Funzioni Convesse - Funzioni concave

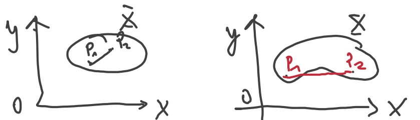
Poniamo le seguenti definizioni.

DEF. 1 – (Insieme convesso, insieme concavo)

Se $X \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che:

a) (X è un insieme convesso) $\Leftrightarrow$ ($\forall P_1, P_2 \in X$: il segmento $\overline{P_1P_2} \subseteq X$);

b) (X è un insieme concavo) $\Leftrightarrow$ ($\exists P_1, P_2 \in X \ni' \overline{P_1P_2} \not\subseteq X$).



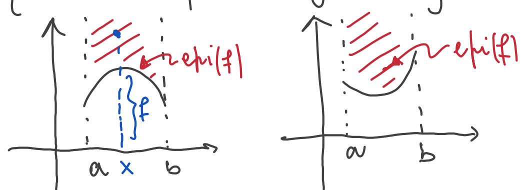
X convesso $\qquad$ X concavo

Def. 2 – (Definizione di epigrafo, sottografo)

Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, continua in X intervallo, si dice:

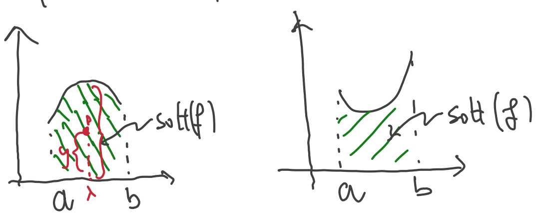
a) epigrafo di f, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$epi(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X \text{ e } y \geq f(x)\}$$



b) sottografo di f, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$sott(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X \text{ e } y \leq f(x)\}.$$



Ciò premesso, diamo la seguente definizione.

DEF. 3 – (Funzione convessa, funzione concava)

Se $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in X intervallo, si dice che:

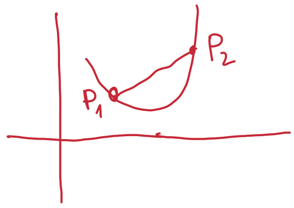
a) (f è una funzione convessa in X) $\Leftrightarrow$ ($epi(f)$ è un insieme convesso);

b) (f è una funzione concava in X) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ($epi(f)$ è un insieme concavo) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ($sott(f)$ è un insieme convesso).

f convessa — f concava — f né convessa, né concava! in [a,c] concava; in [c,b] convessa.

Def. 4 - (II definizione di funzione convessa/concava)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione definita in X intervallo, si dice che:

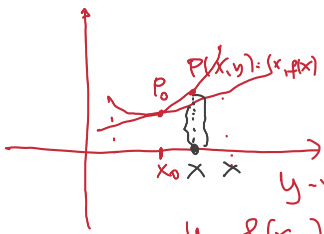
a) (f è una funzione convessa in X) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ($\forall P_1, P_2 \in \Gamma_f$: l'arco $\widehat{P_1P_2}$ di Γ è al di sotto della corda $\overline{P_1P_2}$);



b) (f è una funzione concava in X) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ($\forall P_1, P_2 \in \Gamma_f$: l'arco $\widehat{P_1P_2}$ di Γ è al di sopra della corda $\overline{P_1P_2}$).

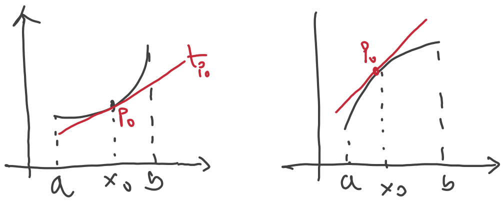
DEF. 5 - (III Definizione di funzione convessa/concava)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione definita in X intervallo, si dice che:

a) (f è convessa in X) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ($\forall P_0 \in \Gamma$, Γ è al di sopra della tangente in P_0 a Γ)
$\Leftrightarrow$ ($\forall x_0 \in X$: $f(x) \geq \underline{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$)



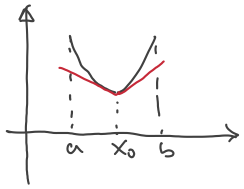
$P_0(x_0, f(x_0))$
$m_t = f'(x_0)$
$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

b) (f è concava in X) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ($\forall P_0 \in \Gamma$, Γ è al di sotto della tangente in P_0 a Γ)
$\Leftrightarrow$ ($\forall x_0 \in X$: $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$).



Oss. 1 - Le funzioni lineari $f(x) = ax + b$ sono funzioni sia convesse, sia concave in ogni $X \subseteq \mathbb{R}$.
Oss. 2 - Le funzioni convesse/concave sono funzioni continue in $\mathring{X}$, discontinue al più negli estremi.
Oss. 3 - Le funzioni convesse/concave possono

essere non derivabili in qualche punto interno all'intervallo X.



f convessa in $[a,b]$
non derivabile in $x_0 \in]a,b[$

Sussistono i seguenti teoremi.

Teorema 1 - (C.N.S - 1° criterio di convessità)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in X intervallo, si dimostra che:

a) (f è convessa in X) (strett.) $\Leftrightarrow$ (f' è strett. cresc. in X)
b) (f è concava in X) $\Leftrightarrow$ (f' è strett. decr. in X)

Teorema 2 - (C.N.S - 2° criterio di convessità)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile almeno due volte in $\mathring{X}$, si dimostra che:

a) (f è convessa in X) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in \mathring{X} : f''(x) \geq 0$)
b) (f è concava in X) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in \mathring{X} : f''(x) \leq 0$).

Esempio - Studiare la convessità della funzione
$$f(x) = e^x + x.$$
Soluzione.
Il dominio di $f(x)$ è: $X = \mathbb{R}$.
Si ha:
1) $f'(x) = e^x + 1$;
2) $f''(x) = e^x$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per il 2° criterio di convessità, è:
f convessa in $X = \mathbb{R}$.