Funzione derivabile in un insieme

domenica 13 ottobre 2024 07:26

DEF. - (Funzione derivabile in un insieme)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che:

$$(f \text{ è derivabile in } X) \Leftrightarrow (\forall x \in X: f \text{ derivabile in } x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in X, \exists f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R} \right)$$

In tal caso, si può considerare la nuova funzione

$f': X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$\forall x \in X: f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}$$

detta funzione derivata prima di f in X, indicata con:

$$y', \ Dy, \ Df(x), \ \frac{dy}{dx}, \ \frac{d f(x)}{dx}.$$

Osservazione - Poichè anche $f'(x)$ può essere derivabile in X, si può definire di essa la derivata: tale derivata della derivata prima si dice derivata seconda di f, indicata con:

$$f''(x), \ D^{(2)} f(x), \ \frac{d^2 y}{dx^2}. \qquad D'' f(x) = D(f'(x))$$

Così procedendo, si può definire la derivata n-sima di una funzione f.
Per definizione è:

$$D^{(n)} f(x) = D\left(D^{(n-1)} f(x)\right).$$

DEF. - (Definiz. di punto critico)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in X \cap DX$, si dice che

$$(x_0 \text{ è un punto critico per } f) \Leftrightarrow (\nexists f'(x_0) \in \mathbb{R} \vee \exists f'(x_0) = 0)$$

DEF. - (Punto stazionario)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in X \cap DX$, si dice che

$$(x_0 \text{ è un punto stazionario}) \Leftrightarrow (f'(x_0) = 0)$$

Oss. - Ovviamente, ogni punto stazionario è un punto critico per f.