Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчёт по лабораторной работе №1
по теме «Дискретные системы управление. Моделирование и устойчивость»
по дисциплине "Дискретные системы управления"

Вариант 9

Выполнили: студенты гр. **R34353** и **R34354**

Дюжев В. Д.
Лалаянц К. А.

Преподаватели:

Чепинский С. А.
Краснов А.Ю.

Санкт-Петербург, 2024-2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Цель работы

Ознакомиться с методами синтеза и анализа дискретных системам. Получить опыт построения регуляторов и генераторов внешних воздействий для дискретных систем.

Теоретическая часть

Дискретизация

В ходе работы мы будем использовать модели дискретных элементов (при непрерывном изменении входной переменной выходная переменная изменяется только в дискретные моменты времени). В частности таким является экстраполятор нулевого порядка, задающийся уравнением 1.

$$\begin{cases} x_2(t) = x_1(mT) \\ t = mT + \tau \\ 0 \leq \tau \leq T \end{cases} \tag{1}$$

, где x_1 — непрерывный входной сигнал, x_2 — дискретный выходной сигнал, T — интервал дискретности, $m \in \mathbb{Z}_+$. Экстраполятор нулевого порядка (zero order hold, далее — ZOH) является частным случаем импульсного элемента.

Для преобразования непрерывной системы в дискретный вид рассмотрим последовательное соединение ZOH и непрерывной линейной системы (НЛС). Полученная система задается уравнениями 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + B_c \varepsilon \\ y = Cx \\ \varepsilon(mT + \tau) = u(mT), 0 \leq \tau \leq T \end{cases} . \tag{2}$$

Рассмотим значения системы 2 в дискретные моменты времени $t = Tm$. Запишем решение ОДУ в виде свертки:

$$x((m+1)T) = e^{A_c T} x(mT) + \int\limits_{mT}^{(m+1)T} e^{A_c((m+1)T - \theta)} B_c \varepsilon(\theta) d\theta$$

Сделав замену $\theta = mT + \tau, 0 \leq \tau \leq T$ и заметив, что $\varepsilon(mT + \tau) = \varepsilon(mT)$ перепишем уравнение выше:

$$x((m+1)T) = e^{A_c T} x(mT) + \int\limits_{0}^{T} e^{A_c(T-\tau)} d\tau B_c \varepsilon(mT)$$

Вычислим значение интеграла:

$$\int_0^T e^{A_c(T-\tau)}\,d\tau = e^{A_cT}\int_0^T e^{-A_c\tau}\,d\tau = e^{A_cT}A_c^{-1}\left(I - e^{-A_cT}\right) = A_c^{-1}\left(e^{A_cT} - I\right) =$$

$$= A_c^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{A_c^iT^i}{i!} - I\right) = A_c^{-1}\left(I + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_c^iT^i}{i!} - I\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_c^{i-1}T^i}{i!}.$$

Таким образом, подставив выражение для интеграла, можем записать:

$$x((m+1)T) = Ax(mT) + B\varepsilon(mT) \tag{3}$$

, где $A = e^{A_cT} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{A_c^iT^i}{i!}$, $B = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{A_c^{i-1}T^i}{i!}B_c$.

Рекурсивно подставляя выражения для x в 3, получим аналитическое выражение состояния дискретной системы:

$$x(mT) = A^m x(0) + \sum_{i=0}^{m-1}A^iBu(iT) \tag{4}$$

Построение линейных дискретных генераторов внешних воздействий

Рассмотрим построение дискретных моделей генераторов внешних возмущений $g(k)$.

Метод разностей

Основным методом построения дискретных моделей внешних возмущений является последовательное взятие разностей. Рассмотрим его на примере из задания 3(a):

$$g(k) = A_g\sin(kT\omega) \tag{5}$$

За первую компоненту вектора состояний возьмем сам сигнал $\xi_1(k) = g(k)$.

Выразим $g(k+1)$ на основе 5:

$$\xi_2(k) = \xi_1(k+1) = g(k+1) = A_g\sin(kT\omega)\cos(T\omega) + A_g\sin(T\omega)\cos(kT\omega) \tag{6}$$

Заметим, что $A_g\sin(kT\omega)\cos(T\omega) = g(k)\cos(\omega T)$.

Выразим $g(k+2)$ на основе 6:

$$\xi_2(k+1) = g(k+2) = g(k+1)\cos(\omega T) + A_g\sin(T\omega)\cos((k+1)T\omega) \tag{7}$$

Заметим:

$$A_g\sin(T\omega)\cos((k{+}1)T\omega) = A_g\sin(T\omega)(\cos(kT\omega)\cos(T\omega){-}\sin(kT\omega)\sin(T\omega))$$

Подставив $A_g \sin(T\omega)\cos(kT\omega) = g(k+1) - g(k)\cos(\omega T)$ из 6 и выражение $g(k)$ из 5 получим:

$A_g \sin(T\omega)\cos((k+1)T\omega) = g(k+1)\cos(\omega T) - g(k)\cos^2(\omega T) - g(k)\sin^2(\omega T)$

Подставив полученный результат в 7:

$$\xi_2(k+1) = 2\cos(\omega T)\xi_2(k) - \xi_1(k) \tag{8}$$

Итого, получаем дискретную модель внешнего возмущения 5:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Gamma\xi(k), \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos(\omega T) \end{bmatrix} \\ g(k) = H\xi, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi(0) = \begin{bmatrix} 0 & A_g \sin(T\omega) \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{9}$$

Непрерывный аналог

Возможно также построить непрерывный аналог модели $g_c : g_c(kT) = g(k)$ предполагамого генератора и дискретизировать систему согласно уравнениям 2-3:

$$\begin{cases} g_c = C_g\xi_c \\ \dot{\xi}_c = \Gamma_c\xi_c \\ \xi(k+1) = \Gamma\xi(k) \\ g(k) = H\xi(k) = H\Gamma^k\xi(0) \end{cases} \tag{10}$$

Экспериментальная часть

Выводы