

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана



Факультет: Фундаментальные науки
Кафедра: Математическое моделирование
Дисциплина: Математическая статистика

Лабораторная работа №2
Вариант 20

Выполнил: Фокеев И. А.
Группа: ИУ7-61
Преподаватель: Власов П. А.

Москва, 2015 г.

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Отчёт	4
2.1	Определения и формулы	4
2.1.1	Определение γ -доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины	4
2.1.2	Формулы для вычисления границ γ -доверительного интервала . .	4
3	Текст программы	6
4	Результаты расчётов	8
5	Графики	8

1 Постановка задачи

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
 - вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
 - вычисление нижней и верхней границ $\bar{\mu}(\vec{X}_n)$, $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ -доверительного интервала для математического ожидания MX ;
 - вычисление нижней и верхней границ $\bar{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ -доверительного интервала для дисперсии DX ;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:
 - на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{X}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{X}_n)$, $y = \bar{\mu}(\vec{X}_n)$ и $y = \underline{\mu}(\vec{X}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N ;
 - на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{X}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{X}_n)$, $z = \bar{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ и $z = \underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N .

2 Отчёт

2.1 Определения и формулы

2.1.1 Определение γ -доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть \vec{X}_n – случайная выборка объема n из генеральной совокупности X с функцией распределения $F(x; \theta)$, зависящей от параметра θ , значение которого неизвестно.

Предположим, что для параметра θ в построенном интервале $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \bar{\theta}(\vec{X}_n))$, где $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\bar{\theta}(\vec{X}_n)$ являются функциями случайной выборки \vec{X}_n , такими, что выполняется равенство

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta < \bar{\theta}(\vec{X}_n)\} = \gamma$$

В этом случае интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \bar{\theta}(\vec{X}_n))$ называют интервальной оценкой для параметра θ с коэффициентом доверия γ (или, сокращенно, γ -доверительной интервальной оценкой), а $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\bar{\theta}(\vec{X}_n)$ соответственно нижней и верхней границами интервальной оценки. Интервальная оценка $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \bar{\theta}(\vec{X}_n))$ представляет собой интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью γ накрывает неизвестное истинное значение параметра γ .

Интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}_n), \bar{\theta}(\vec{x}_n))$ называют доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия γ или γ -доверительным интервалом, где \vec{x}_n – любая реализация случайной выборки \vec{X}_n .

2.1.2 Формулы для вычисления границ γ -доверительного интервала

Нормальное распределение Пусть \vec{X}_n – случайная выборка объема n из генеральной совокупности X , распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2 .

Оценка для математического ожидания при известной дисперсии

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \bar{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \quad (1)$$

$$\bar{\mu}(\vec{X}_n) = \bar{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \quad (2)$$

где:

- \bar{X} – оценка мат. ожидания,
- n – число опытов,
- $S(\vec{X}_n)$ точечная оценка дисперсии случайной выборки \vec{X}_n , $t_{1-\alpha}(n-1)$ квантиль уровня $1-\alpha$ для распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, α величина, равная $\frac{(1-\gamma)}{2}$.

Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma^2}(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)(n-1)}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}, \quad (3)$$

$$\bar{\sigma^2}(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)(n-1)}{\chi_{\alpha}^2(n-1)}, \quad (4)$$

где:

- n – объем выборки,
- $\chi^2_\alpha(n-1)$ – квантиль уровня α для распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы,
- α – величина, равная $\frac{(1-\gamma)}{2}$.

3 Текст программы

```
1 function lw2()
2     clear all;
3
4     X = readFromFile();
5     N = 1:40;
6
7     gamma = 0.9;
8     alpha = (1 - gamma)/2;
9
10    mu = expectation(X);
11    sigmaSqr = variance(X);
12
13    muArray = expectationArray(X, N);
14    varArray = varianceArray(X, N);
15
16    figure
17    plot([N(1), N(end)], [mu, mu], 'm');
18    hold on;
19    plot(N, muArray, 'g');
20
21    Ml = muArray - sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
22    plot(N, Ml, 'b');
23
24    Mh = muArray + sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
25    plot(N, Mh, 'r');
26    grid on;
27    hold off;
28
29    fprintf('mu = %.2f\n', mu);
30    fprintf('S^2 = %.2f\n\n', sigmaSqr);
31    fprintf('mu_low = %.2f\n', Ml(end));
32    fprintf('mu_high = %.2f\n', Mh(end));
33
34
35    figure
36    plot([N(1), N(end)], [sigmaSqr, sigmaSqr], 'm');
37    hold on;
38    plot(N, varArray, 'g');
39
40    Sl = varArray.*(N - 1)./chi2inv(1 - alpha, N - 1);
41    plot(N, Sl, 'b');
42
43    Sh = varArray.*(N - 1)./chi2inv(alpha, N - 1);
44    plot(N, Sh, 'r');
45
46    grid on;
47    hold off;
48    fprintf('sigma^2_low = %.2f\n', Sl(end));
49    fprintf('sigma^2_high = %.2f\n', Sh(end));
50 end
```

```

51
52
53 function X = readFromFile()
54     X = csvread('data.csv');
55 end
56
57 function mu = expectation(X)
58     mu = mean(X);
59 end
60
61 function sigmaSqr = variance(X)
62     sigmaSqr = var(X);
63 end
64
65 function muArray = expectationArray(X, N)
66     muArray = [];
67     for i = 1:N
68         muArray = [muArray, mean(X(1:i))];
69     end
70 end
71
72 function varArray = varianceArray(X, N)
73     varArray = [];
74     for i = 1:N
75         varArray = [varArray, var(X(1:i))];
76     end
77 end

```

4 Результаты расчётов

$$\hat{\mu} = 14.35$$

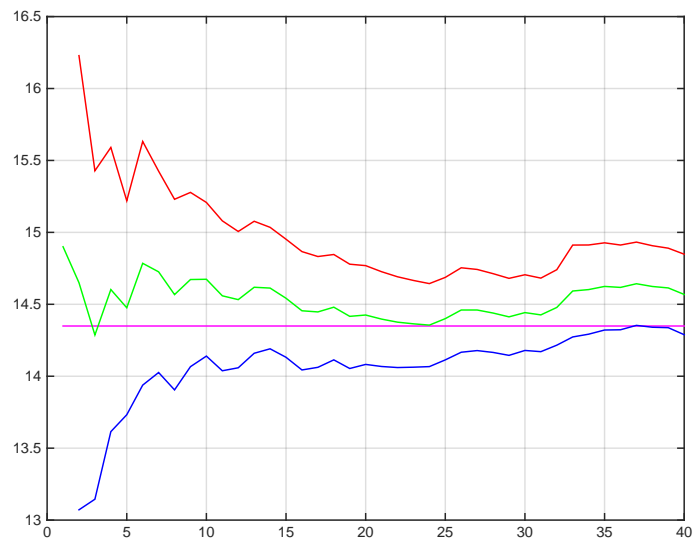
$$S^2 = 1.28$$

$$(\underline{\mu}, \overline{\mu}) = (14.29, 14.85)$$

$$(\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2) = (0.79, 1.67)$$

5 Графики

$y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N .



$y = S^2(\vec{x}_N)$, $y = S^2(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N .

