Задание 1:

A и B должны быть такими, что: $A^T = B$.

Док-во:

Необходимо рассмотреть определение скалярного произведения:

$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$

Из равенства:

$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$

по определению скалярного произведения следует:

$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T \cdot y$

$\langle x, By \rangle = x^T \cdot B y$

$x^T \cdot A^T \cdot y = x^T \cdot B y \quad (*)$

Допустим, что $A^T = B$ верно. Тогда уравнение (*) примет вид:

$x^T B y = x^T B y$

Таким образом, чтобы равенство $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$ выполнялось для любых векторов x и y, $A^T = B$.

Задание 2:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) QR-разложение матрицы $X'X$ (используя процесс Грама-Шмидта)

$$X'X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$A = (a_1 | a_2) = (e_1 | e_2) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \cdot e_1 & a_2 \cdot e_1 \\ 0 & a_2 \cdot e_2 \end{pmatrix}$$

$a_1 = (2\ 1)^T$; $a_2 = (1\ 2)^T$

$$u_1 = a_1 = (2\ 1)$$

$$\|u_1\| = \sqrt{5}$$

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$u_2 = a_2 - (a_2 \cdot e_1) e_1 = (12) - \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{3}{5}\ \frac{6}{5}\right)$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\left(-\frac{3}{5}\ \frac{6}{5}\right)}{\frac{3}{\sqrt{5}}} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

2) QR - разложение матрицы XX'

$$XX' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$A = (a_1 | a_2 | a_3) = (e_1 | e_2 | e_3) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot e_1 & a_2 \cdot e_1 & a_3 \cdot e_1 \\ 0 & a_2 \cdot e_2 & a_3 \cdot e_2 \\ 0 & 0 & a_3 \cdot e_3 \end{pmatrix}$$

$a_1 = (2\ 1\ -1)^T \quad a_2 = (1\ 1\ 0)^T \quad a_3 = (-1\ 0\ 1)$

$u_1 = a_1 = (2\ 1\ -1)$

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\ \ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$u_2 = a_2 - (a_2 \cdot e_1)e_1 = (1\,1\,0) - \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\ \ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$= (1\,1\,0) - \left(1\ \ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right) = \left(0\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\right)$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(0\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$u_3 = a_3 - (a_3 \cdot e_1)e_1 - (a_3 \cdot e_2)e_2 = (-1\,0\,1) + \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\ \ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-1\,0\,1) + \left(1\ \ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right) - \left(0\ \ \frac{2}{4}\ \ \frac{2}{4}\right) =$$

$$= (0\ 0\ -1)$$

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = (0\ 0\ -1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Спектральное разложение матрицы $X'X$

$$X'X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Найдем собственные числа A:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$A v - \lambda I \cdot v = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 1 \cdot 1 = 0$$

$$4 - 2\lambda - 2\lambda - \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$A v = 1 v$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim (1 \; 1 \,|\, 0)$$

$$V_1 + V_2 = 0$$

$$A v = 3 v$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$-V_1 + V_2 = 0$$

$$V_1 - V_2 = 0$$

Для I вектора: $V_1 = -V_2$ Для II век: $V_1 = V_2$

$$A = P D P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

4) Спектральное разложение матрицы XX'

$$XX' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$A v - \lambda I v = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(1-\lambda)(1-\lambda) +$$

$$+ 1 \cdot 0 \cdot (-1) +$$

$$+ (-1) \cdot 1 \cdot 0 -$$

$$- (-1)(1-\lambda)(-1) -$$

$$- 0 \; 0 \; (2-\lambda) -$$

$$- (1-\lambda) \cdot 1 \cdot 1 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = 0} \quad \underline{\lambda_2 = 1} \quad \underline{\lambda_3 = 3}$$

$$A v = 0 v$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{matrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$Av = 1v$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = 0$

$x_2 = x_3$ $\quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x_3 = x_3$

$Av = 3v$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = -2x_3$

$x_2 = -x_3$

$x_3 = x_3$

$$X = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Сингулярное разложение X

$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad X = V \Sigma u^{-1}$

$X^T X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$

$X X^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad V_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$\delta_1 = 1$

$\delta_2 = \sqrt{3}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Задача 3:

1) $F(x) = x^2 + 3x$

$F'(x) = 2x + 3$

$x = 5$

$dx = 0,1$

$dF(x) = F'(x) \cdot dx = (2 \cdot 5 + 3) 0,1 = 1,3$

2) $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1 x_2^3$

$F'(x_1) = 2x_1 + 3x_2^3$

$F'(x_2) = 9x_1 x_2^2$

$x_1 = -2$

$x_2 = 1$

$dx_1 = 0,1$

$dx_2 = -0,1$

$dF = F'(x_1) \cdot dx_1 + F'(x_2) \cdot dx_2 = (2x_1 + 3x_2^3) dx_1 +$

$+ 9x_1 x_2^2 dx_2 = (2 \cdot (-2) + 3 \cdot (1)^3) 0,1 + 9 \cdot (-2) \cdot (1)^2 \cdot (-0,1) = 1,7$

3) $F = \begin{pmatrix} 5 & 6x_1 \\ x_1 x_2 & x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$

$dF = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ x_2 & 2x_1 x_2 \end{pmatrix}$

4) $F = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$dF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 4:

$$F(x,y) = (1+2x+3y)^{2023}$$

в окрестности точки $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

Формула Тейлора до второго члена $F(x,y)$ имеет вид:

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{dF(x_0 y_0)}{dx}(x-x_0) + \frac{dF(x_0 y_0)}{dy}(y-y_0)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2F(x_0 y_0)}{dx^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{d^2F(x_0 y_0)}{dx\,dy}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{d^2F(x_0 y_0)}{dy^2}(y-y_0)^2\right) +$$

$$+ O(\rho^2)$$

Значения функции и значения частных производных в точке $(0;0)$:

$$F(x_0, y_0) = (1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0)^{2023} = 1$$

$$F'_x(x_0, y_0) = 4046(1+2x+3y)^{2022} = 4046(1+2\cdot 0+3\cdot 0)^{2022} = 4046$$

$$F'_y(x_0 y_0) = 6069(1+2x+3y)^{2022} = 6069$$

$$F''_{xx}(x_0, y_0) = 16\ 362024\ (1+2x+3y)^{2021} = 16\ 362024$$

$$F''_{yy}(x_0, y_0) = 36\ 814554(1+2x+3y)^{2021} = 36\ 814554$$

$$F''_{yx}(x_0 y_0) = (Fx')' = 24543036(1+2x+3y)^{2021} = 24543036$$

$$f(x_0, y_0) = (1+2x+3y)^{2023} = 1 + (4046\cdot x + 6069\cdot y) +$$

$$+ \frac{1}{2}(16362024\cdot x^2 + 2\cdot 24543036\cdot xy + 36814554\cdot y) + o(\rho^2)$$

Задача 5:

Найти все экстремумы функции: $F(x,y,z) = x+2y+3z$

при условии $\ln x + \ln y + \ln z = 0$.

$L = F(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$ – функция Лагранжа

λ – множитель Лагранжа.

$L = x+2y+3z+\lambda(\ln(x\cdot y\cdot z))$

$L'_x = 1+\frac{\lambda}{x}$

$L'_y = 2+\frac{\lambda}{y}$

$L'_z = 3+\frac{\lambda}{z}$

$$\begin{cases} 1+\frac{\lambda}{x}=0 \\ 2+\frac{\lambda}{y}=0 \\ 3+\frac{\lambda}{z}=0 \\ \ln(x\cdot y\cdot z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\lambda \\ y=-\frac{\lambda}{2} \\ z=-\frac{\lambda}{3} \\ \ln(x\cdot y\cdot z)=0 \end{cases}$$

$\ln\left(-\lambda\cdot\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\left(-\frac{\lambda}{3}\right)\right) = \ln\left(\frac{\lambda^2}{2}\cdot\left(-\frac{\lambda}{3}\right)\right) = \ln\left(-\frac{\lambda^3}{6}\right) = 0$

$\lambda \approx -1{,}817 \Rightarrow \underbrace{x\approx 1{,}817;\ y\approx\frac{1{,}817}{2};\ z\approx\frac{1{,}817}{3}}_{\text{стационарная точка}}$

$\ln\left(1{,}817\cdot\frac{1{,}817}{2}\cdot\frac{1{,}817}{3}\right)\approx 0$

Значение функции $F(x,y,z)$ в стац. точке:

$F\left(1{,}817,\ \frac{1{,}817}{2},\ \frac{1{,}817}{3}\right)\approx 1{,}817+\frac{1{,}817}{2}\cdot 2+\frac{1{,}817}{3}\cdot 3\approx 5{,}451$

Охарактеризуем точку:

$d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}\,dx\,dy + L''_{yy}(dy)^2$

$d^2L>0$ – то минимум, если $d^2L<0$ – максимум, если

$L''_{xx} = \left(1+\frac{\lambda}{x}\right)'_x = -\frac{\lambda}{x^2}$, $\quad L''_{xy} = \left(1+\frac{\lambda}{x}\right)'_y = 0$

$L''_{yy} = \left(2+\frac{\lambda}{y}\right)'_y = -\frac{\lambda}{y^2}$ $\quad L''_{yz} = \left(2+\frac{\lambda}{y}\right)_z = 0$

$L''_{zz} = \left(3+\frac{\lambda}{z}\right)'_z = -\frac{\lambda}{z^2}$ $\quad L''_{xz} = \left(1+\frac{\lambda}{x}\right)_z = 0$

$\lambda\approx -1{,}817$

$d_2L = -\frac{\lambda}{x^2}(dx)^2 - \frac{\lambda}{y^2}(dy)^2 - \frac{\lambda}{z^2}(dz)^2 = \frac{1{,}817}{(1{,}817)^2} + \frac{1{,}817}{\left(\frac{1{,}817}{2}\right)^2} + \frac{1{,}817}{\left(\frac{1{,}817}{3}\right)^2} > 0 \Rightarrow$ ...

$\Rightarrow F\left(1{,}817,\ \frac{1{,}817}{2},\ \frac{1{,}817}{3}\right)$ – min.

Задача 6:

$F(x,y,z) = x^2+3y^2+5z^2$

$x+y+z \le -23$

$L = x^2+3y^2+5z^2+M(x+y+z+23)$

$L'_x = 2x+M \qquad 2x+M=0$

$L'_y = 6y+M \qquad 6y+M=0$

$L'_z = 10z+M \qquad 10z+M=0$

$x+y+z \le -23 \qquad M \geq 0 \qquad M(x+y+z+23)=0$

① ~~Мы~~ $M(x+y+z+23)=0$, если $x+y+z+23=0$:

$$\begin{cases} x+y+z+23=0 \\ M \geq 0 \\ 2x+M=0 \\ 6y+M=0 \\ 10z+M=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z+23=0 \\ M \geq 0 \\ x=-\frac{M}{2} \\ y=-\frac{M}{6} \\ z=-\frac{M}{10} \end{cases}$$

$-\frac{M}{2}-\frac{M}{6}-\frac{M}{10}+23=0$

$-\frac{15M-5M-3M}{30}+23=0$

$-\frac{23M}{30}+23=0$

$\frac{M}{30}=1$

$M=30 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x&=-15 \\ y&=-6 \\ z&=-3 \end{aligned}}$

② Если $M=0$:

$$\begin{cases} x+y+z+23 \le 0 \\ M=0 \\ 2x+M=0 \\ 6y+M=0 \\ 10z+M=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} M&=0 \\ x&=0 \\ y&=0 \\ z&=0 \end{aligned} \qquad \varnothing$$

!!! нарушено

Задача 1:

$w_t = w_{t-1} + (\nabla Q(w_t))^2$ – не сработает потому что:

1) данное выражение будет следовать в максимум функционала качества Q. -> плюс на минус.

2) следовать будет быстро, потому что используется квадрат. -> вместо квадрата коэфф скорости следования в минимум функционала качества

3) Если считать $\nabla Q(w_t)$, то это вызовет ошибку, так как этого значения еще нет -> нужно считать $\nabla Q(w_{t-1})$