Lez. 13 – Calcolo differenziale

domenica 13 ottobre 2024 05:31

Introduzione

Il calcolo differenziale è utilizzato in molte discipline: in matematica per calcolare l'equazione di una tangente, in fisica per calcolare velocità, accelerazione nel moto di un corpo, ecc..

Poniamo le seguenti definizioni -

DEF. 1 - (Incremento e rapporto incrementale di una funzione)

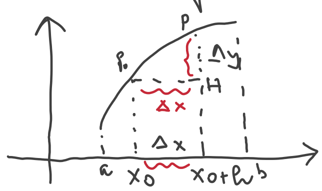
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in X \cap DX$, si dice:

1) incremento della v. indipendente x_0 ogni
$\forall h \in \mathbb{R}, h \neq 0, \exists' \; x_0 + h \in X$;

2) incremento della funzione nel punto x_0 il numero reale
$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) \in \mathbb{R};$$

3) rapporto incrementale della funzione f nel punto x_0 e relativo ad h, il numero reale
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Oss. - Fissato $x_0 \in X$, il rapporto incrementale è funzione di h (dipende da h):



$h = \Delta x = x_0 + h - x_0$

DEF. 2 - (Definizione di derivata (derivata prima))

Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in X \cap DX$, si dice derivata prima di f nel punto x_0 il
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \tilde{\mathbb{R}}$$

La derivata (prima) di f in x_0, si indica con:
$$y'(x_0),\ f'(x_0),\ Df(x_0),\ \frac{dy}{dx}(x_0). \qquad \dot{x}(t)$$

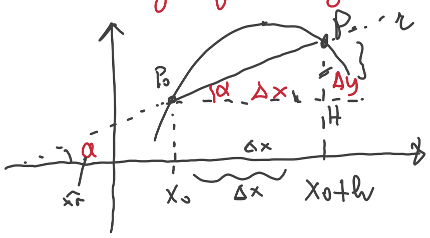
DEF. 3 - (Definizione di funzione derivabile in x_0)

Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in X \cap DX$, si dice che:

$(f \text{ è derivabile in } x_0) \Leftrightarrow (f'(x_0) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

(a) Significato geometrico del rapporto incrementale



Poiché $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overline{HP}}{\overline{P_0H}} = tg(\alpha) =$

$= tg(\widehat{xr}) = m_{secante(P_0P)}$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$ è il coefficiente angolare della secante

del grafico di f, passante per $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x_0+h, f(x_0+h))$.

(b) Se $h \to 0 \Rightarrow P \to P_0 \Rightarrow s(P_0, P) \to$ tangente in P_0 (se esiste)

$\Rightarrow$ se $h \to 0$: $m_{s(P_0,P)} \longrightarrow m_{t(P_0)}$ = coeff. ang. della tangente

in $P_0(x_0, f(x_0))$, se esiste.

Dunque: $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists\, t_{P_0}$ tangente in P_0 a Γ.

In particolare:

1) Se $f'(x_0) = 0 \Rightarrow t_{P_0(x_0,y_0)} \parallel x$ e ha equazione $y = f(x_0) = y_0$;

2) se $f'(x_0) = \pm\infty \Rightarrow t_{P_0(x_0,y_0)} \parallel y$ e ha equazione $x = x_0$;

3) Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}, \neq 0, \Rightarrow t_{P_0(x_0,y_0)}$ è obliqua e ha equazione:

$$y = \underbrace{f(x_0)}_{y_0} + f'(x_0)(x - x_0). \qquad y = y_0 + m(x-x_0)$$