O-piccolo di una funzione – simbolo di Landau

domenica 13 ottobre 2024 18:30

Ricordiamo che se f, g sono due funzioni infinitesime per $x \to c$, si dice che:
f è un infinitesimo di ordine maggiore a $g(x)$, per $x \to c$, se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

In tal caso, si dice che
$f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$, per $x \to c$
e si scrive

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to c.$$

$o(g(x))$ è il simbolo di Landau. $\lim_{x \to 0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$

Esempio – $\operatorname{sen}(x^2) = o(\ln(1+x))$, per $x \to 0$
perché:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0.$$

Per $x \to 0$:
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x) \sim x \Rightarrow \operatorname{sen}(x^2) \sim x^2; \\ \ln(1+x) \sim x. \end{cases}$$

Oss. fondamentale – Se $g(x)$ è un infinitesimo, gli o-piccolo di $g(x)$ sono infiniti:

$o(g(x))$ è la classe delle ∞ funzioni infinitesime per $x \to c$, di ordine superiore a $g(x)$:

$$o(g(x)) = \{ f(x) \text{ infinitesime in } c \mid \operatorname{ord} f > \operatorname{ord} g \}.$$

Operazioni con gli o-piccolo

Se f, g sono due infinitesimi per $x \to c$, si dimostra che:

1) $\forall k \in \mathbb{R}$: $k \cdot o(g(x)) = o(k g(x)) = o(g(x))$, $x \to c$;
Es. $2\, o(\operatorname{sen}(x)) = o(\operatorname{sen}(x))$; $o(3 \operatorname{sen} x) = o(\operatorname{sen}(x))$; $x \to 0$

2) $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow [f(x)]^k = o(g(x)^k)$
Es. $\underbrace{1 - \cos(x)}_{} = o(x) \Rightarrow (1 - \cos x)^2 = o(x^2)$; per $x \to 0$

3) $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$
Es. $x^2 \cdot o(x) = o(x^2 \cdot x) = o(x^3)$, $x \to 0$

4) $f(x) \sim g(x) \Rightarrow o(f(x)) = o(g(x))$, $x \to c$
$\operatorname{sen}(x) \sim x \Rightarrow o(\operatorname{sen}(x)) = o(x)$, per $x \to 0$
$\operatorname{arcsen}(x^2) \sim x^2 \Rightarrow o(\operatorname{arcsen}(x^2)) = o(x^2)$, per $x \to 0$