Cap.7 – Successioni numeriche, limite di successioni

&7.1 – Successioni in $\mathbb{R}$

Def.7.1.1 – (Definizione di successione)

Si dice successione di numeri reali ogni funzione reale avente per dominio l'insieme dei numeri naturali $\mathcal{N}$:

$$f: N \longrightarrow R \ \ni' \ \forall n \in N: f(n) = a_n \in R.$$

La generica successione è indicata con $(a_n)_{n \in N}$ o $\{a_n\}$ e i suoi valori con $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$

- $\forall n \in N, a_n = f(n)$ si dice termine n-simo della successione.

In particolare, successione è anche $(a_n)_{n \geq n_0}$ il cui primo termine è a_{n_0} in cui $n_0 \geq 1$.

Esempio 1 – $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in N_0}$ è la successione i cui termini, $\forall n \geq n_0 = 1$, sono:

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, \dots, a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right), \dots$$

Esempio 2 - $((-1)^n \cdot n)_{n \in N}$ è la successione i cui termini sono:

$$a_0 = 0, a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = -3, a_4 = 4, \dots, a_n = (-1)^n \cdot n, \dots$$

aventi segno alternato.

Particolari successioni sono le successioni limitate.

Def.7.1.2 – (Definizione di successione limitata)

Se $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali e se $\mathcal{A}$ è l'insieme dei suoi valori (o termini della successione)

$$A = \{x \in R | \exists n \in N \ni' x = a_n\}$$

si dice che:

a) *la successione* $\{a_n\}$ *è limitata inferiormente* $\Leftrightarrow A$ *è un insieme limitato inferiormente* $\Leftrightarrow \exists h \in R \ni' \forall x \in A: h \leq x \Leftrightarrow \exists h \in R \ni' \forall n \in N: h \leq a_n$;

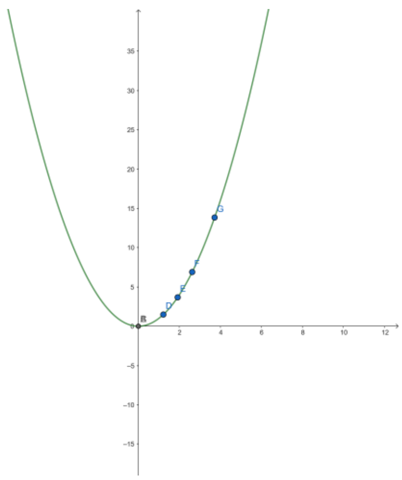
b) *la successione* $\{a_n\}$ *è limitata superiormente* $\Leftrightarrow A$ *è un insieme limitato superiormente* $\Leftrightarrow \exists k \in R \ni' \forall x \in A: x \leq k \Leftrightarrow \exists k \in R \ni' \forall n \in N: a_n \leq k$;

c) *la successione* $\{a_n\}$ *è limitata* $\Leftrightarrow A$ *è un insieme limitato* $\Leftrightarrow \exists h, k \in R \ni' \forall n \in N: h \leq a_n \leq k$.

Esempio 1 – Consideriamo la successione $\{a_n\} = \{n^2\}$ *i cui termini sono:*

$$0, 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

il cui grafico è



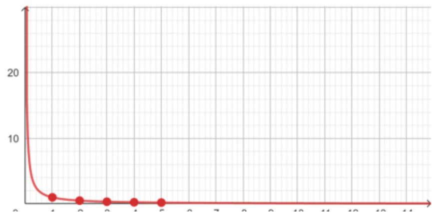
La successione $\{a_n\} = \{n^2\}$ *è:*

- *limitata inferiormente perché* $\exists h = 0 \ \ni' \forall n \in N: h = 0 \leq a_n = n^2$;
- *illimitata superiormente perché* $\nexists k \in R \ni' \forall n \in N: a_n \leq k \Leftrightarrow \forall k \in R, \ \exists n \in N \ni' a_n > k$.

Esempio 2 – Consideriamo la successione $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ *i cui termini sono:*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

e il cui grafico è:



La successione $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ *è:*

- *limitata inferiormente perché* $\exists h = 0 \in R \ \ni' \ \forall n \in N: h = 0 < a_n$;
- *limitata superiormente perché* $\exists k = 1 \in R \ni' \ \forall n \in N: a_n \leq k = 1$.

Quindi, $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ *è una successione limitata sia inferiormente sia superiormente* $\Leftrightarrow \{a_n\}$ *è limitata.*

Esempio 3 - Consideriamo la successione $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n\in N_0}$.

Si ha che $\forall n \in N_0: a_n = \begin{cases} 1, & se\ n\ \text{è}\ pari \\ -1, & se\ n\ \text{è}\ dispari \end{cases}$.

I termini della successione sono: -1, 1, 1, -1,…, -1,1, …$\Leftrightarrow A = \{\pm 1\}$ *(insieme dei valori della successione).*

Quindi, poichè

$$\exists h = -1, \exists k = 1 \ \ni' \ \forall n \in N: -1 = h \leq a_n \leq k = 1$$

$\{(-1)^n\}_{n\in N}$ *è una successione limitata.*

Esempio 4 – La successione $\{a_n\} = \{4\}_{n\in N}$, *di costante valore 4, è una successione limitata.*

- *Ogni successione costante è limitata.*

Prop. 7.1.1 – Se $\{a_n\}$ *è una successione di numeri reali, si dimostra che:*

$$(\{a_n\}\ \textit{è limitata}) \Leftrightarrow (\exists L \geq 0 \ \ni' \ \forall n \in N: -L \leq a_n \leq L).$$

Dim. (C.N. $\Rightarrow$*)*

Sia $\{a_n\}$ *una successione limitata* $\Leftrightarrow \exists h, k \in R \ni' \ \forall n \in N: h \leq a_n \leq k$.

Se diciamo $L = max(|h|, |k|) \geq 0$, *si ha:*

$\begin{cases} |h| \leq L \\ |k| \leq L \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -L \leq -|h| \leq h \\ \ \ k \leq |k| \leq L \end{cases} \Longrightarrow \forall \in N: -L \leq h \leq a_n \leq k \leq L \Longrightarrow \exists L \geq 0 \ \ni' \forall n \in N:$

$-L \leq a_n \leq L.$

Dim. (C.S. $\Longleftarrow$*)*

Posto $h = -L$ *e* $k = L$, *si ha che* $\exists h = -L, \exists k = L \in R \ni' \forall n \in N: h \leq a_n \leq k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{a_n\}$ *è limitata.*

Limite di una successine

&7.2 - Limite all'infinito di una successione

Preliminarmente ricordiamo che per il valore assoluto sussistono le seguenti proprietà:

1. $\forall k \geq 0: |x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k;$
2. $\forall k \geq 0: |x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k \ \vee x \geq k;$
3. $\forall x, y \in R: |x + y| \leq |x| + |y|$ *(proprietà triangolare);*
4. $\forall x, y \in R: \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$

Ciò premesso, diamo le seguenti definizioni di limite per le successioni e osserviamo che, poiché l'insieme di definizione $\mathcal{N}$ *non ha punti di accumulazione, l'unico limite possibile è il limite per* $n \longrightarrow +\infty$.

---

a) Definizione di successione convergente

Def.7.2.1 - (Definizione di successione convergente)

Se $\{a_n\}$ *è una successione di numeri reali e se* $\ell \in R$, *si dice che la successione* $\{a_n\}$ *converge ad* ℓ *per* $n \longrightarrow +\infty$ *e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

se

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : |a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon.$$

Esempio 1 – Verificare che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dim. $\forall\varepsilon > 0$, *studiamo* $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} > -\varepsilon \\ \frac{1}{n} < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall n \\ n > \frac{1}{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$

Se diciamo $n_0 = min\left\{n \in N \middle| n > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$, *si ha:* $\exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$

Dunque, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Esempio 2 – Verificare che la successione $\{a_n\} = \{4\}$, *successione costante di costante valore 4, è convergente a 4:* $\lim_{n\to\infty} 4 = 4.$

Dim. $\forall\varepsilon > 0$ *e* $\forall n \in N$: $|a_n - \ell| = |4 - 4| = 0 < \varepsilon.$

Esempio 3 – Dimostrare che la successione $\{(-1)^n\}$ *non è convergente.*

Dim. Ragioniamo per assurdo supponendo che $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \ell \in R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : \ell - \varepsilon < (-1)^n < \ell + \varepsilon.$

In particolare, per $\varepsilon = 1, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : \ell - 1 < (-1)^n < \ell + 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0$:

$2n \geq n \geq n_0 \Rightarrow 2n \geq n_0 \Rightarrow \ell - 1 < (-1)^{2n} = 1 < \ell + 1 \Rightarrow 1 < \ell + 1 \Rightarrow \ell > 0.$ *(1)*

Inoltre, $\forall n \geq n_0 : 2n + 1 \geq 2n \geq n \geq n_0 \Rightarrow 2n + 1 \geq n_0 \Rightarrow \ell - 1 < (-1)^{2n+1} = -1 < \ell + 1 \Rightarrow \ell - 1 < -1 \Rightarrow \ell < 0.$ *(2)*

Dunque, $\ell > 0$ *(1) e* $\ell < 0$ *(2) e ciò è assurdo: la successione non converge.*

Teorema 7.2.1 – (Teorema di unicità del limite per le successioni convergenti)

Se $\{a_n\}$ *è una successione ha un limite* $\ell \in \mathbb{R}$, *tale limite è unico.*

Dim.

a) Dimostriamo il teorema verificando che se la successione converge a $\ell \in \mathbb{R}$*, essa non può convergere a* $\ell' \in \mathbb{R}$.

Ragioniamo per assurdo supponendo che esistono due limiti distinti per la successione:

Posto $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} : \varepsilon > 0 \Rightarrow$ *(per la def. di limite)* $\begin{cases} \exists n_{01} \in N \ni' \forall n \geq n_{01} : |a_n - \ell_1| < \varepsilon \\ \exists n_{01} \in N \ni' \forall n \geq n_{01} : |a_n - \ell_2| < \varepsilon \end{cases}$ *(¹)*

Detto $n_0 = \max(n_{01}, n_{02})$, $\forall n \geq n_0 : |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| = |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| <$ (*per la* $\big((1)\big)\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| \Rightarrow |\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2| \Rightarrow |\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$: *ciò è assurdo perché un numero non può essere strettamente minore di sè stesso.*

Dunque: $\ell_1 = \ell_2$ *(unicità del limite delle successioni convergenti).*

b) In modo analogo, si dimostra che se la successione converge a $\ell \in \mathbb{R}$*, essa non può divergere. (omissis)*
Dunque, se una successione converge ad $\ell \in \mathbb{R}$*, tale limite è unico.*

Teorema 7.2.2 – (Limitatezza delle successioni convergenti)

Ogni successione convergente è limitata.

Dim. Sia $\{a_n\}$ *una successione convergente ad* $\ell \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$.

In particolare, per $\varepsilon = 1, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : \ell - 1 < a_n < \ell + 1$. *(¹)*

Se diciamo $B = \{a_0, a_1, \dots, a_{n_{0-1}}, \ell - 1, \ell + 1\} \Rightarrow \mathcal{B}$ *è un insieme finito* $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists m = \min(B), \exists M = \max(B)$.

$\forall n \in N$: *si possono presentare due casi.*

1° caso - $\forall\ n < n_0 : a_n \in B \Rightarrow m = \min(B) \leq a_n \leq M = \max(B)$;

2° *caso* - $\forall\ n \geq n_0 \Rightarrow$ (*per la* (1)) $\ell - 1 < a_n < \ell + 1 \Rightarrow\ m = \min(B) \leq \ell - 1 < \ell \leq a_n < \ell + 1 \leq \max(B) = M \Rightarrow \forall\ \text{n}\ \geq n_0 : m \leq a_n \leq M$.

In entrambi i casi è $m \leq a_n \leq M, \forall n \in N \Leftrightarrow \{a_n\}$ *è limitata.*

Osservazione 7.1 - Non vale il viceversa: una successione può essere limitata e non essere convergente.

Un esempio è la successione $\{(-1)^n\}$ *che è limitata ma non è convergente.*

Corollario 7.2.1 – Ogni successione non limitata è non convergente.

Dim. E' vera perchè è la controinversa della proprietà del teorema 7.2.2.

Teorema 7.2.3 – (Convergenza delle successioni in valore assoluto)

Se $\{a_n\}$ *è una successione convergente ad* $\ell \in R$, *allora anche la successione* $\{|a_n|\}$ *è convergente ed è* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|.$$

Dim. Poiché $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : |a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : |a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : \big||a_n| - |\ell|\big| \leq |a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : \big||a_n| - |\ell|\big| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$.

Non vale il viceversa: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\ell| \nRightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Un esempio è dato dalla successione $\{|(-1)^n|\}$ *che è convergente a 1 perché* $\forall n \in N : |(-1)^n| = 1$, *ma come abbiamo visto* $\{(-1)^n\}$ *è non convergente.*

b) Successioni divergenti

Def.7.2.2 - (Definizione di successione divergente)

Se $\{a_n\}$ *è una successione di numeri reali, si dice che:*

a) $\{a_n\}$ *è diverge positivamente e si scrive* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *se:*

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : a_n > M;$$

b) $\{a_n\}$ *è diverge negativamente e si scrive* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *se:*

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : a_n < -M.$$

Esempio 1 - Verificare che $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Dim. $\forall M > 0$, *studio* $n^2 > M \Longrightarrow \sqrt{n^2} = |n| = n > \sqrt{M} \Longrightarrow$

$(per\ l'assioma\ di\ Archimede) \exists k \in N \ni' n_0 = k \cdot n > \sqrt{M}$.

Quindi, $\forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_{0:} : n^2 > n_0^2 > \sqrt{M}^2 = M$.

Dunque: $\forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_{0:} : n^2 > M \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Esempio 2 - Verificare che $\lim_{n\to\infty} (-3^n) = -\infty$.

Dim. $\forall M > 0$, *studio* $-3^n < -M \Longrightarrow 3^n > M \Longrightarrow log_3(3^n) > log_3(M) \Leftrightarrow n > log_3(M) \Longrightarrow (per\ l'assioma\ di\ Archimede) \exists n_0 > log_3(M) \Longrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0 : n > log_3(M) \Longrightarrow 3^n > 3^{log_3(M)} = M \Longrightarrow -3^n < -M$.

Dunque: $\forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_{0:} : -3^n < -M \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (-3^n) = -\infty$.

Proprietà delle successioni divergenti

Sussistono i seguenti teoremi.

Teorema 7.2.3 - Se $\{a_n\}$ *è una successione di numeri reali, si dimostra che:*

a) se $\{a_n\}$ *diverge positivamente* $\Rightarrow \{a_n\}$ *è illimitata superiormente;*
b) se $\{a_n\}$ *diverge negativamente* $\Rightarrow \{a_n\}$ *è illimitata inferiormente.*

D'ora in poi indicheremo con $\widetilde{\mathbb{R}}$ *l'insieme* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*: tale insieme detto R ampliato.*

Def.7.2.3 – (Successione regolare)

Se $\{a_n\}$ *è una successione di numeri reali, si dice che:*

$$\{a_n\} \text{ è una successione regolare} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \widetilde{\mathbb{R}}.$$

&7.3 – Successioni monotone

Def.7.3.1 – (Definizione di successione monotona)

Se $\{a_n\}$ *è una successione di numeri reali, si dice che:*

a) $\{a_n\}$ *è una successione monotona crescente (risp. strettamente crescente)* $\Leftrightarrow \forall m, n \in N \ni' m < n: a_m \leq a_n$ *(risp.* $a_m < a_n$*)* $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall n \in N: a_n \leq a_{n+1}$ *(risp.* $a_n < a_{n+1}$*);*
b) $\{a_n\}$ *è una successione monotona decrescente (risp. strettamente decrescente)* $\Leftrightarrow \forall m, n \in N \ni' m < n: a_m \geq a_n$ *(risp.* $a_m > a_n$*)* $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall n \in N: a_n \geq a_{n+1}$ *(risp.* $a_n > a_{n+1}$*).*

Esempio 1 – Verificare che $\{n^2\}$ *è una successione strettamente crescente.*

Dim. $\forall n \in N: a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 = a_n \Rightarrow \forall n \in N: a_{n+1} > a_n$.

Esempio 2 - Verificare che $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *è una successione strettamente decrescente.*

Dim. $\forall n \in N: n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \forall n \in N: a_n > a_{n+1}$.

Esempio 3 - Verificare che $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ *è una successione strettamente crescente.*

Esempio 4 - Verificare che la successione $\{(-1)^n\}$ *non è monotona.*

Esempio 5 – La successione $\{a_n\}$ *tale che* $\forall n \in N: a_n = 4$ *(successione costante) è monotona sia crescente sia decrescente.*

Teorema 7.3.1 (*) – (Convergenza delle successioni monotone e limitate)

a) *Ogni successione monotona crescente, limitata superiormente, è convergente ed è* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup(\{a_n,\}_{n\in N})$;
b) *Ogni successione monotona decrescente, limitata inferiormente, è convergente ed è* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf(\{\{a_n,\}_{n\in N}\})$.

Dim. (a) – Sia $\{a_n\}$ *una successione crescente e limitata superiormente* $\Leftrightarrow A = \{x = a_n, n \in N\}$ *è limitato superiormente* $\Rightarrow \exists \ell = \sup(A) \in R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$*(per le prop. caratteristiche del sup)* $\begin{cases} \forall x \in A: x \leq \ell \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \ni' \ell - \varepsilon < x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (1)\ \forall n \in N: a_n \leq \ell \\ (2)\ \forall \varepsilon > 0, \exists n \in N \ni' \ell - \varepsilon < a_n \end{cases}.$

Dimostriamo che $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$.

- *Per la prop.(1) di sup(A):* $\forall n \in N: a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$; *(3)*
- *per la prop. (2) di sup(A),* $\exists n_0 \in N \ni' \ \ell - \varepsilon < a_{n_0} \Rightarrow$ *(poiché* $\{a_n\}$ *è monotona crescente)* $\forall n \geq n_0: a_n \geq a_{n_0} > \ell - \varepsilon$. *(4)*

Dunque, per la (3) e la (4), si ha che:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell = \sup(\{x = a_n, n \in N\})$.

Dim. (b) – E' analoga.

Teorema 7.3.2 – (Divergenza delle successioni monotone illimitate)

a) *Ogni successione monotona crescente, illimitata superiormente, è divergente ed è* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\{x = a_n, n \in N\}) = +\infty$;

b) *Ogni successione monotona decrescente, illimitata inferiormente, è divergente ed è* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(\{x = a_n, n \in N\}) = -\infty$.

Dim. (a) - Poiché $\{a_n\}$ *è illimitata superiormente, l'insieme* $A = \{x = a_n, n \in N\}$ *è illimitato superiormente* $\Rightarrow \forall M > 0, \exists x \in A \ni' x > M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' a_{n_0} > M$.

Quindi, poiché $\{a_n\}$ *è crescente* $\Rightarrow \forall n \geq n_0 : a_n \geq a_{n_0} > M$.

Pertanto, $\forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \ \forall n \geq n_0 : a_n > M \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \sup(\{x = a_n, n \in N\})$.

Dim. (b) - E' analoga.

Teorema 7.3.3 - Ogni successione monotona è regolare ed è convergente se limitata, divergente se illimitata.

Dim. E' una conseguenza dei teoremi 7.3.1 e 7.3.2.

Algebra dei limiti dele successioni convergenti

&7.4 - Algebra dei limiti delle successioni convergenti

Teorema 7.4.1 - Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ *sono due successioni tali che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in R \ e \ \lim_{n\to\infty} b_n = m \in R$$

si dimostra che:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$;
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$;
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;

4. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$, *se* $\forall n\in N: b_n\neq 0$ *e* $b\neq 0$.

Dim. 1 - Sia $\varepsilon>0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}>0 \Rightarrow \begin{cases}(poich\grave{e}\ a_n\longrightarrow a)\ \exists n_1\in N \ni' \forall n\geq n_1: |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\\(poich\grave{e}\ b_n\longrightarrow b)\ \exists n_2\in N \ni' \forall n\geq n_2: |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}.$

Detto $n_0=\max(n_1,n_2)$, $\forall n\in N\ni' n\geq n_0: \begin{cases}n\geq n_1\\ n\geq n_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\\ |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \forall n\in N\ni' n\geq n_0: |(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|<$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

Dunque, $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in N\ \ni'\ \forall n\in N\ni' n\geq n_0: |(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$

Dim. 2 - Sia $\varepsilon>0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}>0 \Rightarrow \begin{cases}(poich\grave{e}\ a_n\longrightarrow a)\ \exists n_1\in N \ni' \forall n\geq n_1: |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\\(poich\grave{e}\ b_n\longrightarrow b)\ \exists n_2\in N \ni' \forall n\geq n_2: |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}.$

Detto $n_0=\max(n_1,n_2)$, $\forall n\in N\ni' n\geq n_0: \begin{cases}n\geq n_1\\ n\geq n_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\\ |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \forall n\in N\ni' n\geq n_0: |(a_n-b_n)-(a-b)|=|(a_n-a)+(-b_n+b)|\leq|a_n-a|+|-b_n+b|$

$=|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

Dunque, $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in N\ \ni'\ \forall n\in N\ni' n\geq n_0: |(a_n-b_n)-(a-b)|<\varepsilon\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b.$

Dim. 3 - Poiché $\{b_n\}$ *è convergente* $\Rightarrow$ $\{b_n\}$ *è limitata* $\Leftrightarrow \exists L>0\ni'\ \forall n\in N: |b_n|\leq L.$

Quindi, $\forall\varepsilon>0$, *detto* $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{L+|\ell|}>0\Rightarrow(poich\grave{e}\ a_n\longrightarrow\ell)\ \exists n_1\in N\ni'\forall n\geq n_1: |a_n-\ell|<\varepsilon'$

e poiché $b_n\longrightarrow m\Rightarrow\exists n_2\in N\ni'\forall n\geq n_2: |b_n-m|<\varepsilon'.$

Detto $n_0=\max(n_1,n_2)$, *si ha che:*

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: \begin{cases} |a_n - \ell| < \varepsilon' \\ |b_n - m| < \varepsilon' \end{cases} \Rightarrow |a_n b_n - \ell m| = |a_n b_n - \ell b_n + \ell b_n - \ell m| =$

$= |b_n(a_n - \ell) + a(b_n - m)| \leq |b_n(a_n - \ell)| + |a(b_n - m)| = |b_n||a_n - \ell| + |a||b_n - m| \leq$

$= L|a_n - \ell| + |a||b_n - m| < L \cdot \varepsilon' + |\ell| \cdot \varepsilon' = (L + |\ell|) \cdot \varepsilon' = (L + |\ell|) \cdot \dfrac{\varepsilon}{L + |\ell|} = \varepsilon.$

Dunque, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \in N \ni' n \geq n_0: |a_n b_n - \ell m| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \ell \cdot m.$

Dim. 4 - E' omessa.

Conservazione dell'ordinamento: i limiti "rispettano" la relazione $\leq$

Teorema 7.4.2 - (Teorema della permanenza del segno)

a) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: a_n > 0$ $\quad (1^a\ forma)$

(risp. se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell < 0 \Rightarrow \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: a_n < 0$

b) Se $\forall n \in N: a_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \geq 0$ $\quad (2^a\ forma)$

(risp. se $\forall n \in N: a_n < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \leq 0$*)*

Dim. (a)

Poiché $a > 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0 \Rightarrow$ *(poiché* $a_n \to \ell$*)* $\exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: |a_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon = \ell - \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{\ell}{2} < a_n \Rightarrow 0 < a_n.$

Dunque, $\exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: a_n > 0.$

Dim. (b)

Ragioniamo per assurdo supponendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell < 0 \Rightarrow$ *(per la (a))*

$\exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: a_n < 0,$ *contro l'ipotesi che* $\forall n \in N: a_n \geq 0.$

Osservazione - Se $\forall n \in N: a_n > 0,$ *non è detto che sia* $\lim\limits_{n} a_n = a > 0$*: può essere* $\ell = 0$*. Un esempio è dato dalla successione* $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Teorema 7.4.3 - (Teorema del semplice confronto)

Se $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono due successioni tali che:*

$$\begin{cases} \exists \lim_n a_n = \ell \\ \exists \lim_n b_n = m \\ \forall n_0 \in N: a_n \leq b_n \end{cases} \Rightarrow \left(\lim_n a_n = \ell \leq \lim_n b_n = m\right).$$

Dim. Poiché $\forall n \in N: a_n \leq b_n \Leftrightarrow \forall n \in N: a_n - b_n \leq 0 \Rightarrow$ *(per (b) del 5.4.2)*

$\Rightarrow \lim_n (a_n - b_n) \leq 0 \Leftrightarrow \lim_n a_n - \lim_n b_n \leq 0 \Leftrightarrow \lim_n a_n = \ell \leq \lim_n b_n = m.$

Teorema 7.4.4 - (Teorema del doppio confronto o dei carabinieri)

Se $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ *sono tre successioni tali che:*

$$\begin{pmatrix} 1. \exists n_0 \in N \ni' \forall n \in N: a_n \leq b_n \leq c_n \\ 2. \lim_n a_n = \lim_n c_n = \ell \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\lim_n b_n = \ell\right).$$

Dim.

Sia $\varepsilon > 0 \Rightarrow \begin{cases} (poich\grave{e}\ a_n \longrightarrow \ell) \exists n_1 \in N \ \ni' \forall n \geq n_1: \ell - \mathcal{E} < a_n < \ell + \varepsilon \\ (poich\grave{e}\ c_n \longrightarrow \ell) \exists n_2 \in N \ \ni' \forall n \geq n_2: \ell - \mathcal{E} < c_n < \ell + \varepsilon \end{cases}.$

Detto $n_0 = \max(n_1, n_2)$ *si ha che* $\forall n \geq n_0: \begin{cases} n_0 \geq n_1 \Rightarrow \ell - \mathcal{E} < a_n < \ell + \varepsilon \\ n_0 \geq n_2 \Rightarrow \ell - \mathcal{E} < c_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow \\ \forall n \in N: a_n \leq b_n \leq c_n \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0: \ell - \mathcal{E} < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0: \ell - \mathcal{E} < b_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: \ell - \mathcal{E} < b_n < \ell + \varepsilon \Leftrightarrow \lim_n b_n = \ell.$

Corollario 7.4.1 - Se $\{a_n\}$ *è una successione di numeri reali, si dimostra che:*

$$\left(\lim_n |a_n| = 0\right) \Rightarrow \left(\lim_n a_n = 0\right).$$

Dim. Poiché:

1) $\forall n \in N: -|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$

e

2) *e* $\lim_n(-|a_n|) = \lim_n|a_n| = 0$,

per il teorema dei carabinieri è:

$$\lim_n a_n = 0.$$

Corollario 7.4.2 – Il prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata è una successione infinitesima, cioè se:

$$\begin{pmatrix} 1.\ \lim_n a_n = 0 \\ 2.\ \{b_n\}\ limitata \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\lim_n(a_n \cdot b_n) = 0\right),$$

Dim. Poiché $\{b_n\}$ *è limitata* $\Leftrightarrow\ \exists L > 0 \ni' \forall n \in N: |b_n| \le L \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \in N: 0 \le |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le |a_n| \cdot L \Rightarrow \forall n \in N: 0 \le |a_n \cdot b_n| \le |a_n| \cdot L$

dove $0 \longrightarrow 0$ *e* $|a_n| \cdot L \longrightarrow 0$.

Quindi, per il teorema dei 2 carabinieri, è anche $\lim_n|a_n \cdot b_n| = 0 \Rightarrow$*(per il 1° corollario)* $\Leftrightarrow \lim_n(a_n \cdot b_n) = 0$.

Esempio 1 – Calcolare $\lim_n \frac{(-1)^n}{n}$.

Soluzione

- $(-1)^n$ *è una successione non regolare ma limitata:* $|(-1)^n| = 1 \le L = 1, \forall n \in N$;
- $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *è una successione infinitesima.*

Per il corollario 7.4.2, si ha: $\lim_n \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Esempio 2 – Calcolare $\lim_n \frac{sen(n)}{n}$.

Soluzione

- $\{sen(n)\}$ *è una successione non regolare (oscillante) ma limitata:* $|sen(n)| \le L = 1, \forall n \in N$;

- $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *è una successione infinitesima.*
- *Per il corollario 5.4.2, si ha:* $\lim_{n} \frac{sen(n)}{n} = 0.$

Algebra dei limiti delle successioni divergenti

&7.5 - Algebra dei limiti delle successioni divergenti

Teorema 7.5.1 - Se $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono due successioni, si dimostra che:*

1. $(Se\ a_n$ è *limitata e* $b_n \longrightarrow \pm\infty) \Longrightarrow (a_n + b_n \longrightarrow \pm\infty)$;

1.1 $(Se\ a_n \longrightarrow \ell\ e\ b_n \longrightarrow \pm\infty) \Longrightarrow (a_n + b_n \longrightarrow \pm\infty)$ *(prevale il segno dell'infinito);*

2. $(Se\ a_n \longrightarrow +\infty\ e\ b_n \longrightarrow +\infty) \Longrightarrow (a_n + b_n \longrightarrow +\infty)$;

2.1 $(Se\ a_n \longrightarrow -\infty\ e\ b_n \longrightarrow -\infty) \Longrightarrow (a_n + b_n \longrightarrow -\infty)$;

Nulla si può dire se $a_n \longrightarrow +\infty$ *e* $b_n \longrightarrow -\infty$:

<u>$+\infty - \infty$ *è una forma indeterminata.*</u>

3. $(Se\ a_n \longrightarrow \ell \neq 0\ e\ b_n \longrightarrow \pm\infty) \Longrightarrow (a_n \cdot b_n \longrightarrow \pm\infty)$ *(vale la regola dei segni)*

Nulla si può dire se $\ell = 0$:

<u>$0 \cdot \infty$ *è una forma indeterminata.*</u>

4. $(Se\ a_n \longrightarrow \pm\infty\ e\ b_n \longrightarrow \pm\infty) \Longrightarrow (a_n \cdot b_n \longrightarrow \pm\infty)$; *(vale la regola dei segni)*
5. $(Se\ a_n \longrightarrow \ell \neq 0\ e\ b_n \longrightarrow m \neq 0) \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{l}{m}\right)$;

5.1 $(Se\ a_n \longrightarrow \ell \neq 0\ e\ b_n \longrightarrow 0) \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{l}{m} = \infty\right)$;

Nulla si può dire se $\ell = m = 0$:

$\frac{0}{0}$ <u>*è una forma indeterminata*</u>.

5.2 $(Se\ a_n \longrightarrow \pm\infty\ e\ b_n \longrightarrow m \in R) \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \pm\infty\right)$; *(vale la regola dei segni)*

5.2 $(Se\ a_n \longrightarrow \ell\ e\ b_n \longrightarrow \pm\infty \in R) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0\right)$.

Nulla si può dire se $a_n \longrightarrow \pm\infty$ *e* $b_n \longrightarrow \pm\infty$: $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *<u>è una forma indeterminata.</u>*

<u>Tabella delle forme indeterminate</u>

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$

Dim. 1 – Poiché $\{a_n\}$ *è limitata* $\Leftrightarrow \exists L > 0 \ni' \forall n \in N: -L \leq a_n \leq L$;

inoltre, supponendo che $\lim_n b_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: b_n > M$.

Quindi, $\forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: \begin{cases} a_n \geq -L \\ b_n > M \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n > M - L \geq M \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n \geq n_0: a_n + b_n > M \Leftrightarrow \lim_n (a_n + b_n) = +\infty$.

Analogamente si ragiona se $b_n \longrightarrow -\infty$.

Dim. 1.1 – E' una conseguenza della (1), non appena si tiene conto che ogni successione convergente è limitata.

Le dimostrazioni da (2) a (5.2) sono omesse.

Esercizio 1 – Studiare $\lim_n a^n$, *al variare di a in R. (Teorico)*

Soluzione

1° caso – Sia a > 1.

$\forall M > 0: a^n > M \Rightarrow log_a(a^n) > log_a(M) \Rightarrow n > log_a(M)$.

Se diciamo $n_0 = min\{n \in N | n > log_a(M)\}$, *si ha che* $\forall n > n_0: n > log_a(M)$.

Quindi, $\forall M > 0, \exists n_0 \in N \ni' \forall n > n_0: a^n > M \Leftrightarrow \lim_n a^n = +\infty$.

2° caso – Sia $a = 1$.

In tal caso $\{a^n\} = \{1^n\} = \{1\} \Leftrightarrow$ *la successione è costante ed è* $\lim_n 1^n = 1$.

3° caso – Sia $0 < a < 1$.

$$0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim_n \left(\frac{1}{a}\right)^n = \big(per\ (1)\big) = +\infty \Rightarrow \lim_n a^n = \lim_n \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

4° caso – Sia $a = 0$.

In tal caso $\forall n \in N: 0^n = 0 \Leftrightarrow$ *la successione è costante, di costante valore* $0 \Longrightarrow \lim\limits_n a^n = \lim\limits_n 0 = 0$.

5° caso – Sia $-1 < a < 0$.

In tal caso si ha:

$-1 < a < 0 \Leftrightarrow 0 < -a < 1 \Longrightarrow 0 < |a| = -a < 1 \Longrightarrow$ *(per la (3))* $\Longrightarrow \lim\limits_n |a|^n = 0 \Longrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_n |a^n| = 0 \Longrightarrow \lim\limits_n a^n = 0$.

6° caso – Sia $a = -1$.

In tal caso $\{a^n\} = \{(-1)^n\}$ *e tale successione si è visto essere non regolare.*

7° caso – Sia $a < -1$.

In tal caso si ha:

$a < -1 \Longrightarrow -a > 1 \Longrightarrow |-a| = -a > 1 \Longrightarrow a = -|a|$ *e* $\lim\limits_n |-a|^n = +\infty \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a^n = (-|a|)^n = (-1)^n(|a|)^n$ *e tale ultima successione è non regolare.*

Riassumendo

$\lim\limits_n a^n$	
$+\infty$	$a > 1$
1	$a = 1$
0	$-1 < a < 1$
$\nexists$	$a \leq -1$

Esempi

- $\lim\limits_n 3^n = +\infty$;
- $\lim\limits_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$;
- $\lim\limits_n \left(\frac{1}{\pi}\right)^n = 0$.

Esercizio 2 – Studiare $\lim\limits_n n^\beta$, *al variare di* β *in R. (Teorico)*

Si dimostra che:

$\lim_n n^{\beta}$	
$+\infty$	$\beta > 0$
1	$\beta = 0$
0	$\beta < 0$

Alcuni esempi sono:

- $\lim_n \sqrt{n} = \lim_n n^{\frac{1}{2}} = \left(\beta = \frac{1}{2} > 0\right) = +\infty$;
- $\lim_n \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \lim_n n^{-\frac{1}{3}} = \left(\beta = -\frac{1}{3} < 0\right) = 0$;
- $\lim_n\left(\sqrt{n} - 1\right) =$ *(somma di una successione divergente e di una limitata)* $= +\infty$;
- $\lim_n\left[\sqrt{n} + (-1)^n\right] =$ *(somma di una successione divergente e di una successione non regolare ma limitata)* = = $+\infty$;
- $\lim_n \sqrt{n+1}$

  Poiché $\forall n \in N: n + 1 > n \Rightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow$ *(per il teorema del confronto)*

  $\lim_n \sqrt{n+1} = +\infty$;

- $\lim_n \sqrt{n-1}$

  Poiché $\forall n \in N: \sqrt{n-1} > \sqrt{n} - 1 \Rightarrow$ *(per (3) e per il teorema del confronto)*
- $\Rightarrow \lim_n \sqrt{n-1} = +\infty$

&7.6 – Ulteriori forme indeterminate: $0^0, \infty^0, 1^{\infty}$

Il vero problema nel calcolo dei limiti sono le forme indeterminate.

Non esiste un unico procedimento che elimina l'indeterminazione ma più procedimenti che dipendono fortemente dal tipo di limite da calcolare: un esempio è il limite "e".

Teorema 7.6.1 – (Il numero di Nepero "e")

Sia $\{a_n\}$ *la successione così definita* $\forall n \in N: a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Si dimostra che $\{a_n\}$ *è convergente ed è* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, *dove "e" è un numero irrazionale compreso fra 2 e 3* ($e = 2.71828\ldots$), *detto numero di Nepero.*

Dim. Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞.

1. *Dimostriamo, come primo passo, che* $\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ *è una successione strettamente crescente.*

- $\forall n \in N, n \geq 1: a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} =$

$$= \left(poich\grave{e}\ \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{k}(n+1-k)}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(1+k\frac{-1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n^k} = (per\ la\ disuguaglianza\ di\ Bernoulli: 1+kx \leq (1+x)^k)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^k\cdot\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^k\cdot\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot\frac{n^k}{(n+1)^k}\cdot\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)^k} < \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall n \in N, n \geq 1: a_n < \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}};$$

- $\forall n \in N, n \geq 1: a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^k\cdot 1^{n+1-k} =$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$\Rightarrow \forall n\in N, n\geq 1: a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$

Quindi,$\forall n\in N, n\geq 1: a_n\leq a_{n+1}\Leftrightarrow \{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ *è monotona crescente.*

2. *Dimostriamo, ora, che* $\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ *è una successione limitata.*

a) *Poiché* $\{a_n\}$ *è crescente* $\Rightarrow \forall n\geq 1: a_1\leq a_n \Leftrightarrow \forall n\geq 1: 2\leq a_n \Leftrightarrow$ a_n *è limitata inferiormente.*

b) *Dimostriamo che* $\{a_n\}$ *è limitata superiormente.*

$\forall n\in N, n\geq 1: a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$ *(sviluppo del binomio di newton)* =

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k}=\binom{n}{0}\cdot\frac{1}{n^0}+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n^1}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{n!}{1!\,(n-1)!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n!}{3!\,(n-3)!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!\,1!}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n!}{n!\,0!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+\frac{n(n-1)!}{1|(n-1)|}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!\,(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!\,(n-3)!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{(n-1)!\,1!}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+\frac{1}{1|}+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{n^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n^n}=$$

$$=1+\frac{1}{1|}+\frac{1}{2!}\left[\frac{n^2-n}{n^2}\right]+\frac{1}{3!}\cdot\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right]+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{n^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n^n}=$$

$$=1+\frac{1}{1|}+\frac{1}{2!}\left[\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}\right]+\frac{1}{3!}\cdot\left[\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right]+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{n^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n^n}=$$

$$= 1 + \frac{1}{1|} + \frac{1}{2!}\left[1 - \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{3!} \cdot \left[\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\right] + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)..2}{n^{n-2}}$$
$$+ \frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1|} + \frac{1}{2!}\left[1 - \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{3!} \cdot \left[\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\right] + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}..\frac{n-n+2}{n}\right]$$
$$+ \frac{1}{n!}\left[\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}..\frac{n-n+1}{n}\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{1|} + \frac{1}{2!}\left[1 - \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{3!} \cdot \left[(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\right] + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}..\frac{n-n+2}{n}\right]$$
$$+ \frac{1}{n!}\left[\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}..\frac{n-n+1}{n}\right] =$$

$= 1 + \frac{1}{1|} + \frac{1}{2!}\left[1 - \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{3!} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)..\left(\frac{2}{n}\right)\right] +$
$\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)..\left(\frac{1}{n}\right)\right] <$ (*poiché* $1 - \frac{h}{n} < 1$)

$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}[1] + \frac{1}{3!} \cdot [1 \cdot 1] + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot [(1)(1)..(1)] + \frac{1}{n!}[(1)(1)..(1)] =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < (poich\grave{e}\ k! > 2^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}})$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

(l'espressione in paretesi è la somma di n termini in progressione geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$, $s_n = \frac{1}{1-q} = 2, per\ n \longrightarrow \infty$)

$= 1 + 2 = 3.$

Quindi, $\forall n \in N, n \geq 1: \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \Leftrightarrow \{a_n\}$ *è limitata superiormente.*

Poiché $\{a_n\}$ *è monotona crescente e limitata, per il criterio di regolarità delle successioni monotone, essa è convergente ed è*

$$\lim_n\{a_n\} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = sup\{a_n, n \in N\}.$$

Il valore di tale limite

$$\lim_{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

è il numero di Nepero "e" che è un numero irrazionale compreso fra 2 e 3 e le cui prime cifre sono: $e = 2.71828 \ldots \ldots$

Progressioni aritmetiche – Progressioni geometriche

&7.7 - Progressioni aritmetiche e geometriche

Particolari successioni sono le progressioni.

(1) Progressioni aritmetiche

Def.7.7.1 – (Definizione di progressione aritmetica)

Si dice che la successione $\{a_n\}$ *è una progressione aritmetica se*

$$\forall n \in N: a_{n+1} - a_n = d \ (costante)$$

La differenza costante *d* *fra ogni termine della successione e il termine precedente si dice* *ragione* *della progressione aritmetica.*

Esempio 1 – La successione dei numeri naturali

$$(n)_{n\in N} = \{0,1,2,..,n,n+1,..\}$$

è una progressione aritmetica di ragione d = 1.

Esempio 2 – La successione dei numeri naturali pari,

$$(2n)_{n\in N} = \{0,2,4,\ldots,2n,2n+2,\ldots\}$$

è una progressione aritmetica di ragione d = 2.

Esempio 3 – La successione dei numeri naturali dispari,

$$(2n+1)_{n\in N} = \{1,3,5,\ldots,2n+1,2n+3,\ldots\}$$

è una progressione aritmetica di ragione d = 2.

Proprietà delle progressioni aritmetiche

Prop.7.7.1 – Se $\{a_n\}$ *è una progressione aritmetica,* $\forall n \in N$ *si dimostra che:*

1. $a_{n+1} = a_n + d$;

2. $a_n = a_1 + (n-1)d$;
3. $a_n = a_s + (n-s)d$;
4. *La somma dei termini estremi e dei termini equidistanti dagli estremi è costante:*

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_r + a_s;$$

5. $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$

Dim.1 – Per definizione di progressione aritmetica di ragione d è:

$a_{n+1} - a_n = d \Rightarrow a_{n+1} = a_n + d.$

Dim.2 – Per la (1): $\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_2 + d \\ a_4 = a_3 + d \\ \dots \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases}$ $\Rightarrow$*(sommando membro a membro)*

$\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = (a_1 + d) + (a_2 + d) + (a_3 + d) + \cdots + (a_{n-1} + d) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (n-1)d \Rightarrow$

$\Rightarrow$*(semplificando)* $a_n = a_1 + (n-1)d.$

Dim.3 – Per la (2), si ha:

$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_s = a_1 + (s-1)d \end{cases}$ $\Rightarrow$*(sottraendo membro a membro)*

$\Rightarrow a_n - a_s = a_1 + (n-1)d - a_1 + (s-1)d = (n-1)d - (s-1)d = (n-1-s+1)d$

$\Rightarrow a_n - a_s = (n-s)d.$

Dim.4 – Se $a_r = a_1 + (r-1)d$ *e* $a_n = a_s + (n-s)d$, *con* $r-1 = n-s$, *si ha:*

$a_r + a_s = a_1 + (r-1)d + [a_n - (n-s)d] = a_1 + (r-1)d + a_n - (n-s)d =$

$= a_1 + a_n + [(r-1) - (n-s)]d = a_1 + a_n \Rightarrow a_r + a_s = a_1 + a_n, \forall r, s \ni' r-1 = n-s.$

Dim.5 –

$\begin{cases} s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ s_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \end{cases}$ $\Rightarrow$*(sommando membro a membro)*

$\Rightarrow 2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Prop.7.7.2 – Se $\{a_n\}$ *è una progressione aritmetica di ragione d, si ha che:*

a) $\{a_n\}$ *è strettamente crescente se* $d > 0$;

b) $\{a_n\}$ *è strettamente decrescente se* $d < 0$.

La dimostrazione è ovvia.

(2) Progressioni geometriche

Def.7.7.2 – (Definizione di progressione geometrica)

Data una successione $\{a_n\} \ni' \forall n \in N: a_n \neq 0,$ *si dice che la successione* $\{a_n\}$ *è una progressione geometrica se*

$$(3)\ \forall n \in N: \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ (costante)$$

Il rapporto costante "q" fra ogni termine della successione e il termine precedente si dice ragione della progressione geometrica.

Esempio 1 – La successione di termine generale 2^n,

$$(2^n)_{n \in N} = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n, ..\} = \{1,2,4,8, \dots\}$$

è una progressione geometrica di ragione $q = 2$.

Esempio 2 - La successione di termine generale $\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in N} = \left\{1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$$

è una progressione geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$.

Proprietà delle progressioni geometriche

Prop.7.7.2 – Se $\{a_n\}$ *è una progressione geometrica di ragione q,* $\forall n \in N$ *si dimostra che:*

1. $a_{n+1} = q \cdot a_n$;
2. $a_n = q^{n-1} a_1$;
3. $a_n = q^{n-s} a_s$;
4. *Il prodotto dei termini estremi e dei termini equidistanti dagli estremi è costante:*

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_r \cdot a_s;$$

5. $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$;
6. $p_n = a_1 a_2 \cdots a_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_n}$

Dim. 5 –

$$\begin{cases} s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ s_n q = a_1 q + a_2 q + \cdots + a_n q \end{cases} \Rightarrow s_n q - s_n = a_1 q + a_2 q + \cdots + a_n q - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$$

$$= a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_n q - a_1 - a_2 - \cdots - a_n = a_n q - a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n q - s_n = a_n q - a_1 = (\textit{ per la (2)})\ (a_1 q^{n-1}) q - a_1 = a_1 q^n - a_1 = a_1 (q^n - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n q - s_n = a_1 (q^n - 1) \Rightarrow S_n (q-1) = a_1 (q^n - 1) \Rightarrow s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dim. 6 –

$$\begin{cases} p_n = a_1 a_2 \cdots a_n \\ p_n = a_n a_{n-1} \cdots a_1 \end{cases} \Rightarrow p_n^2 = (a_1 a_2 \cdots a_n)(a_n a_{n-1} \cdots a_1) = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) .. (a_n a_1) =$$

$$= \big(per\ la\ (4)\big) = (a_1 a_n)^n \Rightarrow p_n^2 = (a_1 a_n)^n \Rightarrow p_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_n}.$$

Prop.7.7.3 - Se $\{a_n\}$ *è una progressione geometrica di ragione q, si ha che:*

a) $\{a_n\}$ *è una progressione geometrica strettamente crescente se* $q > 1$;

b) $\{a_n\}$ *è una progressione geometrica strettamente decrescente se* $0 < q < 1$;

c) $\{a_n\}$ *è una progressione geometrica costante se* $q = 1$;

d) $\{a_n\}$ *è una progressione geometrica a segno alterno se* $q < 0$.

Esempio – La successione di termine generale $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$,

$$\{a_n\} = \{(-1)^n \cdot 2^n\}_{n \in N} = \{1, -2^1, 2^2, -2^3, \dots\} = \{1, -2, 4, -8, \dots\}$$

è una progressione geometrica di ragione $q = -2 < 0$, *a termini con segno alterno (oscillante).*

Prop.7.7.4 – Se $\{a_n\}$ *è una progressione geometrica di ragione* $|q| < 1$, *si dimostra che* $\{a_n\}$ *è convergente ed è:*

$$\sum_{1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{a_1}{1-q}.$$

Dim.

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \left(a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = a_1 \frac{1 - 0}{1 - q} = a_1 \frac{1}{1 - q}.$$

Esempio – La progressione geometrica $\left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$, *di ragione* $q = \frac{1}{2}$, *è convergente ed ha per somma* $S = a_1 \frac{1}{1-q} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$