



پیشانی‌ها را به روشی در ماشین حل کنید
سید امیرحسین حسینی دیلی

صفحه ۱

شرکت سی ای دی

C I D CO.

همدان، همدانستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

شماره:
تاریخ:
پیوست:

فصل ۱ (مسئله ۱) فرض کن تابع هزینه

نیز رعایت شود

که بهینه و نیز خطی (Linear programming)

$$y + 143x \text{ رو به واسطه } \max \text{ کنیم به طوری که مقادیر}$$

$$s.t. \begin{cases} x + 4y \leq 75110 \\ x + 3y \leq 4000 \\ 11x + 21y \leq 150000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Submatrices of A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

ماتریس همبستگی: ماتریس ۳×۳ فقط یک سطر داشته باشد [۱ ۲ ۳ ۴]
ماتریس ستونی: ماتریس ۳×۱ فقط یک ستون داشته باشد [۷]

ماتریس همبستگی: قطر اصلی همگی یک باشند و مابقی صفر

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases} \rightarrow b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} A & b \\ \hline \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

- انواع تبدیلات:
- تغویین بای دو معادله
 - ضرب یک معادله در عددی غیر صفر ($C \neq 0$)
 - اضافه کردن مضرب از یک معادله به معادله دیگر
 - در ماتریس ها:
 - تغویین دو سطر
 - ضرب یک در سطر در عددی غیر از صفر
 - اضافه کردن مضرب از یک سطر به سطر دیگر

روش حذفی گاوس-ژوردن با استفاده از همبندی ها ۳ گانه ماتریسی، ماتریس افزوده را طوری تغییر می دهیم که حل معادله ساده تر شود

که برای دستگاه با جواب یکتا: ماتریس ضرایب معادله، با ماتریس همبندی تبدیل می شود

$$[A:b] \sim \dots \sim [I_n : X]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = c_1 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = c_2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = c_3 \end{cases}$$

مسئله ۲: دستگاه معادله رو به روش حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} E1 \\ E2 \\ E3 \end{cases}$$

ماتریس معادله

$$\textcircled{I} E_2 - 2E_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{II} E_2 - E_1 \xrightarrow[\text{دوم و سوم}]{\text{خف از معادله}} -2x_2 - 3x_3 = -1$$

حل قسمت ۱

$$\textcircled{III} E_1 - E_2 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

خف از معادله اول

$$\textcircled{IV} E_3 + 2E_2 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ -5x_3 = -10 \end{cases}$$

حل قسمت ۲

$$\textcircled{V} \text{خف } x_3 \text{ از معادلات اول و دوم} \rightarrow -1/2 \times E_3 \text{ (برای همبستگی ماتریس A)}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

حل قسمت ۳

$$\textcircled{VI} E_1 - 2E_3 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{VII} E_2 + E_3 \rightarrow b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} / \text{ماتریس معادلات} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل درجه ۱

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_3 - E_1]{E_2 - 2E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_3 + 2E_2]{E_1 - E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1/5 \times E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2 + E_3]{E_1 - 2E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نتیجه: برای امتحان ستون از اتم از همان از اتم استفاده می‌شود

سوال حل در خانه: دستگاه معادله رو به روبرو راحل کنید

جواب نهایی: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 24 \\ 3x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 32 \\ -2x_1 - x_2 = -7 \end{cases}$$

* هر وقت امان هار ۱۱ یا ۱۲ یا ۱۳ برابر با صفر شد، جای دو سطر را عوض کن

جواب نهایی: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 19x_4 = 36 \\ 3x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 28 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 = -12 \end{cases}$$

جواب نهایی: $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 1/2$

سوال ۵

شرکت سی ای دی
C I D CO.

شماره:
تاریخ:
پوسته:

همدان، هراستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

پشتیازمار دبیرفنی در ماشین لرنیگ / سیرالیندین حسینی یبلی

* اگر ماتریس معکوس برابر سطر، ماتریس همانی نشود (قابل تبدیل نباشد)؛ دستگاه یا دارا بی نهایت جواب است و یا هیچ جوابی ندارد *

I $x_1 + x_2 = 2$
 $2x_1 + 2x_2 = 3$

II $x_1 + x_2 = 2$
 $2x_1 + 2x_2 = 4$

* اگر یک سطر در ماتریس معکوس تماماً صفر شود (بعد از عملیات) بی نهایت جوابی نخواهیم داشت؛ اگر یک سطر از ماتریس معکوس جزو یک سطر متناظر با آن صفر شود، هیچ جوابی نخواهیم داشت

نکته: با استفاده از روش گاوس جردن می توان به سرعت همزمان، جواب دستگاه را از

$AX = B$
 $\rightarrow [A: B] = [A: B_1 B_2 \dots B_k] \approx \dots \approx [I_n: x_1 x_2 \dots x_k]$

↓
جواب
ماده به ازای B

سوال ۶:

جواب دستگاه ها که زیر را به دست آورید

$x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$
 $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$
 $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

حل: \rightarrow ماتریس معکوس: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -11 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2 - E_1, E_3 + E_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{E_3 - E_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1 + E_2, E_3 - E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{E_1 - E_3, E_2 + 2E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2 + 9E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$
 $\rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1$
 $\rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$

فرم سطرهای پلکانی ما هست یا نه؟ ① سطرهای ما تماماً صفر در ردیفهای آخر ماتریس معکوس قرار می گیرند ② اولین همان در ردیفهای غیر صفر باشد ③ همان ۱ در هر ردیف درست است، راست همان ۱ در ردیف ما قبل قرار دارد ④ همان ها با ۰ و ۱ و ۰ ها صفر باشند

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

صفحه ۴

سوال ۷: مقدار ازماترین های زیر چرا به فرم سیکری پیکانی ما هاش یافته اند؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نقشه: برای این جواب ماترین هاش غیر مربعی را به دست بیاوریم، ما فنیست، ماترین العاقی را به فرم سیکری پیکانی ما هاش یافته
* تبدیل کنیم (نقشه: فرم سیکری پیکانی ما هاش یافته، برای هر ماترین سیکری پیکانی هست

سوال ۸: ماترین زیر را به فرم سیکری پیکانی ما هاش یافته تبدیل کنید

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[R1 \text{ و } R2 \text{ تعویض}]{R1 \leftrightarrow R2} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 5 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{اولین امان غیر صفر باشد}]{\frac{1}{3}R1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{پایین یک، باید همه صفر}]{R3 - 4R1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R3 - 2R2]{R1 + R2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R2 + R3]{R1 - 2R3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} = RREF(A)$$

Reduced Row-Echelon Form

سوال ۹: (حل این سوال متفاوت است)، جواب کن، دستگاه معادله زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل}} \text{ماترین العاقی} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R2 - 2R1]{R3 - 3R1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R3 + 2R2]{R1 + R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = RREF(A)$$

معادله سوم (برای) $0 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

برای $x_3 = t$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 3t \\ x_2 = 1 - 2t \\ x_3 = t \end{cases}$$



شماره:

تاریخ:

پیوست:

$$r=1 \rightarrow (1, -1, 1) \quad \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$$

$$r=2 \rightarrow (-2, -3, 2) \quad \begin{cases} x_2 = 1 - x_3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

پیشیار مدل جبر فکله در ماشین برنیت
سیلا امیر حسین حسینی بلیلی

۱) دایه سوال ۹:

$$r = \left[\frac{1 - x_1}{3} = \frac{1 - x_2}{2} = x_3 \right]$$

ل جواب این دستگاه یک فکله در فضای سه بعدی است (این فکله همک فکله مشترک صفحات A, B, C است)

$$P_A: 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9$$

ل بردار هادی فکله = $(-3, -2, 1)$

نکته: اگر تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد، بی نهایت جواب خواهیم داشت

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4$$

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 10$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -6$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 7 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1-3R_2]{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{ref}(A)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \\ 0 = 0 \text{ (بی‌بسی)} \end{cases} \xrightarrow{x_3, x_2 \text{ متغیر آزاد}} \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 - 2 \\ x_4 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 + x_3 - 2 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ل این جواب، بی‌انتهای منفی در مختار ۳D هست ← بردار نرمال = $(1, 2, -1)$

ل بردار که بر صفحه عمود است

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 3$$

$$x_2 + 3x_3 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 3$$

سوال ۱۱ حل در خانه نشان دهید دستگاه زیر جواب ندارد

دستگاه معادلات همگن اگر بردار مقادیر نسبت است (b) اما مقادیر منفی باشد، سیستم همگن می‌شود

$$x_1 + x_2 - x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$$

نکته: جواب کلی سیستم همگن را با استفاده از فرم ماتریسی ref به دست می‌آوریم

فضای برداری \mathbb{R}^n :

هدف: درک فضای جواب های دستگاه معادلاتی که بی نهایت جواب دارند

فضای برداری \mathbb{R}^2 : فضای شامل تمام زوج مرتب های دو بعدی (x, y) ← مقدمات (x, y) قابل نمایش است

فضای برداری \mathbb{R}^3 : فضای شامل تمام سنانای مرتب (x, y, z)

فضای برداری \mathbb{R}^n : فضای شامل تمام n تایی های مرتب $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$
 $u_i \in \mathbb{R}$

نکته مهم: برای آن که در فضای n بعدی ای تعریف شود باید n متغیر آزاد داشته باشیم

پس $\begin{cases} x=2 \\ z=3 \end{cases}$ ← ۳ بعدی نیست

جمع و ضرب اسکالر بردارها: $u = (u_1, \dots, u_n)$ $v = (v_1, \dots, v_n)$

Addition: $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n)$

scalar multiplication: $c u = (c u_1, c u_2, c u_3, \dots, c u_n)$

→ جمع بردار و ضرب اسکالر
 کمیت های بسته در فضای \mathbb{R}^n هستند
 (فضای بردار تغییر نمی کند)

تعاریف:

- بردار صفر = برداری که تمام ابعاد های آن صفر باشند (۰)
- بردار قرینه = برداری که ابعاد های آن، قرینه بردار اول باشد
- تفاضل برداری = جمع بردار اول با قرینه ی بردار دوم
- خواص جمع و ضرب اسکالر:
 - جابجایی: $u + v = v + u$
 - تشریح پذیری: $u + (v + w) = (u + v) + w$
 - خنوصفتی در جمع برداری: $u + 0 = 0 + u = u$
 - $u + (-u) = 0$ جمع هر بردار با قرینه خودشی، بردار صفر خواهد شد
 - خنوصفتی در ضرب اسکالر: $1 \times u = u$
 - توزیع پذیری در ضرب اسکالر: $c(u + v) = cu + cv$

ترتیب خطی بردارها: متغیر از ترتیب خطی بردارها، جمع برداری ضرب اسکالر بردارها است

مثال: فرض کن $u = (3, 5, -3)$ و $v = (-4, 9, 1)$ و $w = (2, 0, 2)$ باشد آنگاه $z = 2u - 3v + w$ به ترتیب خطی بردارهای u و v و w خواهد بود $z = (20, 7, -3)$

مثال ۱۲: بررسی کنید آیا بردار v ، ترکیب خطی بردارهای u_1, u_2, u_3 هست یا نه. اگر هست ترکیب خطی را حساب کنید

$v = (1, 0, 5)$ $u_1 = (1, 2, 3)$ $u_2 = (0, 1, 4)$ $u_3 = (2, -1, 1)$

$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$

→ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ $\begin{cases} c_1 + 2c_3 = 1 \\ 2c_1 + c_2 + (-c_3) = 0 \\ 3c_1 + 4c_2 + c_3 = 5 \end{cases} \rightarrow \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1, R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{22}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_3, R_2 + 5R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 1 & 0 & 88 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -43 \\ c_2 = 88 \\ c_3 = 22 \end{cases}$

شماره:
تاریخ:
پیوست:

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هارسستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰



زیرفضای برداری R^n : یک زیرمجموعه از فضای برداری R^n هست که دارای ۲ خاصیت ۱) بسته بودن نسبت به جمع برداری ۲) بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر است
لحظه یک صفحه سه پیکار، یک زیرفضای از فضای R^3 است. (در هر یکی از پیکارها مختصات داخل صفحه وجود داشته باشد)
و معادلات مرتبه یکش باشد $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
نوع ۱: سبب یک زیرفضا نیست - سبب فرمول سبب بود $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$
پیش از این جبر خطی در ماشین نوشت
سیر این حسن حسن بیلی
 $9_1 + 9_2 = (R \ R \ 0)$
 $\begin{pmatrix} 0 & R & 0 \\ R & 0 & 0 \end{pmatrix} = u_1$
 $\begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = u_2$
در فرمول سبب در صورتی که یکی از
مجموعه حاصل از بردارهای واحد هر روی یک خطی که در آن قرار میگیرد یک زیرفضای برداری است
لحظه $(9_1 \ 9_2) = 0$ (درسته نظر)

نشان دهید مجموعه زیر یک زیرفضای برداری از R^3 هست

$W = \{(a \ b \ a+b) \mid a, b \in R\}$ من: $W_1 = (a_1 \ b_1 \ a_1+b_1)$
 $W_2 = (a_2 \ b_2 \ a_2+b_2)$
 $W = \text{Span}\{u_1, u_2\}$
 $u_1 = (1 \ 0 \ 1)$
 $u_2 = (0 \ 1 \ 1)$
 $a \cdot u_1 + b \cdot u_2 = a(1 \ 0 \ 1) + b(0 \ 1 \ 1) = (a \ b \ a+b)$
نشان دهید W یک زیرفضای برداری از R^3 است
 $W_1 + W_2 = (a_1 + a_2 \ b_1 + b_2 \ (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2))$
 $KW_1 = (Ka_1 \ Kb_1 \ Ka_1 + Kb_1)$

سوال حل در خانه ۴

نشان دهید مجموعه زیر یک زیرفضای برداری از R^3 نیست

$W = \{(a \ a^2 \ b) \mid a, b \in R\}$

سوال حل در خانه ۵

نشان دهید مجموعه جواب های دستگاه همگن زیر یک زیرفضای برداری از R^3 است.

$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$
 $x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0$
 $2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$

پایه و مجذور

۱) داخل زیرفضای برداری که پس نهایت بردار وجود دارند ولی با تعداد محدود بردار می توان
همه بردارهای دیگر ساخت ۲) پایه: بردارهایی که با ترکیب خطی آن ها می توان همه بردارهای دیگر را داخل زیرفضا ساخت
۳) بعد زیرفضا = تعداد بردارهای پایه
مثلاً اگر با استفاده از u_1 و u_2 بتوانیم تمام بردارهای داخل فضای برداری W رو بسازیم، پس بعد تعداد این بردارها برابر با ۲ هست
۴) این مجموعه حاصل از تمام ترکیب های خطی بردارها $= \text{Span}\{u_1, \dots, u_p\}$ فضای برداری W
 $= c_1 u_1 + \dots + c_p u_p \quad c_i \in R$
لحظه استقلال خطی: تعداد بردارها p باشد

صفت ۱) $C_1 = 0$

بر بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n مستقل خطی می‌توانیم آن‌ها را به هم اضافه کنیم و به یک بردار صفری برسیم:

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n = 0$$

به عبارت دیگر

$$(C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0)$$

و اگر فرض کنیم دست بیاوریم به دو بردار v_1 و v_2 هم‌خطی صفر باشد، بردارهای v_1, v_2 وابسته خطی خواهند بود

صفت ۲)

تصور کنید می‌خواهیم پای‌ها، استقلال خطی می‌باشد. اگر n بردار v_1, v_2, \dots, v_n در \mathbb{R}^n باشند، در این صورت می‌توانیم به کمک n بردار v_1, v_2, \dots, v_n هر بردار v در \mathbb{R}^n را به صورت $v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n$ بنویسیم. این بردار v را به صورت $v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n$ می‌نویسیم. این بردار v را به صورت $v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n$ می‌نویسیم.

$$v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n$$

برای هر بردار v در \mathbb{R}^n ، به نهایت پای‌ها وجود دارد و می‌توانیم به کمک n بردار v_1, v_2, \dots, v_n هر بردار v در \mathbb{R}^n را به صورت $v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n$ بنویسیم. این بردار v را به صورت $v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n$ می‌نویسیم.

استفاده از پای‌ها استاندارد باعث می‌شود که تعیین ضرایب به سبب خطی بودن پای‌ها استاندارد خطی راحت‌تر شود. و اگر پای‌ها استاندارد باشند، می‌توانیم به کمک n بردار v_1, v_2, \dots, v_n هر بردار v در \mathbb{R}^n را به صورت $v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n$ بنویسیم.

سوال ۱۶) استقلال خطی بردارهای زیر را بررسی کنید

$$\{v_1 = (-2, 0, 3), v_2 = (5, 2, 1), v_3 = (1, 6, 9)\}$$

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2C_1 + 5C_2 + C_3 = 0 \\ 2C_2 + 6C_3 = 0 \\ 3C_1 + C_2 + 9C_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & \frac{23}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & \frac{23}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & \frac{23}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 + \frac{5}{2}R_2 \\ R_3 - \frac{17}{2}R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 - 4R_2 \\ R_3 \cdot \frac{2}{3} \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{C_1 = C_2 = C_3 = 0} \rightarrow \text{بردارهای } v_1, v_2, v_3 \text{ مستقل خطی هستند}$$

(هیچ‌کدام از این ۳ بردار قابل ساختن از دو بردار دیگر به کمک ترکیب خطی نیست)

$$R = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} \mid v_1 = (-2, 0, 3), v_2 = (5, 2, 1), v_3 = (1, 6, 9)$$

همه مختصات در R ترکیب خطی از v_1, v_2, v_3 هستند

شرکت سی ای دی

C I D CO.

همدان، هارسن، شماره ۲۸۰ طبقه سوم

تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

شماره:

تاریخ:

پیوست:

سوال ۱۷) پاسخ و جواب های هار د شده ها را زیر تعیین کنید

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 7x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 17x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -17 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1}}$$

پیشنیازهای جبر خطی در ماشین لرنینگ
سیستم های خطی

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_2 \\ R_3 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{ref}(\Delta_0)$$

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_5 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_5 \end{cases} \rightarrow \text{متغیرهای } x_3, x_4, x_5 \text{ آزاد هستند}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب دهنده}} \begin{pmatrix} 4r - 2s \\ 3r - t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \rightarrow X = r \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

$$\Rightarrow \text{Span}(v_1, v_2, v_3) \rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ پایه ها} \quad \text{مستقل خطی هستند}$$

ضرب داخلی بردارها: مجموع ضرب المان های متناظر در دو بردار

$$u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \Rightarrow u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

$$c(u, v) = c(v, u) \quad (u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w \quad (2) \quad u \cdot v = v \cdot u \quad (1) \quad \text{خواص ضرب داخلی}$$

$$u \cdot u = 0 \iff u = 0 \quad u \cdot u \geq 0$$

تعریف: در فضای \mathbb{R}^n هست اما اگر فضای \mathbb{C}^n قرار بگیریم آنگاه تعریف تغییر می کند
لکه اگر المان ها u و v مثل باشند $u \cdot v$ مادر زوجی است و ضرب داخلی

نرم (اندازه) بردارها: هر ضرب داخلی یک بردار با خودش $u \cdot u$ حاصل با حاصل $u \cdot u$ بیان تا مبدأ معتقدات است

$$\|u\| = \sqrt{u^2 + u^2} = \sqrt{u \cdot u} \quad // \quad u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

$$\|u\|_p = \sqrt[p]{u_1^p + \dots + u_n^p} \quad \text{نقطه} = \text{فضول با } u \text{ بیانی نرم هست اگر نرم } p \text{ در نظر بگیریم}$$

||u||=1

نرمالیزه سازی بردارها: تعیین بردار هم راستا با بردار اولیه و ای با اندازه ی یک (نرم ۲=۱)

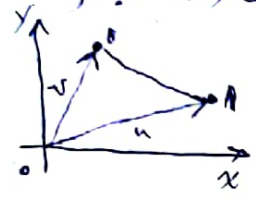
$$u = \frac{1 \cdot v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$$

برای بردار دست آوردن یک پارامتری همواره را برابر فضاهای برداری بردار هم راستا نیز استفاده می کنیم

خواص نرم ۵: $\{1\} \quad \|u\| \geq 0 \quad (2) \quad \|u\| = 0 \iff u = 0$ $(3) \quad \|cu\| = |c| \|u\|$

قدر مطلق

زاویه ی بین بردارها: با استفاده از ضرب داخلی بردارها و نرم آن ها می توان زاویه ی بین بردارها را محاسبه کرد



روابط \cos $\rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB) \cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2(OA)(OB)} = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2}{2\|u\|\|v\|}$$

$u = (a, b)$ $v = (c, d)$ $v-u = (c-a, d-b)$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - [(c-a)^2 + (d-b)^2]}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{2(a \cdot c + b \cdot d)}{2\|u\|\|v\|}$$

$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \theta = [0, \pi] \rightarrow |\cos \theta| \leq 1$

$$\rightarrow \left| \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \right| \leq 1$$

$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$ (رابطه ی کوشی-شوارتز)

نقشه در رابطه ی کوشی-شوارتز: تنها در زمانی تساوی برقرار است که u و v هم راستا باشند.

سوال ۱۸: زاویه ی بین دو بردار زیر به ازای $a=1$ را دست آورید. به ازای چه مقدار از a ، دو بردار برهم عمود هستند؟

$v = (a, 0, 1-a), u = (2-a, 1-a, 1)$

$\xrightarrow{a=1} v = (1, 0, 0), u = (1, 0, 1) \rightarrow \cos \theta = \frac{v \cdot u}{\|v\|\|u\|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

همچنین $\cos \theta = \cos 90^\circ = 0 \rightarrow 2a - a^2 + 0 + 1 - a = 0 \rightarrow a^2 - a - 1 = 0$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

فاصله ی بین نقاط: ۱) محاد است با نرم تفاضلی بردارهای مختصات دو نقطه

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$

$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|$

$\begin{cases} \rightarrow R^2: \sqrt{x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ \rightarrow R^3: \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \end{cases}$

شرکت سی ای دی

C I D CO.

همدان، هارسنجان، شماره ۷۸۰ طبقه سوم

تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

هدف: ویدئوهای را با یک معادله درجه n از x و y تقریباً نشان

(مثال: ۱۹-۱۰) فاصله بین دو بردار زیر از $a=1$ را به دست آورید. به ازای چه مقداری از a

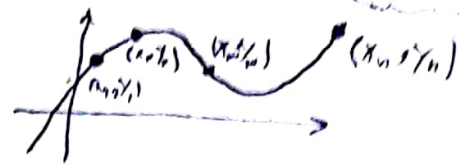
ارزش صاف است؟ $u = (1-a, 1-a, 1)$ و $v = (a, 0, 1-a)$

پیش از هر کاری باید نمودار داشته باشیم / سیمایم پس پسین جلی

$$\|u-v\| = 1$$

درون $\{x, y\}$ هر یک یک چندجمله‌ای است به از تمام داده های آزمایش عبور کند

داده های $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ آزمایش



$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = p_{n-1}(x)$$

(نکات: هر n داده را داشته n داده می توانیم یک چندجمله‌ای درجه $n-1$ به صورت یکتا تعیین می شود)

نمونه بایز $n=3$ و $n=4$ و $n=5$ و $n=6$ و $n=7$ و $n=8$ و $n=9$ و $n=10$ و $n=11$ و $n=12$ و $n=13$ و $n=14$ و $n=15$ و $n=16$ و $n=17$ و $n=18$ و $n=19$ و $n=20$ و $n=21$ و $n=22$ و $n=23$ و $n=24$ و $n=25$ و $n=26$ و $n=27$ و $n=28$ و $n=29$ و $n=30$ و $n=31$ و $n=32$ و $n=33$ و $n=34$ و $n=35$ و $n=36$ و $n=37$ و $n=38$ و $n=39$ و $n=40$ و $n=41$ و $n=42$ و $n=43$ و $n=44$ و $n=45$ و $n=46$ و $n=47$ و $n=48$ و $n=49$ و $n=50$ و $n=51$ و $n=52$ و $n=53$ و $n=54$ و $n=55$ و $n=56$ و $n=57$ و $n=58$ و $n=59$ و $n=60$ و $n=61$ و $n=62$ و $n=63$ و $n=64$ و $n=65$ و $n=66$ و $n=67$ و $n=68$ و $n=69$ و $n=70$ و $n=71$ و $n=72$ و $n=73$ و $n=74$ و $n=75$ و $n=76$ و $n=77$ و $n=78$ و $n=79$ و $n=80$ و $n=81$ و $n=82$ و $n=83$ و $n=84$ و $n=85$ و $n=86$ و $n=87$ و $n=88$ و $n=89$ و $n=90$ و $n=91$ و $n=92$ و $n=93$ و $n=94$ و $n=95$ و $n=96$ و $n=97$ و $n=98$ و $n=99$ و $n=100$ و $n=101$ و $n=102$ و $n=103$ و $n=104$ و $n=105$ و $n=106$ و $n=107$ و $n=108$ و $n=109$ و $n=110$ و $n=111$ و $n=112$ و $n=113$ و $n=114$ و $n=115$ و $n=116$ و $n=117$ و $n=118$ و $n=119$ و $n=120$ و $n=121$ و $n=122$ و $n=123$ و $n=124$ و $n=125$ و $n=126$ و $n=127$ و $n=128$ و $n=129$ و $n=130$ و $n=131$ و $n=132$ و $n=133$ و $n=134$ و $n=135$ و $n=136$ و $n=137$ و $n=138$ و $n=139$ و $n=140$ و $n=141$ و $n=142$ و $n=143$ و $n=144$ و $n=145$ و $n=146$ و $n=147$ و $n=148$ و $n=149$ و $n=150$ و $n=151$ و $n=152$ و $n=153$ و $n=154$ و $n=155$ و $n=156$ و $n=157$ و $n=158$ و $n=159$ و $n=160$ و $n=161$ و $n=162$ و $n=163$ و $n=164$ و $n=165$ و $n=166$ و $n=167$ و $n=168$ و $n=169$ و $n=170$ و $n=171$ و $n=172$ و $n=173$ و $n=174$ و $n=175$ و $n=176$ و $n=177$ و $n=178$ و $n=179$ و $n=180$ و $n=181$ و $n=182$ و $n=183$ و $n=184$ و $n=185$ و $n=186$ و $n=187$ و $n=188$ و $n=189$ و $n=190$ و $n=191$ و $n=192$ و $n=193$ و $n=194$ و $n=195$ و $n=196$ و $n=197$ و $n=198$ و $n=199$ و $n=200$ و $n=201$ و $n=202$ و $n=203$ و $n=204$ و $n=205$ و $n=206$ و $n=207$ و $n=208$ و $n=209$ و $n=210$ و $n=211$ و $n=212$ و $n=213$ و $n=214$ و $n=215$ و $n=216$ و $n=217$ و $n=218$ و $n=219$ و $n=220$ و $n=221$ و $n=222$ و $n=223$ و $n=224$ و $n=225$ و $n=226$ و $n=227$ و $n=228$ و $n=229$ و $n=230$ و $n=231$ و $n=232$ و $n=233$ و $n=234$ و $n=235$ و $n=236$ و $n=237$ و $n=238$ و $n=239$ و $n=240$ و $n=241$ و $n=242$ و $n=243$ و $n=244$ و $n=245$ و $n=246$ و $n=247$ و $n=248$ و $n=249$ و $n=250$ و $n=251$ و $n=252$ و $n=253$ و $n=254$ و $n=255$ و $n=256$ و $n=257$ و $n=258$ و $n=259$ و $n=260$ و $n=261$ و $n=262$ و $n=263$ و $n=264$ و $n=265$ و $n=266$ و $n=267$ و $n=268$ و $n=269$ و $n=270$ و $n=271$ و $n=272$ و $n=273$ و $n=274$ و $n=275$ و $n=276$ و $n=277$ و $n=278$ و $n=279$ و $n=280$ و $n=281$ و $n=282$ و $n=283$ و $n=284$ و $n=285$ و $n=286$ و $n=287$ و $n=288$ و $n=289$ و $n=290$ و $n=291$ و $n=292$ و $n=293$ و $n=294$ و $n=295$ و $n=296$ و $n=297$ و $n=298$ و $n=299$ و $n=300$ و $n=301$ و $n=302$ و $n=303$ و $n=304$ و $n=305$ و $n=306$ و $n=307$ و $n=308$ و $n=309$ و $n=310$ و $n=311$ و $n=312$ و $n=313$ و $n=314$ و $n=315$ و $n=316$ و $n=317$ و $n=318$ و $n=319$ و $n=320$ و $n=321$ و $n=322$ و $n=323$ و $n=324$ و $n=325$ و $n=326$ و $n=327$ و $n=328$ و $n=329$ و $n=330$ و $n=331$ و $n=332$ و $n=333$ و $n=334$ و $n=335$ و $n=336$ و $n=337$ و $n=338$ و $n=339$ و $n=340$ و $n=341$ و $n=342$ و $n=343$ و $n=344$ و $n=345$ و $n=346$ و $n=347$ و $n=348$ و $n=349$ و $n=350$ و $n=351$ و $n=352$ و $n=353$ و $n=354$ و $n=355$ و $n=356$ و $n=357$ و $n=358$ و $n=359$ و $n=360$ و $n=361$ و $n=362$ و $n=363$ و $n=364$ و $n=365$ و $n=366$ و $n=367$ و $n=368$ و $n=369$ و $n=370$ و $n=371$ و $n=372$ و $n=373$ و $n=374$ و $n=375$ و $n=376$ و $n=377$ و $n=378$ و $n=379$ و $n=380$ و $n=381$ و $n=382$ و $n=383$ و $n=384$ و $n=385$ و $n=386$ و $n=387$ و $n=388$ و $n=389$ و $n=390$ و $n=391$ و $n=392$ و $n=393$ و $n=394$ و $n=395$ و $n=396$ و $n=397$ و $n=398$ و $n=399$ و $n=400$ و $n=401$ و $n=402$ و $n=403$ و $n=404$ و $n=405$ و $n=406$ و $n=407$ و $n=408$ و $n=409$ و $n=410$ و $n=411$ و $n=412$ و $n=413$ و $n=414$ و $n=415$ و $n=416$ و $n=417$ و $n=418$ و $n=419$ و $n=420$ و $n=421$ و $n=422$ و $n=423$ و $n=424$ و $n=425$ و $n=426$ و $n=427$ و $n=428$ و $n=429$ و $n=430$ و $n=431$ و $n=432$ و $n=433$ و $n=434$ و $n=435$ و $n=436$ و $n=437$ و $n=438$ و $n=439$ و $n=440$ و $n=441$ و $n=442$ و $n=443$ و $n=444$ و $n=445$ و $n=446$ و $n=447$ و $n=448$ و $n=449$ و $n=450$ و $n=451$ و $n=452$ و $n=453$ و $n=454$ و $n=455$ و $n=456$ و $n=457$ و $n=458$ و $n=459$ و $n=460$ و $n=461$ و $n=462$ و $n=463$ و $n=464$ و $n=465$ و $n=466$ و $n=467$ و $n=468$ و $n=469$ و $n=470$ و $n=471$ و $n=472$ و $n=473$ و $n=474$ و $n=475$ و $n=476$ و $n=477$ و $n=478$ و $n=479$ و $n=480$ و $n=481$ و $n=482$ و $n=483$ و $n=484$ و $n=485$ و $n=486$ و $n=487$ و $n=488$ و $n=489$ و $n=490$ و $n=491$ و $n=492$ و $n=493$ و $n=494$ و $n=495$ و $n=496$ و $n=497$ و $n=498$ و $n=499$ و $n=500$ و $n=501$ و $n=502$ و $n=503$ و $n=504$ و $n=505$ و $n=506$ و $n=507$ و $n=508$ و $n=509$ و $n=510$ و $n=511$ و $n=512$ و $n=513$ و $n=514$ و $n=515$ و $n=516$ و $n=517$ و $n=518$ و $n=519$ و $n=520$ و $n=521$ و $n=522$ و $n=523$ و $n=524$ و $n=525$ و $n=526$ و $n=527$ و $n=528$ و $n=529$ و $n=530$ و $n=531$ و $n=532$ و $n=533$ و $n=534$ و $n=535$ و $n=536$ و $n=537$ و $n=538$ و $n=539$ و $n=540$ و $n=541$ و $n=542$ و $n=543$ و $n=544$ و $n=545$ و $n=546$ و $n=547$ و $n=548$ و $n=549$ و $n=550$ و $n=551$ و $n=552$ و $n=553$ و $n=554$ و $n=555$ و $n=556$ و $n=557$ و $n=558$ و $n=559$ و $n=560$ و $n=561$ و $n=562$ و $n=563$ و $n=564$ و $n=565$ و $n=566$ و $n=567$ و $n=568$ و $n=569$ و $n=570$ و $n=571$ و $n=572$ و $n=573$ و $n=574$ و $n=575$ و $n=576$ و $n=577$ و $n=578$ و $n=579$ و $n=580$ و $n=581$ و $n=582$ و $n=583$ و $n=584$ و $n=585$ و $n=586$ و $n=587$ و $n=588$ و $n=589$ و $n=590$ و $n=591$ و $n=592$ و $n=593$ و $n=594$ و $n=595$ و $n=596$ و $n=597$ و $n=598$ و $n=599$ و $n=600$ و $n=601$ و $n=602$ و $n=603$ و $n=604$ و $n=605$ و $n=606$ و $n=607$ و $n=608$ و $n=609$ و $n=610$ و $n=611$ و $n=612$ و $n=613$ و $n=614$ و $n=615$ و $n=616$ و $n=617$ و $n=618$ و $n=619$ و $n=620$ و $n=621$ و $n=622$ و $n=623$ و $n=624$ و $n=625$ و $n=626$ و $n=627$ و $n=628$ و $n=629$ و $n=630$ و $n=631$ و $n=632$ و $n=633$ و $n=634$ و $n=635$ و $n=636$ و $n=637$ و $n=638$ و $n=639$ و $n=640$ و $n=641$ و $n=642$ و $n=643$ و $n=644$ و $n=645$ و $n=646$ و $n=647$ و $n=648$ و $n=649$ و $n=650$ و $n=651$ و $n=652$ و $n=653$ و $n=654$ و $n=655$ و $n=656$ و $n=657$ و $n=658$ و $n=659$ و $n=660$ و $n=661$ و $n=662$ و $n=663$ و $n=664$ و $n=665$ و $n=666$ و $n=667$ و $n=668$ و $n=669$ و $n=670$ و $n=671$ و $n=672$ و $n=673$ و $n=674$ و $n=675$ و $n=676$ و $n=677$ و $n=678$ و $n=679$ و $n=680$ و $n=681$ و $n=682$ و $n=683$ و $n=684$ و $n=685$ و $n=686$ و $n=687$ و $n=688$ و $n=689$ و $n=690$ و $n=691$ و $n=692$ و $n=693$ و $n=694$ و $n=695$ و $n=696$ و $n=697$ و $n=698$ و $n=699$ و $n=700$ و $n=701$ و $n=702$ و $n=703$ و $n=704$ و $n=705$ و $n=706$ و $n=707$ و $n=708$ و $n=709$ و $n=710$ و $n=711$ و $n=712$ و $n=713$ و $n=714$ و $n=715$ و $n=716$ و $n=717$ و $n=718$ و $n=719$ و $n=720$ و $n=721$ و $n=722$ و $n=723$ و $n=724$ و $n=725$ و $n=726$ و $n=727$ و $n=728$ و $n=729$ و $n=730$ و $n=731$ و $n=732$ و $n=733$ و $n=734$ و $n=735$ و $n=736$ و $n=737$ و $n=738$ و $n=739$ و $n=740$ و $n=741$ و $n=742$ و $n=743$ و $n=744$ و $n=745$ و $n=746$ و $n=747$ و $n=748$ و $n=749$ و $n=750$ و $n=751$ و $n=752$ و $n=753$ و $n=754$ و $n=755$ و $n=756$ و $n=757$ و $n=758$ و $n=759$ و $n=760$ و $n=761$ و $n=762$ و $n=763$ و $n=764$ و $n=765$ و $n=766$ و $n=767$ و $n=768$ و $n=769$ و $n=770$ و $n=771$ و $n=772$ و $n=773$ و $n=774$ و $n=775$ و $n=776$ و $n=777$ و $n=778$ و $n=779$ و $n=780$ و $n=781$ و $n=782$ و $n=783$ و $n=784$ و $n=785$ و $n=786$ و $n=787$ و $n=788$ و $n=789$ و $n=790$ و $n=791$ و $n=792$ و $n=793$ و $n=794$ و $n=795$ و $n=796$ و $n=797$ و $n=798$ و $n=799$ و $n=800$ و $n=801$ و $n=802$ و $n=803$ و $n=804$ و $n=805$ و $n=806$ و $n=807$ و $n=808$ و $n=809$ و $n=810$ و $n=811$ و $n=812$ و $n=813$ و $n=814$ و $n=815$ و $n=816$ و $n=817$ و $n=818$ و $n=819$ و $n=820$ و $n=821$ و $n=822$ و $n=823$ و $n=824$ و $n=825$ و $n=826$ و $n=827$ و $n=828$ و $n=829$ و $n=830$ و $n=831$ و $n=832$ و $n=833$ و $n=834$ و $n=835$ و $n=836$ و $n=837$ و $n=838$ و $n=839$ و $n=840$ و $n=841$ و $n=842$ و $n=843$ و $n=844$ و $n=845$ و $n=846$ و $n=847$ و $n=848$ و $n=849$ و $n=850$ و $n=851$ و $n=852$ و $n=853$ و $n=854$ و $n=855$ و $n=856$ و $n=857$ و $n=858$ و $n=859$ و $n=860$ و $n=861$ و $n=862$ و $n=863$ و $n=864$ و $n=865$ و $n=866$ و $n=867$ و $n=868$ و $n=869$ و $n=870$ و $n=871$ و $n=872$ و $n=873$ و $n=874$ و $n=875$ و $n=876$ و $n=877$ و $n=878$ و $n=879$ و $n=880$ و $n=881$ و $n=882$ و $n=883$ و $n=884$ و $n=885$ و $n=886$ و $n=887$ و $n=888$ و $n=889$ و $n=890$ و $n=891$ و $n=892$ و $n=893$ و $n=894$ و $n=895$ و $n=896$ و $n=897$ و $n=898$ و $n=899$ و $n=900$ و $n=901$ و $n=902$ و $n=903$ و $n=904$ و $n=905$ و $n=906$ و $n=907$ و $n=908$ و $n=909$ و $n=910$ و $n=911$ و $n=912$ و $n=913$ و $n=914$ و $n=915$ و $n=916$ و $n=917$ و $n=918$ و $n=919$ و $n=920$ و $n=921$ و $n=922$ و $n=923$ و $n=924$ و $n=925$ و $n=926$ و $n=927$ و $n=928$ و $n=929$ و $n=930$ و $n=931$ و $n=932$ و $n=933$ و $n=934$ و $n=935$ و $n=936$ و $n=937$ و $n=938$ و $n=939$ و $n=940$ و $n=941$ و $n=942$ و $n=943$ و $n=944$ و $n=945$ و $n=946$ و $n=947$ و $n=948$ و $n=949$ و $n=950$ و $n=951$ و $n=952$ و $n=953$ و $n=954$ و $n=955$ و $n=956$ و $n=957$ و $n=958$ و $n=959$ و $n=960$ و $n=961$ و $n=962$ و $n=963$ و $n=964$ و $n=965$ و $n=966$ و $n=967$ و $n=968$ و $n=969$ و $n=970$ و $n=971$ و $n=972$ و $n=973$ و $n=974$ و $n=975$ و $n=976$ و $n=977$ و $n=978$ و $n=979$ و $n=980$ و $n=981$ و $n=982$ و $n=983$ و $n=984$ و $n=985$ و $n=986$ و $n=987$ و $n=988$ و $n=989$ و $n=990$ و $n=991$ و $n=992$ و $n=993$ و $n=994$ و $n=995$ و $n=996$ و $n=997$ و $n=998$ و $n=999$ و $n=1000$

$$\begin{aligned} x=1 \rightarrow a_0 + a_1 + a_2 &= 6 \\ x=2 \rightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 3 \\ x=3 \rightarrow a_0 + 3a_1 + 9a_2 &= 2 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1, R_3-R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2, R_3-2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_3, R_2-3R_3}$$

سوال ۲۱) دستگاه معادلات خطی زیر را به روش حذف گاوس حل کنید. (صفحه ۱۲)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 + R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{در سطر ۲} \\ \text{زیر هشتی} \\ \text{باید منفی شود}}} \begin{array}{l} R_2 - 2R_2 \\ R_3 - 2R_2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{باز نویسی معادلات}} \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_4 &= 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_2 + 6 &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 15 &= -1 \\ x_2 &= -5 \end{aligned}$$

نتیجه نهایی $\rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_3 = -5 \\ x_4 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 2t \\ t \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

نکته: در روش حذفی گاوس تعداد محاسبات $O(n^3)$ و در روش حذفی گاوس جردی $O(n^3)$ است.

روش تدریجی ژاکوبی: با چند تکرار ساده می توان با دقت مناسب به جواب های تقریبی دستگاه معادلات رسید. نکته: رعایت محورگیری در انتگرال های تدریجی است. برای اینکه انتگرال های عددی، همگرا شوند و با دقت مناسبی بتوانند جواب دستگاه را مشخص کنند لازم است که محورگیری را انجام بدهیم به با جابه جایی های ساده ها کارس و کنیم به همان های تکراری همواره بزرگ ترین مقدار ممکن باشند.

تو منبجات: یک n معادله n مجهول مانند زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید که جواب یکپارچه داشته باشد.

چرا که معمولاً روش های تدریجی برای معادلاتی انجام می دهیم که دارای جواب یکپارچه هستند. لکه در این مسائل n خیلی بزرگ هست مثلاً ۱۰۰ یا حتی ۱۰۰۰.

$$\begin{cases} E(1): a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E(2): a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ E(n): a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

همچنین در هر اولیه برای جواب را با $x^{(0)}$ یعنی هر کج صفر و یا توجه به شناختی که ما از سیستم دستگاه معادلات داریم یک در هر اولیه را مشخص می کنیم در اغلب معادلات، اگر اطلاعاتی در ارتباط با جواب نداشته باشیم می توانیم به صورت تصادفی انتخاب کنیم و یا کاملاً یک در نظر بگیریم و یا صفر.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

قدم اول: در معادله i ام، متغیر i ام را به حسب سایر مجهولات تعیین می کنیم.

$$\textcircled{A} \rightarrow x_1 = \frac{b_1 - [a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n]}{a_{11}}$$

محورگیری فضای \min یا \max \rightarrow $x_n = \frac{b_n - [a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}]}{a_{nn}}$ در حالت کلی

شماره:
تاریخ:
پیوست:

شرکت سی ای دی

C I D CO.

همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم

تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

(قدم دوم): محاسبه تقریب مرحله اول با فرمول زیر

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - [a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + \dots + a_{1n}x_n^{(0)}]}{a_{11}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(1)} = \frac{b_n - [a_{n1}x_1^{(0)} + a_{n2}x_2^{(0)} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}]}{a_{nn}}$$

نکته: اگر محوری به شکل درست انجام شود همواره به ازای چند بار این آسوریتیم را تکرار کنیم دیگر $x_n^{(k)}$ ها به سمت جواب واقعی در دستگاه میل می کنند

(قدم سوم): محاسبه تقریب مرحله دوم با فرمول زیر

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1 - [a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} + \dots + a_{1n}x_n^{(1)}]}{a_{11}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(2)} = \frac{b_n - [a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(1)}]}{a_{nn}}$$

(قدم چهارم): تکرار مرحله بالا تا رسیدن به دقت مورد نظر

پایه سازی روش ژاکوبی در پایتون با استفاده از شش ماتریسی است

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}$$

*
 $AX=B$
چگونه اول محوری می انجامد

$$x_{n \times 1}^{(k)} = D_{n \times n}^{-1} (b_{n \times 1} - R_{n \times n} x_{n \times 1}^{(k-1)})$$

شماره مرحله = k

$$D \equiv \text{ایمان مدر قطری A هست}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$R = \text{ایمان مدر غیر قطری A هست}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = D + R$$

نکته مهم: چون D ، یک ماتریس قطری است برای محاسبه D^{-1} کافی است ایمان مدر قطری اصلی را معکوس کنیم

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & \\ & a_{22}^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

شرط پایایی آسوریتیم ژاکوبی: مقادیر ویژه های ماتریس $D^{-1}R$ داخل یکدایره ی واحد باشد و در صورتی که یکی از این مقادیر ویژه، خارج از دایره واحد باشد، آسوریتیم ژاکوبی واگرایی خواهد داشت. با محورگیری ما به این همگرایی سرعت می بخشیم

سوال (۲۲): جواب تقریبی هادرات زیر را با دو رقم اعشار تعیین کنید. شرایط اولیه را یک فرض کنید
حل در خانه

$$2x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 10$$

$$x_1 + 5x_2 + 50x_3 = 10$$

$$30x_1 + x_2 + 14x_3 = 100$$

$$x_1 \leq 3.25$$

$$x_2 \leq 0.56$$

$$x_3 \leq 0.48$$

جواب نهایی: