

Г. НЕЙБЕР

# КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО

Н. Н. ЛЕБЕДЕВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. А. И. ЛУРЬЕ

ОГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1947 ЛЕНИНГРАД

Редактор *И. К. Снитко.*

Технический редактор *Н. А. Тумаркина.*

Подписано к печати 27/1-1947 г.,

Печ. л. 12<sup>3</sup>/<sub>4</sub>. Авт. л. 13,15.

Уч.-изд. л. 13,60.

Тип. зн. в печ. л. 49.000.

Тираж 10 000 экз.

А 117.5.

Цена 8 р. 25.

Переплёт I р. 50 к.

Зах. № 3475.

4-я типография им. Влг. Соколовскй треста, «Полиграфизмга» ОГИЗа  
при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пер., 28.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава I.</b>	
<b>Введение.</b>	
1. Старое учение о прочности материалов . . . . .	7
2. Требования, предъявляемые к точному расчёту на прочность . . . . .	8
<b>Глава II.</b>	
<b>Основные понятия учения о концентрации.</b>	
1. Коэффициент концентрации . . . . .	10
2. Закон затухания . . . . .	11
3. Основные формы выточек . . . . .	11
4. Коэффициент концентрации для выточки любой глубины . . . . .	12
<b>Глава III.</b>	
<b>Основные данные из теории упругости.</b>	
1. Уравнения равновесия в напряжениях . . . . .	16
2. Деформации . . . . .	20
3. Деформации в криволинейных координатах . . . . .	22
4. Закон Гука . . . . .	26
5. Вывод основных уравнений . . . . .	29
6. Выражение компонентов перемещений и напряжений через три функции . . . . .	30
7. Вычисления в криволинейных координатах . . . . .	34
<b>Глава IV.</b>	
<b>Теория концентрации в плоской задаче.</b>	
1. Основные уравнения . . . . .	40
2. Двусторонняя внешняя выточка . . . . .	47
3. Односторонняя глубокая внешняя выточка . . . . .	57
4. Круглые и продолговатые отверстия в очень широком стержне . . . . .	63
5. Мелкая внешняя выточка . . . . .	74
6. Построение номограммы для коэффициента концентрации у внешних выточек, у круговых и продолговатых отверстий любых размеров . . . . .	82
7. Концентрация напряжений у выступов . . . . .	84
<b>Глава V.</b>	
<b>Теория концентрации напряжений в пространственной задаче.</b>	
1. Основные уравнения . . . . .	89
2. Решение уравнения Лапласа в эллиптических координатах . . . . .	94
3. Глубокая внешняя выточка на теле вращения . . . . .	99

4. Медкая внутренняя выточка на теле вращения при отсутствии сверления . . . . .	118
5. Выточка на теле вращения при двухмерном напряжённом состоянии . . . . .	147
6. Построение номограммы для коэффициентов концентрации напряжений в выточках любых размеров . . . . .	158

## Глава VI.

### Теория влияния выточек призматического типа.

1. Основные уравнения . . . . .	182
2. Сплошное поперечное сечение (стержень с продольным пазом) . . . . .	184
3. Тонкостенное полое поперечное сечение . . . . .	185
4. Вали с поперечными отверстиями . . . . .	187

## Глава VII.

### Теория разгружающих выточек.

1. Разъяснение понятия . . . . .	169
2. Разгружающие выточки при кручении . . . . .	170
3. Общие свойства коэффициента концентрации при наличии разгружающих выточек . . . . .	175

## Глава VIII.

### Теория выточек с острыми углами.

1. Неприменимость классической теории упругости к выточкам с острыми углами и причина этого . . . . .	176
2. Новая воображаемая модель . . . . .	177
3. Коэффициент концентрации для выточек с острыми углами . . . . .	178
4. Переход от закруглённой выточки к выточке с острым углом . . . . .	183
5. Влияние деформации у основания выточки . . . . .	184
6. Влияние величины угла отклонения . . . . .	185
7. Общий технический коэффициент концентрации . . . . .	188

## Глава IX.

### Сравнение теории с результатами экспериментальных исследований напряжений.

1. Измерения удлинений . . . . .	190
2. Фотоупругие измерения напряжений . . . . .	193

## Глава X.

### Номограммы для коэффициентов концентрации.

1. Объяснения к номограммам для коэффициентов концентрации . . . . .	197
2. Примеры . . . . .	197
Предметный указатель . . . . .	203

## ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА.

Настоящий перевод книги Нейбера «Kerbspannungslehre» был выполнен доцентом Ленинградского Государственного Университета Н. Н. Лебедевым, павшим в боях во время защиты Ленинграда в 1941 году.

Книга Нейбера содержит значительное число принадлежащих автору результатов, относящихся к решению плоских и пространственных задач теории упругости о распределении напряжений в местах резкого изменения геометрической формы нагруженной детали. Конструктор и расчётный инженер найдут в этой книге ценные указания и сведения. Книга будет также полезна при изучении теории, упругости, как содержащая интересный и практически важный материал, иллюстрирующий применение общих методов и уравнений этой науки. Изложение основных уравнений теории упругости в книге Нейбера тяжеловесно и не отличается достаточной чёткостью и необходимой строгостью. Для читателя, имеющего в своём распоряжении руководства по теории упругости П. Ф. Папковича, Л. С. Лейбензона, Лява и С. П. Тимошенко, это обстоятельство, по нашему мнению, не имеет существенного значения.

\*22 октября 1946 г.

*А. И. Лурье.*

---

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА.

Современная техника требует в ряде случаев максимального уменьшения веса конструкций и сооружений. Возможность осуществления этого требования тесно связана с точным знанием действительного распределения напряжений в частях конструкций и сооружений; без такого знания надёжный расчёт на прочность невозможен. Однако точное определение напряжений в телах сложной формы является весьма трудной задачей. Обычно она решается экспериментальным путём, чаще всего на модели тела. Естественно, что такой путь решения задачи не обладает общностью. Поэтому желательно развитие теоретических способов определения распределения напряжений в телах сложной формы. Такая попытка делается в настоящей книге.

*Г. Нейбер.*

---

# ГЛАВА I.

## ВВЕДЕНИЕ.

### 1. Старое учение о прочности материалов.

В начальный период развития машиностроения при определении размеров частей машин довольствовались простыми соотношениями между размерами отдельных частей. Например, диаметр вала паровой машины определялся как некоторая доля диаметра цилиндра. При известной простоте условий эксплуатации и постройки этот примитивный способ расчёта был вначале достаточным, но по мере дальнейшего развития техники, при всё более увеличивающемся различии в характере и в величине действующих усилий, от него пришлось отказаться.

Потребовался переход к другим методам. Стали определять, хотя бы в грубом приближении, основные силы, действующие на отдельные части машины, и в соответствии с этими силами выбирать поперечные сечения нагруженных частей. Позднее было введено понятие о допуске напряжении, которое и до сих пор лежит в основе технического учения о прочности. Бах был первым, кто установил численные величины допускаемого напряжения (в этом состоит одна из его заслуг), которые затем и вошли в употребление.

В применении к обычным строительным материалам в области задач массового машиностроения эти величины до сих пор играют важную роль. При этом основываются на предположении, что по поперечному сечению детали напряжения распределяются плавно, без скачков. Так например, прямолинейный закон распределения напряжений, имеющий место только при простом растяжении и при изгибе призматических стержней, кладётся в основу расчёта непризматических тел. При таком расчёте действительное напряжённое состояние и соответствующие ему наибольшие напряжения, являющиеся причиной разрыва, остаются неизвестными. Не было также установлено ни расчётных ни экспериментальных методов для определения действительного напряжённого состояния.

Это старое учение о прочности, основанное главным образом на применении элементарных формул, могло быть приемлемым, и то отчасти, для машин, неподвижно укрепленных на месте.

## 2. Требования, предъявляемые к точному расчёту на прочность.

В настоящее время, вследствие грандиозного развития техники и в особенности производства быстроходных машин, вес которых должен быть минимальным, а нагрузка на отдельные части — максимальной, — высказанные только что расчётные положения становятся недопустимыми. Повышение прочности строительных материалов возможно только в относительно узких пределах и, иля только этим путём, требуемым условиям далеко нельзя удовлетворить. На помощь приходит научное исследование, которое в полной мере выявляет значение геометрической формы элемента конструкции и указывает методы правильного выбора этой формы для достижения наиболее благоприятного, с точки зрения прочности, распределения напряжений. Опытные измерения деформаций и применение методов фотоупругости дали возможность выявлять действительное напряжённое состояние, возникающее в элементах конструкций. Обнаружено, что наличие неравномерного распределения напряжений в значительной мере обусловлено резкими изменениями формы поверхности тела. Исследование влияния этих резких изменений формы на характер распределения напряжения составляет содержание учения о *местных напряжениях (о концентрации)*. Поскольку разного рода резкие изменения формы деталей машины обусловлены обычно конструктивными соображениями, удачный выбор формы этой детали позволяет лишь уменьшать неравномерность в распределении напряжений, но не полностью устранить её; наибольшие напряжения удаётся также уменьшить лишь частично. Поскольку, таким образом, приходится иметь дело с неравномерно распределённым напряжённым состоянием, а методов его определения наука о сопротивлении материалов не даёт, настоятельно необходимой является *проблема выработки основных методов точного выявления действительного напряжённого состояния*.

Рядом с этим первым требованием идёт второе. Элементарное учение о сопротивлении материалов обычно имеет дело только с простым линейно распределённым напряжением; в таких же условиях производились и испытания материалов, причём определялись величины, характеризующие прочность только для образцов простой формы. Чтобы знать действительные соотношения, нужно определять величины, характеризующие прочность подопытных образцов сложной формы, т. е. при наличии концентрации. Только при этом условии можно правильно судить о прочности строительных материалов, работающих в состоянии нелинейно распределённых напряжений.

Наконец, при пользовании уточнёнными способами расчёта, нужно, чтобы силы, положенные в основу расчёта, были определены с предельной точностью; необходимо точно определить наибольшее и наименьшее значения рабочих нагрузок, включая и добавочные силы, вызван-



ные температурой и напряжениями от монтажа. Успех обеспечен только тогда, когда и это третье условие будет удовлетворено.

Настоящая книга ставит целью удовлетворить первому требованию, являющемуся одновременно наиболее неотложным из перечисленных трёх требований; в ней изложены методы выявления действительного напряжённого состояния. Здесь будут изучаться напряжения с нелинейным распределением, вызванным концентрацией. Предварительно даются общие основные положения учения о местных напряжениях (о концентрации).

---

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ УЧЕНИЯ О КОНЦЕНТРАЦИИ.

## 1. Коэффициент концентрации. —

Для того чтобы конструктор мог с наибольшей лёгкостью получить представление о действительном напряжённом состоянии, целесообразно ввести в употребление отношение действительно наибольшего напряжения к напряжению, которое дают элементарные методы расчёта. По предложению А. Тума (A. Thum), напряжение, получающееся по элементарным формулам старого учения о прочности, называют *номинальным напряжением*.

В ближайшем отделе мы покажем, что если материал тела упруг, а поверхность тела в области выточки не очень сильно искривлена <sup>1)</sup>, то отношение действительного наибольшего напряжения к номинальному не зависит ни от абсолютной величины номинального напряжения, ни от материала.

Как известно, упругие свойства материалом сохранены до тех пор, пока он следует закону Гука. Это условие с достаточным приближением выполняется пока нагрузка не очень велика и наибольшее напряжение не превосходит предела упругости. За пределом упругости отношение наибольшего напряжения к номинальному, вследствие значительного отклонения от закона Гука, не остаётся более постоянным, а существенным образом зависит от материала тела.

Отношение наибольшего напряжения ( $\tau_{\max}$ ), не превосходящего предела упругости, к номинальному напряжению ( $\tau_n$ ), назовём *коэффициентом концентрации* и обозначим буквой  $\alpha_k$ . Величина  $\alpha_k$  зависит определённым образом от формы элемента конструкции и от типа напряжённого состояния. В соответствии с нашим определением имеем:

$$\alpha_k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n}. \quad (1)$$

Для нормальных напряжений употребляют, как известно, вместо  $\tau$  букву  $\sigma$ .

<sup>1)</sup> В случае сильно искривлённых выточек, и особенно при наличии заострений, коэффициент концентрации зависит также и от материала, см. гл. VIII.

Так как для назначения величины поперечного сечения, по которому определяется номинальное напряжение, существуют различные возможности, необходимо при оценке величины коэффициента концентрации всегда указывать способ определения номинального напряжения.

## 2. Закон затухания.

С целью наглядного ознакомления читателя с существом учения о концентрации сформулируем теперь же его основной закон. Далее, при решении конкретных задач, мы всегда будем находить подтверждения этого закона.

Резкое повышение напряжений, с которыми встречаются при решении всех задач о концентрации, всегда сопровождается значительным уменьшением напряжений вблизи зоны концентрации. Чем больше максимальное напряжение в месте концентрации, тем резче наблюдается затухание напряжений при удалении от наиболее напряженной зоны. До некоторой степени здесь можно говорить о законе сопротивления влиянию концентрации. Назовем его *законом затухания*. Закон затухания проявляется особенно резко в случае пространственного напряженного состояния, как будет показано в гл. V.

✓Разгрузка напряженной области путем устройства особой выточки может явиться одновременно также средством, позволяющим уменьшить наибольшее напряжение, существовавшее в соседстве с этой областью. Если, например, мы имеем дело с деталью машины, в которой устройство выточки вызывается конструктивными соображениями, то устройством вблизи неё второй выточки можно добиться существенного уменьшения максимального напряжения. ✓К этому эффекту разгрузки путем устройства нескольких выточек мы вернемся в гл. VIII.

Законы затухания полезно также иметь в виду и при обсуждении формы выточки. На максимальное напряжение существенно влияет только та часть поверхности выточки, которая находится в высоконапряженной зоне. Форма детали на достаточном удалении от выточки не оказывает влияния на величину максимального напряжения в окрестности выточки. Из этого следует, например, что для круглой выточки в первую очередь важна кривизна у её основания, в то время как влияние боковых углов играет лишь второстепенную роль.

## 3. Основные формы выточек.

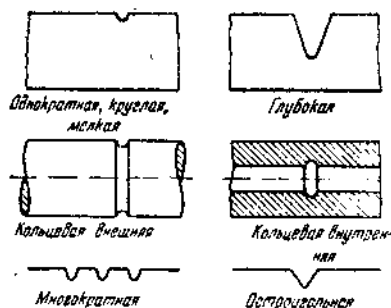
Перед тем как приступить к решению задач, относящихся к учению о влиянии выточек, полезно привести разделение выточек на основные типы. В зависимости от внешней формы будем разделять выточки на: 1) желкие и глубокие, 2) внешние и внутренние, 3) единичные и многократные и, наконец, 4) круглые и угловые (фиг. 1).

В зависимости от вида напряжённого состояния будем далее различать:

плоскую концентрацию напряжений (в плоских стержнях и плоскостях);

симметричную относительно оси пространственную концентрацию (например, при выточках на телах вращения) и

призматическую концентрацию (например, в случае вала с клиновидным пазом).



Фиг. 1. Различные формы выточек.

концентрации основных форм. Типичным примером является выточка произвольной глубины. Коэффициент концентрации такой выточки можно определить по коэффициентам для мелкой и глубокой выточек. Предлагаемые при этом способы расчёта, вследствие их широкого применения, имеют очень важное значение и должны быть поэтому изложены уже здесь.

#### 4. Коэффициент концентрации для выточки любой глубины.

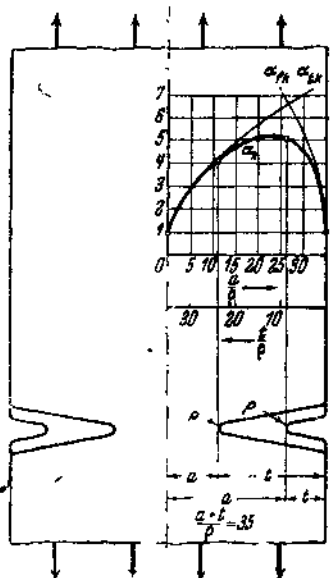
В качестве примера рассмотрим растянутый стержень с двумя выточками, расположенными симметрично относительно оси стержня (фиг. 2). В стержне без выточек существует равномерно распределённое напряжённое состояние. Наличие мелкой выточки влечёт за собой, в силу закона затухания, искажение поля напряжений только в непосредственной окрестности выточки; в достаточном от неё удалении напряжённое состояние, как до образования выточки, так и после её осуществления, остаётся равномерно распределённым. Как следует из расчётных соображений, — на этом мы остановимся подробно в гл. IV, — при определении коэффициента концентрации следует принимать во внимание только те параметры, которые характеризуют контур искажённой области, т. е. в данном случае только глубину  $t$  и радиус кривизны  $\rho$  выточки. Напротив, ширина стержня не оказывает существенного влияния на коэффициент концентрации в мелкой выточке. Этот ход рассуждений допустим в тех случаях, где  $t$  достаточно мало в сравнении с шириной  $b$  стержня. Предельное значение, к которому стремится коэффициент концентрации в этом слу-

чае, представляет коэффициент концентрации для мелкой выточки. Это предельное значение мы будем обозначать буквой  $\alpha_{pk}$ .

С другой стороны, если речь идёт об очень глубокой выточке, то искажение поля напряжений простирается на всё наиболее узкое поперечное сечение стержня. При подсчёте коэффициента концентрации в этом случае следует принять во внимание, кроме радиуса кривизны, ещё и ширину стержня в наиболее узком поперечном сечении; вследствие предположенной симметрии мы можем ввести в рассмотрение не всю, а только половину ширины наиболее узкого поперечного сечения. Её мы обозначим буквой  $a$ . Влиянием глубины выточки теперь, в отличие от предыдущего, можно пренебречь, так как, согласно закону затухания, напряжения по направлению к внешней грани очень быстро убывают. Коэффициент концентрации здесь можно представить как функцию безразмерного отношения  $\frac{a}{\rho}$ . Тот факт, что коэффициент концентрации при большой глубине не зависит от неё, теоретически подтверждается тем, что при бесконечно большой глубине получается конечное, зависящее только от отношения  $\frac{a}{\rho}$ , значение-

коэффициента концентрации. Это предельное значение, представляющее коэффициент концентрации для глубокой выточки, мы обозначим буквой  $\alpha_{tk}$ .

Как мы увидим в ближайшем отделе, оба предельных значения можно найти либо совершенно точно, либо рассчитать с достаточным приближением, исходя из простых соображений. Для того чтобы по этим предельным значениям найти правильную величину коэффициента для выточки любой глубины, возвратимся опять к фиг. 2. Начиная с мелкой выточки, в растянутом стержне будем последовательно осуществлять всё более глубокие выточки, имеющие одинаковый радиус кривизны. От линии, перпендикулярной к оси стержня в точке против дна выточки, будем каждый раз откладывать коэффициент концентрации, отвечающий соответствующей выточке. Абсцисса полученной таким образом диаграммы, отсчитанная слева направо, изображает собой величину  $a$ , отсчитанная с другой стороны — справа налево —  $t$ . В качестве абсцисс мы можем выбрать также безразмерные величины  $a/\rho$  и  $t/\rho$ , так как радиус кривизны считаем постоянным.



Фиг. 2. Растянутый стержень с двусторонней симметричной выточкой.

Коэффициент концентрации вблизи точки  $\frac{a}{\rho} = 0$ ,  $\frac{t}{\rho} = \frac{b}{\rho}$  должен совпадать с предельным значением  $\alpha_{tk}$ ; с другой стороны, вблизи точки  $\frac{a}{\rho} = \frac{b}{\rho}$ ,  $\frac{t}{\rho} = 0$  коэффициент должен совпадать с предельным значением  $\alpha_{fk}$ . В обеих точках коэффициент концентрации равен 1, ибо для  $t=0$  исчезает выточка, а для  $\frac{a}{\rho} \rightarrow 0$  наиболее узкое сечение делается настолько малым, что, в предположении постоянства радиуса кривизны, окрестность наиболее узкой части стержня можно рассматривать как призматический стержень. В окрестностях обеих предельных точек кривая изменения коэффициента концентрации должна сливаться с каждой из кривых, относящихся к обоим предельным случаям. В промежуточных точках, так как край, находящийся на конечном расстоянии, ослабляет влияние выточки, кривая изменения коэффициента концентрации проходит ниже этих граничных кривых. Этим условиям можно удовлетворить, определяя коэффициент концентрации  $\alpha_k$  из следующей формулы:

$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tk} - 1)^2} \quad (2)$$

или

$$\alpha_k = 1 + \frac{(\alpha_{fk} - 1)(\alpha_{tk} - 1)}{\sqrt{(\alpha_{fk} - 1)^2 + (\alpha_{tk} - 1)^2}}. \quad (3)$$

Как следует из (2):

$$\lim_{\alpha_{fk} \rightarrow 1} (\alpha_k) = \alpha_{fk}; \quad \lim_{\alpha_{tk} \rightarrow 1} (\alpha_k) = \alpha_{tk}. \quad (4)$$

Таким образом, совпадение с предельными кривыми на границах действительно имеет место. Далее, если  $\alpha_{fk} > \alpha_{tk}$ , то знаменатель всегда больше, чем  $\alpha_{fk} - 1$ , и в результате  $\alpha_k < \alpha_{tk} < \alpha_{fk}$ ; с другой стороны, если  $\alpha_{tk} > \alpha_{fk}$ , то знаменатель больше, чем  $\alpha_{tk} - 1$  и  $\alpha_k < \alpha_{fk} < \alpha_{tk}$ . Таким образом, кривая изменения коэффициента концентрации, определяемая вышенаписанной формулой, проходит всегда внутри области, ограниченной предельными кривыми. Вместо показателя степени 2, фигурирующего в формуле (2), можно было бы, конечно, взять другой показатель, например 3; но экспериментальные исследования показывают, что действительная зависимость отвечает показателю 2. ✓

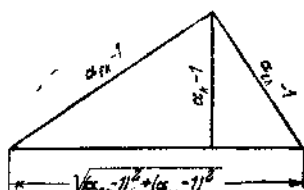
Выражение для коэффициента концентрации в выточке любой глубины, полученное таким путём, имеет ещё то преимущество, что допускает простое изображение в виде номограмм. Пусть  $\alpha_{fk} - 1$  и  $\alpha_{tk} - 1$  являются катетами прямоугольного треугольника. Тогда  $\alpha_k - 1$  равна высоте этого треугольника (см. фиг. 3). Доказательство следует из уравнения:

$$(\alpha_{fk} - 1)(\alpha_{tk} - 1) = (\alpha_k - 1) \sqrt{(\alpha_{fk} - 1)^2 + (\alpha_{tk} - 1)^2}, \quad (5)$$

которое вытекает непосредственно из уравнения (3). Выражения, стоящие в обеих частях уравнения (5), представляют удвоенную площадь треугольника; налево — как произведение катетов, направо — как произведение гипотенузы на высоту.

При пользовании номограммами можно избежать опускания перпендикуляра, если провести взамен этого окружность из центра, помещенного в вершине треугольника; тогда радиус той окружности, которая касается гипотенузы, определяет коэффициент концентрации. Пример такого построения дан на фиг. 104, где показаны различные номограммы для коэффициентов концентрации, в частности номограмма для коэффициента концентрации растянутых плоских стержней с двусторонними симметрично расположенными внешними выточками. Стрелки указывают, как следует использовать номограмму (см. гл. X).

После этих предварительных соображений о сущности концентрации обратимся к основам теории упругости; это даст нам необходимый математический аппарат для выявления действительного напряженного состояния.



Фиг. 3. Зависимость между коэффициентами концентрации для выточек — мелкой, глубокой и любой глубины.

## ОСНОВНЫЕ ДАННЫЕ ИЗ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

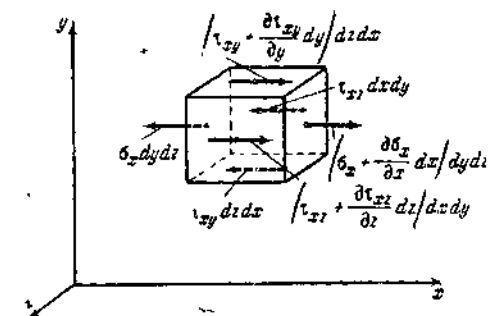
Сначала мы приведём основные уравнения равновесия в напряжениях и рассмотрим геометрические условия протекания деформации. Связывая уравнения напряжений и деформаций, мы приходим к основным уравнениям теории упругости, которые мы решаем с помощью функции, содержащей три переменных. Необходимые расчёты выполняются в криволинейных координатах, что оказывается удобным при решении задач о распределении напряжений в выточках.

### 1. Уравнения равновесия в напряжениях.

Пусть на элемент поверхности  $dF$  действует сила  $dP$ . Тогда отношение  $\frac{dP}{dF}$  называют *напряжением*, действующим на площадку  $dF$ . Если напряжение направлено по нормали к площадке, то его называют *нормальным напряжением*. Если же оно действует в направлении, лежащем в плоскости

самой площадки, то его называют *касательным напряжением*.

Для установления условий равновесия положим в основу декартову систему координат  $x, y, z$  и рассмотрим элемент объёма с рёбрами  $dx, dy, dz$ , параллельными координатным осям (см. фиг. 4). Напряжения мы будем обозначать, вообще, буквой  $\tau$ . С целью



Фиг. 4. Напряжения в прямоугольной системе координат.

уточнения обозначения применяют, как известно, два индекса, из которых первый указывает направление напряжения, а второй направление нормали к площадке. Так например,  $\tau_{xy}$  представляет собой напряжение, действующее на площадку  $y = \text{const.}$ , но направленное вдоль оси  $x$ , т. е. оно является касательным напряжением. С другой стороны,  $\tau_{yy}$  есть напряжение



которое действует на площадку  $y = \text{const.}$  в направлении оси  $y$ ; поэтому здесь мы имеем дело с нормальным напряжением; вообще, там, где фигурирует два одинаковых индекса, всегда имеем дело с нормальным напряжением. Для нормальных напряжений вместо  $\tau_{xx}$  и т. д. пишут короче  $\sigma_x$  и т. д.

Напряжения мы условимся считать положительными, если на площадке  $x + dx = \text{const.}$ ,  $y + dy = \text{const.}$  и  $z + dz = \text{const.}$  они действуют в направлении координатных осей, а на площадке  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  и  $z = \text{const.}$  в направлениях, противоположных координатным осям. В силу этого условия нормальные растягивающие напряжения считаются положительными, в то время как сжимающие напряжения — отрицательными. При составлении уравнений равновесия в напряжениях необходимо учитывать, что напряжения, действующие на площадки  $x + dx = \text{const.}$ ,  $y + dy = \text{const.}$  и  $z + dz = \text{const.}$ , бесконечно мало отличаются от напряжений, действующих по площадкам  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  и  $z = \text{const.}$  Так например, по площадке  $x + dx = \text{const.}$  действует нормальное напряжение  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ , тогда как на площадке  $x = \text{const.}$  действует  $\sigma_x$ . На фиг. 4 указаны только те напряжения, которые действуют вдоль оси  $x$ . Это сделано с тем, чтобы не загромождать рисунка.

Силы, действующие на элемент объема, мы получим простым умножением напряжения на величину площадки, по которой оно приложено, что на фиг. 4 уже и сделано. Условие равновесия, устраняющее движение в направлении оси  $x$ , тогда даёт <sup>1)</sup>

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy = \sigma_x dy dz + \tau_{xy} dz dx + \tau_{xz} dx dy. \quad (1)$$

Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  взаимно уравновешиваются и выпадают из уравнения; остаются только производные от напряжений. Если все члены разделим ещё на  $dx dy dz$ , то получим первое из трёх следующих уравнений равновесия:

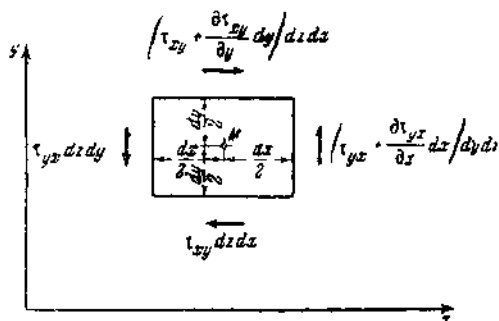
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Второе и третье из этих уравнений получаются точно таким же образом из условий равновесия, устраняющих движение в направле-

<sup>1)</sup> В предположении отсутствия объёмных сил (например, силы веса, центробежных сил, инерционных и т. п.). (Прим. ред.)

ниях осей  $y$  и  $z$ . Их можно также получить из первого уравнения посредством циклической перестановки индексов  $x, y, z$ .

При выполнении уравнений (2) наш элемент объема не может передвигаться ни в одном из направлений. Но тело, с приложенной к нему пространственной системой сил, находится в равновесии только тогда, когда, кроме предыдущих трёх уравнений, выполнены ещё три условия, устраняющие вращение этого тела.



Фиг. 5. Равновесие касательных напряжений.

к нему пространственной системой сил, находится в равновесии только тогда, когда, кроме предыдущих трёх уравнений, выполнены ещё три условия, устраняющие вращение этого тела.

Мы обратимся к фиг. 5, изображающей собой проекцию нашего элемента объема на плоскость  $xy$ , и исследуем условия, при которых элемент не может вращаться вокруг оси,

параллельной  $oz$  и проходящей через точку  $M$  — центр рассматриваемого объема. Достаточно учесть только те силы, момент которых относительно выбранной оси не равен нулю (только эти силы и обозначены на фиг. 5). Уравнение моментов относительно точки  $M$  тогда даёт:

$$\left(2\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx\right) dy dz \frac{dx}{2} = \left(2\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dz dx \frac{dy}{2} \quad (3)$$

или

$$\tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx = \tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy. \quad (4)$$

Члены с множителями  $dx$  и  $dy$  отбрасываем, как имеющие высший порядок малости. Таким образом мы приходим к первому из трёх следующих уравнений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (5)$$

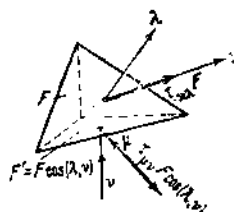
Второе и третье из этих уравнений, получающиеся из первого циклической перестановкой значков, устраняют вращение элемента тела вокруг двух других осей, проходящих через точку  $M$  и параллельных  $Oy$  и  $Ox$ . Таким путём мы вывели замечательное свойство симметрии касательных напряжений, которое выражается в возможности перестановки индексов у касательных напряжений. Речь идёт о так называемой теореме *взаимности касательных напряжений*.

Таким образом установлены все условия равновесия напряжений, отнесённых к координатам  $x, y, z$ . Но остаётся ещё открытым вопрос о тех напряжениях, которые действуют по любым наклонным площадкам. На этот вопрос можно ответить также из рассмотрения

условий равновесия. Наклонной плоскостью, характеризуемой нормалью  $\lambda$ , отсечём от нашего элементарного объёма угол, как показано на фиг. 6. Напряжение, действующее по вновь проведённому сечению, может иметь направление  $x$ . Мы его обозначим поэтому буквой  $\tau_{x\lambda}$ . На остальных площадках пусть действуют напряжения, заранее нам известные из рассмотрения равновесия элемента объёма. Ради простоты, напряжения, действующие на каждую из площадок, приведём к одной равнодействующей. Рассмотрим одну из трёх площадок. Пусть на неё действует напряжение  $\tau_{\mu\nu}$ , где  $\mu$  и  $\nu$  обозначают соответственно направления напряжения и нормали к площадке. Направления  $\mu$  и  $\nu$  при этом считаются положительными, если они направлены к элементу, а направления  $x$  и  $\lambda$ , наоборот, положительны, если они направлены от элемента. Сами напряжения, в соответствии с принятым правилом знаков, должны считаться положительными, если они действуют наружу от тела. При установлении условий равновесия, устраняющих движение элемента в направлении  $x$ , прежде всего нужно умножить напряжение  $\tau_{\mu\nu}$  на площадку  $F'$ , по которой оно действует, чтобы получить силу. Но  $F'$  представляет собой проекцию площадки  $F$  и поэтому равно произведению из  $F$  на  $\cos(\lambda, \nu)$ , где через  $(\lambda, \nu)$  обозначен угол между направлениями  $\lambda$  и  $\nu$ . От силы, полученной таким путём, переходим к её составляющей в направлении  $x$ . Для этого умножаем её ещё на  $\cos(x, \mu)$ . Следовательно, та доля величины  $\tau_{x\lambda}$ , которая должна уравновешивать напряжения  $\tau_{\mu\nu}$ , действующие по площадке  $F'$ , равна  $\tau_{\mu\nu} \cos(x, \mu) \cos(\lambda, \nu)$ . Если напряжения действуют по всем трём площадкам, то индекс  $\nu$  нужно последовательно заменить на  $x$ ,  $y$  и  $z$  и результаты сложить; при этом индекс  $\mu$  каждый раз должен обозначать направление результирующего напряжения, действующего на соответствующую площадку. Можно и не рассматривать этой результирующей, если взамен неё сложить результаты действия её составляющих по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , т. е. последовательно полагая  $\mu$  равным  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Тогда получим следующую двойную сумму:

$$\tau_{x\lambda} = \sum_{\mu=x, y, z} \sum_{\nu=x, y, z} \tau_{\mu\nu} \cos(x, \mu) \cos(\lambda, \nu). \quad (6)$$

В развёрнутом виде она состоит из девяти слагаемых. Вследствие теоремы о взаимности касательных напряжений число их уменьшается до шести. Направление  $x$  можно либо совместить с направлением  $\lambda$ , либо считать эти направления взаимно перпендикулярными. В первом случае получаем выражение для нормального напряжения, действующего на выбранное сечение, во втором случае — выражение для касательного напряжения.



Фиг. 6. К определению произвольно ориентированных напряжений.

Для большей ясности приведём пример: пусть все напряжения, отнесённые к координатам  $x, y, z$ , равны нулю, кроме  $\tau_{xy}$ . Какие напряжения возникают тогда в сечениях, составляющих угол в  $45^\circ$  с осями  $x$  и  $y$ ? Соответственно этому, на фиг. 7 в плоскости  $x, y$  проведены направления 1 и 2. Тогда имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11} &= \sigma_1 = \tau_{xy} \cos(1, x) \cos(1, y) + \tau_{yx} \cos(1, y) \cos(1, x), \\ \tau_{12} &= \tau_{xy} \cos(1, x) \cos(2, y) + \tau_{yx} \cos(1, y) \cos(2, x), \\ \tau_{22} &= \sigma_2 = \tau_{xy} \cos(2, x) \cos(2, y) + \tau_{yx} \cos(2, y) \cos(2, x). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Но так как

$$\cos(1, x) = \cos(1, y) = \cos(2, y) = -\cos(2, x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (8)$$

из (7) получаем:

$$\sigma_1 = \tau_{xy}; \quad \sigma_2 = -\tau_{xy}; \quad \tau_{12} = 0, \quad (9)$$

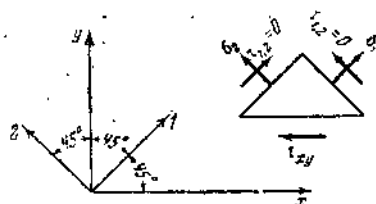
т. е. в сечениях, составляющих угол в  $45^\circ$ , с осями  $x$  и  $y$  в этом случае существует либо простое растяжение, либо простое сжатие.

Все эти чисто статические соотношения справедливы для любого материала. Лишь при установлении связи между напряжениями и геометрическими характеристиками деформации мы должны принять во внимание упругие свойства материала.

## 2. Деформации.

Буквами  $\xi, \eta, \zeta$  мы обозначим компоненты в направлениях координатных осей вектора *перемещения*, которое претерпевает любая точка упругого тела, находящегося в условиях напряжённого и деформированного состояния, вызванного внешними силами. Знание в каждой точке тела вектора перемещения помогает однозначному определению деформированного состояния всего тела. По компонентам перемещения можно определить соответствующие им величины деформаций — относительные удлинения и относительные сдвиги. Под *относительным удлинением* понимается отношение абсолютного удлинения бесконечно малого линейного элемента к его первоначальной длине. Обозначим его буквой  $\epsilon$  и используем при этом индексы, указывающие первоначальное направление растянутого линейного элемента.

*Относительный сдвиг* представляет собой величину изменения первоначально прямого угла. Его мы обозначим буквой  $\gamma$  с двумя индексами, указывающими первоначальные направления сторон прямого угла. Последовательность индексов не играет при этом никакой роли.



Фиг. 7. Напряжения при чистом сдвиге.

В дальнейшем изложении теории деформаций нужно обратить внимание на то, что, вследствие значительной сопротивляемости строительных материалов воздействию внешних сил, деформации, в большинстве случаев, имеют настолько малые значения, что их квадратами, по сравнению с величинами самих деформаций, всегда можно пренебречь, как имеющими высший порядок малости. Важнейшим выводом, проистекающим отсюда, является закон наложения. Согласно этому закону, последовательность наложения одного деформированного состояния на другое не отражается на конечном состоянии, и величины деформаций, отнесённые к одной и той же координатной системе, алгебраически складываются. Имея в виду этот закон, мы будем сначала обращать внимание только на перемещение  $\xi$ .

По величинам деформаций  $\epsilon_x'$  и т. д., возникшим только от перемещения  $\xi$ , мы затем легко найдём те части общей деформации, которые происходят только от перемещения  $\eta$  или  $\zeta$ . И тогда, согласно закону наложения, простым сложением этих составных частей получим полное выражение для компонентов деформации. За начало координат выберем точку  $O$  элемента объёма, в которой пересекаются рёбра  $OA = dx$ ;  $OB = dy$  и  $OC = dz$  (см. фиг. 8).

Вследствие перемещения  $\xi$  точка  $O$  перейдёт в  $O'$ . В точке  $A$  перемещение  $\xi$  уже увеличится, вследствие изменения координаты  $x$  на  $dx$ , на бесконечно малую величину  $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ . Аналогичные заключения можно сделать для точек  $B$  и  $C$ . Отрезок  $dx$  передвинется по своему направлению в положение  $O'A'$  и, кроме того, претерпит относительное удлинение

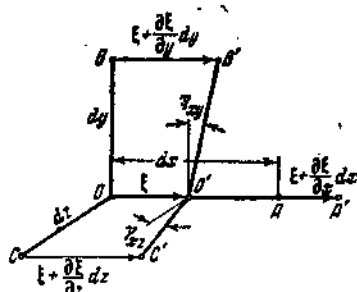
$$\epsilon_x' = \frac{dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx - \xi - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (10)$$

Отрезок  $dy$  переместится в положение  $O'B'$  и одновременно повернётся. Изменение прямого угла  $AOB$ , обусловленное этим вращением, и есть сдвиг  $\gamma_{xy}'$ . Так как малый угол можно заменить его тангенсом, то получим

$$\gamma_{xy}' = \frac{\xi + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy - \xi}{dy} = \frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (11)$$

Аналогично определяется уменьшение угла  $AOC$

$$\gamma_{xz}' = \frac{\xi + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz - \xi}{dz} = \frac{\partial \xi}{\partial z}. \quad (12)$$



Фиг. 8. Сдвиги в прямоугольной системе координат.

Относительное удлинение ребра  $OB$ , появляющееся вследствие его поворота, равно

$$\varepsilon'_y = \frac{\sqrt{dy^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} dy\right)^2} - dy}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2} - 1 \quad (13)$$

и, следовательно, его можно считать равным нулю, так как величиной  $\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$  по сравнению с единицей мы пренебрегаем. То же самое можно сказать об отрезке  $OC$ , т. е. величину  $\varepsilon'_z$  можно также считать равной нулю. Легко видеть, что и относительный сдвиг  $\gamma'_{yz}$  можно рассматривать как величину высшего порядка малости.

Заменой  $\xi$  на  $\eta$  и  $x$  на  $y$  получим те части величин деформаций, которые вызываются компонентом перемещения  $\eta$ . Аналогично поступаем для получения слагаемых компонент деформаций, вызванных перемещением  $\eta$ . Совокупность всех этих слагаемых даёт полное представление о величине деформации

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Важную величину представляет собой *объёмное расширение*, равное отношению увеличения объёма элемента к первоначальному его объёму. Обозначив объёмное расширение буквой  $e$ , получим:

$$e = \frac{dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z) - dx dy dz}{dx dy dz}. \quad (15)$$

Так как произведение относительных удлинений является величиной высшего порядка малости, то получаем

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (16)$$

т. е. относительное изменение объёма равно сумме относительных удлинений в трёх взаимно перпендикулярных направлениях.

Таким образом, мы выразили компоненты деформаций через компоненты перемещений в декартовых координатах. При вычислении распределения напряжений в выточках большим преимуществом обладают криволинейные координаты. Поэтому мы теперь выведем соответствующие формулы и в этих координатах.

### 3. Деформации в криволинейных координатах.

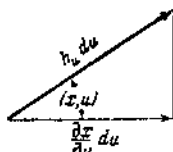
Перейдём к криволинейной ортогональной системе координат  $u, v, w$ ; при этом  $u, v, w$  считаем непрерывными и дифференцируемыми функциями  $x, y, z$ . Обратно, функции  $x, y, z$  предполагаются

непрерывными и дифференцируемыми по  $u, v, w$ ; иначе говоря, имеются уравнения:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w); \quad z = z(u, v, w). \quad (17)$$

Под направлением  $u$  будем понимать направление нормали к поверхности  $u = \text{const.}$ ; считаем его положительным, если оно направлено в сторону увеличения параметра  $u$ . Переместимся вдоль  $u$  на линейный элемент  $ds_u$ . Параметр  $u$  изменится при этом на  $du$ . В силу предположений о дифференцируемости, производная  $\frac{ds_u}{du}$  в каждой точке имеет вполне определенное значение, которое мы обозначим буквой  $h_u$ ; длина элемента равна поэтому  $h_u du$ . Величина  $h_u du$  представляет собой расстояние между поверхностью  $u = \text{const.}$  и соседней с ней, для которой  $u$  изменяется на величину  $du$ . Вследствие различной кривизны обеих поверхностей расстояние  $h_u du$  для каждой точки поверхности будет различным, несмотря на то, что  $du$  имеет во всех точках одну и ту же бесконечно малую величину. Это учитывается множителем  $h_u$ , который мы поэтому и называем *коэффициентом искажения*. Коэффициенты искажения в направлениях  $v$  и  $w$ , совпадающих с нормальными к поверхностям  $v = \text{const.}$  и  $w = \text{const.}$ , мы обозначим соответственно буквами  $h_v$  и  $h_w$ . Соответствующие им линейные элементы тогда равны  $h_v dv$  и  $h_w dw$ .

Угол между двумя направлениями будем обозначать, как и выше, указывая эти направления; так например,  $(x, u)$  является углом между направлениями  $x$  и  $u$ . Косинус этого угла получается тогда из линейного элемента  $h_u du$  и его составляющей на ось  $x$  (см. фиг. 9). Аналогичные соображения справедливы для углов  $(y, u)$  и  $(z, u)$ , равно как и для углов, образованных направлениями  $v$  и  $w$  и координатными осями. Мы получаем:



Фиг. 9. Линейный элемент в криволинейных координатах и его  $x$ -составляющая.

$$\left. \begin{aligned} \cos(x, u) &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ \cos(y, u) &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \cos(z, u) &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial z}{\partial u} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

и т. д.

Символом «и т. д.» мы выразили то обстоятельство, что можно написать ещё две системы уравнений, получающиеся из предыдущей заменой буквы  $u$  на  $v$  и  $w$ . По известной теореме аналитической геометрии имеем

$$\cos^2(x, u) + \cos^2(y, u) + \cos^2(z, u) = 1 \quad (19)$$

и т. д.

Если выражение (18) для направляющих косинусов подставим в (19), то получим:

$$h_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad (20)$$

и т. д.

Эти соотношения, по уравнениям (17), дают возможность вычислить коэффициенты искажения.

Перемещения в направлениях  $u$ ,  $v$  и  $w$  обозначим буквами  $U$ ,  $V$  и  $W$ . Согласно закону наложения величину  $U$  можем получить сложением составляющих перемещений  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  в направлении  $U$ . То же самое справедливо и для перемещений  $V$  и  $W$ . Составляющие найдём простым умножением на соответствующие направляющие косинусы, в результате чего получим:

$$U = \xi \cos(x, u) + \eta \cos(y, u) + \zeta \cos(z, u) \text{ и т. д.} \quad (21)$$

или, имея в виду (18),

$$U = \frac{1}{h_u} \left( \xi \frac{\partial x}{\partial u} + \eta \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad (22)$$

и т. д. При замене в этом уравнении буквы  $u$  на  $v$  или  $w$  следует также одновременно  $U$  заменить на  $V$  или  $W$ .

Компоненты деформаций содержат в себе прежде всего такие слагаемые, которые получаются из уравнений (14), если в них ввести лишь новые обозначения координат, линейных элементов и перемещений. Обозначив эти слагаемые буквами  $e_u'$  и т. д., получим

$$e_u' = \frac{1}{h_u} \frac{\partial U}{\partial u}; \quad \gamma_{uv}' = \frac{1}{h_v} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{h_u} \frac{\partial V}{\partial u} \quad (23)$$

и т. д. При этом криволинейные координаты мы в первом приближении рассматривали как прямолинейные. Компоненты деформации являются малыми величинами и, казалось бы, изменениями таких малых величин, обусловленными криволинейностью координатной системы, можно пренебречь, как малыми высшего порядка; однако, сделав это, мы совершили бы принципиальную ошибку. При выводе выражений для компонентов деформаций в декартовых координатах у нас остались только бесконечно малые приращения компонентов перемещений:  $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$  и т. д., а сами перемещения выпали. Действительно, в тех слагаемых деформаций, которые происходят от этих малых приращений, криволинейность вызывает эффект высшего порядка; но для самих перемещений это обстоятельство уже не имеет места. В то время как в декартовых координатах постоянные перемещения  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  не вызывают никаких деформаций в теле (упругое тело перемещается при этом как абсолютно твёрдое тело), в криволинейных координатах, вследствие кривизны, при постоянных перемещениях  $U$ ,  $V$ ,  $W$  это становится возможным. Как мы увидим



далее, происходящие при этом деформации не являются пренебрежимо малыми, так как они вызываются не малыми приращениями перемещений, но самими перемещениями. Величины этих деформаций мы обозначим буквами  $\varepsilon_u''$  и т. д. Их нужно сложить со слагаемыми из уравнения (23), чтобы получить полные деформации.

Рассмотрим элементарную площадку, принадлежащую поверхности  $W = \text{const}$  и изображённую на фиг. 10. Угловым точкам этой площадки придадим постоянные перемещения  $U$ . Ребро  $OB$ , направленное по  $v$ , имеет длину  $h_v dv$ . При перемещении элемента  $OB$  на длину  $h_u du$  в положение  $AC'$  его длина увеличится на  $\frac{\partial h_v}{\partial u} dv du$ , т. е. он приобретёт относительное удлинение  $\frac{1}{h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u} du$ . Относительное удлинение, соответствующее перемещению элемента  $OB$  на величину  $U$ , получим умножением предыдущего выражения на отношение  $\frac{U}{h_u du}$ , т. е.

$$\varepsilon_v'' = \frac{U}{h_u h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u}. \quad (24)$$

С другой стороны, при перемещении ребра  $OB$  в положение  $AC$  первоначально прямой угол между этим ребром и направлением  $u$  увеличится на малый угол  $d\beta$ , который равен  $\frac{1}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} du$ . Увеличение прямого угла соответствует при этом отрицательному относительному сдвигу. Сдвиг  $\gamma_{uv}''$ , соответствующий перемещению на величину  $U$ , опять получим умножением на  $\frac{U}{h_u du}$ ; тогда будем иметь:

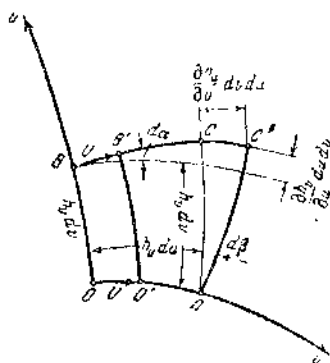
$$\gamma_{uv}'' = -\frac{U}{h_u h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v}. \quad (25)$$

Остальные слагаемые компонентов деформации найдутся рассмотрением элемента площадки, взятого на поверхности  $v = \text{const}$ . Мы получим их из (24) и (25) заменой  $v$  на  $w$ :

$$\varepsilon_w'' = \frac{U}{h_u h_w} \frac{\partial h_w}{\partial u}, \quad \gamma_{uw}'' = -\frac{U}{h_u h_w} \frac{\partial h_u}{\partial w}. \quad (26)$$

Прочие слагаемые, вызванные постоянным перемещением  $U$ , являются величинами высшего порядка малости.

К только что полученным выражениям добавляем согласно закону наложения слагаемые, соответствующие постоянным перемещениям



Фиг. 10. Деформация в криволинейных координатах.

$V$  и  $W$ ; они получаются из (24), (25) и (26) заменой в них буквы  $u$  на  $v$  и  $w$ . К результату добавляем затем слагаемые по уравнениям (23); выражение для относительного сдвига можно при этом несколько преобразовать. Окончательно получим следующие выражения для компонентов деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{1}{h_u} \left( \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{V}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} + \frac{W}{h_w} \frac{\partial h_u}{\partial w} \right); \\ \gamma_{uv} &= \frac{h_u}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{U}{h_u} \right) + \frac{h_v}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{V}{h_v} \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

и т. д.

При выводе формулы для объемного расширения следует обратить внимание прежде всего на то, что у нашего криволинейного элемента длины ребер, идущих в одном и том же направлении, отличаются друг от друга. Но поскольку разница длин, так же как и при оценке компонентов деформаций, вызывает весьма малый эффект, при вычислении изменения объема можно положить в основу средние длины ребер  $h_u$ ,  $h_v$ ,  $h_w$  по направлениям  $u$ ,  $v$  и  $w$ .

Относительное изменение объема тогда окажется равным:

$$e = \frac{h_u(1+\varepsilon_u)h_v(1+\varepsilon_v)h_w(1+\varepsilon_w) - h_u h_v h_w}{h_u h_v h_w}, \quad (28)$$

откуда, пренебрегая произведениями относительных удлинений, получим:

$$e = \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w, \quad (29)$$

т. е. объемное расширение и в криволинейных координатах равно сумме относительных удлинений <sup>1)</sup>.

Итак, мы записали деформации и в криволинейных координатах. Ознакомимся теперь с соотношениями, которыми связаны между собой компоненты напряжений и деформаций.

#### 4. Закон Гука.

*Закон Гука* устанавливает пропорциональность, с одной стороны, между нормальными напряжениями и относительными удлинениями и, с другой стороны, между касательными напряжениями и относительными сдвигами.

<sup>1)</sup> Приведенный в этом параграфе вывод выражений (27) для составляющих деформации в криволинейных координатах, конечно, мало убедителен; по нашему мнению, он является, однако, удачной попыткой объяснить наглядно структуру этих формул. Точный вывод читатель может найти например, в «Математической теории упругости» Лява (ОНТИ, 1936), стр. 6 и след. (Прим. ред.)

Сначала представим себе, что существует только нормальное напряжение  $\sigma_x$ . Тогда в направлении этого напряжения вызывается относительное удлинение

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad (30)$$

где  $E$  представляет собой модуль упругости. Одновременно в каждом из двух поперечных направлений возникает относительное сжатие, имеющее величину

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\sigma_x}{mE}. \quad (31)$$

Коэффициент  $m$  в уравнении (31) называют *пуассоновым числом*. Для металла его можно считать равным  $10/3$ . Если действуют одновременно все три нормальных напряжения, то путём наложения получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_z) \right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Если мы эти выражения подставим в уравнение (16), то для объёмного расширения получим

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{2}{m} \right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (33)$$

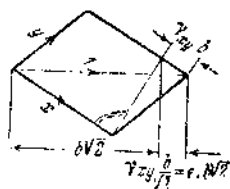
Сумму трёх нормальных напряжений, фигурирующую в (33), мы в последующем коротко будем называть *объёмным напряжением*.

Далее, касательные напряжения пропорциональны соответствующим сдвигам, и коэффициент пропорциональности называется *модулем сдвига*. Его мы обозначим буквой  $G$ . Имеем:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \quad (34)$$

Из этой связи между компонентами напряжений и деформаций вытекает, что закон наложения, применявшийся до сих пор только к деформациям, справедлив также и для напряжений.

Три введенных выше постоянных  $E$ ,  $m$ ,  $G$  связаны между собой важным соотношением. Это соотношение проще всего получить из следующих соображений. Если действует только касательное напряжение  $\tau_{xy}$ , то квадрат, рёбра которого до деформации были параллельны осям  $x$  и  $y$  и имели длину  $b$ , после деформации превращается в ромб (см. фиг. 11). Абсолютное удлинение диагонали,



Фиг. 11. Связь между растяжением и сдвигом.

выраженное через относительный сдвиг, равно  $\gamma_{xy} \frac{b}{\sqrt{2}}$ , что на основании (34) можно заменить выражением  $\frac{\tau_{xy}}{G} \frac{b}{\sqrt{2}}$ ; с другой стороны, в III, I мы видели, что в сечениях, проведенных под углом  $45^\circ$  к ребрам, этому чистому сдвигу соответствует состояние простого растяжения или сжатия. В направлении одной диагонали квадрата возникает растягивающее напряжение  $\sigma_1 = \tau_{xy}$ , а в направлении другой диагонали — сжимающее напряжение  $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ . Следовательно, в соответствии с уравнением (32), диагональ претерпевает относительное удлинение  $\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left( \sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2 \right) = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \tau_{xy}$  и, значит, абсолютное удлинение диагонали равно  $\frac{b\sqrt{2}}{E} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \tau_{xy}$ . Приравнивая между собой оба полученных нами выражения для абсолютного удлинения диагонали, мы получим соотношение между тремя упругими постоянными

$$G = \frac{E}{2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right)}. \quad (35)$$

Применим это соотношение для того, чтобы несколько преобразовать уравнения (32). Первое из этих уравнений напомним в виде:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right]. \quad (36)$$

В правой части уравнения (36) фигурирует объемное напряжение, которое, согласно уравнению (33), можно выразить через объемное расширение. Тогда получим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \sigma_x - \frac{1}{m} \frac{e}{1 - \frac{2}{m}}. \quad (37)$$

Решив это уравнение относительно  $\sigma_x$ , найдём:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \frac{1}{m}} \left( \varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right) \quad (38)$$

и, имея в виду соотношение (38), окончательно напомним:

$$\sigma_x = 2G \left( \varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right) \quad (39)$$

и т. д.

Аналогично, в криволинейных координатах

$$\sigma_u = 2G \left( \varepsilon_u + \frac{e}{m-2} \right); \quad \tau_{uv} = G \gamma_{uv} \quad (40)$$

и т. д.

## 5. Вывод основных уравнений.

Мы возвратимся к основным уравнениям равновесия (2), первое из которых имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0. \quad (41)$$

Для нормального напряжения  $\sigma_x$  из уравнений (39) и (14) получаем:

$$\sigma_x = 2G \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right). \quad (42)$$

Для касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ , согласно уравнениям (34) и (14), имеем:

$$\tau_{xy} = G \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = G \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right). \quad (43)$$

Подставив выражения (42) и (43) в уравнение (41), получим:

$$2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{2}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} = 0. \quad (44)$$

Ради краткости введём оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (45)$$

Далее, дифференцированием по  $x$  уравнения (16) найдём:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} = \frac{\partial e}{\partial x}; \quad (46)$$

в результате получаем первое из следующих трёх уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0; \\ \Delta \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0; \\ \Delta \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Эти три уравнения, вместе с уравнением:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = e, \quad (48)$$

являются основными уравнениями теории упругости, здесь используемыми. Если они выполнены, то удовлетворены все уравнения, которые мы выше привели не только для перемещений, но также и для компонентов деформаций и напряжений.

Нужно только разыскать наиболее простые способы, с помощью которых можно найти решения этих основных уравнений. В дальнейшем изложении мы покажем, что компоненты перемещения могут быть выражены помощью предложенного мною решения по методу трёх функций, при этом таким образом, что основные уравнения будут всегда удовлетворены.

## 6. Выражение компонентов перемещений и напряжений через три функции.

Уже Максвелл <sup>1)</sup> выразил компоненты перемещений и напряжений через три функции и установил дифференциальные соотношения между этими функциями. Однако он не дал общих выражений, представляющих собой решение этих уравнений теории упругости. Другими авторами избирался тот же самый путь, причём дифференциальным соотношениям, существующим между функциями, удалось удовлетворить в интегральной форме. Так например, выражение, данное Е. Треффц <sup>2)</sup>, содержит интегрирование по  $x$  в декартовых координатах. В другом случае, задачу теории упругости сводили к решению контурной задачи теории потенциала <sup>3)</sup>. Каждый из ответов, полученных таким образом, хотя и представлял математически безукоризненное решение задачи, но применение этих ответов было связано со столь большими вычислениями, что для определения пространственного напряжённого состояния в выточках они применения найти не могли. В противоположность этому найденное мною <sup>4)</sup> <sup>5)</sup> новое решение имеет то преимущество, что вычисления перемещений и напряжений не требуют интегрирования. Решение это содержит одну пространственную функцию напряжений, которая выражена через три гармонические функции. Вследствие симметрии системы уравнений сравнительно просто дать ход вычислений и в криволинейных координатах. В ряде случаев удалось получить решение даже в замкнутой форме.

Моё выражение перемещений через три функции имеет форму <sup>6)</sup>

$$\left. \begin{aligned} 2G\xi &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 2\alpha\Phi_1; \\ 2G\eta &= -\frac{\partial F}{\partial y} + 2\alpha\Phi_2; \\ 2G\zeta &= -\frac{\partial F}{\partial z} + 2\alpha\Phi_3, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

где  $F$  обозначает пока неизвестную пространственную функцию напряжений.  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  являются гармоническими функциями, т. е. они удовлетворяют условиям:

$$\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = \Delta\Phi_3 = 0. \quad (50)$$

<sup>1)</sup> Maxwell I, C., Sci. Pap., Paris, т. 2 (1927), стр. 198.

<sup>2)</sup> Е. Треффц, Математическая теория упругости, ОНТИ, 1934, стр. 80—84.

<sup>3)</sup> Korn A., Math. Ann., т. 75 (1914), стр. 497.

<sup>4)</sup> Neuber H., Z. angew. Math. Mech., т. 4 (1934), стр. 203.

<sup>5)</sup> Ранее Нейбера это решение было получено Г. Д. Гродским и П. Ф. Попковичем, см. Попкович П. Ф., Теория упругости, Оборонгиз, 1939, стр. 120—131. (Прим. ред.)

Чтобы получить уравнение, связывающее эти функции с функцией напряжений  $F$ , подставим выражения (49) для перемещений в основные уравнения (47). Тогда, принимая во внимание (50), получим

$$\left. \begin{aligned} -\Delta \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) + 2G \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0; \\ -\Delta \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) + 2G \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0; \\ -\Delta \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) + 2G \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Последние уравнения, после изменения порядка дифференцирования, можно написать также в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2G \frac{m}{m-2} e - \Delta F \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( 2G \frac{m}{m-2} e - \Delta F \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( 2G \frac{m}{m-2} e - \Delta F \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Отсюда следует, что выражение, стоящее в скобках, не зависит от координат  $x, y, z$ , т. е.

$$2G \frac{m}{m-2} e - \Delta F = \text{const.} \quad (53)$$

Постоянная величина в правой части (53) не существенна и, положив её равной нулю, получим:

$$2Ge = \left( 1 - \frac{2}{m} \right) \Delta F. \quad (54)$$

С другой стороны, подставив выражения (49) для компонентов перемещений в выражение для  $e$  [уравнение (48)], получим:

$$2Ge = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\alpha \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\alpha \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}; \quad (55)$$

или, вводя обозначение оператора:

$$2Ge = -\Delta F + 2\alpha \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \quad (56)$$

Воспользовавшись теперь соотношением (54), найдём:

$$\left( 2 - \frac{2}{m} \right) \Delta F = 2\alpha \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \quad (57)$$

Тем самым мы получили искомое соотношение между функцией напряжений и тремя гармоническими функциями. В то время как соответствующее уравнение в прежних решениях предлагается

только в интегральной форме, полученному здесь уравнению можно удовлетворить очень простым способом. Именно, положим

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, \quad (58)$$

где  $\Phi_0$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi_0 = 0. \quad (59)$$

Тогда будем иметь

$$\Delta F = \Delta\Phi_0 + x\Delta\Phi_1 + 2\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + y\Delta\Phi_2 + 2\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + z\Delta\Phi_3 + 2\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}. \quad (60)$$

В силу (50) и (59) это уравнение приводится к виду

$$\Delta F = 2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right). \quad (61)$$

Найденное значение  $\Delta F$  подставим в уравнение (57), тогда получим значение  $\alpha$

$$\alpha = 2\left(1 - \frac{1}{m}\right). \quad (62)$$

Таким образом мы удовлетворили всем требуемым условиям. Найдём теперь ещё выражения для компонентов напряжений.

Нормальные напряжения мы получим из уравнения (42), если в них вместо  $\xi$  и  $\varepsilon$  подставим их выражения, согласно (49) и (54). В результате найдём

$$\sigma_x = 2G\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{2G\varepsilon}{m-2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{1}{m}\Delta F \quad (63)$$

и т. д.

Из уравнения (62) выразим  $\frac{1}{m}$  через  $\alpha$ :

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (64)$$

Тогда уравнения (63) перепишутся в виде

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\Delta F \quad (65)$$

и т. д.

Но, с одной стороны, по определению:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \quad (66)$$

С другой стороны, по (61)

$$\frac{1}{2}\Delta F = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}. \quad (67)$$

Таким образом выражение (65) окончательно можно записать в виде

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right) \quad (68)$$

и т. д.



Непосредственно из (43) и (49) получаем выражения для касательных напряжений

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \alpha \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) \quad (69)$$

и т. д. Следует при этом обратить внимание на то, что циклическую перестановку индексов нужно производить и у функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ . Легко убедиться, что выражения (68) и (69) удовлетворяют уравнениям равновесия (2). Точно так же удовлетворяются все остальные уравнения, которые можно получить комбинированием уравнений (2), (14), (33), (34) и (39) <sup>1)</sup>.

Замечательным является то, что в общем случае любого напряжённого состояния, без нарушения общности рассуждений, одну из (четырёх) гармонических функций можно принять равной нулю. Это утверждение проще всего доказать следующим образом. Положим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_3 &= \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z}; \quad \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_2'}{\partial y} + \Phi_2'; \quad \Phi_1 = \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} + \Phi_1'; \\ \Phi_0 &= 2\alpha \Phi_3' - \left( x \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} \right) + \Phi_0'. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

При этом  $\Phi_3'$ ,  $\Phi_2'$ ,  $\Phi_1'$  и  $\Phi_0'$  являются четырьмя новыми гармоническими функциями. Если напряжённое состояние определено функциями  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ , надлежащим образом выбранными, то по уравнениям (70) легко найти новые введённые нами функции; так например,  $\Phi_3'$  получается непосредственно из уравнения

$$\frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} = \Phi_3, \quad (71)$$

а  $\Phi_2'$ ,  $\Phi_1'$  и  $\Phi_0'$  определяются из уравнений (70) соответственно по  $\Phi_2$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_0$  и  $\Phi_3'$ . Дифференцированием легко убеждаемся, что введение новых гармонических функций не противоречит уравнениям (50) и (59).

С помощью (58) для функции напряжений получаем:

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 = 2\alpha \Phi_3' + \Phi_0' + x\Phi_1' + y\Phi_2'. \quad (72)$$

Применив теперь эту подстановку к формулам (49), получим:

$$\left. \begin{aligned} 2G\xi &= -\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_0' + x\Phi_1' + y\Phi_2') + 2\alpha \Phi_1'; \\ 2G\eta &= -\frac{\partial}{\partial y} (\Phi_0' + x\Phi_1' + y\Phi_2') + 2\alpha \Phi_2'; \\ 2G\zeta &= -\frac{\partial}{\partial z} (\Phi_0' + x\Phi_1' + y\Phi_2'). \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

<sup>1)</sup> См. Феппль А. Л., Сила и деформация, I часть, стр. 29—41.  
Треффц, Математическая теория упругости, стр. 33—36.

В результате оказывается, что перемещения не зависят от функции  $\Phi_3'$ . Функция  $\Phi_3'$  была нужна для определения  $\Phi_2'$ ,  $\Phi_1'$  и  $\Phi_0'$ . На конечный же результат эта функция не оказывает влияния; она, в известной степени, уже учтена функциями  $\Phi_2'$ ,  $\Phi_1'$  и  $\Phi_0'$ , к которым перешла роль функций  $\Phi_2$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_0$ . Этим доказано, что напряжённое состояние в общем случае может быть описано только тремя функциями. В выражениях (49) сразу можно считать одну из функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  равной нулю. Наконец, посредством другой подстановки, убедимся, что и  $\Phi_0$  можно считать равной нулю.

А именно, положим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= 2\alpha\Phi_0' - x \frac{\partial\Phi_0'}{\partial x} - y \frac{\partial\Phi_0'}{\partial y} - z \frac{\partial\Phi_0'}{\partial z}; \\ \Phi_1 &= \frac{\partial\Phi_0'}{\partial x} + \Phi_1'; \quad \Phi_2 = \frac{\partial\Phi_0'}{\partial y} + \Phi_2'; \quad \Phi_3 = \frac{\partial\Phi_0'}{\partial z} + \Phi_3'. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 2G\xi &= - \frac{\partial}{\partial x} (x\Phi_1' + y\Phi_2' + z\Phi_3') + 2\alpha\Phi_1'; \\ 2G\eta &= - \frac{\partial}{\partial y} (x\Phi_1' + y\Phi_2' + z\Phi_3') + 2\alpha\Phi_2'; \\ 2G\zeta &= - \frac{\partial}{\partial z} (x\Phi_1' + y\Phi_2' + z\Phi_3') + 2\alpha\Phi_3'. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

В последних выражениях функция  $\Phi_0'$  больше не фигурирует. Так как три функции  $\Phi_1'$ ,  $\Phi_2'$ ,  $\Phi_3'$  входят точно так же, как ранее входили функции  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ , то этим доказывается возможность, без нарушения общности рассуждений, функцию  $\Phi_0$  считать сразу равной нулю.

Итак, в действительности необходимы только три гармонические функции, причём безразлично, какую из четырёх функций считать равной нулю. Следовательно, одной определённой гармонической функции соответствуют три различных напряжённых состояния, которые, за редкими исключениями, не могут быть даны какими-либо другими функциями. Следовательно, *многообразие упругих напряжённых состояний в общем случае соответствует трёхкратному многообразию гармонических функций.*

## 7. Вычисления в криволинейных координатах.

Наиболее существенным требованием, которое ставится при вычислении напряжений, является необходимость удовлетворить граничным условиям. Последние налагают определённые ограничения на величины напряжений в точках, находящихся на поверхности тела. Например, на свободной от внешних нагрузок поверхности тела эти напряжения обращаются в нуль. Так как поверхность, ограничивающая тело, вообще искривлена, то удовлетворить условиям

на поверхности в декартовых координатах не легко. Напротив, если использовать такую криволинейную систему координат, координатные поверхности которой содержат и поверхность тела, изображаемую, например, уравнением  $u = u_0$ , — в смысле определения, данного в III, 3, — то в точках этой поверхности обращаются в нуль все напряжения с индексом  $u$ , т. е.<sup>1)</sup>

$$\sigma_u = 0, \tau_{uv} = 0, \tau_{uw} = 0 \text{ для } u = u_0. \quad (76)$$

Вследствие этой простой формы граничных условий мы предпочитаем проводить вычисления в криволинейных координатах.

С основами вычислений в криволинейных координатах мы уже ознакомились в III, 3. Преобразуем теперь к криволинейным координатам выражение (49). Для этого возвратимся к формулам (22) для перемещений  $U, V$  и  $W$ :

$$U = \frac{1}{h_u} \left( \xi \frac{\partial x}{\partial u} + \eta \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad (77)$$

и т. д. Подставив сюда выражения (49) для  $\xi, \eta, \zeta$ , получим:

$$2GU = \frac{1}{h_u} \left[ \left( -\frac{\partial F}{\partial x} + 2\alpha\Phi_1 \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \left( -\frac{\partial F}{\partial y} + 2\alpha\Phi_2 \right) \frac{\partial y}{\partial u} + \left( -\frac{\partial F}{\partial z} + 2\alpha\Phi_3 \right) \frac{\partial z}{\partial u} \right]. \quad (78)$$

и т. д. На основании равенств

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{и т. д.} \quad (79)$$

получаем

$$2GU = \frac{1}{h_u} \left[ -\frac{\partial F}{\partial u} + 2\alpha \left( \Phi_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \Phi_2 \frac{\partial y}{\partial u} + \Phi_3 \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right] \quad \text{и т. д.} \quad (80)$$

Эти уравнения, дающие компоненты перемещения в криволинейных координатах, почти столь же просты, как и уравнения в декартовых координатах.

Дальнейший ход вычислений заключается в установлении формул для относительных удлинений [см. (27)]:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{h_u} \left[ \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{V}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} + \frac{W}{h_w} \frac{\partial h_u}{\partial w} \right] \quad \text{и т. д.} \quad (81)$$

Отсюда получается объемное расширение [см. (29)]

$$e = \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w, \quad (82)$$

а затем, по формулам (40) и (62), и нормальные напряжения

$$\sigma_u = 2G \left( \varepsilon_u + \frac{2-\alpha}{2\alpha-2} e \right) \quad \text{и т. д.} \quad (83)$$

<sup>1)</sup> Предполагается, что поверхность  $u = u_0$  свободна от внешних нагрузок. (Прим. ред.)

По формулам (27) и (40) находятся касательные напряжения:

$$\tau_{uv} = G \left[ \frac{h_v}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{V}{h_v} \right) + \frac{h_u}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{U}{h_u} \right) \right] \quad \text{и т. д.} \quad (84)$$

Таким образом установлены все соотношения, которые необходимы для вычисления напряжений по функциям напряжений в криволинейных координатах.

Ход вычислений, приведённый выше, предполагает, что в первую очередь должна быть решена задача определения перемещений, а затем уже и напряжений. Однако в большинстве случаев напряжения проще вычислять непосредственно из функций напряжений. Правда, некоторые свойства перемещений, как, например, однозначность и непрерывность, имеют существенное значение при выборе функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  и  $\Phi_0$ , но, как правило, не является необходимостью определять сами перемещения; как вытекает из (49), (58) и (80), свойствами однозначности и непрерывности должны обладать сами функции  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  и производные  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$  и т. д.; или же в криво-

линейной системе координат  $\frac{1}{h_u} \frac{\partial \Phi_0}{\partial u}$  и т. д. При этих условиях однозначность и непрерывность перемещений обеспечена. Поэтому мы обыкновенно будем пользоваться несколько более коротким способом вычислений, дающим непосредственно сами напряжения. Для этого перемещения из (80) подставим в (81) и (84). Ради краткости введём в употребление следующие операции:

$$\frac{\partial^2}{\partial n_u^2} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{1}{h_u h_v^2} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{h_u h_u^2} \frac{\partial h_u}{\partial w} \frac{\partial}{\partial w} \quad \text{и т. д.} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial n_u \partial n_v} &= \frac{\partial^2}{\partial n_v \partial n_u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \right) - \frac{1}{h_u^2 h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} = \\ &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) - \frac{1}{h_u h_v^2} \frac{\partial h_v}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} = \\ &= \frac{h_v}{2h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h_v^2} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{h_u}{2h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial}{\partial u} \right). \end{aligned} \quad (86)$$

Остальные получаются циклической перестановкой букв  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Получаемые далее выражения можно ещё существенно упростить. Рассмотрим для этого частный случай

$\Phi_1 = \text{const.} = C$ ;  $\Phi_0 = -xC$ ;  $\Phi_2 = 0$ ;  $\Phi_3 = 0$ ;  $F = 0$ . (87)  
Все компоненты перемещения, кроме  $\xi$ , в этом случае равны нулю, а  $\xi$  равно:

$$\xi = \frac{u}{G} C. \quad (88)$$

Следовательно, все точки тела перемещаются в данном направлении на одинаковую величину, т. е. тело остаётся жёстким, и в нём деформаций никаких не возникает. Действительно, в этом случае

исчезают все компоненты деформаций. Но и в криволинейных координатах при жестком перемещении тела компоненты деформаций также должны обратиться в нуль. Значит, слагаемые в выражениях для деформаций  $\epsilon_u$ ,  $\gamma_{uv}$  и т. д., содержащие  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ , должны исчезать. Отсюда следует<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial n_u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial n_u \partial n_v} = 0 \text{ и т. д.} \quad (89)$$

с циклической перестановкой букв  $u, v, w$  и  $x, y, z$ .

Чтобы получить окончательные формулы для нормальных напряжений, требуется ещё выразить через функции напряжений объёмное расширение. Из (54) и (62) имеем:

$$2Ge = (\alpha - 1)\Delta F \text{ и } \frac{2-\alpha}{2\alpha-2} 2Ge = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\Delta F. \quad (90)$$

Для нормальных напряжений получаем:

$$\sigma_u = -\frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2} + \frac{2\alpha}{h_u^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\Delta F \quad (91)$$

и т. д. Для касательных напряжений найдём:

$$\begin{aligned} \tau_{uv} = & -\frac{\partial^2 F}{\partial n_u \partial n_v} + \frac{\alpha}{h_u h_v} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \text{ и т. д.} \quad (92) \end{aligned}$$

Сравнивая найденные выражения с соответствующими формулами в декартовых координатах, т. е. с соотношениями (65) и (69), видим, что операции  $\frac{\partial^2}{\partial n_u^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial n_u \partial n_v}$  соответствуют вторым производным

в некоторой декартовой системе координат, оси которой  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  в рассматриваемой точке совпадают по направлениям с осями  $u$ ,  $v$ ,  $w$  криволинейной системы координат. Это соображение разъясняет соотношения (89) с другой точки зрения.

Общие условия равновесия (6) оказываются здесь также удовлетворёнными; это станет очевидным, если обратить внимание на то, что между дифференциальными операторами в декартовых коор-

<sup>1</sup>) Подставив в (80) значения  $F$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  согласно (87) и воспользовавшись (81) и (85), получим первое соотношение (89), а воспользовавшись (84) и (86) — второе соотношение. (Прим. ред.)

динах  $x, y, z$  и в двух любых направлениях  $\chi$  и  $\lambda$  существуют легко выводимые соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial n_\chi \partial n_\lambda} &= \sum_{\mu, \nu = x, y, z} \cos(\chi, \mu) \cos(\lambda, \nu) \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \nu}, \\ \frac{\partial}{\partial n_\chi} \frac{\partial}{\partial n_\lambda} &= \sum_{\mu, \nu = x, y, z} \cos(\chi, \mu) \cos(\lambda, \nu) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \nu}. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Наконец, можно вообще показать, что напряжение, действующее в направлении  $\chi$  и приложенное к площадке с нормалью  $\lambda$ , выражается через функции напряжений следующим образом:

$$\tau_{\lambda\chi} = -\frac{\partial^2 F}{\partial n_\chi \partial n_\lambda} + \alpha \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_\chi} \frac{\partial x}{\partial n_\lambda} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_\lambda} \frac{\partial x}{\partial n_\chi} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_\chi} \frac{\partial y}{\partial n_\lambda} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_\lambda} \frac{\partial y}{\partial n_\chi} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial n_\chi} \frac{\partial z}{\partial n_\lambda} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial n_\lambda} \frac{\partial z}{\partial n_\chi} \right) + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cos(\chi, \lambda) \Delta F. \quad (94)$$

Здесь <sup>1)</sup>  $\frac{\partial}{\partial n_\chi}$  или  $\frac{\partial}{\partial n_\lambda}$  означают дифференцирование вдоль прямых, которые в рассматриваемой точке совпадают с направлениями  $\chi$  и  $\lambda$ .

Для того чтобы определить функцию напряжений, следует найти соответствующую гармоническую функцию, т. е. такую, для которой оператор  $\Delta$  равен нулю. Необходимо, следовательно, знать вид этого оператора в криволинейных координатах. Проще всего это получить, используя выражение для объемного расширения. В декартовых координатах мы имели [ср. (56)]

$$2Ge = -\Delta F + 2\alpha \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \quad (95)$$

Следуя уравнениям (80), (82), учитывая также уравнения (85), (86) и (89), получим такое выражение для объемного расширения в криволинейных координатах

$$\begin{aligned} 2Ge = & - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial n_v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial n_w^2} \right) + \frac{2\alpha}{h_u^3} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \\ & + \frac{2\alpha}{h_v^3} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \\ & + \frac{2\alpha}{h_w^3} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial w} \right). \end{aligned} \quad (96)$$

Сравнение между собой слагаемых в правых частях (95) и (96), не содержащих  $\alpha$ , даёт оператор:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial n_u^2} + \frac{\partial^2}{\partial n_v^2} + \frac{\partial^2}{\partial n_w^2}. \quad (97)$$

<sup>1)</sup> Как и в формулах (93). (Прим. ред.)

Если значение каждого из операторов, согласно уравнению (85), подставить в уравнение (97), то после небольших упрощений найдём:

$$\Delta = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\}. \quad (98)$$

С другой стороны, из сравнения слагаемых, содержащих множитель  $2\alpha$ , имея ещё в виду соотношение (61), получим выражение для  $\Delta F$ , применяемое с большой пользой для определения нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} \Delta F = 2 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) &= \frac{2}{h_u^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \\ &+ \frac{2}{h_v^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \\ &+ \frac{2}{h_w^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial w} \right). \quad (99) \end{aligned}$$

К вопросу о надлежащем выборе гармонических функций, т. е. таких, для которых оператор (98) обращается в нуль, мы вернёмся при решении отдельных задач. При этом мы всегда будем выяснять ход рассуждений, сразу приводящий к правильному выбору функций.

Перейдём теперь к рассмотрению задач по определению напряжений в выточках, и начнём со случая плоской задачи.

ТЕОРИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ.

1. Основные уравнения.

Чтобы получить основные уравнения, относящиеся к случаю плоской задачи, предположим, что компоненты деформаций и напряжений зависят только от двух координат, скажем, от  $x$  и  $y$ . Общие выражения, полученные нами в III, 6, принимают здесь специальную форму. Четыре гармонические функции, из которых  $\Phi_2$  мы сразу положим равной нулю, зависят только от  $x$  и  $y$ . Чтобы и функция напряжений не зависела от  $z$ , нужно также положить функцию  $\Phi_3$  равной нулю, что вытекает из уравнения (58). Мы получим тогда

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi_0(x, y); \quad \Phi_1 = \Phi_1(x, y); \quad \Phi_2 = 0; \quad \Phi_3 = 0; \\ F &= \Phi_0 + x\Phi_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Выражения (49) для перемещений примут вид:

$$\left. \begin{aligned} 2G\xi &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 2\alpha\Phi_1; \\ 2G\eta &= -\frac{\partial F}{\partial y}; \\ \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Чтобы получить наиболее простое выражение для напряжений, введём новые гармонические функции  $\Phi_1'$  и  $\Phi_0'$  по формулам:

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x}; \quad \Phi_0 = \alpha\Phi_1' + \Phi_0'. \quad (3)$$

Имеем по уравнению (1):

$$F = \Phi_0' + x \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} + \alpha\Phi_1'. \quad (4)$$

Далее положим для сокращения записей:

$$\Phi_0' + x \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} = F'. \quad (5)$$



Таким образом получаем:

$$\left. \begin{aligned} F &= F' + \alpha \Phi_1'; \\ 2G\epsilon &= -\frac{\partial}{\partial x}(F' - \alpha \Phi_1'); \\ 2G\eta &= -\frac{\partial}{\partial y}(F' + \alpha \Phi_1'); \\ \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Выражения для напряжений проще всего получить из (68) и (69). Обратив внимание на то, что  $\Delta \Phi_1' = 0$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2}; & \sigma_y &= \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}; & \sigma_z &= \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} - \alpha \frac{\partial^2 \Phi_1'}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y}; & \tau_{xz} &= 0; & \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Благодаря равенству  $\Delta F = \Delta F' = 2 \frac{\partial^2 \Phi_1'}{\partial x^2}$  (8)

для нормального напряжения  $\sigma_z$  получим

$$\sigma_z = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F' = \frac{1}{m} \Delta F', \quad (9)$$

или, как это следует из (7),

$$\sigma_z = \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (10)$$

Таким образом мы пришли к *плоскому деформированному состоянию*, для которого в направлении оси  $z$  компонент перемещения равен нулю, но не равно нулю нормальное напряжение. Если речь идёт о плоской пластинке, ограниченной поверхностями  $z = \text{const.}$ , то по этим поверхностям должны действовать нормальные напряжения  $\sigma_z = \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y)$ .

На практике наиболее важным является так называемое *плоское напряжённое состояние*, для которого в направлении оси  $z$  не равно нулю перемещение, но зато исчезает нормальное напряжение. Чтобы удовлетворить этим требованиям, необходимо ввести некоторую пространственную функцию напряжений.

Опять применим гармонические функции  $\Phi_1'$  и  $\Phi_0'$ , зависящие от  $x$  и  $y$ . Однако теперь надлежащим образом должна быть введена координата  $z$ . Положим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{4-4\alpha+\alpha^2}{\alpha(4-\alpha)} \left( z^2 \frac{\partial^2 \Phi_1'}{\partial x^2} - x \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \frac{2-\alpha}{4-\alpha} \frac{\alpha^2}{12} \frac{\partial^2 \Phi_1'}{\partial x^2} + \frac{4}{4-\alpha} \Phi_1' + \Phi_0'; \\ \Phi_1 &= \frac{4}{\alpha(4-\alpha)} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x}; & \Phi_2 &= 0; & \Phi_3 &= \frac{-4+2\alpha}{\alpha(4-\alpha)} z \frac{\partial^2 \Phi_1'}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В последних выражениях через  $d$  обозначена толщина пластинки, а её срединная плоскость предполагается совпадающей с плоскостью  $z=0$  (см. фиг. 12.) Можно легко убедиться, что функции  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , введённые таким путём, суть пространственные гармонические функции. Для функции напряжений найдём:

$$F = \frac{-2+\alpha}{4-\alpha} \left( z^2 - \frac{d^2}{12} \right) \frac{\partial^2 \Phi_1'}{\partial x^2} + \frac{4}{4-\alpha} \Phi_1' + \Phi_0' + x \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x}. \quad (12)$$

Снова положим:

$$\Phi_0' + x \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} = F'. \quad (13)$$

Тогда

$$\Delta F' = 2 \frac{\partial^2 \Phi_1'}{\partial x^2} \quad (14)$$

и

$$F = F' + \frac{2-\alpha}{2(4-\alpha)} \left( \frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' + \frac{4}{4-\alpha} \Phi_1'. \quad (15)$$

Для перемещений будем иметь:

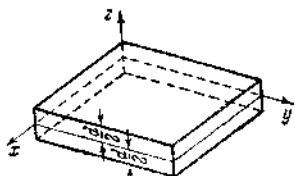
$$\left. \begin{aligned} 2Gz &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ F' + \frac{2-\alpha}{2(4-\alpha)} \left( \frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' - \frac{4}{4-\alpha} \Phi_1' \right]; \\ 2G\eta &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[ F' + \frac{2-\alpha}{2(4-\alpha)} \left( \frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' + \frac{4}{4-\alpha} \Phi_1' \right]; \\ 2G\zeta &= -\frac{2-\alpha}{4-\alpha} z \Delta F'. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Из (68) и (69) получим затем выражения для компонентов напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ F' + \frac{2-\alpha}{2(4-\alpha)} \left( \frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' \right]; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ F' + \frac{2-\alpha}{2(4-\alpha)} \left( \frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' \right]; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ F' + \frac{2-\alpha}{2(4-\alpha)} \left( \frac{d^2}{12} - z^2 \right) \Delta F' \right]; \\ \sigma_z &= 0; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

При выводе (17) принято во внимание равенство  $\Delta \Phi_1' = 0$ . Для тонких пластинок толщина  $d$  мала в сравнении с остальными размерами.

Так как плоскость  $z=0$  является срединной плоскостью пластинки, то координаты  $z \leq \frac{d}{2}$ ; значит  $z$  может принимать лишь малые значения, и в первом приближении членами  $d^2$  и  $z^2$  мы можем пренебречь. Сравним теперь уравнения (17) с уравнениями (7). Легко убедимся, что, как в случае плоской деформации, так и в случае плоского напряжённого состояния, компоненты напряжения одинаково выражаются через функцию  $F'$ .



Фиг. 12. Координаты в пластинке.

Для *толстых* пластинок только что указанные приближённые соотношения перестают совпадать в каждой точке, но для средних значений напряжений, т. е. для

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{\frac{d}{2}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sigma_x dz \quad \text{и т. д.} \quad (18)$$

они остаются справедливыми, так как

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left( \frac{d^2}{12} - z^2 \right) dz = 0, \quad (19)$$

и мы получим

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2}; \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}; \quad \bar{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y}. \quad (20)$$

Эти соотношения для компонентов напряжений, выведенные нами ранее для плоского деформированного состояния, оказываются справедливыми и для случая плоского напряжённого состояния, если ввести в рассмотрение средние по толщине значения напряжений. Важно заметить, что эти напряжения становятся независимыми от коэффициента Пуассона.

В этом отделе мы будем заниматься исключительно *плоским напряжённым состоянием*, причём, ради простоты, под  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  будем понимать средние по толщине пластинки значения напряжений. Далее, вместо  $F'$ ,  $\Phi_0'$  и  $\frac{\partial \Phi_1'}{\partial x}$  соответственно будем писать  $F$ ,  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ . Таким путём и получим следующие основные уравнения для *плоского напряжённого состояния*

$$\left. \begin{aligned} F &= \Phi_0 + x\Phi_1; \quad \Phi_0 = \Phi_0(x, y); \\ \Phi_1 &= \Phi_1(x, y); \\ \Delta\Phi_0 &= 0; \quad \Delta\Phi_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (22)$$

Следовательно, функция напряжений  $F$  соответствует функции, установленной в плоской задаче теории упругости Г. Б. Эри и называемой его именем. Таким образом напряжения выражаются через вторые производные по координатам от функции напряжений. Как мы увидим, введение этой функции даёт ещё следующее преимущество. Из условий на поверхности, выраженных в напряжениях, можно вывести определённые граничные условия для самой функции напря-

жений и, значит, она вполне определяется ещё до того, как найдены эти напряжения.

Для вывода этих упрощённых граничных условий рассмотрим условия равновесия сил, приложенных к треугольному плоскому элементу (рис. 13) с гранями  $dx$ ,  $dy$ , параллельными координатным осям, и гранью  $ds$  в направлениях  $x$  и  $y$  действуют силы  $dX$  и  $dY$ . На гранях  $dx$ ,  $dy$  действуют силы, вызванные напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . Из условия равновесия, устраняющего движение в направлении оси  $x$ , следует

$$dX = -\sigma_x dy + \tau_{xy} dx. \quad (23)$$

Аналогично, получим:

$$dY = \sigma_y dx - \tau_{xy} dy. \quad (24)$$

Далее, согласно уравнениям (22), найдём

$$dX = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx = -d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \quad (25)$$

и

$$dY = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy = d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right). \quad (26)$$

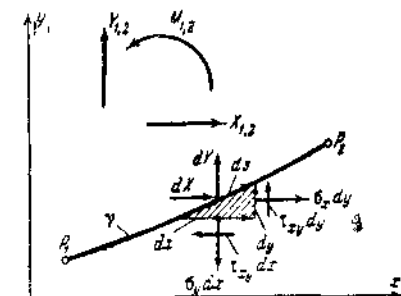
Проинтегрируем эти уравнения вдоль кривой  $\gamma$ , целиком расположенной в области тела и соединяющей точки  $P_1$  и  $P_2$  (см. фиг. 13). Пусть  $M_{1,2}$ ,  $X_{1,2}$ ,  $Y_{1,2}$  соответственно представляют момент и проекции сил, возбуждаемые действием части тела, лежащей левее (и выше) кривой  $P_1 P_2$ , на часть, расположенную с правой стороны этой кривой (и ниже). Получим

$$X_{1,2} = \int_1^2 dX = -\int_1^2 d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1, \quad (27)$$

$$Y_{1,2} = \int_1^2 dY = \int_1^2 d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1. \quad (28)$$

Момент  $M_{1,2}$  сил относительно точки  $x=0$ ,  $y=0$  равен:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= \int_1^2 [x dY - y dX] = \int_1^2 \left[ x d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + y d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right] = \\ &= \int_1^2 d\left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F\right) = \\ &= \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F\right)_2 - \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F\right)_1. \end{aligned} \quad (29)$$



Фиг. 13. Граничные условия в плоском напряжённом состоянии.

Для грани, свободной от внешней нагрузки, непосредственно получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \text{const}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \text{const}. \quad (30)$$

В качестве последнего шага к разысканию уравнений, которые послужат для решений отдельных задач, дадим ещё выражение компонентов напряжений через функцию напряжений в криволинейных координатах. При этом мы используем тот факт, что исследуемые соотношения не зависят от коэффициента Пуассона [ср. (7), (20) и (22)], силу чего коэффициент Пуассона, а значит, и постоянную  $\alpha$ , мы можем считать любым числом. С целью упрощения вычислений положим  $\alpha$  равной нулю. Так как окончательный результат от  $\alpha$  не зависит, то, принимая это частное значение, мы не введём никакой ошибки.

В декартовых координатах мы уже установили, что связь между функцией напряжений и напряжениями, действующими в пластинке, одинакова как в плоском напряжённом состоянии, так и в плоской деформации. Но при  $\alpha = 0$  также не существует разницы между плоской деформацией и общим пространственным напряжённым состоянием, если только принять во внимание независимость от координаты  $z$ . По этой причине мы можем сразу же исходить из пространственного напряжённого состояния и соотношений, уже выведенных для него в криволинейных координатах, но при условии, что функция напряжений зависит только от двух координат:

$$F = F(u, v), \quad (31)$$

причём третья координата  $w$  принимается равной  $w = z$ ; из III, (20) следует:

$$h_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2; \quad h_v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2; \quad h_w = 1. \quad (32)$$

Из (91), полагая  $\alpha = 0$ , получим:

$$\sigma_u = -\frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2} + \Delta F; \quad \sigma_v = -\frac{\partial^2 F}{\partial n_v^2} + \Delta F. \quad (33)$$

Из III, (97), с учётом (31), имеем:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial n_v^2}. \quad (34)$$

Подстановка (34) в (33) даёт:

$$\sigma_u = \frac{\partial^2 F}{\partial n_v^2}, \quad \sigma_v = \frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2}. \quad (35)$$

Подставив значения операторов по  $n_v$  и  $n_u$  из (85) III и имея в виду (31), получим следующие окончательные выражения для нормальных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{1}{h_u^2 h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u}; \\ \sigma_v &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h_u} \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \frac{1}{h_u h_v^2} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Выражение для касательного напряжения получается непосредственно из (92) и (86) главы III

$$\tau_{uv} = -\frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{1}{h_u^2 h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u}. \quad (37)$$

Оператор  $\Delta$ , данный уравнением (98), при  $h_w = 1$ , принимает здесь следующую форму:

$$\Delta = \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]. \quad (38)$$

С целью использования граничных условий (26) — (29) нам необходимо выразить в криволинейных координатах  $\frac{\partial F}{\partial x}$  и  $\frac{\partial F}{\partial y}$ . По известной теореме дифференциальной геометрии величину  $\frac{\partial F}{\partial x}$  можно представить как компонент по оси  $x$  вектора  $\text{grad } F$ ; компоненты этого вектора по двум взаимно-перпендикулярным направлениям  $u$  и  $v$  будут:

$$\frac{\partial F}{\partial s_u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial s_v} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (39)$$

Компоненты вдоль оси  $x$  получим простейшим путём, умножая эти величины на соответствующие косинусы:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x, u) \frac{1}{h_u} \frac{\partial F}{\partial u} + \cos(x, v) \frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (40)$$

Аналогично

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(y, u) \frac{1}{h_u} \frac{\partial F}{\partial u} + \cos(y, v) \frac{1}{h_v} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (41)$$

Вместо направляющих косинусов подставим их выражения из (18) отдела III, 3, и тогда окончательно найдём

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{h_v^2} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{h_v^2} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (43)$$

Эти соотношения мы могли бы получить из III, (99), считая в них

$$\Phi_2 = \Phi_3 = 0 \quad \text{или} \quad \Phi_1 = \Phi_3 = 0.$$

При расчёте удобнее пользоваться такими криволинейными координатами, для которых коэффициенты искажения равны друг другу. Это будет иметь место, если при  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$  выполняются условия:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \pm \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \mp \frac{\partial y}{\partial u}. \quad (44)$$

Тогда действительно, как вытекает из (31),

$$h_u = h_v = h. \quad (45)$$

Такую криволинейную систему координат называют *изометрической сетью*. Уравнение  $\Delta\Phi = 0$  в этой системе координат принимает простую форму

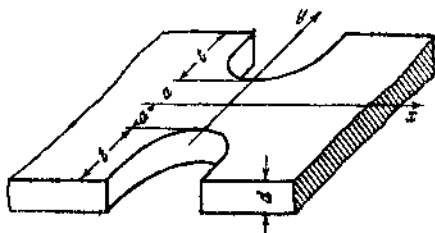
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0, \quad (46)$$

весьма облегчающую разыскание гармонических функций. Вследствие формального сходства формы написания этого уравнения в декартовых и изометрических координатах, гармонические функции как в той, так и в другой координатной системе можно определять одинаковым образом.

Как известно, в декартовых координатах вещественная или мнимая часть всякой аналитической функции  $f(x + iy)$  является гармонической функцией. Равным образом, и в изометрических координатах  $u, v$  вещественная и мнимая части комплексной функции  $f(u + iv)$  являются гармоническими функциями.

## 2. Двусторонняя внешняя выточка.

Пользуясь фиг. 14, рассмотрим случай очень глубокой симметричной, двусторонней выточки. В I, 4 было отмечено, что при увеличении глубины коэффициент концентрации приближается к предельному значению, не зависящему от глубины выточки. Определение этого предельного значения является целью последующего рассмотрения. При этом для каждого вида нагрузки будет проведено исследование напряжённого состояния. В силу закона затухания существенное влияние на коэффициент концентрации оказывает только кривизна у дна выточки. Форма выточки в остальной её части мало влияет на коэффициент концентрации, поэтому мы её выберем так, чтобы



Фиг. 14. Глубокая двусторонняя внешняя выточка.

результат достигался наиболее простым вычислительным процессом. Именно, мы возьмём выточку в форме гиперболы, чтобы иметь возможность воспользоваться эллиптическими координатами

$$x = \operatorname{sh} u \cos v, \quad y = \operatorname{ch} u \sin v. \quad (47)$$

Отсюда имеем:

$$\left(\frac{x}{\operatorname{sh} u}\right)^2 + \left(\frac{y}{\operatorname{ch} u}\right)^2 = 1; \quad \left(\frac{y}{\sin v}\right)^2 - \left(\frac{x}{\cos v}\right)^2 = 1. \quad (48)$$

Следовательно, линии  $u = \text{const.}$  являются эллипсами, а линии  $v = \text{const.}$  — гиперболами.

Далее, из (32) получаем величины коэффициентов искажения

$$\begin{aligned} h_u^2 &= h_v^2 = h^2 = \operatorname{ch}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v = \\ &= \operatorname{ch}^2 u (1 - \sin^2 v) + (\operatorname{ch}^2 u - 1) \sin^2 v = \\ &= \operatorname{ch}^2 u - \sin^2 v = \operatorname{ch}^2 u - 1 + \cos^2 v = \\ &= \operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v. \end{aligned} \quad (49)$$

Оба коэффициента искажения равны друг другу. Поэтому введённая система координат является изометрической, вследствие чего можно пользоваться простой формой (46) уравнения  $\Delta\Phi = 0$ .

Соотношения (42) и (43) переходят в следующие:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{h^2} \left[ \operatorname{ch} u \cos v \frac{\partial F}{\partial u} - \operatorname{sh} u \sin v \frac{\partial F}{\partial v} \right]; \quad (50)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{h^2} \left[ \operatorname{sh} u \sin v \frac{\partial F}{\partial u} + \operatorname{ch} u \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right]. \quad (51)$$

Контур выточки изображается гиперболой с параметром  $v_0$ , а в соответствии с уравнением (30)  $\frac{\partial F}{\partial x}$  и  $\frac{\partial F}{\partial y}$  должны быть постоянны при  $v = \pm v_0$ .

Общее решение этой задачи мы теперь разложим на несколько таких решений, чтобы для каждого из них при интегрировании напряжений, действующих по наиболее узкому сечению согласно уравнениям (27) — (29), получалась неравной нулю только одна из трёх равнодействующих величин  $X_{1,2}$ ,  $Y_{1,2}$ ,  $M_{1,2}$ . Таким образом задача распадается на три, соответствующие простому растяжению, чистому изгибу и чистому сдвигу.

**А. Простое растяжение.** В этом случае функцию напряжений требуется определить так, чтобы отличалась от нуля только равнодействующая  $X_{1,2}$ .

Мы возьмём <sup>1)</sup>:

$$\Phi_0 = A(yv - xu) + B \operatorname{ch} u \cos v; \quad \Phi_1 = Au \quad (52)$$

и, как легко убедиться, условие (46) будет выполнено.

<sup>1)</sup> Neuber H., Z. angew. Math. Mech., т. 13 (1933), стр. 439.



Поэтому

$$F = Ayv + B \operatorname{ch} u \cos v, \quad (53)$$

или, согласно (47),

$$F = \operatorname{ch} u (Av \sin v + B \cos v). \quad (54)$$

По уравнению (50) найдём в первую очередь  $\frac{\partial F}{\partial x}$ . Получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}{h^2} (B - A \sin^2 v). \quad (55)$$

На ненагруженной грани  $v = \pm v_0$  производная  $\frac{\partial F}{\partial x}$  должна быть постоянной. Из этого условия получается соотношение между  $A$  и  $B$ :

$$B = A \sin^2 v_0. \quad (56)$$

Далее по уравнению (51) найдём производную  $\frac{\partial F}{\partial y}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{h^2} & \left[ \operatorname{sh}^2 u \sin v (Av \sin v + B \cos v) + \right. \\ & \left. + \operatorname{ch}^2 u \cos v (Av \cos v + A \sin v - B \sin v) \right] \end{aligned} \quad (57)$$

или, имея в виду (49),

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} = & Av + B \operatorname{ctg} v + \\ & + \frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{h^2} (A \operatorname{tg} v - B \operatorname{tg} v - B \operatorname{ctg} v). \end{aligned} \quad (58)$$

Подставим сюда  $B$  из (56). Тогда получим:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = A \left[ v + \sin^2 v_0 \operatorname{ctg} v + \frac{\operatorname{ch}^2 u}{h^2} \operatorname{ctg} v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v) \right]. \quad (59)$$

Отсюда видно, что при  $v = \pm v_0$  производная  $\frac{\partial F}{\partial y}$  также постоянна.

Таким образом, контур свободен от внешних нагрузок.

Мы перейдём теперь к исследованию поля напряжений в поперечном сечении стержня. Для этого необходимо принять во внимание соотношения (27), (28) и (29). В них индексу 2 соответствует значение  $v = +v_0$ , а индексу 1 значение  $v = -v_0$ . При этом окажется, что  $V_{1,2}$  и  $M_{1,2}$  равны нулю. Неравную нулю равнодействующую напряжений  $X_{1,2}$  умножим на толщину  $d$  пластинки, чтобы получить величину внешней растягивающей силы, которую мы обозначим буквой  $P$ . Имеем:

$$-X_{1,2} = \frac{P}{d} = 2A(v_0 + \sin v_0 \cos v_0). \quad (60)$$

Таким образом функция напряжений для данной задачи определена, и можно перейти к вычислению напряжений по формулам (36) и (37). Выражения для напряжений можно существенно упростить, если

иметь в виду (49). Не приводя промежуточных вычислений, даём окончательные формулы

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{A}{h^2} \operatorname{ch} u \cos v \left( 2 + \frac{\cos^2 v_0 - \cos^2 v}{h^2} \right); \\ \sigma_v &= \frac{A}{h^2} \operatorname{ch} u \cos v (\cos^2 v - \cos^2 v_0); \\ \tau_{uv} &= \frac{A}{h^2} \operatorname{sh} u \sin v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v). \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

С целью сравнения введём номинальное напряжение, равное среднему нормальному растягивающему напряжению по наиболее узкому поперечному сечению стержня:

$$\sigma_n = \frac{P}{2ad} = p. \quad (62)$$

Величина  $a$  равна половине ширины наиболее узкой части стержня (фиг. 14). В нашей координатной системе за единицу длины принято значение

$$\left. \begin{aligned} (v)_{u=0} &= 1, \\ v &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

поэтому

$$a = (v)_{u=0} = \sin v_0, \quad v = v_0. \quad (64)$$

таким образом можно положить:

$$P = 2d \sin v_0 p. \quad (65)$$

Если это значение подставить в (60), то для постоянной  $A$ , имеющей размерность напряжения, получим следующую формулу:

$$A = p \frac{\sin v_0}{v_0 + \sin v_0 \cos v_0}. \quad (66)$$

На фиг. 15 дано распределение напряжений при  $\operatorname{tg} v_0 = 2$ . Вдоль контура, начиная от дна выточки, в обе его стороны имеет место быстрое затухание напряжений, что подтверждает закон затухания, сформулированный в II, 2. В наиболее узком сечении график напряжения  $\sigma_u$  в некоторой части располагается ниже пунктирной линии, соответствующей номинальному напряжению, но затем, при приближении к дну выточки, напряжение быстро увеличивается и у дна выточки достигает наибольшего значения, превосходящего номинальное напряжение в 2,65 раза. Выражение для наибольшего напряжения, возникающего у дна выточки, мы получим из (62) и (66):

$$\sigma_{\max} = (\sigma_u)_{u=0} = p \frac{2 \operatorname{tg} v_0}{v_0 + \sin v_0 \cos v_0}. \quad (67)$$

Каждому значению  $v_0$  соответствует определённая форма выточки. Мы введём отношение величины  $a$  к радиусу кривизны  $\rho$  и назовём её «кривизной выточки».

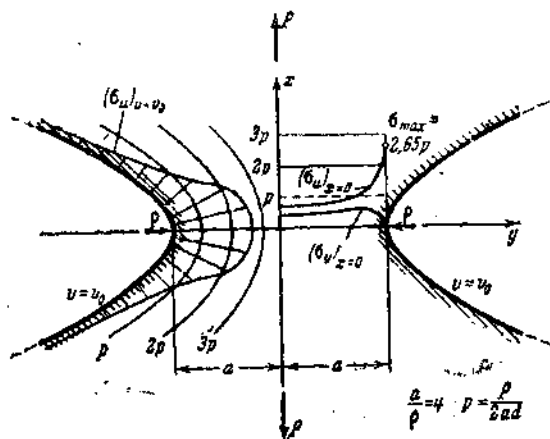
На основании уравнения гиперболы (48) имеем

$$\frac{a}{\rho} = \operatorname{tg}^2 v_0; \quad \cos v_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}; \quad \sin v_0 = \sqrt{\frac{\frac{a}{\rho}}{\frac{a}{\rho} + 1}}. \quad (68)$$

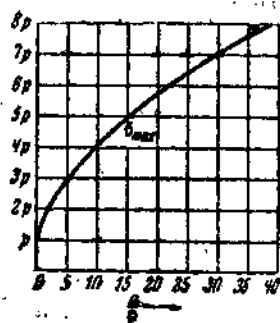
Следовательно,  $v_0$  можно выразить через  $a/\rho$ , и тогда (67) перейдёт в

$$\frac{\sigma_{\max}}{\rho} = \frac{2\left(\frac{a}{\rho} + 1\right)\sqrt{\frac{a}{\rho}}}{\left(\frac{a}{\rho} + 1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{\rho}} + \sqrt{\frac{a}{\rho}}}. \quad (69)$$

На фиг. 16 дана зависимость максимального напряжения от кривизны выточки. Для малой кривизны, т. е. для малого  $\frac{a}{\rho}$ , можно пока-



Фиг. 15. Глубокая двусторонняя внешняя выточка при растяжении.



Фиг. 16. Наибольшие напряжения в глубокой двусторонней внешней выточке при растяжении

зать, что траектории главных напряжений обладают свойствами *линий тока*. В отношении этого вопроса отсылаем читателя к литературе <sup>1)</sup>.

**В. Чистый изгиб.** При чистом изгибе отличается от нуля только  $M_{yz}$ . Этому условию удовлетворяют следующие выражения для функций <sup>2)</sup>:

$$\Phi_0 = A \operatorname{ch} 2u \sin 2v + Bv; \quad \Phi_1 = -4A \operatorname{sh} u \sin v, \quad (70)$$

<sup>1)</sup> Neuber H., Ing. Arch., т. 6 (1935), стр. 325.

<sup>2)</sup> Neuber H., Ing. Arch., т. 3 (1934), стр. 239.

являющихся решением уравнения (46). Функция напряжений будет иметь вид:

$$F = A \sin 2v + Bv. \quad (71)$$

В соответствии с (50) и (51) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{\operatorname{sh} u \sin v}{h^2} (2A \cos 2v + B); \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\operatorname{ch} u \cos v}{h^2} (2A \cos 2v + B). \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Следовательно, если

$$B = -2A \cos 2v_0, \quad (73)$$

то контур окажется ненагруженным, и при  $v = \pm v_0$  обе производные превращаются в нуль. Затем, из (27) и (28) непосредственно следует равенство нулю  $X_{1,2}$  и  $Y_{1,2}$ . Из (29) получаем величину  $M_{1,2}$ , равную, согласно определению, внешнему моменту  $M$ , делённому на толщину  $d$  пластинки. Имеем

$$M_{1,2} = \frac{M}{d} = -(F)_{+v_0} + (F)_{-v_0} = -2(A \sin 2v_0 + Bv_0). \quad (74)$$

Подставив сюда значение  $B$  из (73), найдём:

$$\frac{M}{d} = -2A(\sin 2v_0 - 2v_0 \cos 2v_0). \quad (75)$$

С помощью (36) и (37) компоненты напряжений получим в форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{A}{h^2} \sin 2v \left( -4 + \frac{\cos 2v - \cos 2v_0}{h^2} \right); \\ \sigma_v &= \frac{A}{h^2} \sin 2v (\cos 2v_0 - \cos 2v); \\ \tau_{uv} &= \frac{A}{h^4} \operatorname{sh} 2u (\cos 2v - \cos 2v_0). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Номинальное напряжение вычисляем по элементарной формуле изгиба

$$\sigma_n = \frac{3M}{2a^2d} = p. \quad (77)$$

Теперь из (75) можно получить значение  $A$ , имеющее размерность напряжения. Принимая во внимание (64), получим:

$$A = -p \frac{\sin^2 v_0}{3(\sin 2v_0 - 2v_0 \cos 2v_0)}. \quad (78)$$

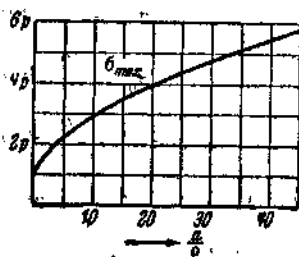
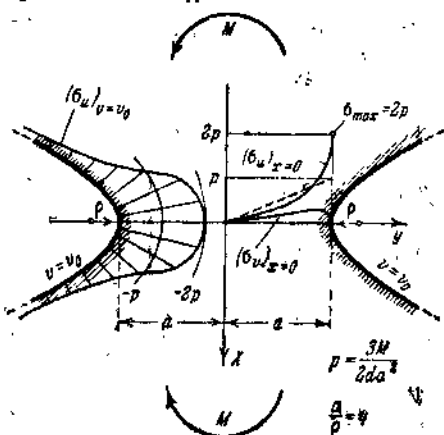
На фиг. 17 показаны графики распределения напряжений для  $\operatorname{tg} v_0 = 2$ . Пунктирная линия соответствует прямолинейному закону распределения напряжения, по элементарной теории сопротивления материалов. Напряжение  $\sigma_u$  сначала (около оси стержня) лежит ниже этой линии и затем при приближении к дну выточки быстро увеличи-

ваётся, достигая на контуре (у дна выточки) удвоенной величины номинального напряжения.

Из формулы (68) получаем выражение для максимального напряжения:

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{4 \frac{a}{p} \sqrt{\frac{a}{p}}}{3 \left[ \sqrt{\frac{a}{p}} + \left( \frac{a}{p} - 1 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{p}} \right]} \quad (79)$$

На фиг. 18 графически изображена зависимость наибольшего напряжения от  $a/p$ .



Фиг. 18. Наибольшие напряжения в глубокой двусторонней внешней выточке при изгибе.

Фиг. 17. Двусторонняя глубокая внешняя выточка при изгибе.

С. Чистый сдвиг. В случае чистого сдвига функции берутся в виде <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= A \operatorname{sh} u \sin v; & \Phi_1 &= Bv; \\ F &= \operatorname{sh} u (A \sin v + Bv \cos v). \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

По формуле (51) находим  $\frac{\partial F}{\partial y}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}{h^2} (A + B \cos^2 v). \quad (81)$$

Поэтому граничные условия требуют, чтобы

$$A = -B \cos^2 v_0. \quad (82)$$

Выражение для  $\frac{\partial F}{\partial x}$  получаем по формуле (50):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{h^2} [\operatorname{ch}^2 u \cos v (A \sin v + Bv \cos v) - \\ &\quad - \operatorname{sh}^2 u \sin v (A \cos v + B \cos v - Bv \sin v)], \end{aligned} \quad (83)$$

<sup>1)</sup> Neuber H., Ing.-Arch., т. 5 (1939), стр. 240.

или, согласно (49) и найденному нами выражению для  $A$ , имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = B \left[ v - \cos^2 v_0 \operatorname{tg} v + \frac{\operatorname{sh}^2 u}{h^2} \operatorname{tg} v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v) \right]. \quad (84)$$

Отсюда видно, что для  $v = \pm v_0$  величина  $\frac{\partial F}{\partial x}$  оказывается постоянной и, значит, условия на поверхности выполнены.

Соотношения (27) — (29) показывают, что в этом случае исчезают  $X_{1,2}$  и  $M_{1,2}$ . Единственная, отличная от нуля, составляющая напряжений  $Y_{1,2}$ , умноженная на  $d$ , даёт перерезывающую силу, которую мы обозначим буквой  $V$ . Будем иметь:

$$Y_{1,2} = -\frac{V}{d} = 2B(v_0 - \sin v_0 \cos v_0). \quad (85)$$

Для напряжений получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{B}{h^2} \operatorname{sh} u \sin v \left( -2 + \frac{\cos^2 v - \cos^2 v_0}{h^2} \right); \\ \sigma_v &= \frac{B}{h^2} \operatorname{sh} u \sin v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v); \\ \tau_{uv} &= \frac{B}{h^2} \operatorname{ch} u \cos v (\cos^2 v_0 - \cos^2 v). \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

В качестве номинального напряжения здесь целесообразно взять *среднее касательное напряжение по наиболее узкому поперечному сечению*:

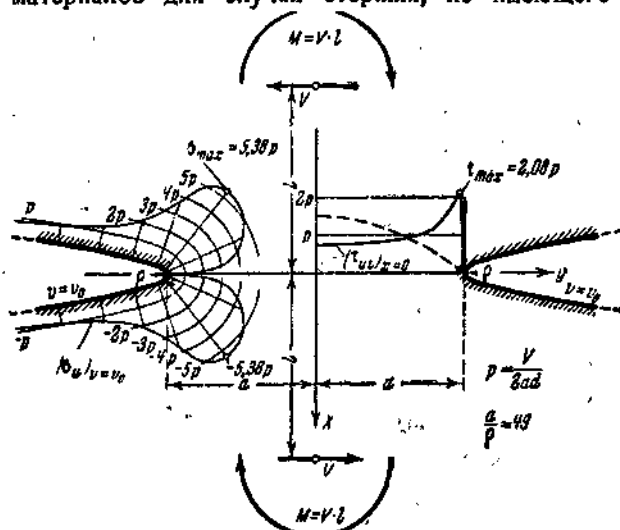
$$\tau_n = \frac{V}{2ad} = p. \quad (87)$$

Затем из (85), с учётом (64), получим:

$$B = -p \frac{\sin v_0}{v_0 - \sin v_0 \cos v_0}. \quad (88)$$

На фиг. 19 показан график распределения напряжений для случая  $\operatorname{tg} v_0 = 7$ . Наибольшее напряжение в этом случае возникает не у дна выточки, а на некотором очень небольшом удалении от него. В самом узком поперечном сечении имеется только касательное напряжение  $\tau_{uv}$ . Касательное напряжение в средней части стержня меньше среднего касательного напряжения. Но при перемещении к контуру недалеко от него напряжения быстро увеличивается и в точке вблизи контура достигает своей наибольшей величины. После этой точки оно быстро убывает. Аналогично ведёт себя вдоль контура выточки напряжение  $\sigma_u$ . На большом расстоянии от дна выточки оно имеет очень малую величину, но по мере приближения к дну выточки оно постепенно увеличивается и недалеко от него достигает наибольшей величины; в точке у дна выточки оно делается равным нулю, из растяжения переходит в сжатие и опять недалеко от дна принимает ту же самую наибольшую величину (численно), после чего быстро убывает.

Пунктирная линия соответствует параболическому распределению касательного напряжения, даваемому элементарной формулой сопротивления материалов для случая стержня, не имеющего выточки.



Фиг. 19. Двусторонняя глубокая внешняя выточка при сдвиге.

От этого напряжённого состояния резко отличается состояние, имеющееся в действительности.

Найдём наибольшее значение напряжения  $\sigma_u$ . Вдоль контура выточки имеем:

$$(\sigma_u)_{v=v_0} = -2B \frac{\text{sh } u \sin v_0}{h^2} = -2B \sin v_0 \frac{\text{sh } u}{\text{sh}^2 u + \cos^2 v_0}. \quad (89)$$

Это выражение зависит только от  $u$  и принимает экстремальное значение в тех точках, где  $\frac{\partial}{\partial u} (\sigma_u)_{v=v_0}$ , равна нулю. Вычислим

$$\frac{\partial}{\partial u} (\sigma_u)_{v=v_0}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (\sigma_u)_{v=v_0} &= -\frac{2B \sin v_0}{h^2} [(\text{sh}^2 u + \cos^2 v_0) \text{ch } u - \\ &\quad - 2 \text{sh}^2 u \text{ch } u] = 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Отсюда получим:

$$\text{sh}^2 u = \cos^2 v_0; \quad \text{sh } u = \pm \cos v_0. \quad (91)$$

Максимальное растягивающее напряжение соответствует знаку плюс. Оно возникает в точке, определяемой абсциссой  $x$  [ср. (47), (64) и (68)]:

$$x = \text{sh } u \cos v_0 = \cos^2 v_0 = a \frac{\cos^2 v_0}{\sin v_0} = \frac{a}{\sqrt{\frac{a}{\rho} \left( \frac{a}{\rho} + 1 \right)}} \quad (92)$$

и вычисляется по выражению:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\rho} = \frac{\frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}{\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}} - \sqrt{\frac{a}{\rho}}} \quad (93)$$

Для того чтобы определить наибольшее касательное напряжение, найдём  $\tau_{uv}$  для точек, лежащих в наиболее узком сечении. Имеем:

$$(\tau_{uv})_{u=0} = B \frac{\cos^2 v_0 - \cos^2 v}{\cos^3 v} \quad (94)$$

Это выражение зависит только от  $v$ . Поэтому вычислим производную от  $(\tau_{uv})_{u=0}$  по  $v$ :

$$\frac{\partial}{\partial v} (\tau_{uv})_{u=0} = \frac{B}{\cos^3 v} [\cos^2 v \cdot 2 \sin v \cos v + + (\cos^2 v_0 - \cos^2 v) 3 \cos^2 v \sin v] = 0; \quad (95)$$

найдем:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 v &= 3 \cos^2 v_0; \\ \cos v &= \pm \sqrt{3} \cos v_0. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Наибольшее касательное напряжение возникает поэтому в точке [ср. опять (47), (64) и (68)]:

$$y = \sin v = \sqrt{1 - 3 \cos^2 v_0} = a \frac{\sqrt{1 - 3 \cos^2 v_0}}{\sin v_0} = a \sqrt{\frac{\frac{a}{\rho} - 2}{\frac{a}{\rho}}}; \quad (97)$$

здесь оно равно:

$$\frac{\tau_{\max}}{\rho} = \frac{\frac{2}{9} \sqrt{3} \left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}} - \sqrt{\frac{a}{\rho}}} \quad (98)$$

При  $\frac{a}{\rho} \leq 2$  максимум  $\tau_{uv}$  находится в точке  $y=0$  и вычисляется по формуле:

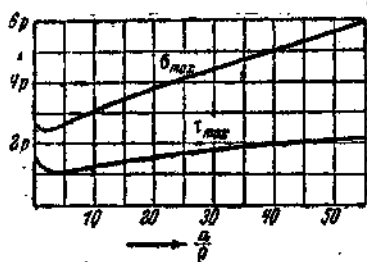
$$\frac{\tau_{\max}}{\rho} = \frac{\frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} \left[ \left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}} - \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]} \quad (99)$$

На фиг. 20 приведена зависимость наибольшего напряжения от кривизны выточки.

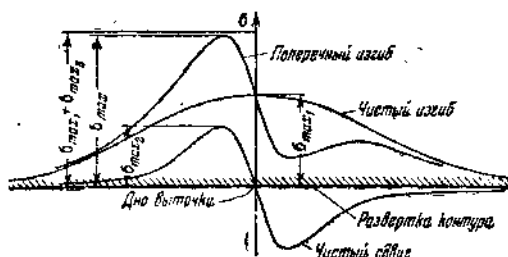
Общий случай совместного действия изгибающего момента и перерезывающей силы получается посредством наложения обоих полу-



ченных выше решений. Как мы видели, наибольшее напряжение на контуре выточки при чистом изгибе лежит у дна выточки, а при чистом сдвиге — возле него. Поэтому, чтобы получить точное значение наибольшего напряжения при изгибе в общем случае, нельзя, строго говоря, просто складывать между собой наибольшие напряжения, получающиеся при чистом изгибе и сдвиге. Место и величину наибольшего напряжения нужно определить из графика напряжений,



Фиг. 20. Наибольшие напряжения в двусторонней глубокой внешней выточке при сдвиге.

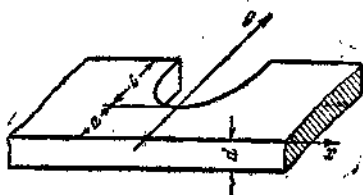


Фиг. 21. Наибольшие напряжения при поперечном изгибе.

построенного посредством наложения двух графиков в отдельности для изгиба и сдвига. Пример такого наложения дан на фиг. 21. Ради ясности чертежа, напряжения нанесены на развёрнутый контур выточки. Истинное наибольшее напряжение оказывается на очень незначительную величину меньше суммы  $\sigma_{\max 1} + \sigma_{\max 2}$  отдельных наибольших напряжений. Поэтому в большинстве случаев оказывается вполне допустимым вводить в расчёт просто сумму отдельных наибольших напряжений, получающихся при изгибе и при сдвиге.

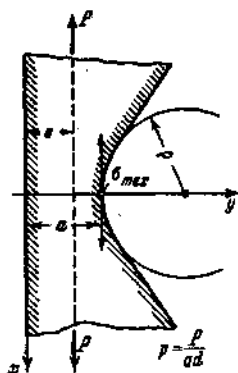
### 3. Односторонняя глубокая внешняя выточка.

Представим себе теперь, что стержень с двусторонней выточкой рассечён вдоль оси  $x$  на две части. Тогда каждая из полученных частей будет представлять собой стержень с одной внешней выточкой (фиг. 22). Как мы увидим ниже, применение такого метода рассечения позволяет по функциям напряжений для стержня с двусторонней выточкой получить достаточно точный способ расчёта, служащий для определения напряжённого состояния в плоском стержне с односторонней выточкой. Конечно, здесь мы имеем дело только лишь с приближённым методом, так как вдоль оси  $x$  где теперь, собственно говоря,



Фиг. 22. Односторонняя глубокая выточка.

должна быть свободная от внешней нагрузки грань, имеются известные небольшие напряжения. Но поскольку в данном случае речь идёт об определении напряжений только в окрестности дна выточки, которые обусловлены в первую очередь полем напряжений в наиболее узком поперечном сечении, характер сил, возникающих вдали от дна согласно закону затухания, имеет второстепенное значение. Здесь поэтому точному выполнению граничных условий можно предпочесть простоту вычислений.



Фиг. 23. Односторонняя глубокая внешняя выточка при растяжении искривлённого стержня.

Мы будем исходить из трёх вышерассмотренных функций напряжений. Но, при определении равнодействующей сил, действующих по поперечному сечению согласно уравнениям (27) — (29), теперь индексу 2 будет соответствовать новый контур, для которого  $v = 0$ . Так как речь идёт о наиболее узком сечении, то мы должны далее считать  $u = 0$ .

**А. Чистое растяжение.** В основу положим функцию напряжений для плоского растянутого стержня с двусторонней выточкой. Из (54) и (56) получим выражение равнодействующих усилий

$$\left. \begin{aligned} -X_{1,2} &= A(v_0 + \sin v_0 \cos v_0); \\ Y_{1,2} &= 0; M_{1,2} = A \sin^2 v_0. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Введём опять растягивающую силу  $P$

$$P = -X_{1,2}d. \quad (101)$$

Если за номинальное напряжение принять среднее напряжение по наиболее узкому поперечному сечению, т. е.

$$\sigma_n = \frac{P}{ad} = p, \quad (102)$$

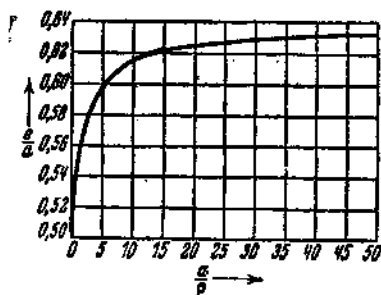
то для постоянной  $A$  получается то же самое значение, что и для стержня с двусторонней выточкой [ср. (66)]. Поэтому выражение (69) для наибольшего напряжения сохраняет силу и для стержня с односторонней выточкой. Однако это справедливо только тогда, когда линия действия силы  $P$  удалена от оси  $x$  на совершенно определённое расстояние  $\epsilon$  (ср. фиг. 23). Величина  $M_{1,2}$ , умноженная на толщину  $d$  пластинки, очевидно, должна быть равна моменту

силы  $P$  относительно точки  $y=0$ , т. е.  $P \cdot e$ . Отсюда, принимая во внимание (64) и (68), получаем:

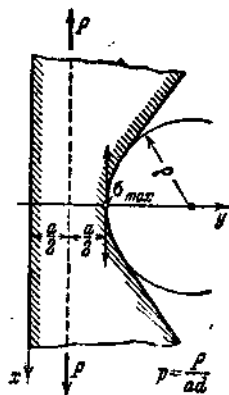
$$e = \frac{M_{12}d}{P} = \frac{M_{12}}{-X_{12}} = \frac{\sin^2 v_0}{v_0 + \sin v_0 \cos v_0} = \frac{\sqrt{\frac{a}{p} \left( \frac{a}{p} + 1 \right)}}{\left( \frac{a}{p} + 1 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{p}} + \sqrt{\frac{a}{p}}} \quad (103)$$

На фиг. 24 графически изображена зависимость величины  $\frac{e}{a}$  от  $\frac{a}{p}$ . Уравнение (69) для наибольшего напряжения справедливо только тогда, когда расстояние между линией действия силы  $P$  и гранью, не имеющей выточки, соответствует этой зависимости.

Если положение линии действия силы  $P$  неизвестно, то удобнее пользоваться другим условием, определяющим применимость формулы (69). Оно основывается на рассмотрении деформации стержня. В основе наших рассуждений лежит метод рассечения стержня с двусторонней выточкой на две части. Этот метод предполагает, что компоненты напряжений и деформаций симметричны относительно оси  $x$ . Вследствие этого перемещение  $\eta$  вдоль оси  $x$  обязано быть равным нулю, и грань, совпадающая с осью, не должна искривляться. Стало быть, *фобр*



Фиг. 24. Расстояние  $e$  линии действия силы от прямолинейного края, отнесенное к ширине  $a$  наиболее узкого сечения.



Фиг. 25. Односторонняя глубокая внешняя выточка при растяжении, если линия действия силы проходит посередине наиболее узкого сечения.

мула (69) применима и в том случае, когда устранена возможность искривления прямолинейной грани стержня.

Выше рассмотренное решение соответствует только частным случаям. Рассмотрим теперь более общий случай чистого растяжения.

Предположим, что линия действия силы  $P$  удалена на расстояние  $\frac{a}{2}$  от грани, не имеющей выточки (фиг. 25). К функции напряжений, соответствующей растяжению стержня с двусторонней выточкой, требуется добавить вторую функцию, соответствующую чистому изгибу того же стержня. Появляющуюся в связи с этим новую постоянную обозначим буквой  $A'$ .

Тогда из (54), (55), (59), (71) и (72) для равнодействующих напряжений получим:

$$\left. \begin{aligned} -X_{1,2} &= A(v_0 + \sin v_0 \cos v_0) - 4A' \sin^2 v_0; \\ Y_{1,2} &= 0; \\ M_{1,2} &= A \sin^2 v_0 + A'(2v_0 \cos 2v_0 - \sin 2v_0). \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Выражения (101) и (102) для полного растягивающего усилия и для номинального напряжения остаются справедливыми и здесь. Момент  $M_{1,2}$ , умноженный на  $d$ , в соответствии с нашим предположением, должен быть равен  $P \cdot \frac{a}{2}$ . Поэтому, принимая во внимание (64), получим

$$-X_{1,2} = \frac{P}{d} = p \sin v_0, \quad M_{1,2} = \frac{P}{d} \cdot \frac{a}{2} = p \frac{\sin^2 v_0}{2}. \quad (105)$$

Если подставим эти выражения в уравнение (104), то получим два уравнения, из которых определяются постоянные  $A$  и  $A'$

$$\left. \begin{aligned} 4 \frac{A'}{A} &= \frac{\sin v_0 (v_0 + \sin v_0 \cos v_0) - 2 \sin^2 v_0}{\sin^2 v_0 - \sin v_0 \cos v_0 + v_0 \cos 2v_0}; \\ A &= p \frac{\sin v_0}{v_0 + \sin v_0 \cos v_0 - 4 \frac{A'}{A} \sin^2 v_0}. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Наибольшее напряжение, возникающее у дна выточки, вычисляется по уравнениям (61) и (76)

$$\sigma_{\max} = \frac{2A}{\cos v_0} - 8A' \operatorname{tg} v_0. \quad (107)$$

После подстановки сюда значений постоянных из (106) получим  $\sigma_{\max}$  как функцию  $v_0$ . Выразив затем  $v_0$  с помощью (68) через  $\frac{a}{p}$ , получим  $\sigma_{\max}$  как функцию кривизны выточки. В результате будем иметь довольно сложное выражение для  $\sigma_{\max}$ , которое можно существенно упростить, если использовать коэффициенты концентрации для стержня с двусторонней выточкой. Обозначим буквами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно коэффициенты концентрации в стержне с двусторонней глубокой внешней выточкой, находящемся в условиях простого

растяжения [см. (69)] и чистого изгиба [см. (79)]. Тогда можем написать:

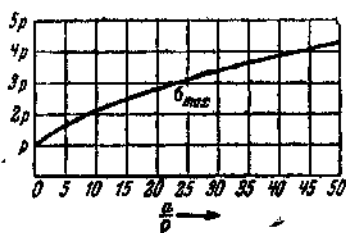
$$\frac{\sigma_{\max}}{\rho} = \frac{\alpha_1 - 2C}{1 - \frac{C}{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}} \quad (108)$$

где

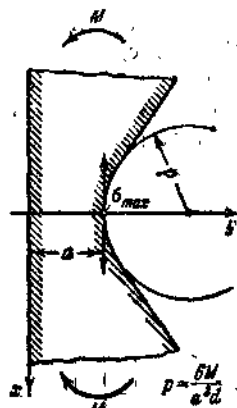
$$C = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}{\frac{4}{3\alpha_2} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} - 1} \quad (109)$$

Зависимость наибольшего напряжения от  $\frac{a}{\rho}$  графически изображена на фиг. 26.

**В. Чистый изгиб.** Наложением функций напряжений, соответствующих растяжению и изгибу стержня с двусторонней выточкой, легко получается решение задачи о напряжениях в стержне с односторонней внешней выточкой, если он нахо-



Фиг. 26. Наибольшее напряжение в односторонней глубокой внешней выточке при растяжении, если линия действия силы проходит посередине наиболее узкого сечения.



Фиг. 27. Односторонняя глубокая внешняя выточка при изгибе.

дится в состоянии чистого изгиба (фиг. 27). Уравнения (104) в общем виде устанавливают равнодействующие напряжений по наиболее узкому сечению. Здесь пойдет речь только лишь о дополнительных условиях, характеризующих чистый изгиб. При чистом изгибе обращается в нуль  $X_{1,2}$ , а  $M_{1,2}$ , умноженный на толщину  $d$ , должен быть равен моменту внешних сил, т. е.

$$X_{1,2} = 0; \quad M_{1,2} = \frac{M}{d} \quad (110)$$

За номинальное напряжение мы возьмем напряжение, вычисленное по элементарной формуле изгиба:

$$\sigma_n = \frac{6M}{a^2 d} = \rho. \quad (111)$$

Тогда из (104) получим

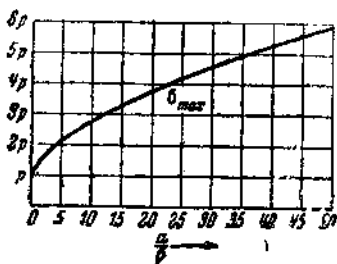
$$\left. \begin{aligned} \frac{A'}{A} &= \frac{v_0 + \sin v_0 \cos v_0}{1 + \sin^2 v_0} \\ A &= \frac{p}{6} \frac{1 + \frac{A'}{A} \frac{2v_0 \cos 2v_0 - \sin 2v_0}{\sin^2 v_0}}{1} \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Если полученные здесь выражения подставим в (107), то найдём наибольшее напряжение. С помощью (68), при использовании опять коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , найдём:

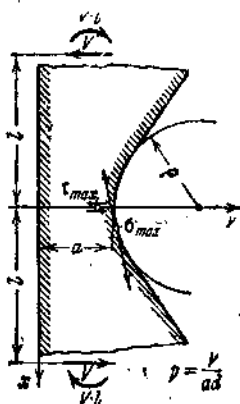
$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{2\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) - \alpha_1 \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}{\frac{4}{\alpha_2}\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) - 3\alpha_1} \quad (113)$$

Зависимость наибольшего напряжения от кривизны выточки представлена на фиг. 28.

С. Чистый сдвиг. В этом случае нас (см. фиг. 29) непосредственно к цели приводит функция напряжений, соответствующая чистому сдвигу для стержня с двусторонней выточкой. Мы вернёмся к урав-



Фиг. 28. Наибольшее напряжение в односторонней глубокой внешней выточке при изгибе.



Фиг. 29. Односторонняя глубокая внешняя выточка при сдвиге.

нениям (80)–(84) и уравнению (86). Для результирующих напряжений в этом случае получаем

$$X_{1,2} = 0; \quad Y_{1,2} = B (v_0 - \sin v_0 \cos v_0); \quad M_{1,2} = 0. \quad (114)$$

$Y_{1,2}$ , умноженная на  $d$  с учётом знака, должна быть равна перерезывающей силе:

$$Y_{1,2} = -\frac{V}{d}. \quad (115)$$

За номинальное напряжение опять возьмём *среднее касательное напряжение по наиболее узкому сечению*:

$$\tau_n = \frac{V}{ad} = p. \quad (116)$$

Для постоянной  $B$  из уравнения (114) получается снова то же значение, что и в случае стержня с двусторонней выточкой [ср. (88)]. Поэтому формулы (93) и (99) для наибольшего нормального и касательного напряжений остаются справедливыми и для стержня с односторонней выточкой.

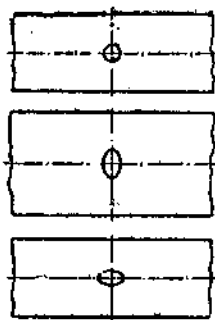
Рассмотренные до сих пор задачи относились к определению коэффициента концентрации в *глубоких внешних выточках*. Для определения коэффициента концентрации в общем случае нам необходимо ещё найти коэффициент концентрации в стержне с *мелкой внешней выточкой*. Однако, прежде чем обратиться к задачам из этой области, необходимо рассмотреть ещё другую группу задач, относящихся к учению о концентрации напряжений в случае плоской задачи. Мы имеем в виду изучение влияния отверстий различной формы на распределение напряжений в тонких стержнях. Полученные при этом результаты сослужат известную службу позднее, при рассмотрении мелких внешних выточек.

#### 4. Круглые и продолговатые отверстия в очень широком стержне.

Как показано на фиг. 30, мы здесь будем заниматься плоским стержнем, снабжённым круговым или продолговатым отверстием с центром, расположенным на оси стержня. При наличии продолговатого отверстия предполагается, что длинная ось отверстия или совпадает с осью стержня, или перпендикулярна ей.

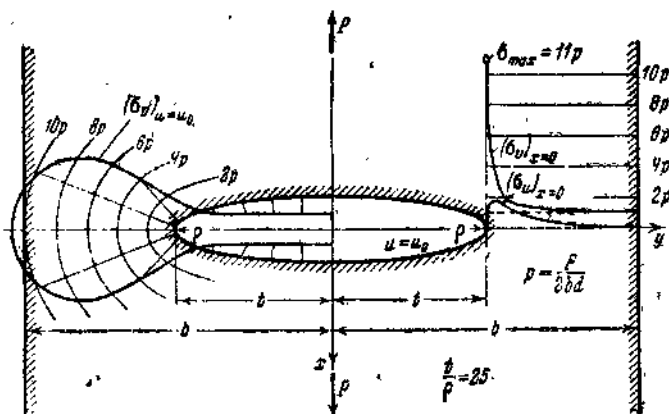
Все эти три случая можно рассмотреть одновременно, принимая, что отверстие имеет эллиптическую форму. Длину полуоси эллипса, перпендикулярную оси стержня (за ось стержня принята ось  $x$ ), обозначим буквой  $t$ , а радиус кривизны кривой в конце этой полуоси буквой  $\rho$ . Тогда, при  $t > \rho$ , имеем продолговатое отверстие с длинной осью, перпендикулярной оси стержня, при  $t = \rho$  — круговое отверстие и, наконец, при  $t < \rho$  имеем отверстие, удлинённое в направлении оси стержня.

Поместим начало координатной системы  $xu$  в центр отверстия стержня так, чтобы полуось  $t$  отверстия совпадала с осью  $u$ . Затем, с помощью соотношений (47), (48) и (49), перейдём к эллиптическим координатам. Контур эллиптического отверстия обозначим буквой  $u_0$ .



Фиг. 30. Круглые и овальные отверстия в очень широком стержне.

При разыскании функций напряжений мы всегда будем исходить из элементарного напряжённого состояния, возникающего в стержне без отверстия. К функции напряжений, соответствующей этому элементарному состоянию, добавим другую функцию, дающую как раз такое искажение напряжённого состояния, какое создаётся при наличии отверстия. Так как речь идёт о таком распределении напряжений, при котором контур отверстия свободен от внешних нагрузок, то в точках, лежащих на этом контуре, напряжения в стержне без отверстия и добавочные напряжения должны взаимно уничтожаться. При удалении от отверстия добавочные напряжения должны быстро



Фиг. 31. Растяжение стержня с овальным отверстием, расположенным поперёк оси стержня.

убывать, что соответствует закону затухания. Падение добавочных напряжений должно быть настолько быстрым, чтобы на сторонах  $y = \pm b$  стержня ( $b$  — половина ширины стержня, фиг. 31) они, по сравнению с элементарными напряжениями в стержне без отверстия, были пренебрежимо малы. Если отношение  $\frac{b}{\ell}$  достаточно велико, то добавочные напряжения на гранях стержня можно считать практически равными нулю. Можно полагать, что на этих гранях существуют только напряжения, соответствующие стержню без отверстия, удовлетворяющие граничным условиям на сторонах  $y = \pm b$  стержня. Таким образом мы должны позаботиться о выполнении граничных условий только лишь на контуре  $u_0$  отверстия. При отсутствии внешних нагрузок на этом контуре имеем условия:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \text{const.} = C_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \text{const.} = C_2, \quad (117)$$

которые и должны выполняться при  $u = u_0$ . В нашем случае эти условия можно ещё несколько упростить. Если к функции  $F$  добавим



выражение  $C_1x - C_2y$ , то напряжения, получаемые двукратным дифференцированием  $F$  [см. (22)], от такого добавления остаются неизменными. Однако граничные условия примут теперь более простую форму

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (118)$$

В силу уравнений (50) и (51) эти условия запишутся в криволинейных координатах в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0. \quad (119)$$

Такие упрощённые условия можно написать только для одного контура; в случае же нескольких контуров этого упрощения получить нельзя. При двусторонней выточке, где требуется выполнение граничных условий на двух контурах, мы поэтому их не применяли. Произвольные постоянные, входящие в функцию добавочных напряжений, а также и величина напряжений на контуре отверстия зависят от  $u_0$ . Но каждому значению  $u_0$  соответствует совершенно определённая форма эллипса, и значит, вполне определённая величина отношения  $\frac{t}{\rho}$ . Из уравнения эллипса (48) получаем:

$$\frac{t}{\rho} = \operatorname{ch}^2 u_0; \quad \operatorname{ch} u_0 = \sqrt{\frac{\frac{t}{\rho}}{\frac{t}{\rho} - 1}}; \quad \operatorname{sh} u_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}}. \quad (120)$$

Отсюда  $u_0$  можно выразить через  $\frac{t}{\rho}$ . Считая теперь, что  $\frac{t}{\rho}$  больше, меньше, или, наконец, равно единице, мы получим решение для наших трёх форм отверстия. Мы опять дадим решение отдельно для растяжения, изгиба и сдвига.

**А. Чистое растяжение.** Будем исходить из функции напряжений, дающей решение для растянутого стержня, не имеющего отверстия. Пусть  $P$  — полное растягивающее усилие, приложенное к стержню. Так как половина ширины стержня обозначена буквой  $b$ , то напряжение в нём равно

$$p = \frac{P}{2bd}. \quad (121)$$

Оно соответствует нормальному напряжению  $\sigma_x$ , напряжения же  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  равны нулю. Поэтому функцию напряжений следует взять в виде:

$$F = \frac{p}{2} y^2,$$

причём

$$\Phi_0 = \frac{p}{2} (y^2 - x^2) \quad \text{и} \quad \Phi_1 = \frac{p}{2} x. \quad (122)$$

Тогда из уравнений (22), действительно, получим

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (123)$$

Выразим  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  в эллиптических координатах [ср. (47)]; применяя известные формулы, получим

$$\Phi_0 = \frac{p}{4} (1 - \operatorname{ch} 2u \cos 2v); \quad \Phi_1 = \frac{p}{2} \operatorname{sh} u \cos v. \quad (124)$$

Включим теперь сюда такую добавочную функцию, чтобы напряжения, ей соответствующие, стремились к нулю при увеличении  $u$ , т. е. при удалении от отверстия. Окончательные выражения могут быть взяты в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{4} [1 + Au + (-\operatorname{ch} 2u + Be^{-2u}) \cos 2v]; \\ \Phi_1 &= \frac{p}{2} (\operatorname{sh} u + Ce^{-u}) \cos v. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Можно легко убедиться, что эти функции удовлетворяют уравнению (46). Функция напряжений теперь представится в виде:

$$\begin{aligned} F &= \frac{p}{8} [1 + \operatorname{ch} 2u + 2Au + 2Ce^{-u} \operatorname{sh} u + \\ &+ [-\operatorname{ch} 2u - 1 + 2Be^{-2u} + 2Ce^{-u} \operatorname{sh} u] \cos 2v]. \end{aligned} \quad (126)$$

Граничные условия (119) при  $u = u_0$  приводят к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{sh} 2u_0 + 2A + 2Ce^{-2u_0} &= 0; \\ -\operatorname{ch} 2u_0 - 1 + 2Be^{-2u_0} + 2Ce^{-u_0} \operatorname{sh} u_0 &= 0; \\ -2 \operatorname{sh} 2u_0 - 4Be^{-2u_0} + 2Ce^{-2u_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Умножим второе из этих уравнений на 2 и сложим с третьим. Тогда получим уравнение для определения  $C$ ; из третьего уравнения определим затем постоянную  $B$ , наконец из первого — постоянную  $A$ . Найдём

$$A = -1 - \operatorname{ch} 2u_0; \quad B = \frac{1}{2} e^{2u_0} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} e^{4u_0}; \quad C = 1 + e^{2u_0}. \quad (128)$$

Так найденное решение впервые иным путём было получено С. Е. Inglis<sup>1)</sup>.

Важно прежде всего найти распределение напряжений на контуре отверстия. В соответствии с граничными условиями в точках контура исчезают напряжения  $\sigma_u$  и  $\sigma_{uv}$ . Нормальное напряжение  $\sigma_v$ , действующее в точках на контуре, выражается формулой

$$(\sigma_v)_{u=u_0} = \frac{p}{2h^2} (\operatorname{sh} 2u_0 - 1 - e^{2u_0} \cos 2v). \quad (129)$$

<sup>1)</sup> Inglis C. E., Trans. Inst. Naval Archiv, London, т. 60 (1913), стр. 219.

На фиг. 31 даны графики распределения напряжений при  $\sinh u_0 = 5$ , или при  $\frac{t}{r} = 25$ . Напряжение на контуре достигает своего максимального значения, равного  $11p$  в конце большой полуоси, т. е. у дна выточки. При перемещении вдоль контура, начиная с этой точки, напряжение быстро убывает, меняет знак и в точке на оси стержня делается равным  $-p$ .

Распределение напряжений вдоль оси  $u$  точно так же даёт представление о характере напряжённого состояния около выточки.

Напряжение  $\sigma_v$  при  $v = \frac{\pi}{2}$  даётся формулой:

$$(\sigma_v)_{v=\frac{\pi}{2}} = p + \frac{p}{2} \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u} [e^{2u_0} (e^{2u_0} - 3) (1 + \frac{1}{2} \operatorname{cth} u) e^{-2u} + \operatorname{ch} u_0 \operatorname{cth} u]. \quad (130)$$

Как видно из графика на фиг. 31, начиная с точки на контуре, где  $\sigma_v$  имеет наибольшее значение, при движении к грани пластинки оно очень быстро уменьшается, приближаясь к величине  $p$ . Что касается напряжения  $\sigma_{\text{ш}}$ , то, в соответствии с граничными условиями, на контуре оно равно нулю, затем несколько увеличивается, достигает максимума и на некотором расстоянии от контура снова приближается к нулю. Касательное напряжение  $\tau_{\text{ш}}$  в точках оси  $u$ , вследствие симметрии, равно нулю.

Для наибольшего напряжения, возникающего у дна выточки, получаем выражение:

$$(\sigma_v)_{u=u_0, v=\frac{\pi}{2}} = \sigma_{\max} = p (1 + 2 \operatorname{cth} u_0). \quad (130a)$$

Отсюда, имея в виду (120), получим формулу для коэффициента концентрации в растянутом стержне с отверстием, имеющим форму эллипса, большая ось которого перпендикулярна оси стержня:

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 1 + 2 \sqrt{\frac{t}{r}}. \quad (131)$$

Для кругового отверстия при  $t = r$  имеем:

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 3. \quad (132)$$

Уравнение (131) справедливо и тогда, когда большая ось эллипса параллельна оси стержня. В этом случае радиус  $r$  очень велик, в большинстве встречающихся в практике случаев равен даже бесконечности, так что  $\sigma_{\max} = p$ .

Можно было бы думать, что в случае продолговатого отверстия расположенного вдоль оси стержня (фиг. 30), т. е. при  $\frac{t}{r} < 1$ , наиболь-

шие напряжения возникают у конца большой оси, длина которой пусть будет  $l'$ . Однако для напряжения, возникающего в этой точке, из (129) получаем

$$(\sigma_x)_{y=0} = -p. \quad (133)$$

Значит, для каждой из этих форм отверстия в точке контура, лежащей на оси стержня, возникает сжимающее напряжение величиной  $p$ , независимо от величины радиуса  $\rho$  в этой точке.

Отсюда следует, что для всех рассмотренных нами здесь форм отверстия наибольшее напряжение возникает в тех точках контура, в которых касательная к контуру параллельна направлению растяжения стержня.

Зависимость наибольшего напряжения от радиуса кривизны, представленная формулой (131), графически изображена на фиг. 32.

**В. Чистый изгиб.** При чистом изгибе стержня без отверстия функция напряжений представляется формулой:

Фиг. 32. Наибольшие напряжения в растянутых стержнях с овальным отверстием.

$$F = \frac{p}{6t} y^3, \quad \text{причем} \quad \Phi_0 = \frac{p}{6t} (y^3 - 3x^2y); \quad \Phi_1 = \frac{p}{2t} xy; \quad (134)$$

откуда для напряжений получаем

$$\sigma_x = p \frac{y}{t}; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (135)$$

Таким образом, напряжение  $\sigma_x$  следует прямолинейному закону элементарной теории изгиба. За номинальное напряжение  $p$  принимается напряжение от изгиба в точке, удаленной на расстояние  $t$  от оси стержня. Обозначив изгибающий момент буквой  $M$ , можем написать

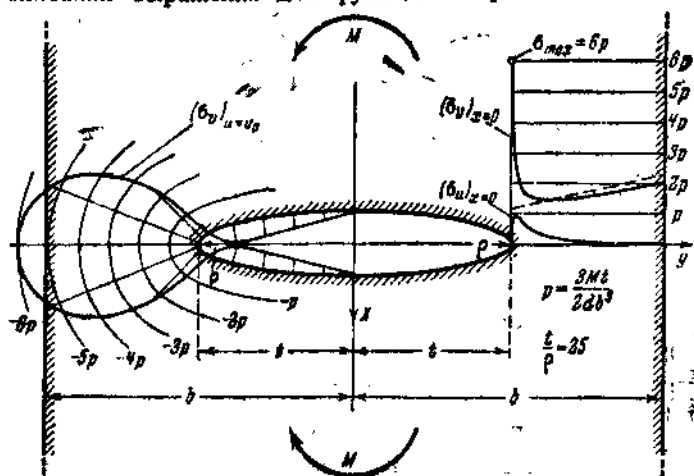
$$p = \frac{3Mt}{2b^3a}. \quad (136)$$

Выражения (134) напомним в эллиптических координатах. Затем добавим к ним другие функции, но так, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям и чтобы при  $u$  достаточно большом

добавочные напряжения стремились к нулю. Найдём, применяя известные формулы для гиперболических функций:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{96t} [(-4 \operatorname{ch} 3u + Ae^{-3u}) \sin 3v + \\ &\quad + (12 \operatorname{ch} u + Be^u + Ce^{-u}) \sin v]; \\ \Phi_1 &= \frac{p}{8t} (\operatorname{sh} 2u + De^{-2u}) \sin 2v. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

При написании выражения для функции напряжений целесообразно



Фиг. 33. Овальное отверстие при изгибе.

ещё принять во внимание (47) и выразить отрезок  $t$  через  $u_0$ .

Будем иметь:

$$t = (y)_{u=u_0} = \operatorname{ch} u_0. \quad (138)$$

$$v = \frac{\pi}{2}$$

Тогда для функции напряжений получим<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} F &= \frac{p}{96 \operatorname{ch} u_0} [(-\operatorname{ch} 3u - 3 \operatorname{ch} u + Ae^{-3u} + \\ &\quad + 6De^{-2u} \operatorname{sh} u) \sin 3v + (3 \operatorname{ch} 3u + \\ &\quad + 9 \operatorname{ch} u + Be^u + Ce^{-u} + 6De^{-2u} \operatorname{sh} u) \sin v]. \end{aligned} \quad (139)$$

Произвольные постоянные определяются из граничных условий (119), которые дают

$$\left. \begin{aligned} A &= e^{3u_0} (\operatorname{ch} 3u_0 + 3 \operatorname{ch} u_0 - 12 \operatorname{ch}^2 u_0 \operatorname{sh} u_0); \\ B &= -12 \operatorname{ch}^2 u_0; C = 0; D = 2e^{2u_0} \operatorname{ch}^2 u_0. \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

<sup>1)</sup> Wolf K., Z. techn. Physik (1922), стр. 160; далее Neuber H., Ing. Arch., т. 5 (1934), стр. 242.

На фиг. 33 даны графики распределения напряжений для случая, когда  $\text{cth } u_0 = 5$  или  $t/\rho = 25$ . У дна выточки имеет место значительное повышение напряжения и  $\sigma_{\max} = 6p$ . При перемещении от дна выточки вдоль контура, а также и вдоль оси  $y$  напряжение быстро убывает. Пунктирная линия соответствует элементарной теории изгиба при учёте ослабления стержня в результате высверливания отверстия. Для наибольшего напряжения, возникающего у дна выточки, получим формулу:

$$\sigma_{\max} = (\sigma_x)_{u=u_0} = p(1 + \text{cth } u_0) \quad (141)$$

$\sigma = 90^\circ$

или, на основании (120)

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 1 + \sqrt{t/\rho}. \quad (142)$$

Зависимость наибольшего напряжения от  $t/\rho$  графически изображена на фиг. 34.

Для кругового отверстия имеем:

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = 2. \quad (143)$$

Когда продолговатое отверстие расположено параллельно оси стержня, концентрации напряжений около отверстия не получается.

[При  $\rho \rightarrow \infty$   $\sigma_{\max} = p$ . У дна выточки (ось  $x$ ) напряжение в этом случае будет равно нулю.]

С. Чистый сдвиг. Стержень теперь нагружен таким образом, что в сечении  $x = 0$  имеются лишь касательные напряжения. Полная перерезывающая сила в сечении пусть будет  $V$ . Номинальное напряжение здесь мы будем вычислять по формуле

$$p = \frac{V}{2bd}, \quad (144)$$

Фиг. 34. Наибольшее напряжение у овального отверстия при изгибе.

где  $p$  представляет собой среднее касательное напряжение в стержне, не имеющем отверстия. Полное решение задачи опять будет состоять из элементарного решения для стержня без отверстия и добавочных функций, исчезающих при больших значениях  $u$ . Элементарное решение дается функциями

решение задачи опять будет состоять из элементарного решения для стержня без отверстия и добавочных функций, исчезающих при больших значениях  $u$ . Элементарное решение дается функциями

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{4b^2} (3xy^3 - 3x^2y - 6b^2xy); \\ \Phi_1 &= \frac{p}{4b^2} (-y^3 + 3x^2y); \\ F &= \frac{p}{2b^2} (xy^3 - 3b^2xy); \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Согласно (145) найдём соответствующие напряжения:

$$\sigma_x = \frac{3p}{b^2} xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \frac{3p}{2b^2} (y^2 - b^2). \quad (146)$$

Действительно, в сечении  $x=0$  имеется лишь касательное напряжение, а грани  $y = \pm b$  свободны от внешних нагрузок.

Выразим функции  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  через эллиптические координаты  $u$ , добавив соответствующие функции, напряжения от которых затухают вдали от отверстия, придём к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{128b^2} [(-3\operatorname{sh} 4u + Ae^{-4u}) \sin 4v + \\ &\quad + 12(1 - 4b^2) \operatorname{sh} 2u + Be^{-2u} \sin 2v]; \\ \Phi_1 &= \frac{p}{64b^2} [(4 \operatorname{ch} 3u + Ce^{-3u}) \sin 3v + \\ &\quad + (-12 \operatorname{ch} u + De^{-u}) \sin v]. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Принимая во внимание (138), функцию напряжения можем написать в следующем виде<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} F &= \frac{p}{128 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{ch}^2 u_0} \left\{ [-\operatorname{sh} 4u - 2 \operatorname{sh} 2u + \right. \\ &\quad + Ae^{-4u} + Ce^{-2u} \operatorname{sh} u] \sin 4v + [2 \operatorname{sh} 4u + \\ &\quad + 4 \left(1 - 12 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{ch}^2 u_0\right) \operatorname{sh} 2u + Be^{-2u} + \\ &\quad \left. + Ce^{-3u} \operatorname{sh} u + De^{-u} \operatorname{sh} u] \sin 2v \right\}. \end{aligned} \quad (148)$$

Из граничных условий получим:

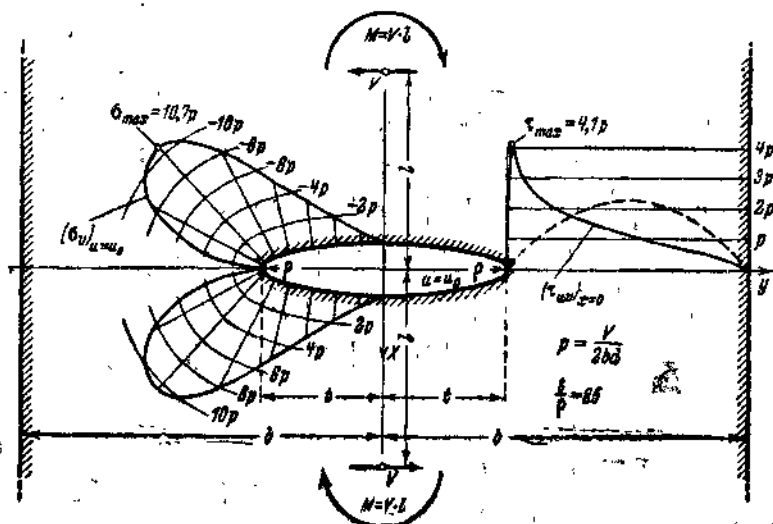
$$\left. \begin{aligned} A &= -24e^{4u_0} \operatorname{sh}^2 u_0 \operatorname{ch}^2 u_0; \\ B &= -96e^{2u_0} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{sh}^2 u_0 \operatorname{ch}^2 u_0; \\ C &= 8e^{2u_0} (2e^{2u_0} - 1) \operatorname{ch}^2 u_0; \\ D &= \left(24e^{2u_0} 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right) \operatorname{ch}^2 u_0. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Графики распределения напряжений для  $t/p = 25$  и  $b/t = 3$  даны на фиг. 35. Напряжение на контуре отверстия достигает своего максимума в точке, очень близкой к дну выточки. Точно так же и касательное напряжение, действующее в сечении  $x=0$ , достигает своего максимума в точке, расположенной вблизи контура.

При определении каждого из этих максимумов напряжений целесообразно пренебречь членами с  $b^2$ . Ошибку, проистекающую от этого, при достаточно большой ширине стержня можно считать пре-

<sup>1)</sup> Neuber H., Ing. Arch., т. 5 (1934), стр. 243.

небрежимо малой. Это пренебрежение особенно допустимо в теории расчёта стержней, ослабленных отверстиями, когда ширина стержня относительно велика и если идёт речь прежде всего об опре-



Фиг. 35. Овальное отверстие при сдвиге.

делении предельного значения коэффициента концентрации, соответствующего стержню с сравнительно большой шириной.

После некоторых преобразований функция напряжений запишется в виде:

$$F = -\frac{3p}{8} [\operatorname{ch} 2(u - u_0) - 1] e^{2u_0} \sin 2v, \quad (150)$$

а напряжение на контуре будет

$$(\sigma_v)_{u=u_0} = \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right)_{u=u_0} = -\frac{3p}{2} e^{2u_0} \frac{\sin 2v}{\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v}. \quad (151)$$

Своего наибольшего значения оно достигает там, где выражение

$$\frac{\partial}{\partial v} (\sigma_v)_{u=u_0} = -\frac{3p e^{2u_0}}{h^2} [(\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v) 2 \cos 2v + \sin^2 2v] \quad (152)$$

делается нулём, т. е. при

$$\cos 2v = -\frac{1}{\operatorname{ch} 2u_0} \quad \text{или} \quad \cos v = \frac{\operatorname{sh} u_0}{\sqrt{\operatorname{ch} 2u_0}}. \quad (153)$$

Наибольшее напряжение на контуре равно

$$\frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{3}{2} \left( \sqrt{\frac{t}{p}} + 2 + \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{p}}} \right)$$



и имеет место в точке, удалённой от оси  $y$  на расстояние

$$x = t \frac{\operatorname{sh}^2 u_0}{\operatorname{ch} u_0 \sqrt{\operatorname{ch} 2u_0}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{t}{\rho} \left( \frac{t}{\rho} + 1 \right)}}. \quad (155)$$

В сечении  $x=0$  касательное напряжение выражается формулой:

$$\begin{aligned} (\tau_{uv})_{v=\frac{\pi}{2}} &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \operatorname{cth} u \frac{\partial F}{\partial v} \right)_{v=\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{3\rho e^{2u_0}}{8 \operatorname{sh}^2 u} [-4 \operatorname{sh} 2(u - u_0) - 2 \operatorname{cth} u (\operatorname{ch} 2(u - u_0) - 1)]. \end{aligned} \quad (156)$$

Точку с наибольшим касательным напряжением мы получим, если приравняем нулю продифференцированное по  $u$  выражение (156). Не приводя промежуточных выкладок, дадим выражение для расстояния от оси  $y$  до точки, где  $(\tau_{uv})_{v=\frac{\pi}{2}}$  достигает максимума:

$$y = \frac{t}{\operatorname{ch} v_0} \sqrt{1 + 3 \operatorname{sh}^2 u_0} = t \sqrt{\frac{t/\rho + 2}{t/\rho}}. \quad (157)$$

Наибольшее касательное напряжение равно

$$\frac{\tau_{\max}}{\rho} = 3 \frac{\left( \frac{t/\rho + 2}{3} \right)^{3/2} - \sqrt{t/\rho}}{(\sqrt{t/\rho} - 1)^2}. \quad (158)$$

Зависимость каждого из максимальных напряжений от  $t/\rho$  показана на фиг. 36.

Для кругового отверстия

$$\frac{\sigma_{\max}}{\rho} = 6; \quad \frac{\tau_{\max}}{\rho} = 2. \quad (159)$$

При совместном действии чистого изгиба и сдвига справедливо то, что говорилось ранее для глубокой внешней выточки, именно: наибольшее напряжение на контуре отверстия меньше на очень незначительную величину суммы наибольших напряжений, вызванных порознь изгибом и сдвигом (ср. фиг. 21).

Для продолговатого отверстия, параллельного оси стержня, существенно повышение напряжения только лишь вследствие сдвига. Мы введём опять отношение  $t'/\rho'$  большой оси  $t'$  к новому радиусу  $\rho'$  кривизны в точке на её конце. Как известно, для эллипса справедливы равенства:

$$\frac{t}{\rho} = \frac{t^2}{t'^2} = \frac{\rho'}{t'}. \quad (160)$$

Наибольшие напряжения мы получим так: в (154) и (158) заменим  $t/\rho$  на  $\rho'/t'$ . Уравнение (154) тогда перейдёт в следующее:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\rho} = \frac{3}{2} \left( \sqrt{\frac{t'}{\rho'}} + 2 + \frac{1}{\sqrt{t'/\rho'}} \right). \quad (161)$$

Точно с таким же успехом мы могли бы заменить  $t/p$  на  $t'/p'$ . Делая такую замену в выражении (158), мы получим наибольшее касательное напряжение, но не в сечении  $x=0$ , а в сечении  $y=0$ . Действительно, сделав вычисления для этого сечения, получим

$$\frac{\tau_{\max}}{p} = 3 \frac{\left(\frac{t'}{p'} + 2\right)^{3/2} - \sqrt{\frac{t'}{p'}}}{\left(\sqrt{\frac{t'}{p'}} + 1\right)^2}, \quad (162)$$

т. е. то же самое выражение (158), в котором  $t/p$  заменено на  $t'/p'$ . Итак, для продолговатого отверстия, расположенного вдоль оси стержня, нагруженного поперечной силой, для наибольшего напряжения справедливы те же формулы, что и для продолговатого отверстия, перпендикулярного оси стержня, при условии, что  $t/p$  заменено на  $t'/p'$ .

Перейдём теперь к группе задач, относящихся к мелким внешним выточкам. Как мы видели выше, по значениям коэффициентов концентрации для мелких и для очень глубоких выточек можно вычислить коэффициент концентрации для выточки любой глубины.

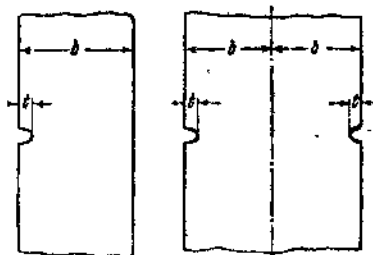
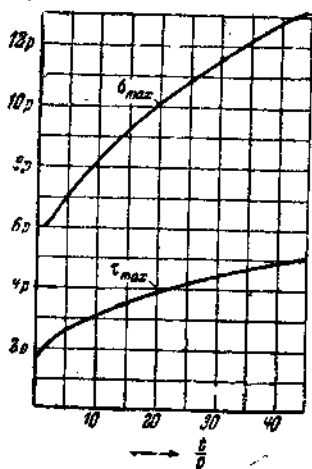
Параметры  $t/p$  и  $b/t$  для выточек

### 5. Мелкая внешняя выточка.

Применительно к фиг. 37 мы теперь будем заниматься либо стержнем ширины  $b$  с односторонней мелкой внешней выточкой, либо стержнем ширины  $2b$  с двусторонней внешней выточкой.

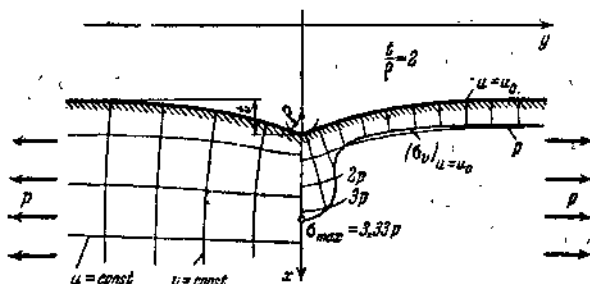
Фиг. 36. Наибольшие напряжения у овального отверстия при сдвиге.

Вследствие закона затухания напряжённое состояние в точках стержня, достаточно удалённых от выточек, не отличается от того, какое существует в стержне без выточек, поскольку отношение  $b/t$  мы считаем достаточно большим. Поэтому мелкая односторонняя выточка не оказывает влияния на распределение напряжений в точках на другой прямолинейной стороне стержня, и разыскивая функцию, соответствующую искажению напряжений выточкой, быстро убывающих по всем направлениям от неё и являющихся добавочными к напряжениям



Фиг. 37. Односторонние и двусторонние мелкие внешние выточки.

в стержне без выточки, можно не принимать во внимание граничных условий на прямолинейной грани стержня, так как они выполнены для первоначальной функции напряжений. В случае стержня с двусторонней выточкой к этой первоначальной функции напряжений нужно добавить функции, учитывающие искажение напряжений выточками на обеих гранях стержня. Поэтому, если получено



Фиг. 38. Мелкие внешние выточки при растяжении.

решение для стержня с односторонней выточкой, то найденный коэффициент концентрации может быть использован и для стержня с двусторонней выточкой, поскольку при этом добавочные функции напряжений взяты одинаковыми. Но, при определении номинального напряжения, нужно в случае двусторонней выточки пользоваться другой формулой.

**А. Чистое растяжение.** Будем пользоваться системой криволинейных координат:

$$x = u + \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = v - \frac{v}{u^2 + v^2}. \quad (163)$$

На достаточном удалении от точки  $x=1, y=0$  линия  $u=\text{const.}$  совпадает с линией  $x=\text{const.}$  Вблизи точки  $x=2, y=0$  линия  $u=\text{const.}$  искривляется, образуя впадину, имеющую характер выточки.

Аналогичное поведение имеет ортогональная система линий  $v=\text{const.}$  На левой стороне фиг. 38 нанесены линии  $u=\text{const.}$  и  $v=\text{const.}$

Функция напряжения в случае чистого растяжения стержня в направлении оси  $y$  с интенсивностью  $p$  имеет вид:

$$F = \frac{p}{2} x^2, \quad \text{причём } \Phi_0 = 0; \quad \Phi_1 = \frac{p}{2} x. \quad (164)$$

Перейдём теперь к криволинейной системе координат и посредством надлежащим образом подобранной добавочной функции постараемся удовлетворить граничным условиям в точках контура мелкой

выточки. При разыскании гармоничных функций следует учесть, что мы опять здесь имеем дело с изометрической сеткой, ибо

$$h_u^2 = h_v^2 = h^2 = 1 + \frac{2v^2 - 2u^2 + 1}{(u^2 + v^2)^2} \quad (165)$$

и, значит, гармонические функции удовлетворяют дифференциальному уравнению (46).

Решениями являются:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{\rho}{2} \left( A + Bu + C \frac{u}{u^2 + v^2} + D \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} \right); \\ \Phi_1 &= \frac{\rho}{2} \left( u + \frac{u}{u^2 + v^2} + E \frac{u}{u^2 + v^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Функция напряжений представится в виде:

$$F = \frac{\rho}{2} \left[ u^2 + \frac{2u^2}{u^2 + v^2} + \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + A + Bu + C \frac{u}{u^2 + v^2} + D \left( \frac{1}{u^2 + v^2} - \frac{2u^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) + E \left( \frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) \right]. \quad (167)$$

Значение  $u$ , соответствующее контуру, мы обозначим буквой  $u_0$ . Если произвольные постоянные, содержащиеся в функции  $F$ , определить теперь так, чтобы она содержала множитель  $(u - u_0)^2$ , то тем самым мы удовлетворим граничным условиям (119) в точках  $u = u_0$ . Этот ход рассуждений приводит к следующим значениям произвольных постоянных:

$$\left. \begin{aligned} A &= u_0^2; \quad B = -2u_0; \quad C = \frac{2u_0}{2u_0^2 - 1}; \\ D &= -\frac{u_0^2}{2u_0^2 - 1}; \quad E = \frac{1 - 4u_0^2}{2u_0^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Подставив эти выражения в (167), получим  $F$  в виде:

$$F = \frac{\rho}{2} (u - u_0)^2 \left[ 1 - \frac{1}{(2u_0^2 - 1)(u^2 + v^2)} \right]. \quad (169)$$

Так как первые производные от  $F$  в точках контура обращаются в нуль, то для напряжения в этих точках получаем:

$$(\sigma_v)_{u=u_0} = \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right)_{u=u_0} = \rho \frac{1 - \frac{1}{(2u_0^2 - 1)(u_0^2 + v^2)}}{1 + \frac{2v^2 - 2u_0^2 + 1}{(u_0^2 + v^2)^2}}. \quad (170)$$

Распределение  $\sigma_v$  по контуру при  $u = \sqrt{2}$  показано на фиг. 38. На некотором расстоянии от выточки напряжение делается равным номинальному напряжению  $\rho$ , затем, при приближении к выточке, оно несколько уменьшается, а непосредственно около выточки напряже-

ние быстро увеличивается, достигая у дна выточки величины, равной 3,33  $\rho$ .

Для наибольшего напряжения из (170) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} (\sigma_v)_{u=u_0}^{v=0} = \sigma_{\max} &= \rho \frac{u_0^2(2u_0^2-1)-1}{u_0^4-2u_0^2+1} \cdot \frac{u_0^2}{2u_0^2-1} = \\ &= \rho \frac{(2u_0^2+1)(u_0^2-1)u_0^2}{(2u_0^2-1)(u_0^2-1)^2} = \rho \frac{u_0^2(2u_0^2+1)}{(2u_0^2-1)(u_0^2-1)}. \quad (171) \end{aligned}$$

Параметр  $u_0$  в формуле (171), имеющий тесную связь с формой выточки, целесообразно заменить отношением глубины  $t$  выточки к радиусу кривизны  $\rho$  в точке у её дна. Величины  $t$  и  $\rho$  вычисляются по уравнению контура, получающемуся в параметрическом виде из (163) при  $u = u_0$ .

Глубина  $t$  получается как разность значений  $x$  в точке у дна выточки ( $v=0$ ) и в точке, удалённой на бесконечность ( $v=\infty$ ):

$$t = (x)_{u=u_0}^{v=0} - (x)_{u=u_0}^{v=\infty} = u_0 + \frac{1}{u_0} - u_0 = \frac{1}{u_0}. \quad (172)$$

Для определения радиуса кривизны лучше всего применить соотношение, вытекающее из выражения для коэффициента искажения. Пусть  $\varphi$  есть угол между касательной к кривой и некоторым фиксированным направлением, например, осью  $x$ . Тогда, как известно, кривизна кривой будет:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad (173)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны, а  $ds$  — элемент длины кривой. Но можно показать, что кривизна выражается через коэффициент искажения. Эта зависимость (на выводе её мы здесь останавливаться не будем) для кривизны линии  $u = \text{const.}$  имеет вид<sup>1)</sup>:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial h_v}{\partial u}. \quad (174)$$

Коэффициент искажения при  $v=0$  получим из (165):

$$h_u = h_v = h = 1 - \frac{1}{u^2}. \quad (175)$$

Поэтому кривизна у дна выточки равна

$$\frac{1}{\rho} = \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial u} \right)_{u=u_0}^{v=0} = \frac{\frac{2}{u_0^3}}{\left(1 - \frac{1}{u_0^2}\right)^2} = \frac{2u_0}{(u_0^2-1)^2}. \quad (176)$$

<sup>1)</sup> Föppl L. u. Neuber H., Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik, стр. 91. München, u. Berlin: R. Oldenbourg, 1935.

Отсюда, после умножения на глубину выточки, получим:

$$\frac{t}{\rho} = \frac{2}{(u_0^2 - 1)^2}, \quad (177)$$

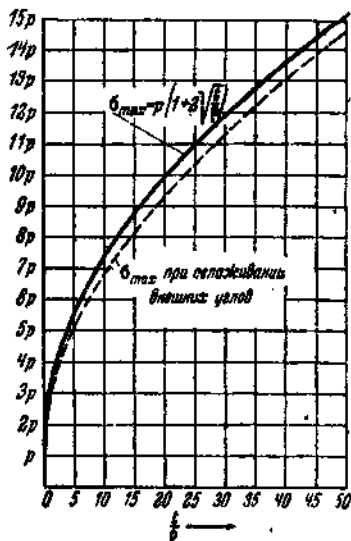
и далее

$$u_0^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{t/2\rho}}. \quad (178)$$

Найденное значение  $u_0^2$  подставим в (171); для наибольшего напряжения и для коэффициента концентрации получим простую формулу:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\rho} = 3 \sqrt{\frac{t}{2\rho}} - 1 + \frac{4}{2 + \sqrt{\frac{t}{2\rho}}}. \quad (179)$$

Эта зависимость коэффициента концентрации от радиуса кривизны графически изображена на фиг. 39 (пунктирная кривая). Однако результаты, полученные таким путём, практически применить к мелкой выточке (фиг. 37) непосредственно нельзя, поскольку полученное решение относится к случаю выточки со скруглёнными углами, что вытекает из характера применяемой системы координат (фиг. 38), в которой острые углы на кривых  $u = \text{const.}$  отсутствуют; можно ожидать, что коэффициент концентрации, вычисленный по формуле (179), будет несколько ниже того, который имеет место в выточках с острыми углами, встречающимися во многих практических случаях. Но и для последнего случая в нашем распоряжении есть ещё одно простое приближённое решение.



Фиг. 39. Наибольшие напряжения в мелкой внешней выточке при растяжении.

Именно, применение метода расщепления к достаточно широким стержням, имеющим продолговатое отверстие и рассмотренным нами в IV, 4, даёт приближённое решение для мелких внешних выточек с острыми внешними углами. Мы будем исходить

из решения для случая простого растяжения стержня и представим его расщеплённым вдоль оси  $x$  (фиг. 31). В точках проведённого сечения касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения  $\sigma_y$  при перемещении от выточки быстро убывают. Так

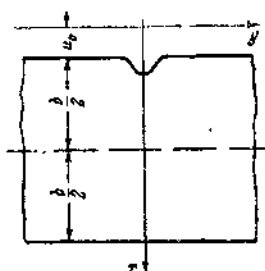
как эти напряжения  $\sigma_y$  действуют перпендикулярно растягивающей силе, то в первом приближении можно не учитывать их влияние на наибольшее напряжение, возникающее у дна выточки. Это наибольшее напряжение обуславливается в первую очередь растягивающим напряжением  $\sigma_x$ . Поэтому нельзя ожидать большой ошибки, если принять одинаковыми коэффициенты концентрации в растянутом стержне с продолговатым отверстием и в стержне с мелкой внешней выточкой, имеющем острые углы<sup>1)</sup>. Соответствующая кривая начерчена на фиг. 39. Как и следовало ожидать, коэффициент концентрации в мелкой внешней выточке с острыми углами оказывается несколько большим по сравнению с коэффициентом концентрации в выточке с закруглёнными углами.

Номинальное напряжение  $p$  представляет, как было замечено вначале, равномерно распределённое растягивающее напряжение в той части стержня, где отсутствуют выточки. Оно равно

$$p = \frac{P}{bd} \quad \text{или} \quad p = \frac{P}{2bd}, \quad (180)$$

в зависимости от того, имеется в виду односторонняя или двусторонняя выточка.

**В. Чистый изгиб.** Элементарной функцией напряжений в случае чистого изгиба мы уже пользовались (134). Для того чтобы выразить её в нашей координатной системе (163), нужно произвести поворот координатных осей и перенос их начала. Ось стержня теперь идёт по направлению оси  $y$ , на расстоянии  $x = u_0 + \frac{b}{2}$  от неё (стержень с одной выточкой, фиг. 40), в то время как ранее в IV, 4 ось стержня совпадала с осью  $x$ . Мы должны поэтому заменить  $y$  на  $u_0 + \frac{b}{2} - x$ , а  $x$  на  $y$ . При этом можно отбросить постоянные и линейные члены, поскольку они на напряжения не оказывают никакого влияния. Номинальным напряжением является максимальное напряжение при изгибе стержня (ширины  $b$ ):



Фиг. 40. Односторонняя мелкая внешняя выточка при изгибе.

$$p = \frac{6M}{b^2d}. \quad (181)$$

<sup>1)</sup> Эти приближённые рассуждения подтверждены в работе F. G. Maunsell [Stresses in a Notched Plate under Tension. Phil. Mag. VII, 21, 1936 г., стр. 765–773]. Строгое решение для полукруглой выточки, полученное там с помощью рядов Фурье, даёт для коэффициента концентрации значение 3, которое вычислено с большой точностью.

Таким путём получим следующую элементарную функцию напряжений:

$$\begin{aligned} F &= \frac{h}{3b} \left[ 3 \left( u_0 + \frac{b}{2} \right) x^2 - x^3 \right] = \\ &= \frac{p}{2} x^2 + \frac{p}{b} \left( u_0 x^2 - \frac{x^3}{3} \right). \end{aligned} \quad (182)$$

Поскольку мы имеем в виду определение коэффициента концентрации в мелкой выточке, то область искажённого выточкой напряжённого состояния мала по сравнению с высотой  $b$ , или высота  $b$  велика по сравнению с остальными величинами, фигурирующими при расчёте. Поэтому в случае мелкой выточки можно пренебречь как малыми теми членами, которые содержат множитель  $1/b$ . (Влияние высоты стержня, которое исчезает в случае мелкой выточки, снова учитывается в окончательной номограмме коэффициентов концентрации для выточек любой глубины.) Если теперь в (182) пренебречь членами, содержащими множитель  $1/b$ , то получится та же элементарная функция напряжений, что и при простом растяжении [см. (164)]. Дальнейший ход выкладок поэтому будет точно такой же, как и в случае простого растяжения. Таким образом, в случае мелких выточек коэффициенты концентрации при чистом изгибе и при простом растяжении одинаковы.

К тому же результату придём и в случае двусторонней выточки. Но только здесь, если считать ширину стержня равной  $2b$ , номинальное напряжение следует вычислять по формуле:

$$p = \frac{3M}{2b^2d}. \quad (183)$$

**С. Чистый сдвиг.** Элементарная функция напряжений для чистого сдвига даётся уравнением (145). Имея в виду стержень с односторонней выточкой, заменим в выражении для функции напряжений  $b/2$  вместо  $b$  и в соответствии с нашей координатной системой  $y$  на  $u_0 + \frac{b}{2} - x$ , а  $x$  на  $y$ , после чего получим:

$$\begin{aligned} F &= \frac{2p}{b^2} \left\{ \left[ -x^3 + 3 \left( u_0 + \frac{b}{2} \right) x^2 - 3 \left( u_0 + \frac{b}{2} \right)^2 x + \left( u_0 + \frac{b}{2} \right)^3 \right] y - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} b^2 \left[ u_0 + \frac{b}{2} - x \right] y \right\}, \end{aligned} \quad (184)$$

или, пренебрегая линейными членами,

$$F = \frac{3p}{b} (x^2 - 2u_0x) y + \frac{2p}{b^2} (-x^3 + 3u_0x^2 - 3u_0^2x) y. \quad (185)$$

Номинальное напряжение, как и ранее, представляет собой среднее касательное напряжение в стержне, не имеющем выточки (перерезывающая сила  $V$ ):

$$p = \frac{V}{bd}. \quad (186)$$



Перейдя к координатной системе (163), можно точно решить и эту задачу с помощью надлежащим образом подобранной добавочной функции, соответствующей напряжениям, быстро убывающим при увеличении  $z$ . Распределение касательного напряжения по поперечному сечению стержня получается таким, как оно представлено на фиг. 41. Искажение напряжений, возникающее от добавочной функции, быстро уменьшается по всем направлениям от дна выточки, и в стержне устанавливается тот же параболический закон распределения касательного напряжения, который имеет место в стержне без выточки. Вблизи контура выточки возникает относительный максимум  $\tau'_{\max}$  касательного напряжения, значительно меньший (при не очень искривленном контуре) того, который существует в середине стержня и который равен

$$\tau'_{\max} = 1,5 p. \quad (187)$$

Это вытекает из структуры функции напряжений. Так как элементарная функция напряжений (185) состоит из двух выражений, из которых одно содержит множитель  $1/b$ , а другое  $1/b^3$ , то и полное решение представляется в виде суммы двух выражений такого же типа. В случае мелкой выточки  $b$  велико по сравнению с другими размерами выточки, и слагаемым с множителем  $1/b^3$  можно пренебречь, как малой величиной. Поэтому функция напряжения для мелкой выточки содержит множитель  $1/b$ . Этот же множитель содержит и выражение для напряжения  $\tau'_{\max}$ , возникающего вблизи основания выточки;  $\tau'_{\max}$ , кроме того, зависит от глубины  $t$  выточки и от её радиуса кривизны  $\rho$ . Следовательно,

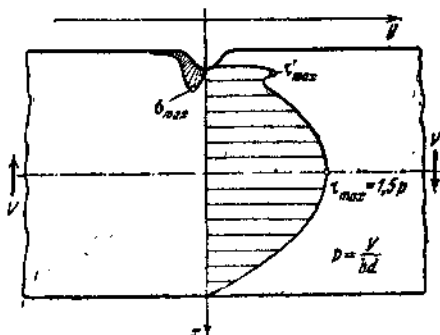
$$\frac{\tau'_{\max}}{p} = \frac{t}{b} f\left(\frac{t}{\rho}\right). \quad (188)$$

В случае мелкой выточки с не очень большой кривизной это выражение, благодаря множителю  $1/b$ , всегда меньше 1,5. Подобным же образом и выражение для наибольшего напряжения, возникающего вдоль контура выточки, содержит множителем  $t/b$ .

Аналогичные соображения справедливы и для стержня с двусторонней выточкой. Наибольшее касательное напряжение и здесь получается, если  $\rho$  не очень мал, равным  $1,5 p$ , где под  $p$  теперь нужно понимать выражение:

$$p = \frac{V}{2bd}, \quad (189)$$

так как высота балки равна  $2b$ .



Фиг. 41. Односторонняя мелкая внешняя выточка при сдвиге.

## 6. Построение номограммы для коэффициента концентрации у внешних выточек, у круговых и продолговатых отверстий любых размеров.

При вычислении коэффициента концентрации для внешних выточек и продолговатых отверстий любых размеров мы будем исходить из соображений, изложенных в II, 4, при этом коэффициент концентрации будет определяться по известным уже предельным его значениям для мелкой и глубокой выточек.

**А. Двусторонняя внешняя выточка.** Предельные значения коэффициента для глубокой выточки при растяжении и изгибе вычисляются из соотношений (69) и (79) с номинальными напряжениями, вычисляемыми по формуле (62) или (77). Предельные значения для мелкой выточки при растяжении и изгибе даются формулой (131). При вычислении коэффициента концентрации в выточке любой глубины является существенным, чтобы в мелкой выточке в основу расчёта было положено *то же самое номинальное напряжение*, как и в глубокой выточке. Так, например, при растяжении стержня с мелкой выточкой, за номинальное напряжение, вместо

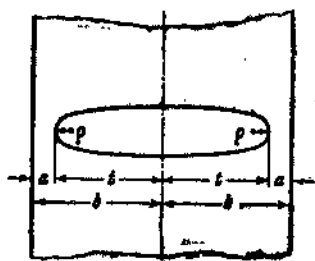
$$\frac{P}{2bd} = \frac{P}{2ad} \left(1 - \frac{t}{b}\right),$$

следует взять  $\frac{P}{2ad}$ ; для идеально мелкой выточки во всех расчётах, а значит, и при вычислении номинального напряжения, отношением  $\frac{t}{b}$  мы должны пренебрегать по сравнению с другими величинами. Только тогда и получится, что кривая коэффициента концентрации мелкой выточки располагается выше кривой действительного коэффициента (см. фиг. 2), соответственно условию  $\alpha_k < \alpha_{rk}$ . Связанное с уменьшением ширины поперечного сечения стержня введение множителя  $\left(1 - \frac{t}{b}\right)$  при последовательном применении хода рассуждений, указанного в II, 4, полностью скомпенсировало бы влияние «глубокого коэффициента концентрации»; последнее же, конечно, должно быть учтено при разрешении этой задачи. Поэтому номинальное напряжение и для мелкой выточки должно быть рассчитано по наиболее узкому поперечному сечению.

Для теории, относящейся к выточкам любой глубины, случай чистого сдвига является в некотором отношении исключительным, так как наибольшее напряжение возникает здесь не у дна выточки. С другой стороны, точный расчёт для мелкой выточки даёт, как было объяснено в IV, 5, С, совершенно другие соотношения при сдвиге, чем при изгибе и растяжении. Точный расчёт этого исключительного случая оказывается поэтому крайне сложным, и здесь мы его опустим. Однако во многих случаях расчёта можно довольствоваться вышеизложенной теорией для глубоких выточек.

**В. Односторонняя внешняя выточка.** Предельные значения коэффициентов для глубокой выточки при растяжении и изгибе даны формулами (108) и (113), в которых номинальные напряжения вычисляются согласно (102) и (111). В случае мелкой выточки при растяжении и изгибе справедлива формула (131), причём номинальное напряжение, как следует из вышесказанного, должно оставаться тем же самым. Случай чистого сдвига и здесь представляет исключение. Для него в первом приближении применима теория односторонней глубокой выточки.

**С. Круговые и продолговатые отверстия.** Предельные значения коэффициентов концентрации для круговых и продолговатых отверстий при очень малых значениях отношения  $a/b$  («глубокая выточка») можно вывести из теории односторонней внешней выточки, если представить себе стержень составленным из двух стержней с односторонними выточками (фиг. 42) и считать их не очень искривлёнными за исключением области вблизи отверстия. В отделе IV, 3, А мы получили решение для односторонней глубокой выточки при условии, что прямолинейная грань стержня (она соответствует здесь внешней грани стержня) совершенно не искривляется. Если исключить ближайшую окрестность отверстия, то этому условию, в первом приближении, удовлетворяет здесь рассматриваемый нами случай.



Фиг. 42. Овальное отверстие как глубокая выточка.

Поэтому для «глубокого коэффициента концентрации» в продолговатом отверстии при растяжении стержня прежде всего следует принимать соотношение (69). Но, кроме того, должно учесть также влияние ближайшей к отверстию окрестности, ибо ведь там-то и проявляется рассматриваемое нами влияние выточек. Из чисто геометрических соображений можно ожидать, что при деформации области около отверстия внешняя грань искривится так, что вогнутость её будет направлена вовнутрь, и значит, в этой области имеются добавочные напряжения от изгиба. С целью учёта этой части напряжений, коэффициент концентрации мы представим в виде:

$$\alpha_{ik} = \alpha_1 + C\alpha_b, \quad (190)$$

где  $\alpha_1$  относится к (69), а  $\alpha_b$  — к (113) и представляет слагаемое, создаваемое изгибом. Постоянная  $C$ , полученная из сравнения с результатами измерений по методу фотоупругости, согласно А. Неппигу равна 0,8. Мы к этому возвратимся в гл. VII. Для определения значения коэффициента концентрации мелкой выточки («мелкого коэффициента концентрации») нужно пользоваться (131). Номинальное напряжение вычисляется по (102).

При чистом изгибе для определения «глубокого коэффициента концентрации» снова справедлива формула (190), так как в претельном случае, при очень малых значениях  $a/b$ , мы имеем здесь на одной стороне стержня только растяжение, а на другой стороне только сжатие. Номинальным напряжением является теперь элементарное напряжение от изгиба у dna выточки

$$\sigma_n = \frac{3Mt}{2(b^3 - f^3)d} \quad (191)$$

При малых значениях  $a/b$  эта формула переходит в

$$\sigma_n = \frac{M}{\frac{2b}{ad}}, \quad (192)$$

где  $\frac{M}{2b}$  представляет собой растягивающую силу, приложенную к одной стороне стержня, и таким образом соответствует формуле (102) для номинального напряжения. Но при малом  $t/b$  формула (191) даёт

$$\sigma_n = \frac{3Mt}{2b^3d}, \quad (193)$$

что совпадает с выражением (136) для номинального напряжения. Следовательно, для «мелкого коэффициента концентрации» применима непосредственно формула (142).

Чистый сдвиг стержня с продолговатым отверстием и с произвольной высотой опять является исключительным случаем, для которого не существует таких простых закономерностей, какие имели место для растяжения и изгиба. В большинстве случаев можно обойтись результатами или гл. IV, 3, С, или гл. IV, 4, С.

Номограммы для коэффициентов концентрации, построенные таким образом для внешних выточек и продолговатых отверстий, помещены на фиг. 104. Порядок пользования номограммой указывается стрелками. В остальном отсылаем к гл. X, где на определении коэффициента концентрации мы останавливаемся более подробно.

## 7. Концентрация напряжений у выступов.

В задачах, которыми мы занимались до сих пор, уже чисто интуитивно можно было ожидать повышения напряжений, обусловленного *ослаблением поперечного сечения* в результате устройства выточек и отверстий. В противоположность этому мы обратимся теперь к рассмотрению случаев, где повышение напряжений вызывается *не удалением материала, а наоборот, его добавлением*. Мы рассмотрим плоский растянутый стержень, имеющий по бокам маленькие выступы.

В качестве контурной линии целесообразно использовать линию  $v = \text{const.}$  координатной системы (163), которую мы обозначим

через  $v_0$ . Линия  $v = \text{const}$  для больших  $u$  (или  $x$ ) превращается в прямую, совпадающую с  $y = \text{const}$  (сравни фиг. 38 и 43). Вблизи  $x=2$ ,  $y=0$  происходит всё же искривление, имеющее характер выступа. Стержень простирается в направлении оси  $x$ , и, за исключением непосредственной окрестности маленького выступа, равномерно растягивается интенсивностью  $p$ . Для стержня без выступа мы имеем функцию напряжений:

$$F = \frac{p}{2} y^2, \text{ причём } \Phi_0 = \frac{p}{2} (y^2 - x^2); \quad \Phi_1 = \frac{p}{2} x. \quad (194)$$

Эту функцию выразим в криволинейной системе координат, определяемой уравнениями (163), и добавим к ней надлежащим образом выбранную другую функцию так, чтобы 1) в точках  $v=v_0$  внешняя нагрузка была равной нулю, 2) при увеличении  $u$  и  $v$  напряжения, соответствующие этой функции, быстро убывали и чтобы удовлетворялось дифференциальное уравнение (46). Тогда получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{p}{2} \left[ v^2 - u^2 - 2 + \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} + A + Bv + \right. \\ &\quad \left. + C \frac{v}{u^2 + v^2} + D \frac{v^3 + u^3}{(u^2 + v^2)^2} \right]; \\ \Phi_1 &= \frac{p}{2} \left[ u + \frac{u}{u^2 + v^2} + E \frac{u}{u^2 + v^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

Функция напряжений представится в виде:

$$\begin{aligned} F = \Phi_0 + x\Phi_1 &= \frac{p}{2} \left[ v^2 - \frac{2v^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + A + Bv + C \frac{v}{u^2 + v^2} + D \left( -\frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{2v^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + E \left( 1 + \frac{1 - v^2}{u^2 + v^2} - \frac{v^3}{u^2 + v^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (196)$$

Граничным условиям проще всего удовлетворять, если так определить произвольные постоянные, чтобы функция напряжений содержала множитель  $(v - v_0)^2$ .

Это будет иметь место, если положим

$$\left. \begin{aligned} A + E &= v_0^2; \quad B = -2v_0; \quad C = \frac{2v_0}{2v_0^2 + 1}; \\ D &= \frac{-3v_0^2 - 1}{2v_0^2 + 1}; \quad E = \frac{-4v_0^2 - 1}{2v_0^2 + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

Функция напряжений окончательно принимает форму<sup>1)</sup>:

$$F = \frac{p}{2} (v - v_0)^2 \left[ 1 - \frac{1}{(2v_0^2 + 1)(u^2 + v^2)} \right]. \quad (198)$$

<sup>1)</sup> Neuber H., Z. angew. Math. Mech., т. 13 (1933), стр. 440.



Каждой величине  $v_0$  соответствует своё очертание контура. Характеристикой этого очертания может здесь служить отношение половины ширины выступа  $a$  к наименьшему радиусу кривизны  $\rho$  контура.

Под шириной выступа мы должны понимать расстояние между теми точками контура, вблизи которых возникает наибольшее напряжение. Однако для того, чтобы определение было однозначным, за эти точки мы возьмём те, для которых касательная к контуру параллельна оси  $y$ , т. е., где

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0 = 1 + \frac{1}{u^2 + v_0^2} - \frac{2u^2}{(u^2 + v_0^2)^2}. \quad (203)$$

Отсюда получаем требуемое значение  $u$ :

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(1 - 2v_0^2 + \sqrt{1 - 8v_0^2}). \quad (204)$$

и, значит,

$$a = (x)_{u=u_1} = \frac{1}{4v_0} \sqrt{2[1 + 20v_0^2 - 8v_0^4 - (1 - 8v_0^2)^{3/2}]}. \quad (205)$$

Для радиуса кривизны контура в любой его точке, в соответствии с (174), получим:

$$\frac{1}{\rho} = \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v} \right)_{v=v_0} = \frac{2v_0(3u^2 - v_0^2 - 1)}{[(u^2 + v_0^2)^2 + 2v_0^2 - 2u^2 + 1]^{3/2}}. \quad (206)$$

Чтобы получить точку с наименьшим радиусом кривизны  $\rho$ , опять выражение (206) нужно продифференцировать по  $u$ , а затем приравнять нулю. Тогда найдём:

$$u_2^2 = 1 + v_0^2. \quad (207)$$

После подстановки этого значения  $u_2^2$  в (206) получим следующую наибольшую кривизну контура:

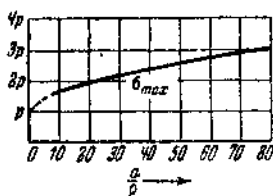
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2v_0^2 \sqrt{1 + v_0^2}}. \quad (208)$$

Из этого выражения и из (205) найдём:

$$\frac{a}{\rho} = \frac{1}{4v_0^3} \sqrt{\frac{1 + 20v_0^2 - 8v_0^4 - (1 - 8v_0^2)^{3/2}}{2(1 + v_0^2)}}. \quad (209)$$

Отсюда вытекает, что каждому значению  $v_0$  соответствует вполне определённое значение  $a/\rho$ . Зависимость наибольшего напряжения от  $a/\rho$  графически изображена на фиг. 44.

Таким образом показано, что и выступы влекут за собой значительное повышение напряжения; это повышение происходит не на самом выступе, но в непосредственной окрестности около него.



Фиг. 44. Наибольшие напряжения в симметричном выступе при растяжении.

Наибольшее напряжение, как и в задачах с выточками, зависит от кривизны контура и, при некоторых обстоятельствах, может достигать очень больших значений.

Можно указать ещё большое количество других плоских задач, решение которых может быть получено подобным образом и представляется либо в замкнутой форме, — как в тех случаях, которые мы здесь рассмотрели, — либо с помощью бесконечных рядов. В рамках настоящей книги — вследствие разнообразия материала — другие плоские задачи мы больше рассматривать не будем и обратимся теперь к главной области учения о концентрации напряжений — к учению о влиянии выточек в случае пространственного напряжённого состояния.

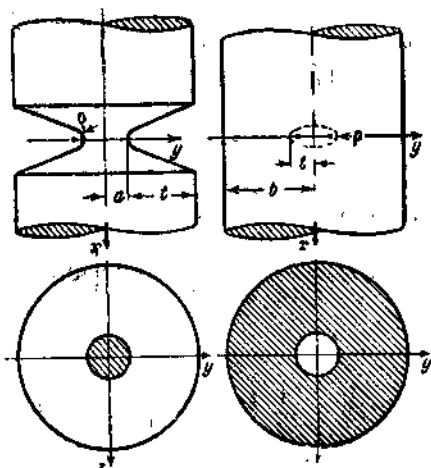
---



# ТЕОРИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ.

## 1. Основные уравнения.

Для изучения концентрации напряжений в пространственной задаче будет применён общий метод, изложенный в гл. III, 7. Из бесконечно большого количества задач, принадлежащих этой группе, мы здесь займёмся, конечно, только лишь небольшой их частью. Именно, предметом нашего исследования будут являться *выточки, сделанные на телах вращения*. Такого типа тела с выточками встречаются в частях машин в самой разнообразной форме. Как мы увидим, решение задач о влиянии выточек на тела вращения даст возможность сравнить между собой плоское и пространственное напряжённые состояния, а из связи между этими группами задач можно установить общие закономерности. Как и ранее, мы займёмся сначала глубокими и мелкими выточками, а затем указанными в гл. II, 4. способами определим коэффициент концентрации для выточки любой глубины. Замечательно то, что задачи определения напряжений, как в мелкой внешней выточке на теле вращения, так и во всех внешних и внутренних выточках с большим осевым сверлением, можно считать задачами двумерными (доказательство этого мы дадим в гл. V, 5). В противоположность этому, для обоих предельных случаев — *глубокой внешней выточки на теле вращения и мелкой внутренней выточки без осевого отверстия* (фиг. 45) — можно ожидать



Фиг. 45. Глубокая внешняя и мелкая внутренняя кольцевые выточки без осевого отверстия.

существования пространственного напряжённого состояния. В силу этого главная задача настоящей главы состоит в точном определении напряжений в этих двух предельных случаях при различных видах внешних нагрузок.

Вследствие закона затухания коэффициент концентрации зависит главным образом от кривизны поверхности выточки у её дна, благодаря чему форму поверхности выточки в остальной её части выберем так, чтобы получился наиболее простой ход расчёта. Именно, поверхность внешней глубокой выточки в дальнейшем заменяется гиперboloидом вращения, а поверхность мелкой внутренней выточки — эллипсоидом вращения. Тогда при решении задач можно пользоваться эллиптическими координатами. Положим,

$$\left. \begin{aligned} x &= \operatorname{sh} u \cos v; \quad y = \operatorname{ch} u \sin v \cos w; \\ z &= \operatorname{ch} u \sin v \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Поверхность  $u = \text{const}$  является эллипсоидом, поверхность  $v = \text{const}$  — гиперboloидом вращения вокруг оси  $x$  и поверхность  $w = \text{const}$  — плоскостью, проходящей через ось  $x$ . По уравнениям (20) гл. III, 3 вычислим прежде всего коэффициенты искажения  $h_u, h_v, h_w$ . Согласно (1) тогда получим:

$$h_u = h_v = h = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v}; \quad h_w = \operatorname{ch} u \sin v. \quad (2)$$

Компоненты перемещения вычисляем по уравнениям (80) гл. III, 7, которые, если принять во внимание (1) и (2), перейдут в:

$$2GU = \frac{1}{h} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial u} + 2\alpha \left[ \Phi_1 \operatorname{ch} u \cos v + \operatorname{sh} u \sin v (\Phi_2 \cos w + \right. \right. \\ \left. \left. - \Phi_3 \sin w) \right] \right\};$$

$$2GV = \frac{1}{h} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial v} + 2\alpha \left[ -\Phi_1 \operatorname{sh} u \sin v + \operatorname{ch} u \cos v (\Phi_2 \cos w + \right. \right. \\ \left. \left. + \Phi_3 \sin w) \right] \right\}; \quad (3)$$

$$2GW = -\frac{1}{\operatorname{ch} u \sin v} \frac{\partial F}{\partial w} + 2\alpha (-\Phi_2 \sin w + \Phi_3 \cos w).$$

Нормальные напряжения вычисляем по уравнениям (91) гл. III, 7, откуда имеем:

$$\sigma_u = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{h^2} \left[ \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right] + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \Delta F + \\ + \frac{2\alpha}{h^2} \left[ \operatorname{ch} u \cos v \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \operatorname{sh} u \sin v \left( \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) \right];$$

$$\begin{aligned}\sigma_v &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{h^2} \left[ \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right] + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + \\ &+ \frac{2\alpha}{h^2} \left[ -\operatorname{sh} u \sin v \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \operatorname{ch} u \cos v \left( \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) \right]; \\ \sigma_w &= \frac{1}{h^2} \left[ \left( \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} - \frac{1}{\sin^2 v} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} - \operatorname{th} u \frac{\partial F}{\partial u} - \operatorname{ctg} v \frac{\partial F}{\partial v} + 2\alpha \left( \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\operatorname{ch} u}{\sin v} \right) \left( \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} - \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) \right] + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F. \quad (4)\end{aligned}$$

Уравнение (99) переходит в следующее:

$$\begin{aligned}\Delta F &= \frac{2}{h^2} \left[ \operatorname{ch} u \cos v \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) + \right. \\ &+ \operatorname{sh} u \sin v \left( -\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) + \\ &\quad \left. + \left( \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u} - \frac{\operatorname{ch} u}{\sin v} \right) \left( \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} - \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) \right]. \quad (5)\end{aligned}$$

Соответственно уравнениям (92) гл. III касательные напряжения получаем в виде:

$$\begin{aligned}\tau_{uv} &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1}{h^2} \left[ \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \frac{\partial F}{\partial v} - \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial u} \right] + \\ &+ \frac{\alpha}{h^2} \left[ \operatorname{ch} u \cos v \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) + \operatorname{sh} u \sin v \left( -\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) \right]; \\ \tau_{vw} &= -\frac{1}{h \operatorname{ch} u} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sin v} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \frac{\alpha}{h} \left[ -\operatorname{tg} u \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ctg} v \left( \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right]; \quad (6) \\ \tau_{uw} &= -\frac{1}{h \sin v} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} u} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \frac{\alpha}{h} \left[ \operatorname{ctg} v \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \operatorname{th} u \left( \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right].\end{aligned}$$

Чтобы иметь возможность рассмотреть также внутреннюю выточку, имеющую вид сферы, выпишем ещё аналогичные выражения в сферических координатах. Эта система координат дается уравнениями:

$$\begin{aligned}x &= u \cos v; \quad y = u \sin v \cos w; \\ z &= u \sin v \sin w.\end{aligned} \quad (7)$$

( $u = \text{const}$  — сфера,  $v = \text{const}$  — конус,  $w = \text{const}$  — плоскость, про-

ходящая через ось  $x$ ). Получим:

$$h_u = 1; \quad h_v = u; \quad h_w = u \sin v; \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} 2GU &= -\frac{\partial F}{\partial u} + 2\alpha[\Phi_1 \cos v + \sin v(\Phi_2 \cos w + \Phi_3 \sin w)]; \\ 2GV &= -\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial v} + 2\alpha[-\Phi_1 \sin v + \cos v(\Phi_2 \cos w + \\ &\quad + \Phi_3 \sin w)]; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} 2GW &= -\frac{1}{u \sin v} \frac{\partial F}{\partial w} + 2\alpha(-\Phi_2 \sin w + \Phi_3 \cos w); \\ \sigma_u &= -\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + 2\alpha \left[ \cos v \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \right. \\ &\quad \left. + \sin v \left( \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) \right]; \\ \sigma_v &= -\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + \frac{2\alpha}{u} \left[ -\sin v \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + \cos v \left( \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) \right]; \\ \sigma_w &= -\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{u^2 \sin^2 v} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} - \frac{\operatorname{ctg} v}{u^2} \frac{\partial F}{\partial v} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + \\ &\quad + \frac{2\alpha}{u \sin v} \left( -\sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right); \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= 2 \cos v \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \frac{\cos w}{u} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \frac{\sin w}{u} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) + \\ &\quad + 2 \sin v \left( -\frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) - \\ &\quad - \frac{2}{u \sin v} \left( \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} - \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right); \\ \tau_{uv} &= -\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \alpha \cos v \left( \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \right. \\ &\quad \left. + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) + \alpha \sin v \left( -\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \frac{\cos w}{u} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \frac{\sin w}{u} \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right); \\ \tau_{vw} &= -\frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sin v} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \frac{\alpha}{u} \left[ -\frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ctg} v \left( \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right]; \\ \tau_{uw} &= -\frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \alpha \left[ \frac{\operatorname{ctg} v}{u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos w}{u} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \frac{\sin w}{u} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Пусть поверхность внешней выточки очерчена по гиперболоиду  $v_0$ . Тогда компоненты напряжений, действующие на этой поверхности, должны превращаться в нуль, и мы придём к следующим граничным условиям:

$$\sigma_v = 0; \quad \tau_{vv} = 0; \quad \tau_{vw} = 0 \quad \text{для } v = v_0. \quad (12)$$

В случае внутренней выточки поверхность очерчена по эллипсоиду  $u_0$  и граничные условия имеют вид:

$$\sigma_u = 0; \quad \tau_{uv} = 0; \quad \tau_{uw} = 0 \quad \text{для } u = u_0. \quad (13)$$

Дадим ещё выражение некоторых интегралов, встречающихся в последующих задачах. Они получаются из условий равновесия между внешними усилиями, приложенными к какой-нибудь части тела и напряжениями, действующими по любой из поверхностей, с помощью которой мысленно отсекается эта часть тела. Компоненты равнодействующей внешних сил по осям  $x$ ,  $y$  или  $z$  обозначим буквами  $P_x$ ,  $P_y$  и  $P_z$ , а компоненты момента сил относительно координатных осей буквами  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ .

В случае внешней выточки расчленение следует произвести по поверхности  $u = \text{const}$  (площадь сечения обозначим через  $F$ ). Равнодействующая напряжений  $\tau_{uv}$ , действующего на элементарной площадке с ребрами  $h_v dv$  и  $h_w dw$  равна силе величиною  $\tau_{uv} h_v h_w dv dw$  (см. фиг. 46). Чтобы получить  $P_x$ , нужно проинтегрировать в пределах поверхности составляющую предыдущей силы по оси  $x$ . Вместо того, чтобы рассматривать равнодействующую напряжений, можно использовать компоненты её в направлениях  $u$ ,  $v$  и  $w$ , т. е. вместо  $\mu$  подставить последовательно  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Тогда получим:

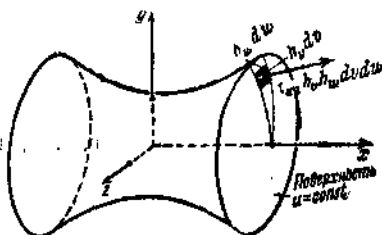
$$P_x = \iint_F \left( \sum_{\mu=u, v, w} \tau_{u\mu} \cos(x, \mu) h_v h_w dv dw \right) \text{ и т. д.} \quad (14)$$

Выражения для  $P_y$  и  $P_z$  получим отсюда циклической перестановкой букв  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Момент  $M_x$  относительно оси  $x$  получается посредством интегрирования моментов составляющих напряжений по осям  $y$  и  $z$  относительно оси  $x$  (плечи моментов соответственно  $z$  и  $y$ ). Если вместо равнодействующей напряжений снова использовать её компоненты в направлениях  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , то получим:

$$M_x = \iint_F \sum_{\mu=u, v, w} \tau_{u\mu} [y \cos(z, \mu) - z \cos(y, \mu)] h_v h_w dv dw \text{ и т. д.} \quad (15)$$

Циклической перестановкой букв  $x$ ,  $y$ ,  $z$  получим далее  $M_y$  и  $M_z$ .



Фиг. 46. К определению силовых потоков в кольцевой внешней выточке.

В случае внутренней выточки расщепление проще всего произвести по поверхности  $x = \text{const}$ . Тогда нужно интегрировать напряжения  $\tau_{xx} (= \sigma_x)$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ , действующие на элемент  $dy dz$ . Из условий равновесия получим интегралы

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \iint_F \tau_{xx} dy dz; \\ M_x &= \iint_F (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dy dz \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и т. д.

Циклической перестановкой подчёркнутых букв из этих выражений получаются все нужные соотношения.

Мы будем теперь предполагать, что из этих шести интегралов только один отличен от нуля. Тогда задача о напряжениях в общем случае распадается на шесть частных задач, которые в совокупности дают напряжённое состояние, вызванное шестью компонентами внешней пространственной системы усилий. Так как мы в дальнейшем будем заниматься телами вращения (ось  $x$  совместим с осью симметрии тела, см. фиг. 45), то компоненты  $P_y$  и  $P_z$  точно так же, как  $M_y$  и  $M_z$ , вызывают в теле одинаковое напряжённое состояние. Число частных решений сокращается поэтому до четырёх (растяжение, изгиб, сдвиг и кручение). Однако перед тем как обратиться к этим задачам, мы должны найти гармонические функции, которые необходимо знать при вычислении напряжений.

## 2. Решение уравнения Лапласа в эллиптических координатах.

Возвратимся снова к уравнению (98) гл. III, 7. Если подставим в него коэффициенты искажения из уравнений (2), то оно, написанное в эллиптических координатах, примет вид:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{1}{\text{ch } u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \text{ch } u \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \sin v \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\sin^2 v} - \frac{1}{\text{ch}^2 u} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} \right] = 0. \quad (17)$$

Функцию  $\Phi$  будем искать в виде произведения трёх функций  $f_1(u)$ ,  $f_2(v)$  и  $f_3(w)$ , каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$\Phi = f_1(u) \cdot f_2(v) \cdot f_3(w). \quad (18)$$

Тогда из  $\frac{h^2 \Delta \Phi}{\Phi} = 0$  следует

$$\frac{1}{f_1 \text{ch } u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \text{ch } u \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \frac{1}{f_2 \sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \sin v \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) + \\ + \frac{1}{f_3} \left( \frac{1}{\sin^2 v} - \frac{1}{\text{ch}^2 u} \right) \frac{\partial^2 f_3}{\partial w^2} = 0. \quad (19)$$

Первый член (19) зависит только от  $u$ , второй — только от  $v$ . Вследствие этого уравнение (19) может быть удовлетворено только тогда, когда третий член состоит из двух слагаемых, из которых одно зависит только от  $u$ , а другое — только от  $v$ . Это возможно лишь при условии  $\frac{1}{f_3} \frac{\partial^2 f_3}{\partial w^2} = \text{const}$ ; постоянную обозначим через  $-n^2$ .

Таким путём уравнение (19) распалось на два слагаемых, одно из которых содержит  $u$ , а другое —  $v$ . Так как их сумма равна нулю, то каждое из них либо равно нулю, либо равно некоторым постоянным, одинаковым по величине, но противоположным по знаку. Эту постоянную обозначим через  $v \cdot (v+1)$ .

Окончательно получим следующие три дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ch} u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \operatorname{ch} u \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \left[ \frac{n^2}{\operatorname{ch}^2 u} - v(v+1) \right] f_1 &= 0; \\ \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \sin v \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) + \left[ -\frac{n^2}{\sin^2 v} + v(v+1) \right] f_2 &= 0; \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial w^2} + n^2 f_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Как хорошо известно, решением третьего уравнения (20) является:  $f_3 = c_n \sin n w + d_n \cos n w$ . Что касается первых двух уравнений, то посредством подстановки либо  $\operatorname{ch} u = \lambda$ , либо  $\sin v = \lambda$  их можно привести к одному и тому же виду:

$$(\lambda^2 - 1) \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda^2} + \left( 2\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} + \left[ \frac{n^2}{\lambda^2} - v(v+1) \right] f(\lambda) = 0, \quad (21)$$

либо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \operatorname{sh} u \frac{\partial}{\partial \lambda} = \sqrt{\lambda^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad \text{или} \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \cos v \frac{\partial}{\partial \lambda} = \sqrt{1 - \lambda^2} \frac{\partial}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение здесь удобнее всего искать в виде степенного ряда. Частное решение, соответствующее показателю  $v$ , ищем в такой форме:

$$N_{n,v}(\lambda) = \lambda^v + a_2 \lambda^{v-2} + a_4 \lambda^{v-4} + a_6 \lambda^{v-6} + \dots \quad (23)$$

Подстановкой в уравнение (21) получим:

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - 1) [v(v-1) \lambda^{v-2} + a_2(v-2)(v-3) \lambda^{v-4} + \\ &+ a_4(v-4)(v-5) \lambda^{v-6} + \dots] + \left( 2\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) [v \lambda^{v-1} + a_2(v-2) \lambda^{v-3} + \\ &+ a_4(v-4) \lambda^{v-5} + \dots] + \left[ \frac{n^2}{\lambda^2} - v(v+1) \right] [\lambda^v + a_2 \lambda^{v-2} + \\ &+ a_4 \lambda^{v-4} + \dots] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$  для определения постоянных  $a_2, a_4, \dots$ , получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} & \{v(v-1) + 2v - v(v+1)\} \lambda^v = 0; \\ & \{-v(v-1) - v + n^2 + a_2[(v-2)(v-3) + 2(v-2) - \\ & \quad - v(v+1)]\} \lambda^{v-2} = 0; \\ & \{a_2[-(v-2)(v-3) - (v-2) + n^2] + a_4[(v-4)(v-5) + \\ & \quad + 2(v-4) - v(v+1)]\} \lambda^{v-4} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

и т. д.

Первое уравнение выполняется тождественно; из второго определяется  $a_2$ , из третьего —  $a_4$  и т. д. Полученные выражения для постоянных  $a_2, a_4, \dots$  подставим в (23); тогда получим основную форму (а) частного решения, соответствующего индексам  $n, v$ :

$$N_{n,v}(\lambda) = \lambda^v - \frac{v^2 - n^2}{2(2v-1)} \lambda^{v-2} + \frac{(v^2 - n^2)[(v-2)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2v-1)(2v-3)} \lambda^{v-4} - \dots \quad (26)$$

Если  $v + |n| = 0, 2, 4, 6, \dots$  (чётные, положительные), то основная форма (а) превращается в конечный ряд.

Для положительных нечётных  $v + |n|$  основная форма (а) представляет бесконечный ряд. Однако с помощью формулы бинома

$$N_{0,1}(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{8} \frac{1}{\lambda^3} + \dots = \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad (27)$$

снова можно основную форму (а) представить в конечном виде, разделив её на этот ряд. Таким путём получим основную форму (б):

$$N_{n,v}(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[ \lambda^{v-1} - \frac{(v-1)^2 - n^2}{2(2v-1)} \lambda^{v-3} + \right. \\ \left. + \frac{[(v-1)^2 - n^2][(v-3)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2v-1)(2v-3)} \lambda^{v-5} - \dots \right], \quad (28)$$

при  $v + |n| = 1, 3, 5, 7, \dots$ , превращающуюся в конечный ряд.

При отрицательных  $v + |n|$ , нужно прибегнуть к помощи функции:

$$N_{0,-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{6} \frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{40} \frac{1}{\lambda^5} + \dots = \operatorname{arccig} \sqrt{\lambda^2 - 1} = \\ = -i \ln \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}} + \frac{\pi}{2}. \quad (29)$$

Тождество этой функции с  $\operatorname{arccig} \sqrt{\lambda^2 - 1}$  легко доказывается посредством дифференцирования. Именно:

$$\frac{d}{d\lambda} [(N_{0,-1}(\lambda))] = -\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^4} - \frac{3}{9\lambda^6} - \dots \quad (30)$$



С другой стороны,

$$\frac{d}{d\lambda}(\operatorname{arccctg} \sqrt{\lambda^2 - 1}) = -\frac{1}{1 + \lambda^2 - 1} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = -\frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}}. \quad (31)$$

Равенство правых частей непосредственно следует из разложения по биному. Эта функция даёт теперь возможность, при отрицательных  $\nu + |n|$ , написать функцию  $N_{n,\nu}(\lambda)$  в конечном виде, именно:

$$N_{n,\nu}(\lambda) = C \{N_{n,-\nu-1}(\lambda) \operatorname{arccctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} + M(\lambda)\}, \quad (32)$$

где  $C$  — постоянная, а  $M(\lambda)$  — степенной ряд, являющийся конечным при  $\nu + |n|$  как чётном, так и нечётном отрицательном (в последнем случае при выделении множителя  $\sqrt{\lambda^2 - 1}$ ). Таким образом приходим ещё к двум основным формам.

При  $\nu + |n| = -2, -4, -6, \dots$  (отрицательные, чётные) получается *основная форма* ( $\gamma$ ):

$$N_{n,\nu}(\lambda) = -\frac{1}{a_{-2\nu}} \left\{ \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[ \lambda^{-\nu-2} + \frac{(\nu+2)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} \lambda^{-\nu-4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[(\nu+2)^2 - n^2][(\nu+4)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2\nu+3)(2\nu+5)} \lambda^{-\nu-6} + \dots \right] \operatorname{arccctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} + \right. \\ \left. + a_2 \lambda^{-\nu-2} + a_4 \lambda^{-\nu-4} + \dots + a_{-2\nu-2} \lambda^{\nu+2} \right\}, \quad (33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -1; \\ a_4 &= \frac{1}{3} - \frac{(\nu+2)^2 - n^2}{2(2\nu+3)}; \\ a_6 &= \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \frac{(\nu+2)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} - \frac{[(\nu+2)^2 - n^2][(\nu+4)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2\nu+3)(2\nu+5)} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

и т. д.

При  $\nu + |n| = -1, -3, -5, \dots$  (отрицательные, нечётные) получается *основная форма* ( $\delta$ ):

$$N_{n,\nu}(\lambda) = -\frac{1}{a_{-2\nu+1}} \left\{ \left[ \lambda^{-\nu-1} + \frac{(\nu+1)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} \lambda^{-\nu-3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[(\nu+1)^2 - n^2][(\nu+3)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2\nu+3)(2\nu+5)} \lambda^{-\nu-5} - \dots \right] \operatorname{arccctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} + \right. \\ \left. + [a_3 \lambda^{-\nu-3} + a_5 \lambda^{-\nu-5} + \dots + a_{-2\nu-1} \lambda^{\nu+1}] \sqrt{\lambda^2 - 1} \right\}, \quad (35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -1; \\ a_5 &= -\frac{2}{3} - \frac{(\nu+1)^2 - n^2}{2(2\nu+3)}; \\ a_7 &= -\frac{8}{15} - \frac{2}{3} \frac{(\nu+1)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} - \frac{[(\nu+1)^2 - n^2][(\nu+3)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2\nu+3)(2\nu+5)} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

и т. д.

Например:

$$\left. \begin{aligned} N_{0,-2}(\lambda) &= -3 \{ \sqrt{\lambda^2 - 1} \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} - 1 \}; \\ N_{0,-3}(\lambda) &= \frac{45}{4} \left\{ \left[ \lambda^2 - \frac{2}{3} \right] \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} - \sqrt{\lambda^2 - 1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

При составлении общего решения уравнения Лапласа следует иметь в виду, что при замене  $v$  на  $-(v+1)$  постоянная  $v(v+1)$ , входящая в (20), не меняет своего значения; поэтому такая замена не даёт новых решений. Важно ещё отметить, что случаю  $n=0$ ,  $v=0$  соответствует решение

$$\begin{aligned} d_0 N_{00}(chu) [a_{00} N_{00}(\sin v) + b_{00} N_{0,-1}(\sin v)] = \\ = d_0 \left[ a_{00} + b_{00} \left( -i \ln \frac{\sin v}{1 + \cos v} + \frac{\pi}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

которое не остаётся конечным при  $v=0$ . Добавляя решение Лапласа  $\ln(y^2 + z^2)$ , можно однако при надлежащем подборе постоянных получить решение, остающееся при  $v=0$  конечным.

		Глубокая внешняя выточка в теле вращения				Мелкая внутренняя выточка в теле вращения			
		$\Phi_0$		$\Phi_1$		$\Phi_2$		$\Phi_3$	
		I	II	I	II	I	II	I	II
Растяжение	$n$	0		0				0	
	$v$	0	0 -2	-1				2	-1 -3
Изгиб	$n$	1		1		0		1	
	$v$	-1	-1 -3	-2	-2			3	-2 -4
Сдвиг	$n$	1		1		0		1	
	$v$	0	0 -2	-1	-1			(4) 2	-3 (5)
Кручение	$n$				1	1			
	$v$				-2	-2			
I соответствует $b_{n,v}=0$ ;					II соответствует $a_{n,v}=0$ .				

Тогда получим:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} N_{n,v} (\operatorname{ch} u) [a_{n,v} N_{n,v} (\sin v) + b_{n,v} N_{n,-v-1} (\sin v)] \times \\ \times [c_n \sin n\omega + d_n \cos n\omega] + a_{0,0} (\ln \operatorname{ch} u + \ln \sin v). \quad (38)$$

Очень часто встречающуюся функцию  $N_{0,-1} (\operatorname{ch} u) = \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} u)$  ради краткости мы будем обозначать буквой  $T$ .

Чтобы иметь возможность изучить случай сферической внутренней выточки, необходимо рассмотреть также гармонические функции в полярных координатах. Посредством такого же хода рассуждений, что и выше, и имея в виду (7) и (8), мы получим уравнение Лапласа в виде:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{u^2} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( u^2 \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \sin v \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin^2 v} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} \right] = 0, \quad (39)$$

а его общее решение в виде:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} u^n [a_{n,v} N_{n,v} (\sin v) + b_{n,v} N_{n,-v-1} (\sin v)] \times \\ \times [c_n \sin n\omega + d_n \cos n\omega] + a_{0,0} (\ln u + \ln \sin v). \quad (40)$$

На стр. 98 дана таблица значений  $N_{n,v}$ , которые приходится брать в рассматриваемых ниже задачах.

### 3. Глубокая внешняя выточка на теле вращения.

**А. Чистое растяжение.** При разыскании надлежащих функций необходимо прежде всего иметь ясность о характерных свойствах исследуемого напряжённого состояния. Целесообразно при этом исходить из интегралов (14) и (15). При чистом растяжении равны нулю все интегралы за исключением интеграла, дающего  $P_{xx}$ . Простоты ради мы здесь будем писать  $P$  вместо  $P_{xx}$ . Выражение (14) напомним в развёрнутом виде, а затем используем формулы (18) гл. III, 3 для направляющих косинусов. Тогда получим:

$$P = \int_F \int \left[ \frac{\tau_{uu}}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\tau_{uv}}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\tau_{u\omega}}{h_\omega} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right] h_v h_\omega dv d\omega, \quad (41)$$

что, согласно соотношений (1) и (2) для нашей координатной системы, преобразовывается к виду:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [\tau_{uu} \operatorname{ch} u \cos v - \tau_{uv} \operatorname{sh} u \sin v] \operatorname{ch} u \sin v dv d\omega. \quad (42)$$

Координату  $u$ , которая соответствует поверхности рассеечения  $u = \text{const}$  и по которой мы будем распространять интеграл, можно выбирать произвольно; интеграл должен иметь постоянное значение, не зависящее от  $u$ . Например, мы можем считать  $u$  очень большим ( $\rightarrow \infty$ ). Тогда  $\text{sh } u = \text{ch } u = \frac{1}{2} e^u = h$ , и равенство (42) переходит в

$$P = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} e^{2u} (\sigma_u \cos v - \tau_{uv} \sin v) \sin v \, dv \, d\omega. \quad (43)$$

Таким образом,  $u$  в подинтегральной функции входит только в виде множителя  $e^{2u}$ . При этом условии интеграл может не зависеть от  $u$  только тогда, когда напряжения при большой величине  $u$  будут пропорциональны  $\frac{1}{e^{2u}}$ ; но это произойдет только лишь

в том случае, если функции, через которые выражаются напряжения, имеют для  $v$  следующие наивысшие значения:  $v = 0$  для  $\Phi_0$  и  $v = -1$  для  $\Phi_1$ . Кроме того, ещё возможны меньшие значения  $v$ ; для нас, однако, здесь будет достаточным взять значение  $v = -2$  для  $\Phi_0$ .

В силу условий осевой симметрии, которая имеет место как для напряжений, так и для деформаций, в решении не должна фигурировать координата  $\omega$ . Отсюда следует, что  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  можно считать равными нулю. В  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  должно далее положить  $n = 0$ .

В слагаемых, зависящих от  $v$ , нужно считать равной нулю или  $a_{n,v}$ , или  $b_{n,v}$ . При этом нужно руководствоваться требованием, чтобы внутри тела и в частности при  $v = 0$  рассматриваемые решения оставались конечными. Избегнуть бесконечных решений возможно также путём надлежащего наложения обоих решений. Здесь для  $n = 0$ ,  $v = 0$ , согласно (26) (основная форма  $\alpha$ ) и (29), получается:

$$\left[ a_{0,0} + b_{0,0} \left( -i \ln \frac{\sin v}{1 + \cos v} + \frac{\pi}{2} \right) \right] d_0 + a_{0,0} (\ln \text{ch } u + \ln \sin v). \quad (44)$$

Выбором постоянных  $b_{0,0} = -\frac{2}{\pi} a_{0,0}$ ,  $d_0 = i \frac{\pi}{2}$  отсюда можно получить функцию

$$a_{0,0} [\ln \text{ch } u + \ln (1 + \cos v)], \quad (45)$$

которая при  $v = 0$  остаётся конечной.

Для  $v = -2$  и для  $v = -1$  можно избежать бесконечности, принимая соответствующие  $a_{n,v}$  равными нулю. Таким образом получаем следующие выражения, дающие решение задачи:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= A [\ln \text{ch } u + \ln (1 + \cos v)] + B (T \text{sh } u - 1) \cos v; \\ \Phi_1 &= CT; \Phi_2 = 0; \Phi_3 = 0; T = \arctg (\text{sh } u). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

В соответствии с (58) гл. III, 6 для функции напряжений будем иметь выражение:

$$F = A [\ln \operatorname{ch} u + \ln (1 + \cos v)] + B (T \operatorname{sh} u - 1) \cos v + CT \operatorname{sh} u \cdot \cos v. \quad (47)$$

Найдём теперь  $\Delta F$ , необходимое при вычислении нормальных напряжений. Из (5) получаем:

$$\Delta F = -\frac{2 C \cos v}{h^2}. \quad (48)$$

Далее, необходимо рассмотреть особо выражения, содержащие  $\frac{1}{h^4}$  в уравнениях (4) и (6). При этом для краткости вводится обозначение  $\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v = \operatorname{ch}^2 u - \sin^2 v = h^2$ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h^4} \left( \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right) &= \\ &= \frac{1}{h^2} [A + (B + C) (T \operatorname{sh} u - 1) \cos v] + \\ &\quad + \frac{\cos v}{h^4} [-A + B + C \cos^2 v]; \\ \frac{1}{h^4} \left( \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \frac{\partial F}{\partial v} - \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial u} \right) &= \\ &= \frac{\sin v}{h^2} \left[ -A \frac{\operatorname{th} u}{1 + \cos v} + B (-T \operatorname{ch} u + \operatorname{th} u) - \right. \\ &\quad \left. - CT \operatorname{ch} u \right] + \frac{\sin v}{h^4} \operatorname{th} u [-A + B + C \cos^2 v]. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Выражения (4) и (6) не содержат в себе более никаких неизвестных. Получаем следующие выражения для нормальных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{h^2} \left\{ A \operatorname{th}^2 u + B \frac{\cos v}{\operatorname{ch}^2 u} + C \left( -2 - \alpha + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \right) \cos v \right\} + \\ &\quad + \frac{\cos v}{h^4} [-A + B + C \cos^2 v]; \\ \sigma_v &= \frac{1}{h^2} \left\{ -A \frac{\cos v}{1 + \cos v} + (\alpha - 1) C \cos v \right\} + \\ &\quad + \frac{\cos v}{h^4} [A - B - C \cos^2 v]; \\ \sigma_w &= \frac{1}{h^2} \left\{ A \left( -\operatorname{th}^2 u + \frac{\cos v}{1 + \cos v} \right) - B \frac{\cos v}{\operatorname{ch}^2 u} + \right. \\ &\quad \left. + C \left( \alpha - 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \right) \cos v \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Касательные напряжения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \frac{\operatorname{th} u \sin v}{h^2} \left\{ -\frac{A}{1 + \cos v} + (\alpha - 1) C + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h^2} (-A + B + C \cos^2 v) \right\}; \tau_{vw} = 0; \tau_{uw} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Остается определить произвольные постоянные из граничных условий (12). Так как в выражениях для  $\sigma_v$  и  $\tau_{uv}$  коэффициенты членов, которые содержат  $u$ , должны обращаться в нуль при  $v = v_0$ , то мы получим четыре уравнения. Но третье уравнение является следствием первого, а второе следствием четвертого и, значит, всего имеем два уравнения, из которых найдём

$$A = (\alpha - 1) (1 + \cos v_0) C; \quad B = A - C \cos^2 v_0. \quad (52)$$

Для определения постоянной  $C$  теперь мы перейдём к определению равнодействующей усилий, действующих по сечению, проходящему через выточку. Для этого воспользуемся интегралом (42). Если принять во внимание соотношения (52) то, действительно можно показать, что этот интеграл имеет постоянное значение для всякого  $u$  и от  $u$  не зависит. Однако эти вычисления мы здесь опустим и для простоты будем предполагать  $u = 0$ , т. е. интегрировать будем по наиболее узкому поперечному сечению тела. Для него  $h = \cos v$  и (42) принимает значение:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\sigma_u)_{u=0} \sin v \cos v \, dv \, d\omega = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{B - \alpha C}{\cos v} + \frac{B - A}{\cos^3 v} \right] \sin v \cos v \, dv \, d\omega = \\ &= 2\pi \left[ (B - \alpha C) (1 - \cos v_0) + (B - A) \left( \frac{1}{\cos v_0} - 1 \right) \right]; \quad (53) \end{aligned}$$

или, согласно (52)

$$P = 2\pi C (1 - \cos v_0) [-1 + (\alpha - 2) \cos v_0 - \cos^2 v_0]. \quad (54)$$

Вследствие безразмерности нашей координатной системы вместо  $P$  мы должны ввести некоторую величину, имеющую размерность напряжения; в качестве последнего возьмём номинальное напряжение, равное среднему напряжению по наиболее узкому поперечному сечению (радиуса  $a$ ):

$$\frac{P}{\pi a^2} = p. \quad (55)$$

Радиус  $a$  наиболее узкого поперечного сечения согласно (1) равен

$$a = (\sqrt{y^2 + z^2})_{u=0, v=v_0} = \sin v_0, \quad (56)$$

так что

$$P = p \pi \sin^2 v_0 = p \pi (1 - \cos v_0) (1 + \cos v_0); \quad (57)$$



формулу для наибольшего напряжения

$$\frac{1}{\rho} (\sigma_u)_{u=0} = \frac{\sigma_1}{\rho} = \frac{1}{N} \left[ \frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \right. \\ \left. + \left(0,5 + \frac{1}{m}\right) \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1\right) \right], \quad (59)$$

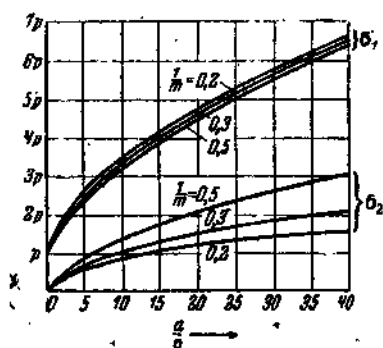
а для наибольшей величины кольцевого нормального напряжения формулу:

$$\frac{1}{\rho} (\sigma_{\theta})_{u=0} = \frac{\sigma_2}{\rho} = \frac{1}{N} \frac{a}{\rho} \left[ \frac{1}{m} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 0,5 \right], \quad (60)$$

где

$$N = \frac{a}{\rho} + \frac{2}{m} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 2. \quad (61)$$

Точная зависимость величин наибольших напряжений от кривизны виточки графически представлена на фиг. 48.



Фиг. 48. Наибольшие напряжения в глубоких кольцевых внешних виточках при растяжении.

**В. Чистый изгиб.** Для решения задачи о напряженном состоянии при чистом изгибе возвратимся снова к интегралам (14) и (15), характеризующим силовой поток, проходящий сквозь поперечное сечение. Мы предположим, что момент действует в плоскости  $xu$  и в соответствии с этим будем считать, что все интегралы, за исключением того, который определяет  $M_x$ , равны нулю. Вместо  $M_x$  будем теперь писать  $M$ . Применяя уже много раз использованные выражения для направляющих косинусов, получим:

$$M = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\sigma_u}{h_u} \left( y \frac{\partial x}{\partial u} - x \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\tau_{uv}}{h_v} \left( y \frac{\partial x}{\partial v} - x \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\tau_{uw}}{h_w} \left( y \frac{\partial x}{\partial w} - x \frac{\partial y}{\partial w} \right) \right] h_v h_w dv dw, \quad (62)$$

или, благодаря (1) и (2),

$$M = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} \left[ \sigma_u \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \omega - \tau_{uv} \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \cos \omega + \right. \\ \left. + \tau_{uw} h \operatorname{sh} u \cos \vartheta \sin \omega \right] \operatorname{ch} u \sin \vartheta dv d\omega, \quad (63)$$



На далёком расстоянии от наиболее узкого поперечного сечения

$$\operatorname{sh} u = \operatorname{ch} u = \frac{1}{2} e^u = h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \text{ Тогда подинтегральная}$$

функция содержит множитель  $e^{su}$ . Так как интеграл не должен зависеть от  $u$ , то для больших значений  $u$  напряжения должны быть обратно пропорциональными  $e^{su}$ . Из этих соображений заключаем о наивысшем значении  $v$ , которое имеют слагаемые, зависящие от  $u$ , — именно:  $v = -1$  для  $\Phi_0$  и  $v = -2$  для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Кроме того, можно использовать функции с меньшими значениями  $v$ . Далее, из равенства нулю остальных интегралов можно ожидать, что выражения  $\sigma_n$  и  $\tau_{nv}$  содержат множителем  $\cos w$ , т. е. что  $c_n = 0$  и в  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  следует брать только  $n = +1$ , а в  $\Phi_2$  — только  $n = 0$ .

Так как внутри области, в частности при  $v = 0$ , решение должно оставаться конечным, то  $a_n$  следует считать равными нулю. Исключение представляет функция со значением  $v = -1$ ,  $n = 1$ , а именно:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} u} \left[ a_{1,-1} \frac{1}{\sin v} + b_{1,-1} i \operatorname{ctg} v \right] d_1 \cos w.$$

Оба слагаемые этого выражения при  $v = 0$  превращаются в бесконечность. Но если мы положим  $a_{1,-1} = -i b_{1,-1}$ , то получим с точностью до постоянного множителя, выражение

$$\frac{\cos w}{\operatorname{ch} u} \frac{1 - \cos v}{\sin v} = \frac{\cos w}{\operatorname{ch} u} \frac{\sin v}{1 + \cos v}, \quad (64)$$

остающееся конечным.

Мы получим решение задачи, если к вышеуказанным функциям добавим ещё функцию со значением  $v = -3$  и  $n = 1$  для  $\Phi_0$ . Тогда определим следующие выражения <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= A \frac{\sin v \cos w}{\operatorname{ch} u (1 + \cos v)} + \\ &\quad + B \left[ \operatorname{ch} u (T \operatorname{sh} u - 1) + \frac{1}{3 \operatorname{ch} u} \right] \sin v \cos v \cos w, \\ \Phi_1 &= C (T \operatorname{ch} u - \operatorname{th} u) \sin v \cos w; \\ \Phi_2 &= D (T \operatorname{sh} u - 1) \cos v, \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Функция напряжений приобретает вид:

$$F = \sin v \cos v \cos w \left[ \frac{A}{\operatorname{ch} u \cos v (1 + \cos v)} + \right. \\ \left. + (B + C + D) \operatorname{ch} u (T \operatorname{sh} u - 1) + \left( \frac{B}{3} + C \right) \frac{1}{\operatorname{ch} u} \right]. \quad (66)$$

<sup>1)</sup> Neuberger H., Ing.-Arch., t. 6 (1935), стр. 138

Опуская промежуточные вычисления, для компонентов напряжений окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 \sigma_u &= \frac{\sin v \cos v \cos w}{h^2} \left\{ -2 \operatorname{ch} u (T \operatorname{sh} u - 1) [B + (1 - \alpha)(C + D)] + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\operatorname{ch} u} \left[ -\frac{2A}{\cos v (1 + \cos v)} - \frac{2}{3} B - 6C + (2 + \alpha) D \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{\operatorname{ch}^3 u} \left[ \frac{2A}{\cos v (1 + \cos v)} + \frac{2}{3} B + 2C \right] + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{h^2 \operatorname{ch} u} \left( A + \frac{2}{3} B + 2C \cos^2 v + D \sin^2 v \right) \right\}; \\
 \sigma_v &= \frac{\sin v \cos v \cos w}{h^2} \left\{ 2 \operatorname{ch} u (T \operatorname{sh} u - 1) [B + (1 - \alpha)(C + D)] + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\operatorname{ch} u} \left[ \frac{A}{(1 + \cos v)^2} + \frac{2}{3} B + (1 - \alpha) D \right] - \\
 &\quad \left. - \frac{1}{h^2 \operatorname{ch} u} \left( A + \frac{2}{3} B + 2C \cos^2 v + D \sin^2 v \right) \right\}; \\
 \sigma_w &= \frac{\sin v \cos v \cos w}{h^2} \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} u} \left[ \frac{A(2 + \cos v)}{\cos v (1 + \cos v)^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. + (-2 + 2\alpha) C + (1 - \alpha) D \right] + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{ch}^3 u} \left( -\frac{2A}{\cos v (1 + \cos v)} - \frac{2}{3} B - 2C \right) \right\}; \\
 \tau_{uv} &= \frac{\operatorname{sh} u \cos w}{h^2} \left\{ \left[ (T \operatorname{sh} u - 1)(1 - 2 \cos^2 v) - \right. \right. \\
 &\quad \left. - \frac{T \cos^2 v}{\operatorname{sh} u} \right] [B + (1 - \alpha)(C + D)] + \frac{\sin^2 v}{\operatorname{ch}^2 u} \left[ \frac{A}{(1 + \cos v)^2} - \frac{B}{3} + \right. \\
 &\quad \left. + (-1 + \alpha) C \right] + \frac{1}{h^2} \left( A + \frac{2}{3} B + 2C \cos^2 v + D \sin^2 v \right) \right\}; \\
 \tau_{vw} &= \frac{\sin v \sin w}{h} \left\{ - (T \operatorname{sh} u - 1) [B + (1 - \alpha)(C + D)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \left[ \frac{A}{(1 + \cos v)^2} - \frac{B}{3} + (-1 + \alpha) C \right] \right\}; \\
 \tau_{uw} &= \frac{\cos v \sin w}{h} \left\{ (T \operatorname{ch} u - \operatorname{th} u) [B + (1 - \alpha)(C + D)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^3 u} \left( -\frac{2A}{\cos v (1 + \cos v)} - \frac{2}{3} B - 2C \right) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

$$\tag{68}$$

Из граничных условий (12) для постоянных  $A, B, C, D$  непосредственно получим восемь уравнений, так как коэффициенты в каждом из слагаемых, содержащих в каком-нибудь виде переменную  $u$  при  $v = v_0$ , должны быть равны нулю. Некоторые из этих уравнений оказываются тождествами и вследствие этого количество их умень-

шается до трёх, из которых находим:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{D}{N_1} 2\alpha (1-\alpha) (1+\cos v_0)^3; \\ B &= -(1-\alpha)(C+D); \\ C &= \frac{D}{N_1} [-3\alpha + 2(1-\alpha)\cos v_0 + (4-\alpha)\cos^2 v_0], \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

где

$$N_1 = 2 \cos v_0 [2(1-\alpha) + (4-\alpha)\cos v_0].$$

Постоянную  $D$  получим из интеграла (63), причём в нём целесообразно положить  $u=0$ . В результате имеем:

$$\frac{D}{N_1} = \frac{3M}{\pi(1-\cos v_0)^2 2\alpha[6+4(4-\alpha)\cos v_0+2(5-2\alpha)\cos^2 v_0+(4-\alpha)\cos^3 v_0]}. \quad (70)$$

Номинальное напряжение в этом случае вычисляется по элементарной формуле изгиба:

$$\rho = \frac{4M}{\pi\sigma_n^3} = \sigma_n. \quad (71)$$

Применяя формулу (56) и вводя кривизну у дна выточки  $\frac{a}{\rho} = \operatorname{tg}^2 v_0$ , получим окончательно следующую формулу для наибольшего напряжения при изгибе, возникающего у дна выточки:

$$\sigma_1 = (\sigma_u)_{\substack{u=0 \\ v=v_0 \\ \varphi=0}} = \frac{\rho}{N} \frac{3}{4} \left( \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right) \left[ 3 \frac{a}{\rho} - \left( 1 - \frac{2}{m} \right) \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 4 + \frac{1}{m} \right], \quad (72)$$

где

$$N = 3 \left( \frac{a}{\rho} + 1 \right) + \left( 1 + \frac{4}{m} \right) \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \frac{1 + \frac{1}{m}}{1 + \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}. \quad (73)$$

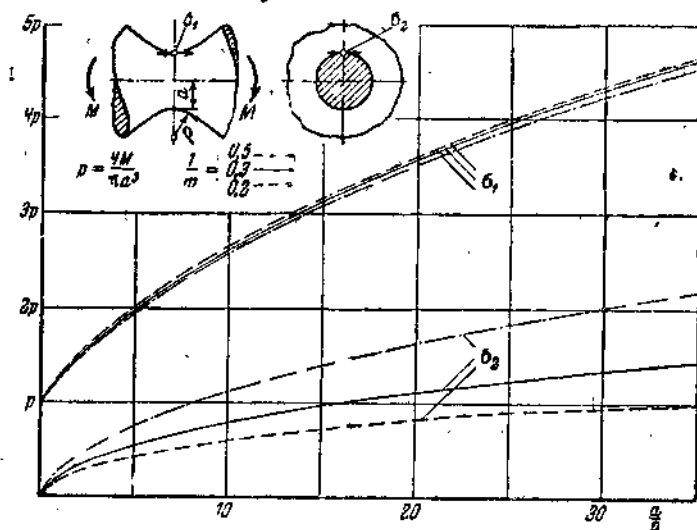
Точно так же наибольшая величина нормального напряжения  $\sigma_w$ , возникающая у дна выточки, вычисляется по формуле:

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{\substack{u=0 \\ v=v_0 \\ \varphi=0}} = \frac{\rho}{N} \frac{3}{4} \frac{a}{\rho} \left[ \frac{3}{m} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 + \frac{1}{m} \right]. \quad (74)$$

На фиг. 49 показано распределение напряжений для  $\frac{a}{\rho} = 8$  и  $\frac{1}{m} = 0,3$ . В левой части фигуры, внизу, дан график распределения напряжения по контуру выточки. Этот график является характерным для закона затухания. В верхней части показано распределение напряжений по наиболее узкому поперечному сечению. Пунктирная



При очень больших значениях  $u$  в подинтегральной функции появляется множитель  $e^{2u}$  и, следовательно, при больших  $u$  напряжения должны быть обратно пропорциональными величине  $e^{2u}$ . Отсюда для наивысших значений  $v$  получается следующее:  $v=0$  для  $\Phi_0$  и  $v=-1$



Фиг. 50. Наибольшие напряжения в глубоких внешних кольцевых выточках при изгибе.

для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . В остальном остаётся справедливым сказанное при решении предыдущей задачи, т. е.  $c_n=0$ ,  $n=1$  для  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ , а  $n=0$  для  $\Phi_2$ . Для устранения бесконечно больших значений коэффициенты  $a_n$ , опять нужно считать равными нулю. Исключение представляет случай  $v=0$ ,  $n=1$ , для которого получаем функцию вида:

$$\text{th } u \left[ a_{1,0} i \text{ctg } v + b_{1,0} \frac{1}{\sin v} \right] a_1 \cos w.$$

Оба слагаемые этой функции при  $v=0$  превращаются в бесконечность. Но если положить  $a_{1,0} i = -b_{1,0}$  то, с точностью до постоянного множителя, получим пригодное решение:

$$\text{th } u \frac{1 - \cos v}{\sin v} \cos w = \text{th } u \frac{\sin v}{1 + \cos v} \cos w. \quad (76)$$

Если к вышеупомянутым функциям добавим ещё функцию с параметром  $v=-2$ ,  $n=1$  для  $\Phi_0$ , то удастся получить строгое решение задачи. Мы будем иметь следующие выражения для функций:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= A \text{th } u \frac{\sin v \cos w}{1 + \cos v} + B (T \text{ch } u - \text{th } u) \sin v \cos w; \\ \Phi_1 &= C \frac{\sin v \cos w}{\text{ch } u (1 + \cos v)}; \quad \Phi_2 = DT; \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

По ним находим функцию напряжений:

$$F = \sin v \cos w \left[ \frac{A \operatorname{th} u}{1 + \cos v} + B (\operatorname{Th} u - \operatorname{th} u) + C \frac{\operatorname{th} u \cos v}{1 + \cos v} + D \operatorname{Th} u \right]. \quad (78)$$

Минус промежуточные выкладки, для напряжений получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\sin v \cos w}{h^2} \operatorname{th} u \left[ C \left( -2 - \alpha + \frac{2\alpha}{1 + \cos v} \right) + D(-2 - \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \left( \frac{2A}{1 + \cos v} - 2B + \frac{2C \cos v}{1 + \cos v} \right) + \frac{1}{h^2} \left( A - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2B + C \cos^2 v - D \sin^2 v \right) \right]; \\ \sigma_v &= \frac{\sin v \cos w}{h^2} \operatorname{th} u \left[ -\frac{A}{(1 + \cos v)^2} + C \left( -1 + \alpha - \frac{2\alpha}{1 + \cos v} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{(1 + \cos v)^2} \right) + D(-1 + \alpha) - \frac{1}{h^2} \left( A - 2B + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C \cos^2 v - D \sin^2 v \right) \right]; \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \sigma_w &= \frac{\sin v \cos w}{h^2} \operatorname{th} u \left[ \frac{A}{(1 + \cos v)^2} + C \left( -1 + \alpha - \frac{1}{(1 + \cos v)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D(-1 + \alpha) - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \left( \frac{2A}{1 + \cos v} + 2B + \frac{2C \cos v}{1 + \cos v} \right) \right]; \\ \tau_{uv} &= \frac{\cos w}{h^2} \left\{ \frac{A}{1 + \cos v} + C \left[ (1 - \alpha) \cos v - 2\alpha - \frac{1 + \alpha}{1 + \cos v} \right] + \right. \\ &\quad \left. + D(1 - \alpha) \cos v + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \left[ -A \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C \left( \alpha \cos v - 1 - \alpha + \frac{2}{1 + \cos v} \right) \right] - \frac{\cos v}{h^2} \left( A - 2B + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C \cos^2 v - D \sin^2 v \right) \right\}; \end{aligned} \quad (80)$$

$$\tau_{vw} = \frac{\operatorname{sh} u \sin v \sin w}{h \operatorname{ch}^2 u (1 + \cos v)^2} \left[ A + C(-1 + \alpha + \alpha \cos v) \right];$$

$$\begin{aligned} \tau_{uw} &= \frac{\sin w}{h \operatorname{ch} u} \left[ -\frac{A}{1 + \cos v} - \frac{C(1 + \alpha) \cos v}{1 + \cos v} + D(-1 + \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \left( \frac{2A}{1 + \cos v} - 2B + 2C \frac{\cos v}{1 + \cos v} \right) \right]. \end{aligned}$$

Для четырёх содержащихся в решении постоянных из граничных условий получим сначала шесть уравнений. Но их число уменьшается

до трёх, из которых найдём:

$$\left. \begin{aligned} A &= C[1 - \alpha - \alpha \cos v_0], \\ B &= \frac{C}{2} \left[ \frac{1}{1-\alpha} + 1 - \alpha + \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{1-\alpha} \cos v_0 \right], \\ D &= C \left[ -1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1 + \cos v_0)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Постоянная  $C$  определяется затем из интеграла (75), где величину  $u$  целесообразно считать равной нулю. В качестве номинального напряжения возьмём среднее касательное напряжение по наиболее узкому поперечному сечению, именно:

$$p = \frac{V}{\pi a^2} = \tau_n. \quad (82)$$

Тогда, с учётом (56), будем иметь:

$$C = \frac{p(1-\alpha)(1 + \cos v_0)^2}{\alpha(1 - \cos v_0)[2 + (2-\alpha) \cos v_0]}. \quad (83)$$

Интересно отметить, что наибольшее касательное напряжение возникает не в сечении  $w$ , а в сечении  $w = \frac{\pi}{2}$ . Обозначим это напряжение через  $\tau_1$  и с помощью (68), IV, получим:

$$\tau_1 = (\tau_{uv})_{u=0} = p \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{\rho} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) \left(\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1\right)}{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \frac{1}{m}}, \quad (84)$$

$v = v_0$   
 $w = \frac{\pi}{2}$

В сечении  $w = 0$  существует только лишь относительный максимум  $\tau_2$  касательного напряжения  $\tau_{uv}$ , определяемого уравнением:

$$(\tau_{uv})_{u=0} = \frac{\alpha C}{(1-\alpha)(1 + \cos v_0)} \left[ \frac{1 + (1-\alpha) \cos v_0}{\cos v} - \frac{c \sin^2 v_0}{\cos^3 v} - \frac{(1-\alpha) \cos v_0 (1 + \cos v_0)}{\cos v (1 + \cos v)} \right]. \quad (85)$$

Для определения точного положения этого максимума несколько упростим сначала выражение (85), положив в нём  $\alpha = 1$  (и значит,  $m = 2$ ). Тогда:

$$(\tau_{uv})_{u=0} = p \frac{1 + \cos v_0}{(1 - \cos v_0)(2 + \cos v_0)} \frac{\cos^2 v - \cos^2 v_0}{\cos^3 v}. \quad (86)$$

$w = 0$

В этом последнем выражении мы узнаём ту же самую зависимость от  $v$ , которая была установлена в соответствующей плоской

задаче [см. IV, (94)]. Поэтому максимум  $\tau_2$  лежит в том же самом месте, как и при плоском напряжённом состоянии:

$$\cos v = \pm \sqrt{3} \cos v_0; \quad y = a \sqrt{\frac{\frac{a}{\rho} - 2}{\frac{a}{\rho}}}. \quad (87)$$

Если выражение (85) исследовать при других значениях постоянной  $a$ , то окажется, что положение максимума  $\tau_2$  с достаточной точностью можно считать неизменным и совпадающим с предыдущим, определённым уравнениями (87). Для вычисления величины  $\tau_2$  в уравнении (85) положим поэтому  $\cos v = \sqrt{3} \cos v_0$ ; получим:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= (\tau_{uv})_{u=0} = \dots \\ &\quad \cos v = \sqrt{3} \cos v_0, \\ &\quad w = 0 \\ &= \rho \frac{\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \left(\frac{a}{\rho} + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 2\right)}{3 \sqrt{3} \frac{a}{\rho} \left(\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \frac{1}{m}\right)} \left[ 1 - \frac{3 \left(1 - \frac{2}{m}\right) (\sqrt{3} - 1)}{2 \left(\frac{a}{\rho} + \sqrt{3 \left(\frac{a}{\rho} + 1\right)} + 1\right)} \right]. \end{aligned} \quad (88)$$

При  $\frac{a}{\rho} \leq 2$  наибольшее напряжение  $\tau_2$  имеет место на оси ( $v = 0$ ), а величина его равна

$$\tau_2 = (\tau_{uv})_{u=0} = \rho \frac{\frac{a}{\rho} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right) \left(\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1\right)}{2 \left(\frac{a}{\rho} + \frac{1}{m} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1\right)}. \quad (89)$$

Далее, в сечении  $w = 0$ , в точке, очень близкой к дну выточки и лежащей на её поверхности, напряжение  $\sigma_u$  достигает максимума. Для этого напряжения сначала получаем выражение:

$$(\sigma_u)_{v=v_0} = \frac{\alpha C \sin v_0}{(\alpha - 1)(1 + \cos v_0)} \frac{\operatorname{th} u}{h^2} \left[ 4 - \alpha - (2 - \alpha) \frac{\sin^2 v_0}{\operatorname{ch}^2 u} \right]. \quad (90)$$

Более точное исследование показывает также и здесь, что расстояние от точки, где возникает  $\sigma_1$ , до наиболее узкого поперечного сечения можно с достаточной точностью определять по той же самой формуле, как и при плоском напряжённом состоянии [ср. гл. IV, формулу (92)], а именно:

$$\operatorname{sh} u = \pm \cos v_0, \quad x = \frac{a}{\sqrt{\frac{\alpha}{\rho} \left(\frac{a}{\rho} + 1\right)}}. \quad (91)$$



Если подставим эти значения в (90), то, после небольших преобразований, получим:

$$\sigma_1 = (\sigma_{10})_{\text{sh } \alpha = \cos v_0} = p \frac{\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \left(\frac{a}{\rho} + 2\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1 + 2}\right) \left(\frac{a}{\rho} + 2 + \frac{2}{m}\right)}{2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \left(\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1 + \frac{1}{m}}\right) \left(\frac{a}{\rho} + 2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (92)$$

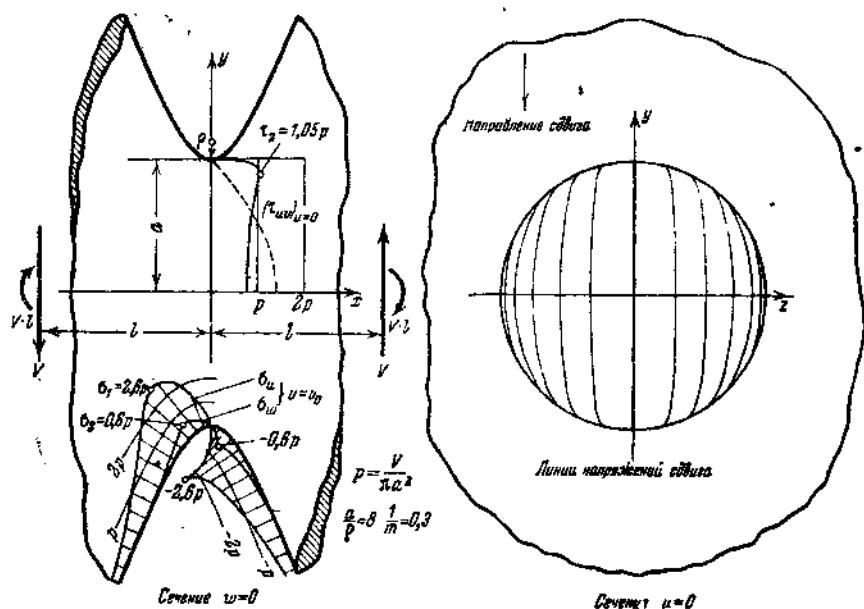
$v = v_0$   
 $w = 0$

Кольцевое нормальное напряжение достигает своего наибольшего значения в той же самой точке и вычисляется по формуле:

$$\sigma_2 = (\sigma_{10})_{\text{sh } \alpha = \cos v_0} = p \frac{\frac{1}{m} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left(\frac{a}{\rho} + 2\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1 + 2}\right) \left(\frac{a}{\rho} + 1\right)}{2 \left(\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1 + \frac{1}{m}}\right) \left(\frac{a}{\rho} + 2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (93)$$

$v = v_0$   
 $w = 0$

На фиг. 51 показано распределение напряжений для  $\frac{a}{\rho} = 8$ ,  $\frac{1}{m} = 0,3$  в меридиональном сечении, проходящем через силу  $V$ . Внизу,

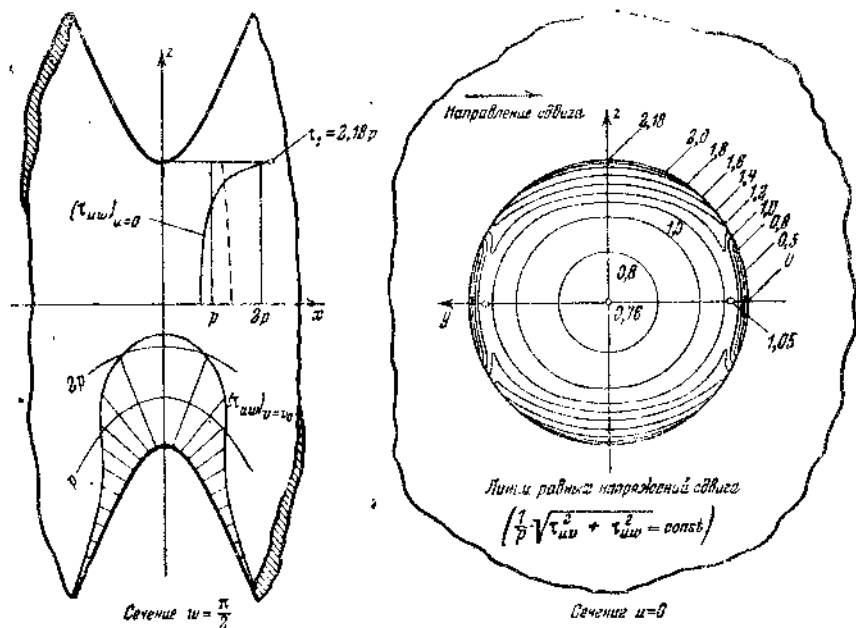


Фиг. 51. Глубокая внешняя кольцевая выточка при сдвиге; слева меридиональное сечение, проведенное через силу  $V$ , и эпюра напряжений; справа поперечное сечение и линии напряжений.

налево, мы видим графики распределения напряжений на поверхности выточки. Они достигают своего наибольшего значения в непосредственной окрестности у дна выточки. В наиболее узком поперечном се-

чении преобладающее значение имеет касательное напряжение; непосредственно около поверхности выточки оно достигает своего наибольшего значения. Пунктирная линия соответствует случаю  $\frac{\sigma}{\rho} = 0$ . Направо начерчены линии касательных напряжений в поперечном сечении. Они располагаются по преимуществу параллельно направлению силы  $V$ .

На фиг. 52 для той же самой выточки показано меридиональное сечение, перпендикулярное направлению силы. Касательное напря-



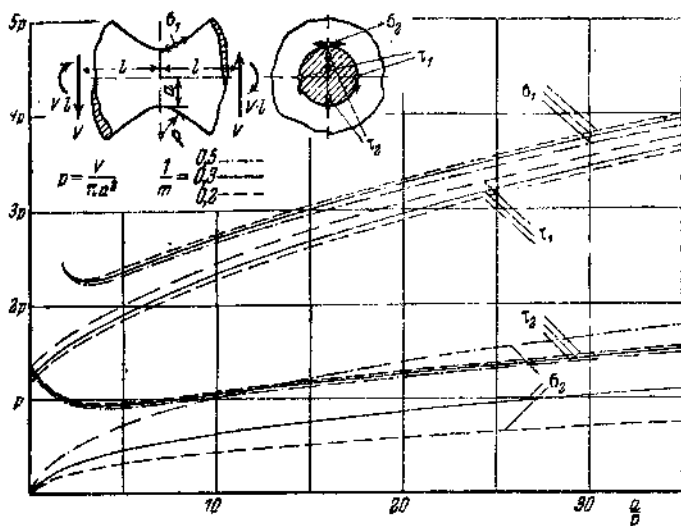
Фиг. 52. Глубокая кольцевая внешняя выточка при сдвиге (см. фиг. 51); слева продольное сечение, перпендикулярное к силе  $V$ ; справа поперечное сечение с линиями равных напряжений сдвига.

жение возрастает чрезвычайно быстро. У дна выточки, где оно направлено параллельно контуру, оно достигает своего наибольшего значения. Эта область, очевидно, является наиболее напряжённой. По направлению внутрь, а также и вдоль контура выточки касательные напряжения быстро затухают.

Направо начерчены линии одинаковых касательных напряжений в поперечном сечении. Зона с наибольшим касательным напряжением представляет собой полосу, расположенную в окрестности точки, где касательная к контуру параллельна направлению силы  $V$ .

Линии равных касательных напряжений, так же как и вышеупомянутые линии касательных напряжений, можно получить после

того, как определена равнодействующая касательных напряжений в рассматриваемом сечении. К этому вопросу мы ещё вернемся при рассмотрении мелких внутренних выточек на теле вращения и в главе V, 4, С укажем простые способы её получения.



Фиг. 53. Наибольшие напряжения в глубоких кольцевых внешних выточках при сдвиге.

На фиг. 53 показана зависимость между наибольшим напряжением и кривизной выточки.

**Д. Чистое кручение.** В этом случае те интегралы (14) и (15), которые не определяют крутящего момента, нужно положить равными нулю. Обозначив крутящий момент буквой  $M$  (вместо  $M_x$ ), получим по уравнению (15)

$$M = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\tau_{uw}}{h_u} \left( y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\tau_{uv}}{h_v} \left( y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \frac{\tau_{uw}}{h_w} \left( y \frac{\partial z}{\partial w} - z \frac{\partial y}{\partial w} \right) \right] h_v h_w dv dw. \quad (94)$$

В нашей координатной системе уравнение переходит в следующее:

$$M = 2\pi \int_0^{v_0} \tau_{uw} h \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v dv. \quad (95)$$

Так как при больших значениях  $u$  в подинтегральной функции появляется множитель  $e^{3u}$ , напряжения будут обратно пропорциональ-

ными величине  $e^{3u}$ . Соответственно этому для  $v$  можно брать следующие наибольшие значения:

$$v = -1 \text{ для } \Phi_0 \text{ и } v = -2 \text{ для } \Phi_1, \Phi_2 \text{ и } \Phi_3.$$

Задача о кручении тел вращения является известной классической задачей теории упругости. В этом случае напряжения получаются независимыми от коэффициента Пуассона<sup>1)</sup>. Эту задачу легко решить, исходя из наших общих выражений, положив

$$\Phi_0 = 0; \quad \Phi_1 = 0 \quad (96)$$

и

$$\Phi_2 = -f(u, v) \sin w; \quad \Phi_3 = f(u, v) \cos w. \quad (97)$$

Отсюда следует, что:

$$F = 0. \quad (98)$$

Соотношения (3) дают:

$$U = 0; \quad V = 0; \quad W = \frac{\alpha}{G} f(u, v), \quad (99)$$

т. е. тело закручивается вокруг его оси. Из (4) и (5) далее следует

$$\sigma_u = 0; \quad \sigma_v = 0; \quad \sigma_w = 0. \quad (100)$$

Наконец, из (6) получается:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= 0, \quad \tau_{vw} = \alpha \frac{\sin v}{h} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f(u, v)}{\sin v} \right); \\ \tau_{uw} &= \alpha \frac{\operatorname{ch} u}{h} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{f(u, v)}{\operatorname{ch} u} \right). \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Для рассматриваемой задачи достаточно взять функцию с  $v = -2$ . Так как в выражении (97) фигурирует  $\cos w$ , то нужно считать  $n = 1$ . С целью получения конечных решений нужно опять положить  $a_{n,v} = 0$ . В результате придём к следующему выражению:

$$f(u, v) = A (T \operatorname{ch} u - \operatorname{th} u) \sin v. \quad (102)$$

С этой функцией мы уже имели дело в задаче об изгибе. Для напряжений получим<sup>2)</sup>:

$$\tau_{vw} = 0; \quad \tau_{uw} = -2\alpha C \frac{\sin v}{h \operatorname{ch}^2 u}. \quad (103)$$

Интеграл (95) даёт

$$\begin{aligned} M &= -4\pi\alpha C \int_0^{v_0} \sin^3 v \, dv = -\frac{4}{3} \pi\alpha C (\cos^3 v_0 - 3 \cos v_0 + 2) = \\ &= -\frac{4}{3} \pi\alpha C (2 + \cos v_0) (1 - \cos v_0)^2. \end{aligned} \quad (104)$$

<sup>1)</sup> См., например, А. и Л. Фёппль, Сила и деформация, т. II, стр. 111—112. ОНТИ, 1936.

<sup>2)</sup> Результат впервые был получен Пёшлем См. Z. angew. Math. Mech., т. 2 (1922), стр. 137.

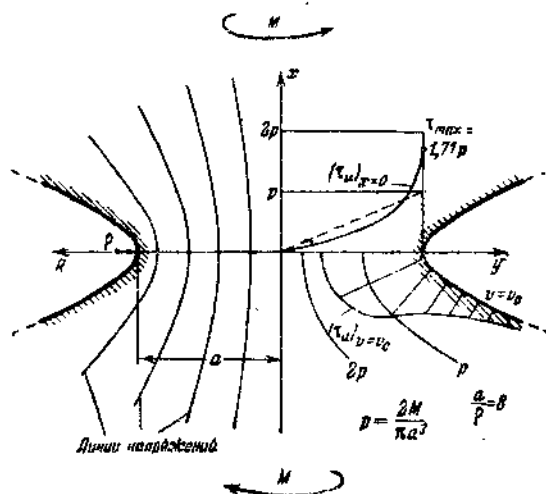
Номинальное напряжение вычисляем по формуле:

$$\tau_n = \frac{2M}{\pi a^3} = p. \quad (105)$$

Тогда, имея в виду, что  $a = \sin v_0$ , находим постоянную  $C$ :

$$C = -\frac{3p \sin v_0 (1 + \cos v_0)}{8\alpha(2 + \cos v_0)(1 - \cos v_0)}. \quad (106)$$

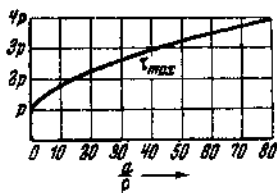
Для наибольшего касательного напряжения, возникающего у дна



Фиг. 54. Глубокая кольцевая внешняя выточка при кручении.

выточки, получим, наконец, следующую формулу, введя в неё кривизну выточки

$$\tau_{\max} = p \frac{3 \left( 1 + \sqrt{\frac{a}{p} + 1} \right)^2}{4 \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{p} + 1} \right)}. \quad (107)$$



Фиг. 55. Наибольшие напряжения в глубоких кольцевых внешних выточках при кручении.

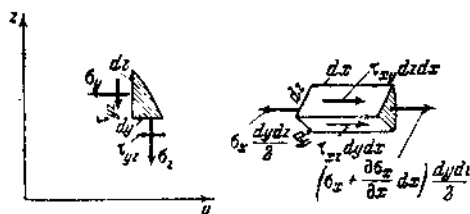
В правой части фиг. 54 показано распределение напряжений по наиболее узкому поперечному сечению (вверху) и вдоль контура выточки (снизу); в левой же части этой фигуры начерчены линии напряжений. Они идут в направлении линии  $u$ , так как существует только напряжение  $\tau_{u\omega}$ , которое и играет роль главного напряжения.

Зависимость наибольшего напряжения от кривизны выточки дана на фиг. 55.

#### 4. Мелкая внутренняя выточка на теле вращения при отсутствии сверления.

Перейдём теперь ко второй группе задач, решение которых требует применения общих методов. В начале этой главы уже было

замечено, что задачи о глубокой внешней и мелкой внутренней выточках в теле вращения, не имеющем осевого сверления, принадлежат к числу задач о пространственном напряжённом состоянии.



Фиг. 56. Граничные условия цилиндра.

точку возьмём в форме эллипсоида (ср. фиг. 45). В соответствии с определением, глубина выточки, которую мы опять обозначим буквой  $t$ , предполагается малой в сравнении с радиусом  $b$  стержня:

$$\frac{t}{b} \ll 1. \quad (108)$$

Умелым применением этого неравенства отдельные решения можно существенно упростить, если придерживаться следующего порядка вычислений: для каждого вида напряжённого состояния определяется прежде всего напряжённое состояние в стержне без выточки; при этом на поверхности стержня должны быть выполнены следующие граничные условия, вытекающие из уравнений равновесия заштрихованного элемента стержня (фиг. 56), одна грань которого совпадает с поверхностью самого стержня:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} dz - \tau_{xz} dy &= 0; \\ \sigma_y dz - \tau_{yz} dy &= 0; \\ \tau_{yz} dz - \sigma_z dy &= 0; \end{aligned} \right\} \text{ при } y^2 + z^2 = b^2 \quad (109)$$

или благодаря равенству  $\frac{dy}{dz} = -\frac{z}{y}$ :

$$y\tau_{xy} + z\tau_{xz} = 0 \text{ при } \mu = x, y, z. \quad (110)$$

Вторая часть решения заключается в определении так называемых напряжений возмущения. Здесь требуется вычислить искажение распределения напряжения, обусловленное наличием в стержне внутренней выточки, и определить это искажение так, чтобы в совокупности с напряжениями в стержне, не имеющем выточки, были удовлетворены граничные условия (13) на поверхности выточки ( $u = u_0$ ). Эти напряжения возмущения, подчиняющиеся закону затухания, и создают концентрацию напряжений.

В точках внешней поверхности стержня, которые, вследствие (108), находятся очень далеко от зоны искажения, напряжения возмущения совсем затухают и не оказывают влияния на граничные условия (110). Вместе с этим для мелкой внутренней выточки оказываются выполненными все граничные условия.

**А. Чистое растяжение.** В случае чистого растяжения стержня, не имеющего выточки, напряжённое состояние в нём можно выразить с помощью функций следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{(2-\alpha)p}{2(4-\alpha)} [y^2 + z^2 - 2x^2]; \\ \Phi_1 &= \frac{p}{4-\alpha} x; \quad \Phi_2 = 0; \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Согласно (111) и (58) главы III для  $F$  имеем:

$$F = \frac{p}{2(4-\alpha)} [(2-\alpha)(y^2 + z^2) + (2\alpha - 2)x^2]. \quad (112)$$

Напряжения получаем по формулам (68) и (69) главы III

$$\sigma_x = p; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (113)$$

Следовательно, величина  $p$  представляет собой равномерно распределённое растягивающее напряжение в стержне. Если обозначим силу, растягивающую стержень, через  $P$ , то

$$p = \frac{P}{\pi b^2}. \quad (114)$$

Сначала мы рассмотрим сравнительно простой частный случай, именно тот, когда внутренняя выточка ограничена *сферой*. Из этого частного случая читатель может отчётливо уяснить намеченный выше ход вычислений.

*Частный случай  $t = r$ .* Используем уравнения (7) для того, чтобы выразить функции  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  в сферических координатах:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{(2-\alpha)p}{2(4-\alpha)} u^2 (3 \sin^2 v - 2); \\ \Phi_1 &= \frac{p}{4-\alpha} u \cos v; \quad \Phi_2 = 0; \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Сопоставляя их с общим выражением (40) для гармонической функции, легко устанавливаем, что мы имеем дело с функциями  $n = 2$ ;  $n = 0$  и  $v = 1$ ,  $n = 0$  при  $b_{n,v} = 0$ . К этим функциям нужно добавить новые, которые бы соответствовали напряжениям, удовлетворяющим граничным условиям (13). Этим свойством обладают функции, зависящие подобным же образом от  $v$  и  $w$ , но иначе зависящие от  $u$ . Их мы получим, если заменим  $v$  на  $-v - 1$ , т. е., если положим  $v = -3$ , вместо 2 в функции  $\Phi_0$  и  $v = -2$  вместо 1 в  $\Phi_1$ , и если, вместо  $b_{n,v} = 0$ , положим далее  $a_{n,v} = 0$ . Кроме того, следует принять во

внимание, что функция  $\Phi_0$  при  $\nu = -1$  и  $\mu = 0$  также оказывается пригодной. Таким образом подобранные функции дают решение:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[ \frac{(2-\alpha)p}{2(4-\alpha)} u^2 + \frac{B}{u^3} \right] (3 \sin^2 \nu - 2) + \frac{A}{u}; \\ \Phi_1 &= \left[ \frac{p}{4-\alpha} u + \frac{C}{u^2} \right] \cos \nu; \quad \Phi_2 = 0; \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Функция напряжений будет:

$$F = \left[ \frac{(4-3\alpha)p}{2(4-\alpha)} u^2 + \frac{3B}{u^3} - \frac{C}{u} \right] \sin^2 \nu + \frac{(\alpha-1)p}{4-\alpha} u^2 - \frac{2B}{u^3} + \frac{A}{u} + \frac{C}{u}. \quad (117)$$

Отсюда, согласно (10), найдём  $\Delta F$ , а затем и нормальные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \left[ -p - \frac{36B}{u^6} + \frac{(8+\alpha)C}{u^3} \right] \sin^2 \nu + \\ &\quad + p + \frac{24B}{u^6} - \frac{2A}{u^3} + \frac{(-6-2\alpha)C}{u^3}; \\ \sigma_v &= \left[ p + \frac{21B}{u^6} + \frac{(1-\alpha)C}{u^3} \right] \sin^2 \nu - \frac{12B}{u^6} + \\ &\quad + \frac{A}{u^3} + \frac{(-1+2\alpha)C}{u^3}; \\ \sigma_w &= \left[ \frac{15B}{u^6} + \frac{(3-3\alpha)C}{u^3} \right] \sin^2 \nu - \frac{12B}{u^6} + \\ &\quad + \frac{A}{u^3} + \frac{(-1+2\alpha)C}{u^3}. \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

По (11) найдём касательные напряжения

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \left[ -p + \frac{24B}{u^3} + \frac{(-4+\alpha)C}{u^3} \right] \sin \nu \cos \nu; \\ \tau_{vw} &= 0; \quad \tau_{uw} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Для трёх вошедших в эти выражения произвольных постоянных из граничных условий получим три уравнения, пользуясь которыми находим следующие значения постоянных (ради простоты положено  $u_0 = 1$ ):

$$A = \frac{(-2-5\alpha)p}{2(4+5\alpha)}; \quad B = \frac{p}{4+5\alpha}; \quad C = \frac{5p}{4+5\alpha}. \quad (120)$$

Для наибольшего напряжения, возникающего у дна выточки, получим следующее:

$$\sigma_1 = (\sigma_v)_{\substack{u=1 \\ \nu=\frac{\pi}{2}}} = \frac{3(8+5\alpha)}{2(4+5\alpha)} p = \frac{3 \left( 9 - \frac{5}{m} \right)}{2 \left( 7 - \frac{5}{m} \right)} p$$

$$(\approx 2,04p \text{ для } \frac{1}{m} = 0,3), \quad (121)$$



Кольцевое нормальное напряжение достигает максимума в той же точке

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{u=1} = \frac{3(8-5\alpha)}{2(4+5\alpha)} p =$$

$$v = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3\left(-1 + \frac{5}{m}\right)}{2\left(7 - \frac{5}{m}\right)} p (= 0,14p \text{ для } \frac{1}{m} = 0,3). \quad (122)$$

Эти результаты вполне совпадают с теми, которые были получены (другим путём) ещё в 1908 году А. Леон<sup>1)</sup>. Для этой симметричной относительно оси нагрузки А. Леон'у удалось найти решение путём постепенного удовлетворения отдельным уравнениям теории упругости.

*Общий случай.* В том общем случае, когда поверхность выточки имеет любую кривизну, решение получается непосредственно с помощью аналогичных функций, но в эллиптических координатах. Индексам  $v$  и  $n$  следует давать здесь те же значения, что и в предыдущем случае.

Однако при выборе отдельных гармонических функций нужно теперь руководствоваться уравнением (38). Вследствие этого получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left\{ \frac{(2-\alpha)p}{2(4-\alpha)} \left( \text{ch}^2 u - \frac{2}{3} \right) + B[(3 \text{ch}^3 u - 2) T - 3 \text{sh} u] \right\} \times \\ &\quad \times (3 \sin^2 v - 2) + AT; \\ \Phi_1 &= \left\{ \frac{p}{4-\alpha} \text{sh} u + C[T \text{sh} u - 1] \right\} \cos v; \\ \Phi_2 &= 0; \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Отсюда для функции напряжений получается:

$$F = \frac{p}{2(4-\alpha)} [(4-3\alpha) \text{ch}^2 u - 2 + 2\alpha] \sin^2 v +$$

$$+ \frac{p}{4-\alpha} \left[ (\alpha-1) \text{ch}^2 u + \frac{(1-2\alpha)}{3} \right] + AT + B[(3 \text{ch}^2 u - 2) T - 3 \text{sh} u] \times$$

$$\times (3 \sin^2 v - 2) + C[T \text{sh}^2 u - \text{sh} u] \cos^2 v. \quad (124)$$

Опять вычислим сначала член  $\Delta F$ , необходимый для определения нормальных напряжений, и члены с множителем  $\frac{1}{h^2}$ , имеющиеся

<sup>1)</sup> А. Леон, Störungen der Spannungsverteilung. Wien, 1908.

в выражениях для  $\sigma_u$ ,  $\sigma_v$  и  $\tau_{uv}$ . Согласно (4), (5) и (6) найдём

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{2p}{4-\alpha} \operatorname{ch}^2 u + 2C [T \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh} u] \right\} + \\ &\quad + \frac{\sin^2 v}{h^2} \left\{ -\frac{2p}{4-\alpha} - 2CT \right\}; \\ \frac{1}{h^4} \left[ \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial v} \right] &= \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{2\alpha-2}{4-\alpha} p \operatorname{sh}^2 u + B [-12 T \operatorname{sh}^2 u + 12 \operatorname{sh} u] + \right. \\ &+ C [2 T \operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sh} u] \left. \right\} + \frac{\sin^2 v}{h^2} \left\{ \frac{4-3\alpha}{4-\alpha} p \operatorname{ch}^2 u + \frac{2\alpha-2}{4-\alpha} p + \right. \\ &+ B [(18 \operatorname{ch}^2 u - 12) T - 18 \operatorname{sh} u] + 2C [-T \operatorname{sh}^2 u + \operatorname{sh} u] \left. \right\} + \\ &\quad + \frac{\operatorname{sh} u}{h^4} \left\{ -A - 4B - C \operatorname{sh}^2 u \right\}; \\ \frac{1}{h^4} \left[ \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \frac{\partial F}{\partial v} - \sin v \cos v \frac{\partial F}{\partial u} \right] &= \\ &= \frac{\sin v \cos v}{h^2} \left\{ \frac{4-3\alpha}{4-\alpha} p \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + B [18 \operatorname{ch} u (T \operatorname{sh} u - 1) + \right. \\ &\quad + \frac{6}{\operatorname{ch} u}] + C \left[ -2 \operatorname{ch} u (T \operatorname{sh} u - 1) - \frac{1}{\operatorname{ch} u} \right] \left. \right\} + \\ &\quad + \frac{\sin v \cos v}{h^4 \operatorname{ch} u} \left\{ A + 4B + C \operatorname{sh}^2 u \right\}. \end{aligned} \quad (125)$$

Используя эти соотношения, для нормальных напряжений получим:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{h^2} \left\{ p \operatorname{ch}^2 u - A \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} + B [12 T \operatorname{ch}^2 u - 12 \operatorname{sh} u - \right. \\ &\quad - 4 \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}] + C \left[ \alpha T \operatorname{ch}^2 u + (1-\alpha) \operatorname{sh} u + \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \right] \left. \right\} + \\ &\quad + \frac{\sin^2 v}{h^2} \left\{ -p \operatorname{ch}^2 u + B [(-18 \operatorname{ch}^2 u + 6) T + 18 \operatorname{sh} u + \right. \\ &\quad + 6 \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}] + C [(2-2\alpha)(T \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh} u) + (-2+\alpha) T - \\ &\quad - \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}] \left. \right\} + \frac{\operatorname{sh} u}{h^4} \left\{ -A - 4B - C \operatorname{sh}^2 u \right\}; \\ \sigma_v &= \frac{1}{h^2} \left\{ B [-6 T \operatorname{ch}^2 u + 6 \operatorname{sh} u] + C [(2-\alpha) T \operatorname{ch}^2 u + \right. \\ &\quad + (-3+\alpha) \operatorname{sh} u] \left. \right\} + \frac{\sin^2 v}{h^2} \left\{ p \operatorname{sh}^2 u + B [(18 \operatorname{ch}^2 u - \right. \\ &\quad - 12) T - 18 \operatorname{sh} u] + C [(-2+2\alpha) T \operatorname{ch}^2 u - \alpha T + \\ &\quad + (2-2\alpha) \operatorname{sh} u] \left. \right\} + \frac{\operatorname{sh} u}{h^4} \left\{ A + 4B + C \operatorname{sh}^2 u \right\}; \end{aligned} \quad (126)$$

$$\sigma_w = \frac{1}{h^2} \left\{ A \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} + B \left[ -6T \operatorname{ch}^3 u + 6 \operatorname{sh} u + 4 \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \right] + \right. \\ \left. + C \left[ (2 - \alpha)(T \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh} u) - \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \right] + \frac{\sin^2 v}{h^2} \left\{ B \left[ 6T - \right. \right. \right. \quad (126) \\ \left. \left. \left. - 6 \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \right] + C \left[ (-2 + \alpha)T + \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \right] \right\} \right\}.$$

Касательные напряжения вычислим с помощью формул (6):

$$\tau_{uv} = \frac{\sin v \cos v}{h^2} \left\{ -p \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + B \left[ -18T \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \right. \right. \\ \left. + 18 \operatorname{ch} u - \frac{6}{\operatorname{ch} u} \right] + C \left[ (2 - 2\alpha)T \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + (-2 + \right. \\ \left. + 2\alpha) \operatorname{ch} u + \frac{1 - \alpha}{\operatorname{ch} u} \right] \left. \right\} + \frac{\sin v \cos v}{h^2 \operatorname{ch} u} \{ A + 4B + C \operatorname{sh}^2 u \}, \\ \tau_{vw} = 0; \quad \tau_{uw} = 0. \quad (127)$$

Произвольные постоянные, содержащиеся в решении, нужно теперь определить так, чтобы были удовлетворены граничные условия (13). Положим для краткости:

$$\operatorname{ch}^4 u_0 \operatorname{sh} u_0 (T)_{u=u_0} - \operatorname{ch}^3 u_0 \operatorname{sh}^2 u_0 = g. \quad (128)$$

Введём ещё в рассмотрение *глубину выточки*

$$(y)_{u=u_0} = \operatorname{ch} u_0 = t. \quad (129)$$

$$\begin{matrix} v = \frac{\pi}{2} \\ w = 0 \end{matrix}$$

Используем эти обозначения и в выражении для  $(\sigma_u)_{u=u_0}$  приравняем нулю коэффициенты слагаемых, зависящих от  $v$ . Получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} p t^2 + \frac{1}{\operatorname{sh} u_0} \left\{ A \left[ -1 + \frac{1}{t^2} \right] + B \left[ 12 \frac{g}{t^2} - 4 + \frac{4}{t^2} \right] + \right. \\ \left. + C \left[ \alpha \frac{g}{t^2} + t^2 - \frac{1}{t^2} \right] \right\} = 0; \\ -p t^2 + \frac{1}{\operatorname{sh} u_0} \left\{ B \left[ -18 \frac{g}{t^2} + 6 \frac{g}{t^4} + 12 - \frac{12}{t^2} \right] + \right. \\ \left. + C \left[ (2 - 2\alpha) \frac{g}{t^2} + (-2 + \alpha) \frac{g}{t^4} - 3 + \alpha + \frac{3 - \alpha}{t^2} \right] \right\} = 0; \\ -A - 4B + C [-t^2 + 1] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Отсюда найдём произвольные постоянные:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{p \operatorname{sh} u_0 t^4}{N_1} - [6g t^2 + (4\alpha - 2)g + 4t^4 - 4\alpha t^2]; \\ B &= \frac{p \operatorname{sh} u_0 t^4}{N_1} [(2 - \alpha)g + 2t^4 + (-3 + \alpha)t^2]; \\ C &= \frac{p \operatorname{sh} u_0 t^4}{N_1} [6g - 12t^3], \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

где

$$N_1 = 6 [(-4 + \alpha) g^2 - 6gt^4 + 8gt^2 + 4t^6 - 4t^4].$$

Если эти значения подставим в (127), то увидим, что граничным условиям удовлетворяют и касательные напряжения, т. е. мы удовлетворили всем условиям. Теперь можно перейти к вычислению наибольших напряжений.

Как и можно было ожидать, наибольшее напряжение возникает у дна выточки в направлении растяжения стержня. Если вместо параметра  $u_0$  ввести кривизну выточки по формулам

$$\frac{t}{\rho} = \operatorname{ch}^2 u_0; \quad \operatorname{ch} u_0 = \sqrt{\frac{\frac{t}{\rho}}{\frac{t}{\rho} - 1}}, \quad \operatorname{sh} u_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}}, \quad (132)$$

то наибольшее напряжение вычислится по такой формуле:

$$\sigma_1 = (\sigma_y)_{u=u_0} = \frac{p}{N} \left\{ 2 \left( \frac{t}{\rho} \right)^2 - \left( 1,5 - \frac{1}{m} \right) \frac{t}{\rho} + 1 - \frac{1}{m} + \right. \\ \left. + \left[ - \left( 1,5 + \frac{1}{m} \right) \frac{t}{\rho} + \frac{1}{m} \right] \frac{t}{\rho} c \right\}, \quad (133)$$

где

$$c = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\frac{t}{\rho} - 1}{\frac{t}{\rho}}}}{\sqrt{\frac{\frac{t}{\rho} - 1}{\frac{t}{\rho}}}},$$

если  $\frac{t}{\rho} > 1$ ,

и

$$c = \frac{\ln \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{t}{\rho}} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{t}{\rho}}{\sqrt{1 - \frac{t}{\rho}}}, \quad \text{если } \frac{t}{\rho} < 1, \quad (134)$$

а

$$N = \frac{t}{\rho} + 1 - \frac{1}{m} + \left( \frac{t}{\rho} - 2 + \frac{2}{m} \right) \frac{t}{\rho} c - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \left( \frac{t}{\rho} \right)^2 c^2. \quad (135)$$

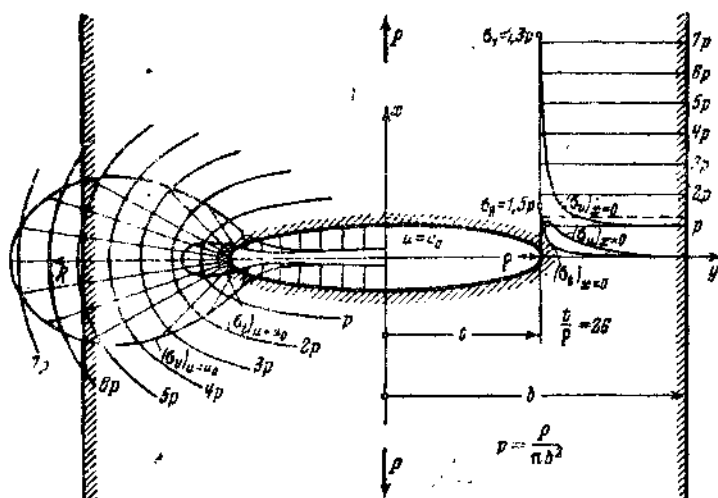
Кольцевое нормальное напряжение достигает максимума тоже у дна выточки и равно

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{u=u_0} = \frac{p}{N} \frac{t}{\rho} \left\{ \frac{2}{m} \frac{t}{\rho} + 1,5 - \frac{2}{m} + \left[ - \left( 0,5 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{2}{m} \right) \frac{t}{\rho} - 1 + \frac{2}{m} \right] c \right\}. \quad (136)$$

От данного решения можно снова перейти к частному случаю  $\frac{t}{\rho} = 1$ .

Для этого полученное решение нужно разложить в ряд, а затем совершить предельный переход. Тогда получим формулы, полностью совпадающие с (121) и (122).

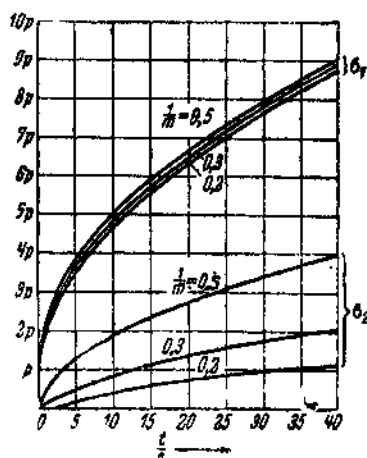
На фиг. 57 даны графики распределения напряжений при  $\frac{z}{r} = 26$ , в правой части по наиболее узкому поперечному сечению, а в ле-



Фиг. 57. Кольцевая внутренняя выточка при растяжении.

вой — вдоль контура выточки. Напряжения по всем направлениям от дна выточки очень быстро затухают, примерно, обратно пропорционально третьей степени расстояния от дна выточки. В точках, удалённых от оси стержня на расстояние, равное двум глубинам выточки, существует уже приблизительно такое же напряжённое состояние, как и в стержне без выточки. В силу этого удаление внешнего контура от выточки, принятое на фиг. 57, может считаться вполне достаточным. Изменение обоих наибольших напряжений, в зависимости от кривизны выточки, изображено на фиг. 58.

**В. Чистый изгиб.** Решение для случая чистого изгиба включает в себе прежде всего элементарную задачу об изгибе сплошного цилиндра. Эта простейшая задача



Фиг. 58. Наибольшие напряжения в мелких кольцевых внутренних выточках при растяжении.

решается с помощью функций

следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{(-1 + \alpha)(2 - \alpha)p}{2\alpha(4 - \alpha)t} y(y^3 + z^3 - 4xz^2); \\ \Phi_1 &= \frac{(-4 + 4\alpha)p}{2\alpha(4 - \alpha)t} xy; \\ \Phi_2 &= \frac{(2 - \alpha)p}{2\alpha(4 - \alpha)t} (y^3 + z^3 - 2xz^2); \\ \Phi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

В соответствии с (58) главы III отсюда получаем:

$$F = \frac{p}{(4 - \alpha)t} \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (y^3 + yz^2) + (-3 + 2\alpha)x^2y \right]. \quad (138)$$

Напряжения вычисляем по (68) и (69) главы III:

$$\sigma_x = p \frac{y}{t}; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (139)$$

Номинальное напряжение  $p$  представляет, следовательно, *элементарное напряжение при изгибе* сплошного цилиндра в точке  $y = t$ . Оно равно

$$p = \frac{4Mt}{\pi b^4}. \quad (140)$$

Чтобы получить исходные данные для построения функций, соответствующих напряжению возмущения, начнём, как и в предыдущей задаче, с частного случая, когда выточка образована сферической поверхностью.

*Частный случай*  $t = r$ . С целью упрощения будем считать глубину выточки равной единице [сравни (7)]:

$$\left. \begin{aligned} t &= (y)_{u=0} = u_0 = 1. \\ v &= \frac{\pi}{2} \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Функции, заданные формулами (137), выразим теперь в сферических координатах, определяемых уравнениями (7). Сопоставлением функций (137) с общим выражением (40) гармонической функции в сферических координатах найдём, что в функциях, содержащихся в выражениях (137), мы имеем дело со случаями  $v = 3$ ,  $n = 1$ , для  $\Phi_0$ ;  $v = 2$ ,  $n = 1$  для  $\Phi_1$  и  $v = 2$ ,  $n = 0$  для  $\Phi_2$ , причём  $b_{nv} = 0$ . Добавочные функции должны соответствовать напряжениям, с помощью которых можно было бы удовлетворить граничным условиям (13). Это достигается с помощью функций, которые от  $v$  и  $w$  зависят так же, как и функции (137), но в слагаемых, зависящих от  $u$ , значок  $v$  за-

меняется на  $-\nu - 1$ . Решение получим, если добавим ещё функцию  $\Phi_0$  при  $\nu = -2$ ,  $n = 1$ . Имеем поэтому:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[ \frac{(-1+\alpha)(2-\alpha)p}{2\alpha(4-\alpha)} u^3 + \frac{B}{u^4} \right] (5 \sin^3 \nu - 4 \sin \nu) \cos w + \\ &\quad + \frac{A}{u^2} \sin \nu \cos w; \\ \Phi_1 &= \left[ \frac{(-4+4\alpha)p}{2\alpha(4-\alpha)} u^3 + \frac{C}{u^3} \right] \sin \nu \cos \nu \cos w; \\ \Phi_2 &= \left[ \frac{(2-\alpha)p}{2\alpha(4-\alpha)} u^3 + \frac{D}{u^3} \right] (3 \sin^2 \nu - 2); \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

С помощью соотношений (7—11) получим функцию напряжений:

$$F = \left[ \frac{p}{4-\alpha} \left( 4 - \frac{5}{2} \alpha \right) u^3 + \frac{5B}{u^4} - \frac{C}{u^2} + \frac{3D}{u^2} \right] \sin^3 \nu \cos w + \\ + \left[ \frac{p}{4-\alpha} (-3 + 2\alpha) u^3 + \frac{A}{u^2} - \frac{4B}{u^4} + \frac{C}{u^2} - \frac{2D}{u^2} \right] \sin \nu \cos w; \quad (143)$$

нормальные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \left[ -pu - \frac{100B}{u^6} + \frac{16+\alpha}{u^4} C - \frac{48+3\alpha}{u^4} D \right] \sin^3 \nu \cos w + \\ &\quad + \left[ pu - \frac{6A}{u^4} + \frac{80B}{u^6} - \frac{14+2\alpha}{u^4} C + \frac{36D}{u^4} \right] \sin \nu \cos w; \\ \sigma_v &= \left[ pu + \frac{65B}{u^6} - \frac{(1+\alpha)}{u^4} C + \frac{3+3\alpha}{u^4} D \right] \sin^3 \nu \cos w + \\ &\quad + \left[ \frac{3A}{u^4} - \frac{50B}{u^6} + \frac{1+2\alpha}{u^4} C \right] \sin \nu \cos w; \\ \sigma_w &= \left[ \frac{35B}{u^6} + \frac{5-5\alpha}{u^4} C + \frac{-15+15\alpha}{u^4} D \right] \sin^3 \nu \cos w + \\ &\quad + \left[ \frac{3A}{u^4} - \frac{30B}{u^6} + \frac{-3+4\alpha}{u^4} C + \frac{12-12\alpha}{u^4} D \right] \sin \nu \cos w; \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

касательные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \left[ -pu + \frac{75B}{u^6} + \frac{-9+\alpha}{u^4} C + \frac{27-3\alpha}{u^4} D \right] \sin^2 \nu \cos \nu \cos w + \\ &\quad + \left[ \frac{3A}{u^4} - \frac{20B}{u^6} + \frac{3+\alpha}{u^4} C + \frac{-6+6\alpha}{u^4} D \right] \cos \nu \cos w; \\ \tau_{vw} &= \left[ \frac{10B}{u^6} + \frac{-2+\alpha}{u^4} C + \frac{6-6\alpha}{u^4} D \right] \cos \nu \sin \nu \sin w; \\ \tau_{uw} &= \left[ -\frac{25B}{u^6} + \frac{3+\alpha}{u^4} C + \frac{-9+9\alpha}{u^4} D \right] \sin^2 \nu \sin w + \\ &\quad + \left[ -\frac{3A}{u^4} + \frac{20B}{u^6} - \frac{3+\alpha}{u^4} C + \frac{6-6\alpha}{u^4} D \right] \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Граничные условия (13) дают шесть уравнений для произвольных постоянных. Два из этих уравнений тождественны между собой, а одно из них можно рассматривать как следствие остальных, так что остаётся четыре независимых уравнения, содержащих четыре произвольных постоянных. Решение этих уравнений при  $u_0 = 1$  даёт:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{-4 - 9\alpha - 7\alpha^2}{12\alpha(12 + 7\alpha)} p; & B &= \frac{p}{12 + 7\alpha}; \\ C &= \frac{12 + 63\alpha}{12\alpha(12 + 7\alpha)} p; & D &= \frac{4 - 7\alpha}{12\alpha(12 + 7\alpha)} p. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Как и можно было ожидать, наибольшее напряжение от изгиба возникает у дна выточки. Найдём:

$$\sigma_1 = (\sigma_v)_{u=u_0, \substack{v=\frac{\pi}{2} \\ w=0}} = \frac{5 \left( 17 - \frac{7}{m} \right)}{4 \left( 13 - \frac{7}{m} \right)} p \quad (= 1,71 p \text{ при } \frac{1}{m} = 0,3). \quad (147)$$

Кольцевое нормальное напряжение достигает максимума там же и выражается формулой:

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{u=u_0, \substack{v=\frac{\pi}{2} \\ w=0}} = \frac{5 \left( -1 + \frac{7}{m} \right)}{4 \left( 13 - \frac{7}{m} \right)} p \quad (= 0,13 p \text{ при } \frac{1}{m} = 0,3). \quad (148)$$

**Общий случай.** В общем случае, при наличии выточки любой кривизны, как и при простом растяжении, достаточно пользоваться функциями, аналогичными прежним. Таким образом, мы возьмём функции с теми же значениями  $n$  и  $\nu$ , но только теперь будем исходить из гармонической функции (38). Так как мы применяем эллиптические координаты, определённые уравнениями (1), то глубина выточки равна:

$$t = (y)_{u=u_0, \substack{v=\frac{\pi}{2} \\ w=0}} = \operatorname{ch} u_0. \quad (149)$$

Для краткости, положим:

$$\frac{p}{t} = p'. \quad (150)$$

Тогда

$$\Phi_0 = \left\{ \frac{(-1 + \alpha)(2 - \alpha)p'}{2\alpha(4 - \alpha)} \left( \operatorname{ch}^2 u - \frac{4}{5} \operatorname{ch} u \right) + B \left[ (5 \operatorname{ch}^2 u - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \operatorname{ch} u) T - 5 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \frac{2}{3} \operatorname{th} u \right] \right\} (5 \sin^2 v - \\ - 4 \sin v) \cos w + A (T \operatorname{ch} u - \operatorname{th} u) \sin v \cos w; \quad (151)$$



$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \left[ \frac{(-4+4\alpha)p'}{2\alpha(4-\alpha)} \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + C (\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u T - \operatorname{ch} u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3 \operatorname{ch} u}) \right] \sin v \cos v \cos w; \\ \Phi_2 &= \left[ \frac{(2-\alpha)p'}{2\alpha(4-\alpha)} \left( \operatorname{ch}^3 u - \frac{2}{3} \right) + D [(3 \operatorname{ch}^3 u - 2) T - 3 \operatorname{sh} u] \times \right. \\ &\quad \left. \times (3 \sin^2 v - 2); \right. \\ \Phi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

В соответствии с этим функция напряжений принимает форму:

$$\begin{aligned} F &= \frac{p'}{4-\alpha} \left\{ \left[ \left( 4 - \frac{5\alpha}{2} \right) \operatorname{ch}^3 u + (-3 + 2\alpha) \operatorname{ch} u \right] \sin^3 v + \right. \\ &\quad \left. + \left[ (-3 + 2\alpha) \operatorname{ch}^3 u + \frac{2+32\alpha-24\alpha^2}{15\alpha} \operatorname{ch} u \right] \sin v \right\} \cos w + \\ &\quad + A [\operatorname{ch} u T - \operatorname{th} u] \sin v \cos w + \\ &\quad + B \left[ (5 \operatorname{ch}^3 u - 4 \operatorname{ch} u) T - 5 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \frac{2}{3} \operatorname{th} u \right] \times \\ &\quad \times (5 \sin^3 v - 4 \sin v) \cos w + C \left[ (\operatorname{ch}^3 u - \operatorname{ch} u) T - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \frac{1}{3} \operatorname{th} u \right] \sin v \cos^2 v \cos w + \\ &\quad + D [(3 \operatorname{ch}^3 u - 2 \operatorname{ch} u) T - 3 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u] (3 \sin^3 v - \\ &\quad - 2 \sin v) \cos w. \end{aligned} \quad (152)$$

По формулам (4) и (5) вычисляем далее нормальные напряжения; для краткости записи их выражений снова введём величину  $h^2$ .

Найдём:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{p'}{h^2} \operatorname{ch}^3 u \sin v \cos^2 v \cos w + 2A \frac{\sin v \cos w}{h^2} \left( -\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^3 u} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{th} u}{h^2} \right) + \frac{10B}{h^2} \sin^3 v \cos w \left[ (-15 \operatorname{ch}^3 u + 11 \operatorname{ch} u) T + \right. \\ &\quad \left. + 15 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u - \operatorname{th} u + \frac{2 \operatorname{sh} u}{3 \operatorname{ch}^3 u} \right] + \frac{10B}{h^4} \sin v \cos w \left[ (12 \operatorname{ch}^3 u - \right. \\ &\quad \left. - 8 \operatorname{ch} u) T - 12 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u - \frac{8 \operatorname{sh} u}{15 \operatorname{ch}^3 u} - \frac{8 \operatorname{th} u}{15 h^2} \right] + \\ &\quad + \frac{C}{h^2} \sin^3 v \cos w \left\{ \left[ (6 - 4\alpha) \operatorname{ch}^3 u + (-6 + 3\alpha) \operatorname{ch} u \right] T + \right. \\ &\quad \left. + (-6 + 4\alpha) \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \left( 2 - \frac{\alpha}{3} \right) \operatorname{th} u - \frac{2 \operatorname{sh} u}{3 \operatorname{ch}^3 u} \right\} + \\ &\quad + \frac{C}{h^2} \sin v \cos w \left\{ \left[ (-4 + 3\alpha) \operatorname{ch}^3 u + (4 - 2\alpha) \operatorname{ch} u \right] T + \right. \\ &\quad \left. + (4 - 3\alpha) \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u - \frac{2}{3} \operatorname{th} u + \frac{2 \operatorname{sh} u}{3 \operatorname{ch}^3 u} - \frac{2 \operatorname{sh}^3 u}{3 h^2 \operatorname{ch} u} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6D}{h^2} \sin^3 v \cos w \left\{ \left[ (-9 + 6\alpha) \operatorname{ch}^3 u + (5 - 5\alpha) \operatorname{ch} u \right] T + \right. \\
& \quad \left. + (9 - 6\alpha) \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + (1 + \alpha) \operatorname{th} u \right\} + \\
& + \frac{6D}{h^2} \sin v \cos w \left\{ \left[ (8 - 5\alpha) \operatorname{ch}^3 u + (-4 + 4\alpha) \operatorname{ch} u \right] T + \right. \\
& \quad \left. + (-8 + 5\alpha) \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \left( -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \alpha \right) \operatorname{th} u - \frac{2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}{3 h^2} \right\}; \quad (153)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_v = & \frac{p'}{h^2} \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch} u \sin^3 v \cos w + 2A \frac{\sin v \cos w}{h^4} \operatorname{th} u + \\
& + \frac{10B}{h^2} \sin^3 v \cos w \left[ (15 \operatorname{ch}^3 u - 12 \operatorname{ch} u) T - \right. \\
& \quad \left. - 15 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + 2 \operatorname{th} u \right] + \frac{10B}{h^2} \sin v \cos w \left[ (-11 \operatorname{ch}^3 u + \right. \\
& \quad \left. + 8 \operatorname{ch} u) T + 11 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u - \frac{2}{3} \operatorname{th} u + \frac{8 \operatorname{th} u}{15 h^2} \right] + \\
& + \frac{C}{h^2} \sin^3 v \cos w \left\{ \left[ (-6 + 4\alpha) \operatorname{ch}^3 u + (4 - 3\alpha) \operatorname{ch} u \right] T + \right. \\
& \quad \left. + (6 - 4\alpha) \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \frac{\alpha}{3} \operatorname{th} u \right\} + \frac{C}{h^2} \sin v \cos w \times \\
& \times \left\{ \left[ (6 - 3\alpha) \operatorname{ch}^3 u + (-4 + 2\alpha) \operatorname{ch} u \right] T + (-6 + \right. \\
& \quad \left. + 3\alpha) \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u - \frac{2}{3} \operatorname{th} u + \frac{2 \operatorname{sh}^3 u}{3 h^2 \operatorname{ch} u} \right\} + \\
& + \frac{6D}{h^2} \sin^3 v \cos w \left\{ \left[ (9 - 6\alpha) \operatorname{ch}^3 u + (-8 + 5\alpha) \operatorname{ch} u \right] T + \right. \\
& \quad \left. + (-9 + 6\alpha) \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + (2 - \alpha) \operatorname{th} u \right\} + \\
& + \frac{6D}{h^2} \sin v \cos w \left\{ \left[ (-5 + 5\alpha) \operatorname{ch}^3 u + (4 - 4\alpha) \operatorname{ch} u \right] T + \right. \\
& \quad \left. + (5 - 5\alpha) \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \left( -\frac{4}{3} + \frac{2\alpha}{3} \right) \operatorname{th} u + \frac{2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}{3 h^2} \right\}; \\
\sigma_w = & 2A \frac{\sin v \cos w \operatorname{sh} u}{h^2 \operatorname{ch}^3 u} + 10B \sin v \cos w (-\operatorname{ch} u T + \\
& + \operatorname{th} u + \frac{2 \operatorname{sh} u}{3 \operatorname{ch}^3 u} + \frac{8 \operatorname{sh} u}{15 h^2 \operatorname{ch}^3 u}) + C \sin v \cos w \left[ (2 - \alpha) (\operatorname{ch} u T - \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{th} u) - \frac{2 \operatorname{sh} u}{3 \operatorname{ch}^3 u} + \left( -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \alpha \right) \frac{\operatorname{th} u}{h^2} - \frac{2 \operatorname{sh} u}{3 h^2 \operatorname{ch}^3 u} \right] + \\
& + 6D \sin v \cos w \left[ (1 - \alpha) (\operatorname{ch} u T - \operatorname{th} u - \frac{2 \operatorname{th} u}{3 h^2}) \right].
\end{aligned}$$

Выражения для касательных напряжений получим по формулам (6), причём, ради краткости, опять введём  $h^2$ :

$$\begin{aligned} \tau_{uv} = & -\frac{P'}{h^2} \operatorname{sh} u \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v \cos v \cos w + 2A \frac{\cos v \cos w}{h^4} + \\ & + \frac{10B}{h^2} \sin^2 v \cos v \cos w \left[ (-15 \operatorname{ch}^2 u + 4) \operatorname{sh} u T + \right. \\ & + 15 \operatorname{ch}^2 u - 9 - \frac{2}{3 \operatorname{ch}^2 u} \left. \right] + \frac{10B}{h^2} \cos v \cos w (4 \operatorname{ch}^2 u \operatorname{sh} u T - \\ & - 4 \operatorname{ch}^2 u + \frac{4}{3} + \frac{8}{15 h^2}) + \frac{C}{h^2} \sin^2 v \cos v \cos w \left\{ (6 - \right. \\ & - 4\alpha) \operatorname{ch}^2 u - 2 + \alpha \left. \right\} \operatorname{sh} u T + (-6 + 4\alpha) \operatorname{ch}^2 u + 4 - \\ & - \frac{7\alpha}{3} + \frac{2-\alpha}{3 \operatorname{ch}^2 u} \left. \right\} + \frac{C}{h^2} \cos v \cos w \left[ (-2 + \alpha) \times \right. \\ & \times \operatorname{ch}^2 u \operatorname{sh} u T + (2 - \alpha) \operatorname{ch}^2 u - \frac{4}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{2 \operatorname{sh}^2 u}{3 h^2} \left. \right] + \\ & + \frac{6D}{h^2} \sin^2 v \cos v \cos w \left\{ [(-9 + 6\alpha) \operatorname{ch}^2 u + 2 - 2\alpha] \operatorname{sh} u T + \right. \\ & + (9 - 6\alpha) \operatorname{ch}^2 u - 5 + 4\alpha \left. \right\} + \frac{6D}{h^2} \cos v \cos w \left[ (2 - 2\alpha) \operatorname{ch}^2 u \operatorname{sh} u T + \right. \\ & + (-2 + 2\alpha) \operatorname{ch}^2 u - \frac{2\alpha}{3} + \frac{2 \operatorname{ch}^2 u}{3 h^2} \left. \right]; \quad (154) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{vw} = & \frac{10B}{h} \left[ (5 \operatorname{ch}^2 u - 4) T - 5 \operatorname{sh} u + \frac{2 \operatorname{sh} u}{3 \operatorname{ch}^2 u} \right] \sin v \cos v \sin w + \\ & + \frac{C}{h} \sin v \cos v \sin w (2 - \alpha) \left( -\operatorname{sh}^2 u T + \operatorname{sh} u - \frac{2 \operatorname{sh} u}{3 \operatorname{ch}^2 u} \right) + \\ & + \frac{6D}{h} \sin v \cos v \sin w \left\{ [(3 - 3\alpha) \operatorname{ch}^2 u - 2 + 2\alpha] T + \right. \\ & + (-3 + 3\alpha) \operatorname{sh} u \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{uw} = & -\frac{2A \sin w}{h \operatorname{ch}^3 u} + \frac{10B}{h} \sin w \left( \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u T - \operatorname{ch} u + \frac{1}{3 \operatorname{ch} u} + \right. \\ & + \frac{2}{15 \operatorname{ch}^3 u} \left. \right) (5 \sin^2 v - 4) + \frac{C}{h} \sin w \left[ (2 - \alpha) (\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u T - \right. \\ & - \operatorname{ch} u + \frac{1}{3 \operatorname{ch} u}) + \frac{2}{3 \operatorname{ch}^3 u} \left. \right] \cos^2 v + \frac{6D}{h} \sin w (1 - \\ & - \alpha) (\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u T - \operatorname{ch} u + \frac{1}{3 \operatorname{ch} u}) (3 \sin^2 v - 2). \end{aligned}$$

Из граничных условий получим восемь уравнений; при этом в выражении для  $\sigma_u$  нужно положить равными нулю коэффициенты при

$$\frac{\sin^2 v \cos w}{h^2}, \quad \frac{\sin v \cos w}{h^2} \quad \text{и} \quad \frac{\sin v \cos w}{h^4};$$

в выражении  $\tau_{uv}$  коэффициенты при  $\frac{\sin^2 v \cos v \cos w}{h^2}$ ,  $\frac{\cos v \cos w}{h^2}$  и при  $\frac{\cos v \cos w}{h^4}$ ; а в выражении для  $\tau_{uv}$  приравнять нулю следует коэффициенты при  $\frac{\sin^2 v \sin w}{h}$  и при  $\frac{\sin w}{h}$ . Однако, два из этих уравнений тождественны друг другу; далее, три из них являются следствием остальных, так что независимыми между собой остаются четыре уравнения, т. е. столько же, сколько и неизвестных. Для краткости, обозначим:

$$\left. \begin{aligned} 3 \operatorname{ch}^4 u_0 [\operatorname{sh} u_0(T) - 1] + \operatorname{ch}^2 u_0 &= g; \\ \operatorname{ch} u_0 &= t; \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

$$g \{ g [g(4 - \alpha) + 20 \operatorname{ch}^2 u_0 - 16 - 4\alpha] - 32 \operatorname{ch}^2 u_0 + 16 - 4\alpha \} - 16 \operatorname{ch}^2 u_0 = N. \quad (156)$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{8}{3} B + \frac{(1-t^2)}{3} C - 2t^2 D, \\ 10B &= \frac{3pt^3 \operatorname{sh} u_0}{\alpha N_1} \left\{ g \left[ g(1 - \alpha)(2 - \alpha) + (10 - 8\alpha)t^2 - 4 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4\alpha \right] + 4t^2 \right\}; \\ C &= \frac{3pt^3 \operatorname{sh} u_0}{\alpha N_1} \left\{ g \left[ g(2 - 2\alpha) + 10t^2 - 4 + 4\alpha \right] + 4t^2 \right\}; \\ 6D &= \frac{3pt^3 \operatorname{sh} u_0}{\alpha N_1} \left\{ g \left[ g(-2 + \alpha) - 10t^2 + 4 + 2\alpha \right] - 4t^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

Наибольшее напряжение  $\sigma_u$  в точке у дна выточки равно:

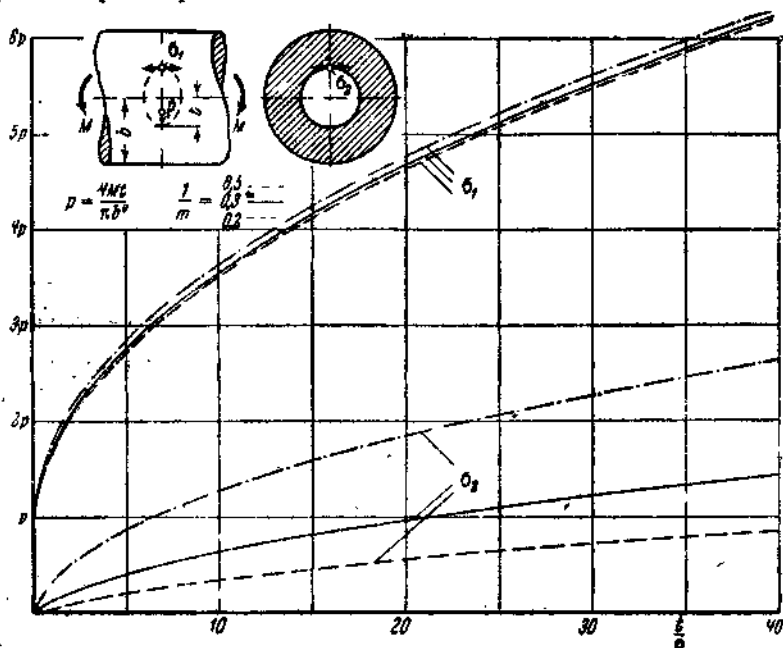
$$\sigma_1 = (\sigma_u)_{\substack{u=u_0 \\ v=\frac{\pi}{2} \\ w=0}} = \frac{p}{N} \left\{ g \left[ g(10t^2 - 2\alpha) - 36t^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 16 - 4\alpha \right] - 16t^2 \right\}. \quad (158)$$

Кольцевое нормальное напряжение достигает наибольшего значения также у дна выточки и равно:

$$\sigma_2 = (\sigma_w)_{\substack{u=u_0 \\ v=\frac{\pi}{2} \\ w=0}} = \frac{p}{N} g \left[ g(10t^2 + 8 - 8\alpha) + 4t^2 \right]. \quad (159)$$



напряжений едва заметно, и стержень ведёт себя там практически как сплошной цилиндр. Отношение  $\frac{t}{b}$ , которое необходимо для того, чтобы можно было применять теорию мелкой внутренней выточки, и которое строго математически должно быть исчезающе малым,



Фиг. 60. Наибольшие напряжения в мелких кольцевых внутренних выточках при изгибе.

практически может быть и не очень малым; однако предыдущее решение при этом будет оставаться достаточно точным.

На фиг. 60 дана зависимость наибольшего напряжения от кривизны выточки и от коэффициента Пуассона.

**С. Чистый сдвиг.** Решение задачи о сдвиге при наличии мелкой внутренней выточки основывается на тех же общих правилах, что и в случае задачи об изгибе.

Возьмём сначала сплошной цилиндр, сечение  $x=0$  которого находится в условиях чистого сдвига. Решение для него даётся посредством следующих функций:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= -pxy + \frac{(\alpha-1)(5-2\alpha)p}{\alpha(5-\alpha)b^2} xy \left( y^2 + z^2 - \frac{4}{3} x^2 \right); \\ \Phi_1 &= \frac{(1-\alpha)p}{\alpha(5-\alpha)b^2} y (y^2 + z^2 - 4x^2); \\ \Phi_2 &= \frac{(4-2\alpha)p}{\alpha(5-\alpha)b^2} x \left( y^2 + z^2 - \frac{2}{3} x^2 \right); \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

$$F = -pxy + \frac{pxy}{(5-\alpha)b^2} \left[ (4-2\alpha)(y^2+z^2) + 4\left(\frac{2\alpha}{3}-1\right)x^2 \right]; \quad (162)$$

$$\sigma_x = \frac{4(4-\alpha)p}{(5-\alpha)b^2} xy; \quad \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad (163)$$

$$\tau_{xy} = p \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{(\alpha-1)z^2}{(5-\alpha)b^2} \right); \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = \frac{(-6+2\alpha)p}{(5-\alpha)b^2} yz. \quad (164)$$

Легко убедиться, что условия (110) на поверхности выполнены. Из (164) вытекает, что  $p$  есть касательное напряжение, действующее в точке на оси сплошного цилиндра. Обозначим перерезывающую силу в стержне буквой  $V$ . Согласно (16) найдём:

$$V = P_y = \iint_F \tau_{xy} dy dz = p \iint_F \left[ 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{(\alpha-1)z^2}{(5-\alpha)b^2} \right] dy dz. \quad (165)$$

Интегралы  $\iint_F y^2 dy dz$  и  $\iint_F z^2 dy dz$  представляют собой, как известно, экваториальные моменты инерции; каждый из них равен  $\frac{\pi b^4}{4}$ ; интеграл  $\iint_F dy dz$  равен площади поперечного сечения; таким образом получаем:

$$p = \frac{5-\alpha}{4-\alpha} \frac{V}{\pi b^2} = \frac{3m+2}{2m+2} \frac{V}{\pi b^2}. \quad (166)$$

В дальнейшем нужно опять выразить предыдущие решения через криволинейные координаты в соответствии с избранной выточкой. Именно, в частном случае при  $t = \rho$  для сферической выточки — через полярные координаты, а в общем случае — через эллиптические координаты.

*Частный случай  $t = \rho$ .* После перехода к координатной системе (7) получаем функции, которые можно рассматривать как часть общей потенциальной функции (40) с определёнными значениями  $\lambda$  и  $\nu$ . При разыскании поля добавочных напряжений мы будем сразу пренебрегать членами с коэффициентом  $\frac{1}{b^2}$ . В рамках теории мелкой выточки при определении коэффициента концентрации в конце вычислений этими членами всё равно мы должны были бы пренебречь. Поэтому речь идёт теперь только о том, чтобы на напряжённое состояние  $\tau_{xy} = p$  наложить другое напряжённое состояние, причём такое, посредством которого удовлетворяются граничные условия (13).

При составлении же выражений для функций, описывающих напряжённое состояние стержня с выточкой, подверженного изгибу силой, в конечном счёте для функций  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  нужно снова принять их выражения (161).

Вместо (161) при этом пренебрежении получаем только одну функцию

$$\Phi_0 = -pxy = -pu^2 \sin v \cos v \cos w, \quad (167)$$

которая соответствует случаю  $n=1$ ,  $v=2$ . В качестве добавочной функции к  $\Phi_0$  прежде всего может явиться функция с параметрами  $n=1$  и  $v=-3$ . Однако добавление этой функции недостаточно, и мы должны добавить ещё функции  $\Phi_1$  при  $n=1$ ,  $v=-2$  и  $\Phi_2$ , при  $n=0$ ,  $v=-2$ , дающие в выражениях для напряжений слагаемые, одинаковым образом зависящие от  $v$  и  $w$ .

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[ -pu^2 + \frac{A}{u^3} \right] \sin v \cos v \cos w; \quad \Phi_1 = \frac{B}{u^2} \sin v \cos w; \\ \Phi_2 &= \frac{C}{u^2} \cos v; \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Функция напряжений будет иметь вид:

$$F = \left[ -pu^2 + \frac{A}{u^3} + \frac{B+C}{u} \right] \sin v \cos v \cos w. \quad (169)$$

Нормальные напряжения вычислим по формуле (10):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \left[ 2p - \frac{12A}{u^5} - \frac{8+\alpha}{u^3} (B+C) \right] \sin v \cos v \cos w; \\ \sigma_v &= \left[ -2p + \frac{7A}{u^5} + \frac{\alpha-1}{u^3} (B+C) \right] \sin v \cos v \cos w; \\ \sigma_w &= \left[ \frac{5A}{u^5} + \frac{3\alpha-3}{u^3} (B+C) \right] \sin v \cos v \cos w. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Соответственно (II) выводим, наконец, формулы для касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \left[ p + \frac{4A}{u^5} + \frac{4-\alpha}{2u^3} (B+C) \right] \cos 2v \cos w + \\ &\quad + \frac{3\alpha}{2u^3} (B-C) \cos w; \\ \tau_{vw} &= \left[ p - \frac{A}{u^5} + \frac{\alpha-1}{u^3} (B+C) \right] \sin v \sin w; \\ \tau_{uw} &= \left[ -p - \frac{4A}{u^5} - \frac{2+\alpha}{u^3} B + \frac{2\alpha-2}{u^3} C \right] \cos v \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Постоянные определяются из граничных условий и принимают следующие значения:

$$A = -\frac{6}{5} C; \quad B = C; \quad C = \frac{5p}{4+5\alpha}; \quad (172)$$

причём, ради простоты, положено  $u_0 = t = 1$ . Максимальное касательное напряжение возникает у дна выточки в точке, где кас-



тельная к контуру параллельна направлению сдвига. Там оно равно:

$$\tau_1 = (\tau_{uv})_{u=a_0} = \frac{15(1-\frac{1}{m})}{7-\frac{5}{m}} p \quad (= 1,91 p \text{ при } \frac{1}{m} = 0,3). \quad (173)$$

Вдоль оси  $u$  касательное напряжение достигает *относительного максимума*; оно равно:

$$-(\tau_{uv})_{v=\frac{\pi}{2}} = p + \frac{p}{4+5\alpha} \left[ -\frac{24}{u^5} + \frac{5(4-\alpha)}{u^3} \right]. \quad (174)$$

Дифференцируя это выражение по  $u$  и приравнявая результат нулю, найдём точку, где  $\tau_{uv}$  достигает *относительного максимума*

$$u = \frac{y}{t} = \frac{2}{\sqrt{2-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{m}}}. \quad (175)$$

Вставив это значение  $u$  в (174), для относительного максимума получим выражение:

$$\tau_2 = (\tau_{uv})_{\max} = p \left[ 1 + \frac{(1+\frac{1}{m})^{\frac{5}{2}}}{4(7-\frac{5}{m})} \right] \quad (= 1,09 p \text{ при } \frac{1}{m} = 0,3). \quad (176)$$

Нормальное напряжение  $\sigma_v$ , действующее на поверхности, достигает при  $v = -\frac{\pi}{4}$ ,  $w = 0$  ( $u = u_0 = 1$ ) своего максимума, равного:

$$\sigma_1 = \frac{15}{7-\frac{5}{m}} p \quad (= 2,73 p \text{ при } \frac{1}{m} = 0,3). \quad (177)$$

В том же самом месте действует *наибольшее кольцевое напряжение*  $\sigma_w$ , численно равное:

$$\sigma_2 = \frac{\frac{15}{m}}{7-\frac{5}{m}} p \quad (= 0,82 p \text{ при } \frac{1}{m} = 0,3). \quad (178)$$

*Общий случай.* Для выточки любой кривизны нужно выразить использованные выше функции в эллиптических координатах, сохраняя те же значения показателей  $n$  и  $\nu$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[ -p \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + A \left( \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u T - \operatorname{ch} u + \frac{1}{3 \operatorname{ch} u} \right) \right] \times \\ &\quad \times \sin \vartheta \cos \vartheta \cos w; \\ \Phi_1 &= B [\operatorname{ch} u T - \operatorname{th} u] \sin \vartheta \cos w; \\ \Phi_2 &= C [\operatorname{sh} u T - \tilde{I}] \cos \vartheta; \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

Здесь члены, содержащие множитель  $\frac{1}{b^2}$ , сразу опущены. Функция напряжений имеет вид:

$$F = \left[ -p \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + (A + B + C) \operatorname{ch} u (\operatorname{sh} u T - 1) + \left( \frac{A}{3} + B \right) \frac{1}{\operatorname{ch} u} \right] \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varpi. \quad (180)$$

Нормальные напряжения вычисляем по формулам (4) и (5). При этом опять пользуемся сокращённой записью, введя величину  $h^2$ .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{h^2} \left\{ p \operatorname{sh} 2u - [A + (1 - \alpha)(B + C)] (\operatorname{sh} 2u T - 2 \operatorname{ch} u) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\frac{2A}{3} - 4B + (1 + \alpha)C \right] \frac{1}{\operatorname{ch} u} + \left( \frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{1}{\operatorname{ch}^3 u} \right\} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varpi + \\ &\quad + \frac{1}{h^4} \left[ (-2B + C) \operatorname{ch} u + \left( \frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{1}{\operatorname{ch} u} \right] \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varpi; \\ \sigma_v &= \frac{1}{h^2} \left\{ -p \operatorname{sh} 2u + [A + (1 - \alpha)(B + C)] \times \right. \\ &\quad \times (\operatorname{sh} 2u T - 2 \operatorname{ch} u) + \left[ \frac{2A}{3} - 2B + (2 - \alpha)C \right] \frac{1}{\operatorname{ch} u} + \\ &\quad \left. + \frac{1}{h^2} \left[ (2B - C) \operatorname{ch} u - \left( \frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{1}{\operatorname{ch} u} \right] \right\} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varpi; \\ \sigma_w &= \frac{1}{h^2} \left[ (-2B + C) \frac{1 - \alpha}{\operatorname{ch} u} - \left( \frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{1}{\operatorname{ch}^3 u} \right] \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varpi. \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Вычисляя касательные напряжения по формулам (6), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \frac{\cos \varpi}{h^2} \left\{ p \operatorname{ch}^2 u + \right. \\ &\quad \left. + [A + (1 - \alpha)(B + C)] (-\operatorname{ch}^2 u T + \operatorname{sh} u) + \right. \\ &\quad \left. + (2B - C) \operatorname{sh} u \right\} + \frac{\cos \varpi \sin^2 \vartheta}{h^2} \left\{ -p \operatorname{ch} 2u + \right. \\ &\quad \left. + [A + (1 - \alpha)(B + C)] (\operatorname{ch} 2u T - 2 \operatorname{sh} u) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\frac{A}{3} + (\alpha - 1)B \right] \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \right\} + \operatorname{sh} u \frac{\cos \varpi}{h^4} \left\{ (-2B + C) \operatorname{ch}^2 u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} A + 2B \right\}; \\ \tau_{vw} &= \frac{1}{h} \left\{ p \operatorname{sh} u + [A + (1 - \alpha)(B + C)] (-\operatorname{sh} u T + 1) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\frac{A}{3} + (\alpha - 1)B \right] \frac{1}{\operatorname{ch}^3 u} \right\} \sin \vartheta \sin \varpi; \\ \tau_{uw} &= \frac{1}{h} \left\{ -p \operatorname{ch} u + [A + (1 - \alpha)(B + C)] (\operatorname{ch} u T - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{th} u) - \left( \frac{2A}{3} + 2B \right) \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^3 u} \right\} \cos \vartheta \cos \varpi. \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

Граничные условия сначала приводят к шести уравнениям для определения постоянных, вошедших в решение. Действительно, в выражении для  $\sigma_u$  мы должны приравнять нулю (для  $u = u_0$ ) коэффициенты при  $\frac{\sin v \cos v \cos w}{h^3}$  и при  $\frac{\sin v \cos v \cos w}{h^4}$ ; в выражении для  $\tau_{uv}$  — коэффициент при  $\frac{\cos w}{h^2}$ , при  $\frac{\sin^2 v \cos w}{h^2}$  и при  $\frac{\cos w}{h^4}$ ; в выражении  $\tau_{vw}$  приравнивается нулю коэффициент при  $\frac{\cos v \cos w}{h}$ . Два из шести уравнений тождественны, кроме того два других уравнения являются следствием остальных, так что в конце концов остаются независимыми только три уравнения. Из них находим следующие значения постоянных

$$\left. \begin{aligned} A &= 3\left(\frac{1}{2} - \operatorname{ch}^2 u_0\right) C; \quad B = -\frac{C}{2}; \\ C &= \frac{p \operatorname{ch}^3 u_0}{\left(3 \operatorname{ch}^2 u_0 - 2 + \frac{\alpha}{2}\right) \left[-\operatorname{ch}^2 u_0 \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} u_0) + \operatorname{sh} u_0\right] + 2 \operatorname{sh} u_0}. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

При вычислении максимумов напряжений опять в качестве параметра целесообразно ввести кривизну контура, согласно (132). Кроме того, для краткости, введём обозначение:

$$N = -\frac{p \operatorname{ch}^2 u_0}{C} = \left(\frac{t}{\rho} - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \left\{ \left[ \left(2 - \frac{1}{m}\right) \frac{t}{\rho} + 1 + \frac{1}{m} \right] \left[ \frac{t}{\rho} c - 1 \right] - 2 \frac{t}{\rho} + 2 \right\}, \quad (184)$$

где  $c$  определяется формулой (134).

Для наибольшего касательного напряжения получаем:

$$\tau_1 = (\tau_{vw})_{u=u_0, v=\frac{\pi}{2}} = \frac{p}{N} 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) \sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}. \quad (185)$$

Координата точки в сечении  $w = 0$ ,  $v = \frac{\pi}{2}$ , где возникает наибольшее касательное напряжение, с достаточной точностью определяется уравнением  $\operatorname{sh} u = \sqrt{3} \operatorname{sh} u_0$  или

$$y = \frac{1}{\operatorname{ch} u_0} \sqrt{1 + 3 \operatorname{sh}^2 u_0} = t \sqrt{1 + \frac{2}{t/\rho}}.$$

Само наибольшее напряжение в этой точке равно

$$\tau_2 = p + \frac{p \frac{t}{\rho}}{N \left( \frac{t}{\rho} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left[ \left( 2 - \frac{1}{m} \right) \frac{t}{\rho} + 1 + \frac{1}{m} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\arctg \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{t}{\rho} - 1 \right)}}{\sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}} \right] + \frac{\left( \frac{t}{\rho} - 1 \right) \left[ \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{m} \right) \frac{t}{\rho} - \frac{1}{3} - \frac{1}{m} \right]}{\sqrt{3} \left( \frac{t}{\rho} + 2 \right)} \right\} \quad (186)$$

Напряжение  $\sigma_u$  достигает максимума на внешней поверхности при  $w = 0$ , а также при

$$\cos v = \frac{\operatorname{sh} u_0}{\sqrt{\operatorname{ch} 2 u_0}} \quad \text{или} \quad x = \frac{t \operatorname{sh}^2 u_0}{\operatorname{ch} u_0 \sqrt{\operatorname{ch} 2 u_0}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \frac{1}{\frac{t}{\rho}}}}$$

и равно:

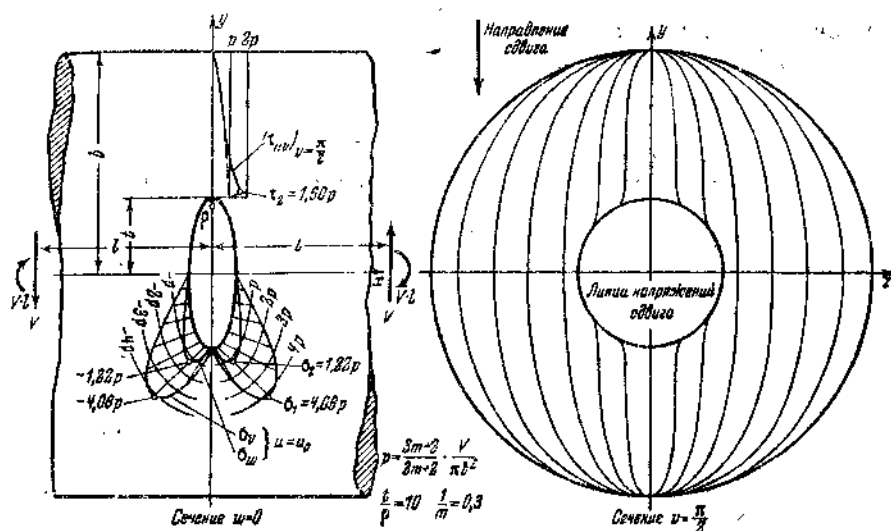
$$\sigma_1 = 2 \frac{p}{N} \sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}. \quad (187)$$

Кольцевое нормальное напряжение достигает максимума в том же месте и равно

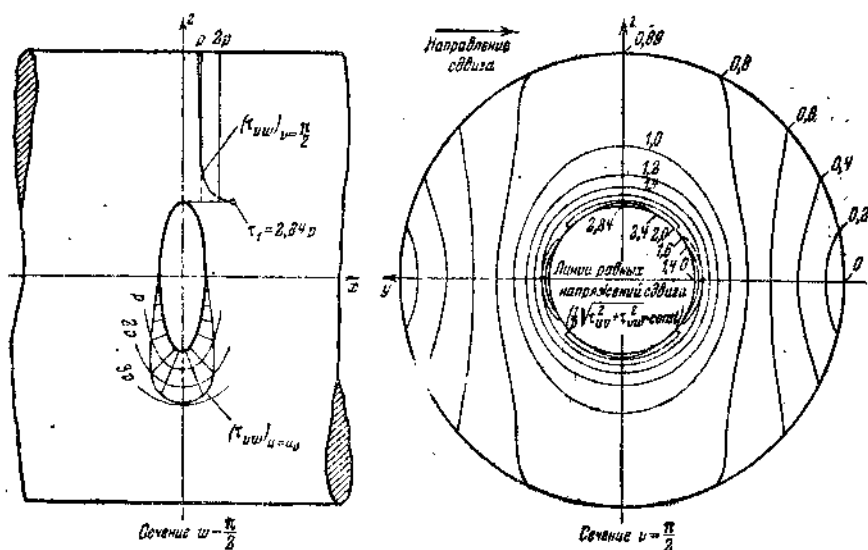
$$\sigma_2 = \frac{p}{N} \frac{2}{m} \sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}. \quad (188)$$

Разложением в ряд можно показать, что при  $t/\rho = 1$  получаем полное соответствие последних двух формул с формулами (177) и (178). ( $\tau_2$  совпадает только для  $m = 3$ ; отклонение для других значений  $m$  объясняется приближённым определением точки, где имеет место максимум.) На фиг. 61 и 62 показано распределение напряжений для  $\tau/\rho = 10$ ,  $1/m = 0,3$ . Характерные особенности в этом случае в основном те же, что и в случае внешней выточки. На фиг. 61 налево (осевое сечение в направлении сдвига) очень ясно видно, как напряжения  $\sigma_v$ ,  $\sigma_w$  и  $\tau_{vw}$  вблизи дна выточки принимают наибольшее значение, но в точке самого дна всё же делаются равными нулю. На фиг. 62 слева дано распределение касательного напряжения в сечении, перпендикулярном к направлению сдвига. Как это имело место в задачах растяжения и изгиба, при отсутствии выточки напряжение распределялось бы равномерно; наличие же выточки очень сильно искажает напряжённое состояние и при перемещении к краю сильно увеличивает величину напряжений. Наибольшая концентрация имеет место в точке, где касательная к контуру совпадает с направлением сдвига.

На правой стороне обеих фигур начерчены траектории касательных напряжений и линии их одинаковых значений по всему поперечному сечению. Равнодействующую касательных напряжений  $(\tau_v)_{\text{рез}}$ , необходимую при вычерчивании траекторий касательных напряжений



Фиг. 61. Кольцевая внутренняя выточка при сдвиге; слева—сечение в плоскости силы  $V$  с эпюрой напряжений; справа—поперечное сечение с линиями напряжений сдвига.

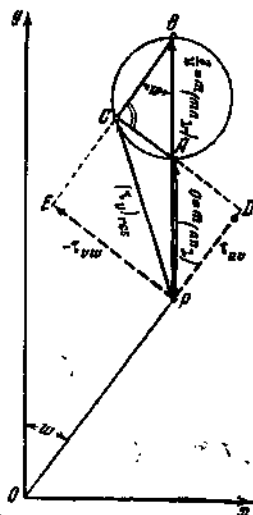


Фиг. 62. Кольцевая внутренняя выточка при сдвиге; слева—продольное сечение, перпендикулярное к направлению сдвига, с эпюрой напряжений; справа—поперечное сечение с линиями равных напряжений сдвига.

и их одинаковых значений в поперечном сечении, можно определить по компонентам  $\tau_{uw}$  и  $\tau_{vw}$  (которые нам известны) следующим простым способом. Как вытекает из (182), мы можем положить

$$\tau_{uw} = (\tau_{uw})_{w=0} \cos w, \quad \tau_{vw} = (\tau_{vw})_{w=\pi/2} \sin w. \quad (189)$$

Значения  $(\tau_{uw})_{w=0}$  и  $(\tau_{vw})_{w=\pi/2}$  уже даны на левой стороне обеих фигур в виде кривых. Для того чтобы найти теперь в какой-нибудь точке  $P$



Фиг. 63. Определение равнодействующей касательных напряжений.

поперечного сечения, центр которого принят за начало  $O$  координат, равнодействующую касательных напряжений, как по величине, так и по направлению, отложим в направлении оси  $y$ , во-первых, значение  $(\tau_{uw})_{w=0}$ , соответствующее  $y = OP$ , во-вторых, значение  $(\tau_{vw})_{w=\pi/2}$ , соответствующее  $z = OP$ . Получим точки  $A$  и  $B$  фиг. 63. Затем на отрезке  $AB$ , как на диаметре, построим окружность; пусть прямая, параллельная  $OP$  и проходящая через точку  $B$ , пересекает эту окружность в точке  $C$ . Тогда  $PC$  изображает собой равнодействующую касательного напряжения как по величине, так и по направлению.

Для доказательства проводим линии, изображенные на фиг. 63 пунктиром; точки их пересечения обозначим буквами  $D$  и  $E$ . Так как касательные напряжения  $\tau_{uw}$  и  $\tau_{vw}$  с одной стороны, по определению, должны идти вдоль направления  $w$  и перпендикулярно к нему, а с другой, благодаря (189), являются компонентами  $PA$  и  $PB$ , то они и будут изображаться отрезками  $PD$  и  $PE$  (у  $\tau_{vw}$  на чертеже указан знак минус, так как в направлении этого напряжения координата  $w$  убывает). Но по построению  $PD$  и  $PE$  являются компонентами равнодействующего касательного напряжения  $PC$ .

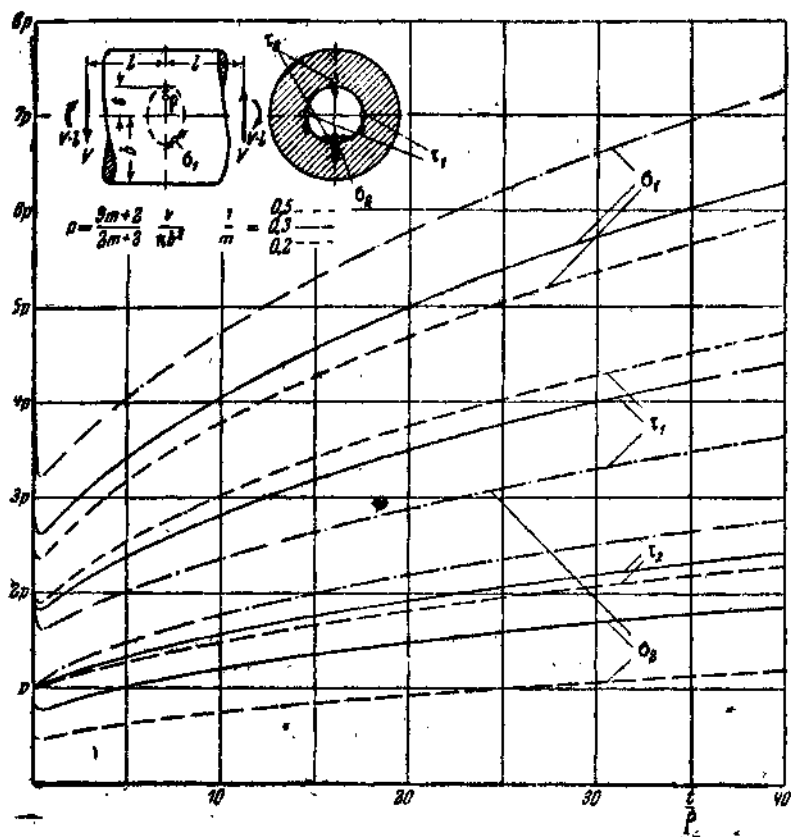
На фиг. 64 дана зависимость всех максимальных напряжений от кривизны выточки.

**Д. Кручение.** Здесь опять имеет место особый случай, представленный уравнениями (96) и (97). Прежде всего для сплошного цилиндра, не имеющего выточки, напишем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= 0; \quad \Phi_1 = 0; \quad \Phi_2 = -\frac{2M}{\pi b^4} xz; \\ \Phi_3 &= \frac{2M}{\pi b^4} xy; \quad F = 0; \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2Mz}{\pi b^4}; \quad \tau_{xz} = \frac{2My}{\pi b^4}, \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

где под  $M$  понимается крутящий момент, для которого должно быть выполнено равенство (16) с заменой  $M_z$  на  $M$ . Доказательство этого положения основывается на элементарных формулах сопротивления материалов.



Фиг. 64. Наибольшие напряжения в мелких кольцевых внутренних выточках при сдвиге.

В этой сравнительно простой задаче мы начнём сразу с общего случая, не выделяя частный при  $t = p$ . Перейдём поэтому к эллиптическим координатам; получим:

$$\frac{\Phi_2}{\cos w} = - \frac{\Phi_1}{\sin w} = \frac{2M}{\pi k b^4} \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \sin v \cos v. \quad (192)$$

Член  $\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$ , зависящий от  $u$ , на основании общего выражения (38) потенциальной функции соответствует значениям  $n=1$ ,  $v=2$ .

Дополнительные функции получаем заменой  $\nu = 2$  на  $\nu = -3$ ; в результате имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi_3}{\cos w} = -\frac{\Phi_3}{\sin w} = \frac{2M}{\pi b^4} \left[ \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + A \left( \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u T - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{ch} u + \frac{1}{3 \operatorname{ch} u} \right) \right] \sin v \cos v; \\ \Phi_1 = 0; \Phi_0 = 0; F = 0. \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Отсюда, согласно (4), (5) и (6), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u = \sigma_v = \sigma_w = 0; \\ \tau_{uv} = 0; \\ \tau_{vw} = \frac{p'}{h} \left[ \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + A \left( \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u T - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{ch} u + \frac{1}{3 \operatorname{ch} u} \right) \right] \sin^2 v; \\ \tau_{uw} = \frac{p'}{h} \left[ \operatorname{ch}^2 u + A \left( \operatorname{ch}^2 u T - \operatorname{sh} u - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2 \operatorname{sh} u}{3 \operatorname{ch}^2 u} \right) \right] \sin v \cos v, \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

где

$$p' = \frac{2M}{\pi b^4}. \quad (195)$$

В качестве номинального напряжения введём *напряжение кручения сплошного цилиндра в расстоянии  $l$  от его оси*.

$$p = \frac{2Mt}{\pi b^4}. \quad (196)$$

Тогда по (129) имеем

$$p' = \frac{p}{t} = \frac{p}{\operatorname{ch} u_0}. \quad (197)$$

Граничное условие (13) для постоянной  $A$  даёт следующее значение:

$$\frac{1}{A} = - (T)_{u=u_0} + \frac{\operatorname{sh} u_0}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{2 \operatorname{sh} u_0}{3 \operatorname{ch}^4 u_0}. \quad (198)$$

Наибольшее напряжение возникает у дна выточки и равно

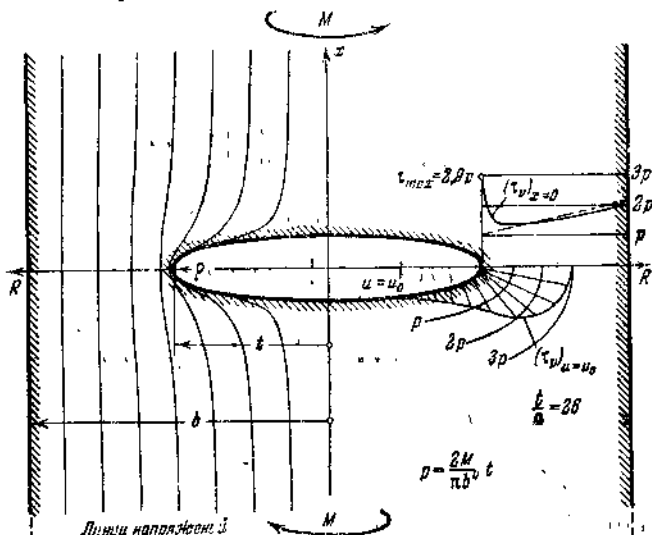
$$\tau_{\max} = (\tau_{vw})_{u=u_0} = p + \frac{Ap}{\operatorname{sh} u_0 \operatorname{ch} u_0} \left( \operatorname{sh} u_0 \operatorname{ch} u_0 (T)_{u=u_0} - \right. \\ \left. - \operatorname{ch} u_0 + \frac{1}{3 \operatorname{ch} u_0} \right). \quad (199)$$



После введения кривизны выточки, согласно (132), и обозначения  $c$  из (134), это выражение можно записать в форме

$$\frac{\tau_{\max}}{p} = \frac{2\left(\frac{t}{p} - 1\right)^2}{3\left(\frac{t}{p}\right)^2 c - 5\frac{t}{p} + 2}. \quad (200)$$

Распределение напряжений для  $t/p = 26$  дано на фиг. 65. Для внешнего края — радиус  $b$  цилиндра можно принять равным  $2t$ , так как



Фиг. 65. Кольцевая внутренняя выточка при кручении.

на такое расстояние уже влияние выточки не распространяется. Максимальное напряжение, возникающее на контуре выточки и равное  $2,9p$ , превосходит напряжение на поверхности цилиндра, где оно равно  $2p$ . Вдоль поверхности, особенно по направлению к оси, касательные напряжения очень быстро убывают. Осевое сверление с малым радиусом очень мало исказило бы напряжённое состояние, так как материал вблизи оси стержня почти не деформируется. Налево указаны линии напряжений, дающие в каждой точке направление равнодействующего касательного напряжения. Эти линии проще всего найти путём разыскания сначала дифференциального уравнения для них, а затем путём его интегрирования. Так как компоненты  $u$  и  $v$  линейного элемента линии напряжений относятся друг к другу так же, как компоненты  $u$  и  $v$  касательного напряжения, то имеем:

$$\frac{h du}{h dv} = \frac{du}{dv} = \frac{\tau_{uv}}{\tau_{vu}} \quad (201)$$

Если вместо компонентов  $\tau_{uv}$  и  $\tau_{vw}$  подставить их выражения (194), то после интегрирования получим следующее уравнение для линий напряжений:

$$\left[ \operatorname{ch}^4 u + A \left( \operatorname{ch}^4 u T - \operatorname{ch}^2 u \operatorname{sh} u - \frac{2}{3} \operatorname{sh} u \right) \right] \sin^4 v = \text{const.} \quad (202)$$

Зависимость наибольшего напряжения от кривизны выточки дана на фиг. 66. Наибольшее напряжение для частного случая  $t = \rho$ , который особо мы здесь не рассматриваем, получим из (200) посредством предельного перехода. При этом, для краткости, положим:

$$\frac{t}{\rho} - 1 = q. \quad (203)$$

Тогда

$$c = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{q}}{\sqrt{q}} = 1 - \frac{q}{3} + \frac{q^2}{5} \dots \quad (204)$$

и, наконец,

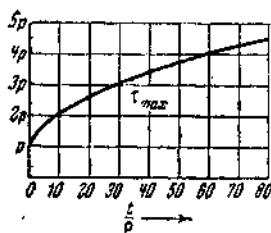
$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\max}}{\rho} &= \frac{2q^2}{3(1+2q+q^2)\left(1 - \frac{q}{3} + \frac{q^2}{5} \dots\right) - 5q - 3} = \\ &= \frac{2q^2}{\frac{8}{5}q^2 - \frac{8}{35}q^4 + \dots} = \frac{1}{\frac{4}{5} - \frac{4}{35}q^2 + \dots}. \end{aligned} \quad (205)$$

Полож  $t = \rho$ , т. е.  $q = 0$ , для шаровой выточки получим:

$$\frac{\tau_{\max}}{\rho} = \frac{5}{4}, \quad (206)$$

в чём легко убедиться, исходя и из сферических координат.

Мы видели, что во всех случаях нагружения цилиндра с внутренней выточкой вместо номинального напряжения, отнесённого к наиболее узкому поперечному сечению, вводится в расчётные формулы в качестве сравнительной величины напряжение  $p$  в сплошном цилиндре. Максимальное напряжение всегда получалось умножением этого напряжения  $p$  в сплошном цилиндре на коэффициент, зависящий только от кривизны  $t/\rho$  и являющийся коэффициентом концентрации мелкой выточки. Вследствие закона затухания искажение в распределении напряжений делается незаметным уже на сравнительно небольшом расстоянии от оси, так что в известных пределах можно использовать теорию мелкой выточки, как приближённую теорию для выточек любой глубины. На фиг. 57, 59, 61, 62 и 65 это принято во внимание, и внешняя



Фиг. 66. Наибольшее напряжение в мелкой кольцевой внутренней выточке при кручении.

точки, как приближённую теорию для выточек любой глубины. На фиг. 57, 59, 61, 62 и 65 это принято во внимание, и внешняя

поверхность взята на расстоянии только лишь  $b = 2t$ , или  $3t$ . Этот ход мысли приводит всё же только к приближённому способу, при котором обязательно имеется большая или меньшая ошибка. Ослабляющее влияние внешней поверхности может быть учтено при этом лишь надлежащим выбором номинального напряжения  $p$ , так например, при кручении можно принять  $p = \left(1 - \frac{t^2}{b^2}\right) \tau_n$ . Этот способ часто, но, вообще говоря, не всегда, даёт достаточно точные значения. Влияние внешнего радиуса  $b$  должно учитываться тем, что кроме коэффициента концентрации мелкой выточки нужно определить коэффициент глубокой выточки и наложить их друг на друга по способу, указанному в II,4. Ниже мы увидим, что существенное влияние оказывает также осевое внутреннее сверление, которое должно быть учтено посредством третьего предельного значения коэффициента концентрации.

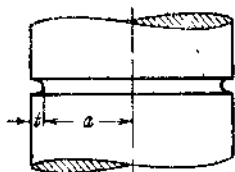
В следующем параграфе мы займёмся определением всех тех предельных значений коэффициента концентрации, которые необходимы для полного исследования выточек на телах вращения. Соответствующие этим выточкам напряжённые состояния располагаются на достаточном удалении от оси стержня и вследствие этого могут считаться двумерными.

### 5. Выточка на теле вращения при двумерном напряжённом состоянии.

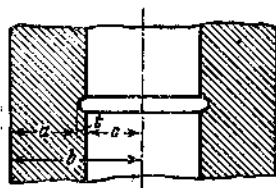
Мы будем различать следующие четыре случая:

- 1) Мелкая внешняя выточка (фиг. 67,  $t \ll a$ ).
- 2) Мелкая внутренняя выточка при большом осевом отверстии (фиг. 68,  $t \ll a$ ,  $t \ll c$ ).
- 3) Глубокая внешняя выточка при большом осевом отверстии (фиг. 69,  $a \ll t$ ,  $a \ll c$ ).
- 4) Глубокая внутренняя выточка (фиг. 70,  $a \ll t$ ).

Первые два случая, точно так же как и последние два, можно рассматривать вместе, так что с этой точки зрения мы будем разли-



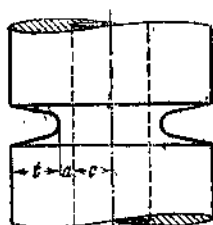
Фиг. 67. Мелкая кольцевая внешняя выточка.



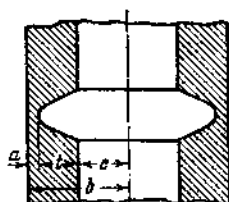
Фиг. 68. Мелкая кольцевая внутренняя выточка при большом осевом отверстии.

чать только лишь мелкую и глубокую выточку. Области с искажённым напряжённым состоянием во всех этих случаях

лежат на большом расстоянии от оси, вследствие чего напряжённое состояние можно приближённо считать плоским.



Фиг. 69. Глубокая кольцевая внешняя выточка при большом осевом отверстии.



Фиг. 70. Глубокая кольцевая внутренняя выточка.

Мы будем пользоваться цилиндрическими координатами, положив

$$x = x; \quad y = r \cos w; \quad z = r \sin w. \quad (207)$$

Обратимся к соотношениям, справедливым для любых криволинейных координат. Из (20), III, 3 получим, заменив  $u$  буквой  $x$ , а  $v$  буквой  $r$ , значения коэффициентов искажения

$$h_x = 1; \quad h_r = 1; \quad h_w = r. \quad (208)$$

Оператор Лапласа  $\Delta$  берём из (98), III, 7

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2}. \quad (209)$$

Для  $\Delta F$  точно так же, как и для напряжений, из (91) и (92), III, 7 можно вывести следующие выражения:

$$\Delta F = 2 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \cos w \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} - \frac{\sin w}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \right. \\ \left. + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} + \frac{\cos w}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right); \quad (210)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + 2\alpha \frac{\partial}{\partial x}; \\ \sigma_r &= -\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + 2\alpha \left( \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right); \\ \sigma_w &= -\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta F + \\ &\quad + \frac{2\alpha}{r} \left( -\sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xr} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial r} + \alpha \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \cos w \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \sin w \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right); \\ \tau_{rw} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \alpha \left( \frac{\cos w}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin w}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right); \\ \tau_{xw} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial w} + \alpha \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} - \sin w \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \cos w \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

Отсюда легко получить формулы, относящиеся к частным видам напряжённого состояния.

**А. Чистое растяжение.** При чистом растяжении, в силу осевой симметрии, функции  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  можно считать равными нулю, а для остальных функций воспользуемся подстановками, ранее использованными при рассмотрении плоского деформированного состояния

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi'_0 + \alpha \Phi'_1; \quad \Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}; \quad \Phi_2 = \Phi_3 = 0; \\ \Phi'_0 + x \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} &= F'; \quad \Phi'_0 = \Phi'_0(x, r); \\ \Phi'_1 &= \Phi'_1(x, r); \quad \Delta \Phi'_0 = \Delta \Phi'_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

Тогда

$$F = \Phi_0 + x \Phi_1 = F' + \alpha \Phi'_1. \quad (213)$$

Как уже было отмечено, область возмущения напряжённого состояния, в которой требуется вычислить предельные значения коэффициента концентрации, удалена на большое расстояние от оси, и, значит, размеры в направлениях  $x$  и  $r$  можно рассматривать как малые в сравнении с самым  $r$ . Поэтому при вычислении можно принять  $r = \infty$ , вследствие чего оператор  $\Delta$  перейдёт в

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad (214)$$

т. е. в оператор Лапласа на плоскости  $x, r$ . Из (210), принимая во внимание, что  $\Delta \Phi'_1 = 0$ , следует

$$\Delta F = \Delta F' = \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 \Phi'_1}{\partial r^2}. \quad (215)$$

Учитывая это последнее равенство и точно также полагая в (211)  $r = \infty$ , найдём:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F'}{\partial r^2}; \quad \sigma_r = \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}; \quad \sigma_w = \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_r); \\ \tau_{xr} &= -\frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial r}; \quad \tau_{rw} = 0; \quad \tau_{xw} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Следовательно, напряжения здесь выражаются через функцию на напряжений так же, как и при *плоском деформированном состоянии*. Этим и доказано, что в данном случае речь идёт о *плоской задаче*. Проведение вычислений поэтому излишне, так как соответствующее решение было получено в гл. IV. Для коэффициента концентрации в случае мелкой выточки можно пользоваться уравнением (131), IV, 4, а для глубокой выточки применима формула (190), IV, 6. Для максимального значения напряжения  $\sigma_m$ , которое обозначим буквой  $\sigma_2$ , из (216) при  $\sigma_r = 0$  (свободный контур) получается значение  $\frac{1}{m} \sigma_m$ . При этом нужно иметь в виду следующее: соотноше-

ние (216), выведенное в предположении, что область с искажённым напряжённым состоянием находится на большом расстоянии  $r$  от оси, справедливо только лишь для напряжений, подчиняющихся закону затухания, т. е. для самих местных напряжений, и несправедливо для первоначального напряжённого состояния  $\sigma_x = \sigma_n$ , в стержне при отсутствии выточки, когда кольцевое нормальное напряжение равно нулю. При вычислении максимального напряжения  $\sigma_2$  нужно поэтому вместо  $\sigma_m$  поставить не  $\sigma_1$ , а только приращение  $\sigma_1 - \sigma_n$ , вызванное самой выточкой; тогда получим:

$$\sigma_2 = \frac{1}{m} (\sigma_1 - \sigma_n). \quad (217)$$

**В. Чистый изгиб.** Заметим, что в этом случае напряжённое состояние зависит не только от  $x$  и  $r$ , но также и от координаты  $w$ . Как следует из задач, рассмотренных уже в V, 3, В и V, 4, В, функции  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  в этом случае содержат множитель  $\cos w$  и мы можем положить:

$$\Phi_0 = \varphi_0(x, r) \cos w; \quad \Phi_1 = \varphi_1(x, r) \cos w. \quad (218)$$

Применение оператора (209) приводит тогда к следующему дифференциальному уравнению для  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{\varphi_0}{r^2} = \Delta \varphi_0 - \frac{\varphi_0}{r^2} = 0. \quad (219)$$

Положив здесь  $r = \infty$ , опять получим потенциальное уравнение в плоскости  $x, r$ , т. е. появляющийся при изгибе множитель  $\cos w$  (в соответствии с простым растяжением) не вызывает никаких изменений в структуре основных дифференциальных уравнений. При решении задачи можно снова принять  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  равными нулю, и поэтому остаётся справедливым тот же ход рассуждений, что и в задаче о простом растяжении; значит, коэффициенты концентрации в этих двух случаях одинаковы.

**С. Чистый сдвиг.** Из рассмотренных в V, С, 3 и в V, 4, С задач о сдвиге следует, что  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  содержат множитель  $\cos w$ , а функция  $\Phi_2$ , которую теперь считать равной нулю нельзя, зависит

только от  $x$  и  $r$ . Для установления номинального напряжения необходимо найти прежде всего напряжённое состояние в полом цилиндра с внутренним радиусом  $c$ , с внешним —  $b$ , работающем на сдвиг. Оно представляется следующими функциями

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= C \left[ -(b^2 + c^2) x r + \frac{(a-1)(5-2a)}{a(5-a)} \left( x r^3 - \frac{4}{3} x^3 r \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^2 c^2}{a} \frac{x}{r} \right] \cos w; \\ \Phi_1 &= C \left[ \frac{1-a}{a(5-a)} (r^3 - 4x^2 r) + \frac{b^2 c^2}{a} \frac{1}{r} \right] \cos w; \\ \Phi_2 &= C \frac{4-2a}{a(5-a)} \left( x r^3 - \frac{2}{3} x^3 \right); \quad \Phi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (220)$$

$$F = C \left\{ -(b^2 + c^2) x r + \frac{1}{5-a} \left[ (4-2a) x r^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( -4 + \frac{8a}{3} \right) x^3 r \right] \right\} \cos w; \quad (221)$$

$$\Delta F = \frac{8C}{5-a} x r \cos w, \quad (222)$$

которые дают следующие компоненты напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= C \frac{4(4-a)}{5-a} x r \cos w; \quad \sigma_r = 0; \quad \sigma_w = 0; \\ \tau_{xr} &= C \left[ b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{r^2} - r^2 \right] \cos w; \quad \tau_{rw} = 0; \\ \tau_{xw} &= C \left[ -b^2 - c^2 - \frac{b^2 c^2}{r^2} + \frac{a-1}{5-a} r^2 \right] \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Если обозначим перерезывающую силу буквой  $V$ , то путём сравнения с элементарной теорией изгиба найдём

$$C = \frac{5-a}{4-a} \frac{V}{\pi (b^4 - c^4)}. \quad (224)$$

Напряжённое состояние в полом цилиндре, даваемое предыдущими формулами, представляет одновременно первую ступень на пути к вычислению напряжений в цилиндре с выточкой, поскольку пока ещё не учтена кривизна выточки и область около наименьшего поперечного сечения может приблизительно рассматриваться как часть полого цилиндра. В случае внешней выточки величина  $b$  при этом тождественна с  $c+a$ , а для внутренней выточки  $c$  тождественна с  $b-a$ . Во всех точках зоны около выточки величина  $r$  примерно одинакова и приблизительно равна расстоянию от оси до дна выточки. Изменение  $r$  в рассматриваемой области можно считать пренебрежимо малым по сравнению с самими  $r$ . Если для точки у дна выточки примем  $x=0$ , то и величина  $x$  в сравнении с  $b$  или с  $c$  пренебре-

жимо мала. В результате в зоне около выточки получим следующее *первоначальное напряжённое состояние*

$$\sigma_x = \sigma_r = \sigma_w = \tau_{xw} = 0; \quad (225)$$

$$\tau_{rw} = 0; \quad \tau_{w\theta} = \tau_n \sin w, \quad (226)$$

где номинальное напряжение  $\tau_n$  для случая внешней выточки (с  $\frac{c}{a}$  играет роль  $b$ ) равно:

$$\tau_n = -(\tau_{w\theta})_{r=b} = \frac{V \left[ \left(3 + \frac{2}{m}\right) c^2 + \left(1 + \frac{2}{m}\right) (c+a)^2 \right]}{\pi \left(1 + \frac{1}{m}\right) [(c+a)^4 - c^4]}; \quad (227)$$

для случая же внутренней выточки (роль  $c$  играет  $b-a$ ) таково:

$$\tau_n = -(\tau_{w\theta})_{r=c} = \frac{V \left[ \left(3 + \frac{2}{m}\right) b^2 + \left(1 + \frac{2}{m}\right) (b-a)^2 \right]}{\pi \left(1 + \frac{1}{m}\right) [b^4 - (b-a)^4]}. \quad (228)$$

Можно показать, что при учёте влияния выточки это простое напряжённое состояние претерпевает изменения только лишь в том смысле, что изменяется напряжение  $\tau_{w\theta}$ , а также появляется напряжение  $\tau_{rw}$ . Последнего достаточно для удовлетворения граничным условиям. Нормальных же напряжений при этом не возникает. Положим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \left[ x \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + r \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + (1-2\alpha) \varphi_0 \right] \cos w; \\ \Phi_1 &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \cos w; \quad \Phi_2 = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{\varphi_0}{r}; \quad \Phi_3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

причём  $\varphi_0$  должна зависеть только от  $x$  и  $r$ , а  $\varphi_0 \cos w$  — гармоническая функция. Функция  $\varphi_0$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\Delta \varphi_0 - \frac{\varphi_0}{r^2} = 0, \quad (230)$$

откуда следует, во-первых, что

$$\Delta \left( \frac{\varphi_0}{r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{2\varphi_0}{r^3} = 0, \quad (231)$$

и, во-вторых, после дифференцирования, что:

$$\Delta \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{2\varphi_0}{r^3} = 0. \quad (232)$$

Теперь легко видеть, что  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  действительно являются гармоническими функциями.



Функция напряжений имеет вид:

$$F = -2\alpha\varphi_0 \cos w \quad (\Delta F = 0). \quad (238)$$

Тогда напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_w &= 0, \quad \sigma_r = -2\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi_0}{r} \right) \cos w, \\ \sigma_w &= 2\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi_0}{r} \right) \cos w, \\ \tau_{xr} &= -\frac{\alpha}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \cos w, \quad \tau_{rw} = \alpha \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\varphi_0}{r^2} \right) \sin w, \\ \tau_{xw} &= \alpha \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial r} \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Положим теперь  $r = \infty$  и для простоты введём новую функцию

$$\varphi = \alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}. \quad (235)$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r = \sigma_w = \tau_{xr} = 0; \\ \tau_{rw} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin w; \quad \tau_{xw} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

Согласно (232) при  $r = \infty$ , функция  $\varphi$  удовлетворяет потенциальному уравнению в плоскости  $x, r$ . Теперь и разыскание напряжений возмущения оказывается чрезвычайно простым.

В случае *мелкой выточки* речь идёт о том, чтобы на элементарное напряжённое состояние  $\tau_{xw} = \tau_n \sin w$ , которому соответствует функция  $\varphi = \tau_n x$ , наложить подходящее добавочное напряжённое состояние так, чтобы поверхность выточки была свободной от нагрузки. Для этого перейдём к эллиптическим координатам и положим

$$\left. \begin{aligned} z &= b - r \text{ (или } r - c) = \operatorname{ch} u \sin v; \\ x &= \operatorname{sh} u \cos v. \end{aligned} \right\} \quad (237)$$

Как следует из (236), компонент по оси  $x$  касательного напряжения, действующего в сечении  $w = \text{const}$ , получается дифференцированием функции  $\varphi \sin w$  по  $x$ , а компонент по оси  $r$  — дифференцированием по  $r$ . Следовательно, для получения компонента в направлении  $u$  или  $v$  нужно брать производную также по направлениям  $u$  или  $v$ . Поэтому в криволинейных координатах (III, 3) имеем:

$$\tau_{uw} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \sin w; \quad \tau_{vw} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin w. \quad (238)$$

Выбранные здесь эллиптические координаты уже были использованы нами при решении ряда задач. Относительно коэффициентов искаже-

ния, которые вследствие изометрии равны друг другу, отсылаем к (49), IV, 2. Для  $\varphi$  применимо простое потенциальное уравнение (46), IV, 1.

В случае мелкой выточки контур цилиндра, содержащий выточку, состоит из прямой  $z=0$  или  $v=0$  и из кривой, по которой очерчена выточка и которую мы примем за эллипс, обозначенный буквой  $u_0$ . Поэтому должны быть удовлетворены два граничных условия:

$$u_{vw}|_{v=0}=0, \quad (\tau_{uw})_{u=u_0}=0. \quad (239)$$

Элементарная функция

$$\varphi = \tau_n \cdot x = \tau_n \operatorname{sh} u \cos v$$

Фиг. 71. Мелкая кольцевая выточка с большим расстоянием от оси при сдвиге или кручении (ср. фиг. 67 и 68).

уже удовлетворяет первому из этих условий, что налагает такое же условие и на добавочную функцию, и значит, последняя точно таким же

образом должна зависеть от  $v$ ; с другой стороны, она должна удовлетворять закону затухания, т. е. для больших  $u$  — обращаться в нуль, и, наконец, удовлетворять потенциальному уравнению на плоскости; всем этим условиям удовлетворяет функция  $e^{-u} \cos v$ . Положим

$$\varphi = \tau_n (\operatorname{sh} u + A e^{-u}) \cos v. \quad (240)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uw} &= \frac{\tau_n}{h} (\operatorname{ch} u - A e^{-u}) \cos v \sin w; \\ \tau_{vw} &= \frac{\tau_n}{h} (-\operatorname{sh} u - A e^{-u}) \sin v \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

Второе граничное условие даёт

$$A = e^{u_0} \operatorname{ch} u_0. \quad (242)$$

Параметр  $u_0$  выражается через глубину выточки и через её радиус кривизны (см. IV, 41) по формуле  $\operatorname{cth} u_0 = \sqrt{\frac{t}{\rho}}$ .

Для  $\operatorname{cth} u_0 = 5$  распределение напряжений изображено на фиг. 71. Наибольшее напряжение возникает у дна выточки, где касательное напряжение достигает шестикратного значения. Вообще, для наибольшего напряжения получаем:

$$\tau_{\max} = -(\tau_{vw})_{u=u_0} = \tau_n (1 + \operatorname{cth} u_0) = \tau_n \left(1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}}\right). \quad (243)$$

$v=w=\pi/2$

Такой же коэффициент концентрации был уже найден для продольной выточки в стержне при изгибе (см. фиг. 34).

В случае *глубокой* выточки, в противоположность тому, что имело место для мелкой выточки, речь идёт не о том, чтобы на заданную элементарную функцию наложить добавочную функцию, а о самостоятельном разыскании функции напряжений, удовлетворяющей одновременно граничным условиям на внутреннем и внешнем контурах и определяющейся посредством их однозначно. Следствие существования выточки один из этих контуров искривлён, и так как рассматривается область, близкая к дну выточки, то он может быть изображён в виде гиперболы  $v_0$ . Другой контур образуется прямой  $v=0$ , или  $v=0$ . Следовательно, нужно удовлетворить двум граничным условиям:

$$(\tau_{vw})_{v=0}=0; \quad (\tau_{vw})_{v=v_0}=0. \quad (244)$$

Единственным решением задачи является то, для которого касательное напряжение  $\tau_{vw}$  обращается в нуль не только на обоих контурах, но и повсюду, именно:

$$\varphi = Au; \quad \tau_{uw} = \frac{A}{h} \sin w; \quad \tau_{vw} = 0. \quad (245)$$

Остаётся определить постоянную  $A$ . Перерезывающая сила, с точностью до знака, должна быть равна сумме составляющих напряжений по оси  $y$ , действующих в произвольном сечении, взятом между краем  $v=0$  и краем  $v=v_0$ . За такое сечение примем поверхность  $u = \text{const}$ ; получим:

$$V = - \int_F \tau_{uw} \cos(y, w) dF = \int_F \tau_{uw} \sin w dF. \quad (246)$$

Здесь элемент  $dF$  площади представляет собой малый прямоугольник с рёбрами  $h_v dv$  и  $h_w dw$ . Но коэффициент искажения  $h_w$  равен расстоянию  $r$  от оси, которое по предположению велико по сравнению с толщиной  $a$  в наименьшем поперечном сечении и, следовательно, при интегрировании (246) может считаться постоянным, при внешней выточке равным  $c$ , а при внутренней —  $b$ . Таким образом для внешней выточки получается:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{v_0} \tau_{uw} \sin w h dv cdw = A c \pi v_0. \quad (247)$$

Номинальное напряжение для глубокой выточки можно получить из (227) путём предельного перехода при  $a \rightarrow 0$ . Будем иметь

$$\tau_n = \frac{V}{\pi c a}; \quad (248)$$

но в нашей координатной системе

$$a = (s)_{u=0}^{v=v_0} = \sin v_0. \quad (249)$$

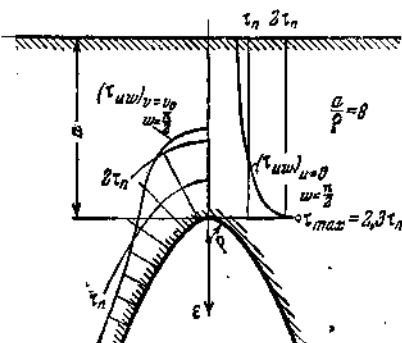
и, следовательно,

$$V = \pi c \tau_n \sin v_0. \quad (250)$$

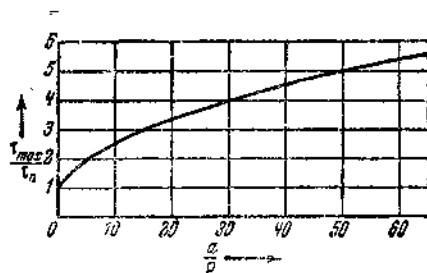
Наконец, (247) даёт

$$A = \tau_n \frac{\sin v_0}{v_0}. \quad (251)$$

К этому же результату мы пришли бы и для внутренней выточки. На фиг. 72 дано распределение напряжений для  $\operatorname{tg} v_0 = \sqrt{8}$ .



Фиг. 72. Глубокая кольцевая выточка с большим расстоянием от оси при сдвиге или кручении (ср. фиг. 69 и 70).



Фиг. 73. Наибольшее напряжение в глубоких кольцевых выточках с большим расстоянием от оси при сдвиге или кручении.

У дна выточки имеет место значительный максимум напряжений, равный  $1,8 \tau_n$ . Вообще для максимального напряжения получается:

$$\tau_{\max} = (\tau_{uw})_{u=0} = \tau_n \frac{\operatorname{tg} v_0}{v_0}. \quad (252)$$

$v = v_0$   
 $w = \pi/2$

Параметр  $v_0$  связан известным образом с радиусом кривизны и с толщиной в наименьшем поперечном сечении (см. (68), IV, 2); окончательно получаем:

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_n} = \frac{\sqrt{\frac{a}{\rho}}}{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}}}. \quad (253)$$

Фиг. 73 поясняет эту зависимость.

**Д. Чистое кручение.** В задаче о кручении целесообразно принять следующие выражения для функций напряжений, упрощающие расчёт:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= 0; \quad \Phi_1 = 0; \\ \Phi_2 &= -\frac{1}{\alpha} \varphi(x, r) \sin w; \\ \Phi_3 &= \frac{1}{\alpha} \varphi(x, r) \cos w. \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

Откуда получаем:

$$F = 0, \quad (255)$$

и формулы (211) дают

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_r = \sigma_w = \tau_{xr} = 0; \\ \tau_{rw} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r}; \quad \tau_{xw} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

или, при  $r = \infty$

$$\tau_{rw} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \tau_{xw} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (257)$$

Эти выражения отличаются от (236) множителем  $\sin w$ ; следовательно, ход вычислений такой же, как и в задаче о сдвиге и можно сразу сказать, что, также получаются равными<sup>1)</sup> и коэффициенты концентрации для мелкой выточки, т. е.  $1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}}$ . Для глубокой выточки, вследствие требуемого при определении постоянной  $A$  интегрирования, требуется особое доказательство. Возьмём

$$\varphi = Au; \quad \tau_{uw} = \frac{A}{h}; \quad \tau_{vw} = 0. \quad (258)$$

Момент напряжений относительно оси  $x$  вычисляется по формуле

$$M = \int_F \int \tau_{uw} r dF. \quad (259)$$

Элементарная площадка  $dF$ , как и в разделе  $C$  — прямоугольник с рёбрами  $h_w dv$  и  $h_w dw$ , причём  $h_w = r$  — постоянная, которую можно считать равной для внешней выточки  $c$ , а для внутренней  $b$ ; для внешней выточки получаем:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{v_0} \tau_{uw} c^2 h_w dv dw = 2Ac^2 \pi v_0. \quad (260)$$

Номинальное напряжение для этого напряжённого состояния соответствует элементарным формулам кручения и, следовательно, вычисляется по формуле для внешней выточки:

$$\tau_n = \frac{2M(c+a)}{\pi[(c+a)^4 - c^4]}, \quad (261)$$

для внутренней выточки

$$\tau_n = \frac{2M(b-a)}{\pi[b^4 - (b-a)^4]}. \quad (262)$$

<sup>1)</sup> Для полукруглой выточки ( $t = \rho$ ) коэффициент концентрации, следовательно, равен 2. Это соответствует и результатам Willers [Z. Math. Physik, т. 55 (1907), стр. 227] и Sonntag [Z. angew. Math. u. Mech., т. 9, (1929), стр. 1].

Путём предельного перехода, устремляя  $a \rightarrow 0$ , для глубокой внешней выточки из (261) получаем

$$\tau_n = \frac{M}{2\pi c^2 a}. \quad (263)$$

Отсюда, применяя (249), выводим

$$M = 2\pi c^2 \sin v_0 \tau_n. \quad (264)$$

Наконец, подстановкой в (260) находим:

$$A = \frac{\sin v_0}{v_0} \tau_n. \quad (265)$$

Это же соотношение получилось бы и для внутренней выточки; оно тождественно с уравнением (251), полученным в случае сдвига. Следовательно, имеет место совпадение также и коэффициентов концентрации.

## 6. Построение номограммы для коэффициентов концентрации напряжений в выточках любых размеров.

Для определения коэффициента концентрации в выточках любых размеров воспользуемся методом, указанным в гл. II, 4. Этот метод предполагает заданными коэффициенты концентрации как для мелкой, так и для глубокой выточек; но они нам уже известны.

**А. Внешняя выточка.** В случае глубокой выточки при растяжении нужно пользоваться формулой (59) с номинальным напряжением (55), а при изгибе — уравнением (72) с номинальным напряжением (71). Для сдвига справедливо выражение (84), причём в качестве номинального напряжения служит касательное напряжение на поверхности цилиндра, не имеющего выточки (только тогда удовлетворяется условие  $\alpha_{ik} \rightarrow 1$  при  $\frac{a}{\rho} \rightarrow 0$ ); значение его получается из (84) и (82)

при  $\frac{a}{\rho} \rightarrow 0$  и оказывается равным  $\frac{1 + \frac{2}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \frac{V}{\pi a^2}$ . В силу того, что это

номинальное напряжение отличается от величины  $p$ , выражение (84)

нужно умножить ещё на  $\frac{1 + \frac{1}{m}}{1 + \frac{2}{m}}$ ; и тогда получается правильное зна-

чение коэффициента концентрации для нашей номограммы. Наконец, для кручения нужно применить уравнение (107) с номинальным напряжением (105).

В случае мелкой выточки для изгиба и для растяжения остаются справедливыми соотношения (131), IV, 4; для сдвига и кручения мы нашли выражение (243). Так как максимальное напряжение при

сдвиге возникает у дна выточки, то в противоположность плоской задаче здесь этот случай не представляет никаких исключений.

**В. Внешняя выточка в полом цилиндра.** При наличии осевого отверстия к предыдущим предельным значениям добавляется ещё одно, именно предельное значение коэффициента концентрации для глубокой внешней выточки при большом осевом сверлении, которая рассмотрена в V, 5. Это вновь появившееся предельное значение обозначим буквой  $\alpha_{tb}$ . Общий закон для коэффициента концентрации, установленный в II, 4, требуется соответственно расширить.

Прежде всего для большого осевого отверстия имеем

$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2}. \quad (266)$$

Здесь  $\alpha_{fk}$  зависит от  $t/\rho$ ,  $\alpha_{tb}$  от  $a/\rho$ . С уменьшением отверстия должно выделиться слагаемое, соответствующее предельному значению коэффициента концентрации глубокой выточки без отверстия, т. е.  $\alpha_{tk}$ . Этого можно достичь, если принять следующее выражение для коэффициента концентрации:

$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2} - \underbrace{\frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tk} - 1)^2}}_{a+c \text{ вместо } a}. \quad (267)$$

С уменьшением к нулю отверстия  $a + c \approx a$  в выражении (267) исчезают члены, содержащие  $\alpha_{tb}$ , а формула (267) принимает вид (2) гл. II, 4. С другой стороны, при большом отверстии  $c$  делается очень большим, а вместе с этим большими становятся  $\frac{a+c}{\rho}$  и коэффициенты  $\alpha_{tb}$ ,  $\alpha_{tk}$ , в которых  $a$  заменено на  $a + c$ , а обе дроби, в знаменатель которых они входят, делаются исчезающе малыми. Коэффициент концентрации для больших отверстий опять принимает форму (266), из которой мы и исходили. Так как в уравнении (267) оба добавочных слагаемых к формуле (266) зависят от одной и той же переменной  $\frac{a+c}{\rho}$ , то, естественно, вместо них, в качестве вспомогательной величины ввести новый коэффициент концентрации, зависящий от  $\frac{a+c}{\rho}$ . Иными словами, положим

$$\underbrace{\frac{1}{(\alpha_{tk} - 1)^2} - \frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2}}_{a+c \text{ вместо } a} = \frac{1}{(\alpha_h - 1)^2}, \quad (268)$$

после чего выражение (267) принимает форму

$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{tb} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_h - 1)^2}. \quad (269)$$

Это уравнение показывает, что выражение для коэффициента концентрации в конечном счёте нужно составить, зная не только коэффициент концентрации при большом осевом отверстии, выражаемый

согласно (266) через  $\alpha_{fk}$  и  $\alpha_{fb}$ , но используя и вспомогательный коэффициент  $\alpha_h$ , определяемый по (268).

При растяжении за номинальное напряжение принимается среднее напряжение по наиболее узкому поперечному сечению, равное

$\frac{P}{\pi[(a+c)^2 - c^2]}$ . Для определения предельного значения коэффициента  $\alpha_{tk}$  служит уравнение (59), для  $\alpha_{tk}$  справедливо (131), IV и, наконец, для  $\alpha_{fb}$  формула (190), VI.

В случае изгиба номинальное напряжение равно  $\frac{4M(a+c)}{\pi[(a+c)^4 - c^4]}$ ;

$\alpha_{tk}$  вычисляется по (72),  $\alpha_{fk}$  — по (131), IV;  $\alpha_{fb}$  — по 190, IV.

При сдвиге номинальное напряжение вычисляется по (227). Для

$\alpha_{tk}$  справедливо (84), причём его нужно умножить ещё на  $\frac{1 + \frac{1}{m}}{1 + \frac{2}{m}}$ ;

для  $\alpha_{fk}$  воспользуемся (243), наконец, для  $\alpha_{fb}$  — (253).

При кручении номинальное напряжение вычисляется по (261),  $\alpha_{tk}$  — по (107),  $\alpha_{fk}$  — по (243) и  $\alpha_{fb}$  — по (253).

**С. Внутренняя выточка.** При больших продольных осевых отверстиях коэффициент концентрации определяется только через два предельных значения  $\alpha_{tk}$  и  $\alpha_{fb}$ , из которых первое зависит от  $\frac{a}{p}$ , второе от  $\frac{t}{p}$ ; например, при растяжении справедливо для первого (190), IV, для второго — (131), IV (ср. V, 5). При устремлении радиуса отверстия к нулю величина  $\alpha_{fb}$  должна теперь дать предельное значение  $\alpha_{fk}$  мелкой внутренней выточки без продольного осевого отверстия. Этому условию мы удовлетворим, вводя вспомогательный коэффициент концентрации  $\alpha_h$ ; именно положим:

$$\frac{1}{(\alpha_h - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{tk} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_{fb} - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_h - 1)^2}, \quad (270)$$

где  $\alpha_h$  зависит только от  $\frac{t+c}{p}$  и вычисляется по формуле:

$$\frac{1}{(\alpha_h - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_{fk} - 1)^2} - \frac{1}{(\alpha_{fb} - 1)^2}, \quad (271)$$

$t+c$  вместо  $t$

В случае  $c=0$ , действительно, вместо  $\alpha_{fb}$  получим  $\alpha_{fk}$ ; с другой стороны, при больших  $c$  выражение  $\frac{1}{(\alpha_h - 1)^2}$  делается исчезающе малым, так что требуемые условия тоже удовлетворены. При растяжении для  $\alpha_{fk}$  имеет место выражение (133). В качестве номинального напряжения служит  $\frac{P}{\pi[b^2 - (b-a)^2]}$ . Здесь  $b = a + t + c$  (фиг. 68 и 70).



При изгибе номинальное напряжение вычисляется по формуле  $\frac{M(t+c)}{\pi[b^3-(b-a)^3]}$ . Для  $\sigma_{ik}$  и  $\sigma_{rb}$  справедливы те же самые формулы, как и при растяжении, но  $\sigma_{rk}$  вычисляется по (158).

При сдвиге номинальное напряжение определяется по (228),  $\sigma_{ik}$  — из (253),  $\sigma_{rb}$  — из (243); для  $\sigma_{rk}$  справедливо (185), причём его нужно разделить на 2, так как относительная величина (166) теперь равна половине номинального напряжения [см. выражение (228) при  $b-a=0$ ].

В случае кручения для номинального напряжения справедливо (262),  $\sigma_{ik}$  и  $\sigma_{rb}$  вычисляются как и при сдвиге, а  $\sigma_{rk}$  по формуле (200).

Номограммы коэффициентов концентрации для внешней и внутренней выточек на теле вращения, полученные таким образом, помещены на фиг. 104 и 105. Способ использования номограмм поясняется указанными на чертежах стрелками, а также примером, помещённым в отделе X. Для расстояния дна выточки от оси ( $a+c$  или  $t+c$ ) целесообразно принять общее обозначение  $r$ .

Мы заканчиваем на этом учение о влиянии выточек на распределение напряжений в случае пространственной задачи и переходим к следующему отделу теории концентрации напряжений. В силу особого характера распределения напряжений этот отдел также требует детального рассмотрения. Мы имеем в виду влияние выточек призматического типа.

# ТЕОРИЯ ВЛИЯНИЯ ВЫТОЧЕК ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ТИПА.

## 1. Основные уравнения.

С целью нахождения формул, пригодных для призматических стержней, возвратимся опять к общим уравнениям III, 6. Мы имели

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \text{ и т. д.} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \alpha \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) \text{ и т. д.,} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

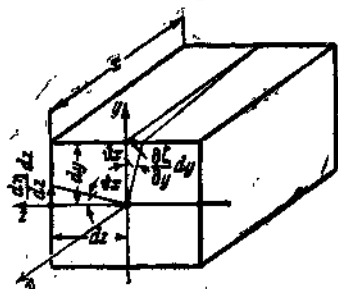
причём

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 \text{ и } \alpha = 2 - \frac{2}{m}. \quad (2)$$

Далее,

$$\Delta \Phi_0 = \Delta \Phi_1 = \Delta \Phi_2 = \Delta \Phi_3 = 0. \quad (3)$$

В последующих выкладках мы будем считать ось  $x$  совмещённой с осью призматического стержня, ось  $y$  направим по линии действия перерезывающей силы (фиг. 74), а ось  $z$  совместим с *нейтральной линией* поперечного сечения стержня.



Фиг. 74. Деформация элементарной призмы при кручении.

В главе V, с помощью уравнений (111)—(113) и (137)—(139), было уже показано, что при чистом растяжении и при чистом изгибе призматического стержня в нём возникает только напряжение  $\sigma_x$ . В этих двух случаях элементарный способ расчёта остаётся совершенно строгим при любой форме поперечного сечения стержня, ибо здесь компоненты напряжения с индексами  $y$  и  $z$  равны нулю и граничные условия на незагруженной боковой поверхности стержня удовлетворяются. Иначе обстоит дело при сдвиге и при кручении.

При *чистом сдвиге* общее решение можно привести к более простой форме следующим способом (подобные выражения мы уже

При *чистом сдвиге* общее решение можно привести к более простой форме следующим способом (подобные выражения мы уже

имели в V, (161) — (164)). Положим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= -\frac{x}{a} \varphi(y, z) + \frac{V}{4(4-\alpha)J} \left[ \left( -4 + \frac{20}{3}\alpha - 2\alpha^2 \right) (xy^3 - x^3y) + \right. \\ &\quad \left. + \left( -8 + 8\alpha - 2\alpha^2 \right) (xyz^3 - \frac{x^3y}{3}) \right]; \\ \Phi_1 &= \frac{V}{4(4-\alpha)J} \left[ 2\alpha(yz^2 - \frac{y^3}{3}) + 4(1-\alpha)(yz^2 - xy^2) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \varphi(y, z); \\ \Phi_2 &= \frac{V}{4(4-\alpha)J} (4-2\alpha)(xy^2 + xz^2 - \frac{2}{3}x^3); \\ \Phi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь  $\varphi$  является гармонической функцией, зависящей от  $y$  и  $z$ . Легко убедиться, что эти выражения удовлетворяют уравнениям (3). Согласно уравнению (2)

$$F = \frac{V}{4(4-\alpha)J} \left[ (4-2\alpha)(xy^3 + xyz^2) + \left( \frac{8}{3}\alpha - 4 \right) x^2y \right], \quad (5)$$

и из (1) получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{V}{J} xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{V}{4(4-\alpha)J} \left[ (-8 + 2\alpha)y^2 + (4-2\alpha)z^2 \right]; \\ \tau_{yz} &= C, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  подчиняется прямолинейному закону элементарного учения сопротивления материалов, но возникают касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ , которые должны быть подчинены граничным условиям.

При чистом кручении удобнее всего принять следующие выражения для функций:

$$\Phi_0 = -\frac{x}{a} \varphi(y, z); \quad \Phi_1 = \frac{1}{a} \varphi(y, z); \quad \Phi_2 = \frac{G\theta}{a} xz; \quad \Phi_3 = -\frac{G\theta}{a} xy. \quad (7)$$

Отсюда, согласно (2)

$$F = 0, \quad (8)$$

и (1) переходят в:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + G\theta z; \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - G\theta y, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\vartheta$  является углом закручивания, отнесённым к единице длины стержня. Для  $\vartheta$  из фиг. 74 получаем соотношение

$$\vartheta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right); \quad (10)$$

но оно уже удовлетворено, ибо здесь [ср. (49), III, 6]

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2G} \left( -\frac{\partial F}{\partial y} + 2\alpha\Phi_2 \right) = \vartheta xz; \\ \zeta &= \frac{1}{2G} \left( -\frac{\partial F}{\partial z} + 2\alpha\Phi_3 \right) = \vartheta xy. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Сначала займёмся изучением влияния выточек в сплошном призматическом стержне.

## 2. Сплошное поперечное сечение (стержень с продольным пазом).

Займёмся в первую очередь мелкой выточкой. При этом будем предполагать, что в ближайшей окрестности от места, где должна быть сделана выточка, контур в первом приближении можно считать прямолинейным (фиг. 75). Для касательных напряжений на этом месте, поскольку в нём  $y$  и  $z$  имеют совершенно определённые значения, из (6) или (9) получаются выражения:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C_1; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + C_2; \quad (12)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные; их можно не писать, так как к  $\varphi$  можно добавить слагаемые  $C_1 y + C_2 z$ . Тогда имеем

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (13)$$

Фиг. 75. Вал с мелким продольным пазом при сдвиге или кручении.

Предельный переход, необходимый для последовательного рассмотрения «мелкой выточки», требует теперь, чтобы эта простая зависимость (13) была

принята не только в том месте, где сделана выточка, но также и внутри зоны искажения, занимающей небольшую область. Для вычисления местных напряжений мы поэтому применим непосредственно соотношения (13), встречавшиеся нам в подобной форме уже неоднократно [см. (236) и (257), V, 5]. Дальнейший ход вычислений поэтому уже ясен. Распределение напряжений показано на фиг. 71. Коэффициент концентрации выражается в форме

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_n} = 1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}}. \quad (14)$$

Согласно приведённому ранее выводу, за номинальное напряжение нужно принять касательное напряжение в стержне без выточки в соответствующей точке.

Для примера рассмотрим цилиндр с продольным пазом (фиг. 75). Если выточка расположена на нейтральной линии поперечного сечения, то при сдвиге номинальное напряжение вычисляется по формуле

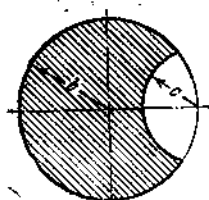
$$\tau_n = \frac{1 + \frac{2}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \frac{V}{\pi b^2}. \quad (15)$$

При кручении имеем

$$\tau_n = \frac{2M_T}{\pi b^3}. \quad (16)$$

Что касается глубокой выточки, сравнимой с размерами поперечного сечения, то ещё до настоящего времени не создано теории. Для случая кручения, однако, существует решение, данное С. Weber<sup>1)</sup> и относящееся к случаю круговой выточки. Контур образуется двумя кругами, причём центр меньшего круга предполагается лежащим на контуре большего (фиг. 76).

Для малых значений  $c/b$  решение (14) ( $t = r$ ) очень хорошо соответствует решению Вебера, ибо в том и другом случае для коэффициента концентрации получается величина 2. Для выточек, которые нельзя считать мелкими, всё же коэффициент концентрации в первом приближении можно вычислять по формуле (14), но в качестве номинального напряжения нужно брать касательное напряжение на контуре стержня без выточки. Этим путём некоторое повышение коэффициента концентрации компенсируется понижением номинального напряжения.



Фиг. 76. Рассмотренный Вебером особый случай: край состоит из двух кругов, с центром меньшего круга на контуре большего.

### 3. Тонкостенное полое поперечное сечение.

В тонкостенных полых поперечных сечениях расчёт упрощается постольку, поскольку касательные напряжения в стенке, без учёта влияния выточки, можно считать равномерно распределёнными по толщине стенки. Вследствие этого для вычисления номинального напряжения всегда оказывается достаточным рассмотреть лишь условия статики.

<sup>1)</sup> Weber C., Lehre der Verdrehungsfestigkeit. VDI-Forsch.-Heft, Nr. 249. Berlin: VDI-Verlag, 1921.

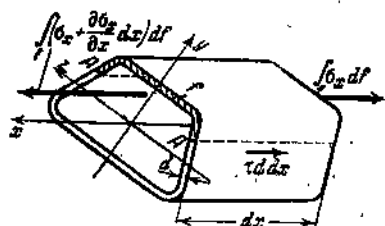
На фиг. 77 изображено поперечное сечение, симметричное относительно оси  $y$  и имеющее повсюду одинаковую толщину стенок. Для определения касательного напряжения в точке  $A$  при сдвиге цилиндр рассекаем на обеих его сторонах в соответствующем месте плоскостями, параллельными оси  $x$  и перпендикулярными к поверхности стенки. Рассмотрим часть стержня длиной  $dx$ . Тогда из условий равновесия следует

$$2\tau dx = \int_f \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx y df, \quad (17)$$

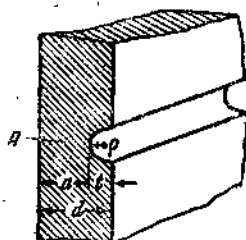
где  $f$  — площадь, заштрихованная на фиг. 77. Если подставить  $\sigma_x$  из (6), то получится известная формула:

$$\tau = \frac{VS}{2dJ}, \quad (18)$$

где  $S$  — статический момент площади  $f$  относительно нейтральной линии,  $J$  — момент инерции всего поперечного сечения относительно той же нейтральной линии.



Фиг. 77. Условия равновесия в поперечном симметричном сечении.



Фиг. 78. Продольный раз в полой сечении.

В случае кручения, вычислив момент напряжений относительно произвольно выбранной точки, получим известное соотношение:

$$\tau = \frac{M_T}{2dF}, \quad (19)$$

где  $F$  — площадь, ограниченная средней линией стенки.

Если теперь в области точки  $A$  образовать внешнюю или внутреннюю выточку в виде продольного паза (фиг. 78), то вследствие уменьшения толщины стенки от  $d$  до  $a$  касательное напряжение повышается до величины (из условий равновесия) при сдвиге

$$\tau_n = \frac{VS}{2aF}, \quad (20)$$

при кручении

$$\tau_n = \frac{M_T}{2aF}. \quad (21)$$

Эти величины, полученные в предположении равномерного распределения напряжений по наиболее узкому поперечному сечению, примем за номинальные напряжения.

С целью вычисления возникающих в действительности неравномерно распределённых напряжений обратимся снова к основным соотношениям (6) и (9). В случае сплошного поперечного сечения зона искажений в сравнении с остальными размерами поперечного сечения при предельном переходе к мелкой выточке могла считаться настолько малой, что делались справедливыми простые соотношения (13). Аналогично можно поступить также и в случае тонкостенного поперечного сечения. Вследствие малой толщины стенки зона искажений здесь также простирается на область, которую можно считать очень малой в сравнении с остальными размерами поперечного сечения, так что при решении задачи опять приходим к соотношениям (13). Так как имеет место (за исключением несущественного множителя  $\sin \psi$ ) совпадение формул (13) и (236) главы V, то данные в главе V решения для глубокой и мелкой выточки применимы непосредственно и в рассматриваемом случае. Следовательно, значения коэффициента концентрации для мелкой выточки равно

$$1 + \sqrt{t/p}, \text{ а для глубокой выточки } \frac{\sqrt{\frac{a}{p}}}{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{p}}}. \text{ Метод определения}$$

коэффициента концентрации для выточки любой глубины виден из номограмм фиг. 103 и 104.

#### 4. Валы с поперечными отверстиями.

Валы и стержни с поперечными отверстиями представляют собой исключительный случай, так как здесь мы не имеем уже призматического тела и, вследствие этого, основные уравнения настоящего отдела неприменимы. Но, как показал Л. Фёппль<sup>1)</sup>, такого типа случаи можно рассмотреть, исходя из соотношений, имеющих место при плоском напряжённом состоянии.

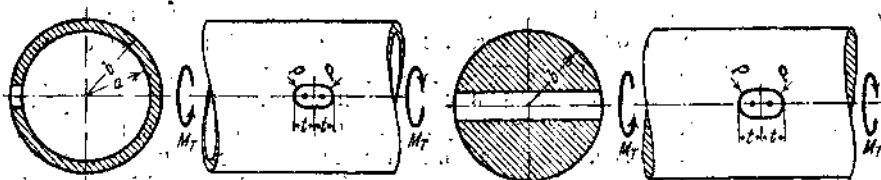
Если, например, имеется в виду тонкостенный полый вал с поперечным отверстием, радиус которого мал в сравнении с радиусом самого вала, то при кручении налицо плоское напряжённое состояние, ибо при этих предположениях зону искажения можно рассматривать как часть плоскости. Поэтому здесь идёт речь о плоскости, работающей на сдвиг. Решение этой задачи нами было уже дано в гл. IV, 4. Следует лишь обратить внимание на то, что в качестве номиналь-

<sup>1)</sup> Föppl L., Z. VDI, т. 65 (1921), 8, стр. 497.

ного напряжения должно быть взято касательное напряжение в стержне без отверстия, где оно должно быть таким

$$\tau_n = \frac{2M_T b}{\pi(b^4 - a^4)} \quad (22)$$

В расчёте на сдвиг, сделанном для соответствующей плоской задачи (см. IV, (144)—(146)), нужно заменить  $p$  на  $3/2 p$ . Поэтому для продолговатого отверстия (фиг. 79) максимальное напряжение, возни-



Фиг. 79. Пустотелый вал с поперечным отверстием.

Фиг. 80. Вал с поперечным отверстием.

кающее на контуре вблизи дна выточки в виде растягивающего напряжения (см. IV, (155) и фиг. 35), определяется формулой:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_n} = 2 + \sqrt{\frac{t}{p}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{p}}} \quad (23)$$

таким образом для кругового отверстия ( $t = p$ ) максимальное напряжение получится в четыре раза больше номинального.

Этот же самый способ рассуждения с достаточно хорошим приближением можно применить к сплошным валам (фиг. 80, см. также вышеуказанную работу Л. Фёппль).



## ГЛАВА VII.

### ТЕОРИЯ РАЗГРУЖАЮЩИХ ВЫТОЧЕК.

#### 1. Разъяснение понятия.

До сих пор мы занимались разысканием напряжённого состояния, обусловленного выточкой заданной формы. В настоящем отделе ход мысли будет обратным: теперь будут разыскиваться не напряжения при заданной форме контура выточки, а наоборот, — форма контура при заданном и по возможности минимально искажённом напряжённом состоянии. Конечно, решение этой второй основной задачи непосредственно связано с наличием решения первой.

Форма детали, правда, чаще всего конструктивно предопределяется наперёд, но всё же конструктор её выбирает до некоторой степени произвольно. В большинстве случаев путём конструктивно незаметных, несущественных изменений можно достичь улучшения в распределении напряжений, а вместе с этим и увеличения прочности детали. Пусть, например, мы имеем дело с круглым сплошным валом, который из чисто конструктивных соображений должен быть снабжён кольцевой выточкой, а в остальной части быть совершенно гладким (фиг. 67). Распределение напряжения на валу, который, допустим, закручивается, вследствие наличия выточки значительно искажается, и у дна выточки существует значительное повышение напряжений. Предположим теперь, что в конструктивном отношении вполне допустимо вблизи первой выточки сделать ещё вторую. Правда, на первый взгляд кажется, что в результате этого вызывается дальнейшее и как будто ненужное повышение напряжений в новом месте. Это действительно так, но — и на это мы обращаем внимание — это второе произвольное повышение напряжений вызывает уменьшение первого. Наглядно выражаясь, эффект выточек распространяется теперь на обе области, и притом так, что повышение напряжений в обоих местах теперь меньше, чем в случае существования единственной, конструктивно необходимой, выточки.

Можно достаточно наглядно пояснить это явление, пользуясь представлением о силовом потоке, создаваемом в детали внешними силами, к ней приложенными и распространяющимся вдоль детали. Удобство состоит в частности в том, что, не требуя детального рассмотрения упругого состояния, это понятие непосредственно приво-

дит к очень отчётливому пояснению явления: линия давления (силовой поток) отклоняется (в разбираемом случае) второй выточкой в сторону и внутрь. Влияние выточки после того, как проходящий силовой поток уже отклонён, возрасти больше уже не может.

Явление разгрузки можно объяснить и строго теоретически, не прибегая к помощи этих представлений. С этой целью нужно сослаться на неоднократно уже упомянутый закон затухания (см. II, 2). Затем имеется теоретически доказанное свойство (см. IV и V) всех выточек, с одной стороны, в области у дна выточки вызывать повышение напряжений, а с другой стороны, в более далёкой области вызывать уменьшение напряжений. Хотя новая выточка в месте, где она сделана, и вызывает повышение напряжений, но, однако, в окрестности, в том числе и у дна первой выточки, она вызывает разгрузку.

Удачным расположением таких добавочных выточек конструктор имеет возможность благоприятно влиять на концентрацию напряжений и разгрузить опасные зоны детали. Такого типа дополнительные выточки, сделанные только лишь с целью выравнивания распределения напряжений, называют (начиная с А. Thum'a) *разгружающими выточками*.

## 2. Разгружающие выточки при кручении.

Эффект разгрузки при наличии нескольких выточек мы представим теперь аналитически с помощью методов математической теории упругости. Одновременно мы установим свойства коэффициента концентрации нескольких выточек.



Фиг. 81. Однократная мелкая выточка.

В качестве примера возьмём скрученный вал, который имеет несколько мелких выточек либо в форме продольного паза, как изображено на фиг. 75, либо в форме выточек, окружающих вал, как на фиг. 67. В обоих случаях

сделанные ранее для мелких выточек выводы приводят к соотношениям (см. V, (257) или VI, (13))<sup>1)</sup>

$$\tau_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (1)$$

где предполагалось, что, в соответствии с фиг. 81, ось  $x$  направлена вдоль контура, а ось  $y$  перпендикулярно к нему. Одинаковый индекс у обеих касательных напряжений, который соответствовал бы третьему координатному направлению, ради простоты опущен. Функция  $\varphi$  зависит только от  $x$  и  $y$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Thum A. u. H. Oschatz, Steigerung der Dauerfestigkeit bei Rundstäben mit Querbohrungen. Forsch. Ing.-Wes., т. 3 (1932), стр. 87.

Положим в основу рассмотрения изометрическую сеть, введя между декартовыми координатами  $x, y$  и криволинейными  $u, v$  соотношения (см. IV, I)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}. \quad (3)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) в криволинейных координатах принимает следующую форму

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0. \quad (4)$$

По известным теоремам теории функций под величинами  $u$  и  $v$  можно подразумевать вещественные и мнимые части функции  $f(x + iy)$  комплексного переменного, где  $i = \sqrt{-1}$ .

Если положим

$$x + iy = z; \quad u + iv = w, \quad (5)$$

то между комплексными функциями  $z$  и  $w$  существует зависимость:

$$z = x + iy = f(w) = f(u + iv). \quad (6)$$

Коэффициенты искажения в направлениях  $u$  и  $v$  оказываются равными между собой и вычисляются по формуле:

$$h_u = h_v = h = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} = \left|\frac{dz}{dw}\right|. \quad (7)$$

Для радиусов кривизны  $\rho_u$  и  $\rho_v$  линий  $u = \text{const.}$  и  $v = \text{const.}$  соответственно (174), IV, при  $h_u = h_v = h$  (знак кривизны можно здесь не учитывать) имеем:

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v}. \quad (8)$$

Касательное напряжение вдоль линий  $u = \text{const.}$  или  $v = \text{const.}$  получается из  $\varphi$  посредством формул (см. (238), V):

$$\tau_u = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \tau_v = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \quad (9)$$

В некотором расстоянии от выточки решение для  $\varphi$  должно превращаться в  $\tau_n u$ . Это выражение соответствует стержню без выточки и одновременно даёт здесь номинальное напряжение.

Сначала предположим, что имеется одна выточка. Если она очерчена по эллипсу, то к цели приводит эллиптическая система координат

$$z = \text{sh } w; \quad x = \text{sh } u \cos v; \quad y = \text{ch } u \sin v. \quad (10)$$

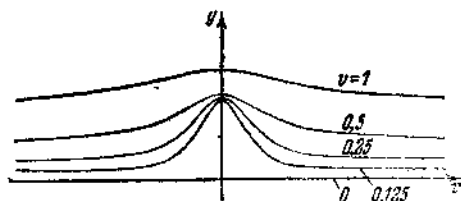
Решение было уже дано в V, 5, С. Коэффициент концентрации получается равным:

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_n} = 1 + \sqrt{\frac{l}{\rho}}. \quad (11)$$

Применённая система координат имеет известный недостаток, поскольку контур состоит из двух координатных линий, а именно — из контура самой выточки  $u = u_0$  и из прямолинейной части  $v = 0$ . Вычисление проводится более просто, особенно в случае нескольких выточек, если контур можно представить одной координатной линией. При наличии одной выточки этого можно достигнуть с помощью координатной системы:

$$z = \sqrt{w^2 - 1}. \quad (12)$$

На фиг. 82 изображены линии  $v = \text{const.}$  Для больших значений  $u$  и  $v$  имеем приближённо  $x = u$  и  $y = v$ , и линии  $v = \text{const.}$  совпадают с прямыми  $y = \text{const.}$  В области  $x = 0$ ,  $y = 1$  имеется, однако, искривление. Если такую линию принять за контур, то будем иметь дело с выточкой, у которой внешние уголки закруглены.



Фиг. 82. Система координат с координатными линиями  $v = \text{const.}$ , упрощающими расчёт мелкой выточки.

Коэффициент концентрации поэтому будет, как можно предвидеть, несколько меньшим, чем это получается по уравнению (11).

Искомое решение должно удовлетворять условию (4), а при больших  $u$  или  $v$  — превращаться в  $\tau_n x$  или  $\tau_n u$  (как мы видели выше, когда  $x = u$ ). Далее,  $\tau_v$  должно быть равным нулю вдоль линии контура  $v = v_0$ . Так как  $\tau_n u$  удовлетворяет этим всем трём условиям, то оно и является искомым решением. Следовательно,

$$\varphi = \tau_n u; \quad \tau_v = 0; \quad \tau_u = \frac{\tau_n}{h}. \quad (13)$$

Дно выточки лежит на оси  $y$ ; там  $u = 0$  и, следовательно:

$$y = \sqrt{v^2 + 1}; \quad h = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + 1}}; \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{1}{v^2 \sqrt{1 + v^2}}. \quad (14)$$

Далее, у дна выточки  $v = v_0$ . Глубина выточки равна:

$$t = (y)_{u=0} - (y)_{u=\infty} = \sqrt{v_0^2 + 1} - v_0, \quad (15)$$

и для кривизны выточки получаем:

$$\frac{t}{\rho} = \frac{1}{v_0^2} \left( 1 - \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2}} \right). \quad (16)$$

Коэффициент концентрации находим из (13)

$$\alpha_k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n} = \frac{1}{h} = \frac{1}{v_0} \sqrt{1 + v_0^2}. \quad (17)$$

Исключение параметра  $v_0$  из (16) и (17), наконец даёт

$$\frac{\tau}{\rho} = (\alpha_k^2 - 1) \left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right). \quad (18)$$

При выточках большой кривизны, т. е. при больших  $t/\rho$ , коэффициент концентрации возрастает (чего и следовало ожидать) и может быть вычислен по формуле:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{t}{\rho}}, \quad (19)$$

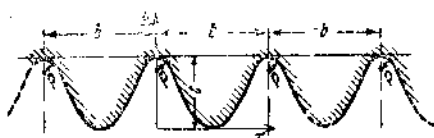
что для больших  $t/\rho$  находится в хорошем соответствии с (11). В остальном полученная формула (18) даёт всегда несколько меньшее значение, чем формула (11), что происходит в силу вышеупомянутого закругления внешних углов.

После этих предварительных соображений перейдём к изложению самой теории эффекта разгрузки. Введём теперь новую систему координат, соответствующую контуру с несколькими выточками (фиг. 83). При этом будем рассматривать бесконечно большое число выточек равной глубины, удалённых друг от друга на расстояние  $b$ . Расчёт опять будем вести для закруглённых внешних углов, чтобы иметь возможность представить контур в виде одной координатной линии; именно положим:

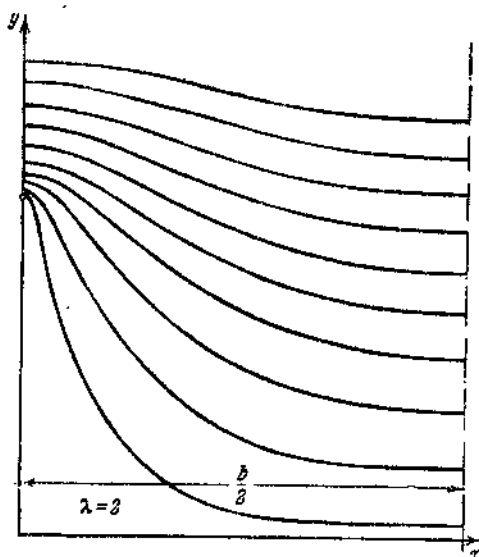
$$\cos z = \lambda \cos w. \quad (20)$$

На фиг. 84 даны линии  $v = \text{const.}$  для случая  $\lambda = 2$ .

При больших  $y$  они соответствуют  $y = \text{const.}$ , в то время как по мере приближения к оси  $x$  всё больше и больше заметным становится периодически повторяющийся выступ. Соотношения (13) остаются



Фиг. 83. Контур с многократной выточкой.



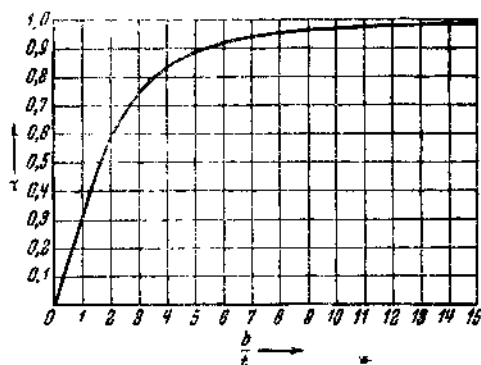
Фиг. 84. Линии  $v = \text{const.}$  (одновременно это линии напряжений и координатные линии) для контура с многократной выточкой.

справедливыми также и здесь. При  $x = u = 0$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} y &= \operatorname{arc} \operatorname{ch} (\lambda \operatorname{ch} v); \\ h &= \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\lambda \operatorname{sh} v}{\sqrt{\lambda^2 \operatorname{ch}^2 v - 1}}; \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{(\lambda^2 - 1) \operatorname{ch} v}{\lambda \operatorname{sh}^3 v \sqrt{\lambda^2 \operatorname{ch}^2 v - 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Для дна любой выточки нужно принять  $v = v_0$ .

При дальнейшем расчёте обратим главное наше внимание на соотношение, получающееся для коэффициента концентрации при большой



Фиг. 85. Коэффициент разгрузки  $\gamma$  в зависимости от отношения удалённости выточки  $b/t$ .

кривизне выточки. Тогда из сопоставления с формулой (19), выведенной для единственной сильно искривлённой выточки, можно будет судить об эффекте разгрузки. Для малых  $v_0$  получаем:

$$\left. \begin{aligned} t &= (y)_{u=0} - (y)_{u=\pi/2} = \operatorname{arc} \operatorname{ch} \lambda; \\ &\quad v=v_0 \qquad \qquad \qquad v=v_0 \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda \operatorname{sh}^2 v_0}; \quad \alpha_k = \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda \operatorname{sh} v_0} = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda} \frac{1}{\rho}}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Из этого следует:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\operatorname{th} t}{\rho}} \quad (23)$$

или, принимая во внимание, что при выборе координатной системы за единицу длины был принят отрезок  $\frac{b}{\pi}$ , получаем:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{b}{\pi \rho} \operatorname{th} \frac{\pi t}{b}} = \sqrt{\frac{t}{\rho} \frac{b}{\pi t} \operatorname{cth} \frac{b}{\pi t}}. \quad (24)$$

Сравнение с (19) показывает, что эффект разгрузки выражается посредством множителя  $\frac{b}{\pi t} \operatorname{cth} \frac{b}{\pi t}$ . Это число, зависящее только от отношения  $b/t$ , т. е. от *удалённости выточек*, мы назовём *коэффициентом разгрузки* и обозначим буквой  $\gamma$ . Он изображён на фиг. 85; начиная с нуля — при бесконечно близких между собой выточках — он затем постепенно повышается и при бесконечно удалённых друг от друга выточках достигает 1, а коэффициент концентрации опять превращается в тот, какой был для единственной выточки; действительно, уравнение (24) при  $b = \infty$  превращается в (19).

### 3. Общие свойства коэффициента концентрации при наличии разгружающих выточек.

Для того чтобы выработать общую точку зрения на коэффициент концентрации при наличии разгружающих выточек, обратимся снова к соотношениям (24) и (19). Переход от одной выточки к нескольким можно трактовать как *уменьшение глубины*. Роль действительной глубины  $t$  при нескольких выточках играет *действительная глубина*, умноженная на коэффициент разгрузки  $\gamma$

$$t_w = t\gamma. \quad (25)$$

Точные вычисления показывают, что этот ход мысли приводит к достаточно удовлетворительным результатам; вследствие этого в предыдущих формулах действительную глубину  $t$  следует просто заменить условной  $t_w$ .

Таким образом, например, при нескольких выточках с острыми внешними углами для коэффициента концентрации при *кручении* и при *сдвиге* будем иметь:

$$\alpha_{rk} = 1 + \sqrt{\frac{t_w}{\rho}} \quad (26)$$

а, соответственно, при *растяжении* и *изгибе*

$$\alpha_{rk} = 1 + 2\sqrt{\frac{t_w}{\rho}}. \quad (27)$$

## ТЕОРИЯ ВЫТОЧЕК С ОСТРЫМИ УГЛАМИ.

## 1. Неприменимость классической теории упругости к выточкам с острыми углами и причина этого.

Все предыдущие исследования имели в своей основе исключительно классическую теорию упругости. Теперь перейдём к группе задач, решение которых делает необходимыми соображения, приводящие на границу возможности применения основ классической теории упругости и даже за пределы этой границы, к новой теории.

В то время как при выточках не слишком малого радиуса классическая теория упругости ещё достаточна, при сильно искривлённых выточках или даже при острых углах она приводит к совершенно неправильным результатам. Так например, для коэффициента концентрации мелкой выточки при сдвиге или при кручении была найдена

формула  $1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}}$ . Пусть, например, радиус кривизны составляет только 1/10000 глубины. Тогда коэффициент концентрации должен бы быть равным 101, что является невероятным. Аналогичные обстоятельства имеют место для всех остальных выведенных выше коэффициентов концентрации. При исчезающе малом радиусе кривизны

коэффициент концентрации делается пропорциональным  $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$ . Для выточки с углами поэтому получается физически невозможное, бесконечно большое значение. Мы здесь, очевидно, переходим границу области возможного применения классической теории и, чтобы притти к целесообразным основам расчёта, необходимо установить новый критерий для оценки действительных свойств материала.

Но перед тем, как подойти к этой нелёгкой задаче, следует объяснить причины, в силу которых оказываются несправедливыми основы предыдущей теории. Возвратимся обратно к гл. III, где были выведены основные соотношения для напряжённого и деформированного состояния. В качестве мысленной модели нам служил при этом — что имеет уже основное значение — *бесконечно малый элемент* с рёбрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Предположения, молчаливо сделанные о бесконечной делимости вещества, его бесструктурности и т. д., представляют, очевидно, критерий применимости классической теории



упругости. До тех пор, пока дело идёт о мало искривлённом контуре, или — точнее говоря — пока радиус кривизны поверхности повсюду достаточно велик в сравнении с кристаллами вещества, до тех пор не делается заметной ошибки, ибо при мало искривлённой поверхности напряжения, которые зависят от граничных условий, существенно изменяются только в пределах больших областей, но не внутри участков, имеющих такой же порядок малости, как и кристалл. Получается поэтому, что при слабо искривлённой поверхности структура вещества не оказывает влияния на распределение напряжений, а вместе с этим также и на коэффициент концентрации.

Совсем иначе обстоит дело при сильно искривлённой поверхности. Тогда имеют место изменения напряжений даже в пределах очень малых областей. Применимость классической теории упругости обусловлена теперь тем, чтобы вещество даже в области порядка кристалла можно было рассматривать как бесструктурное, а это противоречит существованию самого кристалла.

Это соображение, приведённое нами в качестве причины неприменимости старого учения, указывает нам одновременно путь к новой теории.

## 2. Новая воображаемая модель.

Мы только что видели, что не всегда допустимо рассматривать бесконечно малый элемент. Требуется перейти к тому, чтобы пользоваться в качестве воображаемой модели *элементом конечных размеров*.

Представим себе теперь материал построенным из сплошных маленьких, но всё же конечных частичек. Последовательное проведение этой мысли даёт новые условия как для равновесия, так и деформации. При этом следует условиться об определённой форме частичек, а также уяснить себе вопрос о сущности упругих деформаций её, о характере сил, передающихся на соседние частицы, и т. д. Одним словом, нужно сделать ряд предположений, которые характеризовали бы свойства материала. В результате этих основных предположений будут получены новые уравнения теории упругости, которые — в соответствии с конечностью частицы — будут иметь вид не дифференциальных, а разностных уравнений. Решение отдельных задач будет связано с применением *теории конечных разностей*. После этого замечания читателю, которому, может быть, приходилось самому решать гармонические задачи с помощью теории конечных разностей, наверное станет сомнительной практическая выполнимость расчёта, ибо, как известно, такого типа задачи требуют огромного количества времени. В действительности, этот путь был бы почти безнадёжным, но, как мы увидим, он и не является необходимым.

Старое учение теряет свою применимость только ведь в зонах с резким изменением напряжений, но, согласно закону затухания,

такие зоны сравнительно невелики. И было бы преувеличением совсем отбрасывать старую теорию, поскольку она в остальных областях хорошо применима. Напротив, мы используем её в качестве надёжного аппарата в тех сравнительно больших зонах конструкции, где имеется лишь плавное изменение напряжений и где разностный метод был бы слишком утомителен. Таким образом также и при сильно искривлённом контуре можно ещё пользоваться классической теорией упругости, но в самих зонах искажения нужно положить в основу новую воображаемую модель.

Расчёты показывают далее что с хорошим приближением при помощи старой теории можно рассматривать даже и часть зоны искажения. *Удаётся получить пригодные результаты даже и тогда, когда новая модель применяется только к месту, лежащему в непосредственной близости от пункта искажения напряжений.* Именно, оказывается, что величина коэффициента концентрации в выточке с острым углом стоит в ближайшей связи с величиной частички; эта величина принимает на себя роль новой постоянной материала. И после того как эта постоянная определена опытным путём, практически возможная ошибка в определении коэффициента концентрации опять устраняется, даже и при пренебрежении новой мысленной моделью в остальной зоне искажения напряжений.

### 3. Коэффициент концентрации для выточек с острыми углами.

Определение коэффициента концентрации в выточке с острым углом, согласно вышесказанному, может быть выполнено следующим путём. Мы исходим из решения задачи методами классической теории упругости, именно, мы предполагаем, что — как и в выше разобранных примерах — распределение напряжений для переменного радиуса кривизны выточки найдено. У дна выточки мы применяем далее новую воображаемую модель и вообразим там частичку шириной  $a$ . Частичка предполагается настолько малой, что напряжения, действующие по её поверхности, можно считать постоянными. Новые значения напряжений мы получаем через осреднение старых значений на поверхности частички. В качестве примера разберём прежде всего мелкую выточку при сдвиге или при кручении.

**А. Мелкая выточка с острым углом при сдвиге или при кручении.** Соответственно соотношениям (241) и (242), V, в наиболее узком поперечном сечении действуют следующие напряжения:

$$(\tau_{uv})_{v=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (-\tau_{uv})_{v=\frac{\pi}{2}} = \frac{\tau_n}{h} (\operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u_0 e^{u_0 - u}). \quad (1)$$

$u = \frac{\pi}{2} \qquad \qquad \qquad u = \frac{\pi}{2}$

В наиболее узком сечении  $h = \operatorname{sh} u$ . Если ещё воспользоваться тем, что  $e^{-u} = \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u$ , то мы получим:

$$-\tau_{uv} = \tau_n (1 - e^{u_0} \operatorname{sh} u_0 + e^{u_0} \operatorname{ch} u_0 \operatorname{cth} u). \quad (2)$$

Воспользуемся теперь новой координатой, положив

$$\operatorname{ch} u = 1 + \mu; \quad (3)$$

$\mu$  увеличивается от дна выточки — угловой точки — в направлении  $u$  (фиг. 86). Для вычисления коэффициента концентрации в выточке с острым углом можно ограничиться определением его предельного значения при  $u$ -малом, так что координату  $\mu$ , которая может изменяться от 0 до  $a$ , сразу можно рассматривать как малую величину. Поэтому будем учитывать только наименьшие степени  $\mu$  и допустим, что

$$\operatorname{ch} u = 1; \quad \operatorname{sh} u = \sqrt{2\mu}; \quad \operatorname{cth} u = \frac{1}{\sqrt{2\mu}}. \quad (4)$$

Величину  $u_0$  (соответствующую угловой точке выточки) положим сразу равной нулю. Тогда

$$\tau_{\text{vw}} = \frac{\tau_n}{\sqrt{2\mu}}. \quad (5)$$

Напряжение в выточке с острым углом представляет, согласно предыдущим разъяснениям, среднее значение напряжений вдоль отрезка  $\epsilon$  и вычисляется, следовательно, так:

$$\tau_s = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \tau_{\text{vw}} d\mu = -\frac{\tau_n}{\epsilon} \int_0^\epsilon \frac{d\mu}{\sqrt{2\mu}} = -\tau_n \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}. \quad (6)$$

Если ещё принять во внимание значение единицы длины в выбранной координатной системе

$$\operatorname{ch} u_0 = 1 = t, \quad (7)$$

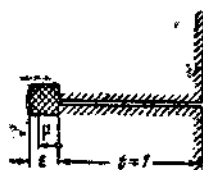
то получим следующее предельное значение для коэффициента концентрации в выточке с острым углом

$$\alpha_s = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}. \quad (8)$$

Сравнивая это с предельным значением  $\sqrt{\frac{t}{\epsilon}}$  коэффициента концентрации круговой выточки при сильном искривлении (см. (243) гл. VI), видим, что место радиуса кривизны теперь занимает половина ширины элементарной частицы.

В качестве другого примера рассмотрим глубокую выточку.

В. Глубокая выточка с острым углом при двумерном напряжённом состоянии при сдвиге и при кручении. Рассмотрим глубокую выточку, разbranную в V, б, С. Для осевого сечения, пер-



Фиг. 86. Вображаемая модель для мелкой острой угловой выточки при сдвиге или кручении.

пендикулярного к направлению сдвига, ранее выполненный расчёт дал следующие напряжения:

$$(\tau_{uv})_{u=\frac{\pi}{2}} = \frac{A}{h}; \quad \tau_{vw} = 0. \quad (9)$$

В наиболее узком сечении  $h = \cos v$ . Опять введём новую координату, отсчитываемую от угловой точки выточки, положив (фиг. 87)

$$\sin v = (1 - \mu). \quad (10)$$

Мы можем брать только малые значения  $\mu$ , поэтому можно положить:

$$\cos v = \sqrt{2\mu} \quad \text{и} \quad \tau_{vw} = \frac{A}{\sqrt{2\mu}}. \quad (11)$$

Напряжение в угловой точке определяется так:

$$\tau_s = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{A}{\sqrt{2\mu}} d\mu = A \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (12)$$

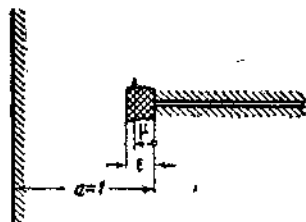
Постоянная  $A$  получается из (251),  $V$ , при  $v_0 = \frac{\pi}{2}$ :

$$A = \frac{\tau_n}{\frac{2}{\pi}}. \quad (13)$$

Если принять во внимание, что  $a = \sin v_0 = 1$ , то для коэффициента концентрации получим:

$$\alpha_s = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2a}{\epsilon}}. \quad (14)$$

Сравнивая это с предельным значением для сильно искривлённой выточки, которое согласно (253) гл. V при большом  $a/\rho$  оказалось равным  $\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}}$ , видим, что и в этой задаче величина  $\rho$  заменяется через  $\frac{\epsilon}{2}$ .



Фиг. 87. Воображаемая модель для глубокой острой угловой выточки при сдвиге или кручении.

Такое же исследование проведём теперь для более сложного напряжённого состояния.

С. Растяжение стержня, снабжённого двусторонней глубокой выточкой с угловыми точками. В случае стержня с двусторонней выточкой, вследствие существования двух главных напряжений, расчёт существенно затрудняется. Как следует из гл. IV, 2,  $A$ , в наиболее узком поперечном сечении возникают следующие напряжения:

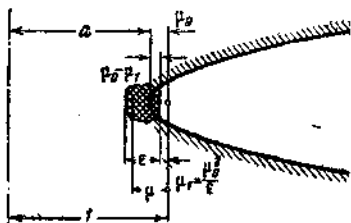
$$\sigma_n = \sigma_x = A \left( \frac{1}{\cos v} + \frac{\cos^2 v_0}{\cos^3 v} \right); \quad \sigma_v = \sigma_y = A \left( \frac{1}{\cos v} - \frac{\cos^2 v_0}{\cos^3 v} \right). \quad (15)$$

Координатную систему выбираем так же, как и в предыдущих задачах, следовательно, опять применимы соотношения:

$$\sin v = 1 - \mu; \quad \cos v = \sqrt{2\mu}. \quad (16)$$

Так как в (15) фигурирует член с  $\cos^2 v_0$ , то необходимо ввести  $\mu_0$  — расстояние края от точки  $\mu = 0$ ; только после выполнения интегрирования следует положить  $\mu_0 = 0$  (если бы мы сразу положили  $v_0 = \frac{\pi}{2}$  и  $\mu_0 = 0$ , то у дна выточки было бы  $\sigma_x = \sigma_y$  и  $\sigma_y$  на контуре не исчезало бы. Поэтому предельный переход к выточке с угловой точкой следует совершить здесь только после выполнения интегрирования).

Следует ещё отметить, что нижним пределом интеграла здесь должно служить не непосредственно значение  $\mu = \mu_0$  для края, а несколько меньшее значение —  $\mu_1$  (фиг. 88); именно, *нижний предел интегрирования нужно выбрать так, чтобы напряжение  $\sigma_y$  после интегрирования исчезало, как требует граничное условие. Интегрирование следует выполнить для обоих напряжений, ибо, как и в классической теории упругости, так и здесь, напряжения на нашей модели должны удовлетворять граничным условиям. Но это возможно лишь при условии, что в качестве нижнего предела интегрирования взято не  $\mu_0$ , но несколько меньшее значение. Хотя  $\mu_0$  и играет роль координаты контура, но мы вынуждены нашу частичку представить выдвинутой из слоя контура на маленький отрезок  $\mu_0 - \mu_1$ , с тем, чтобы  $\sigma_y$  удовлетворяло граничному условию. Это маленькое выдвигание, исчезающее снова после предельного перехода к выточке с острым углом, объясняется тем, что в наших рассуждениях мы вынуждены внезапно перейти от дифференциального исчисления к исчислению в конечных разностях.*



Фиг. 88. Воображаемая модель для глубокой остроугольной выточки при растяжении.

Некоторый малый отрезок, который в дифференциальном исчислении является бесконечно малым, в разностном исчислении имеет при этом конечное значение.

Так как  $\mu_0$  имеет тот же порядок малости, что и  $\mu$ , то, как и выше, можно положить

$$\cos v_0 = \sqrt{2\mu_0}, \quad (17)$$

после чего напряжения переходят в

$$\sigma_x = A \left( \frac{1}{\sqrt{2\mu}} + \frac{\mu_0 \sqrt{2}}{2\mu^{3/4}} \right); \quad \sigma_y = A \left( \frac{1}{\sqrt{2\mu}} - \frac{\mu_0 \sqrt{2}}{2\mu^{3/4}} \right). \quad (18)$$

Мы, прежде всего, найдём напряжение  $\sigma_y$  в угловой точке. Получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y0} &= \frac{1}{s} \int_{\frac{\mu_0}{s}}^{\frac{\mu_0}{s} + \mu_1} \sigma_y d\mu = \\ &= \frac{A}{s} \left( \sqrt{2 \left( s + \frac{\mu_0}{s} + \mu_1 \right)} - \sqrt{2\mu_1} + \frac{\mu_0 \sqrt{2}}{\sqrt{s + \mu_1}} - \frac{\mu_0 \sqrt{2}}{\sqrt{\mu_1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В процессе предельного перехода к выточке с острым углом  $s$  сохраняет постоянное значение, в то время как  $\mu_0$  и  $\mu_1$ , которое всегда меньше чем  $\mu_0$ , устремляются к нулю. Поэтому мы можем ещё до предельного перехода пренебречь величинами  $\mu_0$  и  $\mu_1$ , по сравнению с  $s$ . Тогда (19) перейдёт в

$$\sigma_{y0} = \frac{A \sqrt{2}}{s} \left( \sqrt{s} - \sqrt{\mu_1} + \frac{\mu_0}{\sqrt{s}} - \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_1}} \right) \quad (20)$$

Но это напряжение должно удовлетворять граничному условию, т. е. исчезнуть. Отсюда для  $\sqrt{\mu_1}$  получается квадратное уравнение

$$\mu_1 - \left( \sqrt{s} + \frac{\mu_0}{\sqrt{s}} \right) \sqrt{\mu_1} + \mu_0 = 0 \quad (21)$$

с корнями

$$\sqrt{\mu_1} = \frac{\mu_0}{\sqrt{s}} \quad \text{или} \quad \sqrt{s} \quad (22)$$

Так как  $\mu_1$  должно быть меньше чем  $s$ , то здесь нужно принимать во внимание только первый корень.

Вычислим теперь напряжение  $\sigma_{\omega}$ . Пользуясь вышенайденным значением  $\sqrt{\mu_1}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{\omega0} = \frac{1}{s} \int_{\frac{\mu_0}{s}}^{\frac{\mu_0}{s} + \mu_1} \sigma_{\omega} d\mu &= \frac{A \sqrt{2}}{s} \left( \sqrt{s + \frac{\mu_0}{s}} - \sqrt{s + \frac{\mu_0}{s}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_0}{\sqrt{s + \frac{\mu_0}{s}}} + \sqrt{s} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Положим теперь  $\mu_0 \rightarrow 0$ , получим для наибольшего напряжения в угловой точке значение

$$\sigma_{\omega0} = 2A \sqrt{\frac{2}{s}} \quad (24)$$

Постоянную  $A$  получим из (66), IV, при  $\nu_0 = \frac{\pi}{2}$ :

$$A = \frac{2}{\pi} \rho_1 \quad (25)$$

Значит, коэффициент концентрации в угловой точке равен:

$$\alpha_2 = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2a}{\rho}} \quad (26)$$

Для сравнения выведем коэффициент концентрации при сильно искривлённом контуре, который при больших  $a/\rho$ , согласно (69), IV, имеет вид

$$\alpha_2 = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (27)$$

Опять оказывается, что в выточке с острым углом роль радиуса кривизны играет величина  $a/2$ .

Тот же самый закон можно установить для остальных напряжённых состояний, относящихся к выточкам. Однако разобранных примеров достаточно для того, чтобы найти коэффициент концентрации в выточках с острыми углами.

Ради простоты вместо  $a/2$  введём теперь  $\rho'$ . Для коэффициента концентрации в выточке с острым углом играет, таким образом, решающую роль величина  $\rho'$ . Соответственно нашей теории, которая основывается на учёте влияния структуры, величина  $\rho'$ , как половина ширины элементарной частицы, введённой в расчёт, связана с *структурой материала*, т. е.  $\rho'$  для различных материалов вообще принимает различные значения. Таким образом здесь дело идёт о *новой постоянной материала*, имеющей размерность длины. Как мы покажем в ближайшем отделе, для стали  $\rho'$  равно, приблизительно, полмиллиметра. Коэффициент концентрации при переходе к выточкам с острыми углами, таким образом, зависит от *материала*.

#### 4. Переход от закруглённой выточки к выточке с острым углом.

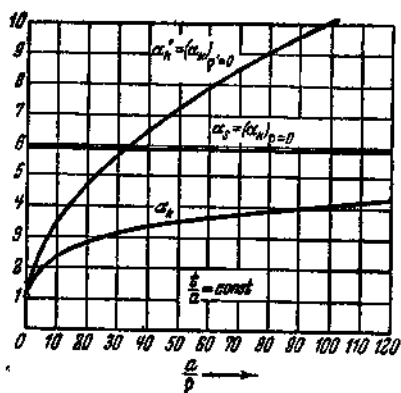
Значение  $\rho' = 0$  соответствует идеальному материалу классической теории упругости с наибольшей упругой чувствительностью при возрастании  $\rho'$  чувствительность убывает. Поэтому величину  $\rho'$  мы назовём *упругой чувствительностью выточки*. При слабых искривлённых выточках ( $\rho' \rightarrow$  велико) следует пользоваться величиной коэффициента концентрации для идеального материала; с *уменьшением*  $\rho'$  для технических материалов коэффициент концентрации постепенно уменьшается, ибо коэффициент концентрации технических материалов при уменьшающемся  $\rho'$  стремится не к бесконечности, а к коэффициенту концентрации выточки с острым углом, как к наивысшему предельному значению. Чтобы не вычислять в каждом отдельном случае коэффициент концентрации закруглённой выточки с применением нашей воображаемой модели, воспользуемся законом перехода, аналогичным тому, каким мы пользовались в случае медных

и глубоких выточек, и обеспечивающим здесь переход от идеального значения  $\alpha'_k = (\alpha_k)_{\rho=0}$  к значению  $\alpha_g = (\alpha_k)_{\rho=\infty}$  для выточки с острым углом. Кривая перехода приближается, как видно из фиг. 89, к обеим предельным кривым. Так как согласно теории идеальный коэффициент концентрации

для малого  $\rho$  делается пропорциональным  $\sqrt{1/\rho}$ , то для перехода к выточке с острым углом следует принять следующую формулу:

$$\alpha_k = 1 + \frac{\alpha'_k - 1}{1 + \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}} \quad (28)$$

В ближайшем отделе мы увидим, что эта формула очень хорошо совпадает с результатами опытов.



Фиг. 89. Изменение технического коэффициента концентрации от граничного значения для случая идеальной упругости до граничного значения для выточки с острым углом.

## 5. Влияние деформации у основания выточки.

Нужно здесь отметить ещё один недостаток классической теории упругости. При выводе основных уравнений (III, 2) мы имели в виду такую деформацию, при которой происходит только лишь ничтожное изменение формы. Вследствие этого при выводе уравнений равновесия (III, 1) можно было положить в основу *состояние тела до деформации*. Совсем недавно Л. Фёппль<sup>1)</sup> показал, что для выточек, деформации около которых велики, т. е. велики коэффициент концентрации и кривизна выточки, это предположение перестает быть приемлемым. Отнеся уравнения равновесия к *деформированному состоянию* и введя соответствующие постоянные материала, Л. Фёппль показал, как можно, следуя этому ходу мысли, объяснить уменьшение коэффициента концентрации в выточке с острым углом. Таким образом, мы опять приходим к тому, что для получения практически применимых результатов старая теория должна быть в известной мере дополнена. Поскольку и учёт влияния деформации и введение в рассмотрение нашей модели, учитывающей структуру материала, разными путями приводят к одинаковым выводам (в обоих случаях речь идёт об уменьшении коэффициента концентрации сильно искривлённой выточки), можно принять за основу один из этих двух путей, при условии, если надлежащим образом выбрать постоянную материала в соответствии

<sup>1)</sup> Föppel, L., Ing.-Arch., т. 7 (1936), стр. 229.

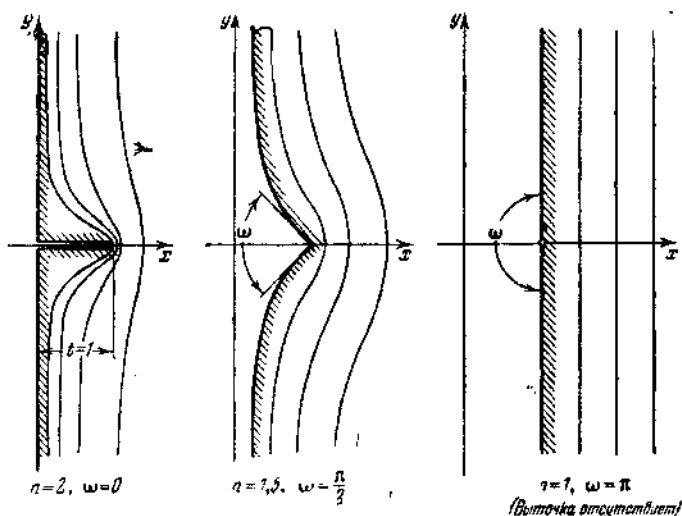


с опытными данными. Таким образом, сохраняя соотношения, установленные в гл. VIII, от 1 до 4, мы тем самым учтём влияние больших деформаций, если подберём  $\rho'$  в соответствии со свойствами материала.

## 6. Влияние величины угла отклонения.

При переходе к выточкам с острым углом важное значение приобретает влияние величины «отклоняющего угла». В выточках с большим радиусом кривизны этим влиянием можно было пренебречь, так как прямолинейная часть края находится далеко за пределами высоконапряжённой зоны, т. е. в области, которая, вследствие закона затухания, не оказывает влияния на коэффициент концентрации. Иначе обстоит дело в случае сильно искривлённых выточек и выточек с острыми углами. Здесь существенную роль играет  $\omega$  — величина угла, на которую при переходе через выточку отклоняется направление касательной контуру.

Все исследованные до сих пор коэффициенты концентрации в выточках с острыми углами относились к величине отклоняющего



Фиг. 90. Системы координат в теории отклоняющего угла.

угла, равной  $0^\circ$ . Для нахождения связи между коэффициентом концентрации и величиной  $\omega$  в выточках одинаковых размеров, но с различными величинами отклоняющих углов, проще всего рассмотреть напряжённое состояние в скрученном стержне, снабжённом мелкой выточкой. Эту задачу, в связи с вопросом о разгружающих выточках, мы уже существенно упростили; формулы (1) — (17), VII мы используем и здесь.

Систему координат здесь надо выбрать так, чтобы в числе координатных линий имелась кривая, отвечающая выточке с угловой точкой и любой величиной отклоняющего угла. Этому условию можно удовлетворять, положив:

$$z^n = 1 + w^n. \quad (29)$$

Тогда линия  $w=0$  изображает такую контурную линию (фиг. 90). При  $n=2$  угол равен нулю, при  $n=1,5$  он равен  $90^\circ$ , наконец, при  $n=1$  угол равен  $180^\circ$  (и вообще выточка отсутствует). У дна выточки с угловой точки  $w=0$ ,  $z=1$  в ближайшей к выточке окрестности положим  $z=1+z_1$ , и из (29), пренебрегая высшими степенями  $z_1$ , получим  $nz_1=w^n$ . Более подробное исследование даёт отсюда для величины отклоняющего угла формулу:

$$w=(2-n)\pi. \quad (30)$$

При больших значениях  $z$  приближённо  $z=w$ , т. е.  $x=u$ ,  $y=v$ . Искомая функция  $\varphi$  должна быть гармонической, т. е. должна удовлетворять дифференциальному уравнению (4), VII; далее, для больших  $u$  или  $v$  она должна переходить в  $\tau_n u$  (соответственно  $\tau_v = \tau_n$ ,  $\tau_w = 0$ ). Наконец,  $\tau_u$  должно быть равным нулю вдоль любой контурной линии  $u=u_0$  (мы рассматриваем сначала закруглённую выточку). Решение представится в виде

$$\varphi = \tau_n v; \quad \tau_u = 0; \quad \tau_v = \frac{\tau_n}{h}. \quad (31)$$

У дна выточки  $y=v=0$ . Из этого следует

$$x^n = 1 + u^n; \quad h = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{dx}{du}; \quad \tau_v = \tau_n \frac{du}{dx}. \quad (32)$$

Если теперь составить известным уже нам способом напряжение в выточке с угловой точкой, то для коэффициента концентрации получаем

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{1}{\tau_n} \int_1^{1+s} \frac{\tau_v}{\tau_n} dx = \frac{1}{\tau_n} \int_1^{1+s} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{\tau_n} (u)_{x=1+s} = \\ &= \left[ \left(1 + \frac{1}{s}\right)^n - \frac{1}{s^n} \right] \frac{1}{\tau_n}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда, при  $n=2$ , т. е. при угле отклонения  $0^\circ$ , для коэффициента концентрации получаем

$$\alpha_0 = \sqrt{1 + \frac{2}{s}}. \quad (34)$$

Решив относительно  $1/s$ , найдём

$$\frac{1}{s} = \frac{\alpha_0^2 - 1}{2}. \quad (35)$$

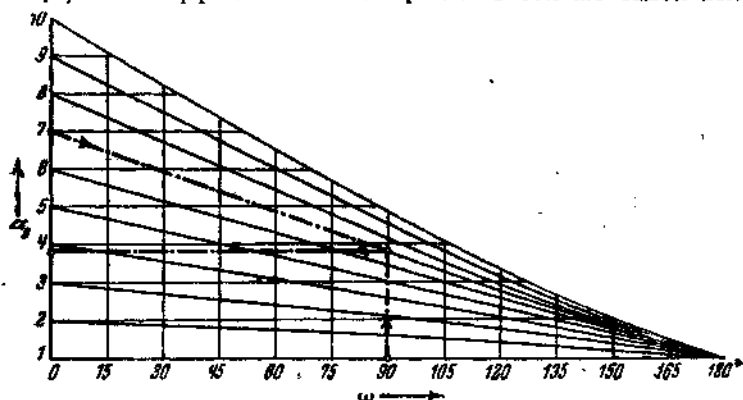
Подставляя это значение  $1/\varepsilon$  в (33), получим окончательно искомую зависимость между коэффициентом концентрации при  $\omega = 0^\circ$  и при любом другом значении  $\omega$

$$\alpha_s = \left[ \left( \frac{\alpha_{0s}^2 + 1}{2} \right)^n - \left( \frac{\alpha_{0s}^2 - 1}{2} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (36)$$

При этом, в соответствии с (30),  $n$  и  $\omega$  связаны между собой уравнением

$$n = 2 - \frac{\omega}{\pi}. \quad (37)$$

На фиг. 91 дана номограмма, построенная согласно предыдущим результатам. Если, например, коэффициент концентрации при  $\omega = 0^\circ$  равен 7,0, то коэффициент концентрации в той же самой выточке,



Фиг. 91. Зависимость коэффициента концентрации для выточки с острым углом от отклоняющего угла в номографическом представлении.

но с отклоняющим углом  $90^\circ$ , определяется так: от точки  $\alpha_s = 7$  перемещаемся направо и вниз по кривой, соответственно указаниям стрелки, до пересечения с вертикалью, дающей  $90^\circ$ ; проведя от этой точки пересечения горизонталь влево, мы можем отсчитать искомый  $\alpha_s = 3,8$ .

На первый взгляд кривые на номограмме кажутся почти прямыми. Коэффициент концентрации уменьшается почти равномерно с уменьшением отклоняющего угла. Если обратить внимание на то, что с возрастанием отклоняющего угла увеличивается также и скругление внешних углов, в соответствии со свойствами выбранной системы координат (фиг. 90), то следует ожидать, что для технических выточек с резко выраженными внешними углами при возрастании отклоняющего угла коэффициент концентрации не столь сильно убывает. Это говорит о том, что кривые на номограмме ещё больше должны приближаться к прямым линиям для технических выточек. Для практического поль-

зования мы примем в основу поэтому прямолинейный закон, которому соответствует в определённой области зависимость

$$\alpha_s = 1 + \frac{\pi - \omega}{\pi} [(\alpha_s)_{\omega=0} - 1], \quad (38)$$

очень хорошо соответствующая уравнению (36). Кроме того, это уравнение хорошо подтверждается и опытами, на что будет указано в ближайшем отделе.

## 7. Общий технический коэффициент концентрации.

Уравнение (38) нужно ещё согласовать с уравнением (28) так, чтобы получился общий технический коэффициент концентрации, соответствующий нашим требованиям, установленным вначале. Искомое уравнение для коэффициента концентрации должно в частности удовлетворять требованию, чтобы с возрастанием радиуса кривизны влияние отклоняющего угла убывало. Возвратимся снова к отделам IV—VI, где выведены выражения для коэффициентов концентрации, которые непосредственно справедливы для идеального материала при  $\rho = 0$ . Эти коэффициенты мы обозначили через  $\alpha'_k$ . С уменьшением  $\rho$  до нуля они делаются пропорциональными  $\sqrt{1/\rho}$ , и можно положить:

$$(\alpha_k)_{\rho=0} = \sqrt{\frac{1}{\rho}}. \quad (39)$$

Подстановкой в (28) получаем

$$(\alpha_k)_{\rho \rightarrow 0} = 1 + \frac{c \sqrt{\frac{1}{\rho}}}{1 + \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}} \quad (40)$$

(в числителе можно пренебречь единицей по сравнению с  $\sqrt{1/\rho}$ ). Отсюда предельным переходом к  $\rho \rightarrow 0$  получаем коэффициент концентрации для выточки с угловой точкой при отклоняющем угле, равном  $0^\circ$ . Мы получим:

$$(\alpha_s)_{\omega=0} = 1 + c \sqrt{\frac{1}{\rho'}}. \quad (41)$$

Если подставить это в (38), то найдём

$$\alpha_s = 1 + \frac{\pi - \omega}{\pi} c \sqrt{\frac{1}{\rho'}}. \quad (42)$$

Сравнение (42) с (41) приводит прежде всего к заключению, что для получения общего коэффициента концентрации нужно только лишь букву  $c$  заменить на  $\frac{\pi - \omega}{\pi} c$ . Но это привело бы к выводу, противоречащему теории, что отклоняющий угол оказывает заметное влияние на коэффициент концентрации и при больших  $\rho$ .

Вторая возможность установления общего коэффициента концентрации наиболее простым способом состоит в замене  $\sqrt{1/\rho'}$  на  $\frac{\pi - \omega}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho'}}$ ; этим путём можно удовлетворить условию, связанному с влиянием отклоняющего угла; (28) тогда переходит в

$$\alpha_k = 1 + \frac{\alpha_k' - 1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}. \quad (43)$$

Действительно, теперь при большом радиусе кривизны влияние бокового угла ничтожно мало, что мы и утверждали в предыдущих рассуждениях; теперь в знаменателе величина  $\frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}$  делается малой по сравнению с 1, и  $\omega$ , следовательно, не оказывает больше никакого влияния на коэффициент концентрации. При уменьшении радиуса кривизны влияние отклоняющего угла, напротив, делается постепенно всё более значительным и, наконец, при выточке с угловой точкой, когда  $\rho = 0$ , получается уравнение (42).

Кроме того, уравнение (43) вполне согласуется с результатами опытов и представляет собой поэтому основное уравнение для *технического коэффициента концентрации*.

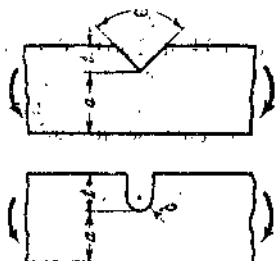
Для быстрого определения  $\alpha_k'$  — коэффициента концентрации для идеального материала — служит номограмма (фиг. 104 и 105). Точно так же и уравнение (43) можно представить в виде номограммы. Для этой цели служит диаграмма на фиг. 106. Правила пользования вытекают из указаний стрелок; читателя отсылаем ещё к примеру, приведённому в отделе X.

Мы перейдём теперь к изложению результатов экспериментальных исследований и сравним их с формулами, полученными здесь.

# СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ.

## 1. Измерения удлинений.

Обыкновенными экстензометрами невозможно определить действительно возникающие у дна выточки большие удлинения, а значит, и само наибольшее напряжение. Сконструированный E. Preuss<sup>1)</sup> в 1912 г. прибор подходит к этому требованию уже ближе, но всё же ещё не избавляет от ошибок. Только в 1932 г. G. Fischer<sup>2)</sup> развил способ измерения, испытанный на многих опытах и дающий с достаточной точностью величину наибольшего напряжения у дна выточки. Способ этот состоит в определении перемещений отдельных точек вдоль прямой линии, нанесением величин перемещений в качестве ординат на прямую, где производились измерения, получают так называемую кривую перемещений, из которой можно определить изменение удлинений так же и в тех точках прямой, которые недоступны непосредственной



Фиг. 92. Выточки, исследованные Фишером.

установке экстензометра. Измерения, проведенные Фишером, на выточках в случае плоского изгиба стержня признаны всеми

специалистами как весьма надёжные, и поэтому мы их используем для сравнения с теорией.

Речь при этом будет идти, с одной стороны, о выточке с угловой точкой, но при различных отклоняющих углах, с другой стороны, о закруглённых выточках (фиг. 92). Для односторонней выточки при изгибе теория даёт (IV, 6, B):

$$\alpha_{rk} = 1 + 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}; \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Preuss E., VDI-Forsch.-Heft, Nr. 126; Z. VDI, т. 56 (1916), стр. 1349 и 1780.

<sup>2)</sup> Fischer G., Kerbwirkung an Biegestäben. Berlin, VDI-Verlag, 1932.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{tk} &= \frac{2\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) - \alpha_1 \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}}{\frac{4}{\alpha_2}\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) - 3\alpha_1}; \\ \alpha_1 &= \frac{2\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}} + \sqrt{\frac{a}{\rho}}}; \\ \alpha_2 &= \frac{4 \frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{3 \left[ \left(\frac{a}{\rho} - 1\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}} + \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\alpha'_k = 1 + \frac{(\alpha_{fk} - 1)(\alpha_{tk} - 1)}{\sqrt{(\alpha_{fk} - 1)^2 + (\alpha_{tk} - 1)^2}}; \quad (3)$$

$$\alpha_k = 1 + \frac{\alpha'_k - 1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}. \quad (4)$$

Чтобы определить ещё неизвестную величину  $\rho'$ , установим прежде всего коэффициент концентрации выточки с угловой точкой. При очень малых  $\rho$ ,  $\alpha_{tk}$ , а вместе с этим также и  $\alpha_{tk} - 1$  переходят в:

$$\alpha_{tk} - 1 = \frac{4(\pi - 2)}{3(\pi^2 - 8)} \sqrt{\frac{a}{\rho}} = \sqrt{0,663 \frac{a}{\rho}}.$$

Если в (3) подставим это значение, а для  $\alpha_{fk} - 1$  — значение  $\sqrt{4 \frac{t}{\rho}}$ , то получим:

$$\begin{aligned} (\alpha'_k)_{\rho \text{ — мало}} &= 1 + \sqrt{\frac{4 \frac{t}{\rho} 0,663 \frac{a}{\rho}}{4 \frac{t}{\rho} + 0,663 \frac{a}{\rho}}} = \\ &= 1 + \sqrt{\frac{0,663 \frac{a}{\rho}}{1 + 0,166 \frac{a}{t}}}. \end{aligned} \quad (5)$$

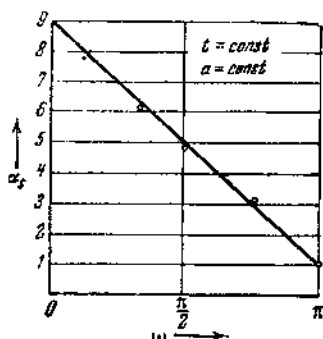
Наконец, после подстановки в (4) найдем:

$$(\alpha_k)_{\rho \text{ — мало}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}} \sqrt{\frac{0,663 \frac{a}{\rho}}{1 + 0,166 \frac{a}{t}}}. \quad (6)$$

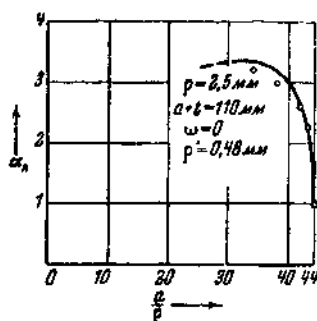
Отсюда предельным переходом при  $\rho \rightarrow 0$  получим коэффициент концентрации для выточки с угловой точкой

$$\alpha_s = 1 + \frac{\pi - \omega}{\pi} \sqrt{\frac{0,663}{1 + 0,166 \frac{a}{t}} \frac{a}{\rho'}}. \quad (7)$$

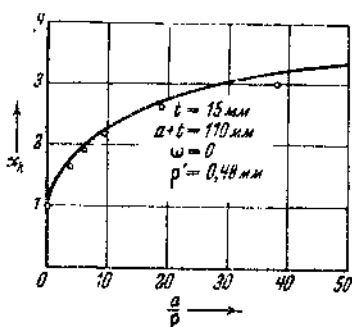
Опыты над выточками с угловой точкой относились к стержням, у которых были размеры  $a = 95$  мм,  $t = 15$  мм.



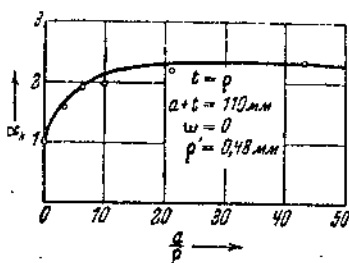
Фиг. 93. Коэффициенты концентрации выточек с острым углом при постоянных глубине выточки и ширине стержня, но при переменном отклоняющем угле, соответственно уравнениям (38) главы VII и (7) главы IX и по данным Фишера.



Фиг. 94. Коэффициент концентрации при переменной глубине выточки и постоянных радиусе кривизны и ширине стержня.



Фиг. 95. Коэффициент концентрации при переменном радиусе кривизны и постоянных глубине выточки и ширине стержня.



Фиг. 96. Коэффициент концентрации для полукруглых выточек при переменном радиусе и постоянной ширине стержня.

Коэффициенты концентрации, соответствующие опытам, ложатся, в зависимости от отклоняющего угла, с достаточной точностью на



прямую, которая при  $\omega = \pi$  проходит через  $\alpha_s = 1$ , а при  $\omega = \frac{\pi}{2}$  — через  $\alpha_s = 5$  (см. фиг. 93). Соответствие с нашим уравнением (7) получается при  $\rho' = 0,48$  мм. Испытания проводились на специальной стали с временным сопротивлением в  $65 \text{ кг/мм}^2$ .

Найдя таким путём значение  $\rho'$ , можно теперь сравнить с теорией результат измерения Фишера на закруглённых выточках. Будем при этом отклоняющий угол считать равным нулю. На фиг. 94 показано изменение коэффициента концентрации при переменной глубине, но при постоянном радиусе кривизны; фиг. 95 соответствует переменному радиусу кривизны по постоянной глубине, наконец, на фиг. 96 дана кривая для полукруглой выточки с переменным радиусом, но с постоянной шириной стержня. Теоретические кривые для коэффициента концентрации определены при этом по номограммам. Значения коэффициентов концентрации, полученные из опыта, все нанесены на фигуре. Отклонение от теоретических кривых не превосходит точности опыта, так что теория вполне подтверждается.

## 2. Фотоупругие измерения напряжений.

Фотоупругий метод, получающий за последние годы всё большее и большее значение, представляет неоспоримо самое лучшее и самое эффективное вспомогательное средство исследования плоского напряжённого состояния. Относительно основ этого метода отсылаем к соответствующей литературе<sup>1)</sup>. С помощью этого метода кроме траекторий напряжения получают также и сами напряжения, а именно, на контуре из непосредственных измерений, а внутри — либо графическим, либо аналитическим расчётом.

Первая задача о местных напряжениях, решённая оптическим путём, состояла в определении распределения напряжений в уголке. На поляризационной установке, находящейся в Мюнхене, Н. С. v. Widdern, Н. Kurzhals и L. Kettenacker<sup>2)</sup> под руководством L. Föppl'a разобрали подробно эту задачу. Сравнить их результаты с теорией, однако, нельзя из-за отсутствия пока строгого теоретического решения этой задачи.

Однако сравнение мы можем провести, пользуясь исследованиями E. Armbruster'a<sup>3)</sup>, выполненными в Мюнхене и относящимися к стержням с выточками; исследованию здесь подвергались изгибаемая балочка с односторонней выточкой (фиг. 97) и растянутый стержень с двусторонней выточкой (фиг. 98). Результаты опытов при переменном

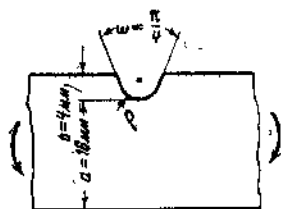
<sup>1)</sup> Föppl L. u. Neuber, H., Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik, München u. Berlin, 1935.

<sup>2)</sup> См. предыдущую сноску.

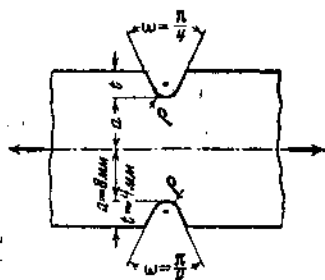
<sup>3)</sup> Armbruster E., Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit auf den Spannungsverlauf und die Schwingungsfestigkeit. Berlin, 1931.

радиусе кривизны, но при постоянных глубине выточки и отклоняющем угле сопоставлены на фиг. 99 и 100 с теоретическими коэффициентами концентраций. Последние вычислялись по номограммам (фиг. 103 и 104), и значение  $\rho'$  принималось равным 0,48 мм.

В случае балочки, работавшей на изгиб (фиг. 99), совпадение удовлетворительное, тем более, если принять во внимание, что при



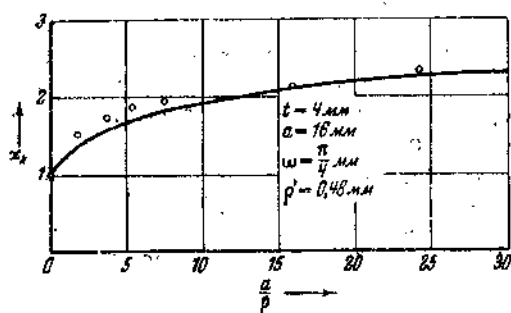
Фиг. 97. Исследованная Армбрюстером изгибаемая балочка с односторонней выточкой.



Фиг. 98. Исследованный Армбрюстером растянутый стержень с двусторонней выточкой.

ничтожной ширине балочки в 20 мм нельзя достигнуть очень большой точности опыта. Значение  $\rho' = 0,48$  мм поэтому остаётся

приемлемым и для флинт-глаза, который употреблялся при фотоупругих исследованиях.



Фиг. 99. Сравнение опытов Армбрюстера на изгиб с теорией коэффициента концентрации.

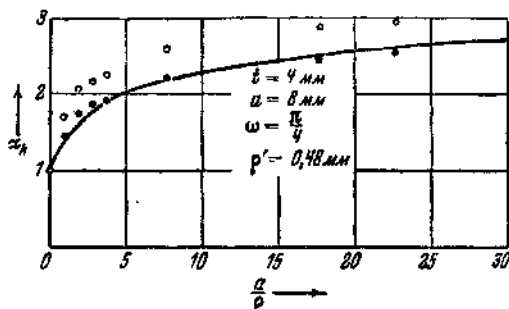
В случае растяжения стержня (фиг. 100) значения коэффициентов концентрации, полученные из опыта, располагаются повсюду выше теоретической кривой. Если принять во внимание, что практически простое растяжение осуществляется

только приближённо и что всегда существуют некоторые напряжения от изгиба, о чём известно каждому занимающемуся фотоупругими исследованиями, то такое отклонение нас не должно удивлять. Предположим, например, в болте, посредством которого в приспособлении Армбрюстера производилось растяжение стержня, возникают несимметричные силы трения, вызывающие небольшое смещение линии растяжения относительно оси стержня. Пусть величина смещения в наиболее узком сечении достигает 3% ширины  $2a$  (почти около 0,98 мм). Тогда в результате этого появляются изгиб стержня и наибольшее

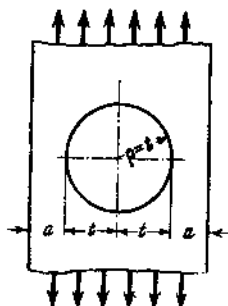
напряжение, поскольку коэффициент концентрации при изгибе равен 6, увеличивается на 18%, т. е. действительное номинальное напряжение в этом случае равно 1,18 величины теоретического значения. При ничтожной ширине стержня в 20 мм эти числа вполне правдоподобны. Если

учтём эту поправку к результатам опытов Армбрустера, то получим — как видно из фиг. 100, — значения, очень близкие к теоретической кривой.

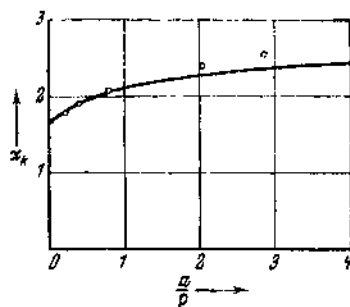
Следующий ряд исследований, проведённых точно так же в Мюнхенской лаборатории А. Неппиг<sup>1)</sup>, относится к растянутому стержню с центральным круговым отверстием, как изображено на фиг. 101. Для сравнения экспериментальных данных, относящихся к коэффициенту концентрации, с теорией отсылаем к рассуждениям главы IV, 6, С. Коэффициент концентрации глубокой



Фиг. 100. Сравнение опытов Армбрустера на растяжение с теорией коэффициента концентрации.



Фиг. 101. Исследовательный Геннигом растянутый стержень с центральным отверстием.



Фиг. 102. Сравнение теории коэффициента концентрации и опытов Геннига на растяжение стержня с центральным отверстием.

выточки в этом случае составляется из значения  $\alpha_1$  — двусторонней глубокой внешней выточки при растяжении и слагаемого от изгиба, которое получается из коэффициента концентрации  $\alpha_3$  односторонней глубокой внешней выточки при изгибе, умноженного на некоторый коэффициент  $C$ . Этот коэффициент, согласно опытам, проведённым Неппиг<sup>1)</sup>, равен 0,8. Доказательство этого следует из фиг. 102, где

<sup>1)</sup> Hennig A., Forsch. Ing.-Wes. (1933), стр. 53.

изображена кривая для коэффициента концентрации, получающаяся теоретически ( $\rho' = 0,48 \text{ мк}$ ). Как видно, она близко подходит к коэффициентам концентрации, полученным экспериментально.

Ещё целый ряд дальнейших исследований мы найдём в литературе по экспериментальным исследованиям напряжений. Но и отмеченных работ уже достаточно, так как речь идёт только о сравнении теории с экспериментом, относящимся к напряжениям в выточках.

В последней главе, мы, исполняя обещание, останавливаемся подробнее на уже неоднократно упомянутых номограммах для коэффициентов концентрации, которые дают возможность определять легко и быстро коэффициент концентрации также и математически менее подготовленному читателю.

---

# НОМОГРАММЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОНЦЕНТРАЦИИ.

## 1. Объяснения к номограммам для коэффициентов концентрации.

Общий обзор всех случаев, которые рассматривались уже в теории, даёт фиг. 103. В левой части дана сводка существенных признаков соответствующих выточек; отклоняющий угол, который находится всегда одним и тем же образом (см., например, фиг. 98), ради простоты не обозначен. В первом столбце указан вид нагрузки, а во втором — формулы, по которым вычисляется номинальное напряжение. Причём, в последних двух формулах введены обозначения:

$S$  — статический момент верхней половины поперечного сечения относительно нейтральной оси,

$J$  — момент инерции всего поперечного сечения относительно той же оси,

$F$  — площадь контура, ограниченная средней линией.

Следующие столбцы поясняют применение номограмм фиг. 104 и 105; в заголовках указаны параметры  $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$ ,  $\sqrt{\frac{a}{\rho}}$  и  $\sqrt{\frac{r}{\rho}}$  (радикалы введены для лучшего отсчёта по номограмме). Буквы в столбце  $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$  указывают, каким рядом чисел ( $a$  или  $b$ ) нужно пользоваться на фиг. 104 при отсчёте значений  $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$ . Числа обозначают нужную кривую (именно, для  $\sqrt{\frac{a}{\rho}}$  направо по фиг. 104, а для  $\sqrt{\frac{r}{\rho}}$  — направо по фиг. 105). Из фиг. 104, или, для выточек на телах вращения, из фиг. 104 и 105, получаем сразу коэффициент концентрации  $\alpha_k$  для идеального материала. Влияние структуры и боковых углов определяется затем ещё по номограмме на фиг. 106. Правила пользования лучше всего разъяснить на примерах.

## 2. Примеры.

**А. Двусторонняя внешняя выточка при изгибе.** Дано:  $\rho = 2,5$  мм,  $t = 15$  мм,  $a = 95$  мм. Отсюда получается:

$$\sqrt{\frac{t}{\rho}} = 2,45, \quad \sqrt{\frac{a}{\rho}} = 6,16.$$

Виды выточек	Вид напряжений	Формулы нормальных напряжений	Параметры для вычислений чисел	Параметры для вычислений длина	Параметры для вычислений коэффициент
	Растяжение	$\frac{P}{2ab}$	$b$	1	—
	Изгиб	$\frac{3M_b}{2ab^2}$	$b$	2	—
	Растяжение	$\frac{P}{da}$	$b$	3	—
	Изгиб	$\frac{3M_b}{da^2}$	$b$	4	—
	Растяжение	$\frac{P}{2da}$	$b$	5	—
	Изгиб	$\frac{3M_b b}{2a(b^2 - b^3)}$	$a$	5	—
	Растяжение	$\frac{P}{\pi a^2}$	$b$	6	—
	Изгиб	$\frac{4M_b}{\pi a^3}$	$b$	7	—
	Сдвиг	$\frac{1,23V}{\pi a^2}$	$a$	8	—
	Кручение	$\frac{2M_t}{\pi a^3}$	$a$	9	—
	Растяжение	$\frac{P}{\pi(r^2 - a^2)}$	$b$	5	1
	Изгиб	$\frac{4M_b r}{\pi(r^4 - a^4)}$	$b$	5	2
	Сдвиг	$\frac{(1,23r^2 - 2,77a^2)V}{\pi(r^4 - a^4)}$	$a$	10	3
	Кручение	$\frac{2M_t r}{\pi(r^4 - a^4)}$	$a$	10	4
	Растяжение	$\frac{P}{\pi(b^2 - r^2)}$	$b$	5	5
	Изгиб	$\frac{4M_b r}{\pi(b^4 - r^4)}$	$b$	5	6
	Сдвиг	$\frac{(2,77b^2 - 1,23r^2)V}{\pi(b^4 - r^4)}$	$a$	10	7
	Кручение	$\frac{2M_t r}{\pi(b^4 - r^4)}$	$a$	10	8
	Сдвиг	$\frac{V}{\pi a^2}$	$a$	10	—
	Кручение	$\frac{M_t}{2\pi a^2}$	$a$	10	—
	Сдвиг	$\frac{VS}{2aJ} 1)$	$a$	10	—
	Кручение	$\frac{M_t}{2aJ} 2)$	$a$	10	—

1)  $S$  — статический момент верхней половины поперечного сечения относительно нейтральной оси

$J$  — момент инерции всего поперечного сечения относительно той же оси

2)  $F$  — площадь контура, ограниченная средней линией (— — — — —)

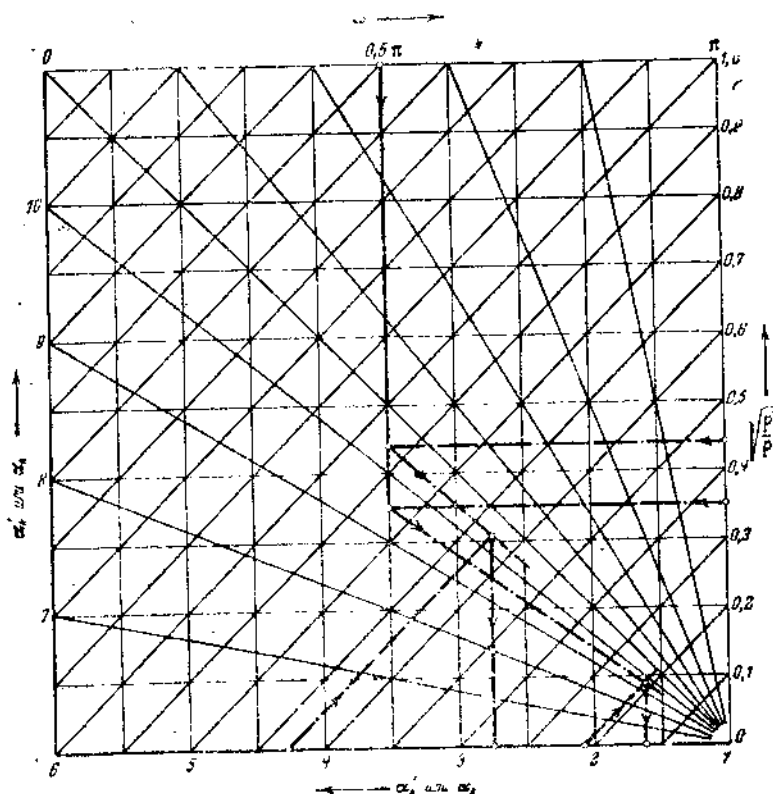
Фиг. 103. Перечень задач о напряжениях в выточках, решаемых при помощи номограмм коэффициентов концентрации по фиг. 104—106.

фиг. 104. Номограмма для определения идеального коэффициента концентрации.





Как вытекает из указаний на фиг. 103, для  $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$  нужно пользоваться рядом чисел  $b$ , а для  $\sqrt{\frac{a}{\rho}}$  — кривой 2. Начинаем таким образом двигаться на фиг. 104 от  $\sqrt{\frac{a}{\rho}} = 6,16$  по вертикали вверх до пересечения с кривой 2. Затем проводим налево горизонтальную линию до пересечения с осью диаграммы. Эту последнюю точку пересечения соединяем с точкой  $\sqrt{\frac{t}{\rho}} = 2,45$ , находящейся на горизонтальной оси; при этом нужно отсчёт производить по ряду чисел  $b$ .



Фиг. 106. Номограмма для определения технического коэффициента концентрации.

Эта прямая касается круга, указывающего коэффициент концентрации  $\alpha'_k = 4,28$ .

Правильность этого способа следует из того, что радиус круга, который касается указанной прямой, является высотой прямоуголь-

ного треугольника с катетами  $\alpha_{rk} - 1$  и  $\alpha_{ik} - 1$ . Следовательно, действительно мы имеем дело с той зависимостью между предельными значениями коэффициентов концентрации, которая требовалась согласно II, 4 и была объяснена на фиг. 3.

Если имеем дело с материалом при  $\rho' = 0,48$  мм, то  $\sqrt{\frac{r}{\rho}} = 0,44$ . Отклоняющий угол пусть будет  $90^\circ$ . Тогда при пользовании фиг. 106 будем смещаться по горизонтали налево в уровне  $\sqrt{\frac{r}{\rho}} = 0,44$  и вертикально вниз при значении  $\omega = 0,5 \pi$ . Через точку пересечения проводим луч, идущий к правому нижнему углу. Затем двигаемся снизу от  $\alpha'_k = 4,28$  под углом  $45^\circ$  вправо и вверх до пересечения с этим лучом; из точки пересечения проводим вниз вертикаль и отсчитываем на оси окончательный технический коэффициент концентрации  $\alpha_k = 2,73$ . Доказательство согласованности этого способа построения с уравнением (43), VIII, основывается на подобии соответственных треугольников.

**В. Внешняя выточка с осевым отверстием при изгибе.** Дано  $\rho = 4$  мм,  $\alpha = 13$  мм,  $t = 36$  мм,  $r = 25$  мм,  $\rho' = 0,48$  мм,  $\omega = 90^\circ$ . Находим

$$\sqrt{\frac{t}{\rho}} = 3; \quad \sqrt{\frac{a}{\rho}} = 1,80; \quad \sqrt{\frac{r}{\rho}} = 2,50; \quad \sqrt{\frac{r'}{\rho}} = 0,35.$$

По вышеописанному уже способу, при  $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$  (ряд чисел  $b$ ) и  $\sqrt{\frac{a}{\rho}}$  (кривая 5), из фиг. 104 найдём прежде всего  $\alpha'_k$ , которое оказывается равным 3,60. Здесь идёт речь о значении  $\alpha'_k$  при большом осевом отверстии, т. е. для  $(\alpha'_k)_r = \infty$ .

Теперь переходим к фиг. 105 и смещаемся вверх по вертикали при значении  $\sqrt{\frac{r}{\rho}} = 2,50$  до пересечения с кривой 2, затем налево по горизонтали до пересечения с осью. Последнюю точку пересечения соединим прямой с точкой  $(\alpha'_k)_r = \infty = 3,60$ , лежащей на другой оси. Круг, который касается эта прямая, даёт  $\alpha'_k = 2,08$ . Из фиг. 106 по этой величине уже вышеуказанным путём при  $\sqrt{\frac{r'}{\rho}} = 0,35$  и  $\omega = \frac{\pi}{2}$  получаем окончательное значение  $\alpha_k = 1,63$ .

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вал с поперечным отверстием 167  
 Взаимность касательных напряжений 18  
 Выкружки, см. выточки  
 Выступы 84  
 Выточки 11  
 — большой и малой кривизны 51  
 — внешние глубокие двусторонние 47, 53, 55, 147, 148, 155, 158  
 — — — односторонние 57  
 — — у тел вращения 99, 147, 159  
 — внутренние глубокие 148, 155, 160  
 — — мелкие у тел вращения 118, 147, 153  
 — — мелкие 74, 148, 153  
 — многократные 173  
 — призматического типа 162  
 — произвольной глубины 12, 13  
 — разгружающие 169  
 — с острыми углами 176  
 — у тел вращения 87  
  
 Глубина выточки 12, 63, 74, 89, 123, 128, 172, 175  
 Граничные условия 19, 44, 45  
 Гука закон 26  
  
 Деформации в криволинейных координатах 22, 25, 35  
 — компоненты — 22  
 Дно выточки 13, 47, 53, 64, 67, 71, 169  
  
 Закон Гука 26  
 — затухания 11, 90, 170  
 — наложения 21, 27  
 — перехода от глубоких к мелким выточкам 12—14  
 — — — закругленных к заостренным выточкам 183, 184  
  
 Изгиб поперечный при глубоких внешних выточках 57  
 — чистый при глубокой выточке 51, 61, 104  
 — чистый при мелкой выточке 79, 125  
  
 — — тел вращения 150  
 — — — с отверстиями 68  
 Искажение, коэффициент — 23, 24, 40, 47.  
  
 Компоненты деформаций 22, 24, 37  
 — напряжений 28, 30, 43  
 — перемещений 22, 29, 30  
 Концентрация напряжений 8  
 — — в плоской задаче 40  
 — — — пространстве 89  
 — — у выступов 84  
 Коэффициент искажения 23, 24, 47, 90  
 — концентрации 10, 12  
 — — выточки глубокой 13  
 — — для двухсторонней глубокой выточки 82  
 — — — любой глубины 14, 15  
 — — — мелкой 12  
 — — — — — при изгибе 53, 57  
 — — — — — растяжении 51  
 — — — — — сдвиге 56  
 — — — односторонней глубокой выточки 83  
 — — — — — при изгибе 62  
 — — — — — растяжении 61  
 — — — — — сдвиге 56, 63  
 — — — мелких выточек 82, 158  
 — — — — — при изгибе 78, 80  
 — — — — — растяжении 77, 78  
 — — — — — сдвиге 81  
 — — — отверстий 83  
 — — — — — при изгибе 62  
 — — — — — растяжении 67, 68  
 — — — — — сдвиге 56, 63  
 — — — стержня с продольным на- зом 164  
 — — — тел вращения 158—160  
 — — — — — при изгибе 107, 128, 132  
 Коэффициент концентрации для тел вращения при кручении 117, 144—146, 154  
 — — — — — растяжении 104, 120, 121, 124

- Коэффициент концентрации для тел вращения при сдвиге 111, 136, 137, 139, 154
- — — тонкостенных полых сечений 167
  - — —, зависящий от отклоняющего угла 187, 188
  - — — при остроконечных выточках 179—183
  - — — разгружающих выточках 171—175
  - — — технический 188, 189
  - — — у вала с поперечным отверстием 168
  - — — стержня с выступами 86
  - — — разгрузки 174
- Кривая изменения коэффициента концентрации 14
- Кривизна выточки 51, 172
- Кручение стержней с глубокой выточкой 115
- — — мелкой выточкой 142
  - — — остроугольной выточкой 178, 179
  - — — продольным пазом 164
  - — — разгружающей выточкой 170
- Линии давления 169
- тока 51
- Метод трёх функций 30
- Модель для остроугольных выточек 177, 179
- Напряжение 16
- возмущения 116
  - допускаемое 7
  - касательное 16, 18, 19
  - местное 8
  - номинальное 10, 50
  - нормальное 16, 17
  - объёмное 27
  - при криволинейной системе координат 28, 36, 37
  - — — прямоугольной системе координат 16
  - — — через гармонические функции 32
- Отверстия круглые 63
- овальные 64
  - продолговатые 63

- Паз 164
- Пластины толстые 43
- тонкие 42
- Радиус кривизны выточки 12
- Растяжение при глубоких внешних выточках 48, 58
- — — мелких выточках 75
  - — — отверстиях 65
  - — — стержней с остроугольными выточками 180
  - — — тел вращения с выточками 103, 119, 149
- Сдвиг в прямоугольной системе координат 21
- — — относительный 20, 22
  - — — при глубоких выточках 53, 62
  - — — мелких — 80
  - — — наличия остроконечных выточек 178, 179
  - — — — отверстий 70
  - — — стержней с пазом 164
  - — — тел вращения 108, 150
- Силы инерции 17
- — — объёмные 17
- Теория выточек призматического типа 162
- — — концентрации в плоскости 40
  - — — — пространстве 87
  - — — упругости 16
  - — — —, основные уравнения — — — 29
- Технический коэффициент концентрации 188, 189
- Траектории главных напряжений 51
- — — касательных — 140, 141
  - — — равных — 108, 113, 114, 133, 141
- Удлинение относительное 20
- Уравнение Лапласа 94
- — — равновесия 17
- Формы выточек 11, 12, 47, 48, 77, 79, 119, 126, 135, 154
- — — отверстий 63, 64, 68
- Фотоупругость 8, 83, 191
- Функции гармонические 30
- — — напряжений 30
  - — — Эри 43
- Цилиндр с продольным пазом 164
- Эффект разгрузки 11

# ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
113	6 св.	$\left(\frac{a}{\rho} + 2\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{a}{\rho} + 2\right)^{\frac{3}{2}}$	Тип.
145	3 св.	$-5 \frac{f}{\rho}$	$-5 \frac{f}{\rho}$	"
154	11 св.	$y_{v10}$	$(\tau_{v10})$	"
168	6 св.	$\sqrt{\frac{f}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{f}{\rho}}$	"
188	19 св.	$(a_k) \sqrt{\frac{1}{\rho}}$	$(a_k')_{\rho-\text{мало}} = c \sqrt{\frac{1}{\rho}}$	"
190	4 св.	$\sqrt{\frac{f}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{f}{\rho}}$	"

Заказ 8476