Exponentes y radicales

Prof. Ivan Ladislao Condori Tinta

Febrero, 2025

Exponentes

Cuando intentamos hacer una suma larga, por ejemplo:

$$6+6+6+6+6+6+6=42$$

Normalmente se hace una suma manual, e indicamos que el resultado es 42, sin embargo, en Álgebra lo vemos diferente, antes de presentar el resultado, analizamos que se haceidno en la operacion, es decir:

$$6+6+6+6+6+6+6=7\cdot 6=42$$

Antes de indicar el resultado como 42, lo que hacemos es darnos cuenta que ocurre una operación de multiplicación, es decir: *"multiplicar siete veces seis"*

Con esta misma lógica, si hacemos la siguiente operación $3+3+3$, obtenemos:

$$3+3+3=3\cdot 3=9$$

Claramente la operación $3\cdot 3$ puede indicarse como:

$$3+3+3=3\cdot 3=3^2=9$$

Ahora, que tal si hacemos la siguiente operación:

$$3+3+3+3+3+3+3+3+3=27$$

Pero analizando algebraicamente y agrupando

$$(3+3+3)+(3+3+3)+(3+3+3)=(3\cdot 3)+(3\cdot 3)+(3\cdot 3)=3\cdot 3\cdot 3=3^3=27$$

Con este análisis entendemos que los exponentes nacen de simples sumas, este ejemplo se puede realizar con cualquier número y siempre deberá cumplir.
Ahora, entendiendo esto podemos generalizar lo siguiente:

$$\underbrace{\underbrace{(a+a+a+...)}_{a\text{ veces}}+\underbrace{(a+a+a+...)}_{a\text{ veces}}+\underbrace{(a+a+a+...)}_{a\text{ veces}}+...}_{a\text{ veces}}=a\cdot a\cdot a=a^3$$

A continuación se presentan las principales propiedades de los exponentes junto con sus restricciones, se debe tomar en cuenta que en nuestro curso todo se encuentra definido dentro de los números Reales.

Pero antes, ¿qué entendemos con las restricciones y "definido dentro de los números reales"?

Un ejemplo sencillo sería el siguiente radical:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Esta operación tiene las siguientes restricciones:

$$\text{si } n \text{ es par} \quad \Longrightarrow \; a \geq 0; n \neq 0$$

Lo que quieren decir estas restricciones:

- Cuando n sea un número par Real, entonces a tiene que ser si o si positivo
- n no puede ser cero, porque entonces se presentaria una division entre cero, lo cual es indeterminado.

Ejemplo:

$$(-25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-25} = \nexists \;\; \textbf{en } \mathbb{R}$$

En este ejemplo claramente n es par, y no cumple la restricción que indica que, a debe ser positivo si o si, porque la raíz de un número negativo no esta definido en los Números Reales.

1. Producto de Potencias de la Misma Base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Restricciones: $a \neq 0$ si m o n son negativos.

2. Cociente de Potencias de la Misma Base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

Restricciones: $a \neq 0$ para evitar división por cero.

3. Potencia de una Potencia

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Restricciones: Ninguna, siempre que a esté definido.
Esta propiedad se puede generaliar de la siguiente manera:

$$(((a^m)^n)^p)^{\cdots} = a^{m \cdot n \cdot p \cdots}$$

4. Potencia de un Producto

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Restricciones: $a, b \neq 0$ si n es negativo.

5. Potencia de un Cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

Restricciones: $b \neq 0$ para evitar división por cero.

6. Exponente Cero

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

Restricciones: $a \neq 0$, ya que 0^0 es una forma indeterminada.

7. Exponente Negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

Restricciones: $a \neq 0$ para evitar división por cero.

8. Raíz como Exponente Fraccionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Restricciones:

- Si n es par, entonces $a \geq 0$.
- Si n es impar, a puede ser cualquier número real.

9. Propiedad Distributiva del Exponente (solo para multiplicación o división)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Restricciones: No aplica para sumas o restas, es decir:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

10. Exponente Fraccionario Negativo

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Restricciones:

- Si n es par, entonces $a > 0$.
- Si n es impar, $a \neq 0$.

Notas Importantes

- Las propiedades de los exponentes son válidas solo cuando las bases y exponentes están bien definidos.
- En caso de duda, siempre verifica las restricciones para evitar operaciones no definidas en los números Reales, como divisiones por cero o raíces pares de números negativos.