Massimi, minimi e flessi – Teoremi con le derivate successive

lunedì 14 ottobre 2024 05:43

Teorema 1 - (C.N. - Teorema di Fermat per i flessi)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile almeno due volte in $x_0 \in X \cap DX$, si dimostra che:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Se } x_0 \text{ è un punto} \\ \text{di flesso per } f\end{array}\right) \Rightarrow \left(f''(x_0) = 0 \right)$$

Oss. La condizione è solo necessaria.

Teor. 2 - (1^a C.S. per i flessi)
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile almeno tre volte in $x_0 \in X \cap DX$, si dimostra che:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Se } \; f''(x_0) = 0 \\ \quad\;\; f'''(x_0) \neq 0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l}x_0 \text{ è un punto di flesso} \\ \text{per } f\end{array}\right)$$

Più in generale:

Teorema 3 -
Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile almeno n-volte in $x_0 \in X \cap DX$, si dimostra che se:

$$\left(\begin{array}{l}f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) \text{ Se } n \text{ è pari: } \begin{cases} x_0 \text{ è un punto di minimo, se } f(x_0) > 0 \\ x_0 \text{ " " " di max, se } f(x_0) < 0 \end{cases} \\ \\ 2) \text{ Se } n \text{ è dispari: } x_0 \text{ è un punto di flesso.} \end{cases}$$

Teorema 4 -

Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile almeno n-volte in $x_0 \in X \cap DX$, si dimostra che se:

$$\left(\begin{array}{l} f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} 1) \text{ se } n \text{ è pari: } \begin{cases} f \text{ è convessa in } x_0, \text{ se } f^{(n)}(x_0) > 0 \\ f \text{ è concava in } x_0, \text{ se } f^{(n)}(x_0) < 0 \end{cases} ; \\ 2) \text{ se } n \text{ è dispari: } x_0 \text{ è un punto di flesso per } f \end{array} \right).$$