

Задача о рюкзаке

Лабораторная работа №4

Дано

- Пул из n предметов o_i , обладающих параметрами ценности v_i и занимаемого места w_i .
- Каждый предмет уникален, имеет свои показатели и его можно либо взять целиком, либо не брать вовсе.
- Условный «рюкзак», обладающий некой «вместимостью» W .
- Факт, что весь пул предметов в рюкзак не поместится по причине нехватки места

Найти

- $V(o, v_i)$ - максимально возможную суммарную ценность вещей, чей общий вес не превышает W
- Получить список этих вещей
- Проверка на дополнительные условия

Способы решения

- Полный перебор предметов с проверкой на условия
- Жадный алгоритм
- Выделение наиболее подходящих вариантов размещения — т.н. «метод ветвей и границ»
- Динамическое программирование
- Генетические алгоритмы (рассматривать не будем)

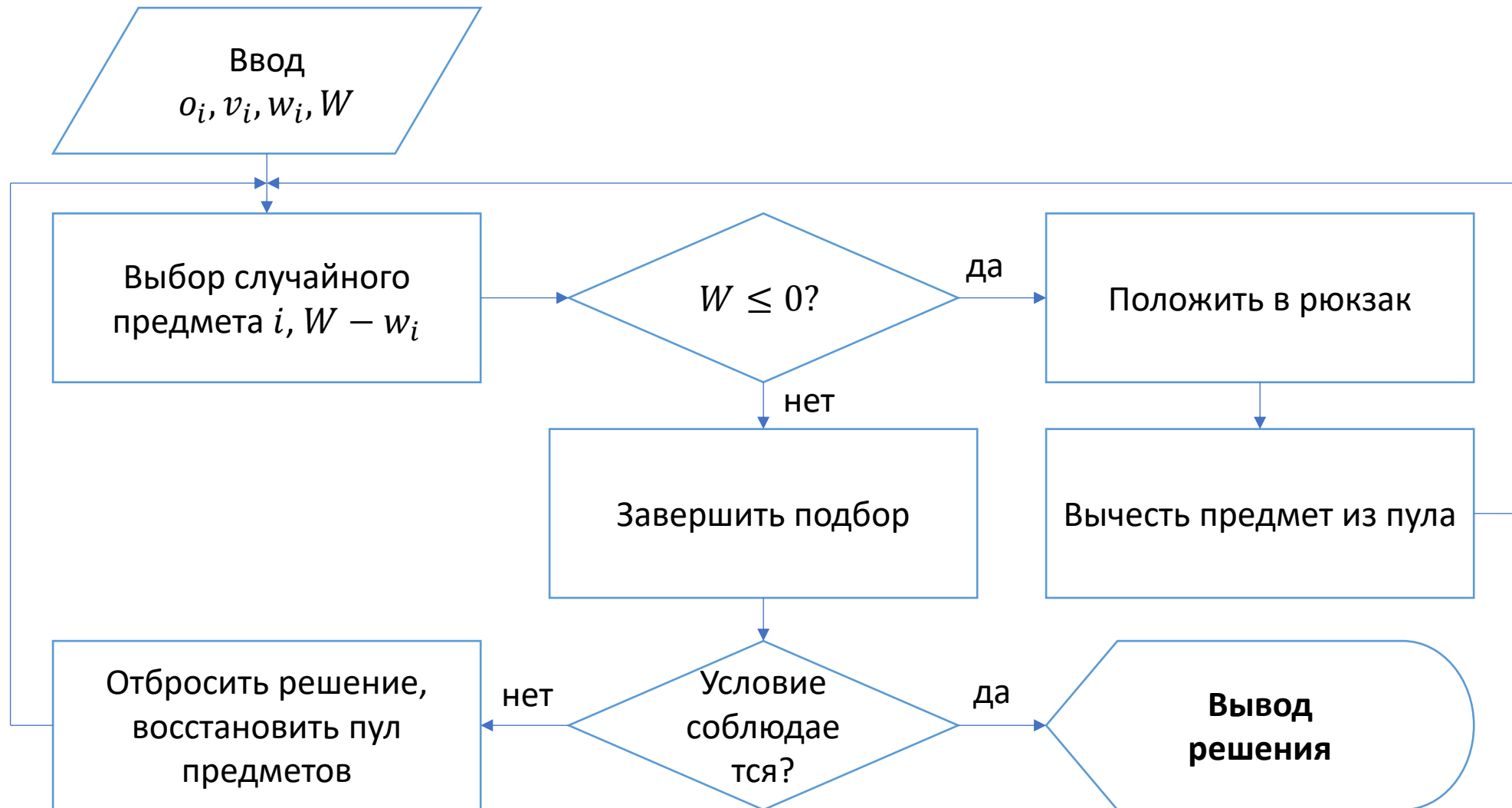
Алгоритм перебора

Генерируемый список из пула предметов, подходящий по условию суммарного веса, менее и равного W .

Можно пробегать по списку последовательно или использовать функцию рандомизации.

По очевидным причинам нерационален, с увеличением пула предметов время подбора увеличивается в геометрической прогрессии.

Алгоритм перебора - алгоритм



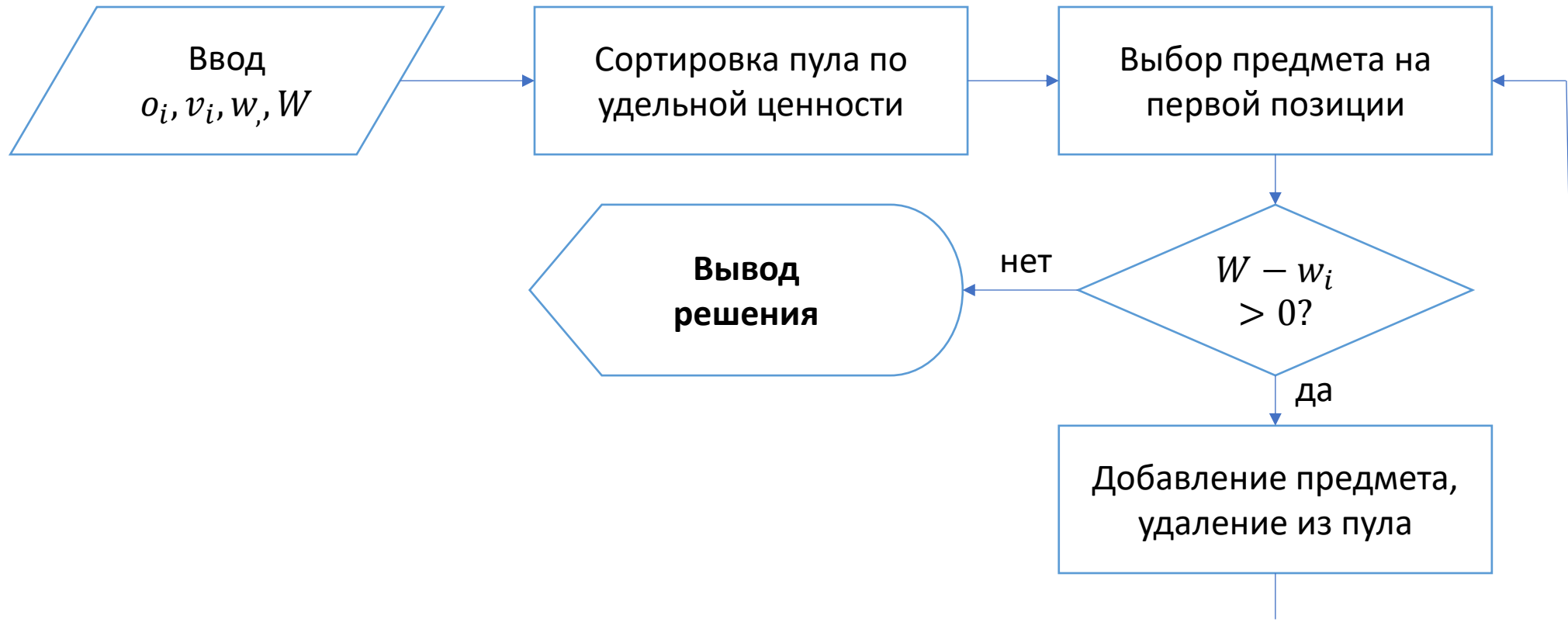
Жадный алгоритм

Основные шаги:

1. Рассчитать удельную ценность - соотношение ценность/вес – для каждого предмета.
2. Отсортировать предметы по удельной ценности.
3. Помещать предметы в рюкзак, пока предел W не превышен.

Алгоритм не всегда позволяет получить оптимальное решение.

Жадный алгоритм

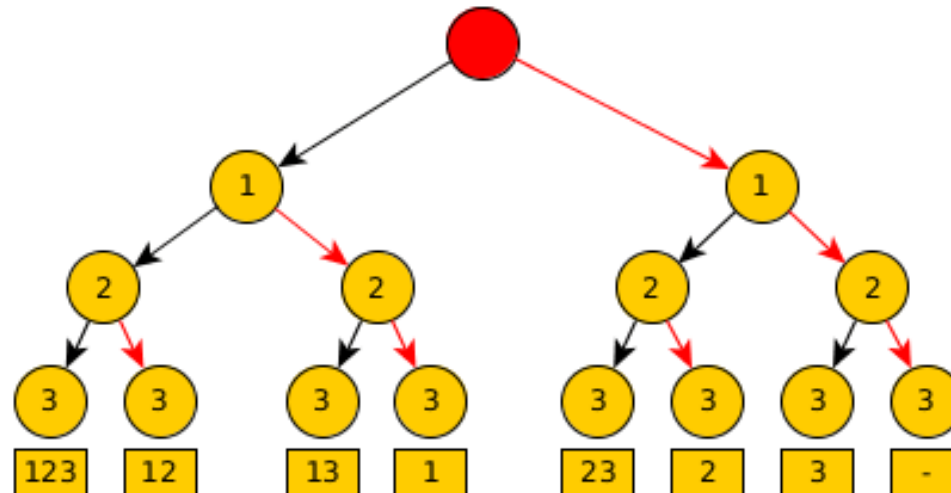


Метод ветвей и границ

Вариация метода перебора.

По сути, является вариацией метода перебора с отбрасыванием заведомо неоптимальных решений.

*Рационально применять, если предметы сильно разнятся по своей ценности и весу.



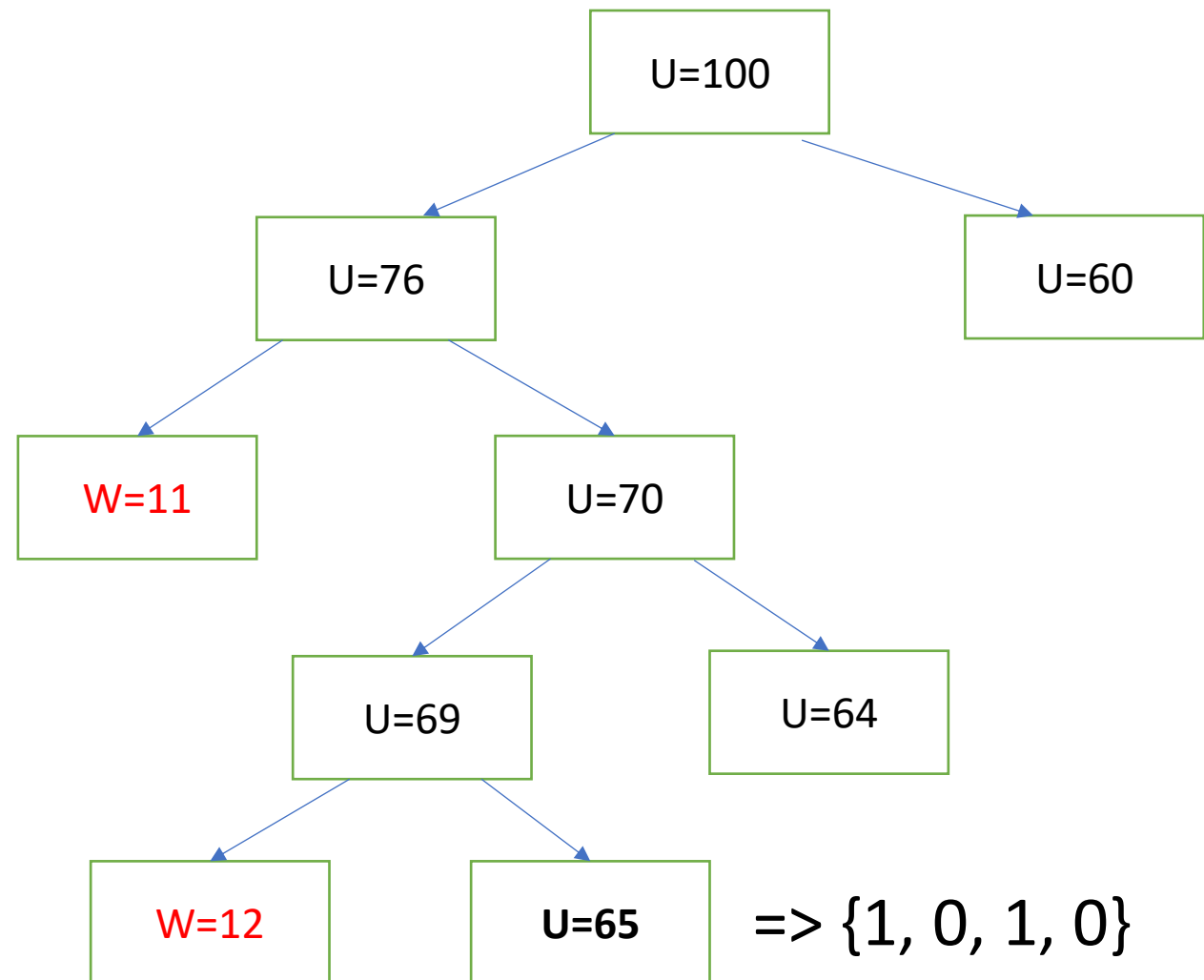
Метод ветвей и границ

Оценка верхней границы узла:

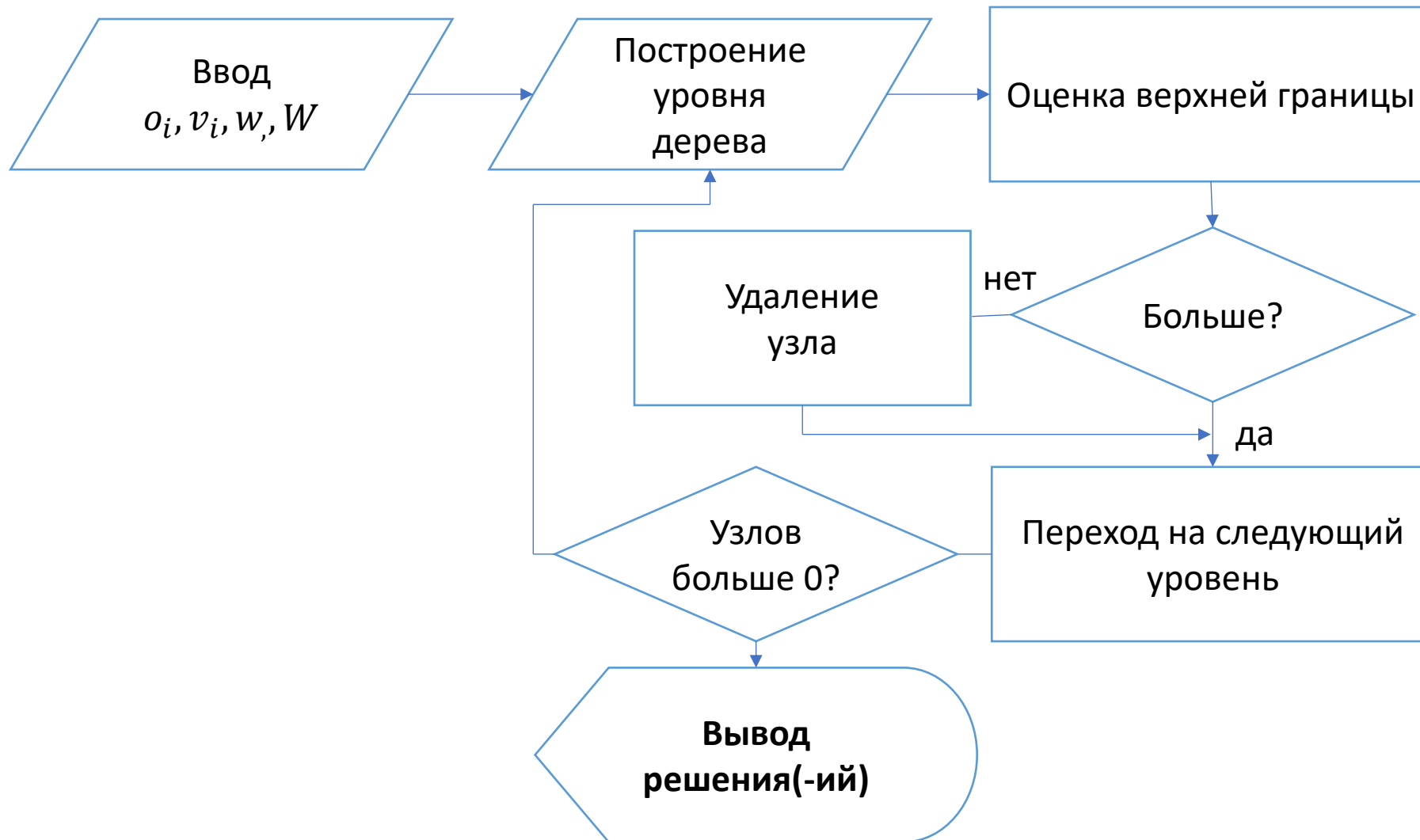
$$U = v + (W - w) \frac{v_{i+1}}{w_{i+1}}$$

Предм	Вес	Ценность	Уд. Ценн.
1	4	40	10
2	7	42	6
3	5	25	5
4	3	12	4

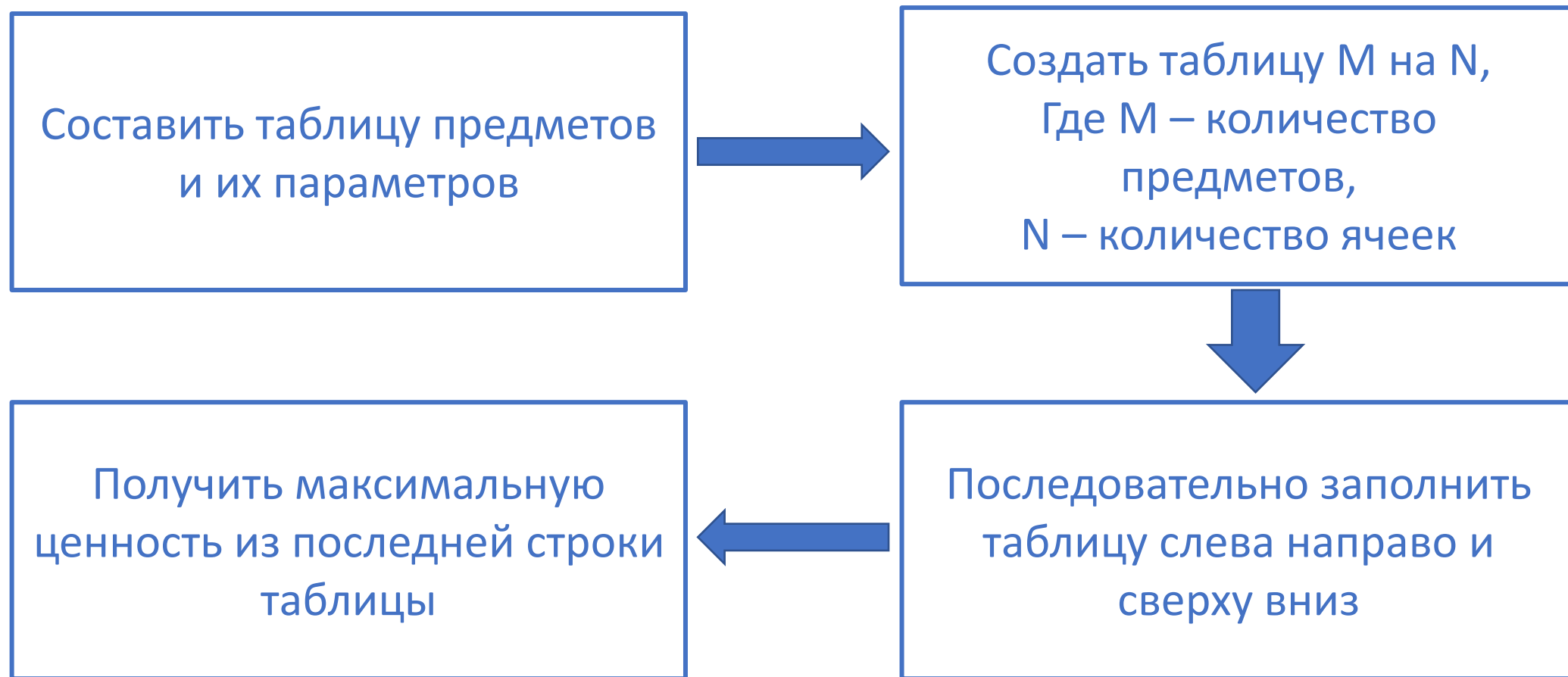
W=10



Метод ветвей и границ - алгоритм



Динамическое программирование



Динамическое программирование - пример

Пусть дан пул предметов из 4 штук:

Предмет	Вес w_i	Ценность v_i
Шкаф	3	700
Табурет	1	300
Стол	2	500
Комод	2	550

И есть пространство $W = 4$.

Будем последовательно проверять размещение предметов в пространствах от 1 до W .

Динамическое программирование - пример

Таблица будет иметь следующий вид. Каждая строка определяет предмет, добавляемый к набору. Каждый столбец – это пространства от 1 до W . У нас $W=4$, поэтому 4 столбца.

Предмет	1	2	3	4
Шкаф / 3 / 700				
Табурет / 1 / 300				
Стол / 2 / 500				
Комод / 2 / 550				

Таблица, шаг 1

Мы проверяем первый предмет из списка на вместимость в контейнеры с 1, 2, 3 и 4 ячейками. Шкаф весом 3, очевидно, влезет только в пространство в 3 и 4 ячейки.

Предмет	1	2	3	4
Шкаф / 3 / 700	0	0	700 (Ш)	700 (Ш)
Табурет / 1 / 300				
Стол / 2 / 500				
Комод / 2 / 550				

Таблица, шаг 2

Мы добавляем к шкафу второй предмет – табурет – и смотрим на максимальную ценность. Табурет сам по себе поместится во всех случаях, но вместе со шкафом – только в максимальном W . При $W=3$ у нас есть два выбора, но максимальная ценность у шкафа.

Предмет	1	2	3	4
Шкаф / 3 / 700	0	0	700 (Ш)	700 (Ш)
Табурет / 1 / 300	300 (Т)	300 (Т)	700 (Ш)	1000 (Ш+Т)
Стол / 2 / 500				
Комод / 2 / 550				

Таблица, шаг 3

Добавляем ещё один предмет - стол. У него вес 2 и он не влезет в пространство минимального W . Здесь варианты есть почти во всех столбцах, но в последнем случае набор шкаф+табурет ценнее набора стол+табурет.

Предмет	1	2	3	4
Шкаф / 3 / 700	0	0	700 (Ш)	700 (Ш)
Табурет / 1 / 300	300 (Т)	300 (Т)	700 (Ш)	1000 (Ш+Т)
Стол / 2 / 500	300 (Т)	500 (С)	800 (Т+С)	1000 (Ш+Т)
Комод / 2 / 550				

Таблица, шаг 4

Добавляем последний предмет - комод. Его вес равен столу (2), но он обладает большей ценностью и заменяет собой стол в столбцах 2 и 3. Однако, в последней ячейке суммарная ценность набора стол+комод выше прошлого набора шкаф+табурет. Решение найдено.

Предмет	1	2	3	4
Шкаф / 3 / 700	0	0	700 (Ш)	700 (Ш)
Табурет / 1 / 300	300 (Т)	300 (Т)	700 (Ш)	1000 (Ш+Т)
Стол / 2 / 500	300 (Т)	500 (С)	800 (Т+С)	1000 (Ш+Т)
Комод / 2 / 550	300 (Т)	550 (К)	850 (Т+К)	1050 (С+К)

Правило

Таким образом, из этой таблицы можно вывести правило:

$$Table(i, j) = \max_v \left\{ \begin{array}{l} Table(i - 1, j) \\ v_0 + Table(i - 1, j - w_0) \end{array} \right\},$$

где v_0 и w_0 - ценность и вес текущего (i -того) предмета.

При расчётах стоит добавить один столбец и одну строку, содержащие нули.

Предмет	0	1	...	N
0	0	0	...	0
Предмет 1	0	Вся остальная часть таблицы		
Предмет M	0			

Задание

- Ознакомиться с постановкой задачи и с набором данных <https://github.com/ITMOPython-2022/Lab-4>
- Выбрать понравившийся алгоритм для решения задачи (или предложить что-то ещё)
- Реализовать алгоритм в программном виде.