IU Digital de Antioquia
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

Desarrollo de contenido

Unidad 2

Algebra Lineal

ORD No 74 de 2017 · VIGILADA MinEducación

Unidad 2. Algebra matricial y sistemas de ecuaciones lineales

Introducción

Las matrices son entidades matemáticas de gran utilidad para el estudio de los sistemas lineales, debido a que su estructura permite implementarlas eficientemente en todo tipo de aplicaciones, ya sea para solucionar sistemas de ecuaciones en áreas de la física, como la dinámica, u otros más complejos como los sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas. Asimismo, las matrices se emplean regularmente en lenguajes de programación matriciales, tales como Matlab, Python, Octave, entre otros, lo cual evidencia la necesidad de su estudio en un contexto académico y científico enmarcado por la Cuarta Revolución Industrial.

Así pues, teniendo en cuenta los beneficios teóricos y prácticos del estudio de las matrices, en esta unidad se desarrollan sus características principales, su álgebra y su aplicabilidad en la solución de sistemas de ecuaciones acopladas. Particularmente, se revisan métodos de solución basados en la reducción de matrices, conocidos como el método de Gauss Jordan y el método de Cramer, para los cuales es necesario calcular el determinante de una matriz, tema igualmente importante y que también se aborda en esta unidad.

¡Muchos éxitos!

Matrices y vectores

El estudio de vectores y matrices es la médula del álgebra lineal. El estudio de vectores comenzó esencialmente con el trabajo del gran matemático irlandés sir William Hamilton (1805-1865). Su deseo de encontrar una forma de representar un cierto tipo de objetos en el plano y el espacio lo llevó a descubrir lo que él llamó cuaterniones.

Esta noción condujo al desarrollo de lo que ahora se conoce como vectores. A lo largo de toda su vida y del resto del siglo XIX hubo un debate considerable sobre la utilidad de los cuaterniones y de los vectores.

Al final del siglo el gran físico inglés lord Kelvin escribió que los cuaterniones, “aun cuando son bellamente ingeniosos, han sido un mal peculiar para todos aquellos que los han manejado de alguna manera y los vectores… nunca han sido de menor utilidad para ninguna criatura”.

Pero Kelvin estaba equivocado. En la actualidad casi todas las ramas de la física clásica y moderna se representan mediante el lenguaje de vectores. Los vectores también se usan, cada vez más, en las ciencias biológicas y sociales.

Un vector de n componentes se define como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Un vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ x3 \end{pmatrix}$$

En los anteriores vectores, x1 se denomina la primera componente del vector, x2 es la segunda componente, y así sucesivamente. En términos generales, xk se denomina la k-ésima componente del vector.

Es importante saber que para simplificar, con frecuencia se hará referencia a:

1. Un vector renglón de n componentes como un vector renglón o un vector de dimensión n.
2. Se usará el término vector columna (o vector de dimensión n) para denotar a un vector columna de n componentes.
3. Cualquier vector cuyos elementos sean todos cero se denomina vector cero.

Matriz A de $m \times n$

Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \times n$ números dispuestos en m renglones y n columnas:

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}11 & \cdots & \boldsymbol{a}1n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}m1 & \cdots & \boldsymbol{a}mn \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

Es una matriz de 2 x 2 (cuadrada).

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Es una matriz de 3 x 2.

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Es una matriz de 2 x 3.

iv) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Es una matriz de 3 x 3 (cuadrada).

v) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es la matriz cero de 2 x 4.

En algunos libros las matrices se presentan dentro de paréntesis cuadrados en lugar de paréntesis redondos. Por ejemplo, las primeras dos matrices se pueden escribir como:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

En esta última matriz, la componente (a12) es el número que se encuentra en el primer renglón y la segunda columna, que se han sombreado; la componente (a12) es 3.

Tipos de matrices

Las matrices pueden clasificarse en función de la estructura interna y de su tamaño. A continuación, se describen los tipos de matrices más usados:

Matrices cuadradas

Una matriz cuadrada es aquella que tiene el mismo número de filas y de columnas. Se dice que una matriz cuadrada $n \times n$ es de orden n, y se denomina matriz n-cuadrada.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

La matriz A es cuadrada de orden 3.

Matriz identidad

La matriz n-cuadrada con unos (1) en la diagonal principal y ceros (0) en cualquier otra posición, denotada por I, se conoce como matriz identidad (o unidad).

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Para cualquier matriz A, se cumple que

$$\mathrm{A} \times \mathrm{I} = \mathrm{I} \times \mathrm{A} = \mathrm{A}$$

Matrices triangulares

Una matriz cuadrada $A = a_{ij}$ es una matriz triangular superior, o simplemente una matriz triangular, si todas las entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero (0).

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matriz A es triangular de orden 3.

También existen matrices diagonales inferiores, donde los elementos superiores a la diagonal son iguales a cero (0). Ejemplo: la matriz A es triangular inferior.

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}$$

Matrices diagonales

Una matriz cuadrada es diagonal, si todas sus entradas no diagonales son cero (0) o nulas. Se denotan por

$$D = diag(d_{11,}d_{22}, \dots, d_n n)$$

$$A = diag(3, -17) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Clasificar las siguientes matrices de acuerdo a las definiciones anteriores:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

Solución

Todas las matrices son cuadradas de orden 2; además, la matriz B es una matriz identidad, la C es una matriz diagonal superior, y la D es una matriz diagonal.

Operaciones entre matrices

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B =_{ij}$son iguales si cumplen dos condiciones:

a) Que sean del mismo tamaño.

Que las componentes correspondientes sean iguales: $\left(a_{ij}\right) = (b_{ij})$ para todo i y j

Ejemplo: la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ son iguales, ya que tienen el mismo tamaño (cuadradas de 2×2) y cada elemento es igual a su equivalente en la otra matriz.

Suma y resta de matrices

Sean A= (aij) y B= (bij) dos matrices m x n. Entonces la suma de A y B es la matriz m x n, A+ B dada por:

$$A + B = \begin{pmatrix} a11 & \cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ am1 & \cdots & amn \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b11 & \cdots & b1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ bm1 & \cdots & bmn \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a11 + b11 & \cdots & a1n + b1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ am1 + bm1 & \cdots & amn + bmn \end{pmatrix}$$

Es decir, A + B es la matriz m x n que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B.

Así, la suma de dos matrices se define únicamente cuando las matrices son del mismo tamaño.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2467 \\ 1321 \\ 4355 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0162 \\ 2343 \\ 2144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2505 \\ 3664 \\ 6419 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sumar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

A y B se pueden sumar porque tienen el mismo tamaño (cuadradas de orden 3), de la siguiente manera:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 7+0 & -2+0 \\ 0+0 & -3-1 & 4+0 \\ 0+0 & 0+0 & 1+7 \end{pmatrix}$$

Así,

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

¿Cuál sería la matriz resultante de la operación D=A-B? ¿Sería igual a la matriz resultante de A-B?

Multiplicación de una matriz por un escalar

Si A= (aij) es una matriz m x n y si b es un escalar, entonces la matriz m x n, bA, está dada por:

$$bA = b\begin{pmatrix} a11 & \cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ am1 & \cdots & amn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b*a11 & \cdots & b*a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b*am1 & \cdots & b*amn \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 8 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ y el número real $b = -3$, hallar D tal que $D = bA$.

<u>Solución:</u>

De acuerdo con la información entregada,

$$D = \mathrm{bA} = -3\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 8 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\mathrm{x}4 & -3x1 & -3\mathrm{x}-2 \\ -3\mathrm{x}2 & -3\mathrm{x}-4 & -3\mathrm{x}4 \\ -3\mathrm{x}8 & -3\mathrm{x}1 & -1\mathrm{x}8 \end{pmatrix}$$

De este modo,

$$D = \mathrm{bA} = -3\begin{pmatrix} -12 & -3 & 6 \\ -6 & 2 & -2 \\ -24 & 3 & -24 \end{pmatrix}$$

Propiedades

Sean A, B y C tres matrices de m × n y sean a y b dos escalares. Entonces:

1. $A + 0 = A$
2. $0A = 0$ (el último cero representa la matriz nula con el mismo tamaño de la matriz A).
3. $A + B = B + A$
   (ley conmutativa para la suma de matrices.)
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$
   (ley asociativa para la suma de matrices.)
5. $a(A + B) = aA + ab$
   (Ley distributiva para la multiplicación por un escalar.)
6. $1A = A$
7. $(a + b)A = aA + bA$

Multiplicación de matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times \mathrm{n}$ y $B = (b_{ij})$ una matriz de $n \times \mathrm{p}$, entonces, el producto de A y B es una matriz $C = (c_{ij})$ de tamaño $m \times \mathrm{p}$, en donde:

$$c_{ij} = (renglon\ i\ de\ A) \times (\text{columna j de B})$$

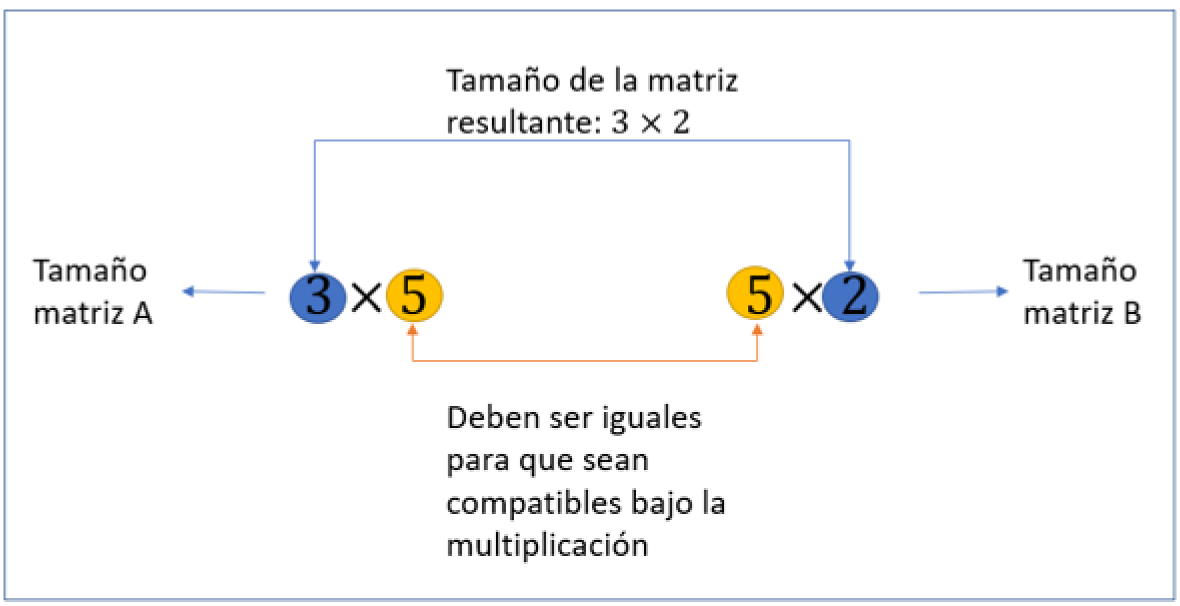
Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces, se dice que A y B son compatibles bajo la multiplicación.

¡IMPORTANTE!
La multiplicación de matrices puede ser:

a. Asociativa: $A(BC) = (AB)C$
b. Distributiva para la multiplicación: (A+B)C=AB+BC

Para poder multiplicar debemos revisar primero el número de filas x columnas.

Si tenemos que una matriz es 3 x 5 y la otra 5 x 2 se puede multiplicar si



Si los números centrales son iguales, entonces, se puede multiplicar, y el tamaño de la respuesta son los números de los extremos 3 x 2

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} = [33]$$

1. Reviso el tamaño de la matriz

   A = 2 x 3 B = 3 x 3

   Como son iguales, se puede multiplicar.

   El tamaño de la matriz de la respuesta es 2 x 3

   Se opera así:

   $(0x6) + (1x9) + (2x12)$

   $0 + 9 + 24 = 33$

2. Siempre se toma la primera matriz con la fila 1 **(horizontal)** con la 1 columna **(vertical)** marcada en la matriz.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$(0x7) + (1x10) + (2x13) =$

$0 + 10 + 26 = 36$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ & & \end{bmatrix}$$

$(0x8) + (1x11) + (2x14) =$

$0 + 11 + 28 = 39$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & & \end{bmatrix}$$

$(3x6) + (4x9) + (5x12) =$

$18 + 36 + 60 = 114$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & 126 & \end{bmatrix}$$

$(3x7) + (4x10) + (5x13) =$

$21 + 40 + 65 = 126$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & 126 & 138 \end{bmatrix}$$

$(3x8) + (4x11) + (5x14) =$

$24 + 44 + 70 = 138$

Respuesta

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & 126 & 138 \end{vmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Ejercicio

Ten en cuenta la información estudiada e intenta resolver el siguiente ejercicio, indicando si se pueden multiplicar las matrices o no, y cuál es el tamaño.

Matriz A	Matriz B	¿Se puede multiplicar?	Tamaño de respuesta
3 x 4	4 x 5		
5 x 6	6 x 2		
5 x 3	4 x 6		
7 x 8	8 x 2		
4 x 2	3 x 4		
5 x 7	7 x 2		
3 x 1	1 x 4		
4 x 3	4 x 3		
2 x 5	5 x 4		

Otros tipos de matrices

Transpuesta de una matriz

La transpuesta de una matriz A consiste en intercambiar las filas por las columnas, y se denota por A^t. En otras palabras, si A = (a_ij) es una matriz m× n, entonces, A^t = (a_ij^t) es la matriz n× m. La trasposición de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. Sea α un escalar, entonces, $(aA)^t = aA^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

Ejemplo:

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Su transpuesta se construye cambiando filas por columnas, así:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrices simétricas

Se dice que una matriz real es simétrica cuando $A^t = A$; y que es antisimétrica si $A^t = -A$.

Ejemplo:

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Podemos observar que los elementos simétricos de A son iguales, o que $A^t = A$. Por lo cual, A es simétrica. De esta manera, tenemos que:

$$A = A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

Para B, los elementos simétricos son opuestos entre sí, en consecuencia, B es antisimétrica.

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

A simple vista, C no es cuadrada, por lo tanto, no es ni simétrica ni antisimétrica.

Determinante e inversa de una matriz

Dada la matriz A

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

se define el determinante de A , como se observa:

$$\textbf{det | A | =} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 4\text{x}5 - (3)\text{x}(-2) = 20 - 6 = 14$

En el caso de las matrices de orden 3:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - a \cdot f \cdot h - b \cdot d \cdot i$$

(-) (-) (-) (+) (+) (+)

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & -4 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right|$$

$6.(-2).3 + (-4).0.3 + 2.1.1 - 2.(-2).3 -$
$6.0.1 - (-4).1.3$
$-36 + 0 + 2 + 12 - 0 + 12$

Determinante de una matriz

Ejercicio

Antes de continuar, practiquemos cómo hallar el determinante de una matriz a partir de estos ejercicios sencillos.

Dadas las matrices:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Calcular:

1. $|A| =$
2. $|B| =$
3. $|A + C| =$
4. $|2B| =$
5. Hallar el valor de K para que $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$
6. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ Demostrar que $\det A = 1$

Solución:

1. $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (5)(-1) - (3)(3) = -5 - 9 = -14$
2. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (2)(0) - (5)(-1) = 0 + 5 = 5$
3. Encontremos primero la matriz $A + C$: $A + C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 & 3-2 \\ 3+1 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Ahora, averigüemos el determinante:
   $|A + C| = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (9)(2) - (4)(1)$
4. $|2B| = 2|B| = 2 * 5 = 10$
5. Hallemos el determinante y solucionemos la ecuación que resulta:
   $$\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = (k)(2k) - (4)(k) = 2k^2 - 4k = 0$$
   Al sacar factor común: $2k(k - 4) = 0$, se presentan dos posibilidades: $2k = 0$ o $(k - 4) = 0$, las cuales también ofrecen dos alternativas: $k = 0$ y $k = 4$.

6. Aplicando la estrategia de duplicar las dos primera filas de la columna, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{matrix} = (2)(5)(6) + (1)(2)(3) + (-1)(4)(7) - (3)(5)(-1) - (7)(2)(2) - (6)(4)(1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{matrix} = 60 + 6 - 28 + 15 - 28 + 15 - 28 - 24 = 1$$

Matriz de menores y cofactores

Existe un método general para hallar el determinante de una matriz, denominado menores y cofactores. Este método permite obtener el determinante usando solo una fila o columna de la matriz y descomponiéndola en términos que involucren el determinante de submatrices de un orden (tamaño) menor al original.

Para ilustrar este método, consideraremos una matriz de tamaño 3×3 y solucionaremos el determinante por la primera fila. Es importante resaltar que la fila seleccionada debe ser la fila (o columna) donde se presente la mayor cantidad de entradas en la matriz iguales a cero.

Consideremos la matriz A general:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El determinante por el método de menores y cofactores se obtiene a partir de:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2(30-14) - (24-6) - (28-15) = 2(16) - 18 - 13 = 32 - 18 - 13 = 1$$

Que es el resultado obtenido por el método anterior.

Llamaremos matriz menor de una matriz A, a la matriz que resulte luego de eliminar una fila y una columna de A.

Ejemplo:

$$Sea\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} M_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

El signo de la menor estará dado por la expresión (-1)i + j . También podremos calcular el determinante de una matriz 3 x 3 según el método de las menores:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Inversa de una matriz

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de tamaño $n \times \mathrm{n}$, supongamos que:

$AB = BA = I$

Donde I es la matriz identidad.

Entonces, a B se le llama inversa de A y se denota por A^{-1} esto es:

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Si A tiene inversa, se dice que es invertible. Además, se establece que la inversa de la inversa de una matriz es ella misma. Es de aclarar que la inversa es única, y pueden existir matrices cuya inversa no exista.

Otra característica interesante es la inversa de un producto de matrices, la cual se puede demostrar que resulta en:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Donde se debe cumplir que ambas matrices sean cuadradas y del mismo tamaño.

Veamos ahora cómo hallar la inversa de una matriz (por el momento, para una matriz de orden 2).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{Y} \quad \mathbf{det\ A} \neq \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observar que si $\det A = 0$, no existe A^{-1}

Ejemplo:

$$\text{Si} \quad \text{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{A}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Realiza el siguiente ejercicio para practicar un poco más este tema:

Ejercicio:

Hallar la inversa de cada matriz, si esta es no singular:

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

A continuación, desarrollaremos la solución del primer ejercicio. El segundo queda como propuesta para que realices por tu cuenta.

De acuerdo con la expresión general, lo primero que debemos realizar es encontrar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (2)(3) = 1 - 6 = -5$$

Luego, hallamos la matriz con las entradas en el orden sugerido:

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

De este modo, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -C & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Por último, realizamos la prueba para verificar que sí sea la inversa:

$$A^{-1}A = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} (1)(1) + (-3)(2) & (1)(3) + (-3)(1) \\ (-2)(1) + (2)(1) & (-2)(3) + (1)(1) \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} (1-6 & 3-3) \\ -2+2 & -6+1) \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{-5}{5} & \frac{0}{5} \\ \frac{0}{5} & -\frac{-5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Con este resultado podemos apreciar que sí se cumple con lo establecido en la definición de matriz inversa.

Ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas con una o más variables (por lo general representadas con letras), las variables también se denominan incógnitas de la ecuación. Una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que hay letras las cuales al ser sustituidas por números tales que se obtenga una expresión verdadera se llama identidad.

Una ecuación lineal es una igualdad en la cual la variable solo puede tener como exponente a 1, es decir, el grado de la variable es siempre 1. Por ejemplo, $3x + 1 = 2 - 3x + x$ es una ecuación lineal ya que la variable x, en todos sus términos es de grado 1. La ecuación $x^2 + x = 2 + x^3$ no es una ecuación lineal ya que no todos los términos de la variable x son de grado 1. Algunas ecuaciones en su forma inicial no son lineales, pero después realizar algunas operaciones algebraicas se puede conseguir una ecuación lineal.

El procedimiento para resolver una ecuación lineal consiste en generar a partir de la ecuación inicia, una serie de ecuaciones equivalentes (con forma más simple) hasta obtener una que se pueda resolver de manera inmediata. Para esto usamos las siguientes propiedades:

- Si sumamos o restamos una cantidad en ambos lados de una ecuación, la igualdad no se altera.
- Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una ecuación por un mismo número (diferente de cero), la igualdad no se altera.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $6x - 7 = 2x + 1$

Solución:

$$\begin{aligned}
6x - 7 &= 2x + 1 \\
6x - 7 + 7 &= 2x + 1 + 7 && \text{Sumando } 7 \text{ en cada lado de la igualdad} \\
6x &= 2x + 8 && \text{Operando términos semejantes} \\
6x - 2x &= 2x + 8 - 2x && \text{Restamos } 2x \text{ a cada lado de la igualdad} \\
4x &= 8 && \text{Operando términos semejantes} \\
\frac{4x}{4} &= \frac{8}{4} && \text{Dividiendo cada lado de la igualdad entre } 4 \\
x &= 2 && \text{Solución}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $5(z-1)+16(2z+3)=3(2z-7)-z$

Solución: Identifica los pasos realizados en la solución de esta ecuación:

$$\begin{gathered}
5(z-1)+16(2z+3)=3(2z-7)-z \\
5z-5+32z+48=6z-21-z \\
37z+43=5z-21 \\
37z-5z+43=5z-5z-21 \\
32z+43=-21 \\
32z-43+43=-21-43 \\
32z=-64 \\
\frac{32z}{32}=-\frac{64}{32} \\
z=-2
\end{gathered}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

En la *Unidad 1* conocimos algunos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales en su configuración más simple, de 2 ecuaciones con dos incógnitas. Específicamente, abordamos tres métodos, a saber: sustitución, igualación y reducción.

Aunque descubrimos que se trata de un proceso directo, la dificultad de estos métodos es mayor cuando se aumenta la dimensión del sistema de ecuaciones, es decir, cuando se tiene un sistema general de *n* incógnitas y *m* ecuaciones.

Es aquí donde podemos sacar provecho a lo estudiado hasta el momento sobre las matrices, ya que podemos escribir cualquier sistema de ecuaciones directamente como una relación entre diferentes matrices. Veamos cómo se aplica lo anterior para el caso de dos matrices con dos incógnitas.

Supongamos que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ dx+ey=f & (2) \end{cases}$$

Es posible sintetizar las anteriores ecuaciones en una sola ecuación de carácter matricial, si definimos las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ y $s = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$

A la matriz *A* se le conoce como matriz de coeficientes, cuyo tamaño nos indica el número de ecuaciones y el número de incógnitas del sistema. El vector *x* se conoce como matriz de incógnitas, y tiene como entradas las distintas incógnitas en el sistema de ecuaciones. Finalmente, el vector *s* se denomina vector de términos independientes.

Desde un punto de vista matricial, las ecuaciones (1) y (2) se sintetizan en:

$$Ax = s$$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Recordando el criterio de igualdad entre matrices y la multiplicación de matrices, es posible llegar de nuevo al sistema de ecuaciones dado por (1) y (2). Esto demuestra una de las ventajas del lenguaje matricial.

Ejemplo:

Expresar de forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

La matriz de coeficientes se construye con los coeficientes que acompañan las variables, en el mismo orden que aparece en el sistema, esto es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El vector de incógnitas se construye con las 3 variables que aparecen en las ecuaciones, de forma ordenada:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Por último, el vector de términos independientes representa los valores que no están acompañados de alguna incógnita en el sistema, esto es:

$$s = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esta estrategia se puede generalizar para cualquier sistema de ecuaciones con números mayores de ecuaciones e incógnitas; por otro lado, no se debe tener necesariamente un sistema con el mismo número de ecuaciones y de incógnitas.

El objetivo a partir de ahora será aprovechar la notación matricial y las propiedades y operaciones ya vistas para desarrollar métodos que permitan solucionar los sistemas de ecuaciones. Para esto, conoceremos una matriz de gran importancia para la solución de este tipo de sistemas.

Matriz aumentada

La matriz aumentada se obtiene uniendo la matriz de coeficientes con la matriz (o vector) de términos independientes, separadas por una barra vertical. Para un sistema de, se representa por:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right)$$

Para un sistema de, visto en un ejemplo anterior, se representa por:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Forma escalonada reducida por renglones y pivote

Una matriz se encuentra en la forma escalonada reducida por renglones si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz

2. El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.
3. Si dos reglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces, el primer renglón abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.
4. Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama pivote para ese renglón.

Veamos un ejemplo de matrices en la forma escalonada reducida por renglones:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En principio, es posible transformar una matriz a una equivalente que se encuentre en su forma escalonada reducida. Para ello, es necesario definir algunas operaciones que se pueden realizar en los renglones de la matriz.

Operaciones elementales de renglones de una matriz

Antes de continuar, debemos entender un renglón como el compuesto por todos los elementos de la fila de una matriz. Así pues, sobre los renglones de una matriz, se pueden realizar las siguientes operaciones:

1. Multiplicar (dividir) un renglón por un número diferente de cero.
2. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
3. Intercambiar dos renglones.

El proceso de aplicar estas operaciones elementales se conoce como reducción por renglones, y se denota de la siguiente manera:

a) $R_j \to cR_j$ significa que se reemplaza el j-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado (todas sus entradas) por la constante.

b) $R_j \to R_j + cR_j$ significa que sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón más el renglón i multiplicado por.

c) $R_j \rightleftharpoons cR_j$ significa que se intercambia el renglón por el renglón.

d) $A \to B$ significa que las matrices y son equivalentes.

Ejemplo

Hallar la forma escalonada reducida de la matriz

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución

Comencemos por tener un 1 en el primer renglón, esto se consigue operando, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego, eliminamos los elementos a_{21} y a_{31}, mediante $R_2 \to R_2 - 4R_1$, y $R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix}$$

Ahora, nos aseguramos de obtener en la segunda fila un 1 donde ahora está -3, disponiendo $R_2 \to \frac{-1}{3} R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix}$$

A continuación, eliminamos el elemento a_{32}, empleando $R_3 \to R_3 + 5R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, nos aseguramos de obtener en la tercera fila un 1 donde ahora está -1, operando $R_2 \to -1R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la forma escalonada reducida de la matriz *A.*

Eliminación hacia atrás

Este método busca asegurar que los elementos por encima de los pivotes, y a la derecha de estos, sean cero. Para lograr esto, se parte de la forma escalonada reducida y se realizan operaciones de renglones de "abajo hacia arriba", de ahí el nombre hacia atrás.

Ejemplo:

Aplicar la eliminación hacia atrás a la forma escalonada reducida de la matriz A anterior.

Solución:

Ya conocemos que $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. El objetivo ahora es que los números 2, 3 y 2 sean cero.

Comencemos por eliminar el 2 y el 3 que están por encima del pivote del último renglón, para esto, realizamos $R_2 \to R_2 - 2R_3$ y $R_1 \to R_1 - 3R_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, eliminemos el dos (2) por encima del pivote del segundo renglón, mediante $R_1 \to R_1 - 2R_2$, de donde obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma más reducida de la matriz A, y en este caso coincide con la matriz identidad de orden 3.

A continuación, conoceremos tres métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial:

- Solución por eliminación de Gauss
- Solución mediante la matriz inversa
- Solución por método de Cramer

Resolución de un sistema lineal

La estrategia básica es reemplazar un sistema con un sistema equivalente (uno con el mismo conjunto solución) que sea más fácil de resolver.

Es decir:

1. Utiliza el término x1 que esté presente en la primera ecuación de un sistema, para eliminar los términos x1 que haya en las otras ecuaciones.
2. Después, usa el término x2 presente en la segunda ecuación para eliminar los términos x2 en las otras ecuaciones, y así sucesivamente, hasta que obtengas un sistema de ecuaciones equivalente muy simple.

Conoce las operaciones básicas para simplificar un sistema lineal:

- Reemplazar una ecuación mediante la suma de la propia ecuación y un múltiplo de otra ecuación.
- Intercambiar dos ecuaciones.
- Multiplicar todos los términos de una ecuación por una constante distinta de cero

Eliminación de Gauss Jordan

Es un proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales que, generalmente, consta de los siguientes pasos para un sistema 3x3, aunque depende del sistema con el que se esté trabajando.

Conoce el paso a paso del método de eliminación de Gauss Jordan:

- **Paso 1:** se divide una ecuación, entre una constante, para hacer el coeficiente de x1 igual a 1 (se asumirá, en adelante, que lo más conveniente es hacerlo en la ecuación 1, pero eso depende del sistema con el que se esté trabajando).
- **Paso 2:** se "eliminan" los términos en x1 de las otras ecuaciones. Esto es, los coeficientes de estos términos se hacen cero al multiplicar la primera ecuación por las constantes adecuadas y sumándola a las otras ecuaciones, respectivamente, de manera que, al sumar las ecuaciones, una de las incógnitas se elimine.
- **Paso 3:** se divide la segunda ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x2 igual a 1 y después se usa la segunda ecuación para "eliminar" los términos en x2 de la primera y tercera ecuaciones, de manera parecida a como se hizo en el paso anterior.
- **Paso 4:** se dividió la tercera ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x3 igual a 1 y, después, se usa esta tercera ecuación para "eliminar" los términos de x3 de la primera y segunda ecuaciones.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan

Una de las características más importantes que tienen las matrices escalonadas reducidas es que, si la matriz original representa una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, dicha matriz y su forma escalonada reducida representan sistemas de ecuaciones con las mismas soluciones.

Ejemplo:

Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones usando la eliminación gaussiana:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

La representación matricial para este sistema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Construimos la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Luego, procedemos a realizar la eliminación gaussiana como se explicó en un ejemplo anterior, asumiendo que la fila de términos independiente se trata como una fila más de la matriz.

Asegurémonos de tener un 1 en el primer renglón, esto se consigue operando $R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1$, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Eliminamos los elementos a_{21} y a_{31}, mediante $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$ y $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -14 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Después, nos aseguramos de obtener en la segunda fila un 1 donde ahora está -3, empleando $R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Ahora, eliminamos el elemento a_{32}, con $R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Finalmente, nos aseguramos de obtener en la tercera fila un 1 donde ahora está -1, operando $R_2 \rightarrow 1R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

A partir de esta matriz podemos interpretar que la última fila entrega el valor correspondiente a la incógnita $x_3 = 3$. El propósito ahora de realizar la eliminación hacia atrás es obtener los valores de las otras dos incógnitas:

Comencemos por eliminar el 2 y el 3 que están por encima del pivote del último renglón, para ello, operamos $R_2 \to R_2 - 2R_3$ y $R_1 \to R_1 - 3R_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Por último, eliminamos el dos por encima del pivote del segundo renglón, mediante $R_1 - 2R_2$, de donde obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La matriz aumentada se interpreta como $x_1 = 4, x_2 = -2$ y $x_3 = 3$, obteniendo así la solución al sistema de ecuaciones planteado.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales usando la inversa de la matriz de coeficientes

Como pudimos observar anteriormente, un sistema de ecuaciones como el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

puede escribirse en general de forma matricial como:

$$Ax = s$$

Si asumimos que A es una matriz cuadrada y que si inversa A^{-1} existe, podemos multiplicar la anterior ecuación por esta inversa para obtener:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}s$$

Pero como $A^{-1}A = I$ y $Ix = x$ (propiedad de la matriz identidad), entonces:

$$x = A^{-1}s$$

Es decir, solo se debe multiplicar el vector de términos independiente por la inversa de la matriz de coeficientes y esa multiplicación matricial nos entregará la solución del sistema de ecuaciones.

Debido a que la base del método es conocer la matriz inversa de A, y hasta el momento solo sabemos calcular la matriz inversa de una matriz de orden 2, conozcamos a continuación una estrategia para trabajar en una matriz de orden mayor, es decir, una matriz cuadrada de orden 3.

Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada de orden $n \geq 2$

1. Escribir la matriz aumentada $(A|I)$ donde I es la matriz identidad del mismo orden de la matriz cuadrada A.
2. Emplear la estrategia de eliminación gaussiana para escalonar y reducir la matriz aumentada.
3. Si la forma escalonada reducida de A es la matriz identidad, entonces, la matriz inversa de A es la que se tiene a la derecha de la barra vertical.
4. Si la reducción de A conduce a un renglón de cero a la izquierda de la barra vertical, entonces, A no es invertible. (Grossman, 2008)

Ejemplo:

Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones usando la inversa de la matriz de coeficientes:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Después, construimos la matriz aumentada, así:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego, procedemos a realizar la eliminación gaussiana como se explicó en un ejemplo anterior, asumiendo que la matriz identidad se trata como filas adicionales de la matriz de coeficientes.

Asegurémonos de tener un 1 en el primer renglón, esto se consigue operando $R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1$, y obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Eliminamos los elementos a_{21} y a_{31}, operando $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$ y $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego, nos aseguramos de obtener en la segunda fila un 1 donde ahora está -3, empleando $R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A continuación, eliminamos el elemento a_{32}, mediante $R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Finalmente, nos aseguramos de obtener en la tercera fila un 1 donde ahora está -1, operando $R_3 \to -1R_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right)$$

El objetivo ahora es realizar la eliminación hacia atrás para buscar que en la parte izquierda de la barra se obtenga la matriz identidad.

Comencemos por eliminar el 2 y el 3 que están por encima del pivote del último renglón, para ello, operamos $R_2 \to R_2 - 2R_3$ y $R_1 \to R_1 - 3R_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & -1 \end{array}\right)$$

Luego, eliminamos el dos por encima del pivote del segundo renglón, mediante $R_1 \to R_1 - 2R_2$, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right)$$

Como al lado izquierdo tenemos la identidad, entonces, podemos asegurar que al lado derecho se tiene la matriz inversa de A, esto es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -22 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Allí realizamos el último pase para simplificar.

De acuerdo con este método, es posible hallar las soluciones a partir de:

$$x = A^{-1}s$$

Asimismo, tenemos que $s = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$, por lo tanto:

$$x = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -22 & 10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Luego, desarrollando el producto matricial, obteniendo:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esta es la solución del sistema de ecuaciones.

Aplicaciones de los determinantes

Regla de Cramer: se pueden usar determinantes para resolver sistemas de ecuaciones con 2, 3 o más incógnitas, como sigue:

Para sistemas de la forma:

$a_1\, x + b_1\, y = c_1$

$a_2\, x + b_2\, y = c_2$

Se tiene que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_{x} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_{y} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

entonces el valor de las incógnitas se encuentra como:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Para sistemas de la forma:

$a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z = d_1$

$a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z = d_2$

$a_3\, x + b_3\, y + c_3\, z = d_3$

Se tiene que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \; , \; \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} , \; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \; , \; \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Así, el valor de las incógnitas se encuentra mediante:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Ejercicios para poner en práctica este tema:

Resuelve los sistemas que se presentan a continuación, usando el método de Cramer:

1. $6x + 8y = 1$
   $3x + 7y = 4$

2. $4x - 3y = 1$
   $5x - 4y = -1$

3. $x + y = 8$
   $2x - y = 4$

Ejemplo:

Usar el método de Cramer para solucionar los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

Solución:

1. De acuerdo con el método de Cramer, debemos hallar 3 determinantes, estos son:

   $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (2)(1) = -1 - 2 = -3$

   $= \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (8)(-1) - (4)(1) = -8 - 4 = -12$

   $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(8) = 4 - 16 = -12$

Por lo tanto, la solución es:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-12}{-3} = 4$$

Lo cual se puede comprobar por sustitución directa en el sistema para verificar que se presenta una identidad.

2. Como el sistema tiene una mayor dimensionalidad, se deben encontrar 4 determinantes de cada uno. Te dejamos como tarea realizar las operaciones para encontrar los determinantes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \text{-}12$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

Finalmente, tenemos que:

$$x_1 = \frac{\triangle_{x_1}}{\triangle} = \frac{24}{6} = 4$$

$$x_2 = \frac{\triangle_{x_2}}{\triangle} = \frac{-12}{6} = 2$$

$$x_3 = \frac{\triangle_{x_3}}{\triangle} = \frac{18}{6} = 3$$

Lo que concuerda con los resultados de los métodos ilustrados anteriormente.

IU Digital de Antioquia

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

ORD No 74 de 2017 · VIGILADA MinEducación

www.iudigital.edu.co