Operazioni con le derivate

domenica 13 ottobre 2024 08:05

Algebra delle derivate.

Se f, g sono due funzioni derivabili, si dimostra, che:

1) $f+g$ è derivabile in $X = X_1 \cap X_2$ ed è:

$$D[f(x)+g(x)] = Df(x) + Dg(x);$$

2) $f \cdot g$ è derivabile ed è:

$$(f\cdot g)' = D[f(x)\cdot g(x)] = Df(x)\cdot g(x) + Dg(x)\cdot f(x).$$

In particolare:

$$D[K\cdot g(x)] = K \cdot Dg(x).$$

$$D(e^x \cdot \operatorname{sen}(x)) = (De^x)\cdot \operatorname{sen}(x) + (D\operatorname{sen}(x))\cdot e^x = e^x \cdot \operatorname{sen} x + \cos(x)\cdot e^x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$X' = \mathbb{R}$

3) $\frac{f}{g}$ è derivabile ed è:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{Df(x)\cdot g(x) - Dg(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2};$$

3') $D\frac{1}{g(x)} = -\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x).$

$$D\left(\frac{1}{x^2+x}\right) = -\frac{1}{(x^2+x)^2}\cdot D(x^2+x) = -\frac{1}{(x^2+x)^2}(2x+1)$$

4) Derivata della composta:

$$D[g(f(x))] = \underbrace{(Dg)(f(x))\cdot Df(x)}$$

Oss. Se poniamo $f(x) = z$, è:

$$Dg(f(x)) = Dg(z) = \underbrace{g'(z)}\cdot \underbrace{z'}$$

Es. $D\log(\sqrt{x}) = (\sqrt{x} = z) = D\log(z)\cdot z' = \frac{1}{z}\cdot z' =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot D\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}.$$

5) Derivata della f. inversa.

Teor. - Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione invertibile in X e se $x_0 \in X \cap DX \Rightarrow$ f sia derivabile in x_0 e se $f'(x_0) \neq 0$, detta f^{-1} la sua inversa si dimostra che f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ ed è:

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Osservazione 1-

Tale teorema si utilizza per calcolare la derivata dell'inversa delle funzioni elementari: arcoseno, arccoseno, arcotangente, arcocotangente.

Oss. 2 - Si utilizza per calcolare la derivata di una funzione inversa, quando questa non è esplicitabile (calcolabile).

Esempio: $f(x) \overset{y=x+e^x}{=} x + e^x$ è str. crescente quindi invertibile ma la sua inversa non è calcolabile.
In questo caso, si può calcolare Df^{-1} nel punto $y_0 = f(0)$ applicando il teorema.
Si ha:

1) $y_0 = f(0) = 0 + e^0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$;
2) $f'(x) = D(x+e^x) = 1 + e^x \Rightarrow f'(x_0=0) = 1 + e^0 = 2 \neq 0$

Quindi:

$$Df^{-1}(y_0 = 1) = \frac{1}{Df(x_0=0)} = \frac{1}{2}.$$

f è invert. perché mon.
$f'(x) = 1 + e^x$
$f'(0) = 1 + e^0 = 2 \neq 0$
f è deriv. in $x_0 = 0$, $f'(0) = 2$
f^{-1} è deriv. in $y_0 = f(0) = 1$
e vale $Df^{-1}(y_0) = Df^{-1}(1)$
$= \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

6) $$D f(x)^{g(x)} = D e^{\underbrace{g(x) \cdot \ln f(x)}_{z}} =$$

$$= (z = g(x) \cdot \ln f(x)) \; De^z \cdot z' =$$

$$= e^z \cdot z' = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot D[g(x) \ln f(x)] =$$

$$= f(x)^{g(x)} \left\{ g'(x) \ln f(x) + \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot g(x) \right\}$$

$$= f(x)^{g(x)} \left\{ \frac{f'(x) g(x) + f(x) \cdot g'(x) \ln f(x)}{f(x)} \right\}$$

$$D(x^x) = x^x \cdot \left\{ \frac{1 \cdot \cancel{x} + 1 \cdot \cancel{x} \cdot \ln(x)}{\cancel{x}} \right\} = x^x (1 + \ln(x))$$