Desarrollo de contenido

IUDigital de Antioquia
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

Unidad 2

Cálculo II

ORD No 74 de 2017 · VIGILADA MinEducación

Métodos de integración y aplicación de las integrales.

Introducción

Sabemos que la planimetría, como parte de la topografía, permite conseguir una representación de un terreno, es decir, de una superficie plana. En la unidad anterior estudiamos cómo los métodos de integración determinan el área de figuras planas regulares e irregulares, pero sabemos que los terrenos no son siempre planos; por esto, es necesario conocer nuevas técnicas y fórmulas que permitan calcular el volumen de sólidos que pueden ser la representación del relieve de un terreno.

En el transcurso de esta unidad, encontrarás métodos de integración para calcular integrales indefinidas y definidas de diferentes tipos de funciones; seguidamente, se abordarán los conceptos necesarios para calcular el volumen de sólidos de revolución, y, finalmente, tener las herramientas para solucionar problemas de aplicación.

Contarás con lecturas académicas, videos, ejercicios y problemas, los cuales te permitirán una apropiación de los temas a partir del trabajo individual.

Tema 1: Integración completando cuadrados

Supone un área determinada por la función

Esta técnica de integración es utilizada cuando se desea llevar las expresiones algebraicas a la forma de trinomios cuadrados perfectos, para que el denominador sea un binomio cuadrado más un término independiente.

1. Recordar la forma del trinomio cuadrado perfecto $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$
2. Sumar o restar al polinomio las expresiones que sean necesarias para generar el TCP.

Ejemplo:

Completar el trinomio cuadrado perfecto	
$2x^2 + 3x + 1$	Como se puede observar, el trinomio no es cuadrado perfecto ya que no cumple con la forma $x^2 \pm 2xy + y^2$
$2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$	Como el primer término tiene coeficiente 2, procedemos a sacar factor común.
$2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$ $2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$ $2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}$ $2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$	Como el segundo término corresponde a la forma 2xy, se agrega a la expresión un nuevo término al cuadrado que está formado por el coeficiente de x dividido entre dos. Este será el tercer término del trinomio cuadrado perfecto. Se debe tener en cuenta que como se agregó $\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2$, debe restarse este mismo término, para que no cambie la expresión inicial. Se soluciona el trinomio cuadrado perfecto obteniendo el binomio al cuadrado.

Este proceso es usado cuando se presentan integrales de la forma:

$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$	$\int \frac{(dx + e)\, dx}{ax^2 + bx + c}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	$\int \frac{(dx + e)\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Ejemplo:

Ejemplo:	
$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 3}$$	
$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3$ $(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 3 \quad (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{13}{4}$	Completando el trinomio cuadrado perfecto, factorizo para obtener el binomio al cuadrado.
$\int \frac{dx}{(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{13}{4}}$ $u = x - \frac{5}{2}$ $du = dx$ $a^2 = \frac{13}{4}$ $a = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$	Reescribo la integral con el binomio al cuadrado. Identifico una fórmula de integración que, para este caso, corresponde a: $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{u - a}{u + a} \right\rvert + C$
$\int \frac{1}{(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{13}{4}} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{13}}{2}} \ln \left\lvert \frac{x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}}{x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}} \right\rvert + C$ $\int \frac{1}{(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{13}{4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left\lvert \frac{\frac{2x - 5 - \sqrt{13}}{2}}{\frac{2x - 5 + \sqrt{13}}{2}} \right\rvert + C$ $\int \frac{1}{(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{13}{4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left\lvert \frac{2x - 5 - \sqrt{13}}{2x - 5 + \sqrt{13}} \right\rvert + C$	Reemplazo en la fórmula de integración y simplifico la expresión

Tema 2: Integración por partes

Este método de integración es usado cuando el integrando es un producto de dos factores, para solucionarlo, debes determinar un factor como u y otro como dv; luego, se procede a calcular du, derivando a u, y se halla v integrando a dv. Cuando se tienen todos los datos se aplica la fórmula:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Se debe procurar que:

- El elemento dv sea la expresión más complicada, pero cuya integral corresponda a una fórmula de integración básica.
- El elemento u sea la expresión cuya derivada sea una expresión más simple que u.

Normalmente, se utiliza una regla, nombrada ILATE, para determinar quién será u. Cada letra representa un tipo de función que puede aparecer en el ejercicio, la primera letra que aparezca, al leer ILATE, será u.

- I: Inversa
- L: Logarítmica
- A: Algebraica
- T: Trigonométrica
- E: Exponencial

$$\int \underbrace{x^2}_{\text{Algebraica}} \underbrace{\ln x}_{\text{Logarítmica}} \; dx$$

En el integrando aparecen dos funciones: algebraica (A) y logarítmica (L), pero la primera letra que se lee en ILATE, corresponde a la L, por tanto, u será la función logarítmica y dv la función algebraica.

Ejemplo 1:

$\int xcosx\, dx$	Ejercicio dado
$u = x$ | $du = 1$ | $dv = cosx$ | $v = sen\, x$	Determinar: u y du dv y v
$\int xcosx\, dx = xsenx - \int senx\, dx$	Reemplazo en la fórmula: $\int udv = uv - \int vdu$

Ejemplo 2:

$\int x^2 \ln x \, dx$	Ejercicio dado
$u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}$, $dv = x^2$, $v = \frac{x^3}{3}$	Determinar: u y du, dv y v en este caso, elegiremos $u = \ln x$, ya que, de lo contrario, no obtendríamos una integral directa de $\ln x$
$\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} \, dx$ $\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx$ $\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \frac{x^3}{3} - \frac{1}{9}x^3$ $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$	Reemplazo en la fórmula: $\int udv = uv - \int vdu$ Y simplifico.

Tema 3: Integración de productos trigonométricos

En estas integrales se encuentran aquellas conformadas por funciones trigonométricas de los siguientes tipos:

Productos de senos y cosenos:

- **Productos de senos y cosenos con m y n igual a 1**

$\int sen\,(x)\cos(x)\,dx$	$\int sen\,(x)\,sen(x)\,dx$	$\int cos\,(x)\cos(x)\,dx$

Para darles solución debemos recordar las identidades trigonométricas que permiten realizar una trasformación de productos a sumas.

Identidades trigonométricas:

$$sen\ A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[sen\ (A - B) + sen\ A + B)]$$

$$sen\ A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[cos\ (A - B) - cos\ A + B)]$$

$$cos\ A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[cos\ (A - B) + cos\ A + B)]$$

Ejemplo: Productos de senos y cosenos, con m y n igual a 1

$\int sen(6x) \cdot \cos(5x)\, dx$	Ejercicio inicial
$sen(6x) \cdot \cos(5x) = ¿\frac{1}{2}[sen(6x-5x)+sen(5x+6x)]¿$	Aplicamos la identidad correspondiente al integrando $sen\,A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[sen(A-B)+sen\,A$
$\int \frac{1}{2}[sen(6x-5x)+sen(5x+6x)]dx$ $\frac{1}{2}[\int sen(x)dx + \int sen(11x)dx]$	Reescribimos la integral. Extraemos la constante $\frac{1}{2}$ Separamos la suma del integrando en dos integrales

$\int sen(11x)dx$ $u=11x$ $\frac{du}{dx}=11$ $\frac{du}{11}=dx$ $\int sen\,u\frac{du}{11}=\frac{1}{11}\int sen\,u\,du$ $\int sen\,u\frac{du}{11}=\frac{1}{11}\cdot(-\cos u)$ $\int sen(11x)dx=\frac{-1}{11}\cos(11x)$	La integral $\int sen(x)$, tiene solución inmediata $-\cos(x)$ La integral $\int sen(11x)$ no tiene solución inmediata, por tanto, podemos hacer cambio de variable

$\frac{1}{2}[\int sen(x)dx+\int sen(11x)dx]=\frac{1}{2}\left[-\cos x+\left(\frac{-1}{11}\cos(1\right.\right.$ $\frac{1}{2}[\int sen(x)dx+\int sen(11x)dx]=\frac{1}{2}\left[-\cos x-\frac{1}{11}\cos(11\right.$	Reemplazo el valor obtenido en cada integral y expreso el resultado

Tema 4: Integración por sustitución trigonométrica

Este método es usado cuando no es posible integrar inmediatamente cierto tipo de funciones. En la siguiente tabla se relacionan las fórmulas para sustituir e integrar de una manera más rápida.

Función inicial	Sustituto	Función final
$\sqrt{a^2-b^2u^2}$	$u=\frac{a}{b}sen\,y$	$a\sqrt{1-sen^2 y}=a\cos y$
$\sqrt{a^2+b^2u^2}$	$u=\frac{a}{b}tan\,y$	$a\sqrt{1+tan^2 y}=a\sec y$
$\sqrt{b^2u^2-a^2}$	$u=\frac{a}{b}sec\,y$	$a\sqrt{sec^2 y-1}=a\tan y$

Ejemplo:

$\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x} dx$	Ejercicio dado
$a^2=16 \to a=4$ $b^2=9 \to b=3$ $x=\frac{4}{3} sen\, y$ $dx=\frac{4}{3}\cos y\, dy$	Determinar qué elemento corresponde a a y b, para hallar x y dx.
$\int \frac{\sqrt{16-9\left(\frac{4}{3} sen\, y\right)^2}}{\frac{4}{3} sen\, y}\left(\frac{4}{3}\cos y\, dy\right)$ $\int \frac{\sqrt{16-16\, sen^2\, y}}{\frac{4}{3} seny}\left(\frac{4}{3}\cos y\, dy\right)$ $\int \frac{\sqrt{16(1-sen^2\, y)}}{\frac{4}{3} seny}\left(\frac{4}{3}\cos y dy\right)$ $\int \frac{4\sqrt{1-sen^2\, y}}{\frac{4}{3} seny}\left(\frac{4}{3}\cos y\, dy\right)$ $\int \frac{4\sqrt{1-sen^2\, y}}{seny}(cosy\, dy)$	Se reemplaza en la integral inicial. Se realizan las operaciones al interior del integrando.
$\int \frac{4\cos y}{seny}(cosy\, dy)$	Aplicando la fórmula

$4\int \frac{1-sen^2 y}{seny}\,dy$ $4\int \frac{1}{seny}-\frac{sen^2 y}{seny}\,dy$ $4\left[\int \frac{1}{seny}\,dy-\int seny\,dy\right]$ 4 ¿ $4\cdot \ln\lvert csc\ y-\cot y\rvert+\cos y$	$\sqrt{1-sen^2\ y}=\cos y$ e identidades trigonométricas pitagóricas
$x=\frac{4}{3}sen\ y$ $sen\ y=\frac{3x}{4}=\frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$ $csc\ y=\frac{4}{3x}$ $\cot y=\frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x}$ $\cos y=¿\frac{\sqrt{16-9x^2}}{4}¿$ $\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x}\,dx=4\cdot\left[\ln\lvert csc\ y-\cot y\rvert+\cos y\right]$	Reemplazamos la sustitución para que quede en términos de x, teniendo en cuenta las razones trigonométricas. *Csc y* cot *y* cos *y* Las cuales están descritas en la solución final.

$\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x}dx=4\cdot\left[\ln\left\|\frac{4}{3x}-\frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x}\right\|+\frac{\sqrt{16-9x^2}}{4}\right]+C$ $\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x}dx=4\cdot\left[\ln\left\|\frac{4-\sqrt{16-9x^2}}{3x}\right\|+\frac{\sqrt{16-9x^2}}{4}\right]+C$ $\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x}dx=4\cdot\left(\ln\left\|\frac{4-\sqrt{16-9x^2}}{3x}\right\|\right)+4\cdot\left(\frac{\sqrt{16-9x^2}}{4}\right)+C$ $\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x}dx=4\cdot\left(\ln\left\|\frac{4-\sqrt{16-9x^2}}{3x}\right\|\right)+\sqrt{16-9x^2}+C$	

Tema 5: Integración por fracciones parciales

Cuando una función está formada por un cociente entre dos polinomios (fraccionario), se denomina función racional; en varias ocasiones, al realizar una integración de una función racional, no se obtiene una función racional. Por ejemplo:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = tan^{-1}x + C$$

Con el método que se abordará, se pretende descomponer la función racional, dada en el ejercicio inicial, en fracciones más simples que puedan calcularse por medio de las técnicas que ya son conocidas.

Si tenemos que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales, se pueden presentar dos situaciones:

- Que el grado de P sea menor que el grado de Q, en este caso, la función será propia y podrá expresarse como una suma de fracciones simples.

- Que el grado de P sea mayor que el grado de Q, en este caso la función será impropia y se deberá dividir P entre Q, hasta obtener un residuo $\boldsymbol{R}\ (\ \boldsymbol{x}\ )$ de grado menor que $\boldsymbol{Q}\ (\ \boldsymbol{x}\ )$.

Material complementario

Te invitamos a ampliar tus conocimientos a través de las siguiente lecturas, a través de ellas puedes profundizar acerca de las temáticas exploradas

- Masid Kane. (2018). Completación Trinomio Cuadrado Perfecto [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=fex-DRV8iDE
- Matefácil. (2015). Integral completando el trinomio cuadrado perfecto paso a paso, ejercicio resuelto [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=slafcLnIfFA&t=254s

Integración por partes:

- Guerrero, G. (2014). Cálculo Integral. México, Grupo Editorial Patria. (Unidad 1). Recuperado de: https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-integration-new/bc-6-11/v/deriving-integration-by-parts-formula
- Fisimat. (2017). Integral por Partes Definida - Examen (Parte #1) [Video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=-SdBlnwcVkk
- Juliprofe. (2009). INTEGRACIÓN POR PARTES - Ejercicio 1 [Video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=CavjhBTYma8&t=103s

Integración de productos trigonométricos:

- Ortiz, F.J, Ortiz, F. J & Ortiz, F.J. (2014). Calculo Integral. México, Grupo Editorial Patria. (Bloque 2). Recuperado de: https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/ic-integration/ic-integration-with-trig-identities/e/integration-using-trigonometric-identities

- Fisimat. (2017). Integrales Trigonométricas - (Técnica de Senos - Cosenos) - Potencias - 1 Ejercicio #5 [Video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Q78Zf8jenJg

- Juliprofe. (2011). INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS - Ejercicio 1 [Video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=FUZzUalCxlo&t=4s

Fracciones parciales:

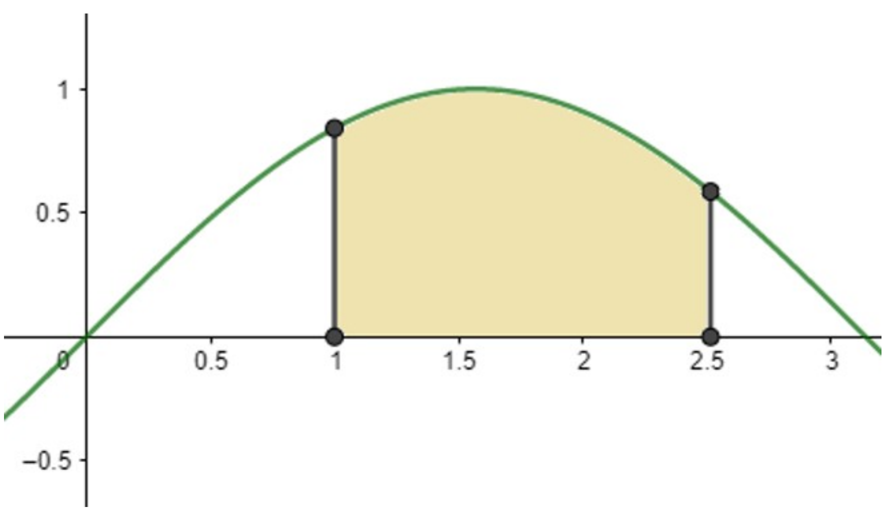
- Aguayo, J. (2009). Cálculo integral y series. Chile, CL: J. C. Sáez Editor. (Capítulo 3). Recuperado de: https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-integration-new/bc-6-12/v/integration-with-partial-fractions
- Fisimat. (2017). Integrales por "Fracciones Parciales" - Factores Lineales Repetidos #3 [Video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=uxLOjqUi5To
- Fisimat. (2017). Integrales por "Fracciones Parciales" - Factores Cuadráticos Repetidos #3 [Parte 1]: https://www.youtube.com/watch?v=bNU7opJ8cR4

Tema 6: Áreas bajo y entre curvas.

El problema del área bajo la curva fue uno de los cuestionamientos que dio origen al cálculo integral. Esta situación se presenta cuando el área está formada por la línea curva que describe una función f(x) y el eje x del plano cartesiano, o cuando el área está determinada por dos funciones.

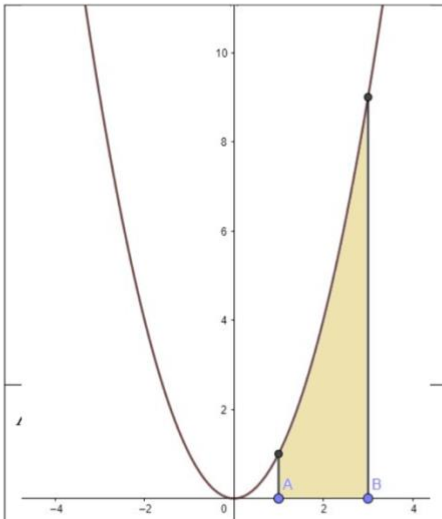
Este tipo de áreas está determinado por una función f(x) y unos puntos (a, b) del eje x.
En la gráfica, el área a considerar está por encima del eje x.
Y su área está determinada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



Ejemplo:

Calcular el área de la región determinada por el eje x en el intervalo (1,3) y la función $f(x) = x^2$



En el plano cartesiano

$f(x)=x^2$, corresponde a una parábola

El eje x en los puntos

x=1, x=3

El área esta sobre el eje x.

Según la definición

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

Se calcula el área de la región, según la regla de Barrow

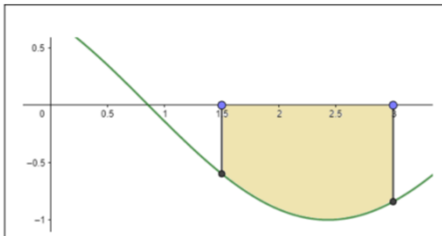
$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

$$\int_1^3 f(x^2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$

$\frac{3^3}{3}$	$\frac{1^3}{3}$

$$\int_1^3 f(x^2)\,dx=9-\frac{1}{3}$$

$$A=\int_1^3 f(x^2)\,dx=\frac{26}{3}$$



Este tipo de áreas está determinado por una función f(x) y unos puntos (a, b) del eje x.

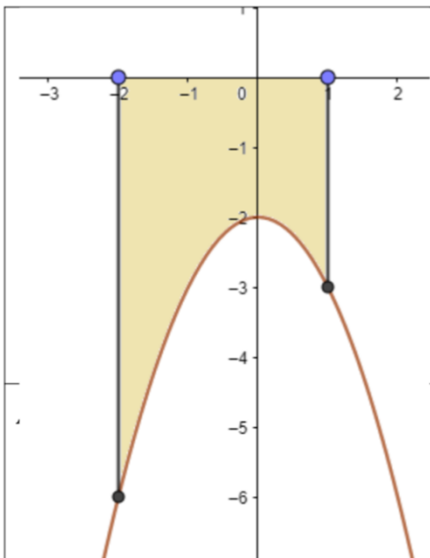
En la gráfica de la izquierda, el área a considerar está por debajo del eje x.

Y su área está determinada por

$$A=-\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región determinada por el eje x en el intervalo (-2,1) y la función $f\ (x\ ) = -x^2 - 2$



En el plano cartesiano

$f(x) = -x^2 - 2$, corresponde a una parábola

El eje x en los puntos

x= -2, x=1

El área está bajo el eje x.

Según la definición

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Se calcula el área de la región, según la regla de Barrow

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$-\int_{-2} f(-x^2-2)\,dx = \int_{-2} f(x^2+2)\,dx$$

$$\int_{-2}^{1} f(x^2+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_1^3$$

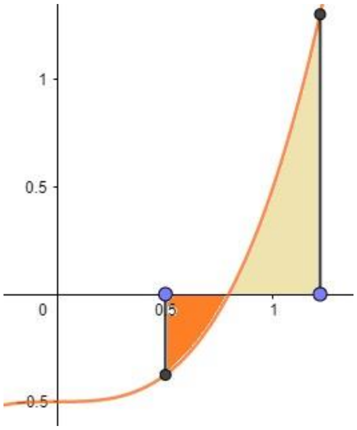
$\frac{(-2)^3}{3} + 2(-2)$	$\frac{(1)^3}{3} + 2(1)$
$\frac{-8}{3} - 4$	$\frac{1}{3} + 2$
$\frac{-20}{3}$	$\frac{7}{3}$

$$\int_{-2}^{1} f(x^2+2)\,dx = \frac{7}{3} + \frac{20}{3}$$

$$A = \int_{-2}^{1} f(x^2+2)\,dx = \frac{27}{3}$$

Ten en cuenta:

Se pueden presentar casos en que el área que se desea obtener está determinada en un intervalo donde la función toma valores positivos y negativos, para este caso, se debe calcular por separado el área sobre y bajo el eje x, finalmente, sumar los resultados.



$$A_1 = -\int_a^b f\,(dx)$$

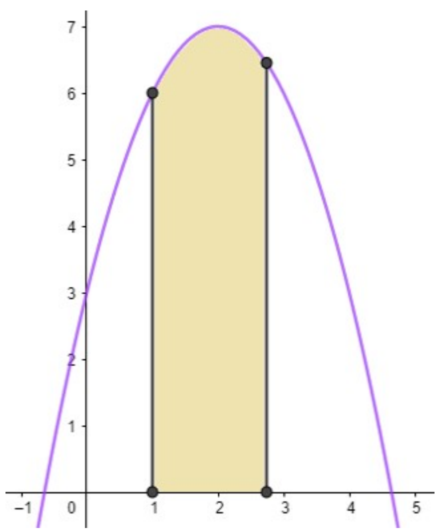
$$A_2 = \int_a^b f\,(x)\,dx$$

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_T = -\int_a^b f\,(x)\,dx + \int_a^b f\,(X)\,dx$$

Área entre dos funciones

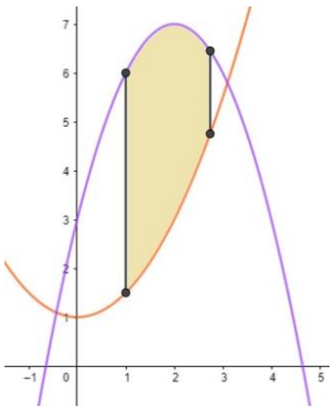
Para calcular el área de una región que está determinada por la gráfica de dos funciones $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{x})$, integrables en un intervalo determinado, debemos tener en cuenta las siguientes situaciones:



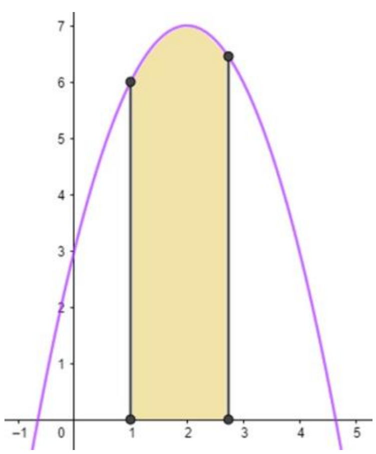
Cuando se indica el intervalo

Si $\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$ para todo $\boldsymbol{x \in [a, b]}$, el área de la región comprendida entre los gráficos de las funciones será: $\boldsymbol{A = \int_a^b f(x) - g(x) dx}$.

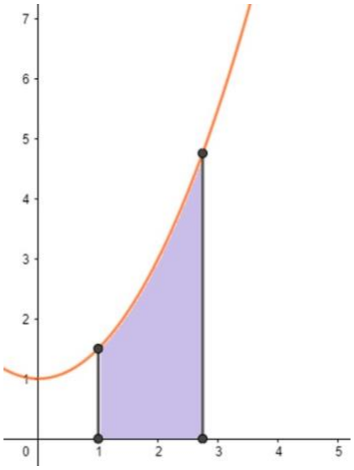
En esta situación la función de color morado está por encima de color naranja, por tanto, el área que se desea determinar corresponde a la diferencia entre el área de y en el intervalo.



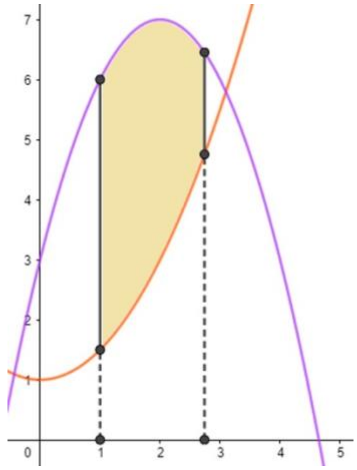
Área de $f(x)$ con eje x.



Área de $g(x)$ con eje x

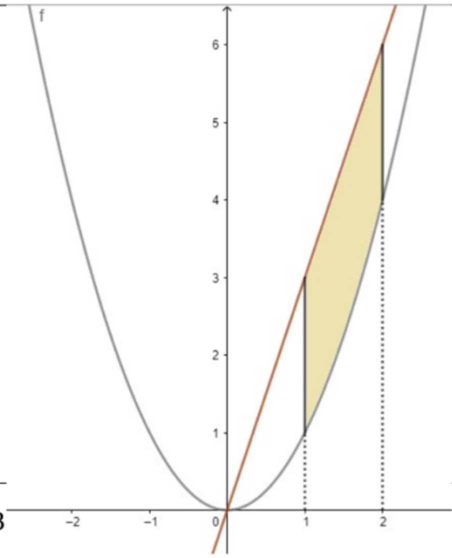


Diferencia entre ambas



Ejemplo:

Calcular el área entre las funciones $g(x)=x^2$ y $f(x)=3x$ en el intervalo $(1,2)$

	Graficar las funciones. En la gráfica se puede determinar que $f(x)\geq g(x)$ Por tanto, podemos aplicar la fórmula: $A=\int_a^b f(x)-g(x)dx$
$A_1=\int_1^2 3$ $A_1=\left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2=\left[\frac{3(2^3)}{2}-\frac{3(1^3)}{2}\right]$ $A_1=\left[\frac{24}{2}-\frac{3}{2}\right]=\frac{21}{2}$	Hallar el área determinada por la función f(x) y el eje x, la cual denominaremos A_1
$A_2=\int_1^2 x^2 dx$ $A_2=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right]$ $A_2=\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right]=\frac{7}{3}$	Hallar el área determinada por la función g(x) y el eje x, la cual denominaremos A_2
$A=\int_1^2 3x-x^2 dx$ $A=\frac{21}{2}-\frac{7}{3}=\frac{13}{6}$ $A=\frac{13}{6}u^2$	Aplicamos la fórmula $A=\int_a^b f(x)-g(x)dx$ Expresamos el resultado en unidades cuadradas.

Tema 7: Volúmenes de sólidos de revolución

Haz clic en el enlace para ver el recurso interactivo de Volúmenes de sólidos de revolución.

Tema 8: Secciones planas conocidas

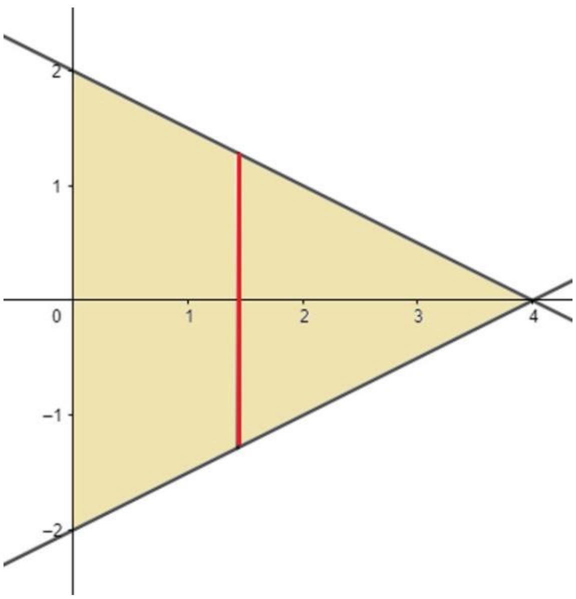
En este tema calcularemos el volumen de sólidos cuyas secciones trasversales son conocidas, por ejemplo: cuadrados, rectángulos, triángulos, entre otras. Y se aplicará la fórmula para volumen:

$$v = \int_a^b A\,(x)dx$$

Ejemplo:

La base de un sólido es la región triangular limitada por las rectas $x + 2y = 4$, $x - 2y = 4$ y el eje y.

Determinar el volumen del sólido, sabiendo que las secciones planas (transversales) perpendiculares al eje x son cuadradas.



En la gráfica se observa la sección plana de color rojo, la cual corresponde al lado del cuadrado que corta la pirámide que describen las funciones.

Sabemos que el área de un cuadrado es:

$A = L^2$

Solución:

Primera recta:

$$x + 2y = 4$$

$$y = \frac{4-x}{2}$$

Segunda recta:

$$x - 2y = 4$$

$$y = \frac{4-x}{-2} = \frac{x-4}{2}$$

Hallamos L

$$L = \frac{4-x}{2} - \frac{x-4}{2}$$

$$L = \frac{(4-x)-(x-4)}{2} = \frac{4-x-x+4}{2}$$

$$L = \frac{2(4-x)}{2} = 4 - x$$

Determinamos el área

$$A = (4-x)^2$$

L corresponde a la distancia que hay entre las dos rectas, por tanto:

$$V = \int_0^4 (4-x)^2 dx$$

$$V = \int_0^4 16 - 8x + x^2\, dx$$

$$V = \left[\frac{x(x^2-12x+48}{3}\right]_0^4$$

$$V = \frac{64}{3}$$

Aplicamos la fórmula

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Para este caso el límite inferior será 0 y el superior será 4, este último es el punto donde las rectas se intersecan.

Longitud de arco

En este tema se trabajará cómo calcular la longitud de un arco determinado por una función de una curva cualquiera. Denominaremos como arco aquella "porción de la curva que va desde el punto $A\,(\,a\,,\,f\,(\,a\,)\,)$ hasta el punto $B\,(\,b\,,\,f\,(\,b\,)\,)$" (Leithold, 2005).

$$L = lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum |P_{i-1}P_1| = \int_a^b \sqrt{1\,[f'(x)]^2\,dx}$$

Siempre y cuando $\boldsymbol{f\,(\,x\,)}$ y su derivada $\boldsymbol{f\,'\,(\,x\,)}$ sean continuas en el intervalo

Ejemplo:

Determinar la longitud del arco de la curva $f\,(x) = x\frac{3}{2}$ en el intervalo $[0,3]$

Solución:

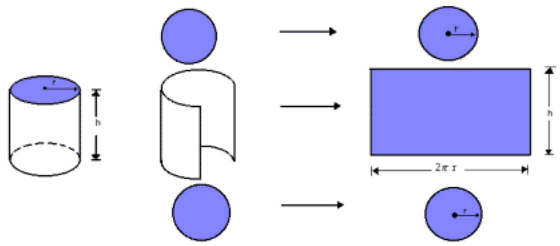
$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$	Se halla la derivada $f'(x)$
$\int_0^3 \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,dx$ $\int_0^3 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$ $\int_0^3 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}dx$	Se aplica la fórmula $L=\lim_{\Vert\Delta\Vert\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left\|P_{i-1}'P_1\right\|=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)}$ Se eleva al cuadrado la expresión $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ Se expresa la raíz como potencia, por propiedades de la potencia y radicación.
$v=\left(1+\frac{9}{4}x\right)$ $\frac{dv}{dx}=\frac{9}{4}$ $\frac{4}{9}dv=dx$	Se halla la integral usando la fórmula $\int v^n\,dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}$

$\int_0^3 v^{\frac{1}{2}}\frac{4}{9}dv=\frac{4}{9}\int_0^3 v^{\frac{1}{2}}dv$ $\frac{4}{9}\left[\frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{4}{9}\frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3}$ $L=\frac{4}{9}\left[\frac{2\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^3$	
$\left[\frac{2\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^3=\frac{2\left(1+\frac{27}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{2\sqrt{\left(\frac{31}{4}\right)^3}}{3}-\frac{2\sqrt{1}}{3}$ ¿ $\frac{2\frac{31}{4}\sqrt{\frac{31}{4}}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{\left(\frac{31}{2}\cdot\frac{\sqrt{31}}{2}\right)-2}{3}=\frac{\frac{31\sqrt{31}}{4}-2}{3}$ ¿ $\frac{\frac{31\sqrt{31}-8}{4}}{3}=\frac{31\sqrt{31}-8}{12}$ $L=\frac{4}{9}\cdot\frac{31\sqrt{31}-8}{12}=\frac{31\sqrt{31}-8}{27}$	Se evalúa en el intervalo 0,3 Se simplifica.

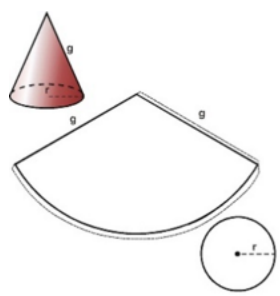
Tema 9: Área de una superficie de revolución

“Una superficie de revolución se forma cuando se hace girar una curva en torno a una recta. Tal superficie es la frontera lateral de un sólido de revolución” (Stewart, … p 545).

Veamos algunos ejemplos de las superficies de sólidos de revolución conocidos:



Área superficial de un cilindro. Só Matemática (s.f)



Área superficial de un cono Curriculum Nacional. MINEDUC. Chile (s.f)

Para determinar el área superficial de un sólido de revolución, se debe tener en cuenta lo siguiente: si f es positiva y tiene una derivada continua, se podrán aplicar las siguientes fórmulas:

- Si el sólido rota entorno al eje x:

$$S = \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

- Si el sólido rota entorno al eje y:

$$S = \int_a^b 2\pi x\, \sqrt{1+[f'(y)]^2}\, dy$$

Ejemplo:

La curva determinada por la función $f\ (\ x\ )=1-x^2$ en el intervalo $[\ 0\ ,1]$ gira en torno al eje y.

$\int_0^3 v^{\frac{1}{2}}\frac{4}{9}dv=\frac{4}{9}\int_0^3 v^{\frac{1}{2}}dv$ $\frac{4}{9}\left[\frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{4}{9}\frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3}$ $L=\frac{4}{9}\left[\frac{2\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^3$	
$\left[\frac{2\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^3=\frac{2\left(1+\frac{27}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{2\sqrt{\left(\frac{31}{4}\right)^3}}{3}-\frac{2\sqrt{1}}{3}$ $¿\frac{2\frac{31}{4}\sqrt{\frac{31}{4}}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{\left(\frac{31}{2}\cdot\frac{\sqrt{31}}{2}\right)-2}{3}=\frac{\frac{31\sqrt{31}}{4}-2}{3}$ $¿\frac{\frac{31\sqrt{31}-8}{4}}{3}=\frac{31\sqrt{31}-8}{12}$ $L=\frac{4}{9}\cdot\frac{31\sqrt{31}-8}{12}=\frac{31\sqrt{31}-8}{27}$	Se evalúa en el intervalo 0,3 Se simplifica.

$S=2\pi\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\right)$	Reemplazamos para hallar el área de la superficie.

Material complementario

Te invitamos a ampliar tus conocimientos a través de la siguiente lecturas, a través de ellas puedes profundizar acerca de las temáticas exploradas:

Área bajo y entre curvas:

- Área entre curvas - Ejercicio1
  https://www.youtube.com/watch?v=0hs3v3lilT8&t=271s

Volúmenes de sólidos de revolución:

- Material complementario.
  https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus

- Guerrero, G. (2014). Cálculo Integral. México, Grupo Editorial Patria. (Unidad 4). Recuperado de: https://ebookcentral.proquest.com/lib/iudasp/reader.action?docID=3227587

Recurso geogebra:

- Sólido de revolución eje y:
  https://www.geogebra.org/m/rkNvjZGQ - material/mnGjGVYh

- Calculadora de sólidos de revolución:
  https://www.geogebra.org/m/rkNvjZGQ - material/xa43BaV6

- Método de arandelas (eje revolución x).
  https://www.geogebra.org/m/mQmrXdF2

Videos:

- Volumen de un sólido de revolución usando arandelas - Ejercicio 1
  https://www.youtube.com/watch?v=SKZ9cP_NGEM&t=22s
- Volumen de revolución 02.
  https://www.youtube.com/watch?v=DkT3umJMl8I

Longitud de arco:

- Aplicación de Integrales - Longitud de Arco.
  https://www.youtube.com/watch?v=K2sUVosodZw

IU Digital de Antioquia
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

ORD No 74 de 2017 · VIGILADA MinEducación

www.iudigital.edu.co