Desarrollo de contenido

IUDigital de Antioquia

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

Unidad 1

Cálculo II

ORD No 74 de 2017 · VIGILADA MinEducación

Pregunta orientadora

¿Cómo se puede concebir un valor exacto para el área de una figura "compuesta" por partes infinitas?

A lo largo de la historia, el hombre ha buscado resolver los problemas y necesidades que se presentan a diario, generando un sinnúmero de reflexiones de carácter filosófico e, incluso, matemático. Uno de los problemas que más ha interesado, desde hace varios siglos, a filósofos y matemáticos, corresponde a determinar el área de figuras complejas o determinadas por líneas curvas (por ejemplo, funciones).

Se procuró por muchos años, a través de diversas reflexiones, demostraciones y análisis, hallar el área de figuras irregulares de una forma clara y sencilla, tal como se hace con las figuras planas regulares (rectángulo, triángulo, entre otros,); ya que, si estas figuras irregulares o curvas, encerraban un espacio en concreto, era de esperarse que su área pudiera ser determinada con exactitud.

En el desarrollo de este curso encontrarás los elementos para ver cómo algunos matemáticos, encontraron maneras más fáciles de hallar el área de figuras irregulares.

Video de presentación

https://youtu.be/2hdwdt2tPxo

Objetivo general

Desarrollar habilidades y destrezas en los estudiantes que les permitan afrontar los problemas prácticos y teóricos propios de su profesión, mediante actividades que propicien el razonamiento matemático, la reflexión y la interpretación de modelos matemáticos.

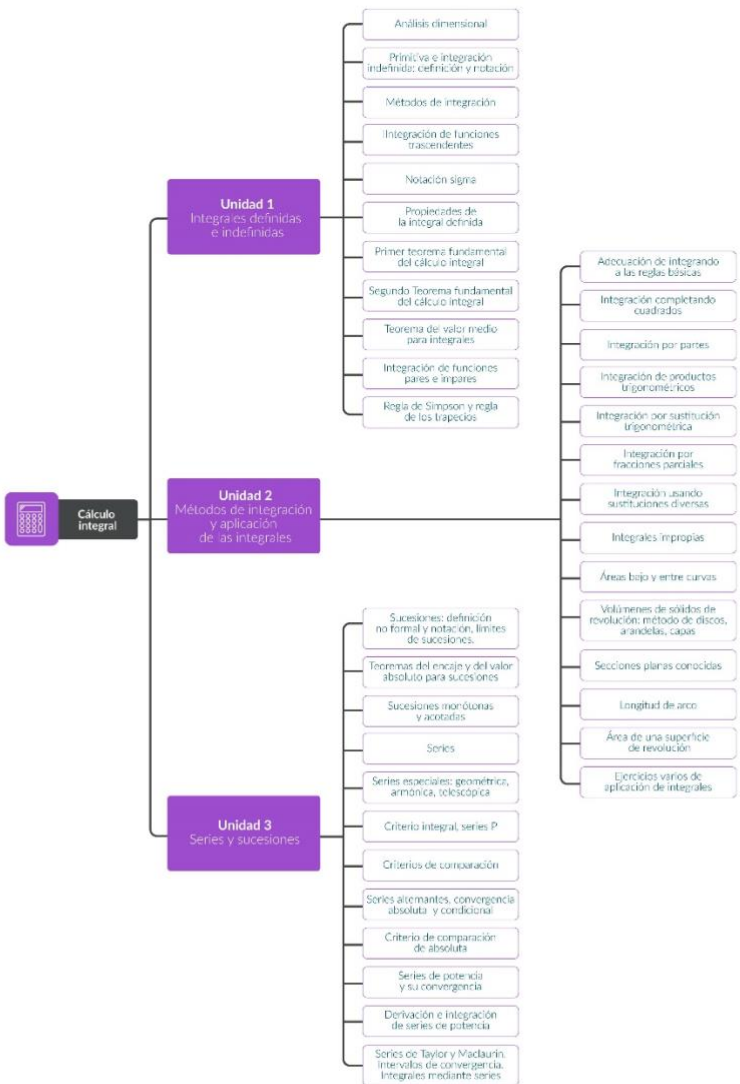
Objetivos específicos

- Definir el concepto de integral desde de su relación con la derivación y con el cálculo de áreas determinadas por una función a partir de las sumas de Riemann.

- Aplicar los métodos de integración apropiados calcular integrales definidas e indefinida, así como para calcular integrales propias e impropias que presentan discontinuidades o límites infinitos.

- Determinar el volumen de un sólido de revolución aplicando el método más apropiado.
- Utilizar los diferentes criterios de convergencia o divergencia de series y estimar la suma de una serie.
- Proporcionar al estudiante herramientas desde la semiótica y la conceptualización que le permitan comunicarse con claridad y precisión sobre la mecánica y análisis dimensional, en fenómenos propios de las Ingenierías y tecnologías.

Mapa del curso



Introducción al curso

Las integrales, aunque no lo creas, son de gran utilidad para nosotros en el mundo real, ya que con ellas podemos determinar el área de figuras planas irregulares. Y es que, pocas veces, los terrenos, lotes y, de manera general, las áreas de los bienes inmuebles urbanos y rurales que requieren ser medidos, son figuras planas regulares. En el trascurso de esta unidad encontrarás la información y herramientas que te permitirán entender cómo las integrales facilitan este proceso de medición.

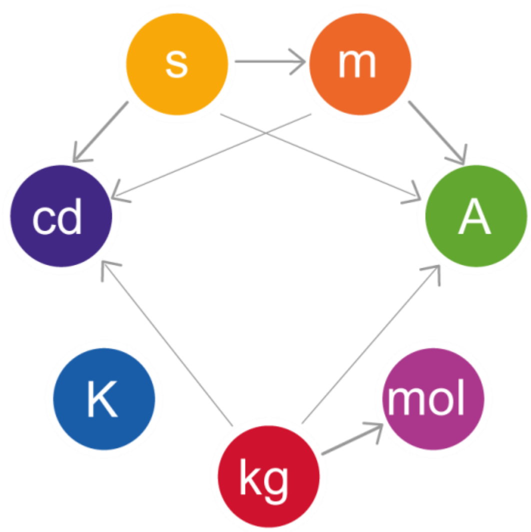
Seguidamente, se abordarán los conceptos y reglas básicas de integración, así como los teoremas fundamentales del cálculo integral, estableciendo los momentos en que se deben usar para solucionar problemas que atenderán de manera progresiva la complejidad de diversos tipos de situaciones reales.

Contarás con lecturas académicas, videos, ejercicios y problemas, los cuales permitirán una apropiación de los temas a partir del trabajo individual.

Tema 1: Integrales definidas e indefinidas

Análisis dimensional

Podemos considerar el análisis dimensional como aquella herramienta que nos permite determinar las relaciones que existen entre las magnitudes fundamentales y derivadas. Esto es, evidenciar la dependencia de una magnitud derivada con respecto a las que son fundamentales.



El sistema internacional de unidades (SI) estableció un conjunto de unidades que sirven de referencia a nivel internacional para todos los instrumentos de medida. Asimismo, determinó cuáles son las magnitudes fundamentales (las cuales están basadas en los fenómenos físicos fundamentales) y cuáles serían las derivadas.

Cantidades fundamentales

Las cantidades fundamentales fueron establecidas debido a los fenómenos físicos a los cuales hacen referencia. Son 7 y se encuentran relacionadas en la siguiente tabla:

Como se puede observar, a cada magnitud física le corresponde una unidad de medida,

MAGNITUD FÍSICA		UNIDAD	
NOMBRE	DIMENSIÓN	NOMBRE	SÍMBOLO
Longitud	L	metro	m
Masa	M	kilogramo	kg
Tiempo	T	segundo	s
Temperatura		kelvin	K
Intensidad de corriente eléctrica	I	ampere	A
Intensidad luminosa	J	candela	cd
Cantidad de sustancia	N	mol	mol

Como se puede observar, a cada magnitud física le corresponde una unidad de medida, por ejemplo: la magnitud fundamental LONGITUD tiene como unidad de medida el metro.

Dimensiones

Para determinar una magnitud fundamental en su fórmula dimensional, se debe expresar una igualdad en la que se relaciona una magnitud derivada a partir de las magnitudes fundamentales. De la siguiente manera:

$$velocidad = \frac{distancia}{tiempo}$$

En esta ecuación, la velocidad es una magnitud derivada que puede expresarse como la relación entre dos magnitudes fundamentales como son la distancia (longitud) y el tiempo. Ahora, reescribamos la ecuación, usando las unidades de medida del SI.

$$v = \frac{L}{T}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de la potenciación $a^1 = \frac{1}{a^{\prime}}$ podemos expresar la fórmula dimensional de la velocidad de la siguiente manera:

$$v = L \cdot T^{-1}$$

Integrales definidas e indefinidas

Algunas magnitudes derivadas son: la aceleración, fuerza, potencia, entre otras, en la siguiente tabla se describe el proceso para determinar la fórmula dimensional de estas magnitudes derivadas:

Magnitud derivada	Expresión matemática		Fórmula Dimensionada
	En magnitudes fundamentales	En unidades fundamentales	
Aceleración	$a = \frac{velocidad}{tiempo}$	$[a] = \frac{[v]}{[t]}$ $[a] = \frac{LT^{-1}}{T}$	$[a] = LT^{-2}$
Fuerza	$F = masa \cdot aceleración$	$[F] = [m] \cdot [a]$ $[F] = M \cdot LT^{-2}$	$[F] = MLT^{-2})$
Trabajo	$W = fuerza \cdot distancia$	$[W] = [F] \cdot [L]$ $[W] = MLT^{-2} \cdot L$	$[W] = MLT^{-2} \cdot L$

Temas 2: Primitiva e integración indefinida: definición y notación.

Primitiva

La integración puede definirse como la operación inversa a la derivación; de manera general, se puede decir que la integral de una función f (x) será otra F (X) la cual recibirá el nombre de **Primitiva (o antiderivada).**

Si f (x) es una función de variable real definida en el intervalo [a , b] y F (X) es otra función cuya derivada es f (x), se podrá concluir que F (X) es la primitiva de f (x) así:

$$F(X)\ es\ primitiva \longleftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Ejemplo:

Si, $F(x) = sen(x)$ y $f(x) = \cos(x)$, verifiquemos que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$.

$F'(x) = (senx)' = \cos x$

Como se puede observar la derivada $F'(x)$ es igual a la función $f(x)$, por tanto, $F(x) = sen(x)$ es la primitiva de $f(x) = \cos(x)$.

Integral indefinida

Para una misma función pueden existir infinidad de primitivas, al conjunto formado por todas las funciones primitivas de f (x), se le llamarán integral indefinida y se podrá representar de la siguiente forma:

$\int f(x)\,dx$ → Entonces $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ →

Donde C es una constante que pertenece a los reales y, por tanto, puede tomar infinitos valores, obteniéndose una familia de infinitas funciones cuya derivada es f (x).

Verificar si F (x) = x^3+ 8 x – 4 es la primitiva de f (x) = $3x^2$ + 8 e indicar su integral indefinida:

$F'(x) = 3x^2 + 8 - 0$ $F'(x) = 3x^2 + 8$	Calculamos la derivada de $F(x)$
$F'(x) = f(x)$	Como se cumple la igualdad, se puede concluir que $F(x)$ efectivamente es la primitiva de $f(x)$.

Para determinar la integral indefinida, debemos identificar la constante C, que permite establecer el conjunto de funciones F (x) que tienen la misma derivada.

Función $F(x)$	Derivada $F'(x)$
$x^3 + 8x + 6$	$3x^2 + 8$
$x^3 + 8x - 2$	$3x^2 + 8$
$x^3 + 8x + C$	$3x^2 + 8$

Por tanto, la integral indefinida sería:

$$\int 3x^2 + 8dx = x^3 + 8x + C$$

Tema 3: Métodos de integración.

Los métodos de integración corresponden a las técnicas que se usan para calcular la integral de una función. Se pueden definir como reglas básicas de integración a las siguientes:

Reglas básicas de integración

- **Integral de una función constante uno:**

$$\int dx = x + C$$
$$\int (1)\, dx = x + C$$

Cuando la función f (x) = 1. la integral será igual a la variable con respecto a la cual se está integrando más una constante C.

- **Integral de una función multiplicada por a:**

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx \quad \int 3x^4 dx = 3 \int x^4 dx$$

Cuando la función f (x) = ax^n, se procede a sacar de la integral a "a" y solo se integra la función.

- **Integral de una suma o resta de funciones:**

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$
$$\int (x^3 - x^5)\, dx = \int x^3 dx - \int x^5 dx$$

Cuando la integral está compuesta por una suma o resta de funciones, esto será igual a suma o resta de las integrales de cada función.

- **Integral de una potencia:**

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + C$$

Cuando f (x) = x^n, la integral será igual a una fracción más una constante. La fracción estará formada por: Numerador: potencia x^{n+1}, donde n es el exponente de la potencia inicial. Denominador: número real de la forma n + 1 donde n es el exponente de la potencia inicial.

Integración por cambio de variable

El cambio de variable es un método que tiene como finalidad expresar la integral inicial en otra más simple o conocida. Este método se usa cuando a la integral de la función no se le reconoce una primitiva inmediatamente.

Ejemplo:

Si se requiere encontrar $\int (4x - 6)^4\, dx$, utilizando el cambio de variable, tendríamos que expresar toda la integral en términos de u, así:

$u = 4x - 6$	Reemplazo $4x - 6$
$du = 4\,dx$	Encuentro la derivada de $u = 4x - 6$
$dx = \frac{du}{4}$	Despejo dx para reemplazar en la integral inicial

Solución:

$\int u^4 \frac{du}{4}$	La integral con cambio de variable
$\frac{1}{4}\int u^4 du$	Por propiedades de las integrales, las constantes que estén multiplicando o dividiendo deben salir de la integral.
$\frac{1}{4}\int u^4 du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{4+1}}{4+1}\right) + C$ $\frac{1}{4}\int u^4 du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^5}{5}\right) + C$ $\frac{1}{4}\int u^4 du = \frac{u^5}{20} + C$	Solucionamos la integral siguiendo la fórmula de las reglas básicas: Integral de una potencia $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$\int (4x-6)^4 dx = \frac{(4x-6)^5}{20} + C$	Reemplazamos u con la expresión inicial y esta sería la solución.

Integración de funciones trascendentes

Haz clic en el siguiente enlace para acceder al recurso interactivo Función Logarítmica

Material complementario

Te invitamos a ampliar tus conocimientos y profundizar acerca de las temáticas exploradas a través de las siguientes lecturas:

- Chica, A. (2017). Primitiva de una función e integral indefinida [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=hCjTWPqG7hk

- Matemáticas sencillas. (2016). Reglas para integrar una función. Teoremas básicos para integrales o antiderivadas de funciones [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=On9LaPHyvbE&t=375s

Integración de funciones trascedentes

- Bonnet Jerez, J. L. (2003). Cálculo infinitesimal: esquemas teóricos para estudiantes de ingeniería y ciencia experimentales. Digitalia. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=nlebk&AN=318092&lang=es&site=ehost-live&ebv=EB&ppid=pp_55 (Enlaces a un sitio externo.)

Videos de integrales con:

- Funciones exponenciales: Fisimat. (2017). Integral Exponencial - Ejercicio 1 - Método "Cambio de Variable". #1 [Video]. Recuperado de: Integral Exponencial - Ejercicio 1 - Método "Cambio de Variable". #1

- Funciones trigonométricas: Juliprofe. (2012). INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS - Ejercicio 3 [Video]. Recuperado de: INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS - Ejercicio 3

- Funciones logarítmicas: ElProfeJose. (2015). Integral del logaritmo natural (integración por partes) [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=JtSF4ZoVWaY&t=220s

- Funciones hiperbólicas: 1a con Berni. (2017). Integral del coseno hiperbólico | Cosh(x) [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=eqddWGKi8BU

Tema 4: Notación sigma

La notación sigma **∑,** corresponde a la sumatoria. Con este símbolo se determina y expresa, de una manera abreviada, una operación matemática en la que se requiere realizar una suma de muchos o de indeterminados sumandos.

La expresión está conformada de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

i= es el valor inicial o límite inferior
n: valor final o límite superior
x i= fórmula para los términos de la sumatoria
Ten en cuenta:
Se lee: sumatoria desde 1 hasta n de xi.

Integración por cambio de variable

La sumatoria cumple con las propiedades de la suma:

- **Conmutativa:**

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=x_1+y_1+x_2+y_2+\ldots+x_n+y_n=y_1+x_1+y_2+x_2+\ldots+y_n+x_n=\sum_{i=1}^{n}(y_i+x_i)$$

- **Asociativa:**

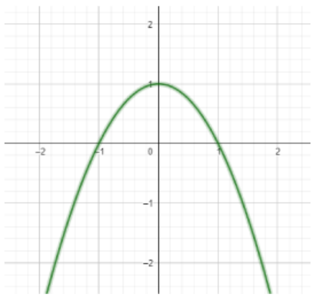
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)+\sum_{i=1}^{n}z_i=x_1+y_1+x_2+y_2+\ldots+x_n+y_n+z_1+z_2+=x_1+x_2+\ldots+x_n+y_1+z_1+y_2+z_2\ldots+y_n+z_n=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}(y_i+z_i)$$

- **Distributiva:**

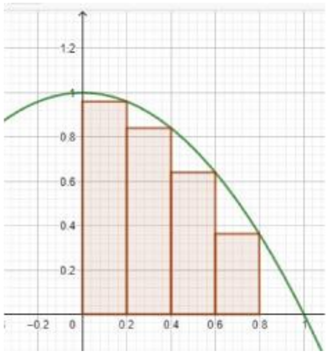
$$a.\sum_{i=1}^{n} x_i = a.(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n = \sum_{i=1}^{n} (a.x_i)$$

Área de una región plana por rectángulos inscritos y circunscritos

Supone un área determinada por la función.



El proceso para hallar el área de una región plana, por ejemplo, la determinada por la curva y el eje x positivo, puede subdividir dicha región en rectángulos, ya que la fórmula del área de esta figura es simple.



Para nuestro caso, subdividimos en 5 rectángulos inscritos, ya que están dentro de la región, y procedemos a aproximar el área desdeñada, sumando el área de cada rectángulo.

Recuerda que: El área de un rectángulo se determina: base x altura. En nuestra gráfica, la base corresponde a los valores en x, (la distancia entre los puntos) y la altura sería la función que describe la gráfica, evaluada en los valores de x.

Cuando los rectángulos están inscritos, para evaluar la función, el valor de x a tomar es el extremo derecho de la base del rectángulo.

Primer rectángulo	Segundo rectángulo	Tercer rectángulo	Cuarto rectángulo	Quinto rectángulo
$base: 0{,}2$ $altura: f(x), x = 0{,}2$ $f(0{,}2) = 1-(0{,}2)^2$ $f(0{,}2) = 1-0{,}04$ $f(0{,}2) = 0{,}96$	$base: 0{,}2$ $altura: f(x), x = 0{,}4$ $f(0{,}4) = 1-(0{,}4)^2$ $f(0{,}4) = 1-0{,}16$ $f(0{,}4) = 0{,}84$	$base: 0{,}2$ $altura: f(x), x = 0{,}6$ $f(0{,}6) = 1-(0{,}6)^2$ $f(0{,}6) = 1-0{,}36$ $f(0{,}6) = 0{,}16$	$base: 0{,}2$ $altura: f(x), x = 0{,}8$ $f(0{,}6) = 1-(0{,}8)^2$ $f(0{,}6) = 1-0{,}64$ $f(0{,}6) = 0{,}36$	$base: 0{,}2$ $altura: f(x), x = 1$ $f(1) = 1-(1)^2$ $f(1) = 1-1$ $f(1) = 0$

Sumando el área de cada rectángulo obtenemos que:

$0{,}2 \cdot f(0{,}2) + 0{,}2 \cdot f(0{,}4) + 0{,}2 \cdot f(0{,}6) + 0{,}2 \cdot f(0{,}8) + 0{,}2 \cdot f(1)$	Escribimos la suma de las áreas de los rectángulos.
$0{,}2 \cdot [f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8) + f(1)]$	Sacamos factor común: 0,2. Quedan 5 términos que corresponden a la función.
$f(0{,}2i)$	Se determina la forma del i-ésimo, término que describe la función.

$0{,}2\left[\sum_{i=1}^{5} f(0{,}2i)\right]$	Se escribe la sumatoria en notación sigma.
$0{,}2\left[\sum_{i=1}^{5} (1-(0{,}2i)^2)\right]$	Se evalúa la función $f(x) = 1 - x^2$ en la sumatoria.
$0{,}2\left[\sum_{i=1}^{5} 1 - \sum_{i=1}^{5} (0{,}2i)^2\right]$ $0{,}2\left[\sum_{i=1}^{5} 1 - \sum_{i=1}^{5} (0{,}2)^2 i^2\right]$	Escribo las dos sumatorias que se determinan por la forma de la función.
$0{,}2\left[5 - 0{,}04\sum_{i=1}^{5} i^2\right]$	Solucionamos la primera sumatoria.
	Sacamos de la sumatoria a la constante 0,04.
$\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{5(5+1)(2\cdot 5+1)}{6}$ $\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{30\cdot 11}{6}$ $\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{330}{6} = 55$	Solucionamos aplicando la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$0{,}2[5 - 0{,}04(55)] = 0{,}56$	Reemplazo y hallo el valor que corresponde al área aproximada de la suma de rectángulos inscritos

Para calcular el área con rectángulos circunscritos, el valor de x para evaluar la función es el extremo izquierdo de la base del rectángulo.

Subdividimos la región 5 en rectángulos circunscritos, ya que están por fuera de la región, y aproximamos el área desdeñada sumando el área de cada rectángulo.

La base corresponde a 0,2 y la altura será la función evaluada en el valor x izquierdo de cada rectángulo.

Cuando los rectángulos están inscritos, para evaluar la función, el valor de x a tomar es el extremo derecho de la base del rectángulo.

Sumando el área de cada rectángulo obtenemos que:

$0{,}2 \cdot f(0) + 0{,}2 \cdot f(0{,}2) + 0{,}2 \cdot f(0{,}4) + 0{,}2 \cdot f(0{,}6) + 0{,}2 \cdot f(0{,}8)$	Escribimos la suma de las áreas de los rectángulos.
$0{,}2 \cdot [f(0) + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8)]$	Sacamos factor común 0,2. Quedan 5 términos que corresponden a la función.
$f[0{,}2(i-1)]$	Se determina la forma del i-ésimo, término que describe la función.
$0{,}2\left[\sum_{i=1}^{5} f[0{,}2(i-1)]\right]$	Se escribe la sumatoria en notación sigma.

$0{,}2\left[\sum_{i=1}^{5}(1-[0{,}2(i-1)]^2)\right]$	Se evalúa la función $f(x)=1-x^2$ en la sumatoria.
$0{,}2\left[\sum_{i=1}^{5}1-\sum_{i=1}^{5}[0{,}2(i-1)]^2\right]$ $0{,}2\left[\sum_{i=1}^{5}1-\sum_{i=1}^{5}(0{,}2)^2(i-1)^2\right]$	Escribo las dos sumatorias que se determinan por la forma de la función.
$0{,}2\left[5-0{,}04\sum_{i=1}^{5}(i^2-2i+1)\right]$	Solucionamos la primera sumatoria.
	Sacamos de la segunda sumatoria a la constante 0,04. Desarrollamos la diferencia al cuadrado.
$0{,}2\cdot(5-0{,}04)\left[\sum_{i=1}^{5}i^2-2\sum_{i=1}^{5}i+\sum_{i=1}^{5}1\right]$	Escribo las tres sumatorias que se determinan por la forma de la función.
$\sum_{i=1}^{5}i^2=\frac{5(5+1)(2\cdot5+1)}{6}=55$ $\sum_{i=1}^{5}i=\frac{5(5+1)}{2}=15$ $\sum_{i=1}^{5}1=1\cdot5=5$	Solucionamos aplicando las fórmulas correspondientes: $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{i=1}^{n}c=cn$

$1 - 0{,}08[55 - 2(15) + 5]$ $1 - 0{,}08(30)$ $1 - 0{,}24$ $0{,}76$	Reemplazo y hallo el valor que corresponde al área aproximada de la suma de rectángulos circunscritos.

El área de la región se encuentra ente el área de los rectángulos inscritos y el área de los rectángulos circunscritos. Por tanto:

$$0,56 \leq area\ de\ la\ región \leq 0,76$$

Material complementario:

Te invitamos a ampliar tus conocimientos y profundizar acerca de las temáticas exploradas a través de las siguientes lecturas:

- Bonnet Jerez, J. L. (2003). Cálculo infinitesimal : esquemas teóricos para estudiantes de ingeniería y ciencia experimentales. Digitalia: http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=nlebk&AN=318092&lang=es&site=ehost-live&ebv=EB&ppid=pp_67

- Centro para la Excelencia Docente Uninorte. (2013). Cómo calcular el área bajo una curva. Parte 1 [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=UL1Um5TnLdw&t=20s

- Centro para la Excelencia Docente Uninorte. (2013). Cómo calcular el área bajo una curva. Parte 2 [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=yCHCvOhqZSE

Tema 5: Suma de Riemann e integral definida

La integral definida es un concepto que permite hallar el área de una región determinada por una función $f(x)$ y el eje horizontal x, en un intervalo [a , b], donde a y b definen dos rectas verticales x = a y x = b.

Su notación es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedades de la integral definida

- Toda integral extendida a un intervalo de un solo punto, [a , a], es igual a cero.
- Cuando la función $f(x)dx$ es mayor que cero, su integral es positiva; si la función es menor que cero, su integral es negativa.
- La integral de una suma de funciones es igual a la suma de sus integrales tomadas por separado.
- La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función (es decir, se puede «sacar» la constante de la integral).
- Al permutar los límites de una integral, esta cambia de signo.
- Dados tres puntos tales que a < b < c, entonces, se cumple que (integración a trozos): $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx$
- Para todo punto x del intervalo [a , b] al que se aplican dos funciones $f(x)dx$ y $g(x)dx$ tales que $f(x)dx \leq g(x)dx$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Suma de Riemann

Es una técnica que permite aproximar el valor de una integral a través de una suma finita. Siempre y cuando $f(x)$ sea una función continua en el intervalo (a , b), y exista un conjunto finito de puntos que llamaremos partición del intervalo.

p = [(x_0 , x_1), (x_1 , x_2),…, (x_{n-1} , x_n)]

S= $\sum_{i-1}^{n} f\ (y_i)\ (x_i - x_{i-1})$

Ejemplo:

Hallar el área de la región bordeada por la gráfica de la función $f(x)$ = x^2, de las rectas x = 0, x = 2 y del eje x.

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$	Dividir el intervalo (0,2) en *n* intervalos de igual longitud, usando la fórmula: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
$x = 0 + i\frac{2}{n}$ $x = 2\frac{i}{n}$	Determinar $x_i = a + i\Delta$

$$\sum_{i=1}^{n} f(2\frac{i}{n})\frac{2}{n}$$ $$\sum_{i=1}^{n}\left(2\frac{i}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$ $$\sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}i^2$$ $$\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$ $$\frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$ $$\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$	La enésima suma de Riemann es $$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$
$$\lim_{n\to\propto}\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}=\frac{8}{3}$$	Se halla el límite $$\lim_{n\to\propto}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Ten en cuenta:

- ***$x_{i-1} \leq y_i \leq x_i$***
- ***Si $y_i = x_{i-1}$ para todo i, entonces, se determina una suma de Riemann por la izquierda.***
- ***Si $y_i = x_i$ para todo i, entonces, se determina una suma de Riemann por la derecha.***

Material complementario

Te invitamos a ampliar tus conocimientos y profundizar acerca de las temáticas exploradas a través de los siguientes recursos:

- Fisimat. (2017). Suma de Riemann - Cálculo de Área - Ejemplo #1 [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=0Un-b4YVxsI
- Innovació Educativa Universitat de València. (2017). Propiedades de la integral definida [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=3s2qAKZEiKs
- TheGMDEXproject. (2017). Integral definida [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=tzjvicEp8AY
- Fresno, M. Cálculo integral. Recuperado de: https://www.geogebra.org/m/fTkpUM4E#material/Vb38e3aZ
- Hiru (s.f.) La integral definida. Recuperado de: https://www.hiru.eus/es/matematicas/la-integral-definida
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-3/a/riemann-sums-with-summation-notation
- Bonnet Jerez, J. L. (2003). Cálculo infinitesimal: esquemas teóricos para estudiantes de ingeniería y ciencia experimentales. Digitalia. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=nlebk&AN=318092&lang=es&site=ehost-live&ebv=EB&ppid=pp_67

Tema 6: Primer teorema fundamental del cálculo integral

Si f es continua en un intervalo [a , b], entonces, la función definida por:

$$g(X) = \int_a^x f(t)dt \text{ con } a \leq b\text{, es continua en } [a, b] \text{ y } g'(x) = f(x)$$

Esto es:

$$g(X) = \int_a^x f(t)dt$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Con este teorema se verifica la propiedad de reciprocidad entre la integración y la derivación, pues al derivar toda la integral con respecto a x, el resultado será la misma función que inicialmente estaba en términos de t, pero ahora en términos de x.

Ejemplo:

$g(x) = \int_a^x f(t^2 + 1)dt$	Ejercicio dado
$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t^2 + 1)dt\right]$	Expresar la derivada de la función $g(x)$
$g'(x) = x^2 + 1$	Aplicando el teorema del cálculo $g'(x) = f(x)$

Normalmente, la integral va desde $\boldsymbol{a}$ hasta $\boldsymbol{x}$ $\int_a^x$, pero si la integral está escrita al contrario $\int_x^a$, se el debe dar la vuelta a la integral y ponerle un signo negativo adelante para que el resultado no varíe.

Ejemplo:

Hallar la derivada de la integral usando el teorema fundamental:

$g(x) = \int_a^x f(t^2+1)dt$	Ejercicio dado
$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t^2+1)dt\right]$	Expresar la derivada de la función $g(x)$
$g'(x) = x^2+1$	Aplicando el teorema del cálculo $g'(x) = f(x)$

Tema 7: Segundo Teorema fundamental del cálculo integral

Este segundo teorema también es conocido por la regla de Barrow y nos indica que: si tenemos una función $\boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{x}\,)$ que es integrable en el intervalo $[\,\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}\,]$ y $\boldsymbol{F}\,(\,\boldsymbol{x}\,)$ es cualquier función primitiva de $\boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{x}\,)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Esto es, el resultado de la integral será la diferencia de la función primitiva $\boldsymbol{F}\,(\,\boldsymbol{x}\,)$, evaluada en los extremos del intervalo.

Ejemplo:

$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$	Ejercicio dado
$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \left[\frac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{-2}^{-1}$	Se realiza la integral
$F(x) = \frac{-1}{2(x-1)^2}$	Se determinala funciónprimitivaF
$F(x) = \left[\frac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{-2}^{-1}$ $F(-2) = \frac{-1}{2(-2-1)^2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{(-3)^2}\right)$ $F(-1) = \frac{-1}{2(-1-1)^2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{(-2)^2}\right)$	Se evalúa $F(x)$ en -1 y -2

$\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{(-2)^2}\right) - \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{(-3)^2}\right)$ $\frac{-1}{2}\left[\left(\frac{1}{(-2)^2}\right) - \left(\frac{1}{(-3)^2}\right)\right]$ $\frac{-1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{9}\right)\right]$ $\frac{-1}{2}\left[\frac{5}{36}\right]$ $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \frac{-5}{72}$	Se realiza la diferenciaentre $F(b) - F(a)$

Tema 8: Teorema del valor medio para integrales

Este teorema se puede utilizar para determinar el valor promedio de una función en un intervalo determinado; para calcularlo se debe utilizar la suma de Riemann, ya que se debe dividir el intervalo $[\, a\,,\; b\,]$ en n subintervalos iguales de longitud $\Delta\, x \;=\; \frac{b-a}{n}$ donde el promedio aritmético está dado por:

$$a_n = \frac{1}{n}[f(t_1) + f(t_2) + \ldots + f(t_n)]$$

Multiplicando y dividiendo por $(b-a)$ se obtiene:

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\frac{b-a}{b-a} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x$$

De lo anterior se puede interpretar que el promedio de los $\boldsymbol{n}$ valores (subintervalos) es $\frac{1}{b-q}$ veces la suma de Riemann de la función en el intervalo $[\,\boldsymbol{a}\,,\;\boldsymbol{b}\,]$. A medida que los subintervalos aumenta.

$$\lim_{n\longrightarrow\propto} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\lim_{n\rightarrow\propto}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Conclusión:

Por la definición de integral definida.

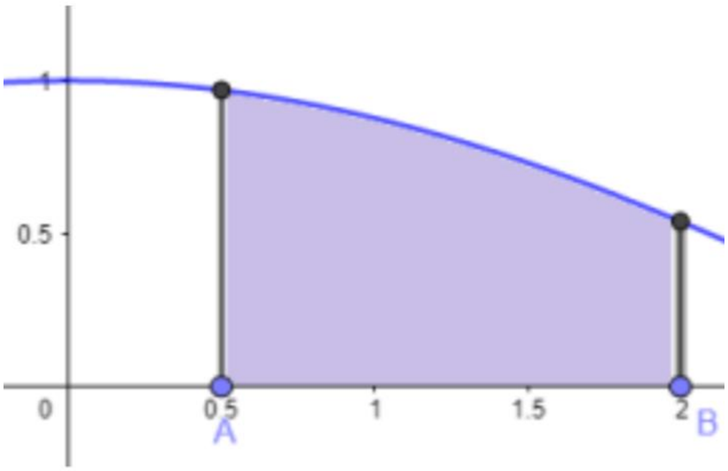
Por tanto, el valor promedio de la función $f\,(\,x\,)$ en el intervalo (a, b)

$$prom \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Así las cosas, el teorema del valor medio para integrales nos indica que: si f es continua en un intervalo cerrado $(\,a\,,\;b\,)$ existe un número c en este intervalo tal que:

$$f(c)\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Interpretación gráfica:



La función f es continua en un intervalo cerrado (a, b)

En azul el área de la región dertrminada por la función y blas recetas $x = a$ y $x = b$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Material complementario

Te invitamos a ampliar tus conocimientos y profundizar acerca de las temáticas exploradas a través de los siguientes recursos:

- Fresno, M. Cálculo integral. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/fTkpUM4E#material/vNkphUtq

- Guerrero, G. (2014). Cálculo Integral. México, Grupo Editorial Patria. (Unidad 1). Recuperado de: https://ebookcentral.proquest.com/lib/iudasp/reader.action?docID=3227587

Tema 9: Integración de funciones pares e impares

Para iniciar, debemos recordar qué es una función par e impar.

La integral de funciones pares e impares

Función par

$f(x)$ es par si

$f(x) = f(-x)$

→

Si $f(x)$ es par

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Función par

$f(x)$ es impar si

$f(x) = -f(x)$

→

Si $f(x)$ es impar

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$\int_{-2}^{2} x^5 \cos x \ dx$	Ejercicio dado
$f(-x)$ $= (-x)^5 \cos(-x)$ $f(-x) = -x^5 \cos x$ $f(-x) = -f(x)$	Verificar si la función $f(x) = x^5 \cos x$ es par o impar. Para este caso, la función es impar ya que: $f(-x) = -f(x)$
$\int_{-2}^{2} x^5 \cos x \ dx = 0$	Se aplica la fórmula

Material complementario

Te invitamos a ampliar tus conocimientos y profundizar acerca de las temáticas exploradas a través de los siguientes recursos:

- Funciones hiperbólicas: 1a con Berni. (2017). Integral de función par e impar [Video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=acMyl60vpJ0&t=565

Tema 10: Regla de Simpson y regla de los trapecios

Regla de los trapecios

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{\Delta x}{2}\{f(a)+2[f(x_1)]+2[f(x_2)]+\cdots+2[f(x_{n-1})]+[f(x_n)]\}$$

Ejemplo:

Usar la regla del trapecio con n=4 para aproximar la integral $\int_0^2 sen\, x^2$

<table>
<tr><td>$$\int_0^2 sen\, x^2$$</td><td>Ejercicio dado</td></tr>
<tr><td>

$\Delta x = \frac{2-0}{4}$

$\Delta x = \frac{1}{2} = 0{,}5$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$0 + 0(0{,}5)$ 0	$0 + 1(0{,}5)$ 0,5	$0 + 2(0{,}5)$ 1	$0 + 3(0{,}5)$ 1,5	$0 + 4(0{,}5)$ 2

</td><td>

Determinar,

El ancho del rectángulo:

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Las coordenadas:

$x_i = a + i\Delta x$

</td></tr>
</table>

$\int_0^2 sen\, x^2$	Ejercicio dado
$\Delta x = \frac{2-0}{4}$ $\Delta x = \frac{1}{2} = 0{,}5$ <table><tr><th>x_0</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>x_4</th></tr><tr><td>$0 + 0(0{,}5)$ 0</td><td>$0 + 1(0{,}5)$ $0{,}5$</td><td>$0 + 2(0{,}5)$ 1</td><td>$0 + 3(0{,}5)$ $1{,}5$</td><td>$0 + 4(0{,}5)$ 2</td></tr></table>	Determinar, El ancho del rectángulo: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ Las coordenadas: $x_i = a + i\Delta x$

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Ejemplo:

Calcular la integral definida $\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx$,usando la regla de Simpson

$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx$	Ejercicio dado
$f(1) = \frac{2(1)+3}{(1)^2+3(1)+2} = \frac{5}{6}$ $f\left(\frac{1+3}{2}\right) = f(2) = \frac{2(2)+3}{(2)^2+3(2)+2} = \frac{7}{12}$ $f(3) = \frac{2(3)+3}{(3)^2+3(3)+2} = \frac{9}{20}$	Determino: $f(a)$ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ $f(b)$

$\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx \approx \frac{2}{6}\left[\frac{5}{6}+4\left(\frac{7}{12}\right)+\frac{9}{20}\right]$ $\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx \approx \frac{2}{6}\left[\frac{5}{6}+4\left(\frac{7}{12}\right)+\frac{9}{20}\right]$ $\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx \approx \frac{2}{6}\left[\frac{5}{6}+\frac{28}{12}+\frac{9}{20}\right]$ $\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx \approx \frac{2}{6}[3{,}62]$ $\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx \approx 1{,}21$	Reemplazo en la fórmula.

Material complementario

Te invitamos a ampliar tus conocimientos y profundizar acerca de las temáticas exploradas a través de los siguientes recursos:

- Cristigo92. (2014). Integración aproximada: Regla del Trapecio [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=PFQmwU17_Ho&t=147s

- Cetremo14. (2014). Integración Numérica - Regla de Simpson [Video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=jJdp1n4vaGg&t=10s

IU Digital de Antioquia

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
DIGITAL DE ANTIOQUIA

ORD No 74 de 2017 · VIGILADA MinEducación

www.iudigital.edu.co