## Cap.3 – L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali - Proprietà di $\mathbb{R}$

### &3.1 - Introduzione

*In questo capitolo saranno introdotte le proprietà dell'insieme $\mathbb{R}$, fondamentali per lo studio delle funzioni reali di variabile reale.*

*Nell'insieme $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni, indicate con + e ·,*

$$+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ni' \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow z = x + y \in \mathbb{R}$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ni' \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow z = x \cdot y \in \mathbb{R}$$

*che godono delle seguenti proprietà:*

$A1 - \ \forall a, b \in R: a + b = b + a$ *(prop. commutativa di +)*

$A2 - \ \forall a, b, c \in R: a + (b + c) = (a + b) + c$ *(prop. associativa di +)*

$A3 - \exists\, 0 \in R \ \ni' \forall a \in R: a + 0 = 0 + a = a$ *(esistenza elemento neutro per +)*

$A4 - \ \forall a \in R, \exists - a \in R \ \ni' \ a + (-a) = -a + a = 0$ *(esistenza elemento simmetrico per +)*

$A5 - \ \forall a, b \in R: a \cdot b = b \cdot a$ *(prop. commutativa di ·)*

$A6 - \ \forall a, b, c \in R: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(prop. associativa di ·)*

$A7 - \ \forall a, b, c \in R: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *(prop. distributiva di · rispetto a +)*

$A8 - \ \exists\, 1 \in R \ \ni' \forall a \in R: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *(esistenza elemento neutro per ·)*

$A9 - \ \forall a \in R \backslash \{0\}, \exists a^{-1} \in R \ \ni' \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *(esistenza elemento simmetrico per ·)*

*L'insieme $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, munito di due tali operazioni che godono delle proprietà da A1 a A9, è un campo vettoriale detto campo dei numeri reali.*

*Di più, nel campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è definita la relazione $\leq$ così definita:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}^- \ \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+,$$

*che gode delle seguenti proprietà:*

*a) $\leq$ è una relazione d'ordine:*

$B1 - \ \forall x \in R: x \leq x$ *(prop. riflessiva di $\leq$)*

$B2 - \ \forall x, y, z \in R \ni' x \leq y \ e \ y \leq z: x \leq z$ *(prop. transitiva di $\leq$)*

$B3 - \ \forall x, y \in R \ \ni' \ x \leq y \ e \ y \leq x : x = y$ (prop. antisimmetrica di $\leq$)

così che $\leq$ è una relazione d'ordine e l'insieme $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ munito della relazione $\leq$ è un campo ordinato;

$B4 - \ \forall x, y \in R : x \leq y \vee y \leq x$ ($\leq$ è una relazione di totale ordine).

Quindi, per gli assiomi da A1 a A9 e da B1 a B4 , si ha che;

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo totalmente ordinato.

Osservazione - Anche l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali munito della relazione $\leq$, prima definita, è un campo totalmente ordinato.

Prop. 3.1.1 - In $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ valgono le seguenti fondamentali proprietà:

1. $\forall a \in \mathbb{R} : \mathrm{a} \cdot 0 = 0$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \vee b = 0$ (legge di annullamento del prodotto)
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \ \ni' \ a \leq b : a + c \leq b + c$ ($\leq$ è compatibile con +)
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} \ e \ \forall c \in \mathbb{R}: \ a \leq b \Longrightarrow \begin{cases} a \cdot c \leq b \cdot c, & se \ c > 0 \\ a \cdot c \geq b \cdot c, & se \ c < 0 \end{cases}$
5. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+ \ni' \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} : a \cdot c \leq b \cdot d$
6. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^- \ni' \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} : a \cdot c \geq b \cdot d$

## **Completezza** del campo ordinato $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

Preliminarmente, poniamo le seguenti definizioni.

Def.3.1.1 - (Definizione di insiemi separati)

Se A e B sono due sottoinsiemi di R non vuoti, $\emptyset \neq A, B \subseteq R$, si dice che

(A e B sono due insiemi separati) $\Leftrightarrow (\forall a \in A \ e \ \forall b \in B : a \leq b)$.

Def.3.1.2 - (Definizione di elemento di separazione di insiemi separati)

Se $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono due insiemi separati di $\mathbb{R}$ e se $c \in R$, si dice che:

(c è un elemento di separazione di A e B) $\Leftrightarrow (\forall a \in A \ e \ \forall b \in B : a \leq c \leq b)$.

## Assioma di completezza

*In $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ sussiste il seguente assioma detto "Assioma di completezza":*

*"Ogni coppia di insiemi separati di $\mathbb{R}$ ammette almeno un elemento di separazione"*

$$\Leftrightarrow \forall A, B \subseteq R \text{ separati}, \exists c \in \boldsymbol{R} \ni' \ \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B: a \leq c \leq b.$$

*Per tale assioma si dice che $(\boldsymbol{R},+,\cdot,\leq)$ **è un campo totalmente ordinato e completo.***

*Osservazione - $(R,+,\cdot,\leq)$ è l'unico campo totalmente ordinato completo fra gli insiemi numerici fondamentali.*

*Dimostriamo, ad esempio, che il campo dei numeri razionali $(Q,+,\cdot,\leq)$ non è completo.*

*Se consideriamo i sottoinsiemi di Q,*

$$A = \{q \in Q | 0 \leq q \leq \sqrt{2}\} \text{ e } B = \{q \in Q | \sqrt{2} \leq q \leq 3\}$$

*si ha che l'unico elemento di separazione degli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è $\sqrt{2} \notin Q$.*

*Quindi, poiché esistono due insiemi separati di Q che non hanno un elemento di separazione in Q $\Leftrightarrow$ il campo ordinato $(Q,+,\cdot,\leq)$ non è un campo ordinato completo.*

## Minimo/massimo di un insieme di numeri reali

### &3.2 – Minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore di un insieme di numeri reali

*Def.3.2.1 – (Definizione di minimo e di massimo di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$)*

*a) Se $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e se $m' \in \mathbb{R}$, si dice che $m'$ è un minimo dell'insieme $\mathcal{A}$ se:*

$$\begin{cases} 1. \ m' \in A \\ 2. \ \forall a \in A: m' \leq a \end{cases}$$

*Il minimo di un insieme $\mathcal{A}$, se esiste, si indica con min($\mathcal{A}$).*

*b) Se $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e se $m'' \in \mathbb{R}$, si dice che m'' è un massimo dell'insieme $\mathcal{A}$ se:*

$$\begin{cases} 1. \ m'' \in A \\ 2. \ \forall a \in A: m'' \geq a \end{cases}$$

*Il massimo di un insieme $\mathcal{A}$, se esiste, si indica con max($\mathcal{A}$).*

Prop.3.2.1 (*) – (Unicità del minimo/massimo di un insieme)

Se $\mathcal{A} \subseteq R$ è un sottoinsieme di $\mathcal{R}$ non vuoto, si dimostra che:

a) se esiste min($\mathcal{A}$) , esso è unico;

b) se esiste max($\mathcal{A}$), esso è unico.

Dim. (a) Se m e m' sono 2 minimi dell'insieme $\mathcal{A} \subseteq R$, si ha:

1) $m = \min(A) \Rightarrow (per\ la\ (1)\ di\ minimo)\ m \in A \Rightarrow \ \big(poichè\ m' = \min(A)\,, per\ la\ (2)\big) \Rightarrow m' \leq m;$

2) $m' = \min(A) \Rightarrow (per\ la\ (1)\ di\ minimo)\ m' \in A \Rightarrow \ \big(poichè\ m = \min(A)\,, per\ la\ (2)\big) \Rightarrow m \leq m'.$

Quindi, poiché $\begin{cases} m' \leq m \\ m \leq m' \end{cases} \Rightarrow m = m'.$

Dunque, il minimo di un insieme, se esiste è unico.

Dim. (b) La dimostrazione è analoga a quella dell'unicità del minimo.

Infatti, se $m$ e $m''$ sono 2 massimi di $\mathcal{A}$, si ha:

1. $m, m'' \in A$
2. $\begin{cases} m'' = \max(A) \Rightarrow m \leq m'' \\ m = \max(A) \Rightarrow m'' \leq m \end{cases}$

Quindi: $m \leq m''$ e $m'' \leq m \Rightarrow \ m = m''$.

Prop.3.2.2 (*) – (Esistenza del minimo e del massimo di un insieme finito)

Ogni insieme finito di ℝ è dotato di minimo e di massimo.

Dim. (a) Dimostriamo che ogni sottoinsieme finito di $\mathcal{R}$ ha un minimo.

Sia $\emptyset \neq A \subseteq R$ un insieme finito formato da n elementi,

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Dimostriamo l'esistenza del minimo per induzione su n (numero di elementi di $\mathcal{A}$):

$$\begin{cases} 1.\ P(1) \\ 2.\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow P(n)\,, \forall n \in N. \quad \textit{(Principio d'induzione)}$$

1. Se $n = 1 \Rightarrow A = \{a_1\} \Rightarrow \exists$ min($\mathcal{A}$) = $a_1$ ($\mathcal{P}$(1) è vera).
2. Dimostriamo, ora, che se la proprietà è vera per un insieme formato da n elementi ($\mathcal{P}$(n) vera) allora la proprietà è vera se l'insieme è formato da n+1 elementi ($\mathcal{P}$(n+1) vera).

A tal fine sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$.

Se consideriamo il sottoinsieme di $\mathcal{A}$

$$A' = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

*per l'ipotesi d'induzione, si ha che*

$$\exists \min(A') = min\ (\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = m \in A' \subset A$$

*Quindi, considerato l'insieme* $\{(m, a_{n+1})\}$, *poiché* ℝ *è un campo totalmente ordinato, si ha:*

1) *se* $m \le a_{n+1} \Longrightarrow \exists m = \min(m, a_{n+1}) = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\} = \min\ (A)$;
2) *se* $m \ge a_{n+1} \Longrightarrow a_{n+1} = \min(m, a_{n+1}) = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$*min(A).*

*In ogni caso,* $\exists \min A = \min(\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}) =$. *(P(n+1) è vera)*

*Per il principio d'induzione, P(n) è vera per ogni* $n \in N$ .

*Dunque, "ogni sottoinsieme finito di* ℝ *è dotato di minimo".*

*(b) In modo analogo, si dimostra che ogni sottoinsieme finito di* ℝ *è dotato di massimo.*

---

## *Minorante/maggiorante di un insieme*

---

*Si pongono le seguenti definizioni.*

*Def.3.2.2 – (Definizione di minorante/maggiorante di un insieme)*

*Se* $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}$, *e se h e k sono due numeri reali, si dice che:*

a) *h è un minorante di A* $\Leftrightarrow \forall a \in A: h \le a$;
b) *k è un maggiorante di A* $\Leftrightarrow \forall a \in A: k \ge a$.

*Def.3.2.3 – (Insieme limitato inferiormente, superiormente, limitato)*

*Se* $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}$, *si dice che:*

a) *A è un insieme limitato inferiormente* $\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R} \ni'$ *h è minorante di A* $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R} \ni' \forall a \in A: h \le a$;
b) *A è un insieme limitato superiormente* $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ni'$ *k è maggiorante di A* $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ni' \forall a \in A: k \ge a$.
c) *A è un insieme limitato* $\Leftrightarrow$ *A è limitato inferiormente e superiormente* $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists h, k \in \mathbb{R} \ni' \forall a \in A: h \le a \le k$.

*Osservazione – I minoranti (risp. i maggioranti) di un insieme limitato inferiormente (risp. superiormente) sono infiniti:*

- *Se h è un minorante di $\mathcal{A} \Longrightarrow h-1, h-2, \ldots$ sono tutti (infiniti) minoranti di $\mathcal{A}$;*
- *Se k è un maggiorante di $\mathcal{A} \Longrightarrow k+1, k+2, \ldots$ sono tutti (infiniti) maggioranti di $\mathcal{A}$.*

*In quello che segue, indicheremo con :*

- *$M'(A)$ l'insieme degli infiniti minoranti di un insieme $\mathcal{A}$, limitato inferiormente;*
- *$M''(A)$ l'insieme degli infiniti maggioranti di un insieme $\mathcal{A}$, limitato superiormente.*

*Esempio 1 – L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ è un insieme limitato inferiormente (0 è un minorante di $\mathcal{A}$) ma non superiormente, quindi $\mathcal{A}$ è un insieme non limitato.*

*In questo caso, l'insieme dei minoranti di $\mathcal{A}$ è: $M'(A) = ]-\infty, 0]$.*

*Esempio 2 - L'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\}$ è un insieme limitato sia inferiormente (0 è un minorante di $\mathcal{B}$) sia superiormente (1 è un maggiorante di $\mathcal{B}$), quindi $\mathcal{B}$ è un insieme limitato:*

- *l'insieme dei minoranti di $\mathcal{B}$ è: $M'(B) = ]-\infty, 0]$,*
- *l'insieme dei maggioranti di $\mathcal{B}$ è: $M''(B) = [1, +\infty[$.*

*Prop. 3.2.3 – (Pdegli insiemi separati)*

*Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due sottoinsiemi separati di ℝ, si dimostra che:*

1. *$\mathcal{A}$ è un insieme limitato superiormente;*
2. *$\mathcal{B}$ è un insieme limitato inferiormente;*
3. *$A \cap B = \emptyset \vee A \cap B = \{\bar{x}\}$.*


*Dim.(1) – Poiché $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi separati $\Leftrightarrow \forall x \in A$ e $\forall y \in B: x \leq y \Leftrightarrow$*

*$\forall x \in A: x \leq y, \forall y \in B \Leftrightarrow$ ogni $y \in \mathcal{B}$ è un maggiorante di $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ è un insieme limitato superiormente.*

*Dim.(2) – Analogamente, poiché* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *sono due insiemi separati* $\Leftrightarrow \forall x \in A\ e\ \forall y \in B: x \leq y \Leftrightarrow \forall y \in B: y \geq x, \forall x \in A \Leftrightarrow$ *ogni* $x \in A$ *è un minorante di* $\mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ *è limitato inferiormente.*

*Dim.(3) – Se* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *due insiemi separati, i casi possibili sono due:*

$$A \cap B = \emptyset \vee A \cap B \neq \emptyset.$$

- *Se* $A \cap B = \emptyset$ *la proprietà è vera.*
- *Dimostriamo che se* $A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap B = \{c\}$.

*Infatti, se* $A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow \forall x, y \in A \cap B: \begin{cases} x \in A\ e\ y \in B \Longrightarrow x \leq y \\ y \in A\ e\ x \in B \Longrightarrow y \leq x \end{cases} \Longrightarrow x \leq y\ \ e\ y \leq x \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \forall x, y \in A \cap B: x = y = \bar{x} \Leftrightarrow\ A \cap B = \{\bar{x}\}.$$

*Dunque, ogni coppia di insiemi separati o ha intersezione vuota o ha intersezione ridotta a un solo elemento: in tal caso,* $\bar{x}$ *è l'unico elemento di separazione degli insiemi separati* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$*.*

*Tale proprietà giustifica la seguente definizione.*

## *Insiemi contigui*

*Def. 3.2.4 – (Definizione di insiemi contigui)*

*Se* $\emptyset \neq \mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq R$ *sono due sottoinsiemi non vuoti di ℝ, si dice che* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *sono due insiemi contigui se:*

1. $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *sono due insiemi separati;*
2. $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *hanno un unico elemento di separazione* $\Leftrightarrow \exists | \underline{x} \in R \ni' \forall a \in A\ e\ \forall b \in B: a \leq \underline{x} \leq b \Leftrightarrow\ A \cap B = \{\bar{x}\}$.

*Esempio 1 - Gli insiemi* $A = ]0,1[$ *e* $B = ]1,3[$ *sono due insiemi contigui: il loro unico elemento di separazione è* $\bar{x} = 1$.


*Esempio 2 – (Controesempio)*

*Gli insiemi* $A = (0,1)$ *e* $B = (2,3)$ *sono insiemi separati ma non sono contigui: essi ammettono infiniti elementi di separazione, tutti gli elementi dell'intervallo* $[1,2]$.


*Per gli insiemi limitati sussistono i seguenti ulteriori fondamentali teoremi.*

*Teorema 3.2.1 (*) - Se $\mathcal{A}$ è un insieme limitato inferiormente e se $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$ è l'insieme dei minoranti di $\mathcal{A}$, si dimostra che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$ sono due insiemi contigui.*

*Dim.(1) Dimostriamo che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$ sono due insiemi separati.*

*Poiché $\mathcal{A}$ è limitato inferiormente* $\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R} \ni' h$ *è minorante di $\mathcal{A}$* $\Leftrightarrow M'(A) \neq \emptyset$;

*inoltre, poiché $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$ è l'insieme dei minoranti di $\mathcal{A}$, risulta:*

$$\forall a \in A \ \ e \ \forall h \in M'(A): h \leq a \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{M}'(\mathcal{A}) \text{ sono insiemi separati.}$$

*2) Dimostriamo che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$ sono due insiemi contigui.*

*Poiché $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$ sono insiemi separati di* $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ *(per l'assioma di completezza)* $\Rightarrow$
$\exists\, e' \in \mathbb{R} \ni' \forall a \in A$ *e* $\forall h \in M'(A): h \leq e' \leq a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e' \in \mathrm{M}'(\mathrm{A})$ *e* $\forall h \in M'(A): h \leq e' \Leftrightarrow e' = \max M'(A)$.

*Dimostriamo che e' = max($\mathcal{M}'(\mathcal{A})$) è l'unico elemento di separazione degli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$.*

*Se e è un ulteriore elemento di separazione degli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$* $\Leftrightarrow$

$$\forall h \in M'(A) \ e \ \forall a \in A \ e : h \leq e \leq a \Leftrightarrow e \in M'(A) \Rightarrow e\,, e' \in M'(A) \Rightarrow \begin{cases} e \leq e' = \max M'(A) \\ e' = h \leq e \end{cases}$$

$\Rightarrow e = e'$.

*Dunque,* $A$ e $M'(A)$ *sono contigui e l'unico elemento di separazione è:*

$$e' = maxM'(A) \text{ (il più grande dei minoranti di } \mathcal{A})$$

*Tale proprietà giustifica la seguente definizione.*

*Def. 3.2.5 – (Definizione di estremo inferiore di un insieme limitato inferiormente)*

*Se $\mathcal{A}$ è un insieme limitato inferiormente, si dice estremo inferiore di $\mathcal{A}$ l'unico elemento di separazione tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$ ovvero il più grande dei minoranti di $\mathcal{A}$.*

*L'estremo inferiore di A si indica con:*

*inf(A) ed è inf(A) = max M'(A) (il più grande dei minorranti).*

*Prop.3.2.4 – (Proprietà dell'estremo inferiore)*

*Se A è un insieme non vuoto, limitato inferiormente, e se* $e' = \inf(A)$, *si dimostra che:*

1. $\forall a \in A: e' \leq a$,
2. $\forall h \in M'(A): h \leq e'$.

*Dim. Poiché e' = inf(A) = maxM'(A) è l'unico elemento di separazione di A e M'(A)* ⇔

$$\Leftrightarrow \forall a \in A \; e \; \forall h \in M'(A): h \leq e' \leq a \leq \begin{cases} 1. \forall a \in A: e' \leq a \\ 2. \forall h \in M'(A): h \leq e' \end{cases}.$$

*Prop.3.2.5 – (Proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore)*

*Se A è un insieme limitato inferiormente e se e' è un numero reale, si dimostra che:*

$$(e' = inf(A)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1) \; e' \text{ è } un\ minorante\ di\ A \Leftrightarrow \forall x \in A: e' \leq x \\ 2) \; \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \ni' e' + \varepsilon > x \end{pmatrix}$$

*In modo analogo si definisce l'estremo superiore di un insieme.*

*Teorema 3.2.2 (*) – Se A è un insieme limitato superiormente e se M''(A) è l'insieme dei maggioranti di A, si dimostra che gli insiemi A e M''(A) sono contigui.*

*Dim.*

1) *Dimostriamo che A e M''(A) sono due insiemi separati.*

*Poiché A è limitato superiormente* $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ni' k$ è $maggiorante\ di\ A \Leftrightarrow M''(A) \neq \emptyset$;

*inoltre, poiché* $M''(A)$ *è l'insieme dei maggioranti di A* $\Rightarrow \forall a \in A \; e \; \forall k \in M''(A): a \leq k \Leftrightarrow$

⇔*A e M''(A) sono insiemi separati.*

2) *Dimostriamo che A e M''(A) sono contigui.*

*Poiché A e M'(A) sono due insiemi separati* ⇔ *(per l'assioma di completezza)* $\Rightarrow \exists \; e'' \in \mathbb{R} \ni' \forall a \in A \; e \; \forall k \in M''(A): a \leq e'' \leq k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e'' \in M''(A) \;\; e \;\; \forall h \in M'(A): e'' \leq k \Leftrightarrow \;\; e'' = \min M''(A)$.

*Dimostriamo che e'' è l'unico elemento di separazione degli insiemi A e M''(A).*

*Se c è un ulteriore elemento di separazione degli insiemi A e M''(A)* ⇔

$\forall a \in A$ e $\forall k \in M''^{(A)}: a \leq c \leq k \Leftrightarrow c \in M''(A) \Rightarrow c, e'' \in M''(A) \ni' \begin{cases} e'' = \min M'(A) \leq c \\ c \leq e'' \end{cases}$

$\Rightarrow c = e''$.

*Dunque,* $A$ e $M''(A)$ *sono contigui e l'unico elemento di separazione è*

$$e'' = \min M''(A) \text{ (il più grande dei minoranti di } A)$$

*Tale proprietà giustifica la seguente definizione.*

*Def. 3.2.6 – (Definizione di estremo superiore di un insieme limitato superiormente)*

*Se A è un insieme limitato superiormente, si dice estremo superiore di A l'unico elemento di separazione tra A e M''(A) ovvero il più piccolo dei maggioranti di A.*

*L'estremo superiore di A si indica con sup(A) ed è* $\sup(A) = \min M''(A)$.

*Prop.3.2.6 – (Proprietà dell'estremo superiore)*

*Se A è un insieme non vuoto limitato superiormente e se* $e'' = \sup(A)$, *si dimostra che:*

1. $\forall a \in A$: $a \leq e''$,
2. $\forall k \in M''(A)$: $e'' \leq k$.

*Dim. Poiché e'' = sup(A) = min M''(A) è l'unico elemento di separazione di A e M''(A)* $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall a \in A$ e $\forall k \in M''(A): a \leq e'' \leq \begin{cases} 1. \forall a \in A: a \leq \sup(A) \\ 2. \forall k \in M''(A): \sup(A) \leq k \end{cases}$.

*Prop.3.2.7 – (Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore)*

*Se A è un insieme limitato superiormente e se e'' è un numero reale, si dimostra che:*

$(e'' = \sup(A)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ e'' \text{ è } \textit{un maggiorante di } A \Leftrightarrow \forall a \in A: a \leq e'' \\ 2.\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \ni' e'' - \varepsilon < a \end{cases}$.

*Osserviamo che ogni insieme* $A \subset \mathbb{R}$ *limitato inferiormente (risp. superiormente) è dotato di estremo inferiore (risp. superiore) ma non è detto che abbia minimo (risp. massimo).*

*Sussiste la seguente proprietà.*

*Prop.3.2.8 – (C.N.S. per l'esistenza del minimo/ massimo di un insieme limitato)*

*a)* *Se* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *limitato inferiormente, si dimostra che:*

$$(\exists \min(A)) \Leftrightarrow (\inf(A) \in A).$$

*In tal caso è min(A) = inf(A).*

*b) Se* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *limitato superiormente, si dimostra che:*

$(\exists\ \max(A)) \Leftrightarrow (\sup(A) \in A)$.

*In tal caso è max(A) = sup(A).*

*Nota 1 – Se* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *è un insieme illimitato inferiormente, si ha che:*

$$\nexists\ inf\ (A) \in \mathbb{R},\ \nexists\ min\ (A) \in \mathbb{R}.$$

*In tal caso si dice che* $\inf(A) = -\infty$.

*Nota 2 – Se* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *è un insieme illimitato superiormente, si ha che:*

$$\nexists\ sup\ (A) \in \mathbb{R},\ \nexists\ max(A) \in \mathbb{R}.$$

*In tal caso si dice che* $\sup(A) = +\infty$.

*Esempio 1 - Completare la seguente tabella:*

| | *Insieme* | *Esiste Massimo* | *Esiste Minimo* | *Limitato Sup.* | *Limitato inf.* |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | $\mathcal{N}$ | | | | |
| $E_2$ | $x=2k,\ k \in Z$ | | | | |
| $E_3$ | $\left\{1, \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{n} \dots\right\},\ n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ | | | | |
| $E_4$ | $\left\{x \in Q \middle\| x = \frac{n-1}{n+1}, n \in N\right\}$ | | | | |
| $E_5$ | $\{x \in R \| x^3 \geq 27\}$ | | | | |
| $E_6$ | $\{x \in R \| x \geq 0 \vee x^2 < 2\}$ | | | | |

*Soluzione*

*1)* $E_1 = \mathcal{N}$ *è un insieme limitato inferiormente e illimitato superiormente:*

- 0 *è un minorante di* $\mathcal{N}$*, appartenente a* $\mathcal{N} \Leftrightarrow \min(E_1) = \inf(E_1) = 0$;
- $\sup(N) = +\infty \Leftrightarrow \nexists \max(E_1)$.

*2) L'insieme* $E_2 = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2n, \dots\}$ *è illimitato inferiormente e superiormente:*

- $\inf(E_2) = -\infty,\ \nexists min(E_2)$,
- $\sup(E_2) = +\infty,\ \nexists max(E_2)$.

*3) L'insieme* $E_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ *è limitato inferiormente da* 0 *e superiormente da* 1.

$\inf(E_3) = 0 \notin E_3 \Leftrightarrow \nexists inf E_3), \sup(E_3) = 1 \in E_3 \Leftrightarrow \exists max\,(E_3) = sup\,(E_3) = 1.$

$\nexists \min E_3,\ \exists \max E_3 = 1,\qquad \exists \inf E_3 = 0 \notin E_3, \exists \sup E_3 = \max E_3 = 1.$

*4) Esplicitiamo l'insieme* $E_4 = \left\{x = \frac{n-1}{n+1}\right\}$:

| $n$ | $x$ |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | $\frac{1}{3}$ |
| 3 | $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ |
| … | … |
| 9 | $\frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.8$ |
| 99 | $\frac{98}{100} = 0.98$ |
| 999 | $\frac{998}{1000} = 0.998$ |
| … | … |
| $n \longrightarrow +\infty$ | $x \longrightarrow 1$ |

*Si deduce che:*

- $\exists \min(E_4) = \inf(E_4) - 1$;
- $\exists \sup(E_4) = 1 \notin E_4 \Leftrightarrow \nexists \max(E_4)$.

*5)* $E_5 = \{x \in R | x^3 \geq 27\} = \{x \in R | x \geq 3\} = [3, +\infty[$.

*Si ha:*

- $E_5$ *è un insieme limitato inferiormente, non limitato superiormente (sup* $(E_5) = +\infty)$.
- $\exists \min(E_5) = \inf(E_5) = 3$;
- $\nexists \max(E_5)$;

*6)* $E_6 = \{x \in R | x \geq 0, x^2 < 2\} = \left[0, \sqrt{2}\right[$.

*Si ha:* $\exists \min(E_6) = 0$; $\nexists \max(E_5)$; $E_6$ *è un insieme limitato inferiormente e superiormente (sup* $(E_6) = \sqrt{2})$.

*Dunque:*

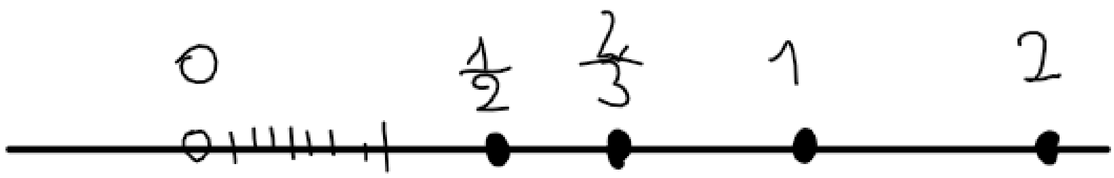
| | *Insieme* | *Esiste Massimo* | *Esiste Minimo* | *Limitato Sup.* | *Limitato inf.* |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | $\mathcal{N}$ | $\nexists$ | *si* | *no* | *si* |
| $E_2$ | $x=2k,\ k \in Z$ | $\nexists$ | $\nexists$ | *no* | *no* |
| $E_3$ | $\left\{1, \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{n} \dots\right\}$, $n \in \mathcal{N} \backslash \{0\}$ | *1* | $\nexists$ | *si* | *si* |
| $E_4$ | $\left\{x \in Q \middle\vert x = \frac{n-1}{n+1}, n \in N\right\}$ | $\nexists$ | $-1$ | *si* | *si* |
| $E_5$ | $\{x \in R \vert x^3 \geq 27\}$ | $\nexists$ | *3* | *no* | *si* |
| $E_6$ | $\{x \in R \vert x \geq 0 \vee x^2 < 2\}$ | $\nexists$ | $0$ | *si* | *si* |

*Esempio 2 – Sia* $A = \left\{a_n \in \mathbb{R} \middle\vert a_n = \frac{2}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$. *Determinare* $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono, rispettivamente, minimo e massimo di A.*

*Soluzione*

$\forall n \in \mathbb{N}: n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{2}{n} > \frac{2}{n+1} \Rightarrow a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow a_n$ *è strettamente decrescente ed è*

$$a_0 = 2 \text{ e } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$




a) *Dimostriamo che* $\inf A = 0 \notin A \Leftrightarrow \nexists \min(A)$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{2}{n+1} > h = 0 \Leftrightarrow h = 0$ *è un minorante di A;*

2) $\forall \varepsilon > 0$, *studio* $h + \varepsilon > a_n \Leftrightarrow 0 + \varepsilon > \frac{2}{n+1} \Rightarrow n\varepsilon + \varepsilon > 2 \Rightarrow n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon} - 1$.

*Se diciamo* $\bar{n} = int\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right) + 1 \Leftrightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ni' \bar{n} > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ni'\ h + \varepsilon = 0 + \varepsilon > a_{\bar{n}} \Leftrightarrow h = 0$ *è il più grande dei minoranti* $\Leftrightarrow \inf A = 0 \notin A$.

b) *Dimostriamo che max(A) = 2 = sup(A).*

1) $2 = a_0 \in A$;

2) $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{2}{n+1} \leq 2$.

*Quindi, poiché* 2 *è un maggiorante di* $\mathcal{A}$ *appartenente ad* $\mathcal{A} \Rightarrow 2 = \max(A) = \sup(A)$.

*Esempio 3 - Sia* $A = \left\{a_n \in \mathbb{R} \middle| a_n = \frac{n-1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$. *Determinare* $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono, rispettivamente, minimo e massimo di* $\mathcal{A}$.

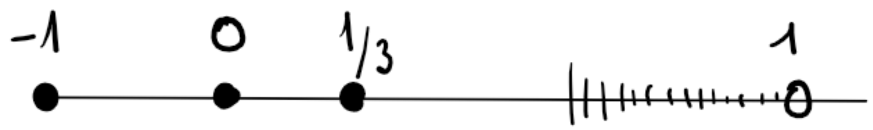
*Soluzione*

$\forall n \in \mathbb{N}$, *studio:*

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} < \frac{n+1-1}{n+1+1} = \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2} \Rightarrow (n-1)(n+2) < n(n+1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow n^2 + 2n - n - 2 < n^2 + n \Rightarrow -2 < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_n = \frac{n-1}{n+1}$ *è una successione monotona strettamente crescente ed è:*

$$a_0 = -1 \ e \ \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$




a) *Poichè* $\forall n \in \mathbb{N}: -1 = a_0 \leq a_n \Leftrightarrow -1$ *è un minorante di A appartenente ad A* $\Leftrightarrow -1 = \min(A) = \inf(A)$;

b) *Dimostriamo che* $\sup(A) = 1$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-1-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} < 1 \Leftrightarrow 1$ *è un maggiorante di* $\mathcal{A}$*;*

2) *Studio* $1 - \varepsilon < a_n = \frac{n-1}{n+1} \Leftrightarrow n + 1 - \varepsilon n - \varepsilon < n - 1 \Leftrightarrow 1 - \varepsilon n - \varepsilon < -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon n < -2 + \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

*Se diciamo* $\bar{n} = int\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right) + 1$, *si ha che:*

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ni' 1 - \varepsilon < a_{\bar{n}} = \frac{\bar{n}-1}{\bar{n}+1} \Leftrightarrow$ *1 è il più piccolo dei maggioranti di* $\mathcal{A}$ *non appartenente ad* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \sup(A) = 1$ *e* $\nexists \max(A)$.

*Prop.3.2.9 - Ogni sottoinsieme finito di* ℝ *è dotato di minimo e di massimo.*

*Dim. (1) Esistenza del minimo*

*Sia* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *un insieme finito e dimostriamo, per induzione su n, che* $\exists m = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ \forall k = 1..n: a_k \leq m \end{cases}$

- *P(1):* $A = \{a_1\} \Leftrightarrow \exists m = a_1 = \min(A)$;
- $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

*1) Se* $n = 1 \Leftrightarrow A = \{a_1\} \Leftrightarrow \exists m = a_1 \in A \ \ni' \ m \leq a_1 \Leftrightarrow \exists m = \min(A)$;

*2) Sia* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ *e supponiamo che, per l'ipotesi d'induzione, l'insieme*

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$$

*sia dotato di minimo* $\Leftrightarrow \exists \bar{m} = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{m} \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A \\ \forall k = 1..n: \bar{m} \leq a_k \end{cases}$

*Detto* $m = \min(a_{n+1}, \bar{m}) \Longrightarrow \begin{cases} m \in A \\ m \leq a_{n+1} \ e \ m \leq \bar{m} \end{cases} \Longrightarrow m \leq a_{n+1} \ e \ m \leq \bar{m} \leq a_k, \forall k = 1..n \Longrightarrow \exists m \in A \ni' \forall k = 1..(n+1): m \leq a_k \Leftrightarrow \exists m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\} \Longrightarrow P(n+1)$ *è vera.*

*Dunque, per il principio d'induzione,* $\forall n \in N: \exists \min A \Leftrightarrow$ *ogni insieme finito di R è dotato di minimo.*

*In modo analogo, si dimostra che ogni insieme finito di ℝ è dotato di massimo.*

*Esempio – L'insieme* $A = \{n \in N | n \leq 10\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ *è un insieme finito: min(A)* $= 0$ *e max(A)* $= 10$.

## *Assioma di Archimede*

*Prop. 3.2.10 (*) – (Assioma di Archimede in R)*

*In* $(R, +, \cdot, \leq)$ *sussiste la seguente proprietà:*

$$\forall a, b \in R^+, \exists n \in \mathbb{N} \ni' na > b.$$

*Dim. Si dimostra, ragionando per assurdo, negando la tesi, supponendo che*

$$\exists a, b \in R \ni' \forall n \in N: na \leq b.$$

*Se indichiamo con* $A = \{x \in R | x = na, \forall n \in N\}$, *risulta b un maggiorante di A* $\Leftrightarrow$ *A è limitato superiormente* $\Leftrightarrow \exists \sup(A) = s \in R \Longrightarrow \forall n \in N: (n+1)a \leq s \Leftrightarrow na + a \leq s \Longrightarrow \forall n \in N: na \leq s - a \Longrightarrow s - a$ *è un maggiorante di A* $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow s = \sup(A) \leq s - a \Longrightarrow 0 \leq -a \Longrightarrow a \leq 0$ *e ciò è assurdo perché* $a > 0$ *per ipotesi.*

Dunque, la tesi è vera.

## Densità dell'insieme $\mathbb{R}$

Prop.3.2.11 (*) - (Densità dell'insieme $\mathbb{R}$)

Si dimostra che:

1. $\forall x_1, x_2 \in R \ \ni' \ x_1 < x_2, \exists q \in \mathbb{Q} \ni' x_1 < q < x_2$;
2. $\forall x_1, x_2 \in R \ \ni' \ x_1 < x_2, \exists i \in -\mathbb{Q} \ni' x_1 < i < x_2$.

Tali proprietà stanno a indicare che l'insieme $\mathcal{R}$ e la sua rappresentazione non hanno "buchi" (continuità della retta numerica).

Dim.1 - Siano $x_1 < x_2 \in R$ e dimostriamo che $\exists q \in \mathbb{Q} \ni' x_1 < q < x_2$.

Distinguiamo tre casi:

a) Supponiamo che $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$.

Se consideriamo i numeri $x_2 - x_1$ e $1 \Rightarrow$ (per l'assioma di Archimede, con $a = x_2 - x_1$ e $b$ =1) $\exists n \in N \ \ni' n(x_2 - x_1) > 1 \Leftrightarrow \exists n \in N \ni' \frac{1}{n} < x_2 - x_1$. [1]

Analogamente, considerati i numeri $\frac{1}{n}$ e $x_1 \Rightarrow$ (per l'assioma di Archimede, con $a = \frac{1}{n}$ e $b = x_1$) $\exists m \in N \ni' m \cdot \frac{1}{n} > x_1$.

Se diciamo $k = max\left\{n \in N \middle| \frac{k}{n} \leq x_1\right\}$, si ha che $\forall n \in N$: $\frac{k}{n} \leq x_1 < \frac{k+1}{n}$.

Quindi, detto $q = \frac{k+1}{n} \in Q$, si ha: $x_1 < q = \frac{k+1}{n} = \frac{k}{n} + \frac{1}{n} < (1) \ x_1 + x_2 - x_1 = x_2$.

Dunque, $\forall \ 0 < x_1 < x_2$, $\exists q = \frac{k+1}{n} \in \mathbb{Q} \ni' x_1 < q < x_2$.

b) Se $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow \exists q = 0 \in Q \ni' x_1 < q = 0 < x_2$.

c) Infine, se $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow 0 < -x_2 < -x_1 \Rightarrow$ (per (a)) $\exists q' \in Q \ni' - x_2 < q' < -x_1 \Rightarrow x_2 > -q' > x_1 \Leftrightarrow$ (posto $- q' = q$) $\exists q \in \mathbb{Q} \ni' x_1 < q < x_2, \forall x_1 < x_2 < 0$.

Dunque, la proprietà è vera $\forall x_1, x_2 \in R$, con $x_1 < x_2$.

Dim.2 - E' analoga.

Prop.3.2.12 (*) - L'insieme $\mathcal{N}$ dei numeri naturali è un insieme illimitato superiormente.

*Dim. Dobbiamo dimostrare che* $\forall k \in R, \exists n_0 \in N \ni' \ n_0 > k$.

$\forall k \in R, \exists a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots \in N \ \ni' \ k = a_0, a_1 a_2 \ldots a_p, \ldots$ *detta rappresentazione decimale di k.*

*In tale rappresentazione:*

- $a_0 \in N$ *si dice parte intera di k e si indica con* $[k]$ *(si legge parte intera di k);*
- *le cifre* $a_1 a_2 \ldots a_p, \ldots$ *che seguono la virgola si dicono parte decimale di k (decimi, centesimi e così via).*

*Pertanto,* $\forall k \in R$: $[k] = a_0 \leq a_0, a_1 a_2 \ldots a_p, \ldots = k < [k] + 1 \in N \Leftrightarrow \forall k \in R, \exists n_0 = [k] + 1 \ni' k < n_0$.

*Dunque, l'insieme N è illimitato superiormente.*

*Osservazione – L'insieme N è, invece, limitato inferiormente: esso ammette lo zero come minorante ed è* $0 = \min N = \inf N \ \in N$.

---

## *Insiemi numerici fondamentali di* ℝ – Gli intervalli

---

&3.3 – *Gli intervalli in* ℝ

*Gli intervalli sono particolari sottoinsiemi di* ℝ.

*Def. 3.3.1 – (Intervalli limitati, non limitati di* ℝ*)*

*a) Intervalli limitati*

*Se a e b sono due numeri reali, con* $a \leq b$, *l'insieme:*

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ *si dice intervallo chiuso e limitato;*
2. $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ *si dice intervallo aperto e limitato;*
3. $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ *si dice intervallo limitato, chiuso a sinistra e aperto a destra;*
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ *si dice intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra.*

*a e b si dicono estremi dell'intervallo e ogni x dell'intervallo, diverso da a e b, si dice punto interno all'intervallo.*

*Un intervallo si dice chiuso quando contiene fra i suoi elementi gli estremi, si dice aperto se non li contiene.*

Pertanto, l'intervallo (1) è chiuso, l'intervallo (2) è aperto, gli intervalli (3) e (4) non sono né aperti né chiusi.

Osservazione – Se $a = b$: $\begin{cases} [a,b] = \{a\} \\ ]a,b[ = [a,b[ = ]a,b] = \emptyset \end{cases}$

Il concetto di insieme chiuso e aperto sarà successivamente esteso agli insiemi qualsiasi che non sono intervalli.

b) Intervalli illimitati

Se a e b sono due numeri reali, l'insieme:

1. $[a,+\infty[ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$ si dice intervallo illimitato a destra, chiuso a sinistra;
2. $]a,+\infty[ = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ si dice intervallo illimitato a destra, aperto a sinistra;
3. $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$ si dice intervallo illimitato a sinistra, chiuso a destra;
4. $]-\infty,b[ = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$ si dice intervallo illimitato a sinistra, aperto a destra.

## Insiemi connessi di $\mathbb{R}$

Def.3.2.7 – (Definizione di insieme connesso)

Se $\emptyset \neq A \subseteq R$, si dice che $A$ è un insieme connesso di $\mathbb{R}$ se

$$\forall x_1, x_2 \in A \ni' \ x_1 < x_2 : [x_1, x_2] \subseteq A.$$

- Gli intervalli sono gli unici insiemi connessi di $\mathbb{R}$.

## Intorni nell'insieme $\mathbb{R}$

Diamo, ora, la definizione di intorno di un numero reale.

Def. 3.3.2 – (Definizioni di intorno)

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, si dice:

a) intorno (circolare) di $x_0$ ogni intervallo aperto avente $x_0$ come centro.

Il generico intorno di $x_0$ è indicato con $I(x_0)$ ed è un intervallo del tipo

$$I(x_0) = ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \text{ dove } \varepsilon > 0.$$

b) Intorno destro di $x_0$ ogni intervallo semiaperto a destra avente $x_0$ come primo estremo.

Il generico intorno destro di $x_0$ è indicato con $I^+(x_0)$ ed è un intervallo del tipo

$$I^+(x_0) = [x_0, x_0 + \varepsilon[, \text{ dove } \varepsilon > 0.$$

c) Intorno sinistro di $x_0$ ogni intervallo semiaperto a sinistra avente $x_0$ come secondo estremo.

Il generico intorno sinistro di $x_0$ è indicato con $I^-(x_0)$ ed è un intervallo del tipo

$$I^-(x_0) = ]x_0 - \varepsilon, x_0], \text{ dove } \varepsilon > 0.$$

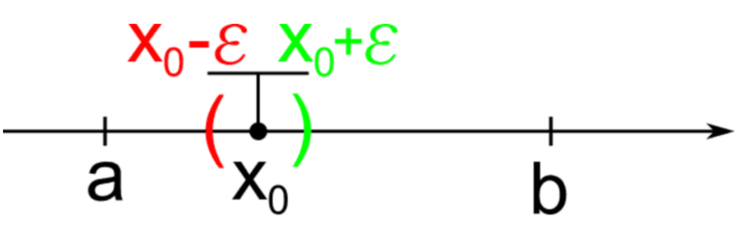
## Punti interni, esterni e di frontiera di un insieme

Diamo ora la definizione di punto interno, esterno e di frontiera di un insieme.

Def.3.3.3 – (Punto interno, esterno, di frontiera)

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e se $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, si dice che:

a) $x_0$ è interno ad $\mathcal{A} \Leftrightarrow \exists\ I(x_0) \ni'\ I(x_0) \subset A$;



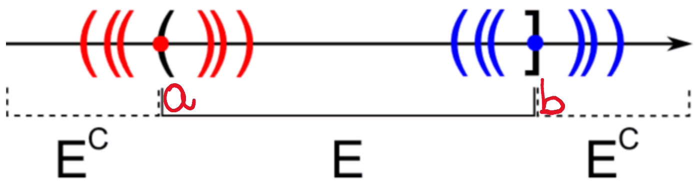

b) $x_0$ è esterno ad $\mathcal{A} \Leftrightarrow \exists\ I(x_0) \ni'\ I(x_0) \subset \mathbb{R}\backslash A$ (complementare di $\mathcal{A}$)

c) $x_0$ è un punto di frontiera per $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall I(x_0): I(x_0) \cap A \neq \emptyset$ e $I(x_0) \cap \mathbb{R}\backslash A \neq \emptyset$

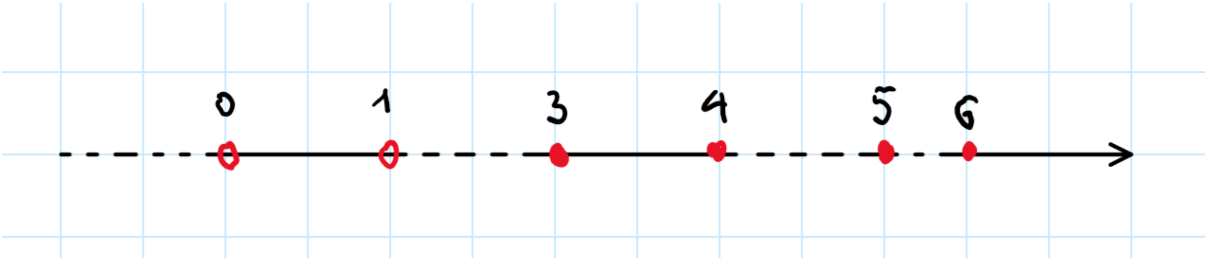
cioè, se ogni intorno di $x_0$ ha punti in comune sia con $\mathcal{A}$ sia con il complementare di $\mathcal{A}$.

Indicheremo con $F_r(A)$ l'insieme dei punti di frontiera dell'insieme $\mathcal{A}$.

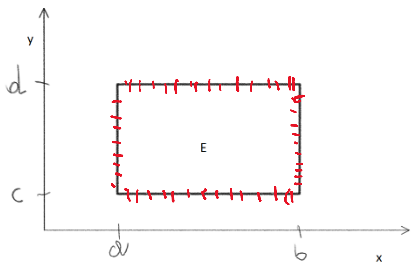
Esempio 1 – Se $E = ]a, b]$, la frontiera di $E$ è $Fr(E) = \{a, b\}$:




*Esempio 2 – Se* $A = (0,1) \cup [3,4] \cup \{5,6\}$, *la frontiera di A è l'insieme* $Fr(A) = \{0,1,3,4,5,6\}$:




*Esempio 3 – Se* $A = ]a,b[ \times ]c,d[ = \{(x,y) \in \mathbb{R} | a < x < b \text{ e } c < y < d\}$, *la frontiera di A è il contorno del rettangolo di lati ab e cd:*




## Insiemi aperti/chiusi in ℝ

*Def.3.3.4 – (Definizione di insieme aperto, di insieme chiuso)*

*Se* $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, *si dice che A è un insieme:*

*a) aperto se ogni punto di A è interno ad A;*

*b) chiuso se il suo complementare* $\mathbb{R} \backslash A$ *è un insieme aperto.*

*Fondamentale è la seguente proprietà.*

*Prop. – (Caratterizzazione degli insiemi chiusi)*

$\forall \emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *si dimostra che*

$$(A \text{ è un insieme chiuso}) \Leftrightarrow (Fr(A) \subseteq A).$$

*Esempi di insiemi chiusi e insiemi aperti sono:*

1. *L'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme $\mathbb{R}$ sono insiemi sia aperti sia chiusi;*
2. *L'insieme $A = \{a\}$ è un insieme chiuso;*
3. *Ogni intervallo aperto (chiuso) è un insieme aperto (chiuso);*
4. *L'unione e l'intersezione di due insiemi aperti (chiusi) è un insieme aperto (chiuso).*

*Esempio 1 – $\forall a, b \in R$, con a<b, risulta:*

a) $\forall x \in [a,b]$, $x \neq a$ e $x \neq b$: x punto interno ad $[a,b]$;

b) l'intervallo $[a,b]$ è un insieme chiuso perché il suo complementare,

$$\mathbb{R} \backslash [a,b] = ]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[,$$

è un insieme aperto (unione di due insiemi aperti);

c) La frontiera di $[a,b]$ è: $\mathcal{F}r([a,b]) = \{a,b\} \subseteq [a,b]$.

*Esempio 2 – Dato l'intervallo aperto $]a,b[$, si ha:*

a) ogni punto di $]a,b[$ è interno ad $]a,b[$;

b) l'intervallo $]a,b[$ è un insieme aperto;

c) $\mathcal{F}r(]a,b[) = \{a,b\} \nsubseteq ]a,b[$.

## *Punti di accumulazione, punti isolati di un insieme*

*Def.3.3.5 – (Definizione di punto di accumulazione)*

*Se $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che:*

1. $x_0$ *è un punto di accumulazione per* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall I(x_0): I(x_0) \cap A \backslash \{x_0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall I(x_0), \exists x \in I(x_0) \cap A \ni' x \neq x_0$;

2. $x_0$ *è un punto di accumulazione a destra per* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall I^+(x_0): I^+(x_0) \cap A \backslash \{x_0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ $\forall I^+(x_0), \exists x \in I^+(x_0) \cap A \ni' x \neq x_0$;
3. $x_0$ *è un punto di accumulazione a sinistra per* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall I^-(x_0): I^-(x_0) \cap A \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$.

## Indicheremo con:

- $D_r(A)$ *l'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme* $\mathcal{A}$*: tale insieme si dice derivato di* $\mathcal{A}$*;*
- $D_r(A^+)$ *dei punti di accumulazione a destra dell'insieme* $\mathcal{A}$*: tale insieme si dice derivato destro di* $\mathcal{A}$*;*

- $D_r(A^-)$ dei punti di accumulazione a sinistra dell'insieme A: tale insieme si dice derivato sinistro di A.

Esempio – Se A è un intervallo, ogni punto interno e i punti di frontiera sono punti di accumulazione per A.

Teorema – (2° Teorema di chiusura)

Se $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, si dimostra che:

$$(A \text{ è chiuso}) \Leftrightarrow (DA \subseteq A).$$

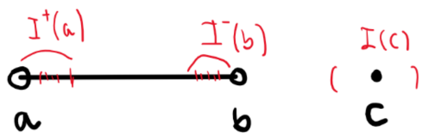
Def.3.3.6 – (Definizione di punto isolato di un insieme)

Se $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e se $x_0 \in A$, si dice che $x_0$ è un punto isolato di A se $x_0$ non è di accumulazione per A, ovvero:

$$(x_0 \in A \text{ è punto isolato}) \Leftrightarrow (\exists I(x_0) \ni' I(x_0) \cap A = \{x_0\}).$$

Esempio 1 - Dato l'insieme $A = (a, b) \cup \{c\}$, con $c \notin (a, b)$, si ha:

1. a è un punto di accumulazione a destra per A;
2. b è un punto di accumulazione a sinistra per A;
3. ogni $x_0 \in (a, b)$, interno ad A, è di accumulazione a sinistra e a destra per A;
4. c è un punto isolato di A.




Esempio 2 - L'insieme dei numeri naturali ℕ non ha punti di accumulazione $\Leftrightarrow \forall n \in N: n$ punto isolato per ℕ.

## Chiusura di un insieme

Def. 3.3.7 – (Chiusura o aderenza di un insieme)

Se $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ e se indichiamo con Fr(A) la frontiera di A (l'insieme dei punti di frontiera di A) e con Dr(A) il derivato di A (l'insieme dei punti di accumulazione di A), si dice chiusura o aderenza di A l'insieme indicato con $\bar{A}$ così definito:

$$\bar{A} = A \cup Fr(A) = A \cup Der(A).$$

*Esempio – Calcolare la chiusura dell'insieme* $A = [2,8[ \cup ]9,12[ \cup \{15\}$.

*Soluzione*

1. $Fr(A) = \{2,8,9,12,15\} \Longrightarrow \bar{A} = A \cup Fr(A) = [2,8] \cup [9,12] \cup \{15\}$;
2. $Der(A) = [2,8] \cup [9,12] \Longrightarrow \bar{A} = A \cup Der(A) = [2,8] \cup [9,12] \cup \{15\}$;

*Dunque:* $\bar{A} = A \cup Fr(A) = A \cup Der(A)$.

*Sussiste il seguente teorema.*

*Teorema 3.3.1 – (Teorema di chiusura)*

*Se* $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ *è un insieme di numeri reali, si dimostra che:*

$$(\mathcal{A} \text{ è chiuso}) \Leftrightarrow (A = \bar{A}).$$

*Def. 3.3.8 – (Definizione di insieme compatto)*

*Se* $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ *è un sottoinsieme non vuoto di* ℝ, *si dice che:*

$$(\mathcal{A} \text{ un insieme compatto}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ è un insieme chiuso e limitato di } \mathbb{R}).$$

*Esempio 1 –* $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $[a, b]$ *è un insieme compatto perché è chiuso e limitato.*

*Esempio 2 -* $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $[a, b] \cup [c, d]$ *è un insieme compatto perché è limitato e chiuso (unione di due insiemi chiusi).*

*Controesempio 1 -* $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $]a, b[$ *non è un insieme compatto perché non è chiuso.*

*Controesempio 2 – L'intervallo* $]a, +\infty[$ *non è compatto perché non è né chiuso né limitato.*

## **Operazioni in ℝ**

### *(I) La funzione potenza*

*&3.4 – Potenza di un numero reale*

*Def.3.4.1.1 – (Definizione di potenza con esponente intero naturale)*

1. *Se* $a \in \mathbb{R}$ *e se* $n \in \mathbb{N}$, *si dice potenza n-sima di a il numero reale così definito:*

$$a^n = \begin{cases} 1, & se\ n = 0 \\ a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, & se\ n \geq 1 \end{cases}.$$

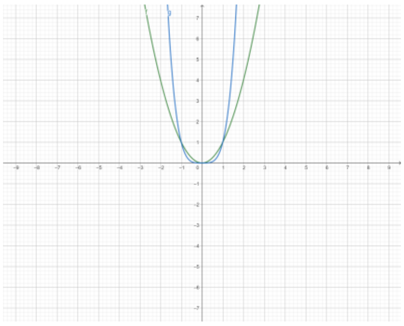
Poiché $\forall a \in R$, esiste ed è unico il numero reale $a^n$, si può considerare la nuova funzione

$$f: R \longrightarrow R \ \ni' \forall x \in R: f(x) = x^n$$

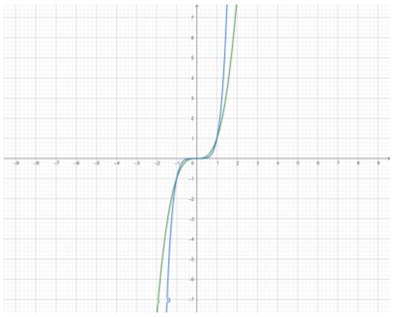
detta funzione potenza con esponente intero naturale.

Il grafico è:

- se n è pari:



- se n è dispari:



Def.3.4.1.2 – (Definizione di potenza con esponente intero relativo)

Se $a \in \mathbb{R}$ e se $z \in \mathbb{Z}$, si dice potenza di a elevato a z il numero reale così definito:

$$a^z = \begin{cases} 1, & se\ z = 0 \\ a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, & se\ z > 0 \\ \dfrac{1}{a^{-z}}, & se\ z < 0\ e\ a \neq 0 \end{cases}$$

<u>Si osservi esplicitamente che se l’esponente z è negativo, la base a deve essere diversa da zero</u>.

Poiché $\forall x \in R\backslash\{0\}$, esiste ed è unico il numero reale $x^z$, si può considerare la nuova funzione

$$f: R^* \longrightarrow R \ \ni' \forall x \in R^*: f(x) = x^z$$

detta funzione <u>potenza</u> con esponente <u>intero relativo</u>.

*Def.3.4.1.3 – (Definizione di potenza con esponente razionale)*

*Se* $x \in R^*$ *e se* $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, *si dice potenza di x elevato a q il numero reale così definito:*

$$x^q = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

*dove* $R^*$ *dipende da m e da n.*

*Ad esempio:*

- $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ *esiste* $\forall x \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R})$;
- $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3}$ *esiste* $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[)$;
- $x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$ *esiste* $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\})$;
- $x^{-\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^{-3}} = \sqrt[2]{\frac{1}{x^3}}$ *esiste* $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ (\mathbb{R}^* = ]0, +\infty[)$.

---

*Caso particolare: la funzione radice n-sima *

---

*È la funzione* $f: X \longrightarrow R$ *così definita:*

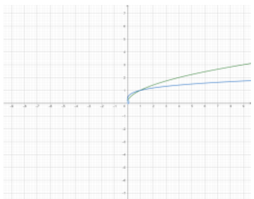
$$\forall x \in X: f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = y \ \ni' \ y^n = x.$$

*Essa ha per dominio:*

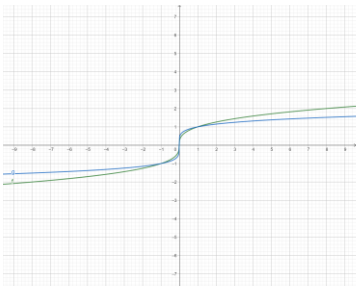
- $X = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ *se n è pari,*
- $X = \mathbb{R}$ *se n è dispari.*

*Il grafico è:*

- *Se n è pari:*



- *Se n è dispari:*



*Def.3.4.1.4 – (Definizione di potenza con esponente irrazionale)*

*Si è visto che:*

1. *Se* $n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}: \exists a^n \in \mathbb{R} \ \ni' \ a^n = \begin{cases} 1, \ se\ n = 0 \\ a \cdot a \cdot \ldots a, se\ n \geq 1 \end{cases}$

2. *Se* $z \in \mathbb{Z}, \exists a^z = \begin{cases} 1, se\ z = 0 \\ a \cdot a \cdot \ldots a, se\ z > 0 \\ \frac{1}{a^{-z}}, \ se\ z < 0\ e\ a \neq 0 \end{cases}$

3. *Se* $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \exists a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, *con le rispettive condizioni di esistenza su a, a seconda dei valori di m e di n:*
   - *Se* $a > 0: \exists a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \forall m \in \mathbb{Z}\ e\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$;
   - *Se* $a < 0$ *e se* $n$ *è un intero pari,* $\nexists a^{\frac{m}{n}}$*: ad esempio* $\nexists \sqrt[4]{-1} = (-1)^{\frac{1}{4}}$.

*Si vuole ora definire la potenza con esponente irrazionale:*

$$y = a^b \ con\ a > 0\ e\ b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

*1° caso*

*Se* $a = 1$, *si pone:*

$$1^b = 1, \forall b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};$$

*2° caso*

- *Se* $a > 1\ e\ b > 0$, *con* $b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ *si ha:*

$$b_0 \leq b_0, b_1 \leq b_0, b_1 b_2 \leq b_0, b_1 b_2 b_3 \leq \cdots \leq b_0 + 1 \Longrightarrow (essendo\ a > 1) a^{b_0} \leq a^{b_0, b_1} \leq \cdots \leq a^{b_0+1}$$

$\Longrightarrow A = \{a^{b_0}, a^{b_0, b_1}, \ldots\}$ *è un insieme limitato superiormente* ($a^{b_0+1}$ *è un maggiorante di* $\mathcal{A}$) $\Longrightarrow$ $\exists \sup A \in \mathbb{R}$.

*Per definizione,* $\forall a > 1$ e $\forall b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *positivo, si pone:* $a^b = \sup A$.

- *se* $a > 1\ e\ b < 0$, *si pone:* $a^b = \frac{1}{a^{-b}}$.

*3° caso*

- *Se* $0 < a < 1\ e\ b > 0$, *con* $b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ *si ha:*

$$b_0 \leq b_0, b_1 \leq b_0, b_1 b_2 \leq b_0, b_1 b_2 \leq \cdots \leq b_0 + 1 \Longrightarrow (essendo\ a < 1)\ a^{b_0} \geq a^{b_0, b_1} \geq \cdots \geq a^{b_0+1}$$

$\Longrightarrow A = \{x^{b_0}, x^{b_0, b_1}, \ldots,\}$ *è un insieme limitato inferiormente* ($x^{b_0+1}$ *è un minorante*) $\Longrightarrow$ $\exists \inf A \in \mathbb{R}$.

*Per definizione, se* $0 < a < 1$ e $b > 0$, *si pone:* $x^b = \inf\ A$;

- *Se* $0 < a < 1\ e\ b < 0$ *si pone:* $a^b = \frac{1}{a^{-b}}$.

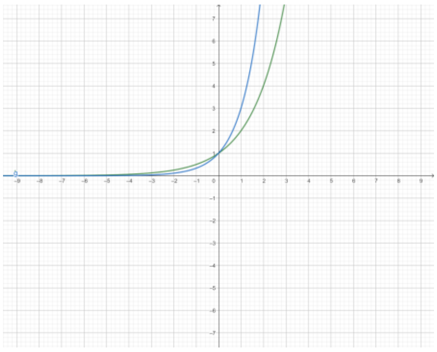
*Dunque:*

$\forall a > 0$, $\forall x \in R$ *(razionale o irrazionale)* $\exists | a^x \in R$ *e quindi si può definire la nuova funzione*

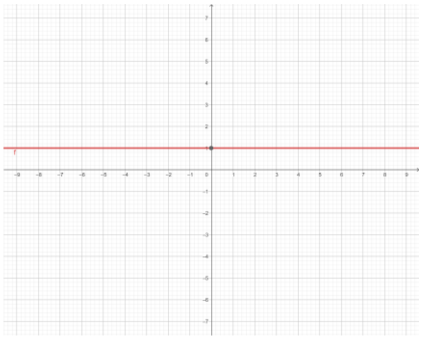
$$f : R \longrightarrow R \ \ni' \ \forall x \in R : f(x) = a^x$$

*detta funzione esponenziale di base* $a > 0$ *il cui grafico è:*

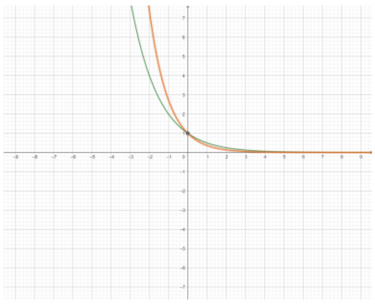
- *Se* $a > 1$:



- *Se* $a = 1$: $y = 1^x = 1$:



- *Se* $0 < a < 1$:



## *Proprietà delle potenze*

$\forall a, b \in \,]0, +\infty[$ *e* $\forall x, y \in R$, *si dimostra che:*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $a^x : a^y = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
5. $a^x : b^x = (a : b)^x$

## (II) Valore assoluto in ℝ

&3.5 – Valore assoluto in ℝ

Def. 3.5.1 – (Definizione di valore assoluto di un numero reale)

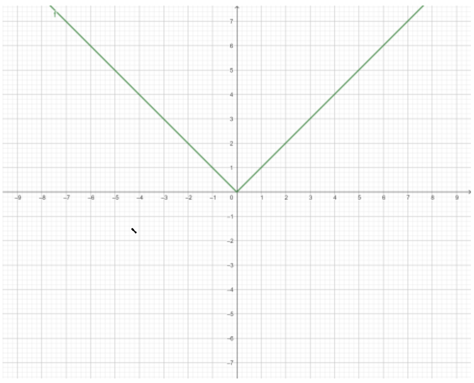
$\forall\, a \in \mathbb{R}$, si definisce valore assoluto di a il numero reale indicato con

$$|a| = \max(-a, a) = \begin{cases} a, & se\ a \geq 0 \\ -a, & se\ a < 0 \end{cases}$$

Poiché $\forall a \in R$, esiste ed è unico $|a| \in R$, è possibile definire la nuova funzione

$$f: R \longrightarrow R \ \ni' \forall x \in R: f(x) = |x|$$

detta funzione valore assoluto, il cui grafico è:



## Proprietà del valore assoluto

Prop.3.5.1 – (Proprietà del valore assoluto)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{R}$, si dimostra che:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|x| = |-x|$

4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $|x^k| = |x|^k$
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, *con* $y \neq 0$
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$
8. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$
9. $\forall k > 0: \begin{cases} |x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \\ |x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k \ \vee x \geq k \end{cases}$

*La dimostrazione di tali proprietà è una conseguenza immediata della definizione di valore assoluto.*

*Dimostriamo, ad esempio, la (8).*

*I casi possibili sono:*

a) *Se* $x, y \geq 0 \Longrightarrow |x| = x, |y| = y \Longrightarrow \big||x| - |y|\big| = |x - y| =$
$= |x + (-y)| \leq \big(per\ la\ (7)\big) \leq |x| + |-y| = (poichè\ -y \leq 0) = x{-}y \leq |x - y| \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \forall x, y \geq 0: \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$
b) *Sia* $x \geq 0$ *e* $y \leq 0 \Longrightarrow \big||x| - |y|\big| = |x + y| \leq |x| + |y| = x - y \leq |x - y| \Longrightarrow$
$\forall x \geq 0$ *e* $y \leq 0: \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.
c) *Se* $x, y \leq 0 \Longrightarrow |x| = -x, |y| = -y \Longrightarrow \big||x| - |y|\big| = |-x + y| = |x - y| \leq |x - y|$.

*Osservazione – La (9) è detta disequazione elementare.*

---

## *(III) Logaritmo di un numero reale*

---

### *&3.6 – Logaritmo in ℝ*

*Def. 3.6.1 – (Definizione di logaritmo in ℝ)*

*Se* $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$, *e se* $0 < b \in \mathbb{R}$, *strettamente positivo, si dice* *<u>logaritmo in base a di b</u>* *e si indica con* $log_a(b)$ *il numero reale così definito:*

$$log_a(b) = x \in R \ \ni' \ a^x = b.$$

- *a si dice base del logaritmo, b si dice argomento del logaritmo;*

  *Se* $a = 10$, *il logaritmo si dice decimale e si indica con log(b);*

*se* $a = e$ *(numero di Nepero), il logaritmo si dice naturale (o neperiano) e si indica con ln(b).*

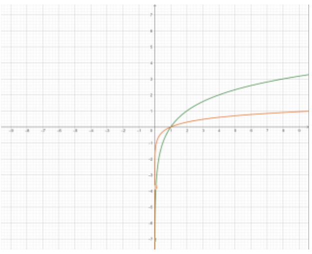
*Poiché* $\forall\, 0 < x \in R$, *esiste ed è unico* $log_a(x) \in R$, *è possibile definire la nuova funzione*

$$f\colon \mathbb{R}_0^+ = ]0, +\infty[ \longrightarrow R \;\; \ni' \; \forall x > 0 \colon f(x) = log_a(x)$$

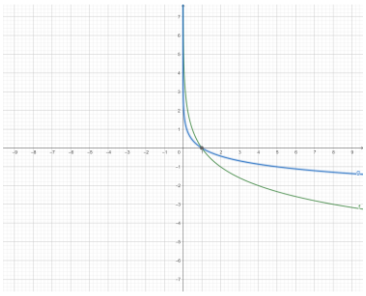
*detta funzione logaritmo in base a.*

*Il grafico della funzione logaritmo è:*

- *Se* $a > 1$,



- *se* $0 < a < 1$,



## *Operazioni con i logaritmi*

*Prop.3.6.1* - $\forall 0 < a \neq 1$ *e* $x, y > 0$, *si dimostra che:*

1. $log_a(a) = 1;\ log_a(1) = 0;$
2. $log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y);$
3. $log_a(x/y) = log_a(x) - log_a(y);$
4. $log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot log_a(x);$

5. $log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot log_a(x)$.

*Prop.3.6.1 – (Formula del cambiamento di base)*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, con\ 0 < a, b \neq 1\ e\ \forall x > 0\ \text{risulta: } log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}.$$

*Ulteriori proprietà sono espresse nel seguente corollario.*

*Corollario 2.7.1* – $\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1\ e\ b > 0$, *si dimostra che:*

1. $log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -log_a(b)$; $log_{\frac{1}{a}}(b) = -log_a(b)$; $log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b}\right) = log_a(b)$
2. $log_a(b^m) = m \cdot log_a(b)$; $log_{a^n}(b) = \frac{1}{n} log_a(b)$; $log_{a^n}(b^m) = \frac{m}{n} log_a(b)$;
3. $log_a(b) = \frac{1}{log_b(a)}$.

*Fondamentali sono le seguenti ulteriori proprietà.*

*Prop.3.6.2 – (Il logaritmo funzione inversa dell'esponenziale)*

$\forall a \in R, 0 < a \neq 1$, *si dimostra che:*

1. $log_a(a^x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $a^{log_a(y)} = y, \forall y > 0$.

*Dim.* $log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = log_a(a^x) \\ y = a^{log_a(y)} \end{cases}$.

*Prop.3.6.3 – (Monotonia del logaritmo)*

1. *Se* $a > 1$: $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ni' 0 < x_1 < x_2$: $log_a(x_1) < log_a(x_2)$;
2. *Se 0<a<1:* $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ni' 0 < x_1 < x_2$: $log_a(x_1) > log_a(x_2)$.

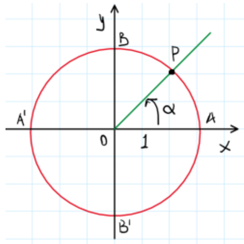
---

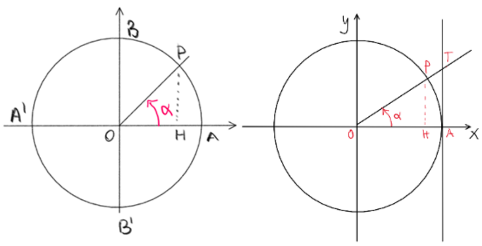
## *Elementi di goniometria - Definizioni e proprietà delle funzioni goniometriche*

---

### *&3.7 – Funzioni goniometriche*

*Def.3.7.1 - (Definizione di seno, coseno, tangente), cotangente, secante, cosecante)*
*Considerata la circonferenza di centro O, origine di un sistema di assi cartesiani Oxy, e di raggio* $r = 1$, *detta circonferenza goniometrica,* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *indichiamo con* $\widehat{AOP}$ *l'angolo orientato riferito alla circonferenza goniometrica di misura* $\alpha, mis(\widehat{AOP}) = \alpha$:




*Si pongono le seguenti definizioni.*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}: sen(\alpha) = y_P = \overrightarrow{HP}$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \cos(\alpha) = x_P = \overrightarrow{OH}$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi: tg(\alpha) = y_T = \overrightarrow{AT}$;
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi: cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}$;
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi: \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$;
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi: cosec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$.

## *(I) Le 5 relazioni fondamentali*

*Prop.3.7.1 - (Le 5 relazioni fondamentali)*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$;

2. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi: tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$;
3. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi: cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}$;
4. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi: \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$;
5. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi: cosec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$.

Dim.1 - E' un'applicazione del teorema di Pitagora applicato al triangolo POH.

Le 5 relazioni si dicono fondamentali perché da esse è possibile ricavare ogni altra relazione goniometrica.

## (II) Periodicità delle funzioni goniometriche

Prop.3.7.2 - (Periodicità delle funzioni goniometriche)

1. Seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo $T = 2\pi$:

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}: sen(\alpha) = sen(\alpha + 2k\pi);\ cos(\alpha) = cos(\alpha + 2k\pi);$$

L'intervallo di ampiezza minima di studio per le funzioni serno e coseno è $[0,2\pi]$;

2. Tangente e cotangente sono funzioni periodiche di periodo $T = \pi$:

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, \forall k \in \mathbb{Z}: tg(\alpha) = tg(\alpha + k\pi);$$

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi\}, \forall k \in \mathbb{Z}: cotg(\alpha) = cotg(\alpha + k\pi);$$

L'intervallo di ampiezza minima di studio per le funzion tangente e cotangente è $(0,\pi)$ o $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

## (III) Valori notevoli delle funzioni goniometriche

| Funzione | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Seno | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *coseno* | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| *tangente* | $0$ | $\nexists$ | $0$ | $\nexists$ | $0$ |
| *cotangente* | $\nexists$ | $0$ | $\nexists$ | $0$ | $\nexists$ |

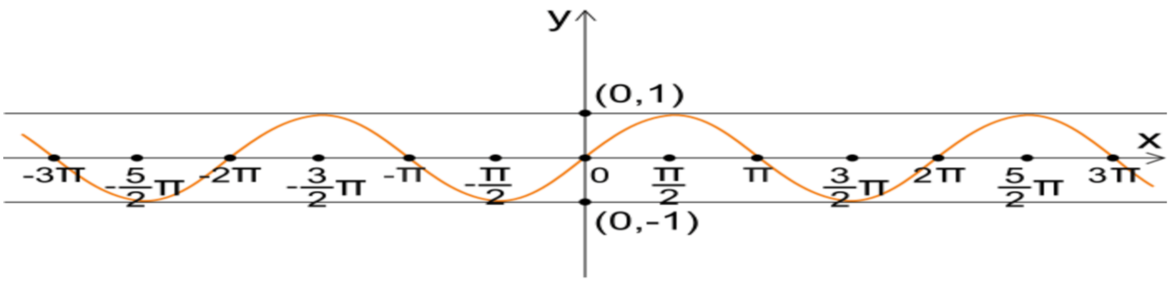
*Ulteriori valori:*

| *Funzione* | $\frac{\pi}{6}$ (30°) | $\frac{\pi}{4}$ (45°) | $\frac{\pi}{3}$ (60°) |
|---|---|---|---|
| *seno* | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| *coseno* | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| *tangente* | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| *cotangente* | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## *(IV) Il grafico delle funzioni goniometriche*

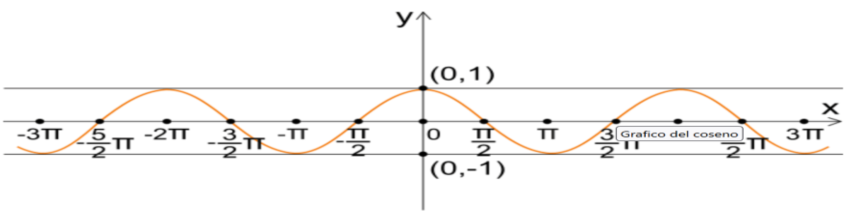
### Grafico del seno

Nota: il **grafico della funzione seno** viene talvolta detto sinusoide.




### Grafico del coseno

Nota: il **grafico della funzione coseno** viene talvolta indicato con il termine cosinusoide.



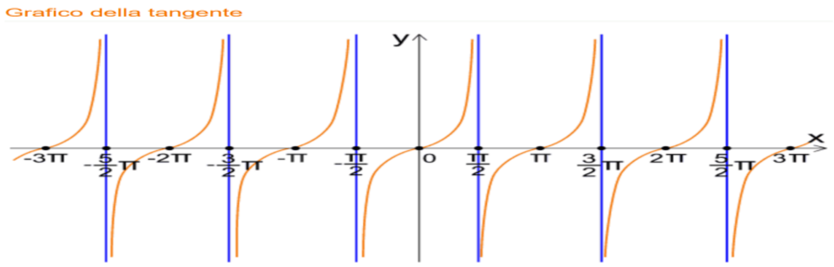


Grafico della tangente
y
x
-3π
$-\frac{5}{2}\pi$
-2π
$-\frac{3}{2}\pi$
-π
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
$\frac{5}{2}\pi$
3π

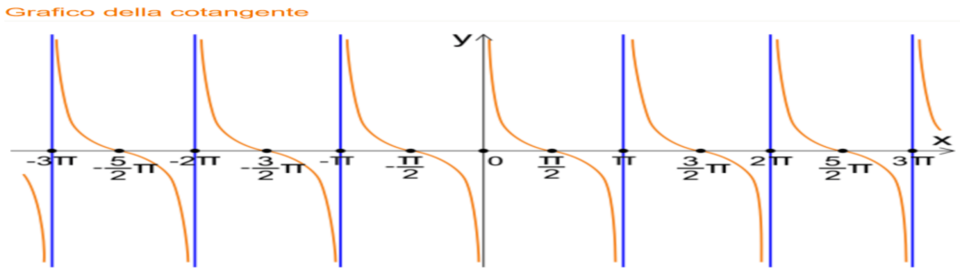


Grafico della cotangente
y
x
-3π
$-\frac{5}{2}\pi$
-2π
$-\frac{3}{2}\pi$
-π
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
$\frac{5}{2}\pi$
3π

## (V) Relazioni fra angoli associati

### 1) Angoli opposti

| |
|---|
| $sen(-\alpha) = \; -sen(\alpha)$ |
| $cos(-\alpha) = \; cos(\alpha)$ |
| $tg(-\alpha) = \; -tg(\alpha)$ |
| $cotg(-\alpha) = -cotg(\alpha)$ |

### 2) Angoli complementari

| |
|---|
| $sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos(\alpha)$ |
| $cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen(\alpha)$ |
| $tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cotg(\alpha)$ |
| $cotg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg(\alpha)$ |

### 3) Angoli che differiscono di $\frac{\pi}{2}$

| |
|---|
| $sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = cos(\alpha)$ |
| $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -sen(\alpha)$ |
| $tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -cotg(\alpha)$ |
| $cotg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -tg(\alpha)$ |

### 4) Angoli supplementari

| |
|---|
| $sen(\pi - \alpha) = sen(\alpha)$ |
| $cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha)$ |
| $tg(\pi - \alpha) = -tg(\alpha)$ |
| $cotg(\pi - \alpha) = -cotg(\alpha)$ |

## 5) Angoli che differiscono di $\pi$

| |
|---|
| $sen(\pi + \alpha) = -sen(\alpha)$ |
| $cos(\pi + \alpha) = -cos(\alpha)$ |
| $tg(\pi + \alpha) = \quad tg(\alpha)$ |
| $cotg(\pi + \alpha) = cotg(\alpha)$ |

## 6) Angoli esplementari

| |
|---|
| $sen(2\pi - \alpha) = \quad -sen(\alpha)$ |
| $cos(2\pi - \alpha) = \quad cos(\alpha)$ |
| $tg(2\pi - \alpha) = \quad - tg(\alpha)$ |
| $cotg(2\pi - \alpha) = - cotg(\alpha)$ |

## Formule di addizione e sottrazione

| |
|---|
| $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) + sen(\beta)\cos(\alpha)$ |
| $sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) - sen(\beta)\cos(\alpha)$ |

| |
|---|
| $cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$ |
| $cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$ |

| |
|---|
| $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)tg(\beta)}$ |
| $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg(\alpha)-tg(\beta)}{1+tg(\alpha)tg(\beta)}$ |

## *(VI) Formule di duplicazione*

| |
|---|
| $sen(2\alpha)=2sen(\alpha)\cos(\alpha)$ |
| $cos(2\alpha)=cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)=2cos^2(\alpha)-1=1-2sen^2(\alpha)$ |
| $tg(2\alpha)=\dfrac{2tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$ |

## *(VII) Formule di bisezione*

| |
|---|
| $sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}}$ |
| $cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(\alpha)}{2}}$ |
| $tag\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}},\qquad \forall\alpha\neq\pi+2k\pi$ |

## *(VIII) Formule di prostaferesi del seno e del coseno*

| |
|---|
| $sen(\alpha) + sen(\beta) = 2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$<br>$sen(\alpha) - sen(\beta) = 2sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ |
| $\cos(\alpha) + sen(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$<br>$\cos(\alpha) - sen(\beta) = -2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ |

### *(IX) Formule parametriche ($t = tg(\frac{\alpha}{2})$)*

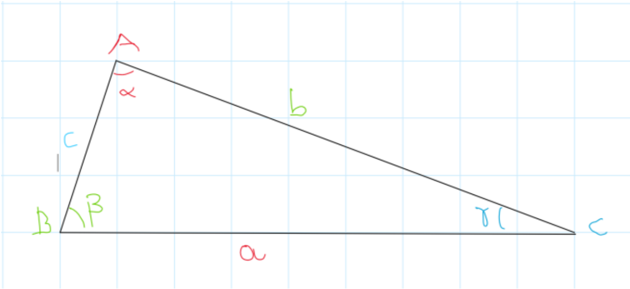
| |
|---|
| $sen(\alpha) = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$ |
| $cos(\alpha) = \frac{1-tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} == \frac{1-t^2}{1+t^2}$ |
| $tg(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$ |

## *&3.8 - Trigonometria (cenni)*

### *(I) Teoremi dei triangoli rettangoli*

*Teorema 3.8.1 - (1° teorema sui triangoli rettangoli)*

*Se ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa a e cateti b e c e se $\beta$ e $\gamma$ sono glia angoli corrispondenti a b e c,*



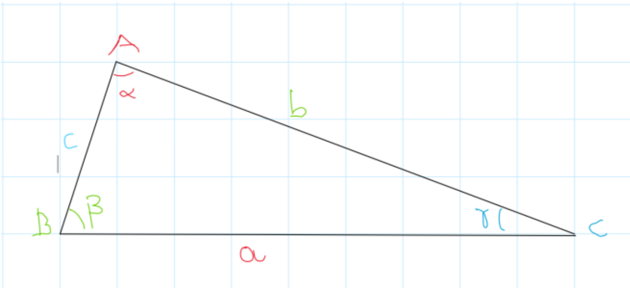

si dimostra che:

1) $b = a \cdot sen(\beta) = a \cdot \cos(\gamma)$ ;

2) $c = a \cdot sen(\gamma) = a \cdot \cos(\beta)$.

Teorema 3.8.2 – (2° teorema sui triangoli rettangoli)

Se ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa a e cateti b e c e se $\beta$ e $\gamma$ sono glia angoli corrispondenti a b e c,




si dimostra che:

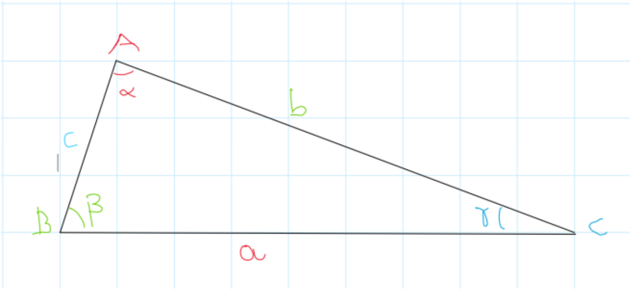
1) $b = c \cdot tan(\beta) = c \cdot \text{cotan}(\gamma)$ ;

2) $c = b \cdot tan(\gamma) = b \cdot \text{cotan}(\beta)$.

## (II) Teoremi dei triangoli qualsiasi

Teorema 3.8.3 – (Teorema dei seni)

Se ABC è un triangolo qualsiasi di lati a, b e c e angoli, rispettivamente, $\alpha, \beta$ e $\gamma$,

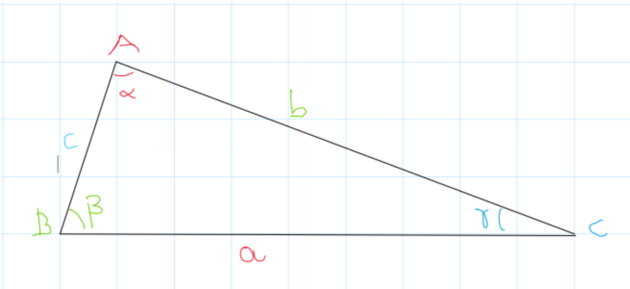



si dimostra che:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}.$$

Teorema 3.8.4 - (Teorema del coseno o di Carnot)

Se ABC è un triangolo qualsiasi di lati a, b e c e angoli, rispettivamente, $\alpha, \beta$ e $\gamma$,




si dimostra che:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$;
2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$;
3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$.

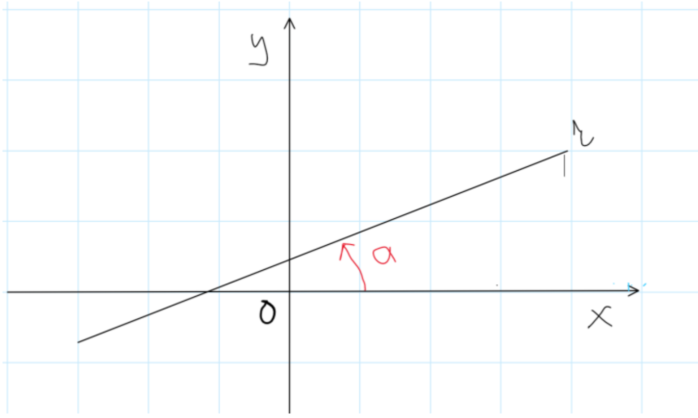
## Applicazioni alla geometria analitica

### &3.8 - Applicazioni alla geometria analitica

Prop. 3.8.1 - (Coefficiente angolare di una retta obliqua)

*Se r è una retta di equazione* $y = mx + q$ *e se* $\alpha$ *è l'angolo convesso che l'asse x forma con la retta r, si dimostra che*

$$m = \tan(\alpha) = \tan(\widehat{xr}).$$



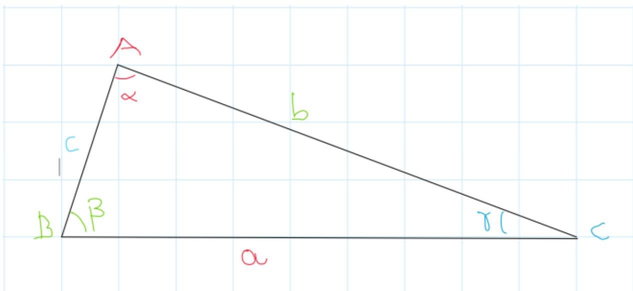

*Prop. 3.8.2 - (Angolo di due rette)*

*Se r è una retta di equazione* $y = mx + q$ *e se s è una retta di equazione* $y = m'x + q'$, *si dimostra che*

$$\tan(\widehat{rs}) = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|.$$

*Prop. 3.8.3 - (Area di un triangolo)*

*Se ABC è un triangolo di lati a e b e se* $\gamma$ *è l'angolo interno che essi formano*




*si dimostra che*

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} ab\,sen(\gamma).$$