خواص دترمینان: ① اگر یک ردیف (یا یک ستون) در ۲ ضرب شود، دترمینان نیز در ۲ ضرب می‌شود

② اگر جای دو سطر (یا دو ستون) را عوض کنیم، دترمینان قرینه می‌شود

③ اگر مضربی از یک ردیف (یا یک ستون) را به یک ردیف (یا ستون) دیگر اضافه کنیم، دترمینان تغییری نمی‌کند

نکته بسیار مهم: دترمینان ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی و یا پایین مثلثی، معادل با ضرب المان‌های قطر اصلی است

پیشنیازهای جبر خطی / سید امیرحسین حسینی

سوال ۴۷: دترمینان ماتریس زیر را حساب کنید

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -5\\ 3 & -2 & 11\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل}} A \approx \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix} \underset{R_2,R_3}{\overset{\text{تعویض}}{\approx}} \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = \Delta_0$$

$$\longrightarrow |A| = -|\Delta_0| = -(1\times 2\times -1) = +2$$

سوال ۴۸: دترمینان ماتریس زیر را حساب کنید

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 3 & 4\\ 6 & -6 & 5 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل}} A \approx \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -11\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4-\frac{5}{2}R_2}{\approx} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{47}{2}\end{bmatrix} = \Delta_0$$

$$\longrightarrow \boxed{|A| = |\Delta_0| = \left(1\times 0\times 3\times -\frac{47}{2}\right) = 0}$$

ماتریس تکین (منفرد): ماتریسی که دترمینان آن صفر باشد

خواص دیگر دترمینان: ($A_{n\times n}$)

① $|cA| = c^n|A|$ ② $|AB| = |A||B|$ ③ $|A^t| = |A|$

④ $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

سوال ۴۹ حل در خانه: دترمینان ماتریس $A_{3\times 3}$ برابر با ۴ است، موارد زیر را محاسبه کنید

(a) $|3A|$ (b) $|A^2|$ (c) $|5A^TA^{-1}|$

جواب نهایی: $a = 108$, $b = 16$, $c = 125$

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هلرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن وفکس ۳۰۱۴۰

معکوس ماتریس‌ها با استفاده از دترمینان:

ماتریس الحاقی: ترانهاده‌ی ماتریس حاصل از تمام همسازه‌های ماتریس (مثلاً فرض $A_{n\times n}$)
(adjoint)

پشتیبان‌های جبرخطی
سید امیرحسین حسینی

$$C=\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{matrix of cofactors}} \longrightarrow adj(A)=C^{T}$$

مهم

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,adj(A)$$

نکته مهم: تنها ماتریس‌های غیرتکین دارای معکوس هستند

سوال ۵۰: معکوس ماتریس زیر را به دست آورید

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل}} C=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, & +\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & +3 & -1 \\ -9 & 7 & 6 \\ -12 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|A|=25$$

$$A^{-1}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 14 & -9 & -12 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

نکته: شرط وجود جواب یکتا برای دستگاه‌های مربعی این است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر نشود

سوال ۵۱ (حل در خانه): a چه باشد که دستگاه دارای جواب یکتا باشد

$$\begin{aligned} 2x_1+7x_2+3x_3&=7 \\ x_1+2x_2+a x_3&=2 \\ x_1+5x_2+2x_3&=5 \end{aligned}$$

جواب نهایی ← $a\neq 1$

دستور کرامر: شرط اولیه: دستگاه دارای جواب یکتا باشد

$$AX = b$$

$$A_i(b) = [a_1 \; \dots \; b \; \dots \; a_n]$$

col i

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det(A)} , \quad i = 1, \dots, n$$

سؤال ۵۲: مجهول اول (x_1) را از حل دستگاه معادلات خطی زیر تعیین کنید

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned} \xrightarrow{\text{حل}} x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = +1 \rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

بردار ویژه ← = اگر ماتریس را به عنوان یک تبدیل خطی در نظر بگیریم اثر تبدیل خطی بر روی بردار ویژه؛ در راستای خود بردار ویژه باشه

مقادیر ویژه ← همچنین میزان انبساط و انقباض و جهت آن را هم مقادیر ویژه مشخص می‌کنه

پس بردار X رو تعریف می‌کنیم که اثر تبدیل خطی A بر روی X که می‌شه AX ← ما می‌خواهیم که AX در راستای خود X باشه بنابراین AX باید یک مضربی از X باشه

$$A_{n\times n} X = \lambda X_{n\times 1}$$

λ: اسکالر

X = بردار ویژه

λ = مقدار ویژه

نکته ۱: اگر $\lambda > 0 \Leftarrow$ AX هم جهت با λX هست

اگر $\lambda < 0 \Leftarrow$ AX خلاف جهت λX هست

نکته ۳: برای محاسبه‌ی بردارهای ویژه‌ها ابتدا باید مقادیر ویژه را به دست آوریم و برای تعیین آن هم از معادله‌ی مشخصه استفاده می‌کنیم

معادله مشخصه: یک چندجمله‌ای هست که ریشه‌های اون تمام مقادیر ویژه ماتریس رو مشخص می‌کنه

نکته ۲: اگر در معادله‌ی بالا X=0 باشد به معادله‌ی بدیهی 0=0 می‌رسیم و X=0 همواره بردار ویژه‌ی هر ماتریس دلخواه هست ولی در عمل ما همواره به دنبال بردارهای ویژه‌ی غیرصفر هستیم

نکته ۴: اگر ماتریس $A_{n\times n}$ باشد در این صورت یک چندجمله‌ای درجه n رو خواهیم داشت که n تا ریشه خواهد داشت که همان مقادیر ویژه‌ی ماتریس هستند

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن وفکس ۳۰۱۴۰

توضیحات تکمیلی بردارها و مقادیر ویژه

$$AX = \lambda X \longrightarrow AX - \lambda X = 0$$

$$(A - \lambda I_n) X = 0 \quad (*)$$

پیشنیازهای جبرخطی سید امیرحسین حسینی

(*) یک دستگاه همگن هست و برای اینکه این دستگاه دارای جواب باشه و با توجه به اینکه بردارها همواره برابر با صفر است ← دترمینان ماتریس ضرایب باید برابر با صفر شود

$$|A - \lambda I_n| = 0 \quad (1)$$

← حال اگر $A_{n\times n}$ باشه از ساده‌سازی عبارت بالا به $P_n(\lambda) = 0$ (2) می‌رسیم که یک چندجمله‌ای مرتبه n برحسب λ است

← که ریشه‌های اون رو به دست میاریم تا مقادیر ویژه هم محاسبه بشه (هم حقیقی و هم مختلط)

← از معادله‌ی (2) همه‌ی λها را به دست می‌آوریم (مقادیر ویژه) و در قدم بعد از طریق معادله‌ی (*) Xها رو هم به دست می‌آوریم

نکته ۵: بردارهای ویژه، پایه‌های جواب‌های دستگاه معادلات همگن (*) است (فضای ویژه)

نکته ۶: اگر $A_{n\times n}$ باشد، بردارهای ویژه، یک زیرفضای برداری از R^n را تشکیل می‌دهند

سؤال ۵۳ (مهم) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس A را تعیین کنید

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل}} \text{معادله مشخصه} = P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0$$

نکته: در $A_{2\times2}$ این مقدار همواره برابر با $\lambda^2 + a\lambda + b$ هست

$$\underbrace{\lambda I}_{\begin{bmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{bmatrix}} - A = \begin{bmatrix} \lambda + 4 & 6 \\ -3 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(\lambda I - A) = (\lambda+4)(\lambda-5) - (-3)(6)$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 20 + 18$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2) \to \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = +2 \end{cases}$$

مقادیر ویژه

$$\xrightarrow{\text{به دست آوردن بردارهای ویژه}} AX_1 = \lambda_1 X_1$$

$$\hookrightarrow (A - \lambda_1 I) X_1 = 0 \Big|_{\lambda_1 = -1}$$

$$= (A + I) X_1 = 0 \xrightarrow{*}$$

$$\xrightarrow{*} \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} X_1 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times1} \to A_0 = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$a_1 + 2a_2 = 0 \to X_1 = \begin{bmatrix} -2a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{-2}{1}\right) \quad \longleftarrow \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ادامه سؤال ۵۳

$$\lambda_1 = -1 \longrightarrow X_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = +2 \longrightarrow AX_2 = \lambda_2 X_2 \rightarrow (A - \lambda_2 I)X_2 = 0 \Big|_{\lambda_2 = 2} = (A - 2I)X_2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \Delta_0 = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow a_3 + a_4 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -a_4 \\ a_4 \end{bmatrix} \approx \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_2}$$

در λ_1 چون فقط یک بردار ویژه داریم پس فضای ویژه‌ی λ_1 یک خط است و در راستای X_1 قرار می‌گیرد (همین حرف‌ها برای λ_2 و X_2 هم برقرار است

سؤال ۵۴: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس A را تعیین کنید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل}} \text{معادله مشخصه} = P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda-5 & -4 & -2 \\ -4 & \lambda-5 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\lambda-5}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-4}{\lambda-5} & \frac{-2}{\lambda-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \underset{R_3+2R_1}{\overset{R_2+4R_1}{\approx}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-4}{\lambda-5} & \frac{-2}{\lambda-5} \\ 0 & \lambda-5-\frac{16}{\lambda-5} & -10 \\ 0 & -10 & \lambda-6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط ستون اول}} 1\times\begin{vmatrix} \frac{\lambda^2-10\lambda+25-16}{\lambda-5} & -10 \\ -10 & \lambda-6 \end{vmatrix} \hookrightarrow \frac{\lambda^2-10\lambda+9}{\lambda-5}(\lambda-6) - 100 = 0$$

$$\longrightarrow (\lambda-1)(\lambda-9)(\lambda-6) - 100\underbrace{(\lambda-5)}_{\lambda-6+1} = (\lambda-1)^2(\lambda-10) = 0$$

$$\longrightarrow \lambda = 1, 1, 10 \quad (\text{مقادیر ویژه})$$

تکرار جبری = ۲

شماره:..................
تاریخ:..................
پیوست:..................

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هلرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن وفکس ۳۰۱۴۰

ادامه سؤال ۵۴

$$\lambda_1=10 \rightarrow AX_1=\lambda_1 X_1 \rightsquigarrow (A-\lambda_1 I)X_1=0\Big|_{\lambda_1=10} = (A-10I)X_1=0$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \Delta_0=\begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

پیشنیازهای جبر خطی
سید امیرحسین حسینی

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = RREF(\Delta_0)$$

$$\rightarrow a_1-2a_3=0 \rightarrow a_1=2a_3 \rightarrow X_1=\begin{bmatrix} 2a_3 \\ 2a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow a_2-2a_3=0 \rightarrow a_2=2a_3$$

بردار ویژه پایه X_1

$$\approx \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=1 \rightarrow AX_2=\lambda_2 X_2 \rightsquigarrow (A-\lambda_2 I)X_2=0\Big|_{\lambda_2=1}$$

$$\Rightarrow (A-I)X_2=0 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2a_4+2a_5+a_6=0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-2a_5-a_6) \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

a_5 و a_6 آزاد هستند

$$\rightarrow X_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a_5 و a_6 آزاد

تعداد بردارها ۲ تا هست
فضای ویژه
یک صفحه خواهد بود

نکته = ارتباطی بین تکرر جبری یک λ و تعداد بردارهای ویژه‌ی متناظر با آن وجود ندارد

نکته = به تعداد بردارهای ویژه‌ی مستقل متناظر با مقادیر ویژه‌ی تکراری، تکرر هندسی می‌گوییم

نکته مهم ۵: در ماتریس A اگر λ_i و X_i مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ی ماتریس A باشند، آنگاه برای ماتریس A^n مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با λ_i^n و v_i هستند که کافی است اثبات کنیم
$$A^n X_i = \lambda_i^n X_i$$

قضیه کیلی - همیلتون ۵: هر ماتریس، در معادله ی مشخصه خودش صدق می کند

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = P_n(\lambda)$$

$$\xrightarrow{\lambda = A} P_n(A) = 0 \longrightarrow A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I_n = 0$$

کاربرد اول (محاسبه معکوس) =

$$I_n = \frac{-(A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A)}{a_n} \xrightarrow{\div A} A^{-1} = \frac{-1}{a_n}(A^{n-1} + \dots)$$

سؤال ۵۵: معکوس ماتریس زیر را با کیلی همیلتون حساب کنید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل}} P(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$
$$= \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10$$
$$\longrightarrow P(A) = A^3 - 12A^2 + 21A - 10I = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{10}(A^2 - 12A + 21I)}$$

کاربرد دوم (محاسبه توان n اُم ماتریس A) =

سؤال ۵۶: توان n اُم ماتریس A را تعیین کنید

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل}} P(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -6 \\ 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$f(\lambda) = \lambda^n \longrightarrow f(A) = A^n$$

$$\longrightarrow f(\lambda) = P(\lambda)\,C(\lambda) + R(\lambda)$$
$$f(A) = P(A)\,C(A) + R(A) = R(A)$$
$$A^n = f(A) = \underbrace{P(A)}_{0}\,C(A)$$

باقی مانده تقسیم λ^n بر $\lambda^2 - \lambda - 2$

شرکت سی ای دی
C I D CO.
همدان، هنرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم
تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

ادامه سؤال ۱۵:

$$f(\lambda)=\lambda^n=(\lambda-2)(\lambda+1)c(\lambda)+(a\lambda+b)$$

$$\begin{cases} \lambda=2 \rightarrow 2^n=2a+b \\ \lambda=-1 \rightarrow (-1)^n=-a+b \end{cases} \xrightarrow{\text{حل}} a=\frac{2^n-(-1)^n}{3}, \quad b=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$$

$$\longrightarrow f(A)=aA+bI=\frac{2^n-(-1)^n}{3}A+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I$$

پیش‌نیازهای جبر خطی
سید امیرحسین حسینی

$$=\begin{bmatrix} 2(-1)^n-2^n & 2\left((-1)^n-2^n\right) \\ 2^n-(-1)^n & 2^{n+1}-(-1)^n \end{bmatrix}$$

قطری سازی ماتریس‌ها: انتخاب مناسب دستگاه مختصات (پایه‌ها)، می‌تواند منجر به ساده سازی گسترده‌ای در سیستم بشود

به طور مثال اگر معادله‌ی یک بیضی $13x^2+10xy+13y^2=72$ باشد با تغییر دستگاه مختصات می‌توان با $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$ رسید که به مراتب ساده‌تر است.

نکته: اگر یک ماتریس را به عنوان یک تبدیل خطی در نظر بگیریم برای این که محاسباتش خیلی راحت‌تر بشه البته که ماتریس تبدیل خطی به شکل قطری باشه

نکته ۲: دو ماتریس هم مرتبه و مربعی رو متشابه می‌گوییم اگر ماتریس مربعی غیر منفرد P وجود داشته باشه که:

$$P^{-1}AP=D \longrightarrow$$ (می‌گوییم A و D باهم متشابه هستند)

نکته ۳: به این P، تبدیل همانندی می‌گوییم که باید آن را طوری انتخاب کرد که ماتریس D ساده‌ترین یعنی قطری باشد

نکته ۴: اثبات می‌شود که اگر D را قطری در نظر بگیریم، المان‌های قطری همان مقادیر ویژه A هستند

نکته ۵: اثبات می‌شود که P (تبدیل همانندی)، معادله‌ی مشخصه را تغییر نمی‌دهد ← معادله مشخصه A و D یکسان است.

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

نکته ۶: برای موجود بودن P و به دست آوردن آن باید شرط اولیه برقرار باشد

شرط اولیه: ماتریس مربعی مرتبه n قابل قطری‌سازی است اگر دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد

$$P = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n]$$

بردار ویژه اول

$$P^{-1}AP = D \rightarrow A = PDP^{-1} \rightarrow AP = PD$$

$$\rightarrow [AX_1 \ AX_2 \ \cdots \ AX_n] = [\lambda_1 X_1 \ \lambda_2 X_2 \ \cdots \ \lambda_n X_n]$$

$$\begin{cases} AX_1 = \lambda_1 X_1 \\ AX_2 = \lambda_2 X_2 \\ \vdots \\ AX_n = \lambda_n X_n \end{cases}$$

نکته ۷: درنهایت D از روی مقادیر ویژه A ساخته می‌شود و P هم از روی بردارهای ویژه A

سوال ۵۷: ماتریس A را قطری‌سازی کنید و سپس توان nام آن را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل}} P(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^2 - 8\lambda + 15$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

نکته مهم: در D^n، فقط المان‌های قطری به توان n می‌رسند

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3 \rightarrow AX_1 = \lambda_1 X_1 \rightarrow (A - \lambda_1 I)X_1 = 0 \Big|_{\lambda_1 = 3} = (A - 3I)X_1 = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2a_1 + a_2 = 0 \rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ -2a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5 \xrightarrow[\text{دانشجو}]{\text{حل با}} X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow P = [X_1 : X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A = PDP^{-1}$$

$$\hookrightarrow A^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$\rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5^n - 3^n & 5^n - 3^n \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

شماره:

تاریخ:

پیوست:

شرکت سی ای دی

C I D CO.

همدان، هلرستان، شماره ۲۸۰ طبقه سوم

تلفن و فکس ۳۰۱۴۰

سوال ۱۸: ماتریس A را قطری سازی کنید

$$A=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\1&4&-3&0\\-1&-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{حل}}$$

چون ماتریس پایین مثلثی هست؛ مقادیر ویژه همون قطر اصلی است

$$D=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\leftarrow \lambda_1=5,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=-3,\ \lambda_4=-3$$

$$\xrightarrow{\lambda_1=5} AX_1=\lambda_1X_1\rightarrow(A-\lambda_1I)X_1=0\Big|_{\lambda_1=3}=(A-5I)X_1=0$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&4&-8&0\\-1&-2&0&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\underset{R_3+R_4}{\approx}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&4&-8&0\\0&2&-8&-8\end{bmatrix}$$

پیشنیازهای جبر خطی

سید امیرحسین حسینی

$$\approx\begin{bmatrix}1&4&-8&0\\0&2&-8&-8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1-4R_2]{R_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&0&8&16\\0&1&-4&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{matrix}a_1+8a_3+16a_4=0\\a_2-4a_3+(-4)a_4=0\end{matrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-16a_4-8a_3\\4a_3+4a_4\\a_3\\a_4\end{bmatrix}\xrightarrow[a_3=1,\,a_4=0]{a_3=0,\,a_4=1}X_1=\begin{bmatrix}-8\\4\\1\\0\end{bmatrix}\text{ و }\begin{bmatrix}-16\\4\\0\\1\end{bmatrix}=X_2$$

$$\lambda_3=-3\xrightarrow[\text{دانشجو}]{\text{حل با}}X_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\text{ و }X_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

می‌دانیم: $P=\begin{bmatrix}X_1&X_2&X_3&X_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&-16&0&0\\4&4&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$

برای تمرین بیشتر A^n را نیز محاسبه کنید