Задание

Имеется 2-х колёсный робот с 2-мя мотор-колёсами. Каждое из колёс управляется своим электродвигателем с приведённым моментом нагрузки. Двигатели для левого и правого колеса идентичны. Схема робота представлена на рисунке 1.

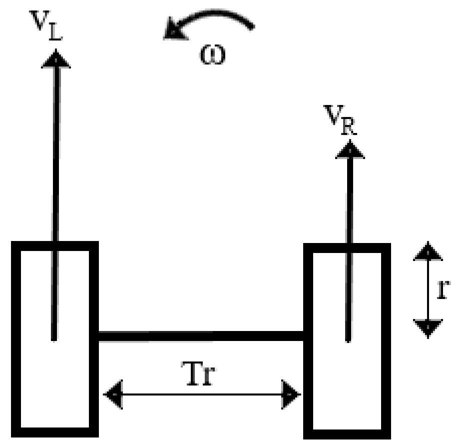

Рисунок 1. Модель 2-х колёсного робота.

На вход системы поступает управляющее напряжение для левого и правого двигателя – U_L и U_r. Выходом системы принять модуль вектора скорости центра масс робота (расположен в центре оси) V и скорость поворота вектора скорости $\vec{V} - \omega$.

Параметры системы приведены ниже:

Обозначение	Величина	Описание
r	0,1 (м)	Радиус колеса
T_r	0,15 (м)	Ширина колеи
J_{sum}	0,8 (кг · м^2)	Приведённый момент инерции
R	10 (Ом)	Сопротивление обмотки
L	$650 \cdot 10^{-6}$ (Гн)	Индукция обмотки
k_M	0,17 (В · с/рад)	Коэффициент по моменту
k_ω	0,17 (Н/А)	Коэффициент по скорости

Необходимо сформировать описание системы в переменных состояния с заданными выше входом и выходом.

Решение

Вектор входа системы имеет вид:

$$U = \begin{pmatrix} U_L \\ U_R \end{pmatrix} \tag{1}$$

Вектор выхода систем имеет следующий вид:

$$Y = \begin{pmatrix} V \\ \omega \end{pmatrix} \tag{2}$$

Поворот робота в плоскости можно получить следующим образом:

$$\omega = \frac{V_R - V_L}{Tr} \tag{3}$$

Тогда вектор скорости можно найти:

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_R} + \frac{\overrightarrow{Tr}}{2} \times \vec{\omega} = V_R - \frac{Tr}{2} \cdot \omega \tag{4}$$

Подставив ω получим, что

$$\mathrm{V} = \frac{V_R + V_L}{2} \tag{5}$$

Теперь запишем уравнения, описывающие двигатель постоянного тока:

$$\begin{cases} U - k_\omega \omega_k = RI + L\dfrac{dI}{dt} \\ M = k_M I \\ M = J_{sum}\dot{\omega}_k \end{cases} \tag{6}$$

Приравняем выражения моментов и выразим из полученного уравнения ток и подставим в уравнение для напряжения:

$$U - k_\omega \omega_k = R \cdot \frac{J_{sum}}{k_M}\dot{\omega}_k + L\frac{J_{sum}}{k_M}\ddot{\omega}_k \tag{7}$$

Это выражение справедливо как для правого, так и для левого двигателей.

Теперь можем выбрать, какие переменные состояния мы хотим использовать в системе. Сделаем следующий выбор:

$$\begin{cases} x_1 = V_L \\ x_2 = V_R \\ x_3 = \dot{V}_L = \dot{x}_1 \\ x_4 = \dot{V}_R = \dot{x}_2 \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом мы назначали переменные состояния через скорости левого и правого колеса, а также линейные ускорения левого и правого колеса.

Типовой вид системы в переменных состояния имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \tag{9}$$

где A, B, C и D – матрицы, описывающие состояние системы, её вход и выход.

Запишем уравнение выхода (2) через переменные состояния:

$$Y = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \dfrac{-x_1 - x_2}{Tr} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Также запишем уравнение (7) для напряжения левого и правого двигателя через переменные состояния:

$$\begin{cases} U_L - k_\omega \dfrac{x_1}{r} = R \cdot \dfrac{J_{sum}}{k_M} \dfrac{x_3}{r} + L \dfrac{J_{sum}}{k_M} \dfrac{\dot{x}_3}{r} \\ U_R - k_\omega \dfrac{x_2}{r} = R \cdot \dfrac{J_{sum}}{k_M} \dfrac{x_4}{r} + L \dfrac{J_{sum}}{k_M} \dfrac{\dot{x}_4}{r} \end{cases} \tag{11}$$

Тогда получим следующее полное выражение в переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{r \cdot k_M}{L \cdot J_{sum}} U_L - \dfrac{k_\omega \cdot k_M}{L \cdot J_{sum}} x_1 - \dfrac{R}{L} x_3 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{r \cdot k_M}{L \cdot J_{sum}} U_R - \dfrac{k_\omega \cdot k_M}{L \cdot J_{sum}} x_2 - \dfrac{R}{L} x_4 \end{cases} \tag{12}$$

В итоге выражения (10) и (12) составляют полное описание системы в переменных состояния. Теперь можем записать матрицы состояния системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_\omega \cdot k_M}{L \cdot J_{sum}} & 0 & -\dfrac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\dfrac{k_\omega \cdot k_M}{L \cdot J_{sum}} & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{r \cdot k_M}{L \cdot J_{sum}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r \cdot k_M}{L \cdot J_{sum}} \end{pmatrix}^T \tag{14}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{Tr} & \frac{-1}{Tr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$D = 0 \tag{16}$$

Таким образом мы получили все матрицы состояния системы с двумя входами и двумя выходами.

Анализ полученной системы

Далее можно проверить управляемая ли и наблюдаемая ли полученная система.

Под управляемостью подразумевается возможность перевести систему из определённого начального состояния в конечное за конечное время t. Иначе говоря, это возможность получить определённый переходный процесс для всех переменных состояния системы. Т.е. мы можем управлять всеми переменными состояния.

Под наблюдаемостью же подразумевается возможность оценить все переменные состояния по выходу системы.

Для оценки управляемости и наблюдаемости составляются соответствующие матрицы управляемости (17) и наблюдаемости (18). Они приведены ниже:

$$Q_Y = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \tag{17}$$

$$Q_H = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T \tag{18}$$

Критериями наблюдаемости и управляемости является равенство рангов соответствующих матриц порядку системы (т.е. количеству переменных состояния).

$$rank(Q_Y) = n \tag{19}$$

Например, если порядок системы равен n и выполнено выражение (19), то система является полностью управляемой.