Classificazione dei punti di non derivabilità

domenica 13 ottobre 2024 06:59

Abbiamo detto che una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ è derivabile in un punto $x_0 \in X \cap DX$ se

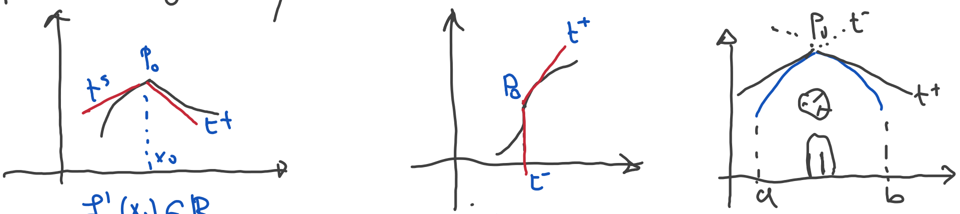
$$\exists f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \text{ (reale, finito).}$$

I casi di non derivabilità sono tre:

DEF.

Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in \mathring{X} \cap DX$, si dice che:

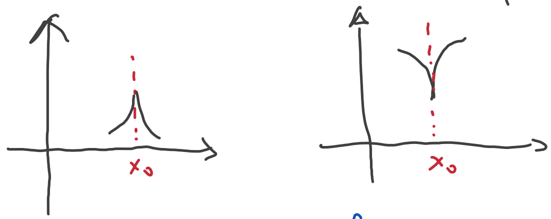
a) (x_0 è un punto angoloso) $\iff$ ($\exists f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ e almeno una è finita).



$f'_s(x_0) \in \mathbb{R}$
$f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$
$f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$

$f'_s(x_0) = +\infty$
$f'_d(x_0) \in \mathbb{R}^+$

b) (x_0 è un punto cuspidale) $\iff$ ($\exists f'_s(x_0), \exists f'_d(x_0)$ diverse e entrambe ∞)



$$\begin{cases} f'_s(x_0) = +\infty, \\ f'_d(x_0) = -\infty. \end{cases}$$

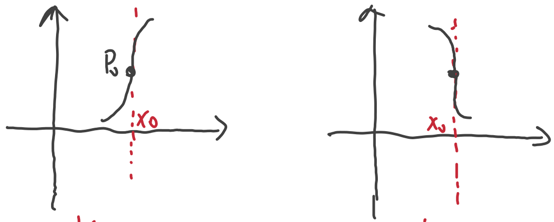
$x = x_0$

$$\begin{cases} f'_s(x_0) = -\infty \\ f'_d(x_0) = +\infty \end{cases}$$

$x = x_0$

c) Si dice che x_0 è un punto di flesso improprio o a tangente verticale se

$$\exists f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0) = +\infty / -\infty$$



$f'(x_0) = +\infty$

$f'(x_0) = -\infty$

Esempio - Studiare i punti di non derivabilità della funzione $f(x) = \operatorname{arctg}(|x|)$.

Soluzione

Il dominio della funzione è: $X = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x), & \text{se } x \geq 0 \\ \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi:

1) $\forall x > 0$: $f'(x) = D \operatorname{arctg}(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$;

2) $\forall x < 0$: $f'(x) = D[-\operatorname{arctg}(x)] = -\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$;

3) $x = 0$:

$$\begin{cases} f'_s(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right) = -1 \in \mathbb{R}; \\ f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = +1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$ è un punto angoloso per f.