

## Как компьютер делает SVD

$$X = U \Sigma V^T$$

$U$  [n × n]    $\Sigma$  [n × k]    $V^T$  [k × k]

$$U^T U = I \quad V^T V = I$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_k & \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n > k$

$U, V$  - матрицы из векторов

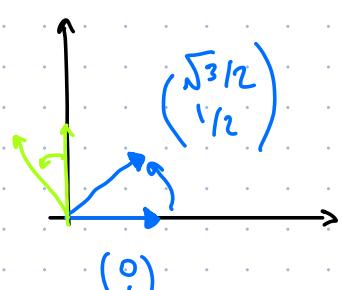
$$X \cdot \Sigma = W$$

$U \Sigma V$       расщепление, сингулярные  
+ оси осяй  
векторы  
 "новороты"

мы до этого делали SVD руками:  $X^T X = P \Sigma P^T$   
а потом мы ищем  $V$

Конечно так не делают. Он преобразует  $X$  двумя  
издевательствами: новоротами и отражениями

### Упражнение



$$\left\| \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \sqrt{2}$$

||

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 0 + 1 = 1$$

$$U \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Осьмин бүг:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\lambda) & \sin(-\lambda) \\ -\sin(-\lambda) & \cos(-\lambda) \end{pmatrix} = U^T$$

Үнпараметре

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 \\ 7 \cdot 3 \\ 0.2 \cdot 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$[5 \times 4]$        $[4 \times 1]$        $[5 \times 1]$

$$B = \left( \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \cos \lambda & -\sin \lambda \\ & & \sin \lambda & \cos \lambda \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad B^{-1} = B^T$$

↑  
оен нөхөн

Үнпараметре

өнпараметре A      a)  $x_1 = x_2$  — өнпараметре отк.  
такий нөхөн

$$A = A^{-1}$$

$$A = A^T$$

$$\delta) x_1 = 2x_2$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2x_2$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix} \min_z [(2z-1)^2 + (z-0)^2]$$

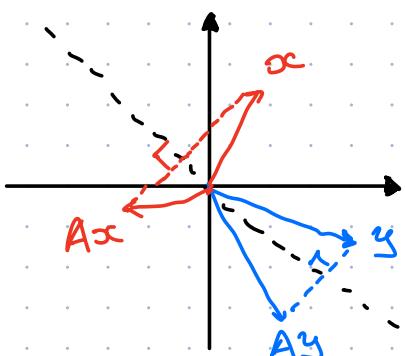
$$2 \cdot 2(2z-1) + 2(z-0) = 0$$

$$4z - 2 + z = 0$$

$$5z = 2 \quad z = 2/5$$

$$\begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

Theorem  $A^T = A$   $A^{-1} = A$



$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$$

$$(Ax)^T y = x^T A^T y$$

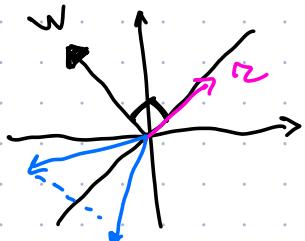
$$x^T A^T y = x^T A y$$

$$A^T = A$$

## Умножение

Однако это не залог. Так:

$$A = I - 2 \cdot \frac{WW^T}{W^TW} \text{ матрица } r \text{ в } n \times n \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$



$$A \cdot 7w = I \cdot 7w - 2 \cdot \frac{WW^T 7w}{W^TW} = 7w - 2 \cdot 7w = -7w$$

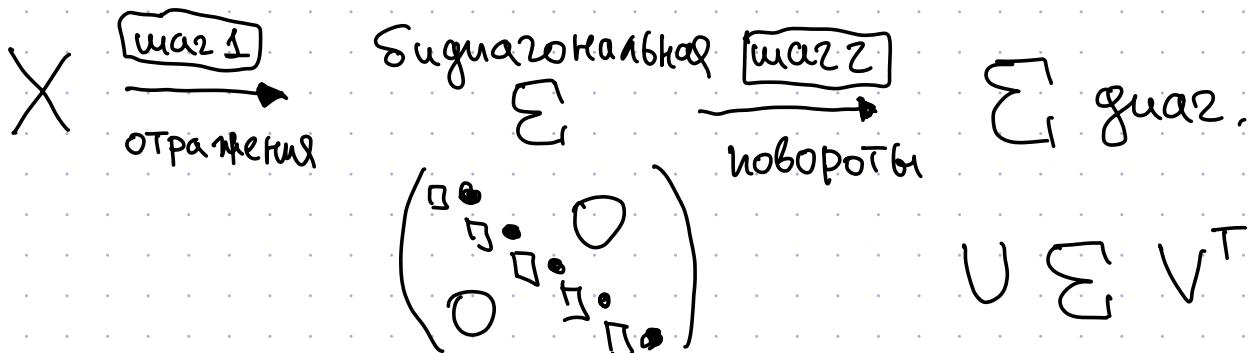
$$z \perp w$$

$$W^T r = r^T W = 0$$

$$A z = I z - 2 \cdot \frac{WW^T z}{W^TW} = z$$

$\Rightarrow$  A действует на ортогональные векторы, которые не содержат компоненту  $w$ .

$$X = (\text{бп. отр. отр. бп. \dots}) \sum (\text{бп. бп отр. \dots})$$





правое действие  
заканчивает эту  
часть

левое действие  
заканчивает эту  
часть

### Упражнение

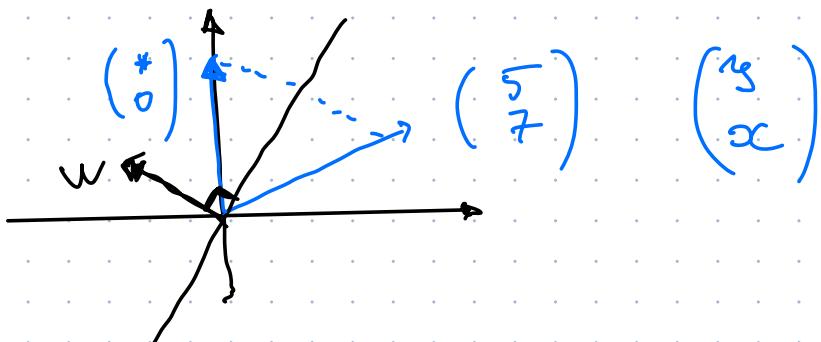
$$a) X = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) X = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти отражение  $u_1$ ,  
где заключен первый блок

$$U_1 X = \tilde{X}$$

$$X = U_1 \tilde{X}$$



$$U_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

Требуем

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \parallel w$$

$\perp$  на-ти

$\infty$  отражений

$$*^2 + 0^2 = 5^2 + 7^2$$

$$* = \pm \sqrt{74}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$w = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{74} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{74} \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = I - 2 \frac{ww^T}{w^Tw}$$

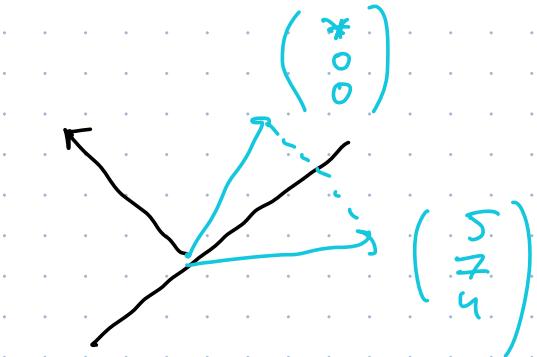
Проверка на 0)

$$U_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$*^2 = 5^2 + 7^2 + 4^2$$

$$* = 3\sqrt{10}$$

$$w = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$U_1 = I - 2 \frac{ww^T}{w^Tw}$$

Далее интереснее!

сделаешь  
такую же

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ испортишь}$$

$$U_1 X = \tilde{X}$$

$(\cdot)^T$

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_2 \cdot (\quad)$$

①

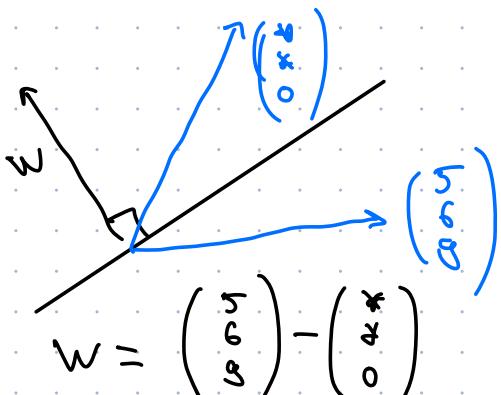
$$U_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

②

$$U_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

③

$$U_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$



$$w = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

нар ①

если вектор лежит в плоскости с первой базисной координатой, то он там когда оставит

$$w = \begin{pmatrix} * \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

нар ②, ③

$w_3 = 8$   $w_2$  — глубину

$$\left( I - 2 \frac{ww^T}{w^Tw} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{w^T w \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}}{w^T w} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

скалар

форма  
сохраняется

$$I - 2 \frac{ww^T}{w^Tw} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \sqrt{-} \end{array} \right)$$

$$X = U_1 \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} V_1^T$$

$$U_1 V_1 \left( \begin{array}{c|cc} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) V_1^T$$

$$U_2 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & U_2^- \end{array} \right)$$

$$U_2 \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

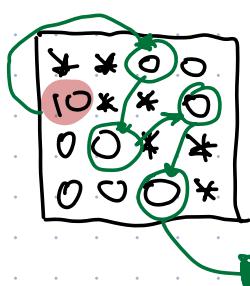
Система remains  
не может быть  
захват.

$$U_2 \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_3 \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

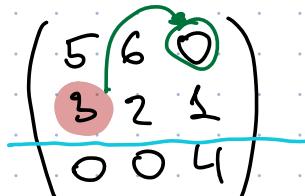
Также будет работать сгенератор!

### Управление



Когда будете наращивать!

5 поворотов и  
наращивайте урез



Только  
первые  
две строки

$$\left( \begin{array}{cc|c} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Для возведения на  
столбцы приходится  
чтобы

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$* = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{34} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

$$\cos \alpha = \frac{(5, 3) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{34} \\ 0 \end{pmatrix}}{34} =$$

$$= \frac{5\sqrt{34}}{34} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

Монніко номжай

күнгә бергөтөй

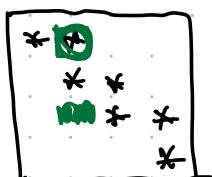
и бүгіншіл 3 тәрік

ғалә синд

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{25}{34}}$$

Төрлеңгүй номжегендің әтан үгасы?

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cccc} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} 11111111 & 11111111 \\ 11111111 & 11111111 \\ \hline 11111111 & 11111111 \\ 11111111 & 11111111 \end{array} \right)$$



Жергілік рагу көзі  
+ берніңдең нағұмындер

Останасың тәжірибелор номжегендің нағұмындерен

Sugard.



Quadr.	0
0	Sug. + map.

$$\text{hint: } \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

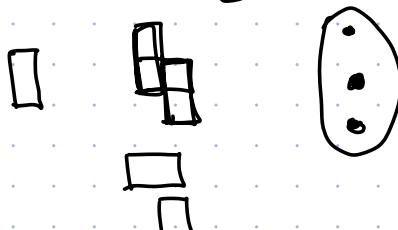
Dual.      Dual.      Dual.



Sug.

Sug.

# Тригонометрия



$$B^T B = M$$

Sug. Sug.

$$U M U^T = \begin{pmatrix} \text{diag.} & 0 \\ 0 & T_{\text{Pug.}} \end{pmatrix}$$

Плохое управление  
но "отличное"  
управление

X → B → E

## Альтернатива:

## QR - charakter

$$M = B^T B$$

# новорождённый

$$M = Q R$$

$$\tilde{M} = RQ$$

## Повторяючи терапія

и все мне гаран-  
тирует

$$Q^T M Q = Q^T Q R Q = R Q = \tilde{M}$$

стапа  
робот

но нее не сочтоб.  $\Rightarrow QR$  не симметрический

3) S-нумерное сочтоб. ручко M

$$M_{[1000 \times 1000]} \quad [2 \times 2] \quad \text{наши } \lambda \Rightarrow \text{сингерт}$$

$$M - sI = QR \quad \text{сингерт}$$

$$\tilde{M} - sI = RQ \quad \text{структура}$$