

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана



Факультет: Информатика и системы управления

Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Дисциплина: Математическая статистика

Домашнее задание №1

Выполнил:

Группа:

Вариант: 15

Москва, 2015 г.

Содержание

1	Задача №1. Предельные теоремы теории вероятностей	3
2	Задача №2. Метод моментов	4
3	Задача №3. Метод максимального правдоподобия	5
4	Задача №4. Доверительные интервалы	6

1 Задача №1. Предельные теоремы теории вероятностей

Условие. В Москве рождается в год около 122500 детей. Считая вероятность рождения мальчика равной 0.51, найти вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число родившихся девочек не менее, чем на 1500.

Решение.

$$MX_{childrens} = 122500, \quad P_{man} = 0.51.$$

Вычислим количество мальчиков рождаемых за год

$$MX_{man} = P_{man} \cdot MX_{childrens} = 0.51 \cdot 122500 = 62475.$$

Воспользуемся *первым неравенством Чебышева*, чтобы вычислить вероятность того, что *число мальчиков превысит* число девочек *не менее*, чем на 1500.

$$P\{X \geq MX_{man} + 1500\} \leq \frac{MX_{man}}{MX_{man} + 1500};$$

$$P\{X \geq 62475 + 1500\} \leq \frac{62475}{62475 + 1500};$$

$$P\{X \geq 63975\} \leq 0.9765.$$

Ответ. $P\{X \geq MX_{man} + 1500\} \leq 0.9765.$

2 Задача №2. Метод моментов

Условие. С использованием метода моментов для выборки $\vec{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ найти точечные оценки параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X .

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\theta/2} \cdot \Gamma(\theta/2)} x^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Решение. Рассмотрим закон распределения с неизвестным параметром θ

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{2^{\theta/2} \cdot \Gamma(\theta/2)} x^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Это не что иное, как χ^2 -распределение с θ степенями свободы. Отметим, что χ^2 -распределение является частным случаем гамма-распределения с параметром формы $\alpha = \theta/2$ и параметром масштаба $k = 2$. Таким образом

$$m_1(\theta) = MX = \alpha k = \frac{\theta}{2} \cdot 2 = \theta = \bar{X}_n = \hat{m}_1(\vec{X}_n).$$

Ответ. $\hat{\theta} = \bar{X}_n$, при $x > 0$.

3 Задача №3. Метод максимального правдоподобия

Условие. С использованием метода максимального правдоподобия для выборки $\vec{x}_5 = (x_1, \dots, x_5)$ найти точечные оценки параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X .

$$f_X(x) = \frac{4\theta^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\theta^2 x^2}, \quad \vec{x}_5 = (1, 4, 7, 2, 3).$$

Решение. Функция правдоподобия

$$L(\vec{X}_n; \theta) = \left(\frac{4\theta^3}{\sqrt{\pi}} \right) \prod_{i=1}^n X_i^2 \exp \left(-\theta^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 \right).$$

Логарифмируем

$$\ln L(\vec{x}_n; \theta) = 2n \ln 2 + 3n \ln \theta - \frac{1}{2} n \ln \pi + \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i^2 \right) - \theta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Дифференцируем

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln L(\vec{x}_n; \theta)}{\delta \theta} &= 0; \\ \frac{3n}{\theta} - 2\theta \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0; \\ 3n - 2\theta^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0; \\ \theta^2 &= \frac{3}{2} \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \end{aligned}$$

Так как $\vec{x}_5 = (1, 4, 7, 2, 3)$, $n = 5$ получаем

$$\theta^2 = \frac{3}{2} \frac{5}{1 + 4^2 + 7^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{15}{158}.$$

Ответ. $\theta = \sqrt{\frac{15}{158}}.$

4 Задача №4. Доверительные интервалы

Условие. По результатам $n = 10$ измерений прибором, не имеющим систематической ошибки, получены следующие отклонения ёмкости конденсатора от номинального значения (пФ)

$$5.4, -13.9, -11.0, 7.2, -15.6, 29.2, 1.4, -0.3, 6.6, -9.9.$$

Найти 90%-ые доверительные интервалы для среднего значения отклонения ёмкости от номинального значения и её среднего квадратного отклонения.

Решение.

$$\gamma = 0.9, \quad \vec{x}_{10}, \quad n = 10.$$

Вычислим среднее значение отклонения ёмкости от номинального

$$\bar{x}_{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = -0.09$$

Вычислим несмещённое отклонение

$$S^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}_{10})^2 = 181.639;$$
$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{181.639} \approx 13.48.$$

Вычислим одностороннюю область α

$$\gamma = 1 - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \gamma}{2} = \frac{1 - 0.9}{2} = 0.05.$$

Из таблицы квантилей распределения Стьюдента получим квантиль

$$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{1-0.05}(10-1) = t_{0.95}(9) = 1.833.$$

Вычислим точность интервальной оценки для среднего значения отклонения ёмкости от номинального

$$E_1 = t_{1-\alpha}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} = t_{0.95}(9) \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.833 \cdot \frac{13.48}{\sqrt{10}} \approx 7.81.$$

Построим 90%-ый доверительный интервал для среднего значения отклонения ёмкости от номинального

$$\bar{x}_{10} - E_1 < \mu < \bar{x}_{10} + E_1;$$
$$-0.09 - 7.81 < \mu < -0.09 + 7.81;$$
$$-7.9 < \mu < 7.72.$$

Из таблицы квантилей χ^2 -распределения получим квантили

$$\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(10-1) = \chi_{0.05}^2(9) = 3.3251;$$
$$\chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \chi_{1-0.05}^2(10-1) = \chi_{0.95}^2(9) = 16.919.$$

Построим 90%-ый доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)};$$
$$\frac{9 \cdot 181.639}{16.919} < \sigma^2 < \frac{9 \cdot 181.639}{3.3251};$$
$$96.62 < \sigma^2 < 491.64.$$

Ответ. а) $-7.9 < \mu < 7.72$; б) $96.62 < \sigma^2 < 491.64$.