Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
КАФЕДРА СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

ОТЧЕТ
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Исследование и сравнение численных методов решения линейных алгебраических уравнений: метода Гаусса, LU-разложения и метода обращения

Студент	ИУ5-14Б		Г.И. Корнеев
	(группа)	(подпись, дата)	(И.О. Фамилия)
Руководитель курсовой работы			М.И. Колосов
		(подпись, дата)	(И.О. Фамилия)

2025 г.

Цель работы: изучение и практическое применение численных методов решения систем линейных уравнений: метода Гаусса, LU-разложения и метода обращения матрицы. Анализ временной сложности этапов алгоритмов.

Задачи работы:

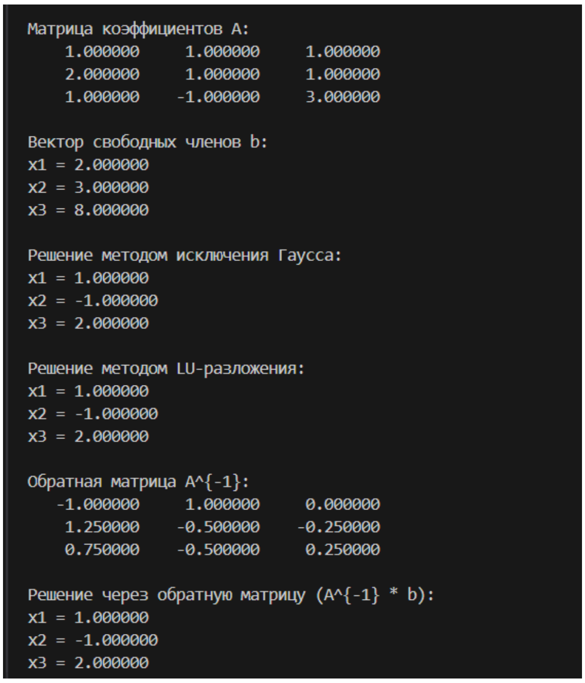
1. Реализовать на C++ алгоритм решения системы линейных уравнений методом исключения Гаусса.
2. Реализовать алгоритм LU-разложения матрицы и решения системы с его использованием.
3. Реализовать алгоритм обращения матрицы и решения системы через умножение обратной матрицы на вектор свободных членов.
4. Разработать функцию обратной подстановки и оценить её временную сложность.
5. Провести тестирование всех методов на заданной системе уравнений.

Ход работы

Необходимо использовать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Вывод в терминале VS Code представлен на рисунке 1:



```
Матрица коэффициентов A:
    1.000000     1.000000     1.000000
    2.000000     1.000000     1.000000
    1.000000    -1.000000     3.000000

Вектор свободных членов b:
x1 = 2.000000
x2 = 3.000000
x3 = 8.000000

Решение методом исключения Гаусса:
x1 = 1.000000
x2 = -1.000000
x3 = 2.000000

Решение методом LU-разложения:
x1 = 1.000000
x2 = -1.000000
x3 = 2.000000

Обратная матрица A^{-1}:
   -1.000000     1.000000     0.000000
    1.250000    -0.500000    -0.250000
    0.750000    -0.500000     0.250000

Решение через обратную матрицу (A^{-1} * b):
x1 = 1.000000
x2 = -1.000000
x3 = 2.000000
```

Рисунок 1 – вывод в терминале

Метод исключения Гаусса представлен на рисунке 2.

```
Решение методом исключения Гаусса:
x1 = 1.000000
x2 = -1.000000
x3 = 2.000000
```

Рисунок 2 – метод Гаусса

Программный код обратной подстановки метода исключения Гаусса представлен на рисунке 3.

```cpp
// Обратная подстановка
std::vector<double> x(n, 0.0);
for (int i = n - 1; i >= 0; --i) {
    double sum = 0.0;
    for (int j = i + 1; j < n; ++j) {
        sum += A.at(i, j) * x[j];
    }
    x[i] = (b[i] - sum) / A.at(i, i);
}

return x;
```

Рисунок 3 – обратная подстановка

Доказательство сложности $\Theta(n^2)$ алгоритма представлено на рисунке 4.

```
Псевдокод: обратная подстановка (метод исключения Гаусса)
--------------------------------------------------------

Вход: верхнетреугольная матрица U (n x n), вектор y (n)
Выход: вектор решения x (n)

x[n-1] = y[n-1] / U[n-1][n-1]
для i = n-2 ... 0:
    sum = 0
    для j = i+1 ... n-1:
        sum = sum + U[i][j] * x[j]
    x[i] = (y[i] - sum) / U[i][i]

Доказательство сложности Θ(n^2):
Внешний цикл выполняется (n-1) раз.
Внутренний цикл выполняется: (n-1) + (n-2) + ... + 1 = n(n-1)/2.
Следовательно, число операций ~ n^2/2, то есть Θ(n^2).
```

Рисунок 4 – доказательство сложности

Метод LU-разложения представлен на рисунке 5.

```
Решение методом LU-разложения:
x1 = 1.000000
x2 = -1.000000
x3 = 2.000000
```

Рисунок 5– метод LU-разложения

С точки зрения методов разработки алгоритмов, LU-разложение — это прямой декомпозиционный метод факторизации матриц, который относится к стратегии «разделяй и властвуй», поскольку он разбивает задачу решения СЛАУ на последовательность задач с треугольными матрицами, решаемых прямым и обратным ходом.

Метод обращения матрицы представлен на рисунке 6.

```
Обратная матрица A^{-1}:
   -1.000000     1.000000     0.000000
    1.250000    -0.500000    -0.250000
    0.750000    -0.500000     0.250000

Решение через обратную матрицу (A^{-1} * b):
x1 = 1.000000
x2 = -1.000000
x3 = 2.000000
```

Рисунок 6– метод обращения матрицы

Сравнительный анализ времени работы трех методов представлен на рисунке 7. Все методы демонстрируют кубический рост времени выполнения.

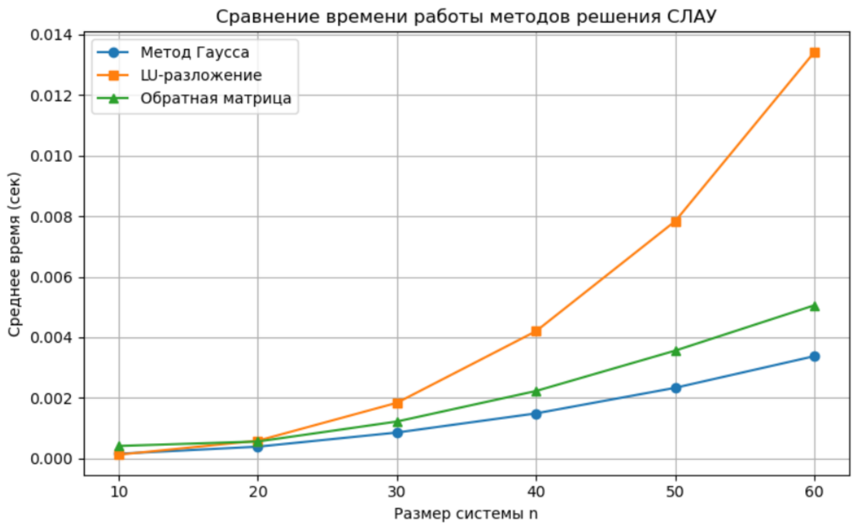


Рисунок 7– сравнение времени работы

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы были успешно реализованы и исследованы три численных метода решения систем линейных уравнений: метод Гаусса, LU-разложение и метод обращения матрицы. Все три метода дали идентичные результаты для тестовой системы уравнений ($x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$), что подтверждает правильность программных реализаций. Все три алгоритма имеют кубическую асимптотическую сложность $O(n^3)$ для решения одной системы уравнений. Наиболее затратным этапом во всех методах является приведение матрицы к треугольному виду или её обращение.