Cap.2 - L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi

&2.1 – L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi

Def.2.1.1 – (Definizione di unità immaginaria)

Si dice unità immaginaria il numero $i \notin \mathbb{R}$ *tale che* $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$.

Def.2.1.2 – (Definizione di numero complesso)

Si dice numero complesso ogni numero del tipo

$$z = a + b \cdot i$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ *e* i *è l'unità immaginaria.*

- a *si dice parte reale del numero complesso* z*, indicata con* $Re(z) \in \mathbb{R}$;
- b *si dice parte immaginaria del numero complesso* z*, indicata con* $Im(z) \in \mathbb{R}$;
- *Se* $a = Re(z) = 0$ *e* $b = Im(z) \neq 0$: $z = bi$ *è detto numero immaginario puro.*

L'insieme dei numeri complessi è indicato con $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{z | \exists a, b \in R \ni' z = a + bi\}.$$

Si osservi che poiché $\forall x \in \mathbb{R}: x = x + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$, *si ha che:*

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \ \Leftrightarrow \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{C} \ni' Im(x) = 0\}.$$

Ogni numero reale si può considerare come un numero complesso la cui parte immaginaria è nulla.

Def.2.1.3 – (Definizione di numeri complessi uguali)

Se z *e* $z' \in \mathbb{C}$ *sono due numeri complessi, con* $z = a + ib$ *e* $z' = a' + ib'$, *si dice che:*

$$(z = z') \Leftrightarrow (a = a' \ \text{ e } \ b = b') \Leftrightarrow \big(Re(z) = Re(z') \text{ e } \ Im(z) = Im(z')\big).$$

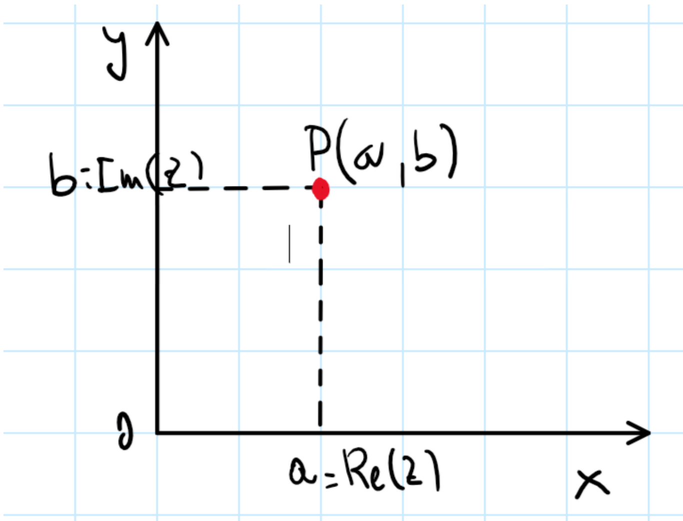
Di conseguenza, poiché

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ \exists | z \in \mathbb{C} \ni' z = a + bi,$$

è possibile identificare ogni numero complesso z con <u>una sola</u> coppia ordinata (a,b) di numeri reali,

$$z = (a, b).$$

Di più, se consideriamo un riferimento cartesiano Oxy, è possibile rappresentare ogni numero complesso $z = a + bi = (a, b)$ con l'unico punto P del piano cartesiano le cui coordinate sono (a,b), dove $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$:



In tale rappresentazione:

1. *i numeri reali sono rappresentati da punti che appartengono all'asse x perciò detto <u>asse reale</u>;*
2. *i numeri immaginari sono rappresentati da punti appartenenti all'asse y perciò detto <u>asse immaginario</u>.*

Inoltre, $\forall z \in \mathbb{C}$:

- $z = a + bi$ *si dice forma algebrica del numero complesso z;*
- $z = (a, b)$ *si dice forma cartesiana del numero complesso z;*
- $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ *si dice modulo del numero complesso z.*

Operazioni con I numeri complessi in forma algebrica

&2.2 – *Operazioni nell'insieme* $\mathbb{C}$

a) Addizione o somma in $\mathbb{C}$

Def.2.2.1 – (Definizione di addizione + in C)

$\forall z = a + ib, z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$: $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

z + z' è il numero complesso avente parte reale

$$Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$$

e parte immaginaria

$$Im(z + z') = Im(z) + Im(z').$$

Tale operazione +, definita in $\mathbb{C}$*, è commutativa, associativa, dotata di elemento neutro* $(0_C = 0_R)$ *e di elemento simmetrico* $(-z = -a - bi)$:

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tale che:*

1. $\forall z, z' \in \mathbb{C}: z + z' = z' + z;$ *(+ è commutativa)*
2. $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}: z + (z' + z'') = (z + z') + z'';$ *(+ è associativa)*
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{C} \ni' \ \forall z \in \mathbb{C}: z + 0 = 0 + z = z;$ *(+ è dotata di elemento neutro* 0*)*
4. $\forall z \in \mathbb{C}, \exists -z \in \mathbb{C} \ni' z + (-z) = -z + z = 0.$ *(+ è dotata di elemento simmetrico* $-z$*)*

Quindi, l'insieme $(\mathbb{C}, +)$ *è un gruppo commutativo (o abeliano).*

Def.2.2.2 – (Definizione di moltiplicazione $\cdot$ *in* $\mathbb{C}$*)*

$\forall z = a + ib, z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$: $z \cdot z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Quindi, $\forall z, z' \in \mathbb{C}$:

$$Re(z \cdot z') = aa' - bb', \ Im(z \cdot z') = ab' + a'b.$$

Questa operazione definita in $\mathbb{C}$ *è commutativa, associativa, distributiva rispetto a +, dotata di elemento neutro* $1_C = 1_R$ *e tale che ogni elemento di* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *è simmetrizzabile rispetto a essa:*

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tale he:}$$

5. $\forall z, z' \in \mathbb{C}: z \cdot z' = z' \cdot z$;
6. $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}: z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$;
7. $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}: z \cdot (z' + z'') = (z \cdot z') + (z \cdot z'')$;
8. $\exists 1 \in \mathbb{C} \ \ni' \ \forall z \in \mathbb{C}: z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$;
9. $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0, \exists z' \in \mathbb{C} \ni' \ z \cdot z' = z' \cdot z = 1$, *dove* $z' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - i\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

Dunque, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *è un campo, detto campo dei numeri complessi.*

Nota bene – Nelle operazioni con i numeri complessi espressi in forma algebrica, i numeri complessi si possono considerare come binomi e applicare ad essi le regole dei binomi.

Esempio – Se $z = 2 + 3i$ *e* $z' = -2 + 3i$, *si ha:*

1) $z + z' = (2 + 3i) + (-2 + 3i) = (2 - 2) + (3i + 3i) = 6i$;
2) $z - z' = (2 + 3i) - (-2 + 3i) = 2 + 3i + 2 - 3i = 4$;
3) $(2 + 3i)(-2 + 3i) = (3i)^2 - 2^2 = 9i^2 - 4 = -9 - 4 = -13$;
4) $\frac{2+3i}{-2-3i} = \frac{(2+3i)(-2+3i)}{(-2-3i)(-2+3i)} = \frac{-13}{4-9i^2} = \frac{-13}{4+9} = -1$;
5) $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

Def.2.2.3 – (Definizione di numero complesso coniugato)

$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, *si dice complesso e coniugato di z il numero complesso*

$$\bar{z} = a - ib$$

avente $Re(\bar{z}) = Re(z)$ *e* $Im(\bar{z}) = -Im(z)$.

Prop.2.2.1 – (Proprietà del coniugato)

$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib$, *si ha:*

1. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
2. $\bar{\bar{z}} = z$;
3. $z + \bar{z} = 2a = 2Re(z)$;
4. $\forall z \in \mathbb{C}: z - \bar{z} = 2bi = 2Im(z)$;

5. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = \varrho^2$.

Def.2.2.4 – (Definizione di inverso moltiplicativo)

$\forall z \in \mathbb{C}$, *si dice inverso moltiplicativo di z il numero complesso*

$$z' \in \mathbb{C} \ni' zz' = z'z = 1.$$

Prop.2.2.2 – (Reciproco o inverso moltiplicativo di un numero complesso)

$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \neq 0$, *si dimostra che:*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Dim.

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0: z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0: z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \Leftrightarrow Re(z^{-1}) = \frac{a}{a^2+b^2}, Im(z^{-1}) = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Esempio 1 – Dato $z = 2 + i \neq 0$, *calcolare* z^{-1} *in due modi diversi e verificare che* $z \cdot z^{-1} = 1$.

Soluzione

(a)

1. $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{2}{4+1} - i\frac{1}{4+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$; *(applicando 2.2.2)*
2. $z^{-1} = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4-i^2} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$. *(con le operazioni)*

(b)

$z \cdot z^{-1} = (2+i)\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i + \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}i^2 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$. *(verifica)*

Esempio 2 – Verificare che $\frac{1}{i} = -i = \bar{i}$ *(coniugato di* i*).*

Soluzione

Poiché $z = i \Longrightarrow z^{-1} = \frac{1}{i} = 0 - \frac{1}{1}i = -i \Longrightarrow \frac{1}{i}$ *è il coniugato di i.*

Def. 2.2.5 – (Quoziente di due numeri complessi)

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, *con* $z' \neq 0$, *si definisce quoziente di z e z' il numero complesso*

$$w = \frac{z}{z'}$$

tale che

$$z = w \cdot z'.$$

Prop.2.2.3 – (Quoziente di due numeri complessi)

$\forall\, z = a + ib$ *e* $\forall\, z' = a' + ib' \neq 0$ *si dimostra che:*

$$w = \frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} - \frac{ab' - a'b}{a'^2 + b'^2} \cdot i.$$

Dim.

$$w = \frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a' + ib')(a' - ib')} = \frac{aa' - iab' + a'bi - i^2 bb'}{a'^2 + b'^2} =$$

$$= \frac{aa' + bb' + (a'b - ab')i}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} - \frac{ab' - a'b}{a'^2 + b'^2} \cdot i.$$

Def. 2.2.6 – (Definizione di potenza in $\mathbb{C}$)

$\forall z \in \mathbb{C}$ *e* $\forall n \in \mathbb{N}$, *si definisce potenza n-sima di z il numero complesso*

$$z^n = \begin{cases} 1, se\ n = 0 \\ z, se\ n = 1 \\ z \cdot z \cdot \ldots z, se\ n \geq 2 \end{cases}$$

Prop.2.2.4 – (Potenze dell'unità immaginaria i)

$\forall \in \mathbb{N}n$, *si dimostra che:*

a) $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$;

b) $\forall n \in N, n > 3$: $i^n = i^r$ *dove r è il resto della divisione intera di n per 4* $(0 \leq r < 4)$.

Dim. (a)

- $i^0 = 1, i^1 = i$ per definizione;
- $i^2 = -1$ per definizione di i;
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$.

Dim.(b)

Se diciamo q il quoziente di n per 4 ed r il resto della divisione, si ha:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = [(i^2)^2]^q \cdot i^r = [(-1)^2]^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r.$$

Dunque, ogni potenza i^n coincide con $i^0 = 1$ o $i^1 = i$ o $i^2 = -1$ o $i^3 = -i$: queste sono le uniche potenze di i distinte.

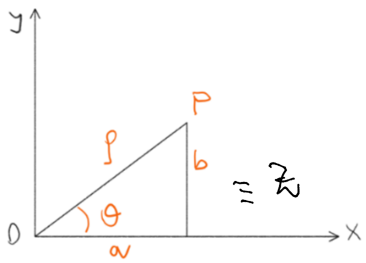
Esempio - $i^{10} = i^{4\cdot 2+2} = i^2 = -1 \Leftrightarrow i^{10} = -1$.

Forma trigonometrica di un numero complesso

&2.3 – Forma trigonometrica di un numero complesso

Def.2.3.1 – (Forma trigonometrica e coordinate polari)

Abbiamo detto che è possibile identificare ogni numero complesso $z = a + bi$ con la coppia $(a, b) \in R^2$ e che è possibile rappresentare $z = (a, b)$ con il punto $P(a, b)$ del piano cartesiano:



Ciò premesso, se indichiamo con ϑ l'angolo che il segmento OP forma con l'asse positivo delle ascisse e con ρ la distanza di P dall'origine O, ogni numero complesso z può essere univocamente determinato anche dalla coppia di numeri reali (ρ, ϑ):

$$z \equiv (a, b) \equiv [\rho, \vartheta].$$

La coppia $[\rho, \vartheta]$ *si dice coppia di coordinate polari del numero complesso z = (a,b).*

- $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ *si dice modulo di z e si indica con* $|z|$;
- ϑ *si dice argomento di z e si indica con arg(z)*

In particolare, si ha:

1. $\forall z = a \in x^+ : \varrho = a, \vartheta = 0 \Leftrightarrow z = [a, 0]$ *e* $z = a\big(\cos(0) + isen(0)\big)$;
2. $\forall z = -a \in x^- : \varrho = a, \vartheta = \pi \Leftrightarrow z = [a, \pi]$ *e* $z = -a(\cos(\pi) + isen(\pi))$;
3. $\forall z = bi \in y^+ : z = \left[b, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \varrho = b\,, \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ *e* $z = b(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)$;
4. $\forall z = -bi \in y^- : \varrho = b, \vartheta = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z = \left[b, -\frac{\pi}{2}\right]$ *e* $z = b(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Relazioni fra le coordinate cartesiane e le coordinate polari

1. *Se* $z = (a, b) \Longrightarrow \begin{cases} \varrho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \begin{cases} sen(\vartheta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos(\vartheta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \tan(\vartheta) = \frac{b}{a} \end{cases}$

2. *Se* $z = [\varrho, \vartheta] \Longrightarrow \begin{cases} a = \varrho\cos(\vartheta) \\ b = \varrho\,\mathrm{sen}(\vartheta) \end{cases} \Leftrightarrow \forall z = (a, b) \in \mathbb{C} : z = \varrho(\cos(\vartheta) + isen(\vartheta))$ *detta forma trigonometrica di z.*

Quindi, ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ *può avere:*

- *rappresentazione algebrica* $z = a + bi$ *e coordinate cartesiane (a,b);*
- *rappresentazione trigonometrica di* $z = \varrho \cdot \big(\cos(\vartheta) + isen(\vartheta)\big)$ *e coordinate polari* $[\varrho, \vartheta]$.

Osservazione – Poiché seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π, *se* ϑ *è un argomento di z anche* $\pi + 2k\pi$ *è argomento di z.*

Quindi, mentre le coordinate cartesiane (e la forma algebrica di un numero complesso) sono uniche, le coordinate polari (e la forma *trigonometrica) sono infinite perché infiniti sono gli argomenti che individuano il numero complesso z:*

$$\forall z \in \mathbb{C}: z = [\varrho, \vartheta] = [\varrho, \vartheta + 2k\pi],\ \forall k \in Z.$$

Il più piccolo argomento (in valore assoluto) di z si dice argomento principale del numero complesso.

Prodotto e potenza di numeri complessi: Formule di Moivre

Prop.2.3.1 (*) - Prodotto di due numeri complessi - 1ª Formula di Moivre

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $z = [\varrho, \vartheta]$ *e* $z' = [\varrho', \vartheta']$, *si dimostra che:*

$$z \cdot z' = [\varrho \cdot \varrho', \vartheta + \vartheta'].$$

ovvero, $z \cdot z'$ *ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti di z e z'.*

Dim. 1 - $\forall z = [\varrho, \vartheta]$, $z' = [\varrho', \vartheta'] \in \mathbb{C}$, *si ha:*

$$z \cdot z' = [\varrho, \vartheta] \cdot \left[\varrho', \vartheta'\right] = [\varrho(cos\vartheta + isen\vartheta)] \cdot [\varrho'(cos\vartheta' + isen\vartheta')] =$$

$$= \varrho\varrho' \cdot [(cos\vartheta + isen\vartheta) \cdot (cos\vartheta' + isen\vartheta')] =$$

$$= \varrho\varrho' \cdot (cos\vartheta \cdot cos\vartheta' + cos\vartheta \cdot isen\vartheta' + isen\vartheta cos\vartheta' + i^2 sen\vartheta sen\vartheta') =$$

$$= \varrho\varrho' \cdot (cos\vartheta \cdot cos\vartheta' + cos\vartheta \cdot isen\vartheta' + isen\vartheta cos\vartheta' - sen\vartheta sen\vartheta') =$$

$$= \varrho\varrho' \cdot [(cos\vartheta \cdot cos\vartheta' - sen\vartheta sen\vartheta') + i(cos\vartheta \cdot sen\vartheta' + sen\vartheta cos\vartheta')] =$$

$$= \varrho\varrho' \cdot [(\cos(\vartheta + \vartheta') + isen(\vartheta + \vartheta')] \Longrightarrow z \cdot z' = \left[\varrho \cdot \varrho', \vartheta + \vartheta'\right].$$

Prop.2.3.2 (*) - Potenza di un numero complesso – IIª Formula di Moivre

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = [\varrho, \vartheta], e\ \forall n \in \mathbb{N}: z^n = \left[\varrho^n, \vartheta' = n \cdot \vartheta\right].$$

Dim. Si dimostra per induzione su n:

$$Se \begin{cases} P(1) \\ P(n) \Longrightarrow P(n+1) \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{P}(n),\ \forall n \in N.$$

a) $\mathcal{P}(1)$: $z^1 = z = [\varrho, \vartheta] = [\varrho^1, 1 \cdot \vartheta]$.

b) Sia $\mathcal{P}(n) \Leftrightarrow z^n = [\varrho^n, n \cdot \vartheta] \Longrightarrow z^{n+1} = z^n \cdot z = [\varrho^n, n \cdot \vartheta] \cdot [\varrho, \vartheta] =$ (per 1ª di Moivre)

$= [\varrho^n \cdot \varrho, n \cdot \vartheta + \vartheta] = [\varrho^{n+1}, (n+1)\vartheta] \Longrightarrow z^{n+1} = [\varrho^{n+1}, (n+1)\vartheta]$

Quindi, $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Rapporto (quoziente) di numeri complessi

Prop.2.3.3 - (Quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica)

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $z = [\varrho, \vartheta]$ e $z' = [\varrho', \vartheta'] \neq 0$, si dimostra che:

$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{\varrho}{\varrho'}, \vartheta - \vartheta'\right].$$

Dim. $\frac{z}{z'} = z \cdot z'^{-1} = [\varrho, \vartheta] \cdot \left[\varrho', \vartheta'\right]^{-1} =$ (per la 2) $= [\varrho, \vartheta] \cdot \left[\frac{1}{\varrho}, -\vartheta'\right] =$ (per la 1)

$= \left[\frac{\varrho}{\varrho'}, \vartheta + (-\vartheta')\right] = \left[\frac{\varrho}{\varrho'}, \vartheta - \vartheta'\right]$.

Prop.2.3.4 – $\forall z, z' \in \mathbb{C} \ \ni' z = [\varrho, \vartheta]$ e $\forall z' = [\varrho', \vartheta']$, si dimostra che:

$$z = z' \Leftrightarrow \varrho = \varrho' \ e \ \exists k \in Z \ \ni' \ \vartheta - \vartheta' = 2k\pi$$

ovvero, due numeri complessi sono uguali se hanno modulo uguale e argomenti che differiscono di un multiplo di 2π.

Dim. $z = z' \Leftrightarrow [\varrho, \vartheta] = [\varrho', \vartheta'] \Leftrightarrow \varrho(cos\vartheta + isen\vartheta) = \varrho'(cos\vartheta' + isen\vartheta') \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \varrho cos\vartheta + \varrho isen\vartheta = \varrho' cos\vartheta' + \varrho' isen\vartheta' \Leftrightarrow \begin{cases} \varrho cos\vartheta = \varrho' cos\vartheta' \\ \varrho sen\vartheta = \varrho' sen\vartheta' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \varrho = \varrho' \\ \begin{cases} sen(\vartheta) = sen(\vartheta') \\ \cos(\vartheta) = \cos(\vartheta') \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \vartheta - \vartheta' = 2k\pi$$

Radici ennesime di un numero complesso

Poniamo la seguente definizione.

Def.2.3.2 - (Radice n-sima di un numero complesso)

Se $\forall w, z \in \mathbb{C}$, *si dice che:*

$$(w \text{ è una radice n-ma di } z,\ \sqrt[n]{z}=w) \Leftrightarrow (w^n = z).$$

Sussiste la seguente proprietà.

Prop.2.3.5 (*) – (Radici n-sime di un numero complesso)

Se $z = [\varrho, \vartheta] \in \mathbb{C}$ *e se* $n \in N$, *si dimostra che:*

a) z ammette infinite radici ennesime tutte date dalla seguente formula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\varrho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right) + i sen\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\right),\ \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b) Le radici n-sime distinte di z sono solo n, date da:

$$w_k = \sqrt[n]{\varrho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right) + i sen\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\right),\ con\ k \in [0, n-1].$$

Dim. (a) – Se $z = [\varrho, \vartheta]$, *si ha:*

$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z \Leftrightarrow [\varrho', \vartheta']^n = [\varrho, \vartheta] \Leftrightarrow [\varrho'^n, n\vartheta'] = [\varrho, \vartheta] \Leftrightarrow$$

(per la prop. precedente) $\begin{cases} \varrho'^n = \varrho \\ n\vartheta' - \vartheta = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varrho' = \sqrt[n]{\varrho} \\ \vartheta' = \frac{\vartheta+2k\pi}{n} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow w = \sqrt[n]{z} = \left[\sqrt[n]{\varrho}, \frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right]_{k\in\mathbb{Z}} = \sqrt[n]{\varrho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right) + i sen\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\right), \forall k \in Z.$$

Dim. (b) $\forall k = 0 \dots (n-1)$, *si ottengono le n radici distinte di z:*

$$w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$$

Dimostriamo che sono le uniche radici distinte.

$\forall k \geq n$, *detti q il quoziente e r il resto della divisione di k per n, per la proprietà della divisione si ha:*

- $k = q \cdot n + r$
- $r < n \Leftrightarrow r \leq n.$

Quindi, per $k \geq n$, l'argomento della radice w_k è:

$$\vartheta_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} = \frac{\vartheta + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{\vartheta + 2qn\pi + 2r\pi}{n} = \frac{\vartheta + 2r\pi}{n} + \frac{2qn\pi}{n} =$$

$$= \frac{\vartheta + 2r\pi}{n} + 2q\pi \Longrightarrow \forall k \geq n: w_k = \sqrt[n]{\varrho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{\varrho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\vartheta+2r\pi}{n} + 2q\pi\right) + isen\left(\frac{\vartheta+2r\pi}{n} + 2q\pi\right)\right) = \sqrt[n]{\varrho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\vartheta+2r\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\vartheta+2r\pi}{n}\right)\right),\ dove\ r < n.$$

$\Leftrightarrow \forall k \geq n: w_k \in \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}.$

Dunque, le radici distinte sono solo n.

Esempio 1 – Calcolare le radici cubiche del numero complesso $z = 1 + i$.

Soluzione

Calcoliamo la forma trigonometrica di z:

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ \begin{cases} \cos(\vartheta) = \frac{a}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}(\vartheta) = \frac{b}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varrho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow z = \left[\varrho = \sqrt{2}, \vartheta = \frac{\pi}{4}\right].$$

Quindi le infinite radici cubiche di z = 1 + i sono:

$$w_k = \sqrt[3]{1 + i} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)\right), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Le radici distinte sono 3:

$$w_0 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isen\left(\frac{\pi}{12}\right)\right),\ per\ k = 0;$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + isen\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right),\ per\ k = 1;$$

$w_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{17}{4}\pi\right) + isen\left(\frac{17}{4}\pi\right)\right)$, *per* $k = 2$.

Esempio 2 – Risolvere la seguente equazione

$$iz^4 - 2z^2 - 2i = 0$$

nel campo complesso ℂ.

Soluzione

È un'equazione biquadratica. Posto $t = z^2$*, si ha:*

$iz^4 - 2z^2 - 2i = 0 \Rightarrow it^2 - 2t - 2i = 0.$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 2i^2 = 1 - 2 = -1; t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{i} = \begin{cases} \dfrac{1-i}{i} = \dfrac{i - i^2}{i^2} = \dfrac{i+1}{-1} = -1 - i \\ \dfrac{1+i}{i} = \dfrac{i + i^2}{i^2} = \dfrac{i-1}{-1} = 1 - i \end{cases}$$

1) $t = -1 - i \Rightarrow z^2 = -1 - i \Rightarrow z \in \sqrt{-1-i}$*;*

Posto $u = -1 - i \Rightarrow |u| = \sqrt{2}; \begin{cases} cos\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ sen\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \vartheta = \frac{5}{4}\pi.$

Quindi:

$$z \in \sqrt{-1-i} = \left(\sqrt{\sqrt{2}}(cos\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{2}\right)\right)_{k=0;1} =$$

$$= \left(\sqrt[4]{2}(cos\left(\frac{5}{8}\pi + k\pi\right) + sen\left(\frac{5}{8}\pi + k\pi\right)\right)_{k=0;1}.$$

2) $t = 1 - i \Rightarrow z^2 = 1 - i \Rightarrow z \in \sqrt{1-i}$*;*

Posto $u = 1 - i \Rightarrow |u| = \sqrt{2}; \begin{cases} cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ sen\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \vartheta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi.$

Quindi:

$$z \in \sqrt{1-i} = \left(\sqrt{\sqrt{2}}(cos\left(\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{2}\right)\right)_{k=0;1} =$$

$$= \left(\sqrt[4]{2}(cos\left(\frac{7}{8}\pi + k\pi\right) + sen\left(\frac{7}{8}\pi + k\pi\right)\right)_{k=0;1}.$$

Rappresentazione geometrica delle radici n-sime di un numero complesso nel piano di Gauss

Se (O,x,y) *è il piano di Gauss, dove* x *è l'asse reale e* y *è l'asse immaginario, le radici n-sime del numero complesso* $z = [\varrho, \vartheta]$ *sono i vertici del poligono regolare di n lati (e n vertici) inscritto nella circonferenza di centro O e raggio* $\sqrt[n]{\varrho}$.

Esempio - Sia $z = i \Leftrightarrow z = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

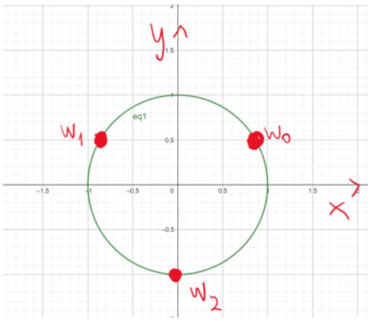
Le radici cubiche distinte di z sono date da:

$$w_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2}{3}\pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2}{3}\pi\right),$$

con $k = 0; 1; 2$:

- $w_0 = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left[1, \left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$;
- $w_1 = cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left[1, \left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$;
- $w_2 = cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{9\pi}{6}\right) = \left[1, \left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$.

Le radici cubiche di $z = i$ *sono i vertici di un triangolo equilatero di figura:*



Forma esponenziale dei numeri complessi

&2.4 – Forma esponenziale dei numeri complessi

Prop.2.4.1 – (Identità di Eulero)

$\forall\, \vartheta \in R$ si dimostra che:

$$e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + isen(\vartheta), \text{ detta "identità di Eulero".}$$

La dimostrazione (omessa) è una conseguenza dello sviluppo di Taylor delle funzioni $e^z, sen(z)$ e $\cos(z)$ nel campo complesso.

Prop.2.4.2 – (Forma esponenziale di un numero complesso)

$\forall z \in C \;\; \exists' \;\; z = [\varrho, \vartheta]$,si dimostra che:

$$z = \varrho(\cos(\vartheta) + isen(\vartheta)) = \varrho \cdot e^{i\vartheta}.$$

$z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$ è detta notazione esponenziale del numero complesso $z = [\varrho, \vartheta]$.

Osservazione - Con la notazione esponenziale è possibile applicare le operazioni delle potenze.

Operazioni con i numeri complessi in forma esponenziale

Prop.2.4.1 – (Operazioni con i numeri complessi in forma esponenziale)

$\forall z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}, z_1 = \varrho_1 \cdot e^{i\vartheta_1}$ *e* $z_2 = \varrho_2 \cdot e^{i\vartheta_2}$, *si dimostra che:*

1. $\bar{z} = \varrho \cdot e^{-i\vartheta}$; *(espressione esponenziale del coniugato di z)*
2. $z_1 \cdot z_2 = \varrho_1\varrho_2 \cdot e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$;
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}$;
4. $z^n = \varrho^n \cdot e^{n\vartheta i}$, $\forall n \in N$;
5. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\varrho} \cdot e^{i\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)}$, *per* $k = 0,1,..,n-1$.

Esempio – Dati i numeri complessi $z_1 = 1 + i$ *e* $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, *calcolare:*

1. *la forma esponenziale di* z_1;
2. *la forma esponenziale di* z_2;
3. $z_1 \cdot z_2$
4. $\frac{z_1}{z_2}$
5. z_1^3.

Soluzione

1. *Calcoliamo la forma polare di* $z_1 = 1 + i$.

$$\varrho_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \begin{cases} \cos(\vartheta_1) = \dfrac{a}{\varrho_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}(\vartheta_1) = \dfrac{b}{\varrho_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \vartheta_1 = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i};$$

2. *Calcoliamo la forma polare di* $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

$$\varrho_2 = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2; \begin{cases} \cos(\vartheta_2) = \dfrac{a}{\varrho_2} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(\vartheta_2) = \dfrac{b}{\varrho_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \vartheta_2 = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow z_2 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i};$$

3. $z_1 \cdot z_2 = \varrho_1\varrho_2 \cdot e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)} = 2\sqrt{2} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i}$;
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i}$;
5. ${z_1}^3 = \varrho^n \cdot e^{n\vartheta} = \sqrt{2}^3 \cdot e^{\frac{3}{4}\pi \cdot i}$.

Numeri complessi - Tracce d'esame

Esempio 1 – (Appello 9 novembre 2023)

$\forall\ z \in C\ \ \ni'\ |z| = 1,$ *verificare che* $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Soluzione

Sia $z = a + bi \in C\ \ \ni'\ |z| = 1$. *Si ha:*

$\bar{z} \cdot z = (a - bi)(a + bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 = 1^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Esempio 2 – (Appello 16 gennaio 2024)

Calcolare le radici terze del numero complesso $z = \frac{\overline{(1+i)}(1+i)}{(1-i)^2}$.

Soluzione

$$z = \frac{\overline{(1+i)}(1+i)}{(1-i)^2} = \frac{(1-i)(1+i)}{1+i^2-2i} = \frac{1-i^2}{-2i} = \frac{2}{-2i} = -\frac{1}{i} = -\frac{i}{i^2} = i \Rightarrow z = i \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = [\varrho = 1, \vartheta = \pi/2]$.

Quindi:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}\left(cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right)_{k=0,1,2}.$$

Tre radici distinte sono:

- $z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$
- $z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$
- $z_0 = \cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{9\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}i.$

Esempio 3 – (Appello 31 gennaio 2024)

Sia $z = 1 - 2i$: *calcolare* $w = \frac{z-\bar{z}}{|z|^2}$ *e le radici quarte di w in forma esponenziale.*

Soluzione

- $w = \frac{z-\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1-2i-(1+2i)}{\sqrt{1+4}^2} = -\frac{4}{5}i \Leftrightarrow w = -\frac{4}{5}i = \left[\frac{4}{5}, \frac{3}{2}\pi\right] = \frac{4}{5} \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i}$
- $\sqrt[4]{w} = \left[\sqrt[4]{\frac{4}{5}}, \frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{4}\right]_{k=0..3} = \left(\sqrt[4]{\frac{4}{5}} \cdot e^{\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{4}i}\right)_{k=0,..,3} = \left(\sqrt[4]{\frac{4}{5}} \cdot e^{\frac{3\pi+4k\pi}{8}i}\right)_{k=0,..,3}$.