Cap. 5 – Calcolo infinitesimale - Teoria dei limiti delle funzioni reali di una variabile reale

&5.1 - Introduzione al limite di una funzione reale di variabile reale

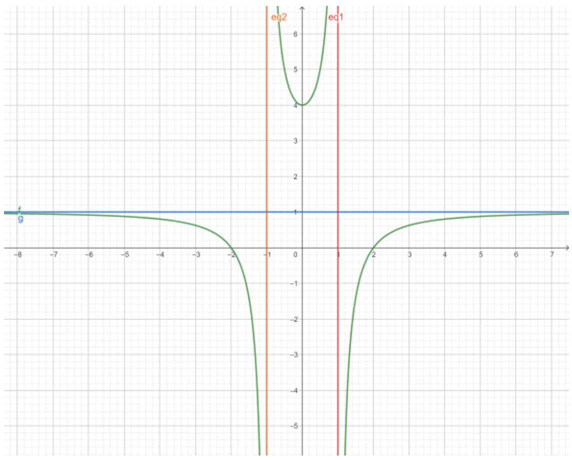
Partiamo con un esempio. Sia f *la funzione così definita:*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$$

Il dominio di tale funzione è:

$$D_f: \begin{cases} \forall x \in R \ (esistenza\ del\ numeratore) \\ \forall x \in R \ (esistenza\ del\ denominatore) \\ x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1 \quad (esistenza\ della\ fratta) \end{cases} \implies x \neq \pm 1 \iff D_f = R - \{\pm 1\}.$$

Il grafico è:



Si presentano i seguenti problemi:

P1 - Quale valore assume la funzione se diamo a x valori reali diversi da ± 1*, ad esempio x = 0, 2, -2, .., ecc.: la risposta è semplice. Il valore che la funzione f assume in:*

- $x = 0$ *è* $f(0) = \frac{0-4}{0-1} = 4;$
- $x = 2$ *è* $f(2) = \frac{4-4}{4-1} = 0;$
- *e così via….*

Il valore che la funzione assume in ogni $x \in D$ *si ottiene sostituendo il valore di x nella legge f(x).*

P2 - Se scegliamo x = 1 , non esiste il valore di f in 1 *perché* $1 \notin D_f$*: in questo caso, però, poiché* $x_0 = 1$ *è un punto di accumulazione per il dominio D, è possibile calcolare il valore che la funzione assume per gli infiniti valori di* $x \in D$ *che sono ordinatamente sempre più vicini a 1, sia per valori minori sia per valori maggiori di 1.*

- *Utilizzando una tabella, è facile constatare che quanto più x tende a* 1*, con* $x < 1$*, tanto più* $f(x)$ *tende ad assumere valori sempre più grandi, ordinatamente più grandi: si dice, in tal caso, che la funzione f(x) tende a* $+\infty$ *per x che tende a 1, per valori minori di 1,* e si scrive:

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \right) = +\infty.$$

- *Se invece diamo alla x valori ordinatamente sempre più vicini a 1, maggiori di 1, la funzione tende ad assumere valori sempre più piccoli, sempre più piccoli: si dice in tal caso che la funzione f(x) tende a* $-\infty$ *per x che tende a 1, per valori maggiori di 1,* e si scrive:

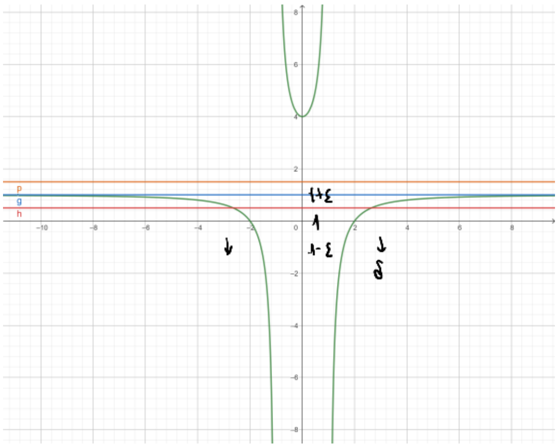
$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \right) = -\infty.$$

P3 – Un ulteriore problema è il seguente: poiché il dominio della funzione

$$D_f = R - \{\pm 1\}$$

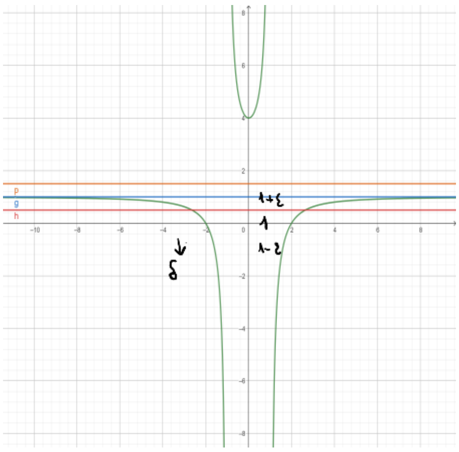
è illimitato superiormente, è possibile dare alla x valori sempre più grandi, ordinatamente più grandi, e calcolare ogni volta il valore corrispondente f(x).

Anche in questo caso, utilizzando una tabella, si può verificare che, dando alla x valori ordinatamente sempre più grandi, la funzione f(x) tende ad assumere valori sempre più prossimi al valore 1 *così che la differenza fra f(x) e* 1 *diventa così piccola da essere minore di un* *numero* $\varepsilon > 0$, *per quanto piccolo sia stato scelto* ε: *si dice in tal caso, che la funzione tende a* 1 *per* $x \longrightarrow +\infty$ *e si scrive* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 1.$



P4 - Infine, poiché il dominio $D_f = R - \{\pm 1\}$ *della funzione è illimitato anche inferiormente, è possibile dare alla x valori sempre più piccoli, ordinatamente più piccoli, e calcolare ogni volta il valore corrispondente di f(x).*

Anche in questo caso, utilizzando una tabella, si può verificare che, dando alla x valori ordinatamente sempre più piccoli, f(x) tende ad assumere valori sempre più vicino a 1: si dice, in tal caso, che la funzione tende a 1 per $x \longrightarrow -\infty$ *e si scrive* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 1.$



Questi esempi mostrano la necessità di dover introdurre in maniera rigorosa un nuovo concetto, il *concetto di limite di ua funzione*, e di studiare teoremi e proprietà che consentono di calcolare in maniera univoca il limite di una qualsiasi funzione.

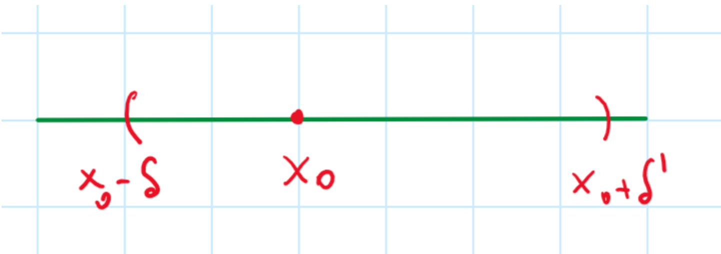
&5.2 - Limite di una funzione – Definizione topologica

In tale teoria è fondamentale il concetto di intorno sia di un numero reale x_0 sia di $\pm\infty$.

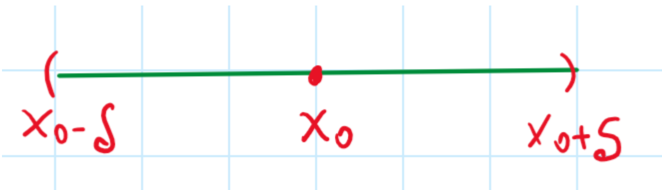
Ricordiamo le definizioni di intorno di un numero reale x_0 e di $\pm\infty$.

Def. 5.2.1 – (Definizione di intorno, intorno destro, intorno sinistro di $x_o \in R$)

a) $\forall x_0 \in R$, si dice intorno completo di x_0 (o semplicemente intorno di x_0) ogni intervallo aperto al quale x_0 appartiene.



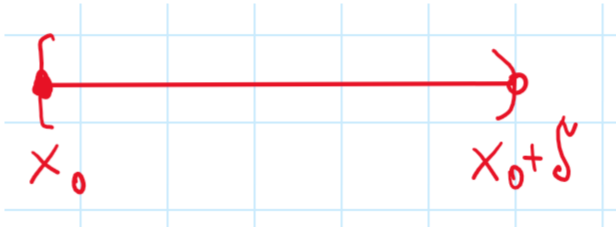
Se x_0 è il centro (punto medio) dell'intervallo, l'intorno di x_0 si dice circolare e si denota con $I_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, con $\delta > 0$:



b) $\forall x_0 \in R$, si dice intorno destro di x_0 ogni intervallo aperto a destra avente x_0 come suo estremo sinistro.

Il generico intorno destro di x_0 si denota con $I^+(x_o)$ o con $I^d(x_o)$ ed è un intervallo del tipo:

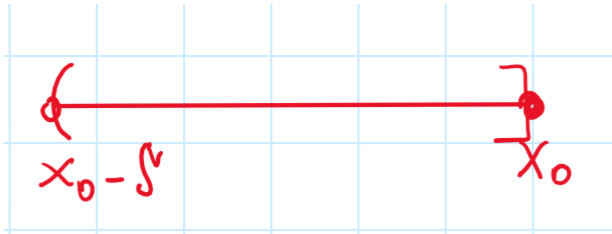
$$[x_0, x_0 + \delta[, \text{con } \delta > 0.$$



c) $\forall x_0 \in R$, *si dice e intorno sinistro di x_0 ogni intervallo aperto a sinistra avente x_0 come suo estremo destro.*

Il generico intorno sinistro di x_0 si denota con $I^-(x_o)$ o con $I^s(x_o)$ ed è un intervallo del tipo:

$$]x_0 - \delta, x_0], \text{con } \delta > 0,$$

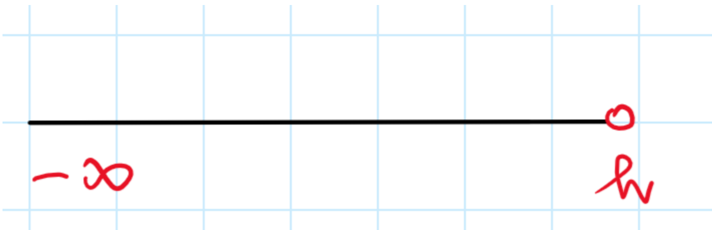


Def. 5.2.2 – (Definizione di intorno di $\pm\infty$)

a) Si dice intorno di $-\infty$ ogni intervallo aperto e illimitato inferiormente di R.

Il generico intorno di $-\infty$ è un intervallo del tipo:

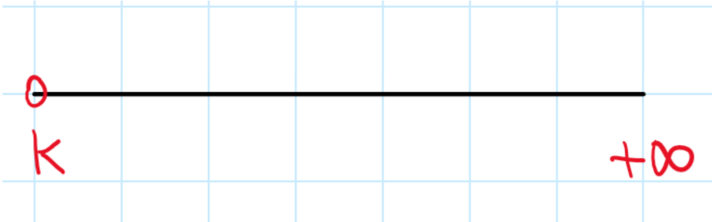
$$I(-\infty) =]-\infty, h[, \text{ con } h \in R,$$



b) Si dice intorno di $+\infty$ ogni intervallo aperto e illimitato superiormente di R.

Il generico intorno di $+\infty$ è un intervallo del tipo:

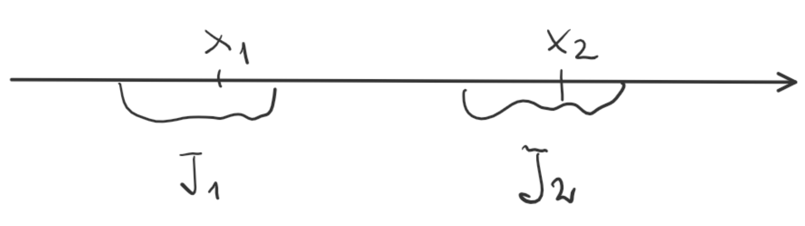
$$I(+\infty) =]k, +\infty[, \ con \ \ k \in R,$$



Proprietà di Hausdorff

Prop.5.2.1 - (Proprietà di Hausdorff degli intorni)

$\forall x_1, x_2 \in R \ \ \ni' \ x_1 \neq x_2, \exists J_1 \in \mathcal{J}(x_1) \ e \ \ \exists J_2 \in \mathcal{J}(x_2) \ \ \ni' \ J_1 \cap J_2 = \emptyset.$



Dim. $\forall x_1, x_2 \in R \ \ \ni' \ x_1 \neq x_2 : x_1 - x_2 \neq 0 \Longrightarrow d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| > 0.$

Posto

$$r = \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$$

si ha che:

$\exists J_1 = B_r(x_1), \exists J_2 = B_r(x_2) \ \ni' \ \forall x \in J_1 : d(x, x_1) < r \Longrightarrow (per\ la\ prop.triangolare)$

$\forall x \in J_1 : d(x_1, x_2) \leq \ d(x_1, x) + \ d(x, x_2) \Leftrightarrow 3r \leq r + \ d(x, x_2) \Longrightarrow$

$\forall x \in J_1 : 2r \leq \ d(x, x_2) \Longrightarrow \ \forall x \in J_1 : d(x, x_2) \geq 2r > r \Longrightarrow \forall x \in J_1 : x \notin B_r(x_2) = J_2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow J_1 \cap J_2 = \emptyset.$

Tutto ciò premesso, possiamo dare la definizione generale di limite, valida sia per $x \longrightarrow x_0$ sia per $x \longrightarrow \pm\infty$.

Def. 5.2.3 - (Definizione generale di limite)

Se $f: X \longrightarrow R$ *e se* $c \in \hat{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ *è un punto di accumulazione per X si dice che:*

$$\left(\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = \ell \in \hat{R}\right) \Leftrightarrow (\forall I \in \mathcal{J}(\ell), \exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J \cap X, x \neq c: f(x) \in I).$$

Esplicitiamo tale definizione distinguendo i casi che il punto $\boldsymbol{c}$ *sia finito/infinito e che il limite* ℓ *sia finito/infinito.*

Osserviamo preliminarmente che:

1) *Se* $c = x_0 \in \mathbb{R}$ *(reale finito), il generico intorno di* x_0 *è del tipo:*

$J =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, *con* $\delta > 0 \Leftrightarrow J = \{x \in R | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J = \{x \in R | -\delta < x - x_0 < \delta\} \Leftrightarrow J = \{x \in R | |x - x_0| < \delta\};$

2) *Se* $c = +\infty$, *il generico intorno di* $c = +\infty$ *è:*

$$J =]\delta, +\infty[= \{x \in R | x > \delta\};$$

3) *Se* $c = -\infty$, *il generico intorno di* $c = -\infty$ *è:*

$$J =]-\infty, \delta[= \{x \in R | x < \delta\}.$$

Esplicitiamo la definizione di limite nei diversi casi.

1.a - Il limite (completo) per $x \longrightarrow x_0$

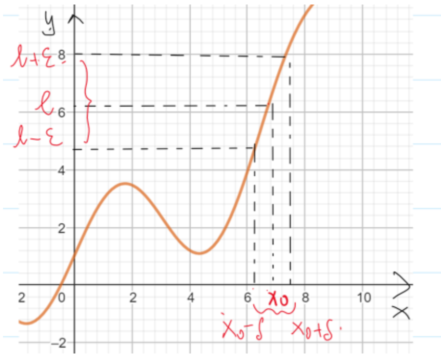
Def.5.2.4 - Sia $f: X \longrightarrow R$ *una funzione reale di variabile reale e sia* $x_0 \in R$ *di accumulazione per il dominio X.*

a) *Si dice che la funzione* f *è convergente al numero* $\ell \in R$ *per* x *che tende a* x_0 *e si scrive*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta: |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow$

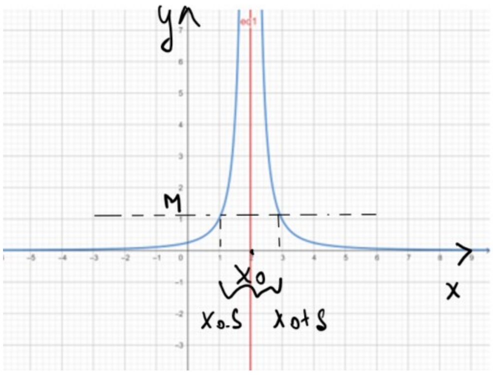
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta: \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$



a) Si dice che la funzione f è divergente positivamente per x che tende a x_0 e si scrive

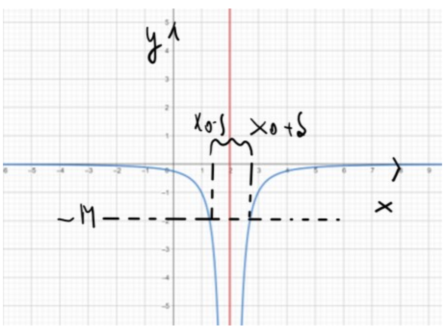
$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Se $\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta : f(x) > M.$



b) Si dice che la funzione f è divergente negativamente per x che tende a x_0 e si scrive $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ *se:*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta : f(x) < -M.$$



Def.5.2.5 - Una funzione f si dice regolare in x_0 se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \hat{R} \text{ (finito o infinito),}$$

altrimenti si dice che la funzione è non regolare in x_0.

1.b - Il limite per $x \to x_0$ da sinistra

Def.5.2.6 - (Limite da sinistra)

Sia $f: X \to R$ *una funzione reale di variabile reale e sia* $x_0 \in R$ *di* <u>*accumulazione a sinistra*</u> *per il dominio X.*

a) Si dice che la funzione f converge ad $\ell \in R$ *per x che tende a* x_0 *da sinistra e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0^s} f(x) = \ell$$

Se $\forall \varepsilon > 0, \exists J \in I^s(x_0) \ni' \forall x \in J \cap X, x \neq x_0: |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$

b) Si dice che la funzione f diverge positivamente per x che tende a x_0 *da sinistra e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0^s} f(x) = +\infty$$

Se $\forall M > 0, \exists J \in I^s(x_0) \ni' \forall x \in J \cap X, x \neq x_0: f(x) > M.$

c) *Si dice che la funzione f diverge negativamente per x che tende a* x_0 *da sinistra e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0^s} f(x) = -\infty$$

Se $\forall M > 0, \exists J \in I^s(x_0) \ni' \forall x \in J \cap X, x \neq x_0: f(x) < -M.$

1.c - Il limite per $x \to x_0$ da destra

Def.5.2.7 - Sia $f: X \to R$ *una funzione reale di variabile reale e sia* $x_0 \in R$ *di accumulazione a destra per il dominio X.*

(a) Si dice che la funzione f converge ad $\ell \in R$ per x che tende a x_0 da destra e si scrive

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^d} f(x) = \ell$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J \in I^d(x_0) \ni' \forall x \in J \cap X, x \neq x_0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, x_0 < x < x_0 + \delta : |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

(b) Si dice che la funzione f diverge positivamente per x che tende a x_0 da destra e si scrive

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^d} f(x) = +\infty$$

se: $\forall M > 0, \exists J \in I^d(x_0) \ni' \forall x \in J \cap X, x \neq x_0 : f(x) > M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, x_0 < x < x_0 + \delta : f(x) > M.$

(c) Si dice che la funzione f diverge negativamente per x che tende a x_0 da destra e si scrive

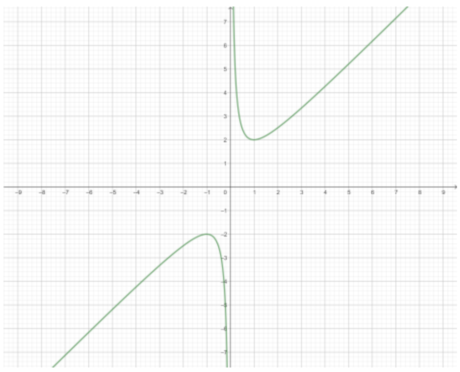
$$\lim_{x \longrightarrow x_0^d} f(x) = -\infty$$

se $\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, x_0 < x < x_0 + \delta : f(x) < -M.$

Def.5.2.8 – (Definizione di asintoto verticale)

Se $f : X \subseteq R \longrightarrow R$ e se $x_0 \in R \cap D_r(X)$ si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale da destra (risp. da sinistra) per la funzione se

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \ (risp. \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty\ )$$



2. *Il limite per $x \longrightarrow +\infty$*

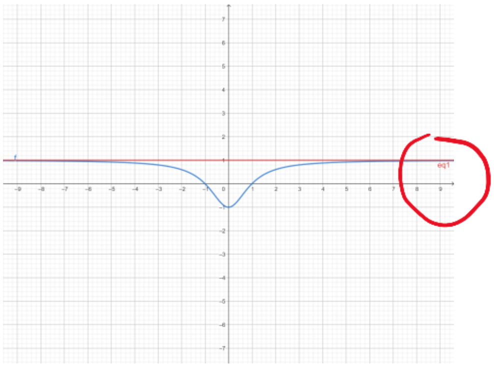
Def.5.2.9 - Sia $f: X \longrightarrow R$ una funzione reale di variabile reale definita nell'insieme X illimitato superiormente.

(a) Si dice che la funzione f converge ad $\ell \in R$ per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

se:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, x > \delta: |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$



In tal caso, la retta di equazione $y = \ell$ si dice asintoto orizzontale a destra della funzione.

(b) Si dice che la funzione f diverge positivamente per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

se:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, x > \delta: f(x) > M.$$

(c) Si dice che la funzione f diverge negativamente per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

se:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in X, x > \delta : f(x) < -M.$$

3. Il limite per $x \longrightarrow -\infty$

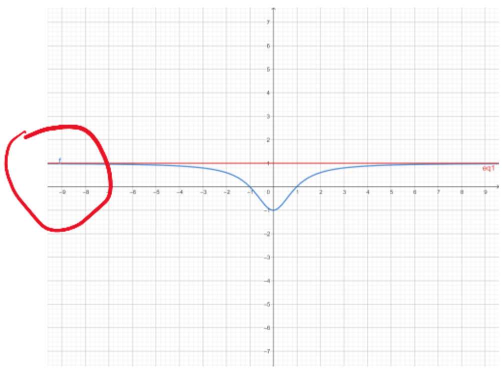
Def.5.2.10 - Sia $f: X \longrightarrow R$ una funzione reale di variabile reale definita nell'insieme X illimitato inferiormente.

(a) Si dice che la funzione f converge ad $\ell \in R$ per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta < 0 \ni' \forall x \in X, x < \delta : |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$



In tal caso, si dice che la retta di equazione $y = \ell$ è un asintoto orizzontale a sinistra della funzione.

(b) Si dice che la funzione f diverge positivamente per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall M > 0, \exists \delta < 0 \ni' \forall x \in X, x < \delta : f(x) > M.$$

(c) Si dice che la funzione f diverge negativamente per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall M > 0, \exists \delta < 0 \ \exists' \ \forall x \in X, x < \delta : f(x) < -M.$$

Limiti notevoli di funzioni elementari

Prop.5.2.1 - (Limiti notevoli delle funzioni elementari)

Applicando la definizione di limite si dimostra che:

1. $\lim_{x \to -\infty} x^n = (-\infty)^n = \begin{cases} -\infty, se\ n\ è\ dispari \\ +\infty,\ \ se\ n\ è\ pari \end{cases}$; $\lim_{x \to +\infty} x^n = (+\infty)^n = +\infty, \forall n \in N - \{0\}$;

2.

a) *Se n è dispari:* $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{-\infty} = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{+\infty} = +\infty$;

b) *Se n è pari:* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{+\infty} = +\infty$;

3.

a) $\lim_{x \to -\infty} a^x = (a)^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, se\ 0 < a < 1 \\ 0, \quad se\ a > 1 \end{cases}$;

b) $\lim_{x \to +\infty} a^x = (a)^{+\infty} = \begin{cases} 0, se\ 0 < a < 1 \\ +\infty, \quad se\ a > 1 \end{cases}$;

4.

a) $\lim_{x \to 0^+} log_a(x) = \begin{cases} +\infty, se\ 0 < a < 1 \\ -\infty,\ se\ a > 1 \end{cases}$;

b) $\lim_{x \to +\infty} log_a(x) = \begin{cases} -\infty, se\ 0 < a < 1 \\ +\infty, \quad se\ a > 1 \end{cases}$;

5. $\lim_{x \to -\infty} arctg(x) = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \to +\infty} arctg(x) = \frac{\pi}{2}$;

6. $\lim_{x \to -\infty} arcotg(x) = \pi$; $\lim_{x \to +\infty} arcotg(x) = 0$.

&5.3 - Teoremi fondamentali del limite di funzione

Teorema 5.3.1 (*) - (Teorema di unicità del limite)

Se $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* $c \in \widehat{\mathbb{R}}$ *un punto di accumulazione dell'insieme X, si dimostra che se f ha un limite (finito o infinito) per x che tende a* c *tale limite è unico, ovvero se:*

$$\begin{pmatrix} \lim_{x \longrightarrow c} f(x) = \ell_1 \in \widehat{\mathbb{R}} \\ \lim_{x \longrightarrow c} f(x) = \ell_1 \in \widehat{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \Longrightarrow (\ell_1 = \ell_2)$$

Dim. Supponiamo per assurdo che $\ell_1 \neq \ell_2 \Longrightarrow \exists I_1 \in \mathcal{J}(\ell_1), \exists I_2 \in \mathcal{J}(\ell_2) \ni' I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Allora per definizione di limite deve aversi:

1. $I_1 \in \mathcal{J}(\ell_1) \Longrightarrow \exists J_1 \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J_1 \cap X, x \neq c: f(x) \in I_1$;
2. $I_2 \in \mathcal{J}(\ell_2) \Longrightarrow \exists J_2 \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J_2 \cap X, x \neq c: f(x) \in I_2$.

Detto $J = J_1 \cap J_2 \in \mathcal{J}(c)$, *si ha che* $\ni' \forall x \in J \backslash \{c\}: \begin{cases} x \in J_1 \backslash \{c\} \\ x \in J_1 \backslash \{c\} \end{cases} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} f(x) \in I_1 \\ f(x) \in I_2 \end{cases} \Longrightarrow f(x) \in I_1 \cap I_2 \Longrightarrow I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ *e ciò è assurdo perché* $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ *per ipotesi.*

Dunque, se il limite di una funzione esiste esso è unico.

Teorema 5.3.2(*) - (Teorema della permanenza del segno - I formulazione)

Se una funzione ha un limite diverso da zero per x che tende a c, allora esiste un intorno di c in cui la funzione assume lo stesso segno del limite, ovvero se:

a) $\left(\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = \ell > 0\right) \Longrightarrow (\exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J \backslash \{c\}: f(x) > 0)$;

b) $\left(\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = \ell < 0\right) \Longrightarrow (\exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J \cap X \backslash \{c\}: f(x) < 0)$.

Dim. (a) –

1) *Dimostriamo il teorema nel caso in cui il limite l sia finito* ($l \in R$).

Poiché $\ell > 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0 \Rightarrow I =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[= \left]l - \frac{\ell}{2}, l + \frac{\ell}{2}\right[= \left]\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right[\in \mathcal{J}(\ell) \Rightarrow$ *(per def. di limite)* $\exists J \in \mathcal{J}(c) \ \ni' \ \forall x \in J \cap X \backslash \{c\}: f(x) \in \mathcal{J}(\ell) = \left]\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right[\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{\ell}{2} > 0 \Rightarrow f(x) > 0.$$

Dunque, se $\lim_{x \to c} f(x) = l \in R_0^+$, $\ell > 0 \Rightarrow \exists J \in \mathcal{J}(c) \ \ni' \ \forall x \in J \cap X \backslash \{c\}: f(x) > 0.$

2) *Dimostriamo, ora, il teorema nel caso in cui il limite* $\ell = +\infty$.

Poiché $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (per\ definizione\ di\ limite + \infty) \Leftrightarrow$

$\forall M > 0, \exists J \in \mathcal{J}(c) \ \ni' \ \forall x \in J \cap X \backslash \{c\}: f(x) > M > 0 \Leftrightarrow \exists J \in \mathcal{J}(c) \ \ni' \ \forall x \in J \cap X \backslash \{c\}: f(x) > 0.$

Dim. (b) La dimostrazione è analoga scegliendo $\varepsilon = -\frac{\ell}{2} > 0.$

Osservazione – Il teorema vale anche per i limiti da destra e da sinistra e per i limiti per x che tende a $\pm\infty$.

Corollario 5.3.1 (*) – (Teorema della permanenza del segno – II formulazione)

Se $f: X \to R$ *è una funzione tale che* $\exists \lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \hat{R}$, *si dimostra che se*

$$\exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J \backslash \{c\}: f(x) > 0 \qquad (risp.\ f(x) < 0)$$

allora è:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \geq 0.\ (risp.\ \ell \leq 0).$$

Dim. Dimostriamo che se $\exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J \backslash \{c\}: f(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \ell \geq 0.$

Se per assurdo fosse $\lim_{x \to c} f(x) = \ell < 0 \Rightarrow$*(per il teorema 6.3.2)* $\exists J' \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in X \cap J' \backslash \{c\}: f(x) < 0.$

Se diciamo $J'' = J \cap J'$, *risulta* $J'' \in \Im(c) \ni' \forall x \in X \cap J'' = X \cap J \cap J' \backslash \{c\}: \begin{cases} x \in J \Rightarrow f(x) > 0 \\ x \in J' \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$

e ciò è assurdo.

Teorema 5.3.3 (*) - (Teorema del doppio confronto o dei carabinieri)

Se f(x), g(x), h(x) sono tre funzioni definite in X e se c è un punto di accumulazione di X tale che:

1) $\exists J' \in \mathcal{J}(c)$ *tale che* $\forall x \in J' \cap X \backslash \{c\}: f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
2) $\exists \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = \ell \in \hat{R}$ *(finito/infinito)*

allora $\exists \lim_{x \to c} g(x) = \ell \in \hat{R}$.

Dim. Dobbiamo dimostrare che $\forall I \in \mathcal{J}(\ell), \exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J \backslash \{c\}: g(x) \in I$.

Sia $I \in \mathcal{J}(\ell) \Rightarrow$ *(per la (2))* $\begin{cases} \exists J'' \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J'' \backslash \{c\}: f(x) \in I \\ \exists J''' \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J''' \backslash \{c\}: h(x) \in I \end{cases}$.

Detto $J = J' \cap J'' \cap J''' \in \mathcal{J}(c)$, *si ha che* $\forall x \in (J' \cap J'' \cap J'''): \begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ f(x) \in I \\ h(x) \in I \end{cases}$

e poiché l'intervallo I è un insieme connesso, f(x), h(x) $\in I \Rightarrow g(x) \in I$.

Dunque, $\forall I \in \mathcal{J}(\ell), \exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J \backslash \{c\}: g(x) \in I \Leftrightarrow \lim_{x \to c} g(x) = \ell \in \hat{R}$.

Teoremi del limite della restrizione

Teorema 5.3.4 (*) - (1° Teorema della restrizione)

Se $f: A \to R$, $\forall X \subseteq A \ \ni' \ x_0 \in D_r(X)$, *detta*

$$f|_X: X \to R \ni' \forall x \in X: f|_X(x) = f(x)$$

la restrizione di f all'insieme X, si dimostra che se

$$(\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \hat{R}) \Rightarrow (\lim_{x \to x_0} f|_X(x) = \ell \in \hat{R}).$$

Dim.

Sia $I \in \mathcal{I}(l) \Rightarrow$*(poiché* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \hat{R}$) $\exists J \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in J \cap A \setminus \{x_0\}: f(x) \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow$*(poiché* $X \subseteq A$) $\exists J \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in J \cap X \setminus \{x_0\}: f|_X(x) = f(x) \in I$.

Dunque, $\forall I \in \mathcal{I}(l), \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in J \cap X \setminus \{x_0\}: f|_X(x) \in I \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f|_X(x) = l \in \hat{R}$.

Oss. Tale teorema è utile per dimostrare che non esiste il limite di una funzione: se, ad esempio, una restrizione non ha limite oppure si trova che due restrizioni hanno limite diverso, si può affermare che non esiste il limite della funzione.

Teorema 5.3.5 (*) – (2° Teorema della restrizione)

Se $f: A \to R$, *e se* $X_1, X_2 \subseteq A$ *tali che* $X_1 \cup X_2 = A$ *e se* $x_0 \in D_r(X_1)$ *e* $x_0 \in D_r(X_2)$, *si dimostra che:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \hat{R} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f|_{X_1}(x) = \lim_{x \to x_0} f|_{X_2}(x) = \ell \in \hat{R}.$$

Dim. (C.N.) - $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \hat{R} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f|_{X_1}(x) = \lim_{x \to x_0} f|_{X_2}(x) = \ell \in \hat{R}$

È vera per il teorema precedente.

Dim. (C.S.) - $\exists \lim_{x \to x_0} f|_{X_1}(x) = \lim_{x \to x_0} f|_{X_2}(x) = \ell \in \hat{R} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \hat{R}$.

Sia $I \in \mathcal{I}(l) \Rightarrow \begin{cases} \left(\text{poichè} \lim_{x \to x_0} f|_{X_1}(x) = l\right) \exists J_1 \in \mathcal{I}(l) \ni' \forall x \in J_1 \cap X_1 \setminus \{x_0\}: f|_{X_1}(x) \in I \\ \left(\text{poichè} \lim_{x \to x_0} f|_{X_2}(x) = l\right) \exists J_2 \in \mathcal{I}(l) \ni' \forall x \in J_2 \cap X_2 \setminus \{x_0\}: f|_{X_2}(x) \in I \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists J_1 \in \mathcal{I}(l) \ni' \forall x \in J_1 \cap X_1 \setminus \{x_0\}: f(x) = f|_{X_1}(x) \in I \\ \exists J_2 \in \mathcal{I}(l) \ni' \forall x \in J_2 \cap X_2 \setminus \{x_0\}: f(x) = f|_{X_2}(x) \in I \end{cases}$.

Detto $J = J_1 \cap J_2 \in \mathcal{I}(x_0)$, *si ha che* $\forall x \in J \cap A \setminus \{x_0\}: \begin{cases} x \in J_1 \cap X_1 \setminus \{x_0\}: f(x) \in I \\ x \in J_2 \cap X_2 \setminus \{x_0\}: f(x) \in I \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall I \in \mathcal{I}(l), \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \ni' \forall x \in J \cap A \setminus \{x_0\}: f(x) \in I \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \hat{R}$.

Teorema 5.3.6 (*) – (Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite di una funzione: teorema del limite sinistro e del limite destro)

Se $f: X \longrightarrow R$ *è una funzione di* $\mathcal{X}$ *in* $\mathcal{R}$ *e se* $x_0 \in R$ *è un punto di accumulazione sia a sinistra sia a destra per X, si dimostra che:*

$$\left(\exists \lim_{x\to x_0} f(x)\right) \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{x\to x_0^s} f(x), \exists \lim_{x\to x_0^s} f(x) \ \ni' \ \lim_{x\to x_0^s} f(x) = \lim_{x\to x_0^s} f(x) = \ell \in \widehat{\mathbb{R}}\right)$$

In tal caso è:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^s} f(x) = \lim_{x\to x_0^s} f(x) = \ell.$$

Dim. (C.N) - $\left(\exists \lim_{x\to x_0} f(x)\right) \Rightarrow \left(\exists \lim_{x\to x_0^s} f(x) = \lim_{x\to x_0^s} f(x) = \ell\right)$

Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall I \in \mathcal{J}(\ell), \exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J\backslash\{c\}: f(x) \in I.$

Supposto $J =]c-\delta, c+\varepsilon[\Rightarrow J =]c-\delta, c] \cup [c, c+\delta[\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in]c-\delta, c]\backslash\{c\}: f(x) \in I \\ \forall x \in]c, c+\delta]\backslash\{c\}: f(x) \in I \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists J' \in \mathcal{I}^-(c) \ni' \forall x \in J'\backslash\{c\}: f(x) \in I \\ \exists J' \in \mathcal{I}^-(c) \ni' \forall x \in J''\backslash\{c\}: f(x) \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to x_0^s} f(x) = \ell \\ \lim_{x\to x_0^d} f(x) = \ell \end{cases}$$

Dim. (C.S.) - $\left(\lim_{x\to x_0^s} f(x) = \lim_{x\to x_0^d} f(x) = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\right)$

Dobbiamo dimostrare che $\forall I \in \mathcal{J}(\ell), \exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J\backslash\{c\}: f(x) \in I.$

Sia $I \in \mathcal{J}(\ell)$:

1. *Poichè* $\lim_{x\to x_0^s} f(x) = \ell \Rightarrow \exists J' \in . \mathcal{J}^s(\ell) \ni' \forall x \in J'\backslash\{c\}: f(x) \in I;$
2. *Poichè* $\lim_{x\to x_0^d} f(x) = \ell \Rightarrow \exists J'' \in . \mathcal{J}^d(\ell) \ni' \forall x \in J''\backslash\{c\}: f(x) \in I.$

Se diciamo $J = J' \cup J''$, *risulta* $J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J\backslash\{c\}: f(x) \in I.$

Dunque, $\forall I \in \mathcal{J}(\ell), \exists J \in \mathcal{J}(c) \ni' \forall x \in J\backslash\{c\}: f(x) \in I \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$

Conseguenza: Se $\lim_{x\to x_0^s} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^d} f(x) \ \Rightarrow \nexists \lim_{x\to x_0} f(x).$

&5.4 - Operazioni con i limiti

Teorema 5.4.1 - (Teoremi della somma)

Siano $f,g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *due funzioni di X in R e sia* $x_o \in \hat{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ *un punto di accumulazione di X. Si dimostra che:*

1. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \ell + m$*;*
2. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \pm\infty$*;*
3. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \pm\infty$*;*

Nulla si può dire sul limite di f(x) + g(x) se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \mp\infty$.

$+\infty - \infty$ ***è la prima forma indeterminata.***

Teorema 5.4.2 - (Teoremi del prodotto)

Siano $f,g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *due funzioni di X in R e sia* $x_o \in \hat{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ *un punto di accumulazione per X. Si dimostra che:*

1. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \ell \cdot m$*;*
2. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \pm\infty$*;*
3. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \infty$.

Nulla si può dire sul limite del prodotto f(x) · g(x) se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \mp\infty$*:*

$\mathbf{0}\cdot\infty$ ***è la seconda forma indeterminata.***

Teorema 5.4.3 – (Teoremi del quoziente)

Siano $f, g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ *due funzioni di X in R e sia* $x_o \in \hat{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ *un punto di accumulazione per X. Si dimostra che:*

1. *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$*;*
2. *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0^+ \ (risp. 0^-) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{0^+} =$

   $\begin{cases} +\infty, \ se\ \ell > 0\ (risp. -\infty) \\ -\infty, se\ \ell < 0\ (risp. +\infty) \end{cases}$;

- *Nulla si può dire sul limite di* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$*:*

$\frac{0}{0}$ ***è la terza forma indeterminata.***

3. *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$; *(regola dei segni)*
4. *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

Nulla si può dire sul limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ *se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$*:*

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ***è la quarta forma indeterminata.***

Teorema 5.4.4 – (Limite della funzione $f(x)^{g(x)}$*)*

Se $f, g: X \longrightarrow R$ *e se* $x_o \in \hat{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ *è un punto di accumulazione per X, si dimostra che:*

$$Se \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \hat{R}^+ \ \ e \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \hat{R} \ \ \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \left[f(x)^{g(x)}\right] = \ell^m,$$

dove:

- $(0^+)^{+\infty} = 0$ *e* $(0^+)^{-\infty} = +\infty$*;*
- $\ell^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, se\ \ell > 1 \\ 0, se\ 0 < \ell < 1 \end{cases}$;
- $\ell^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, se\ 0 < \ell < 1 \\ 0, se\ \ell > 1 \end{cases}$;
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$;
- $(+\infty)^{-\infty} = 0$.

Nulla si può dire sul limite di $f(x)^{g(x)}$ *nei seguenti casi:* 0^0, ∞^0, 1^∞.

Tabella delle forme indeterminate (7)

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	0^0	∞^0	1^∞

Il vero <u>problema</u> nel calcolo dei limiti sono le <u>forme indeterminate</u>.

Teorema 5.4.5 – (Teorema del limite della funzione composta o del cambiamento di variabile)

Se $f: X \longrightarrow R$, $g: Y \longrightarrow R$ *sono due funzioni tali che:*

1. $\exists \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y_0 \in \hat{R}$
2. $\exists \lim_{y \longrightarrow y_0} g(y) = m \in \hat{R}$,
3. $\exists \bar{J} \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in \bar{J} \cap X \backslash \{x_0\}: f(x) \neq y_0$ *(limite di f)*

allora si dimostra che:

$$\exists \lim_{x \longrightarrow x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{y \longrightarrow y_0} g(y) = m \in \hat{R}$$

ovvero, nel limite di una composta, si sostituisce f(x) con y e si calcola il limite di g(y) per y che tende al valore a cui tende f(x) per x che tende a x_0.

Dim. Dobbiamo dimostrare che:

$$\forall I \in \mathcal{J}(m), \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni ' \forall x \in J \backslash \{x_0\}: g(f(x)) \in I.$$

1. *Sia* $I \in \mathcal{J}(m) \Longrightarrow$ (*poichè* $\lim_{y \longrightarrow y_0} g(x) = m \Leftrightarrow \exists J' \in \mathcal{J}(y_0) \ni' \forall y \in J' \cap Y \backslash \{y_0\}: g(y) \in I$.
2. *Poiché* $J' \in \mathcal{J}(y_0) \Longrightarrow$ (*poichè* $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y_0) \exists \bar{\bar{J}} \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in \bar{\bar{J}} \backslash \{x_0\}: f(x) \in J'$.

Se diciamo $J = \bar{J} \cap \bar{\bar{J}} \in \mathcal{J}(x_0), \forall x \in J \backslash \{x_0\}: \begin{cases} x \in \bar{J} \backslash \{x_0\} \\ x \in \bar{\bar{J}} \backslash \{x_0\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \neq y_0 \\ f(x) \in J' \end{cases} \Longrightarrow f(x) \in$

$J' \backslash \{y_0\} \Longrightarrow \big(perr\ la\ (1)\big) g\big(f(x)\big) \in I$.

Dunque, $\forall I \in \mathcal{J}(m), \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni ' \forall x \in J \backslash \{x_0\}: g(f(x)) \in I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = m.$

Teorema 5.4.6 – (Teorema del limite del valore assoluto di una funzione)

Se $f: X \to R$ *e se* $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ *è un puto di accumulazione per X, si dimostra che:*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|;$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$

Dim. (1)

Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall I \in \mathcal{J}(\ell), \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in J \setminus \{x_0\}: f(x) \in I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in J \setminus \{x_0\}: l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in J \setminus \{x_0\}: |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in J \setminus \{x_0\}:$

$\big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \big||f(x)| - |\ell|\big| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in J \setminus \{x_0\}: |l| - \varepsilon < |f(x)| < l + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| \in I(|\ell|).$

Dunque: $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|.$

Dim. (2) Dimostriamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$

Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in J \setminus \{x_0\}: f(x) > k \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)| \geq f(x) > k.$

Dunque:

$\forall k > 0, \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in J \setminus \{x_0\}: |f(x)| > k \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$

Analogamente, poiché

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni' \forall x \in J \setminus \{x_0\}: f(x) < -k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f(x) > k \Rightarrow |f(x)| \geq -f(x) > k \Rightarrow |f(x)| > k.$

Dunque:

$\forall k > 0, \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \ni ' \forall x \in J \setminus \{x_0\}: |f(x)| > k \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$

Teorema 5.4.7 - (il limite $\frac{\lambda}{0}$) (Enunciato)

Se $f, g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni reali e se $x_0 \in \bar{\bar{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, si dimostra che:

$$\begin{pmatrix} \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \neq 0 \\ \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \\ \exists J \in I(x_0) \ni' \forall x \in J \cap X - \{x_0\}: g(x) \neq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{0} = \pm\infty \right)$$

(applicare regola dei segni)

Esempio - Calcolare $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2x+1)}{x^2-1}$.

Soluzione

Poiché $\begin{pmatrix} \lim_{x \to 1} ln(2x+1) = \ln(3) \\ \lim_{x \to 1} (x^2-1) = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\ln(2x+1)}{x^2-1} = \frac{\ln(3)}{0} = \infty.$

Studiamo il segno del denominatore:

$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1 \Rightarrow \begin{cases} \exists J_1^s(1) \ni' \forall x \in J_1^s(1): g(x) = x^2 - 1 > 0 \\ \exists J_1^d(1) \ni' \forall x \in J_1^d(1): g(x) = x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$*(per il teorema 5.4.7)* $\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(2x+1)}{x^2-1} = \frac{\ln(3)}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(2x+1)}{x^2-1} = \frac{\ln(3)}{0^-} = -\infty \end{cases}.$

Poiché il limite sinistro e il limite destro della funzione sono diversi,

$$\nexists \lim_{x \to 1} \frac{\ln(2x+1)}{x^2-1}.$$

Teorema 5.4.8 - (Limite dei polinomi $P(x)$ per $x \longrightarrow x_0$ e per $x \longrightarrow \pm\infty$)

Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$ è un polinomio di grado n ($a_n \neq 0$) e se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dimostra che:

a) $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$;

b) $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n = a_n(\pm\infty)$ *(regola dei segni)*

Esempi

1 - $\lim_{x\to 0}(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x - 1) = P(0) = 0 - 0 + 0 + 0 - 1 = -1$;

2 - $\lim_{x\to -\infty}(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x - 1) = \lim_{x\to -\infty}(x^5) = (-\infty)^5 = -\infty$ *8regola dei segni).*

Teorema 5.4.9 – (Il limite di $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *per* $x \to x_0$ *e per* $x \to \pm\infty$*)*

Siano $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$ *è un polinomio di grado n* $(a_n \neq 0)$ *e* $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + .. + b_1 x + b_0$ *è un polinomio di grado m* $(b_m \neq 0)$.

si dimostra che:

a) $\begin{cases} \lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0) \\ \lim_{x\to x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$;

b) $\begin{cases} \lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0) \neq 0 \\ \lim_{x\to x_0} Q(x) = Q(x_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{0} = \pm\infty$; *(regola dei segni)*

Nulla si può dire se P(x) e Q(x) tendono entrambi a zero (forma indeterminata)

a) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \pm\infty \ (regola\ dei\ segni), se\ n > m \\ \frac{a_n}{b_n}, se\ n = m \\ 0, \ \ se\ n < m \end{cases}$

Esempio 1 – Calcolare $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

Soluzione

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} = \frac{0}{0}$ *è del tipo 0/0 (forma indeterminata).*

Per eliminare l'indeterminazione, si procede come segue.

Si scompongono numeratore e denominatore:

- $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$,

- *Poiché* $x = 1$ *è uno zero del denominatore, applichiamo la regola di Ruffini con* $x = 1$*:*

	1	-1	1	-1	1	-1
1		1	0	1	0	1
	1	0	1	0	1	//

La scomposizione è:

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^4 + x^2 + 1).$$

Quindi:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^4+x^2+1)} = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{(x^4+x^2+1)} = \frac{2}{3}.$$

Esempio 2 - Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3+2x+1}{x^3+x-2}$.

Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+2x+1}{x^3+x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)} = \frac{2+0+0}{(1+0-0)} = 2.$$

Esempio 3 - Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+2x+1}{x^2+x-2}$.

Soluzione

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+2x+1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{(-\infty)(2)}{(1+0-0)} = -\infty.$$

Esempio 4 - Calcolare: a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+2x+1}{x^3+x-2}$; *b)* $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+2x+1}{x^3+x}$.

Soluzione

a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+2x+1}{x^3+x-2} = \frac{0+0+1}{0+0-2} = -\frac{1}{2}$ *(forma determinata)*

b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{0+0+1}{0+0} = \frac{1}{0}$ *(forma determinata)*

Si risolve applicando il metodo precedente.

- *Studiare il segno del denominatore*

  $x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x(x^2+1) > 0 \Rightarrow x > 0;$

- *Si calcolano il limite sinistro e il limite destro:*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+2x+1}{x^3+x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{(0^-)(1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+2x+1}{x^3+x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{(0^+)(1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

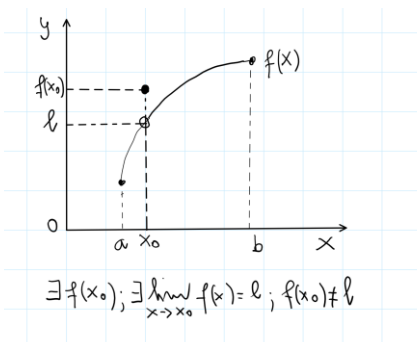
Poiché il limite sinistro e il limite destro sono diversi, $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{x^2+2x+1}{x^3+x}$.

Funzioni continue – Definizioni e proprietà

&5.5 – Funzioni continue

In generale, il limite di una funzione per $x \to x_0$*, con* $x_0 \in \mathbb{R}$*, è diverso dal valore di* f *in* x_0*,* $f(x_0)$*: il concetto di limite nasce proprio quando non esiste* $f(x_0)$ *perchè* x_0 *non appartiene al dominio.*

Inoltre, può capitare che, pur esistendo entrambi i valori, essi risultino diversi: $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.



Tali osservazioni giustificano la seguente definizione.

Def.5.5.1 – (Definizione di funzione continua in un punto)

Se $f: X \subseteq R \longrightarrow R$ *e se* $x_0 \in X$ *si dice che f è continua in* x_0 *se* x_0 *è un punto isolato di X oppure, se* x_0 è *punto di accumulazione di X, risulta:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Def.5.5.2 – (Definizione di funzione continua in un insieme)

Se $f: X \subseteq R \longrightarrow R$*, si dice che f è una funzione continua in X se f è continua in ogni punto di X.*

In particolare, se X è un intervallo, poiché punto di X è di accumulazione, dire che

$$\text{(f è continua in X intervallo)} \Leftrightarrow \left(\forall x_0 \in X: \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right)$$

Sussistono i seguenti teoremi (solo enunciato)

Teorema 5.5.1 – (Continuità delle funzioni elementari)

Tutte le funzioni elementari sono continue nei rispettivi domini:

1. $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$
2. $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$
3. $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, $(Q(x_0) \neq 0)$
4. $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$, $\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$
5. $\lim_{x \to x_0} log_a(x) = log_a(x_0)$, $\lim_{x \to x_0} ln(x) = ln(x_0)$
6. $\lim_{x \to x_0} sen(x) = sen(x_0)$
7. $\lim_{x \to x_0} cos(x) = cos(x_0)$
8. $\lim_{x \to x_0} tg(x) = tg(x_0)$
9. $\lim_{x \to x_0} cotg(x) = cotg(x_0)$
10. $\lim_{x \to x_0} arcsen(x) = arcsen(x_0)$
11. $\lim_{x \to x_0} arccos(x) = arccos(x_0)$

12. $\lim_{x \to x_0} arctg(x) = arctg(x_0)$
13. $\lim_{x \to x_0} arccotg(x) = arccotg(x_0)$
14. $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$.

Algebra delle funzioni continue

Teorema 5.5.2 – (Algebra delle funzioni continue)

Somma, differenza, prodotto, quoziente, composta di funzioni continue è una funzione continua nel rispettivo dominio.

Esempio - $f(x) = \sqrt{x} + sen(x)$ *è una funzione continua nel suo dominio*

$$X_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$$

perché è la somma di due funzioni elementari continue.

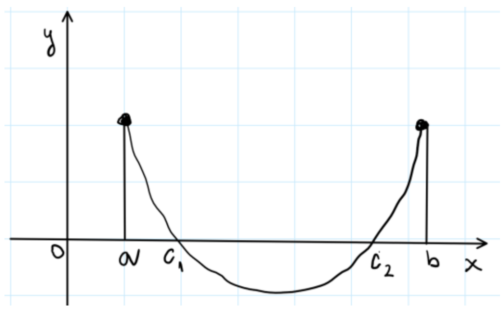
Nota - *La continuità delle funzioni elementari e le operazioni con i limiti consentono di calcolare il limite di una qualsiasi funzione purchè il limite non si presenti in una forma indeterminata.*

Proprietà fondamentali delle funzioni continue in un intervallo

Teorema 5.5.3 – (Teorema degli zeri)

Se $f; X \longrightarrow R$ *è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato* $X = [a, b]$ *e se negli estremi a e b assume segno discorde, allora si dimostra che esiste un punto interno all'intervallo in cui la funzione si annulla, ovvero, se:*

$$\begin{pmatrix} 1. f: [a,b] \longrightarrow R \text{ è continua in } [a,b] \\ 2. f(a) \cdot f(b) < 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\exists c \in]a,b[\ni' f(c) = 0).$$



Osservazione - Se la funzione è strettamente monotona, tale valore (detto zero della funzione) è unico.

Teorema 5.5.4 – (Teorema di Weierstrass)

Ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è dotata di minimo e di massimo assoluto nell'intervallo $[a, b]$.

$$\begin{pmatrix} f: [a, b] \longrightarrow R \text{ è } continua \\ in\ [a, b]\ chiuso\ e\ limitato \end{pmatrix} \Longrightarrow \exists m, M \in R\ \ni' \begin{cases} m = \min(f) \\ M = Max(f) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\exists x_1, x_2 \in [a, b] \ni' \forall x \in [a, b]: f(x_1) = m \leq f(x) \leq f(x_2) = M).$$

Teorema 5.5.5 (*) - (Teorema dei valori intermedi)

Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ è una funzione continua in $[a, b]$ e se m e M sono il minimo e il massimo di f in $[a, b]$, allora f assume tutti i valori compresi fra m e M:

$$\forall \lambda \in [m, M], \exists x \in [a, b] \ni' \lambda = f(x).$$

Dim. Per il teorema di Weierstrass, $\exists x_m, x_M \in [a, b] \ni' f(x_m) = \min f = m$ *e* $f(x_M) = \max f = M \Longleftrightarrow \forall x \in [a, b]: f(x_m) = m \leq f(x) \leq f(x_M) = M.$

$\forall \lambda \in [m, M]$, *i casi che si possono presentare sono:*

I casi che si possono presentare sono:

1. $\lambda = m \Longrightarrow \exists x_m \in [a, b] \ni' f(x_m) = m = \lambda$;
2. $\lambda = M \Longrightarrow \exists x_M \in [a, b] \ni' f(x_M) = M = \lambda$;
3. $\lambda \in]m, M[\Longleftrightarrow m < \lambda < M.$

In tal caso, supposto che $x_m < x_M$, *possiamo considerare la funzione*

$$g: [x_m, x_M] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ così definita: } g(x) = f(x) - \lambda.$$

Tale funzione è continua perché somma di funzioni continue e tale che

$$g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0 \text{ e } g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0$$

Quindi per il teorema degli zeri, $\exists x \in]x_m, x_M[\subset [a, b] \ni' g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \lambda = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda$.

Dunque, da (1),(2),(3) segue che $\forall \lambda \in [m, M], \exists x \in [a, b] \ni' f(x) = \lambda$.

Corollario 5.5.1 – (Teorema di Bolzano-Weierstrass)

Se $f: [a, b] \longrightarrow R$ *è una funzione continua in* $[a, b]$ *e se*

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad e \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

allora

$$Im(f) = f([a, b]) = [m, M].$$

Dim. Poiché f è una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ *chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass,*

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \ni' f(x_1) = \min f(x) \text{ e } f(x_2) = \max f(x).$$

Detti $m = f(x_1)$ *e* $M = f(x_2) \Longrightarrow \forall x \in [a, b]: m \leq f(x) \leq M \Longrightarrow$

$\Longrightarrow Im(f) = f([a, b]) \subseteq [m, M]$.

D'altro canto, per il teorema dei valori intermedi, si ha:

$\forall y \in [m, M], \exists x \in [a, b] \ni' y = f(x) \in Im(f) \Longrightarrow \forall y \in [m, M]: y \in Im(f) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [m, M] \subseteq Im(f)$.

Dunque: $Im(f) = f([a, b]) = [m, M]$.

Teorema 5.5.6 - (Invertibilità delle funzioni continue e strettamente monotone in un intervallo)

Se $f: I \longrightarrow R$ *è una funzione continua e strettamente monotona in* I *intervallo, si dimostra che* f *è invertibile in* I *e la sua inversa* f^{-1} *è anch'essa continua e strettamente monotona come* f*, ovvero:*

a) $\begin{pmatrix} f \text{ continua in } I \text{ intervallo} \\ f \text{ strettamente crescente in } I \end{pmatrix} \Rightarrow$

$(f \text{ è invertibile ed è } f^{-1} \text{ continua e strettamente crescente in } I)$

b) $\begin{pmatrix} f \text{ continua in } I \text{ intervallo} \\ f \text{ strettamente decrescente in } I \end{pmatrix} \Rightarrow$

$(f \text{ è invertibile ed è } f^{-1} \text{ continua e strettamente decrescente in } I)$.

Esempio - $sen_{\#\#}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ *è strettamente crescente e continua in* $: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow sen_{\#\#}(x)$ *è invertibile e la sua inversa*

$$sen^{-1} = arc\ sen: [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

è continua e strettamente crescente.

Limiti notevoli

&5.6 - Limiti notevoli

I seguenti limiti sono detti notevoli perchè forniscono uno strumento per il calcolo di molte forme indeterminate.

Limiti trigonometrici notevoli

Prop.5.6.1 (*) - (Limiti trigonometrici notevoli)

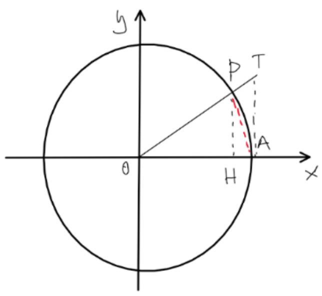
Si dimostra che:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=1$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsen(x)}{x}=1$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg(x)}{x}=1$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=0$
7. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{sen(x)}{x}=0$
8. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Dim. 1 - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1.$

a) Dimostriamo che $\lim\limits_{x\to 0^d}\frac{sen(x)}{x}=1.$

1. *Con riferimento alla figura seguente*



se indichiamo con T_1 *il triangolo OAP, con S il settore OAP e con* T_2 *il triangolo OAT,* $\forall x\in J^d(0)=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$:

Area $(T_1)\le Area(S)\le Area(T_2)\Leftrightarrow\frac{1\cdot sen(x)}{2}\le\frac{1\cdot x}{2}\le\frac{1\cdot tg(x)}{2}\Leftrightarrow sen(x)\le x\le tg(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (dividendo\ per\ sen(x)>0)\ 1\le\frac{x}{sen(x)}\le\frac{1}{\cos(x)}\Rightarrow 1\ge\frac{sen(x)}{x}\ge\cos(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists J\in\mathcal{J}^d(0)\ \ni'\ \forall x\in J^d(0)=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}:\cos(x)\le\frac{sen(x)}{x}\le 1;$$

- $\lim\limits_{x\to 0^d}\cos(x)=\cos(0)=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^d}1=1$

Quindi, per il teorema del doppio confronto, si ha: $\lim_{x\to 0^d} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

b) Dimostriamo che $\lim_{x\to 0^s} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

$\lim_{x\to 0^s} \frac{sen(x)}{x} = (posto\ x = -z \Longrightarrow z = -x; x \longrightarrow 0^-: z \longrightarrow 0^+)\ \lim_{z\to 0^d} \frac{sen(-z)}{-z} =$

$$= \lim_{z\to 0^d} \frac{-sen(z)}{-z} = \lim_{z\to 0^d} \frac{sen(z)}{z} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^s} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Quindi, poiché $\lim_{x\to 0^d} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x\to 0^s} \frac{sen(x)}{x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

Dim. 2 - $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{sen(x)}{xcos(x)}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}\right) = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Dim. 3 - $\lim_{x\to 0} \frac{arcsen(x)}{x} = 1$

Se poniamo $arcsen(x) = t \Longrightarrow x = sen(t)$ *e* $x \longrightarrow 0: t \longrightarrow 0$. *Quindi:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsen(x)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{sen(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{sen(t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dim. 4 - $\lim_{x\to 0} \frac{arctg(x)}{x} = 1$

Se poniamo $arctg(x) = t \Longrightarrow x = tg(t)$ *e* $x \longrightarrow 0: t \longrightarrow 0$. *Quindi:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg(x)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{tg(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{tg(t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dim. 5 - $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-cos(x)(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{sen^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{(1+\cos(x))}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{sen(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1+\cos(x))}\right]$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dim. 6 - $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = 0.$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1-cos(x)}{x^2} \cdot x\right] = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Il limite e (numero di Nepero)

Prop.5.6.2 – (Il limite e)

a) Prima formulazione del numero e

Se $f: X \subseteq R \longrightarrow R$ *è la funzione così definita*

$$\forall x \in X: f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

il cui dominio è $X = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow X =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[,$

si dimostra che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\,;$$

b) Seconda formulazione del numero e

Se $f: X \subseteq R \longrightarrow R$ *è la funzione così definita*

$$\forall x \in X: f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

il cui dominio è $X = \{x | 1 + x > 0\} =]-1, +\infty[,$ *si dimostra che:*

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

- ***Il valore "e" dei due limiti è*** *il numero di Nepero*

  $e = 2.71828 \dots..$

numero irrazionale, decimale illimitato non periodico.

Conseguenze di tale limite sono espresse nella seguente proprietà (ulteriori limiti notevoli)

Prop.5.6.3 (*) – (Limiti notevoli esponenziali e logaritmici)

1. $\lim_{x\to 0}\frac{log_a(x+1)}{x} = log_a\,(e)$; $\lim_{x\to 0}\frac{ln(x+1)}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln\,(a)$; $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha.$

Dim. 1

- $\lim_{x\to 0}\frac{log_a(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot log_a(x+1) = \lim_{x\to 0} log_a[x+1]^{\frac{1}{x}} = log_a(e)$;

- *per* $a = e$ *si ha:* $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \ln(e) = 1.$

Dim.2

Posto $a^x - 1 = t \Rightarrow a^x = t+1 \Rightarrow x = log_a(t+1); se\ x \to 0: t \to 0.$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{log_a(t+1)}{t}} = \frac{1}{log_a(e)} = \ln(a)\,;$$

- *Per* $a = e$: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \ln(e) = 1.$

Dim.3 – Se poniamo $(1+x)^\alpha - 1 = y$, *per* $x \to 0 \Rightarrow y \to 0.$

Quindi:

$$(1+x)^\alpha - 1 = y \Rightarrow (1+x)^\alpha = 1+y \Rightarrow \ln[(1+x)^\alpha] = \ln\,(1+y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\cdot\ln(1+x) = \ln(1+y) \Rightarrow \ln(1+x) = \frac{1}{\alpha}\ln(1+y) \Rightarrow \ln(1+y) = \alpha\ln(1+x)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{\alpha\ln(1+x)}{y} = \frac{\alpha\ln(1+x)}{(1+x)^\alpha-1} = \frac{\alpha\ln(1+x)}{(1+x)^\alpha-1}\cdot\frac{x}{x} =$$

$$= \alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{(1+x)^\alpha-1} \Rightarrow \frac{\ln(1+y)}{y} = \alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{(1+x)^\alpha-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1+x)^\alpha-1} = \frac{\frac{\ln(1+y)}{y}}{\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}} \Rightarrow \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \frac{\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1+y)}{y}} =$$

$$= \alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{y}{\ln(1+y)} \Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{y}{\ln(1+y)}\right] =$$

$$= \alpha \cdot 1 \cdot 1 = \alpha.$$

I limiti notevoli sono utili per calcolare alcuni limiti che si presentano in una forma indeterminata.

Diamo alcuni esempi di applicazione.

Esempio 1 - Calcolare $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+sen(x)-tg(x)}{arcsen(x)+1-\cos(x)}\right)$

Soluzione

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+sen(x)-tg(x)}{arcsen(x)+1-\cos(x)}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x+\frac{sen(x)}{x}x-\frac{tg(x)}{x}x}{\frac{arcsen(x)}{x}x+\frac{1-\cos(x)}{x}x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x\left[1+\frac{sen(x)}{x}-\frac{tg(x)}{x}\right]}{x\left[\frac{arcsen(x)}{x}+\frac{1-\cos(x)}{x}\right]}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left[1+\frac{sen(x)}{x}-\frac{tg(x)}{x}\right]}{\left[\frac{arcsen(x)}{x}+\frac{1-\cos(x)}{x}\right]}\right) = \frac{1+1-1}{1+0} = 1.$$

Esempio 2 - Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x}-1+2x}{1-\cos(x)}$.

Soluzione

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x}-1+2x}{1-\cos(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}x+2x}{\frac{1-\cos(x)}{x^2}x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}+2}{\frac{1-\cos(x)}{x^2}x} = \frac{\frac{1}{4}+2}{\frac{1}{2}\cdot 0} =$$

$$= \frac{\frac{9}{4}}{0} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[4]{1+x}-1+2x}{1-\cos(x)} = \frac{\frac{1}{4}+2}{\frac{1}{2}\cdot 0^-} = \frac{\frac{9}{4}}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+x}-1+2x}{1-\cos(x)} = \frac{\frac{1}{4}+2}{\frac{1}{2}\cdot 0^+} = \frac{\frac{9}{4}}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Poiché $\ell^- \neq \ell^+ \Longrightarrow \nexists \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x}-1+2x}{1-\cos(x)}$.

Teoria degli infiniti e degli infinitesimi

&5.7 – Teoria degli infiniti e degli infinitesimi

Tale teoria fornisce un ulteriore strumento per il calcolo delle forme indeterminate dei limiti di funzioni.

(I) - Funzioni infinite per $x \longrightarrow x_0$

Poniamo le seguenti definizioni.

Def.5.7.1 – (Definizione di infinito)

Se $f: X \longrightarrow R$ e se $x_0 \in \hat{R}$ è un punto di accumulazione per X, si dice che:

$$(f \text{ è un infinito per } x \longrightarrow x_0) \Leftrightarrow (\lim_{x \longrightarrow x_o} f(x) = \pm\infty).$$

Confronto di due infiniti

Def.5.7.2 (Confronto di due infiniti)

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti per $x \longrightarrow x_0$, si dice che:

a) $f(x)$ *è un infinito di ordine superiore (o maggiore) rispetto a* $g(x)$*, per* $x \longrightarrow x_0$*, se:*

$$\lim_{x \longrightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty;$$

b) $f(x)$ *è un infinito di ordine inferiore (o minore) rispetto a* $g(x)$*, per* $x \longrightarrow x_0$*, se:*

$$\lim_{x \longrightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

c) $f(x)$ *è un infinito dello stesso ordine di* $g(x)$*, per* $x \longrightarrow x_0$*, se:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0.$$

d) In particolare, si dice che f(x) e g(x) sono due infiniti equivalenti in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Per indicare che due infiniti sono equivalenti si scrive:

$$f(x) \sim g(x), x \to x_0.$$

e) $f(x)$ e $g(x)$ non sono confrontabili se $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Infiniti campione

Infiniti notevoli di confronto, detti infiniti campione, sono:

- *per $x \to x_0$, l'infinito campione di confronto è: $g(x) = \frac{1}{x - x_0}$;*
- *per $x \to 0$, l'infinito campione di confronto è: $g(x) = \frac{1}{x}$;*
- *per $x \to \pm\infty$, l'infinito campione di confronto è: $g(x) = x$.*

Def.5.7.3 - (Definizione di ordine di un infinito)

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti per $x \to x_0$, si dice che

$$\left(\begin{matrix} f(x) \text{ è } un\ infinito\ di\ ordine\ \alpha \\ rispetto\ a\ g(x) \end{matrix}\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \in R, con\ \ell \neq 0\right).$$

Prop.5.7.1 - Se f(x) è un infinito di ordine α rispetto a g(x) e se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell$, *si dimostra che* $f(x) \sim \ell \cdot [g(x)]^\alpha$, *per* $x \to x_0$.

Dim. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\ell \cdot [g(x)]^\alpha} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{\cdot [g(x)]^\alpha}}{\ell} = \frac{\ell}{\ell} = 1 \Leftrightarrow f(x) \sim \ell \cdot [g(x)]^\alpha$, *per* $x \to x_0$.

Nota bene - Se f(x) è un infinito di ordine α rispetto a g(x), nel calcolo del limite di una funzione è possibile sostituire f(x) con l'infinito equivalente $\ell \cdot [g(x)]^{\alpha}$.

Principio di eliminazione degli infiniti

Prop.5.7.2 - (Principio di eliminazione degli infiniti di ordine minore)

Se f *e* g *sono* 2 *funzioni infinite per* $x \longrightarrow x_0$, *si dimostra che:*

$$(Se\ ord\ f < ord\ g, per\ x \longrightarrow x_0) \Rightarrow \left(\lim_{x \longrightarrow x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x)\right),$$

ovvero, <u>nel calcolo del limite della somma di due infiniti si può eliminare l'infinito di ordine minore</u> (prevale l'infinito di ordine maggiore).

Principio di sostituzione degli infiniti

Prop. 5.7.3 - (Principio di sostituzione degli infiniti)

Se f, f_1, g, g_1 *sono 4 funzioni infinite per* $x \longrightarrow x_0$, *si dimostra che:*

$$\left(\begin{matrix} f \sim f_1 \\ g \sim g_1 \end{matrix}, \text{per } x \longrightarrow x_0\right) \Rightarrow \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right).$$

Gerarchia degli infiniti

Molto utile nel calcolo dei limiti è il seguente confronto fra infiniti.

- *Se* $p, m, n \in N$, *con* $m < n$ *e se* $a > 1$, *si dimostra che:*

$$ord\big(log_a(x)\big)^p < ord(x^m) < ord(x^n) < ord(a^x), per\ x \longrightarrow +\infty.$$

Esempio 1 - Confrontare i seguenti infiniti con gli infiniti campione:

a) $f(x) = \frac{1}{x^3+x^2-2x}$, *per* $x \longrightarrow 1$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} + x$, *per* $x \longrightarrow +\infty$;

c) $f(x) = \frac{1}{\ln(1+3x^2)}$, *per* $x \longrightarrow 0$.

Soluzione

a) Per $x \longrightarrow 1$, *l'infinito campione è* $\frac{1}{x-1}$.

Poiché $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^3+x^2-2x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \frac{x-1}{x^3+x^2-2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \frac{x-1}{x(x^2+x-2)} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \frac{x-1}{x(x-1)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow ord\left(\frac{1}{x^3+x^2-2x}\right) = ord\left(\frac{1}{x-1}\right)$, *per* $x \longrightarrow 1$.

b) Per $x \longrightarrow +\infty$, *l'infinito campione di confronto è* x.

Poiché $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}} + 1\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}} + 1\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \sqrt{1} + 1 =$
$2 \Rightarrow ord\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right) = ord\,(x)$, *per* $x \longrightarrow +\infty$.

c) Per $x \longrightarrow 0$, *l'infinito campione è* $\frac{1}{x}$.

Poiché $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{\ln(1+3x^2)}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+3x^2)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$ [1] $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \frac{x}{3x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \frac{1}{3x} = \infty \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ord\left(\frac{1}{\ln(1+3x^2)}\right) > ord\left(\frac{1}{x}\right)$, *per* $x \longrightarrow 0$.

Esempio 2 - Calcolare $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^2+e^x}{\ln(x)+e^{3x}}$.

Soluzione

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^2+e^x}{\ln(x)+e^{3x}} = \left(\begin{pmatrix} ord(x^2) < ord(e^x) \\ ord\ln(x) < ord\, e^{3x} \end{pmatrix}, per\ il\ principio\ di\ eliminazione\ degli\ infiniti\right)$$

$$= \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{3x}} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} e^{-2x} = e^{-\infty} = 0.$$

[1] Per $x \longrightarrow 0$: $\ln(1+3x^2) \sim 3x^2$.

(II) Funzioni infinitesime per $x \longrightarrow x_0$

Def 5.7.4 – (Definizione di infinitesimo)

Se $f: X \longrightarrow R$ e se $x_0 \in \hat{R}$ è un punto di accumulazione per X, si dice che:

$$(\text{la funzione } f \text{ è un infinitesimo per } x \longrightarrow x_0) \iff (\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0).$$

Confronto di due funzioni infinitesime

Def. 5.7.5 - (Confronto di due funzioni infinitesime)

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi, per $x \longrightarrow x_0$, si dice che:

a) $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore (o maggiore) rispetto a $g(x)$, per $x \longrightarrow x_0$, se:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

b) $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore (o minore) rispetto a $g(x)$, per $x \longrightarrow x_0$, se:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty;$$

c) $f(x)$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $g(x)$, per $x \longrightarrow x_0$, se:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0.$$

In particolare, se $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ si dice che f(x) e g(x) sono due infinitesimi equivalenti in x_0.

Per indicare che due infiniti sono equivalenti si scrive

$$f(x) \sim g(x), x \longrightarrow x_0.$$

d) $f(x)$ e g(x) non sono confrontabili se $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Infinitesimi campione notevoli di confronto sono:

- *per* $x \to x_0$, *l'infinitesimo campione di confronto è:* $g(x) = x - x_0$;
- *per* $x \to 0$, *l'infinitesimo campione di confronto è:* $g(x) = x$;
- *per* $x \to \pm\infty$, *l'infinito campione di confronto è:* $g(x) = \frac{1}{x}$.

Def. 5.7.6 – (Definizione di ordine di un infinitesimo)

Se $f(x)$ e $g(x)$ *sono due infinitesimi per* $x \to x_0$, *si dice che*

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ è } un\ infinitesimo\ di\ ordine \\ \alpha\ rispetto\ a\ g(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \in R, con\ \ell \neq 0 \right).$$

Prop.5.7.3 – Se f(x) è un infinitesimo di ordine α rispetto a g(x) e se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \neq 0$, *si dimostra che:*

$$f(x) \sim \ell \cdot [g(x)]^\alpha, per\ x \to x_0.$$

e in tal caso, nel calcolo di un limite, è possibile sostituire f(x) con l'infinitesimo equivalente $\ell \cdot [g(x)]^\alpha$.

Dim. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\ell \cdot [g(x)]^\alpha} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} \cdot \frac{1}{\ell}\right) = \ell \cdot \frac{1}{\ell} = 1 \iff f(x) \sim \ell \cdot [g(x)]^\alpha, \text{per } x \to x_0$.

Ad esempio, ricordando i limiti notevoli, si ha che per $x \to 0$ *è:*

- $sen(x) \sim x$;
- $tg(x) \sim x$;
- $1 - \cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2$;
- $arc\ sen(x) \sim x$;
- $arctg(x) \sim x$;
- $a^x - 1 \sim \ln(a) \cdot x$; $e^x - 1 \sim x$;
- $log_a(1 + x) \sim log_a(e) \cdot x$; $\ln(x + 1) \sim x$;
- $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x$.

Prop.5.7.4 – (Principio di eliminazione degli infinitesimi di ordine maggiore)

Se f e g sono 2 funzioni infinitesime per $x \longrightarrow x_0$, si dimostra che:

$$(ord\, f < ord\, g, \text{per } x \longrightarrow x_0) \Rightarrow \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)\right).$$

ovvero, nel calcolo del limite della somma di due infinitesimi, si può eliminare l'infinitesimo di ordine superiore.

Prop.5.7.5 – (Principio di sostituzione degli infinitesimi)

Se f, f', g, g' sono 4 funzioni infinitesime per $x \longrightarrow x_0$, si dimostra che:

$$\left(Se \begin{cases} f \sim f_1 \\ g \sim g_1 \end{cases}, \text{per } x \longrightarrow x_0\right) \Rightarrow \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)$$

Esempio 1 – Confrontare i seguenti infinitesimi con l'infinitesimo campione:

a) $f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$, *per* $x \longrightarrow 0$;

b) $f(x) = \frac{3}{x^4+2x^2-1}$, *per* $x \longrightarrow +\infty$;

c) $f(x) = ln^2(1+2x)$, *per* $x \longrightarrow 0$.

Soluzione

a) Per $x \longrightarrow 0$ l'infinitesimo campione di confronto è x. Si ha:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{x+4})(2 + \sqrt{x+4})}{x(2 + \sqrt{x+4})} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4 - x - 4}{x(2 + \sqrt{x+4})} =$$

$= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-x}{x(2+\sqrt{x+4})} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-1}{(2+\sqrt{x+4})} = -\frac{1}{4} \in R\backslash\{0\} \Leftrightarrow$ *ord*$(2 - \sqrt{x+4})$ = *ord*(x), *per* $x \longrightarrow 0$.

b) per $x \longrightarrow +\infty$ l'infinitesimo campione di confronto è $\frac{1}{x}$. Si ha:

$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x^4+2x^2-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3x}{x^4+2x^2-1} = 0 \Leftrightarrow$ *ord*$(\frac{3}{x^4+2x^2-1}) <$ *ord*$\left(\frac{1}{x}\right)$, *per* $x \longrightarrow +\infty$.

c) Per $x \longrightarrow 0$ *l'infinitesimo campione di confronto è* x*. Si ha:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln^2(1+2x)}{x} = \left(\begin{array}{l} \ln(1+x) \sim x \Rightarrow \\ \ln(1+2x) \sim 2x \Rightarrow \\ ln^2(1+2x) \sim (2x)^2 \end{array} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{x} = \lim_{x \to 0} 4x = 0 \Rightarrow ln^2(1+2x) \text{ è un}$$

infinitesimo di ordine superiore a x *per* $x \longrightarrow 0$.

Esempio 2 - Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)+1-\cos(x)}{tg(x)+sen(x)} = \left(per\ x \longrightarrow 0\text{:} \begin{cases} \ln(1+x) \sim x \\ 1-\cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \\ tg(x) \sim x \\ sen(x) \sim x \end{cases} \right) =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^2}{x+x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^2}{2x} = (eliminazione\ di\ x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Punti di discontinuità di una funzione - Prolungamento per continuità di una funzione

&5.8 - Punti di discontinuità

Def. 5.8.1 - (Punto di discontinuità di una funzione)

Se $f: X \subseteq R \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* $x_0 \in \mathbb{R}$ *è un punto di accumulazione per X, si dice che* f *è discontinua in* x_0 *se* f *non è continua in* x_0.

Classificazione dei punti di discontinuità

Def. 5.8.2 - (Classificazione dei punti di discontinuità)

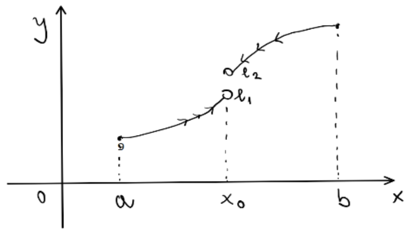
Se $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se* $x_0 \in \mathbb{R}$ *di accumulazione per X, si dice che:*

a) x_0 *è un punto di discontinuità di* 1^a *specie o con salto se*

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}, \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}\ \ con\ \ell_1 \neq \ell_2.$$

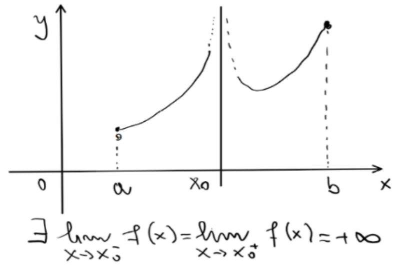
In tal caso $|\ell_1 - \ell_2|$ *si dice salto della funzione* f *in* x_0.

(La funzione è discontinua perché non esiste il limite)



b) x_0 *è un punto di discontinuità di* 2^a *specie se uno dei limiti da sinistra e da destra non esiste perché la funzione è oscillante o perché, esistendo entrambi, almeno uno di essi è infinito:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$



La funzione è discontinua perché $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \in R$.

In tal caso, la retta di equazione $x = x_0$ *è un asintoto verticale a sinistra e/o a destra.*

c) x_0 *è un punto di discontinuità di* 3^a *specie o di discontinuità eliminabile se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \ \textit{ed è} \ \ell \neq f(x_0).$$

In tale caso, è possibile considerare una nuova funzione che

$$\forall x \neq x_0$$

coincide con f(x) e che è continua in x_0.

Tale nuova funzione, detta funzione prolungamento di f per continuità al punto x_0*, è la funzione così definita*

$$\tilde{f}: X' \longrightarrow \mathbb{R} \ni' \forall x \in X': \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & se\ x \neq x_0 \\ \ell, & se\ x = x_0 \end{cases}$$

Dimostriamo che tale funzione prolungamento, $\tilde{f}$ *, è continua in* x_0.

Poiché per $x \longrightarrow x_0$ *è* $x \neq x_0$*, si ha:*

$\lim_{x \longrightarrow x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell = \tilde{f}(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0) \Leftrightarrow \tilde{f}$ *è continua in* x_0.

Esempio 1 – Classificare i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, se\ x < 0 \\ x + 1\ \ , se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Il dominio di f è: $D = \mathbb{R}$.

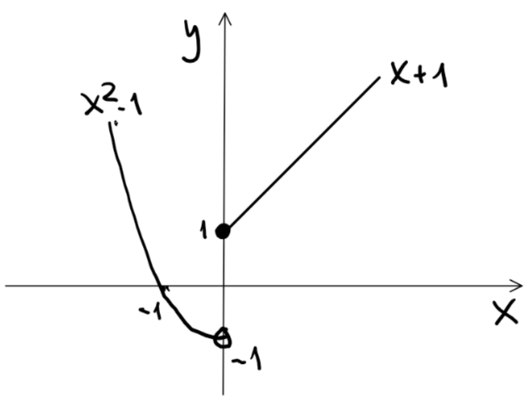
a) *Per* $x < 0$: $f(x) = x^2 - 1$ *è continua;*
b) *Per* $x > 0$: $f(x) = x + 1$ *è continua;*
c) *Studiamo* $x = 0$.

- $f(0) = 0 + 1 = 1$;
- $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$;
- $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (x + 1) = 1$.
- $\nexists \lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ *poiché* $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) \Longrightarrow f(x)$ *è discontinua in* $x = 0$

e poiché i limiti da sinistra e da destra sono entrambi finiti $\Longrightarrow x = 0$ *è un punto di discontinuità di 1ª specie: il salto è*

$$\Delta y = 1 - (-1) = 2.$$

Il grafico della funzione è:



Esempio 2 – Calcolare e studiare i punti di discontinuità della funzione $f(x) = |\log(x-1)|$.

Soluzione

Il dominio della funzione è: $D_f =]1, +\infty[$.

Inoltre, per la definizione di valore assoluto, è:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x-1), & se \log(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ -\log(x-1), & se \log(x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2 \end{cases}$$

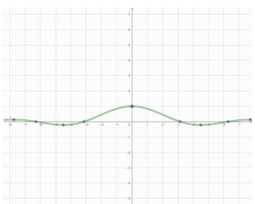
I punti da studiare sono: $x = 1$ *e* $x = 2$.

1) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} |\log(x-1)| = \lim_{x \to 1^+} -\lg(x-1) = -(-\infty) = +\infty \Longrightarrow x = 1$ *è un punto di discontinuità di II specie;*

2) $$\begin{cases} f(2) = |\log(1)| = 0 \\ \lim_{x \to 2^-} |\log(x-1)| = \lim_{x \to 2^-} -\lg(x-1) = -\log(1) = 0 \\ \lim_{x \to 2^+} |\log(x-1)| = \lim_{x \to 2^+} \lg(x-1) = \log(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0 = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow f$ *è continua in* $x = 2$.

Esempio 3 - Considerata la funzione $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$, *il cui grafico è*



si ha:

1) *f è discontinua in* x_0 *perché non esiste* $f(x_0)$: x_0 *è escluso dal dominio.*

2) Sappiamo che $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to 0^-} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{sen(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ è un punto di discontinuità di 3ª specie.

Quindi, esiste la funzione prolungamento per continuità di $y = \frac{sen(x)}{x}$ al punto $x_0 = 0$ che è:

$$\hat{f}: R \longrightarrow R \ \ni' \ \forall x \in R: f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & per\ x \neq 0 \\ 1 & per\ x = 0 \end{cases}$$

Asintoti di una curva rappresentativa di una funzione

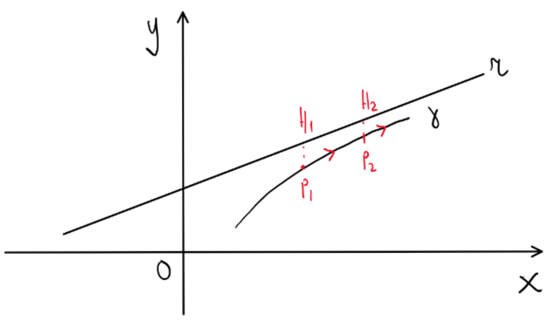
&5.9 - Asintoti - Equazione degli asintoti

La teoria dei limiti consente di calcolare gli asintoti di una curva grafico di una funzione f.

Def. 5.9.1 - (Definizione di asintoto)

Se Γ è una curva del piano, si dice che la retta r è un asintoto di Γ se r è tangente all'infinito a Γ, ovvero se:

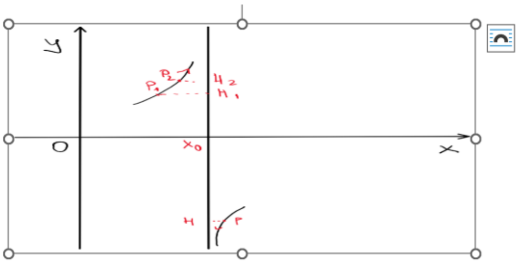
$$\lim_{P \to \infty} d(P, r) = \lim_{P \to \infty} \overline{PH} = 0.$$



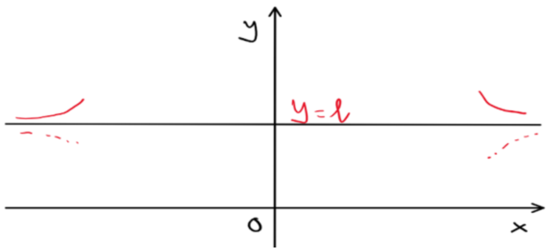
Def.5.9.2 - (Classificazione degli asintoti)

Nel piano cartesiano, un asintoto si dice:

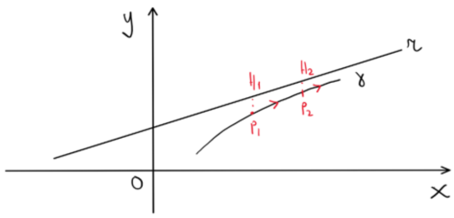
- verticale se è perpendicolare all'asse x



- *orizzontale se è parallelo all'asse x;*



- *obliquo se non è né perpendicolare né parallelo all'asse x:*



Prop.5.9.1 – (Equazione degli asintoti)

Se Γ *è una curva di equazione* $y = f(x)$*, si dimostra che:*

- $x = x_0$ *è un asintoto verticale da sinistra (risp. da destra) per la curva* $\Gamma \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$*; (risp.* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$)
- $y = \ell$ *è un asintoto orizzontale a sinistra (risp. a destra) per la curva* $\Gamma \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$*; (risp.* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$)
- $y = mx + q$ *è un asintoto obliquo a sinistra (risp. a destra) per la curva* Γ *se:*

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ q = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - mx] \in \mathbb{R} \end{cases}; \qquad (risp.\ \begin{cases} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ q = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] \in \mathbb{R} \end{cases})$$

Osservazioni fondamentali

1) *Gli asintoti verticali non hanno mai intersezione con la curva; gli asintoti orizzontali e obliqui possono avere intersezioni con la curva.*
2) *Gli asintoti orizzontali e obliqui sono mutuamente esclusivi a sinistra (risp. a destra) ma è possibile che esista un asintoto orizzontale a sinistra (a destra) e un asintoto obliquo a destra (a sinistra).*

Esempio – Calcolare i punti di discontinuità e gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{x+1}{x-2.}$.

Soluzione

Il dominio della funzione è: $X = R\setminus\{2\}$, *illimitato inferiormente e superiormente.*

a) $x_0 = 2$ *è l'unico punto di discontinuità.*

Studiamo la discontinuità:

- $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2.} = \frac{3}{0^-} = -\infty;$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2.} = \frac{3}{0^+} = +\infty.$

Quindi, $x_0 = 2$ *è un punto di discontinuità di II specie.*
La retta di equazione $x = 2$ *è un asintoto verticale a sinistra* ($\ell^- = -\infty$) *e a destra* ($\ell^+ = +\infty$).
b) Calcolo degli asintoti orizzontali

- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2.} = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \Leftrightarrow y = 1$ *è un asintoto orizzontale a sinistra;*
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2.} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \Leftrightarrow y = 1$ *è un asintoto orizzontale a destra.*

L'esistenza degli asintoti orizzontali a sinistra e a destra esclude l'esistenza degli asintoti obliqui.