



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

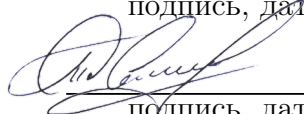
ФАКУЛЬТЕТ «Робототехника и комплексная автоматизация»  
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

РАСЧЁТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
к научно-исследовательской работе студента  
на тему

«Исследование систем типов в языках программирования»

Студент РК6-75Б  
группа

Руководитель НИРС

\_\_\_\_\_  
подпись, дата  
  
\_\_\_\_\_  
подпись, дата  
2024.04.23

Никитин В.Л.  
ФИО

Соколов А.П.  
ФИО

Оценка хорошо!

Москва, 2024

## РЕФЕРАТ

научно-исследовательская работа студента: 17 с., 2 рис., 1 табл., 8 источн.

ТЕОРИЯ ТИПОВ, ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ, КОМПИЛЯТОРЫ, ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, СИСТЕМА ТИПОВ ХИНДЛИ-МИЛНЕРА.

Работа посвящена анализу систем типов современных языков программирования. Программирование выстроено вокруг глубокой математической теории. Благодаря этому появляются возможности для оптимизации, развития и улучшения языков посредством применения математики. Одним из важных применений является теория типов, которая помогает программисту в написании кода. В последнее время все больше и больше языков почерпывают что-то из этой области. Поэтому важно при разработке своего собственного языка программирования сформировать его структуру и идеоматику, используя те или иные приемы из математической теории.

**Тип работы:** научно-исследовательская работа студента.

**Тема работы:** *«Исследование систем типов в языках программирования».*

**Объект исследования:** системы типов.

**Основная задача, на решение которой направлена работа:** Анализ систем типов современных языков программирования.

**Цели работы:** проведение анализа среди существующих систем типов с целью выбрать одну из них для реализации в компилятора языка программирования Kodept

В результате выполнения работы: 1) проведен анализ систем типов некоторых современных языков программирования 2) предложено использовать систему типов Хиндли-Милнера

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>1 Теория типов</b> .....	5
<b>2 Классификация систем типов</b> .....	7
2.1 Система типов C .....	8
2.2 Система типов Kotlin .....	9
2.3 Система типов ML-подобных языков .....	9
<b>3 Система типов Хиндли-Милнера</b> .....	12
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	15
<b>Литература</b> .....	16

# ВВЕДЕНИЕ

В современном программировании становится все более важным сколько будет потрачено времени на создание того или иного продукта. В это число входит как время, потраченное непосредственно на создание приложения, так и время, потраченное на его поддержку. Поэтому инструменты, применяемые программистом в повседневной работе, должны всячески помочь ему в этом.

Пожалуй, самым главным таким инструментом является компилятор. Разработчики компиляторов прикладывают большие усилия, чтобы язык программирования отвечал требованиям надежности и скорости. При создании инструмента такого рода важно правильно выбирать и проектировать каждую часть. Одной из основных таких частей является то, как в языке программирования взаимодействуют друг с другом типы.

В высокоуровневых языках программирования типы окружают разработчика повсюду. Чем более развитая система типов, там больше можно выразить, используя ее, а значит, если она надежна и подкреплена математической основой, то в программе станет меньше ошибок. Кроме того, в таком случае программы можно будет применять в качестве доказательств для различных теорий [1]. Сейчас такое уже применяет компания Intel при проектировании новых алгоритмов умножения или деления.

Актуальна проблема высокого порога входа в некоторые функциональные языки программирования, например Haskell и др. Он завышен, так как в них применяются сложные математические теории, повлиявшие и на синтаксис языка, и на всю его идеологию в целом. Несмотря на это, они активно применяются в промышленной разработке. В рамках данной работы, а также курсового проекта разрабатывается язык программирования Kodept, целью которого является развитие идей функциональных языков при сохранении простоты синтаксиса С-подобных языков, а также изучение всей цепочки создания языка программирования в целом.

**Целью** научно-исследовательской работы является выбор системы типов, которая будет реализована в языке Kodept.

В **задачи** входит: 1) составление классификации систем типов в языках программирования, 2) проведение анализа на основе выбранной классификации.

# 1 Теория типов

В разделе представлена информация о специальном разделе математики - теории типов [2]. Освящены важные понятия - *терм*, *тип*, *суждение* и *система типов*.

Терм  $x$  - чаще всего элемент языка программирования, будь то переменная, константа, вызов функции и др. Например, в Haskell, термами будут: лямбда-функция  $\lambda x \rightarrow x + 1$ , определение переменной  $\text{let } x = \text{"Hello"} \text{ in } ()$  и т.д. Как можно заметить, термы могут включать в себя другие термы.

Типом  $A$  обозначается метка, приписываемая объектам - этот объект принадлежит к типу (классу) яблоко. Обычно каждому терму соответствует определенный тип -  $x : A$ . Типы позволяют строго говорить о возможных действиях над объектом, а также формализовать взаимоотношения между ними.

Система типов же, определяет правила взаимодействия между типами и термами. В программировании это понятие равноценно понятию типизация.

С помощью суждений можно создавать логические конструкции и *правила вывода*. Именно благодаря этому теория типов активно применяется в компиляторах в фазе статического анализа программы, как для вывода, так и для проверки соответствия типов. Более того, согласно изоморфизму Карри-Ховарда [3] (таблица 1), программы могут быть использованы для доказательства логических высказываний. Такие доказательства называют автоматическими, и они широко применяются среди таких языков, как *Agda*, *Coq*, *Idris*.

Тип  $T$  обитаем (англ. *inhabitat*), если выполняется следующее:  $\exists t : \Gamma \vdash t : T$

Наборы суждений образуют предположения (англ. *assumptions*), которые образуют контекст  $\Gamma$ . Правила вывода записываются следующим образом, например правило подстановки:

$$\frac{\Gamma \vdash t : T_1, \Delta \vdash T_1 = T_2}{\Gamma, \Delta \vdash t : T_2} \quad (1.1)$$

Выражение 1.1 можно трактовать следующим образом: если в контексте  $\Gamma$  терм  $t$  имеет тип  $T_1$ , а в контексте  $\Delta$  тип  $T_1$  равен типу  $T_2$ , то можно судить, что при наличии обоих контекстов, терм  $t$  имеет тип  $T_2$ .

Таблица 1. Изоморфизм Карри-Ховарда

Логическое высказывание	Язык программирования
Высказывание, $F, Q$	Тип, $A, B$
Доказательство высказывания $F$	$x : A$
Высказывание доказуемо	Тип $A$ обитаем
$F \implies Q$	Функция, $A \rightarrow B$
$F \wedge Q$	Тип-произведение, $A \times B$
$F \vee Q$	Тип-сумма, $A + B$
Истина	Единичный тип, $\top$
Ложь	Пустой тип, $\perp$
$\neg F$	$A \rightarrow \perp$

Как уже было отмечено ранее, теория типов может быть в той или иной мере применяться в языках программирования. Правильный выбор системы типов для создаваемого языка программирования Kodept является важным решением.

## 2 Классификация систем типов

Известно, что системы типов можно разделить на *динамические* и *статические* [4]. Это влияет на то, в какой момент в программе происходит проверка соответствия типов. В динамических системах - во время исполнения программы, а в статических - соответственно во время компиляции. Кроме того, существуют особые языки программирования, где все данные имеют один тип. К таким относятся многие низкоуровневые языки, например ассемблер. Все данные в нем (адреса в памяти, числа, указатели на функции) являются всего лишь последовательностью байт.

Ниже приведены основные критерии, по которым можно классифицировать систему типов в языках программирования:

- 1) по времени проверки соответствия типам: статическая и динамическая,
- 2) по поддержке неявных конверсий: сильная (англ. strong) и слабая,
- 3) по необходимости вручную типизировать выражение: явная и неявная.

Например, типизация в язык python является динамической, сильной и неявной с точки зрения этой классификации [5]. Интерпретатор знает тип переменной только во время выполнения и не может неявно изменить его.

Далее будут рассмотрены только статические системы типов, так как после семантического анализа, компилятор может использовать накопленную информацию для оптимизации кода. Это делают языки со статической типизацией, хоть и более сложными в использовании, но более быстрыми, а динамически типизированным языкам приходится использовать различные специфические оптимизации, например, *JIT-компиляцию*, чтобы добиться сопоставимой скорости.

JIT-компиляцией называется прием оптимизации выполнения, когда компиляция происходит и во время работы программы. Благодаря этому можно оптимизировать некоторые особые случаи.

Предлагается исследовать существующие решения среди различных языков программирования и выделить в них положительные и отрицательные стороны.

## 2.1 Система типов C

C - язык программирования со статической, слабой, явной типизацией, разработанный в 1970-х годах.

Типом в языке C является интерпретация набора байт, составляющих объект [6]. Все типы делятся на две группы: скалярные и агрегатные (рис. 1). К скалярным типам относят примитивные (базовые) типы, которые описывают множество различных вариантов представления числа, а также указатели. К агрегатным - определяемые пользователем структуры, состоящие из упорядоченного именованного набора других типов, и массивы какого-то конкретного типа.

Кроме того, существуют «специальные» типы - объединения и функции. Специальные они потому что в первом случае - это лишь особый вариант структуры, а во втором - существуют только указатели на функции: отдельного типа для *лямбда-функции* в C нет.

Лямбда-функцией в информатике называют анонимную функцию.

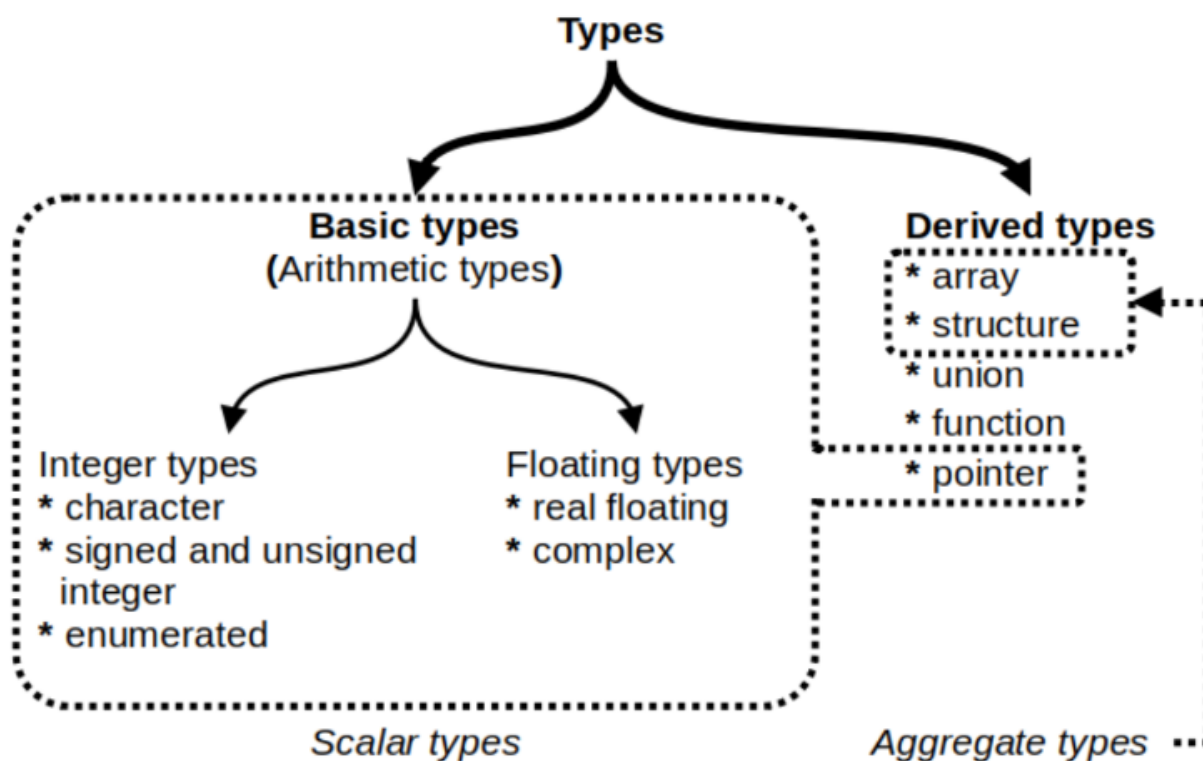


Рисунок 1. Схематичное изображение типов в C

Достоинства:

- C прост для понимания, он содержит только основные типы данных,





в 1930 году и в отличие от обычного лямбда-исчисления, здесь каждому терму сопоставлен тип.

Кроме проверки типов, над такими системами можно удобно проводить *вывод типов*. Это позволяет пользователю составлять программы почти не используя аннотации типов.

Алгоритмы вывода типов позволяют компилятору узнать тип терма из контекста.

### 2.3.1 Лямбда-куб

Эта абстракция позволяет наглядно увидеть разницу и взаимоотношение между различными видами типизированными лямбда-исчислениями (рис. 2).

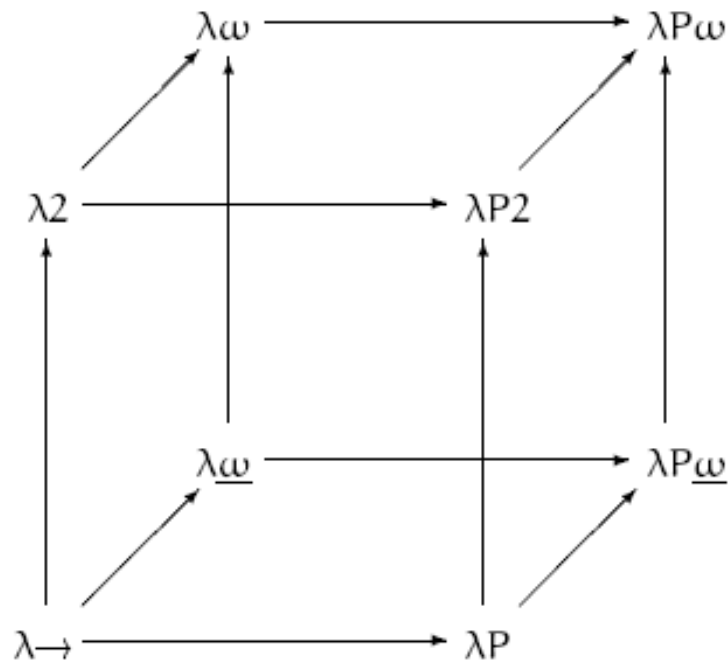


Рисунок 2. Графическое изображение лямбда-куба

Простейшим вариантом является *просто типизированное лямбда-исчисление* ( $\lambda \rightarrow$ ). В нем доступна абстракция только с помощью функции:

$$\frac{\Gamma \cup x : T \vdash y : U}{\Gamma \vdash \lambda x. y : T \rightarrow U} \quad (2.2)$$

Следующим этапом является *полиморфное лямбда-исчисление* ( $\lambda 2$ ). В нём термы могут зависеть от типов (обобщенные функции):

$$\frac{\Gamma \vdash y : U}{\Gamma \vdash \forall T : \lambda(x : T).y : T \rightarrow U} \quad (2.3)$$

Еще одним расширением будет *лямбда-исчисление с операторами над типами* ( $\lambda w$ ). С точки зрения обычных языков программирования такое исчисление формирует функции над типами: В частности, функция, формирующая тип списка, выглядела бы так:

$$\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow List \alpha \quad (2.4)$$

, где  $*$  - любой другой тип

Последней простой точкой куба является *лямбда-исчисление с зависимыми типами* ( $\lambda P$ ). Оно примечательно тем, что типы могут зависеть от термов. Наиболее простым примером послужит функция деления, где входной аргумент обязан быть отличным от 0.

Остальные вершины являются комбинацией описанных систем.

Подведем итог.

Достоинства:

- выразительность системы типов легко показать том же самом лямбда-кубе,
- имеет строгое математическое обоснование и хорошо изучено,
- компилятор имеет возможность выявить больше ошибок в программе.

Недостатки:

- достаточно сложна для понимания как с точки зрения пользователя, так и разработчика компилятора
- может значительно увеличить время компиляции из-за обилия сложных алгоритмов

### 3 Система типов Хиндли-Милнера

Исходя из классификации выше, было принято решение использовать систему типов Хиндли-Милнера. Фактически она является подобием системы  $\lambda 2$  и является, пожалуй, самой популярной. Среди прочих ее особенностей, важно отметить то, что она способна вывести наиболее общий тип выражения, основываясь на аннотациях типов программиста и окружающем контексте. Здесь приведена её небольшая модификация с добавлением типов-объединений и примитивных типов.

Наиболее классическим алгоритмом в этой области является так называемый алгоритм  $W$  [8].

Для определения системы типов необходимо 3 составляющие: набор термов, набор типов и набор суждений.

#### Термы:

$a, b, c ::=$

$x$	(переменная)
$\lambda x. a$	(лямбда-функция)
$a(b)$	(применение аргумента к функции)
$let\ a = b\ in\ c$	(объявление переменной)
$1, 2, 3, \dots$	(целочисленный литерал)
$1.1, 1.2, 10.0, \dots$	(вещественный литерал)
$(a, b)$	(объединение)

#### Типы:

$\iota ::=$	(примитивный тип)
$Integral$	(целочисленный)
$Floating$	(вещественный)
$\tau, \sigma ::=$	(мономорфный тип)
$\iota$	
$T$	(переменная типа)
$\tau \rightarrow \sigma$	(функциональный тип)

$(\tau, \sigma)$	(тип-объединение)
$\Lambda$	(пользовательский тип)
$\alpha ::=$	(полиморфный тип)
$\tau$	
$\forall a. \alpha$	(параметрический тип)

Полиморфные типы - основное отличие  $\lambda \rightarrow$  от  $\lambda 2$ . Благодаря им имеется возможность определять более обобщенные функции. Самый простой пример - функция  $id$  - имеет следующий тип:  $id : \forall a. a \rightarrow a$ . Таким образом ее можно вызвать и с аргументом-числом, и с аргументом-функцией.

Алгоритм  $W$  работает, исходя из набора суждений:

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \sigma} \quad (\text{TAUT})$$

$$\frac{\Gamma \vdash x : \sigma, \sigma' < \sigma}{\Gamma \vdash x : \sigma'} \quad (\text{INST})$$

Запись  $\sigma' < \sigma$  означает, что тип  $\sigma'$  более конкретный, чем  $\sigma$ .

$$\frac{\Gamma \vdash x : \sigma, a \notin \text{free}(\Gamma)}{\Gamma \vdash x : \forall a. \sigma} \quad (\text{GEN})$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \tau \rightarrow \tau', x : \tau}{\Gamma \vdash f(x) : \tau'} \quad (\text{COMB})$$

$$\frac{\Gamma \cup x : \tau \vdash y : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x. y : \tau \rightarrow \tau'} \quad (\text{ABS})$$

$$\frac{\Gamma \vdash x : \sigma, \Gamma \cup y : \sigma \vdash z : \tau}{\Gamma \vdash (\text{let } y = x \text{ in } z) : \tau} \quad (\text{LET})$$

$$\frac{\Gamma \vdash x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, x_3 : \tau_3, \dots}{\Gamma \vdash (x_1, x_2, x_3, \dots) : (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)} \quad (\text{TUPLE})$$

Исходя из этих суждений, алгоритм  $W$  составляет так называемое дерево вывода. Если дерево построить удалось, то написанная программа считается верной.

Разберём небольшой пример: пусть имеется следующий контекст:  $\Gamma = \{fst : \forall a, b. a \rightarrow b \rightarrow a\}$ . Удостоверимся, что следующее выражение  $let\ snd = \lambda x, y. fst(y)(x)\ in\ snd$ , имеет тип  $\forall a, b. a \rightarrow b \rightarrow b$ .

$$\begin{aligned}
J_1 &:= \frac{\Gamma \vdash fst : \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta, y : \beta}{\Gamma \vdash fst(y) : \alpha \rightarrow \beta}, \\
J_2 &:= \frac{\Gamma \vdash J_1 : \alpha \rightarrow \beta, x : \alpha}{\Gamma \vdash fst(y)(x) : \beta}, \\
J_3 &:= \frac{\Gamma \cup x : \alpha \cup y : \beta \vdash J_2}{\Gamma \vdash \lambda x, y. fst(y)(x) : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta} \\
J_4 &:= \frac{J_3, \Gamma \cup y : \forall a, b. a \rightarrow b \rightarrow b \vdash z : \forall a, b. a \rightarrow b \rightarrow b}{\Gamma \vdash (let\ y = x\ in\ z) : \forall a, b. a \rightarrow b \rightarrow b}
\end{aligned}$$

Однако не всегда можно легко вывести тип выражения. Например, выражение  $\lambda x. x(x)$  имеет бесконечный рекурсивный тип, который нельзя выразить в  $\lambda 2$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате данной научно-исследовательской работы были сделаны следующие выводы:

1. приведены некоторые выдержки из теории типов
2. рассмотрена классификация систем типов, включая достоинства и недостатки каждой
3. выбрана и формализована система типов Хиндли-Милнера

Реализация и применение выбранной системы типов будет подробнее рассмотрена в курсовом проекте.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Голованов Вячеслав. Насколько близко компьютеры подошли к автоматическому построению математических рассуждений? [Электронный ресурс]. 2020. (Дата обращения 22.04.2024)). URL: <https://habr.com/ru/articles/519368/>.
- 2 Milner Robin. A theory of type polymorphism in programming // Journal of computer and system sciences 17. 1978. С. 348–375.
- 3 Свиридов Сергей. Теория типов [Электронный ресурс]. 2023. (Дата обращения 19.04.2024). URL: <https://habr.com/ru/articles/758542/>.
- 4 Груздев Денис. Ликбез по типизации в языках программирования [Электронный ресурс]. 2012. (Дата обращения 18.04.2024). URL: <https://habr.com/ru/articles/161205/>.
- 5 Why is Python a dynamic language and also a strongly typed language [Электронный ресурс]. (Дата обращения 21.04.2024). URL: <https://wiki.python.org/moin/WhyisPythonadynamiclanguageandalsoastronglytypedlanguage>.
- 6 C Reference [Электронный ресурс]. (Дата обращения 21.04.2024). URL: <https://en.cppreference.com/w/c>.
- 7 Marat Akhin Mikhail Belyaev. Kotlin language specification. (Дата обращения 19.04.2024). URL: <https://kotlinlang.org/spec/type-system.html>.
- 8 Urban Christian, Nipkow Tobias. Nominal verification of algorithm W // From Semantics to Computer Science. Essays in Honour of Gilles Kahn / под ред. G. Huet, J.-J. Lévy, G. Plotkin. Cambridge University Press, 2009. С. 363–382.

### Выходные данные

*Никитин В.Л.. Исследование систем типов в языке программирования по дисциплине «Модели и методы анализа проектных решений». [Электронный ресурс] — Москва: 2024. — 17 с. URL: <https://sa2systems.ru:88> (система контроля версий кафедры РК6)*



Постановка:  доктор физико-математических наук, Соколов А.П.  
Решение и вёрстка:  студент группы РК6-75Б, Никитин В.Л.

*2024, осенний семестр*