Conseguenze del teorema di Lagrange

domenica 13 ottobre 2024 09:28

Teorema 1 - (Monotonia delle funz. derivabili in un intervallo)

Se $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in I e derivabile in $\mathring{I}$ intervallo, si dimostra che:

a) Se $\forall x \in \mathring{I}: f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) > 0$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ è crescente (risp. strett. cresc.) in I;

b) Se $\forall x \in \mathring{I}: f'(x) \leq 0$ (risp. $f'(x) < 0$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ è decrescente (risp. strett. decr.) in I.

Dim. (a) - $\forall x_1, x_2 \in I \ni' x_1 < x_2$:
f continua in I, derivabile in $\mathring{I} \Rightarrow f$ continua in $[x_1, x_2] \subset I$
e derivabile in $]x_1, x_2[\subset \mathring{I} \Rightarrow$ (per Lagrange)

$$\exists c \in]x_1, x_2[\ni' f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\text{poiché } \forall x \in \mathring{I}: f'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \Rightarrow \left(\text{poiché } x_1 < x_2: x_2 - x_1 > 0\right)$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

Dunque, $\forall x_1, x_2 \in I \ni' x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.

In modo analogo, si dimostrano (a2) e (b).

Teorema 2 - (I c.s. per i minimi/massimi - Metodo della monotonia)

Se $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in \mathring{I} \ni' f$ sia derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, si dimostra che:

a) $\left(\forall x \in I, \text{per} \begin{cases} x < x_0 : f'(x) \leq 0 \ (\downarrow) \\ x > x_0 : f'(x) \geq 0 \ (\uparrow) \end{cases}\right) \Rightarrow$ (x_0 è un punto di minimo locale)

b) $\left(\forall x \in I, \text{per} \begin{cases} x < x_0 : f'(x) \geq 0 \ (\uparrow) \\ x > x_0 : f'(x) \leq 0 \ (\downarrow) \end{cases}\right) \Rightarrow$ (x_0 è un punto di massimo locale)

Teorema 3 – (II C.S. per i minimi/max relativi)

Metodo della derivata 2ª

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile almeno due volte in I e se $x_0 \in I$, si dimostra che:

a) $\left(\text{Se } f'(x_0)=0 \text{ e } f''(x_0)>0 \right) \Rightarrow \left(x_0 \text{ è un punto di minimo per } f \right)$

b) $\left(\text{Se } f'(x_0)=0 \text{ e } f''(x_0)<0 \right) \Rightarrow \left(x_0 \text{ è un punto di massimo per } f \right)$

Nulla si può dire se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)=0$!!

Esempio – Calcolare i minimi e i max relativi della funzione

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

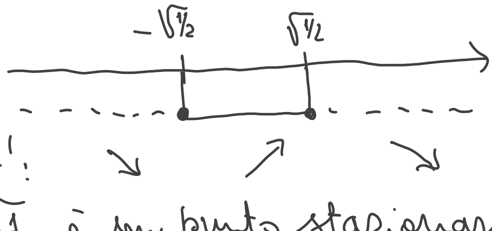
Soluzione – Il dominio di f è: $X = \mathbb{R}$ (intervallo).

1) $f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$;

2) $f'(x) = 0 \iff 1-2x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{1/2}$.

I modo: Metodo della crescenza

$f'(x) \geq 0 \iff 1-2x^2 \geq 0 \iff -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \leq x \leq \sqrt{1/2}$.



- $x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ è un punto stazionario di minimo relativo;
- $x = \sqrt{1/2}$ " " " " " massimo relat.

Oss. Poiché agli estremi è $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e poiché:

1) $f(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-1/2} < \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-1/2}$ è un punto di min assoluto

2) $f(-\sqrt{1/2}) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-1/2} > \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ è un punto di max assoluto.