Cap.4 - Le funzioni reali di variabile reale

Ricordiamo che una funzione si dice reale di variabile reale se l'insieme di arrivo e l'insieme di partenza sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

In quello che segue, supporremo $B = \mathbb{R}$ e di tali funzioni, dette semplicemente funzioni reali, daremo le principali proprietà.

&4.1 – Funzioni pari, dispari, periodiche

Funzione pari, funzione dispari

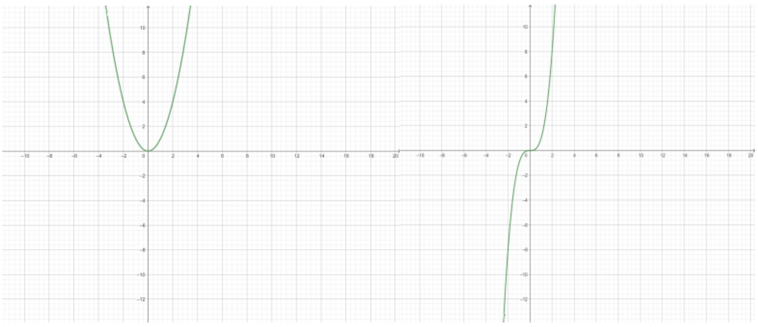
Def. 4.1.1 - (Funzione pari, funzione dispari)

Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione reale, si dice che:

a) f è una funzione pari se $\forall x \in A$: $\begin{cases} 1) \; -x \in A \; (A \text{ è un insieme simmetrico}) \\ 2) \; f(-x) = f(x) \end{cases}$

b) f è una funzione dispari se $\forall x \in A$: $\begin{cases} 1) \; -x \in A \; (A \text{ è un insieme simmetrico}) \\ 2) \; f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Osservazione 4.2.1 - Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y, il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.



(f pari) *(f dispari)*

In generale, non è detto che una funzione f, pur essendo definita in un insieme simmetrico, sia pari o dispari ma è sempre possibile esprimere f come somma di due funzioni una pari, l'altra dispari alla maniera seguente.

Se indichiamo con

$$f_1 = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ e con } f_2 = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

si ha che

$$f = f_1 + f_2$$

con f_1 funzione pari e f_2 funzione dispari.

La funzione f_1 si dice "parte pari" di f e f_2 si dice "parte dispari" di f.

Il concetto di "parte pari" e "parte dispari" sarà utile per definire alcune funzioni elementari.

Funzioni periodiche

Def 4.1.2 – (Definizione di funzione periodica)

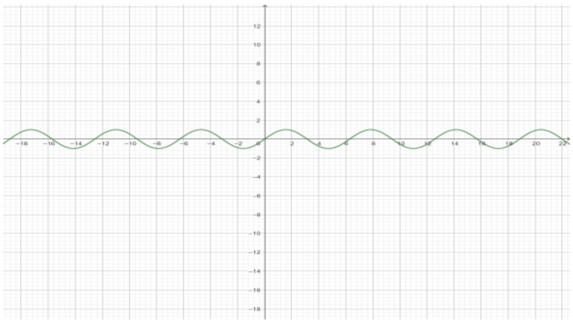
Se f è una funzione reale e se $T \in \mathbb{R}$ è un numero reale <u>positivo</u>, si dice che:

$$(f \text{ è una funzione periodica di periodo } T \text{ in } A) \Leftrightarrow \forall x \in A: \begin{cases} x \pm T \in A \\ f(x \pm T) = f(x) \end{cases}$$

Osservazione 4.1.1 – Poiché i valori di f si ripetono con periodo T, per ottenere il grafico di f sarà sufficiente tracciare il grafico di f in un qualunque intervallo di ampiezza T, ad esempio l'intervallo $[0, T]$, e poi replicarlo nell'insieme A.

Esempi di funzioni periodiche sono le funzioni goniometriche dirette: ad esempio, la funzione $y = sen(x)$ ha periodo $T = 2\pi$:

l'intervallo di studio è $[0,2\pi]$ e il grafico è



Prop.4.1.1 – (Proprietà delle funzioni periodiche)

1. Se f è una funzione periodica di periodo T allora f è periodica di periodo $k \cdot T, \forall k \in \mathbb{Z}$;
2. Se f è una funzione periodica, allora:

$$\exists \bar{T} > 0 \; periodo \; di \; f \;\; \ni' \begin{cases} 1) \; f \; ha \; periodo \; \bar{T} \\ 2) \; \forall T' < \bar{T}: f \; non \; periodica \; di \; periodo \; T' \end{cases}$$

$\bar{T}$ si dice *periodo principale* di f (minimo periodo).

Osservazione 4.1.2

- Le funzioni goniometriche seno, coseno, secante e cosecante sono esempi di funzioni periodiche di periodo (minimo) $T = 2\pi$;
- le funzioni tangente e cotangente sono funzioni periodiche di periodo (minimo) $T = \pi$.

Funzioni monotone globali e locali

&4.2 - Le funzioni monotone in un insieme (monotonia globale) e in un punto (monotonia locale)

Def. 4.2.1 – (Monotonia globale)

Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una funzione di variabile reale si dice che:*

a) f *è crescente in* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \ni' x_1 < x_2: f(x_1) \leq f\ (x_2)$;

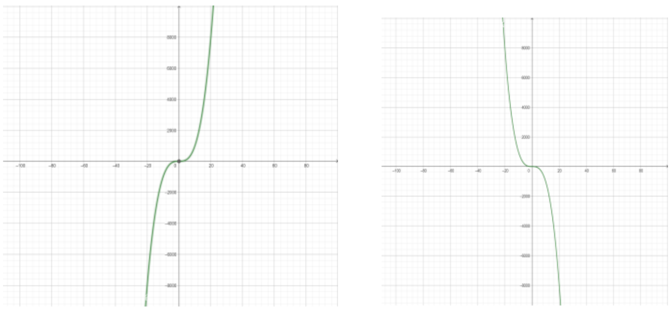
b) f *è strettamente crescente in* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \ni' x_1 < x_2: f(x_1) < f\ (x_2)$;

c) f *è decrescente in* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \ni' x_1 < x_2: f(x_1) \geq f\ (x_2)$;

d) f *è strettamente decrescente in* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \ni' x_1 < x_2: f(x_1) > f\ (x_2)$.

Ogni funzione crescente (strettamente) o decrescente (strettamente) in un insieme si dice monotona *(strettamente monotona) nell'insieme.*

Il grafico di una funzione monotona va verso l'alto (grafico in salita) se la funzione è crescente, verso il basso (grafico in discesa) se la funzione è decrescente:



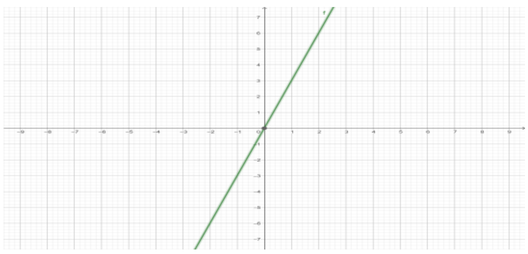
(*funzione crescente*) (*funzione decrescente*)

Esempio 4.1.1 – Consideriamo la funzione

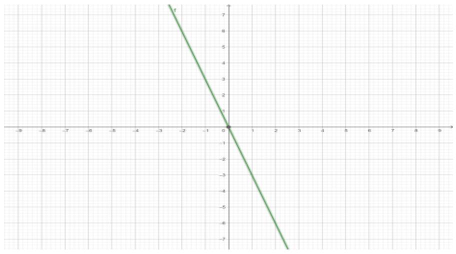
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ così definita: } \forall x \in R: f(x) = a \cdot x.$$

Il grafico di tale funzione è:

a) Se $a > 0$:



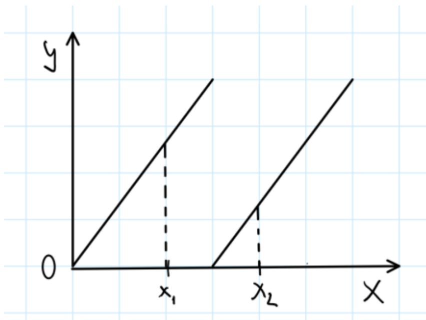
b) Se $a < 0$:



Quindi, $y = ax$ è $\begin{cases} strettammente\ crescente\ se\ a > 0 \\ strettamente\ decrescente\ \ se\ a < 0 \end{cases}$.

Osservazione 4.2.1 - Nell'analizzare l'andamento del grafico di una funzione, al fine di determinarne la monotonia, occorre prestare l'attenzione ai punti in cui il grafico si interrompe.

Ad esempio, nel seguente grafico



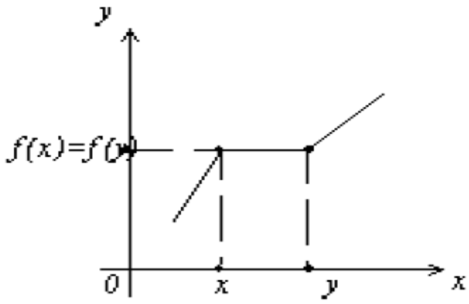
pur essendo i due rami del grafico entrambi in salita (crescente in entrambi i rami), la funzione f non è crescente nel suo dominio.

Infatti, se scegliamo i punti x_1 e x_2 di figura, si ha che $x_1 < x_2$ ma $f(x_1) > f(x_2)$.

Osservazione 4.2.2 – Le funzioni costanti sono esempi di funzioni sia crescenti sia decrescenti: il grafico di una funzione costante è orizzontale.

Osservazione 4.2.3 – Se il grafico della funzione presenta un tratto orizzontale non può essere strettamente monotona.

Ad esempio, il grafico



rappresenta una funzione che è crescente ma non strettamente crescente nel suo dominio.

Monotonia locale (in un punto)

Def. 4.2.2 - (Funzione crescente in un punto)

Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* $\bar{x} \in A$ *è un punto non isolato, si dice che:*

a) f *è crescente a sinistra di* $\bar{x} \Leftrightarrow \exists I^-(\bar{x}) \ni' \forall x \in A \cap I^-(\bar{x}): f(x) \leq f(\bar{x})$;

b) f *è crescente a destra di* $\bar{x} \Leftrightarrow \exists I^+(\bar{x}) \ni' \forall x \in A \cap I^+(\bar{x}): f(\bar{x}) \leq f(x)$;

c) f *è crescente in* $\bar{x} \Leftrightarrow f$ *è crescente a sinistra e a destra di* $\bar{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists I(\bar{x}) \ni' \forall x \in A \cap I(\bar{x}), \begin{cases} x \leq \bar{x}: f(x) \leq f(\bar{x}) \\ x \geq \bar{x}: f(x) \geq f(\bar{x}) \end{cases};$$

Def. 4.2.3 - (Funzione decrescente in un punto)

Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* $\bar{x} \in A$ *è un punto non isolato, si dice che:*

a) f *è decrescente a sinistra di* $\bar{x} \Leftrightarrow \exists I^-(\bar{x}) \ni' \forall x \in A \cap I^-(\bar{x}): f(x) \geq f(\bar{x})$;

b) f *è decrescente a destra di* $\bar{x} \Leftrightarrow \exists I^+(\bar{x}) \ni' \forall x \in A \cap I^+(\bar{x}): f(\bar{x}) \geq f(x)$;

c) f *è decrescente in* $\bar{x} \Leftrightarrow f$ *è decrescente a sinistra e a destra di* $\bar{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists I(\bar{x}) \ni' \forall x \in A \cap I(\bar{x}), \begin{cases} x \leq \bar{x}: f(x) \geq f(\bar{x}) \\ x \geq \bar{x}: f(\bar{x}) \geq f(x) \end{cases}.$$

Prop.4.2.1 - (Monotonia della funzione opposta)

a) *Se* $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una funzione monotona* <u>*crescente*</u> *(risp. decrescente) in A allora la funzione opposta*

$$-f: A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ che } \forall x \in A: (-f)(x) = -f(x)$$

è una funzione <u>decrescente</u> (risp. crescente) in A;

b) *Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona <u>crescente</u> (risp. decrescente) in $\bar{x} \in A$ allora la funzione opposta*

$$-f: A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ che } \forall x \in A: (-f)(x) = -f(x)$$

è una funzione <u>decrescente</u> (risp. crescente) in $\bar{x} \in A$.

Prop. 4.2.2 – (Operazioni con le funzioni monotone)

Se f, g sono due funzioni reali, si dimostra che:

1) $(f \text{ crescente } (\text{decrescente}) \text{ in } X) \Longrightarrow (\forall h \in \mathbb{R}: f \pm h \text{ è crescente in } X\ (\text{decrescente}));$

Esempio 1 – $y = e^x$ strettamente crescente in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow y = e^x - 1$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$;

2) $(f \text{ crescente } (\text{decrescente}) \text{ in } X) \Longrightarrow \left(\begin{cases} (1)\ h \cdot f \text{ crescente } (\text{decrescente}), \forall h > 0 \\ (1)\ h \cdot f \text{ decrescente } (\text{crescente}), \forall h < 0 \end{cases}\right);$

Esempio 2 – $y = e^x$ strettamente crescente in $\mathbb{R} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 2e^x \text{ è strettamente crescente in } \mathbb{R} \\ y = -2e^x \text{ è strettamente decrescente in } \mathbb{R} \end{cases};$$

3) $(f, g \text{ crescenti } (\text{decrescenti}) \text{ in } X) \Longrightarrow (f + g \text{ è crescente in } X\ (\text{decrescente}));$

Esempio 3 – $y = e^x$ e $y = x^3$ strettamente crescenti in $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow y = e^x + x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$;

4) $(f > 0, g > 0 \text{ e crescenti } (\text{decrescenti}) \text{ in } X) \Longrightarrow (f \cdot g \text{ è crescente in } X\ (\text{decrescente}));$

Esempio 4 – $y = e^x$ e $y = x^2$ strettamente crescenti e positive in $[0, +\infty[$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow y = e^x \cdot x^2$ è strettamente crescente in $[0, +\infty[$;

5) $(f < 0, g < 0 \text{ e crescenti } (\text{decrescenti}) \text{ in } X) \Longrightarrow (f \cdot g \text{ è decrescente in } X\ (\text{crescente}));$

Esempio 5 - $y = -e^x$ e $y = -x^2$ strettamente decrescenti e negative in $[0, +\infty[$ $\Longrightarrow y = (-e^x) \cdot (-x^2) = e^x \cdot x^2$ è strettamente crescente in $[0, +\infty[$;

6) $(f, g\ crescenti\ (decrescenti)\ ) \Longrightarrow (g \circ f \text{ è } crescente\ )$;

Esempio 6 - $y = \ln(x), y = x^3$ *strettamente crescenti* $\Longrightarrow y = \ln(x^3)$ *è strettamente crescente nel suo dominio;*

Esempio 7 – $y = log_{\frac{1}{2}}(x)$ *e* $y = \arccos(x)$ *strettamente* *__decrescenti__* $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow y = log_{\frac{1}{2}}(arccos(x))$ *è strettamente* *__crescente__* *nel dominio;*

7) $(f\ crescente\ e\ g\ decrescente\ ) \Longrightarrow (g \circ f \text{ è } decrescente\ )$.

Esempio - $y = ln(x)$ *strettamente crescente,* $y = \arccos(x)$ *strettamente decrescente* $\Longrightarrow y = \ln(arc\cos(x))$ *è strettamente decrescente nel dominio.*

Massimi e minimi locali di una funzione

Def. 4.2.4 - Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* $\bar{x} \in A$ *è un punto non isolato, si dice che:*

a) $\bar{x}$ *è un punto di massimo locale (o relativo) per* $f \Leftrightarrow \exists I(\bar{x}) \ni' \forall x \in A \cap I(\bar{x}): f(x) \leq f(\bar{x})$;

b) $\bar{x}$ *è un punto di minimo locale (o relativo) per* $f \Leftrightarrow \exists I(\bar{x}) \ni' \forall x \in A \cap I(\bar{x}): f(x) \geq f(\bar{x})$.

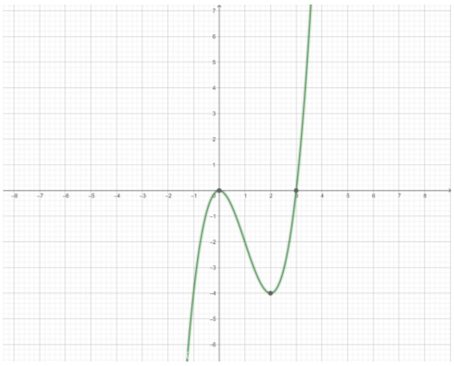
Prop.4.2.2 – (C.S. per i min/max locali)

Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* $\bar{x} \in A$ *si dimostra che:*

a) *(f è crescente a sinistra e decrescente a destra di* $\bar{x}$*)* $\Longrightarrow$ *(*$\bar{x}$ *è un punto di massimo locale (o relativo) per f);*

b) *(se f è decrescente a sinistra e crescente a destra di* $\bar{x}$*)* $\Longrightarrow$ *(*$\bar{x}$ *è un punto di minimo locale (o relativo) per f).*

Esempio – La funzione $y = x^2(x - 3)$, *rappresentata in figura*

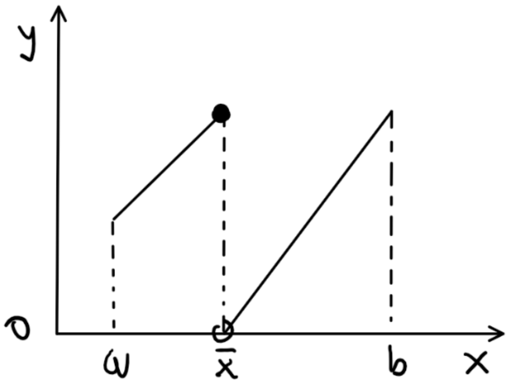


ha un punto di massimo locale (relativo) in $x = 0$ e un punto di minimo locale (relativo) in $x = 3$.

Relazione fra monotonia globale e puntuale

Prop.4.2.3 - Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona in A allora f è una funzione monotona dello stesso tipo in ogni $\bar{x} \in A$.

In generale, non vale il viceversa: una funzione può essere monotona in ogni punto e non essere monotona nell'intero insieme A.



Sussiste la seguente proprietà.

Prop.4.2.4 – Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione reale continua in I intervallo, si dimostra che:

$$(f \text{ è crescente (decrescente) in } I) \Leftrightarrow (f \text{ è crescente (decrescente) in } \bar{x}, \forall \bar{x} \in I).$$

- Osserviamo esplicitamente che per passare dalla monotonia puntuale a quella globale è necessario che la funzione sia continua in un intervallo e che la monotonia di f sia dello stesso tipo per tutti i punti di I.

Se la funzione non è continua oppure non è definita in un intervallo, la monotonia locale non implica necessariamente la monotonia globale della funzione.

Esempio 1 – Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione il cui grafico è

con $\bar{x} \notin A = [a, \bar{x}[\cup]\bar{x}, b] = [a, b] - \{\bar{x}\}$.

In questo caso, f è monotona crescente (a sinistra e a destra) in ogni punto di $\mathcal{A}$ ($\forall x \neq \bar{x}$), ma non è crescente in $\mathcal{A}$ perché esistono

$$x_1 < x_2 \ e \ \ f(x_1) > f(x_2).$$

In questo caso vengono a mancare entrambe le ipotesi che $\mathcal{A}$ sia un intervallo e che f sia continua in $\mathcal{A}$.

Minorante, maggiorante, estremo inferiore e superiore di una funzione

&4.3 – Maggiorante, minorante, estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo di una funzione reale.

Def.4.3.1 – (Definizione di minorante, maggiorante di una funzione)

Siano $f: A \longrightarrow R$ una funzione reale definita in $\mathcal{A}$ e siano $h, k \in R$ due numeri reali. Si dice che:

a) h è un minorante di f $\Leftrightarrow$ h è un minorante di Im(f) $\Leftrightarrow \forall x \in A: h \leq f(x)$;

b) *k è un maggiorante di f* $\Leftrightarrow$ *k è un maggiorante di Im(f)* $\Leftrightarrow\ \forall x \in A: f(x) \leq k$.

Def.4.3.2 – (Definizione di funzione limitata)

Se $f: A \rightarrow R$ *è una funzione reale, si dice che:*

a) *f è limitata inferiormente in A* $\Leftrightarrow Im(f)$ *è un insieme limitato inferiormente* $\Leftrightarrow \exists h \in R \ni' \forall x \in A: h \leq f(x)$;

b) *f è limitata superiormente in A* $\Leftrightarrow Im(f)$ *è un insieme limitato superiormente* $\Leftrightarrow \exists k \in R \ni' \forall x \in A: f(x) \leq k$;

c) *f è limitata in A* $\Leftrightarrow$ *f è limitata inferiormente e superiormente in A* $\Leftrightarrow \exists h, k \in R \ni' \forall x \in A: h \leq f(x) \leq k$.

Esempio 1 – y = sen(x) è una funzione limitata nel suo dominio D = R:

$$\forall x \in R: -1 \leq sen(x) \leq 1.$$

Esempio 2 – y = cos(x) è una funzione limitata nel suo dominio D = R:

$$\forall x \in R: -1 \leq cos(x) \leq 1.$$

Esempio 3 – $y = tag(x)$ *è una funzione illimitata inferiormente e mente nel suo dominio* $D = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}: -\infty < tag(x) < +\infty.$$

Esempio 4 – $y = a^x$, *con* $0 < a \neq 1$, *è limitata inferiormente ma non superiorsuperiormente:* 0 *è un minorante di* $y = a^x$ *e non esiste maggiorante di* $y = a^x$.

$$\forall x \in R: 0 < a^x < +\infty.$$

Def.4.3.3 – (Definizione di minimo, massimo assoluto di una funzione)

a) Se $f: A \rightarrow R$ *e se* $m \in R$, *si dice che:*

$$m = \min(f)\ in\ A \Leftrightarrow m = \min Imf \Leftrightarrow \begin{cases} m \in f(A) \\ \forall x \in A: m \leq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \bar{x} \in A \ni' m = f(\bar{x}) \\ \forall x \in A: m \leq f(x) \end{cases}$$

b) Se $f: A \rightarrow R$ *e se* $m \in R$, *si dice che:*

$M = \max(f)\ in\ A \Leftrightarrow M = \max Imf \Leftrightarrow \begin{cases} M \in f(A) \\ \forall x \in A: f(x) \leq M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \bar{\bar{x}} \in A \ni' M = f(\bar{\bar{x}}) \\ \forall x \in A: f(x) \leq M \end{cases}$

Osservazione 1 – Anche per le funzioni, il minimo e il massimo assoluti, (se esistono), sono unici.

Osservazione 2 – I punti di minimo/massimo assoluti sono anche di minimo/massimo relativi (o locali).

Def.4.3.4 – (Estremo inferiore, estremo superiore di una funzione)

a) Se $f: A \longrightarrow R$ limitata inferiormente in A, si dice estremo inferiore di f, indicato con $\inf(f)$, l'estremo inferiore dell'immagine di f:

$$\inf(f) = \inf f(A);$$

b) Se $f: A \longrightarrow R$ limitata superiormente in A, si dice estremo superiore di f, indicato con $\sup(f)$, l'estremo superiore dell'immagine di f:

$$\sup(f) = \sup f(A).$$

Prop.4.3.1 – (Proprietà dell'estremo inferiore e superiore di f)

a) Se $f: A \longrightarrow R$ limitata inferiormente in A e se $l' \in R$ si dimostra che:

$$l' = \inf(f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A: \ell' \leq f(x) & (\ell' minorante\ di\ f) \\ \forall h\ minorante\ di\ f: h \leq \ell' & (\ell'\text{è } il\ più\ grande\ dei\ minoranti\ dif) \end{cases}$$

b) Se $f: A \longrightarrow R$ limitata superiormente in A e se $\ell'' \in R$ si dimostra che:

c) $\ell'' = sup(f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A: f(x) \leq \ell'' & (\ell''\ maggiorante\ di\ f) \\ \forall k\ maggiorante\ di\ f: \ell'' \leq k & (\ell''\text{è } il\ più\ piccolo\ dei\ maggioranti\ dif) \end{cases}$

Osservazione – Di ogni funzione limitata inferiormente (superiormente esiste sempre l'estremo inferiore (estremo superiore) ma non è detto che esista il minimo (il massimo).

Sussiste il seguente teorema.

Teorema 4.3.1 – (Caratterizzazione dell'esistenza del minimo/massimo di una funzione)

Se $f: A \longrightarrow R$ è una funzione limitata inferiormente/superiormente in $\mathcal{A}$, si dimostra che:

a) $\exists \min f(x) \Leftrightarrow inf f(x) \in f(A)$ e in tal caso è: $\min f(x) = inf f(x)$;

b) $\exists \max f(x) \Leftrightarrow sup f(x) \in f(A)$ e in tal caso è: $\max f(x) = sup f(x)$.

Operazioni con le funzioni reali

&4.4 - Operazioni con le funzioni reali

D'ora in poi indicheremo con $\mathcal{F}(X, R)$ l'insieme delle funzioni reali di variabile reale definite in $\emptyset \neq X \subseteq R$.

Nell'insieme $\mathcal{F}(X, R)$ si possono definire due leggi di composizione interna (operazioni), indicate con + e ·, che rendono $\mathcal{F}(X, R)$ campo.

Def.4.4.1 - (Definizione di funzione somma)

Se $f: X_1 \longrightarrow R$ e $g: X_2 \longrightarrow R$ sono due funzioni reali e se $X = X_1 \cap X_2$, si dice funzione somma di f e g la nuova funzione

$h = f_1 + f_2: X \longrightarrow R$ così definita: $\forall x \in X: h(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

La funzione somma si indica con $f + g$.

Nota bene: Il dominio della funzione $h = f + g$ è:

$$X = X_1 \cap X_2.$$

Esempio - $f(x) = sen(x) + \log(x)$ è la funzione somma delle due funzioni

$$y = sen(x) \text{ e } y = \log(x),$$

il cui dominio è l'intersezione dei domini delle funzioni sen(x) e log(x).

$$X =]0, +\infty[.$$

Def.4.4.2 – (Definizione di funzione opposta)

Se $f: X \longrightarrow R$ *è una funzione reale, si dice funzione opposta di f la nuova funzione così definita:*

$$h: X \longrightarrow R \;\; \ni' \; \forall x \in X: h(x) = -f(x).$$

La funzione opposta si indica con $-f$.

Nota bene – Il dominio della funzione $-f$ *è:*

$$X_{-f} = X_f.$$

Def.4.4.3 – (Definizione di funzione prodotto)

Se $f: X_1 \longrightarrow R$ *e* $g: X_2 \longrightarrow R$ *sono due funzioni reali e se* $X = X_1 \cap X_2$ *si dice funzione prodotto di* f *e* g, *la nuova funzione* h *così definita:*

$$h: X \longrightarrow R \;\; \ni' \;\; \forall x \in X: h(x) = f(x) \cdot \; g(x).$$

La funzione prodotto si indica con $f \cdot g$.

Nota bene – Il dominio della funzione prodotto è:

$$X_{f \cdot g} = X_f \cap X_g.$$

Esempio - $f(x) = sen(x) \cdot \log(x)$ *è la funzione prodotto di*

$$y = sen(x) \;\; e \;\; y = \log(x).$$

il suo dominio è l'intersezione dei domini delle funzioni sen(x) e log(x):

$$X = X_1 \cap X_2.$$

Def.4.4.4 – (Definizione di funzione reciproca)

Se $f: X \longrightarrow R$ *è una funzione reale tale che* $\forall x \in X: f(x) \neq 0$, *si dice funzione reciproca di f la nuova funzione* $h = \frac{1}{f}$ *così definita:*

$$h = \frac{1}{f}: X \longrightarrow R \;\; \ni' \; \forall x \in X: h(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Nota bene – Il dominio della funzione reciproca $\frac{1}{f(x)}$ *si calcola risolvendo*

$$f(x) \neq 0.$$

Def.4.4.5 – (Definizione di funzione quoziente)

Se $f: X_1 \longrightarrow R$, *se* $g: X_2 \longrightarrow R$, *detto* $X = X_1 \cap X_2 \ni' \forall x \in X: g(x) \neq 0$, *si dice funzione quoziente la nuova funzione indicata con* $h = \frac{f}{g}$ *così definita:*

$$h: X \longrightarrow R \ \ni' \ \forall x \in X: h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Nota bene – Il dominio della funzione $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *è:*

$$X = \{x \in X_1 \cap X_2 | g(x) \neq 0\}.$$

Esempio - $f(x) = \frac{sen(x)}{\log(x)}$ *è la funzione quoziente delle funzioni*

$$y = sen(x) \ e \ y = \log(x).$$

Il suo dominio è l'intersezione dei domini di sen(x) e log(x), con la condizione

$$\log(x) \neq 0 \Leftrightarrow X_{\frac{f}{g}} =]0, +\infty[- \{1\}.$$

Def.4.4.6 - (Definizione di funzione composta, $g \circ f$*)*

Se $f: X_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g: X_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *sono due funzioni reali e se* $X \subseteq X_1 \ni'$ *tale che*

$$\forall x \in X_1: f(x) \in X_2,$$

si definisce funzione composta di f e g la nuova funzione indicata con

$$h = g \circ f: X_1 \longrightarrow \mathbb{R} \ \ni' \ \forall x \in X_1: h(x) = g\big(f(x)\big).$$

Il dominio della funzione composta si ottiene imponendo che:

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}.$$

Esempio – Il dominio della funzione composta

$$y = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

è

$$\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ \dfrac{1}{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow D_y =]1, +\infty[.$$

Def.4.4.7 - (Definizione di f^g*)*

Se $f: X_1 \longrightarrow R$, *se* $g: X_2 \longrightarrow R$ *e se* $X \subseteq X_1 \ni' \forall x \in X: f(x) > 0$ *si dice funzione* f *elevata a* g, *la nuova funzione*

$$h = f^g: X \longrightarrow R \ \ni' \ \forall x \in X: h(x) = \left(f(x)\right)^{g(x)}.$$

Nota bene – Si noti che f^g *non è una composta e che il suo dominio è dato da:* $\begin{cases} x \in X_1 \\ x \in X_2 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

<u>*L'insieme* $(\mathcal{F}(X,R),+,\cdot)$, *munito delle leggi + e · prima definite, verifica le proprietà di campo:* $(\mathcal{F}(X,R),+,\cdot)$ *è detto "campo delle funzioni reali di variabile reale".*</u>

Osservazione fondamentale

Poiché ogni funzione reale risulta essere la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente, la composta di alcune funzioni notevoli, dette "funzioni elementari", conoscendo il dominio di tali funzioni è possibile determinare il dominio di una qualsiasi funzione reale.

Esempio - La funzione $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$ *è la funzione somma delle due funzioni elementari*

- $g(x) = \sqrt{x}$ *avente dominio* $D_g = [0, +\infty[$
- $h(x) = \frac{1}{x-1}$ *avente dominio* $D_h = R\backslash\{1\}$.

Quindi, il dominio di f è:

$$D_f = D_g \cap D_h = \begin{cases} x \geq 0 \quad (C.E.\, di\ g) \\ x \neq 1 \ (C.E.\ di\ h) \end{cases} \Longrightarrow D_f = [0, +\infty[\backslash\{1\}.$$