Sviluppo di Taylor e di Mac Laurin con il resto di Lagrange

martedì 15 ottobre 2024 07:05

Teorema -

Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile $n+1$ volte nel punto $x_0 \in \bar{X} \cap DX$, si dimostra che

$\exists!\, P_n(x)$ di Taylor $\ni'$

$\forall x \in X$, $\exists c$ compreso fra x_0 e x, $\ni'$

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

dove:

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = o\left((x-x_0)^{n+1}\right), \text{ per } x \to x_0$$

è detto resto di Lagrange.

Tale sviluppo con il resto di Lagrange, a differenza dello sviluppo con il resto di Peano, consente di valutare l'errore che si commette quando si approssima

$$f(x) \text{ con } P_n(x).$$

Se diciamo

$$M = \max f^{(n+1)}(x),$$

nell'intervallo di estremi x_0 e x, si ha che poiché c è compreso fra x_0 e x: $f^{(n+1)}(c) \leq M \Longrightarrow \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \leq M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon_2 = M \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

è l'errore max che si commette assumendo

$$f(x) \simeq P_n(x).$$

Se $x_0 = 0$: $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$

si dice sviluppo di Mac Laurin di ordine n con resto di Lagrange.

Esempio – Calcolare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 con il resto di Lagrange della funzione $sen(x)$.

Soluzione

Lo sviluppo è:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^k}_{} + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}}^{} x^{n+1} =$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} + \underbrace{\frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4}_{R_{3,x_0}(x)}$$

$f^{(0)}(0) = f(0) = sen(0) = 0;$

$f^{(1)}(x) = cos(x) \Rightarrow f^{(1)}(0) = cos(0) = 1;$

$f^{(2)}(x) = -sen(x) \Rightarrow f^{(2)}(0) = -sen(0) = 0;$

$f^{(3)}(x) = -cos(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = -cos(0) = -1;$

$f^{(4)}(x) = sen(x) \Rightarrow f^{(4)}(c) = sen(c).$

Quindi, lo sviluppo di ordine $n=3$ è:

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{sen(c)}{4!} x^4 =$$

$4! \; 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{sen(c)}{24} x^4.$$