Applicazione dello sviluppo di Mac Laurin al calcolo di limiti

domenica 13 ottobre 2024 21:29

Premessa: Operazioni con gli o-piccolo

1) $\forall k \in \mathbb{R}:\ k \cdot o(x^n) = o(k \cdot x^n) = o(x^n)$;
2) $\forall m < n:\ o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$;
3) $\forall n, \forall k:\ o(x^{n+k}) = o(x^n)$ $\qquad o(x^5) = o(x^{2+3}) = o(x^2)$
4) $\forall k:\ x^k \cdot o(x^n) = o(x^{n+k})$
5) $\forall m, n:\ o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$. $\qquad o(x^3) \cdot o(x) = o(x^4)$

Calcolo di limiti

E1- Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$ $\qquad \operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \cancel{o(x^3)}}{x^3} = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{\cancel{x^3}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{x^3}}\right) = -\frac{1}{6}.$$

E2- $\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$ $\qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cancel{o(x^3)}}{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)} =$$ $\qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{x^2}\right) = 1.$$

Nota Bene - Lo sviluppo di Taylor con il resto di Peano fornisce un'approssimazione di ogni funzione derivabile ma "nulla" dice sull'errore che si commette approssimando $f(x)$ con $P_n(x)$ (polinomio di Taylor): si può solo dire che maggiore è l'ordine n dello sviluppo, migliore è l'approssimazione che si ottiene.

Una valutazione dell'errore si ottiene utilizzando lo sviluppo di Taylor (e di Mac Laurin) con il resto $R_{n,x_0}(x)$ di Lagrange.