Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Фундаментальные науки
Кафедра: Математическое моделирование
Дисциплина: Математическая статистика

Домашняя работа №1
Вариант 20

Выполнил:
Группа: ИУ7-61
Преподаватель: Власов П. А.

Москва, 2015 г.

1 Задание №1

Условие

Дана последовательность $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ независимых дискретных случайных величин. Удовлетворяет ли эта последовательность закону больших чисел, если ряд распределения случайной величины X_n имеет следующий вид?

$(X_n)_i$	$-\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$
$P\{X_n = (X_n)_i\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Решение

$$MX_n = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i = -\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} = 0$$

$$DX_n = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 P_i = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

— дальше надо переделать

Ответ

Удовлетворяет ЗБЧ

2 Задание №2

Условие

С использованием метода моментов для выборки $\vec{x_n} = (x_1, \ldots, x_n)$ найти точечные оценки параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{-x/(2\sigma^2)}, \quad x > 0$$

Решение

$$f_x(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{-x}{2\sigma^2}} & \text{if } x >= 0 \\ 0 & \text{else} \end{Bmatrix} \sim \Gamma(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{1}{2})$$

Метод моментов:

$$M_x = \frac{1/2}{1/(2\sigma^2)} = \sigma^2 = \bar{X}_n$$

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\bar{X}_n}$$

Ответ

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\bar{X}_n}$$

3 Задание №4

Условие

После n = 11 независимых измерений случаийной величины X получены следующие значения:

9.9, 12.5, 10.3, 9.2, 6.0, 10.9, 10.3, 11.8, 11.6, 9.8, 14.0.

Предполагая, что ошибки измерений распределены по нормальному закону, а систематические ошибки отсутствуют, определить: а) точечные оценки измеряемой величины и ее среднего квадратичного отклонения; б) вероятность того, что абсолютное значение ошибки при определении теоретического значения измеряемой величины меньше 2% от X_n.

Решение

$$\vec{X_n} = (9.9, 12.5, 10.3, 9.2, 6.0, 10.9, 10.3, 11.8, 11.6, 9.8, 14.0)$$

$$\bar{X}_n = 10,57273$$

$$S_n(\vec{X_n}) = 1,95685$$

1. Метод моментов для X $\sim$ N(m, σ)

$$\widehat{m_1} = \bar{X}_n = \widehat{m}$$

$$\widehat{m_2} = S_n(\vec{X_n}) = \widehat{\sigma}$$

2. P{-0,02$\bar{X}_n$ $<$ m-$\bar{X}_n$ $<$ 0,02$\bar{X}_n$} = ? Ищем центральную статистику для мат. ожидания при неизвестном σ:

$$g(\vec{X_n}, m) = \frac{m - \bar{X}_n}{S(\vec{X_n})}\sqrt{n} = \frac{m - \bar{X}_n}{S_n(\vec{X_n})}\sqrt{n-1} \sim S_1(n-1)$$

Преобразуем неравенство под знаком вероятности к этой статистике:

$$-0,02\bar{X}_n < m - \bar{X}_n < 0,02\bar{X}_n$$

$$\frac{-0,02\bar{X}_n}{S_n(\vec{X_n})}\sqrt{n-1} < g(\vec{X_n}, m) < \frac{0,02\bar{X}_n}{S_n(\vec{X_n})}\sqrt{n-1}$$

$$\frac{-0,02 * 10,57273 * \sqrt{10}}{1,95685} < g(\vec{X_n}, m) < \frac{0,02 * 10,57273 * \sqrt{10}}{1,95685} = 0,34171$$

Тогда:

$$P\{-0,02\bar{X}_n < m - \bar{X}_n < 0,02\bar{X}_n\} = P\{-0,34171 < g(\vec{X_n}, m) < 0,34171\} =$$
$$= \int_{-0,34171}^{0,34171} f_{\frac{s_1}{10}}(g)\, dg = 2\int_{0}^{0,34171} f_{\frac{s_1}{10}}(g)\, dg =$$
$$= 2(F_{\frac{s_1}{10}}(0,34171) - F_{\frac{s_1}{10}}(0)) = 2(0,63 - 0,5) = 0,26$$

Ответ

1.

$$\widehat{m_1} = \bar{X}_n = \widehat{m}$$
$$\widehat{m_2} = S_n(\vec{X_n}) = \widehat{\sigma}$$

2.

$$P\{-0,02\bar{X}_n < m - \bar{X}_n < 0,02\bar{X}_n\} = 0,26$$