INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

Cálculo

ORD No 74 de 2017 - Vigilado MinEducación

Tabla de contenido

PRESENTACIÓN DEL CURSO 3
OBJETIVOS 3
Mapa del curso 3
UNIDAD I: RELACIONES Y FUNCIONES 5
TEMA 1: Relaciones y funciones 5
1.1 Relaciones 7
1.2 Funciones 9
1.2.1 Dominio e imagen de una función 10
1.2.2 Tips para hallar el dominio 11
TEMA 2: Clases de funciones y sus gráficas 13
2.1. Constantes 13
2.2 Polinómicas de primer grado 14
2.3 Cuadráticas 15
2.4 Racionales 16
2.5 A trozos 16
2.6 Exponenciales 17
2.7 Logarítmicas 18
2.8 Trigonómetricas 18
TEMA 3: Operaciones entre funciones 21
UNIDAD II: LÍMITES 24
TEMA 1: LÍMITES 24
2.1 Definición de límite 24
2.1.1 ¿Cómo hallar un límite? 26
TEMA 2: Propiedades de los límites 29
2.2.1 Técnica de cancelación 29
2.2.2 Técnica de racionalización 29
TEMA 3: Continuidad 31
3.1 Criterios de continuidad 31
UNIDAD III: DERIVADAS 35
TEMA 1: DERIVADAS 35
Derivadas 37
3.1 Ejemplo derivadas 37
3.2 Reglas de derivación 40

contacto@iudigital.edu.co
(574) 219 83 32 ext. 8376
Cll 10Sur # 50E - 31. Medellín, Antioquia.
www.iudigital.edu.co
ORD No 74 de 2017 - Vigilado MinEducación

3.2.1 Aplicación de la regla 41
3.3 Criterio de primera y segunda derivada 44
Glosario 46
Bibliografía 48
Créditos 50

contacto@iudigital.edu.co
(574) 219 83 32 ext. 8376
Cll 10Sur # 50E - 31. Medellín, Antioquia.

PRESENTACIÓN DEL CURSO

La asignatura de Cálculo busca contribuir a través de la aplicación de procedimientos, técnicas y conceptos, a la solución de situaciones problema por parte del estudiante como futuro profesional, para reconocer los retos de dicha labor y la importancia de las herramientas al resolver retos aplicados (diseño, costos, producción, etc.) a partir de modelos y simulaciones.

Por ejemplo, se propone la siguiente pregunta orientadora: Si se realizaran 150 llamadas al mes, con un total de 400 minutos y se recibiera la oferta de dos operadores de telefonía móvil, en donde la primera ofrece pagar 0,3$ por recibir la llamada y 0,16$ por minuto de llamada, y la segunda ofrece pagar 0,6$ por recibir la llamada y 0,06$ por cada minuto de llamada. ¿Con cuál operador se pagaría menos?

Este tipo de interrogantes surgen en la cotidianidad e implican una toma de decisiones, por eso, el curso consta de herramientas y fórmulas, para aplicar en situaciones similares.

OBJETIVOS

General

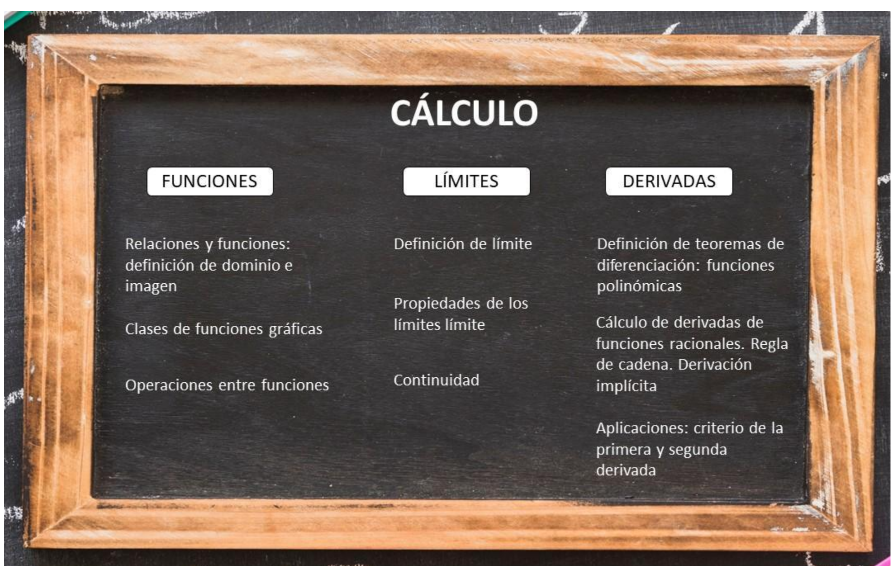
Aplicar los conocimientos adquiridos en Cálculo para dar solución a situaciones problema que se ajusten a su formación profesional.

PAGE * MERGE FORMA T36

Específicos

1. Analizar gráfica y algebraicamente las funciones construidas en el plano cartesiano.
2. Aplicar las propiedades de los límites en la solución de problemas matemáticos.
3. Emplear la derivación en situaciones aplicadas.

Mapa del curso



Unidad 1
Relaciones y funciones

PAGE * MERGEFORMAT 36

Por lo anterior, se deben revisar todos los materiales de estudio para al finalizar, identificar y graficar las distintas funciones en el plano cartesiano, por medio de las actividades propuestas, con el fin de fortalecer las habilidades para el análisis de funciones.

Tema 1

Relaciones y

1.1 Relaciones

Para comprender el significado de función, es importante ver el significado de relación, y analizar ejemplos.

Las relaciones, como su nombre lo indica, corresponden a dos variables. Una **variable *x*** es una cantidad medible que aumenta o disminuye. En la vida cotidiana y en los distintos campos de la ciencia, aparecen correspondencias que reflejan las interacciones de los fenómenos que ocurren en el universo. Por ejemplo: en la cotidianidad a cada individuo le corresponde un número de identificación, a cada automóvil un número de placa, a cada ciudad un alcalde, la distancia que recorre un automóvil y la hora del viaje, etc.

Una relación se puede indicar mediante:
Un enunciado.
Una ecuación.
Un conjunto de pares ordenados.
Una tabla de valores.
Una gráfica.
Un diagrama.

En este sentido, una relación es un conjunto no vacío de parejas ordenadas ***(x, y)***, formadas de la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos dados; el primer conjunto es llamado **dominio** y el segundo, **codominio o imagen.**

Las relaciones se clasifican respecto a las correspondencias de los conjuntos, así:

-A cada elemento del primer conjunto le corresponde solo un elemento del segundo conjunto.

-A dos o más elementos del primer conjunto le corresponde un mismo elemento del segundo conjunto.

-A un elemento del primer conjunto le corresponden dos o más elementos del segundo conjunto.

Dados X y Y, dos conjuntos, una función $f(x)$ con dominio X y codominio Y, es toda regla de asociación que asigna a cada elemento $x \in X$ uno y solo un elemento $y \in Y$.

$f: X \rightarrow Y$

f es una función con dominio **X** y codominio **Y** y se lee **f** de **X** en **Y**.

PAGE * MERGEFORMAT 8

Ejemplo- Explicación

A cada elemento de **X** le corresponden dos elementos en **y**, y la definición dice que le debe corresponder solamente uno. En la imagen es posible observar que **X=1** tiene dos imágenes que son los puntos azules.

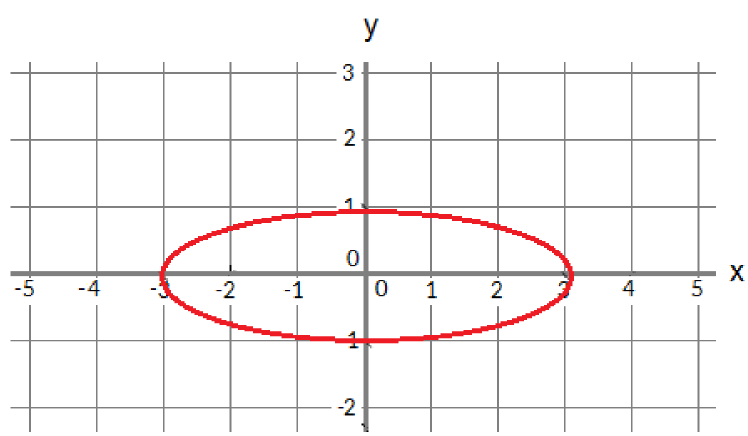


Figura 1. Ejemplos de relaciones que no son funciones. Curso en línea IUD

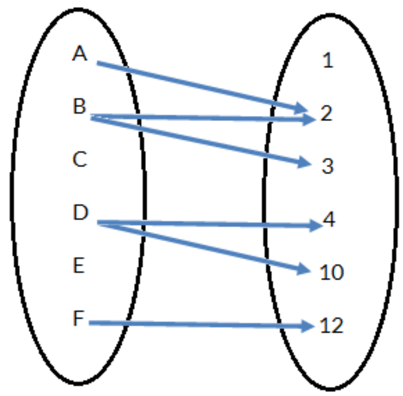


Figura 2. Ejemplos de relaciones que no son funciones. Curso en línea IUD

Existen dos elementos a los que les corresponden dos elementos en y; a B le corresponden el 2 y 3; al elemento D le corresponden el 4 y 10. Por tanto, no cumple la definición de función.

A cada padre de familia le corresponde un hijo.

Existen padres que tienen más de un hijo y por ello les correspondería más de un elemento. No cumple con la definición de función.

1.2 Funciones

Se presenta el concepto de función matemática, así como los elementos que se derivan de su definición. Es clave entender qué es *el dominio y la imagen de una función*, y cómo hallarlos.

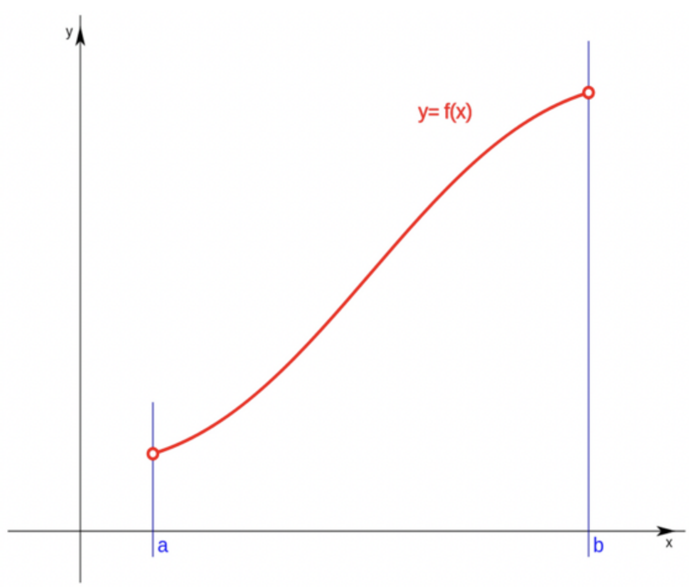


Figura 3. Dominio de una función. Curso en línea IUD

Definición

Dados **X** y **Y**, dos conjuntos, una función **f (x)** con dominio **X** y codominio **Y**, es toda regla de asociación que asigna a cada elemento **x ∈ X** uno y solo un elemento **y ∈ Y**.

Teniendo en cuenta la definición, existen distintos tipos de funciones:

Función inyectiva: a cada elemento del conjunto X le corresponde un valor en **Y**.

Función sobreyectiva: cada elemento de **Y** es la imagen, mínimo de un elemento en **X**.

Función biyectiva: a cada elemento de **Y** le corresponde un elemento del conjunto **X**.

1.2.1 Dominio e imagen de una función

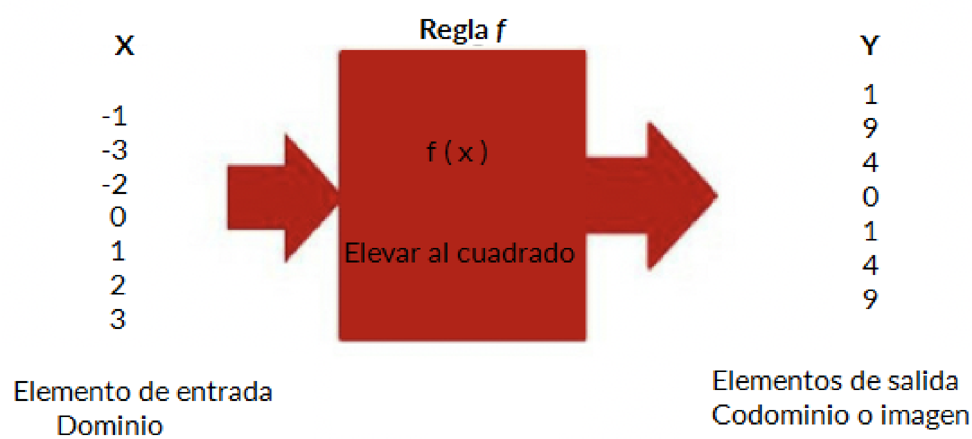


Figura 4. Dominio e imagen de una función. Curso en línea IUD

Dentro de la definición de **función** existen tres elementos claves:

Dominio de la función, conjunto **X**.
Codominio de la función, conjunto **Y**.
La regla f que hace corresponder de un conjunto al otro.

Si se piensan estos elementos dentro de una máquina con una **f:X→Y**, se identificarían así:

Al observar la figura, se reconoce:

Todos los elementos de entrada son positivos y negativos, además no hay restricciones. En este sentido, el conjunto de entrada, llamado **dominio**, es el conjunto de los números reales, pues en la máquina puede ingresar cualquiera de ellos.

La regla es la función, en este caso dicha función se escribe en lenguaje matemático $f(x)=x^2$>.

Los elementos de salida, llamados **codominio**, son resultado de introducir los números a la máquina y aplicarle la regla. En este caso, al cambiar la **x** por cualquier valor del dominio, dan como resultados números reales positivos.

Ejemplo

Dada la función **f(x)=(x-5) /3**

Encontrar la **imagen** de **2** y **-4**. Encontrar **el dominio** y **codominio** de la función.

Solución

2 y **-4** son los números de entrada y por tanto pertenecen al conjunto del **dominio**; es decir **x = 2 y x = -4**. Para encontrar la imagen de 2, se reemplaza en la regla **f(x)=(x-5) /3** para encontrar el valor de salida es decir la imagen, así:

f (2) =(2-5)/3=(-3)/3=-1; f(2)=-1; la imagen de 2 es -1

Para encontrar la imagen de -4, se hace el mismo procedimiento.

f (-4)=(-4-5)/3=(-9)/3=-3; f(-4)=-3; la imagen de -4 es -3

Para el dominio y codominio de la función se puede observar que no hay restricciones en el conjunto de entrada y que cualquier número que ingrese dará como imágenes cualquier número negativo y positivo. En este sentido, tanto el dominio como el codominio es el conjunto de los números reales.

1.2.2 Tips para hallar el dominio

Es importante tener en cuenta las siguientes indicaciones para encontrar **el dominio** de la función; es decir, **los elementos de entrada**:

Cuando no existen restricciones, ni raíces, ni expresiones algebraicas con cocientes, el dominio siempre será el conjunto de los números reales. En el ejemplo 2, se observa que no tiene ningún tipo de restricción y, por tanto, el dominio es **R**.

contacto@iudigital.edu.co
(574) 219 83 32 ext. 8376
Cll 10Sur # 50E - 31. Medellín, Antioquia.
www.iudigital.edu.co
ORD No 74 de 2017 - Vigilado MinEducación

Cuando existen raíces, se debe recurrir a **inecuaciones.** Las raíces siempre deben ser positivas; si se tiene la función **$f(x)=\sqrt{(2x-10)}$,** las raíces deben dar resultados positivos, en este sentido, hacemos el siguiente procedimiento:

$2x-10\geq 0$
$2x\geq 10$
$x\geq 5$
Es decir que el **dominio** es el intervalo **$[5,\infty)$**

Cuando la función tiene una expresión algebraica en el cociente, el denominador no puede ser cero; si se tiene la función **f(x)=(3x^2-2)/(x-4)** se debe identificar el número que al reemplazar en el denominador dé cero para quitarlo del dominio. En este caso, si se remplaza **x por 4**, da **cero**; por tanto, el dominio son **R-{4}.**

PAGE * MERGEFORMAT36

Tema 2
Clases de funciones y gráficas

TEMA 2: Clases de funciones y sus gráficas

El desarrollo de estas temáticas permitirá analizar gráfica y algebraicamente las funciones construidas en el plano cartesiano; por lo tanto, se aprenden los conceptos indispensables para la interpretación de razón de cambio, tema central del curso.

2.1. Constantes

La función constante tiene la siguiente forma:

$f(x)=k$, $donde\ k\ es\ una\ constante$

Sus características son:

Su pendiente es cero.
La gráfica es una recta horizontal paralela al **eje x** o eje de las abscisas.

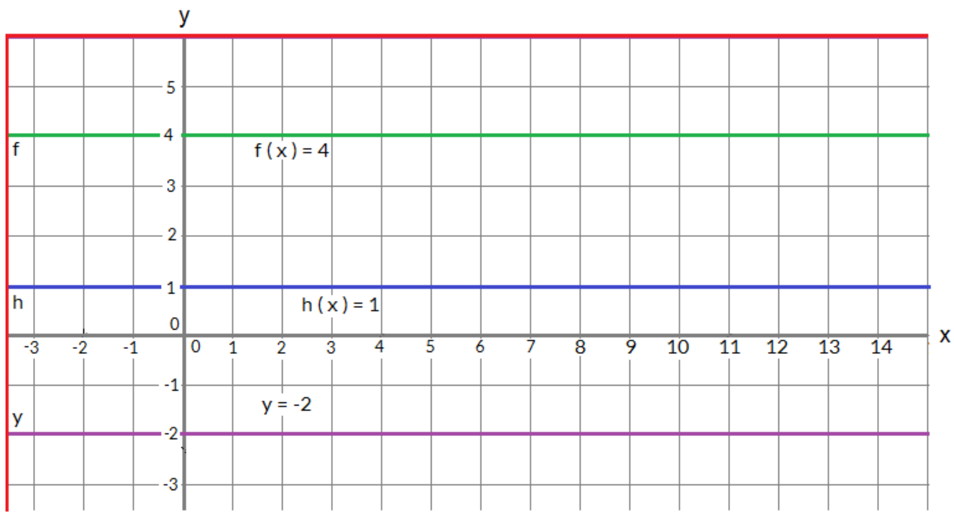


Figura 5. Función constante. Curso en línea IUD

2.2 Polinómicas de primer grado

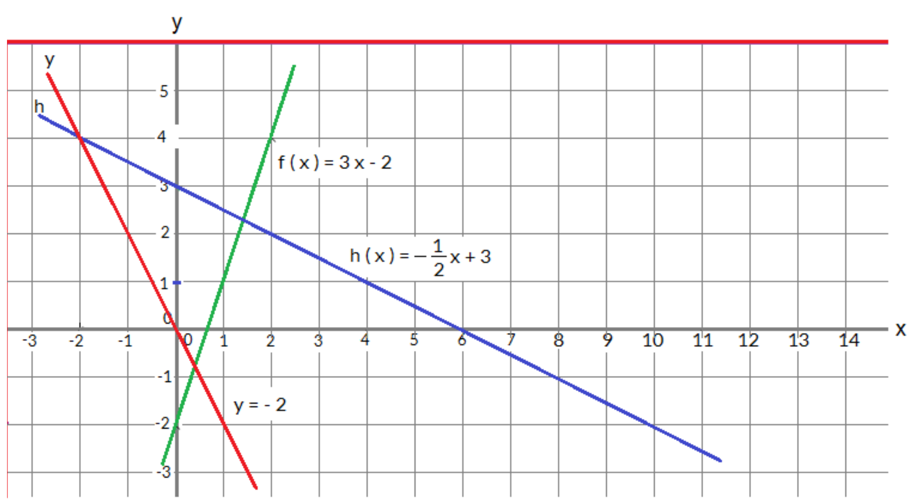


Figura 6. Función de primer grado. Curso en línea IUD

La función lineal tiene la siguiente forma:

f(x) = mx + b

Sus características son:

Su gráfica es una línea recta

m es **la pendiente** (es la inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas, eje **x**) de las rectas si ***m*>** **0** la función lineal **es creciente** y el ángulo que forma con el **eje x** es **agudo.**

Si ***m*** **< 0** la función lineal **es decreciente** y el ángulo que forma con el **eje x** es **obtuso.**

b es el corte con el eje **y.**

2.3 Cuadráticas

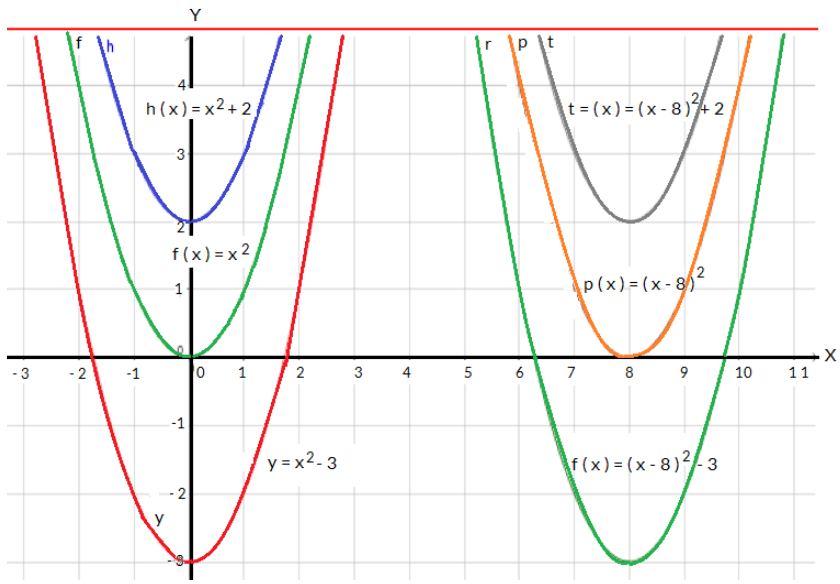


Figura 7. Funciones Cuadráticas. Curso en línea IUD

Tienen **expresiones polinómicas de segundo grado** y son de la forma:

$f(x)=(ax)^2+bx+c$

Sus características son:

Su gráfica es una parábola.
Se encuentra su vértice con f (-b / 2a)
El dominio son todos los números reales.

2.4 Racionales

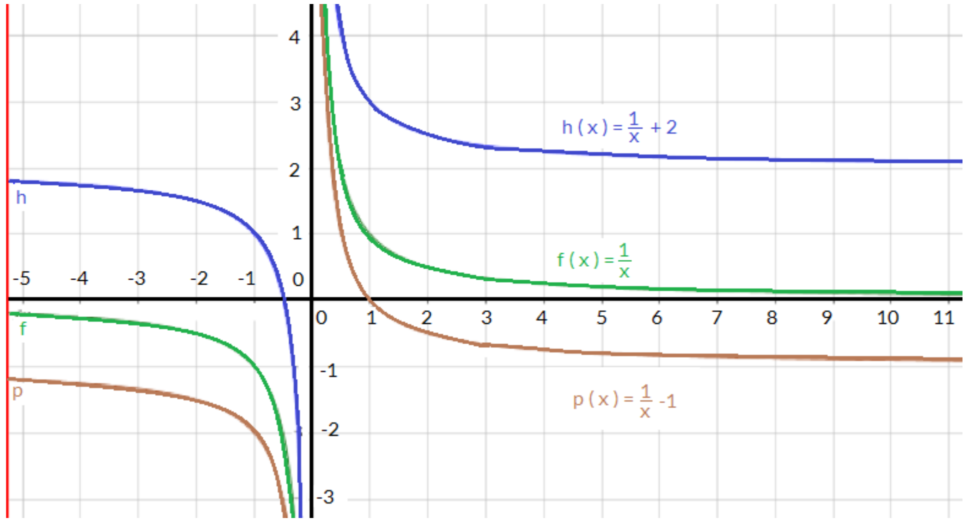


Figura 8. Funciones Racionales. Curso en línea IUD

Tienen cocientes con expresiones polinómicas de la forma:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Sus características son:

De este tipo existen las gráficas que son **hipérbolas** y son de la forma: ***f(x) = k/x y g(x) = ax+b / cx+d***

El dominio lo forman todos los números reales, excepto los valores de **x** que hacen **el denominador cero.**

Tienen una **asíntota vertical** y una **asintótica horizontal**.

2.5 A trozos

Son definidas por distintos criterios, según los intervalos que se indiquen. Son de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{en un intervalo dado.} \\ h(x), & \text{en un intervalo dado.} \end{cases}$$

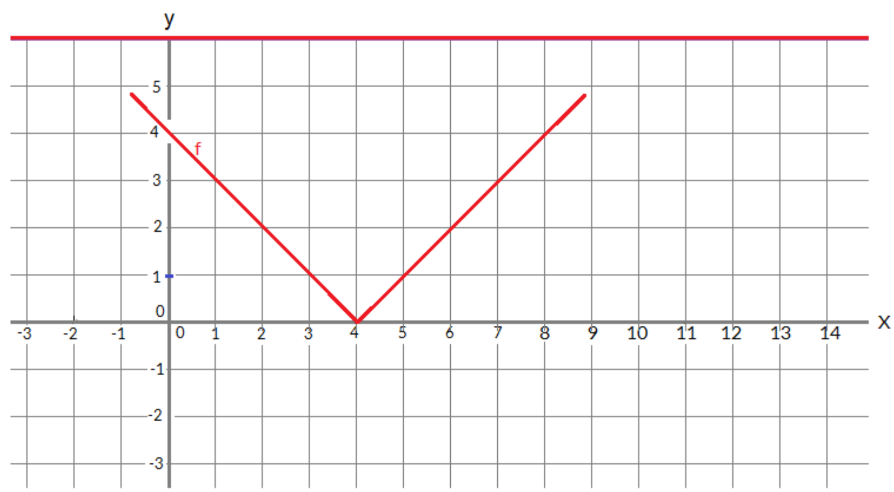


Figura 9. Función por partes (trozos). Curso en línea IUD

2.6 Exponenciales

Las funciones exponenciales son de la forma:

$f(x)=a^x$

Sus características son:

a es un número real positivo.
Su dominio son los números reales.
Su codominio son los números reales positivos.
La función es creciente si $a>1$ y decreciente si $a<\mathbf{1}$.

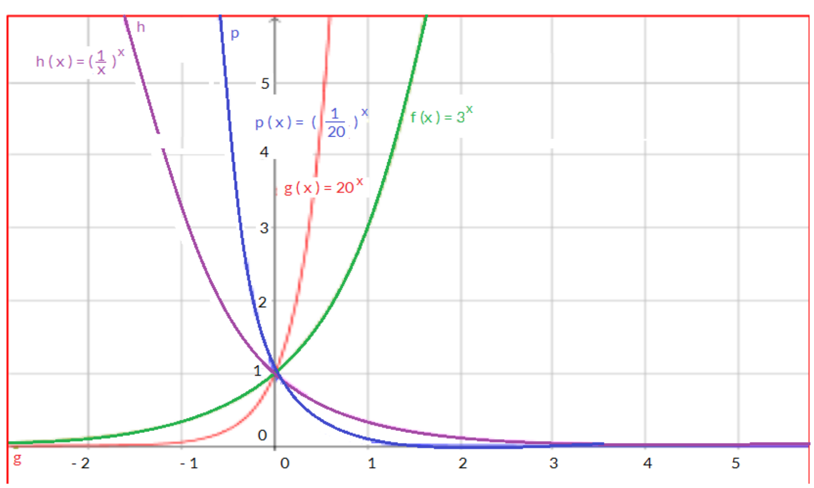


Figura 10. Funciones Exponenciales. Curso en línea IUD

2.7 Logarítmicas

Las funciones logarítmicas son de la forma:

$f(x) = log_a x$

Sus características son $a > 0, x > 0$

Su dominio es el conjunto de los números reales.
Su codominio es el conjunto de los números reales positivos
Es creciente si **a > 1** y decreciente si ***a < 1***

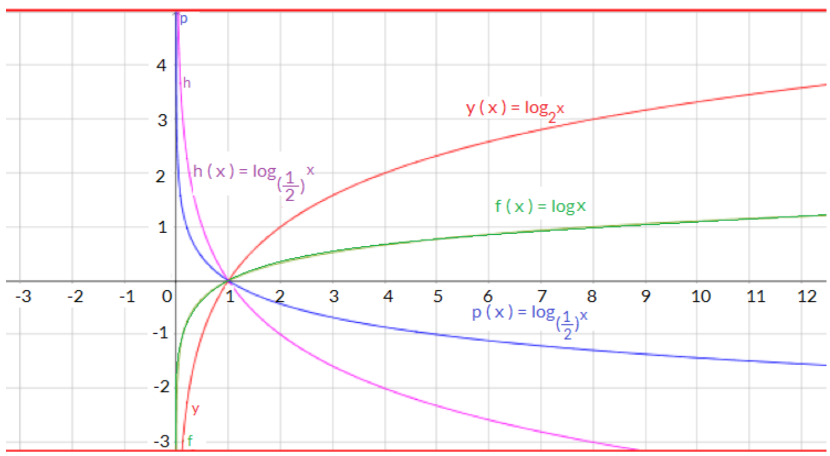


Figura 11. Funciones Logarítmicas. Curso en línea IUD

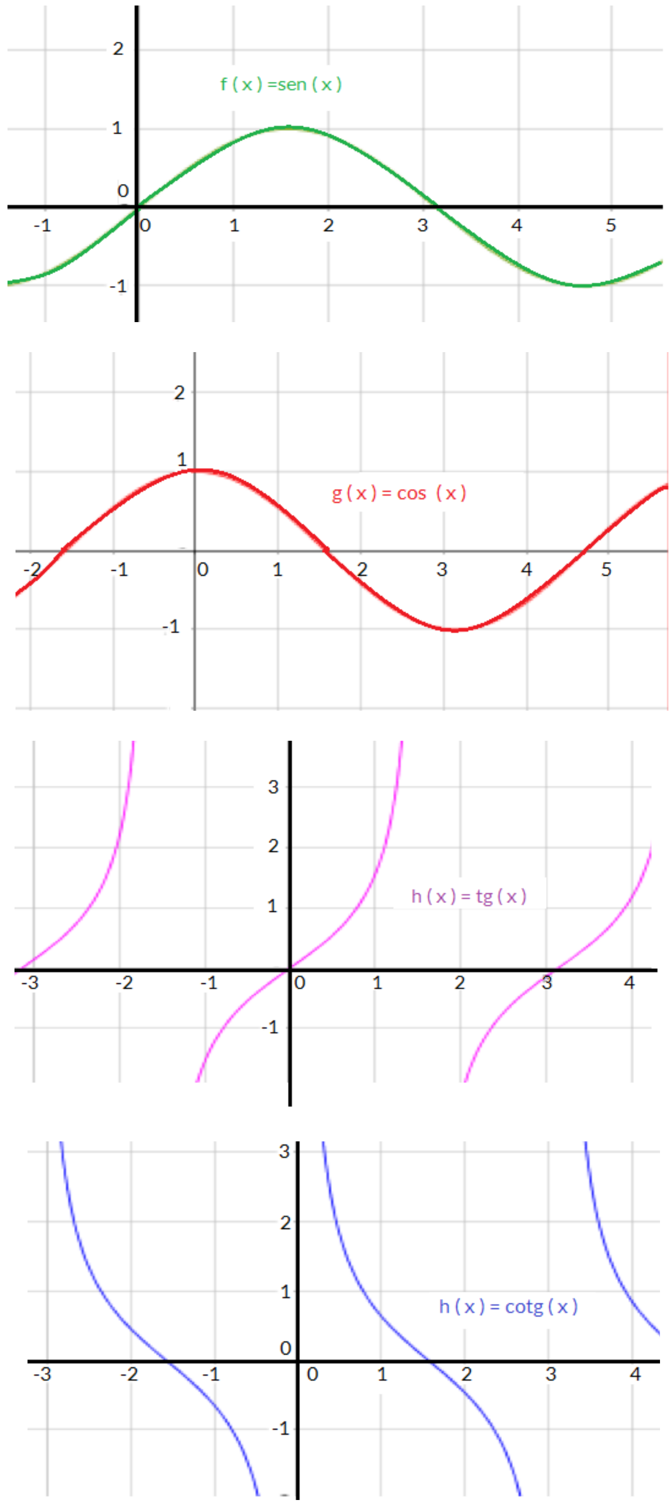
2.8 Trigonómetricas

Son aquellas derivadas de las razones trigonométricas de un ángulo. Las funciones son:

- Función **seno**: $f(x)=sen\ (x)$
- Función **coseno**: $f(x)=cos\ (x)$
- Función **tangente**: $f(x)=tg\ (x)$
- Función **cotangente**: $f(x)=cotg\ (x)$
- Función **secante**: $f(x)=\sec(x)$
- Función **cosecante**: $f(x)=\csc(x))$
- Funciones **inversas**:
    - Función **arco seno**: $f(x)=arcsen\ (x)$
    - Función **arco coseno**: $f(x)=arccos\ (x)$
    - Función **arco tangente**: $f(x)=arctg\ (x)$

Por lo general, **el ángulo** se expresa en **radianes.**

PAGE * MERGE FORMA T36



Figuras 12-15. Funciones trigonométricas. Curso en línea IUD

contacto@iudigital.edu.co
(574) 219 83 32 ext. 8376
Cll 10Sur # 50E - 31. Medellín, Antioquia.
www.iudigital.edu.co

ORD No 74 de 2017 - Vigilado MinEducación

Tema 3
Operaciones entre funciones

TEMA 3: Operaciones entre funciones

En este tema se aprenderá sobre *las operaciones entre funciones*: **suma, resta, producto, cociente y composición de funciones.** Para ello es importante analizar los ejercicios planteados. Al finalizar, se realizarán operaciones entre distintas funciones por medio de la actividad propuesta, con el propósito de afianzar habilidades para el análisis algebraico de funciones.

Suma y resta

Dadas las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$, **la suma o resta** se define como:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

Donde el dominio resultante es la intersección entre los dominios de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$**.**

Producto

Dadas las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$, **el producto** se define como:

$(f \times g)\ (x)=f(x)\times g(x)$

Donde el dominio resultante es la intersección entre los dominios de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$.

Cociente

Dadas las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$, **el cociente** se define como:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ donde } g(x) \neq 0$$

Donde el dominio resultante es la intersección entre los dominios de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$, excluyendo los valores de **x** para los cuales $g(x)=\mathbf{0}$.

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x) = x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$ encontrar:

$(f+ g)(x)$ y su dominio.
$(f \times g)(x)$ y su dominio.
$(f/g)(x)$ y su dominio.

Solución
Para encontrar $(f+ g)(x)$ **se suman** las funciones, es decir:

$$(f+g)(x) = x - 3 + \sqrt{x-2}$$

Luego para encontrar el dominio, se halla primero el dominio de cada una de las funciones.

D_f**= (−∞,∞)** porque no tiene ninguna restricción.

D_g**= [2,∞)** porque las raíces deben ser positivas por tanto, $x-2 \geq 0; x \geq 2$ y este corresponde al intervalo **[2,∞)**

Entonces el $D_{f+g} = D_{f} \cap D_g$**= (−∞,∞)∩[2,∞)=[2,∞).**

Para encontrar $(f \times g)(x)$ **se multiplican** las funciones, es decir:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}}$$

Unidad 2
Límites

ORD No 74 de 2017 - Vigilado MinEducación

IU Digital de Antioquia INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

2.1 Definición de límite

La palabra límite se usa con frecuencia en el lenguaje cotidiano; por ejemplo, el límite de las tecnologías, el límite de la propia resistencia, estamos hasta el límite, etc. En todas las frases usadas, el límite hace referencia a una especie de cota que a veces no es alcanzable pero otras veces es superable.

El límite en el lenguaje matemático se refiere a lo mismo.

Tema 1
Límites

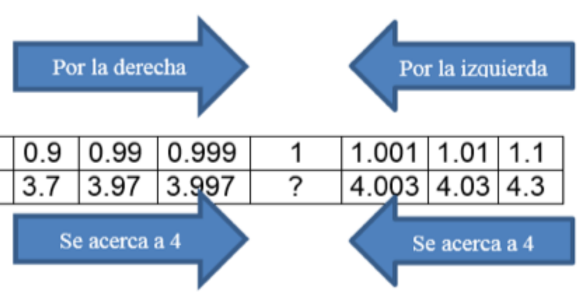
2.1.1 ¿Cómo hallar un límite?

Se avanza entre los conceptos básicos de límites, para lograr una aproximación a su definición por medio de tablas y gráficas, así como a las propiedades para poder calcularlos algebraicamente.

Tabulando

Se dice que la función f(x) se aproxima a un único número L cuando x se aproxima a c por ambos lados (derecha e izquierda); se dice entonces que el límite f(x) cuando x tiende a c es L y se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$



$$\lim_{x\to 1}(3x+1)$$

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$y = f(x)$	3.7	3.97	3.997	?	4.003	4.03	4.3

Figura 16. Cómo hallar un límite. Curso en línea IUD

contacto@iudigital.edu.co
(574) 219 83 32 ext. 8376
Cll 10Sur # 50E - 31. Medellín, Antioquia.
www.iudigital.edu.co
ORD No 74 de 2017 - Vigilado MinEducación

Observar que al x acercarse a 1 por la derecha, f(x) se acerca a 4 y cuando x se acerca a 1 por la izquierda f(x) también se acerca a 4; por lo tanto, el límite de esa función es 4 y se escribe así:

$$\underset{x \to 1}{Lím}(3x+1) = 4$$

Gráficamente

Los límites se pueden hallar a través de la a aproximación de x a c por ambos lados, observar el siguiente ejemplo:

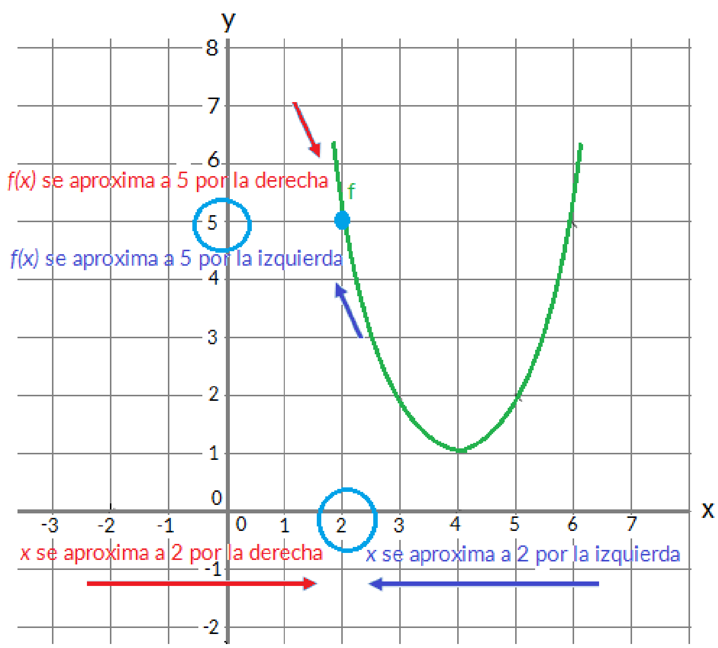


Figura 17. El límite representado de forma gráfica. Curso en línea IUD

Tema 2

Propiedades de los Límites

TEMA 2: Propiedades de los límites

Para el cálculo algebraico de un límite se debe:

-Evaluar un límite usando las propiedades de los límites.
-Buscar la mejor estrategia para el cálculo de límites.
-Si el límite no se puede calcular a simple vista, usar técnicas de cancelación y racionalización.

En muchas ocasiones, para encontrar un límite se deben utilizar estrategias porque a' evaluarlo directamente da una determinación, es decir 0/0.

2.2.1 Técnica de cancelación

Generalmente se usa cuando es posible observar en la expresión que se puede factorizar, ejemplo, encontrar:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2}{x-2}$$

Al evaluarlo daría la indeterminación **0/0**; por tanto, se debe usar la técnica de cancelación y para ello factorizar el numerador y cancelar los factores que se puedan.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

2.2.2 Técnica de racionalización

Se usa cuando al evaluar el límite directamente da la indeterminación **0/0** y existen raíces en la expresión, ejemplo, encontrar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

Al evaluar el límite directamente, genera una indeterminación de **0/0**, como hay raíces se debe usar racionalización y calcular así:

$$\sqrt{x+4}-2 \qquad \sqrt{x+4}-2 \quad \sqrt{x+4}+2 \qquad \left(\sqrt{x+4}\right)^2 - 2^2$$

Tema 3
Continuidad

TEMA 3: Continuidad

En este tema se conocerá la definición de continuidad, cuáles son sus criterios y cómo son sus respectivas gráficas.

La definición de continuidad tiene el mismo significado que el lenguaje cotidiano, no presenta alguna interrupción. Matemáticamente, la continuidad se establece cuando una función no presenta interrupciones en sus puntos, no tiene saltos ni vacíos en un punto determinado.

En una función existen tres formas para determinar que no es continua en un punto dado ***c*,** como se muestra:

3.1 Criterios de continuidad

Criterio

Cuando el límite de una función no existe en un punto dado, se dice que la función no es continua en ese punto. En la gráfica se observa que la función no es continua en x=1.

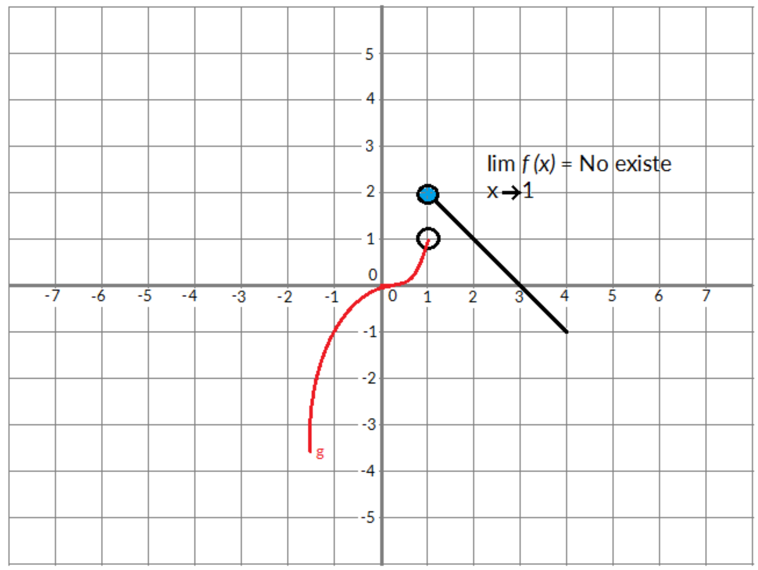


Figura 18. Criterio de continuidad 1. Curso en línea IUD

Criterio

Cuando el límite de la función existe y la imagen existe, pero estos dos números no son iguales, se dice que la función no es continua en ese punto. En la gráfica se observa que el límite de la función cuando X tiende a 1 es 1, y la imagen de 1 es -1; como estos dos valores con distintos, se dice que la función no es continua en x=1.

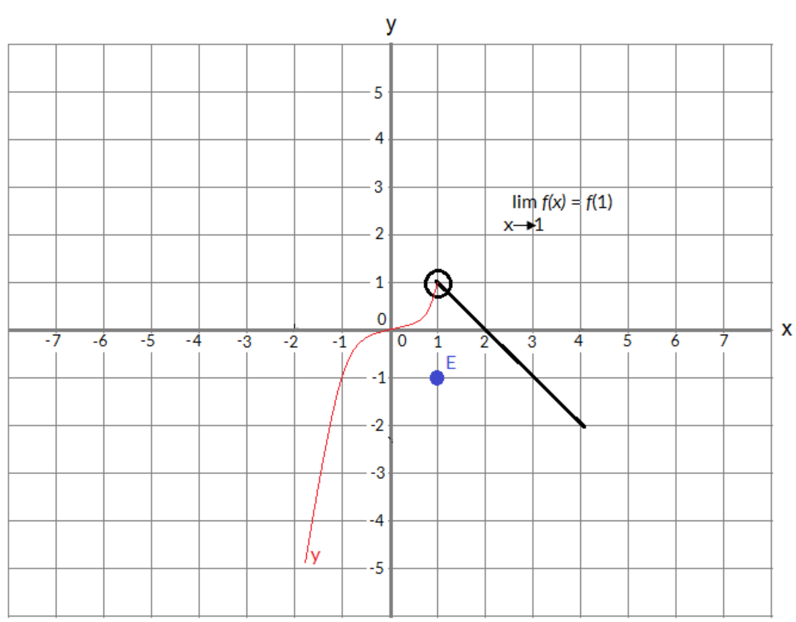


Figura 19. Criterio de continuidad 2. Curso en línea IUD

contacto@iudigital.edu.co
(574) 219 83 32 ext. 8376
Cll 10Sur # 50E - 31. Medellín, Antioquia.

Criterio

Cuando la imagen dela función no existe, no es continua en el punto. En este caso, la imagen de 1, no existe; por lo tanto, la función no es continua en x=1.

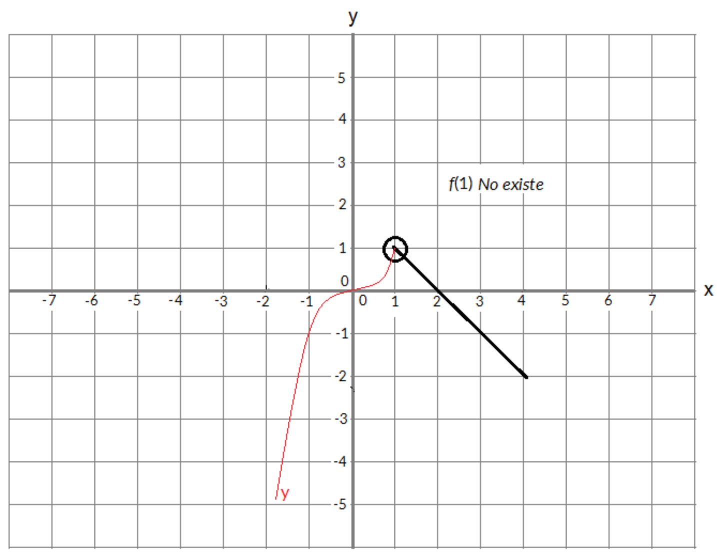


Figura 20. Criterio de continuidad 3. Curso en línea IUD

Ejemplo de Criterios de continuidad: Encontrar la continuidad de las siguientes funciones:

Ítem A

$$f(x) = \frac{5x - 1}{x^2 - 1}$$

Para la solución del ítem A, se debe tener en cuenta que, al existir cocientes, los denominadores no deben ser cero; es decir, se deben encontrar aquellos puntos en los cuales son 0.

En el caso de la función f(x), los valores críticos son x=1 y x=-1, pues al reemplazarlos el valor será cero; por consiguiente, la función no es continua en estos dos puntos.

Ítem B

Para la solución del ítem B, la función no está definida cuando x=1; por lo tanto, la función no es continua en ese punto.

$$g(x)=\begin{cases} 3x-1; & x<1 \\ -x^2+2; & x>1 \end{cases}$$

Unidad 3
Derivadas

UNIDAD III: DERIVADAS

TEMA 1: DERIVADAS

En esta unidad se abordan los conceptos de relación y función matemática, con los elementos que se derivan de estas definiciones. Para la interpretación de razón de cambio, tema central del curso es indispensable conocer las clases de funciones y sus gráficas.

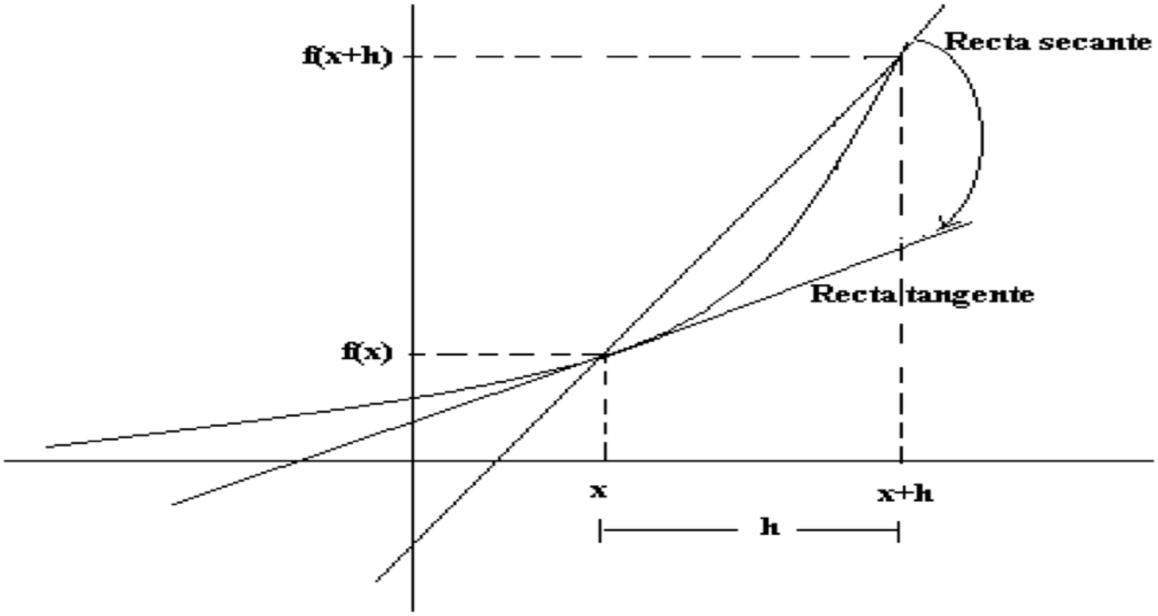
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

PAGE * MERGEFORMAT36

Tema 1
Derivadas

Derivadas

Se recomienda analizar la Figura 21 para comprender bien el proceso.



$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Figura 21. Definición de derivada. Curso en línea IUD

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P $(x, f(x))$, es:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3.1 Ejemplo derivadas

Es aconsejable revisar la Figura 22 y completar el algoritmo para obtener el resultado final. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función.

$f(x) = \sqrt{x}$ en el punto (4,2)

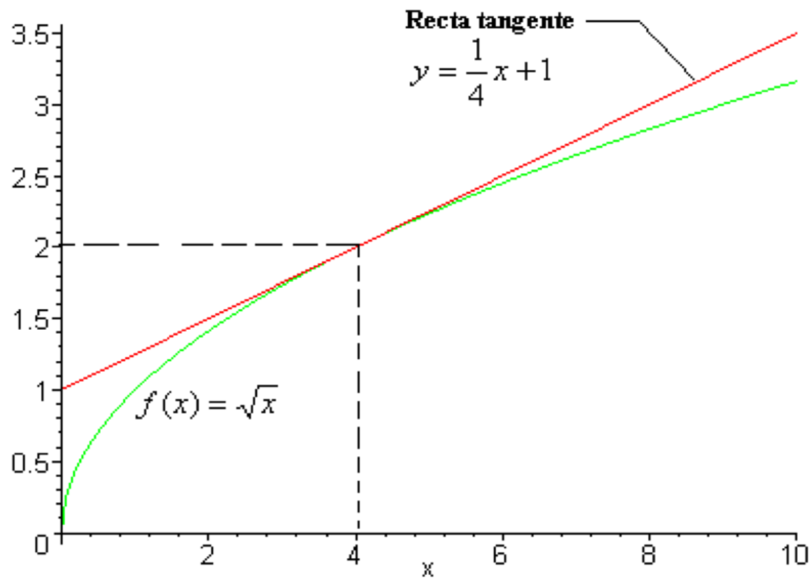


Figura 22. *Ecuación de la recta tangente. Curso en línea IUD*

Tema 2
Reglas de derivación

3.2 Reglas de derivación

Se presentan las reglas de derivación; luego, varias situaciones problema para analizar, a modo de ejemplo, con la solución, para avanzar en la comprensión de su aplicabilidad. Revisar las tablas de reglas de derivación y funciones trigonométricas.

Regla- fórmula

Regla de la constante $$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Regla de las potencias $$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Regla del múltiplo constante $$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

Regla de suma y diferencia $$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

Regla del producto $$\frac{d}{dx}[f(x) \times g(x)] = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

Regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) + f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, donde\ g(x) \neq 0$$

Funciones Trigonométricas

Derivada del seno $$\frac{d}{dx}[senx] = cosx$$

Derivada del coseno $$\frac{d}{dx}[cosx] = -senx$$

Derivada de la tangente $$\frac{d}{dx}[tanx] = sec^2x$$

Derivada de la cotangente $$\frac{d}{dx}[ctgx] = csc^2x$$

Derivada de la secante $$\frac{d}{dx}[secx] = secx\ tanx$$

Derivada de la cosecante $$\frac{d}{dx}[cscx] = -cscx\ tanx$$

Regla de la cadena $$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

3.2.1 Aplicación de la regla

Una vez conocidas las reglas de derivación, es básico aprender cómo aplicarlas: Se bombea aire a un globo esférico, de tal modo que su volumen aumenta con una rapidez de 100 cm^3/s. ¿Con qué rapidez aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

Información dada

La rapidez con que aumenta el volumen del aire es de 100 cm^3/s.

Información desconocida

La rapidez aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm.

¿Cómo hallar el volumen?

El volumen de un globo se halla por medio de la siguiente expresión donde es más clara la relación entre el volumen y el radio; y por lo tanto, también de sus razones de cambio.

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Se denota a $\boldsymbol{V}$ como el volumen y a $\boldsymbol{r}$ como el radio del globo; como estas dos variables son funciones del tiempo, se notará a $\boldsymbol{dV/dt}$ como la razón de cambio del volumen respecto al tiempo y a $\boldsymbol{dr/dt}$ como la razón de cambio del radio, respecto al tiempo.

Solución

Como el problema pide razones de cambio, se debe derivar la ecuación No. 1, esto es:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \cdot r^2 \frac{dr}{dt}$$

Despejando la cantidad desconocida $\boldsymbol{dr/dt}$, esto es:

$$\frac{1}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

Reemplazando por las variables conocidas, esto es:

$$\frac{1}{4\pi \cdot (25)^2} \cdot 100 = \frac{dr}{dt} = \frac{1}{25\pi}$$

Por tanto, el radio del globo aumenta con una razón de cambio de $1/25\pi\ cm/s$

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

Tema 3
Criterio de primera y segunda derivada

PAGE * MERGEFORMAT36

3.3 Criterio de primera y segunda derivada

Se explica de qué se trata y cuál es la forma que lo expresa, mediante un ejemplo, con ello, será posible realizar ejercicios para relacionar todo lo aprendido.

Criterio de primera derivada

¿Qué es?

El criterio de la primera derivada permite determinar los puntos máximos y mínimos de una función como los intervalos en que se presenta creciente o decreciente. Tener en cuenta:

Si $f(x)$ es derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

Si $f(x)$ es derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

Al determinar los intervalos en que crece o decrece una función, se pueden determinar los mínimos o máximos.

Ejemplo

Dada la función $y=x^3-27x$, encontrar los intervalos en que es creciente, decreciente, puntos máximos, puntos mínimos.

Calcular su derivada para estudiar su signo, $y' = 3x^3 - 27$

Solución

Después de encontrar la derivada, encontrar los puntos críticos haciendo $y'=0$

$3 \cdot (x^2 - 9) = 0$

$3 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) = 0$

Puntos críticos $x = 3$ y $x = -3$

Se construyen los siguientes intervalos: (-∞,-3), (-3, 3) y (3,∞)

Para determinar el signo resultante

	(-∞,-3)	(-3, 3)	(3,∞)
3	+	+	+
(x+3)	-	+	+
(x-3)	-	-	+
Signo y'	+	-	+

Se concluye que la función:

Crene en (-∞,-3)∪(3,∞)

Drecene en (-3,3)

Criterio de segunda derivada

¿Qué es?

Si una función es derivable dos veces, se tiene:

Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava

Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es convexa

PAGE * MERGEFORMAT 36

Solución

Siguiendo con el ejemplo anterior, la segunda derivada es: $y'' = 6x$

Luego se encuentra el punto de inflexión haciendo y''=0

Es decir que: $6x$=0
x=0 es el punto de inflexión

Se construyen los siguientes intervalos: (-∞,0), (0,∞) para determinar el signo resultante.

	(-∞,0)	(0,∞)
6x	-	+
Sgino y''	-	+

Se concluye que la función:

Es cóncava en: (0 , ∞)
Es convexa en: (-∞,0)

si

Glosario

Cálculo
Rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las cantidades que varían continuamente y las relaciones entre ellas.

Contradominio
Conjunto de todos los valores que la función puede tomar.

Derivada
Es la mejor aproximación lineal a una función en un punto. La derivada de una función evaluada en un punto, siempre es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

PAGE * MERGE FORMA T36

Dominio
El dominio D de una función es el conjunto formado por todos los valores que la función puede aceptar para devolver un único valor por cada uno de ellos.

Función
Una función f es continua en un intervalo dado [a, b] si toma todos los valores entre f (a) y f (b) y se puede dibujar en ese intervalo, sin despegar la punta del lápiz del papel sobre el cual se le dibuja.

Función continua
Situación en la que el precio marcado ha llegado al nivel en el cual la cantidad ofrecida equivale a la cantidad demandada.

Función derivable

Una función y = f (x) es derivable en un punto x0 de su dominio si la derivada de la función y 0(x0) = f 0(x0) está definida en ese punto. Una función es derivable en un intervalo (a, b) si es derivable en cada punto de ese intervalo.

Función par
Función que tiene la propiedad: f (-x) = f (x).

Función simétrica
Una función puede ser simétrica respecto al eje y si al sustituir -x en lugar de x y al simplificar obtener la misma ecuación.

Gráfica
La gráfica de una ecuación o de una función es el conjunto de todos los puntos del plano que la satisfacen.

Límite
El límite de la función f cuando la variable independiente tiende a un valor constante c se denota por: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y L representa el valor al cual se acerca conforme los valores de x se aproximan más al valor k, en caso de que el límite exista.

Punto crítico
En una curva, el punto crítico es el punto donde una recta tangente a la curva es horizontal.

Punto de inflexión
En la gráfica de una curva, el punto de inflexión corresponde al punto donde la concavidad de la gráfica cambia. El punto de inflexión se puede calcular con la segunda derivada de la función, porque precisamente donde la segunda derivada se hace cero, la gráfica de la función cambia de concavidad.

Punto de tangencia
Punto en el cual una recta toca tangentemente a una curva.

Razón de cambio
Razón por la cual una cantidad varía con respecto de otra. Si el valor de y depende de x de acuerdo a y = f (x), la razón de cambio de y con respecto a x, corresponde a la derivada de y respecto de x.

Relación

Forma de comparar dos elementos de un mismo conjunto. Una relación se define como un par ordenado de elementos de un conjunto, donde $a, b \in M \quad M : (a, b)$

Tangente
La tangente a una curva es una línea recta que toca a la curva en solo uno de sus puntos.

Teorema
Proposición que requiere de demostración.

Bibliografía

Acosta, J., Riquenes, M & Díaz, M. (2014). Funciones continuas. En *Límites y continuidad de funciones reales de una variable* (pp. 34 – 48). La Habana, Cuba: Editorial universitaria. Recuperado de https://bit.ly/2OIgqzB

Camacho, A. (2008). Cálculo Diferencial. México, México: Díaz de Santos. Recuperado de https://bit.ly/2Yvtm0o

Curo, A. (2015). Matemática básica para administradores. (pp. 197 – 234). Lima, Perú: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Recuperado de https://bit.ly/2Ytnbd1

Gómez, G. (2010). *Introducción al cálculo diferencial.* México, México: Instituto Politécnico Nacional. Recuperado de https://bit.ly/2Kh3GvA

Guerrero, G. (2014). *Cálculo Diferencial*. México, México: Grupo Editorial Patria. Recuperado de https://bit.ly/2YKMWkr

Martínez, A., & Juárez, J. & Vizcarra, F. (2014). Cálculo I. Cálculo Diferencial por competencias para bachillerato [en línea]. Recuperado de: https://bit.ly/2KgYBDz

Ramírez, A & Cárdenas, J.C. (2001). Gráficas y Funciones. En: *Matemática universitaria: conceptos y aplicaciones en ingeniería* (pp. 110 – 146). San José, CR: Editorial Cyrano. Recuperado de https://bit.ly/2YERw83

Robledo, V. (2014). Introducción a las matemáticas: ejercicios y problemas. México, México: Grupo Editorial Patria. Recuperado de https://bit.ly/2ZBF324

Complementaria

Moreno, Y. (2017). Módulo del curso del cálculo. Colombia: ETdeA.

contacto@iudigital.edu.co
(574) 219 83 32 ext. 8376
Cll 10Sur # 50E - 31. Medellín, Antioquia.
www.iudigital.edu.co

Purcell & Varberg & Rigdon. (2001). Cálculo (8a edición). México, México: Pearson Educación.

Stewart, J. (1999). Cálculo. Conceptos y contextos. México, México: Thomson Editores.

Audiovisuales

AMR Education. (2014, abril 8). *Cómo crear gráficas en Geogebra. Gráficas simples y mediante intervalos* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/31n8w0c

Cogollo, J. (2013, diciembre 4). *Continuidad de una función – Ejercicio resuelto* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/31kxugz

Cogollo, J. (2013, diciembre 1). *Recta tangente a una curva – Ejercicios resueltos* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2TaAedN

Curso Épsilon (2017, febrero 12). *Derivada por regla de la cadena* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2YL4ctY

EduMates. (2010, abril 4). *Concepto y ejemplo de función* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2GSeYUW

EduMates. (2013, abril 16). *Funciones: Tablas y gráficas* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2Ta7cLe

EduMates. (2013, marzo 26). *Funciones1* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2MJl3qO

EduMates. (2013, junio 11). *Funciones2* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2Zxe8Ex

Facultad de Estudios a Distancia UMNG (2014, septiembre 24). *Aplicación de la derivada a problemas de optimización* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2OIaw1m

Fisimat (2017, febrero 23). *Derivación implícita – Ejemplo # 1* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2GOfjbu

Guerrero, C. (2015 marzo 3). *Combinación y composición de funciones* [archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2s7HdGC

Julioprofe (2010, enero 24). *Límites a partir de la gráfica de una función* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2MJpd1Q

Laracos Math. (2012, noviembre 18). *Máximos y mínimos paso a paso (primera y segunda derivada)* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2YqfRPz

Mate – ITTepic (2014, septiembre 9). *Definición gráfica de límite* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2KjPq5l

MMath2me (2011, abril 29). *Límites algebraicos* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2ODap7d

Math2me (2011, mayo 8). *Límites indeterminados* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2M33wKw

Math2me (2011, mayo 26). *Límites indeterminados con raíces* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2OL68ii

Math2me (2016, diciembre 7). *Derivar con regla de la cadena* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/33ckzzf

Pascualbravovirtual (2013, junio 6). *Concepto Intuitivo de límite método numérico* [Archivo de video]. Recuperado de https://bit.ly/2YKOP4S

Créditos

Institución Universitaria Digital de Antioquia

Experto temático: Yeimy Julieth Moreno Jiménez

Fecha de creación: versión 1/ Agosto 2019

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

PAGE * MERGEFORMAT 36

contacto@iudigital.edu.co
(574) 219 83 32 ext. 8376
Cll 10Sur # 50E - 31. Medellín, Antioquia.

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA