

Yet Another Math for DS Course

Домашка №2

Матричные разложения и оптимизация (классная группа)

Добро пожаловать в первую домашку. Я попытался расположить задачи по возрастанию сложности. Кроме ручной части у домашки есть ещё и кодовая часть. Её можно [найти в репозитории](#).

Решение работы нужно сдать в виде pdf-файла. Решения должны быть оформлены на листочке аккуратным почерком либо затеханы на компьютере. Если у вас плохой почерк, домашка должна быть затехана. Затехать домашку можно в overleaf, typora, colab или другом любом удобном для вас сервисе.

Задача 1 (5 баллов). Как должны быть связаны матрицы A и B , чтобы равенство $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$ выполнялось для любых векторов x и y ?

Обоснуйте почему именно так. Без доказательства (оно очень простое) задача не будет засчитана.

Задача 2 (10 баллов). Известна матрица X ,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

1. Найдите QR-разложение матрицы $X'X$;
2. Найдите QR-разложение матрицы XX' ;
3. Найдите спектральное разложение матрицы $X'X$;
4. Найдите спектральное разложение матрицы XX' ;
5. Найдите сингулярное разложение (SVD) матрицы X ;

Задача 3 (5 баллов).

1. Известно, что $f(x) = x^2 + 3x$. Найдите $f'(x)$ и df . Чему равен df в точке $x = 5$ при $dx = 0.1$?
2. Известно, что $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2^3$. Найдите df . Чему равен df в точке $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ при $dx_1 = 0.1$ и $dx_2 = -0.1$?

3. Известно, что $F = \begin{pmatrix} 5 & 6x_1 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 \end{pmatrix}$. Найдите dF .

4. Известно, что $F = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найдите dF .

Задача 4 (5 баллов). У нас есть функция $f(x, y) = (1+2x+3y)^{2023}$. Найдите её разложение в ряд Тейлора до второго члена в окрестности точки $x = 0, y = 0$.

Задача 5 (10 баллов). Найдите все экстремумы функции $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ при условии, что $\ln x + \ln y + \ln z = 0$ и классифицируйте их.

Задача 6 (10 баллов). Найдите минимум функции

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2, \text{ при ограничении } x + y + z \leq -23.$$

Задача 7 (5 баллов). Петя не доверяет пакетным реализациям алгоритмов машинного обучения. Поэтому она написала свой собственный градиентный спуск. Для того, чтобы делать шаг градиентного спуска, он использовал следующие формулы.

$$w_t = w_{t-1} + (\nabla Q(w_t))^2$$

Какие ошибки вы тут видите? Для каждой объясните, к каким последствиям и почему она приведёт, а также как это исправить.