پیشنیازهای جبر خطی در ماشین لرنینگ
سید امیرحسین حسینی بیلی

صفحه ۱

شماره: ....

تاریخ: ....

پیوست: ....

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن وفکس ۳۰۱۴۰

فصل ۱

سوال ۱: فرض کن تابع هدف زیر رعایت شود

$143x + 60y$ رو میخواهیم max کنیم با ملاحظه متغیرهای

$$\text{s.t.}\begin{cases} x + 4y \leq 75110 \\ x + 30y \leq 4000 \\ 120x + 210y \leq 15000 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

← برنامه ریزی خطی (linear programming)

Submatrices of A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ماتریس همانی: قطر اصلی همگی یک باشند و مابقی صفر

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب:

ماتریس الحاقی:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس الحاقی}}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \left[\ \underset{3\times 3}{A}\ \middle|\ b\ \right]$$

انواع تبدیلات: (۱) تعویض جای دو معادله (۲) ضرب یک معادله در عددی غیرصفر ($c \neq 0$) (۳) اضافه کردن مضربی از یک معادله به معادله ی دیگر

در ماتریس‌ها: (۱) تعویض دو سطر (۲) ضرب یک در سطر در عددی غیر از صفر (۳) اضافه کردن مضربی از یک سطر به سطر دیگر

روش حذفی گاوس جردن: با استفاده از عملگرهای ۳گانه ی ماتریسی، ماتریس افزوده را طوری تغییر می‌دهیم که حل معادله ساده‌تر شود

← برای دستگاه با جواب یکتا: ماتریس ضرایب معادله با ماتریس همانی تبدیل می‌شود

← در این صورت بردار X همان جواب مسئله خواهد بود

$$[A : b] \approx \cdots \approx [I_n : X]$$

فرم سطری پلکانی کاهش یافته

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow 1\times x_1 + 0\times x_2 + 0\times x_3 = c_1 \\ \longrightarrow 0\times x_1 + 1\times x_2 + 0\times x_3 = c_2 \\ \longrightarrow 0\times x_1 + 0\times x_2 + 1\times x_3 = c_3 \end{matrix}$$

سوال ۲: دستگاه معادله روبه‌رو را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to E_1 \\ \to E_2 \\ \to E_3 \end{matrix}$$

ماتریس الحاقی

صفحه ۲

I) $E_2 - 2E_1 \longrightarrow$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_2 - x_3 = -1$$
$$-2x_2 - 3x_3 = -8$$

II) $E_3 - E_1 \xrightarrow[\text{دوم و سوم}]{\text{حذف } x_1 \text{ از معادله}}$

حل قسمت ۱

III) $E_1 - E_2$

حذف x_2 از معادلات اول و سوم

IV) $E_3 + 2E_2$

$$x_1 + 2x_3 = 3$$
$$x_2 - x_3 = -1$$
$$-5x_3 = -10$$

حل قسمت ۲

V) حذف x_3 از معادلات اول و دوم $\longrightarrow -0.2 \times E_3$ (برای همانی شدن ماتریس A)

$$x_1 + 2x_3 = 3$$
$$x_2 - x_3 = -1$$
$$x_3 = 2$$

حل قسمت ۳

VI) $E_1 - 2E_3$

VII) $E_2 + E_3$

$\longrightarrow \boxed{x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2} \longrightarrow b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ / ماتریس الحاقی $= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

حل در یک نگاه

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_3 - E_1]{E_2 - 2E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_3 + 2E_2]{E_1 - E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-0.2 \times E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2 + E_3]{E_1 - 2E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نکته: برای اصلاح ستون j ام از المان jj ام استفاده می‌کنیم

سوال ۳ حل در خانه: دستگاه معادله روبرو را حل کنید

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12$$
$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = 18$$
$$-x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8$$

جواب نهایی: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$

سوال ۴ // : // // //

$$4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 44$$
$$3x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 32$$
$$-2x_1 - x_2 = -7$$

* هر وقت المان های a_{11} یا a_{22} یا a_{33} برابر با صفر شد جای دو سطر را عوض کنید

جواب نهایی: $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1$

سوال ۵ // : // // //

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 11$$
$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 19x_4 = 36$$
$$3x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 28$$
$$x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 = -12$$

جواب نهایی: $x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = +2$

صفحه ۳

شرکت سی ای دی

C I D CO.

همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم

تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

شماره: ....

تاریخ: ....

پیوست: ....

(پیشنیاز مار جبرخطی در ماشین لرنینگ / سید امیرحسین حسینی جبلی)

* اگر ماتریس ضرایب معادل سطری ماتریس همانی نشود (قابل تبدیل نباشد)؛ دستگاه یا دارای بی نهایت جواب است و یا هیچ جوابی ندارد *

I
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$2x_1 + 2x_2 = 3$$

II
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$2x_1 + 2x_2 = 4$$

* اگر یک سطر در ماتریس الحاقی تماماً صفر شود (بعد از اصلاحات) ؛ ~~هیچ~~ جواب بی نهایت خواهیم داشت ؛ اگر یک سطر از ماتریس الحاقی به جز درایه ی متناظر با b آن صفر شود هیچ جوابی نخواهیم داشت

نکته : با استفاده از روش گاوس جردن می توان به صورت همزمان، جواب دستگاه به ازای چندین بردار مقادیر ثابت را به دست آورد

$$AX = B \hookrightarrow [A : B_1 \mid B_2 \ldots B_k] \approx \ldots \approx [I_n : X_1 \; X_2 \ldots X_k]$$

جواب معادله به ازای B_1

سوال ۶ : جواب دستگاه معادله زیر را به دست آورید

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = b_2$$
$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = b_3$$

$$\text{for } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -11 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس الحاقی :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -11 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_3+E_1]{E_2-2E_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_3-E_2]{E_1+E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_1-E_3]{E_2+2E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مجموعه جواب ها

$$x_1 = 1 , x_2 = -1 , x_3 = 2$$
$$x_1 = 0 , x_2 = 3 , x_3 = 1$$
$$x_1 = -2 , x_2 = 1 , x_3 = 2$$

فرم سطری پلکانی کاهش یافته : (۱) سطرهایی که تماماً صفر در ردیف های آخر ماتریس الحاقی قرار می گیرند (۲) اولین المان در ردیف های غیر صفر ۱ باشد (۳) المان ۱ در هر ردیف در سمت راست المان ۱ در ردیف ما قبل قرار دارد (۴) المان های بالا و پایین ۱ ها صفر باشند

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال ۷: هر کدام از ماتریس های زیر چرا به فرم سطری پلکانی کاهش یافته نیستند

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad / \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad / \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad / \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نکته: برای اینکه جواب ماتریس های غیرمربعی را به دست بیاوریم، تا منسیت ماتریس الحاقی را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تبدیل کنیم

* **نکته:** فرم سطری پلکانی کاهش یافته برای هر ماتریسی یکتا هست

سوال ۸: ماتریس زیر را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تبدیل کنید

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{که } A11 \text{ غیرصفر باشد}]{R2 \text{ و } R1 \text{ تعویض}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{اولین المان غیرصفر باید یک باشد}]{\frac{1}{3}R1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[R3-4R1]{\text{پایین یک باید همه صفر باشن}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R3-2R2]{R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R2+R3]{R1-2R3}$$

Reduced Row-Echelon Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} = RREF(A)$$

سوال ۹: (حل این سوال متفاوت است). جواب کلی دستگاه معادله زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned} \xrightarrow{\text{حل}} \text{ماتریس الحاقی} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R3-3R1]{R2-2R1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R3+2R2]{R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = RREF(A)$$

x_3: متغیر آزاد

معادله سوم (بدیهی) $0 = 0$

$x_1 + 3x_3 = 4$

$x_2 + 2x_3 = 1$

ادامه

$x_1 = 4 - 3x_3$

$x_2 = 1 - 2x_3$

$x_3 = x_3$

جواب کلی

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3x_3 \\ 1-2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

شماره:..................
تاریخ:..................
پیوست:..................

$r=1 \longrightarrow (1, -1, 1)$

$r=2 \longrightarrow (-2, -3, 2)$

$$\begin{cases} x_1 = 4-3r \\ x_2 = 1-2r \\ x_3 = r \end{cases} \Longrightarrow r = \left(\frac{4-x_1}{3} = \frac{1-x_2}{2} = x_3 \right)$$

پیشنیازهای جبر خطی در ماشین لرنینگ
سید امیرحسین حسینی نبلی

ادامه سوال ۹:

جواب این دستگاه یک خط در فضای ۳ بعدی است (این خط همان خط مشترک صفحات A و B و C است

$P_A: 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9$

بردار هادی خط $= (-3, -2, 1)$

نکته: اگر تعداد مجهولات بیش از تعداد معادلات باشد، همواره بی نهایت جواب خواهیم داشت

سوال ۱۰: جواب کلی دستگاه معادله زیر را به دست آورید

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4$$
$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 10$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -6$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 7 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1-3R_2]{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = rref(A)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \\ 0 = 0 \ (\text{بدیهی}) \end{cases} \xrightarrow{x_2 \text{ و } x_3 \text{ متغیر آزاد}} \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + x_3 - 2 \\ x_4 &= 2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r+s-2 \\ r \\ s \\ 2 \end{pmatrix}$$

این جواب، بیانگر یک صفحه در فضای 3D هست

بردار نرمال $= (1, 2, -1)$

بردار نرمال برداری که بر صفحه عمود است

سوال ۱۱ حل در خانه: نشان دهید دستگاه زیر جواب ندارد

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 3$$
$$x_2 + 3x_3 = -1$$
$$x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 3$$

دستگاه معادلات همگن: اگر بردار مقادیر سمت راست (b) تماماً صفر باشد، سیستم را همگن می‌گوییم

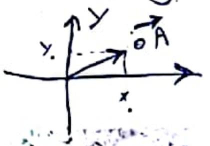
نکته: جواب کلی سیستم‌های همگن را با استفاده از فرم ماتریسی rref به دست می‌آوریم

$$x_1 + x_2 - x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$
$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$$

فضای برداری R^n: هدف: درک فضای جواب های دستگاه معادلاتی که بی نهایت جواب دارند

فضای برداری R^2: فضای شامل تمام زوج مرتب های دو بعدی ← به دو روش ← مختصات (X, Y) ← قابل نمایش است

← بردار مکان



فضای برداری R^3: فضای شامل تمام سه تایی های مرتب

فضای برداری R^n:
فضای شامل تمام n تایی های مرتب
$u=(u_1\ u_2\ u_3\ \dots\ u_n) \in R^n$
$u_i \in R$

نکته مهم: برای آنکه در فضای n بعدی ای تعریف شوم باید n متغیر آزاد داشته باشیم

$X=26$, $Z=2$ پس ← فضای ۳ بعدی نیست

جمع و ضرب اسکالر بردارها: $u=(u_1,\dots,u_n)$ $V=(V_1,\dots,V_n)$

Addition: $\vec{u}+\vec{V}=(u_1+V_1,\ u_2+V_2,\ u_3+V_3,\ \dots,\ u_n+V_n)$

scalar multipication: $c\vec{u}=(cu_1,\ cu_2,\ cu_3,\ \dots,\ cu_n)$

نکته: جمع برداری و ضرب اسکالر عملگرهای بسته در فضای R^n هستند (فضای برداری تغییر نمی کند)

تعاریف:
① بردار صفر = برداری که تمام المان های آن صفر باشد ② بردار قرینه = برداری که المان های آن، قرینه بردار اولیه باشد
③ تفاضل برداری = جمع بردار اول با قرینه ی بردار دوم

خواص جمع و ضرب اسکالر:
① جابجایی $u+v=v+u$ ② شرکت پذیری $u+(v+w)=(u+v)+w$ ③ عضو خنثی در جمع برداری $u+0=0+u=u$
④ $u+(-u)=0$ جمع هر بردار با قرینه خودش، بردار صفر خواهد شد ⑤ توزیع پذیری در ضرب اسکالر $c(u+v)=cu+cv$
⑥ عضو خنثی در ضرب اسکالر $1\times u=u$

ترکیب خطی بردارها:
منظور از ترکیب خطی بردارها، جمع برداری ضرب اسکالر بردارها است

$$V=c_1V_1+c_2V_2+\dots+c_mV_m$$

مثال: فرض کن $u=(2,5,-3)$ و $V=(-4,1,9)$ و $W=(4,0,2)$ باشد آنگاه $Z=2u-3V+W$ یک ترکیب خطی از بردارهای u و V و W خواهد بود که $Z=(20,7,-31)$

سوال ۱۲:
بررسی کنید آیا بردار V، ترکیب خطی بردارهای u_1 و u_2 و u_3 هست یا نه؟ اگر هست ضرایب ترکیب خطی را محاسبه کنید

$V=(8\ 0\ 5)$ $u_1=(1\ 2\ 3)$ $u_2=(0\ 1\ 4)$ $u_3=(2\ -1\ 1)$

$$V=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3 \longrightarrow \begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases}c_1+2c_3=8\\2c_1+c_2+(-c_3)=0\\3c_1+4c_2+c_3=5\end{cases} \longrightarrow A=\begin{bmatrix}1&0&2&8\\2&1&-1&0\\3&4&1&5\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&0&2&8\\0&1&-5&-16\\0&4&-5&-19\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-4R_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&8\\0&1&-5&-16\\0&0&15&45\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{15}R_3}\begin{bmatrix}1&0&2&8\\0&1&-5&-16\\0&0&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2+5R_3]{R_1-2R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}c_1=2\\c_2=-1\\c_3=3\end{matrix}$$

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هلرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن وفکس ۳۰۱۴۰

زیرفضای برداری R^n: یک زیرمجموعه از فضای برداری R^n هست که دارای ۲ خاصیت ① بسته بودن نسبت به جمع برداری ② بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر است

مثلاً یک صفحه سه بعدی، یک زیرفضا از فضای سه بعدی (R^3) است. (به شرطی که مبدأ مختصات داخل صفحه وجود داشته باشد)
و معادله‌ی صفحه به این شکل باشد $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$

پیشنیازهای جبرخطی در ماشین لرنینگ
سید امیرحسین حسینی بیلی

نکته: سطح کره یک زیرفضا نیست ← فرمول سطح کره $x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$

$(0\ \ R\ \ 0)=u_1$

$(R\ \ 0\ \ 0)=u_2$

$u_1+u_2=(R\ \ R\ \ 0)$ ← در فرمول سطح کره صدق نمی‌کند

نکته: مجموعه‌ی حاصل از بردارهای واقع بر روی یک خط گذرنده از مبدأ یک زیرفضای برداری است $\boxed{ax+by=0}$ (دسته خط)

سوال ۱۳: نشان دهید مجموعه زیر یک زیرفضای برداری از R^3 هست

$$W=\{(a\ \ b\ \ a+b)\mid a,b\in R\}$$

حل: $w_1=(a_1\ \ b_1\ \ a_1+b_1)$

$w_2=(a_2\ \ b_2\ \ a_2+b_2)$

$a\ \ b = a(1\ 0\ 1)+b(0\ 1\ 1)$ → $w=span(u_1,u_2)$

W مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی u_1 و u_2 است

$w_1+w_2=(a_1+a_2\ \ \ b_1+b_2\ \ \ (a_1+a_2)+(b_1+b_2))$ ✓ ← اثبات شد

$kw_1=(ka_1\ \ kb_1\ \ ka_1+kb_1)$ ✓

سوال ۱۴ حل در خانه: نشان دهید مجموعه زیر یک زیرفضای برداری از R^3 نیست

$$W=\{(a\ \ a^2\ \ b)\mid a,b\in R\}$$

سوال ۱۵ حل در خانه: نشان دهید مجموعه جواب‌های دستگاه همگن زیر یک زیرفضا از R^4 است.

$$x_1-x_2+x_3+2x_4=0$$
$$x_1-3x_3+2x_4=0$$
$$2x_1-x_2-2x_3+4x_4=0$$

پایه و بعد: ① داخل زیرفضاهای برداری بی‌نهایت بردار وجود دارند ولی با تعدادی محدود بردار می‌توان همه‌ی بردارهای دیگر را ساخت ② پایه: بردارهایی که با ترکیب خطی آن‌ها می‌توان هر بردار دیگری را داخل زیرفضا ساخت

③ بعد زیرفضا = تعداد بردارهای پایه

← مثلاً اگر با استفاده از v_1 و v_2 بتوانیم تمام بردارهای داخل فضای برداری V رو بسازیم، می‌گوییم که بعد V برابر با ۲ هست، چون تعداد این بردارها برابر با ۲ است.

④ اسپن: مجموعه‌ی حاصل از تمام ترکیب‌های خطی بردارها – $V=span(v_1,\dots,v_p)$ فضای برداری V

$=c_1v_1+\dots+c_pv_p\ ,\ c_i\in R$

استقلال خطی: ...

$(c_1 = 0)$

n بردارهای v_1 تا v_n را مستقل خطی می‌گوییم اگر تنها جواب معادله‌ی زیر تماماً صفر باشد:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

به عبارت دیگر

$\boxed{c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0}$ ← و اگر بتوانیم به دست بیاوریم حداقل یکی از c ها مخالف صفر باشد، بردارهای v_1 تا v_n وابسته خطی خواهند بود

نکته ۵ تعیین اینکه بردارهای پایه‌ها، استقلال خطی می‌باشد ← برای اینکه بتوانیم کل فضای R^n رو span کنیم؛ باید v_1 تا v_n مستقل خطی باشند ← در این صورت می‌توانیم بگوییم $span(v_1, v_2)$ می‌تونه کل R^2 رو بسازد

← مجموعه بردارهای v_1 تا v_n یک پایه برای فضای برداری V است اگر مستقل خطی باشند و اسپن آن‌ها کل فضای برداری را بسازد

$$\xrightarrow{R^3} (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

نکته برای هر فضای برداری، بی‌نهایت پایه وجود دارد ولی برای راحتی در محاسبات ریاضی، اغلب از پایه‌های استاندارد استفاده می‌کنیم

پایه‌های استاندارد
- $\to R^2 \quad v_1 = (0, 1) \quad v_2 = (1, 0)$
- $\to R^3 \quad v_1 = (0, 0, 1) \quad v_2 = (0, 1, 0) \quad v_3 = (1, 0, 0)$
- $\to \dots$

R^n: $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$

نکته استفاده از پایه‌های استاندارد باعث می‌شود که تعیین ضرایب ترکیب خطی برای پایه‌های استاندارد خیلی راحت بشود. و اگر پایه استاندارد نداشته باشیم برای فضای R^n باید یک دستگاه معادلات n معادله n مجهول را حل کنیم

سؤال ۱۶: استقلال خطی بردارهای زیر را بررسی کنید

$$\{\underbrace{(-2, 0, 3)}_{v_1}, \underbrace{(5, 2, 1)}_{v_2}, \underbrace{(10, 6, 9)}_{v_3}\}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \text{ و } c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2c_1 + 5c_2 + 10c_3 = 0 \\ \quad\quad + 2c_2 + 6c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 9c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & 24 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & 24 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - \frac{17}{2}R_2]{R_1 + \frac{5}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 - \frac{5}{2}R_3]{R_2 - 3R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \boxed{c_1 = c_2 = c_3 = 0} \to$$ بردارهای v_1، v_2، v_3 مستقل خطی هستند

(هیچ‌کدام از این ۳ بردار قابل ساختن از روی دو بردار دیگر با ترکیب خطی نیست)

$$R^3 = span\{v_1, v_2, v_3\} \;\Big|\; v_1 = (-2, 0, 3),\ v_2 = (5, 2, 1),\ v_3 = (10, 6, 9)$$

← هر مختصات در R^3 ترکیب خطی‌ای از v_1، v_2 و v_3 هست

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن وفکس ۳۰۱۴۰

شماره:..................
تاریخ:..................
پیوست:..................

سوال ۱۷: پایه و بعد فضای جواب های دستگاه معادله زیر را تعیین کنید

$$x_1 + x_2 - 7x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - 17x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -17 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1}$$

پیشنیازهای جبر خطی در ماشین لرنینگ
سید امیرحسین حسینی جبلی

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = rref(A_0)$$

$$\rightarrow \begin{matrix} x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_5 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_5 \end{cases}$$

← x_3 و x_4 و x_5 متغیرهای آزاد هستند

$$\xrightarrow{\text{جواب دستگاه}} \begin{pmatrix} 4r - 2s \\ 3r - t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in R^5 \rightarrow X = r\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_1} + s\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_2} + t\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_3}$$

$$\Rightarrow = Span(V_1, V_2, V_3) \rightarrow V_1, V_2, V_3 = \text{پایه ها}$$

بعد = ۳

← مستقل خطی هستند

ضرب داخلی بردارها: مجموع ضرب المان های متناظر دو بردار

$$u = (u_1, \dots, u_n), \; v = (v_1, \dots, v_n) \Rightarrow u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

خواص ضرب داخلی:
1) $u \cdot v = v \cdot u$
2) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
3) $c\,u \cdot v = c(u \cdot v) = u \cdot cv$
4) $u \cdot u \geq 0$ و اگر $u = 0$ ← $u \cdot u = 0$

نکته: تعریف بالا در فضای R^n هست اما اگر در فضای C^n (مختلط) قرار بگیریم آنگاه تعریف تغییر می کند

← اگر المان های u و v مختلط باشند، آنگاه درایه های v ها مزدوج ضرب خواهند شد

$$u \cdot v = u_1 v_1^* + \dots + u_n v_n^*$$

← یعنی بخش موهومی آن روی قرینه کن و باقی مراحل

نرم (اندازه) بردارها: جذر ضرب داخلی یک بردار با خودش که معادل با فاصله ی پیکان انتهایی تا مبدأ مختصات است

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{u \cdot u} \;//\; u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n \rightarrow \|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

نکته = فرمول بالا برای نرم ۲ هست اگر نرم را p در نظر بگیریم

$$\Rightarrow \|u\|_p = \sqrt[p]{u_1^p + \dots + u_n^p}$$

نرمال‌سازی بردارها: تعیین بردار هم‌راستا با بردار اولیه ولی با اندازه‌ی یک (نُرم = ۱)

$$u = \frac{1 . v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|} . v$$

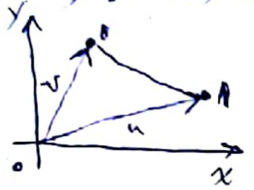
به بردار u، بردار یکه می‌گویند

← برای به دست آوردن یک پایه‌ی متعامد و یکه از فضای برداری به دست بیاریم از این خاصیت نیز استفاده می‌شود

خواص نُرم‌ها: (1) $\|u\| \geq 0$ (2) $\|u\| = 0 \leftarrow$ اگر و تنها اگر $u=0$ (3) $\|cu\| = |c|\,\|u\|$

قدر مطلق

زاویه‌ی بین بردارها: با استفاده از ضرب داخلی بردارها و نُرم آن‌ها می‌توان زاویه‌ی بین بردارها را محاسبه کرد



$$\xrightarrow[\text{cos ها}]{\text{روابط}} AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB)\cos\theta$$

$$\hookrightarrow \cos\theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2(OA)(OB)} = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2}{2\,\|u\|\,\|v\|}$$

$$\xrightarrow[\substack{v=(c,d) \\ v-u=(c-a,d-b)}]{u=(a,b) \text{ فرض کن}} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2-\left[(c-a)^2+(d-b)^2\right]}{2\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{2(u.v)}{2\|u\|\,\|v\|}$$

$$\longrightarrow \cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|}, \quad \theta = [0, \pi] \longrightarrow |\cos\theta| \leq 1$$

$$\hookrightarrow \left|\frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|}\right| \leq 1$$

$$\longrightarrow |u.v| \leq \|u\|\,\|v\| \quad \text{(رابطه‌ی کوشی شوآرتز)}$$

نکته:** در رابطه‌ی کوشی-شوآرتز: تنها در زمانی تساوی برقرار است که u و v هم راستا باشند.

سوال ۱۸: زاویه‌ی بین دو بردار زیر به ازای $a=1$ را به دست آورید. به ازای چه مقادیری از a، دو بردار بر هم عمود هستند؟!

$$v = (a, 0, 1-a), \quad u = (2-a, 1-a, 1)$$

$$\xrightarrow{a=1} v = (1,0,0), \quad u = (1, 0, 1) \longrightarrow \cos\theta = \frac{v.u}{\|v\|\,\|u\|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = 45°$$

$$\xrightarrow{\text{عمود باشند}} \cos\theta = \cos 90 = 0 \hookrightarrow 2a - a^2 + 0 + 1 - a = 0 \longrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \longrightarrow a = \frac{+1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

فاصله‌ی بین نقاط: (1) معادل است با نُرم تفاضل بردارهای مختصات دو نقطه

$$X = (x_1, \ldots, x_n), \quad Y = (y_1, \ldots, y_n)$$

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} = \|X-Y\|$$

$$\to \mathbb{R}^2: \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

$$\to \mathbb{R}^3: \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

(نکته) (x و y) اگر دو تعامد حالت تساوی برقرار است که x و y هر دو یک نقطه باشند

(سوال ۱۹ (مرداد ۹۲)) فاصله بین دو بردار زیر به ازای $a=1$ را به دست آورید. به ازای چه مقداری از a این فاصله کمترین مقدار ممکن خواهد شد

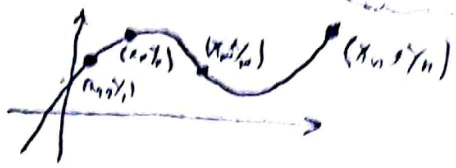
$v=(a,0,1-a)$, $u=(2-a,1-a,1)$

جواب آزمون: / $\|u-v\| = 1$

پیشنیازهای جبر خطی در یادگیری ماشین / سید امیرحسین حسینی جبلی

(درون یابی:) هدف تعیین یک چندجمله‌ای است که از تمام داده‌های آزمایش عبور کند

داده‌های آزمایش: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$



$$\longrightarrow y=a_0+a_1x+\dots+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}=P_{n-1}(x)$$

(اثبات می‌شود که با داشتن n داده‌ی متمایز، یک چندجمله‌ای درجه $n-1$ به صورت یکتا تعیین می‌شود (که با حل n معادله n مجهول))

(سوال ۲۰:) یک چندجمله‌ای با کمترین درجه ممکن بیابید که از داده‌های زیر عبور کند

$(1,6),(2,3),(3,2)$ ، x_i ، y_i

$\xrightarrow{\text{حل}} n=3$

$P_2(x)=y=a_0+a_1x+a_2x^2$

$$\begin{aligned}&\xrightarrow[y=6]{x=1} a_0+a_1+a_2=6\\&\xrightarrow[y=3]{x=2} a_0+2a_1+4a_2=3\\&\xrightarrow[y=2]{x=3} a_0+3a_1+9a_2=2\end{aligned}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\1&2&4&3\\1&3&9&2\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&3&-3\\0&2&8&-4\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&9\\0&1&3&-3\\0&0&2&2\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&9\\0&1&3&-3\\0&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_2-3R_3]{R_1+2R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&11\\0&1&0&-6\\0&0&1&1\end{array}\right]\rightsquigarrow\begin{aligned}a_0&=11\\a_1&=-6\\a_2&=1\end{aligned}\longrightarrow y=x^2-6x+11$$

(روش حذفی گاوس:) در این روش ماتریس الحاقی به شکل سطری پلکانی تبدیل می‌شود که کاهش یافته نیست

(۱) سطرهایی که تماماً صفر در ردیف‌های آخر ماتریس الحاقی قرار گیرند (۴) که نسبت به پایین اما صفر نیستند

(۲) اولین المان در ردیف‌های غیرصفر، یک باشد

(۳) المان ۱ در هر ردیف در سمت راست المان در ردیف ما قبل باشد

$$\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&3&-6&4\\0&0&1&3\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&4&6&2&5&2\\0&0&1&2&3&4\end{bmatrix}$$

سؤال ۲۱) دستگاه معادلات خطی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

اولین المان در سطر ۲ صفر هست زیری هاش باید صفر بشن.

بازنویسی معادلات:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \qquad x_3 + 6 = 1 \qquad x_1 + 2x_2 - 15 + 4 = -1$$

نتیجه نهایی:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ x_3 &= -5 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 2r \\ r \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

نکته: در روش حذفی گاوس تعداد محاسبات $O(\frac{2}{3}n^3)$ و در روش حذفی گاوس جردن $O(n^3)$ است.

روش تکراری ژاکوبی: با چند تکرار ساده می‌توان با دقت مناسب به جواب های تقریبی دستگاه معادلات رسید.

نکته = رعایت محورگیری در الگوریتم‌های تکراری الزامی است ← برای اینکه الگوریتم‌های عددی همگرا بشوند و با دقت مناسبی بتوانند جواب دستگاه را مشخص کنند لازمه که محورگیری را انجام بدهیم ← با جابه‌جا کردن جای سطرها کاری می‌کنیم که المان های قطری همواره بزرگ‌ترین مقدار ممکن باشند.

توضیحات: یک n معادله - n مجهول مانند زیر را درنظر بگیرید و فرض کنید که جواب یکتا داشته باشد

چراکه عموماً روش های تکراری برای معادلاتی انجام میشه که دارای جواب یکتا هستند

که در این مسئله n خیلی بزرگ هست مثلاً 100 یا حتی 1000

$$A \begin{cases} E(1): a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E(2): a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ E(n): a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

همچنین حدس اولیه برای جواب را با $x^{(0)}$ که یعنی مرحله صفر و با توجه به شناختی که از سیستم دستگاه معادلات داریم یک حدس اولیه را مشخص می‌کنیم که در اغلب معادلات که اطلاعاتی در ارتباط با جواب نداشته باشیم می‌توانیم به صورت تصادفی انتخاب کنیم و یا کاملاً یک در نظر بگیریم و یا صفر

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

قدم اول: در معادله‌ی i ام، متغیر i ام را برحسب سایر مجهولات تعیین می‌کنیم

$$A \longrightarrow x_1 = \frac{b_1 - [a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n]}{a_{11}}$$

محورگیری خطای round-off را min می‌کند

در حالت کلی

$$x_n = \frac{b_n - [a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}]}{a_{nn}}$$

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

قدم دوم: محاسبه تقریب مرحله اول با فرمول زیر

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - [a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + \dots + a_{1n}x_n^{(0)}]}{a_{11}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(1)} = \frac{b_n - [a_{n1}x_1^{(0)} + a_{n2}x_2^{(0)} + \dots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(0)}]}{a_{nn}}$$

نکته: اگر محورگیری به شکل درست انجام شود همواره بعد از اینکه چند بار این الگوریتم را تکرار کردیم $x_n^{(k)}$ ها به سمت جواب واقعی دستگاه میل می کنند

قدم سوم: محاسبه تقریب مرحله دوم با فرمول زیر

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1 - [a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} + \dots + a_{1n}x_n^{(1)}]}{a_{11}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(2)} = \frac{b_n - [a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \dots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(1)}]}{a_{nn}}$$

قدم چهارم: تکرار مراحل بالا تا رسیدن به دقت مورد نظر

پیاده سازی روش ژاکوبی در پایتون با استفاده از شکل ماتریسی آن

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \longrightarrow x^{(k)}_{n\times1} = D^{-1}_{n\times n}\left(b_{n\times1} - R_{n\times n}x^{(k-1)}_{n\times1}\right)$$

$k =$ شماره مرحله

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$ المان های قطری A هست

$$R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & 0 \end{bmatrix}$$ المان های غیر قطری A هست

$A - D$

* $Ax=b$
تا اول محورگیری انجام بشه

نکته مهم: چون D یک ماتریس قطری است برای محاسبه ی D^{-1} کافی است المان های قطر اصلی را معکوس کنیم ←

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & \\ & a_{22}^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

شرط پایداری الگوریتم ژاکوبی: مقادیر ویژه ی ماتریس $D^{-1}R$ داخل یک دایره ی واحد باشد
و در صورتی که یکی از این مقادیر ویژه خارج از دایره واحد باشد الگوریتم ژاکوبی واگرا می شود و به جواب ها همگرا نخواهد شد ← با محورگیری ما به این همگرا شدن سرعت می بخشیم

سوال ۲۲: جواب تقریبی معادلات زیر را با دو رقم اعشار تعیین کنید. شرایط اولیه را یک فرض کنید

حل در خانه

$$2x_1 + 20x_2 + 5x_3 = 20$$
$$x_1 + 5x_2 + 50x_3 = 30$$
$$30x_1 + x_2 + 4x_3 = 100$$

جواب نهایی:

$x_1 \simeq 3.25$

$x_2 \simeq 0.56$

$x_3 \simeq 0.48$