03 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi(0) = \begin{bmatrix} \sin(2.5) & \cos(2.5) & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{13}$$

Устойчивость дискретных систем

Рассмотрим дискретную систему вида:

$$x(m+1) = F(x(m)) \tag{14}$$

где x — n-мерный вектор состояния, F — n-мерная нелинейная векторнозначная функция векторного аргумента такая, что при $x = 0$ $F(0) = 0$, и решение исходного разностного уравнения при произвольных начальных условиях единственно.

Будем называть систему асимптотически устойчивой, если:

$$\lim_{m\to\infty} \|x(m)\| = 0 \tag{15}$$

Будем называть систему экспоненциально устойчивой, если:

$$\|x(m)\| \leq \beta\alpha^m \|x(0)\|, \forall m \in \mathbb{Z}_+ \tag{16}$$

Для линейных систем применим корневой критерий устойчивости. Рассмотрим класс ситем вида:

$$x(m+1) = Fx(m)$$

Перейдем в базис (матрицей перехода M), в котором матрица $F_g = M^{-1}FM$ — диагональна (предположим, что такой существует):

$$x = M\xi, \xi(m+1) = F_g\xi(m) \tag{17}$$

Тогда можем записать:

$$x(m) = M\xi(m) = MF_g^m\xi(0)$$

, что эквивалентно:

$$x_i(m) = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} z_j^m \xi_j(0) \tag{18}$$

, где z_j — корни характеристического полинома F. Положив все корни вещественными (и не кратными), можно заметить, что если $\forall z_j : |z_j| < 1$, то выполнено условие 15 и система асимптотически устойчива. Если модуль хотя бы одного корня > 1 — система неустойчива.

Экспериментальная часть

Исследование влияния дискретного элемента на непрерывную систему

Соберем схему согласно заданию ($T = 0.2, K_{CO} = 5.7$):

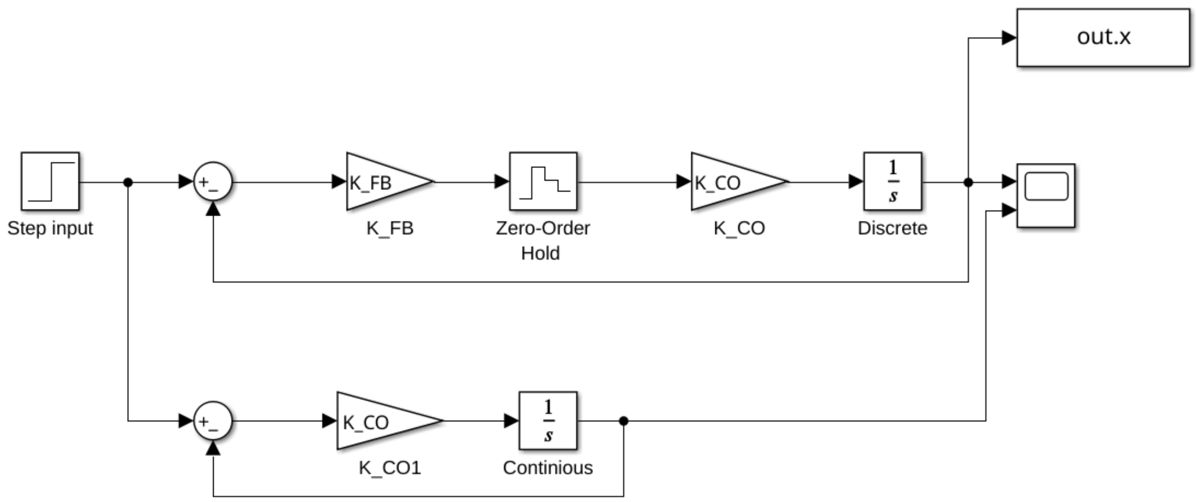

Рис. 1. Схема 1.

Обозначим состояние системы за x. Очевидно, что $\dot{x} = 0$ возможно только в случаях $K_{FB} = 0$ или $x = 1$. Первый случай соответствует нейтральной границе устойчивости, второй — устойчивому положению. Заметим также, что при $K_{FB} > \frac{2}{TK_{CO}}$ система теряет устойчивость (изменение переменной за период дискретизации превышает текущее расстояние до устойчивого положения в два раза, что приводит к нарастанию сигнала). При $K_{FB} = \frac{2}{TK_{CO}} = 1.754$ достигается колебательная граница устойчивости.

При $K_{FB} > \frac{1}{TK_{CO}}$ система приобретает колебательность с периодом равным T (максимальная амплитуда — на колебательной границе устойчивости). При $K_{FB} < \frac{1}{TK_{CO}}$ колебания отсутствуют (изменение сигнала за время T всегда меньше текущего расстояния до устойчивого положения). При $K_{FB} = \frac{1}{TK_{CO}} = 0.877$ наблюдается наискорейший переходный процесс (за конечное время T).

Ниже приведены графики, демонстрирующие полученные свойства:

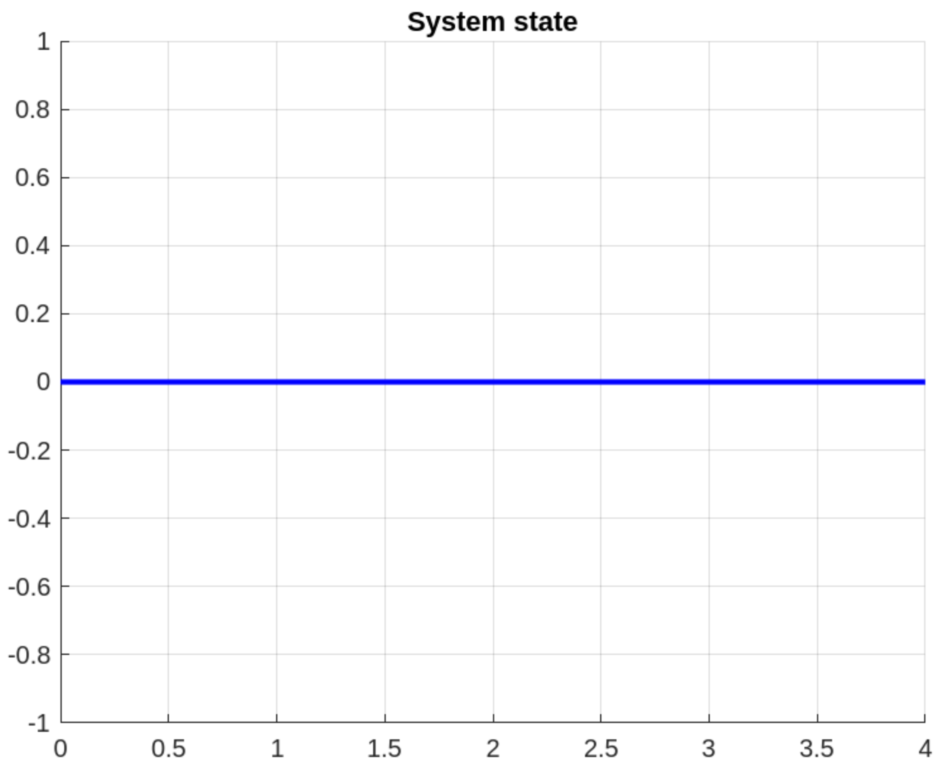

Рис. 2. Нейтральная граница устойчивости $K_{FE} = 0$.

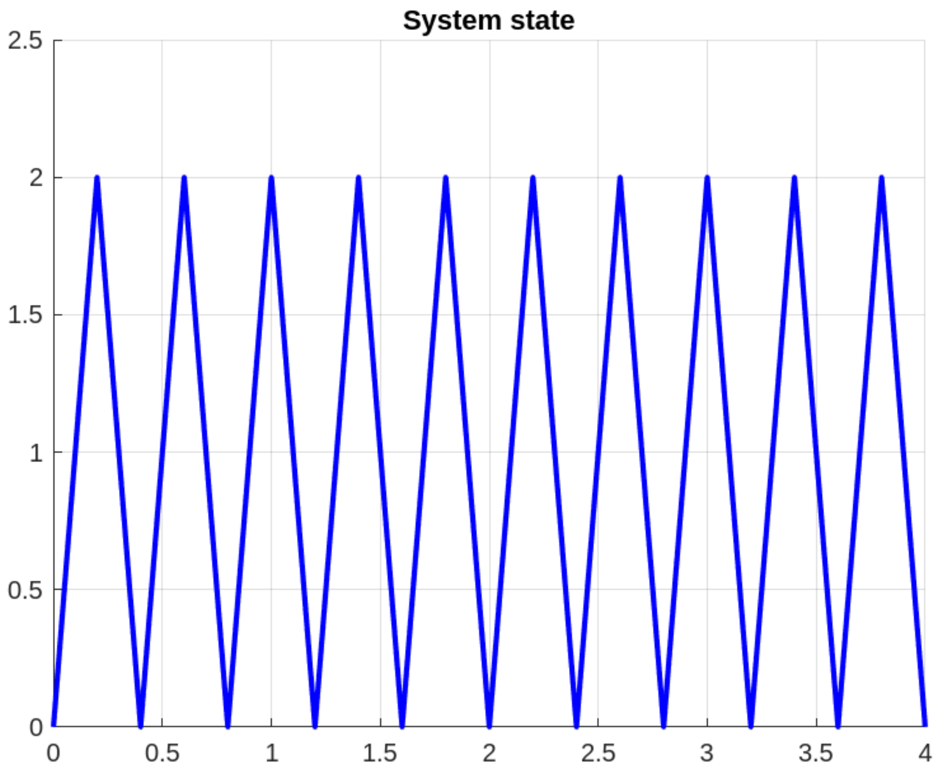

Рис. 3. Колебательная граница устойчивости $K_{FE} = 1.754$.

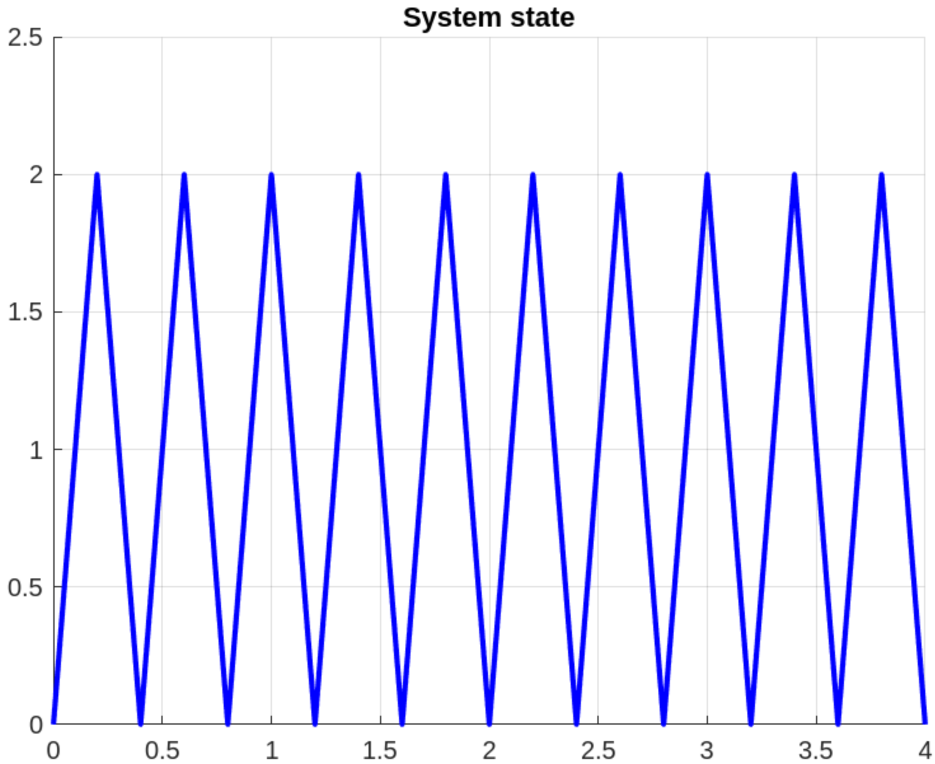

Рис. 4. Максимальная колебательность $K_{FE} = 1.754$.

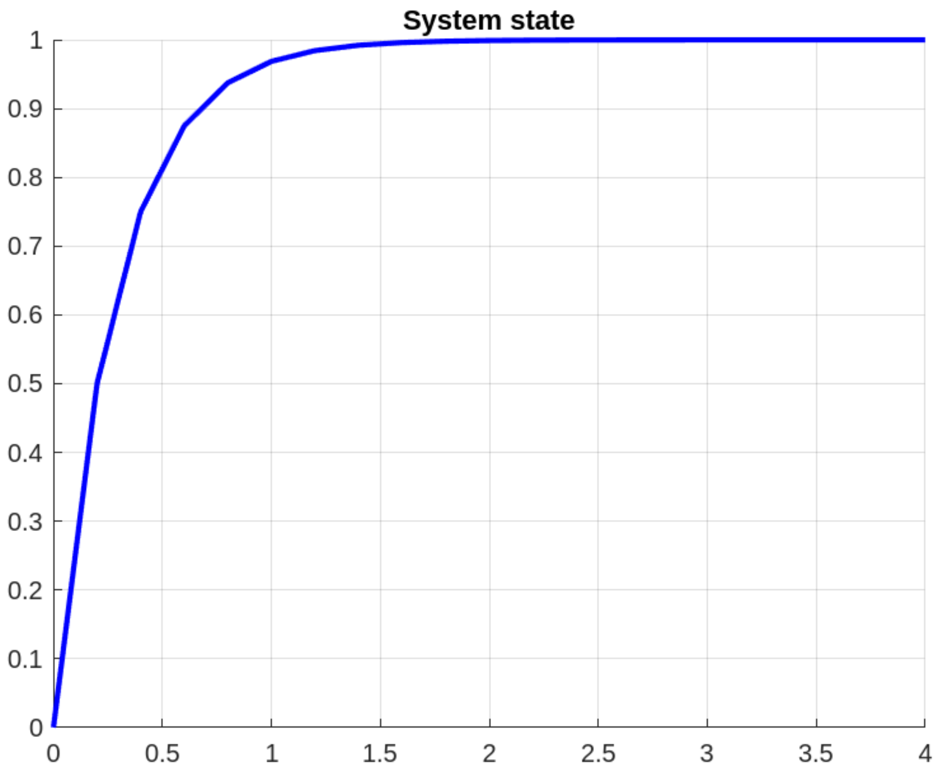

Рис. 5. Отсутствие колебаний $K_{FE} < 0.877$.

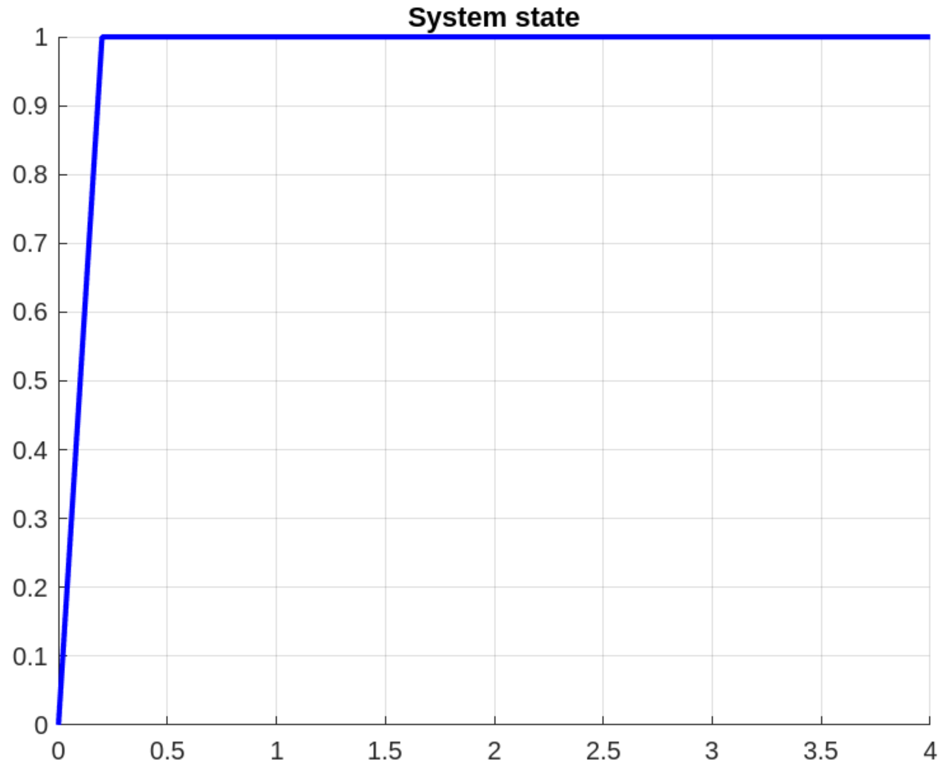

Рис. 6. Оптимальное время переходного процесса (T) $K_{FE} = 0.877$.

Исследование устойчивости дискретных систем

Рассмотрим непрерывную систему $\ddot{y} = u$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = A_c x + B_c u \\ y = Cx \end{cases} \tag{19}$$

Воспользуемся выражениями 3 для дискретизации системы ($T = 0.2$):

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m) \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Задавшись сигналом управления $u = -Kx$, можем добиться требуемых собственных чисел матрицы динамики системы с помощью модального регулятора:

$$F = A - BK = = \begin{bmatrix} 1 - 0.02k_1 & 0.2 - 0.02k_2 \\ -0.2k_1 & 1 - 0.2k_2 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Для всех предложенных наборов корней выполнено условие $|z_i| < 1$ и все системы являются устойчивыми (что согласуется с корневым критерием, и также демонстрирует его применимость с комплексными корнями).

Схема моделирования:

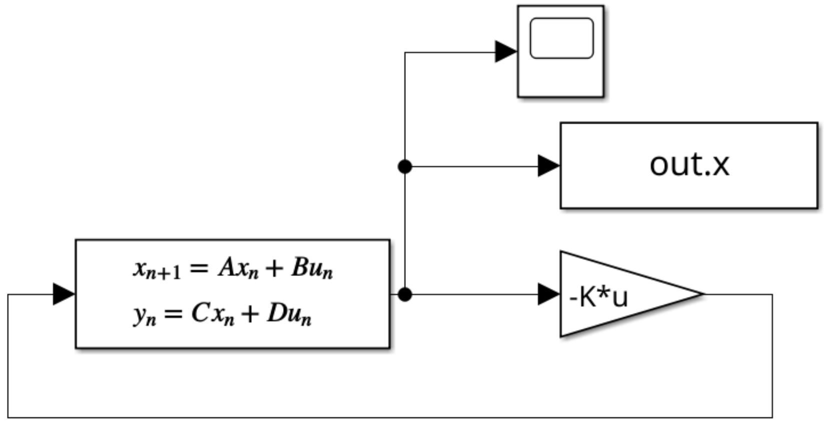

Рис. 7. Схема 2.

Результаты моделирования представлены ниже:

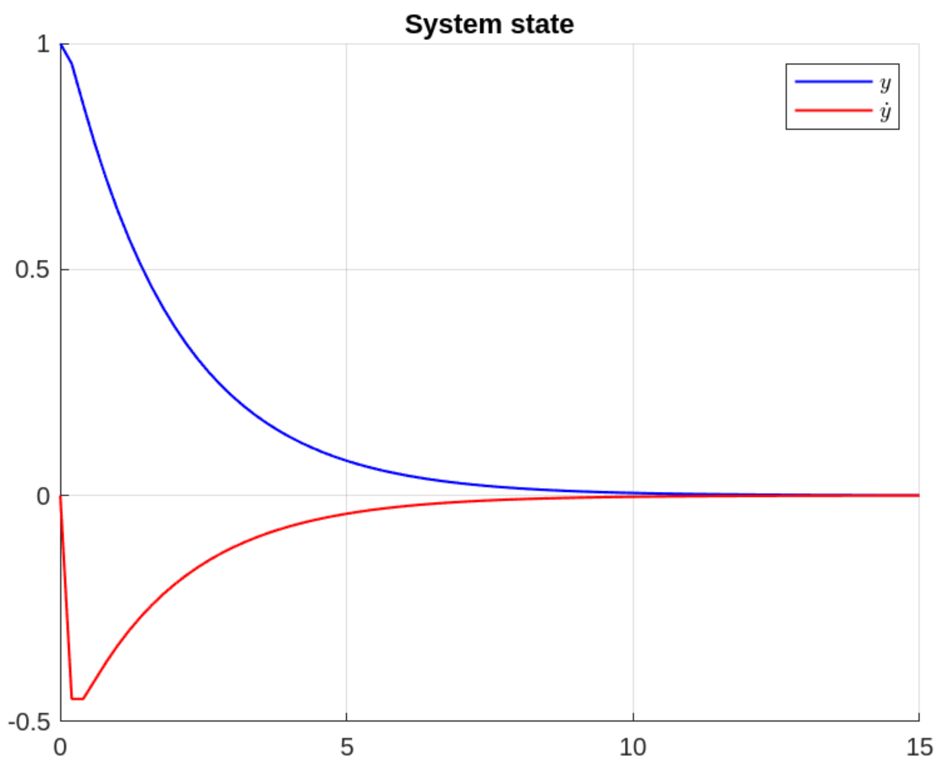

Рис. 8. Результат моделирования замкнутой системы ($z_1 = 0.9, z_2 = 0.1$).

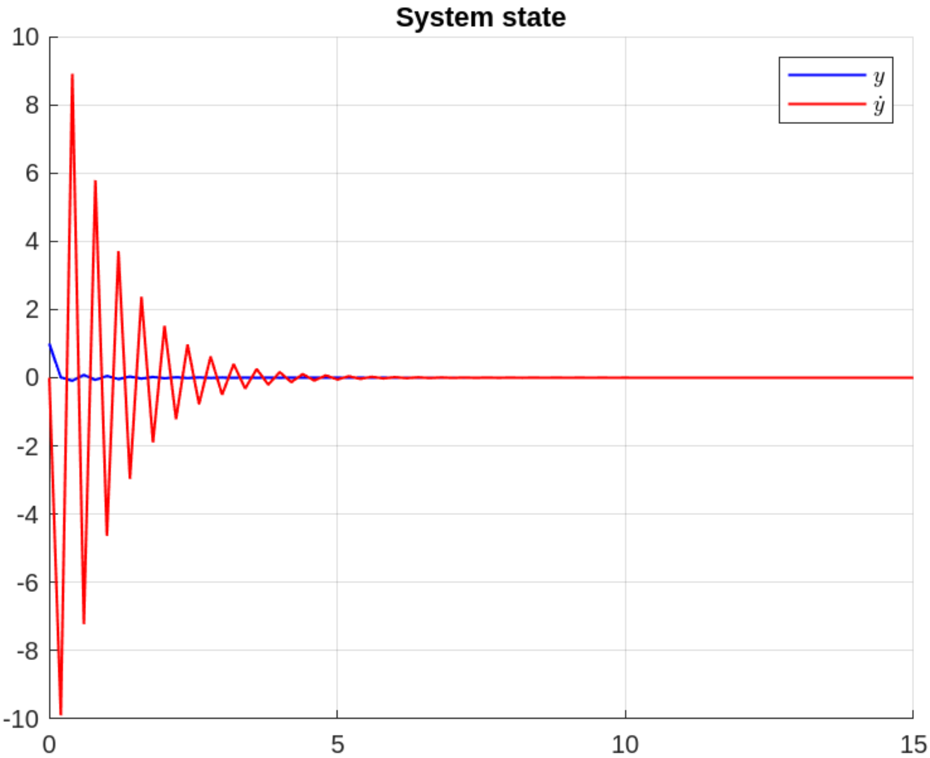

Рис. 9. Результат моделирования замкнутой системы ($z_1 = -0.1, z_2 = -0.8$).

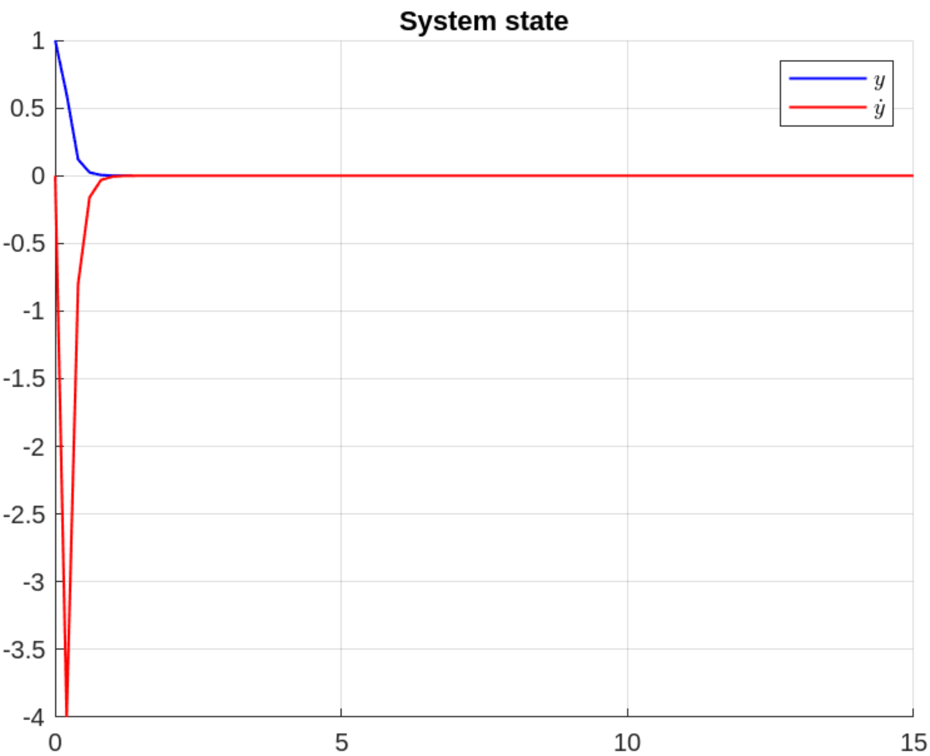

Рис. 10. Результат моделирования замкнутой системы ($z_1 = 0.2, z_2 = 0$).

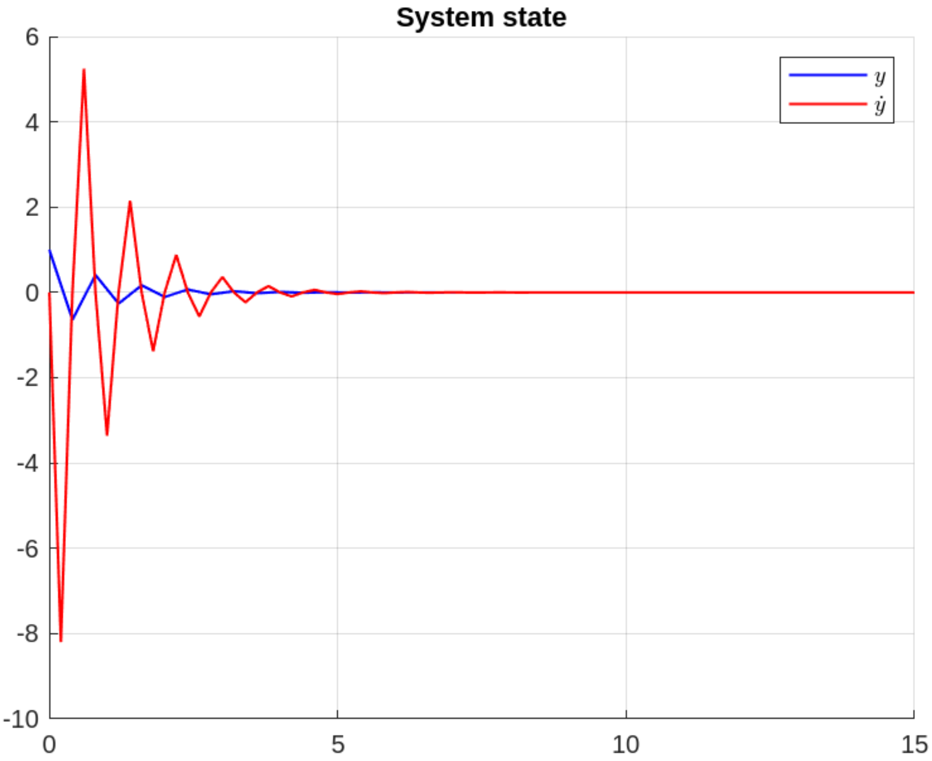

Рис. 11. Результат моделирования замкнутой системы ($z_1 = 0.8i, z_2 = -0.8i$).

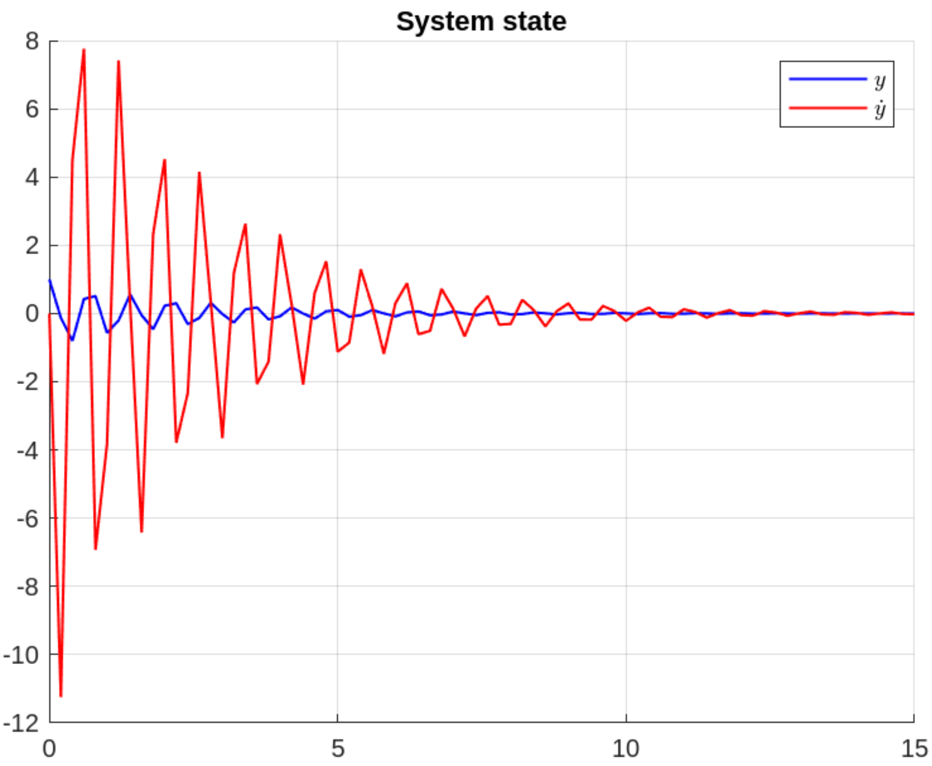

Рис. 12. Результат моделирования замкнутой системы ($z_1 = -0.2 + 0.9i, z_2 = -0.2 - 0.9i$).

Построение дискретных командных генераторов

Синтез требуемых командных генераторов приведен в качестве примеров в теоретической части (9 и 13). Построим схему для моделирования:

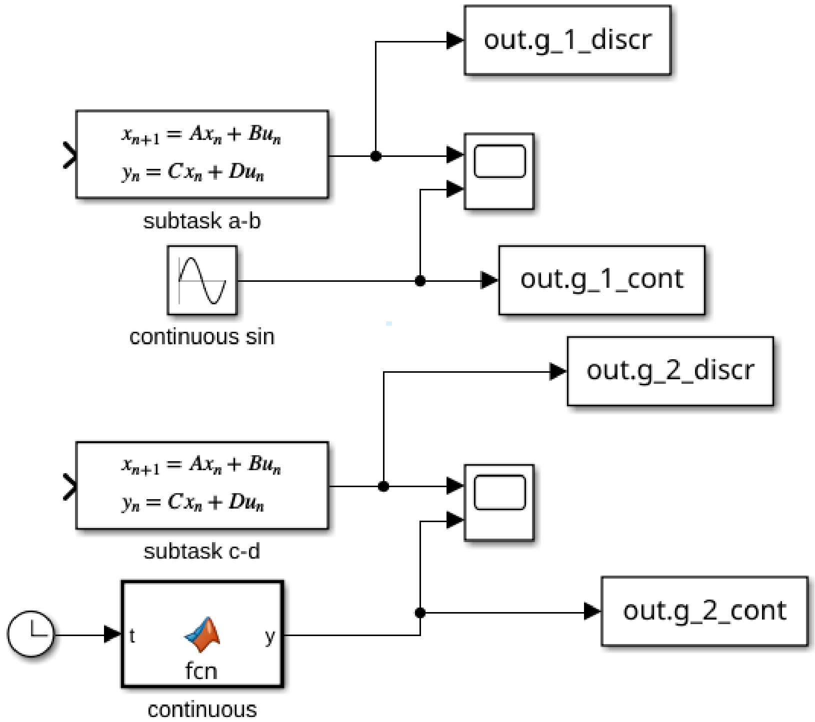

Рис. 13. Схема 3.

Проведем моделирование, сравнив сигнал с непрерывным аналогом:

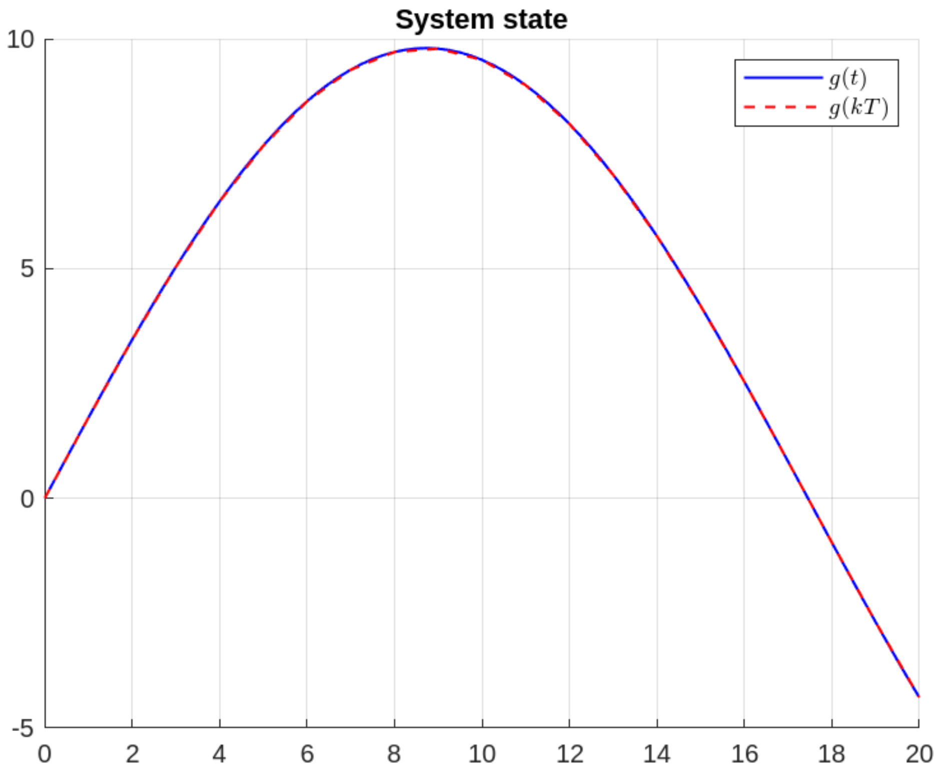

Рис. 14. Командный генератор гармонического сигнала 5.

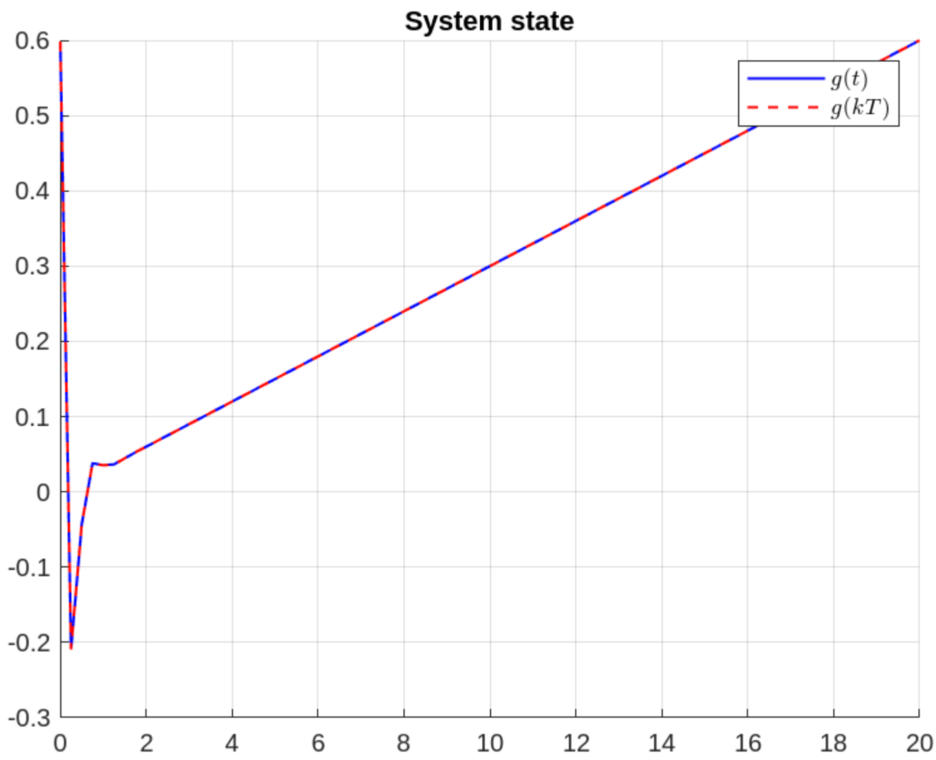

Рис. 15. Командный генератор сигнала 11.

Выводы

В ходе выполнения работы ознакомились с принципом синтеза дискретных систем, анализом устойчивости, а также управления ими. Теоретические выкладки, сделанные в соответствующей секции были подтверждены во время про ведения экспериментов, что можно наблюдать на графиках моделирования.