

Yet Another Math for DS Course

Домашка №3

Теория вероятностей
(классная группа)

Ты углепластик, детка.

CJ, GTA San Andreas

Добро пожаловать в очередную домашку. Я попытался расположить задачи по возрастанию сложности. У этой домашки есть только ручная часть, но никто не мешает вам проверить свои решения с помощью симуляций на компьютере.

Решение работы нужно сдать в виде pdf-файла. Решения должны быть оформлены на листочке аккуратным почерком либо затеханы на компьютере. Если у вас плохой почерк, домашка должна быть затехана. Затехать домашку можно в overleaf, typora, colab или другом любом удобном для вас сервисе.

Дискретная часть

Задача 1 (5 баллов). Шесть гангстеров, три балласа и три вагоса, стоят в очереди за конфетами в случайном порядке. Какова вероятность того, что они будут чередоваться?

Задача 2 (5 баллов). В дом Томми, на переговоры о мире между уличными бандами пришли два Рикардо, две Каталины, два Нико, Майкл, Тревор и Франклин.

Все вместе они сели за круглый стол. Какова вероятность того, что Томми окажется между двумя тёзками?

Задача 3 (5 баллов). Сколько разных чит-кодов можно составить из букв чит-кода AEZAKMI?

Задача 4 (10 баллов). У Томми в фургоне есть два работающих вертолёт на дистанционном управлении и три сломанных. Томми наугад достаёт из фургона два вертолёта.

Наудачу Томми пробует запустить первый вертолёт. Он заработал. Найдите вероятность того, что второй вертолёт тоже заработает.

Задача 5 (5 баллов). У Райдера есть шестипатронный револьвер. В него вставлено два патрона подряд. Райдер прокручивает револьвер и стреляет себе в голову. Он остаётся в живых и отдаёт револьвер Карлу.

Что выгоднее сделать Карлу: прокрутить барабан или стрелять сразу? С какой вероятностью Карл погибнет в обеих ситуациях?

Задача 6 (10 баллов). Пусть $E(X) = 1$, $E(Y) = 2$, $E(X^2) = 5$, $E(XY) = -1$. Найдите:

1. $E(2X + Y - 4)$
2. $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$
3. $\text{Cov}(X, Y)$, $\text{Corr}(X, Y)$
4. $\text{Var}(X - Y - 1)$, $\text{Var}(X + Y + 1)$
5. $\text{Cov}(X - Y - 1, X + Y + 1)$, $\text{Corr}(X - Y - 1, X + Y + 1)$

Задача 7 (10 баллов). Совместное распределение случайных величин X и Y задано в виде таблицы:

	$X = 1$	$X = 2$
$Y = -1$	0.1	0.2
$Y = 0$	0.2	0.3
$Y = 1$	0	0.2

1. Найдите $P(X = 1 \cap Y = 0)$.
2. Найдите $P(X = 1)$.
3. Найдите $E(|Y|)$.
4. Найти частные распределения Y и Y^2 .
5. Найти ковариацию случайных величин X и Y .
6. Найдите корреляцию случайных величин X и Y .
7. Можно ли утверждать, что случайные величины зависимы?
8. Найдите функцию распределения случайной величины $Z = X + Y$ и нарисуйте её график.
9. Найдите ковариацию между Z и X .
10. Найдите значение функции распределения $F_{X,Y}(-1, 0)$.

Задача 8 (5 баллов). Томми стреляет со своего РСJ-600 из УЗИ. При стрельбе время от времени возникают осечки. Количество осечек за час непрерывной стрельбы имеет распределение Пуассона и не зависит от количества осечек в любое другое время. Среднее количество осечек за сутки равно 3.

1. Найдите вероятность того, что в течение часа произойдет хотя бы одна осечка.
2. Вычислите вероятность того, что за **два** часа не произойдет ни одной осечки.

Задача 9 (5 баллов). Томми и Карл в течение дня совершают преступления и получают от полиции разные уровни розыска от одной до шести звёзд. Томми получает за свои преступления 1, 2, 3, 4, 5 или 6 звёзд равновероятно с вероятностями $1/6$ соответственно. Функция распределения звёзд розыска Карла такова

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ 1/4, & x \in [3; 4) \\ 1/2, & x \in [4, 5) \\ 3/4, & x \in [5, 6) \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что Карл и Томми одновременно получают по 4 звезды.

Задача 10 (20 баллов). Время в часах, которое Фил проводит за игрой в GTA, является случайной величиной X с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2, & x \in [1; 3] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. Найдите константу c .
2. Чему равна $\mathbb{P}(X = 1)$?
3. Найдите функцию распределения случайной величины $F(x)$.
4. Чему равна вероятность того, что Фил закончит играть менее, чем за полчаса?
5. Известно, что Филу нужно по крайней мере 15 минут для того, чтобы наиграться. Какова вероятность, что он наиграется более, чем за 30 минут?
6. Пусть $Y = \frac{1}{X}$. Найдите плотность распределения этой случайной величины.
7. Найдите $E(Y)$.
8. Найдите $\text{Var}(Y)$.
9. Найдите $\text{Cov}(X, Y)$.
10. Компьютер умеет генерировать только равномерные случайные величины. Опишите алгоритм, с помощью которого вы бы сгенерировали случайную величину X .

Задача 11 (20 баллов). Величины X и Y имеют совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

1. Найдите совместную плотность распределения $f(x, y)$.
2. Найдите плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$
3. Найдите плотности распределения $f(x | y)$ и $f(y | x)$
4. Найдите функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$
5. Зависимы ли величины X и Y ?
6. Найдите $P(X > 0.5)$, $P(X + Y > 0.5)$, $P(X = Y + 0.2)$, $P(X \leq Y)$, $P(Y > 0.5 | X > 0.5)$.
7. Найдите $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$,
8. Найдите $E(XY)$, $\text{Cov}(X, Y)$, $\text{Corr}(X, Y)$.
9. Найдите $E(Y|X)$, $E(Y^2|X)$, $\text{Var}(Y|X)$.
10. Пусть $S = X + Y$, найдите распределение случайной величины S .