Число обусловленности

СЛУ $\quad Ax = b \quad$ A обратимая $[n\times n]$

$\tilde{A} \quad \tilde{b}$

$\tilde{x}$

относительная погрешн. $\quad$ абсолютная погр.

$$\frac{|x-\hat{x}|}{|x|} \qquad\qquad |x-\hat{x}|$$

$$A-\hat{A} = \Delta A$$
$$x-\hat{x} = \Delta x$$
$$b-\hat{b} = \Delta b$$

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$
$$(\hat{A}+A-A)(\hat{x}+x-x) = \hat{b}+b-b$$
$$(A-\Delta A)(x-\Delta x) = b-\Delta b$$
$$-\quad Ax = b$$
$$\overline{(A-\Delta A)\,\Delta x = \Delta b - \Delta A x}$$
$$\Delta x = A^{-1}\left[\Delta b - \Delta A(x-\Delta x)\right]$$

Пусть $\Delta A = 0$

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b$$
$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|$$
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} = \|A^{-1}\|\cdot\frac{\|b\|}{\|x\|}\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \le \|A^{-1}\|\,\|A\|\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$b = Ax$$
$$\|b\| \le \|A\|\cdot\|x\| \qquad \frac{\|b\|}{\|x\|} \le \|A\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

число обусловленности

cond(A) $\quad \underline{K}(A)$

Если $\Delta A \neq 0$ $\quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{K(A)}{1 - K(A)\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\cdot\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$

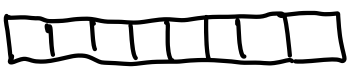
$\to K(A) \geq 1$

$\to K(AB) \le K(A)\cdot K(B)$

$\to K(A) \geq \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$

$A_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$ матрица Гильберта

Стабильность вычислений

Байт  8 бит $\quad 2^8 = 128$

int 32 $\quad$ 4 байта $\quad 2^{32}$ $\quad -2^{31} \le x \le 2^{31} - 1$

int 64 $\quad$ 8 байт $\quad 2^{64}$ $\quad -2^{63} \le x \le 2^{63} - 1$

другие

int 16 $\quad$ uint 32

float 32 $\quad$ одинарная $\quad$ маш. точность $\quad 10^{-8}$

float 64 $\quad$ double $\quad 10^{-16}$

$\pm m \cdot 2^{e-t}$

t - точность

$0 \le m \le 2^t - 1$

$e_{min} \le e \le e_{max}$

$$\varepsilon_m = \min \{ x \mid 1 + x \ne 1 \} = 2^{1-t}$$

x - настоящее число (вещ.) $x \in \mathbb{R}$

$$fl(x) = x \underbrace{(1+\delta)}_{\text{ошибка}} \qquad |\delta| < \frac{1}{2} \varepsilon_M$$

Бывает два вида стабильности

а) Stability

$$\tilde{g}(x) = fl(g(x))$$

$x \qquad \tilde{x} = fl(x)$

$g(x) \qquad g(\tilde{x})$

$\tilde{g}(\ldots)$

$$\frac{|\tilde{g}(x) - g(\tilde{x})|}{|g(\tilde{x})|} \le O(\varepsilon_M)$$

б) Backward Stability

$$\tilde{g}(x) = g(\tilde{x}) \qquad \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} \le O(\varepsilon_M)$$

Если у нас есть б Тогда

число обусл.

$$\frac{|\tilde{g}(x) - g(x)|}{|g(x)|} \le O(K \cdot \varepsilon_M)$$

$$K(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\|\Delta x\| \le \varepsilon} \left(\frac{\|\Delta g\|}{\|g(x)\|} \Big/ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \right) = \frac{\|J\|}{\|g\| / \|x\|}$$

J – матр. якоби если она $\exists$

ex 1 хороший

"~" $fl(x_i) = x_i(1 + \varepsilon_i)$ $\varepsilon_i \le \frac{1}{2}\varepsilon_M$

$$fl(x_1) - fl(x_2) = x_1(1+\varepsilon_4) - x_2(1+\varepsilon_5) \le O(\varepsilon_M)$$

$$\|$$

$$[fl(x_1) - fl(x_2)] \cdot (1+\varepsilon_3) \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = O(\varepsilon_M)$$

$$fl(x_1) - fl(x_2) = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$$

Backward stability есть

хорошо, но не совсем

$$K = \frac{\|J\| \, \|x\|}{\|g\|} = \frac{\|(1, -1)\| \cdot \|(x_1, x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|}$$

$$\frac{\|(x_1 \ominus x_2) - (x_1 - x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|} \le O(\varepsilon_M \cdot K_1)$$

x_1 и x_2 близки $\|x_1 - x_2\|$ маленькая

$$K_1 \to \infty$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots}$$

ex 2 Плохой

$f(x, y) = x y^T \qquad rk(x y^T) = 1$

stability есть
backward stability нет

$rk\ \tilde{f}(x, y) > 1$

$A = x_1 y_1 + x_1 y_2 + \dots + x_k y_2$

$rk(A) = k$

ex3 Злой

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

ex 4 Импровизация

$w = (X^T X)^{-1} X^T y$

$(X^T X) w = X^T y$ система $\qquad X^T X \quad (k(X))^2$

QR $\quad w = R^{-1} Q^T y$

SVD

$\|I - Q^T Q\| \lesssim O(\varepsilon_M k^2(A))$ ГШ

$\lesssim O(\varepsilon_M k(A))$ без $\ominus$

$\lesssim O(\varepsilon_M)$ алг. отражений