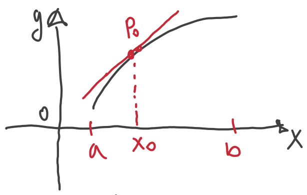
Approssimazione di una funzione derivabile – Formula di Taylor

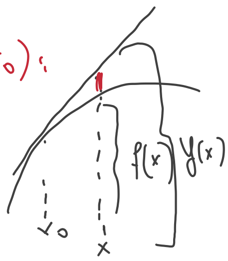
domenica 13 ottobre 2024 18:48

I^a approssimazione: l'approssimazione lineare di una funzione.

Premessa –
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in X \cap DX \ni' f$ sia derivabile in x_0, esiste la retta tangente al grafico di f nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$, la cui equazione è

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$





Il grafico mostra che, in generale, $\forall x \in X - \{x_0\}$ è il valore della funzione in x diverso dal valore della tg in x,

$$f(x) \neq y(x) \leftarrow (tg)$$

ma che nei punti "vicini a x_0", il valore $y(x)$ della tangente fornisce una buona approssimazione del valore di $f(x)$:

$$y(x) \approx f(x).$$

Sussiste il seguente teorema.

Teor. 1 – (Teorema dell'approssimazione lineare di una funzione derivabile)

Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in $x_0 \in X \cap DX$, si dimostra che:

$$\exists | P_1(x) = a_0 + b(x - x_0) \ni' f(x) - P_1(x) = R_{1,x_0}(x), \text{ dove } R_{1,x_0}(x)$$

$$\text{è un } o((x - x_0)^1) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{R_{1,x_0}(x)}{x - x_0} = 0.$$

Dim. (a). Dimostriamo che $\exists P_1(x) \ni' f(x) - P_1(x) = o(x - x_0)$.
Poichè $f(x)$ è derivabile in $x_0 \iff \exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \implies$

$$\exists P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (P_1(x) = a + b(x - x_0))$$

Dimostriamo che:

$$f(x) - P_1(x) = R_{1,x_0}(x) = o(x - x_0), \; x \to x_0.$$

Infatti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x_0, x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)] - [f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x_0)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} \right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow \; f'(x_0)} - \underbrace{f'(x_0)}_{\downarrow \; f'(x_0)} \right] = 0 \implies$$

Dunque $\exists\, P_1(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ tale che:
$$f(x)-P_1(x) = R_{1,x_0}(x) = o(x-x_0)$$

(b) Dimostriamo $P_1(x)$ è l'unico polinomio di 1° grado del tipo $a+b(x-x_0)$ tale che: $f(x)-P_1(x) = o(x-x_0)$.

Se
$$\bar{P}(x) = a+b(x-x_0)$$
è un ulteriore polinomio di 1° grado $\ni'$
$$f(x)-\bar{P}(x) = o(x-x_0),\ x\to x_0,$$
si ha:

1) $f(x)-\bar{P}(x) = o(x-x_0) \Rightarrow f(x) = \bar{P}(x)+o(x-x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}[\bar{P}(x)+\underset{\downarrow\, 0}{o(x-x_0)}] = \lim_{x\to x_0}\bar{P}(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (poiché $f(x), \bar{P}(x)$ sono continue) $f(x_0) = \bar{P}(x_0) = a+\cancel{b(x_0-x_0)} = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_0) = a \Rightarrow \bar{P}(x) = a + b(x-x_0) = f(x_0)+b(x-x_0).$$

Di più, poiché è
$$f(x) = \bar{P}(x)+o(x-x_0) = f(x_0)+b(x-x_0)+o(x-x_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)-b(x-x_0) = o(x-x_0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-b(x-x_0)}{x-x_0} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left[\underset{\downarrow\, f'(x_0)}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} - \frac{b\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)-b = 0 \Rightarrow f'(x_0) = b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{P}(x) = a+b(x-x_0) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) = P_1(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{P}(x) = P_1(x).$$

Dunque:
$$\exists|\, P_1(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
$$\ni'\quad f(x)-P_1(x) = R_{1,x_0}(x) = o(x-x_0), \text{ per } x\to x_0.$$

(1) $f(x) = P_1(x)+R_{1,x_0}(x)$ si dice sviluppo di Taylor di $f(x)$ di ordine 1 e punto iniziale x_0 con il resto di Peano;

(2) $P_1(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ si dice polinomio di Taylor di ordine $n=1$ e punto iniziale x_0 di $f(x)$

(3) $R_1(x_0,x)$ si dice resto di Peano:
è l'errore che si commette assumendo
$$f(x) = P_1(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
quando $x\to x_0$.

Proprietà di $P_1(x)$

1) $f(x_0) = P_1(x_0)$
2) $f'(x_0) = P_1'(x_0)$

Sviluppo di Mac Laurin di ordine 1

Se $x_0 = 0$, lo sviluppo di Taylor diventa:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + o(x)$$

e si dice "sviluppo di Mac Laurin, di ordine $n=1$, di $f(x)$"
Il polinomio si dice di Mac Laurin di ordine $n=1$ di $f(x)$.

Esempio 1 - Calcolare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine $n=1$ della funzione

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$

e utilizzarlo per determinare un valore approssimato di $\sqrt{1.02}$.

Soluzione

Lo sviluppo di Mac Laurin di ordine $n=1$ è:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + o(x).$$

1) $f(0) = (1+0)^{\alpha} = 1;$
2) $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha.$

Quindi: $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$.

Si può utilizzare tale sviluppo per calcolare, ad esempio, $\sqrt{1.02}$.

$\sqrt{1.02} = \sqrt{1+0.02} = (1+0.02)^{1/2}\ (\alpha = 1/2) =$
$\approx 1 + \frac{1}{2}(0.02) = 1 + 0.01 = 1.01$ (v. calc. $= 1.009$ / 1.01)

$D[f(x)^{\alpha}]$
$= D z^{\alpha}\cdot z'$
z. $= \alpha\cdot z^{\alpha-1}\cdot z'$
$= \alpha[f(x)]^{\alpha-1}\cdot f'(x)$

$D(1+x)^{\alpha} =$
$= \alpha(1+x)^{\alpha-1}\cdot$
$\cdot D(1+x) =$
$= \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

Esempio 2 - Calcolare un valore approssimato di $\operatorname{sen}(0{,}84)$

Lo sviluppo di MacLaurin di $\operatorname{sen}(x)$, di ordine $n=1$, è:

$$\operatorname{sen}(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

1) $f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0;$
2) $f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1.$

Lo sviluppo di ordine uno è:

$\operatorname{sen}(x) = 0 + 1\cdot x + o(x) = x + o(x) \Rightarrow$

$\operatorname{sen}(0{,}84) \approx 0{,}84$ (v. calc.: $0{,}7446$).

II) Sviluppo di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0, con resto di Peano.

È una generalizzazione dell'approssimazione lineare. Sussiste il seguente Teorema.

Teorema - (Sviluppo di Taylor di ordine n, con resto di Peano).

Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile n-volte in $x_0 \in X \cap DX$, si dimostra che

$$\exists!\, P_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x_0,x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$\exists'$ $f(x) - P_n(x) = R_{n,x_0}(x) = o((x-x_0)^n)$.

1) $P_n(x)$ si dice polinomio di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0;

2) $R_n(x-x_0) = o((x-x_0)^n)$ si dice resto di Peano, dello sviluppo di Taylor di punto iniziale x_0.

Se $x_0 = 0$, lo sviluppo si dice di MacLaurin

e

$P_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$ si dice polinomio di MacLaurin di ordine n.

Esempio - Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine $n=3$ per la funzione

$$f(x) = sen(x).$$

Soluzione - $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$

1) $f(0) = sen(0) = 0$;

2) $f'(x) = cos(x) \Rightarrow f'(0) = cos(0) = 1$;

3) $f''(x) = -sen(x) \Rightarrow f''(0) = -sen(0) = 0$;

4) $f'''(x) = -cos(0) \Rightarrow f'''(0) = -cos(0) = -1$.

Quindi, lo sviluppo è:

$$sen(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Ricalcolare $sen(0.84)$, visto nell'esempio precedente.

$$sen(0,84) = 0,84 - \frac{(0.84)^3}{6} = 0,84 - 0,099 = 0.741$$

(v. cal. 0,744)

Osservazione -

"Più è elevato l'ordine n dello sviluppo, migliore è l'approssimazione che si ottiene assumendo $f(x) = P_n(x)$"