Proprietà delle funzioni derivabili in punto

domenica 13 ottobre 2024 06:21

Teorema 1 - (C.N. di derivabilità in un punto)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in X \cap DX$, si dimostra che:

$$\left(f \text{ derivabile in } x_0\right) \Rightarrow \left(f \text{ è continua in } x_0\right) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dim. Dobbiamo dimostrare che:

$$\left(\text{se } f'(x_0) \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right).$$

Infatti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) + f(x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \Bigg[\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow \, f'(x_0) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\downarrow \, f(x_0)} \Bigg] =$$

$$= 0 + f(x_0) = f(x_0).$$

Posto:
$x_0 + h = x \Rightarrow h = x - x_0$
$h \to 0 : x \to x_0$

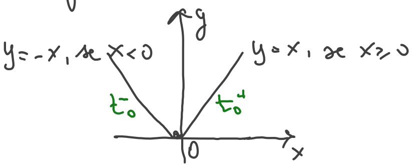
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nuova espr. della derivata

Oss. - Tale condizione è solo necessaria: esistono funzioni continue in un punto **non** derivabili in quel punto.
Un esempio è dato dalla funzione $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



Nel punto $x_0 = 0$, $y = |x|$ è continua ma non è derivabile perché:

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|\overbrace{0+h}^{f(0+h)}| - \overbrace{|0|}^{f(0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} : \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists \, y'(0).$$