Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии
Дисциплина: Математическая статистика

Домашнее задание №1

Выполнил: Никичкин А. С.
Группа: ИУ7–61
Вариант: 15

Москва, 2015 г.

Содержание

1 Задача №1. Предельные теоремы теории вероятностей

Условие. В Москве рождается в год около 122500 детей. Считая вероятность рождения мальчика равной 0.51, найти вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число родившихся девочек не менее, чем на 1500.

Решение.

$$\mathsf{M}X_{childrens} = 122500, \quad \mathsf{P}_{man} = 0.51\,.$$

Вычислислим количество мальчиков рождаемых за год

$$\mathsf{M}X_{man} = \mathsf{P}_{man} \cdot \mathsf{M}X_{childrens} = 0.51 \cdot 122500 = 62475\,.$$

Воспользуемся *первым неравенством Чебышева*, чтобы вычислить вероятность того, что *число мальчиков превысит* число девочек *не менее*, чем на 1500.

$$\mathsf{P}\{X \geq \mathsf{M}X_{man} + 1500\} \leq \frac{\mathsf{M}X_{man}}{\mathsf{M}X_{man} + 1500};$$

$$\mathsf{P}\{X \geq 62475 + 1500\} \leq \frac{62475}{62475 + 1500};$$

$$\mathsf{P}\{X \geq 63975\} \leq 0.9765\,.$$

Ответ. $\mathsf{P}\{X \geq \mathsf{M}X_{man} + 1500\} \leq 0.9765\,.$

2 Задача №2. Метод моментов

Условие. С использованием метода моментов для выборки $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ найти точечные оценки параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X.

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\theta/2} \cdot \Gamma(\theta/2)} x^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0\,.$$

Решение. Рассмотрим закон распределения с неизвестынм параметром θ

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2^{\theta/2} \cdot \Gamma(\theta/2)} x^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0\,.$$

Это не что иное, как χ^2-*распределение с* θ *степенями свободы*. Отметим, что χ^2-распределение является частным случаем *гамма-распределения с параметром формы* $\alpha = \theta/2$ *и параметром масштаба* $k = 2$. Таким образом

$$m_1(\theta) = \mathsf{M}X = \alpha k = \frac{\theta}{2} \cdot 2 = \theta \quad = \quad \overline{X}_n = \hat{m}_1(\vec{X}_n).$$

Ответ. $\hat{\theta} = \overline{X}_n$, при $x > 0$.

3 Задача №3. Метод максимального правдоподобия

Условие. С использованием *метода максимального правдоподобия* для выборки $\vec{x}_5 = (x_1, \ldots, x_5)$ найти точечные оценки параметров заданного закона распределения генеральноий совокупности X.

$$f_X(x) = \frac{4\theta^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\theta^2 x^2}, \quad \vec{x}_5 = (1, 4, 7, 2, 3).$$

Решение. Функция правдоподобия

$$L(\vec{X}_n; \theta) = \left(\frac{4\theta^3}{\sqrt{\pi}}\right) \prod_{i=1}^{n} X_i^2 \exp\left(-\theta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right).$$

Логарифмируем

$$\ln L(\vec{x}_n; \theta) = 2n \ln 2 + 3n \ln \theta - \frac{1}{2} n \ln \pi + \ln \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \theta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Дифференцируем

$$\frac{\delta \ln L(\vec{x}_n; \theta)}{\delta \theta} = 0;$$
$$\frac{3n}{\theta} - 2\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0;$$
$$3n - 2\theta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0;$$
$$\theta^2 = \frac{3}{2} \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Так как $\vec{x}_5 = (1, 4, 7, 2, 3)$, $n = 5$ получаем

$$\theta^2 = \frac{3}{2} \frac{5}{1 + 4^2 + 7^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{15}{158}. \tag{1}$$

Ответ. $\theta = \sqrt{\frac{15}{158}}$.

4 Задача №4. Доверительные интервалы

Условие. По результатам $n = 10$ измерений прибором, не имеющим систематической ошибки, получены следующие отклонения ёмкости конденсатора от номинального значения (пФ)

$$5.4,\ -13.9,\ -11.0,\ 7.2,\ -15.6,\ 29.2,\ 1.4,\ -0.3,\ 6.6,\ -9.9\,.$$

Найти 90%-ые доверительные интервалы для среднего значения отклонения ёмкости от номинального значения и её среднего квадратного отклонения.

Решение.

$$\gamma = 0.9, \quad \vec{x}_{10}, \quad n = 10\,.$$

Вычислим среднее значение отклонения ёмкости от номинального

$$\overline{x}_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = -0.09$$

Вычислим несмещённое отклонение

$$S^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x}_{10})^2 = 181.639;$$
$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{181.639} \approx 13.48\,.$$

Вычислим одностороннюю область α

$$\gamma = 1 - 2\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0.9}{2} = 0.05\,.$$

Из таблицы квантилей распределения Стьюдента получим квантиль

$$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{1-0.05}(10-1) = t_{0.95}(9) = 1.833\,.$$

Вычислим точность интервальной оценки для среднего значения отклонения ёмкости от номинального

$$E_1 = t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} = t_{0.95}(9)\frac{S}{\sqrt{n}} = 1.833\cdot\frac{13.48}{\sqrt{10}} \approx 7.81\,.$$

Построим 90%-ый доверительный интервал для среднего значения отклонения ёмкости от номинального

$$\overline{x}_{10} - E_1 < \mu < \overline{x}_{10} + E_1;$$
$$-0.09 - 7.81 < \mu < -0.09 + 7.81;$$
$$-7.9 < \mu < 7.72\,.$$

Из таблицы квантилей χ^2-распределения получим квантили

$$\chi^2_{\alpha}(n-1) = \chi^2_{0.05}(10-1) = \chi^2_{0.05}(9) = 3.3251;$$
$$\chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{1-0.05}(10-1) = \chi^2_{0.95}(9) = 16.919\,.$$

Построим 90%-ый доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)};$$
$$\frac{9\cdot 181.639}{16.919} < \sigma^2 < \frac{9\cdot 181.639}{3.3251};$$
$$96.62 < \sigma^2 < 491.64.$$

Ответ. а) $-7.9 < \mu < 7.72$; б) $96.62 < \sigma^2 < 491.64$.