Cap.8 – Integrazione definita secondo Riemann delle funzioni limitate in intervalli chiusi e limitati

&8.1 – Introduzione

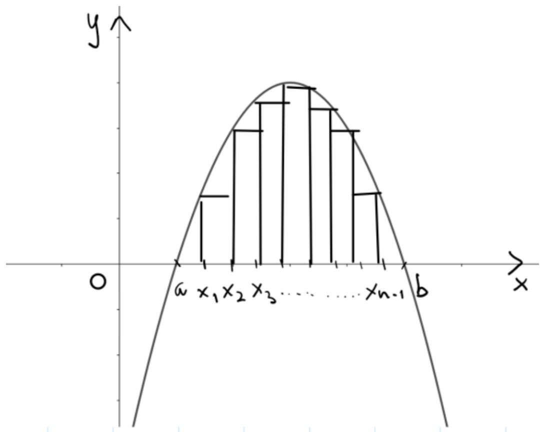
Il calcolo integrale è un'operazione molto utile utilizzato sia in matematica, per il calcolo di aree, volumi e valori medi, sia in fisica, ad esempio nel calcolo del lavoro di una forza non costante.

Cominciamo col porre le seguenti definizioni.

Def.8.1.1 – (Definizione di partizione di un intervallo)

Se $[a, b] \subseteq R$ è un intervallo non vuoto, $a < b$, si dice partizione di $[a, b]$ ogni insieme di punti $P = \{x_0, x_1, x_2 \dots, x_n\}$ di $[a, b]$, tali che:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Indichiamo con $\mathcal{P}([a, b])$ l'insieme delle infinite partizioni di $[a, b]$.

Def.8.1.2 – (Definizione di somma integrale inferiore e somma integrale superiore di una funzione limitata)

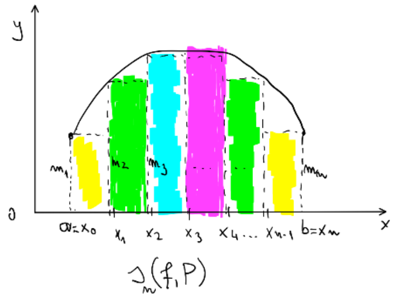
Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ una funzione <u>limitata</u> nell'intervallo $[a, b]$ e se $P = \{x_0, x_1, x_2 \dots, x_n\}$ è una partizione di $[a, b]$, $P \in \mathcal{P}([a, b])$, poiché f è limitata in $[a, b]$, f è limitata in ciascuno degli intervallini $[x_{k-1}, x_k]$ della partizione $\mathcal{P}$ e quindi $\forall k = 1..n$:

- $\exists\, m_k = inf\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\} \in R,$
- $\exists\, M_k = \sup\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\} \in R.$

Pertanto, $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$:

- $\exists s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + .. + m_n(x_n - x_{n-1}) \in R$

detta *somma integrale inferiore* di f relativa alla partizione $\mathcal{P}$;



- $\exists S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + .. + M_n(x_n - x_{n-1}) \in R$

detta *somma integrale superiore* di f relativa alla partizione $\mathcal{P}$.

Significato geometrico delle somme integrali inferiore/ superiore

Se f è una funzione positiva in $[a,b]$ e se $P = \{x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ una partizione di $[a,b]$, indichiamo con:

- $T(f,[a,b])$ la parte di piano compresa fra la curva, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$: T si dice trapezoide di f di base $[a,b]$;
- $r(f,P) = \bigcup_{k=1}^{n} r_i$, l'unione dei rettangolini r_i di base (x_{k-1}, x_k) e altezza $m_k, \forall k = 1 \ldots n$,

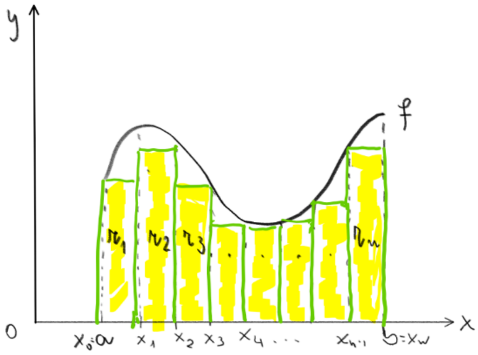
$$r(f,P) = \bigcup_{k=1}^{n} r_i,$$

$r(f,P)$ si dice plurirettangolo inscritto nel trapezoide $T(f,[a,b])$.

$\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, si ha che:

$Area(r(f,P)) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n1}) =$

$= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = s(f,P) \Leftrightarrow \forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, *la somma integrale inferiore di una funzione positiva f è l'area del plurirettangolo inscritto nel trapezoide di base* $[a,b]$ di f $\Leftrightarrow s(f,P) = \mathcal{A}rea(r(f,P))$



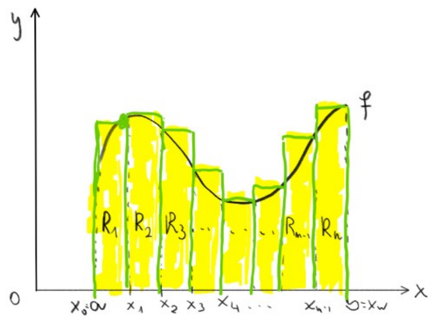
▪ *Analogamente, se indichiamo con* $R(f,P) = \bigcup_{k=1}^{n} R_i$ *l'unione dei rettangolini di base* (x_{k-1}, x_k) *e altezza* M_k, *l'insieme*

$$R(f,P) = \bigcup_{k=1}^{n} R_i$$

si dice plurirettangolo circoscritto al trapezoide $T(f,[a,b])$.

$\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$: $\mathcal{A}rea(R(f,P)) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(x_n - x_{n1}) =$

$= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = S(f,P) \Longrightarrow S(f,P) = \mathcal{A}rea(R(f,P))$



Dunque, la somma integrale superiore di una funzione positiva f è l'area del plurirettangolo circoscritto al trapezoide di base $[a,b]$ di f .

Proprietà delle partizioni e delle somme integrali

Prop. 8.1.1 - (Proprietà delle partizioni e delle somme integrali)

$\forall\ P = \{x_0, x_1, x_2 \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$, *partizione di* $[a,b]$, *risulta:*

1. $r(f,P) \subset T(f,[a,b] \subset R(f,P)$;
2. $s(f,P) \leq S(f,P)$, *poiché* $\forall k = 1..n$: $m_k = \inf f_{[x_{k-1},x_k]} \leq \sup f_{[x_{k-1},x_k]} = M_k$.
3. *Se* P e $P' \in \mathcal{P}([a,b])$ *sono due partizioni di* $[a,b]$ *tali che*
$$P \subset P' \Longrightarrow s(f,P') \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P');$$
4. *Se* P e $P' \in \mathcal{P}([a,b])$ *sono due partizioni di* $[a,b]$, *allora anche*
$$P'' = P \cup P' \in \mathcal{P}([a,b])$$

è una partizione di $[a,b]$, *più fine delle partizioni* P e P'.

Tutto ciò premesso, indichiamo con:

- $\mathcal{A}(f) = \{s(f,P) | P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ *l'insieme delle somme integrali inferiori di f, ottenute al variare di* $\mathcal{P}$ *nell'insieme delle partizioni di* $[a,b]$;
- $\mathcal{B}(f) = \{S(f,P) | P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ *l'insieme delle somme integrali superiori di f, ottenute al variare di* $\mathcal{P}$ *nell'insieme delle partizioni di* $[a,b]$.

Sussiste la seguente fondamentale proprietà.

Prop.8.1.2 - Se f:$[a,b] \longrightarrow R$ *è una funzione limitata in* $[a,b]$, *si dimostra che gli insiemi* $\mathcal{A}(f)$ *e* $\mathcal{B}(f)$ *delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori sono due insiemi separati, ovvero tali che:*

$$\forall s(f,P) \in \mathcal{A}(f) \text{ e } \forall S(f,P) \in \mathcal{B}(f): s(f,P) \leq S(f,P).$$

Di conseguenza, per l'assioma di completezza di $\mathcal{R}$, *si ha che:*

1. *esiste almeno un elemento di separazione delle due classi* $\Leftrightarrow \exists c \in R \ni' \forall\ s \in \mathcal{A}(f)$ e $\forall S \in \mathcal{B}(f): s \leq c \leq S$;
2. $\exists \sup \mathcal{A}(f)$, $\exists \inf \mathcal{B}(f)$ *ed è* $\sup \mathcal{A}(f) \leq \inf \mathcal{B}(f)$.

Si pone, quindi, la seguente definizione.

Def. 8.1.2 - (Definizione di funzione integrabile secondo Riemann)

Se $f:[a,b] \longrightarrow R$ è una <u>funzione limitata</u> nell'intervallo <u>chiuso</u> e <u>limitato</u> $[a,b]$ e se $\mathcal{A}(f)$ e $\mathcal{B}(f)$ sono gli insiemi delle somme integrali inferiori e, rispettivamente, delle somme integrali superiori di f, si dice che:

(f integrabile secondo Riemann in $[a,b]$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}(f)$ e $\mathcal{B}(f)$ sono insiemi contigui).

In tal caso, l'unico elemento c di separazione di $\mathcal{A}(f)$ e $\mathcal{B}(f)$,

$$c = \sup(\mathcal{A}(f)) = \inf(\mathcal{B}(f)),$$

si dice integrale di f esteso all'intervallo $[a,b]$ e si indica con il simbolo:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx.$$

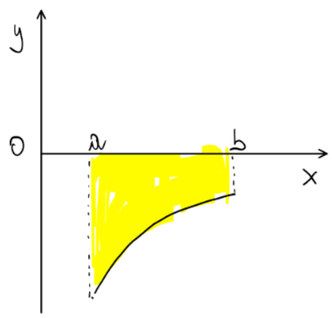
Interpretazione geometrica dell'integrale esteso

1. *Se f è una funzione integrabile e positiva in $[a,b]$, allora:*

$$\mathcal{A}(T(f,[a,b]) = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

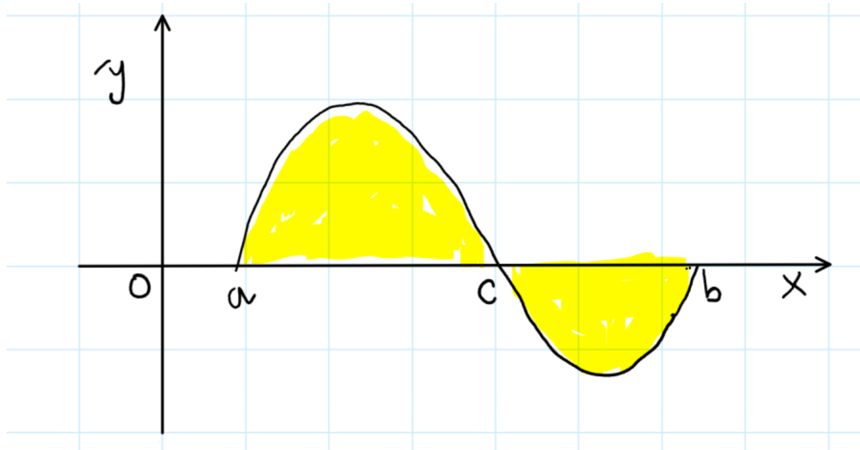
2. *Se f è una funzione integrabile e negativa in $[a,b]$, allora:*

$$\mathcal{A}(T(f,[a,b]) = -\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} -f(x)dx\ ;$$



3. *Se Se f è una funzione integrabile e di segno variabile in* $[a,b]$, *allora:*

$$\mathcal{A}(T(f,[a,b]) = \int_{[a,b]} |f(x)|dx$$



Classi di Funzioni integrabili secondo Riemann

Prop.8.1.3 (*) - (Integrabilità delle funzioni costanti)

Ogni funzione $f\colon [a,b] \longrightarrow R \ \ni' \forall x \in [a,b]\colon f(x) = h$ *è integrabile in* $[a,b]$ *ed è:*

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} hdx = h(b-a).$$

Dim. Poiché f *è una funzione costante,* $\forall P = \{x_0, x_1, x_2 \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$ *e* $\forall k = 1..n\colon \inf([f(x_{k-1}), f(x_k)] = \sup([f(x_{k-1}), f(x_k)] = h \Longrightarrow m_k = M_k = h \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} h(x_k - x_{k-1}) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) =$$

$= h(b-a) \Longrightarrow \forall P \in \mathcal{P}([a,b])\colon s(f,P) = S(f,P) = h(b-a) \Longrightarrow sup\mathcal{A}(f) = inf\,\mathcal{B}(f) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int_{[a,b]} f(x)dx = sup\mathcal{A}(f) = inf\,\mathcal{B}(f) = h(b-a).$

Prop.8.1.4 - (Integrabilità delle funzioni continue)

Ogni funzione f continua in $[a,b]$ *è integrabile in* $[a,b]$.

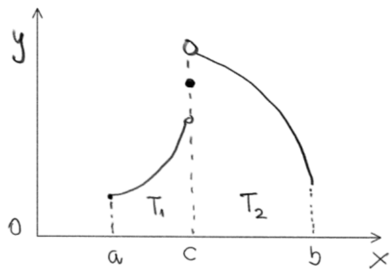
Def. 8.1.3 - (Definizione di funzione generalmente continua)

Una funzione f si dice generalmente continua in $[a,b]$ *se essa è continua in tutti i punti di* $[a,b]$ *fatta eccezione per un numero finito di punti.*

Prop.8.1.5 - (Integrabilità delle funzioni generalmente continue)

Ogni funzione f generalmente continua in $[a, b]$, *dotata solo di punti di discontinuità di 1ª specie (con salto) o di 3ª specie (discontinuità eliminabile), è integrabile in* $[a, b]$.

Esempio - La funzione della figura seguente è continua in tutti i punti di $[a, b]$ *tranne che nel punto c dove presenta una discontinuità di prima specie:*



In tal caso, la funzione f è integrabile in $[a, b]$ *ed è*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Se f è positiva in $[a, b]$, *allora è:*

$$\mathcal{A}(T) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \mathcal{A}(T_1) + \mathcal{A}(T_2).$$

Prop. 8.1.6 - (Integrabilità delle funzioni monotone)

Ogni funzione f monotona in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b]$.

Definizione di integrale definito

Def.8.1.4 - (Definizione di integrale definito)

Se $f: I \longrightarrow R$ *è una funzione continua nell'intervallo I e se* $a, b \in I$, *si dice integrale definito fra a e b di f e si indica con:*

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)dx, se\ a < b \\ 0 \qquad\qquad se\ a = b \\ -\int_{[b,a]} f(x)dx, se\ a > b \end{cases}$$

Proprietà dell'integrale definito

Prop.8.1.7 – Se f e g sono due funzioni continue in I e se $a, b \in I$, si dimostra che:

1. $\forall k \in R$: $k \cdot f$ *integrabile in I ed è:* $\int_a^b kf(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$;
2. $f + g$ *è integrabile in I ed è:*

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x) \big)\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

3. $\forall c \in I$: $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

(Proprietà additiva dell'integrale)

Nota – La (1) e la (2) si possono esprimere con l'unica relazione

$$\int_a^b \big(h \cdot f(x) + k \cdot g(x)\big)\, dx = h \cdot \int_a^b f(x)dx + k \cdot \int_a^b g(x)dx$$

detta proprietà della linearità dell'integrale definito.

Prop.8.1.8 – (Positività dell'integrale definito)

Se f è una funzione integrabile in I e se $a,b \in I \ni' \forall x \in [a, b]: f(x) \geq 0$ (risp. ≤ 0), allora è anche

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0 \quad (risp.\ \int_a^b f(x)\, dx \leq 0).$$

Prop.8.1.9 (*) – (Monotonia dell'integrale definito)

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue in I, si dimostra che

$$\forall a,b \in I \ni'\ a \leq b: f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Dim. Poiché $\forall x \in\ [a, b]: f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \forall x \in\ [a, b]: f(x) - g(x) \leq 0 \Longrightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$

Corollario 8.1.1 (*) - (Integrabilità della funzione valore assoluto)

Se f(x) è una funzione integrabile in $[a,b]$ *anche* $|f(x)|$ *è integrabile in* $[a,b]$ *ed è:*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Dim. $\forall x \in [a,b]: -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow \int_a^b -|f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \Leftrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Teorema della media integrale

Teorema 8.1.1 (*) - (Teorema della media integrale)

Se $f: [a,b] \longrightarrow R$ *è una funzione continua in* $[a,b]$, *si dimostra che*

$$\exists c \in [a,b] \ni' \ \ f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

In tal caso, f(c) si dice media integrale di f in $[a,b]$.

Dim. Poiché f è una funzione continua in $[a,b] \Rightarrow$ *(per il teorema di Weierstrass)* $\exists \min f(x) = m \text{ e } \exists \max f(x) = M \ \ \Leftrightarrow \ \forall x \in [a,b]: \ \ m \leq f(x) \leq M \Rightarrow$ $(\text{per la monotonia dell'integrale}) \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M \Rightarrow \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \in [m, M]$$

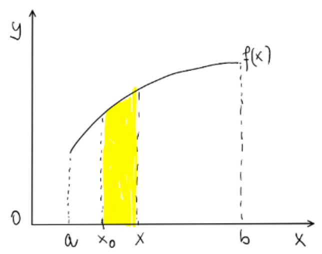
$$\Rightarrow (\text{per il teorema dei valori intermedi}) \ \exists c \in [a,b] \ni' \ \ f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

La funzione integrale

Def.8.1.5 - (Definizione di funzione integrale)

Se $f: I \longrightarrow R$ *è una funzione continua in* I *intervallo e se* $x_0 \in [a, b]$ *si dice funzione integrale di f di punto iniziale* x_0 *la nuova funzione*

$$F: I \longrightarrow R \ni' \forall x \in I: F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$



Nota - Si osservi che poiché f(x) è continua in I $\Rightarrow f$ *è integrabile in I* $\Leftrightarrow \exists \int_{x_0}^{x} f(t)dt \in \mathbb{R}$.

Teorema 8.1.2 (*) - (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ *una funzione continua in* $[a, b]$ *e se* $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ *è la funzione integrale di punto iniziale a, si dimostra che:*

1. $F(x)$ *è derivabile in* $[a, b]$;
2. $\forall x \in [a, b]: F'(x) = f(x)$.

Dim. Si osservi preliminarmente che poiché f è continua nell'intervallo $[a, b] \Leftrightarrow \forall x \in [a, b]: f$ *continua in* $[a, x] \Leftrightarrow f$ *è integrabile in* $[a, x] \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], \exists | F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt \in R$.

Dimostriamo che F(x) è derivabile in $[a, b]$ *e che* $\forall x \in [a, b]: F'(x) = f(x)$.

1) $\forall\ x \in [a, b]$ e $\forall h \neq 0\ \ni' x + h \in [a, b]$, *si ha:*

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{\int_{a}^{x+h} f(t)dt - \int_{a}^{x} f(t)dt}{h} = (\text{per la prop. additiva dell'integrale}) =$$

$$= \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

2) Poiché $h \neq 0 \Longrightarrow h > 0 \vee h < 0.$

a) *Per* $h > 0 \Longrightarrow x < x + h \Longrightarrow$

(*per il teorema della media integrale applicato all'intervallo* $[x, x+h]$)

$$\exists c_h \in [x, x+h] \ \ni' f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{x+h-x} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Inoltre, poiché $\forall h > 0: \begin{cases} x \leq c_h \leq x+h \\ \lim\limits_{h\to 0^+} x = x \\ \lim\limits_{h\to 0^+} x+h) = x \end{cases} \Longrightarrow$ *(per il teorema del doppio confronto)* $\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0^+} c_h = x.$

b) *Per* $h < 0 \Longrightarrow x + h < x \Longrightarrow$

(*per il teorema della media integrale applicato all'intervallo* $[x+h, x]$)

$$\exists c_h \in [x+h, x] \ \ni' f(c_h) = \frac{\int_{x+h}^{x} f(t)dt}{x - x - h} = \frac{\int_{x+h}^{x} f(t)dt}{-h} = \frac{-\int_x^{x+h} f(t)dt}{-h} =$$

$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Inoltre, poiché $\forall h < 0: \begin{cases} x + h \leq c_h \leq x \\ \lim\limits_{h\to 0^-} (x+h) = x \\ \lim\limits_{h\to 0^-} x = x \end{cases} \Longrightarrow$ *(per il teorema del doppio confronto)* $\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0^-} c_h = x.$

Quindi, per il teorema di esistenza del limite, si ha che:

$$\exists \lim_{h\to 0} c_h = \lim_{h\to 0^+} c_h = \lim_{h\to 0^-} c_h = x\,.$$

Quindi, $\forall h \neq 0: f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$ *e* $\lim\limits_{h\to 0} c_h = x.$

3) Infine, poiché f è una funzione continua, per il teorema del limite della composta, si ha:

$$\lim_{h\to 0} f(c_h) = f(\lim_{h\to 0} c_h) = f(x).$$

Quindi, da (1),(2),(3) si ha:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = (per\ la\ (1)) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = (per\ la\ (2)) =$$

$$\lim_{h\to 0} f(c_h) = (per\ la\ ()) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall\, x \in [a,b].$$

Def.8.1.5 - (Definizione di primitiva)

Se $f: [a,b] \longrightarrow R$, si dice che $G: [a,b] \longrightarrow R$ è una primitiva di f(x) in $[a,b]$ se:

1. $G(x)$ è derivabile in $[a,b]$
2. $\forall x \in [a,b]: G'(x) = f(x)$.

Osservazione - Se f è una funzione integrabile in $[a,b]$, per il teorema 8.1.2, $\forall x_0 \in [a,b]$: $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ una primitiva di f.

Esempio 1 - $G(x) = \frac{x^2}{2}$ è una primitiva di $f(x) = x$.

Infatti: $G'(x) = D\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}(2x) = x$.

Esempio 2 - $G(x) = sen(x)$ è una primitiva di $f(x) = \cos(x)$.

Infatti: $G'(x) = Dsen(x) = \cos{(x)}$.

Teorema 8.1.3 (*) - (Proprietà delle primitive)

Se $f: [a,b] \longrightarrow R$ è una funzione integrabile in $[a,b]$, si dimostra che:

1. Se $\mathcal{G}$ è una primitiva di $f \Rightarrow \forall c \in R: G + c$ una primitiva di f;
2. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono due primitive di $f \Rightarrow \exists c \in R \ \ni' \ F(x) - G(x) = c \Leftrightarrow$ $\exists c \in R \ \ni' \ \forall x \in [a,b]: F(x) = G(x) + c$.

Dim. 1

Se $\mathcal{G}$ è una primitiva di $f \Leftrightarrow DG(x) = f(x) \Longrightarrow \forall c \in R: D(G(x) + c) = DG(x) + Dc = f(x) \Leftrightarrow\ \forall c \in R: G + c$ una primitiva di f.

Dim. 2

Poiché $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono due primitive di f in $[a, b] \Leftrightarrow \forall x \in [a, b]$: $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$.

Detta $H(x) = F(x) - G(x) \Longrightarrow\ \forall x \in [a, b]: H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\forall x \in [a, b]: H'(x) = 0 \Longrightarrow H(x)$ è una funzione costante in $[a, b] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists c \in R \ni' \forall x \in [a, b]: H(x) = c \Leftrightarrow \exists c \in R \ni' \forall x \in [a, b]: F(x) - G(x) = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists c \in R \ni' \forall x \in [a, b]: F(x) = G(x) + c$.

Dunque, se una funzione ammette una primitiva allora essa ne ammette infinite tutte che differiscono per una costante.

Teorema 8.1.4 (*) - (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ è una funzione continua in $[a, b]$ e se $G: [a, b] \longrightarrow R$ è una primitiva di f, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b.$$

Dim. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, sappiamo che la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è anch'essa una primitiva di f.

Quindi, per il teorema precedente, poiché $\mathcal{F}(x)$ e $\mathcal{G}(x)$ sono due primitive di f, si ha che $\exists c \in R \ni' \forall x \in [a, b]$: $\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(x) + c$.

In particolare, si ha:

1. per $x = a$: $F(a) = G(a) + c$,
2. per $x = b$: $F(b) = G(b) + c$,

quindi:

$F(b) - F(a) = G(b) + c - (G(a) + c) = G(b) - G(a) \Leftrightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \Leftrightarrow$

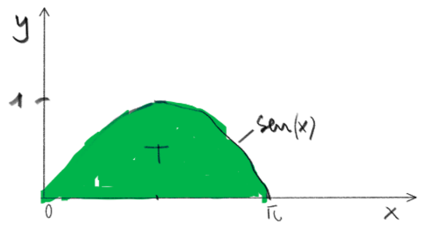
$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = G(b) - G(a) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx - 0 = G(b) - G(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Esempio 1 - Calcolare $\int_0^\pi sen(x)dx$.

Una primitiva di f(x) = sen(x) è G(x) = - cos(x)$\Rightarrow \int_0^\pi sen(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2.$

Osservazione - Poiché $f(x) = sen(x)$ *è positiva in* $[0, \pi] \Rightarrow \int_0^\pi sen(x)dx$ è *l'area del trapezoide T:*



Esempio 2 - Calcolare $\int_0^b xdx$.

Una primitiva di f(x) = x è G(x) $= \frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^b xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2}b^2.$

Esempio 3 - Calcolare $\int_0^2 |(x-1)(x+3)|dx \quad (= \int_a^b |f(x)|dx).$

Osservato che $(x-1)(x+3) \geq 0$ *per* $x \leq -3 \lor x \geq 1,$ *si ha:*

$$\int_0^2 |(x-1)(x+3)|dx = \int_0^1 |(x-1)(x+3)|dx + \int_1^2 |(x-1)(x+3)|dx =$$

$$= \int_0^1 -(x-1)(x+3)dx + \int_1^2 (x-1)(x+3)dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3)dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - (0)\right] + \left[\left(\frac{8}{3} + 4 - 6\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right)\right] = \frac{5}{3} + \left[\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right] = \frac{12}{3} = 4.$$

Integrale delle funzioni pari/dispari

Teorema 8.1.5 - (Integrale delle funzioni pari/dispari)

Se f è una funzione simmetrica nell'intervallo I, si dimostra che:

a) Se f è una funzione pari $\Rightarrow \forall a \in I\colon \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx;$

b) Se f è una funzione dispari $\Rightarrow \forall a \in I\colon \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Esempio 1 - $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = (\cos(x)\ funzione\ pari) = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = 2 \cdot [senx]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-0) = 2.$

Esempio 2 - $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen(x)dx = (sen(x)\ funzione\ dispari) = 0.$

Integrali indefiniti

8.2 – Integrali Indefiniti

Nei paragrafi precedenti, abbiamo visto che ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è dotata di infinite primitive.

Si pone, quindi, la seguente definizione.

Def.8.2.1 – (*Definizione di integrale indefinito*)

Se $f\colon [a,b] \longrightarrow R$ *è una funzione continua in* $[a,b]$, *si dice integrale indefinito di f l'insieme delle sue infinite primitive.*

L'integrale indefinito di f si denota con

$$\int f(x)dx = G(x) + c, \forall c \in R,$$

dove G(x) è una qualunque primitiva di f.

Prop.8.2.1 - (Linearità dell'integrale indefinito)

Se f(x e g(x) sono due funzioni continue in $[a,b]$, *si dimostra che:*

$$\forall\alpha,\beta \in R: \int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\,.$$

In particolare:

1. *Per* $\alpha = \beta = 1$*:* $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx\,;$
2. *Per* $\alpha = 1$ e $\beta = -1$*:* $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx\,;$
3. *Per* $\alpha \in R$ *e* $\beta = 0$: $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx\,.$

Integrali indefiniti elementari o immediati

Prop.8.2.3.a - (Integrali indefiniti elementari o immediati)

1. $\int 1\,dx = x + c$, $\int kdx = kx + c$, $\forall c \in R$;
2. $\forall\ \alpha \neq -1$: $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\forall c \in R$;
3. *per* $\alpha = -1$: $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = ln(|x|) + c$, $\forall c \in R$;
4. $\int sen(x)dx = -\cos(x) + c$;
5. $\int cos(x)dx = sen(x) + c$;
6. $\int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tg(x) + c$;
7. $\int \frac{1}{sen^2(x)}dx = -cotg(x) + c$;
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen(x) + c$;
9. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + c$;
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$;
11. $\int e^x dx = e^x + c$.

La dimostrazione è un'ovvia conseguenza della definizione di integrale indefinito e della definizione di primitiva.

Integrali generalizzati degli integrali elementari

Prop.8.2.3.b - (Integrali indefiniti generalizzati)

1. $\forall\ \alpha \neq -1: \int f(x)^{\alpha} \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \forall c \in R;$

2. $\int f(x)^{-1} f'(x)dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln(|f(x)|) + c,\ \forall c \in R;$

3. $\int sen(f(x))f'(x)dx = -\cos(f(x)) + c;$
4. $\int cos(f(x))f'(x)dx = sen(f(x)) + c;$
5. $\int \frac{1}{cos^2(f(x))} f'(x)dx = tg(f(x)) + c;$
6. $\int \frac{1}{sen^2(f(x))} f'(x)dx = -cotg(f(x)) + c;$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x)dx = arcsen(f(x)) + c;$
8. $\int \frac{1}{1+f(x)^2} f'(x)dx = arctg(f(x)) + c;$
9. $\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c;$
10. $\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + c.$

Metodi di integrazione indefinita

&8.3 - Metodi d'integrazione indefinita

(I) Metodo di decomposizione in somma

Prop.8.3.1 - (1° metodo di integrazione: decomposizione in somma)

La legge della linearità dell'integrazione indefinita fornisce il 1° metodo di integrazione:

$$\forall \alpha, \beta \in R: \int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\,.$$

Esempio 1 -

$$\int (4x^2 + 5x + 7)dx = \int 4x^2 dx + \int 5x dx + \int 7dx = 4\int x^2 dx + 5\int x\, dx + 7\int dx =$$

$= 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 7x + c.$

Esempio 2 -

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}\right) dx = \int (x + 1 + \frac{2}{x}) dx =$$

$$= \int x\, dx + \int dx + 2\int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} + x + 2ln(|x|) + c.$$

(II) Metodo di integrazione per parti

Prop.8.3.2 - (II° Metodo di integrazione: metodo di integrazione per parti)

Se f e g sono due funzioni derivabili (continue e integrabili) si dimostra che:

$$\int f'(x) \cdot g(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx.$$

(Formula di integrazione per parti)

Dim. Per la regola di derivazione del prodotto, si ha:

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f'(x)g(x) = D[f(x)g(x)] - f(x)g'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)dxD[f(x)g(x)] - f(x)g'(x) = \int D[f(x)g(x)]\, dx - \int f(x)g'(x)dx =$$

$$= [f(x)g(x)] - \int f(x)g'(x)dx.$$

Osservazione - In $\int f'(x) \cdot g(x) \cdot dx$:

- $f'(x)$ *si dice fattore differenziale*
- $g(x)$ *si dice fattore finito.*

Negli esercizi, non compaiono esplicitamente i fattori differenziale e finito: se si sceglie opportunamente quale deve essere fattore differenziale e quale fattore finito, l'integrale che compare nel secondo membro dell'uguaglianza è più semplice di quello al 1° membro: scegliere come fattore differenziale f'(x) la funzione della quale è immediato o quasi immediato calcolare una sua primitiva f(x).

Esempio 1 - Calcolare $\int(x \cdot sen(x))dx$.

Soluzione

Se consideriamo $f'x) = sen(x)$ *come fattore differenziale e g(x) = x come fattore finito, si ha:*

$$f(x) = \int sen(x)dx = -\cos(x)\,,g'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int(x \cdot sen(x))dx = -\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) \cdot 1 \cdot dx = -xcos(x) + sen(x) + c.$$

Esempio 2 - Calcolare $\int(e^x \cdot sen(x))dx$.

Soluzione

Se consideriamo $f'x) = e^x$ *come fattore differenziale e g(x) = sen(x) come fattore finito, si ha:*

$$f(x) = \int e^x dx = e^x, g'(x) = Dsen(x) = \cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int(e^x \cdot sen(x))dx = e^x \cdot sen(x) - \int e^x \cdot \cos(x) \cdot dx.$$

Riapplichiamo il metodo per parti all'integrale del secondo membro:

$$f'x) = e^x, g(x) = \cos\,(x) \Rightarrow f(x) = e^x, g(x) = -sen(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \cos(x) \cdot dx = e^x \cdot \cos(x) - \int e^x - sen(x))dx = e^x \cdot \cos(x) - \int e^x(-sen(x))dx =$$

$$= e^x \cdot \cos(x) + \int e^x sen(x)dx.$$

Quindi:

$$\int \left(e^x \cdot sen(x)\right)dx = e^x \cdot sen(x) - \int e^x \cdot \cos(x) \cdot dx =$$

$$= e^x \cdot sen(x) - \left[e^x \cdot \cos(x) + \int e^x sen(x)dx\right] = e^x \cdot sen(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x sen(x)dx$$

$$\Longrightarrow \int \left(e^x \cdot sen(x)\right)dx = e^x \cdot sen(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x sen(x)dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 \cdot \int \left(e^x \cdot sen(x)\right)dx = e^x \cdot sen(x) - e^x \cdot \cos(x) + c \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \left(e^x \cdot sen(x)\right)dx = \frac{1}{2}e^x(sen(x) - \cos(x)) + c.$$

Esempio 3 - Calcolare $\int sen^2(x)dx$. (Teorico)

Soluzione

$\int sen^2(x)dx = \int sen(x) \cdot sen(x) \cdot dx;$

Considerato $f'(x) = sen(x) \Longrightarrow f(x) = -\cos(x)$ e $g(x) = sen(x) \Longrightarrow g'(x) = \cos(x)$, per la formula di integrazione per parti, si ha:

$$\int sen^2(x)dx = \int sen(x) \cdot sen(x) \cdot dx = -\cos(x)\, sen(x) - \int -cos(x)\cos(x)\, dx =$$

$$= -\cos(x)\, sen(x) + \int cos^2(x)dx = -\cos(x)\, sen(x) + \int 1 - sen^2(x)dx =$$

$$= -\cos(x)\, sen(x) + \int 1dx - \int sen^2(x)\, dx = -\cos(x)\, sen(x) + x - \int sen^2(x)\, dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 \cdot \int sen^2(x)dx = -\cos(x)\, sen(x) + x + c \Longrightarrow \int sen^2(x)dx = -\frac{1}{2}sen(x)\cos(x) + \frac{x}{2} + c =$$

$$= \tfrac{1}{2}(x - sen(x)\cos(x)) + c.$$

Esempio 4 - Calcolare $\int cos^2(x)dx$. (Teorico)

Il procedimento è analogo al caso precedente. Si ha:

$$\int cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + sen(x)\cos(x)) + c.$$

Esempio 4 – Calcolare $\int ln(x)dx$.

Soluzione

In questo caso, considerare:

$f'(x) = 1 \Longrightarrow f(x) = x \;\; e \;\; g(x) = \ln(x) \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

Quindi: $\int ln(x)dx = xln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = xln(x) - \int 1 \cdot dx = xln(x) - x + c =$

$= x(ln(x) - 1) + c.$

Esempio 5 – Calcolare $\int x \cdot ln(x)dx$.

In questo caso, considerare:

$f'(x) = x \Longrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} \;\; e \;\; g(x) = \ln(x) \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

Quindi: $\int x \cdot \ln(x)\, dx = \frac{x^2}{2} ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{x^2}{2} ln(x) - \frac{1}{2}\int x \cdot dx =$

$= \frac{x^2}{2} ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2}\left[ln(x) - \frac{1}{2}\right] + c.$

Esempio 6 – Calcolare $\int x^\alpha \cdot ln(x)dx$, *con* $\alpha \in R\backslash\{-1\}$.

Si ha: $\int x^\alpha \cdot ln(x)dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(x) - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + c.$

(III) Metodo di integrazione per sostituzione

&8.3.4 – Metodo di integrazione per sostituzione

Premettiamo un nuovo concetto: il concetto di differenziale primo di una funzione in un punto e in un intervallo.

Def. 8.4.1 – (Definizione di differenziale primo in un punto)

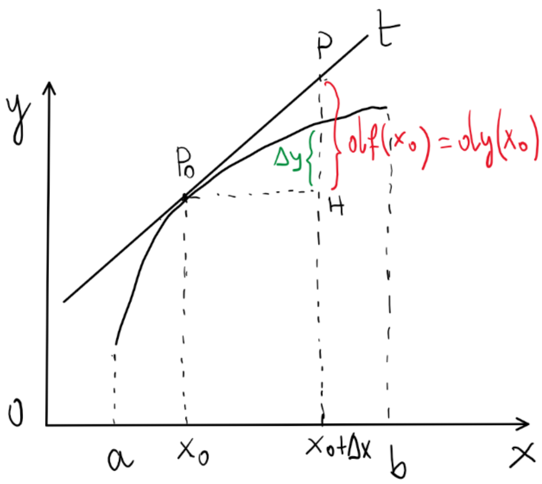
Se e se $x_0 \in [a,b] \ni' f$ *sia derivabile in* x_0*, si dice differenziale primo di* f *in* x_0 *il numero reale indicato con*

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

dove Δx *è un incremento della variabile* x *tale che* $x_0 + \Delta x \in [a,b]$.

Significato geometrico del differenziale primo

Il differenziale primo di f *in* x_0 *rappresenta l'incremento che la variabile dipendente* y *subisce al passaggio da* x *a* $x_0 + \Delta x$ *sulla tangente nel punto* $(x_0, f(x_0))$:



Si osservi che $dy(x_0) \neq \Delta y$ *e che, per* $x \longrightarrow x_0$*,* $dy(x_0)$ *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'infinitesimo* $\Delta x = x - x_0$:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{dy(x_0)}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow dy(x_0) = o(x - x_0)$$

Def. 8.4.2 - (Definizione di differenziale primo di una funzione in un intervallo)

Se $f: [a,b] \longrightarrow R$ *è una funzione derivabile in un intervallo* I*, si dice differenziale primo di* f *in* I *la funzione indicata con*

$$df = dy: I \longrightarrow R \ \ni' \ \forall x \in I: df(x) = dy = f'(x) \cdot \Delta x,$$

Poiché il differenziale della funzione $f(x) = x$ *è*

$$df(x) = dy = dx = f'(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \iff dx = \Delta x,$$

il differenziale di una qualunque funzione si può esprimere anche come segue:

$$df(x) = dy = f'(x) \cdot dx.$$

Di conseguenza, poichè $dy = f'(x) \cdot dx \iff f'(x) = \frac{dy}{dx} \iff$ *la derivata prima di una funzione si può esprimere come rapporti di due differenziali (due numeri).*

Operazioni con il differenziale

Se f e g sono due funzioni derivabili e se $k \in R$, si dimostra che:

1. $d(k \cdot f) = k \cdot df$;
2. $d(f + g) = df + dg$;
3. $d(f \cdot g) = (df) \cdot g + f \cdot (dg)$.

Esempio 1 - $d(3\ln(x) = 3 \cdot d(\ln(x)) = 3\frac{1}{x}dx$.

Esempio 2 - $d\left(\sqrt{x} + sen(x)\right) = d(\sqrt{x}) + d(sen(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \cos(x)\,dx$.

Prop. 8.4.3 – Se $y = f(x)$ è una funzione integrabile nell'intervallo I, posto $x = g(t)$, si ha:

$$\int f(x)dx = \int f(t) \cdot g'(t) \cdot dt = G(t) + c = G\left(g^{-1}(x)\right) + c.$$

Dim. $x = g(t) \Rightarrow dx = d\big(g(t)\big) = g'(t) \cdot dt \Rightarrow \int f(x)dx =$*(sostituendo)* $=$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t) \cdot dt = G(t) + c = G\left(g^{-1}(x)\right) + c.$$

Talvolta avviene che un dato integrale $\int f(x)dx$ si semplifica quando si cambia la variabile d'integrazione x con un'altra variabile t legata alla precedente da una opportuna relazione: esiste una teoria delle sostituzioni, ma noi ci limiteremo solo ad alcuni casi.

Se poniamo $x = g(t)$, con $g(t)$ funzione invertibile *avente derivata continua sempre diversa da zero, e diciamo $t = g^{-1}(x)$ la sua inversa, si ha che:*

$x = g(t) \Longrightarrow dx = dg(t) = g'(t)dt \Longrightarrow \int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot dt.$

Se la sostituzione è opportunamente scelta, l'integrale al secondo membro può essere semplice da calcolare così che se diciamo $\mathcal{F}(t)$ una sua primitiva, si ha:

$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot dt ,= F(t) + c = F\big(g^{-1}(x)\big) + c.$

È questa la formula d'integrazione per sostituzione.

Una conseguenza immediata del metodo di sostituzione sono gli integrali generalizzati degli integrali elementari.

Molto utile è la seguente tabella degli integrali generalizzati di quelli immediati:

Integrali elementari	*Integrali generalizzati*
1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	1') $\int f^n(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$
2) $\int \frac{1}{x} dx = ln(\lvert x \rvert) + c$	2') $\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)dx = ln(\lvert f(x) \rvert) + c$
3) $\int sen(x)dx = -\cos(x) + c$	3') $\int sen(f(x)) \cdot f'(x)dx = -\cos(\mathrm{f}(x)) + c$
4) $\int cos(x)dx = sen\,(x) + c$	4') $\int cos(f(x)) \cdot f'(x)dx = sen\,(\mathrm{f}(x)) + c$
5) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = tg\,(x) + c$	5') $\int \frac{1}{\cos^2(f(x))} f'(x)dx = tg\,(\mathrm{f}(x)) + c$
6) $\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)} dx = -cotg\,(x) + c$	6') $\int \frac{1}{sen^2(f(x))} f'(x)dx = -cotg\,(\mathrm{f}(x)) + c$
7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen\,(x) + c$	7') $\int \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)dx = arcsen\,(\mathrm{f}(x)) + c$

8) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg\ (x) + c$	*8')* $\int \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)dx = arctg(f(x)) + c$
9) $\int e^x dx = e^x + c$	*9')* $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$

Esempio 1 - Calcolare $\int sen(e^x) \cdot e^x dx.$

Soluzione

Se poniamo $e^x = t \Longrightarrow de^x = dt \Longrightarrow e^x dx = dt \Longrightarrow$*(sostituendo nell'integrale)*

$$\Longrightarrow \int sen(e^x) \cdot e^x dx = \int sen(t)dt = -\cos(t) + c = -\cos(e^x) + c.$$

Esempio 2 - Calcolare $\int \frac{1}{x}\ln(x)\, dx.$

Soluzione

Posto $\ln(x) = t \Longrightarrow d\ln(x) = dt \Longrightarrow \frac{1}{x}dx = dt \Longrightarrow$*(sostituendo nell'integrale)*

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{x}\ln(x)\, dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2} ln^2(x) + c.$$

Esempio 3 - Calcolare $\int tg(x)dx.$

Soluzione

$\int tg(x)dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx.$

Posto $\cos(x) = t \Longrightarrow d\cos(x) = dt \Longrightarrow -sen(x)dx = dt \Longrightarrow sen(x)dx = -dt.$

Sostituendo si ha:

$$\int tg(x)dx = \int \frac{1}{\cos(x)} sen(x)dx = \int \frac{1}{t} \cdot (-dt) = -\int \frac{1}{t}dt = -ln|t| + c = ln|\cos(x)| + c.$$

Esempio 4 - Teorico

Si dimostra che: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(\lvert f(x) \rvert + c$ *è l'integrale generalizzato di 1/x*

Dim. Se poniamo $f(x) = t \Rightarrow d\big(f(x)\big) = dt \Rightarrow f'(x) \cdot dx = dt \Rightarrow$ (sostituendo)

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{f(x)} \cdot f'^{(x)} \cdot dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + c = \ln(|f(x)| + c.$$

Quindi, nell'integrazione di una fratta, il primo controllo da fare è verificare se il numeratore è la derivata del denominatore e, nel caso affermativo, l'integrale è il logaritmo del denominatore preso in valore assoluto.

Esempio

$\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2-2} dx =$ (poichè $3x^2 + 2x = D(x^3 + x^2 - 2)$) $= ln(|x^3 + x^2 - 2|) + c.$

Esempio 5 – Teorico

Si dimostra che $$\int [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x) dx\, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$ *(Integrale generalizzato della potenza)*

Dim. Se poniamo $f(x) = t \Rightarrow d\big(f(x)\big) = dt \Rightarrow f'(x) \cdot dx = dt \Rightarrow$ (sostituendo)

$$\int [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x) dx\, dx = \int t^{\alpha} dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Esempio - Calcolare $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + x^3} dx$.

Soluzione

Se poniamo $1 + x^3 = t \Rightarrow d(1 + x^3) = dt \Rightarrow 3x^2 dx = dt \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} dt.$

Sostituendo, si ha:

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + x^3} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{1}{3} \cdot dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{1}{4} t \sqrt[3]{t} + c =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + x^3)\sqrt[3]{1 + x^3} + c.$$

Quindi, nell'integrazione di una potenza di una funzione, verificare se esiste la derivata della base.

Esempio 6 - Calcolare $\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

Soluzione

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}}dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx.$$

Se poniamo $e^x = t \Rightarrow de^x = dt \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t}dt.$

Inoltre, per $\begin{cases} x = 0: t = e^0 = 1 \\ x = 1: t = e^1 = e \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int_1^e \frac{t}{t^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{2t}{t^2+1}dx =$

$= \frac{1}{2}[\ln(t^2+1]_1^e = \frac{1}{2}[\ln(e^2+1) - \ln(2)] = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)\right].$

8.4 - Metodo di integrazione delle funzioni razionali fratte (4° metodo di integrazione)

È un metodo per il calcolo di $\int \frac{N(x)}{Dx)}dx$, dove N(x) è un polinomio di grado m e D(x) è un polinomio di grado n, con <u>m < n.</u>

Se il grado di N(x) è maggiore o uguale del grado di D(x), si divide N(x) per D(x).

Detti Q(x) è il quoziente ed R(x) il resto della divisione, si ha:

$N(x) = Q(x)\cdot D(x) + R(x) \Leftrightarrow \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \Rightarrow \int \frac{N(x)}{D(x)}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}dx$, con $R^\circ(x) < D^\circ(x)$.

Esempio - $\int \frac{x^3+x}{x^2+x+1}dx$

Il quoziente è $Q(x) = x-1, R(x) = x+1 \Rightarrow \frac{x^3+x}{x^2+x+1} = x-1+\frac{x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{x^3+x}{x^2+x+1}dx = \int \left(x-1+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx =$

$= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx.$

D'ora in poi, supporremo che grado N(x) < grado D(x).

Integrali notevoli di funzioni razionali fratte

I seguenti integrali sono fondamentali (notevoli) perchè ad essi si può ricondurre il calcolo dell'integrale di una qualsiasi funzione razionale.

1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + c$

Dim. Già dimostrata (Esempio 4 - teorico)

2. $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} ln(|ax+b|) + c.$

Dim. $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{D(ax+b)}{ax+b} dx = \frac{1}{a} ln(|ax+b|) + c.$

Conseguenza: $\int \frac{k}{ax+b} dx = \frac{k}{a} ln(|ax+b|) + c.$

3. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right) \cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c$, *se* $\Delta < 0$.

Dim. Se $\Delta < 0$, *il denominatore non ha zeri reali. In questo caso si ha:*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right].$$

Quindi:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\frac{-\Delta}{4a^2}\left[\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{-\Delta}{4a^2}}+1\right]}dx = \frac{1}{a}\left(\frac{4a^2}{-\Delta}\right)\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}\right)^2+1\right]}dx =$$

$$= \left(\frac{4a}{-\Delta}\right)\cdot\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right]}dx = \left(\frac{4a}{-\Delta}\right)\cdot\frac{1}{\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}}\int \frac{\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1}dx =$$

$$= \left(\int \frac{f'}{1+f^2} = arctg(f)+c\right) = \left(\frac{4a}{-\Delta}\right)\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)\cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c \Rightarrow \int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)\cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c.$$

4. $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \frac{m}{2a}ln|x^2+bx+c| + \left(\frac{2an-bm}{a\sqrt{-\Delta}}\right)\cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c,\ \ se\ \Delta<0.$

Dim. $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$*, con* $\Delta<0$*, è ricondotto alla somma di due integrali uno di tipo 1 (log) l'altro di tipo 3 (arcotangente).*

Si ha:

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int\frac{mx}{ax^2+bx+c}dx + \int\frac{n}{ax^2+bx+c}dx = m\int\frac{x}{ax^2+bx+c}dx + n\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}dx + n\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx - \frac{mb}{2a}\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx + n\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(-\frac{mb}{2a}+n\right)\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(\frac{2an-mb}{2a}\right)\cdot\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{m}{2a}ln|x^2+bx+c| + \left(\frac{2an-bm}{2a}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)\cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c =$$

$$= \frac{m}{2a}ln|x^2+bx+c| + \left(\frac{2an-bm}{2a}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)\cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c$$

$$= \frac{m}{2a}ln|x^2+bx+c| + \left(\frac{2an-bm}{a\sqrt{-\Delta}}\right)\cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c.$$

Ai casi precedenti è possibile ricondurre l'integrale di una funzione razionale fratta

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

con grado P(x) < grado Q(x), decomponendo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in "fratti semplici" applicando il "metodo di Hermitte".

Se indichiamo con

- $\{b_j\}$ le radici reali, di molteplicità rispettivamente, $\{n_j\}$, di Q(x)

e con

- $\alpha_k + \beta_k i$ le radici complesse di molteplicità $\{m_k\}$, di Q(x)

la decomposizione in "fratti semplici" da calcolare è:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-b_1} + \cdots + \frac{A_j}{x-b_j} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+c_1x+d_1} + \cdots + \frac{C_kx+D_k}{x^2+c_kx+d_k} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P^1(x)}{Q^1(x)}\right)$$

(Formula di Hermitte)

dove

$$Q^1(x) = (x-b_1)^{n_1-1}(x-b_2)^{n_2-1}(\dots)\left(x-b_j\right)^{n_j-1}(x^2+c_1x+d_1)^{m_1-1}\dots(x^2+c_kx+d_k)^{m_k-1}$$

e $P^1(x)$ è un polinomio di grado -1 rispetto $Q^1(x)$, con coefficienti da determinare.

Si noti che in $Q^1(x)$ compaiono solo i fattori che fornisco radici multiple.

Esempio 1 - Calcolare $\int \frac{2x-1}{x(x-1)^2}dx$.

Soluzione

Il denominatore ha solo radici reali: $x = 0$ (semplice) e $x = 1$ (doppia).

La decomposizione di Hermitte da calcolare è:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x-0}+\frac{B}{x-1}+\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x-1}\right)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{-c}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)-Cx}{x(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2-2x+1)+Bx^2-Bx-Cx}{x(x-1)^2}=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx-Cx}{x(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B-C)x+A}{x(x-1)^2}\Rightarrow (\textit{per il principio di identità dei polinomi})\begin{cases}A+B=0\\-2A-B-C=2\\A=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}B=-A=1\\2-1-C=2\\A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1\\C=-1.\\A=-1\end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x-1}\right)\Rightarrow\int\frac{2x-1}{x(x-1)^2}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\ln(|x|)+\ln(|x-1|)-\frac{1}{x-1}+c.$$

Esempio 2 - Calcolare $\int\frac{1}{x(x^2+x+1)^2}dx$.

Soluzione

Il denominatore ha una sola radice reale $x=0$ *(semplice) e due radici complesse multiple (doppie), derivanti da* $x^2+x+1=0$ *il cui* $\Delta=-3<0$.

La decomposizione da calcolare è:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{d}{dx}\left(\frac{Dx+E}{x^2+x+1}\right)=$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\left(\frac{D(x^2+x+1)-(2x+1)(Dx+E)}{(x^2+x+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\left(\frac{Dx^2+Dx+D-2Dx^2-2Ex-Dx-E}{(x^2+x+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{A(x^2+x+1)^2+x(x^2+x+1)(Bx+c)+(Dx^3+Dx^2+Dx-2Dx^3-2Ex^2-Dx^2-Ex}{x(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{A\left(x^2+x+1\right)^2+x\left(x^2+x+1\right)(Bx+c)+Dx^3+Dx^2+Dx-2Dx^3-2Ex^2-Dx^2-Ex}{x(x^2+x+1)^2}.$$

Riducendo ai minimi termini il numeratore di tale ultima frazione e imponendo il principio di identità con il numeratore del 1° membro si ottiene un sistema nelle incognite A,B,C,D,E: il procedimento non è complicato ma lungo da eseguire.

Supponendo che si abbia:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = 1 \\ E = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right) \Rightarrow \int \frac{1}{x(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx +$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \int \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right) dx = \ln(|x| + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{x-1}{x^2+x+1} + c.$$

Poiché $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{f'}{f} dx = \ln(x^2+x+1) + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x^2+x+1)^2} dx = \ln(|x| + \ln(x^2+x+1) + \frac{x-1}{x^2+x+1} + c.$$

Esempio 2 - Calcolare $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx$.

Soluzione

Il denominatore ha solo radici complesse di molteplicità 2.

La decomposizione di Hermitte da calcolare è:

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^1}\right) =$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C(x^2+x+1) - (2x+1)(Cx+D)}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+x+1) + Cx^2 + Cx + C - 2Cx^2 - 2Dx - Cx - D}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax^2 + Ax + Bx^2 + Bx + B + Cx^2 + Cx + C - 2Cx^2 - 2Dx - Cx - D}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^3 + (A+B-C)x^2 + (A+B-2D)x + (B+C-D)}{(x^2+x+1)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax^3 + (A+B-C)x^2 + (A+B-2D)x + (B+C-D)}{(x^2+x+1)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A+B-C = 0 \\ A+B-2D = 0 \\ B+C-D = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B-C = 0 \\ B-2D = 0 \\ B+C-D = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ C = B \\ B-2D = 0 \\ B+B-D = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ C = B \\ B = 2D \\ 4D-D = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ C = \frac{2}{3} \\ B = \frac{2}{3} \\ D = \frac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{x^2+x+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}{(x^2+x+1)^1}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{\frac{2}{3}}{x^2+x+1}dx + \int \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}{(x^2+x+1)^1}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + \frac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}{(x^2+x+1)^1} + c = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)^1} + c$$

Calcoliamo $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \left[(\Delta = -3): \int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \left(\frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\right) \cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c\,)\right] =$

$$= \frac{-2}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Quindi:

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)^1} + c =$$

$$= \left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}\right) arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + c.$$

Esempio - Calcolare $\int \frac{1}{x^2-4}dx$.

Soluzione

Gli zeri del denominatore sono: $x = \pm 2$ $(\Delta > 0)$.

La decomposizione da calcolare è:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}\Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ (Applicandi il pricipio di identità dei polinomi) $\begin{cases} 0=A+B \\ 1=2A-2B \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} B=-A \\ 4A=1 \end{cases}\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\begin{cases} B=-\dfrac{1}{4} \\ A=\dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Quindi: $\int\frac{1}{x^2-4}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}dx=$

$$=\frac{1}{4}ln(|x-2|)-\frac{1}{4}ln(|x+2|)+c.$$

Applicazioni del calcolo integrale

&8.5 - Applicazioni del calcolo integrale

a) Lunghezza di un arco di curva regolare

L'integrale definito permette di calcolare la lunghezza di un arco di curva.

Prop.8.5.1 – a) Se l'arco di curva regolare ha equazione cartesiana $y=f(x)$, si dimostra che la lunghezza dell'arco per $x\in[a,b]$ è dato da

$$\ell=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,;$$

b) Se l'arco di curva è dato in forma parametrica di equazioni $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, con $t\in[a,b]$, la lunghezza dell'arco è data da:

$$\ell=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$$

Esempio 1 – Calcolare la lunghezza dell'arco della funzione $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$*, per* $x \in [1,4]$.

Soluzione

$$f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-1} \Longrightarrow \ell = \int_1^4 \sqrt{1+\left[\sqrt{x-1}\right]^2}\,dx =$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1+x-1}\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left[x\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

Esempio 2 – Calcolare la lunghezza dell'arco di curva γ *così definito:*

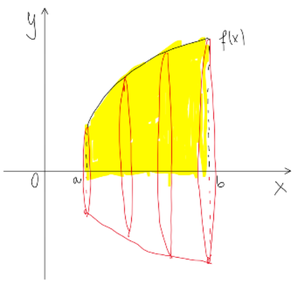
$\underline{r}(t) = (e^t, e^t + 1)$*, per* $t \in [0, \ln(2)]$.

Soluzione

$$\underline{r}'(t) = \begin{cases} x'(t) = e^t \\ y'(t) = e^t \end{cases} \Longrightarrow \ell = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{[e^t]^2 + [e^t]^2}dt = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{2[e^t]^2}dt = \int_0^{\ln(2)} e^t\sqrt{2}dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\ln(2)} e^t dt = \sqrt{2}[e^t]_0^{\ln(\sqrt{2})} = \sqrt{2}\left[e^{\ln(\sqrt{2})} - e^0\right] = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

b) Volume del solido generato dalla rotazione completa (rotazione di 360°) di un trapezoide attorno all'asse x



Prop.8.5.2 - Il volume del solido è dato da:

$$\mathcal{V}_{T,2\pi} = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

&8.6- Derivazione di una funzione integrale composta

Prop. 8.6 - (Derivata di una funzione integrale composta)

Se $f:[a,b]\longrightarrow R$ *è una funzione continua in* $[a,b]$ *e se* $g(x)$ *e* $h(x)$ *sono due funzioni derivabili in* $[a,b]$ *, si dimostra che:*

1. $D\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right) = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x);$
2. $D\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right) = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x) - f\big(h(x)\big)\cdot h'(x).$

Dim. 1 - $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$ *è una funzione composta di componenti:*

$y = g(x)$ (1ª componente) e $y = G(x) = \int_a^x f(t)dt$ (2^a *componente* $=$ *funzione integrale di* f) $\Leftrightarrow F(x) = G\big(g(x)\big)$.

Per il teorema della derivata della composta, si ha: $DF(x) = D\big[G\big(g(x)\big)\big] = G'(g(x)\cdot g'(x) = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x).$

Dim. 2 - $D\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right) = D\left(\int_{h(x)}^{a} f(t)dt + \left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)\right) = D\left(-\int_a^{h(x)} f(t)dt + \left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)\right) = D\left(-\int_a^{h(x)} f(t)dt\right) + D\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right) = -f\big(h(x)\big)\cdot h'(x) + f\big(g(x)\big)\cdot g'(x).$

Esempio 1 – Calcolare la derivata di $\int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}dt.$

Soluzione

$$D\left(\int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}dt\right) = e^{-(x^3)^2}\cdot D(x^3) - e^{-(x^2)^2}\cdot D(x^2) = e^{-x^6}\cdot 3x^2 - e^{-x^4}\cdot 2x =$$

$$= x\cdot e^{-x^4}\cdot\left(3x\cdot e^{-x^2} - 2\right).$$

Esempio 2 – Calcolare la derivata di $\int_{\cos(x)}^{sen(x)} \frac{1}{1-t^2}dt.$

Soluzione

$$D\left(\int_{\cos(x)}^{sen(x)} \frac{1}{1-t^2}dt.\right) = \frac{1}{1-sen^2(x)}\cdot Dsen(x) - \frac{1}{1-cos^2(x)}\cdot Dcos(x) =$$

$$= \frac{1}{cos^2(x)} \cdot cos(x) - \frac{1}{sen^2(x)} \cdot (-sen(x)) = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{1}{sen(x)}.$$

Due integrali notevoli di funzioni irrazionali

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c.$

Dim. *Posto* $x = a \cdot sen(t) \Longrightarrow dx = a\cos(t)\, dt \Longrightarrow \int \sqrt{a^2 - x^2} dx =$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2 sen^2(t)}\, a\cos(t)\, dt = \int a\sqrt{1 - sen^2(t)}\, a\cos(t)\, dt =$$

$$= a^2 \cdot \int \cos^2(t)\, dt = a^2 \cdot \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos(2t)\, dt\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2} sen(2t) + c\right) = \frac{a^2}{2}\left(arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + sen(t)\cos(t) + c\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + c\right) = \frac{a^2}{2} arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{ax}{2}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} + c =$$

$$= \frac{a^2}{2} arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{ax}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + c = \frac{a^2}{2} arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + c.$

Dim.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx = \left[posto\ \frac{x}{a} = t \Longrightarrow x = at, dx = adt\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} adt = \frac{a}{a} arcsen(t) + c = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

Formulario: tavola degli integrali indefiniti

Integrali indefiniti fondamentali

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int a\, dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ , con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int (1+\tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int (1+\cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh\, x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh\, x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

Integrali notevoli

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \log\left|\frac{\tan x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log\left|\frac{\tan x}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} arc\sin x + c \\ -arc\cos x + c \end{cases}$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} arc\cos x + c \\ -arc\sin x + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\tan x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \begin{cases} arc\sinh\, x + c \\ \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \sqrt{(x^2 \pm a^2)}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2)}dx = \frac{1}{2}\left(a^2 arc\sin\ \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin\ x \cos x) + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin\ x \cos x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \int \left(1 - \tanh^2 x\right)dx + c = \tanh x + c$$

$$\int \sqrt{(x^2 \pm a^2)}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2)}dx = \frac{1}{2}\left(a^2 arc\sin\ \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin\ x \cos x) + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin\ x \cos x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \int \left(1 - \tanh^2 x\right)dx + c = \tanh x + c$$