POLITECNICO DI BARI – CLASSE N
A.A. 2024/2025

ANALISI MATEMATICA - MOD. A

TEORIA

DOCENTE: PROF. GIOVANNI VITERBO

Cap.1 - Elementi di teoria degli insiemi, relazioni e funzioni

&1.1. Elementi di teoria degli insiemi

Def. 1.1 – (Definizione di insieme)

Dicesi insieme ogni aggregato ben definito di oggetti del quale si deve sempre poter dire se un dato oggetto appartiene/non appartiene ad esso.

In generale, gli insiemi sono indicati con lettere maiuscole

$$\mathcal{A},\mathcal{B},..,\mathcal{X},\mathcal{Y}$$

gli elementi dell'insieme con lettere minuscole

$$a,b,x,y,\dots.$$

Per indicare che un dato oggetto x appartiene (non appartiene) a un insieme $\mathcal{A}$ si scrive:

$$x \in A \ (risp.\ x \notin A).$$

- Un insieme privo di elementi si dice *insieme vuoto* e si indica con $\emptyset$.
- Un insieme formato da un solo elemento è indicato con $A = \{a\}$, dove a è l'unico elemento dell'insieme.

Si osservi che $\{a\} \neq a$: $\{a\}$ è un insieme, a è un elemento.

I modi per assegnare un insieme sono:

1. modo estensivo, indicando uno per uno gli elementi dell'insieme (finito), con la convezione che gli elementi dell'insieme non vanno ripetuti e che non conta l'ordine.

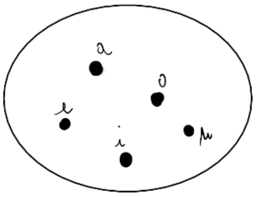
Esempio - $A = \{a, e, i, o, u\}$ (modo estensivo).

2. Modo intensivo, mediante una proprietà caratteristica dell'insieme.

Esempio - $A = \{x | x\ vocale\ dell'alfabeto\ italiano)\}$ (modo intensivo).

3. Mediante un diagramma (diagramma di Venn), che è una linea chiusa con all'interno punti che rappresentano gli elementi dell'insieme.

Esempio - Diagramma di Venn:



In quello che segue, faremo uso dei seguenti simboli:

Simbolo	Significato
$\forall$	"per ogni"
$\exists$	"esiste"
$\nexists$	"non esiste"
$\in$	"appartiene a","elemento di"
$\notin$	"non appartiene a"
$\ni'$	"tale che"
$\subseteq$	"incluso in"
:	"risulta","si ha"
$\wedge$	"et", "e"
$\vee$	"vel", "o"
$\Longrightarrow$	"implica", "se…allora…"
$\Longleftrightarrow$	"equivale a", "se e solo se"

&1.2 – Proprietà e relazione fra insiemi

Def. 1.2.1 – (Definizione di sottoinsieme)

1. Se A e B sono due insiemi, si dice che A è un sottoinsieme di B e si scrive

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B.$$

In tal caso si dice che A è incluso in B o, anche, che A è una parte di B.

2. Se A e B sono due insiemi, si dice che A è un sottoinsieme proprio di B se

$$A \subseteq B \text{ e } A \neq B.$$

Per indicare che A è un sottoinsieme proprio di B si scrive

$$A \subset B \text{ (inclusione in senso stretto)}$$

Esempio – Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, b, c\}$, A è un sottoinsieme proprio (in senso stretto) di B:

$$A \subset B.$$

Si osservi che:

- l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme:

$$\forall A\colon \emptyset \subseteq A;$$

- ogni insieme è sottoinsieme di sè stesso:

$$\forall A\colon A \subseteq A.$$

Il seguente assioma permette di definire in maniera univoca gli insiemi.

Assioma 1.2.1 – Se A e B sono due insiemi, si dice che

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

ovvero, se ogni elemento di A è un elemento di B e ogni elemento di B è un elemento di A.

Conseguenze dell'assioma A.1.2.1

1. gli elementi di un insieme non vanno ripetuti:

$$\{a,a,1,1\}=\{a,1\};$$

2. non conta l'ordine con il quale sono indicati gli elementi dell'insieme:

$$\{b, d, a, c\} = \{a, b, c, d\}.$$

Gli insiemi numerici fondamentali

Fondamentali sono i seguenti insiemi numerici:

1) L'insieme $\mathbb{N}$

È "l'insieme dei numeri interi naturali":

$$\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots , n, \dots \}.$$

Nell'insieme $\mathbb{N}$ *le operazioni possibili* $\forall m, n \in N$ *sono solo l'addizione e la moltiplicazione.*

2) L'insieme $\mathbb{Z}$

È "l'insieme dei numeri interi relativi":

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots , \pm n, \dots \}.$$

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ *le operazioni sempre possibili sono:*

l'addizione, la moltiplicazione e la sottrazione.

3) L'insieme $\mathbb{Q}$

È "l'insieme dei numeri razionali" :

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \middle| \exists m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \ \mathbb{N} \backslash \{0\} \ni' q = \frac{m}{n} \right\}.$$

I numeri razionali sono: i numeri interi e i numeri decimali finiti e i numeri decimali illimitati periodici.

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ *le operazioni possibili sono l'addizione, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione (quoziente con denominatore diverso da zero).*

Esempi di numeri razionali sono:

$$\pm 2 = \frac{\pm 2}{1} = \frac{\pm 4}{2} = \cdots; \pm 2.3 = \pm \frac{23}{10}; \ \ \pm 5.23 = \pm \frac{523}{100}; \ 2.1(3) = \frac{213-21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{96}{45} = \frac{32}{15}.$$

4) L'insieme $-\mathbb{Q}$ *o con* $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *dei numeri irrazionali*

$$-\mathbb{Q} = \left\{ q^* \middle| \nexists m \in \mathbb{Z}, \nexists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \ni' q^* = \frac{m}{n} \right\}.$$

L'esigenza di introdurre l'insieme dei numeri irrazionali nasce dal seguente problema:

Considerato un triangolo rettangolo di ipotenusa a e cateti b e c, per il teorema di Pitagora è: $a^2 = b^2 + c^2$.

Di conseguenza, se consideriamo un quadrato di lato $a = 1$, *la sua diagonale misura*

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Si dimostra che $\sqrt{2}$ *non è un numero razionale,* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dim.1 – Ragioniamo per assurdo supponendo che $\sqrt{2}$ *sia razionale, ovvero che* $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *con* m, $n \in N$ *numeri primi fra loro e* $n \neq 0 \Rightarrow m = \sqrt{2}n \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ è $pari \Rightarrow m$ è $pari \Leftrightarrow \exists k \in N \ni' m = 2k$.

Poiché $m^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ *è pari* $\Rightarrow n$ *è pari.*

Dunque, m e n risultano entrambi pari contro l'ipotesi che m e n sono numeri primi fra loro.

Dim.2 - Una dimostrazione alterativa è la seguente.

Preliminarmente, dimostriamo che $\forall n \in N$:

1. n dispari $\Rightarrow n^2$ *dispari;*
2. n^2 *pari* $\Rightarrow n$ *pari.*

Dim.1. - Se n è dispari $\Leftrightarrow \exists h \in N \ni' n = 2h + 1 \Rightarrow n^2 = (2h+1)^2 = 4h^2 + 4h + 1 = 2(2h^2 + 2h) + 1 \Leftrightarrow \exists k = (2h^2 + 2h) \in N \ni' n^2 = 2k + 1 \Leftrightarrow n^2$ *è dispari.*

Dim.2 – Sia n^2 pari: *se per assurdo fosse n dispari, per la (1), risulterebbe* n^2 *dispari, contro l'ipotesi.*

Dimostriamo, ora, che $\sqrt{2}$ *è un numero irrazionale,* $\sqrt{2} \in -Q$.

Ragioniamo per assurdo supponendo che $\sqrt{2} \in Q \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, primi fra loro $\ni'$ $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ *è un numero pari* $\Rightarrow$

$\Rightarrow m$ *è pari* $\Leftrightarrow \exists h \in N \ni' m = 2h \Rightarrow m^2 = 4h^2 \Rightarrow 2n^2 = 4h^2 \Rightarrow n^2 = 2h^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2$ *pari* $\Rightarrow n$ *è pari.*

Quindi, m e n entrambi pari, contro l'ipotesi che m e n sono primi fra loro.

Dunque, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e ciò giustifica l'introduzione di un nuovo insieme, l'insieme dei numeri irrazionali , indicato con $-\mathbb{Q}$, così definito:

$$-\mathbb{Q} = \left\{x \middle| \nexists m \in Z, \nexists n \in N\backslash\{0\} \ni' q' = \frac{m}{n}\right\}.$$

I numeri irrazionali sono numeri decimali, illimitati e non periodici.

Esempi di numeri irrazionali sono:

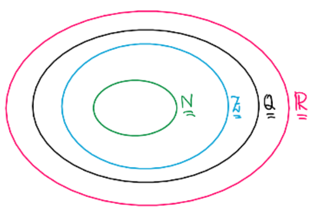
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots$;
- π;
- il numero "e" di Nepero;
- $sen(60°), \cos(30°)$;
- $log_{10}(2), \dots$

5) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali così definito:

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (-\mathbb{Q})$ = "Insieme dei numeri razionali e irrazionali".

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri interi, dei numeri decimali finiti, dei numeri decimali illimitati periodici e dei numeri decimali illimitati non periodici.

Dunque: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



6) $\mathbb{C}$ insieme dei numeri complessi.

Un problema che si presenta nel calcolo algebrico è il seguente.

Se consideriamo l'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1,$$

sappiamo che in $\mathbb{R}$ tale equazione è impossibile perchè il quadrato di un numero reale è sempre positivo.

Nasce, quindi, la necessità di dover definire un nuovo insieme, l'insieme dei numeri complessi, indicato con $\mathbb{C}$, nel quale tale equazione ha soluzioni.

A tal fine, se indichiamo con "i" il numero <u>non reale</u> tale che $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$, tale numero è detto unità immaginaria.
In tal caso è possibile considerare il nuovo insieme $\mathbb{C}$ così definito:

$$\mathbb{C} = \{z | \exists a, b \in \mathbb{R} \ni' z = a + bi\}$$

detto insieme dei numeri complessi.

$\forall z \in \mathbb{C} \ni' z = a + ib$:

- *a si dice parte reale del numero complesso z, $a = Re(z)$,*
- *b si dice parte immaginaria del numero complesso z, $b = Im(z)$.*

In particolare:

1. *se $a = 0$ e $b \neq 0$, il numero complesso $z = bi$ si dice numero immaginario puro;*
2. *se $b = 0 \Longrightarrow z = a + 0i = a$: z è un numero complesso reale $\Leftrightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.*

Operazioni con gli insiemi

&1.3 - L'insieme unione, intersezione, differenza e prodotto di due insiemi.

(I) Insieme unione

Def. 1.3.1 - (Definizione di insieme unione)

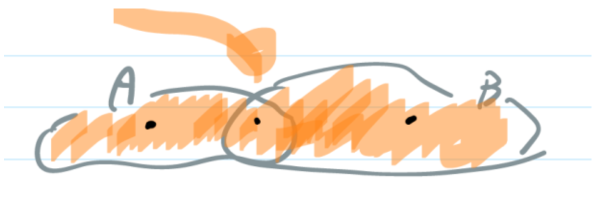
Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono de insiemi, si dice unione (o riunione) di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ il nuovo insieme, denotato con $A \cup B$, formato dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi (non escluso ad entrambi):

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Operativamente, quando gli insiemi sono assegnati esplicitamente (in modo estensivo) con gli elementi di ciascun insieme indicati uno per uno fra parentesi graffe, l'insieme unione si ottiene elencando gli elementi del primo insieme seguiti dagli elementi del secondo insieme, senza ripetere gli elementi comuni.

Esempio - Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, x, y, z\}$, allora:

$$A \cup B = \{a, b, c, x, y, z\}.$$

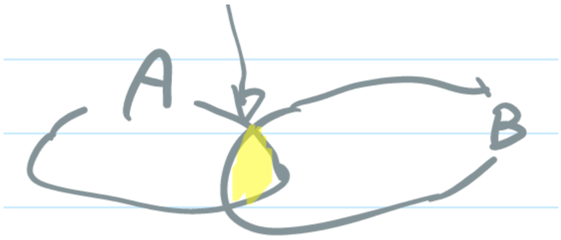


(II) Insieme intersezione

Def. 1.3.2 - (Definizione di insieme intersezione)

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono de insiemi, si dice intersezione dei due insiemi il nuovo insieme, denotato con $A \cap B$, formato dagli elementi che appartengono a entrambi gli insiemi:

$$A \cap B = \{x | x \in A \; e \; x \in B\}.$$



Operativamente, per calcolare l'intersezione di due insiemi basta prendere uno dei due insiemi ed eliminare da esso gli elementi che non appartengono all'altro insieme.

Esempio – Dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, a\}$ è facile verificare che

$$A \cap B = \{a\}.$$

Infatti, considerato ad esempio l'insieme $\mathcal{A}$, si ha che se:

1) $a \in B \Longrightarrow a \in A \cap B$;
2) eliminiamo b perché $b \notin B$;
3) eliminiamo c perché $c \notin B$;

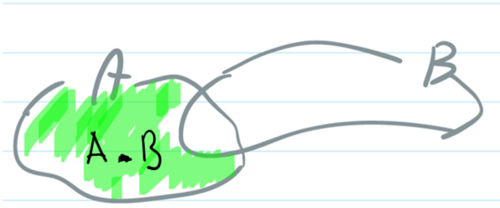
Quindi: $A \cap B = \{a\}$.

(III) Insieme differenza e insieme complementare

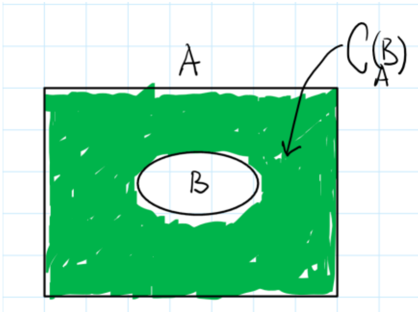
Def. 1.3.3 – (Definizione di insieme differenza)

Dati due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, si dice insieme differenza di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ il nuovo insieme, denotato con $A - B$ o $A \backslash B$, formato dagli elementi di $\mathcal{A}$ che non appartengono a $\mathcal{B}$:

$$A - B = A \backslash B = \{x | x \in A \; e \; x \notin B\}$$



In particolare, se $B \subset A$ l'insieme differenza $A \backslash B$ si dice complementare di B rispetto ad A.



Operativamente, per calcolare l'insieme differenza A\B, basta considerare l'insieme A ed eliminare da esso gli eventuali elementi che appartengono anche a B.

Esempio - Se $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, a\}$, allora:

1. $A \backslash B = A - B = \{b, c\}$;
2. $B \backslash A = B - A = \{x, y\}$.

Proprietà dell'unione e dell'intersezione

Prop.1.3.1 - Se A, B, C sono tre insiemi, si dimostra che:

1. $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A = A$;
2. $A \cup B = B \cup A$; *(prop. commutativa dell'unione)*
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; *(prop. associativa dell'unione)*
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$;
5. $A \cap B = B \cap A$; *(prop. commutativa dell'intersezione)*

6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; (prop. associativa dell'intersezione)
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (prop. distributiva di $\cup$ rispetto a $\cap$)
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (prop. distributiva di $\cap$ rispetto a $\cup$)

Proprietà dell'insieme differenza/complementare

Prop. 1.3.2 - Se A e B sono due insiemi, si dimostra che:

1. $A \backslash A = \emptyset$; $A \backslash \emptyset = A$;
2. $A \backslash (A \backslash B) = B$;
3. Se C è un ulteriore sottoinsieme di A, si ha:

   a. $A \setminus (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$ (1^a formula di De Morgan)

   b. $A \setminus (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ (2^a formula di De Morgan)

(IV) L'insieme prodotto di due (o più) insiemi

A partire da due insiemi si può costruire un nuovo insieme, detto *insieme prodotto*.

Premettiamo la seguente definizione.

Def.1.3.3 - (Definizione di coppia ordinata)

Si dice coppia ordinata (a,b) ogni insieme costituito dai due elementi in cui conta l'ordine. Per definizione di coppia ordinata è $(a, b) \neq (b, a)$.

Il primo elemento della coppia ordinata (a,b) si dice *prima coordinata*, il secondo elemento di (a,b) si dice *seconda coordinata*.

Osservazione 1.3.1 - Si noti la differenza fra la coppia ordinata (a,b) e la coppia non ordinata $\{a, b\}$:

- per l'assioma di estensione è $\{a, b\} = \{b, a\}$;

- per definizione di coppia ordinata è $(a,b) \neq (b,a)$.

Ciò premesso, possiamo dare la definizione di prodotto (cartesiano) di due insiemi.

Def.1.3.4 – (Prodotto cartesiano di due insiemi)

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi, si dice prodotto cartesiano di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ l'insieme indicato con $A \times B$ così definito

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A \; e \; b \in B, \forall a \in A \; e \; \forall b \in B\}.$$

$A \times B$ è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate che hanno la prima coordinata appartenente all'insieme $\mathcal{A}$ e la seconda coordinata appartenente all'insieme $\mathcal{B}$.

In particolare:

- Se $A = B$, si ha: $A \times B = A \times A = A^2 = \{(a,b)|a,b \in A, \forall a,b \in A\}$.

e più in generale:

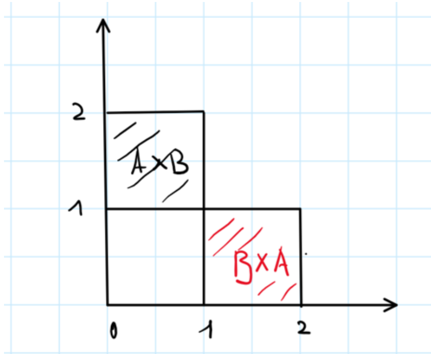
- $A^n = A \times A \times \dots \times A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)|\forall i = 1 \dots n: x_i \in A\}$.

Gli elementi di A^n sono detti vettori, si indicano con $\vec{x}$ o $\underline{x}$ e sono n-ple ordinate di numerri $x_1, x_2, \dots, x_n$ detti, rispettivamente, $1^a, 2^a, \dots, n\_ma$ componente o coordinata del vettore $\underline{x}$.

Esempio – Se $A = [0,1]$ e $B = [1,2]$, si ha:

1) $A \times B = \{(x,y)|x \in A \; e \; y \in B\} = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1 \;\; e \;\; 1 \leq \; y \leq 2\}$
2) $B \times A = \{(x,y)|x \in B \; e \; y \in A\} = \{(x,y)|1 \leq x \leq 2 \;\; e \;\; 0 \leq \; y \leq 1\}$.

La rappresentazione dei due insiemi, nel piano cartesiano, è:



Si osservi che $A \times B \neq B \times A$.

Relazione fra insiemi

&1.4 - Relazioni fra insiemi

Il prodotto cartesiano fra insiemi, consente di introdurre un nuovo concetto, il concetto di *relazione* fra insiemi.

Si pone la seguente definizione.

Def.1.4.1 - (Definizione di relazione)

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi, si dice relazione fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ogni sottoinsieme dell'insieme prodotto $A \times B$:

$$(\mathcal{R} \text{ è una relazione fra } A \text{ e } B) \Longleftrightarrow (R \subseteq A \times B)$$

Se $a \in A$ e $b \in B$ sono due elementi tali che $(a, b) \in R$, si dice che a e b sono in relazione $\mathcal{R}$ e si scrive

$$a\,\mathcal{R}\,b.$$

Dunque, una relazione fra due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è ogni insieme di coppie ordinate fra elementi di $\mathcal{A}$ e elementi di $\mathcal{B}$.

Particolari relazioni sono le relazioni fra elementi di uno stesso insieme $\mathcal{A}$, dette *relazioni su* $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R} \subset A^2 = A \times A.$$

Ogni relazione fra due insiemi può essere rappresentata:

1. con una tabella,
2. con un diagramma a frecce,
3. mediante punti di un piano cartesiano.

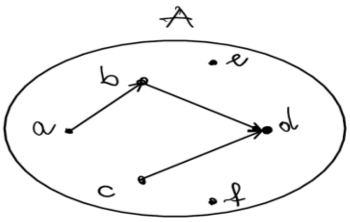
Esempio – Sia $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ e sia $\mathcal{R}$ una relazione su $\mathcal{A}$ così definita:

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (b, d), (c, d)\} \subseteq A^2.$$

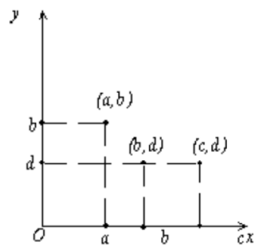
a) La rappresentazione tabellare di $\mathcal{R}$ è:

A A	a	b	c	d
a	(a,a)	(a,b)	(a,c)	(a,d)
b	(b,a)	(b,b)	(b,c)	(b,d)
c	(c,a)	(c,b)	(c,c)	(c,d)
d	(d,a)	(d,b)	(d,c)	(d,d)

b) La rappresentazione grafica di $\mathcal{R}$ mediante frecce è:



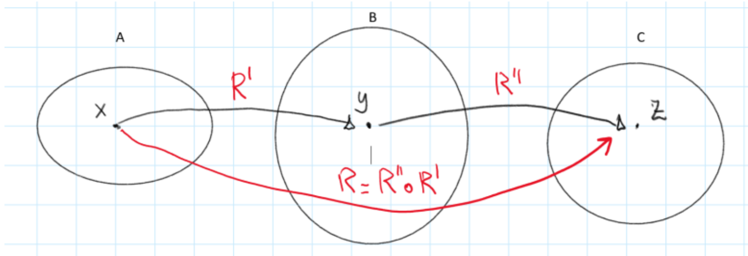
c) La rappresentazione mediante punti è:



Def. 1.4.2 - (Definizione di relazione composta fra più insiemi)

Se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, C sono tre insiemi, se $R' \subseteq A \times B$ è una relazione fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e se $R'' \subseteq B \times C$ è una relazione fra $\mathcal{B}$ e C, si dice relazione composta di $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{R}''$, la nuova relazione indicata con $\mathcal{R}'' \circ \mathcal{R}'$ fra $\mathcal{A}$ e C così definita:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}'' \circ \mathcal{R}' = \{(a,c) \in A \times C | \exists b \in B \ni' (a,b) \in \mathcal{R}' e\ (b,c) \in \mathcal{R}''\} \subseteq A \times C$$

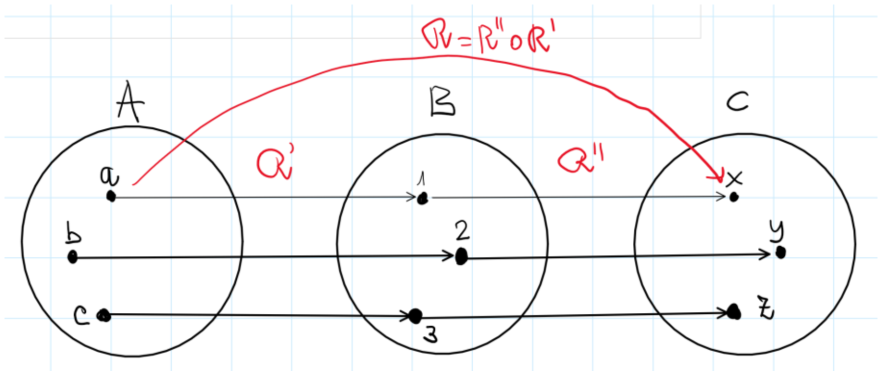


Esempio - Se $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$ e $C = \{x,y,z\}$ sono tre insiemi e se

- $\mathcal{R}' = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ *è una relazione fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$,*
- $R'' = \{(1,x),(2,y),(3,z)\}$ *è una relazione fra $\mathcal{B}$ e C,*

la relazione composta $\mathcal{R}'' \circ \mathcal{R}'$ delle due relazioni è:

$\mathcal{R}'' \circ \mathcal{R}' = \{(x,z) \in A \times C | \exists y \in B \ni' (x,y) \in \mathcal{R}' e\ (y,z) \in \mathcal{R}''\} = \{(a,x),(b,y),(c,z)\}$.



Proprietà e classificazione delle relazioni su un insieme $\mathcal{A}$

Def. 1.4.2 - Se $\mathcal{A}$ è un insieme non vuoto e se $\mathcal{R}$ è una relazione su $\mathcal{A}$, $R \subseteq A \times A$, si dice che:

1. $\mathcal{R}$ è una relazione riflessiva $\Leftrightarrow \forall x \in A{:}\, x\mathcal{R}x$;
2. $\mathcal{R}$ è una relazione transitiva $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A \ \ni' \ x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z{:}\, x\mathcal{R}z$;
3. $\mathcal{R}$ è una relazione simmetrica $\Leftrightarrow \forall x, y \in A \ni' x\mathcal{R}y{:}\, y\mathcal{R}x$;
4. $\mathcal{R}$ è una relazione antisimmetrica $\Leftrightarrow \forall x, y \in A \ni' x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x{:}\, x = y$.

Def.1.4.3.1 – (Definizione di relazione di equivalenza)

Se $\mathcal{A}$ è un insieme non vuoto e se $\mathcal{R}$ è una relazione su $\mathcal{A}$, si dice che:

$\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{R}$ è una relazione riflessiva, transitiva e simmetrica.

Esempio - La relazione di parallelismo fra rette nel piano così definita:

$$\mathcal{R} = \{(r, s) | r \cap s = \emptyset \vee r \equiv s\}$$

è una relazione di equivalenza nell'insieme delle rette di un piano.

Def.1.4.3.2 – (Definizione di relazione d'ordine)

Se $\mathcal{A}$ è un insieme non vuoto e se $\mathcal{R}$ è una relazione su $\mathcal{A}$, si dice che:

$\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine in $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{R}$ è una relazione riflessiva, transitiva e antisimmetrica.

1. $\mathcal{R}$ è una relazione riflessiva $\Leftrightarrow \forall x \in A{:}\, x\mathcal{R}x$;
2. $\mathcal{R}$ è una relazione transitiva $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A \ \ni' \ x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z{:}\, x\mathcal{R}z$;
3. $\mathcal{R}$ è una relazione antisimmetrica $\Leftrightarrow \forall x, y \in A \ni' x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x{:}\, x = y$.

Esempio - La relazione su $\mathbb{R}$ così definita

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in R^2 | x - y \in R^-\} \Leftrightarrow \{(x, y) \in R^2 | y - x \in R^+\}$$

è una relazione d'ordine sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Tale relazione si indica con $\leq$ e per indicare che (x,y) sono in relazione $\mathcal{R}$, si scrive $x \leq y$.

Relazioni funzionali fra insiemi

&1.5 - Relazioni funzionali fra insiemi

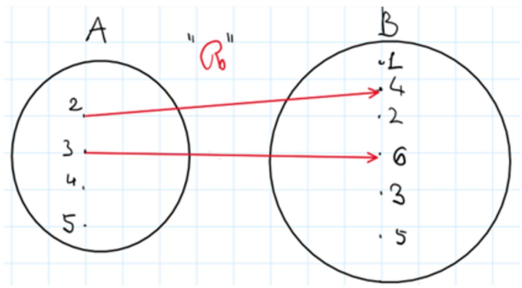
Particolari relazioni fra insiemi sono le *relazioni funzionali*.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi non vuoti e se $\mathcal{R}$ è una relazione fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, può capitare che:

1. esistano elementi in $\mathcal{A}$ che non sono in relazione con nessun elemento di $\mathcal{B}$;
2. esistano elementi in $\mathcal{A}$ che sono in relazione con più elementi di $\mathcal{B}$;
3. ogni elemento di $\mathcal{A}$, senza alcuna eccezione, sia in relazione con un solo elemento di $\mathcal{B}$.

Esempio 1 - Sia $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ e sia

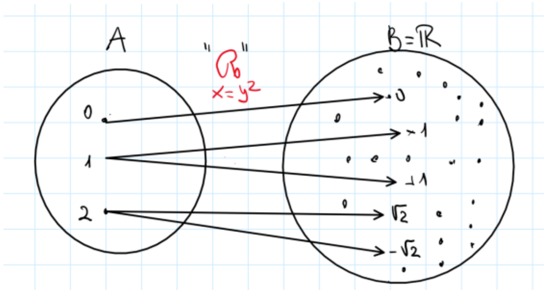
$$R = \{(a,b) \in A \times B | b = 2a\} = \{(2,4),(3,6)\} \subset A \times B$$



Questa relazione fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, <u>non</u> è funzionale perché esistono 4 e $5 \in A$ che non sono in relazione con nessun elemento di $\mathcal{B}$.

Esempio 2 - Sia $A = \{0,1,2\}$, $B = \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{R}$ la relazione così definita:

$$R = \{(a,b) \in A \times B | b^2 = a\} = \{(0,0),(1,-1),(1,1),(2,-\sqrt{2}),(2,\sqrt{2})\} \subset A \times B.$$



Anche in questo caso $\mathcal{R}$ "non è una relazione funzionale" fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ perché esistono elementi di $\mathcal{A}$, (1 e 2), *che sono in relazione con 2 elementi di $\mathcal{B}$.*

Si pone, quindi, la seguente definizione.

Def. 1.5.1 – (Definizione di relazione funzionale)

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi non vuoti e se $\mathcal{R}$ è una relazione fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, si dice che $\mathcal{R}$ è una relazione funzionale fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ se ogni elemento di $\mathcal{A}$, senza alcuna eccezione, è in relazione con un solo elemento di $\mathcal{B}$:

$$(\mathcal{R} \text{ è relazione funzionale fra } \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\forall a \in A, \exists|\ b \in B\ \ni'\ a\,\mathcal{R}\,b).$$

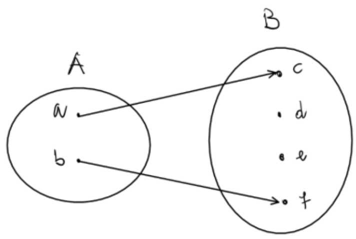
Se $\mathcal{R}$ è una relazione funzionale fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$:

- *l'insieme $\mathcal{A}$ si dice dominio della relazione $\mathcal{R}$,*
- *l'insieme $\mathcal{B}$ si dice codominio della relazione $\mathcal{R}$.*

Da un punto di vista grafico, se $\mathcal{R}$ è una relazione funzionale fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, si ha che:

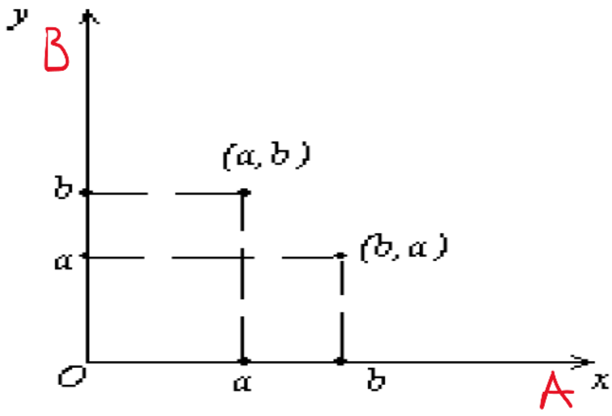
- *nella rappresentazione a frecce, da <u>ogni punto</u> di $\mathcal{A}$ esce <u>una sola</u> freccia che punta a un solo elemento di $\mathcal{B}$.*

Esempio - La relazione $\mathcal{R} = \{(a,c),(b,f)\} \subset A \times B$, *dove* $A = \{a,b\}$ *e* $B = \{c,d,e,f\}$,



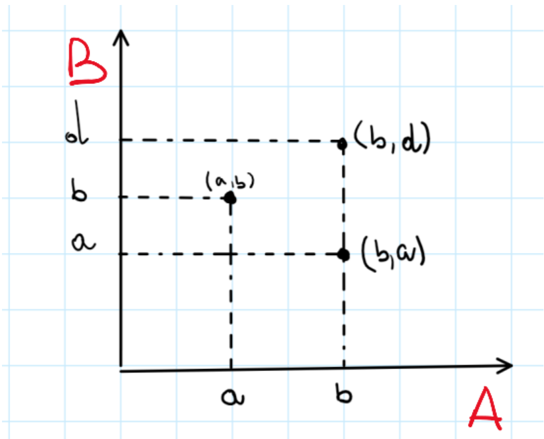
è una relazione funzionale;

- *nella rappresentazione cartesiana, $\mathcal{R}$ è funzionale se su ogni verticale esiste <u>un solo punto</u> che rappresenta la relazione funzionale:*



Esempio – (Controesempio di relazione funzionale)

La relazione $\mathcal{R} = \{(a,b),(b,a),(b,d)\} \subset A \times B$, *dove* $A = \{a,b\}$ *e* $B = \{a,b,d\}$, *non è una relazione funzionale:*



perché ci sono due punti sulla stessa verticale condotta nel punto b.

Definizione di funzione fra insiemi

Possiamo ora dare la definizione di funzione.

Def.1.5.2 – (Definizione di funzione)

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi non vuoti, si dice funzione fra gli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ogni terna ordinata

$$f = (A, B, \mathcal{R})$$

*dove $\mathcal{R}$ è una relazione **funzionale** fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.*

<u>*Terminologia delle funzioni*</u>

Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ è una funzione fra gli insiemi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, allora:

- *$\mathcal{A}$ si dice insieme di definizione (I.D.), o dominio o insieme di partenza di f;*
- *$\mathcal{B}$ si dice codominio o insieme di variabilità o insieme di arrivo di f;*
- *la relazione $\mathcal{R}$ si dice **grafico** della funzione f:*
  $\mathcal{R}$ è la legge di corrispondenza fra gli elementi di $\mathcal{A}$ e gli elementi di $\mathcal{B}$).

Def.1.5.3 – (Definizione di funzioni uguali)

Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ e $g = (A', B', \mathcal{R}')$ sono due funzioni, si dice che:

$$(f = g) \Leftrightarrow (A = A', B = B', R = R').$$

- *Funzioni uguali hanno uguali l'insieme di partenza, l'insieme di arrivo e la legge di corrispondenza fra gli insiemi.*

Una notazione alternativa di funzione è la seguente.

Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ è una funzione avente per dominio $\mathcal{A}$, per codominio $\mathcal{B}$ e per relazione funzionale $\mathcal{R}$, la funzione f è indicata anche con la notazione seguente:

$$f: A \longrightarrow B \ni' \ \forall x \in A, \exists | y \in B \ni' \ y = f(x)$$

dove $y = f(x)$ è la legge della relazione $\mathcal{R}$ che lega gli elementi di $\mathcal{A}$ agli elementi di $\mathcal{B}$.

La legge $y = f(x)$ della relazione può essere:

- *una proposizione,*
- *una tabella,*
- *un'equazione,*
- *un grafico cartesiano.*

Inoltre, se $f: A \longrightarrow B$ è una funzione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, per indicare che $y \in B$ è l'unico elemento di $\mathcal{B}$ corrispondente a $x \in A$ si scrive:

$$y = f(x).$$

In tal caso, se $y = f(x)$:

- *y si dice immagine di x mediante f o, anche, valore di f in x;*
- *l'insieme di tutte le immagini degli elementi di $\mathcal{A}$ si dice immagine di f e si indica con Im(f) o con f($\mathcal{A}$):*

  $$Im(f) = f(\mathcal{A}) = \{y \in B | \exists x \in A \ni' y = f(x)\};$$
- *x si dice controimmagine di y e si indica con $x = f^{-1}(y)$.*

Indicheremo con:

- *$f^{-1}(y)$ l'insieme delle controimmagini dell'elemento $y \in B$;*
- *$f^{-1}(B)$ l'insieme delle controimmagini degli elementi di $\mathcal{B}$: tale insieme è detto insieme controimmagine di f .*

Esempio – Siano $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ ed $\mathcal{R}$ la relazione funzionale fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ così definita:

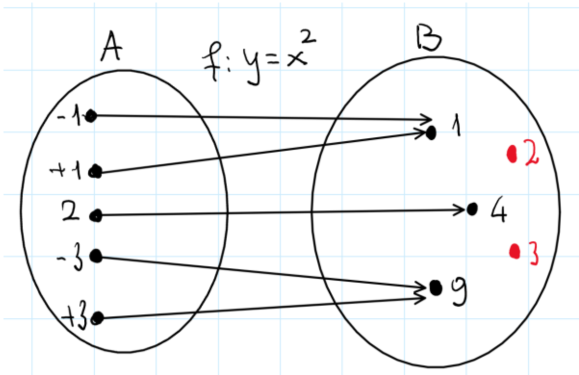
$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}.$$

In tal caso, $f = (A, B, \mathcal{R})$ è la funzione $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ni' \ \forall x \in \mathbb{R}: y = f(x) = 2x$.

Poichè $f(1) = 2 \Longrightarrow \begin{cases} 2 \text{ è } l'immagine\ o\ il\ valore\ di\ f\ in\ x = 1, f(1) = 2 \\ 1 \text{ è } la\ controimmagine\ di\ 2\ in\ f, f^{-1}(2) = 1 \end{cases}$

Osservazione fondamentale - E' bene osservare che mentre esiste sempre ed è unica l'immagine di un $x \in A$, al contrario un $y \in B$ può non avere o avere più di una controimmagine come mostrato dal seguente esempio: se consideriamo la funzione

$$f: A = \{-1,1,2,-3,3\} \longrightarrow B = \{1,2,3,4,9\} \ni' \forall x \in A: y = x^2,$$



si ha che:

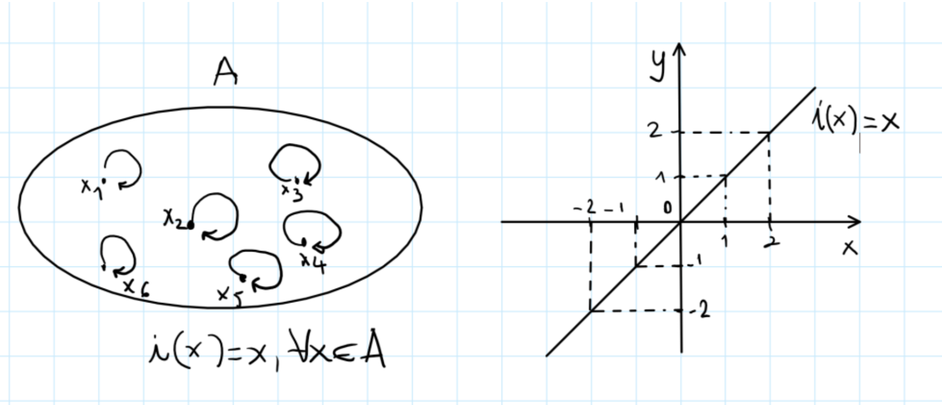
- 2 e 3 non hanno controimmagini: $f^{-1}(2) = \emptyset, f^{-1}(3) = \emptyset$;
- 1 e 9 hanno due controimmagini: $f^{-1}(1) = \{-1,+1\}, f^{-1}(9) = \{-3,+3\}$.
- L'immagine di f è: $f(A) = Im(f) = \{1,9\} \subset B$ (in questo caso $Im(f)$ è un sottoinsieme proprio di B, $f(A) \neq B$).

Una funzione particolare: la funzione *identica* su un insieme

Una particolare funzione è la funzione

$$i_A: A \longrightarrow A \text{ così definita: } \forall x \in A: i_A(x) = x$$

detta *funzione identica* su A.



Nel piano cartesiano, la funzione identica su insieme A è rappresentata da punti che appartengono alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

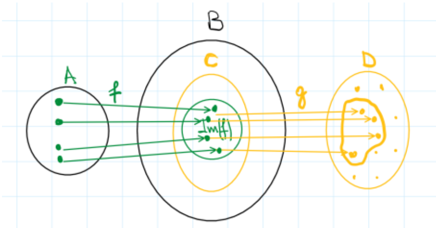
Funzione composta di due funzioni

Def.1.5.4 - (Definizione di funzione composta)

Se $f = (A, B, \mathcal{R}')$ *è la funzione* $A \longrightarrow B\ \ni'\ \forall x \in A\!: f(x) = y \in B$,

se $g = (C, D, \mathcal{R}'')$ *è la funzione* $C \longrightarrow D\ \ni'\ \forall x \in C\!: g(x) = y \in D$,

e se f e g sono tali che $Im(f) \subseteq C$,



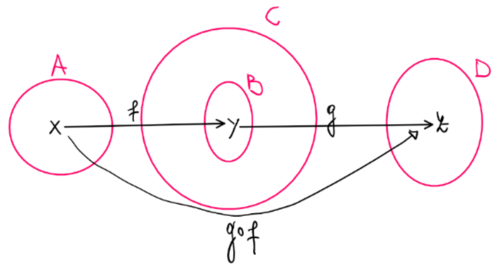
si dice funzione composta di f e g la nuova funzione h indicata con

$$g \circ f = (\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{R})$$

che ha:

- *A come insieme di partenza,*
- *D come insieme di arrivo,*

- *per relazione funzionale, la relazione $\mathcal{R}$ composta delle relazioni funzionali $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{R}''$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}'' \circ \mathcal{R}'$.*



La composta delle funzioni f e g è una funzione che ad ogni $x \in A$ associa l'unico elemento di D che è il corrispondente mediante g del corrispondente mediante f di x:

$$z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

Dunque, se $f: A \longrightarrow B$ e se $g: C \longrightarrow D$ sono due funzioni tali che

$$\forall x \in A: y = f(x) \in B \subseteq C \text{ e } \forall y \in C: z = g(y) \in D,$$

allora:

$$h = g \circ f: A \longrightarrow D \ni' \ \forall x \in A: h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \in D.$$

- *f si dice 1ª componente e g si dice 2ª componente della funzione composta h.*

Esempio 1 - Se $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$, la funzione composta $g \circ f$ è:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Esempio 2 - Se $f(x) = \log(x)\,, g(x) = arcsen(x), h(x) = |x|$, la funzione composta $h \circ g \circ f$ è:

$$h \circ g \circ f(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\big(g(\log(x))\big) = h\big(arcsen(\log(x))\big) = |arcsen(\log(x))|.$$

Esempio 3 - Le componenti della funzione composta

$$y = sen\left(\log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)\right).$$

sono:

- $f(x) = \frac{x+1}{x}$; *(1ª componente)*
- $g(x) = \sqrt{x}$; *(2ª componente)*
- $h(x) = \log(x)$; *(3ª componente)*
- $l(x) = sen(x)$. *(4ª componente)*

Funzioni surgettive, ingettive, bigettive

Def. 1.5.5 - (Definizione di funzione surgettiva)

Se $f: A \longrightarrow B$ *è una funzione di* $\mathcal{A}$ *in* $\mathcal{B}$, $f = (A, B, \mathcal{R})$, *si dice che*

$$(f \text{ è una funzione surgettiva} \Leftrightarrow (\forall y \in B, \exists f^{-1}(y) \in A \Leftrightarrow Im(f) = \mathcal{B}).$$

Una funzione è surgettiva se <u>ogni y di B ha almeno una controimmagine in A.</u>

Def. 1.5.6 - (Definizione di funzione ingettiva)

Se $f: A \longrightarrow B$ è una funzione di A in B, $f = (A, B, \mathcal{R})$, *si dice che*

$$(f \text{ è una funzione ingettiva}) \Leftrightarrow (\forall y \in Im(f)\ \exists| f^{-1}(y) = x \in A),$$

ovvero se è <u>unica la controimmagine di ogni</u> <u>$y \in Im(f)$.</u>

Equivalentemente

$$(f: A \longrightarrow B \text{ è ingettiva}) \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

cioè se elementi distinti di $\mathcal{A}$ *hanno immagini distinte in* $\mathcal{B}$,

oppure

$$(f: A \longrightarrow B \text{ è ingettiva}) \Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2).$$

Def. 1.5.7 - (Definizione di funzione bigettiva)

Se $f: A \longrightarrow B$ *è una funzione di* $\mathcal{A}$ *in* $\mathcal{B}$, *si dice che*

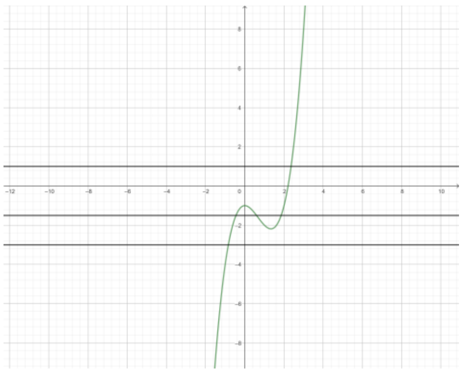
(f è bigettiva) $\Leftrightarrow$ *(f è surgettiva e ingettiva)* $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists! x \in A \ \ni' \ y = f(x)$.

Se f è una funzione bigettiva, $\forall y \in B$:

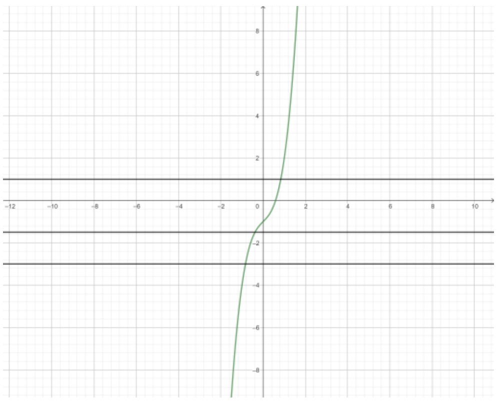
- *l'esistenza di x è garantita dalla surgettività di f,*
- *l'unicità di x dalla ingettività di f.*

Se rappresentiamo graficamente la funzione f in un piano cartesiano, allora:

- *f è surgettiva se ogni retta parallela all'asse x interseca il grafico in almeno un punto:*



- *f è ingettiva se ogni retta parallela all'asse x interseca il grafico in al più un punto:*

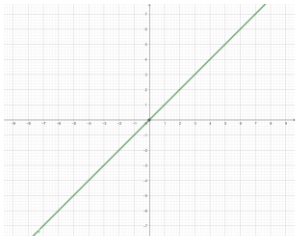


- *f è bigettiva se ogni retta parallela all'asse x interseca il grafico in un solo punto.*

Un esempio di funzione bigettiva è l'applicazione identica su R

$$i_R: R \longrightarrow R \ \ni' \forall x \in R: y = i_R(x) = x$$

il cui grafico è:



Proprietà delle funzioni composte

Prop.1.5.1 - Se $f: A \longrightarrow B$ e se $g: B \longrightarrow C$, si dimostra che:

1. $(f, g\ surgettive) \Longrightarrow (g \circ f$ è $surgettiva)$;
2. $(f, g\ ingettive) \Longrightarrow (g \circ f$ è $ingettiva)$;
3. $(f, g\ bigettive) \Longrightarrow (g \circ f$ è $bigettiva)$.

Dim.1 – Th. $g \circ f$ *è surgettiva* $\Leftrightarrow$ *Im* $g \circ f = g(f(A)) = C$.

Infatti: $\mathrm{Im}\ g \circ f = \mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{A}))$ = *(poiché f è surgettiva)* = $g(B)$ = *(poiché g è surgettiva)* = C.

Dim.2 – Th. $g \circ f$ *è ingettiva* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \ni' x_1 \neq x_2: (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.

Infatti: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$*(poiché f è ingettiva)* $f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow$ *(poiché g è ingettiva)* $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$.

Dim.3 – E' conseguenza di (1) e (2).

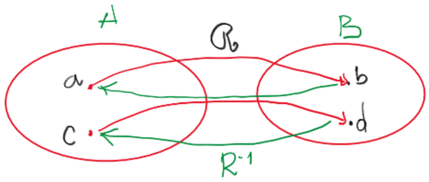
Relazioni/funzioni invertibili - Relazione/funzione inversa

Def. 1.5.8 – Se $R \subseteq A \times B$ *è una relazione fra gli insiemi A e B e se* $R' \subseteq B \times A$ *è una relazione fra B e A, si dice che R' è la relazione inversa di R se*

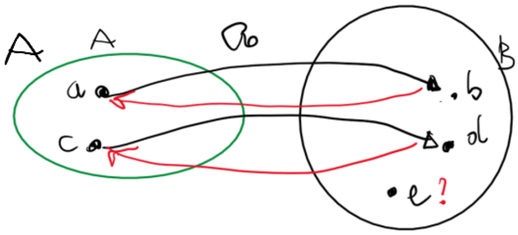
$$\mathcal{R}' = \{(y, x) \in B \times A | (x, y) \in \mathcal{R}\} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in R': (y, x) \in R.$$

La relazione inversa di $\mathcal{R}$ si indica con R^{-1}.

Ad esempio, se $\mathcal{R} = \{(a,b),(c,d)\}$ *la sua relazione inversa è* $\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a),(d,c)\}$:



Si osservi che non tutte le relazioni sono dotate di inversa:



La relazione $\mathcal{R}$ non ha inversa perché non esiste la controimmagine di e.

Def.1.5.9 – (Definizione di relazione invertibile)

Una relazione $\mathcal{R}$ si dice invertibile se esiste la relazione inversa $\mathcal{R}^{-1}$.

Def. 1.5.10 – (Definizione di funzione invertibile)

Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ *è una funzione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ si dice che f invertibile se la relazione $\mathcal{R}$ è invertibile.*

In tal caso, la funzione

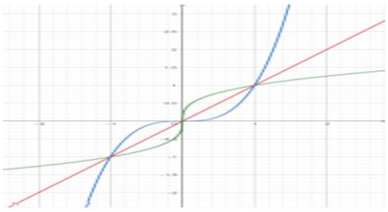
$$f^{-1} = (B, A, \mathcal{R}^{-1})$$

si dice funzione inversa di f.

Se $f: A \longrightarrow B \ni' \forall x \in A: f(x) = y$ *è una funzione ivertibile, la sua inversa è*

$f^{-1}: B \longrightarrow A \ni' \forall y \in B: f^{-1}(y) = x$ *unico elemento di $\mathcal{A}$ tale che f(x) = y.*

Nel piano cartesiano, il diagramma della funzione inversa f^{-1} *è il simmetrico del diagramma di f rispetto alla bisettrice del 1° e del 3° quadrante:*



Nota Bene: Poiché non tutte le relazioni sono invertibili, non tutte le funzioni sono dotate di inversa. Sussiste la seguente fondamentale proprietà.

Caratterizzazione delle funzioni invertibili

Prop.1.5.2 - Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ è una funzione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, si dimostra che:

$$(f \text{ è invertibile}) \Leftrightarrow (f \text{ è bigettiva})$$

Dim. (C.N.) f è invertibile $\Rightarrow f$ è bigettiva.

Poichè $f: A \longrightarrow B$ una funzione invertibile $\Leftrightarrow \exists f^{-1}: B \longrightarrow A$ inversa della funzione $f \Leftrightarrow$ (per definizione di funzione) $\exists f^{-1}: B \longrightarrow A \ni' \forall y \in B, \exists |\, x \in A: f^{-1}(y) = x \in A \Leftrightarrow$ (per definizione di inversa) $f(x) = y$.

Dunque, poiché $\forall y \in B, \exists | x \in A \ni' \; f(x) = y \Rightarrow f$ è bigettiva.

Dim. (C.S.) - $(f: A \longrightarrow B \text{ bigettiva}) \Rightarrow (f \text{ è invertibibile})$

Poichè $f: A \longrightarrow B$ bigettiva $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists | x \in A \ni' y = f(x)$.

Se diciamo $g: B \longrightarrow A$ la funzione tale che $\forall y \in B: g(y) = x \in A$, per definizione di inversa, è g l'inversa di $f \Leftrightarrow f$ è invertibile.

Prop.1.5.3 - (Unicità della funzione inversa)

Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ è una funzione invertibile, la sua funzione inversa è unica.

Dim. Sia f una funzione invertibile e siano g e h due funzioni inverse di f. Si ha:

- *poiché g è un'inversa di f* $\Leftrightarrow \forall y \in B: g(y) = x \in A \ni' \ f(x) = y$;
- *poiché h è un'inversa di f* $\Leftrightarrow \forall y \in B: h(y) = x \in A \ni' \ f(x) = y$.

Quindi: $\forall y \in B: g(y) =^{(1)} x =^{(2)} h(y) \Leftrightarrow g, h: B \longrightarrow A \ \ni' \forall y \in B: h(y) = g(y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = g$.

Prop. 1.5.4 – (Proprietà caratteristiche della funzione inversa)

Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ *è una funzione invertibile e se* $f^{-1} = (B, A, \mathcal{R}^{-1})$ *è la sua inversa, si dimostra che:*

1. $\forall x \in A: f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f^{-1} \circ f = i_A$;
2. $\forall y \in B: f(f^{-1}(y)) = y \Leftrightarrow f \circ f^{-1} = i_B$.

Dim. Se f *è una funzione invertibile e* f^{-1} *è la sua inversa, per definizione di inversa si ha:*

$$\forall y \in B: f^{-1}(y) = x \ \in A \ni' f(x) = y.$$

Di conseguenza:

1. $\forall x \in A: f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1} \circ f = i_A$;
2. $\forall y \in b: f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \Leftrightarrow f \circ f^{-1} = i_B$.

Ridotta, restrizione e prolungamento di una funzione

Abbiamo detto che le funzioni invertibili sono solo le funzioni bigettive e poiché, in generale, le funzioni non sono surgettive o ingettive, in generale una funzione non è invertibile.

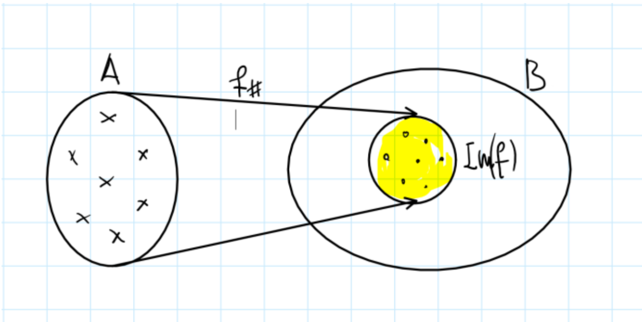
In tali casi, però, è sempre possibile rendere la funzione invertibile e poter così considerare una funzione inversa effettuando su di essa due operazioni che la rendono bigettiva e invertibile.

Def. 1.5.11 – (Definizione di funzione ridotta)

Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ *è una funzione di* $\mathcal{A}$ *in* $\mathcal{B}$ *e se* $Im(f) = f(A)$ *è la sua immagine, si dice funzione ridotta di* f *la nuova funzione* $f_{\#}$ *così definita:*

$$f_{\#}: A \longrightarrow f(A) = Im(f) \ni' \forall x \in A: f_{\#}(x) = f(x).$$

Quindi, la ridotta di una funzione f *è la funzione che ha lo stesso dominio e la stessa relazione di* f *e che ha per insieme di arrivo l'immagine di f, Im(f):*



Sussiste la seguente fondamentale proprietà.

Prop.1.5.5 – (Surgettività della funzione ridotta)

Se $f: A \longrightarrow B$ *di* $\mathcal{A}$ *in* $\mathcal{B}$, *la sua ridotta*

$$f_{\#}: A \longrightarrow f(A) = Im(f),$$

è una funzione surgettiva.

Dim. Dobbiamo dimostrare che:

$$Im(f_{\#}) = f_{\#}(A) = f(A) \iff \begin{cases} Im(f_{\#}) = f_{\#}(A) \subset f(A) \\ f(A) \subset Im(f_{\#}) = f_{\#}(A) \end{cases}.$$

1) $y \in Im(f_{\#}) = f_{\#}(A) \Leftrightarrow$*(per definizione di* $Im(f_{\#}) = f_{\#}(A)$) $\exists x \in A \ni'\ y = f_{\#}(x) = (per\ definizione\ di\ f_{\#}\ ) = f(x) \Leftrightarrow \exists x \in A \ni'\ \mathrm{y = f(x)} \Leftrightarrow \big(per\ definizione\ di\ Im(f) = f(A)\big) \Leftrightarrow y \in f(A) \Longrightarrow\ Im(f_{\#}) = f_{\#}(A) \subset f(A);$
2) *Viceversa, se* $y \in Im(f) = f(A) \Leftrightarrow$*(per definizione di Im(f)=f(*A*))* $\exists x \in A \ni'\ \mathrm{y} = \mathrm{f}(x) = (per\ definizione\ di\ f_{\#}) = f_{\#}(x) \Leftrightarrow \exists x \in A \ni'\ \mathrm{y} = f_{\#}(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ f(A) \subset\ Im(f_{\#}) = f_{\#}(A).$

Quindi: $Im(f_{\#}) = f_{\#}(A) = f(A) \Leftrightarrow f_{\#}$ è surgettiva.

Quindi, *la ridotta di una qualsiasi funzione è una funzione surgettiva.*

Osservazione fondamentale - Poiché f e $f_{\#}$ hanno lo stesso dominio, le stesse immagini (o valori) e, nel piano cartesiano, lo stesso grafico rappresentativo, è possibile identificare f con $f_{\#}$ $(f = f_{\#})$ ottenendo così una funzione surgettiva (f modificata).

Esempio – Considerata la funzione $sen: R \longrightarrow R$, la sua ridotta

$$sen_{\#}: R \longrightarrow [-1,1] \ni' \forall x \in R: sen_{\#}(x) = sen(x),$$

è una funzione surgettiva.

Una seconda operazione sulle funzioni è fornita dall'operazione di *restrizione*. Si pone la seguente definizione:

Def. 1.5.12 – (Definizione di funzione restrizione)
Sia $f = (A, B, \mathcal{R})$ è una funzione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, sia $X \subset A$ e sia $\mathcal{R}' = X \times B \subset \mathcal{R}$ la relazione fra X e $\mathcal{B}$ così definita

$$R' = \{(x, y) \in X \times B | (x, y) \in R\} \subset R.$$

In tal caso, si può considerare la nuova funzione

$$f|_X = (X, B, R')$$

così definita:

$$f|_X: X \longrightarrow B \ \ni' \forall x \in X: f|_X(x) = f(x)$$

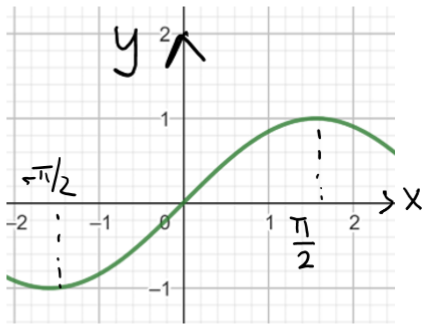
detta funzione *restrizione* di f all'insieme X.

- La restrizione è una funzione che per alcuni elementi di $\mathcal{A}$, gli elementi di $X \subset A$, ha le stesse immagini in f;
- nel piano cartesiano, la funzione restrizione è rappresentata da un sottoinsieme dei punti che rappresentano la funzione f.

- *Se si sceglie opportunamente il sottoinsieme X di A, è possibile ottenere, a partire da f, una funzione restrizione che è ingettiva in X e che in X assume gli stessi valori di f.*

Esempio - Considerata la funzione $sen: R \longrightarrow R$, *una sua restrizione all'intervallo* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *è:*

$$sen|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow R \ni' \forall x \in R: sen|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x) = sen(x).$$



Poiché le operazioni di di ridotta e di restrizione sono sempre possibili, se ne conclude che è sempre possibile ottenere, a partire da una funzione qualsiasi, una funzione che è bigettiva e, quindi, invertibile nel suo dominio: tale nuova funzione è la ridotta della restrizione.

Se $f: A \longrightarrow B$, *la restrizione della ridotta di f sarà indicata con*

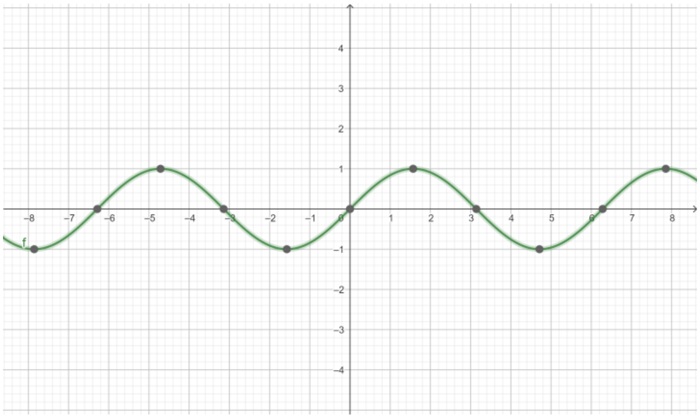
$$\tilde{f}: X \subseteq A \longrightarrow f(X) \ni' \forall x \in X: \tilde{f}(x) = (f\rfloor)_{\#}(x) = f(x).$$

Esempio 1 – (La funzione arcoseno, inversa della funzione seno)

La funzione $y = sen(x)$ *così definita:*

$$sen: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}: y = sen(x)$$

ha, nel piano cartesiano, la seguente rappresentazione:



Poiché esistono rette parallele all'asse x che incontrano la curva in più punti, essa non è ingettiva e poiché la sua immagine Im(f) = $[-1,1] \neq \mathbb{R}$ (insieme di arrivo) essa non è surgettiva.

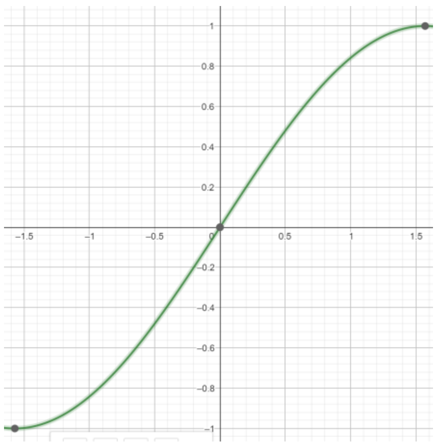
Se però consideriamo la restrizione di y = sen(x) all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$sen_{\#}\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R},$$

che ha per immagine l'intervallo $[-1,1]$, e di questa consideriamo la ridotta

$$sen_{\#}\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow Im(sen_{\#}) = [-1,1]$$

il cui grafico è

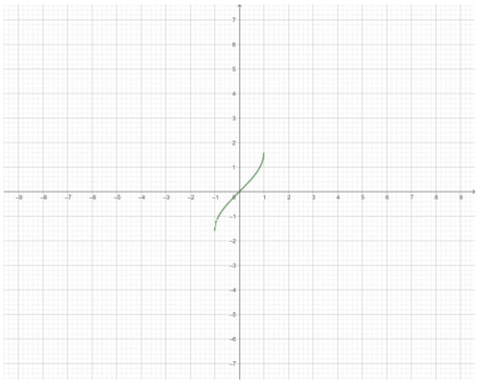


tale nuova funzione è bigettiva e invertibile.

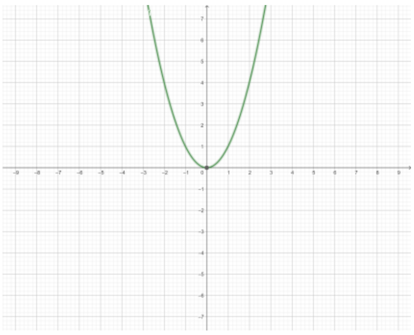
La sua funzione inversa è la funzione arcoseno così definita:

$$arcsen\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1] \text{ tale che } \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]: arcsen(y) = x \ni' sen(x) = y.$$

Nota - Il grafico di $y = arcsen(x)$ *è il simmetrico del grafico di* $y = sen(x)$ *rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante degli assi cartesiani:*



Esempio 2 – La funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \ni' \forall x \in \mathbb{R}: y = x^2$ *che, nel piano cartesiano, è rappresentata da una parabola*



non è né ingettiva né surgettiva: se, però, consideriamo la ridotta della restrizione all'intervallo $[0,+\infty[$

$$\tilde{f}\colon [0,+\infty[\ \longrightarrow Im(f) = [0,+\infty[$$

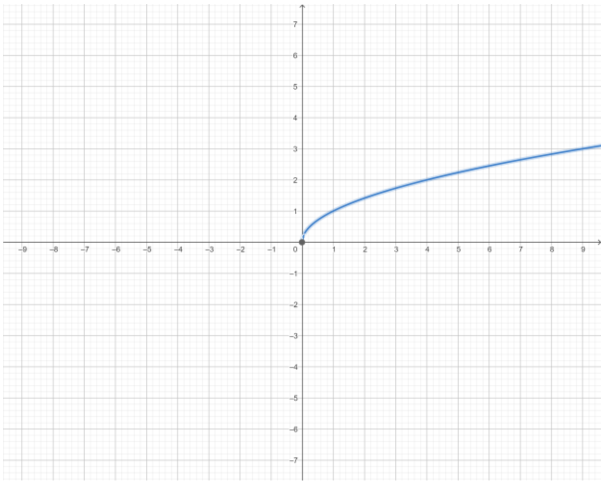
tale funzione è bigettiva e, quindi, invertibile.

La sua inversa è la funzione radice quadrata indicata con $x = \sqrt{y}$:

$$\sqrt{\square} = (\tilde{f})^{-1}\colon [0,+\infty[\ \longrightarrow [0,+\infty[$$

tale che $\forall y \in [0,+\infty[: \sqrt{y} = x \ni' y = x^2$.

Nel piano cartesiano, la rappresentazione di $y = \sqrt{x}$ *è:*



Osservazione – La funzione $y = \sqrt{x}$ *è l'inversa di* $y = x^2$, $\forall x \in [0, +\infty[= R^+$.

Prolungamento di una funzione

Il prolungamento di una funzione è l'operazione opposta a quella di restrizione.

Poniamo la seguente definizione.

Def. 1.5.13 – (Definizione di funzione prolungamento)

Se $f = (A, B, \mathcal{R})$ *è una funzione e se* A' *è un insieme contenente* $\mathcal{A}$, $A' \supset A$, *si dice funzione* ***prolungamento*** *di f ad* $\mathcal{A}$' *la nuova funzione*

$$\tilde{f}: A' \longrightarrow B \ni' \forall x \in A: \tilde{f}(x) = f(x)$$

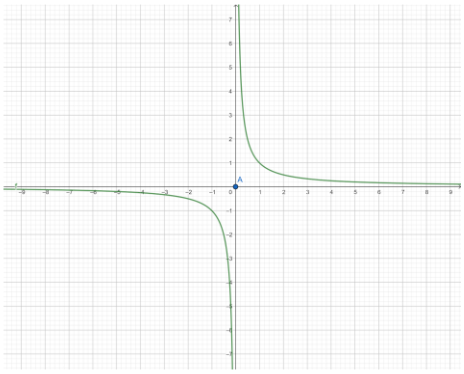
Il grafico di $\tilde{f}$ *è un ampliamento del grafico di f: è il grafico che si ottiene aggiungendo al grafico di f i valori che sono in* $\mathcal{A}$' *e non in* $\mathcal{A}$.

Esempio 1 – Se $f: A = R\backslash\{0\} \longrightarrow R \ni' \forall x \in A = R\backslash\{0\}: f(x) = \frac{1}{x}$, *la funzione*

$$\tilde{f}: A' = R \longrightarrow R \ni' \forall x \in A': \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \forall x \in A \ (x \neq 0) \\ 0 \qquad\qquad\qquad per\ x = 0 \end{cases}$$

è un prolungamento di f all'insieme $A' = A \cup \{0\} = R$.

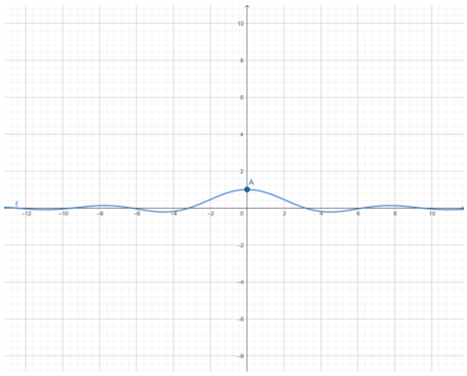
Il grafico di $\tilde{f}$ è:



Esempio 2 - Se $f: A = R\backslash\{0\} \longrightarrow R \ \ni' \ \forall x \in R\backslash\{0\}: f(x) = \frac{sen(x)}{x}$, *un prolungamento di f è:*

$$\tilde{f}: A' = A \cup \{0\} = R \longrightarrow R \ \ni' \ \forall x \in A': \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x}, \forall x \in A \ (x \neq 0) \\ 1 \qquad\qquad per \ x = 0 \end{cases}$$

Il grafico è:



&1.6 - Le funzioni reali di variabile reale

Nella definizione generale di funzione, data nel paragrafo precedente, gli insiemi di partenza A e di arrivo B sono insiemi di natura qualsiasi e, in particolare, possono essere sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Si pongono, quindi, le seguenti definizioni.

Def.1.6.1 - (Definizione di funzione reale, di variabile reale)

Se $f: A \rightarrow B$ è una funzione di A in B, si dice che f è:

1. *una funzione reale se $B \subset \mathbb{R}$;*
2. *una funzione di variabile reale se $A \subset \mathbb{R}$;*
3. *una funzione reale di variabile reale se entrambi gli insiemi A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.*

In tutto quello che segue, le funzioni saranno sempre funzioni reali di variabile reale, con la convenzione che:

1. *quando l'insieme di arrivo B è sottinteso è $B = \mathbb{R}$;*
2. *quando il dominio A è sottinteso, si sottintende che A coincida con il più grande insieme per il quale la relazione assegnata è funzionale: tale più grande dominio si dice dominio naturale della funzione.*

Il 1° problema da affrontare, nello studio delle funzioni, è il calcolo del suo dominio naturale, supponendo che sia assegnata la relazione funzionale.
Tale problema sarà affrontato nrel capitolo seguente.

Appendice – Cenni di Logica

La logica è una teoria matematica che studia il valore di verità (Vero/falso) delle proposizioni e delle loro connessioni.

In tale teoria, se $\mathcal{A}$ è un insieme e se $\mathcal{P}$ è una proprietà definita per gli elementi di $\mathcal{A}$, per indicare che un x di $\mathcal{A}$ verifica la proprietà $\mathcal{P}$ si scrive $\mathcal{P}(x)$ e la sua negazione si indica con $\overline{\mathcal{P}}(x)$ o con "non P(x)".

Inoltre, se P e Q sono due proprietà di $\mathcal{A}$, per indicare che se P(x) è vera anche Q(x) è vera, si scrive:

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

e si legge "P(x) implica Q(x)".

In generale, se $P(x) \Rightarrow Q(x)$ non è detto che $Q(x) \Rightarrow P(x)$.

Si dice che P(x) e Q(x) sono equivalenti e si scrive $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ se:

$$P(x) \Rightarrow Q(x) \text{ e } Q(x) \Rightarrow P(x).$$

Se P(x) e Q(x) sono equivalenti:

- *l'implicazione $P(x) \Rightarrow Q(x)$ si dice C.N. per P(x);*
- *l'implicazione (inversa) $Q(x) \Rightarrow P(x)$ si dice C.S. per P(x).*

Di conseguenza, se P(x) è equivalente a $Q(x)$, si dice che Q(x) è C.N.S. per P(x).

Inoltre, se P e Q sono due proprietà su $\mathcal{A}$, l'implicazione

$[P(x) \Rightarrow Q(x)]$ *è equivalente* $[\bar{Q}(x) \Rightarrow \bar{P}(x)]$ *(detta "controinversa"),*

così che dimostrare che

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

è equivalente a dimostrare che $\bar{Q}(x) \Rightarrow \bar{P}(x)$.

Ad esempio, per dimostrare che (n dispari ⟹ n^2 dispari) è equivalente a dimostrare che

$$(n^2 \; non \; dispari \; (n^2 \; pari)) \Longrightarrow (n \; non \; dispari \; (n \; pari)).$$

La dimostrazione per assurdo

Uno dei metodi per dimostrare la verità di un enunciato è il "ragionamento per assurdo": in tale metodo, si deve verificare che negando l'enunciato (la tesi) si perviene a un risultato certamente falso (negazione dell'ipotesi)

Esempio – Dimostrare che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, $\sqrt{2} \notin Q$.

Dim. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in Q \Leftrightarrow \exists m, n \in N, primi\ fra\ loro, \ni' \sqrt{2} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m^2$ pari ⟹ m pari ⟺

$\Leftrightarrow \exists h \in N \ni' m = 2h \Longrightarrow 2n^2 = m^2 = 4h^2 \Longrightarrow n^2 = 2h^2 \Longrightarrow n \; pari.$

Dunque, m e n risultano entrambi pari (divisibili entrambi per 2) contro l'ipotesi che sono primi fra loro.

Tabella delle negazioni

Frase	Negazione
$p(x)$ e $q(x)$	non $p(x)$ o non $q(x)$
$p(x)$ o $q(x)$	non $p(x)$ e non $q(x)$
non $p(x)$	$p(x)$
$\exists x \ni' p(x)$	$\forall x$: non $p(x)$

$\forall x: p(x)$	$\exists x: non\ p(x)$
$\forall x: p(x) \Longrightarrow q(x)$	$\exists x \ni' p(x)\ e\ non\ q(x)$

Infine, enunciamo il principio di induzione che si applica per la dimostrazione di proprietà che dipendono da interi naturali.

Il Principio di Induzione

Molto utile in alcune dimostrazioni è il seguente assioma detto "Principio di induzione".

Esso afferma che se A è un insieme non vuoto, se $n_0 \in \mathbb{N}$ e se P è una proprietà su A, si dimostra che:

1. *Se P è vera per n_0 (base induttiva)*
2. *Se $\forall n \geq n_0: P\ vera\ per\ n \Longrightarrow P\ vera\ per\ (n+1)$ (passo d'induzione)*

allora P *è vera* $\forall n \in N,\ n \geq n_0$.

Esempio 1 - (La somma dei primi n naturali)

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}: \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dim. Dimostriamo l'uguaglianza per induzione su n.

1. *Base induttiva: dimostriamo che è vera per* $n_0 = 1, P(1)$:

   $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$ *(vera);*

2. *Passo d'induzione,* $\forall n \geq 1: P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 = \big(P(n)\big) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{[(n+1)+1](n+1)}{2}.$$

Per il Principio di induzione: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *è vera* $\forall n \in N, n \geq 1.$

Ad esempio, se $n = 50: 1+2+3+\cdots+50 = \frac{50\cdot(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275.$

Esempio 2 - (La somma dei primi n numeri dispari)

Dimostrare che $\forall n \in N, n \geq 1: \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$

Ad esempio $\sum_{k=1}^{3}(2k-1)$ *è la somma dei primi 3 numeri dispari:*

$$1+3+5 = 9.$$

Dim. (a) Ipotesi induttiva, P(1): $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2.$

Dim. (b) Passo d'induzione P(n): $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2 \Rightarrow P(n+1): \sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = [(n+1)+1]^2$

$$P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + [2(n+1)-1] = n^2+2n+2-1 =$$

$$= n^2+2n+1 = (n+1)^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2.$$

Dunque: $P(n) \Rightarrow P(n+1).$

Per il principio d'induzione, P *è vera* $\forall n \in N$: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$

Esempio 3 - (La somma dei primi n numeri pari)

Dimostrare che: $\sum_{k=1}^{n}(2k) = n(n+1), \forall n \geq 1.$

Dim. Applichiamo il principio di induzione.

- *P(1):* $\sum_{k=1}^{1}(2k) = 2 = 1(1+1)$; *(vera)*
- $P(n) \Rightarrow P(n+1).$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k) = \sum_{k=1}^{n}(2k) + 2(n+1) = (per\ l'ipotesi\ di\ induzione) n(n+1) + 2(n+1) =$$

$$= (n+1)(n+2) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n+1}(2k) = (n+2)(n+1).$$

Dunque, $, \forall n \geq 1: \sum_{k=1}^{n}(2k) = n(n+1)$.

Esempio 4 - Disuguaglianza di Bernoulli (Teorico)

Si dimostra che $\forall n \in N, n \geq 1,\ e\ \forall x \in R, x \geq -1$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dim. (a) Base induttiva $P(1): (1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x \iff 1 + x \geq 1 + x$, *vera.*

Dim (b) Passo d'induzione: P(n) $\Longrightarrow P(n+1)$, *dove:*

$$\mathcal{P}(n)\ \text{è}\ (1+x)^n \geq 1 + nx \quad e \quad P(n+1): (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

$P(n+1)$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 \geq$

$\geq 1 + x + nx = 1 + (n+1)x \Longrightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$

Per il principio d'induzione la proprietà P(n), $(1+x)^n \geq 1 + nx$, *è vera* $\forall n \in N, n \geq 1,\ e\ \forall x \in R, x \geq -1.$

Esempio 5 - (La somma delle differenze fra n numeri di una successione)

Sia $a_1, a_2, \dots, a_n$ *una successione di numeri. Si dimostra che:*

$$\forall n \in N, n \geq 2:\ \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1.$$

Nella sommatoria k va da 1 a (n-1) perché n-1 sono le differenze.

Dim. Utilizziamo il principio di induzione su n.

a) Base induttiva: Per n = 2:

$$\sum_{k=1}^{1}(a_{k+1} - a_k) = a_2 - a_1 = a_{1+1} - a_1 \Longrightarrow P(2)\ \text{è}\ vera;$$

b) Ipotesi di induzione: $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) + (a_n - a_{n-1}) = (per\ ipotesi\ induttiva)$

$= a_n - a_1 + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_1 \iff \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_{n+1} - a_1 \iff P\ \text{è}\ vera\ per\ n+1.$

Quindi, $\forall n \in N$: $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1$.