Teoremi di De L'Hospital

domenica 13 ottobre 2024 10:31

Teorema 1 - (1° teorema di De L'Hospital: 0/0)

Se f, g sono due funzioni derivabili e se $c \in \hat{\mathbb{R}}$ ∋'

1) $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

2) $\lim_{x \to c} g(x) = 0$

$\Big\}\ \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

3) $\exists \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \hat{\mathbb{R}}$

allora

$$\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 2 - (II teor. di De L'Hospital: $\frac{\infty}{\infty}$)

Se f, g sono due funzioni derivabili e se $c \in \hat{\mathbb{R}}$ (finito o infinito) ∋'

1) $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

2) $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$

3) $\exists \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \hat{\mathbb{R}}$

allora

$$\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Note

I teoremi I e II di De L'Hospital si possono applicare solo se le forme indeterminate sono: $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

A queste si possono ricondurre, però, le altre forme indeterminate trasformandole,

1) $\infty - \infty$: $f - g = \dfrac{\frac{1}{g}^{\to 0} - \frac{1}{f}^{\to 0}}{\left(\frac{1}{f \cdot g}\right)_{\to 0}}$; $= \frac{0}{0}$

2) $0 \cdot \infty$: $f \cdot g = \dfrac{f^{\to 0}}{\left(\frac{1}{g}\right)_{\to 0}} = \dfrac{g^{\to \infty}}{\left(\frac{1}{f}\right)_{\to \infty}}$;

3) $0^0, \infty^0, 1^\infty$: $f^g = e^{g \cdot \ln(f)}$.

Esempio: $\lim_{x \to 0^+} [\operatorname{sen}(x)]^x \ (0^0) = \lim_{x \to 0^+} e^{\overset{0}{x} \cdot \ln(\operatorname{sen} x)^{\to -\infty}} =$

$= e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen}(x)^{\to -\infty}}{(1/x)^{\to +\infty}}} =$ (confronto di infiniti; ord $\ln(\operatorname{sen} x) <$ ord$\left(\frac{1}{x}\right)$)

$= e^0 = 1$.

oppure de l'Hospital.