Yet Another Math for DS Course
Домашка №3

Теория вероятностей
(продвинутая группа)

Добро пожаловать в очередную домашку. Я попытался расположить задачи по возрастанию сложности. У этой домашки есть только ручная часть, но никто не мешает вам проверить свои решения с помощью симуляций на компьютере.

Решение работы нужно сдать в виде pdf-файла. Решения должны быть оформлены на листочке аккуратным почерком либо затеханы на компьютере. Если у вас плохой почерк, домашка должна быть затехана. Затехать домашку можно в overleaf, typora, colab или другом любом удобном для вас сервисе.

Задача 1 (10 баллов). Совместное распределение случайных величин X и Y задано в виде таблицы:

	$X = 1$	$X = 2$
$Y = -1$	0.1	0.2
$Y = 0$	0.2	0.3
$Y = 1$	0	0.2

1. Найдите $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0)$.
2. Найдите $\mathbb{P}(X = 1)$.
3. Найдите $E(|Y|)$.
4. Найти частные распределения Y и Y^2.
5. Найти ковариацию случайных величин X и Y.
6. Найдите корреляцию случайных величин X и Y.
7. Можно ли утверждать, что случайные величины зависимы?
8. Найдите функцию распределения случайной величины $Z = X+Y$ и нарисуйте её график.
9. Найдите ковариацию между Z и X.
10. Найдите значение функции распределения $F_{X,Y}(-1, 0)$.

Задача 2 (20 баллов). Величины X и Y имеют совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

1. Найдите совместную плотность распределения $f(x, y)$.
2. Найдите плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$
3. Найдите плотности распределения $f(x \mid y)$ и $f(y \mid x)$
4. Найдите функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$
5. Зависимы ли величины X и Y?
6. Найдите $\mathbb{P}(X > 0.5)$, $\mathbb{P}(X + Y > 0.5)$, $\mathbb{P}(X = Y + 0.2)$, $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$, $\mathbb{P}(Y > 0.5|X > 0.5)$.
7. Найдите $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \operatorname{Var}(X), \operatorname{Var}(Y)$,
8. Найдите $\mathbb{E}(XY)$, $\operatorname{Cov}(X, Y)$, $\operatorname{Corr}(X, Y)$.
9. Найдите $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y^2|X)$, $\operatorname{Var}(Y|X)$.
10. Пусть $S = X + Y$, найдите распределение случайной величины S.

Задача 3 (10 баллов). Монетка подбрасывается n раз. Пусть T — число выпадений орла, а H — число выпадений решки. Найдите

1. $\operatorname{Cov}(H, T)$
2. $\operatorname{Corr}(H, T)$
3. Яляются ли случайные величины H и T независимыми (ответ обоснуйте математически)?

Задача 4 (10 баллов). Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 минуты. После занятий в НИУ ВШЭ Вася приходит на платформу метро Курская–кольцевая, чтобы доехать до Киевской, и садится в поезд в сторону Комсомольской или в поезд в сторону Таганской, в зависимости от того, какой из них приходит быстрее. Случайная величина T — время, которое Вася ждёт поезда. Считая, что поезда в разных направлениях ходят независимо друг от друга, найдите

1. вероятность того, что Васе придётся ждать поезда не более 30 секунд;
2. вероятность того, что Вася будет ждать поезда ровно 1 минуту;
3. функцию распределения и функцию плотности T;
4. математическое ожидание T.

Задача 5 (10 баллов). Пусть $X \sim U[0; 4]$. Вася подбросил монетку 2 раза. Если выпал орёл, Вася говорит $X + 2$, если выпало что-то другое, Вася говорит X^2. Пусть случайная величина Y – это число, которое назвал Вася. Найдите плотность распределения Y.

Задача 6 (10 баллов). В офисе два телефона — зеленый и красный. Входящие звонки на красный — пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_1 = 4$ звонка в час, входящие на зеленый — с интенсивностью $\lambda_2 = 5$ звонка в час. Секретарша Василиса Премудрая одна в офисе. Перед началом рабочего дня она подбрасывает монетку и отключает один из телефонов, зеленый — если выпала решка, красный — если орел. Обозначим Y_1 время от начала дня до первого звонка.

1. Найдите функцию плотности Y_1
2. Верно ли, что процесс количества звонков, которые услышит Василиса имеет независимые приращения?

Задача 7 (10 баллов). У Маши 30 разных пар туфель. И она говорит, что мало! Пёс шарик утащил без разбору на левые и правые 17 туфель. Какова вероятность того, что у Маши останется ровно 13 полных пар?

Пусть X – это количество полных пар у Маши, а Y – у Шарика.

Найдите $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y), Cov(X, Y)$

Задача 8 (10 баллов). Илон Маск разработал новый тест от короны. Он никогда не ошибается. Таких тестов в Лепрозории очень мало. Чтобы сэкономить, санитары решили действовать следующим образом:

- всех людей разбивают на группы по k человек;
- каждая группа сдаёт свою слюну в общую пробирку
- если тест показывает, что в пробирке нет вируса, все k человек объявляются здоровыми
- если тест показывет, что вирус есть, все k человек сдают индивидуальные тесты

Человек заражается короной с довольно низкой вероятностью p. Всего в Лепрозории n человек. На сколько групп нужно разбить людей, чтобы сэкономить как можо больше тестов? Сколько, в среднем, тестов будет потрачено?

Hint: Для простоты можно считать, что n всегда делится на k. Перед тем, как взять производную от математического ожидания числа проверок, воспользуйтесь разложением в ряд Тэйлора: $(1-p)^x \approx 1-p\cdot x$. Это можно сделать, если мы предполагаем, что вероятность заболеть, p, очень маленькая.

Задача 9 (10 баллов). В ряд друг за другом за бесконечным столом сидит счётное количество Мудрецов, постигающих Истину. Первым сидит Абу Али Хусейн ибн Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина.

Каждый Мудрец может постигнуть Истину самостоятельно с вероятностью 1/9 или же от соседа. Независимо от способа постижения Истины, просветлённый Мудрец поделится Истиной с соседом слева с вероятностью 2/9 и с соседом справа также с вероятностью 2/9 (независимо от соседа слева).

1. Какова вероятность того, что Абу Али Хусейн ибн Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина постигнет Истину?
2. Как изменится ответ, если ряд Мудрецов бесконечен в обе стороны?