Cap.6 – Calcolo differenziale

Introduzione

Lo scopo di questo paragrafo è quello di introdurre il concetto di derivata di una funzione e lo faremo considerando due problemi classici dai quali la nozione di derivata trae le sue origini.

(I) Il problema cinematico

Il moto di un corpo puntiforme lungo un asse può essere descritto dalla posizione x(t) che, al tempo t, il punto assume su una retta in cui siano fissate nella usuale maniera un'origine O e un punto U che fornisce il verso positivo delle coordinate e l'unità di misura |OU|. Ci chiediamo allora, qual è la velocità del punto, istante per istante?

Una maniera di calcolare tale velocità al tempo t è di considerare la velocità media del corpo fino ad un istante successivo t + h, h > 0, calcolata dividendo lo spazio percorso nell'intervallo di tempo [t, t + h] per il tempo trascorso h. Se l'intervallo di tempo è molto piccolo, possiamo immaginare che lo spazio percorso sia pari alla differenza fra le posizioni x(t + h) all'istante finale e quella x(t) all'istanteo iniziale.

Dunque, la velocità media $v_h(t)$ nell'intervallo di tempo [t, t + h] è

$$v_h(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Grazie alla teoria esposta nel capitolo precedente, basterà calcolare il limite, per h → 0, di $v_h(t)$ (sempre che tale limite esista e sia finito) per ottenere la velocità istantanea v(t) al tempo t.

Quest'ultima è, pertanto, data dalla formula: $v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$.

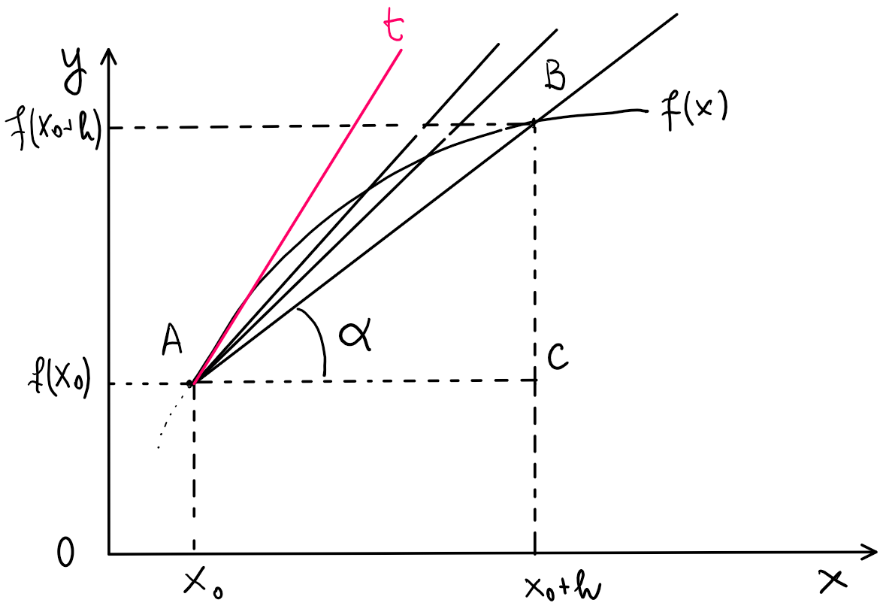
(II) La retta tangente

Un secondo tipo di problema, questa volta di natura geometrica, in cui la derivata gioca un ruolo fondamentale, è il calcolo della retta tangente ad una curva piana in un suo punto. L'idea intuitiva di retta tangente a una curva è quella di una retta che tocca la curva senza tagliarla: una retta che attraversa la curva tagliandola è invece chiamata secante.

Consideriamo una curva piana, grafico di una funzione f, e un suo punto $A(x_0, y_0)$, di ascissa x_o e ordinata $y_o = f(x_o)$.

Tra tutte le rette passanti per il punto A, ci chiediamo quale di esse rappresenta la tangente al grafico nel punto A.

Iniziamo col considerare un altro punto B sul grafico di f, distinto da A e di ascissa $x_0 + h$: tracciamo la retta secante s per i punti A e B e indichiamo con α l'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse.



Il coefficiente angolare della retta secante s = (A,B) è:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{CB}{AC} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale rapporto si dice rapporto incrementale di f nel punto x_0.

Se facciamo tendere B ad A, mantenendo B sul grafico, la retta s tende ad una retta limite t detta tangente al grafico di f nel punto A: tale retta ha almeno due punti coincidenti in comune con il grafico di f.
Il coefficiente angolare della retta tangente, <u>quando esiste</u>, è:

$$m_t = \lim_{B \to A} \frac{CB}{AC} = \lim_{B \to A} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$ (limite del rapporto incrementale).

Entrambi i problemi appena presentati, pur essendo di natura completamente diversa, coinvolgono il rapporto tra la variazione di una variabile dipendente e la variazione della rispettiva variabile indipendente e il limite di tale rapporto (rapporto incrementale) al tendere a zero dell'incremento h.
Il risultato di tale operazione di limite, se esiste, è detto *derivata*.
Le classi di problemi in cui interviene il concetto di derivata sono molteplici: si va dal calcolo della velocità di una reazione chimica a quello dell'accelerazione di un corpo, dal concetto di densità di un corpo di massa non omogenea a quello di ricavo marginale in un'analisi di Marketing e così via.

&6.1 – Rapporto incrementale e derivata di una funzione

Def.6.1.1 – (Definizione di rapporto incrementale in un punto)
Se $f: X \to \mathcal{R}$ e se $x_o \in X \cap D_r(X)$, allora:

1) $\forall\ h \in R \ni' x_0 + h \in X$ si dice incremento della v.i. x_0;
2) $f(x_0+h) - f(x_0)$ si dice incremento di f nel punto x_0 relativo ad h;
3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si dice rapporto incrementale di f nel punto x_0 relativo all'incremento h.

Def.6.1.1.1 - (Definizione di derivata in un punto)
Se $f: X \to \mathcal{R}$ e se $x_o \in X \cap D_r(X)$, si dice derivata prima di f in x_o il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale di f in x_o.
La derivata di f in x_o (se esiste) si indica con

$$f'(x_o),\ y'(x_0),\ Df(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0)$$

ed è per definizione

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \widetilde{\mathbb{R}}.$$

In particolare:

Def.6.1.2 – (Definizione di funzione derivabile in un punto)

Se $f: X \to \mathcal{R}$ *e se* $x_o \in X \cap D_r(X)$, *si dice che f è derivabile in* x_o *se la derivata di f in* x_o *<u>esiste</u> ed è <u>finita</u>:*

$$(f \text{ è derivabile in } x_o) \Leftrightarrow \left(\exists f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}\right).$$

Nota bene: Si può parlare di derivata in un punto x_0 *solo se* $x_0 \in X \cap DX$.

Nuova espressione della derivata prima

Se poniamo $x_0 + h = x$, *si ha che*

$$h = x - x_0 \quad e \quad h \longrightarrow 0 \Longrightarrow x \longrightarrow x_0.$$

e la derivata prima nel punto x_0 *diventa:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \text{ (nuova espressione della derivata)}$$

Significato geometrico della derivata

La derivata prima di una funzione in un punto, se esiste, rappresenta il coefficiente angolare (o pendenza) della retta tangente al grafico nel punto di ascissa x_o.

In particolare, si osservi che:

1. *Se* $f'(x_0) = \pm\infty$, *la tangente in* $P_0(x_0, f(x_0))$ *è verticale (parallela all'asse y) e ha equazione x = x*$_o$*;*
2. *Se* $f'(x_0) = 0$, *la tangente in* $P_0(x_0, f(x_0))$ *è orizzontale (parallela all'asse x) e ha equazione* $y = f(x_0)$*;*
3. *Se* $0 \neq f'(x_0) \in \mathbb{R}$, *la tangente è obliqua rispetto agli assi e ha equazione*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Esempio – Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2$ *nel punto di ascissa 3.*

Soluzione

Il punto di tangenza è $P_0\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = f(3) = 3^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow P_0(3{,}9).$

Calcoliamo il coefficiente angolare della tangente:

$$m = f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h} = = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6.$$

Quindi, l'equazione della tangente è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 9 = 6(x - 3) \Leftrightarrow y = 6x - 9.$$

Significato cinematico della derivata (in fisica)

a) Se la funzione è la legge oraria $s = s(t)$ *del moto rettilineo di un corpo puntiforme, la derivata* $s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$ *rappresenta la velocità istantanea del corpo all'istante t:*

$$v(t) = s'(t).$$

b) Se la funzione è la legge con cui varia la velocità istantanea v(t) nel tempo, la derivata di $v = v(t)$*,*

$$v'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

rappresenta l'accelerazione istantanea a(t) del corpo all'istante t:

$$a(t) = v'(t).$$

Proprietà delle funzioni derivabili

Una proprietà fondamentale delle funzioni derivabili è espressa dal seguente teorema.

Teorema 6.1.1 (*) – (C.N. per la derivabilità in un punto)

Ogni funzione derivabile in un punto è continua nel punto.

(f è derivabile in x_0*)* $\Rightarrow$*(f è continua in* x_o*).*

Dim. Poiché f è derivabile $x_o \Leftrightarrow \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in R \Rightarrow$ *(poiché il denominatore tende a* 0*, anche il numeratore deve tendere a* 0*)*$\Rightarrow$ $\lim_{h \to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

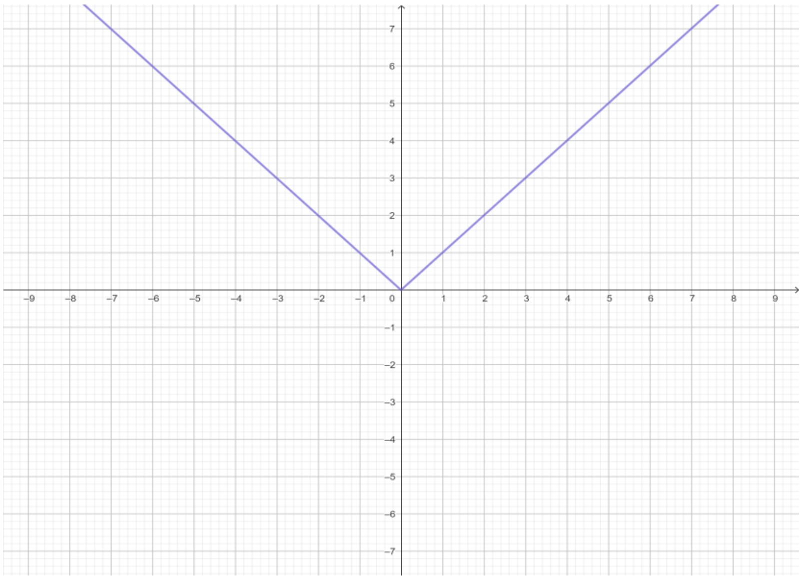
Nota bene – Tale condizione è solo necessaria ma non sufficiente (non vale il viceversa): una funzione può essere continua in un punto e non essere derivabile in quel punto.

Un esempio è dato dalla funzione $y = |x|$*: tale funzione è continua in* $x_0 = 0$ *ma non è derivabile in* $x_0 = 0$ *perché i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale in* $x_0 = 0$ *sono finiti ma diversi.*

Infatti, il rapporto incrementale è:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\ \lim_{h \to +} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow y = |x|$$

non è derivabile in $x = 0$.



Questo esempio mostra la necessità di dover introdurre la definizione di derivata sinistra e derivata destra in un punto.

Derivata sinistra, derivata destra in un punto

Def.6.1.3 – (Derivata sinistra e derivata destra)

a) Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e se $x_o \in X \cap D_r^-(X)$, si dice derivata sinistra di f in x_o e si indica con $f'_-(x_0)$ il limite del rapporto incrementale di f per h che tende a zero da sinistra:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

b) Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e se $x_o \in X \cap D_r^+(X)$, si dice derivata destra della funzione f in x_o e si indica con $f'_+(x_0)$ il limite del rapporto incrementale di f per h che tende a zero da destra:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Teorema 6.1.2 – (C.N.S. per l'esistenza della derivata)

Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e se $x_o \in X \cap D_r(X)$ tale che f sia <u>continua</u> in x_0, si dimostra che:

$$(\exists f'(x_0)) \Leftrightarrow (\exists f'_-(x_0), \exists f'_+(x_0) \text{ ed è } f'_-(x_0) = f'_+(x_0)).$$

In tal caso è: $f'(x_0) = f'_-(x_0), = f'_+(x_0)$.

<u>*Di conseguenza, se $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \Rightarrow$ non esiste la derivata della funzione nel punto x_0.*</u>

Esempio – Studiare la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & se\ x < 0 \\ 1, & se\ x = 0 \\ sen(x) + 1, & se\ x > 0 \end{cases}$$

nel punto $x_0 = 0$.

Soluzione

1. *Verifichiamo se f(x) è continua in* $x_0 = 0$.

- $f(0) = 1$;
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (sen(x) + 1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

Quindi, $f(x)$ *è continua in* $x_0 = 0$.

2.

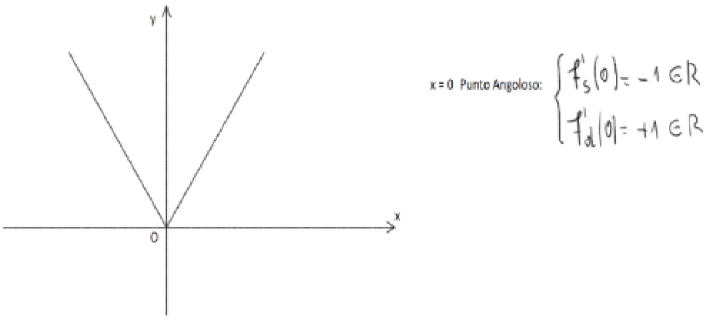
- $\forall x < 0$: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$;
- $\forall x > 0$: $f(x) = sen(x) + 1 \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$;
- $f'_s(0) = \lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1, f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \cos(x) = \cos(0) = 1 \Rightarrow f'_s(0) = f'_d(0) = 1$.
- $f(x)$ *è derivabile in* $x_0 = 0$ *ed è* $f'(0) = f'_s(0) = f'_d(0) = 1$.

Classificazione dei punti di non derivabilità

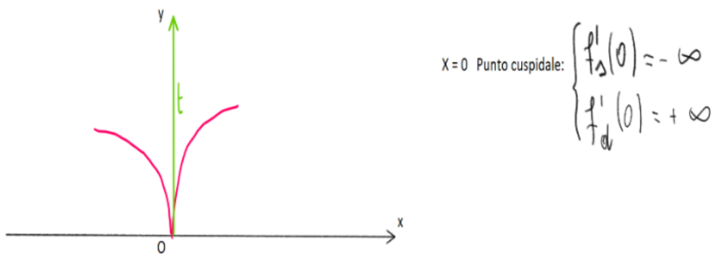
Def.6.1.4 - Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *se* $x_0 \in X \cap D_r(X)$ *è un punto* <u>*interno*</u> *ad X e se f è continua in* x_0, *si dice che:*

a) x_0 *è un punto angoloso per* $f \Leftrightarrow \exists f'_-(x_0) \in R,\ \exists f'_+(x_0) \in R$ *ed è:*

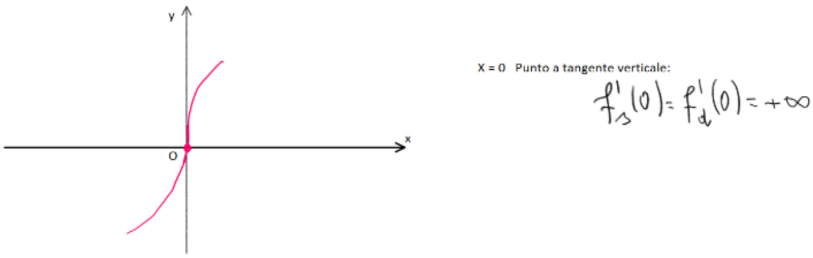
$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0).$$



b) x_0 *è un punto cuspidale per f(x)* $\Leftrightarrow \exists f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ *e almeno una di esse è infinita:*



c) x_0 *è un punto di flesso improprio o punto a tangente verticale per f se* $\exists f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ *e sono entrambe infinite:*



Def.6.1.5 – (Derivabilità in un insieme - Definizione di funzione derivata prima)

Se $f: X \longrightarrow R$ *, si dice che f è derivabile in X se f è derivabile in ogni punto di X*

$$(f \text{ è derivabile in } X) \Leftrightarrow \left(\forall x \in X, \exists f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in \mathbb{R}\right).$$

In tal caso, si può considerare la nuova funzione

$$f': X \longrightarrow R \text{ tale che } \forall x \in X: f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in R.$$

detta funzione derivata prima o, semplicemente, derivata di f in X.

I modi per indicare la funzione derivata prima sono:

$$f'(x), \qquad Df(x), \qquad \frac{df(x)}{dx}, \qquad y', \qquad \frac{dy}{dx}.$$

Derivate successive

Poiché la derivata prima potrebbe essere a sua volta derivabile in X, in tal caso esiste la derivata della derivata prima detta *derivata seconda* di f, indicata con:

$$f''(x),\ f^{(2)}(x),\ D^{(2)}f(x) \text{ o con } y''.$$

Essa è la funzione così definita:

$$f'': X \longrightarrow R \ \ni' \ \forall x \in X: f''(x) = Df'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \in \mathbb{R}.$$

In modo analogo, iterando il ragionamento, si possono definire le derivate successive, la derivata terza, la derivata quarta ecc..ecc.., indicate con:

$$f'''(x), f''''(x), \ldots, \ f^{(k)}(x).$$

(il numero k si dice ordine di derivazione di f).

Punti critici di una funzione

Def.6.1.6 – (Definizione di *punto critico*)

Se $f: X \longrightarrow R$ e se $x_0 \in X \cap D_r(X)$, si dice che:

(x_0 è un punto critico per f) ⇔(f non è derivabile in $x_0 \vee f'(x_0) = 0$)

Derivate notevoli

&6.2 – Derivata delle funzioni elementari

Teorema 6.2.1 – (Derivata delle funzioni elementari)

Si dimostra che:

1. $y = k$ è derivabile in $X = \mathbb{R}$ ed è $y' = Dk = 0$;
2. $y = x$ è derivabile in X= $\mathbb{R}$ ed è $y' = Dx = 1$;
3. $y = kx$ è derivabile in $X = \mathbb{R}$ ed è $y' = D(kx) = k$;
4. $y = x^n$ è derivabile in $X = \mathbb{R}$ ed è $y' = D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$;

5. $y = \sqrt{x}$ *è derivabile in* $X' = R^{+}\backslash\{0\} =]0, +\infty[$ *ed è* $y' = D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
6. $y = x^{\alpha}$ *è derivabile in* $X =]0, +\infty[$ *ed è* $y' = D(x^{\alpha}) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;
7. $y = a^{x}$ *è derivabile in* $X = \mathbb{R}$ *ed è* $y' = D(a^{x}) = a^{x} \cdot \ln(a)$.

   Se $a = e,\ y = e^{x}$ *è derivabile ed è* $y' = e^{x}$;
8. $y = log_{a}(x)$ *è derivabile in* $X =]0, +\infty[$ *ed è* $y' = D(log_{a}(x)) = \frac{1}{x} \cdot log_{a}(e)$;

   Se $a = e, y = ln(x)$ *è derivabile ed è* $y' = \frac{1}{x}$;
9. $y = sen(x)$ *è derivabile in* $X = \mathbb{R}$ *ed è* $y' = Dsen(x) = \cos(x)$;
10. $y = cos(x)$ *è derivabile in* $X = \mathbb{R}$ *ed è* $y' = Dcos(x) = -sen\,(x)$;
11. $y = tag(x)$ *è derivabile in* $X = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ *ed è* $y' = Dtg(x) = \frac{1}{cos^{2}(x)}$;
12. $y = cotg(x)$ *è derivabile in* $X = \mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$ *ed è* $y' = Dcotg(x) = -\frac{1}{sen^{2}(x)}$;
13. $y = arcsen(x)$ *è derivabile in* $X' =]-1,1[$ *ed è* $y' = Darcsen(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$;
14. $y = arccos(x)$ *è derivabile in* $X' =]-1,1[$ *ed è* $y' = Daeccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$;
15. $y = arctag(x)$ *è derivabile in* $X = \mathbb{R}$ *ed è* $y' = Darctg(x) = \frac{1}{1+x^{2}}$;
16. $y = arccotag(x)$ *è derivabile in* $\mathbb{R}$ *ed è* $y' = Darccotg(x) = -\frac{1}{1+x^{2}}$;
17. $y = |x|$ *è derivabile in* $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *ed è:* $y' = \begin{cases} 1, \forall x > 0 \\ -1, \forall x < 0 \end{cases}$;

Nota - La funzione $y = |x|$ *non è derivabile in* $x = 0$ *perché*

$$\begin{cases} y'_{s}(0) = -1 \\ y'_{d}(0) = +1 \end{cases} \quad (0 \text{ è un } \textit{punto angoloso}).$$

18. $y = log_{a}(|x|)$ *è derivabile in* $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *ed è:*

$$Dlog_{a}(|x|) = \frac{1}{x} \cdot log_{a}(e);$$

In particolare, se $a = e$:

$$Dln(|x|) = \frac{1}{x}.$$

Operazioni con le derivate

Teorema 6.2.2 – (Derivata della funzione somma)

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili in X, allora anche la funzione somma f(x) + g(x) è derivabile in X ed è:

$$\mathcal{D}\,[f(x)+g(x)] = \mathcal{D}\,f(x) + \mathcal{D}\,g(x).$$

Esempio – Calcolare la derivata di $f(x) = x^3 + \sqrt{x} + \ln(x)$.

- $f'(x) = D\left(x^3 + \sqrt{x} + \ln(x)\right) = Dx^3 + D\sqrt{x} + Dln(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$

Teorema 6.2.3 – (Derivata della funzione differenza)

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili in X, allora anche la funzione f(x) - g(x) è derivabile in X ed è:

$$\mathcal{D}\,[f(x)-g(x)] = \mathcal{D}\,f(x) - \mathcal{D}\,g(x).$$

Esempio - Calcolare la derivata di $f(x) = x^3 - x^2$.

- $f'(x) = D(x^3 - x^2) = Dx^3 - Dx^2 = 3x^2 - 2x.$

Teorema 6.2.4 – (Derivata della funzione prodotto)

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili in X, allora anche la funzione f(x) · g(x) è derivabile in X ed è:

$$\mathcal{D}\,[f(x) \cdot g(x)] = [D\,f(x)\,] \cdot g(x) + [D\,g(x)\,] \cdot f(x).$$

Esempio - Calcolare la derivata di $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$.

- $f'(x) = D(x^3 \cdot \ln(x)) = (Dx^3) \cdot \ln(x) + (Dln(x)x^3 = 3x^2 \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x^3 =$
  $3x^2 \cdot \ln(x) + x^2 = x^2 \cdot (3\ln(x) + 1).$

Corollario 6.2.1 – (Derivata del prodotto di una funzione per una costante)

Se f(x) è una funzione derivabile in X, allora anche la funzione k · f(x) è derivabile in X ed è:

$$\mathcal{D}\,[k \cdot f(x)] = k\,[D\,f(x)\,].$$

Esempio – Calcolare la derivata di $f(x) = 3 \cdot sen(x)$.

- $f'(x) = D\big(3sen(x)\big) = 3 \cdot Dsen(x) = 3\cos(x)$.

Teorema 6.2.5 – (Derivata della funzione quoziente)

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili in X, con $g(x) \neq 0$, allora anche la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in X ed è:

$$\mathcal{D}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{[D\,f(x)\,]\cdot g(x) - [D\,g(x)\,]\cdot f(x)}{[g(x)]^2}.$$

Esempio – Calcolare la derivata di $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

- $f'(x) = D\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \frac{D(x^2+1)\cdot(x^2-1) - D(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x\cdot(x^2-1)-(2x)(x^2+1)}{(x^2-1)^2} =$
  $= \frac{2x\cdot[(x^2-1)-(x^2+1)]}{(x^2-1)^2} = \frac{2x\cdot[-2]}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$.

Corollario 6.2.2 – (Derivata della funzione reciproca, $\frac{1}{f(x)}$)

Se f(x) è una funzione derivabile in X tale che $\forall x \in X: f(x) \neq 0$, allora anche la funzione $\frac{1}{f(x)}$ è derivabile in X ed è:

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{1}{f^2(x)}\cdot f'(x).$$

Esempio – Calcolare la derivata di $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$.

- $f'(x) = D\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) = -\frac{1}{(\ln(x))^2}\cdot Dln(x) = -\frac{1}{ln^2(x)}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x\cdot ln^2(x)}$.

Teorema 6.2.6 – (Derivata della funzione composta di due funzioni)

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili nei rispettivi domini, allora anche la funzione composta $(g\circ f)(x)$ è derivabile nel rispettivo dominio ed è:

$$D\,(g\circ f)(x) = Dg(f(x)) = g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Se poniamo f(x) = z, la derivata della composta è:

$$Dg(f(x) = Dg(z)\cdot z',$$

dove $z = f(x)$ *e* $z' = f'(x)$.

Esempio 1 – Calcolare la derivata di $y = \ln(sen(x))$.

$D[ln(sen(x))] =$ *(posto sen(x) = z)* $Dln(z) \cdot z' = \frac{1}{z} \cdot z' = \frac{1}{sen(x)} Dsen(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)} = cotg(x)$.

Esempio 2 – Calcolare la derivata di $y = sen(\ln(x))$ = *(posto ln(x) = z)* =

$= Dsen(z) \cdot z' = \cos(z) \cdot z' = \cos(\ln(x)) \cdot Dln(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$.

Teorema 6.2.7 – (Derivata della funzione $f(x)^{g(x)}$*)*

Se $f(x)$ e $g(x)$ *sono due funzioni derivabili anche* $f(x)^{g(x)}$ *è derivabile ed è:*

$$D\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)} \cdot \left[\frac{f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \cdot lnf(x)}{f(x)}\right].$$

Esempio – Calcolare la derivata di $f(x) = x^x$.

- $f'(x) = D(x^x) = (x^x) \cdot \left\{\frac{Dx \cdot x + Dx \cdot x \cdot \ln(x)}{x}\right\} = (x^x) \cdot \left\{\frac{1 \cdot x + 1 \cdot x \cdot \ln(x)}{x}\right\} = (x^x) \cdot \{1 + \ln(x)\}$.

Teorema 6.2.8 – (Derivata della funzione inversa)

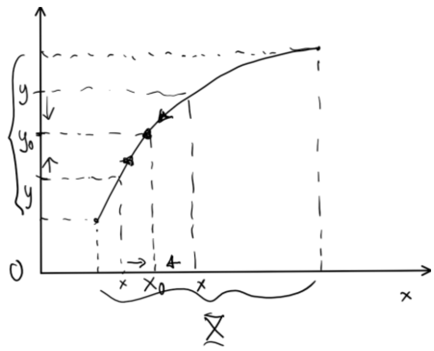
Se $y = f(x)$ *una funzione invertibile e se* $x = g(y)$ *è la sua inversa, si dimostra che:*

(Se f(x) è derivabile in x_0 *e* $f'(x_0) \neq 0) \Rightarrow$ *(g(y) è derivabile in* $y_0 = f(x_0)$

ed è $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$).

Dim. Sia $f: X \rightarrow Y$ *una funzione invertibile derivabile in* x_0, *con* $f'(x_0) \neq 0$, *e sia* $g: Y \rightarrow X$ *la sua inversa: dimostriamo che g(y) è derivabile in* $y_0 = f(x_0)$.

Osservato che quando $y \rightarrow y_0 \Rightarrow x \rightarrow x_0$



si ha:

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

<u>Questo teorema è molto utile per calcolare la derivata della funzione inversa in un punto quando la funzione f^{-1} non è calcolabile esplicitamente.</u>

Esempio 1 – La funzione $f(x) = e^x + x$ *è una funzione derivabile e strettamente crescente in* $\mathbb{R}$*, quindi invertibile, ma di essa non possiamo calcolare esplicitamente la sua funzione inversa* $g(y) = f^{-1}(y)$.

Nonostante ciò, possiamo calcolare, ad esempio, la sua derivata in

$$y_0 = f(0) = 1.$$

Poiché $f(x) = e^x + x \Longrightarrow f'(x) = e^x + 1 \Longrightarrow f'(0) = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Longrightarrow$*(per il teorema della derivata della composta)* $g'(1) = g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

Esempio 2 – Calcolare la derivata della funzione inversa della funzione $f(x) = x + arcsen(x)$*, nel punto* $y_0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Soluzione

1. $f(x) = x + arcsen(x)$ *è una funzione strettamente monotona e quindi invertibile in* $X = [-1,1]$ $\Leftrightarrow \exists$ *g(x) funzione inversa di f(x);*

2. $f(x) = x + arcsen(x)$ *è derivabile ed è* $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \neq 0;$$

3. $y_0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3+\pi}{6}.$

Quindi, per il teorema della derivata della funzione inversa, è:

$$g'(y_0) = g'\left(\frac{3+\pi}{6}\right) = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{3+2\sqrt{3}}.$$

Nota bene - Il teorema 6.2.8 è utilizzato nelle dimostrazioni della derivata delle funzioni goniometriche inverse.

Teorema 6.2.9 – (Derivata delle funzioni goniometriche inverse)

a) *La funzione* $y = sen(x)$ *è invertibile in* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *e ha per inversa la funzione* $x = arcsen(y)$ *che ha per dominio* $[-1,1]$.

Poiché $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: *Dsen(x)* $= \cos(x) \neq 0 \Longrightarrow$ *(per il teorema della derivata della funzione inversa)* $x = arcsen(y)$ *è derivabile in* $]-1,1[$ *ed è:*

$$Darcsen(y) = \frac{1}{Den(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

In modo analogo si dimostra che:

b) $x = arc\cos(y)$ *è derivabile in* $]-1,1[$ *ed è* $\forall y \in]-1,1[$:

$$Darccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

c) $x = \text{arc}\tan(y)$ *è derivabile in* $\mathbb{R}$ *ed è* $\forall y \in \mathbb{R}$*:*

$$Darctan(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

d) $x = \text{arc cotan}\,(y)$ *è derivabile in* $\mathbb{R}$ *ed è* $\forall y \in \mathbb{R}$*:*

$$Darc\,cotan(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Proprietà delle funzioni derivabili

&6.3 – Proprietà delle funzioni derivabili

Ricordiamo che se $f: X \longrightarrow R$ e se $x_0 \in X$, si dice che:

1. (x_o è un punto di minimo relativo o locale per f) ⟺ ($\exists I(x_0) \ni' \forall x \in I(x_0) \cap X: f(x_0) \leq f(x)$;
2. (x_o è un punto di minimo assoluto o globale per f) ⟺ ($\forall x \in X: f(x_0) \leq f(x)$;
3. (x_o è un punto di massimo relativo o locale per f) ⟺ ($\exists I(x_0) \ni' \forall x \in I(x_0) \cap X: f(x_0) \geq f(x)$.
4. (x_o è un punto di massimo assoluto o globale per f) ⟺ ($\forall x \in X: f(x_0) \geq f(x)$).

Poiché i punti di minimo/massimo assoluto sono anche punti di minimo/massimo relativo, lo studio degli estremanti relativi consente di calcolare anche gli estremanti assoluti (se esistono).

Si osservi, inoltre, che se x_0 è un estremante per una funzione f, non è detto che la funzione sia derivabile/continua in x_0: ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x}, & per\ x \neq 0 \\ 2, & per\ x = 0 \end{cases}$$

ha un punto di massimo (relativo e assoluto) in $x_0 = 0$ ma in tale punto f(x) non è né continua né derivabile: per gli estremanti di una funzione che sono interni ad un intervallo e nei quali la funzione è derivabile sussiste il seguente fondamentale teorema.

Teorema 6.3.1 (*) – (1° Teorema di FERMAT*)*

Se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* x_0 *è un punto <u>interno</u> all'intervallo* $[a,b]$ *in cui* f *è <u>derivabile in x_0</u>, si dimostra che se:*

(x_0 è un punto di massimo/minimo relativo per f) $\Longrightarrow (f'(x_0) = 0)$.

Dim. Dimostriamo il teorema supponendo che x_0 *sia un punto di massimo relativo per* $f \Leftrightarrow \exists I(x_0) \ni' \forall x \in I(x_0) \cap [a,b]: f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a,b]: f(x) - f(x_0) \leq 0.$

Ora osserviamo che:

1. $\forall x \in I(x_0) \cap [a,b] \ni'\ x < x_0: x - x_0 < 0 \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Leftrightarrow \exists I^-(x_0) =]x_0 - \delta, x_0]\ \ni'\ \forall x \in I^-(x_0) \cap [a,b]: \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Longrightarrow$ *(per il II teorema della permanenza del segno)* $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Leftrightarrow f'_-(x_0) \geq 0;$

2. $\forall x \in I(x_0) \cap [a,b] \ni'\ x > x_0: x - x_0 > 0 \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Leftrightarrow \exists I^+(x_0) =]x_0, x_0 + \delta[\ \ni'\ \forall x \in I^+(x_0) \cap [a,b]: \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Longrightarrow$ *(per il II teorema della perrmanenza del segno)* $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Leftrightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$

Quindi, poiché f è derivabile in $x_0: f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) \Longrightarrow f'(x_0) = 0.$

In modo analogo si ragiona se x_0 *è un punto di minimo relativo.*

Def.6.3.1 – (Definizione di punto stazionario)

Se $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* $x_0 \in X$, *si dice che*

$$(x_0 \text{ è un punto stazionario di } f) \Leftrightarrow (f'(x_0) = 0).$$

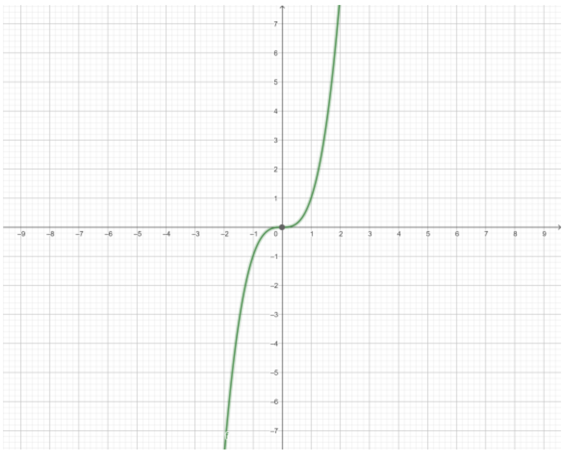
Osservazione – Ogni punto x_0, di max/min locale, interno all'intervallo in cui f è derivabile è, per il teorema di Fermat, un punto stazionario.

Il viceversa non è vero, cioè x_0 può essere un punto stazionario senza essere né massimo né minimo locale.

Esempio – Considerata la funzione $f(x) = x^3$, si ha:

$f'(x) = 3x^2 = 0$ per $x = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Quindi, $x = 0$ è un punto stazionario della funzione $f(x) = x^3$ ma $x = 0$ non è né massimo né minimo perché f è una funzione crescente (strettamente) in $x = 0$ come mostra il seguente grafico:



I teoremi di Rolle e di Lagrange

Fondamentali sono i seguenti teoremi di Rolle e di Lagrange.

Teorema 6.3.2 (*) – (Teorema di Rolle)

Se $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione tale che:

1. f è continua in $[a, b]$,
2. f è derivabile in $]a, b[$,
3. $f(a) = f(b)$, (assume valore uguale negli estremi)

allora $\exists c \in]a, b[\ni' f'(c) = 0$.

Dim. Poiché $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in $[a,b] \Longrightarrow$ (per il teorema di Weierstrass) $\exists\ m = min(f)$ e $\exists M = max(f) \Leftrightarrow \exists x_m, x_M \in [a,b] \ni'\ m = f(x_m)$ e $M = f(x_M) \Longrightarrow \forall x \in [a,b]: f(x_m) = m \leq f(x) \leq M = f(x_M)$.

I casi che si possono presentare sono due:

1. $m = M \Leftrightarrow f(x_m) = f(x_M) \Longrightarrow f$ è costante in $[a,b] \Longrightarrow \forall x \in]a,b[: f'(x) = 0$.

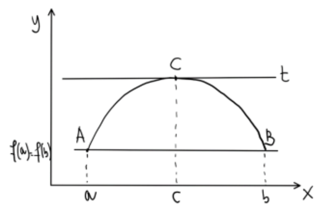
2. $m \neq M \Leftrightarrow f(x_m) \neq f(x_M) \Longrightarrow$ almeno uno tra x_m e x_M deve essere interno ad $[a,b]$ perché, altrimenti, se fossero x_m e $x_M \in \{a,b\}$, ad esempio $x_m = a$ e $x_M = b \Longrightarrow f(x_m) = f(a) = f(b) = f(x_M) \Longrightarrow f(x_m) = f(x_M) \Leftrightarrow m = M$, contro l'ipotesi che sono diversi.

Quindi se è $x_m \in]a,b[$, per il teorema di Fermat è $f'(x_m) = 0$ oppure se è $x_M \in]a,b[$, per il teorema di Fermat, è $f'(x_M) = 0$: in ogni caso,

$$\exists c \in]a,b[\ni' f'(c) = 0.$$

Interpretazione geometrica del teorema di Rolle

Se γ è una curva continua in un intervallo, dotata di retta tangente in ogni punto interno all'arco e tale che negli estremi ha la stessa quota (ordinata), il teorema di Rolle afferma che esiste almeno un punto interno all'arco in cui la tangente è orizzontale ($f'(x_0) = 0$).



Teorema 6.3.3 (*) – (Teorema di Lagrange)

Se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, allora

$$\exists c \in]a,b[\ \ni'\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dim. Considerata la retta secante passante per i punti $A(a, f(a))$ *e* $B(b, f(b))$, *la cui equazione è*

$$y = r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

e detta g la funzione ausiliaria così definita:

$$g: [a,b] \longrightarrow R \ni'\ \ g(x) = f(x) - r(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right],$$

si ha che:

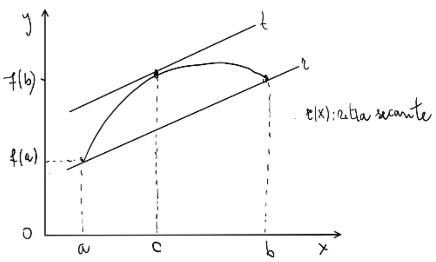
1. *g è continua in* $[a,b]$ *perché somma di funzioni continue in* $[a,b]$;
2. *g è derivabile in* $]a,b[$ *perché somma di funzioni derivabili in* $]a,b[$;
3.

- $g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) + f(a)\right] = f(a) - f(a) = 0 \Leftrightarrow g(a) = 0;$
- $g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) + f(a)\right] = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0 \Leftrightarrow g(b) = 0;$

quindi, g(a) = g(b).

Per il teorema di Rolle, $\exists c \in]a,b[\ \ni'\ g'(c) = 0 \Longrightarrow\ \ \forall x \in]a,b[\colon\ g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Longrightarrow \exists c \in]a,b[\ \ni'\ f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]a,b[\ \ni'\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interpretazione geometrica del teorema di Lagrange



Poiché $f'(c)$ *rappresenta il coefficiente angolare della tangente al grafico di f nel punto di ascissa* $x = c$ *e poiché* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *rappresenta il coefficiente angolare della secante passante per i punti di ascissa* $x = a$ *e* $x = b$, *estremi dell'arco* γ, *il teorema di Lagrange afferma che esiste un punto c interno all'arco in cui la tangente è parallela alla secante passante per gli estremi:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow m_t = m_r \Leftrightarrow t \parallel r.$$

Esempio 1 – Dire se la funzione $f(x) = \ln(-x^2 + 9)$ *verifica il teorema di Rolle nell'intervallo* $[-2, 2]$ *e, in caso affermativo, calcolare il valore di c previsto dal teorema.*

Soluzione

Il dominio di f è: $D_f =]-3,3[$.

1) *f(x), composta di funzioni continue, è continua in* $D_f =]-3,3[\Rightarrow$ $f(x)$ *è continua in* $[-2, 2] \subset]-3,3[$;
2) $f'(x) = \frac{1}{-x^2+9}(-2x) = \frac{2x}{x^2-9} \Rightarrow f(x)$ *è derivabile in* $]-3,3[\Rightarrow$ *f(x) è derivabile in* $]-2, 2[\subset]-3,3[$;
3) $\begin{cases} f(-2) = \ln(-4 + 9) = \ln(5) \\ f(2) = \ln(-4 + 9) = \ln(5) \end{cases} \Rightarrow f(-2) = f(2).$

Quindi, per il teorema di Rolle, $\exists c \in]-2, 2[\ni' f'(c) = 0$.

Calcoliamo c risolvendo $f'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{2c}{c^2-9} = 0 \Rightarrow c = 0 \in]-2, 2[$.

Esempio 2 - Dire se la funzione $f(x) = \ln(x) - x$ *verifica il teorema di Lagrange nell'intervallo* $[1, e]$ *e, in caso affermativo, calcolare il valore di c previsto dal teorema.*

Soluzione

Il dominio di f è: $D_f =]0, +\infty[$.

1) *f(x), composta di funzioni continue, è continua in* $D_f =]0,+\infty[\Rightarrow f(x)$ *è continua in* $[1,e] \subset]0,+\infty[$;

2) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \Rightarrow f(x)$ *è derivabile in* $]0,+\infty[\Rightarrow$ *f(x) è derivabile in* $]1,e[\subset]0,+\infty[$.

Quindi, per il teorema di Lagrange,

$$\exists c \in]1,e[\ni' f'(c) = \frac{f(e)-f(1)}{e-1} = \frac{1-e-(0-1)}{e-1} = \frac{2-e}{e-1}.$$

Calcoliamo c:

$$f'(c) = \frac{2-e}{e-1} \Leftrightarrow \frac{1-c}{c} = \frac{2-e}{e-1} \Leftrightarrow e-1-ce+c = 2c-ec \Leftrightarrow e-1+c = 2c \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \exists c = e-1 \in]1,e[$.

Conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema 6.3.4 (*) – (Criterio di monotonia per le funzioni derivabili)

Se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una funzione derivabile in* $[a,b]$, *si dimostra che:*

a1) $(\forall x \in]a,b[: f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow$ *(f è crescente in* $[a,b]$);

a2) $(\forall x \in]a,b[: f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow$ *(f è decrescente in* $[a,b]$))

b1) $(\forall x \in]a,b[: f'(x) > 0) \Rightarrow$ *(f è strettamente crescente in* $[a,b]$);

b2) $(\forall x \in]a,b[: f'(x) < 0) \Rightarrow$ *(f è strettamente decrescente in* $[a,b]$))

Dim.(a1) – (C.N.) $(\forall x \in]a,b[: f'(x) \geq 0) \Rightarrow$ *(f è crescente in* $[a,b]$)

Supponiamo che $\forall x \in]a,b[: f'(x) \geq 0$ *e dimostriamo che f è crescente in* $[a,b]$.

Siano $x_1, x_2 \in [a,b] \ \ni' x_1 < x_2$. *Poiché* f *è derivabile in* $[a,b] \Rightarrow f$ *è derivabile in* $[x_1, x_2] \Rightarrow$ *(per il teorema di Lagrange)* $\exists c \in]x_1, x_2[\ \ni' \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0$

$\Rightarrow$ *(poiché* $x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$*)*$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

Quindi: $\forall x_1, x_2 \in [a,b] \ \ni' x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow f$ *è crescente in* $[a,b]$.

(C.S.) *(f è crescente in* $[a,b]$*)* $\Rightarrow$ $(\forall x \in]a,b[: f'(x) \geq 0)$

- $\forall x \in]a,b[\ e \ \forall h > 0 \ \ni' \ x + h \in]a,b[: x < x + h \Rightarrow (poich\grave{e}\ f\ \grave{e}\ crescente)$

$f(x) \leq f(x+h) \Rightarrow f(x+h) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \forall h > 0 : \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow$

(per il 2° teorema della permanenza del segno) $\lim_{h \to 0^+} : \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \Leftrightarrow f'_+(x) \geq 0, \forall x \in]a,b[$.

- *Analogamente:*

$\forall x \in]a,b[\ e \ \forall h < 0 \ \ni' \ x + h \in]a,b[: x + h < x \Rightarrow (poich\grave{e}\ f\ \grave{e}\ crescente)$

$f(x+h) \leq f(x) \Rightarrow f(x+h) - f(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow$ *(per il 2° teorema della permanenza del segno)* $\lim_{h \to 0^-} : \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \Leftrightarrow f'_-(x) \geq 0, \forall x \in]a,b[$.

Quindi, poiché f è derivabile in $]a,b[: \forall x \in [a,b] : f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x) \geq 0$.

Dim.(a2) – E' analoga.

Dim.(b1) - Siano $x_1, x_2 \in [a,b] \ \ni' x_1 < x_2$.

Poiché f è derivabile in $[a,b] \Rightarrow f$ *è derivabile in* $[x_1, x_2] \Rightarrow$ *(per il teorema di Lagrange)* $\exists c \in]x_1, x_2[\ \ni' \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0 \Rightarrow \ni' \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *(poiché* $x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$*)*$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Quindi, $\forall x_1, x_2 \in [a,b] \ \ni' x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f$ *è strettamente crescente in* $[a,b]$.

Non vale il viceversa: se f è strettamente crescente in generale è $f'(x) \geq 0$.

Un esempio è dato dalla funzione $y = x^3$ *che è una funzione strettamente crescente in R ma che ha* $y'(0) = 0$.

Teorema 6.3.5 – (1ª C.S. per massimi/minimi relativi interni ad $[a, b]$ – *Metodo della crescenza*).

Se $f: I \longrightarrow R$ *è una funzione definita in I intervallo e se* $x_0 \in \mathrm{I} \ni' f$ *sia derivabile* $I - \{x_0\}$, *si dimostra che:*

a) $\left(\forall x \in I, \begin{cases} \forall x < x_0: f'(x) \leq 0 \\ \forall x > x_0: f'(x) \geq 0 \end{cases}\right) \Rightarrow$ (x_0 *è un punto di minimo relativo);*

b) $\left(\forall x \in I, \begin{cases} x < x_0: f'(x) \geq 0 \\ x > x_0: f'(x) \leq 0 \end{cases}\right) \Rightarrow$ (x_0 *è un punto di massimo relativo).*

E' questo il 1° metodo per il calcolo dei min/max di una funzione (metodo della monotonia).

Teorema 6.3.6 (*) – (2ª C.S. per i massimi/minimi relativi interni ad $[a, b]$ *– Metodo della derivata seconda)*

Se $f: I \longrightarrow R$ *è una funzione derivabile almeno due volte in* x_0 *interno all'intervallo I, si dimostra che:*

a) *(Se* $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) > 0$) $\Rightarrow$ *(*x_0 *è un punto di minimo relativo per f);*
b) *(Se* $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) < 0$) $\Rightarrow$ *(*x_0 *è un punto di massimo relativo per f).*

Dim.(a) – Poiché $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ *(per il teorema 6.3.5 della monotonia)* f' *è strettamente crescente in* $x_0 \Leftrightarrow \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in J \cap [a, b]$:

$$\begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \\ x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in J \cap [a, b], \begin{cases} x < x_0: f'(x) < 0 \\ x > x_0: f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$*(per il teorema 6.3.5)* x_0 *è un punto di minimo relativo.*

Dim.(b) E' analoga.

Teorema 6.3.5 (*) – (Caratterizzazione delle funzioni costanti definite in un intervallo)

Se $f: I \longrightarrow R$ *è una funzione derivabile in I intervallo, si dimostra che:*

$(f$ è *costante in* $I\,) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathring{I}: f'(x) = 0)$.

Dim. (C.N.) – Sia f *costante in* $I \Leftrightarrow \forall x \in I: f(x) = k \in R \Longrightarrow \forall x \in I: f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathring{I} \subset I: f'(x) = 0$.

Dim. (C.S.) – Dimostriamo che $(\forall x \in \mathring{I}: f'(x) = 0) \Longrightarrow (f$ è *costante in* $[a, b])$.

- *Poiché* $\forall x \in \mathring{I}: f'(x) = 0 \leq 0 \Longrightarrow$ (*per il teorema precedente*) f *è decrescente in* $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I \ni' x_1 \leq x_2: f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *poiché* $\forall x \in I: f'(x) = 0 \geq 0 \Longrightarrow$ (*per il teorema precedente*) f *è crescente in* $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I \ni' x_1 \leq x_2: f(x_1) \leq f(x_2)$.

Quindi, $\forall x_1, x_2 \in I: f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f$ *è costante in* I.

Esempio – Verificare che la funzione $y = \text{arcsen}(x) + \arccos(x)$ *è una funzione costante in* $X = [-1,1]$ *e calcolare il valore costante di* y.

Soluzione

$\forall x \in X =]-1,1[: y' = D(\text{arcsen}(x) + \arccos(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Longrightarrow$ (*per la caratterizzazione delle funzioni costanti*) $\forall x \in X = [-1,1]$:

$$y = \text{arcsen}(x) + \arccos(x) = \text{k},\ \textit{con}\ k \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo il valore di k, scegliendo ad esempio $x = 0$. *Si ha:*

$$y(0) = \text{arcsen}(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi:

$$y = \text{arcsen}(x) + \arccos(x): [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ni' \forall x \in X = [-1,1].\ y = \frac{\pi}{2}.$$

Come calcolare i massimi e i minimi relativi e assoluti di una funzione

Se $f: I \to R$ *è una funzione continua in* I *e derivabile in I, per 6determinare i suoi estremanti locali e globali si procede in questo modo.*

1° passo – Si calcola il alore di f agli estrermi;

2° passo – Si calcola f'(x) e si risolve l'equazione $f'(x) = 0$ *in (a,b): si ottengono così i punti stazionari (o critici), candidati minimi/massimi;*

3° passo – Si studia la monotonia della funzione, applicando il criterio di monotonia che utilizza il segno della f'(x);

4° passo – Si ottengono gli eventuali punti di minimo/massimo relativi interni all'intervallo I;

5° passo – Si confronta il valore della funzione nei punti estremanti con il valore della funzione negli estremi dell'intervallo I: dal loro confronto si ottengono i punti di minimo e di massimo assoluti (se esistono).

Esempio – Calcolare i punti di massimo e di minimo relativi e assoluti della funzione $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ *nell'intervallo* [0,2].

Soluzione

Poiché f(x) è una funzione continua nell'intervallo [0,2], *chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, essa è dotata di massimo e di minimo assoluti in tale intervallo.*

Calcoliamo gli estremanti.

1° passo – Valore negli estremi: $f(0) = 0,\ f(2) = 2 \cdot e^{-4}$;

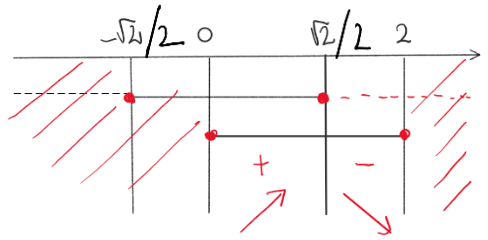
2° passo – Calcolo dei punti stazionari:

- $f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$;

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3° passo – Studio del segno della derivata prima:

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(1-2x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Quindi:

- $x = 0$ *e* $x = 2$ *sono punti di minimo relativo:*

dal confronto di $f(0) = 0$ *e* $f(2) = 2 \cdot e^{-4} \Rightarrow x = 0$ *è un punto di minimo assoluto ed è min(f)* = 0

- $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *è un punto di massimo relativo e assoluto ed è:*

$$max(f) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}.$$

Le forme indeterminate $\frac{0}{0}$ *e* $\frac{\infty}{\infty}$ *- Teoremi di De l'Hospital*

(I) Una importante applicazione delle derivate è legata alla risoluzione delle forme indeterminate che si possono presentare nel calcolo dei limiti.

Sussistono i seguenti teoremi.

Teorema 6.3.6 – (1° Teorema di De L'Hospital: la forma indeterminata $\frac{0}{0}$*)*

Se f e g sono due funzioni derivabili e se $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ *tale che:*

1. $\lim_{x \to c} f(x) = 0$,

2. $\lim_{x \to c} g(x) = 0$,
3. $\exists \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(finito o infinito),*

si dimostra che $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *ed è* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Teorema 6.3.7 – *(2° Teorema di De L'Hospital: la forma indeterminata* $\frac{\infty}{\infty}$*)*

Se f e g sono due funzioni derivabili e se $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ *tale che:*

1. $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$,
2. $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$,
3. $\exists \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(finito o infinito),*

si dimostra che $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *ed è* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Note

1) *I teoremi di de L'Hospital sussistono anche per i limiti da destra e da sinistra e per* $x \to \pm\infty$;
2) *i teoremi di de l'Hospital si possono applicare più volte utilizzando le derivate successive;*
3) *i teoremi di de l'Hospital si possono applicare dopo opportune trasformazioni anche alle forme indeterminate*

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, +\infty^0, 1^{\pm\infty}.$$

- *la trasformazione per la forma* $0 \cdot \infty$ *è:*

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}};$$

- *la trasformazione per la forma* $\infty - \infty$ *è:*

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}};$$

- *la trasformazione per le forme* $0^0, +\infty^0, 1^{\pm\infty}$ *è:*

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Esempi - Calcolare i seguenti limiti

1. $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = (\frac{-\infty}{+\infty}, de\ l'Hospital) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

   $\lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

2. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = (de\ l'Hospital) \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$

3. $\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-x} = (+\infty \cdot 0) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}, de\ l'Hospital\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} =$

   $(de\ l'hospital) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0.$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)-x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{1-cos(x)}{x^2}\right] = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(cos(x)+x)-x}{e^x+e^{-x}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)+x}(-sen(x)+1)-1}{e^x+e^{-x}(-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-sen(x)+1-\cos(x)-x}{\cos(x)+x}}{e^x-e^{-x}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sen(x)+1-\cos(x)-x}{(\cos(x)+x)(e^x-e^{-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-sen(x)+1-\cos(x)-x}{(\cos(x)+x)e^{-x}(e^{2x}-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{sen(x)}{x}x + \frac{1-\cos(x)}{x}x - x}{(\cos(x)+x)\cdot e^{-x} \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x}2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{sen(x)}{x} + \frac{1-\cos(x)}{x} - 1}{(\cos(x)+x)\cdot e^{-x} \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x}2} =$$

$$= \frac{-1+0-1}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2} = \frac{0}{2} = 0.$$

6. - $\lim_{x\to 0} [sen(x)]^x = (0^0) = \lim_{x\to 0} e^{x\cdot \ln(sen(x))} = e^{\lim_{x\to 0} x\cdot \ln(sen(x))}.$

Calcoliamo $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln\big(sen(x)\big) = (0\cdot\infty) \lim_{x\to 0} \frac{\ln(sen(x))}{\frac{1}{x}} = (de\ l'Hospital)=$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{sen(x)} \cdot \cos(x)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{-x^2 \cos(x)}{sen(x)}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{-x^2 \cos(x)}{\frac{sen(x)}{x}x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{-x \cdot \cos(x)}{\frac{sen(x)}{x}}\right] = \frac{-0\cdot 1}{1} = 0.$$

7. $\lim_{x\to 0} x^x = (0^0) = \lim_{x\to 0} e^{x ln(x)}$, *dove:*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x ln(x)\right) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}, de\ l'Hospital\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Quindi: $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x ln(x)} = e^0 = 1.$

8. $$\lim_{x\to 0^+}\left[e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{-\frac{1}{x^4}}\right]^x = (0^0) = \lim_{x\to 0^+}\left[e^{-\frac{1}{x^2}}\left(1 + \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{e^{-\frac{1}{x^2}}}\right)\right]^x = \lim_{x\to 0^+}\left[e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + e^{-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}}\right)\right]^x =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + e^{\frac{-1+x^2}{x^4}}\right)^x = e^{-\infty}(1 + e^{-\infty})^0 = 0\cdot 1 = 0.$$

9. $$\lim_{x\to 0^-}\left[e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{-\frac{1}{x^4}}\right]^x = (0^0) = \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + e^{\frac{-1+x^2}{x^4}}\right)^x = (+\infty)\cdot 1 = +\infty.$$

10. $$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = (\infty^0) = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}} = (de\ l'Hospital) e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{)}{x}}{1}} = e^0 = 1.$$

11. $$\lim_{x\to +\infty}\left(e^{x^2}\right)^{\frac{x-1}{x^2+1}} = (\infty^0) = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x-1}{x^2+1}\ln\left(e^{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x-1}{x^2+1}\cdot x^2} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x^3-x^2}{x^2+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2}{x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{X}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{X^2}\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{X\left(1-\frac{1}{X}\right)}{\left(1+\frac{1}{X^2}\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} X} = e^{+\infty} = +\infty.$$

12. $$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = (1^\infty) = \lim_{x\to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x = e^{+\infty} = +\infty.$$

Applicazioni dei teoremi di De l'Hospital

1) Un ulteriore limite notevole

Teorema 6.3.8 – *Si dimostra che:*

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}:\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Dim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}, per\ de\ l'Hospital\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha\cdot 1^{\alpha-1} = \alpha.$$

2) Gerarchia degli infiniti

Teorema 6.3.9 – *Si dimostra che:*

1. $\forall \alpha, \beta > 0: ord(x^\alpha) < ord(e^{\beta x}), per\ x \longrightarrow +\infty;$
2. $\forall \alpha, \gamma > 0: ord(ln^\gamma(x)) < ord(x^\alpha), per\ x \longrightarrow +\infty..$

Quindi:

3. $\forall \alpha, \beta, \gamma > 0: \ ord(ln^\gamma(x)) < ord(x^\alpha) < ord(e^{\beta x}), per\ x \longrightarrow +\infty.$

Dim. 1 - $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\left[e^{\frac{\beta x}{\alpha}}\right]^\alpha} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^{\frac{\beta x}{\alpha}}}\right]^\alpha = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^{\frac{\beta x}{\alpha}}}\right]^\alpha =$

$= (de\ l'hospital) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^{\frac{\beta x}{\alpha}}\frac{\beta}{\alpha}}\right]^\alpha = (\frac{1}{+\infty})^\alpha = 0 \Leftrightarrow ord(x^\alpha) < ord(e^{\beta x}), per\ x \longrightarrow$

$+\infty.$

Dim. 2 - $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{ln^\gamma(x)}{x^\alpha} = (posto\ ln(x) = t \Longrightarrow x = e^t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{t^\gamma}{e^{\alpha t}} = (per\ (1)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ord(ln^\gamma(x)) < ord(x^\alpha), per\ x \longrightarrow +\infty.$

Dim.3 – Conseguenza della (1) e dlla (2).

Funzioni convesse, funzioni concave

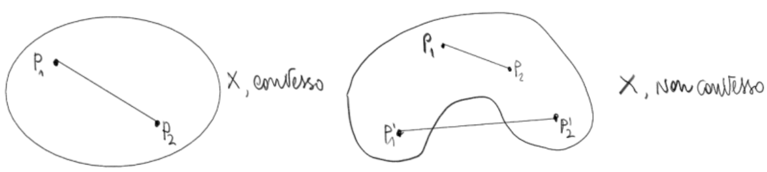
&6.4 – Convessità, concavità di una funzione

Premettiamo le seguenti definizioni.

Def.6.4.1 – (Definizione di insieme convesso, concavo)

Se $X \subset \mathbb{R}^2$*, si dice che:*

- *(X è un insieme convesso)* $\Leftrightarrow (\forall P_1, P_2 \in X: \overline{P_1P_2} \subseteq X).$
- *(X è un insieme concavo)* $\Leftrightarrow (\exists P_1, P_2 \in X: \overline{P_1P_2} \not\subset X).$

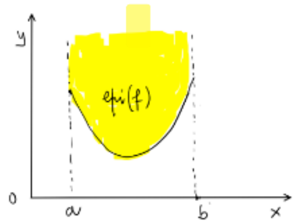


Def.6.4.2 – (Definizione di epigrafo e di sottografico di una funzione)

Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione definita in I intervallo:

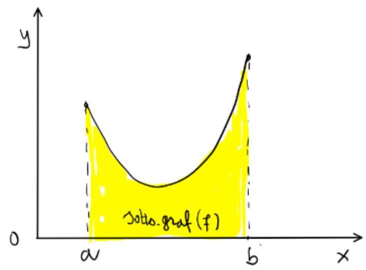
a) si dice epigrafo di f l'insieme $epi(f) \subseteq R^2$ così definito:

$$epi(f) = \{P(x, y) \in R^2 | x \in I \text{ e } y \geq f(x)\}$$



b) Si dice sottografico di f l'insieme sotto(f)$\subseteq R^2$ così definito:

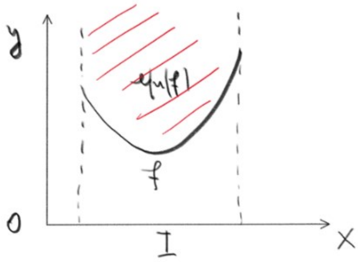
$$sotto(f) = \{P(x, y) \in R^2 | x \in I \text{ e } -f(x) \leq y \leq f(x)\}$$



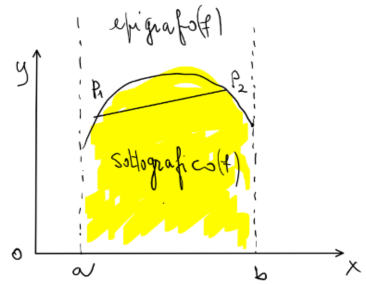
Def.6.4.3.1 – (1ª definizione di funzione convessa/concava)

Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo, si dice che:

a) f è una funzione convessa in I se epi(f) è un insieme convesso;

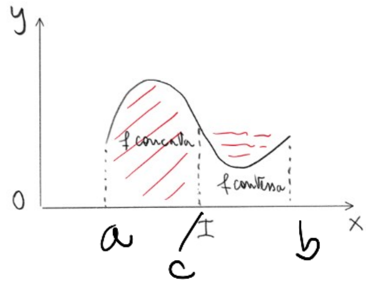


b) f è una funzione concava in I se la funzione $-f$ è convessa in I o, equivalentemente, se il suo sottografico è un insieme convesso:



Nota – Esistono funzioni che non sono né convesse né concave nel dominio.

Un esempio è:



- *f(x) è concava in* $[a, c]$, *convessa in* $[c, b]$.

Nuove definizioni di funzioni convesse/concave

Definizioni equivalenti di funzione convessa/funzione concava sono le seguenti.

Def.6.4.3.2 – (2ª Definizione di funzione convessa/concava)

Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una funzione continua in I intervallo, si dice che:*

a) f *è convessa in I se per ogni coppia di punti* x_1, x_2, *appartenenti ad I, l'arco di curva che ha per estremi i punti* $P_1(x_1, f(x_1)$ *e* $P_2(x_2, f(x_2))$ *è al di sotto della corda che congiunge i punti* $P_1(x_1, f(x_1))$ *e* $P_2\big(x_2, f(x_2)\big)$:

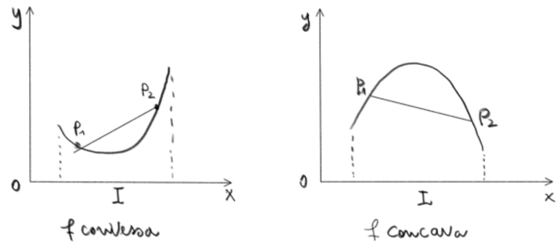
$$(f \text{ è convessa in } I) \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in I \text{ e } \forall x \in [x_1, x_2]: f(x) \leq y_s = m(x - x_1) + y_1)$$

(equazione della secante P_1P_2).

b) f *è concava in I se per ogni coppia di punti* x_1, x_2 *appartenenti ad I l'arco di curva che ha per estremi i punti* $P_1(x_1, f(x_1)$ *e* $P_2(x_2, f(x_2))$ *è al* *di sopra della corda che congiunge i punti* $P_1(x_1, y_1 = f(x_1))$ *e* $P_2(x_2, y_2 = f(x_2))$:

(f è concava in I) $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ *e* $\forall x \in [x_1, x_2]: f(x) \geq y_s = m(x - x_1) + y_1$

(equazione della secante P_1P_2*).*



Prop.6.4.1 – (Caratterizzazione della convessità/concavità delle curve parametrizzate)

Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, *con I intervallo, si dimostra che:*

a) f è convessa (risp. strettamente convessa) in I $\Leftrightarrow$

$\forall x_1, x_2 \in I$ *e* $\forall t \in [0,1]: f\big((1-t)\cdot x_1 + x_2\big) \leq (1-t)\cdot f(x_1) + tf(x_2)$

(risp. $\forall x_1, x_2 \in I$ *e* $\forall t \in [0,1]: f\big((1-t)\cdot x_1 + x_2\big) < (1-t)\cdot f(x_1) + tf(x_2)$*);*

b) f è concava (risp. strettamente concava) in I $\Leftrightarrow$

$\forall x_1, x_2 \in I$ *e* $\forall t \in [0,1]: f\big((1-t)\cdot x_1 + x_2\big) \geq (1-t)\cdot f(x_1) + tf(x_2)$

(risp. $\forall x_1, x_2 \in I$ *e* $\forall t \in [0,1]: f\big((1-t)\cdot x_1 + x_2\big) > (1-t)\cdot f(x_1) + tf(x_2)$*).*

Dim. (a) – Calcoliamo le equazioni parametriche dell'arco di curva compreso fra i punti di ascissa x_1 *e* x_2 *e della secante passante per tali estremi.*

$\forall x \in [x_1, x_2]: x_1 \leq x \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_1 \leq x - x_1 \leq x_2 - x_1 \Rightarrow 0 \leq x - x_1 \leq x_2 - x_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \leq 1$$

Posto $t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, *si ha* $\forall x \in [x_1, x_2]: t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \in [0,1] \ni' t(x_2 - x_1) = x - x_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow tx_2 - tx_1 = x - x_1 \Rightarrow x = x_1 - tx_1 + tx_2 = (1-t)x_1 + tx_2 \Rightarrow x = (1-t)x_1 + tx_2$$

$\Rightarrow \forall x \in [x_1, x_2], \forall t \in [0,1] : f(x) = f\big((1-t)x_1 + tx_2\big).$

(equazione parametrica dell'arco).

Calcoliamo l'equazione parametrica della corda (secante).

L'equazione della retta secante è:

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y = [f(x_2) - f(x_1)]\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + f(x_1)$$

e l'equazione della corda è:

$y - f(x_1) = [f(x_2) - f(x_1)]t \Rightarrow y = f(x_2)t - f(x_1)t + f(x_1) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$

$\Rightarrow\ y = (1-t)f(x_1) + tf(x_2),\ \forall x \in [x_1, x_2], \forall t \in [0,1].$

Quindi:

f è convessa (risp. strettamente convessa) in I $\Leftrightarrow$ *l'arco è al di sotto della corda* $\Leftrightarrow \forall x \in [x_1, x_2], \forall t \in [0,1]$:

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t) \cdot f(x_1) + tf(x_2).$$

In modo analogo si dimostrano gli altri casi.

Def.6.4.3.3 – (3ª definizione di funzione convessa/concava)

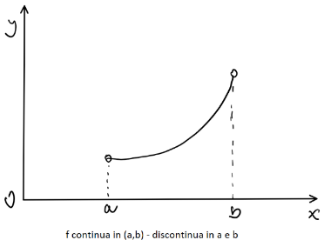
Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$*, derivabile in I intervallo, si dice che:*

a) *f è convessa in I* $\Leftrightarrow \forall x_0 \in I$ *il grafico della funzione è al di sopra della retta tangente nel punto* $P_0(x_0, f(x_0)) \Leftrightarrow\ \forall x_0 \in I: f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

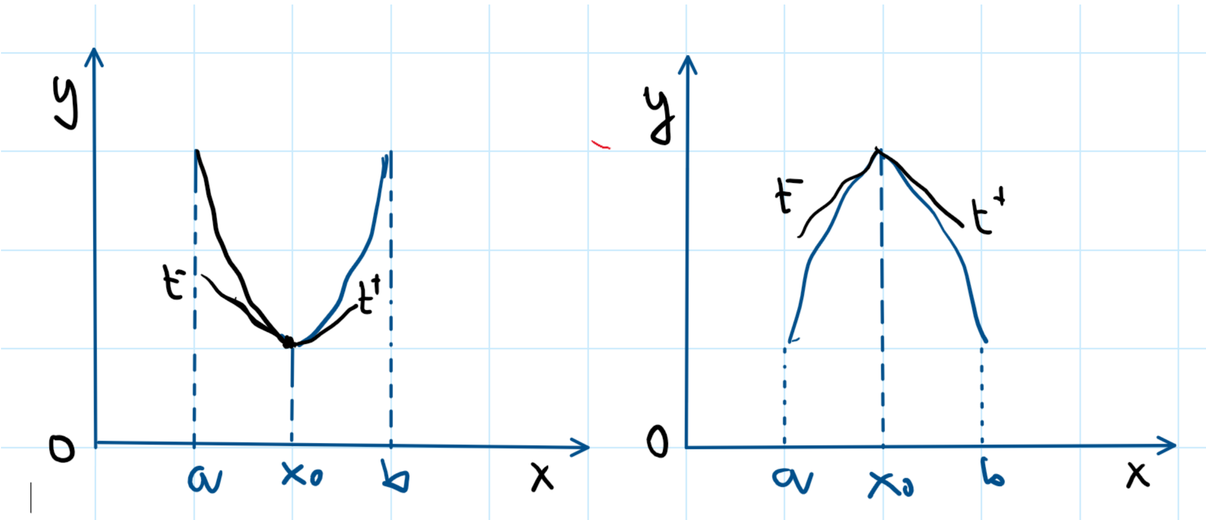
b) *(f è concava in I)* $\Leftrightarrow \forall x_0 \in I$ *il grafico della funzione è al di sotto della retta tangente nel punto* $P_0(x_0, f(x_0)) \Leftrightarrow\ \forall x_0 \in I: f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Osservazione 1 - La funzione lineare $f(x) = ax + b$ *è una funzione sia convessa che concava in ogni intervallo: sia l'epigrafo che il sottografo sono insiemi convessi,*

Osservazione 2 – Ogni funzione convessa/concava in un intervallo è continua in ogni punto interno all'intervallo e può essere discontinua al più negli estremi:



Osservazione 3 - Una funzione convessa/concava in un intervallo può essere non derivabile in qualche punto interno all'intervallo.
Ad esempio, le funzioni rappresentate in figura sono, rispettivamente, convessa e concave in $[a, b]$ *ma non sono derivabili nel punto* x_0 *(punto angoloso):*



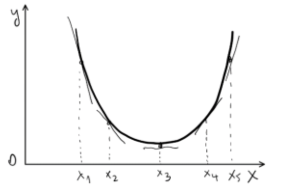
Quanto detto è espresso dalla seguente proprietà.

Prop.6.4.2 – (Proprietà delle funzioni convesse/concave)
Se f è una funzione convessa/concava in un intervallo, si dimostra che:
1. *f è continua in ogni punto interno all'intervallo, fatta al più eccezione per gli estremi;*
2. *f è derivabile a sinistra e a destra in ogni punto interno all'intervallo.*

Teorema 6.4.1 – (C.N.S. – 1° Criterio di convessità/concavità)
Se $f: I \to R$ *è una funzione derivabile in I intervallo, si dimostra che:*

a) *f è convessa in I ⇔ f' è strettamente crescente in I;*

b) *f è concava in I ⇔ f' è strettamente decrescente in I.*



Teorema 6.4.2 (*) – (C.N.S. - 2° Criterio di convessità/concavità)

Se $f: I \to R$ è una funzione derivabile almeno due volte in I intervallo, si dimostra che:

a) *f è convessa in I* $\Leftrightarrow \forall x \in I^{\circ}: f''(x) > 0$;

b) *f è concava in I* $\Leftrightarrow \forall x \in I^{\circ}: f''(x) < 0$.

Dim. (a) C.N.S.

f convessa in I $\Leftrightarrow$ (*per il terema* 6.4.1) $f'(x)$ è *crescente in* $I \Leftrightarrow$

(*per il criterio* 6.3.4 *di monotonia*) $\forall x \in I: f''(x) \geq 0$.

Dim. (b)

f concava in I $\Leftrightarrow$ (*per il terema* 6.4.1) $f'(x)$ è *decrescente in* $I \Leftrightarrow$

(*per il criterio* 6.3.4 *di monotonia*) $\forall x \in I: f''(x) \leq 0$.

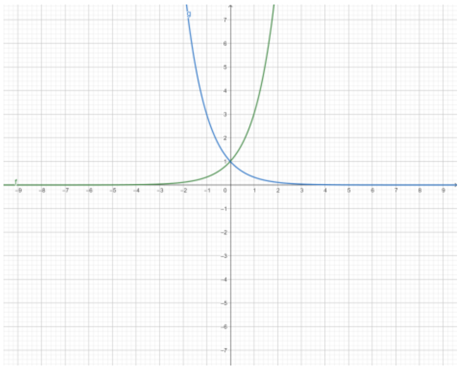
Applicando tale criterio, si dimostra la convessità/concavità delle funzioni elementari.

Esempio 1 – Studiare la convessità della funzione $f(x) = a^x$, *con* $a > 0$.

Soluzione

1. *Se a = 1* $\Leftrightarrow y = 1^x = 1 \Leftrightarrow f(x)$ *è convessa e concava nel dominio X = R;*
2. $\forall 0 < a \neq 1$: $f'(x) = Da^x = a^x \cdot \ln(a) \Rightarrow f''(x) = a^x \cdot \ln^2(a) > 0, \forall x \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (*per il criterio di convessità*) *f(x) è convessa nel dominio X = R.*



Esempio 2 – Studiare la convessità della funzione $f(x) = log_a(x)$.

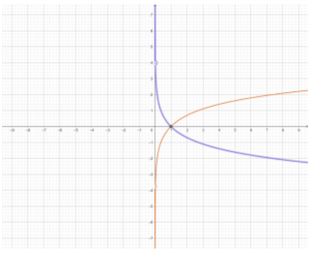
Soluzione

1. Se $0 < a < 1$: $f'(x) = Dlog_a(x) = \frac{1}{x} \cdot log_a(e) \Longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot log_a(e) > 0, \forall x \in X$

$\Longrightarrow$ (per il criterio di convessità) f(x) è convessa nel dominio X = $]0, +\infty[$;

2. Se $a > 1$: $f'(x) = Dlog_a(x) = \frac{1}{x} \cdot log_a(e) \Longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot log_a(e) < 0, \forall x \in X$

$\Longrightarrow$ (per il criterio di convessità) f(x) è concava nel dominio X = $]0, +\infty[$.



Esempio 3 - Studiare la convessità della funzione $f(x) = x^\alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

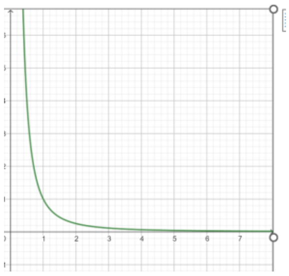
Soluzione

$\forall x \in X =]0, +\infty[: f'(x) = Dx^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \Longrightarrow f''(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1)x^{\alpha-2} \geq 0 \Leftrightarrow$(poiché $x \in X =]0, +\infty[$) $\alpha \cdot (\alpha - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 0 \vee \alpha \geq 1$.

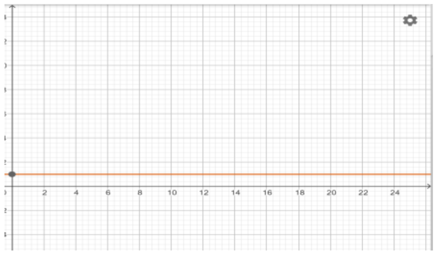
Quindi:

1. Se $\alpha \leq 0 \vee \alpha \geq 1$, $f(x) = x^\alpha$ è convessa in $X =]0, +\infty[$;
2. Se $0 < \alpha < 1$, $f(x) = x^\alpha$ è concava in $X =]0, +\infty[$.

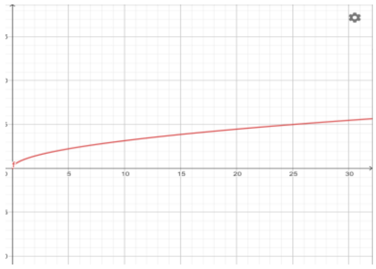
- Per $\alpha < 0$, il grafico è:



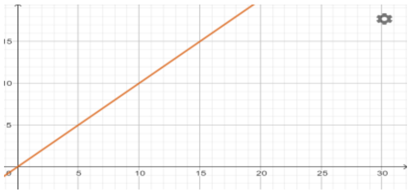
- *per* $\alpha = 0$: $f(x) = x^0 = 1$, *il grafico è:*



- *per* $0 < \alpha < 1$, *il grafico è:*



- *per* $\alpha = 1$, $f(x) = x$, *il grafico è:*



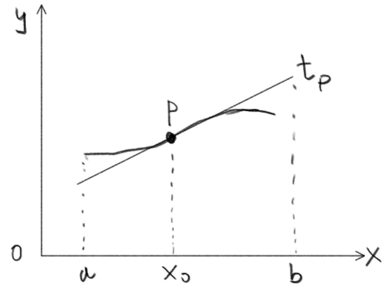
- *per* $\alpha > 1$, *il grafico è:*

Punti di flesso di una funzione

Def.6.4.5 – (Definizione di punto di flesso)

Se $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* $x_0 \in \mathring{X} \ni' \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$, *si dice che*

$(x_0$ *è un punto di flesso per* $f) \Leftrightarrow \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \begin{cases} f \text{ è convessa in } X \cap J^-(x_0), & (\text{risp. concava}) \\ f \text{ è concava in } X \cap J^+(x_0), & (\text{risp. convessa}) \end{cases}$



Nota – Una proprietà dei punti di flesso è che la tangente in tali punti attraversa la curva.

---

o-piccolo di una funzione – Simbolo di Landau

6.5 – Infinitesimi e "o-piccolo" di una funzione

Ricordiamo che una funzione f si dice infinitesima in x_0 *se*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$$

e che, se f e g sono due funzioni infinitesime in x_0, *si dice che f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g in* x_0 *se* $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ciò premesso, possiamo dare la seguente definizione.

Def.6.5.1 – (Definizione di o-piccolo – Simbolo di Landau)

Se f e g sono due infinitesimi per $x \longrightarrow x_0$, *si dice che:*

- *f(x) è un o-piccolo di g(x), per* $x \longrightarrow x_0$ *e si scrive* $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ *f(x) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g(x), ovvero se*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- $f(x) = o(g(x))$ *si dice "simbolo di Landau".*

Esempio - Verificare che sen$(x^2) = o(\ln(1+x))$, *per* $x \to 0$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x^2)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen(x^2)}{x^2}x^2}{\frac{\ln(1+x)}{x}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen(x^2)}{x^2}x}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1\cdot 0}{1} = 0.$

Si osservi che $o(g(x))$ *non rappresenta una sola funzione infinitesima (ad esempio f(x)) ma una classe di funzioni infinitesime tutte di ordine superiore a g(x): o(g(x)) è l'insieme delle infinite funzioni che sono un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g(x), per* $\to x_0$.

$$o(g(x)) = \left\{ f(x): X \to R \,\middle|\, \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right\}.$$

Esempio – Verificare che $x^2, x^3, x^4, \ldots, x^n, \ldots \in o(x)$, *per* $x \to 0$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$
- …
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} = 0^{n-1} = 0.$

Pertanto, per $x \to 0$, *o(x),* $= \{x^2, x^3, \ldots, x^n, ..\}$ *è una classe di funzioni infinitesime in* $x = 0$.

Proprietà degli o-piccolo

Prop.6.5.1 – (Proprietà degli o-piccolo)

Se g(x) è una funzione infinitesima per $x \to x_0$, *si ha:*

1. $\lim_{x\to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$ *(Proprietà fondamentale);*
2. $o(c \cdot g(x)) = c \cdot o(g(x)) = o(g(x))$; *(moltiplicazione per una costante)*

   Esempio – o(2sen(x)) = o(sen(x); $2 \cdot o(sen(x)) = o(sen(x))$.

3. $f(x) = o(g(x)) \Longrightarrow [f(x)]^h = o(g^h(x)), \forall h > 0$; *(Potenza di un o-piccolo)*

Esempio – $(1 - cos(x)) = o(x) \Longrightarrow (1 - \cos x)^2 = o(x^2)$.

4. $f(x) \cdot o\big(g(x)\big) = o(f(x) \cdot g(x))$; *(Prodotto fra un infinitesimo e un o-piccolo)*

   Esempio – $x \cdot o(x) = o(x^2)$.

5. $o\big(f(x)\big) \cdot o\big(g(x)\big) = o(f(x) \cdot g(x))$; *(Prodotto fra o-piccolo)*

   Esempio – $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

6. $f(x) \sim f_1(x) \Longrightarrow o\big(f(x)\big) = o(f_1(x))$; *(1ª Equivalenza asintotica)*

   Esempio - $sen(x) \sim x \Leftrightarrow o\big(sen(x)\big) = o(x)$.

7. $se \begin{cases} f(x) \sim_{x_0} f_1(x) \\ g(x) \sim_{x_0} g_1(x) \\ f(x) = o\big(g(x)\big), per\ x \longrightarrow x_0 \end{cases} \Longrightarrow f_1(x) = o\big(g_1(x)\big), per\ x \longrightarrow x_0.$

(2ª Equivalenza asintotica)

Queste proprietà sono molto utili nel calcolo dell'approssimazione di una funzione.

Approssimazione di una funzione – Formula di Taylor

&6.6 – Approssimazione lineare di una funzione (1ª approssimazione)

Sia $y = f(x)$ *è una funzione derivabile in* x_0 *e sia*

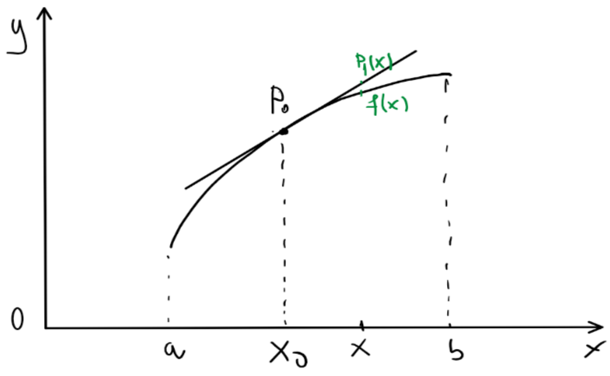
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0*, dove il 2° membro*

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

è un polinomio di 1° grado.

In generale, $\forall x \neq x_0$*, risulta* $f(x) \neq P_1(x)$*: tuttavia, come mostra il grafico seguente, nei punti vicini a* x_0*, il polinomio* $P_1(x)$ *fornisce un'approssimazione dei valori di f in tali punti:*



Sussiste il seguente fondamentale teorema.

Teorema 6.5.1 (*) - (Approssimazione lineare di una funzione derivabile)

Se f è una funzione derivabile in x_0, si dimostra che:

$\exists | P_1(x) = a_0 + b_0(x - x_0) \ni' \ f(x) - P_1(x) = R_1(x_0, x)$, *con* $R_1(x_0, x) = o(x - x_0)$.

Dim. (a) Esistenza di $P_1(x)$

Sia $P_1(x) = a_0 + b_0(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *e dimostriamo che:*

$$R(x) = f(x) - P_1(x) = o(x - x_0) \Leftrightarrow R(x) = \ o(x - x_0) \ni' \ f(x) = P_1(x) + R(x).$$

Infatti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow R(x) = o(x - x_0).$$

a) Dimostriamo che $P_1(x) = a_0 + b_0(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *è l'unico polinomio tale che* $f(x) - P_1(x) = o(x - x_0)$.

Supponiamo che $\bar{P}(x) = a + b(x - x_0)$ *sia un ulteriore polinomio tale che*

$f(x) = \bar{P}(x) + o(x - x_0)$+

e dimostriamo che $\bar{P}(x) = P_1(x)$.

Poiché $f(x) = \bar{P}(x) + o(x - x_0) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [\bar{P}(x) + o(x - x_0)] = \lim_{x \to x_0} [a + b(x - x_0) + o(x - x_0)] \Longrightarrow$ (poichè f e $\bar{P}$ sono continui in x_0) $f(x_0) = a + b(x_0 - x_0) + 0 \Longrightarrow f(x_0) = a \Longrightarrow a = f(x_0) \Longrightarrow \bar{P}(x) = f(x_0) + b(x - x_0)$

D'altra parte, poiché:

$$f(x) - \bar{P}(x) = o(x - x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \bar{P}(x)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + b(x - x_0))}{x - x_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - b(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{b(x - x_{0)}}{x - x_0} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - b \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b \Leftrightarrow f'(x_0) = b.$$

Pertanto:

$\bar{P}(x) = a + bx = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = P_1(x) \Longrightarrow \bar{P}(x) = P_1(x)$.

Dunque, se f è una funzione derivabile in x_0, allora:

$\exists | P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ni' \; f(x) = P_1(x) + R_1(x_0, x)$,

con $R_1(x_0, x) = o(x - x_0)$.

- $f(x) = P_1(x) + R_1(x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, con $R_1(x_0, x) = o(x - x_0)$, si dice sviluppo di Taylor di punto iniziale x_0 e ordine $n = 1$;
- $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si dice polinomio di Taylor di punto iniziale x_0 e ordine $n = 1$: è un polinomio che, per valori di x vicini a x_0, approssima bene i valori di $f(x)$;
- $f(x) = P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si dice approssimazione lineare di f in x_0;
- $R(x) = f(x) - P_1(x)$ è l'errore che si commette assumendo

$$f(x) = P_1(x), \text{ per } x \to x_0.$$

Si osservi che $P_1(x)$ è tale che per $x = x_0$: $\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) \\ P_1'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$.

In particolare, se $x_0 = 0$, l'approssimazione lineare diventa

$$f(x) = P_1(x) + o(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + o(x-0) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x)$$

e lo sviluppo si dice *sviluppo di Mac Laurin*. (sviluppo del 1° ordine).

Esempio 1 - Scrivere l'approssimazione lineare di punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$ e calcolare $\sqrt{1.02}$.

Soluzione

a) L'approssimazione lineare di punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ è:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x),$$

dove:

- $f(0) = (1+0)^\alpha = 1$;
- $f'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$.

Quindi, $f(x) = 1 + \alpha x + o(x)$.

b) Calcolare $\sqrt{1.02} = \sqrt{1+0.02}$

$\sqrt{1.02} = \sqrt{1+0.02} = f(0{,}02) = 1 + \frac{1}{2}(0.02) + o(x) = 1 + 0.01 + o(x) = 1.01 + o(x) \Rightarrow \sqrt{1.02} \cong 1.01$. (valore calcolatrice: 1.0099)

Esempio 2 - Scrivere l'approssimazione lineare di punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = sen(x)$ e calcolare $sen(0.05)$.

Soluzione

a) L'approssimazione lineare di sen(x) di punto iniziale $x_0 = 0$ è:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x),$$

dove:

- $f(0) = sen(0) = 0$;

- $f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1;$

Quindi:

$sen(x) = 0 + 1 \cdot x + o(x) = x + o(x) \Rightarrow sen(x)) \approx x, per\ x \longrightarrow 0.$

b) Calcoliamo $sen(0.05)$:

$f(x) = sen(x) = x + o(x) \Rightarrow f(0.05) = 0.05 + o(x) = 0.05 + o(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ sen(0.05) \cong 0.05.$ *(valore calcolatrice:* $sen(0.05) = 0.0499$)

Esempio 3 – Determinare l'approssimazione lineare di punto iniziale $x_0 = 0$ *della funzione* $f(x) = cos(x)$ *e calcolare* $\cos(0.08)$.

Soluzione

- *L'approssimazione lineare di cos(x) di punto iniziale* $x_0 = 0$ *è:*

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x)$$

dove:

- $f(0) = cos(0) = 1;$
- $f'(x) = -sen(x) \Rightarrow f'(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0.$

Quindi:

$cos(x) = 1 - 0 \cdot x + o(x) = 1 + o(x) \Rightarrow \cos(x)) \approx 1, per\ x \longrightarrow 0$

- *Calcoliamo* $\cos(0.08)$:

$f(x) = cos(x) = 1 + o(x) \Rightarrow \cos(0.08) = 1 + o(x) = 1 + o(x) \Rightarrow \cos(0.08) \cong 1$
(valore della calcolatrice 0.9968)

Esempio 4 - Scrivere l'approssimazione lineare di punto iniziale $x_0 = 0$ *della funzione* $f(x) = \log(1 + x)$ *e calcolare log(1.02).*

Soluzione

a) L'approssimazione lineare di log(1+x) di punto iniziale $x_0 = 0$ *è:*

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x),$$

dove:

- $f(0) = log(1 + 0) = \log(1) = 0;$
- $f'(x) = \frac{1}{x+1} \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1.$

Quindi:

$ln(1 + x) = 0 + 1 \cdot x + o(x) = x + o(x) \Longrightarrow \ln(1 + x) \cong x,$ *per* $x \longrightarrow 0.$

b) Calcolare $\ln(1.02)$*:*

$\ln(1.02) = \ln(1 + 0.02) = 0.02 \Longrightarrow \ln(1.02) \cong 0.02.$ *(valore calcolatrice: 0.0198)*

Esempio 5 - Scrivere l'approssimazione lineare di punto iniziale $x_0 = 0$ *della funzione* $f(x) = e^x$ *e calcolare* $e^{0.2}$.

Soluzione

a) L'approssimazione lineare di punto iniziale $x_0 = 0$ *è:*

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x),$$

dove:

- $f(0) = e^0 = 1;$
- $f'(x) = e^x \Longrightarrow f'(0) = e^0 = 1.$

Quindi:

$e^x = 1 + 1 \cdot x + o(x) = 1 + x + o(x).$

b) Calcoliamo $e^{0.2}$:

$e^{0.2} = 1 + 0.2 + o(x) = 1.2 + o(x) \Longrightarrow e^{0.2} \approx 1.2.$ *(valore calcolatrice:* 1.221)

(II) Approssimazione di ordine n - Formula di Taylor con il resto di Peano

---

Più in generale, se una funzione è derivabile almeno n volte in un punto, è possibile approssimare la funzione con un polinomio di grado n.

Sussiste il seguente fondamentale teorema.

Teorema 6.5.2 (*) – (Formula di Taylor di ordine n con il resto di Peano)

Se $f: I \rightarrow R$ è una funzione derivabile almeno n-volte in $x_0 \in I$, si dimostra che:

$$\exists | P_n(x) \ni' \forall x \in I: f(x) - P_n(x) = R_{n,x_0}(x),\ con\ R_{n,x_0}(x) = o((x-x_0)^n).$$

Dim. Dimostriamo il teorema nel caso n = 2, ovvero che f è una funzione derivabile almeno due volte nel punto $x_0 \in I$:

$$\exists | P_2(x),\ polinomio\ di\ grado\ n = 2,\ \ni' \forall x \in I: f(x) = P_2(x) + R_{2,x_0}(x),$$

con $R_{2,x_0}(x) = o((x-x_0)^2)$.

a) Esistenza

Dimostriamo che $\exists P_2(x) \ni' \forall x \in I: f(x) - P_2(x) = R_2(x) = 0((x-x_0)^2)$.

1. $\forall x \in I$, Si ha:

$$f(x) = f(x) + f(x_0) - f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$= \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\right] + \left[f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\right].$$

Se diciamo

- $P_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

e poniamo

- $R_{2,x_0}(x) = \left[f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\right],$

si ha che:

$\exists P_2(x) \ni' \forall x \in I: f(x) - P_2(x) = R_2(x)$.

2. Dimostriamo che $R_{2,x_0}(x) = ((x - x_0)^2) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^2} = 0$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= (per\ de\ l'Hopital) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - 0 - \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot 1 - \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot 2\cdot (x-x_0)}{2(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)\cdot(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} - \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)}{2(x-x_0)}\right] =$$

$= \lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} - \frac{f''(x_0)}{2(x-x_0)}\right] = \frac{f''(x_0)}{2(x-x_0)} - \frac{f''(x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{f''(x_0)-f''(x_0)}{2(x-x_0)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^2} = 0 \Leftrightarrow$
$R_{2,x_0}(x) = o\big((x-x_0)^2\big)$.

Dunque, $\exists P_2(x)\ e\ \exists R_{2,x_0}(x) = o((x-x_0)^2 \ \ni'\ f(x) = P_2(x) + R_{2,x_0}(x)$.

b) *Dimostriamo l'unicità di* $P_2(x) \ni' f(x) = P_2(x) + R_{2,x_0}(x)$.

Supponiamo che $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ *sia un ulteriore polinomio tale che*

$$f(x) = P(x) + R(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x-x_0)^2, \text{con } R(x) = o((x-x_0)^2).$$

Allora si ha:

$$f(x) = P(x) + R(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}[P(x)+R(x)] = \lim_{x\to x_0}[P(x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) = P(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 \Rightarrow f(x_0) - a_0 = a_1x_0 + a_2x_0^2 \quad (1)$$

Quindi:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x-x_0)^2) - f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{(a_0 - f(x_0)) + a_1x + a_2x^2 + o(x-x_0)^2}{x-x_0} = \big(per\ la\ (1)\big) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{(-a_1x_0 - a_2x_0^2) + a_1x + a_2x^2 + o(x-x_0)^2}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{a_1(x-x_0) + a_2(x^2-x_0^2) + o(x-x_0)^2}{x-x_0} =$$

$= \lim_{x \to x_0} [a_1 + a_2(x + x_0) + \frac{o(x-x_0)^2}{x-x_0}] = a_1 + 2a_2x_0 \Longrightarrow f'(x_0) = a_1 + 2a_2x_0$. *(2)*

Combinando la (1) e la (2), si ha:

$$\begin{cases} f(x_0) - a_0 = a_1x_0 + a_2x_0^2 \\ f'(x_0) = a_1 + 2a_2x_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_0 = f(x_0) - (f'(x_0) - 2a_2x_0)x_0 - a_2x_0^2 = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + 2a_2x_0^2 - a_2x_0^2 \\ a_1 = f'(x_0) - 2a_2x_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + a_2x_0^2 \\ a_1 = f'(x_0) - 2a_2x_0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + a_2x_0^2 + (f'(x_0) - 2a_2x_0)x + a_2x^2 =$

$= f(x_0) - f'(x_0)x_0 + a_2x_0^2 + f'(x_0)x - 2a_2x_0\,x + a_2x^2 =$

$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_{0)} + a_2(x_0^2 - 2x_0\,x + x^2) =$

$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_{0)} + a_2(x - x_0)^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_{0)} + a_2(x - x_0)^2 \ni' R'_{2,x_0}(x) = f(x) - P(x) = o(x - x_0)^2$. *(3)*

Calcoliamo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R'_{2,x_0}}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_{0)} + a_2(x - x_0)^2\right)}{(x - x_0)^2} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - a_2(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = (per\ de\ l'Hospital)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a_2(x - x_0)}{2(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} - \frac{2a_2(x - x_0)}{2(x - x_0)}\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} - a_2\right] = \frac{1}{2}f''(x_0) - a_2.$$

Poiché $R'_{2,x_0}(x) = o(x - x_0)^2 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{R'_{2,x_0}}{(x-x_0)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f''(x_0) - a_2 = 0 \Longrightarrow a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$.

Sostituendo nella (3), si ha:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_{0)} + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \Longrightarrow P(x) = P_2(x).$$

In maniera analoga, si dimostra la formula di Taylor di ordine n con resto di Peano (vedi Appendice).

In tal caso:

- $f(x) = P_n(x) + R_{n,x_0}$, *con* $R_{n,x_0} = o((x - x_0)^n)$

dove $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

si dice sviluppo di Taylor di ordine n e con il resto di Peano della funzione f;

- $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ *si dice polinomio di Taylor di punto iniziale* x_0 *e ordine n;*
- $R_{n,x_0}(x)$ *si dice resto di Peano:* $R(x)$ *rappresenta l'errore che si commette se si approssima il valore di f(x) con il valore del polinomio di Taylor* $P_n(x)$.

Poiché $R(x) = o(x-x_0)^n$, *questo vuol dire che quanto più x è vicino a* x_0 *tanto più l'errore R(x) è piccolo.*

- *Se* $x_0 = 0$, *il polinomio e lo sviluppo di Taylor si dicono di Mac Laurin e in tal caso è:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Sviluppo di Mac Laurin con il resto di Peano di alcune funzioni elementari

Calcolare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine n e con il resto di Peano delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = e^x$

Scriviamo lo sviluppo di Mac Laurin di punto iniziale $x_0 = 0$ *e di ordine n:*

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- $f(0) = e^0 = 1;$
- $f'(x) = De^x = e^x \Longrightarrow f'(0) = 1;$

- $f''(x) = Df'(x) = De^x = e^x \Longrightarrow f''(0) = 1;$
- $f^{(n)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(0) = 1.$

Quindi:

- $P_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$ *è il polinomio di Mac Laurin di* e^x;
- $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$ *è lo sviluppo di Mac Laurin di* e^x*, con il resto di Peano .*

2. $f(x) = sen(x)$

Scriviamo lo sviluppo di Mac Laurin di sen(x):

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- $f(0) = sen(0) = 0;$
- $f'(x) = Dsen(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(0) = \cos(0) = 1;$
- $f''(x) = Df'(x) = Dcos(x) = -sen(x) \Longrightarrow f''(0) = -sen(0) = 0;$
- $f'''(x) = D\big(-sen(x)\big) = -\cos(x) \Longrightarrow f'''(0) = -cos(0) = -1;$
- $f^{(IV)}(x) = D\big(-cos(x)\big) = sen(x) \Longrightarrow f^{(IV)}(0) = sen(0) = 0;$
- $f^{(V)}(x) = D\big(sen(x)\big) = cos(x) \Longrightarrow f^{(V)}(0) = cos(0) = 1;$
- $f^{(VI)}(x) = D\big(cos(x)\big) = -sen(x) \Longrightarrow f^{(VI)}(0) = -sen(0) = 0;$
- $f^{(V)}(x) = D\big(-sen(x)\big) = -cos(x) \Longrightarrow f^{(V)}(0) = -cos(0) = -1;$
- $\ldots$

Quindi:

$$P_n(x) = 0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{0}{2!}\cdot x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

- $P_n(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ *è il polinomio di Mac Laurin di sen(x);*
- *lo sviluppo di Mac Laurin di sen(x) è:*

$$sen(x) = x^1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+2}).$$

3. $f(x) = cos(x)$

Scriviamo lo sviluppo di Mac Laurin:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- $f(0) = cos(0) = 1;$
- $f'(x) = Dcos(x) = -sen(x) \Longrightarrow f'(0) = -sen(0) = 0;$
- $f''(x) = Df'(x) = D(-sen(x)) = -cos(x) \Longrightarrow f''(0) = -cos(0) = -1;$
- $f'''(x) = D\big(-cos(x)\big) = sen(x) \Longrightarrow f'''(0) = sen(0) = 0;$
- $f^{(IV)}(x) = D\big(sen(x)\big) = cos(x) \Longrightarrow f^{(IV)}(0) = cos(0) = 1;$
- $f^{(V)}(x) = D\big(cos(x)\big) = -sen(x) \Longrightarrow f^{(V)}(0) = -sen(0) = 0;$
- $f^{(VI)}(x) = D\big(-sen(x)\big) = -cos(x) \Longrightarrow f^{(VI)}(0) = -cos(0) = -1;$
- …

Quindi:

- *il polinomio di Mac Laurin di cos(x) è:*

$$P_n(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{0}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_n(x) = 1 - \tfrac{1}{2!} \cdot x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \cdots + \tfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n};$$

- *lo sviluppo di Mac Laurin è:*

$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

Osservazione - Lo sviluppo di Mac Laurin di una funzione dispari (come il seno) contiene solo potenze dispari, mentre lo sviluppo delle funzioni pari (come coseno) contiene solo potenze pari.

4. $f(x) = tg(x)$.

$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$

- $f(0) = tg(0) = 0;$
- $f'(x) = Dtg(x) = 1 + tg^2(x) \Longrightarrow f'(0) = 1;$

- $f''(x) = D(1 + tg^2(x)) = 2tg(x)(1 + tg^2(x)) \Longrightarrow f''(0) = 0;$
- $f'''(x) = D(2tg(x)(1 + tg^2(x))) = 2\big(1 + tg^2(x)\big)\big(1 + 3tg^2(x)\big) \Longrightarrow f'''(0) = 2;$
- ...

$$P_n(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$$

Quindi:

- *Lo sviluppo di Mac Laurin di ordine n di tg(x) è:*

$$tg(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots + o(x^{2n+1}).$$

Ad esempio, lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di tg(x) è:

$$tg(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

5. $f(x) = \log(1 + x)$

Scriviamo il polinomio di Mac Laurin di ordine n:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- $f(0) = log(1 + 0) = \log(1) = 0;$
- $f'(x) = Dlog(1 + x) = \frac{1}{1+x} \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1;$
- $f''(x) = Df'(x) = D\frac{1}{1+x} = -\frac{1}{(1+x)^2} \Longrightarrow f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1;$
- $f'''(x) = D\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) = \frac{1}{(1+x)^4}2(1 + x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Longrightarrow f'''(0) = 2;$
- $f^{(IV)}(x) = D\left(\frac{2}{(1+x)^3}\right) = -\frac{2}{(1+x)^6}3(1 + x)^2 = -\frac{6}{(1+x)^4} \Longrightarrow f^{(IV)}(0) = -6;$
- $f^{(V)}(x) = D\left(-\frac{6}{(1+x)^4}\right) = +\frac{6}{(1+x)^8}4(1 + x)^3 = \frac{24}{(1+x)^5} \Longrightarrow f^{(V)}(0) = 24;$

Quindi:

- *il polinomio di Mac Laurin di* $\log(1 + x)$ *è*

$$P_n(x) = 0 + \frac{1}{1!}x^1 - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \frac{24}{5!}x^5 - \cdots. + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n =$$

$$= x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots. + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n = x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots. + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n \Longrightarrow P_n(x) = x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots. + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n;$$

- *lo sviluppo di Mac Laurin è:*

$$log(1+x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n + o(x^n).$$

6. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

Scriviamo il polinomio di Mac Laurin:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- $f(0) = (1+x)^{\alpha} = 1;$
- $f'(x) = D(1+x)^{\alpha} = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha;$
- $f''(x) = Df'(x) = D[\alpha(1+x)^{\alpha-1}] = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1);$
- $f'''(x) = D[\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}] = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \Rightarrow f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2);$
- ...

Quindi, il polinomio di Mac Laurin è:

$$P_n(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x^1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots . + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n =$$

$$= x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots . + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots . + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n$$

e lo sviluppo di Mac Laurin è:

$$(1+x)^{\alpha} = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots . + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n + o(x^n).$$

Tabella - Sviluppi di Mac Laurin di ordine n	
e^x	$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
$sen(x)$	$sen(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+2})$
$cos(x)$	$cos(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+1})$

$tg(x)$	$tg(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots + o(x^{2n+1})$
$log(1+x)$	$log(1+x) = x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$(1+x)^\alpha = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots. + \frac{(-1)^{n+1}}{(n)!}x^n + o(x^n)$

Sviluppi di Taylor e proprietà degli o-piccolo nell' addizione e nella moltiplicazione

&6.6 – Operazioni con gli $o(x^n)$ nello sviluppo di Taylor

Ulteriori proprietà degli o-piccolo, molto utili negli sviluppi di Taylor, sono espresse nella seguente proposizione.

Prop.6.6.1 – Si dimostra che:

1. $\forall c \in R: c \cdot o(x^n) = o(c \cdot x^n) = o(x^n)$;

<u>(Le costanti moltiplicative sono irrilevanti)</u>

2. $\forall m, n \in N \ni' m < n: o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$;
3. $\forall n \in N: o(x^{n+k}) + o(x^n) = o(x^n)$.

<u>Ovvero, gli infinitesimi di ordine maggiore sono irrilevanti (trascurabili).</u>

4. $x^k \cdot o(x^n) = o(x^{n+k})$;
5. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$.

Esempio 1 – Calcolare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine $n = 3$ *della funzione* $e^x \cdot \cos(x)$

Soluzione

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$;
- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)$.

Quindi:

$e^x \cdot \cos(x) = \left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right] = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) + x - \frac{1}{2!}x^3 + xo(x^3) + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{2!}x^2\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \cdot o(x^3) + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{3!}x^3\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \cdot o(x^3) + o(x^3) - \frac{1}{2!}x^2 \cdot o(x^3) + o(x^3) \cdot o(x^3) =$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) + x - \frac{1}{2!}x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3!}o(x^6) + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{12}x^5 +$$

$$+ \frac{1}{3!}o(x^6) + o(x^3) - \frac{1}{2!}o(x^5) + o(x^6) = \left(\textit{poch}è\ \frac{1}{4}x^4 = o(x^3), \frac{1}{12}x^5 = o(x^3)\right) =$$

$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

Esempio 2 - Sviluppare $sen^2(x)$ *fino al 7° ordine.*

Soluzione

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) \Rightarrow sen^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)\right)^2 =$$

$= (trascurando\ gli\ infinitesimi\ di\ ordine\ maggiore\ di\ 7) =$

$$= x^2 + \frac{x^6}{(3!)^2} - 2\frac{x^4}{3!} + 2\frac{x^6}{5!} + o(x^7) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^7).$$

Esempio 3 – Utilizzando lo sviluppo di Taylor, calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x) - x}{x^3}$

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}.$$

2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{sen^2(x)}\right)$

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{sen^2(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2(x)-x^2}{x^2sen^2(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\frac{x^4}{3}+0(x^4)-x^2}{x^2\left(x+o(x)\right)^2}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{x^4}{3}+0(x^4)}{x^2(x^2+2x\cdot o(x)+o(x^2))}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{x^4}{3}+0(x^4)}{x^4+o(x^4)+o(x^4)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{x^4}{3}+0(x^4)}{x^4+o(x^4)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{3}+\frac{0(x^4)}{x^4}}{1+\frac{o(x^4)}{x^4}}\right)=\frac{-\frac{1}{3}}{1}=-\frac{1}{3}.$$

3. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\cos(x)}{x^3}+\frac{sen(3x)}{3x^4}\right]=$

Soluzione - $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\cos(x)}{x^3}+\frac{sen(3x)}{3x^4}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x^3-3xcos(x)+sen(3x)}{3x^4}\right]=$

(*poiché* $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\Longrightarrow xcos(x)=x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)$) $=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x^3-3\left[x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)\right]+sen(3x)}{3x^4}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x^3-3x+\frac{3x^3}{2}+o(x^4)+sen(3x)}{3x^4}\right]=$$

(*poiché* $sen(3x)=3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o((3x)^4)$ $=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x^3-3x+\frac{3x^3}{2}+o(x^4)+3x-\frac{1}{3!}27x^3+o(x^4)}{3x^4}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x^3-3x+\frac{3x^3}{2}+o(x^4)+3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^4)}{3x^4}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x^4)+o(x^4)}{3x^4}\right]=$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\frac{o(x^4)}{3x^4}\right] = 0.$$

(I) Sviluppo di Taylor con il resto di Lagrange

&6.7 – Sviluppo di Taylor con il resto di Lagrange

Un secondo sviluppo è lo sviluppo di Taylor con il resto di Lagrange.

Prop.6.7.1 – (Formula di Taylor con il resto di Lagrange)

Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ *è una funzione derivabile n+1 volte in* $[a, b]$ *e se* $x_0 \in [a, b]$*, si dimostra che*

$$\forall x \in [a, b], \exists c \in]a, b[\text{ tale che } f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

dove:

- $P_n(x)$ *è il polinomio di Taylor di punto iniziale* x_0 *e ordine n;*
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ *è un* $o((x - x_0)^n)$ *detto resto di Lagrange*

e rappresenta è l'errore che si commette approssimando f(x) con il polinomio di Taylor $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Prop.6.7.2 – (Proprietà del resto di Lagrange)

Se indichiamo con M_{n+1} *un numero reale tale che*

$$\forall c \text{ compreso fra } x_0 \text{ e } x \text{ risulta } f^{(n+1)}(c) \le M_{n+1},$$

si ha che:

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \le M_{n+1} \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \Longrightarrow \varepsilon_{max} = M_{n+1} \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ *è l'errore massimo che si commette assumendo* $f(x) = P_n(x)$*, trascurando* $R_n(x)$.

Osservazione – La differenza fra le approssimazioni con il resto di Peano e con il resto di Lagrange, è che la formula di Taylor con il resto *di Peano è un'approssimazione solo qualitativa di f(x) perché non fornisce alcuna informazione sull'errore che si commette assumendo* $f(x) = P_n(x)$, *mentre la formula di Taylor con il resto di Lagrange fornisce un'informazione sull'errore che si commette quando si assume* $f(x) = P_n(x)$.

Esempio 1– Calcolare l'errore che si commette assumendo $sen(1^r) = P_3(1)$.

Soluzione

Il polinomio di Mac Laurin di ordine $n = 3$ *è:*

$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} x^k = x^1 - \frac{1}{3!}x^3 \Rightarrow sen(1) = P_3(1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.8\overline{3}$.

Calcoliamo l'errore $\varepsilon = M_{n+1} \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Poiché $\forall n \in N: f^{(n)}(x) = \pm sen(x)$ *o* $\pm \cos(x) \Rightarrow \forall c \in [x_0, x] = [0,1]: \left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1 \Rightarrow \exists M_{n+1} = 1 \ni' \forall c \in [0,1]: |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}\right| \leq M_{n+1} \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} =$

$= \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$.

Per $n = 3$, *si ha*: $\varepsilon_{max} = M_{n+1} \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 1 \frac{(1-0)^4}{4!} = 1 \cdot \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 0.041$ *è l'errore massimo che si commette (errore sulla 2ª cifra decimale) assumendo* $sen(1) = 0.83$. $(sen(1) = 0.083 \pm 0.04 = [0.79, 0.87])$ *(valore calcolatrice: 0.84)*

Esempio 2 – Calcolare $\cos(1)$ *con tre cifre esatte (errore sulla 4ª cifra)*

Soluzione

$\forall n \in N: f^{(n)}(x) = D^{(n)}(\cos(x)) = \begin{cases} \pm sen(x) \\ \pm \cos(x) \end{cases} \Rightarrow \forall c \in [0,1]: \left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1 \Rightarrow M_{n+1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |R_n(x)| \leq M_{n+1} \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 1 \cdot \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$. *(errore massimo)*

n	1	2	3	4	5	6
(n+1)!	2	6	24	120	720	5040

$\frac{1}{(n+1)!}$	$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{1}{6}=0.166\ldots$	$\frac{1}{24}=0.041\ldots$	$\frac{1}{120}=0.0083..$	$\frac{1}{720}=0.0013..$	$\frac{1}{5040}=0.0002..$

L'errore è sulla 4° cifra (3 cifre decimali esatte) per $n = 6$.

Calcoliamo $\cos(1) = P_6(1)$.

- $f(0) = \cos(0) = 1$;
- $f'(x) = D\cos(x) = -sen(x) \Longrightarrow f'(0) = -sen(0) = 0$;
- $f''(x) = D\big(-sen(x)\big) = -\cos(x) \Longrightarrow f''(0) = -\cos(0) = -1$;
- $f'''(x) = D(-\cos(x)) = sen(x) \Longrightarrow f'''(0) = sen(0) = 0$;
- $f^{IV}(x) = Dsen(x) = \cos(x) \Longrightarrow f^{IV}(0) = \cos(0) = 1$;
- $f^{V}(x) = D\cos(x) = -sen(x) \Longrightarrow f^{V}(0) = -sen(0) = 0$;
- $f^{VI}(x) = D\big(-sen(x)\big) = -\cos(x) \Longrightarrow f^{VI}(0) = -\cos(0) = -1$.

Quindi:

$$\cos(x) = P_6(x) = \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$
$$+\frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos(1) = 1 - \tfrac{1}{2!}1^2 + \tfrac{1}{4!}1^4 - \tfrac{1}{6!}1^6 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{720} = 0.54027 = 0.540.$$

(Valore calcolatrice: 0.540)

Esempio 3 - Calcolare e^2 con due cifre decimali esatte (errore sulla 3ª cifra)

Soluzione

Lo sviluppo di Mac Laurin con il resto di Lagrange di e^x è:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

dove $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \varepsilon$ *è l'errore che si commette assumendo*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

$\forall x \in R: f^{(n+1)}(x) = D^{(n+1)}(x) = e^x \Rightarrow \forall c \in [0,2]: f^{(n+1)}(c) = e^c \leq e^2 \leq 9 = M_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow |R_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 9 \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ *(errore massimo).*

Per $x = 2$, *l'errore massimo che si commette nello sviluppo di ordine n, è:*

$$\varepsilon_{max} = 9 \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

n	1	2	3	4	5	6	7		8	9
(n+1)!	2	6	24	120	720	5040	40320		362888	36288 8
$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$	$\frac{2^2}{2} = 2$	$\frac{2^3}{6} = 1.33$	$\frac{2^4}{24} = 0.66$	$\frac{2^5}{120} = 0.26$	$\frac{2^6}{720} = 0.08$	$\frac{2^7}{5040} = 0.025$	$\frac{2^8}{8!} = 0.0063$		$\frac{2^9}{9!} = 0.001411$	$\frac{2^{10}}{10!}$
$9\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$	18	11.97	5.94	2.34	0.72	0.225	0.0567		0.0126	0.002

L'errore è sulla 3° cifra (2 cifre decimali esatte) per $n = 9$.

Calcoliamo $e^2 = P_7(2)$.

- $f^{(0)}(0) = e^0 = 1;$
- $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1;$
- $f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1;$
- $f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1;$
- $f^{(4)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(4)}(0) = e^0 = 1;$
- $f^{(5)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(5)}(0) = e^0 = 1;$
- $f^{(6)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(6)}(0) = e^0 = 1;$
- $f^{(7)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(7)}(0) = e^0 = 1;$
- $f^{(8)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(8)}(0) = e^0 = 1;$
- $f^{(9)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(9)}(0) = e^0 = 1.$

Quindi: $e^x = P_9(x) = \sum_{k=0}^{9} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{9} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7 + \frac{f^{(8)}(0)}{8!}x^8 + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9 \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow e^2 = 1 + \frac{1}{1!}2 + \frac{1}{2!}2^2 + \frac{1}{3!}2^3 + \frac{1}{4!}2^4 + \frac{1}{5!}2^5 + \frac{1}{6!}2^6 + \frac{1}{7!}2^7 + \frac{1}{8!}2^8 + \frac{1}{9!}2^9 =$$

$= 1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} + \frac{16}{4!} + \frac{32}{5!} + \frac{64}{6!} + \frac{128}{7!} + \frac{256}{8!} + \frac{512}{9!} = 7.388$ *(Valore calcolatrice: 7.389).*

Calcolo delle forme indeterminate con Taylor

Esempio 1 – (Limite con Taylor)

Calcolare $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{sen(x)-\cos(x)+1}{2x+x^2+1-\frac{e^x-1}{x}}$.

Soluzione

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{sen(x)-\cos(x)+1}{2x+x^2+1-\dfrac{e^x-1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{sen(x)-\cos(x)+1}{\dfrac{2x^2+x^3+x-e^x+1}{x}} =$$

$= \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{x(sen(x)-\cos(x)+1)}{2x^2+x^3+x-e^x+1}$, *dove per* $x \longrightarrow 0$ *è:*

- $x(sen(x)-\cos(x)+1) \sim x\left(x+\frac{1}{2}x^2\right) = x^2 + \frac{1}{2}x^3 = x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^3\right) = x^2 + o(x^3)$;
- $2x^2 + x^3 + x - e^x + 1 = 2x^2 + x^3 + x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + 1 =$

$$= 2x^2 + x^3 + x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + 1 + o(x^4) =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \sim \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Quindi:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{sen(x)-\cos(x)+1}{2x+x^2+1-\dfrac{e^x-1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x(sen(x)-\cos(x)+1)}{2x^2+x^3+x-e^x+1} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+o(x^3)}{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{3}{2}x^2} = \frac{2}{3}.$$

Esempio 2 – (Limite con Taylor)

Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\log(cos(x))+log(e^x-x)-\frac{1}{6}x^3}{x^3 \arcsin(x)}$.

Soluzione

Il limite è indeterminato $\left(\frac{0}{0}\right)$. *Per* $x \to 0$, *si ha:*

1) *Numeratore*

a) *Sviluppiamo log(cos(x)):*

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$;
- $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4) \Longrightarrow \log(\cos(x)) = \log\big(1 + (\cos(x) - 1)\big) =$
- *(per t = cos(x) - 1 =* $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$*)* $= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4 + o\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4 \Longrightarrow \log(\cos(x)) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4 + o\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4 \sim$

$\sim$

b) *Sviluppiamo* $\log(e^x - x)$:

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \Longrightarrow e^x - x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow e^x - x = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \log(e^x - x) = \log\left(1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)\right) =$ (*per* $t = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$) $= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^4 + o\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^4$;

Quindi, il numeratore diventa:

$$\log(cos(x)) + log(e^x - x) - \frac{1}{6}x^3 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4 + o\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^4 + o\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^4 - \frac{1}{6}x^3.$$

Ora osserviamo che:

a) i termini di 2° grado sono due e la loro somma è:

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 0 \text{ (si annullano);}$$

b) i termini di 3° sono due e la loro somma è:

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3 = 0;$$

c) i termini di 4° grado sono:

$$\frac{x^4}{24}, -\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) = -\frac{1}{8}x^4, \frac{1}{24}x^4, -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = -\frac{1}{8}x^4$$

la cui somma è

$$\frac{x^4}{24} - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 = \frac{1-3+1-3}{24}x^4 = -\frac{4}{24}x^4 = -\frac{1}{6}x^4.$$

2) Denominatore

$$x^3 arcsen(x) \sim x^3 \cdot x = x^4.$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(cos(x)) + log(e^x - x) - \frac{1}{6}x^3}{x^3 \arcsin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^4}{x^4} = -\frac{1}{6}.$$

Condizione del 2° ordine per gli estremanti relativi

Lo sviluppo di Taylor fornisce un'ulteriore dimostrazione della condizione di minimo/massimo relativo.

Teorema 6.7.3 (*) – (Condizione del 2° ordine per i massimi e i minimi)

Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ e se $x_0 \in]a, b[$ tale che f sia derivabile almeno due volte in x_0, si dimostra che se:

a) $\begin{pmatrix} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (x_0 \text{ è } un\ punto\ di\ minimo\ relativo\ per\ f)$;

b) $\begin{pmatrix} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (x_0 \text{ è } un\ punto\ di\ massimo\ relativo\ per\ f)$.

Dim. (a) Sia $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$.

Applicando a f(x) lo sviluppo di Taylor di ordine 2, $\forall x \in [a, b]$ si ha:

$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2 =$ (poiché $f'(x_0) = 0$)

$$= f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2 \Longrightarrow f(x) - f(x_0) =$$

$$= f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall x \neq x_0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{o((x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} \right] = \frac{f''(x_0)}{2} > 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - {x_0}^2} > 0 \Longleftrightarrow$ (per il 1° teorema della permanenza del segno)

$\exists J(x_0) \ni' \forall x \in J(x_0) \backslash \{x_0\} : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} > 0 \Longrightarrow$ (poichè$(x - x_0)^2 > 0)$ $f(x) - f(x_0) > 0 \Longleftrightarrow$

$\exists J(x_0) \ni' \forall x \in J(x_0)\backslash\{x_0\}: f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow x_0$ *è un punto di minimo relativo.*

Dim. (b) – E' analoga.

Flessi e concavità – Ulteriori teoremi

Teorema 6.7.4 – (Teorema di Fermat per i punti di flesso)

Se $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* x_0 *è un punto interno ad* $[a, b]$ *tale che* f *sia derivabile almeno due volte in* x_0*, si dimostra che:*

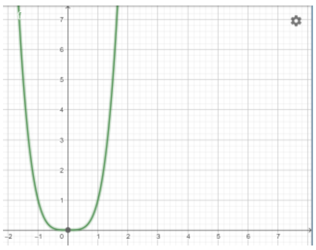
$$(x_0 \text{ punto di flesso per } f) \Longrightarrow (f''(x_0) = 0).$$

Osservazione – Tale condizione di flesso è solo necessaria ma non sufficiente: se $f''(x_0) = 0$ *non è detto che* x_0 *sia un punto di flesso.*

Esercizio 1 – Sia $f(x) = x^4$.

Si ha: $f'(x) = 4x^3 \Longrightarrow f''(x) = 12x^2$.

In tal caso $f''(0) = 0$*, ma* $x_0 = 0$ *non è un flesso perché la funzione non cambia di convessità. Il grafico di* $f(x) = x^4$ *è:*



Sussiste il seguente teorema.

Teorema 6.7.5 – (1ª condizione sufficiente per i punti di flesso)

Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ *e se* $x_0 \in]a, b[$ *tale che f sia derivabile almeno tre volte in* x_0*, si dimostra che:*

$$(\text{Se } f''(x_0) = 0 \text{ e } f'''(x_0) \neq 0) \Longrightarrow (x_0 \text{ è un punto di flesso}).$$

Criterio delle derivate successive per minimi, massimi e flessi

Teorema 6.7.6 – (C.S. per i max/min relativi/flessi orizzontali - Metodo delle derivate successive)

Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ *e se* $x_0 \in]a, b[$ *tale che* f *sia derivabile almeno n volte in* x_0 *e se* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *e* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, *si dimostra che:*

a) *Se n è pari* $\Rightarrow \begin{cases} x_0 \text{ è } un\ punto\ di\ massimo\ relativo\ se\ f^{(n)}(x_0) < 0 \\ x_0 \text{ è } un\ punto\ di\ minimo\ relativo\ se\ f^{(n)}(x_0) > 0 \end{cases}$;

b) *Se n è dispari* $\Rightarrow x_0$ *è un punto di flesso orizzontale.*

Teorema 6.7.7 – (2ª C.S. per i punti di flesso - Metodo derivate successive)

Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ *e se* $x_0 \in]a, b[$ *tale che* f *sia derivabile almeno volte in* x_0 *tale che* $f''(x_0) .. = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *e* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, *si dimostra che:*

a) se $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ è } convessa\ in\ x_0, se\ n \text{ à } pari \\ f\ ha\ un\ punto\ di flesso\ in\ x_0, se\ n \text{ è } dispari \end{cases}$;

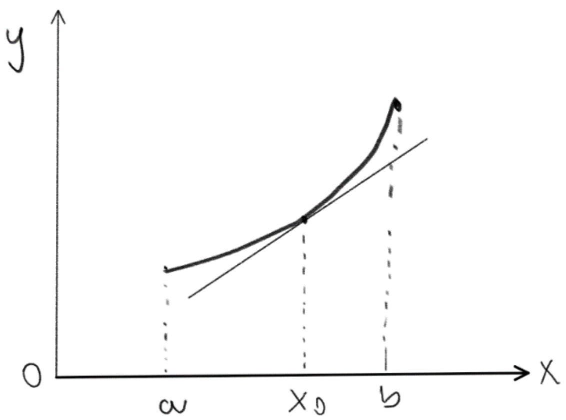
b) se $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ è } concava\ in\ x_0, se\ n \text{ à } pari \\ f\ ha\ un\ punto\ di flesso\ in\ x_0, se\ n \text{ è } dispari \end{cases}$.

Convessità/concavità e retta tangente

Lo sviluppo di Taylor fornisce un'ulteriore dimostrazione della relazione fra curva convessa/concava e retta tangente.

Teorema 6.7.8 - Se $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una funzione derivabile in* $]a, b[$, *si dimostra che:*

a) *(Se f è convessa in* $[a, b]$*)* $\Leftrightarrow$ *(*$\forall x_o \in (a, b)$ *il grafico di f è sempre al di sopra della retta tangente al grafico nel punto di coordinate* $(x_0, f(x_0))$.



b) *(Se f è concava in* $[a,b]$) $\Leftrightarrow$ *(*$\forall x_o \in [a,b\,]$ *il grafico di f è sempre al di sotto della retta tangente al grafico nel punto di coordinate* $(x_0, f(x_0))$.

Dim. (a) Poichè f è una funzione convessa derivabile almeno due volte in (a,b) $\Rightarrow$ $\forall x_0, x \in [a,b], \exists c$ *compreso fra* $x_0, x \ni' f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \geq (poichè\ f\ è\ convessa\colon f''(c) \geq 0)\ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \forall x \in [a,b]\colon f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in [a,b]\colon il\ grafico\ di\ f\ al\ di\ sopra\ della\ tangente\ in\ x.$

Dim. (b) E' analoga.

Esempi – Stabilire in quali intervalli le seguenti funzioni sono convesse/concave e calcolare gli eventuali punti di flesso.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

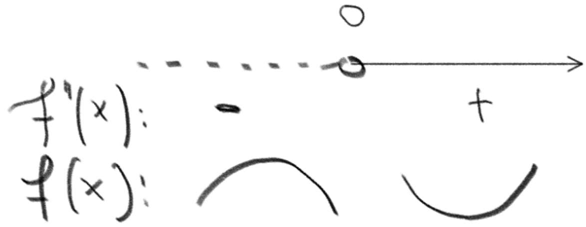
c) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

d) $f(x) = x \cdot |x|$

Soluzione

a) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x.$

Studiamo il segno di f'(x) = 6x: $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$:



b) $f(x)$*è concava in* $]-\infty, 0[$;

c) $f(x)$*è convessa in* $]0, +\infty[$;

d) $x = 0$ *è (unico) punto di flesso.*

b) $f(x) = e^{-x^2} \Longrightarrow f'(x) = (-2x)e^{-x^2}$,

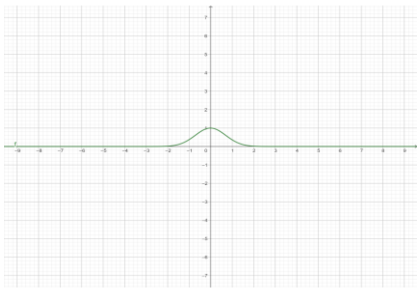
$f''(x) = (-2)e^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(-2x) = (-2)e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

Studiamo il segno di f''(x):

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi:

- $f(x) = e^{-x^2}$ *è convessa per* $x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \ x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- *f(x) è concava per* $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \ x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ *sono punti di flesso.*



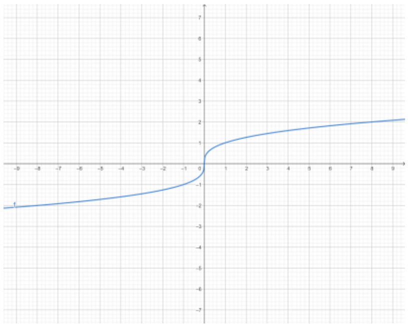
c) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; $f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$.

Studiamo il segno di f''(x): $f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Quindi:

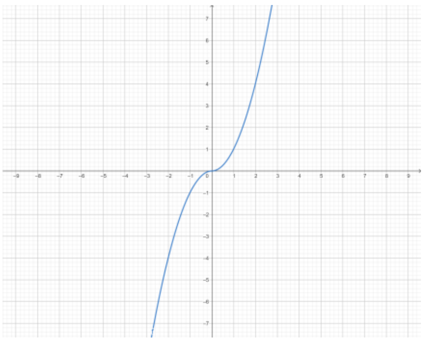
- $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ *è convessa per* $x < 0$;
- $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ *è concava per* $x > 0$;
- *In* $x = 0$: $f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \Leftrightarrow x = 0$ *è un punto a tangente verticale di equazione* $x = 0$.

$x = 0$ *è un punto di flesso verticale.*



d) $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2, se\ x \geq 0 \\ -x^2, se\ x < 0 \end{cases}$

- *Se* $x > 0$: $f'(x) = 2x \Longrightarrow f''(x) = 2 > 0, \forall x > 0 \Longrightarrow f(x)$ *è convessa in* $]0, +\infty[$;
- *Se* $x < 0$: $f'(x) = -2x \Longrightarrow f''(x) = -2 > 0, \forall x < 0 \Longrightarrow f(x)$ *è concava in* $]-\infty, 0[$;
- $f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0) = 0 \Longrightarrow x = 0$ *è un punto di flesso orizzontale.*



Linee guida per lo studio e la rappresentazione di una funzione

Richiamo – Gli asintoti orizzontali/obliqui di una funzione.

Se f *è una funzione definita in un insieme illimitato superiormente (inferiormente), si dice che la retta di equazione* $y = mx + q$ *è un asintoto a destra o a* $+\infty$ *(risp. a sinistra o a* $-\infty$*) se risulta*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0 \quad (risp.\ \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0).$$

Se $m = 0$, *l'asintoto si dice orizzontale e la sua equazione è* $y = q$;

se $m \neq 0$, l'asintoto si dice obliquo.

Osservazioni

1. Gli asintoti orizzontali (risp. obliqui) a sinistra e a destra possono essere diversi.
2. L'esistenza di un asintoto orizzontale a destra (a sinistra) esclude l'esistenza dell'asintoto obliquo a destra (a sinistra), ma è possibile, invece, che esista un asintoto orizzontale a destra (a sinistra) e un asintoto obliquo a sinistra (a destra).

Ciò premesso, i passi da eseguire per lo studio di una funzione sono:

Passo 1 – Calcolare l'insieme di esistenza (dominio) della funzione;

Passo 2 – Verificare eventuali simmetrie e/o periodicità;

Passo 3 – Calcolare le eventuali intersezioni con l'asse x (zeri di f) e l'asse y;

Passo 4 – Studiare il segno della funzione;

Passo 5 - Studiare il comportamento della funzione ai "confini" del dominio e calcolare eventuali asintoti e punti di discontinuità;

Passo 6 – Calcolare la derivata f'(x) e il suo dominio e determinare eventuali punti in cui f è continua ma non è derivabile;

Passo 7 – Studiare il segno di f'(x) e determinare gli eventuali punti estremanti;

Passo 8 – Calcolare f''(x), studiarne il segno e individuare gli intervalli in cui è convessa/concava e i relativi punti di flesso;

Passo 9 – Tracciare il grafico della funzione.

Esempio 1 – Studiare e rappresentare la funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Soluzione

1) *Il dominio di f è:* $X = \mathbb{R}$;
2) *Calcoliamo le intersezioni con gli assi.*

   a) *asse x:* $\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x^3 - 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2(2x-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$;

   b) *asse y:* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.
3) *Studiamo il segno di f:*

   $$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$
4) *Ricerca degli asintoti*

   a) *f(x) non ha asintoti verticali (non esistono punti di discontinuità);*

   b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2(2x-3) = \pm\infty \Leftrightarrow$ *f(x) non ha asintoti orizzontali;*

   c) $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-3x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (2x^2-3x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^2 = +\infty \Rightarrow$

   $\Rightarrow$ *f(x) non ha asintoti obliqui.*
5) *Crescenza, decrescenza, massimi e minimi*

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$;

- $f'^{(x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$;
- $f'^{(x)} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$:

  $f(x)$ *è strettamente crescente in* $]-\infty, 0[$ *e* $]1, +\infty[$;

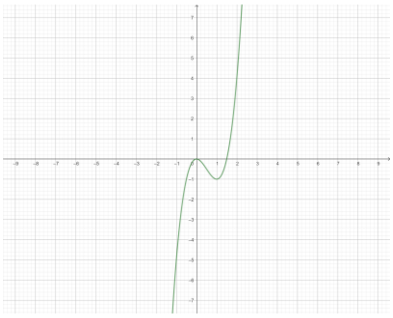
  f(x) è strettamente decrescente in $]0,1[$;
- $x = 0$ *è un punto di massimo relativo,* $x = 1$ *è un punto di minimo relativo.*

6) *Concavità e flessi*

$f'(x) = 6x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 12x - 6$;

- $f''(x) = 12x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$;
- *f(x) è concava in* $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$; *f(x) è convessa in* $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$;
- $x = \frac{1}{2}$ *è un punto di flesso.*

Il grafico di $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ *è:*



Esempio 2 - Studiare e tracciare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.

Soluzione

1) *I.D.:* $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow I.D. = \mathbb{R}\backslash\{1\}$;

f(x) non ha simmetrie.

2) *Intersezione con gli assi:*

$$x\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2+3}{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2+3}{x-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3 = 0: mai \end{cases} \Rightarrow \gamma \cap x = \emptyset;$$

$$y\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x^2+3}{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{3}{-1} = 0: mai \end{cases} \Rightarrow \gamma \cap y = \emptyset.$$

3. *Studio del segno:*

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

4. *Comportamento al "confine", calcolo degli asintoti e studio della discontinuità:*

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$x = 1$ *è un punto di discontinuità di II[a] specie;*

la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale da sinistra e da destra;

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty;$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty;$$

c) $m_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1 \Longrightarrow m_1 = 1;$

$q_1 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2+3}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2+3-x^2+x}{x-1}\right] =$

$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{3+x}{x-1}\right] = 1.$

Quindi, $y = m_1 x + q_1 = x + 1$ *è un asintoto obliquo a sinistra.*

Analogamente, si ha che $y = x + 1$ *è anche un asintoto obliquo a destra.*

5. *Monotonia, massimi e minimi relativi*

$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2};$

$I.D.(f'): x \neq 1 \Longleftrightarrow I.D.(f') = I.D.(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$

a) Monotonia

$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 3.$

- *f(x) è strettamente crescente in* $(-\infty, -1) \vee (3, +\infty)$*;*

  f(x) è strettamente decrescente in $(-1,3)\backslash\{1\}$;

b) massimi/minimi

- $x = -1$ *è un punto di minimo locale;* $f(-1) = -2$;
- $x = 3$ *è un punto di minimo locale;* $f(3) = 6$.

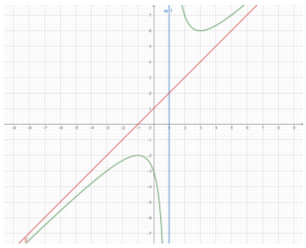
6) Convessità e flessi

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \Longrightarrow f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

- $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > 1; f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1;$
- *f(x) è convessa per x > 1, f(x) è concava per x < 1;*
- *f(x) non ha punti di flesso.*

Il grafico della funzione è:



Appendice – Dimostrazione formula di Taylor di ordine n

Teorema 6.5.2 (*) – Sviluppo di Taylor di ordine n con il resto di Peano

Se $f: I \longrightarrow R$ è una funzione derivabile almeno n-volte in $x_0 \in I$, si dimostra che:

$$\exists | P_n(x) \ni' \forall x \in I: f(x) - P_n(x) = R_{n,x_0}(x), \text{ con } R_{n,x_0}(x) = o((x - x_0)^n).$$

Dim.(a) – $\exists P_n(x) \ni' \forall x \in I: f(x) - P_n(x) = R_{n,x_0}(x)$, con $R_{n,x_0}(x) = o((x - x_0)^n)$.

$$\forall x \in I: f(x) = f(x) + f(x_0) - f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$- \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= f(x) + \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right]$$
$$- \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right].$$

Posto

$$P_n(x) = (x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si ha:

$$\exists P_n(x) \ni' f(x) = f(x) + P_n(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right] \Leftrightarrow$$

$$\exists P_n(x) \ni' f(x) - P_n(x) = f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right].$$

Posto

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

dimostriamo che $R_n(x) = o((x - x_0)^n) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \lim\limits_{x \to x_0} R_n(x) = 0 \\ (2) \lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \end{cases}$

(1) $\lim_{x\to x_0} R_n(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right] =$ *(poiché f è continua in x_0)* $= f(x_0) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot 0 - \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot 0 - \cdots = 0 \Leftrightarrow R_n(x)$ *è un infinitesimo per* $x \to x_0$.

(2) Dimostriamo che $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$, *per* $x \to x_0$.

Preliminarmente osserviamo che:

$D^{(1)}(x^n) = n \cdot x^{n-1};$

$D^{(2)}(x^n) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2};$

$D^{(3)}(x^n) = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot x^{n-3};$

… … …

$D^{(n-1)}(x^n) = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1+1) \cdot x^{n-n+1} = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot x^1;$

$D^n(x^n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$

Ciò premesso, si ha:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \left(\frac{0}{0}, de\ l'Hospital\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(1)}(x)}{D(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x) - 0 - \frac{f'(x_0)}{1!} - \frac{f''(x_0)}{2!}2(x-x_0) - \frac{f'''(x_0)}{3!}3(x-x_0)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) - \frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}\right) =$$

$$= \left(\frac{0}{0}, de\ l'Hospital\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(2)}(x)}{D^{(2)}(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f''(x) - 0 - f''(x_0) - \frac{f'''(x_0)}{2!}\cdot 2\cdot(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(n-1)(x-x_0)^{n-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f''(x)-f''(x_0)-\frac{f'''(x_0)}{1}\cdot(x-x_0)-..-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{D}\left[f''(x)-f''(x_0)-\frac{f'''(x_0)}{1}\cdot(x-x_0)-..-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}\right]}{D\left[n(n-1)(x-x_0)^{n-2}\right]}=$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(3)}(x)-0-\frac{f^{(3)}(x_0)}{1}\cdot 1-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(n-2)(x-x_0)^{n-3}}{n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3}}\right)=$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(3)}(x)-f^{3}(x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3}}{n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3}}\right)=$$

(applicando de l'Hospital (n -1) volte) $= \ldots = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{D^{(n-1)}(x-x_0)^n}=$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-n+1)!}(x-x_0)^{n-n+1}}{n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot(x-x_0)^1}\right)=$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^1}{n!\,(x-x_0)}\right)=$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{n!}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}-\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right)=$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}\right)-\lim_{x\to x_0}f^{(n)}(x_0)\right\}=\frac{1}{n!}\left\{f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right\}=0.$$