Definizione di derivata sinistra e destra in un punto

domenica 13 ottobre 2024 06:38

Poniamo le seguenti definizioni:

DEF. – (Definiz. di derivata sinistra, di derivata destra)

a) Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in X \cap D^-(X)$, si dice derivata sinistra di f in x_0:

$$f'_s(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \hat{\mathbb{R}}$$

b) Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in X \cap D^+(X)$, si dice derivata destra di f in x_0

$$f'_d(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \hat{\mathbb{R}}.$$

Teorema 1 – (C.N.S. per l'esist. della derivata in un punto)

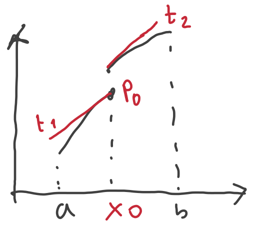
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in $x_0 \in X$, di acc. a sinistra e a destra per X, si dimostra che:

$$(\exists f'(x_0) \in \hat{\mathbb{R}}) \iff (f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \hat{\mathbb{R}})$$

In tal caso è:

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

Oss. – Se f non è continua, potrebbe $\nexists f'(x_0)$ pur essendo $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$:



- $\exists f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$
- $\nexists f'(x_0)$ perché $\nexists t_{P_0}$: $t^-_s(P_0) \neq t^+(P_0)$.

Teor. 2 –

a) Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in \mathring{X} \ni' \exists J^-(x_0)$: $f(x)$ derivabile in $J^-(x_0) \cap X$, si dimostra che f è derivabile a sinistra di x_0 ed è:

$$f'_s(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

b) Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in \mathring{X} \ni' \exists J^+(x_0)$: $f(x)$ derivabile in $J^+(x_0) \cap X$, si dimostra che:

f è derivabile a destra di x_0 ed è:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$