تجزیه LU حل دستگاه‌های بالا مثلثی یا پایین مثلثی، خیلی راحت هست
که در تجزیه‌ی LU، ماتریس ضرایب رو به ضرب دو ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی تجزیه می‌شود
U یا L که

تعاریف ① ماتریس بالا مثلثی (U) = ماتریسی که درآیه المان‌های زیر قطر اصلی، صفر باشه
② ماتریس پایین مثلثی (L) = 〃 〃 〃 بالای 〃 〃 〃

$$A=\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$
$$\qquad L \qquad\qquad\qquad U$$

(*) حال اگر بخواهیم دستگاه $AX=b$ را حل کنیم به جای A، LU می‌گذاریم

$$L(\underbrace{UX}_{Y\ \text{و}})=b \;\Big\}\rightarrow \begin{cases} LY=b \\ UX=Y \end{cases}$$

نکته: برای تعیین ماتریس‌های تجزیه‌ی LU از ماتریس‌های مقدماتی استفاده می‌شه
نکته: ماتریس U، همان ماتریس سطری پلکانی به دست آمده نهایی در الگوریتم حذفی گاوس است

یا ① $(E_p \cdots E_1)A=U$

② $A=(E_p \cdots E_1)^{-1}U=LU$

③ $L=(E_p \cdots E_1)^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_p^{-1}$

پیش‌نیازهای جبر خطی در ماشین لرنینگ
سید امیر حسین حسینی

سؤال ۳۳: دستگاه سه معادله سه مجهول زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3&=-1\\ 4x_1+x_2+7x_3&=5\\ -6x_1-2x_2-12x_3&=-2 \end{aligned} \xrightarrow[\text{ماتریس ضرایب}]{① \text{ حل}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -6 & -2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}=U$$

② کنون از روی عملیات‌های سطری مقدماتی که انجام دادیم ماتریس‌های مقدماتی را تعیین می‌کنیم

③ در I_3

$$E_1=I_3(R_2-2R_1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2=R_3+3R_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3=R_3+R_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

④ $\xleftarrow{\text{معکوس‌ها}}$

$$E_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\qquad E_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\qquad E_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

⑤

$$L=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A=LU$

$$LY=B\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}\longrightarrow \begin{aligned} y_1&=-1\\ y_2&=7\\ y_3&=2 \end{aligned}$$

$$UX=Y\rightarrow\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}\longrightarrow \begin{aligned} x_3&=-1\\ x_2&=-8\\ x_1&=5 \end{aligned}$$

شماره: ....

تاریخ: ....

پیوست: ....

شرکت سی ای دی

C I D CO.

همدان، هلرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم

تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

تجزیه LU: با روشی سریعتر می‌تونیم L رو مشخص کنیم

① ماتریس L پایین مثلثی هست ② المان‌های قطر اصلی آن یک هست

③ المان‌های زیر قطر اصلی L از روی ضرایبی که برای محاسبهٔ ماتریس U استفاده می‌کنیم تعیین می‌شوند

توضیحات: فرض کنید ماتریس A را داریم

لینینا زهای جبرخطی / سید امیرحسین حسینی

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2\\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8\\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2\\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3\\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10\\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5\end{bmatrix}=A_1$$

$$\sim A_2=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2\\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2\\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=U$$

$$\rightarrow L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & 0\\ & & 1 & 0\\ & & & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

نکته = فرضاً این طور در نظر بگیریم که برای حذف a_{21} در A ، $2R_1+R_2$ رو انجام دادیم و ضریب R_1 ، برابر 2 است پس درایهٔ a_{21} در L برابر با -2 می‌باشد

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix}2\\-4\\2\\-6\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}3\\-9\\12\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$$

نکته: یا المان‌های متناظر a_{21}، a_{31}، a_{41} را تقسیم بر $a_{11}=2$ می‌کنیم و جای a_{21}، a_{31}، a_{41} در L می‌گذاریم

تبدیلات ماتریسی: اگر $T(x,y,z)=(2x,\ y-z)$ داشته باشیم ورودی در فضای R^3 تعریف می‌شود اما خروجی در فضای R^2 تعریف می‌شود (چون ۲ بردار پایه داریم)

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x\\y-z\end{bmatrix}\leftarrow$$

① تبدیل انقباض و انبساط

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=r\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

در واقع r رو در بردار ورودی ضرب اسکالر می‌کنیم

$r>1$: تبدیل انبساطی

$0<r<1$: تبدیل انقباضی

$\|rx\|=|r|\,\|x\|$

یادآوری

$r>1 \leftarrow$ فاصله نقطه از مبدأ مختصات بیشتر می‌شه

$r=1 \leftarrow$ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ امادر حقیقت

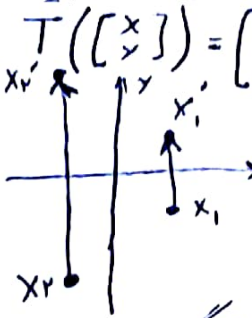
$0<r<1 \leftarrow$ فاصله نقطه از مبدأ مختصات کمتر می‌شه بدیکس

(تبدیل انعکاس:) نسبت به محورهای مختلف، می‌توانیم یک نقطه را منعکس کنیم ← مثلاً انعکاس نقطه (x,y) نسبت به محور x

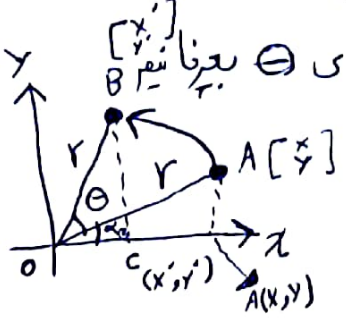
$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

← ما نسبت X رو ثابت نگه داریم و Y رو قرینه بکنیم

مثال: $X_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ، $X_1'=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$



(تبدیل Rotation:) می‌خواهیم نقطه A را به صورت پادساعتگرد به اندازه‌ی θ بچرخانیم $B\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$



$\overset{\triangle}{OCB} \rightarrow x' = OC = r\cos(\alpha+\theta)$

$= r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$

$\overset{\triangle}{OXA} \rightarrow \boxed{x\cos\theta - y\sin\theta}$

$\overset{\triangle}{OCB} \rightarrow y' = BC = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta$

$= y\cos\theta + x\sin\theta$

$= \boxed{x\sin\theta + y\cos\theta}$

فرم ماتریسی

$$\boxed{\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}$$

مثال: $X_1=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, $\theta=90$

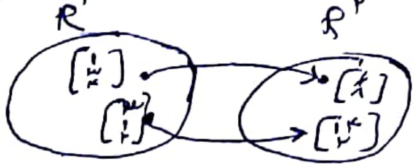
$$T(X_1)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

(*) در کل، هر ماتریسی می‌تواند به عنوان یک تبدیل (نگاشت) استفاده شود.

$A_{m\times n}$

$\hookrightarrow \begin{cases}T: R^n \rightarrow R^m\\ T(x)=Ax\end{cases}$

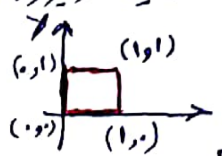
$$A=\begin{bmatrix}5&3&-2\\0&4&-1\end{bmatrix} \rightsquigarrow T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5&3&-2\\0&4&-1\end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}_{3\times 1}$$



نقطه‌ای در بعد ۳، به نقطه‌ای در بعد ۲ نگاشت پیدا می‌کند

(سؤال ۳۴:) نگاشت مربع واحد با تبدیل تعریف شده توسط ماتریس زیر را به دست آورید.

$A=\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{حل}}$



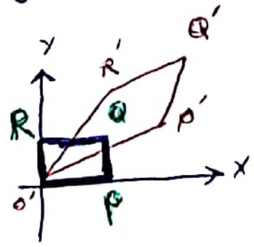
$P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $Q\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $R\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $O\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$P'=\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$

$Q'=\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$

$R'=\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

$O'=\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$



$\rightarrow T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+2y\\2x+3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{x=1} PQ: \begin{cases}x'=2y+4\\ y'=3y+2\end{cases} \rightsquigarrow y=\dfrac{x'-4}{2} \xrightarrow[\text{در } y']{\text{جایگذاری}} y'=1.5x'-4$

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

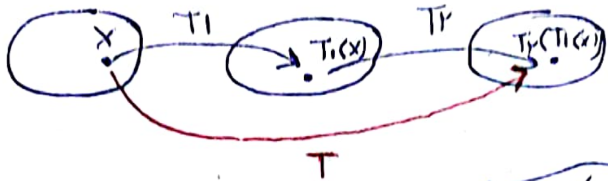
شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

(*) تبدیلات ماتریسی را می‌توان با هم ترکیب کرد. که مانند fog در توابع عادی

$$T_1(X)=A_1X \ , \ T_2(X)=A_2X \ \text{و} \ T=T_2\circ T_1$$

$$\to T(X)=T_2(T_1(X))=T_2(A_1X)=A_2A_1X$$

پیشنیازهای جبر خطی
استاد امیرحسین حسینی



سوال ۳۵ تبدیلی بیابید که ابتدا انعکاس نسبت به محور y ها سپس چرخش ۴۵ درجه ای و سپس انبساط با فاکتور ۲ را انجام دهد. چه ای نگاشت $y=x+1$ تحت این تبدیل را بیابید

در تبدیل اول y تغییری نمی‌کند و فقط x قرینه می‌شود

$$T_1=T_1\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}}^{A1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$T_2=T_2\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos 45&-\sin 45\\ \sin 45&\cos 45\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\overbrace{\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}}^{A2}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$T_3=T_3\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\overbrace{\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}}^{A3}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$\to T=A3A2A1=\frac{1}{\sqrt2}\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\sqrt2\left(I_2\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\sqrt2\left(\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\right)$$

$$\sqrt2\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}_{2\times2}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{2\times1}=\sqrt2\begin{bmatrix}-x-y\\-x+y\end{bmatrix}_{2\times1}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\sqrt2\begin{bmatrix}-x-y\\-x+y\end{bmatrix}$$

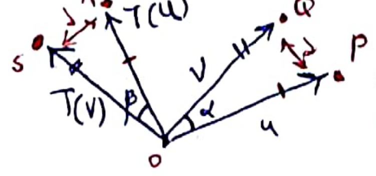
$$x'=\sqrt2(-x-y)$$
$$y'=\sqrt2(-x+y)\xrightarrow{y=x+1}\begin{cases}x'=\sqrt2(-2x-1)\\ y'=\sqrt2(1)=\sqrt2\end{cases}$$

تبدیل متعامد تبدیلی که ماتریس متناظر با آن متعامد باشد

$T(u)=Au$ و $\Leftrightarrow A^{-1}=A^T$ به ماتریس هایی که معکوس شون برابر با ترانهاده شون باشه، ماتریس های متعامد می‌گوییم

نکته بسیار مهم تبدیلات متعامد: نرم و زاویه و فاصله بین نقاط را تغییر نمی‌دهند (شکل اشکال را تغییر نمی‌دهد)

اگر بردارهای u و v رو در نظر بگیریم که زاویه بین شون α باشه



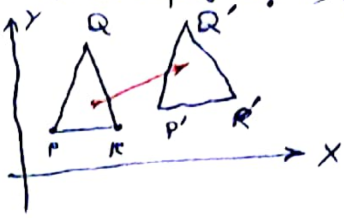
$d(P,Q)=d(R,S)$

$\alpha=\beta$
$OP=OR$
$OQ=OS$

تبدیل انتقال | جابه‌جایی خطی و ثابت تمام نقاط در دامنه تبدیل.

$T(u) = u + \vec{v}$

مثال $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}}_{v}$



تبدیل Affine ترکیب یک تبدیل ماتریسی و تبدیل انتقال $T(u) = Au + \vec{v}$

مثال $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

تبدیلات خطی تبدیلی که حافظ جمع و ضرب اسکالر باشد، یک تبدیل خطی هست

خاصیت اول: $T(u+v) = T(u) + T(v)$ (جمع آثار)

〃 دوم: $T(cu) = cT(u)$ (همگنی)

نکته مهم هر تبدیل ماتریسی، یک تبدیل خطی است

سؤال ۳۶: خطی بودن تبدیل زیر را بررسی کنید

$T(x,y) = (x-y, 3x)$

حل $u_1 = (x_1, y_1) \to T(u_1) = (x_1 - y_1, 3x_1) \xrightarrow{+} (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 3x_1 + 3x_2)$ ✓

$u_2 = (x_2, y_2) \to T(u_2) = (x_2 - y_2, 3x_2)$

$* \quad u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \to T(u_1 + u_2) = (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 3x_1 + 3x_2)$ ✓

$cu_1 = (cx_1, cy_1) \to T(cu_1) = (c(x_1 - y_1), 3cx_1)$ ✓

$c * T(u_1) \to (c(x_1 - y_1), 3cx_1)$ ✓ $\Longrightarrow$ تبدیل، خطی است.

حل ۲ (ادامه دانشجو) $T(u_1 + \alpha u_2) = T(u_1) + \alpha T(u_2) \to$ کافی است برای خطی بودن، فقط همین اثبات شود

سؤال ۳۷: خطی بودن تبدیل زیر را بررسی کنید

$T(x,y,z) = (xy, z)$

حل: برای اثبات خطی نبودن فقط ارائه‌ی یک مثال نقض کافی است

$\to T(1,2,3) = (2,3)$

$c = 2 \rightsquigarrow \underbrace{T(2,4,6)}_{T(2u)} = (8,6) \neq 2T(u) \to$ خطی نیست

سؤال ۳۸: خطی بودن تبدیل زیر را بررسی کنید

$T(ax^2 + bx + c) = (a+b)x + c$

حل $T: P_2(x) \to P_1(x)$

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

ادامه سؤال ۳۸

$$u_1 = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \longrightarrow T(u_1) = (a_1 + b_1)x + c_1$$

$$u_2 = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \longrightarrow T(u_2) = (a_2 + b_2)x + c_2$$

$$\hookrightarrow u = u_1 + \alpha u_2 = (a_1 + \alpha a_2)x^2 + (b_1 + \alpha b_2)x + c_1 + \alpha c_2$$

$$\hookrightarrow T(u) = \left(a_1 + b_1 + \alpha(a_2 + b_2)\right)x + c_1 + \alpha c_2$$

$$= (a_1 + b_1)x + c_1 + \alpha\left((a_2 + b_2)x + c_2\right)$$

$$= T(u_1) + \alpha T(u_2)$$

پیشنیازهای جبر خطی
سید امیر حسین حسینی

$$\xrightarrow[\text{شد}]{\text{اثبات}} T(u_1 + \alpha u_2) = T(u_1) + \alpha T(u_2) \longrightarrow \text{خطی است}$$

سؤال ۳۹) اطلاعات زیر از یک تبدیل خطی در دسترس است. $T(1,-2,3)$ را حساب کنید

$$T(1,0,0) = (3,-1) \quad \Big\{ \quad T(0,1,0) = (2,1) \quad \Big\} \quad T(0,0,1) = (3,0)$$

حل: چون تبدیل T خطی است بنابراین برای محاسبه $T(1,-2,3)$ کافی است که بردار $(1,-2,3)$ را به صورت ترکیب خطی از $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ بنویسیم

$$\hookrightarrow T(1,-2,3) = T\left(1(1,0,0) - 2(0,1,0) + 3(0,0,1)\right)$$

$$\xrightarrow[\text{است}]{\text{چون خطی}} 1 * T(1,0,0) - 2T(0,1,0) + 3T(0,0,1)$$

$$= (3,-1) - 2(2,1) + 3(3,0) = (8,-3)$$

$$\xrightarrow{\text{کلی}} T(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha(3,-1) + \beta(2,1) + \gamma(3,0) = (3\alpha + 2\beta + 3\gamma, \beta - \alpha)$$

نتیجه مهم

هر تبدیل خطی را می‌توان به شکل یک تبدیل ماتریسی بیان کرد

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$$

$$u = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$$

$$T(u) = T(c_1 e_1 + \dots + c_n e_n) = c_1 T(e_1) + \dots + c_n T(e_n) = \underbrace{\begin{pmatrix} T(e_1) & \dots & T(e_n)\end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}}_{u}$$

سوال ۴۰: نمایش ماتریسی تبدیل زیر را تعیین کنید

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-y\\-x\end{bmatrix}$$

حل $\rightarrow$ $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, e_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\hookrightarrow T(e_1)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}, T(e_2)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \rightarrow A=\begin{bmatrix}T(e_1) & T(e_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$

جواب آخر $\rightarrow T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

سوال ۴۱: نمایش ماتریسی تبدیل زیر را تعیین کنید

$$T(x,y)=(3x+y, 2y, x-y)$$

حل $\rightarrow T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3x+y\\2y\\x-y\end{bmatrix}$ و $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, e_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow T(e_1)=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$, $T(e_2)=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

$\longrightarrow A=\begin{bmatrix}T(e_1) & T(e_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\\1&-1\end{bmatrix} \rightarrow T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

کرنل تبدیل خطی (هسته)**:** مجموعه‌ای است که نگاشت آن توسط تبدیل خطی، بردار صفر است

بُرد تبدیل خطی: مجموعه‌ای که تمام خروجی‌های ممکن تبدیل خطی در آن قرار می‌گیرند، بُرد تبدیل خطی می‌گویند

نکته: اگر تبدیل را از فضای برداری u به v تعریف کنیم، کرنل یک تبدیل خطی یک زیرمجموعه‌ای از u هست که $T(u)=0$ برقرار باشد ← یعنی کل نقاطی که داخل این فضا هست در v به صفر نگاشت پیدا بکند

نکته: اگر تمام نقاطی که در u وجود دارد وارد تبدیل کنیم، تا تمام خروجی‌های ممکن به دست بیاد (که ممکنه کل فضای برداری v پوشش داده نشه) و به اون بخشی که پوشش داده می‌شه بُرد (Range) می‌گوییم

نکته: اثبات می‌شه که ۱؛ کرنل یک تبدیل خطی، یک زیرفضای برداری است ← یک زیرفضای برداری از u
(null space)

اثبات می‌شه که ۲؛ بُرد یک تبدیل خطی، یک زیرفضای برداری است ← یک زیرفضای برداری از v

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim \text{domain}(T)$$

قضیه بسیار مهم

مجموع رنک یک تبدیل خطی و nullity اون همواره برابر هست با بعد دامنه‌ی T

به بعد برد تبدیل خطی؛ رنک تبدیل خطی می‌گوییم

به بعد کرنل تبدیل خطی؛ nullity تبدیل خطی می‌گوییم

مثلاً اگر $U : R^3$ در نظر بگیریم؛ سه بعدی هست پس مجموع رنک و نالیتی باید برابر با ۳ باشه

قضیه ۲: کرنل تبدیلات خطی؛ جواب هاى همگن دستگاه ساخته شده با ماتریس معادل آن است

قضیه ۳: برد تبدیلات خطی؛ فضای اسپن شده توسط ستون های ماتریس معادل آن است

توضیح قضیه ۲

مثال: فرض کن تبدیل T خطی باشه و آن را به شکل ماتریسی نوشته ایم $T(u) = Au$

حالا ما می‌خواهیم فضایی رو پیدا کنیم که به صفر نگاشت پیدا می‌کنه $\boxed{T(u) = Au = 0}$

و $Au = 0$ طبق توضیحات قبلی؛ یک دستگاه همگن رو نشون میده

با روش‌های حذفی گاوس یا گاوس جردن حل می‌شه

پیشنیاز های جبر خطی
سید امیر حسین حسینی

توضیح قضیه ۳

مثال: فرض کن ماتریس A رو به شکل روبه‌رو بنویسیم

$$T(u) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$$

ستون های ماتریس A باشد و یک بردار $\boxed{n \times 1}$ هستند

چون تبدیل از R^n به R^m هست u در فضای R^n قرار می‌گیره

$$T : R^n \to R^m$$

$$T(u) = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_n a_n = \text{Span}(a_1, \dots, a_n)$$

سؤال ۴۲: مهم
کرنل و برد تبدیل خطی زیر را تعیین کنید

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z \quad z - y \quad x + y + 4z)$$

حل:

$$T(u) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A} u$$

ابتدا تبدیل رو به شکل ماتریسی می‌نویسیم

$$Au = 0 \xrightarrow{\text{حل}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 - 2R_2,\ R_3 + R_2]{R_2 \times -1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2}$$

(ادامه سوال ۱۴)

$$\to Au=0 \to \begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0 \to \begin{matrix}x+5z=0\\y-z=0\end{matrix} \to \begin{matrix}x=-5z\\y=z\end{matrix}$$

$$\to u=\begin{bmatrix}-5z\\z\\z\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}-5\\1\\1\end{bmatrix}$$

هر نقطه‌ی u در فضای کرنل قرار دارد

و چون یک متغیر آزاد داریم ← $nullity=1$ در این ترکیب خطی برابر با یک است

$$Range=Span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}\right)=\alpha\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{a_1}+\beta\underbrace{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}}_{a_2}+\gamma\underbrace{\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}}_{a_3}$$

← اگر بخواهیم تعریف فضا رو به دست بیاریم: اگر بردارها را با a_1 و a_2 و a_3 نشان بدهیم

پس چون a_3 قابل تولید با ترکیب خطی a_1 و a_2 است در فضای تولید شده، $\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$ قابل حذف است و تاثیری در فضای تولید شده توسط ترکیب خطی ندارد

اثبات مرحله ۵ → $a_3=5a_1-a_2$

این دو بردار از هم مستقل هستند

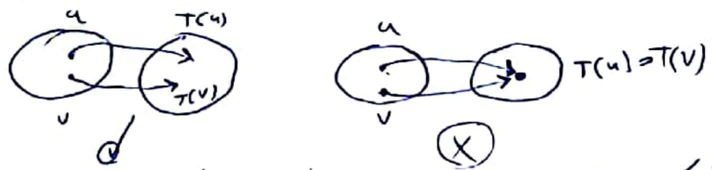
$$Range(T)=Span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=\alpha\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{a_1}+\beta\underbrace{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}}_{a_2}$$

← چون تعداد بردارهای پایه برابر با ۲ هست ← بعد برد تبدیل (RANK) برابر با ۲ هست

$$RANK+nullity=d$$
$$2+1=3$$

تبدیل خطی یک به یک و معکوس پذیر

تبدیل یک به یک: برای هر بردار در برد تبدیل، فقط یک بردار متناظر در دامنه تابع وجود دارد



$$T(u)=T(v) \Rightarrow u=v$$

قضیه ۴: یک تبدیل خطی، یک به یک است اگر کرنل آن فقط شامل بردار صفر باشد

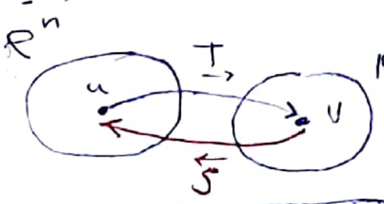
قضیه ۵: یک تبدیل خطی، یک به یک است اگر ماتریس آن، هم ارز سطری ماتریس همانی باشد

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هلرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن وفکس ۳۰۱۴۰

نکته: تنها تست بردارهای مستقل خطی که توسط تبدیلات خطی یک به یک ما خود؛ مستقل خطی هستند
که اگر u_1 تا u_n مستقل خطی باشند؛ $T(u_1)$ تا $T(u_n)$ نیز مستقل خطی هستند

تبدیل معکوس: از روی بردارهای داخل برد تبدیل، بردارهای متناظر در دامنه آن را تعیین می کند



$T: R^n \to R^m$

$S: R^m \to R^n$

$$T(S(u)) = S(T(u)) = u$$

$$T \circ S(u) = S \circ T(u) = u$$

پیشنیازهای جبر خطی
سید امیرحسین حسینی

نکته مهم: شرط لازم و کافی برای وجود تبدیل معکوس، یک به یک بودن تبدیل خطی است

نکته: عبارات روبرو معادل هم هستند ۱) T معکوس پذیر هست ۲) T غیرمنفرد هست $|A| \neq 0$
۳) T یک به یک هست ۴) کرنل T فقط شامل بردار صفر است ۵) بُعد T برابر R^n هست
۶) T^{-1} یک تبدیل خطی هست ۷) ماتریس معادل T^{-1} همان A^{-1} هست
(RANK + null = n)

نکته: می دانیم که $T(u) = v$، برای بدست آوردن T^{-1}، جای u و v را عوض می کنیم

$$T(v) = u \to v = T^{-1}(u)$$

سوال ۴۳: یک به یک بودن تبدیل خطی را بررسی کرده و سپس معکوس آن را بدست آورید

$$T(x, y) = (3x + 4y, 5x + 7y)$$

حل: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x - 4y \\ 3y - 5x \end{bmatrix}$$

دترمینان: متناسب با هر ماتریس مربعی یک دترمینان یکتا وجود دارد

نکته مهم: روش اصلی برای محاسبه معکوس ماتریس‌ها و تحلیل دستگاه معادلات خطی دترمینان است

نکته/ یادآوری: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آنگاه $\det(A)$ با فرمول روبه‌رو حساب می‌شد $|A|=ad-bc$

نکته: برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس 3×3 (4×4) از محاسبات دترمینان ماتریس‌های 2×2 (3×3) استفاده می‌کنیم

نکته: کهاد / همسازه = دترمینان زیرماتریس به دست آمده بعد از حذف سطر i ام و ستون j ام

minor / cofactor

$M_{ij}=|A_{ij}|$ کهاد

$c_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

مثال: فرض کن $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ M_{11} و c_{11} رو حساب کن

$$M_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-1-(-4)=3$$

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\times 3=3$$

فرمول کلی دترمینان ← بسط سطر اول

$$[A]_{3\times3}\longrightarrow |A|=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+a_{13}c_{13}$$

$$[A]_{n\times n}\longrightarrow |A|=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+\dots+a_{1n}c_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}c_{1j}$$

سؤال ۴۴: دترمینان ماتریس زیر را حساب کنید

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{بسط سطر دوم}} \underbrace{-3\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{a_{21}c_{21}}+\underbrace{0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}_{a_{22}c_{22}}\underbrace{-1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}_{a_{23}c_{23}}=-12+(+6)=-6$$

قضیه اساسی: دترمینان را می‌توان براساس هر سطر یا ستون دلخواه محاسبه کرد

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{ij}\ (\text{سطری})\quad \text{سطر i ام}\qquad |A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}c_{ij}\ (\text{ستونی})\quad \text{ستون j ام}$$

نکته بسیار مهم: اگر مجموع شماره سطر و ستون فرد باشد همسازه قرینه‌ی کهاد است

" زوج " همسازه برابر با کهاد است

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هلرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن وفکس ۳۰۱۴۰

سؤال ۲۵: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

حل: سعی کنید از سطر یا ستونی استفاده کنید که تعداد صفرهای اون بیشتر باشه

پس از ستون سوم استفاده می کنم

$$|A| = +0\times\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

پیشنیازهای جبرخطی
سید امیر حسین حسینی

$$= 3\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{اول}]{\text{ستون}} 3\times\left(+2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0 + 0\right) = \boxed{6}$$

سؤال ۲۶: تمام مقادیر x را بیابید که دترمینان ماتریس زیر صفر شود

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 2 \\ 2x & x-1 & 4 \\ -x & x-1 & x+1 \end{bmatrix}$$

حل در خانه

جواب نهایی = $x = 0$ و -3 و 1

دترمینان ـ روش ساروس : مجموع ضرب قطرهای اصلی منهای مجموع ضرب قطرهای فرعی

$$A=\left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right]\begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array} = (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ را با روش ساروس حل کنید

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 3 & -2 \end{array} \Longrightarrow (2\times4\times7 + 3\times6\times3 + 5\times(-1)(-2)) - (3(-1)(7) + 2(6)(-2) + 5(4)(3))$$

$$= 120 - 15 = \boxed{105}$$