Desarrollo de contenido

Unidad 3

Cálculo II

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
DIGITAL DE ANTIOQUIA

Series y suseciones

Tema 1: suseciones

Una sucesión puede pensarse o definirse intuitivamente como un listado de números en un orden especificativo, por ejemplo:

$a_1, a_2, a_3, \dots\ , a_n$

La cual podría denotarse de la siguiente manera:

$\{a_n\}\ o\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Ejemplo:

Hallar los primeros 4 elementos de la siguiente sucesión:

$$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\propto}$$

$\mathrm{a_n} = \dfrac{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}$	El n-ésimo término se puede escribir como a_n
$a_1 = \dfrac{2(1)}{1+1} = \dfrac{2}{2}$	Primer elemento
$a_2 = \dfrac{2(2)}{2+1} = \dfrac{4}{3}$	Segundo elemento
$\mathrm{a_3} = \dfrac{2(3)}{3+1} = \dfrac{6}{4}$	Tercer elemento
$a_4 = \dfrac{2(4)}{4+1} = \dfrac{8}{5}$	Cuarto elemento

Límite de una sucesión

Si observamos con detenimiento, y ubicamos en la recta real los elementos que conforman la sucesión del ejemplo presentado en el tema 1, podemos establecer que, a medida que n toma valores mayores, el número a_n se aproxima a 2.

Por tanto, una sucesión puede definirse como un límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente N tal que, si $n > N \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Si el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe, la sucesión es convergente

Si el $\underset{n\to\infty}{} a_n$ no existe o es igual a ∞, la sucesión es divergente.

Leyes de los límites aplicadas a las sucesiones convergentes

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
$\lim\limits_{n\to\infty} c a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}; si \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p = [\lim\limits_{n\to\infty} a_n]^p$

A continuación, se retoman los teoremas del encaje o compresión abordados en cálculo diferencial, pero adaptados para sucesiones.

Teorema del Encaje	Teorema del Valor Absoluto
Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$	Si, $\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Ejemplo:

Ejemplo1 :

Determinar si la sucesión $a_n = \frac{8n^2}{4n^2+1}$ es convergente o divergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2}{4n^2+1} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8n^2}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{8}{4+\frac{1}{n^2}} = 2$$

Por tanto, la sucesión converge a 2.

Ejemplo:

Ejemplo2 :

Determinar si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = no\ existe$$

Por tanto, la sucesión es divergente. Nótese que, al evaluar la expresión, los posibles resultados serán 1 y -1, de este modo, la sucesión no tiende a ningún L.

Sucesión de monótonas

Definición:

Una sucesión $\{a_n\}$ es

(i) creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n

(ii) decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente (Leithold, 2005)

Para verificar si la sucesión es creciente o decreciente, se aplican las definiciones (i) y (ii), al comparar n y $n + 1$.

Ejemplo 1:

Verificar si la sucesión $\left\{\frac{5}{n+7}\right\}$ es creciente o decreciente

Para: n

$$\frac{5}{n+7}$$

Para: n+1

$$\frac{5}{(n+1)+7} = \frac{5}{n+8}$$

$$\frac{5}{n+7} > \frac{5}{n+8}$$

Por tanto, la sucesión es monótona y decreciente.

Ejemplo 2: Sucesiones alternantes

Los elementos de una sucesión pueden describirse de la siguiente manera:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \qquad a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}$$

Verificar si dicha sucesión es creciente o decreciente.

De la estructura de la sucesión, se puede observar que los resultados serán positivos y negativos según el exponente; cuando n sea par, asumirá valores negativos; y cuando n sea impar, asumirá valores positivos. Por tanto, no se puede definir como creciente o decreciente, es decir, la sucesión no es monótona.

Sucesiones acotadas

Se podrá decir que una sucesión es acotada si tiene una cota superior e inferior. Para esto, debemos definir:

- **Cota superior:**

Es un número donde la sucesión cumple que $a_n \leq D$, esto es que la sucesión no asume valores mayores que D. Se puede inferir, entonces, que cualquier número mayor a los que están en la sucesión pueden ser una cota superior.

Se llamara mínima cota superior a aquel número B que cumpla: $B \leq D$ para cualquier cota superior de la sucesión.

- **Cota inferior:**

Es un número donde la sucesión cumple que $a_n \geq C$, esto es que la sucesión no tiene valores menores que C. Se puede inferir, entonces, que cualquier número menor a los que están en la suceción pueden ser una cota superior.

Se llamara máxima cota inferior a aquel número A que cumpla: $A \geq C$ para cualquier cota superior de la sucesión.

Ejemplo:

La sucesión $a_n = \frac{2n}{n+1}$ adquiere valores mayores que 1 y menores que 2, por tanto, su cota superior será 2 y su cota menor será 1.

Teorema de la sucesión monótona

Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

Tema 2: Criterio del n-ésimo término para la divergencia

Para hallar el n-ésimo término de una sucesión no hay una regla establecida, por lo cual se debe analizar el comportamiento de cada término y establecer su regla de formación.

Ejemplo1 :

Hallar el n-ésimo término de la sucesión $\frac{2}{3}, \frac{8}{5}, \frac{18}{7}, \frac{32}{9}, \ldots$

Analizamos cómo cambian los elementos que están en el numerador de la fracción.

Primer término: 2	$2 \cdot (1)^2 = 2$
Segundo término: 8	$2 \cdot (2)^2 = 8$
Tercer término: 18	$2 \cdot (3)^2 = 18$
Cuarto término: 18	$2 \cdot (4)^2 = 32$

Por tanto, el n-ésimo término del numerador será: $2 \cdot (n)^2$

Para el denominador es más simple, ya que corresponden a los números impares, y de esta sucesión de números se conoce su regla de formación, esto es: $2n + 1$

En general: $\frac{2}{3}, \frac{8}{5}, \frac{18}{7}, \frac{32}{9}, \ldots, \frac{2(n)^2}{2n+1}$

Ahora que ya se conoce la forma de la sucesión, podemos utilizar las definiciones de convergencia y divergencia del límite de una sucesión.

$$\text{Si, } \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \ \rightarrow convergente \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = no\ existe\ o\ \infty \ \rightarrow divergente \end{cases}$$

Hallando el límite cuando n tiende al infinito, se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{2n+1} = \infty$$

Por tanto, la sucesión diverge.

Tema 3: Sucesiones de sumas parciales

Para entender este concepto, iniciemos con un ejemplo: se tiene la sucesión $a_n = (\frac{1}{5})^n$ para hallar la sucesión de sumas parciales se deben encontrar los primeros términos.

$a_1 = \frac{1}{5}$

$a_2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

$a_3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

$a_4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$

$a_5 = \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125}$

Las sumas parciales de los primeros cinco términos serían:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{5}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{6}{25}$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{6}{25} + \frac{1}{125} = \frac{31}{125}$$

$$s_4 = s_3 + a_4 = \frac{31}{125} + \frac{1}{625} = \frac{156}{625}$$

$$s_5 = s_4 + a_5 = \frac{156}{625} + \frac{1}{3125} = \frac{781}{3125}$$

Material complementario:

Te invitamos a ampliar tus conocimientos a través de la siguiente lecturas, a través de ellas puedes profundizar acerca de las temáticas exploradas:

- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-series-new/bc-10-1/v/term-from-partial-sum

Tema 1 Sucesiones

- https://es.khanacademy.org/math/aritmetica-pe-pre-u/xce51e392da300f11:sucesiones-y-series

Videos:

- KhanAcademyEspañol. (2013). Sucesiones convergentes y divergentes [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=ZhOSwK8swHM

- Educatina. (2012). Límite de Sucesiones - Análisis Matemático – Educatina [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=iFasJ2pt1qY

- Juliana la profe. (2017). Cómo calcular la Cota inferior y superior de una sucesión [Archivo de video].
Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=YY7diFtlu_Q

Tema 2 Criterio del n-ésimo termino para la divergencia

Videos:

- cristigo92. (2014). Como sacar la fórmula de una Sucesión Lineal [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=TE3HLnZ-IZg

- Edgar Navarro. (2014). Sucesiones lineales y cuadráticas [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=iAjMPtTEJvA

Tema 3. Sucesiones de sumas parciales:

- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-series-new/bc-10-1/v/term-from-partial-sum

Tema 4: Series

Las series surgen a partir de una suma formada por los elementos de una sucesión, por ejemplo:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\propto} = a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$a_1 + a_2 +_{\dots} + a$$

Esta suma se denomina serie infinita y se denota de la siguiente manera:

$$\sum_{n=1}^{\propto} a_n$$

Ten en cuenta:

Cuando tenemos las sumas parciales de una sucesión $s_1, s_2, \dots, s_n$, el n-ésimo término de esta suma define una nueva sucesión $\{s_n\}$ y existe el límite de esa sucesión, entonces, se podrá decir que dicha suma es una serie.

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y su límite (S) existe, entones, se podrá decir que la serie converge y que su suma será (S).

Si la sucesión $\{s_n\}$ es dvergente, entonces, se podrá decir que la serie diverge y no tiene suma.

En la serie se verifican los siguientes teoremas:
Sea c cualquier constante diferente de cero.

Si es convergente

(i) Si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente y su suma es S, entonces, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

También es convergente y su suma es

$$c \cdot S$$

Si es divergente

(ii) Si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es divergente, entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

también es divergente.

Si, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; y \; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Son series infinitas convergentes cuyas sumas son S y T respectivamente, entonces: $\textbf{(i)} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ Es una serie convergente y su suma es S+T $\textbf{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ Es una serie convergente y su suma es S-T	Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ es divergente.

(Leithold, 2005)

Series geométricas

Se denomina serie geométrica aquella serie en la cual los términos resultan de multiplicar el término anterior por una constante, y están definidos de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\propto} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

- Una serie geométrica converge a $\frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$
- Una serie geométrica será divergente si $|r| \geq 1$

Ejemplo 1:

Determinar si la serie geométrica es convergente o divergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$	En el ejercicio dado, debemos verificar que tenga la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

$\frac{10\cdot 10^{n-1}}{(-9)^{n-1}}$ $10\frac{10^{n-1}}{(-9)^{n-1}}$ $10\left(-\frac{10}{9}\right)^{n-1}$ $a = 10\ y\ r = -\frac{10}{9}$	Aplicamos propiedades de la potenciación
$\lvert r\rvert = \frac{10}{9} \geq 1$	Se verifica el valor absoluto de r. En este caso, es mayor que 1, por tanto, la serie diverge.

Ejemplo 2:

Determinar si la serie geométrica es convergente o divergente, determina su suma en caso de ser convergente.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$	En el ejercicio dado, debemos verificar que tenga la forma: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$
$1 = 1^n$ $\frac{1^n}{(\sqrt{2})^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ $a = 1\ y\ r = \frac{1}{\sqrt{2}}$	Se aplican propiedades de la potenciación.

$\lvert r\rvert = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$	Se verifica el valor absoluto de r. En este caso, es menor que 1, por tanto, la serie converge y se debe hallar su suma.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = \frac{a}{1-r}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1}$ $= 2+\sqrt{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = 2+\sqrt{2}$	La serie converge a: $\frac{a}{1-r}$ Se simplifica y racionaliza.

Series armónicas

Son aquellas series que contienen las sumas de los inversos multiplicativos de los enteros positivos y cumplen con la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\propto}\frac{1}{n}$$

Las series armónicas siempre divergen, ya que el límite de sus sumas parciales tiende al infinito.

Teorema	La prueba de la divergencia
Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o es $\neq 0$, entonces, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(Stewart, 2012)

Series telescópicas

Son aquellas series que vienen dadas por cualquiera de las siguientes formas:

1 $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i - a_{i+1}$$

2 $$\sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} - a_i$$

Verificar si la serie telescópica converge y calcular su suma.	
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$	Ejercicio dado
$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{(n+2)} + \frac{B}{(n+3)}$$ $$1=A(n+3)+B(n+2)$$ $$n = -2$$ Se reemplaza en la segunda fracción para hallar A. $$A = -2+3 = 1$$ $$n = -3$$ Se reemplaza en la primera fracción para hallar B. $$B = -3+2 = -1$$	Usando fracciones parciales, se debe llevar el ejercicio a la forma de una serie telescópica. $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i - a_{i+1}$$
$$\frac{1}{(n+2)} + \frac{-1}{(n+3)} = \frac{1}{(n+2)} - \frac{1}{(n+3)}$$	Reemplazamos los valores de A y B
$$s_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$	Hallamos s_n
$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3}$$	Se encuentra la suma (S) utilizando el límite

Tema 5: Criterio de convergencia

Haz clic en el enlace para acceder al recurso interactivo sobre [Criterio de Convergencia]

Tema 6: Series alternantes

Los criterios de convergencia vistos en el tema 5 son aplicables para series conformadas por términos positivos. En esta ocasión, veremos cómo proceder cuando las series están formadas por términos que no son exclusivamente positivos.

Llamaremos serie alternante a aquella formada por términos que alternadamente son positivos y negativos. Por ejemplo:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

Y cumplen el siguiente criterio de formación:

$a_n = (-1)^{n-1}b_n, \rightarrow b_n$ es un número positivo $b_n = |a_n|$

Para probar la convergencia o divergencia de series alternantes se utiliza la siguiente regla:

Regla:

Si, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n \; donde \; b_n > 0$

Y se cumple que:

- $b_{n+1} \leq b_n$ para toda n
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Entonces, la serie es convergente.

Ejemplo:

Verificar si la serie alternante es convergente o divergente	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$	Ejercicio dado
$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{4-\frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$	Se debe verificar que cumpla: • $b_{n+1} \leq b_n$ para toda n • $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ La serie es divergente	Como no se cumple con la condición: $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Tema 7:
Convergencia absoluta y condicional

Una serie $\sum a_n$ puede ser convergente o divergente.

Convergente:

- Será absolutamente convergente
  Si $\sum |\, a_n \,|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$

- Será condicionalmente convergente
  Si $\sum a_n$ converge y $\sum |\, a_n \,|$ diverge

Divergente:

Ejemplo: Verificar si la serie es absolutamente o condicionalmente convergente	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$	Ejercicio dado
$\sum_{n=1}^{\infty} \left\lvert \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right\rvert$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	Verificar $\sum \lvert a_n \rvert$
$a_n = \frac{1}{n^2}$ Es una serie **p**, con **p=2**	**Se verifica qué tipo de serie es:** - armónica - serie p - geométrica **para determinar si converge o diverge.**
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ converge$ Ya que $p > 1$	La serie $\sum \lvert a_n \rvert$ converge
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\ converge$	La serie $\sum a_n$ también converge, por tanto, es absolutamente convergente.

Criterios del cociente y de la raíz

El criterio del cociente o la razón indica que:

Si, $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = L$ y

$L < 1$, entonces, converge
$L > 1$, entonces, diverge
$L = 1$ no es concluyente

Ejemplo:	
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$	Ejercicio dado
$a_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$	Determinar a_{n+1}
$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{(-1)^n\frac{n^3}{2^n}}\right\|=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^3}$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}<1$	Evaluar el límite del cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$ $es\ convergente$	Ya que $L<1$

El **criterio de la raíz** indica que:

- Si $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$ y $L<1$, entonces, la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente.
- Si $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$ y $L>1$ o $\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$, entonces, la serie $\sum a_n$ es divergente.
- Si $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$ y $L=1$ la prueba no es concluyente

Ejemplo:

Verificar la convergencia de la siguiente serie:	
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{4n+3}\right)^{n}$	Ejercicio dado
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\lvert\left(\frac{3n+4}{4n+3}\right)^{n}\right\rvert}=\frac{3n+4}{4n+3}$ $=\frac{3+\frac{4}{n}}{4+\frac{3}{n}}$ $=\frac{3}{4}=0{,}75$	Aplicar la prueba de la raíz $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{4n+3}\right)^{n}$ $converge\ absolutamente$	Ya que $L<1$

Tema 8: Series de potencia y su convergencia

Se denominará serie de potencias a aquella que tiene la siguiente forma:

C, es una constante o coeficiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$$

X es una variable.

En una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$ solo se podrá presentar una de las siguientes opciones:

- La serie será convergente solo cuando $x = a$, $R = 0$ y el intervalo de convergencia consta de un solo punto a.
- La serie converge para toda x, $R = \propto$ y el intervalo de convergencia es $(-\propto, \propto)$.
- Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$, el intervalo de convergencia podrá ser:

  - $(a - R, a + R)$
  - $(a - R, a + R]$
  - $[a - R, a + R)$
  - $[a - r, a + R]$

$\boldsymbol{R}$, corresponde al radio de convergencia de la serie.

Ejemplo:

Verifica el intervalo y el radio de convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$	
$$a_n = \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$ $$a_{n+1} = \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}}$$ $$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}} \right\| = \left\| \frac{(n+1)(x+2)}{3n} \right\|$$	Por la forma de la expresión se usa el criterio de la razón para verificar la convergencia $$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\|$$

$= \frac{(n+1)}{3n}\lvert x+2\rvert = \frac{\frac{(n+1)}{n}}{\frac{3n}{n}}\lvert x+2\rvert$ $= \frac{1+\frac{1}{n}}{3}\lvert x+2\rvert$ $L = \frac{1}{3}\lvert x+2\rvert$	
$\frac{1}{3}\lvert x+2\rvert < 1$	Verificar si $L < 1$
$\lvert x+2\rvert < 3$	Aplico las propiedades de las desigualdades para despejar el valor absoluto.
$R = 3$ Radio de convergencia	Ya que: $\lvert x-a\rvert < R$
$-3 < x+2 < 3$ $-3-2 < x < 3-2$ $-5 < x < 1$ $(-5, 1)$ Intervalo de convergencia	Aplico las propiedades de las desigualdades para hallar el intervalo.

Derivación e integración de series de potencia.

La suma de una serie de potencias se puede representar como una función y su dominio correspondería al intervalo de convergencia.

La derivación e integración de las series de potencia se realiza al igual que un polinomio, es decir, término a término.

Teorema:

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R > 0$, entonces, la función f está definida por:

$$\underbrace{f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n}_{\text{Es derivable (por tanto, continua) sobre el intervalo } (a-R,\, a+R) \text{ y}}$$

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f'(x) = c_n(x-a)^n$$

(ii) $\int f(x)\, dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-1)^2}{2} + c_2\frac{(x-1)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

$$\Rightarrow \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n$$

Ejemplo:

Hallar la integral y la derivada de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+1}} x^n$$	Ejercicio dado
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+1}} x^n$$	Aplicar la definición $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$
$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+1}} x^n \, dx$$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{n+1}{4^{n+1}} x^n \, dx$$ $$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{4^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$ $$= \left[\frac{x^{n+1}}{4^{n+1}}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{4^{n+1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$	Hallar la integral definida de f(x) Tener en cuenta que: $\frac{n+1}{4^{n+1}}$ *son constantes*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$ $a = primer\ termino$ $a=\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{1}{16}$ $r=\frac{1}{4}$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{12}$$	Se observa que la solución es una serie de forma geométrica la cual converge a: $$\frac{a}{1-r}$$

Series de Taylor y Maclaurin

Formar una serie que aproxime a una función centrada en cualquier número.

Con estas series se cumple que, si una función se puede describir como una serie de potencias en torno a "a", se puede concluir que la función es igual a la suma de sus series de Taylor, ya que:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \rightarrow$$

Donde c_n corresponde a los coeficientes, quienes, de manera general, conservan la siguiente forma:

$$\rightarrow \quad c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Las series de Taylor y Maclaurin están dadas por la siguiente forma:

Series de Taylor:

$$f\,(x) = \sum_{n=0}^{\propto} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f\,(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a$$

Series de Maclaurin:

$$f\,(X) = \sum_{n=0}^{\propto} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f\,(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

Ejemplo 1:

Formar la serie de Taylor para que se aproxime a la función $f(x)$ = ln x, entono a 1.

$f(x) = \ln x$ $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $f''(x) = -x^{-2}$ $f'''(x) = 2x^{-3}$ $f''''(x) = -6x^{-4}$	Hallar los componentes de la fórmula.
$f(1) = \ln 1 = 0$ $f'(1) = \frac{1}{1} = 1^{-1} = 1$ $f''(1) = -1^{-2} = -1$ $f'''(1) = 2(1)^{-3} = 2$ $f''''(1) = -6(1)^{-4} = -6$	Evaluar la función y las derivadas en 1.

$$\ln x \approx 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{-6}{4!}(x-1)^4 + \cdots$$ $$\ln x \approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$$	Reemplazo en la fórmula y simplifico para hallar el n-ésimo término.
$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$$	
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$$	Serie de Taylor.

Ejemplo 2:

Determinar la serie de Maclaurin de la función $f(x) = sen\ x$

$$f(x) = sen\ x$$ $$f'(x) = \cos x$$ $$f''(x) = -sen\ x$$ $$f'''(x) = -\cos x$$ $$f''''(x) = sen\ x$$	Hallar los componentes de la fórmula.

$f(0) = sen\ 0 = 0$ $f^{'}(0) = \cos 0 = 1$ $f^{''}(0) = -sen\ 0 = 0$ $f^{'''}(0) = -\cos 0 = -1$ $f^{''''}(0) = sen\ 0 = 0$	Evaluar la función y las derivadas en 0.
$sen\ x \approx f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \cdots$ $sen\ x \approx 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots$ $sen\ x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	Reemplazo en la fórmula y simplifico para hallar el n-ésimo término.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	Serie de Maclaurin.

Tema 9: Integrales mediante series

Existen algunas integrales que por su estructura son muy difíciles de solucionar, pero con las series (Taylor y Maclaurin) es posible dar solución a este tipo de ejercicios.

Ejemplo:

Calcular la siguiente integral $\int_0^{\pi} \frac{sen\ x}{x}\ dx$

$\int_0^{\pi} \frac{sen\, x}{x}\, dx$	Ejercicio dado
$sen\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	Hallar la serie de Taylor de la función $f(x) = sen\, x$
$\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$	Reemplazo en el integrando y simplifico.
$\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) dx = \left[x - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{7!}\frac{x^7}{7}\right]_0^{\pi}$ $= \pi - \frac{\pi^3}{3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{7 \cdot 7!} \approx 1{,}84352$	Reescribo la integral y soluciono.

Material complementario

Te invitamos a ampliar tus conocimientos a través de los siguientes recursos y así profundizar acerca de las temáticas exploradas:

- Series y sucesiones infinitas (Enlaces a un sitio externo.)
- Series P (Enlaces a un sitio externo.)
- Criterio de comparación (Enlaces a un sitio externo.)
- Series de potencia, radios e intervalos de convergencia (Enlaces a un sitio externo.)

Tema 4:

- Series geométricas
  PassItEDU. (2013). Cálculo - Suma de series geométricas [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=UYqTqxgyBm0&t=189s

- Series telescópicas
  PassItEDU. (2013). Cálculo - Suma de series telescópicas [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=Se30kofDJlY&t=88s

Tema 5:

- Criterio de comparación

Profesor Particular Puebla. (2016). Divergencia y convergencia de series. Criterio de comparación [Archivo de video.
Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=Ok4saPFmmis&t=304s

Tema 7:

- Criterio del cociente

PassItEDU. (2013). Cálculo - Criterios de convergencia: criterio del cociente [Archivo de video].
Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=ITVocpRt4mg

- Criterio de la raíz

Profesor Particular Puebla. (2016). Convergencia y divergencia de series. Criterio de la raíz [Archivo de video.
Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=LJcQjD2t6Eo

Tema 8:

- Series de potencia

PassItEDU. (2013). Cálculo - Suma de series a través de series de potencia [Archivo de video].
Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=OqNpq5CC33U

- Series de Taylor y Maclaurin

Academatica. (2011). Series de taylor y maclaurin. Ejemplos [Archivo de video].
Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=C6Tx7dT76f0&t=437s

IU Digital de Antioquia

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
DIGITAL DE ANTIOQUIA

ORD No 74 de 2017 · VIGILADA MinEducación