Formula di Taylor con il resto di Lagrange

lunedì 14 ottobre 2024 05:21

Teorema – (Formula di Taylor con il resto di Lagrange)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile $n+1$ volte in $x_0 \in X \cap DX$, si dimostra che

$$\exists!\, P_n(x) \ni' \forall x \in X : f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

dove $c_x \in \mathbb{R}$ compreso fra x_0 e x e

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = o\left((x - x_0)^{n+1}\right).$$

$R_{n,x_0}(x)$ è detto "resto di Lagrange" ed è l'errore che si commette approssimando $f(x)$ con $P_n(x)$.

Se diciamo

$$M = \max f^{(n+1)}(x) \text{ in } I(x_0, x)$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = M \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

è l'errore max che si commette approssimando

$$f(x) \text{ con } P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Lo sviluppo di $f(x)$ con il resto di Lagrange consente di calcolare il valore di $f(x)$ con la precisione voluta.