Задание 1:

$A^2 + AB + BA + B$

$$A = \begin{pmatrix} 47 & 59 \\ -23 & 21 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -42 & -59 \\ 22 & -20 \end{pmatrix}$$

Алгоритм Штрассена для $A \cdot B$

— новые элементы:

$P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) = (47 + 21)(-42 + (-20)) = 68 \cdot (-62) = \underline{-4216} = P_1$

$P_2 = (A_{21} + A_{22}) B_{11} = (-23 + 21) \cdot (-42) = -2 \cdot (-42) = \underline{84} = P_2$

$P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22}) = 47(-59 - (-20)) = 47 \cdot (-39) = \underline{-1833} = P_3$

$P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11}) = 21(22 - (-42)) = 21 \cdot 64 = \underline{1344} = P_4$

$P_5 = (A_{11} + A_{12}) B_{22} = (47 + 59) \cdot (-20) = 106 \cdot (-20) = \underline{-2120} = P_5$

$P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) = (-23 - 47)(-42 + (-59)) = -70 \cdot (-101) = \underline{7070} = P_6$

$P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) = (59 - 21)(22 + (-20)) = 38 \cdot 2 = \underline{76} = P_7$

— элементы матрицы:

$AB_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7 = -4216 + 1344 - (-2120) + 76 = -676$

$AB_{12} = P_3 + P_5 = -1833 + (-2120) = -3953$

$AB_{21} = P_2 + P_4 = 84 + 1344 = 1428$

$AB_{22} = P_1 - P_2 + P_3 + P_6 = -4216 - 84 + (-1833) + 7070 = 937$

$$\boxed{AB} = \begin{pmatrix} -676 & -3953 \\ 1428 & 937 \end{pmatrix}$$

Алгоритм „Разделяй-и-властвуй" для BA:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} & b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22} \\ b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21} & b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -42 \cdot 47 + (-59) \cdot (-23) & -42 \cdot 59 + (-59) \cdot 21 \\ 22 \cdot 47 + (-20) \cdot (-23) & 22 \cdot 59 + (-20) \cdot 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1974 + 1357 & -2478 + (-1239) \\ 1034 + 460 & 1298 + (-420) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -617 & -3717 \\ 1494 & 878 \end{pmatrix} = \boxed{BA}$$

Алгоритм Винограда – Штрассена для $A \cdot A$:

$$A = \begin{pmatrix} 47 & 59 \\ -23 & 21 \end{pmatrix}$$

- Сумма блоков:

$S_1 = (a_{21} + a_{22}) = -23 + 21 = -2$

$S_2 = (S_1 - a_{11}) = -2 - 47 = -49$

$S_3 = (a_{11} - a_{21}) = 47 - (-23) = 70$

$S_4 = (a_{12} - S_2) = 59 - (-49) = 108$

$S_5 = (a_{12} - a_{11}) = 59 - 47 = 12$

$S_6 = (a_{22} - S_5) = 21 - 12 = 9$

$S_7 = (a_{22} - a_{12}) = 21 - 59 = -38$

$S_8 = (S_6 - a_{21}) = 9 - (-23) = 32$

- Умножение блоков:

$P_1 = S_2 S_6 = -49 \cdot 9 = -441$

$P_2 = a_{11} \cdot a_{11} = 47 \cdot 47 = 2209$

$P_3 = a_{12} \cdot a_{21} = 59 \cdot (-23) = -1357$

$P_4 = S_3 S_7 = 70 \cdot (-38) = -2660$

$P_5 = S_1 S_5 = -2 \cdot 12 = -24$

$P_6 = S_4 a_{22} = 108 \cdot 21 = 2268$

$P_7 = a_{22} S_8 = 21 \cdot 32 = 672$

- Сумма блоков:

$T_1 = P_1 + P_2 = -441 + 2209 = 1768$

$T_2 = T_1 + P_4 = 1768 + (-2660) = -892$

- Результирующая матрица:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} P_2 + P_3 & T_1 + P_5 + P_6 \\ T_2 - P_7 & T_2 + P_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2209 + (-1357) & 1768 + (-24) + 2268 \\ -892 - 672 & -892 + (-24) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 852 & 4012 \\ -1564 & -916 \end{pmatrix} = \boxed{A^2}$$

176 59
-136 21

$$A^2 + AB + BA + B = \begin{pmatrix} 852 & 4012 \\ -1564 & -916 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -676 & -3953 \\ 1428 & 937 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -617 & -3717 \\ 1494 & 878 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -42 & -59 \\ 22 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -483 & -3717 \\ 1380 & 879 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -483 & -3717 \\ 1380 & 879 \end{pmatrix}$

Из используемых мной в этом задании самый оптимальный алгоритм - Винограда - Штрассена, т. к он выполняет минимальное количество умножений и сложений для вычисления произведения матриц.

Задание 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 2 + 1 + 1 + (-2) = \boxed{2}$

2. Использую метод Гаусса для нахождения $|A|$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)\leftrightarrow(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(1)\cdot 2-(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(4)-(3)}{=}$$

$$\overset{(4)-(3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = \boxed{1}$$

3. $$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)\leftrightarrow(2)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-(1)\cdot 2}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)+(3)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(4)-(3)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-1\cdot(4)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{(3)+(4)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{(4)\leftrightarrow(3)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(2)-(3)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \overset{(3)\leftrightarrow(4)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{(2)+2\cdot(3)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(1)\leftrightarrow(2)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{(2)-(3)\cdot 2}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{(1)\leftrightarrow(2)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(1)-(2)}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \boxed{A^{-1}}$$

④ $\text{rank}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(1)\leftrightarrow(2)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(1)\cdot 2}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(2)-(1)}{=}$ ⑤

$\overset{(2)-(1)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(4)-(3)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = \boxed{4}$

Задача 3:

$v_1 = (2, -1, 3, 5)$

$v_2 = (4, -3, 1, 3)$

$v_3 = (3, -2, 3, 4)$

$v_4 = (4, -1, -15, 17)$

Задача 3

$V_1 = (2, -1, 3, 5)$

$V_2 = (4, -3, 1, 3)$

$V_3 = (3, -2, 3, 4)$

$V_4 = (4, -1, -15, 17)$

Решим СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -1x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 1x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 15x_4 = 0 \\ 5x_1 - 1x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -15 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1):2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1,5 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -15 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 17 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(3)-(1) \\ (4)-(1)\cdot 5}]{(2)+(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1,5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1,5 & -21 & 0 \\ 0 & -7 & -3,5 & 7 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\xrightarrow[\substack{-1\cdot(2) \\ (3)+5\cdot(2) \\ (4)+7(2)}]{(1)-(2)\cdot 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0,5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)-0,5(3)]{(1)-0,5(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Система векторов имеет вид:

$$V_1^1 x_1 + V_2^1 x_2 + V_3^1 x_3 + V_4^1 x_4 = 0,$$

где $V_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_4^1 = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ -26 \end{pmatrix}$

- Векторы V_1, V_2, V_3 образуют базис системы векторов $V_1, V_2\ V_3\ V_4$, т.к. V_1^1, V_2^1, V_3^1 образуют диагональную систему

- $V_4^1 = V_1^1 \cdot (17) + V_2^1 \cdot (12) + V_3^1 \cdot (-26) = V_1^1 (17) + V_2^1 (12) - V_3^1 (26) \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_4 = 17 \cdot V_1 + 12 \cdot V_2 - 26 V_3 = \begin{pmatrix} 34 \\ -17 \\ 51 \\ 85 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 \\ -36 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 78 \\ -52 \\ 78 \\ 104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Задание 4

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, найти X, которые $AX=XA$

$$X=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1+x_4&x_2+x_5&x_3+x_6\\x_4+x_7&x_5+x_8&x_6+x_9\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_1+x_2&x_2+x_3\\x_4&x_4+x_5&x_5+x_6\\x_7&x_7+x_8&x_8+x_9\end{pmatrix}=$$

$$\begin{cases}x_1+x_4=x_1\\x_2+x_5=x_1+x_2\\x_3+x_6=x_2+x_3\\x_4+x_7=x_4\\x_5+x_8=x_4+x_5\\x_6+x_9=x_5+x_6\\x_7=x_7\\x_8=x_7+x_8\\x_9=x_8+x_9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_4=0\\x_5=x_1=x_9\\x_6=x_2\\x_7=0\\x_8=x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}?&?&?\\0&?&?\\0&0&?\end{pmatrix}$$

Ответ: X - это матрица со следующими элементами:

- $x_1=x_5=x_9$ - любое $\mathbb{R}$
- $x_2=x_6$ - любое $\mathbb{R}$
- x_3 - любое $\mathbb{R}$

3-задание 5

• (I) Прибавить к i-ой строке j-ой умноженной на число

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

(I) матрица прибавит ко второй строке матрицы A третью строку умноженную на 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+14 & 5+16 & 6+18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 18 & 21 & 24 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{I})^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-2\cdot(3)}{=\!=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (\mathrm{I})^{-1}$$

$$\det(\mathrm{I}) = 1$$

• (II) Поменять i-ю и j-ю строки местами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$$

(II) матрица поменяет у матрицы A 2 и 3 строки местами.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{II})^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)\leftrightarrow(2)}{=\!=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (\mathrm{II})^{-1}$$

$$\det(\mathrm{II}) = -1$$

• (III) умножаем i-ю строку на $n > 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \cdot A$$

(III) матрица умножит 3 строку матрицы A на n.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{III})^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)\cdot\frac{1}{2}}{=\!=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right) = (\mathrm{III})^{-1}.$$

$$\det(\mathrm{III}) = 2$$

Задача 6

Если в матрице A взять вторую строку и добавить к ней две первые строки, то в матрице A^{-1} первый столбец будет суммой первого столбца со вторым, умноженным на 2, то есть $(2)\cdot 2 + (1)$

Например: A - исходная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-(3)}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)-(2)}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-(1)}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-(3)}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-1(2)}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)-(2)\cdot 2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \boxed{A^{-1}}$$

A' - матрица A в которой ко второй строке добавлена первая строка, умноженная на 2:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(2)\cdot 2 + 1} \quad (A')^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-(3)}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-(1)\cdot 2}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)-(2)}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-(1)}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-(3)}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)+(2)\cdot 2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)\cdot -1}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \boxed{(A')^{-1}}$$

$(2)\cdot 2 + 1$

- Это же верно для матриц любой другой размерности.

Задание 7

1. Определитель изменит свой знак на противополож. при n – нечетном, определитель останется прежним при n – четном. Почему так?

Ответ: по св-ву II определителя, если строку или столбец умножить на некое число k, то это равносильно умножению определителя на это число k.

Изменение знака всех элементов матрицы на противоположный равно умножению всех элементов матрицы на (−1).

Таким образом, если n – четное, то определитель останется прежним, если n – нечетное, то определитель сменит знак на противоположный.

2. Определитель изменит знак на противоположный при n – четном. При n – нечетном определитель останется прежним. Почему так?

Ответ: по свойству III определителя, если переставить 1 столбца (или строки), то определитель изменит знак на противоположный, таким образом в матрице размерности n, где n – четное, передвигая столбцы, определитель станет противоположным по знаку относительно определителю исходной матрице. В матрице размерности n, где n – нечетное, при совершении вышеописанного действия, знак определителя сохранится.

3. Нет. У определения ранга матрицы есть следствие, которое гласит:

Если ранг матрицы равен r, то любые p : p > r строк или столбцов этой матрицы будут линейно зависимы. Иначе говоря, в данной матрице всегда будет возможность выразить строки из других строк, т.к. rank = 5.

4. • Для того, чтобы в матрице A размера 3×5 прибавить второй столбец к третьему с коэф. 2 нужно справа домножить на матрицу 5×5 вида:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Данная матрица в матрице сделает следующее преобразование $(2)+(3)\cdot2$.

Например, сгенерировал следующую матрицу A в питре:

$$A=\begin{pmatrix} 7&4&9&3&5\\ 3&7&5&9&7\\ 2&4&9&2&9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7&4&9&3&5\\ 3&7&5&9&7\\ 2&4&9&2&9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \qquad\qquad(3)\cdot2\\ \begin{pmatrix} 7&4&4+18&3&5\\ 3&7&7+10&9&7\\ 2&4&4+18&2&9 \end{pmatrix}\\ (2)\qquad\qquad \end{array}=\begin{pmatrix} 7&4&22&3&5\\ 3&7&17&9&7\\ 2&4&22&2&9 \end{pmatrix}$$

• Задание „прибавить второй столбец к третьему с коэффициентом 2" можно понять таким образом: $(2)\cdot2+(3)$. Тогда матрица преобразования будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

И произведение матриц A с матрицей преобразования будет следующим.

$$\begin{pmatrix} 7&4&9&3&5\\ 3&7&5&9&7\\ 2&4&9&2&9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \qquad\qquad(3)\\ \begin{pmatrix} 7&4&8+9&3&5\\ 3&7&14+5&9&7\\ 2&4&8+9&2&9 \end{pmatrix}\\ (2)\cdot2\qquad\qquad \end{array}=\begin{pmatrix} 7&4&17&3&5\\ 3&7&19&9&7\\ 2&4&17&2&9 \end{pmatrix}$$

Задание 8:

Дано:

A

$\hat{A}$

$\det A$

$\mathrm{rank}(A)$

Найти:

$\det \hat{A}$

$\mathrm{rank}(\hat{A})$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}^T \Rightarrow \hat{A}^T = \det A \cdot A^{-1}$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\det \hat{A}^T = \det \hat{A}$$

$$\det \hat{A} = \underline{\frac{\det A}{\det A^{-1}}}$$

$\underline{\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\hat{A})}$, т.к св-во ранга говорит о том, что ранг матрицы не меняется, если применять элементарные преобразования

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -2 \\ -21 & 13 & 14 \\ -1 & -4 & 33 \end{pmatrix}$$

$\det A = 97$

$\mathrm{rank}(A) = 3$

$\det \hat{A}$ - ?

$\mathrm{rank}(\hat{A})$ - ?

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}^T = \frac{1}{97}\begin{pmatrix} 3 & -21 & -1 \\ 12 & 13 & -4 \\ -2 & 14 & 33 \end{pmatrix}$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{97}$$

- $\det \hat{A} = \dfrac{97}{\frac{1}{97}} = 9409$

- $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\hat{A}) = 3$