Dispense del corso di Geometria e Algebra

(Classe N-POLIBA)

A cura di Viola Siconolfi

Indice

Capitolo 1

Insiemi, funzioni e strutture algebriche

1.1 Prime nozioni di teoria degli insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti, un metodo per descrivere un insieme è tramite l'enumerazione dei suoi elementi tra parentesi graffe. Ad esempio si può scrivere

$$I = \{a, b, c, d\}; \quad J = \{2, 4, 6, 8\}$$

in questo caso l'insieme I contiene le quattro lettere a, b, c, d. Un altro metodo per descrivere un insieme (in genere utilizzato per insiemi infiniti o molto numerosi) è quello di descriverli in funzione di una proprietà soddisfatta da tutti e soli i suoi elementi. Vediamo qualche esempio:

Esempio 1.

$$\mathbb{P} = \{n / \textit{ numero naturale pari}\}; \quad K = \{x | x \textit{ è una città italiana }\}.$$

Il simbolo $'|'$ che compare negli esempi precedenti si legge come "tale che". Quindi si dirà che "$\mathbb{P}$ è l'insieme degli n tale che n è un numero naturale pari".

Anche gli insiemi I e J dell'esempio precedente possono essere descritti tramite una proprietà:

$$I = \{x | x \text{ è una delle prime 4 lettere dell'alfabeto italiano}\};$$

$$J = \{n | \text{ n è un numero naturale pari minore di } 9\}.$$

Un insieme può essere anche vuoto e quindi non contenere nessun elemento, l'insieme vuoto si indica con $\emptyset$. Il numero di elementi contenuti in un insieme si chiama cardinalità di un insieme e si indica come $|-|$. Ad esempio:

$$|\emptyset| = 0; |I| = 4; |\mathbb{P}| = \infty.$$

Per denotare l'appartenenza di un elemento in un insieme si usa il simbolo $\in$, per denotare la non appartenenza si utilizza il simbolo $\notin$, ad esempio prendendo K definito in 1:

$$\text{Milano} \in K; \text{Berlino} \notin K.$$

Dati due insiemi A e B si dice che A è un sottoinsieme di B se tutti gli elementi di A sono anche contenuti in B. Il simbolo che si usa per indicare il contenimento tra insiemi è $\subset$. In formule diciamo che

$$A \subset B \text{ se } \forall a \in A, a \in B$$

la formula precedente si legge 'A è contenuto in B se per ogni elemento a appartenente a A, a appartiene a B'.

Con riferimento agli esempi visti prima si ha che

$$J \subset \mathbb{P}.$$

Dati due insiemi A e B si possono definire due nuovi insiemi a partire da questi due che vengono chiamati unione e intersezione:

- l'unione di A e B si indica come $A \cup B$ ed è l'insieme che contiene tutti gli elementi di A e tutti gli elementi di B. In formula scriviamo

  $$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oppure } x \in B\},$$

  si legge '$A \cup B$ è l'insieme degli elementi x tale che x è un elemento di A oppure x è un elemento di B';

- l'intersezione di A e B si indica come $A \cap B$ ed è l'insieme degli elementi che contengono gli elementi che si trovano contemporaneamente in A e in B. Formalmente si scrive:

  $$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

  e si legge '$A \cap B$ è l'insieme degli elementi x tale che x è contenuto in A e in B'.

Facciamo un esempio prendndo gli insiemi $J = \{2, 4, 6, 8\}$ e $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, allora

$$I \cup H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$I \cap H = \{2, 4\}$$

Attenzione: Nell'insieme $I \cup H$ i numeri 2 o 4 NON compaiono due volte.

Concludiamo questa sezione ricordando i più noti insiemi numerici:

- $\mathbb{N} = \{n|n$ è un numero naturale$\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z} = \{n|n$ è un numero intero $\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$;
- $\mathbb{Q} = \{n|n$ è un numero razionale$\} = 1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \ldots$...
- $\mathbb{R} = \{x|x$è un numero reale$\} = \{1, \frac{3}{\sqrt{5}}, \pi, -\sqrt{17} \ldots\}$.

1.2 Prodotto cartesiano e applicazioni tra insiemi

Dati due insiemi A e B abbiamo visto che si può definire l'unione $A \cup B$ e l'intersezione $A \cap B$, adesso vediamo la definizione di un altro insieme che dipende da A e da B: il prodotto catesiano, che si denota come $A \times B$.

Definizione 1.2.1. *Siano X, Y insiemi non vuoti, si definisce **prodotto cartesiano** di X e Y, l'insieme di tutte le **coppie** tali che la prima componente appartiene ad X e la seconda componente appartiene ad Y, cioè:*

$$X \times Y := \{(x, y)|x \in X, y \in Y\}$$

la formula si legge come 'il prodotto cartesiano di X e Y è l'insieme delle coppie (x, y) tale che x è un elemento di X e y è un elemento di Y'.

Esempio 2. *Siano $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ e $B = \{b_1, b_2\}$ allora:*

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$$

***Attenzione!**: le coppie sono ordinate quindi $(a_1, b_1) \in A \times B$ ma $(b_1, a_1) \notin A \times B$*

Osserviamo che in generale si può fare anche il prodotto cartesiano si un insieme per se stesso, in questo caso $X \times X$ si indica come X^2.

Se $A = B = \mathbb{R}$ si ottiene il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ per $\mathbb{R}$, ovvero
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, cioè l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Notare che questo insieme contiene sia l'elemento $(1, 2)$ che l'elemento $(2, 1)$ e che questi due elementi sono DISTINTI.

Il concetto di prodotto cartesiano si può estendere a più di due insiemi, la definizione è molto simile a quella precedente:

Definizione 1.2.2. *Sia n un intero maggiore di zero. Se X_1, ..., X_n sono n insiemi non vuoti si definisce* ***prodotto cartesiano*** *di $X_1 \dots X_n$, l'insieme di tutte le* ***n-ple*** *ordinate tali che la prima componente appartiene ad X_1, la seconda componente appartiene ad X_2, ..., l'n-esima componente ad X_n, cioè:*

$$X_1 \times \ldots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in X_i\}$$

Gli elementi di $X_1 \times \ldots \times X_n$ si chiamano n-uple (ennuple) ordinate.

La nozione di prodotto cartesiano tra due insiemi è molto utile per dare una definizione formale di funzioni fra insiemi:

Definizione 1.2.3. *Siano A, B due insiemi non vuoti, un'applicazione f di A in B è un sottoinsieme di $A \times B$ cioè $f \subset A \times B$, tale che ad ogni elemento di a compare come primo elemento di esattamente una coppia di f. Se $(a, b) \in f$ e f è una funzione si dice che $f(a) = b$.*

L'elemento $b = f(a)$ si dice ***immagine*** *di a tramite f oppure il* ***valore*** *dell'applicazione f in a, nel caso in cui B sia un insieme numerico.*

L'insieme A si dice dominio della funzione e l'insieme B si dice codominio della funzione.

Dati i due insiemi $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ prendiamo i seguenti sottoinsiemi di $A \times B$:

- $f = \{(x, 1), (y, 3), (x, 2), (z, 4), (z, 5)\}$;
- $g = \{(x, 1), (y, 1), (z, 3)\}$;
- $h = \{(x, 2), (z, 5)\}$;

Vediamo che f non è una funzione da A in B perchè l'elemento x compare due volte come primo elemento di un coppia.
g è una funzione tra A e B perchè ogni elemento di A compare esattamente una volta come primo elemento di una coppia. In questo caso $g(x) = 1, g(y) = 1, g(z) = 3$.
h non è una funzione perchè y non compare come primo elemento di nessuna coppia (quindi non è definita in y).

Definizione 1.2.4. *Se $f : A \to B$ è un'applicazione e $A^{'} \subset A$, si dice* ***immagine*** *di $A^{'}$ in f e si indica con il simbolo $f(A^{'})$, l'insieme degli elementi $y \in B$ che risultano immagini di qualche elemento $x \in A^{'}$ cioè*

$$f(A^{'}) = \{f(x) \in B | x \in A^{'}\}.$$

Se $B^{'} \subset B$ si dice ***controimmagine*** *di $B^{'}$ in f e si indica con il simbolo $f^{-1}(B^{'})$, l'insieme di tutti gli elementi $x \in A$ tali che $f(x)$ appartiene a $B^{'}$, cioè*

$$f^{-1}(B^{'}) = \{x \in A | f(x) \in B^{'}\}.$$

Tra le principali proprietà delle funzioni ci sono l'iniettività e la suriettività:

Definizione 1.2.5. *Un'applicazione $f : A \to B$ si dice* ***suriettiva*** *se $f(A) = B$, cioè per ogni elemento $y \in B$ esiste qualche elemento $x \in A$ tale che $y = f(x)$.*

Un'applicazione $f : A \to B$ si dice ***iniettiva*** *se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, cioè*

$$\forall x, x^{'} \in A \ni^{'} \ x \neq x^{'} \Rightarrow f(x) \neq f(x^{'})$$

oppure in modo equivalente si puè dire

$$\forall x, x^{'} \in A \ni^{'} f(x) = f(x^{'}) \Rightarrow x = x^{'}.$$

Un'applicazione iniettiva e suriettiva si dice biettiva o biunivoca.

Esempio 3.

1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ tale che $f(x) = x^2$ è suriettiva, ma non iniettiva. Per vedere che $f(1) = f(-1)$.*

2. *$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = -x$ è biunivoca.*

3. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tale che $f(x) = (1, x)$ è iniettiva ma non suriettiva. Il valore $(0, 0)$ ad esempio non è nell'immagine di f.*

1.3 Operazioni su insiemi e strutture algebriche

Prima di procedere con questa sezione il lettore è invitato ad una breve riflessione: all'inizio di questo capitolo sono stati presentati vari esempi di insiemi uno di questi era l'insieme delle città italiane K. Perchè però quando si tratta di fare matematica si sceglie di lavorare con insiemi numerici? Cosa manca all'inisieme K che però è presente nei vari insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \ldots$?

La risposta è principalemnte una: in K non sono definite delle operazioni. La proprietà di avere operazioni definite su un insieme si chiama *struttura*. Per studiare qualche esempio di struttura iniziamo definendo in modo rigoroso la nozione di operazione:

Definizione 1.3.1. *Sia S un insieme non vuoto, si dice* ***operazione binaria interna*** *o* ***legge di composizione interna*** *su S ogni applicazione*

$$\omega : S \times S \to S$$

$$(a, b) \mapsto \omega(a, b)$$

che ad ogni elemento (a, b) di $S \times S$ fa corrispondere un unico elemento di S che si indica con $\omega(a, b)$ o con $a\omega b$.

La nota operazione di somma sui numeri naturali secondo questo formalismo è quindi l'operazione $'+'$ definita sull'insieme non vuoto $\mathbb{N}$. Scriveremo quindi

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(a, b) \mapsto a + b$$

Lo stesso si può dire per l'operazione di somma definito su $\mathbb{Q}$, l'operazione di prodotto definita su $\mathbb{Z}$ ecc.

Attenzione! Secondo questa definizione l'operazione di sottrazione $'-'$ NON è un'operazione sui numeri naturali!! Infatti il risultato di $5 - 7$ non è un elemento di $\mathbb{N}$. L'operazione di sottrazione è invece un'operazione su $\mathbb{Z}$.

Adesso il lettore può ragionare sulla seguente domanda: data l'operazione divisione definita nel seguente modo:

$$: S \times S \to S$$

$$(a, b) \mapsto \tfrac{a}{b}$$

per quali insiemi numerici $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ è effettivamente un'operazione binaria?[1]

Vediamo adesso un'altro tipo di operazione binaria che è possibile definire per un insieme:

Definizione 1.3.2. *Siano A ed S due insiemi non vuoti, si dice* ***operazione binaria esterna*** *o* ***legge di composizione esterna*** *su S avente A come dominio di operatori, ogni applicazione*

$$\tau : A \times S \to S$$

$$(a, s) \mapsto \tau(a, s)$$

L'elemento $\tau(a, s)$ si indica anche con $a\tau s$

Le operazioni esterne sono meno note in generale ma saranno molto utilizzate durante il corso. Vediamone due esempi:

Esempio 4. *Facendo riferimento alla Definition 1.3.2 prendiamo come primo insieme $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e come secondo insieme $\mathbb{R}$. Definiamo un'operazione chiamata prodotto esterno nel seguente modo:*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(s, (a, b, c)) \mapsto s \cdot (a, b, c) = (sa, sb, sc).$$

quindi il prodotto esterno di $(1, -1, 0)$ per 4 è $4 \cdot (1, -1, 0) = (4, -4, 0)$.

Esempio 5. *Sia $\mathbb{Q}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali in funzione della variabile $'x'$, ad esempio:*

$$\frac{2}{5}x^3 + 4x^2 - \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}[x].$$

Definiamo il prodotto esterno:

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$$

$$(s, p(x) \mapsto sp(x).$$

Definizione 1.3.3. *Un'operazione interna ω si dice* ***associativa*** *se*

$$\forall a, b, c \in S : (a\omega b)\omega c = a\omega(b\omega c)$$

[1] Per nessuno degli insiemi, infatti $1 : 0 = \frac{1}{0}$ non è definito in nessuno degli insiemi numerici descritti. Per ovviare a questo problema si può definire l'operazione su insiemi 'modificati' tipo $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ che è l'insiemi dei numeri razionali senza lo 0.

Un'operazione interna si dice ***commutativa*** *se*

$$\forall a, b \in S : a\omega b = b\omega a$$

Si dece che un'operazione interna ω ***ammette l'elemento neutro*** *se esiste un elemento* $e \in S$ *tale che*

$$e\omega a = a\omega e = a \;\; \forall a \in S$$

Esempio 6.

1. *L'addizione nell'insieme dei numeri naturali* $\mathbb{N}$ *è associativa e commutativa. Inoltre ammette l'elemento neutro* 0*, infatti* $0+n = n+0 = n$ *per ogni numero naturale* n*.*

2. *La sottrazione nell'insieme dei numeri interi* $\mathbb{Z}$ *non è associativa: basta pensare che*

   $$(1-5)-4 = -8 \text{ mentre invece } 1-(5-4) = 0.$$

   Le sottrazione non è neanche commutativa.

Vediamo adesso un'altra proprietà che un elemento $s \in S$ può avere rispetto ad un'operazione: l'esistenza dell'inverso

Definizione 1.3.4. *Data un'operazione binaria interna* ω *definita su un insieme* S *che ammette l'esistenza dell'elemento neutro* e*. Un elemento* $s \in S$ *si dice invertibile rispetto ad* ω *se esiste* $s' \in S$ *tale che*

$$s\omega s' = s'\omega s = e$$

E' importante notare che ha senso parlare di invertibilità SOLO per operazioni che ammettono un elemento neutro.

Vediamo che:

- prendendo l'insieme $\mathbb{N}$ e l'operazione di somma si vede che l'unico elemento invertibile è 0;

- considerando l'insieme $\mathbb{Z}$ e l'operazione di somma ogni elemento è invertibile. L'inverso di $n \in \mathbb{Z}$ è $-n$. Considerando invece l'operazione di prodotto su $\mathbb{Z}$ quali sono gli elementi invertibili?[2].

Abbiamo visto quindi che spesso non è importante solo specificare l'insieme con cui si lavora, ma anche la struttura (le operazioni) che si considerano su di esso. Per indicare che si lavora con un insieme I e con delle operazioni ω_1, ω_2 si scrive direttamente (I, ω_1, ω_2).

Esistono dei tipi di struttura molto ricorrenti in matematica che hanno quindi meritato un nome a parte:

Definizione 1.3.5. *Sia G un insieme non vuoto con un'operazione interna*

$$\omega : G \times G \to G$$

*(G, ω) si dice **gruppo** se valgono le seguenti proprietà*

1. *Proprietà associativa di ω: $\forall a, b, c \in G : a\omega(b\omega c) = (a\omega b)\omega c$.*

2. *Esistenza elemento neutro: $\exists e \in G \ni' \forall a \in G : a\omega e = e\omega a = a$.*

3. *Esistenza simmetrico: $\forall a \in G\ \exists a' \in G \ni' a\omega a' = a'\omega a = e$.*

Esiste poi un caso particolare di gruppo, che è detto gruppo abeliano:

Definizione 1.3.6. *Un gruppo (G, ω) si dice **commutativo o abeliano** se, in aggiunta alle proprietà 1),2),3), ω soddisfa la proprietà commutativa, cioè*
4. $\forall a, b \in G : a\omega b = b\omega a$

Vediamo qualche esempio noto:

- $(\mathbb{Z}, +)$,$(\mathbb{Q}, +)$,$(\mathbb{R}, +)$,$(\mathbb{C}, +)$ sono gruppi abeliani,

- $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$,$(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$,$(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ sono gruppi abeliani,

- $(\mathbb{N}, +)$,$(\mathbb{N}, \cdot)$ non sono gruppi, non esiste l'opposto o il simmetrico di ogni elemento,

- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ non è un gruppo perchè esclusi $-1, 1$, nessun altro elemento ammette il simmetrico.

[2]Sono 1 e -1

Per un insieme abbiamo visto la nozione di sottoinsieme, adesso vediamo che per un insieme dotato della struttura di gruppo è possibile studiare alcuni particolari sottoinsiemi: i sottogruppi

Definizione 1.3.7. *Sia (G, ω) un gruppo, si definisce* ***sottogruppo*** *ogni sottoinsieme non vuoto H di G che risulti un gruppo rispetto alla restrizione ad H dell'operazione ω definita in G.*

Vediamo qualche esempio di gruppo e di sottogruppo:

- considerati i gruppi $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ si ha che ognuno è sottogruppo del successivo;
- anche considerando i gruppi $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot), (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ si ha che il primo è sottogruppo del secondo;
- notiamo che ogni sottogruppo di un gruppo G deve necessariamente contenere l'elemento neutro e di G. In particolare l'insieme $\{e\}$ è sempre un sottogruppo ed è detto 'sottogruppo banale';
- in base a quanto detto nel punto precedente si ha che $\{0\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$.

Vediamo adesso la definizione di un'altra struttura algebrica notevole questa volta definita tramite due operazioni interne: il campo.

Definizione 1.3.8. *Sia K un insieme non vuoto con due operazioni binarie interne, dette* ***addizione*** *e* ***moltiplicazione****, rispettivamente:*

$$+\colon K \times K \to K \;\; e \;\; \cdot : K \times K \to K.$$

Si dice che $(K, +, \cdot)$ è un ***campo*** *se verifica le seguenti proprietà:*

1. *$(K, +)$ è un gruppo abeliano (0 è l'elemento neutro rispetto a $+$);*
2. *$(K\backslash\{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano (1 è l'elemento neutro rispetto a $\cdot$);*
3. *$\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione).*

Vediamo nel dettagli tutte le proprietà che le due operazioni di campo devono soddisfare:

1. Proprietà associativa dell'addizione $a + (b + c) = (a + b) + c \ \forall a, b, c \in K$;
2. Proprietà commutativa dell'addizione $a + b = b + a \ \forall a, b \in K$;
3. Esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione (denotato con 0) tale che $a + 0 = a \ \forall a \in K$;
4. Esistenza del simmetrico $-a$ di a rispetto all'addizione detto anche **opposto** di a tale che $a + (-a) = 0$, per ogni elemento a di K.
5. Proprietà associativa della moltiplicazione $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ \forall a, b, c \in K$;
6. Proprietà commutativa della moltiplicazione $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b \in K$;
7. Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione (denotato con 1) tale che $a \cdot 1 = a \ \forall a \in K$;
8. Esistenza del simmetrico rispetto alla moltiplicazione (detto anche **inverso** o **reciproco**) di a indicato con a^{-1}, tale che $a \cdot a^{-1} = 1$ per ogni elemento non nullo di K.
9. Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ \forall a, b, c \in K$.

Esempi noti di campo sono i seguenti:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Non sono campi $(\mathbb{N}, +, \cdot), (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ infatti $(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo e $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ neanche.

Così come nel caso dei gruppi si è parlato di sottogruppi, per un campo si può parlare di sottocampo. La definizione formale è la seguente:

Definizione 1.3.9. *Si dice **sottocampo** di un campo $(K, +, \cdot)$ ogni sottoinsieme non vuoto $K^{'}$ di K, che sia esso stesso un campo rispetto alla restrizione a $K^{'}$ delle due operazioni definite su K.*

Vediamo un esempio:
□ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un sottocampo di $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

1.3.1 Proprietà di gruppi e campi

In questa sottosezione sono presentate alcune facili proprietà che si notano essere vere per tutti i gruppi e tutti i campi. Le dimostrazioni sono tutte brevi e possono essere provate a fare per esercizio:

Proposizione 1.3.10. *Sia (G, ω) (o semplicemente G) un gruppo, allora l'elemento neutro è unico.*

Dimostrazione. Se e , $e^{'} \in G$ sono elementi neutri distinti, allora

$$a\omega e = e\omega a = a$$

$$a\omega e^{'} = e^{'}\omega a = a \ \forall a \in G.$$

Prendendo e come elemento neutro, si ha $e^{'} = e^{'}\omega e$.
Prendendo $e^{'}$ come elemento neutro si ha $e^{'}\omega e = e$,
quindi

$$e^{'} = e^{'}\omega e = e.$$

□

Proposizione 1.3.11. *Ogni elemento di un gruppo G ammette un unico simmetrico.*

Dimostrazione. Fissato $a \in G$, se $a^{'}, a^{''}$ sono elementi di G tali che $a\omega a^{'} = a^{'}\omega a = e$ e $a\omega a^{''} = a^{''}\omega a = e$
allora

$$a^{''} = a^{''}\omega e = a^{''}\omega(a\omega a^{'}) = (a^{''}\omega a)\omega a^{'} = e\omega a^{'} = a^{'}$$

quindi il simmetrico di a à unico. □

Passiamo ai campi, una proprietà che si nota facilmente nel campo dei numeri reali è l'annullamento del prodotto ovvero $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Questa proprietà vale in un campo qualsiasi, come si dimostra nella seguente proposizione:

Proposizione 1.3.12. *Sia K un campo, allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *$\forall a \in K : a \cdot 0 = 0$;*

2. *$\forall a, b \in K : a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oppure $b = 0$.*

Dimostrazione.

1. Sia $a \in K$, per le proprietà di campo si ha $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ quindi $a \cdot 0 = 0$.

2. Siano $a, b \in K$ tali che $a \cdot b = 0$. Se $b = 0$ non si deve dimostrare nulla; pertanto supponiamo $b \neq 0$ allora esiste il reciproco di b e si ha $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$ per l'associatività della moltiplicazione e per 1.
   Segue che $a \cdot (b \cdot b^{-1}) = a \cdot 1 = a = 0 \cdot b^{-1} = 0$.

□

Capitolo 2

Le matrici: rango e determinante

2.1 Definizione di Spazio Vettoriale

Iniziamo questo capitolo dando la definizione della principale struttura algebrica che vedremo in questo corso: lo spazio vettoriale.

Lo spazio vettoriale V è definito tramite due operazioni binarie: un'addizione interna e un prodotto esterno. Per definire il prodotto esterno è necessario definire un altro insieme, questo sarà sempre un campo K. Vediamo la definizione formale:

Definizione 2.1.1. *Sia K un campo, sia V un insieme non vuoto su cui sono definite una legge di composizione interna detta* **addizione**

$$\begin{aligned} + : V \times V \to V \\ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

ed una legge di composizione esterna detta **prodotto per scalari**

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V \to V \\ (\lambda, \vec{v}) \to \lambda\vec{v} \end{aligned}$$

La struttura algebrica $(V, +, \cdot)$ è uno **spazio vettoriale** *su K se verifica le seguenti proprietà:*

1. *$(V, +)$ è un gruppo abeliano, cioè valgono*

   a) $\forall \vec{u}, \vec{u} \in V : \ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

   b) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

c) $\exists\vec{0} \in V \ \ni' \ \forall\vec{u} \in V : \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$*;*

d) $\forall\vec{u} \in V \ \exists\vec{u'}; \ \vec{u} + \vec{u'} = \vec{0}$*.*

2. $\forall a \in K, \ \forall\vec{u}\vec{v} \in V : \ a\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = a\cdot\vec{u} + a\cdot\vec{v}$ *(distributività rispetto alla somma di vettori);*

3. $\forall a, b \in K, \ \forall\vec{u} \in V : \ (a + b)\cdot\vec{u} = a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{u}$*(distributività rispetto alla somma di scalari);*

4. $\forall a, b \in K, \ \forall\vec{u} \in V : \ (ab)\cdot\vec{u} = a\cdot(b\cdot\vec{u})$*;*

5. $\forall\vec{u} \in V : \ 1\cdot\vec{u} = \vec{u}$ *(1 è l'elemento neutro di K rispetto alla moltiplicazione).*

Gli elementi di V si dicono **vettori**, gli elementi di K si dicono **scalari**. L'elemento $\vec{0}$ si dice **vettore nullo** di V. L'elemento $\vec{u}$ dell'assioma d) di dice **opposto** di $\vec{u}$ e si indica con $-\vec{u}$.
Se $K = \mathbb{R}$ si dice **spazio vettoriale reale**.

Nel seguito, il prodotto dello scalare a per il vettore $\vec{u}$ si indicherà con $a\vec{u}$ invece di $a\cdot\vec{u}$ mentre la moltiplicazione interna di K si indicherà con ab, invece di $a\cdot b$.

Vediamo un esempio di spazio vettoriale: $\mathbb{R}^3$. Questo non è altro che il prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ sono triple ordinate di numeri reali, vediamo qualche esempio:

$$(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3, (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3, (\sqrt{17}, -\pi, 4) \in \mathbb{R}^3.$$

Per definire una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}^3$ bisogna definire prima una somma, la definiamo nel seguente modo:

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$$

quindi per esempio:

$$(1, 3, -6) + (2, 2, 0) = (3, 5, -6).$$

Il lettore può facilmente verificare che la somma definita in questo mo dopo è commutativa e associativa. Inoltre il vettore $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ è l'elemento neutro rispetto a questa operazione è dato $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ il suo opposto è dato da $(-a, -b, -c) \in \mathbb{R}^3$. Abbiamo quindi che $(\mathbb{R}^3, +)$ è un gruppo abeliano. Adesso definiamo un'operazione di prodotto esterno sul campo $\mathbb{R}$:

$$s \cdot (a, b, c) = (sa, sb, sc).$$

Questo è anche uno dei primi esempi di operazione esterna visto nella scorsa sezione.

A questo punto le operazioni di distributività e associatività della somma rispetto al prodotto per scalare possono essere facilmente verificate.

$\mathbb{R}^3$ è quindi un esempio di spazio vettoriale reale. Vediamo che però con un ragionamente pressochè uguale si può definire una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \geq 1$. La somma infatti sarà sempre definita::

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

così come il prodotto esterno:

$$s \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (sx_1, \ldots, sx_n).$$

Un'altra osservazione che possiamo fare è che la stessa costruzione fatta per $\mathbb{R}^n$ si può fare per un qualunque altro campo K. Quindi dato un campo K è sempre possiabile considerare lo spazio vettoriale K^n per ogni $n \geq 1$.

Attenzione! Gli insiemi $\mathbb{Z}^4$, $\mathbb{N}^7$ ecc NON sono spazi vettoriali perchè $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ non sono campi e quindi non è definito un prodotto esterno per gli scalari in un campo.

Altri esempi particolari di spazi vettoriali sono:

Esempio 7.
- ☐ *L'insieme $V = \{\vec{0}\}$ formato dal solo vettore nullo è uno spazio vettoriale su un qualsiasi campo K. Esso costituisce il più piccolo spazio vettoriale possibile e si dice* **spazio vettoriale banale***;*
- ☐ *Dato un campo qualsiasi $\mathcal{K}$ sia $\mathcal{K}[x]$ la famiglia dei polinomi in una variabile 'x' a coefficienti in $\mathcal{K}$. Risulta che $\mathcal{K}[x]$ è uno spazio vettoriale su $\mathcal{K}$ considerando la somma naturalmente definita tra polinomi e l'operazione esterna definita in Example 5*

Una nozione, fondamentale per questo corso, è quella di combinazione lineare:

Definizione 2.1.2. *Dato un spazio vettoriale V su un campo K una combinazione lineare di n vettori $v_1, \ldots, v_n$ è data dalla somma*

$$s_1 \cdot v_1 + \ldots + c_n \cdot v_n \in V.$$

Lo scopo e l'uso di questa definizione saranno più chiari più avanti nel corso, ciò che è importante è che il lettore ricordi questa definizione e faccia attenzione alla due seguenti osservazioni:

1 per definire la combinazione lineare è necessario trovarsi in uno spazio vettoriale;

2 scrivere una combinazione lienare di alcuni vettori è relativamente semplice: in $\mathbb{R}^3$ ad esempio si può prendere $v_1 = (1, 4, 4)$, $v_2 = (0, -1, -1)$ e $v_3 = (3, 0, 0)$ e gli scalari $s_1 = 2, s_2 = -5, s_3 = 1$ e calcolare:

$$s_1 \cdot v_1 + s_2 \cdot v_2 + s_3 \cdot v_3 = (-1, 3, 3).$$

Tuttavia senza aver fatto questo conto è molto difficile sarpere se $(-1, 3, 3)$ può essere scritto come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

Concludiamo la sezione con un elenco di proposizioni teoriche che valgono sempre per gli spazi vettoriali :

Proposizione 2.1.3. *Sia V uno spazio vettoriale su K, allora valgono:*

a) $\forall \vec{v} \in V,\ 0\vec{v} = \vec{0}$;

b) $\forall \lambda \in K,\ \lambda\vec{0} = \vec{0}$:

c) $\forall \lambda \in K,\ \forall \vec{v} \in V,\ \lambda\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$;

d) $\forall \lambda \in K,\ \forall \vec{v} \in V:\ (-\lambda)\vec{v} = \lambda(-\vec{v})$.

Dimostrazione.

a) Sia $\lambda \in K$, allora $\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v} + \vec{0} = (\lambda + 0)\vec{v} = \lambda\vec{v} + 0\vec{v} \Rightarrow 0\vec{v} = \vec{0}$;

b) Sia $\vec{v} \in V$ allora $\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v} + \vec{0} = (\lambda + 0)\vec{v} = \lambda\vec{v} + 0\vec{v} \Rightarrow \lambda\vec{v} = \vec{0}$;

c) " $\Leftarrow$ " Se $\lambda = 0$ poichè $0\vec{v} = (0 + 0)\vec{v} = 0\vec{v} + 0\vec{v}$ si ha $\lambda\vec{v} = 0\vec{v} = 0\vec{v} - 0\vec{v} = \vec{0}$.
Se $\vec{v} = \vec{0}$ poichè $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$ si ha $\lambda\vec{v} = \lambda\vec{0} = \lambda\vec{0} - \lambda\vec{0} = \vec{0}$.
" $\Rightarrow$ " Sia $\lambda\vec{v} = \vec{0}$.
Se $\lambda = 0$ non si deve dimostrare nulla.
Se $\lambda \neq 0$ allora $\exists \lambda^{-1} \in K : \lambda^{-1}\lambda = 1$
allora da $\lambda\vec{v} = \vec{0}$, moltiplicando a sinistra per λ^{-1}, si ottiene

$$\lambda^{-1}\lambda\vec{v} = \lambda^{-1}\vec{0} = (\lambda^{-1}\lambda)\vec{v} = 1\vec{v} = \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = 0;$$

d) Sia $\vec{v} \in V$ allora $\vec{0} = \vec{0}\vec{v} = (\lambda - \lambda)\vec{v} = [\lambda + (-\lambda)]\vec{v} = \lambda\vec{v} + (-\lambda)\vec{v}$ e quindi la tesi.

□

2.1.1 Lineare dipendenza e Indipendenza

Abbiamo già visto la definizione di combinazione lineare (Definizione Definition 2.1.2) qui vediamo la definizione di dipendenza e indipendenza lineare:

Definizione 2.1.4. *Sia V uno spazio vettoriale su K, i vettori $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ si dicono* **linearmente dipendenti** *se esistono n scalari $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tutti nulli tali che $\lambda_1\vec{v_1} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0}$.*
Si dice che i vettori $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ sono **linearmente indipendenti** *se non sono linearmente dipendenti, cioè i vettori sono linearmente indipendenti se*

$$\lambda_1\vec{v_1} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Questo significa che i vettori $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ sono linearmente indipendenti se la loro unica combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli, cioè la combinazione lineare banale.

Vediamo delle proposizioni equivalente all'essere linearmente indipendenti:

Proposizione 2.1.5. *Sia V uno spazio vettoriale su K, allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *Un vettore $\vec{v}$ di V è linearmente dipendente se e solo se $\vec{v} = \vec{0}$.*
2. *I vettori $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n} \in V$, $(n \geq 2)$, sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti.*

Dimostrazione.

1. *È* conseguenza della definizione di vettori linearmente dipendenti.
   $\vec{v}$ è linearmente dipendente se e solo se esiste uno scalare non nullo λ tale che $\lambda\vec{v} = \vec{0}$. Per la proprietà c) della Proposizione 3.1.2 si ha $\lambda\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$. Pertanto $\vec{v} = \vec{0}$.
   Viceversa, se $\vec{v} = \vec{0}$ esiste lo scalare 1 non nullo tale che $1\vec{v} = \vec{v} = \vec{0}$.
   Pertanto il vettore $\vec{v}$ è linearmente dipendente;
2. Siano $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ n vettori linearmente dipendenti $(n \geq 2)$, allora per definizione esistono n scalari non tutti nulli $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tali che $\lambda_1\vec{v_1} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0}$.

Supponiamo $\lambda_1 \neq 0$, in caso contrario si riordinano i vettori. Applichiamo gli assiomi di spazio vettoriale, si ha
$\lambda_1^{-1}(\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v_1} = -\lambda_1^{-1}\lambda_2\vec{v_2} - \cdots - \lambda_1^{-1}\lambda_n\vec{v_n}$
quindi $\vec{v_1}$ è combinazione lineare dei vettori rimanenti.
Viceversa, supponiamo che $\vec{v_1}$ sia combinazione lineare dei vettori $\vec{v_2}\cdots,\vec{v_n}$, cioè $\vec{v_1} = \mu_2\vec{v_2} + \cdots + \mu_n\vec{v_n}$
allora esistono n scalari non tutti nulli $1, -\mu_2, \cdots, -\mu_n$ tali che
$1\vec{v_1} - \mu_2\vec{v_2} - \cdots - \mu_n\vec{v_n} = \vec{0}$, segue che i vettori sono linearmente dipendenti.

□

Osservazione 1. *Per la proposizione precedente si conclude che un singolo vettore* $\{v\}$ *è linearmente indipendente se è diverso dal vettore nullo.*

Proposizione 2.1.6. *Sia V uno spazio vettoriale su K. Se i vettori $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n} \in V$ sono linearmente dipendenti, allora anche i vettori $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n},\vec{v_{n+1}},\cdots,\vec{v_{n+h}}$ $(h > 0)$ sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ degli scalari non tutti nulli per cui

$$\lambda_1\vec{v_1} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0}.$$

Allora prendendo $\lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+h} = 0$ si ottiene che

$$\lambda_1\vec{v_1} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n} + \lambda_{n+1}\vec{v_{n+1}} + \ldots + \lambda_{n+h}\vec{v_{n+h}} = \vec{0}.$$

□

Corollario 2.1.7. *Sia V uno spazio vettoriale su K.*

1. *Se i vettori $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n} \in V$ sono linearmente indipendenti, allora h vettori qualsiasi tra essi $(1 \leq h \leq n)$ sono linearmente indipendenti.*

2. *un sistema di vettori che contiene il vettore nullo è un sistema di vettori linearmente dipendenti.*

Esempio 8. *Studiamo se i vettori $\vec{v_1} = (2, 1, 4, 3)$, $\vec{v_2} = (-1, 1, 1, 0)$, $\vec{v_3} = (0, 3, 6, 3)$ di$\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti. Notiamo che esistono gli scalari 1,2,-1 tali che $\vec{v_1} + 2\vec{v_2} - \vec{v_3} = \vec{0}$, quindi i vettori sono linearmente dipendenti.*

In generale non è assolutamente intuitivo capire se un insieme di vettori è linearmente indipendente o dipendente, nei capitoli riguardanti il rango e il determinante delle matrici vedermo un sistema che ci permetterà di farlo.

2.2 Le matrici

In questa sezione presentiamo le matrici, iniziamo con una definizione:

Definizione 2.2.1. *Siano K campo, m ed n due interi positivi. Si dice* ***matrice*** *di tipo (o di ordine) $m \times n$, ad elementi in K, una tabella A formata da $m \times n$ elementi disposti su m righe ed n colonne e si indica come segue:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

o in forma compatta con $A = (a_{ij})$ con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. L'insieme delle matrici su un campo K di ordine $m \times n$ si indica con $K^{m \times n}$ o con $M(m, n)$.

Quando si inizia a lavorare con le matrici è molto comune fare confusione con la notazione e con la numerazione degli elementi. Notiamo quindi che una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (oppure $M(m, n)$) ha m righe e n. Ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}.$$

Normalmente le matrici si indicano con lettere maiuscole dell'alfabeto latino e i loro elementi si indicano con lettere minuscoli con due pedici, ad esempio

$$a_{2,3} \text{ è l'elemento nella riga2 e colonna 3 della matrice } A.$$

in questo caso quindi

$$a_{2,3} = 7.$$

Vediamo qualche esempio di matrici particolari:

- le matrici di taglia $1 \times n$ sono dette matrici riga perchè composte da una sola riga, ad esempio
$$[a_{1,1}, \dots, a_{1,n}] \in M(1, n)(K).$$

Notare che gli elementi di $M(1,n)(K)$ sono scritti con le parentesi quadre e si distinguono da quelli di K^n che vengono invece scritti con le parentesi tonde;

- le matrici di taglia $n \times 1$ vengono invece chiamate matrici colonna:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots - a_{n,1} \end{bmatrix} \in M(n,1);$$

- le matrici in cui il numero di righe corrisponde al numero di colonne, quindi di taglia $n \times n$, sono dette matrici quadrate. L'insieme delle matrici quadrate su un campo K spesso è indicato direttamente come $M(n,K)$ o $M^n(K)$.

2.2.1 Le matrici quadrate

Per le matrici quadrate ha senso introdurre qualche definizione in più che dipende dalla loro particolare struttura.

Sia quindi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M^n(K)$$

Definizione 2.2.2. *Si chiama diagonale principale di A l'n-upla ordinata* $(a_{1,1}, a_{2,2} \dots, a_{n,n})$. *Si chiama diagonale secondaria di A l'n-upla ordinata* $(a - a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n,1})$.

Vediamo che per esempio prendendo la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & -5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \tag{2.1}$$

abbiamo che la sua diagonale principale è $(1, 0, -3, 1)$ e la sua diagonale secondaria è $(0, -5, 1, -1)$.

Definizione 2.2.3. *Data una matrice quadrata si definisce la sua traccia come la somma degli elementi sulla diagonale principale.*

La traccia di una matrice A si indica con $tr(A)$. Abbiamo quindi che

$$tr(A) = a_{1,1} + \ldots + a - n, n \text{ oppure } tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

La matrice A descritta in (2.1) ha traccia $tr(A) = -1$.

Data una matrice quadrata $A \in M(n, K)$, è possibile definire la sua *trasposta* A^T, la definizione formale è la seguente:

Definizione 2.2.4. *Data una matrice quadrata $A \in M(n, K)$ si definisce la sua trasposta A^T come la matrice quadrata in $M(n, K)$ tale che $a^T_{i,j} = a_{j,i}$.*

La definizione di matrice trasposta data in questo modo non sembra intuitiva, proviamo a fare un esempio. Prendiamo la seguente matrice:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & 3 & 3. \end{bmatrix}$$

vediamo che le coordinate della matrice trasposta sono le seguenti:

$$b^T_{1,1} = b_{1,1} = 1; \;\; b^T_{1,2} = b_{2,1} = 2; \;\; b^T_{1,3} = b_{3,1} = 3;$$

$$b^T_{2,1} = b_{1,2} = 0; \;\; b^T_{2,2} = b_{2,2} = -5; \;\; b^T_{2,3} = b_{3,2} = 3;$$

$$b^T_{3,1} = b_{1,3} = -1; \;\; b^T_{3,2} = b_{2,3} = -1; \;\; b^T_{3,3} = b_{3,3} = 3.$$

Ne deduciamo che

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 3. \end{bmatrix}$$

in particolare notiamo che la matrice trasposta si ottiene 'riflettendo' le coordinate della matrice originale lungo la diagonale.

Concludiamo questa sezione elencando alcuni sottoinsiemi notevoli delle matrici quadrate.

Matrici diagonali. Le matrici diagonali sono quelle che hanno tutte le coordinate fuori dalla diagonale nulle. In formule scriviamo che

$$A \text{ è diagonale se } a_{i,j} = 0 \text{ per } i \neq j.$$

vediamo qualche esempio di matrice diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3. \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrici triangolari superiori. La metrici triangolari superiori sono matrici T per cui

$$T_{i,j} = 0 \text{ se } i > j.$$

Questo equivale a dire che sono nulli tutti i termini che si trovano sotto la diagonale principale. Per fare un esempio vediamo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

in questo caso le coordinate con $t_{i,j}$ con $i > j$ sono $t_{2,1}$, $t_{3,1}$ e $t_{3,2}$ che in effetti sono tutte nulle. In modo molto simile si possono definire le matrici **triangolari inferiori**, queste sono le matrici per cui

$$T_{i,j} = 0 \text{ se } i < j.$$

quindi una matrice triangolare inferiore ha tutte le coordinate sopra la diagonale superiore nulle, vediamo un esempio:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

A questo punto è facile osservare che la trasposta di una matrice triangolare superiore è una matrice triangolare inferiore e viceversa.

Matrici simmetriche. Una matrice è simmetrica se le sue coordinate sono simmetriche rispetto alla diagonale principale. Scrivendo questa condizione in termini delle coordinate si ottiene

$$S \text{ è una matrice simmetrica se } s_{i,j} = s_{j,i} \forall i, j.$$

Un esempio di matrice simmetrica è:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la trasposta di una matrice simmetrica è la matrice stessa, questa infatti può essere presa come definizione alternativa di matrice simmetrica:

$$S \text{ è una matrice simmetrica se } S^T = S.$$

Matrici antisimmetriche. Le matrici antisimmetriche sono in qualche modo l'opposto delle matrici simmetriche, queste soddisfano la seguente condizione:

$$A \text{ è una matrice antisimmetrica se } a_{i,j} = -a_{j,i} \forall i, j.$$

Il lettore può ragionare su come la condizione appena scritta implichi che $a_{ii} = -a_{ii}$ e quindi $a_{ii} = 0$. Vediamo un esempio di matrice antisimmetrica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le matrici antisimmetriche hanno questa proprietà che le caratterizza in termini della trasposta:

$$A \text{ è antisimmetrica se } A = -A^T.$$

2.3 Operazioni con le matrici

Nella scorsa sezione abbiamo definito l'insieme della matrici. Dal primo capitolo di queste note abbiamo però imparato ad aggiungere una struttura su un insieme definendo su di questo delle operazioni con particolari proprietà. In questa sezione definiremo delle operazioni sull'insieme delle matrici affinchè abbiano una struttura di spazio vettoriale.

2.3.1 Somma

La somma tra matrici è un'operazione binaria interna definita tra matrici della stessa taglia. Fissiamo quindi due numeri naturali n e m e un campo K e definiamo la somma in $M_{n\times m}(K)$:

$$+ : M_{n\times m}(K) \times M_{n\times m}(K) \to M_{n\times m}(K) \tag{2.2}$$

$$(A, B) \to A + B = C \tag{2.3}$$

dove le entrate della matrice C sono definite così: $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Vediamo un esempio, prendiamo $n = 2$, $m = 4$ e $K = \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 15 \\ 0 & -7 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

allora $A + B = C$ dove C ha le seguenti coordinate:

$$c_{1,1} = a_{1,1} + b_{1,1}; \quad c_{1,2} = a_{1,2} + b_{1,2}; \quad c_{1,3} = a_{1,3} + b_{1,3}; \quad c_{1,4} = a_{1,4} + b_{1,4};$$

$$c_{2,1} = a_{2,1} + b_{2,1}; \quad c_{2,2} = a_{2,2} + b_{2,2}; \quad c_{2,3} = a_{2,3} + b_{2,3}; \quad c_{2,4} = a_{2,4} + b_{2,4};$$

Si ottiene quindi che

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 21 \\ 5 & -7 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Vediamo che l'operazione appena definita rende l'insieme delle matrici un gruppo abeliano:

Teorema 2.3.1. *La struttura* $(M_{n\times m}(K), +)$ *è un gruppo abeliano.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per dimostrare che $(M_{n\times m}(K), +)$ è un gruppo bisogna studiare che l'operazione di somma è associativa, che esiste un elemento neutro e che ogni elemento di $M_{n\times m}(K)$ ammette un inverso. Per dimostrare poi che è un gruppo abeliano si dovrà dimostrare la commutatività della somma.

Elemento neutro. Vediamo che l'elemento neutro rispetto all somma è la matrice nulla ovvero la matrice le cui entrate sono tutte 0. Infatti se A è una matrice qualsiasi e O è la matrice nulla della stessa taglia si ha che

$$a_{i,j} + o_{i,j} = a_{i,j}$$

e quindi $A + O = A$.

Esistenza dell'inversa. Data una matrice $A \in M_{n\times m}(K)$, descriviamo la matrice $B \in M_{n\times m}(K)$ tale che $A + B = O$. Vediamo che è sufficiente definire B in modo che

$$b_{i,j} = -a_{i,j} \forall i, j,$$

così da ottenere $A + B = O$ infatti

$$a_{i,j} + b_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} = 0.$$

Ne deduciamo che ogni matrice in $M_{n\times m}(K)$ ammette l'inversa rispetto alla somma.

Associatività. Dimostriamo che date le tre matrici $A, B, C \in M_{n\times m}(K)$ vale

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

La coordinata di posto (i, j) del membro di sinistra è

$$(a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j},$$

mentre la coordinata di posto (i, j) del membro di destra è

$$a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j}).$$

L'uguaglianza segue dall'associatività della somma in K.

Commutatività. La dimostrazione della commutatività della somme di matrici è simile all'associatività. Vogliamo dimostrare che date $A, B \in M_{n\times m}(K)$ vogliamo dimostrare che

$$A + B = B + A.$$

Vediamo che l'elemento di posto (i, j) del memebro sinistro è $a_{i,j} + b_{i,j}$ mentre nel membro destro è $b_{i,j} + a_{i,j}$. L'uguaglianza segue dalla commutatività della somma in K. □

2.3.2 Prodotto per uno scalare

In questa sottosezione definiremo un prodotto esterno sull'insieme delle matrici che ricorda molto quello già visto sull'insieme dei vettori di K^n nella prima sezione di questo capitolo. In effetti il risultato a cui arriveremo è che, come K^n, anche $M_{n\times m}(K)$ è uno spazio vettoriale su K.

Definiamo quindi il prodotto esterno:

$$\cdot : M_{n\times m}(K) \times K \to M_{n\times m}(K) \tag{2.4}$$
$$(A, \lambda) \to \lambda A = B \tag{2.5}$$

dove la matrice B ha le seguenti coordinate $b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Vediamo un esempio in $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, sia $\lambda = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ allora } 3A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 21 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Simo pronti a dimostrare questo risultato molto importante che riguarda gli insiemi di matrici:

Teorema 2.3.2. *La struttura algebrica* $(M_{m\times n}(K), +, \cdot)$ *è uno spazio vettoriale su* K.

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi bisogno dimostrare che valgono i cinque punti della dimostrazione 2.1.1. Vediamo quindi:

1. Abbiamo già visto in che $(M_{n\times m}(K), +)$ è un gruppo abeliano.

2. Verifichiamo la distributività del prodotto esterno rispetto alla somma di matrici. Date due matrici $A, B \in M_{m\times n}(K)$ e $\lambda \in K$ vogliamo dimostrare che
$$\lambda(A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B.$$
Scriviamo esplicitamente il termine di posto (i, j) del membro di sinistra:
$$\lambda(a_{i,j} + b_{i,j})$$
e ora il termine (i, j) del membro di destra:
$$\lambda(a_{i,j}) + \lambda(b_{i,j}).$$
l'uguaglianza segue dal fatto che $a - i, j, b_{i,j}$ e λ sono tutti elementi di K in cui sappiamo che il prodotto è distributivo rispetto alla somma.

3. La distributività del prodotto esterno rispetto alla somma di scalari si dimostra in modo analogo al punto precedente, il lettore può provare a dimostrarla per esercizio.

4. Anche la distributività del prodotto per scalari rispetto al prodotto esterno può essere svolta per esercizio.

5. Vediamo ora che l'elemento neutro moltiplicativo di K, che indicheremo come 1 è un elemento neutro rispetto al prodotto esterno. Sia quindi $A \in M_{n\times m}(K)$ verifichiamo che $1A = A$. L'uguaglianza è facilemnte verificata notando che le coordinate di $1A$ sono tutte uguali alle coordinate di A.

□

2.3.3 Prodotto righe per colonne

In questa sezione definiremo il prodotto di matrici. Iniziamo per gradi definendo il prodotto tra una matrice riga e una matrice colonna della stessa lunghezza:

$$M_{1,n}(K) \times M_{n,1}(K) \to M_{1,1}(K) \tag{2.6}$$

$$\tag{2.7}$$

dove il prodotto si svolge nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

Attenzione! L'ordine dei due fattori è importante, il prodotto righe per colonne non sarebbe definito moltiplicando una matrice colonna per una matrice riga.

Secondo il formalismo introdotto nel primo capitolo quella che abbiamo appena definito NON è un'operazione binaria (nè interna nè esterna) infatti il risultato non è nello stesso insieme da cui vengono presi i due fattori. Il prodotto righe per colonne è semplicemente una funzione.

Vediamo un esempio concreto con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

allora

$$AB = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \underbrace{1 \cdot 4}_{a_{1,1} \cdot b_{1,1}} + \underbrace{3 \cdot (-2)}_{a_{1,2} \cdot b_{2,1}} + \underbrace{2 \cdot 5}_{a_{1,3} \cdot b_{3,1}} = [8].$$

Adesso siamo pronti a vedere la definizione del prodotto tra matrici che non sono necessariamente riga o colonna. E' comunque bene fare attenzione alle dimensioni: il prodotto è definito solo tra due matrici A e B tali che il numero di righe di A è uguale al numero di colonne di B.

Definizione 2.3.3. *Siano* $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ *e* $B = (b_{jh}) \in M_{n,p}(K)$ *si definisce* **prodotto righe per colonne** *di* A *per* B*, la matrice*

$$AB = (c_{ih}) \in M_{m,p}(K)$$

dove

$$\forall i = 1, 2, \cdots, m \; \forall h = 1, 2, \cdots, p: \; c_{ih} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jh}.$$

Il motivo per cui il prodotto si definisce righe per colonne sta nel fatto che l'elemento c_{ih} *della matrice* AB *si ottiene moltiplicando la* $i-$*esima riga di* A *per l'*$h-$*esima colonna di* B.

Consideriamo un esempio di ordine superiore:

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Notiamo che il prodotto $A \times B$ si può svolgere perchè A ha 2 colonne e B ha 2 righe. Il risultato ha tante righe quante sono le righe di A e tante colonne quante sono le colonne di B:

$$A \times B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il risultato di $A \times B$ coordinata per coordinata:

L'elemento c_{11} si ottiene moltiplicando la prima riga di A per la prima colonna di B

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = 3.$$

L'elemento c_{12} si ottiene moltiplicando la prima riga di A per la seconda colonna di B

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0.$$

L'elemento c_{13} si ottiene moltiplicando la prima riga di A per la terza colonna di B

$$c_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 = 2.$$

L'elemento c_{21} si ottiene moltiplicando la seconda riga di A per la prima colonna di

B

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) = 9 + 1 = 10.$$

L'elemento c_{22} si ottiene moltiplicando la seconda riga di A per la seconda colonna di B

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = -4.$$

L'elemento c_{23} si ottiene moltiplicando la seconda riga di A per la terza colonna di B

$$c_{23} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 = 6 - 5 = 1.$$

L'elemento c_{31} si ottiene moltiplicando la terza riga di A per la prima colonna di B

$$c_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = 6.$$

L'elemento c_{32} si ottiene moltiplicando la terza riga di A per la seconda colonna di B

$$c_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0.$$

L'elemento c_{33} si ottiene moltiplicando la terza riga di A per la terza colonna di B

$$c_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 = 4.$$

Pertanto si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 10 & -4 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

In questo caso particolare è possibile anche svolgere il prodotto $B \times A$ perchè le dimensioni delle due matrici lo consentono. Il risultato è la seguente matrice 2×2:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 21 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vediamo qualche altro esempio che il lettore può verificare per esercizio:

□ Siano

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 12 \\ 23 & 12 & -22 \end{pmatrix}$$

si può calcolare il prodotto AB perchè il numero di colonne di A (cioè 2) è uguale al numero di righe di B (cioè 2).

□ Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Non si può calcolare il prodotto AB perchè il numero delle colonne di A è 2, invece il numero delle righe di B è 3.

□ Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

In questo esempio notare che ha senso fare il prodotto $AB = \begin{bmatrix} 17 \\ -10 \end{bmatrix}$ ma non il prodotto BA.

Restrigiamoci adesso a studiare il prodotto righe per colonne nel caso particolare in cui le matrici sono quadrate. E' immediato notare che il prodotto di due matrici quadrate di taglia $n \times n$ è ben definito e il risultato sarà una matrice della stessa taglia, formalmente:

$$\times : M_n(K) \times M_n(K) \to M_n(K).$$

Quindi in questo caso particolare il prodotto righe per colonne è un'operazione binaria interna. Possiamo quindi studiare se valgono per questo prodotto alcune delle note proprietà.

Esistenza dell'elemento neutro

Esiste un elemento neutro per il prodotto di matrici quadrate, questo è dato dalla matrice diagonale con tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a 1. La matrice di taglia $n \times n$ diagonale con tutti 1 sulla diagonale si chiama 'matrice identica' o matrice identità e si denota come I_n, ad esempio:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il lettore può provare per esercizio a moltiplicare una qualsiasi matrice quadrata per la matrice identica della taglia opportuna e vedere che questa è effettivamente l'elemento neutro moltiplicativo.

Proposizione 2.3.4. *Data una qualsiasi matrice $A \in M_n(K)$ allora*

$$A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Dimostrazione. Studiamo l'elemento di posizione (i, j) della matrice prodotto $A \times I_n$:

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} i_{hj} = a_{i,1} i_{1,j} + \ldots + a_{i,n} i_{n,j} = a_{i,j} \cdot 1.$$

quindi il risultato di $A \times I_n$ è uguale ad A componente per componente. Analogamente possiamo vedere che $I_n \times A$ è uguale ad A componente per componente. Il suo generico elemento di posto (i, j) è infatti:

$$\sum_{h=1}^{n} i_{ih} a_{hj} = i_{i,1} a_{1,j} + \ldots + i_{i,n} ian, j = a_{i,j} \cdot 1.$$

□

Commutatività Il prodotto tra matrici NON è commutativo neanche nel caso di matrici quadrate, è sufficiente guardare al seguente esempio per convincersene:

Esempio 9.

□ *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pertanto $\Rightarrow AB \neq BA$

Esistenza dell'inversa Esistono elementi in $M_n(K)$ per i quali NON esiste l'inverso. Vediamo ad esempio che

Stando alle proprietà elencate potrebbe venire il dubbio che la struttura algebrica $(M_n(K), \times)$ sia un gruppo NON abeliano. Per ora ci limiteremo ad dire che questo non è vero perchè manca la proprietà dell'esistenza dell'inversa. Con le conoscenze acquisite fino ad ora non è possibile ancora capire esempi di non esistenza dell'elemento neutro quindi rimandiamo il lettore alla prossima sezione. Conlcudiamo però con la seguente osservazione:

Osservazione 1. *La struttura algebrica* $(M, +, \times)$ *non è un campo per dire questo è sufficiente notare che* $\times$ *non è commutativo.*

-

Proposizione 2.3.5. *Valgono le seguenti proprietà riguardo la trasposizione di matrice e le tre operazioni che abbiamo definito. Date* $M, N \in M_{n\times n}(K)$*, allora*

- $(M+N)^t = M^t + N^t$*;*
- $(\lambda M)^t = \lambda M^t$ *per ogni* $\lambda \in K$*;*
- $(M \times N)^t = N^t \times M^t$*.*

2.4 Determinante

In questa sezione studieremo una delle più importanti funzioni che si possono definire nella famiglia delle matrici quadrate: il determinante. Questa è un funzione a valore negli scalari, quindi

$$\det : M_n(K) \to K$$

la cui definizione può sembrare poco intuitiva ma il cui uso è cruciale in tutte le applicazioni che vedremo.

2.4.1 Definizione e prime proprietà

Per arrivare a dare la definizione di determinante faremo ricorso ad una serie di definizioni preliminari. Iniziamo dalla definizione di sottomatrice:

Definizione 2.4.1. *Sia $A \in M_{m,n}(K)$, si definisce* **sottomatrice** *di A (o matrice estratta di A), ogni matrice B di taglia $p \times q$ dove $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$ ottenuta da A sopprimendo $m - p$ righe e $n - q$ colonne.*

Vediamo un esempio:

Esempio 10.

☐ *Data la matrice $A = M_{4,5}(\mathbb{R})$* $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ è la sottomatrice di A ottenuta sopprimendo due righe (la prima e la quarta) e una colonna (la quarta).

Si può anche dire che B è ottenuta da A considerando gli elementi comuni a due righe (la seconda e la terza) e quattro colonne (la prima, la seconda, la terza e la quinta).

All'interno della famiglia delle sottomatrici di una matrice data si possono considerare le sottomatrici di forma quadrata che hanno un nome particolare: minore estratto (o più semplicemente minore)

Definizione 2.4.2. *Se $A \in M_{m,n}(K)$ si dice* **minore estratto** *da A una qualsiasi sottomatrice quadrata di A. L'ordine del minore è la sua taglia.*

Con l'obbiettivo di definire il determinante facciamo riferimento ad una particolare famiglia di matrici di minori estratti:

Definizione 2.4.3. *Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ si definisce* ***minore complementare*** *dell'elemento a_{ij} la sottomatrice che si ottiene da A sopprimendo la $i-$esima riga e la $j-$esima colonna. Il minore complementare di $a_{i,j}$ si indica con M_{ij}.*

Vediamo un esempio:

Esempio 11. *Data la matrice $A \in M_3(K)$* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ *Determiniamo il minore complementare e il complemento algebrico dell'elemento $a_{32} = 4$.*

Il minore complementare M_{32} è la matrice che si ottiene da A cancellando la terza riga e la seconda colonna:

$M_{32} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$

Veniamo finalmente alla definizione di determinante di una matrice:

Definizione 2.4.4. *Sia $A \in M_n(K)$ una matrice quadrata di ordine n ad elementi in K. Ad A è possibile associare un elemento in K, detto* **determinante** *di A, che si indica con il simbolo $det(A)$ o $|A|$, nel modo che segue.*

1. *Se $n = 1$ e quindi $A = (a_{11})$ allora $|A| := a_{11}$*
2. *Se $n \geq 2$ allora $|A| := a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{in}A_{1n}$ dove $A_{1i} := (-1)^{1+i}det(M_{1i})$ e M_{1i} è la matrice quadrata di ordine $n-1$ che si ottiene da A sopprimendo la prima riga e la $i-$esima colonna di A. Il valore $A_{i,j}$ viene anche chiamato* ***complemento algebrico di*** *a_{ij}.*

La definizione di determinante è ricorsiva, perchè permette di calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine n, noto il determinante di una matrice quadrata di ordine $n-1$, infatti il calcolo di un determinante di ordine n viene ricondotto al calcolo di n determinanti di ordine $n-1$.

Proviamo qualche esempio di calcolo del determinante di qualche matrice:

Esempio 12. *Sia A una matrice quadrata di ordine 2*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante secondo la formula della definizione:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}.$$

Adesso vediamo che

$$A_{11} = (-1)^{1+1}det(M_{11});\ A_{21} = (-1)^{2+1}det(M_{21})$$

e che $M_{11} = [a_{22}]$ e $M_{21} = [a_12]$. Calcoliamo quindi i complementi algebrici: $A_{11} =$

a_{22} *e* $A_{21} = -a_{12}$. *Concludiamo che*

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Vediamo un esempio numerico:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 1 \cdot 0 - 5 \cdot 2.$$

Esempio 13. *Sia A una matrice quadrata di ordine 3*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

risulta

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

dove

$A_{11} = (-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A_{13} = (-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$
Quindi

$$det(A) = a_{11}det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Vediamo un esempio numerico. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ *dalla definizione scriviamo*

$det(A) = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$ *Calcoliamo i singoli complementi algebrici:* $A_{11} = (-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{13} = (-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$det(A) = 3det\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + 2det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= 3(30+3) - 4(6-2) + 2(3+10) = 99 - 16 + 26 = 109$$

2.4.2 I Teoremi di Laplace

Fino ad ora abbiamo visto la definizione di determinante e qualche esempio di calcolo. Nella maggior parte dei casi il calcolo effettivo del determinante può essere reso più semplice conoscendo alcuni 'trucchetti' esposti nella sottosezione successiva. Questa sezione contiene due importanti Teoremi il cui enunciato aiuta a rendere più agevole il calcolo del determinante di alcune matrici.

Teorema 2.4.5 (Primo Teorema di Laplace)**.**
Sia $A \in M_n(K)$ $(n \geq 2)$, il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi riga (o di una qualsiasi colonna) per i rispettivi complementi algebrici, cioè:
$\forall i = 1, 2, \ldots, n$ $det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$
(sviluppando rispetto alla $i-$esiama riga).
oppure
$\forall j = 1, 2, \ldots, n$ $det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$
(sviluppando rispetto alla $j-$esima colonna).

Il Primo Teorema di Laplace quindi dice che il determinante di una matrice si può ottenere sviluppandolo non necessariamente lungo la prima riga ma lungo una qualsiasi riga o colonna. Vediamo un esempio del calcolo del determinante della stessa matrice dell'Esempio 13 ma lungo la prima colonna:

Esempio 14.

□ *Sia* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ *Sviluppando secondo la prima colonna si ha*

$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{13}A_{13}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ A_{21} = (-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ A_{31} = (-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$det(A) = 3det\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 2det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} =$
$= 3(30+3) - (24-6) - 2(-4-10) = 99 - 18 + 28 = 109.$

Nell'esempio precedente effettivamente sviluppando il determinante lungo la prima colonne si ottiene lo stesso risultato che si ottiene sviluppando lungo la prima riga. Ma in generale quand'è che il Primo Teorema di Laplace è utile? Vediamo un altro esempio:

Esempio 15. *Prendiamo la seguente matrice in* $M_4(\mathbb{R})$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vediamo che nella prima colonna ci sono 3 entrate uguali a 0 *quindi:*

$$det(A) = a_{11}det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

continuando a sviluppare lungo la prima colonna si ottiene

$$det(A) = a_{11}a_{22}det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

iterando lo stesso ragionamento si ottiene

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

Notiamo che il metodo usato nell'esempio 15 può essere ripetuto per il calcolo del determinante di una qualunque matrice triangolare. Ne ricaviamo la seguente proposizione:

Proposizione 2.4.6. *Sia* M *una matrice triangolare* $M \in M_n(K)$*. Il suo determinante è dato dalla seguente formula:*

$$det(M) = m_{11}m_{22} \cdot \ldots \cdot m_{n-1,n-1}m_{nn}.$$

Vediamo un'altro esempio di applicazione del Primo Teorema di Laplace:

Esempio 16. *Sia M la seguente matrice di dimensione 3:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per il Primo Teorema di Lapalce possiamo scegliere una riga o una colonna a piacere lungo cui sviluppare il determinante. Notiamo che la terza riga di M contiene solo zeri e quindi il determinante di M è necessariamente 0.

Da questo esempio possiamo dedurre la seguente proposizione più generale:

Proposizione 2.4.7. *Sia $M \in M_n(K)$ una matrice con una riga o una colonna contenenti unicamente coordinate nulle, allora $det(M) = 0$*

Passiamo adesso al Secondo Teorema di Laplace che sarà fondamentale per il Teorema della matrice inversa:

Teorema 2.4.8 (Secondo Teorema di Laplace)**.** *Sia $A \in M_n(K)$, $(n \geq 2)$ allora la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) per i complementi algebrici dei corrispondenti elementi di un'altra riga (o di un'altra colonna) è uguale a 0, cioè:*

$\forall i = 1, \cdots, n \; \forall h = 1, \cdots, n, \; i \neq h : a_{i1}A_{h1} + a_{i2}A_{h2} + \cdots + a_{in}A_{hn} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{hj} = 0$

$\forall k = 1, \cdots, n \; \forall j = 1, \cdots, n, j \neq k : a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$

Vediamo un esempio dell'applicazione del Secondo Teorema di Laplace:

Esempio 17.

$\square$ *Sia* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

verifichiamo il **secondo Teorema di Laplace**.

Moltiplichiamo ogni elemento della seconda colonna per il complemento algebrico dell'elemento corrispondente della terza colonna. Calcoliamo i complementi algebrici degli elementi -5, 2, 3 della terza colonna.
Il complemento algebrico di -5 è

$$(-1)^{3+1}det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -2$$

Il complemento algebrico di 2 è

$$(-1)^{3+2}det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} = 0$$

Il complemento algebrico di 3 è

$$(-1)^{3+3}det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} = -2$$

Moltiplicando gli elementi della seconda colonna 1, 0, -1 per i complementi algebrici degli elementi della terza colonna e sommando i risultati ottenuti si ha

$$1(-2) + 0 + (-1)(-2) = -2 + 2 = 0$$

2.4.3 Ulteriori proprietà del determinante

Questa sottosezioni presenta alcune proposizioni che in analogia con le Proposizioni 2.4.6 e 2.4.7 aiutano nel calcolo del determinante di matrici che presentano alcune particolarità.

Nella sezione 2.1 abbiamo visto la definizione di spazio vettoriale e di combinazione lineare. Data una matrice $M \in M_{n\times k}(K)$ le sue singole righe possono essere viste come un insieme di n vettori in K^k così come le sue colonne possono essere viste come un insieme di k vettori in K^n. In particolare possiamo parlare di combinazione lineare di righe (o colonne) di una matrice. Riportiamo qui la definizione in questo caso particolare ma si può notare che è del tutto analoga alla Definizione 2.1.2:

Definizione 2.4.9. *Sia $A \in M_n(K)$ e indichiamo con r_1, r_2, $\ldots$ r_m le righe di A e con c_1, c_2, $\ldots$, c_n le colonne di A. Si dice combinazione lineare delle righe di A secondo gli scalari α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_m \in K$ ogni matrice riga del tipo $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots \alpha_m r_m$. Si dice invece combinazione lineare delle colonne di A secondo gli scalari α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_n \in K$ ogni matrice colonna della forma $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_n c_n$.*

Esempio 18. *Sia* $A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & -9\end{pmatrix}$

Allora la riga $-(2\ 3) + 2(5\ \ -9) = (8,\ -21)$ è la combinazione lineare delle due righe di A secondo gli scalari -1 e 2.

Vediamo adesso una serie di proprietà che possono aiutare nel calcolo del determinante:

Proposizione 2.4.10. *1. Siano $A \in M_n(K)$, $c \in K$. Se B è la matrice ottenuta moltiplicando una riga qualsiasi di A (o una colonna) per lo scalare c allora*

$$det(B) = c\, det(A)$$

2. Se $B = cA \Rightarrow det(cA) = c^n det(A)$

3. Scambiando tra loro due righe o due colonne di una matrice quadrata A, si ottiene una matrice B tale che:

$$det(A) = -det(B)$$

4. Se due righe o due colonne della matrice A sono proporzionali (o in particolare uguali), il determinante è nullo.

5. Il determinante di una matrice $A \in M_n(K)$ è nullo se e solo se esiste una riga (o una colonna) di A combinazione lineare delle restanti.

6. Il determinante di una matrice A resta invariato se si somma ad una riga (o colonna) di A una combinazione lineare delle altre righe (o colonne) di A.

A seguire è riportato un esempio per ogni punto della proposizione precedente:

Esempio 19.

□ *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$

$det(A) = -9 - 20 = -29$

si moltiplica la prima riga di A per lo scalare $c = 2$, quindi si ottiene la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$$

$$det(B) = -18 - 40 = -58 = 2(-29)$$

Esempio 20.

□ *Sia* $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $det(A) = 10 - 7 = 3$

Si consideri la matrice B ottenuta moltiplicando A per uno scalare c, allora

$B = cA = \begin{pmatrix} 2c & 7c \\ c & 5c \end{pmatrix}$, $det(B) = 2 \cdot 5c^2 - 7c^2 = 3c^2 \Leftrightarrow det(B) = c^2 det(A)$

Esempio 21.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $det(A) = 2 - 12 = -10$

$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $det(B) = 12 - 2 = 10$

Esempio 22. *Data la seguente matrice con le due righe proporzionali:*

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$, $det(A) = 0$

Esempio 23. *Sia A la seguente matrice:*

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *chiamando* r_1, r_2 *e* r_3 *le tre righe della matrice si può notare che*

$$r_3 = -r_1 + r_2$$

e quindi la terza riga è una combinazione lineare della prima e della seconda. Calcolando il determinante della matrice si vece che $det(A) = 0$.

Esempio 24. *Confrontiamo i determinanti delle seguenti due matrici:*

$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -4 \\ -0 & -0 & 2 \end{pmatrix}$
sfruttando il fatto che A è una mtraice triangolare si verifica facilmente che $det(A) = -6$. *Si può verificare che anche* $det(B) = -6$ *e infatti denominando come* r_1, r_2 *e* r_3 *le tre righe di A e come* w_1, w_2, w_3 *le tre righe di B si può notare che*

$$r_1 = w_1;\ r_3 = w_3;\ w_2 = r_1 + r_2 + 2r_3.$$

Quindi la matrice B non è altro che la matrice A con la seconda riga ottenuta sommando una combinazione lineare delle altre due restanti righe.

Notiamo che in particolare la Proposizione 2.4.10 illustra il comportamento del determinante rispetto al prodotto di una matrice per uno scalare. Vediamo con la prossima proposizione il rapporto tra determinante e trasposizione:

Proposizione 2.4.11. *Sia $A \in M_n(K)$ allora il determinante di A è uguale a quello della sua trasposta, cioè*

$$det(A) = det(A^T)$$

Osservazione 2. *Come conseguenza di questa proposizione si ha tutte le proprietà del determinante relative ad operazioni su righe valgono anche operando sulle colonne.*

Concludiamo questa sezione con un importante Teorema che descrive il comportamento del determinante rispetto al prodotto di matrici:

Teorema 2.4.12 (Teorema di Binet)**.** *Siano $A, B \in M_n(K)$ allora*

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

ATTENZIONE!!! Dal teorema di Binet potrebbe venire il dubbio che il determinante abbia buona proprietà rispetto alla somma di matrici. Tuttavia questo è falso, in generale conoscere $det(A)$ e $det(B)$ non fornisce alcuna informazione circa $det(A + B)$. In particolare, in generale:

$$det(A + B) \neq det(A) + det(B)$$

Vediamo un esempio:

Esempio 25.

☐ *Siano* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A + B) = 0$

$det(A) = 1$, $det(B) = 1 \Rightarrow det(A) + det(B) = 1 + 1 = 2$

2.5 Matrici invertibili

Dato K un campo e n un numero naturale, abbiamo studiato le proprietà della matrici $M_n(K)$, definendo su questo insieme una somma, un prodotto interno e un prodotto esterno per uno scalare. Mentre la somma tra matrici quadrate possiede buona proprietà tra cui la commutatività abbiamo visto che questo non accade nel caso del prodotto tra matrici. Avevamo inoltre anticipato -senza dare una dimostrazione- che viene meno la proprietà dell'esistenza dell'inversa. Vediamo nel dettagli perchè:

Proposizione 2.5.1. *Dato un campo K un un numero naturale n, sia $A \in M_n(K)$ una matrice con $det(A) = 0$, allora non esiste l'inversa moltiplicativa di A.*

Dimostrazione. Se esistesse una matrice $B \in M_n(K)$ che è inversa moltiplicativa di A, si avrebbe

$$A \times B = B \times A = I_n,$$

dove I_n è la matrice identità introdotta prima della Proposizione 2.3.4. Visto che I_n è una matrice diagonale, si verifica facilmente che $det(A) = 1$. Per il Teorema di Binet (Teorema 2.4.12) si ha che quindi

$$det(A) \det(B) = \det(AB) = 1$$

ma questo è impossibile perchè $det(A) = 0$. $\square$

In questo modo abbiamo una dimostrazione del fatto che non tutte le matrici quadrate ammettono inversa moltiplicativa. Nel corso di questa sezione vedremo che in realtà il determinante è un potente mezzo per capire se una matrice ammette inversa o meno. Procediamo per gradi:

Definizione 2.5.2. *Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice* **singolare** *se $det(A) = 0$.*
Si dice **non singolare o non degenere** *se $det(A) \neq 0$.*

Nelle prossime pagine dimostreremo che le matrici non-singolari sono tutte invertibili (Teorem 2.5.4), per farlo però avremo bisogno di una definizione preliminare.

Definizione 2.5.3. *Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ $(n \geq 2)$ si definisce* **matrice aggiunta** *di A, la matrice quadrata di ordine n*

$$Agg(A) := (A_{ij})^T$$

dove A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}.
Per esteso

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Se $A = (a_{11})$ *è una matrice quadrata di ordine 1, allora si pone* $Agg(A) := I_1 = (1)$

Esempio 26.

□ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = 3$$

$$A_{12} = 1$$

$$A_{21} = -2$$

$$A_{22} = 1$$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{13} = det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$A_{21} = (-1)det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4$$
$$A_{22} = det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4$$
$$A_{23} = (-1)det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4$$
$$A_{31} = det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$
$$A_{32} = (-1)det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$A_{33} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Teorema 2.5.4. *Sia $A \in M_n(K)$, A è invertibile se e solo se $det(A) \neq 0$. Inoltre si ha*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Agg(A)$$
$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Dimostrazione. " $\Rightarrow$ " Abbiamo visto in Proposizione che se una matrice è singolare allora non può essere invertibile. Ne segue che se una matrice è invertibile allora è non-singolare. " $\Leftarrow$ " Per ipotesi $det(A) \neq 0$ perciò si può definire la matrice $B := \frac{1}{det(A)} Agg(A)$.
Proviamo che $AB = I_n$.
Il generico elemento di posto i, h nella matrice I_n è uguale a 1 se $i = h$, è uguale a 0 in caso contrario.
Un elemento di questo tipo si indica con il simbolo di Kronecker o δ di Kronecker, cioè

$$\delta_{ih} := \begin{cases} 1 & i = h \\ 0 & i \neq h \end{cases}$$

Sia c_{ih} l'elemento di posto i,h della matrice AB. Per la definizione di prodotto tra matrici si ottiene moltiplicando la $i-$esima riga di A $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ per l'$h-$esima colonna di B $\begin{pmatrix} \frac{1}{det(A)}A_{h1} \\ \frac{1}{det(A)}A_{h2} \\ \vdots \\ \frac{1}{det(A)}A_{hn} \end{pmatrix}$.

Pertanto, $c_{ih} = a_{i1}\frac{1}{det(A)}A_{h1} + a_{i2}\frac{1}{det(A)}A_{h2} + \cdots + a_{in}\frac{1}{det(A)}A_{hn} =$
$= \frac{1}{det(A)}(a_{i1}A_{h1} + a_{i2}A_{h2} + \cdots + a_{in}A_{hn})$.

Se $i = h$, per il primo Teorema di Laplace si ha

$$c_{ii} = \frac{1}{det(A)}(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = \frac{1}{det(A)}det(A) = 1.$$

Se $i \neq h$ per il secondo Teorema di Laplace, si ha

$$c_{ih} = \frac{1}{det(A)}(a_{i1}A_{h1} + a_{i2}A_{h2} + \cdots + a_{in}A_{hn}) = \frac{1}{det(A)}0 = 0$$

Perciò $c_{ih} = \delta_{ih}\ \forall i, h = 1, \cdots, n,$ *quindi* $AB = I_n$.
Analogamente si prova che $BA = I_n$ quindi A è invertibile. □

Ricapitolando quanto visto fino ad ora: le matrici quadrate possono essere invertibili o non invertibili. Quelle invertibili sono caratterizzate dal fatto che il loro determinante è diverso da zero e sono dette non-singolari. Vediamo adesso qualche proprietà dell'insieme delle matrici non-singolari:

Definizione 2.5.5. *Sia* $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) | A \text{ invertibile}\}$ *l'insieme delle matrici invertibili di ordine* n *a coefficienti in* K.

Veniamo quindi alla principale proprietà di $GL_n(K)$:

Teorema 2.5.6. $GL_n(K)$ *è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne.*

Dimostrazione. Per dimostrare che $GL_n(K)$ è un gruppo dobbiamo per prima cosa sincerarci che il prodotto è un'operazione binaria interna in $GL_n(K)$.Vediamo che per il Teorema di Binet

$$\det(A \times B) = \det(A)\det(B)$$

quindi se A e B sono non-singolari si ha che $det(A \times B) \neq 0$ e $A \times B \in GL_n(K)$.

Proseguiamo quindi a controllare che l'operazione verifica le condizioni necessarie per rendere $(GL_n(K), +)$ un gruppo:

a) esistenza dell'elemento neutro;

b) proprietà associativa;

c) esistenza dell'inversa.

Per il punto a) vediamo che $I_n \in GL_n(K)$ e che $I_n \times I_n = I_n$. Ne segue che I_n è l'elemento neutro moltiplicativo in $GL_n(K)$.
Per il punto b) notiamo che il prodotto tra matrici è sembra associativo quindi anche il prodotto in $GL_n(K)$ lo è. Per il punto c) abbiamo visto che se $A \in GL_n(K)$ allora esiste $A^{-1} \in M_n(K)$. A^{-1} appartiene a $GL_n(K)$ perchè la sua inversa è A.
Questo conclude la dimostrazione. □

Proposizione 2.5.7. *Se $A, B \in GL_n(K)$ allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ovvero $AB \in GL_n(K)$.*

Dimostrazione. Risulta $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ pertanto $(AB) = B^{-1}A^{-1}$. □

2.6 Rango

Abbiamo visto nella scorsa sezione che il determinante di una matrice è nullo quando le sue righe (o le sue colonne) sono in combinazione lineare. Data una matrice con determinante nullo non sappiemo però dire QUANTE delle sue righe sono affettivamente in combinazione lineare. Quest'ultimo problema si studia tramite il rango. Vediamo subito la definizione:

Definizione 2.6.1. *Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice non nulla di tipo (m, n) sul campo K, si definisce* **rango per righe** *di A il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A.*
Analogamente si definisce **rango per colonne** *di A il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A.*

Notare che, contrariamente al determinante, il rango è definito per matrici di qualunque dimensione. Vediamo un'importante Proposizione:

Proposizione 2.6.2. *Sia $A \in M_{m,n}(K)$ non nulla allora il rango per righe e il rango per colonne coincidono.*

Possiamo quindi modificare la definizione in base a quest'ultima proposizione:

Definizione 2.6.3. *Il rango di A, matrice non nulla, è il massimo numero di righe o di colonne linearmente indipendenti. Se A è la matrice nulla si dice per convenzione che il rango di A è zero.*
Il rango di A, si indica con $rk(A)$ o $r(A)$.

Vediamo subito qualche semplice proprietà:

1. Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice di tipo (m, n) non nulla sul campo K, allora risulta $1 \leq r \leq min\{m, n\}$.

2. $rk(A) = n$ se $A \in GL_n(K)$.

3. Se A è una matrice di rango k allora A^t è ancora una matrice di rango k.

Adesso ci dedichiamo a descrivere un metodo di calcolo del rango: il metodo degli orlati. Lo introduciamo enunciando dei risultati:

Lemma 2.6.4. *Siano $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice non nulla di rango r ed s un intero positivo, allora A possiede un minore con determinante non nullo di ordine s se e solo se $s \leq r$.*

Dal Lemma segue il seguente Teorema fondamentale:

Teorema 2.6.5. *Il rango r di una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ non nulla è l'ordine massimo dei minori non singolari di A.*

Esempio 27.

□ *Sia $A \in M_{2,3}(K)$*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

I minori di ordine 2 sono

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

In base al teorema, una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ a elementi non tutti nulli, ha rango $r > 0$ se :

- esiste un minore di ordine r non singolare estratto da A;
- tutti gli eventuali minori di ordine maggiore di r sono singolari.

In tal caso i minori di ordine r estratti da A si dicono **minori fondamentali di A**. Evidentemente se B è una matrice estratta da A, il suo rango non può superare quello di A, cioè

$$rg(B) \leq rg(A).$$

Occorre premettere le seguenti definizioni.

Definizione 2.6.6. *Sia A una matrice qualsiasi e sia M una sua sottomatrice,* **orlare** *M significa completare la sottomatrice M con una riga ed una colonna di A non appartenente ad M.*

Definizione 2.6.7. *Siano $A \in M_{m,n}(K)$ ed r un intero tale che $1 \leq r \leq min\{m,n\}$, si dice* **orlato** *di un minore M_r estratto da A di ordine r, ogni minore di ordine $r+1$ ottenuto aggiungendo una riga e una colonna al minore M_r.*

Esempio 28.

□ *Sia $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Si considera il minore di ordine 2, cioè $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Gli orlati di M_2 sono i minori di ordine 3 di A contenenti M_2, cioè

$O_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ *(orlando con la seconda riga e la quarta colonna) e*

$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ *(orlando con la terza riga e la seconda colonna).*

Veniamo quindi al Teorema principale che permette l'applicazione del metodo degli orlati:

Teorema 2.6.8 (Teorema di Kronecker o degli orlati)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice non nulla abbia rango r è che esista un minore non singolare di ordine r avente tutti gli orlati singolari.*

Da questo Teorema possiamo applicare il seguente algoritmo per il calcolo del rango di una matrice A.

Partiamo con una matrice $A \in M_{n,m}(K)$.

a) Iniziamo notando che $rk(A) \leq min(n, m)$;

b) se non esistono coordinate non nulle di A allora $rk(A) = 0$. Altrimenti consideriamo la matrice $M_1 = [a_{i,j}]$ con $a_{i,j}$ una coordinata non nulla di A. Si ha che $det(M_1) = a_{i,j} \neq 0$ e quindi $rk(A) \geq 1$.

c) A questo punto assumiamo di avere dal punto precedente un minore non singolare M_i di taglia i

   - c.1) se $i = min(m, n)$ allora $rk(A) = i$;
   - c.2) altrimenti orliamo M_i in tutti i modi possibili, ottenendo delle matrici di taglia $i+1$. Se tutte queste matrici di taglia $i+1$ hanno determinante nullo allora $rk(A) = 0$. Se troviamo una matrice orlata di M_i che è non singolare la chiamiamo M_{i+1} e si ricomoncia dal punto c)

Vediamo qualche esempio di applicazione del metodo degli orlati.

Esempio 29.

□ *Sia* $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo il metodo degli orlati. Iniziamo considerando $[a_{11}]$ *ovvero la matrice di taglia 1 ottenuta dalla prima riga e la prima colonna di* A*. Chiaramente* $det([a_{11}]) = det([1]) = 1 \neq 0$ *quindi* $rk(A) \geq 1$.

Proseguiamo orlando la matrice $[1]$ *con la seconda riga e la seconda colonna,* *otteniamo*

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

vediamo inoltre che $det(M_2) = -4$ *e quindi* $rk(A) \geq 2$. *Adesso studiamo gli orlati di* M_2, *cioè i minori di ordine 3 contenenti* M_2. *Questi sono:*

$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + 1det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 2(6-4)+(4-8) = 4-4 = 0$

$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 1det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 2(10-12) - (4-8) = -4+4 = 0$

Tali minori sono entrambi singolari, quindi per il Teorema degli orlati, il rango di A è 2.

☐ *Sia* $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A è di tipo 3×4 *quindi il rango potrà essere al massimo 3.*

Iniziamo con il minore estratto dalla prima riga e seconda colonna $M_1 = [2]$. *Chiaramente* $det(M_1) \neq 0$ *e quindi* $rk(A) \geq 1$.

Orliamo M_1 *con la seconda riga e la prima colonna, otteniamo*

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

vediamo subito che $det(M_2) = 1 + 4 = 5 \neq 0$ *e quindi* $rk(A) \geq 2$.

Orliamo tale minore con la terza riga e la terza colonna e calcoliamone il determinante

$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 30 \neq 0$

A questo punto abbiamo trovato un minore di ordine 3 non singolare quindi possiamo dire che $rk(A) = 3$, *non è necessario calcolare altri minori orlati.*

□ *Se* $A \in M_2(\mathbb{R})$ *allora* $r(A)$ *può essere* $0, 1$ *o* 2.

Se esiste una coordinata della matrice diversa da 0*, allora per il metodo degli orlati ho* $rk(A) \geq 1$*. A questo punto orlando la coordinata si raggiunge necessariamente l'intera matrice* A*, se* $det(A) = 0$ *allora* $rk(A) = 1$*, se* $det(A) \neq 0$*,* $rk(A) = 2$*. Infatti:*
Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$*,* $det(A) \neq 0$ *quindi* $rg(A) = 2$

Sia $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$*,* $det(A) = 0$ *quindi* $rg(A) = 1$

2.6.1 Un metodo alternativo per il calcolo del determinante: la riduzione di Gauss

In questa sottosezione sarà illustrato un metodo alternativo per il calcolo del rango di una matrice. Si tratta dell'applicazione di un algoritmo dovuto a Gauss e che di conseguenza prende il nome di riduzione di Gauss (in letteratura si trova anche come 'metodo di Gauss' o 'riduzione a scala di Gauss').

L'idea centrale è che data una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ con m righe $r_1, \ldots, r_m$, allora $rk(A)$ è uguale al rango di un matrice con righe:

- $\lambda r_1, \ldots, r_m$ dove λ è uno scalare non nullo;
- $r_1, r_1 + r_2, r_3, \ldots, r_m$
- $r_2, r_1, \ldots, r_m$.

In altre parole la somma di due righe, il prodotto di una riga per uno scalare o lo scambio di due righe sono operazioni che non alterano il rango.

Vediamo ora alla descrizione dell'algoritmo. Partiamo con da una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ con righe $r_1, \ldots, r_m$:

a) Consideriamo $a_{1,1}$ ovvero l'elemento di A in posizione $1, 1$. Se $a_{1,1} \neq 0$ procediamo con il punto b). Se $a_{1,1} = 0$ cerchiamo un elemento della forma $a_{i,1} \neq 0$ e scambiamo la riga 1 e la riga i, procediamo quindi con il punto b). Se tutta la prima colonna contiene 0 la cancelliamo dalla matrice e ricomiciamo dal punto a).

b) A questo punto ho una matrice con elemento $a_{1,1} \neq 0$. Moltiplichiamo tutta la prima riga per lo scalare $\frac{1}{a_{1,1}}$.

c) A questo punto l'elemento di posto $(1,1)$ è uguale a 1. Indichiamo gli elementi della prima colonna come $(1, c_2, \ldots, c_n)$. SOstituiamo ogni riga successiva alla prima nel seguente modo:

$$r_i \text{ viene sostituita con} r_i - c_i(r_1)$$

d) A questo punto consideriamo la sottomatrice di A ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna e ripetiamo i passaggi da a) a c) per questa sottomatrice.

Vediamo un esempio pratico del calcolo della riduzione di Gauss su una matrice:

Esempio 30. *Sia A la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Iniziamo applicando il primo step dell'algoritmo e studiamo l'elemento di posto $(1,1)$. *Vediamo che in questo caso* $a_{1,1} = 0$ *quindi bisogna cercare una riga il cui primo elemento è non nullo scambiarla con la prima. Ad esempio possiamo decidere di scambiare la prima e la seconda riga. Otteniamo:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A questo punto passiamo alla step b) che in questo caso restituisce la stessa matrice del punto precedente perchè ora $a_{1,1} = 1$. *Applichiamo quindi il terzo step. Sostituisco le righe 2, 3 e 4 della matrice nel seguente modo:*

- *riga* $2 \rightarrow -0$*riga 1+riga 2=* $[0, 0, 0, 1]$*;*
- *riga 3*$\rightarrow$ *riga 3*$-$*riga 1=*$[0, 0, 0, 1]$ *;*
- *riga 4* $\rightarrow$ *riga 3*$-$*3riga 1=*$[0, 0, 0, 3]$.

La matrice che risulta è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & | & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il tratteggio indica l'eliminazione della prima riga e della prima colonna come da punto d).
A questo punto si ripete l'algoritmo con la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vediamo che la prima colonna è interamente composta da zeri quindi si può eliminare, lo stesso vale per la seconda. Si ottiene la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Possiamo applicare lo step a) e in successione lo step b). La matrice ottenuta è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ricomponiamo la matrice iniziale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algoritmo di Gauss quindi restituisce una matrice ridotta a 'scalini'. Nell'esempio precedente vediamo che la matrice finale ha due scalini in posizione $(1, 1)$ e in posizione $(2, 4)$, questi elementi si chiamano pivot. Inoltre sappiamo per l'osservazione iniziale che tutte le operazioni che abbiamo applicato non hanno modificato il rango totale della matrice. La matrice a scala ottenuta ha quindi lo stesso rango della matrice iniziale, questo è semplicemente il numero di pivot.

Concludendo l'esempio precedente possiamo dire che $rk(A) = 2$.

Capitolo 3

Sistemi Lineari

Questo capitolo presenta la prima applicazione del capitolo precedente. Nele prossime pagine vedremo come lo studio delle matrici può portare allo studio di soluzioni di sistemi di equazioni lineari. Iniziamo, come al solito, con una serie di definizioni per fissare la notazione:

Definizione 3.0.1. *Un'***equazione lineare** *nelle incognite (o variabili) $x_1, \ldots, x_n$ a coefficienti in K ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) è un'espressione della forma*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$$

dove $a_i, b \in K$.
Gli scalari $a_1, \ldots, a_n$ si dicono **coefficienti delle incognite** *x_i, b si dice* **termine noto** *dell'equazione.*
L'equazione si dice **omogenea** *se $b = 0$, altrimenti si dice* **non omogenea**.
Una $n-pla$ ordinata di scalari $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ si dice **soluzione** *dell'equazione se*

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_n\lambda_n = b.$$

Un'equazione lineare può avere una sola soluzione, oppure nessuna soluzione, oppure infinite soluzioni.

Vediamo qualche primo esempio:

Esempio 31.

- □ *L'equazione lineare $3x = 5$ ammette una sola soluzione $x = \frac{5}{3}$.*
- □ *L'equazione lineare $2x - y = 1$ ammette infinite soluzioni del tipo $(k, 2k -$*

1), $k \in \mathbb{R}$. *Ad esempio* $(0,-1)$, $(1,1)$, $(-2,-5)$ *sono soluzioni dell'equazione.*

- ☐ *L'equazione* $0x = 1$ *non ha soluzione perchè qualunque valore venga dato all'incognita* x*, si ottiene sempre* $0 = 1$.

Definizione 3.0.2. *Fissati due interi positivi* m, n *un* **sistema lineare** *di* m *equazioni in* n *incognite a coefficienti in* K*, è un sistema del tipo*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

dove $a_{ij},\ b_i \in K$.
a_{ij} *sono i* **coefficienti delle incognite**, b_i *sono i* **termini noti**.
Il sistema lineare si dice **omogeneo** *se* $b_i = 0\ \forall i = 1, \ldots, m$.

Una **soluzione** del sistema lineare è una $n-pla$ di scalari $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ che verifichi contemporaneamente tutte le m equazioni del sistema, quando si sostituisce lo scalare λ_i al posto di x_i $\forall i = 1, \ldots, n$. Come nel caso delle equazioni lineari un sistema di equzioni può presentare eslusivamente infinite, una o nessuna soluzione. Un sistema si dice **compatibile** se ammette soluzioni, altrimenti si dice **incompatibile**.

Osservazione 2. *Si osserva che ogni sistema omogeneo è compatibile in quanto ammette sempre come soluzione il vettore nullo* $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in K^n$*, che si dice* **soluzione banale**.

Al sistema è possibile associare due matrici: **matrice dei coefficienti** e la **matrice (colonna) dei termini noti**, facendo riferimento al sistema (3.1) la sua matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e la sua colonna dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$$

Aggiungendo alla matrice dei coefficienti la colonna dei termini noti si ottiene la **matrice completa del sistema**:

$$A|B := A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Per questo motivo capita che la matrice dei coefficienti di un sistema venga anche chiamata matrice incompleta. Anche le incognite possono essere viste come coordinate di una matrice detta appunto **matrice (colonna) delle incognite**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K).$$

Il sistema si può scrivere in forma matriciale compatta utilizzando il prodotto righe per colonne di matrici, cioè:

$$AX = B$$

che si dice l'**equazione matriciale** del sistema.

In generale due sistemi *diversi* (formati da equzioni diverse) possono ancora avere lo stesso numero di soluzioni, in questo caso si chiamano **compatibili**, formalmente:

Definizione 3.0.3. *Due sistemi di equazioni lineari nelle incognite $x_1, \dots, x_n$ si dicono* **equivalenti** *se ammettono le stesse soluzioni, cioè se ogni $n-pla$ che è soluzione dell'uno è anche soluzione dell'altro.*

Per avere un esempio di due sistemi equvalenti si puo prendere un sistema e attuare una delle seguenti trasformazioni:

1. scambiare l'ordine delle equazioni del sistema;
2. moltiplicare un'equazione del sistema per un numero reale diverso da 0;

3. sommare ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per un numero reale.

In generale non è neanche ovvio che due sistemi equivalente abbiano lo stesso numero di soluzioni infatti:

Teorema 3.0.4. *Due sistemi lineari sono equivalenti se ogni equazione dell'uno è combinazione lineare delle equazioni dell'altro.*

Definizione 3.0.5. *Un* **sistema di Cramer** *è un sistema lineare $Ax = b$ di n equazioni in n incognite avente matrice incompleta non singolare (quindi di rango massimo, quindi con determinante non nullo!).*

Esempio 32. *Vediamo che il seguente sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite su $\mathbb{R}$ è di Cramer:*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 0 \\ x - y - z = 1 \\ 2y + 2z + 3t = 7 \\ -x + y + t = -1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppando secondo la $4°$ riga si ha

$$det(A) = (-1)(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 12 - 11 + 8 = 9 \neq 0$$

I sistemi di Cramer sono importanti perchè ammettono un metodo veloce per trovare soluzioni:

Teorema 3.0.6 (Teorema di Cramer)**.** *Un sistema di Cramer di n equazioni in n incognite*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione

$$\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$$

data da

$$v_i = |A|^{-1}|A_i(\vec{b})| \ \forall i = 1, \ldots, n$$

dove $A_i(\vec{b})$ *è la matrice ottenuta da* A *sostituendo la* $i-$*esima colonna con la colonna dei termini noti.*

Esempio 33.

☐ *Risolviamo il sistema lineare dell'esercizio 32 La matrice dei coefficienti è* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Sappiamo che* $det(A) = 9$. *Il sistema ammette un'unica soluzione* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ *dove*

$$v_1 = |A|^{-1}|A_1(\vec{b})| = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot 36 = 4$$

$$\vec{v_2} = |A|^{-1}|A_2(\vec{b})| = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot 24 = \frac{8}{3}$$

$$\vec{v_3} = |A|^{-1}|A_3(\vec{b})| = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}$$

$$\vec{v_4} = |A|^{-1}|A_4(\vec{b})| = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}$$

$S = \{(4, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$

Abbiamo visto quindi che se un sistema lineare ha matrice dei coefficienti non singolare allora ammette esattamente una soluzione. In generale per conoscere il numero di soluzioni si usa il Teorema di Rouchè-Capelli:

Teorema 3.0.7 (Teorema di Rouchè-Capelli). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare di m equazioni in n incognite*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sia compatibile è che la matrice incompleta A e la matrice completa A' abbiano lo stesso rango, cioè $rg(A) = rg(A') = r$.
In tal caso, si verificano due possibilità:

a) se $r = n$ il sistema ammette un'unica soluzione;

b) se $r < n$ il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni, cioè infinite soluzioni dipendenti da $n - r$ parametri arbitrari. Vale la convenzione che $\infty^0 = 1$.

Dimostrazione. Il sistema lineare $Ax = b$ è compatibile se e soltanto se esiste una $n - pla$ di scalari

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n \text{ tale che } \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Pertanto la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne di A. Ciò equivale a dire che la matrice incompleta A e la matrice completa $A^{'}$ hanno lo stesso rango. □

Esempio 34.

□ *Consideriamo il sistema* $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice incompleta e* $A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice completa.*

Risulta $det(A) = 0 \Rightarrow rg(A) = 1$

$rg(A^{'}) = 2$ *perchè* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Essendo $rg(A) \neq rg(A^{'})$ *il sistema è incompatibile.*

3.1 Algoritmo di risoluzione di un sistema lineare compatibile

Il Teorema di Rouchè-Capelli consente di stabilire la compatibilità di un sistema lineare e di determinare, in caso affermativo, il numero delle soluzioni, ma non fornisce un metodo per calcolarle. In casi in cui il sistema non è di Cramer si può utilizzare il seguente algoritmo:

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sia inoltre A la matrice completa associata al sistema e A' la matrice dei coefficienti.

1) Per prima cosa si calcola il rango di A e A'. Se i due ranghi coincidono allora il sistema è compatibile e si passa al punto successivo. Se i due ranghi sono diversi il sistema è incompatibile e non ammette soluzioni;

2) Sia M_r un minore fondamentale di A, cioè un minore non nullo di ordine r estratto da A. Le righe di M_r individuano le r equazioni da scegliere per formare il nuovo sistema equivalente a quello dato;

3) A questo punto si ottiene un sistema di r equazioni in n incognite. Confrontando n e r si può ottenere[1]:

   - $n = r$, in tal caso proseguire con il punto 5)
   - $n > r$ in tal caso proseguire con il punto 4);

4) Se $n > r$ si considerano le $n - r$ variabili che non sono coinvolte in una delle r colonne di M_r e si interpretano come parametri passandole al termine noto. In questo modo si ottiene un sistema di r equazioni in r incognite i cui termini noti sono infunzione di $n - r$ parametri;

5) A questo punto si risolve il sitema ottenuto ulizzando il metodo di Cramer.

Esempio 35.

□ *Risolviamo il sistema lineare in* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

Siano A la matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A' la matrice completa

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A è singolare.
Esiste un minore di ordine 2 estratto da A non singolare,
$Det(M_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

[1]Notare che n non può essere minore di r perchè r è il rango di una matrice $m \times n$.

quindi $rg(A) = 2$.

Gli orlati di M_2 *nella matrice completa* A' *sono:*

$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A, \text{ entrambi singolari.}$$

Quindi $rg(A') = 2$.

$rg(A) = rg(A') = 2$ *quindi il sistema ammette* $\infty^{3-2} = \infty^1$ *soluzioni.*

Avendo scelto come minore fondamentale M_2*, si considerano la prima e la seconda equazione nel sistema e si portano al secondo membro i termini contenenti la terza incognita* z*, che verrà indicata con* α*. Si ottiene il sistema di Cramer*
$$\begin{cases} x + y = 2\alpha \\ x - y = 1 - \alpha \end{cases}$$
la cui unica soluzione è la coppia $(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3\alpha-1}{2})$.

L'insieme delle soluzioni del sistema di partenza è

$S = \{(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3\alpha-1}{2}, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Nella risoluzione si può scegliere anche un altro minore fondamentale di A*, per esempio* M_2' *dato dall'intersezione delle seconda e terza righa di* A *con la seconda e terza colonna di* A.

$det(M_2') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$*, pertanto si considerano la seconda e la terza equazione del sistema e si spostano al secondo membro i termini contenenti la prima incognita* x *che si indicherà con* β.

Si ottiene il sistema di Cramer

$$\begin{cases} -y + z = 1 - \beta \\ -z = 1 - 2\beta \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione la coppia $(3\beta - 2, 2\beta - 1)$.

Pertanto il sistema di partenza ammette come insieme delle soluzioni

$S' = \{(\beta, 3\beta - 2, 2\beta - 1) \in \mathbb{R}^3 | \ \beta \in \mathbb{R}\}$.

Risulta $S' = S$

Si è giunti ad una diversa parametrizzazione dell'insieme delle soluzioni del sistema di partenza, infatti, posto $\alpha = 2\beta - 1$*,si ottiene*

$(\beta, 3\beta - 2, 2\beta - 1) = (\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3\alpha-1}{2}, \alpha)$

Capitolo 4

Spazi Vettoriali

Nella Sezione 2.1 abbiamo visto la definizione di spazio vettoriale che il lettore è incoraggiato ad andare a rivedere prima di proseguire. In questo capitolo vedremo più a fondo questo argomento, ci soffermeremo su particolari sottoinsiemi di uno spazio vettoriale, i sottospazi vettoriali, e li ricollegheremo ai sistemi lineari del capitolo precedente. Vedremo poi la nozione di dimensione di uno spazio vettoriale e di base che si riveleranno fondamentali per il capitolo successivo.

4.1 Sottospazi vettoriali

Vediamo la definizione degli oggetti principali che studieremo nelle prossime pagine:

Definizione 4.1.1. *Sia V uno spazio vettoriale su K, un sottoinsieme W di V si dice* **sottospazio vettoriale** *di V se esso stesso è uno spazio vettoriale su K rispetto alla restrizione a W delle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite su V. Il sottospazio si indica con il simbolo $W \leq V$.*

Vediamo subito qualche esempio:

Esempio 36. *Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$ vediamo subito che esso contiene due ovvi sottospazi vettoriali:*

- *il sottospazio nullo $\{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$, che è chiaramente uno spazio con le operazioni di somma e prodotto per uno scalare di $\mathbb{R}^3$;*
- *$\mathbb{R}^3$ stesso;*

questi due vengono detti anche 'sottospazi banali'.

Osservazione 3. *Dalla definizione di sottospazio vettoriale segue che ogni sottospazio vettoriale deve necessariamente contenere lo* 0 *additivo. Di conseguenza il sottoinsieme vuoto* $\emptyset$ *non è mai un sottospazio vettoriale. Il sottospazio nullo contenente solo lo zero è quindi il più piccolo sottospazio vettoriale possibile.*

Per poter fare esempio più significativi di uno spazio vettoriale vediamo il seguente (importantissimo!) Teorema che permette di caratterizzarli:

Teorema 4.1.2 (Teorema di caratterizzazione dei sottospazi)**.** *Sia* V *uno spazio vettoriale su* K*, un sottoinsieme* W *di* V *è un sottospazio vettoriale di* V *se e solo se :*

1. W *è non vuoto;*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \ \vec{u} + \vec{v} \in W;$
3. $\forall \lambda \in K, \ \forall \vec{v} \in W : \ \lambda \vec{v} \in W.$

Le ultime due proprietà descritte nel Teorema sono dette 'chiusura rispetto alla somma' e 'chiusura rispetto al prodotto (per uno scalare)'. L'enunciato del Toerema di caratterizzazionesi possono sintetizzare con un'unica condizione:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in W, \forall \lambda, \mu \in K : \ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W.$$

Esempio 37. *Abbiamo visto che le matrici* $m \times n$ *sono uno spazio vettoriale (Teorema 2.3.2). Vediamo che in* $M_3(\mathbb{R})$ *il sottoinsieme delle matrici diagonali è un sottospazio vettoriale. Usiamo il Teorema di caratterizzazione:*

1. *l'insieme delle matrici* 3×3 *diagonali non è vuoto, infatti, ad esempio contiene la matrice nulla;*
2. *verifichiamo che la somma di due matrici diagonali è ancora diagonale, ovvero*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & 0 & 0 \\ 0 & b+b' & 0 \\ 0 & 0 & c+c' \end{pmatrix}.$$

dati a, b, c, a', b', c' *numeri reali;*

3. *verifichiamo che il prodotto di uno scalare per una matrice diagonale risulta essere una matrice diagonale:*

$$\lambda \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda c \end{pmatrix}$$

dove a, b, c *sono numeri reali.*

Un ragionamento molto simile dimostra che anche gli insiemi di matrici simmetriche, triangolari, antisimmetriche ecc sono sottospazi vettoriali dello spazio di matrici quadrate di dimensione n *(vale per qualunque dimensione). Le matrici invertibili invece non sono un sottospazio vettoriale (perchè?).*

Esempio 38. *Abbiamo visto in Sezione 2.1 che* $\mathbb{R}^n$ *è uno spazio vettoriale. Vediamo che* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2y\}$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^3$*. Vediamo punto per punto che* S *verifica le condizioni del Teorema di caratterizzazione dei sottospazi:*

1. S *è non vuoto, infatti* $(0, 0, 0) \in S$*;*

2. *Se* v *e* w *sono due elementi di* S *allora anche* $v + w \in S$*. Visto che* $v \in S$ *possiamo assumere che le sue coordinate siano* $(2y, y, z)$ *con* y, z *valori reali fissati. Analogamente possiamo assumere* $w = (2y', y', z')$ *per* $y', z' \in \mathbb{R}$*. Calcoliamo quindi* $v + w = (2y + 2y', y + y', z + z')$ *e in particolare la prima componente di* $v + w$ *è il doppio della seconda, quindi* $v + w \in S$*;*

3. *sia* v *un generico elemento di* S *e* λ *uno scalare, vediamo che* $\lambda v \in S$*. Assumiamo, come nel punto precedente, che* $v = (2y, y, z)$*. Vediamo che* $\lambda v = (2\lambda y, \lambda y, z)$ *e quindi* $\lambda y = y$*.*

Il lettore può vedere che con un ragionamento molto simile si può dimostrare che anche $S' := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 3y - z\}$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^3$*.*

Vediamo infine un esempio di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale che NON è un sottospazio:

Esempio 39. *Sia* $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y^2\}$*, vediamo che questo insieme non è un sottospazio di* $\mathbb{R}^2$*. Visto che il teorema di caratterizzazione fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sottoinsieme sia un sottospazio ci è sufficiente verficare che* H *non soddisfa uno dei suoi punti. Vediamo che se* $v \in H$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *non è necessariamnete vero che* $\lambda v \in H$*. Possiamo assumere che* $v = (y^2, y)$*, e quindi*

$\lambda v = (\lambda y^2, \lambda y)$. *Notiamo ora che non è necessariamente vero che* $\lambda y^2 = (\lambda y)^2$. *Un facile esempio si può avere con* $\lambda = 2$ *e* $v = (1, -1)$, *si ha che* $2v = (2, -2) \notin H$.

4.1.1 Il Sottospazio generato

Un metodo per descrivere uno sottospazio vettoriali è tramite i suoi generatori. Dati n vettori $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ di uno spazio vettoriale V su K, si indica con $Span\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$ o con $\langle \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n} \rangle$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori stessi, cioè

$$Span(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}) := \{\vec{v} \in V | \ \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K : \ \vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}\}.$$

Verifichiamo che il sottoinsieme di V appena definito è effettivamente un sottospazio vettoriale:

Teorema 4.1.3. *Siano* $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ *n vettori di uno spazio vettoriale* V *su* K, *allora l'insieme* $Span(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$ *è un sottospazio vettoriale di* V.

Dimostrazione. Applichiamo il teorema di Caratterizzazione dei Sottospazi vettoriali. Sia $S := Span(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$. Vediamo che il vettore nullo $\vec{0} \in S$, infatti prendendo $\lambda_1 = \ldots, = \lambda_n = 0$ si ha che $0\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + \cdots + 0\vec{v_n} = \vec{0}$. Abbiamo quindi idmostrato che $S \neq \emptyset$.

Studiamo adesso la chiusura per somma: siano $\vec{u}$, $\vec{v} \in S$, esistono $2n$ scalari $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \ \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ tali che

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n} \text{ e } \vec{v} = \mu_1 \vec{v_1} + \cdots + \mu_n \vec{v_n}.$$

Per gli assiomi di spazio vettoriale si ha

$$\vec{u} + \vec{v} = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{v_1} + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)\vec{v_n} \text{ e } \lambda\vec{v} = (\lambda_1\mu_1)\vec{v_1} + \cdots + (\lambda_n\mu_n)\vec{v_n}.$$

Pertanto $\vec{u} + \vec{v} \in S, \ \lambda\vec{v} \in S$.

In modo simile studiamo la chiusura per il prodotto per uno scalare. Sia $\vec{v} \in S$, esistono n scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che $\vec{v} = \lambda_1\vec{v_1} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n}$. Per ogni $\mu \in K$ vediamo che

$$\mu\vec{v} = \mu\lambda_1\vec{v_1} + \ldots + \mu\lambda_n\vec{v_n}$$

si deduce quindi che $\mu\vec{\in}S$. La dimostrazione è conclusa. □

Il sottospazio vettoriale $Span(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$ si dice **sottospazio generato** dai vettori $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$, i vettori $\{\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}\}$ si dicono generatori del sottospazio.

Esempio 40. *Sia $V = \mathbb{R}^4$. Prendiamo i vettori $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0, 0)$e cerchiamo di capire come sono fatti gli elementi di $S = Span(e_1, e_2)$. Sappiamo che $v \in S$ allora esistono due scalari λ_1 e λ_2 tali che*

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

andando a sostituire e_1 ed e_2 otteniamo che

$$v = (\lambda_1, \lambda_2, 0, 0).$$

Ne deduciamo che $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | z = 0, t = 0\}$.

Proposizione 4.1.4. *Sia V uno spazio vettoriale su K, siano $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ n vettori linearmente indipendenti di V. Se il vettore $\vec{u}$ non appartiene a $L(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$, allora i vettori $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}, \vec{u}$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione.
Siano $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1} \in K$ tali che $a_1\vec{v_1} + \cdots + a_n\vec{v_n} + a_{n+1}\vec{u} = \vec{0}$
$\vec{u} \notin L(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$ quindi $a_{n+1} = 0$.
Se fosse $a_{n+1} \neq 0$ si avrebbe $\vec{u} = -\frac{a_1}{a_{n+1}}\vec{v_1} - \cdots - \frac{a_n}{a_{n+1}}\vec{v_n} \Rightarrow \vec{u} \in L(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$, ma ciò è assurdo.
Se $a_{n+1} = 0$ allora la relazione iniziale diventa $a_1\vec{v_1} + \cdots + a_n\vec{v_n} = \vec{0}$.
Essendo $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ linearmente indipendenti, si ha $a_1 = \cdots = a_n = 0$, quindi $a_1 = \cdots = a_n = a_{n+1} = 0$ da ciò segue che i vettori $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}, \vec{u}$ sono linearmente indipendenti. □

4.1.2 Il sottospazio intersezione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, siano U, W due sottospazi di V, allora la famiglia dei sottospazi vettoriali di V è chiusa rispetto all'intersezione, in altre parole l'intersezione di due sottospazi è ancora un sottospazio. Vediamo una dimostrazione:

Proposizione 4.1.5. *Se U, W sono due sottospazi di uno spazio vettoriale V su K, allora l'intersezione $U \cap W$ è ancora un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. Utilizziamo il Teorema di caratterizzazione dei sottospazi:

1. l'insieme $U \cap W$ non è vuoto perchè $\vec{0} \in U \cap W$.

2/3 Siano $\vec{u}, \vec{v} \in U \cap W$, $\lambda \in K$.
Essendo U sottospazio, per il Teorema di caratterizzazione dei sottospazi, si ha che $\vec{u}+\vec{v} \in U$, $\lambda\vec{v} \in U$
Essendo W sottospazio, per il Teorema di caratterizzazione dei sottospazi, si ha che $\vec{u}+\vec{v} \in W$, $\lambda\vec{v} \in W$.
Da cui segue che $\vec{u}+\vec{v} \in U \cap W$, $\lambda\vec{v} \in U \cap W$.

Per il Teorema di caratterizzazione dei sottospazi, si ha che $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V. □

Osservazione 4. *ATTENZIONE!!! Non esiste il "sottospazio unione"!!! Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale V su K, in generale $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale di V.*
Lo è solo nel caso particolare di $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$ perchè in questi casi si ha $U \cup W = W \cup U = U$.
In tutti gli altri casi non si verifica almeno una delle proprietà di chiusura.

Esempio 41.

□ *Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi*
$V = \{(x,y,x)|\ x=y\}$ *e* $W = \{(x,y,z)|\ z=0\}$, *allora*
$V \cap W = \{(x,y,z)|\ x=y \vee z=0\}$.
Consideriamo i vettori $\vec{v} = (0,0,1) \in V$ *e* $\vec{w} = (1,0,0) \in W$, *osserviamo che* $\vec{v} \in V \cup W$ *e* $\vec{w} \in V \cup W$, *però il vettore somma* $\vec{v}+\vec{w} = (1,0,1) \notin V \cup W$ *perchè non appartiene nè a V, nè a W.*
L'insieme $V \cup W$ non è chiuso rispetto alla somma, pertanto non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

4.1.3 Il sottospazio somma

Dato uno spazio vettoriale V su un campo K e due suoi sottospazi vettoriali U e W abbiamo visto che la loro unione non è (di solito) uno spazio vettoriale, si può definire però la loro 'somma':

Definizione 4.1.6. *Sia V uno spazio vettoriale su K, siano U, W due sottospazi vettoriali di V, si dice* **somma** *di U con W, il sottoinsieme di V formato da tutti i*

vettori che si possono ottenere sommando vettori di U con vettori di W, cioè
$U + W := \{\vec{v} \in V |\ \exists \vec{u} \in U,\ \exists \vec{w} \in W :\ \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}\}$.

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.1.7. *Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno stesso spazio vettoriale V su K, allora la somma $U + W$ è un sottospazio di V.*

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di caratterizzazione dei sottospazi:

1. Il vettore nullo appartiene sia a U, sia a W. Inoltre $\vec{0} = \vec{0}+\vec{0}$ perciò $\vec{0} \in U+W$. Questo garantisce il fatto che $U + W$ non è vuoto.

2/3. Siano $\vec{v}, \vec{v'} \in U + W,\ \lambda \in K$, dalla definizione dell'insieme $U + W$, si ha che esistono
$\vec{u}, \vec{u'} \in U,\ \vec{w}, \vec{w'} \in W \ni' \vec{v} = \vec{u} + \vec{w},\ \vec{v'} = \vec{u'} + \vec{w'}$
allora
$\vec{v} + \vec{v'} = (\vec{u} + \vec{u'}) + (\vec{w} + \vec{w'}) \wedge \lambda\vec{v} = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{w}$.
Essendo U e W due sottospazi, risulta $\vec{u}+\vec{u'} \in U,\ \lambda\vec{u} \in U,\ \vec{w}+\vec{w'} \in W,\ \lambda\vec{w} \in W$
dunque $\vec{v} + \vec{v'} \in U + W,\ \lambda\vec{v} \in U + W$.

□

Una situazione particolare di somma di sottospazi vettoriali è la somma diretta.

Definizione 4.1.8. *La somma di due sottospazi vettoriali U e W di V si dice* **diretta** *se il sottospazio intersezione di U e W è banale, cioè $U \cap W = \{\vec{0}\}$.*
La somma diretta si indica con il simbolo $U \oplus W$.

La somma diretta di due sottospazi vettoriali soddisfa la proprietà illustrata nella seguente Proposizione.

Proposizione 4.1.9. *Ogni vettore di $U\oplus W$ si esprime in modo* **unico** *come somma di un vettore di U e di un vettore W, ciò equivale a dire che*

$$\forall \vec{v} \in U \oplus W\ \exists! \vec{u} \in U,\ \exists! \vec{w} \in W\ \ \ni'\ \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}.$$

Dimostrazione.
Supponiamo che non sia vera l'unicità, ovvero che $\exists \vec{u}, \vec{u'} \in U,\ \exists \vec{w}, \vec{w'} \in W \ni' \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} = \vec{u'} + \vec{w'}$

allora $\vec{u} - \vec{u'} = \vec{w'} - \vec{w} \in U \cap W = \{\vec{0}\}$ pertanto $\vec{u} - \vec{u'} = \vec{w'} - \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{u'},\ \vec{w} = \vec{w'}$. □

4.1.4 Sottospazi e sistemi lineari

Parlando di sistemi lineari e di soluzioni avevamo notato che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo non è mai vuoto perchè ammette sempre la soluzione banale $(0, 0, \ldots, 0)$. In relatà questa osservazione è strettamente collegata con il fatto che il più piccolo sottospazio di un certo spazio vettoriale deve contenere necessariamente l'elemento neutro additivo. Il motivo risiede nella seguente Proposizione:

Proposizione 4.1.10. *L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è un sottospazio vettoriale di K^n.*

Dimostrazione. Sia S l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

con $A \in M_{m,n}(K)$.
La $n-pla$ nulla $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in S$, quindi S è diverso dall'insieme vuoto.
È possibile applicare il Teorema di caratterizzazione dei sottospazi.
Siano $\vec{u}, \vec{v} \in S$, $\lambda \in K$ allora

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0}$$
$$A(\lambda\vec{v}) = \lambda A(\vec{v}) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

Quindi $\vec{u} + \vec{v} \in S$, $\lambda\vec{v} \in S$. □

Osservazione 3.
Tutti i sottospazi di K^n sono di questo tipo ovvero vale il seguente risultato.

Teorema 4.1.11 (Teorema di rappresentazione dei sottospazi di K^n)**.** *Sia S un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione k, allora S può essere rappresentato come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di $n-k$ equazioni in n incognite.*