دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گزارش پروژه دوم

رای‌گیری تاییدی چندمرحله‌ای

درس: نظریه بازی‌ها

استاد: دکتر سمیرا حسین‌قربان

دانشجو: ایلیا یزدانی

تابستان ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱ رای‌دهنده ۲

۲ برگزارکننده ۵

۳ پرسش نهایی ۵

چکیده

در این گزارش به پرسش‌های مطرح شده در پروژه داده شده به طور کامل پاسخ می‌دهیم.

۱ رای‌دهنده

پرسش‌های بخش اطلاعات کامل

۱. بله این پروفایل همواره یک تعادل نش است.

در این سیستم امتیاز هر کاندید صرفا به رای های هر نفر بستگی دارد و هر چه در مجموعه‌های تاییدی بیشتری قرار داشته باشد، شانس او برای قرار گرفتن در کمیته نهایی افزایش پیدا می‌کند. در واقع برخلاف قاعده‌های دیگری که معرفی شده، کاندیدهای دیگر در کمیته نهایی در امتیاز یک کاندید تاثیری ندارند. با توجه به این موضوع، به طور شهودی مشخص است که یکی از بهترین استراتژی هر رای‌دهنده این است که تنها تمام کاندیدهای مورد تاییدش را در لیستش قرار دهد.

برای اثبات دقیق این موضوع، به طور تدریجی بهترین پاسخ رای‌دهنده را به مجموعه کاندیدهای مورد تاییدش تبدیل می‌کنیم، به طوری که سود او کاهش نیابد. فرض کنید رای‌دهنده مورد بررسی (برای راحتی او را ایلیا می‌نامیم) به مجموعه B' رای داده باشد در حالی که مجموعه‌ی کاندیدهای مورد تایید او B باشد.

تا زمانی که کاندید c' در B' وجود دارد که در B نیست، آن را از B' خارج می‌کنیم. با اینکار تنها نماینده‌ای که امتیاز از دست می‌دهد همان c' است. بنابراین تنها تغییر ممکن در کمیته نهایی خارج شدن c' و ورود کاندید دیگری است که قطعا مطلوبیت ایلیا را کاهش نمی‌دهد. با انجام این روند خواهیم داشت $B' \subseteq B$.

فرض کنید $c \in B$ باشد که در B' نیست. با اضافه کردن این کاندید در B' بدون تغییر امتیاز باقی کاندیدها، تنها امتیاز c افزایش می‌یابد. بنابراین تنها تغییر ممکن در کمیته انتخاب شده، این است که c وارد شود و کاندیدی دیگر خارج شود. وارد شدن c مطلوبیت ایلیا را یک واحد افزایش می‌دهد و خارج شدن یک کاندید مطلوبیت ایلیا را حداکثر یک واحد کاهش می‌دهد. پس در این تغییر هم مطلوبیت ایلیا کم نمی‌شود. با انجام این روند روی تمام $c \in B$ خواهیم داشت $B = B'$.

پس ما با یک سری تغییر باعث شدیم بدون کم شدن از مطلوبیت ایلیا رای او صادقانه شود. در واقع:

$$u_i(F(B, B_{-i})) \geq u_i(F(B', B_{-i}))$$

بنابراین برای هر رای‌دهنده اثبات کردیم که بهترین پاسخ او به هر پروفایلی رای صادقانه است. این موضوع نتیجه می‌دهد که این پروفایل یک تعادل نش است.

۲. در این بازی، مانند تمام بازی‌ها، بهترین پاسخ رای‌دهنده، کنشی است که مطلوبیت او را بیشینه کند. (با فرض اطلاع از استراتژی باقی رای‌دهنده‌ها) در واقع در این بازی بهترین پاسخ، بهترین مجموعه‌ای است که یک نفر می‌تواند انتخاب کند که بیشترین کاندید موردتاییدش در کمیته نهایی قرار بگیرد.

در سوال اول همین بخش ثابت کردیم که رای صادقانه، همیشه بهترین پاسخ است. (در واقع در اثبات آن از اینکه استراتژی باقی رای‌دهنده‌ها چیست استفاده نکردیم) پس جواب این سوال "بله" است.

۳. همانطور که در پاسخ سوال اول همین بخش گفته شد، مهمترین نکته‌ای باعث جلوگیری از انحراف سودمند در این قاعده می‌شود، این است که هر کاندید به طور مستقل از باقی کاندیدها امتیازدهی می‌شود و انتخاب یک کاندید روی انتخاب کاندید دیگر اثری نمی‌گذارد.

یکی دیگر از ویژگی‌های موثر در این موضوع این است تغییر رای یک بازیکن نتیجه را چندان تغییر نمی‌دهد. همانطور که بررسی کردیم هر یک جابجایی در رای یک نفر، نهایتا موجب یک تغییر در کمیته نهایی می‌شود.

دو ویژگی دیگر ذکر شده ارتباط چندانی بر جلوگیری از انحراف ندارند. نحوه شکستن حالت تساوی، اگر معقول باشد باعث انحراف یا عدم انحراف نمی‌شود. فاصله زیاد میان کاندیدهای منتخب و غیرمنتخب هم تاثیر چندانی ندارد.

به طور کلی چیزی که می‌تواند رای‌هنده را به رای غیرصادقانه سوق دهد، این است که با قرار ندادن یک یا چند کاندید موردتاییدش در مجموعه رای خود، باعث قرار گرفتن کاندیدهای بیشتری در کمیته نهایی شود. موضوعی که با این قاعده قابل انجام نیست.

۴. با یک مثال نشان می‌دهیم که در قاعده PAV لزوما پروفایل صادقانه، تعادل نش نیست. فرض کنید 5 بازیکن، 4 کاندید و $k = 3$ باشد. همچنین مجموعه‌های موردتایید به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{c_1, c_2\} \\ A_2 &= \{c_1, c_2, c_4\} \\ A_3 &= \{c_1, c_3, c_4\} \\ A_4 &= \{c_1, c_3, c_4\} \\ A_5 &= \{c_1, c_3, c_4\} \end{aligned}$$

در این بازی، پروفایل صادقانه و قاعده PAV منجر به کمیته نهایی c_1, c_4, c_3 می‌شود. (امتیاز نهایی این کمیته $5 + \frac{4}{2} + \frac{3}{3} = 8$ است که بیشترین مقدار ممکن است)

اما اگر بازیکن شماره 1 به جای رای صادقانه، تنها به c_2 رای دهد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Score_{PAV}(\{c_1, c_4, c_2\}) &= 4 + \frac{4}{2} + \frac{4}{3} = 7.33 \\ Score_{PAV}(\{c_1, c_4, c_3\}) &= 4 + \frac{4}{2} + \frac{3}{3} = 7 \end{aligned}$$

بنابراین کمیته نهایی c_1, c_4, c_2 خواهد بود، که یعنی سود بازیکن اول برابر 2 خواهد شد. بنابراین این بازیکن انگیزه انحراف دارد و پروفایل صادقانه تعادل نش نیست.

همین مثال برای $\mathrm{Approval\ CC}$ هم نشان می‌دهد که در این قاعده نیز پروفایل صادقانه لزوما تعادل نش نیست.

همانطور که توضیح داده شد، تفاوت بنیادین این قواعد با قاعده اول این است که امتیاز برای هر کمیته تعریف می‌شود و انتخاب کاندیدها به همدیگر ربط دارد. مثلا در این بازی، بازیکن اول از آنجایی که می‌داند با توجه به رای

دیگران کاندید c_1 انتخاب می‌شود، می‌تواند با تک‌رای به c_2 ارزش حضور این کاندید در کمیته نهایی را افزایش دهد و کاری کند او به جای c_3 قرار بگیرد. دلیل این موضوع این است که این دو قاعده تلاش می‌کنند کمیته نهایی تنها از رای اکثریت تشکیل نشود و گروه‌های کوچکتر که نسبت خوبی در جمعیت دارند هم نماینده داشته باشند.

۵. به طور کلی اثر این مقدار در استراتژی بازیکنان به پارامترهای زیادی وابسته است و نمی‌توان آن را به طور مستقل دقیق تحلیل کرد. اما می‌توان گفت برای مقادیر کوچک k انگیزه انحراف کمتر است. مثلا برای $k = 1$ پروفایل صادقانه قطعا یک تعادل نش است.

هرچقدر k بزرگتر باشد، احتمال انحراف بیشتر می‌شود. دلیل این موضوع این است که ممکن است برخی رای‌دهندگان از رای دادن به کاندیدهایی که مورد قبول اکثریت هستند پرهیز کنند و به‌جای آن تنها به کاندیدهای دیگر مورد تاییدشان رای دهند. (همانطور که در مثال سوال چهار این بخش دیدیم) مثلا برای $k = m - 1$ اگر رای‌دهنده‌ای تنها حامی یک کاندید باشد می‌تواند با تک‌رای به این کاندید احتمال حضور او را در کمیته بیشتر کند و مطلوبیت رای‌دهنده افزایش پیدا کند.

پرسش‌های بخش اطلاعات ناقص

۱. برای یک رای‌دهنده، فضای نوع Θ_i مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ممکن از مجموعه کاندیدهاست. مثلا اگر دو کاندید داشته باشیم:

$$\Theta_i = \{\{c_1, c_2\}, \{c_1\}, \{c_2\}, \{\}\}$$

چیزی که هر رای‌دهنده می‌داند مجموعه کاندیدهای مورد تایید خودش است. باور احتمالاتی هر رای‌دهنده هم برای هر رای‌دهنده دیگر و مجموعه‌ای از کاندیدها مشخص می‌کند که چقدر احتمال دارد مجموعه موردتایید آن رای‌دهنده، این مجموعه کاندید باشد. اما یک رای‌دهنده با اطمینان نمی‌داند که این مجموعه برای هر رای‌دهنده دیگر دقیقا چیست.

مثلا در همان مثال 2 کاندید، یک رای‌دهنده می‌داند کدام کاندیدها موردتایید خودش است، اما نمی‌داند رای‌دهنده دیگر کدام کاندیدها را قبول دارند.

۲. همانطور که در توضیحات نوشته شده، مطلوبیت انتظاری رای‌دهنده برای یک رای مانند B_i برابر است با:

$$\mathbb{E}_{A_{-i} \sim \mu_i(.|A_i)}[u_i(F(B_i, \sigma_{-i}(A_{-i})))]$$

بهترین پاسخ در این مدل بازی TODO

۳. همانطور که در بخش قبلی ثابت کردیم در قاعده AV رای صادقانه همواره بهترین پاسخ است. بنابراین هر بهترین پاسخ باید سودی برابر رای صادقانه ایجاد کند. اگر در باور رای‌دهنده i حالتی وجود داشته باشد که

$$u_i(F_K^{AV}(B_i, A_{-i})) < u_i(F_K^{AV}(A_i, A_{-i}))$$

و احتمال رخ دادن آن ناصفر باشد، آنگاه B_i نمی‌تواند یک پاسخ بهینه باشد. چرا که مطلوبیت موردانتظار آن اکیدا کمتر از A_i می‌شود. پس باورهایی که در آنها مطلوبیت B_i و A_i برابر است باید در مجموع احتمال یک داشته باشند.

بنابراین اگر برای هر رای غیرصادقانه مانند B_i حالتی ناصفر در باور رای‌دهنده وجود داشته باشد که مطلوبیت A_i از B_i بیشتر باشد، آنگاه A_i تنها بهترین پاسخ در پروفایل رای صادقانه است.

حالت‌هایی که در باور رای‌دهنده احتمال 0 دارند اهمیتی در تحلیل استراتژی ندارند. اما باقی حالات، هرچند اندک ممکن است تاثیرگذار باشند. (به این حالات، حمایت باور او می‌گوییم) به طور کلی در بازی‌های بیزی، امیدریاضی مطلوبیت هر کنش باید ملاک قرار بگیرد، و ممکن است کنشی که در یک حالت نابهینه باشد در مجموع بهترین پاسخ باشد. اما در این بازی استراتژی وجود دارد که در تمام حالات یکی از پاسخ‌های بهینه است. بنابراین برای اینکه یک رای دیگر بتواند از پاسخ‌های بهینه باشد باید در تمام حمایت باور این رای‌دهنده مطلوبیتی برابر با استراتژی بهینه داشته باشد.

۲ برگزارکننده

۱.

۳ پرسش نهایی