INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

Desarrollo de contenido

Unidad 1

Algebra Lineal

ORD No 74 de 2017 · VIGILADA MinEducación

Glosario

D

Despejar una incógnita

Separar una incógnita de los valores que la acompañan en una ecuación.

Determinante

Si es una matriz 2 x 2, se define el determinante de la matriz A, y se expresa como det(A) o bien |A|.

E

Ecuación lineal

Es un planteamiento de igualdad, involucrando una o más variables a la primera potencia, que no contiene productos entre las variables; es decir, una ecuación que involucra solamente sumas y restas, de una variable a la primera potencia.

Espacio vectorial

Es un conjunto de elementos llamados vectores, y un conjunto de números reales llamados escalares, con 2 operaciones: la adición vectorial y la multiplicación por un escalar.

G

Gauss Jordan

Consiste en hacer transformaciones elementales en las filas de la matriz, para llegar a obtener la matriz identidad.

Pregunta orientadora

¿Qué es el Álgebra Lineal?

Introducción

Probablemente en alguna experiencia educativa pasada te has encontrado con sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, suponga en la localidad donde se encuentra su lugar de residencia existen unos predios categorizados de la siguiente manera: residencial, comercial y mixto. Se sabe que los precios de venta por metro cuadrado para cada uno de estos predios son de $4.000.000, $2.000.000 y $ 5.000.000 respectivamente. Si un inversionista adquiere 100 metros cuadrados por un total de $700.000.000, ¿cuántos metros cuadrados de cada tipo de predio se vendieron?

Uno de los primeros objetivos de este curso es desarrollar diferentes métodos que nos ayudaran a resolver distintos sistemas de ecuaciones lineales de manera precisa y con las condiciones necesarias para ser implementados en diferentes herramientas computacionales.

Es importante reconocer que en la vida cotidiana y en los diversos ámbitos profesionales, se requiere solucionar problemas a partir del análisis de datos e información numérica, por esto el estudio y la comprensión de los contenidos del curso Álgebra Lineal es esencial en este programa de formación.

Resultados de aprendizaje

Resultado de aprendizaje general

- Reconocer y aplicar las teorías, métodos y técnicas del Álgebra Lineal, dentro de la matemática y fuera de ella.

Resultados de aprendizaje específicos

- Reconocer la estructura de espacio vectorial y de transformación lineal en diferentes contextos.
- Calcular el rango de sistemas vectoriales utilizando tanto métodos no computacionales, como software matemático.
- Reconocer la dimensión de un espacio vectorial.
- Calcular el determinante de matrices de bajas dimensiones, utilizando métodos no computacionales. Además, calcular el determinante de matrices de dimensiones superiores, utilizando software matemático.

Unidad 1. Repaso de trigonometría, línea recta y sistemas de ecuaciones 2x2

El estudio del álgebra lineal es transversal a las distintas áreas del conocimiento, debido a su carácter aplicativo, robusto y útil para la solución de problemas que involucran diferentes variables.

En esta unidad introductoria se abordan tres aspectos fundamentales para el estudio del algebra matricial, los espacios vectoriales y, especialmente, el plano y el espacio (R^2 y R^3). Se trata de un breve repaso para consolidar algunas nociones de la trigonometría, las características de la línea recta y la solución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Esta revisión te será de ayuda para iniciar el estudio del álgebra lineal, permitiéndote afianzar conocimientos previos y ganar confianza para el desarrollo del contenido temático.

¡Tu recorrido comienza aquí! ¡Muchos éxitos!

1. Trigonometría: triángulos, el teorema de Pitágoras y razones trigonométricas

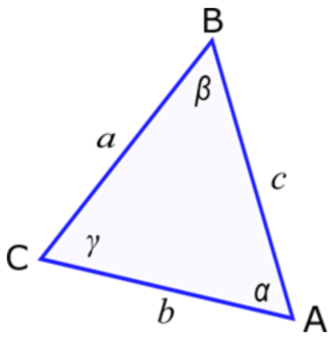


Figura 1. Partes de un triángulo. A, B y C son los vértices del triángulo; a, b, c son los lados del triángulo y α, β, y γ son los ángulos del triángulo.

Uno de los problemas más antiguos de la geometría implica las relaciones y proporciones entre los lados que componen un triángulo, este último entendido como un polígono conformado por 3 lados y 3 ángulos.

Los triángulos son importantes porque suelen aparecer en aplicaciones como, por ejemplo: la descomposición de fuerzas en un diagrama de cuerpo libre en la dinámica; en la cinemática para analizar movimientos en 2 dimensiones; e incluso en problemas de mayor complejidad como el diseño de estructuras (puentes o arcos), entre otras.

La figura presenta los vértices del triángulo como A, B y C. Mientras que los lados se denominan a, b, c. Asimismo, los ángulos del triángulo se nombran α, β, γ.

Ahora bien, cuando hablamos de resolver un triángulo, en realidad buscamos obtener los valores de los tres lados y los tres ángulos que lo componen.

Por consiguiente, el primer tema de esta unidad introductoria tiene por objetivo explorar las herramientas necesarias para resolver un triángulo, particularmente, un triángulo rectángulo.

Trigonometría: triángulos

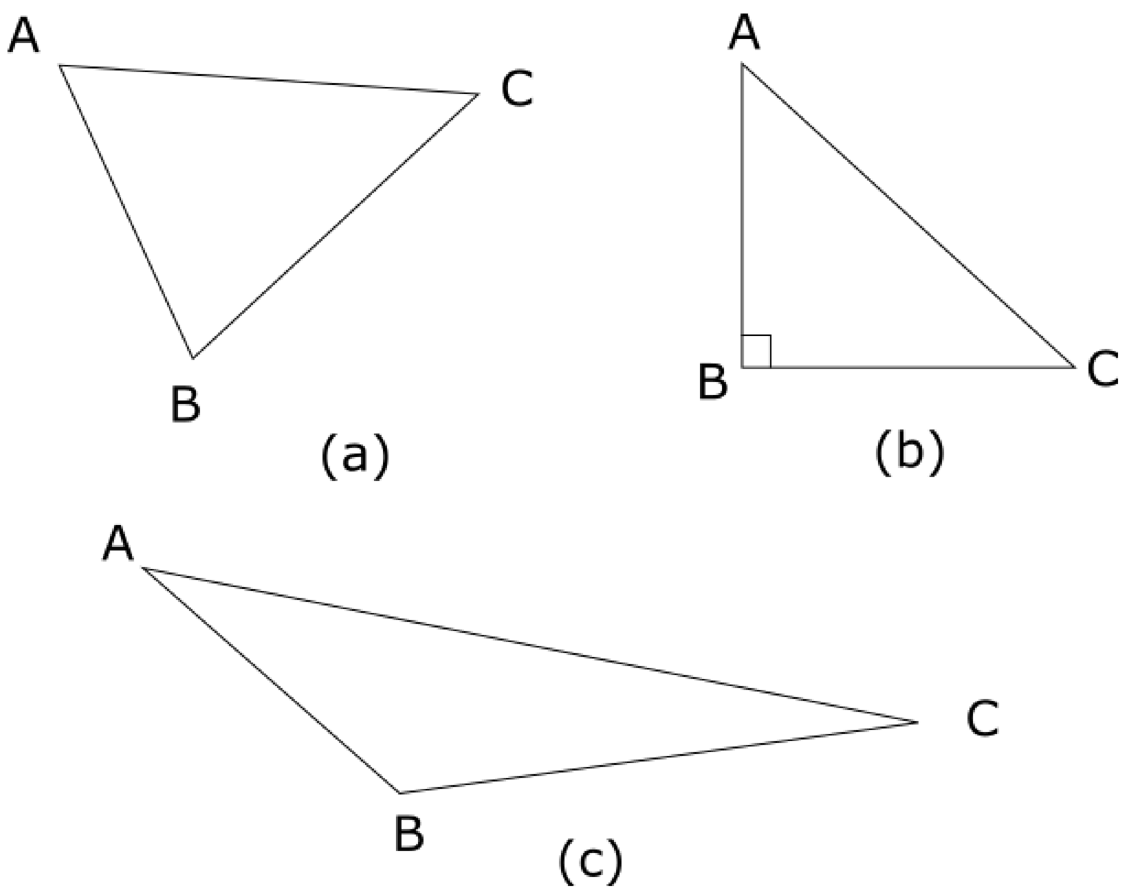


Figura 2. Tipos de triángulo: (a) triángulo agudo; (b) triángulo obtuso; y (c) triángulo rectángulo.

La figura anterior presenta tres tipos de triángulo: agudo (a), obtuso (b) y rectángulo (c). La principal diferencia entre ellos radica en la medida de sus ángulos internos.

Veamos esto con más detalle a continuación.

Para comenzar, recuerda que la suma total de los ángulos internos de un triángulo debe ser 180°, sin importar la medida de cada uno.

Así pues, si los ángulos tienen medidas menores a 90°, se trata de un triángulo agudo (como el triángulo (a) de la figura 1). Al contrario, si los ángulos son mayores a 90°, se considera un triángulo obtuso. A estos dos tipos de triángulos se les suele llamar oblicuos.

Finalmente, si posee un ángulo con una medida exacta de 90°, se denomina triángulo rectángulo. Este último tipo es de gran interés, ya que permite definir conceptos como el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.

Trigonometría: el teorema de Pitágoras

Para entender mejor el teorema, observa el triángulo (c) de la figura 1.

El teorema de Pitágoras establece que, en un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto (denominado hipotenusa), y que es el más largo en el triángulo, es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los otros dos lados, denominados catetos. Es decir, se cumple que:

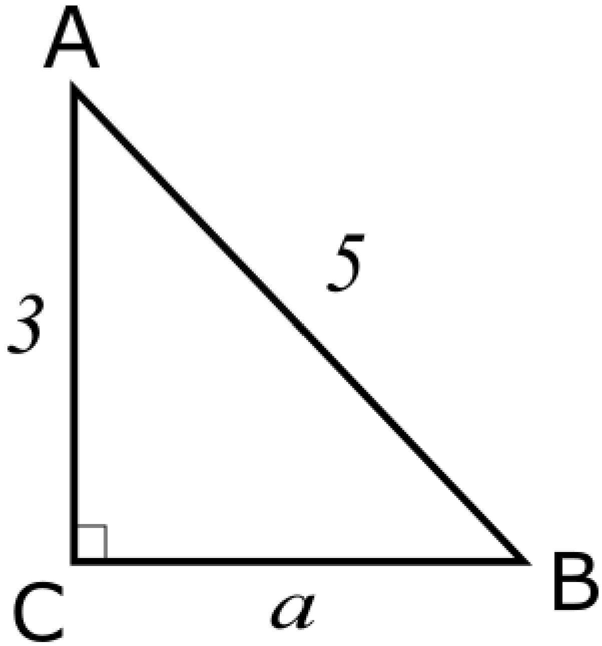
$$h^2 = C_1^2 + C_2^2$$

Donde C_1 y C_2 son las medidas de los catetos del triángulo.

Esta expresión puede ser usada cuando, en un triángulo rectángulo, se conocen dos de los tres lados, pues basta identificar la hipotenusa y nombrar los dos lados restantes como C_1 y C_2 para despejar la expresión: $h^2 = C_1^2 + C_2^2$

Ejemplo 1

Considera el siguiente triángulo rectángulo y determina la medida del lado faltante.



Solución:

De este triángulo conocemos la medida de la hipotenusa, $h = 5$, y la de un cateto $C_1 = 3$. Es posible, por lo tanto, usar el teorema de Pitágoras para hallar el valor del cateto faltante (a).

Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$5^2 = 3^2 + a^2$$

Al despejar a: $a^2 = 5^2 - 3^2$

Después, tomando la raíz cuadrada, tenemos:

$$a = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16 = 4}$$

De esta manera, obtenemos la medida de los tres lados del triángulo.

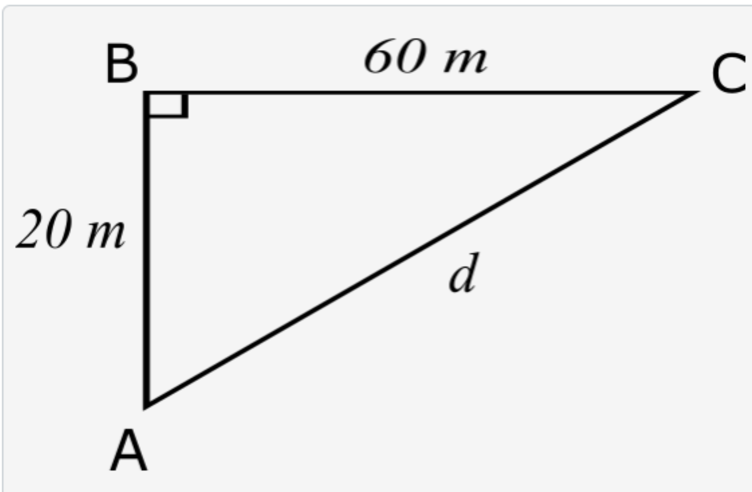
Ejemplo 2

Un auto comienza su viaje hacia el norte desde el punto A. Cuando llega a una esquina, en el punto B, ubicado a 20 m del punto inicial, dobla hacia la derecha y recorre una distancia de 60 m hasta llegar al punto C.

¿Cuál es la distancia que separa los puntos A y C?

<u>Solución:</u>

Podemos representar el problema por medio del siguiente triángulo rectángulo:



Se nos pide hallar el lado d, que es precisamente la distancia que hay entre en punto A y el punto C. Debido a que ya conocemos dos lados del triángulo, es posible aplicar el teorema de Pitágoras, así:

$d^2 = (20m)^2 + (60m)^2$

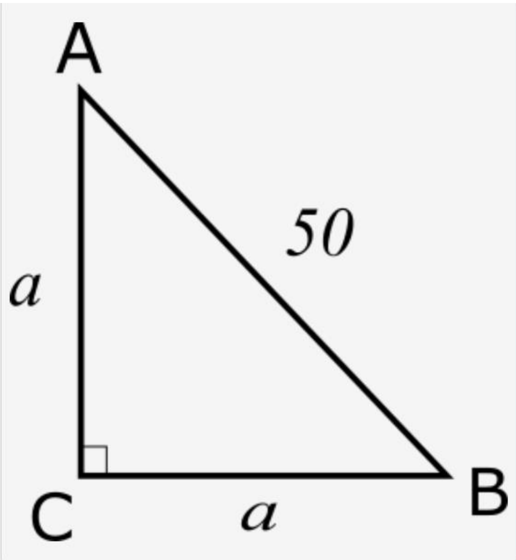
Donde: $d^2 = 400m^2 + 3600m^2 = 4000m^2$

De este modo: $d = \sqrt{4000m^2} = 63.24m$

Ejemplo 3

Considera un triángulo rectángulo isósceles, es decir, que tiene dos lados con igual medida. La hipotenusa de dicho triángulo tiene una medida de 50 unidades. A partir de lo anterior, determina las medidas de los lados restantes.

Solución:



El triángulo de la figura representa las características del enunciado. En ella podemos observar que ambos catetos son iguales, y están nombrados como a. Si aplicamos el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$50^2 = a^2 + a^2$

Luego de reemplazar los valores, tenemos como resultado: $50^2 = 2a^2$

Al despejar a, nos queda: $\frac{2500}{2} = a^2$

Por lo tanto: $a = \sqrt{1250} = 35.35$ unidades

De este modo obtenemos el valor los tres lados del triángulo.

Trigonometría: razones trigonométricas

Debido a que los problemas de aplicación generalmente tienen el objetivo de resolver un triángulo, el teorema de Pitágoras no es suficiente, ya que presenta dos limitaciones:

- No ofrece una estrategia para determinar los ángulos internos del triángulo.
- Solo es aplicable a triángulos rectángulos de los cuales se conozcan dos lados.

En consecuencia, se advierte la necesidad de desarrollar herramientas que puedan relacionar los ángulos de un triángulo con sus lados. En otras palabras, debemos buscar la manera de determinar los seis valores que definen un triángulo: sus tres lados y sus tres ángulos.

Aunque las razones trigonométricas que se definen a continuación solo remedian la primera limitante, son suficientes para el repaso que estamos realizando en esta unidad.

Para abordar dicha limitación, debemos emplear las razones trigonométricas definidas en un triángulo rectángulo, las cuales cumplen con relaciones de proporcionalidad entre triángulos semejantes. Es decir, estas razones solo dependen de los ángulos, y tienen el mismo valor para cualquier grupo de triángulos que sean semejantes (Swokowsky & Cole, 2012).

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo, y enfoquémonos en uno de sus ángulos internos diferente al de 90°, por ejemplo, el ángulo β. Definamos ahora las razones trigonométricas a partir de dicho ángulo.

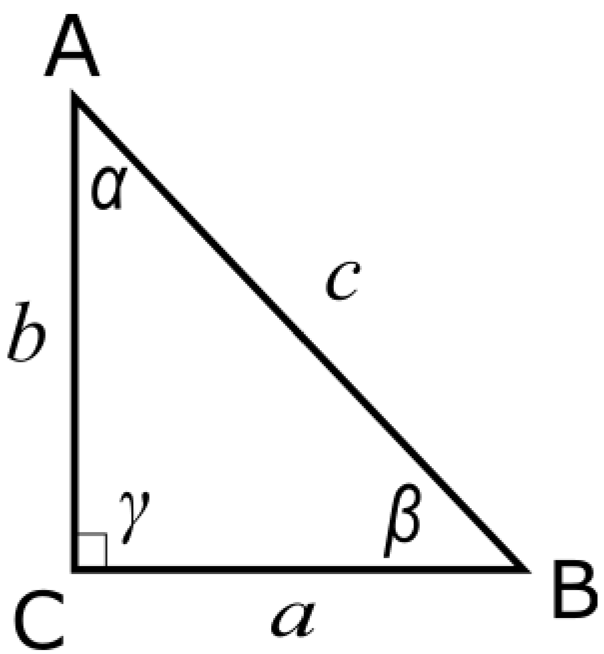


Figura 3. Partes de un triángulo rectángulo.

Veamos, a continuación, las partes de un triángulo rectángulo, tomando como ejemplo la figura 3:

- El ángulo recto es el ángulo $\gamma = 90^0$
- **Seno:** relación (división) entre el lado opuesto al ángulo seleccionado (β) y la hipotenusa. Esto es: $sen(\beta) = \frac{b}{c}$
- **Coseno:** relación entre el lado adyacente al ángulo seleccionado y la hipotenusa. Esto es: $cos(\beta) = \frac{a}{c}$
- **Tangente:** relación entre el lado opuesto al ángulo seleccionado y el lado adyacente. Esto es: $tan(\beta) = \frac{b}{a}$
- **Cosecante:** inverso del seno, es decir, la relación entre la hipotenusa y el lado opuesto al ángulo. Esto es: $csc(\beta) = \frac{c}{b}$
- **Secante:** inverso del coseno, es decir, la relación entre la hipotenusa y el lado adyacente al ángulo seleccionado. Esto es: $sec(\beta) = \frac{c}{a}$
- **Cotangente:** inverso de la tangente, es decir, la relación entre el lado adyacente al ángulo seleccionado y el lado opuesto. Esto es: $sen(\beta) = \frac{a}{b}$

Dentro de las definiciones anteriores debemos entender el lado opuesto al ángulo como aquel cateto del triángulo que no forma el ángulo, por ejemplo: el cateto b no forma al ángulo β, pues este se forma por el cateto a y por la hipotenusa c.

En este sentido, el lado adyacente a un ángulo se entiende como el cateto que forma el ángulo, es decir, el cateto a. De manera que el orden de los catetos cambia solo cuando también lo hace el ángulo analizado. En consecuencia, es posible afirmar que las razones trigonométricas cambian si analizamos α en lugar de β.

Trigonometría: solución de triángulos rectángulos

Ejemplo 4

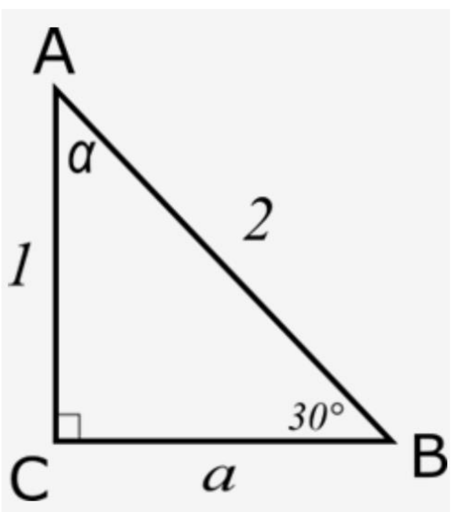
Resolvamos un triángulo rectángulo donde se cumple que:

$$Sen(30°) = \frac{1}{2}$$

Solución

Además de la información que nos suministra el enunciado, también debemos apoyarnos en la definición de la razón **seno**.

Así las cosas, ya conocemos el valor del cateto opuesto al ángulo de 30° y el valor de la hipotenusa. Con ayuda de estos datos, podemos construir un triángulo como el de la siguiente figura para ilustrar mejor el problema.



Recuerda que la suma de los ángulos internos de un triángulo debe sumar 180°.

Entonces, para comenzar, podemos plantear la siguiente ecuación:

$30^0 + 90^0 + \alpha = 180^0$

Despejamos α y obtenemos:

$\alpha = 180^0 - 90^0 - 30^0 = 60^0$

Luego, aplicando el teorema de Pitágoras, se cumple que:

$2^2 = 1^2 + \alpha^2$

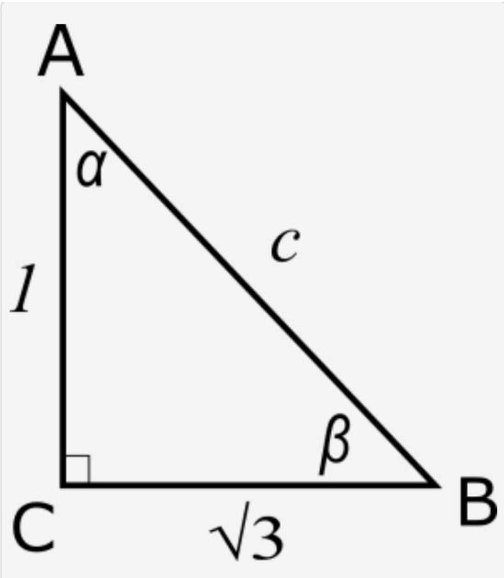
Despejando a, tenemos:

$a = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Así, el triángulo queda resuelto.

Ejemplo 5

Resolver el triángulo rectángulo que se aprecia en la siguiente figura.



Solución:

Tal y como puedes observar, se desconocen los valores de dos ángulos y la hipotenusa. Entonces, para obtener el valor de c, podemos usar el teorema de Pitágoras, pues se conocen dos lados del triángulo. En consecuencia, obtenemos:

$c^2 = 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$

Al realizar las operaciones correspondientes, tenemos:

$c = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

Ya conocemos el valor de todos los lados del triángulo. Ahora debemos hallar los ángulos restantes: α y β

Aunque en el ejemplo anterior nos apoyamos en el hecho de que la suma de los tres ángulos es 180°, dicha propiedad no aplica para este caso en particular. Esto es debido a que tenemos una ecuación con dos incógnitas, lo cual da lugar a infinitos valores para α y β, esto es $\beta + 90^0 + \alpha = 180^0$, donde $\beta + \alpha = 90^0$, permitiendo así tal infinidad.

Sin embargo, las razones trigonométricas ofrecen una forma de solucionar este problema por medio de las funciones trigonométricas inversas, las cuales permiten obtener el valor de los ángulos a partir del conocimiento de las razones trigonométricas. Veamos:

- Función coseno inverso: si se conocen todos los lados de un triángulo rectángulo (como el de la figura 3), es posible conocer también sus ángulos utilizando la siguiente expresión:

  $$cos(\beta) = \frac{a}{c} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$$

- Función seno inverso:

  $$sen(\beta) = \frac{b}{c} \Rightarrow \beta = \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$$

- Función tangente inversa:

  $$tan(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

En el ejemplo que estamos desarrollando, encontramos que $sen(\beta) = \frac{1}{2}$, es decir: $\beta = \mathrm{sen}^{-1}(\frac{1}{2})$. Esto se puede obtener directamente desde una calculadora, obteniendo como resultado $\beta = 30^0$.

Así es más simple hallar el valor del otro ángulo, pues, en consecuencia:

$$\alpha = 90^0 - \beta = 90^0 - 30^0 = 60^0$$

De esta forma, el triángulo queda resuelto.

2. Línea recta

El estudio de la línea recta es de gran importancia en las matemáticas, ya que este tipo de geometría aparece constantemente en diversas aplicaciones, por ejemplo, cuando se plantea que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Además, es de gran utilidad en áreas de la física y la ingeniería, ya que, a partir de las propiedades geométricas de la línea recta, es posible definir valores de velocidad o aceleración.

Recordemos a continuación algunas de las características generales de una línea recta.

Partamos por mencionar un teorema básico que indica que siempre que se identifiquen dos puntos distintos en un plano (o en el espacio) será posible trazar una línea recta que pase por dichos puntos.

Ten en cuenta que, para esta unidad de repaso, nos ocuparemos de representar la línea recta en un plano. Asimismo, para describir el plano, usaremos el sistema de coordenadas cartesiano (plano cartesiano) tal como se muestra en la figura 4.

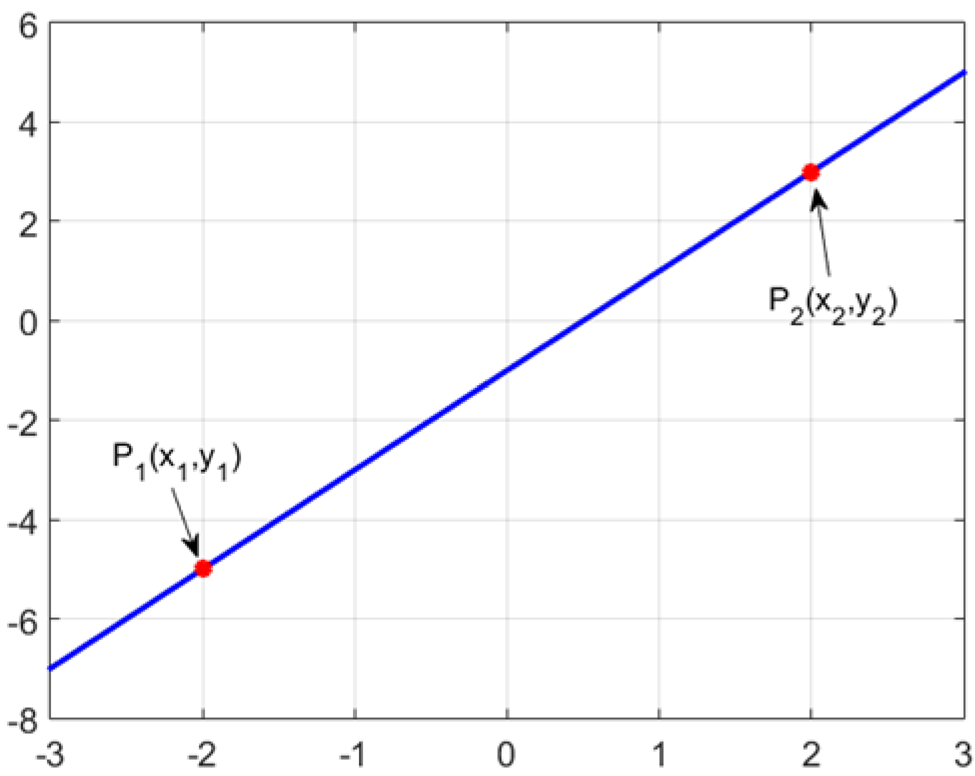


Figura 4. Representación de una línea recta en el plano cartesiano.

Observa con atención la figura 4. Si se identifican dos puntos en el plano (círculos rojos) es posible trazar una recta que pase por ellos (línea azul).

En la figura tenemos los puntos P1 y P2, así como la línea recta que pasa a través de ellos. Digamos que las coordenadas de los puntos P1 son (x_1, y_1) y las de P2 son (x_2, y_2). Intentemos describir la recta (línea azul) de forma analítica, es decir, usando una expresión matemática.

Como ya lo mencionamos, es posible describir los puntos por los cuales pasa una recta a partir de sus coordenadas en el plano. Podemos entonces encontrar una relación entre la variable X y la variable Y que describa la ecuación de una línea recta. Tal expresión se suele nombrar método punto-punto, y sirve para encontrar la ecuación de la línea recta.

A continuación, se muestra la expresión general:

$$y - y_1 = \left(\frac{Y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Donde: $x_1 \neq x_2$

Una vez se ha simplificado esta expresión, se obtiene la ecuación que representa una línea recta general, y que es la forma más común en la que se suele encontrar algebraicamente la expresión para la línea recta:

$$y = mx + b$$

En la ecuación, y representa los posibles valores en el eje vertical, mientras que x corresponde a los posibles valores del eje horizontal.

Estas cantidades también pueden ser interpretadas como las incógnitas en una ecuación, pero de esto nos ocuparemos en el siguiente tema. Por ahora, describamos en detalle lo que representan las cantidades m y b de la anterior expresión.

Pendiente

Denotada como m, la pendiente siempre se identificará como el coeficiente que acompaña la variable x en la expresión $y = mx + b$. Esta cantidad expresa el grado de inclinación de la línea recta respecto al eje x, y puede ser positiva o negativa. La pendiente se puede obtener a partir de las coordenadas de los puntos P1 y P2, usando la siguiente ecuación:

$$m = \left(\frac{Y_2 - y_1}{X_2 - X_1}\right)$$

Por lo tanto, si de una línea recta se conoce tanto la pendiente como las coordenadas de un punto, también es posible construir la ecuación de la línea recta, en lo que se denomina forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dicha forma, al ser simplificada, lleva a la expresión más conocida para la ecuación de una línea recta.

Intercepto con el eje y:

Denotada como b, determina el valor sobre el eje y, por el cual pasa la línea recta; es decir, cumple que b es el valor de y cuando $x = 0$:

$$y = m(0) + b = b$$

Interpretación de la pendiente de una línea recta:

Una línea recta con pendiente negativa (m < 0) implica que el ángulo de inclinación de la línea recta respecto al eje x es mayor a 90°.

Ejemplo 1

La línea recta definida por la ecuación $y = -2x + 3$ es una línea recta con pendiente negativa (ver línea azul en la figura 5).

Una línea recta vertical posee una pendiente que tiende a infinito $(m \to \infty)$, es decir, no existe un valor para dicha pendiente.

Ejemplo 2

La línea recta $x = 1$ representa una línea recta vertical que no tiene pendiente definida, pues esta tiende a infinito (ver línea roja en la figura 5).

Una línea recta horizontal siempre tiene pendiente cero $(m = 0)$, ya que las coordenadas y_1 y y_2 de los puntos P1 y P2 son iguales.

Ejemplo 3

La línea recta $y = 2$ es una línea recta con pendiente igual a cero (ver línea verde en la figura 5).

Ejemplo 4

Veamos un último ejemplo sobre cómo obtener la ecuación de una línea recta a partir de dos puntos con sus coordenadas conocidas.

Sean los puntos P1 de coordenadas (-1,-3) y el punto P2 de coordenadas (2,3). Determinemos la pendiente y el intercepto con el eje y de la línea recta que pasa por estos puntos.

<u>Solución</u>

Lo primero que haremos será renombrar las coordenadas de cada punto para una mejor identificación en las expresiones mostradas anteriormente. Por ejemplo, hagamos que el punto P1 tenga coordenadas (x_1, y_1) , es decir:

$$(x_1, y_1) = (-1, -3)$$

Y que el punto P2 tenga coordenadas (x_2, y_2)

$$(x_2, y_2) = (2,3)$$

Por lo tanto:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-3)}{2 - (-1)} = \frac{3 + 3}{2 + 1} = \frac{6}{3}$$

$$m = 2$$

Con el valor de la pendiente, podemos escoger la expresión de la forma punto-pendiente para encontrar la ecuación de la línea recta, y en consecuencia identificar el valor del intercepto con el eje y: b.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Reemplazando los valores de m y las coordenadas del punto P1, obtenemos:

$$y - (-3) = 2(x - (-1))$$

Luego, simplificamos:

$$y + 3 = 2(x + 1)$$

Aplicando la propiedad distributiva y sumando -3 a ambos lados, tenemos que:

$y = 2x - 1$

De allí es posible determinar que el valor de $b = -1$

La ecuación de esta línea recta coincide con la recta L2, representada por una línea roja en la figura 5.

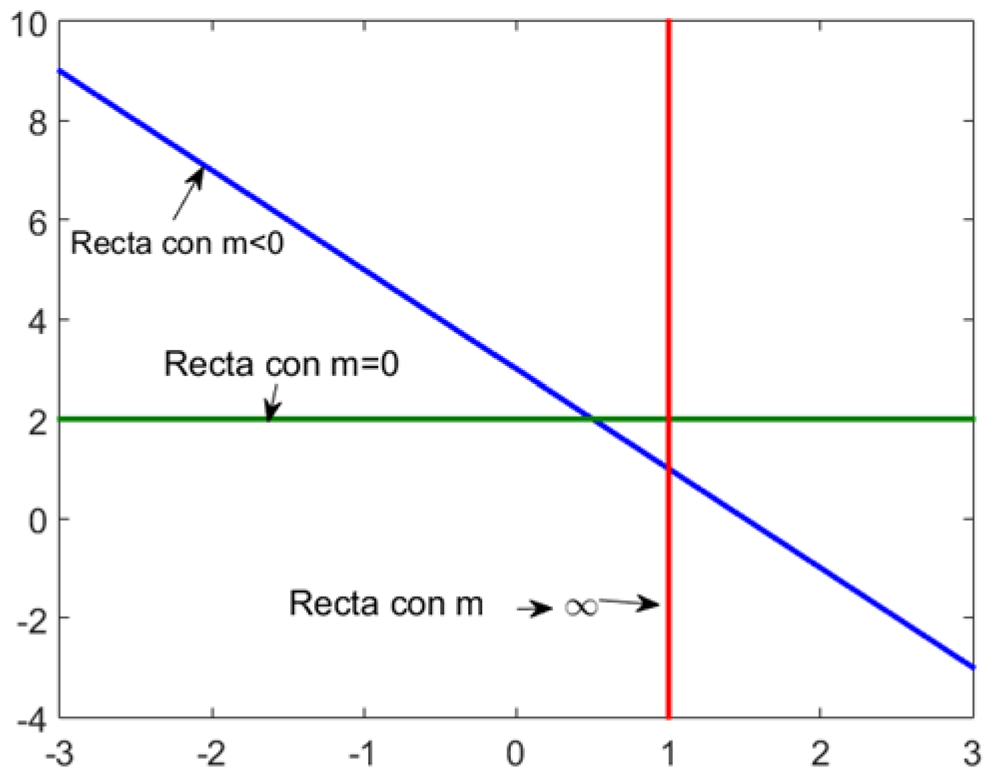


Figura 5. Líneas rectas para tres casos particulares de pendientes.

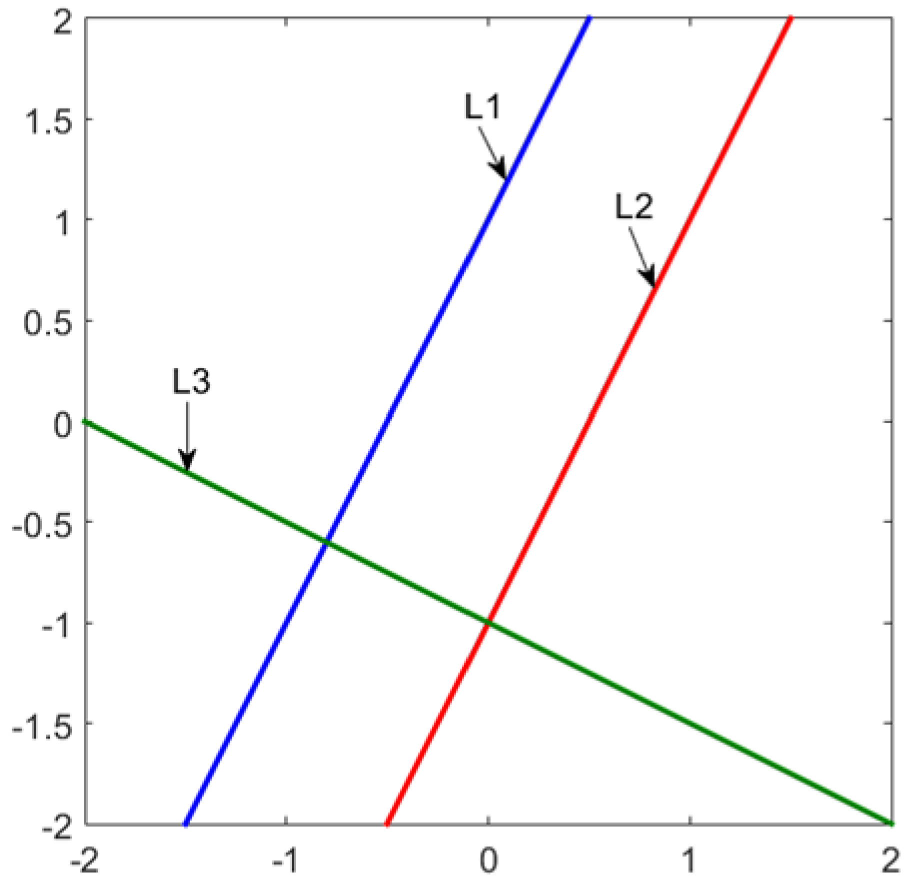
En la figura 5 se ilustran las líneas rectas para tres casos particulares de pendientes:

- Línea azul: recta con pendiente negativa.
- Línea roja: recta con pendiente que no existe (tiende a infinito).
- Línea verde: recta con pendiente cero.

Si se tienen dos líneas rectas, es posible determinar la orientación relativa de estas comparando el valor de sus pendientes. Particularmente, se destacan dos casos extremos en los que es sencillo determinar cómo se orientan dos líneas rectas entre sí:

- Líneas rectas paralelas: dos líneas rectas son paralelas si se cumple que tienen pendientes iguales: $m_1 = m_2$. Por ejemplo, las líneas rectas $L1: y = 2x + 1$ y la línea recta $L2: y = 2x - 1$ son paralelas, pues ambas tienen una pendiente igual a 2.
- Líneas rectas perpendiculares: dos líneas rectas son perpendiculares si se cumple que la multiplicación entre ellas es -1, es decir, $m_1 \times m_2 = -1$. Por ejemplo, la línea recta $L3: y = -\frac{1}{2}x - 1$ es perpendicular a las rectas L1 y L2, ya que, al multiplicar sus pendientes, encontramos que: $m_1 \times m_2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$

La siguiente figura representa las líneas rectas L1, L2 y L3, ilustrando sus orientaciones relativas en concordancia con las condiciones que recién exa-minamos.



A continuación, conozcamos un tipo de sistemas que usa las ecuaciones de líneas rectas, pero con un enfoque diferente.

3. Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, caso de dos ecuaciones con dos incógnitas

En muchos problemas de aplicación se requiere encontrar el valor de no solo una, sino dos o más variables. Por ejemplo, conocer la cantidad de productos de una marca y su costo, es decir, averiguar dos aspectos distintos en un mismo problema.

Estas situaciones son muy comunes y dan lugar a lo que se conoce como sistemas de ecuaciones, las cuales describen varias relaciones entre las cantidades involucradas.

Lo importante es que dichas variables satisfagan simultáneamente las relaciones.

En resumen, cuando nos enfrentamos a un problema de este tipo hablamos de un sistema de ecuaciones. Sin embargo, si las relaciones mencionadas solo contienen potencias lineales de las variables involucradas, decimos que estamos ante sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos el caso más simple de todos, denominado como sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 (léase dos por dos), un sistema compuesto por dos ecuaciones y dos incógnitas, denotado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} ax + by = c \ (1) \\ \mathrm{d}x + \mathrm{e}y = f \ (2) \end{cases}$$

En este sistema, las cantidades x y y se conocen como variables, y las cantidades a, b, c, d, e y f se conocen como parámetros, los cuales representan números bien definidos.

Cuando se habla de solucionar un sistema de ecuaciones, como el mostrado en la anterior expresión, lo que se busca es determinar los valores de las variables x y y, que cumplen simultáneamente las dos expresiones.

Para solucionar este tipo de sistemas, existen diversas metodologías. Sin embargo, para efectos de esta unidad, veremos tres métodos: sustitución, igualación y reducción; los cuales nos servirán de preámbulo a la Unidad 1 del curso, en la que abordaremos métodos más avanzados.

Veamos en qué consiste cada uno de estos métodos por medio de un ejemplo.

Ejemplo:

Solucionar por los métodos de sustitución, igualación y reducción el siguiente sistema de ecuaciones lineales de 2×2:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2\ (1) \\ x - 2y = 8\ (2) \end{cases}$$

Conoce los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Método de sustitución:

El método de sustitución consiste en tomar una de las dos ecuaciones del sistema y despejar una de las variables. Para solucionar el ejemplo dado, tomemos la ecuación (1) y despejemos la variable y.

$$2x + 3y = 2$$

Ahora tenemos $-2x$ al otro lado:

Multiplicando $1/3$, tenemos:

$$\boldsymbol{y = \left(\frac{2 - 2x}{3}\right)}$$

Consideremos ahora la ecuación (2), y reemplacemos en ella la expresión obtenida para y.

$$x - 2y = 8$$

Reemplazando la expresión de y:

$$x - 2\left(\frac{\boldsymbol{(2 - 2x)}}{\boldsymbol{3}} \boldsymbol{= 8}\right)$$

Aplicando la propiedad distributiva para romper los paréntesis, obtenemos:

$$\boldsymbol{x - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}x = 8}$$

Después, sumamos 4/3 a cada lado de la ecuación:

$$\boldsymbol{x + \frac{4}{3}x = 8 + \frac{4}{3}}$$

Así, obtenemos nuevas expresiones fraccionarias:

$$\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{24}+\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Multiplicamos por 3 a cada lado de la ecuación:

$$7x = 28$$

Luego, despejamos x y dividimos:

$$x = \frac{28}{7}$$

$$x = 4$$

De esta manera, encontramos que $x = 4$ Este valor debe satisfacer el sistema de ecuaciones, sin embargo, para contar con una conclusión definitiva, debemos también obtener el valor de $\boldsymbol{y}$.

Por consiguiente, nos ocuparemos de hallar el valor de $\boldsymbol{y}$. Para esto, usaremos la expresión para la variable obtenida previamente y descrita así:

$$\boldsymbol{y} = \frac{2-2x}{3}$$

Al reemplazar el valor obtenido para x, tenemos:

$$\boldsymbol{y} = \frac{2-2(4)}{3} = \frac{2-8}{3} = \frac{-6}{3}$$

Es decir, el valor de y que satisface el sistema es: $\mathbf{-2}$.

Para verificar que los valores obtenidos son los correctos, realizamos la prueba reemplazando en ambas ecuaciones los valores $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$ y $\boldsymbol{y} = \mathbf{-2}$, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} 2(4) + 3(-2) = 2\ (1) \\ \ (4) - 2(-2) = 8\ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 - 6 = 2(1) \\ 4 + 4 = 8(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 2(1) \\ 8 = 8(2) \end{cases}$$

Como se puede observar, se llega explícitamente a la igualdad de ambos miembros de las dos ecuaciones. Dichos miembros de ecuaciones se deben entender como las expresiones a los lados del símbolo de igualdad (=).

Método de igualación:

El método de igualación consiste en tomar cada ecuación del sistema y despejar la misma variable, con el fin de igualar explícitamente su equivalente y obtener una ecuación en términos de la otra variable (la no igualada).

Veamos cómo desarrollar este método a continuación:

Partimos de la expresión para el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2\ (1) \\ x - 2y = 8\ (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) debemos despejar la variable $\boldsymbol{y}$.

$$2x + 3y = 2$$

Observa que ahora tenemos $-2x$ al lado contrario:

$$3y = 2 - 2x$$

Multiplicamos por 1/3 a cada lado:

$$\boldsymbol{y} = \frac{2 - 2x}{3}(*)$$

A continuación, despejemos también la variable y de la ecuación (2):

$$\boldsymbol{x - 2y = 8}$$

Igualmente, ahora tenemos $-\boldsymbol{x}$ del otro lado:

$$\boldsymbol{-2y = 8 - x}$$

Multiplicamos por -1/2 a cada lado:

$$\boldsymbol{y} = \frac{8 - x}{-2}(**)$$

Revisa las ecuaciones señaladas con los asteriscos (*) y (**), de ellas se puede escribir explícitamente la igualdad:

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$

$$\frac{2-2x}{3} = \frac{8-x}{-2}$$

Multiplicamos a cada lado de la ecuación por 6, y obtenemos:

$$\frac{6}{3}(2-2x) = \frac{6}{-2}(8-x)$$

$$2(2-2x) = -3(8-x)$$

Luego, aplicamos la propiedad distributiva:

$$4-4x = -24+3x$$

En seguida, sumamos a cada lado $4x+24$:

$$4+24 = 4x+3x$$

Ahora, al agrupar términos, obtenemos:

$$28 = 7x$$

Finalmente, multiplicamos por 1/7 a cada lado, invirtiendo la posición de los miembros de la ecuación:

$$x = \frac{28}{7}$$

$$x = 4$$

Como se puede apreciar, el valor que hemos obtenido es el mismo resultado conseguido con el método anterior.

Si deseamos encontrar el valor de $\boldsymbol{y}$, es posible realizar el mismo procedimiento, pero ahora despejando x en cada ecuación. Sin embargo, ya que hallamos la variable y en función de la variable x para cada ecuación (las expresiones marcadas con asteriscos), es suficiente tomar cualquiera de estas expresiones y reemplazar en ellas el valor de x.
Por ejemplo, tomemos la ecuación (**):

$$y = \frac{8-x}{-2} (**)$$

$$y = -2$$

Así obtenemos el valor de x y $\boldsymbol{y}$ que satisface simultáneamente las dos ecuaciones del sistema.

Conozcamos a continuación el último de los tres métodos que exploraremos.

Método de igualación:

El método de reducción consiste en modificar ambos lados de una expresión del sistema de ecuaciones para operar (sumar) posteriormente, miembro a miembro, la otra ecuación. El objetivo es cancelar uno de los términos que contiene una determinada variable con el fin de obtener solamente una ecuación y una incógnita que permita el despeje de esta.
Veamos cómo desarrollar este método, retomando el ejemplo inicial.
Consideremos de nuevo las expresiones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \ (1) \\ x - 2y = 8 \ (2) \end{cases}$$

Para iniciar, concentrémonos en la variable x. En la ecuación (1) vemos que el coeficiente de dicha variable es 2, mientras que en la ecuación (2) el coeficiente es 1. Debemos asegurarnos que dichos coeficientes sean iguales, pero con signo opuesto, así que multiplicamos la ecuación (2) a ambos lados por una constante, que en este caso será: -2.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \ (1) \\ -2(x - 2y) = -2 \times 8(2) \end{cases}$$

Obteniendo así:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \ (1) \\ -2x + 4y = -16(2) \end{cases}$$

Al sumar ambas ecuaciones, miembro a miembro, es decir, lado derecho con lado derecho, y lado izquierdo con lado izquierdo, tenemos:

$$2x + 3y - 2x + 4y = 2 - 16$$

Después, simplificamos y agrupamos términos semejantes:

$$3y + 4y = -14$$

$$7y = -14$$

Multiplicando por 1/7 a cada lado de la ecuación, obtenemos:

$$y = \frac{-14}{7}$$

$$y = -2$$

Dicho valor coincide con el obtenido usando los métodos anteriores.

Enfoquémonos ahora en la variable y. Debemos repetir el sistema original con el fin de identificar el valor apropiado para multiplicar la ecuación (1) o la (2), ya que la operación se puede realizar en cualquiera de ellas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \ (1) \\ x - 2y = 8 \ (2) \end{cases}$$

En la ecuación (1) el coeficiente de la variable y es 3, mientras que en la ecuación (2) el coeficiente es -2. En este caso, no es tan directo identificar el valor por el cual se debe multiplicar una ecuación para asegurar que ambos coeficientes sean iguales, aunque con signo contrario.

No obstante, la siguiente clave puede ser de más ayuda. Tomemos como referencia la ecuación (1), multipliquémosla por un número fraccionario, cuyo denominador sea el coeficiente de y en esa ecuación, y cuyo numerador sea el coeficiente de la variable y en la ecuación (2). Dicho número es: 2/3. El signo diferente ya se ha establecido desde el sistema original. Veamos entonces el resultado de multiplicar la constante 2/3 a ambos lados de la ecuación (1):

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \ (1) \\ x - 2y = 8 \ (2) \end{cases}$$

De esa manera, obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \times 3y = \frac{4}{3} (1) \\ \quad x - 2y = 8 \ (2) \end{cases}$$

Simplificando,

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x + 2y = \frac{4}{3} (1) \\ x - 2y = 8 \ (2) \end{cases}$$

Luego de sumar ambas ecuaciones, miembro a miembro, es decir, lado derecho con lado derecho y lado izquierdo con lado izquierdo, nos queda la siguiente expresión:

$$\frac{4}{3}x + 2y + x - 2y = \frac{4}{3} + 8$$

Después, simplificamos y agrupamos términos semejantes:

$$\frac{4}{3}x + x = \frac{4}{3} + 8$$

Sumamos las fracciones:

$$\frac{3x+4x}{3}=\frac{24+4}{3}$$

Multiplicamos por 3 a cada lado de la ecuación:

$$7x = 28$$

Y, finalmente, multiplicamos por 1/7 a cada lado de la ecuación, obteniendo:

$$x = \frac{28}{7}$$

$$x = 4$$

Nuevamente podemos apreciar que el valor es el mismo que hemos encontrado anteriormente por medio de los métodos de sustitución e igualación. De esta manera, logramos demostrar que las tres metodologías son válidas para solucionar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Aunque existen otros métodos para la solución de sistemas, los más usados son el de sustitución y reducción, siendo este último especialmente importante cuando se aplica en métodos basados en el manejo del álgebra de matrices, tema que se abordará en la siguiente unidad.

Esta licencia permite a otros distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir de esta obra de manera no comercial y, a pesar que sus nuevas obras deben siempre mencionar a la IU Digital y mantenerse sin fines comerciales, no están obligados a licenciar obras derivadas bajo las mismas condiciones.

BY NC

IU Digital de Antioquia
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DIGITAL DE ANTIOQUIA

ORD No 74 de 2017 · VIGILADA MinEducación

www.iudigital.edu.co