Чорноморський державний університет ім. Петра Могили

Кафедра прикладної та вищої математики

<u>Індивідуальне завдання №М 1.1.1</u>

з вищої математики

<u>Тема: Матриці та дії над ними. Визначники. Системи лінійних рівнянь.</u>

Викладач: доцент Воробйова А.І.,

Варіант 0.

1. Дано матриці *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *K*. Потрібно знайти:
   1) Обчислити визначники: $\det A$, $\det B$, $\det C$, $\det D$, $\det K$.
   2) Виконати дії над матрицями: а) $3A+2B$; б) $AB-BA$; в) $CD-DC$; г) EF; д) FE; е) EK; є) KF.
   3) Обчислити $f(A)$, $\varphi(C)$, $\varphi(K)$, якщо $f(x)=x^3-3x^2+4x+5$, $\varphi(x)=x^2-4x+2$.
   4) Знайти обернену матрицю: а) A^{-1}; б) B^{-1}; в) C^{-1}; г) D^{-1}; д) K^{-1}.
   5) Розв'язати матричні рівняння: а) $AX=B$; б) $XB=A$; в) $CX=D$.

Варіант	A	B	C	D	E	F	K
18	$\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 7 & 10 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 10 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 7 & 0 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\ 4\\ -6\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 1 & 3\\ -1 & 2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$

1)

$$\det A=\det\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}=(-3)\cdot(-1)-(-4)\cdot 0=3$$

$$\det B=\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=2\cdot 0-2\cdot 1=-2$$

$$\det C=\det\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 7 & 10 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}=5\cdot 10\cdot 10+7\cdot 8\cdot 6+6\cdot 7\cdot 8-6\cdot 10\cdot 6-5\cdot 8\cdot 8-7\cdot 7\cdot 10=2$$

$$\det D=\det\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 10 & 4\end{pmatrix}=3\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 10+4\cdot 3\cdot 4-3\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4\cdot 10-4\cdot 3\cdot 4=0$$

$$\det K=\det\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 1 & 3\\ -1 & 2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix}=1\cdot 5\cdot(-3)\cdot 5+1\cdot 3\cdot 1\cdot 4+2\cdot 3\cdot(-1)\cdot 2+1\cdot 0\cdot 2\cdot 3-$$

$$-1\cdot 1\cdot 2\cdot 1-1\cdot 2\cdot(-3)\cdot 3-5\cdot(-1)\cdot 5\cdot 2-0\cdot 3\cdot 3\cdot 4=-58$$

2) Сумою двох матриць A і B називається матриця, обумовлена рівністю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Добутком числа m на матрицю A називається матриця, обумовлена рівністю

$$m \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}$$

Добуток двох матриць A і B позначається символом AB і визначається рівністю

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$

А)

$$3A+2B = 3\cdot\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-3)+2\cdot 2 & 3\cdot(-4)+2\cdot 1 \\ 3\cdot 0+2\cdot 2 & 3\cdot(-1)+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Б)

$$AB-BA = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)\cdot 2+(-4)\cdot 2 & (-3)\cdot 1+(-4)\cdot 0 \\ 0\cdot 2+(-1)\cdot 2 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\cdot(-3)+1\cdot 0 & 2\cdot(-4)+1\cdot(-1) \\ 2\cdot(-3)+0\cdot 0 & 2\cdot(-4)+0\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14-(-6) & -3-(-9) \\ -2-(-6) & 0-(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

В)

$$CD-DC = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 5\cdot3+7\cdot4+6\cdot4 & 5\cdot3+7\cdot3+6\cdot10 & 5\cdot3+7\cdot4+6\cdot4 \\ 7\cdot3+10\cdot4+8\cdot4 & 7\cdot3+10\cdot3+8\cdot10 & 7\cdot3+10\cdot4+8\cdot4 \\ 6\cdot3+8\cdot4+10\cdot4 & 6\cdot3+8\cdot3+10\cdot10 & 6\cdot3+8\cdot4+10\cdot4 \end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} 3\cdot5+3\cdot7+3\cdot6 & 3\cdot7+3\cdot10+3\cdot8 & 3\cdot6+3\cdot8+3\cdot10 \\ 4\cdot5+3\cdot7+4\cdot6 & 4\cdot7+3\cdot10+4\cdot8 & 4\cdot6+3\cdot8+4\cdot10 \\ 4\cdot5+10\cdot7+4\cdot6 & 4\cdot7+10\cdot10+4\cdot8 & 4\cdot6+10\cdot8+4\cdot10 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 67 & 96 & 67 \\ 93 & 131 & 93 \\ 90 & 142 & 90 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 54 & 75 & 72 \\ 65 & 90 & 88 \\ 114 & 160 & 144 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 67-54 & 96-75 & 67-72 \\ 93-65 & 131-90 & 93-88 \\ 90-114 & 142-160 & 90-144 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 21 & -5 \\ 28 & 41 & 5 \\ -24 & -18 & -54 \end{pmatrix}$$

Г)

$$EF=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}=\left(2\cdot4+7\cdot4+0\cdot(-6)+(-2)\cdot1\right)=(34)$$

Д)

$$FE=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\left(4\cdot2+4\cdot7+(-6)\cdot0+1\cdot(-2)\right)=(34)$$

Е)

$$EK=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\left(2\cdot1+7\cdot0+0\cdot(-1)+(-2)\cdot1 \quad 2\cdot3+7\cdot5+0\cdot2+(-2)\cdot2 \quad 2\cdot2+7\cdot1+0\cdot(-3)+(-2)\cdot3 \quad 2\cdot1+7\cdot3+0\cdot4+(-2)\cdot5\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 37 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Є)

$$KF=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot4+3\cdot4+2\cdot(-6)+1\cdot1 \\ 0\cdot4+5\cdot4+1\cdot(-6)+3\cdot1 \\ (-1)\cdot4+2\cdot4+(-3)\cdot(-6)+4\cdot1 \\ 1\cdot4+2\cdot4+3\cdot(-6)+5\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 26 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3)

А) $f(x)=x^3-3x^2+4x+5$

$$f(A)=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}+5=$$

$$x=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$x^2=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-3)\cdot(-3)+(-4)\cdot 0 & (-3)\cdot(-4)+(-4)\cdot(-1)\\ 0\cdot(-3)+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 16\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$x^3=\begin{pmatrix}9 & 16\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\cdot(-3)+16\cdot 0 & 9\cdot(-4)+16\cdot(-1)\\ 0\cdot(-3)+1\cdot 0 & 0\cdot(-4)+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27 & -52\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$f(A)=x^3-3x^2+4x+5=\begin{pmatrix}-27 & -52\\ 0 & -1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}9 & 16\\ 0 & 1\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}+5=$$

$$=\begin{pmatrix}-27-3\cdot 9+4\cdot(-3) & -52-3\cdot 16+4\cdot(-4)\\ 0-3\cdot 0+4\cdot 0 & -1-3\cdot 1+4\cdot(-1)\end{pmatrix}+5=\begin{pmatrix}-66 & -116\\ 0 & -8\end{pmatrix}+5$$

Б) $\varphi(x)=x^2-4x+2$

$$\varphi(C)=\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 7 & 10 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 7 & 10 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 7 & 10 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}+2$$

$$x=\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 7 & 10 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}$$

$$x^2=\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 7 & 10 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 7 & 10 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot5+7\cdot7+6\cdot6 & 5\cdot7+7\cdot10+6\cdot8 & 5\cdot6+7\cdot8+6\cdot10\\ 7\cdot5+10\cdot7+8\cdot6 & 7\cdot7+10\cdot10+8\cdot8 & 7\cdot6+10\cdot8+8\cdot10\\ 6\cdot5+8\cdot7+10\cdot6 & 6\cdot7+8\cdot10+10\cdot8 & 6\cdot6+8\cdot8+10\cdot10\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}110 & 153 & 146\\ 153 & 213 & 202\\ 146 & 202 & 200\end{pmatrix}$$

$$\varphi(C)=\begin{pmatrix}110 & 153 & 146\\ 153 & 213 & 202\\ 146 & 202 & 200\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}5 & 7 & 6\\ 7 & 10 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}+2=\begin{pmatrix}110-4\cdot5 & 153-4\cdot7 & 146-4\cdot6\\ 153-4\cdot7 & 213-4\cdot10 & 202-4\cdot8\\ 146-4\cdot6 & 202-4\cdot8 & 200-4\cdot10\end{pmatrix}+2=$$

$$=\begin{pmatrix}90 & 125 & 122\\ 125 & 173 & 170\\ 122 & 170 & 160\end{pmatrix}+2$$

В) $\varphi(x)=x^2-4x+2$

$$\varphi(K)=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&5&1&3\\-1&2&-3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&5&1&3\\-1&2&-3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&5&1&3\\-1&2&-3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}+2$$

$$x=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&5&1&3\\-1&2&-3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}$$

$$x^2=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&5&1&3\\-1&2&-3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&5&1&3\\-1&2&-3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot0+2\cdot(-1)+1\cdot1 & 1\cdot3+3\cdot5+2\cdot2+1\cdot2 & 1\cdot2+3\cdot1+2\cdot(-3)+1\cdot3 & 1\cdot1+3\cdot3+2\cdot4+1\cdot5\\ 0\cdot1+5\cdot0+1\cdot(-1)+3\cdot1 & 0\cdot3+5\cdot5+1\cdot2+3\cdot2 & 0\cdot2+5\cdot1+1\cdot(-3)+3\cdot3 & 0\cdot1+5\cdot3+1\cdot4+3\cdot5\\ (-1)\cdot1+2\cdot0+(-3)\cdot(-1)+4\cdot1 & (-1)\cdot3+2\cdot5+(-3)\cdot2+4\cdot2 & (-1)\cdot2+2\cdot1+(-3)\cdot(-3)+4\cdot3 & (-1)\cdot1+2\cdot3+(-3)\cdot4+4\cdot5\\ 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot(-1)+5\cdot1 & 1\cdot3+2\cdot5+3\cdot2+5\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot(-3)+5\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot4+5\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&24&2&23\\2&33&11&34\\6&9&21&13\\3&29&10&44\end{pmatrix}$$

$$\varphi(K)=\begin{pmatrix}0&24&2&23\\2&33&11&34\\6&9&21&13\\3&29&10&44\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&5&1&3\\-1&2&-3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}+2=$$

$$=\begin{pmatrix}0-4\cdot1&24-4\cdot3&2-4\cdot2&23-4\cdot1\\2-4\cdot0&33-4\cdot5&11-4\cdot1&34-4\cdot3\\6-4\cdot(-1)&9-4\cdot2&21-4\cdot(-3)&13-4\cdot4\\3-4\cdot1&29-4\cdot2&10-4\cdot3&44-4\cdot5\end{pmatrix}+2=$$

$$=\begin{pmatrix}-4&12&-6&19\\2&13&7&22\\10&1&33&-3\\-1&21&-2&24\end{pmatrix}+2$$

4) Знайти обернену матрицю: а) A^{-1}; б) B^{-1}; в) C^{-1}; г) D^{-1}; д) K^{-1}.

Матриця, обернена матриці А, позначається через A^{-1}. Обернена матриця обчислюється по формулі:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots A_{n2}\\\dots&\dots&\dots\ \ \dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots A_{nn}\end{pmatrix}$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів aij.

А)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -1; \ \ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0; \ \ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-4) = 4; \ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-3) = -3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Б)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det B = -2$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 0 = 0; \ B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2; \ B_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1; \ \ B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

В)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det C = 2$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 36; \ \ \ C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = -22; \ \ C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -4;$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = -22; \ \ C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 14; \ \ C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2;$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -4; \ \ C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 2; \ \ C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 1$$

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 36 & -22 & -4 \\ -22 & 14 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -11 & -2 \\ -11 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Г)

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det D = 0$$

D^{-1} - не існує.

Д)

$$K=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&5&1&3\\-1&2&-3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}$$

$\det K=-58$

$$K_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}5&1&3\\2&-3&4\\2&3&5\end{vmatrix}=-101;\ K_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&1&3\\-1&-3&4\\1&3&5\end{vmatrix}=-9;\ K_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0&5&3\\-1&2&4\\1&2&5\end{vmatrix}=33;$$

$$K_{14}=(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}0&5&1\\-1&2&-3\\1&2&3\end{vmatrix}=4;\ K_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3&2&1\\2&-3&4\\2&3&5\end{vmatrix}=73;\ K_{22}=(-1)^{22}\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&-3&4\\1&3&5\end{vmatrix}=-9;$$

$$K_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&2&4\\1&2&5\end{vmatrix}=-25;\ K_{24}=(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}1&3&2\\-1&2&-3\\1&2&3\end{vmatrix}=4;\ K_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3&2&1\\5&1&3\\2&3&5\end{vmatrix}=-37;$$

$$K_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&3\\1&3&5\end{vmatrix}=-1;\ K_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&3&1\\0&5&3\\1&2&5\end{vmatrix}=23;\ K_{34}=(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}1&3&2\\0&5&1\\1&2&3\end{vmatrix}=-6;$$

$$K_{41}=(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}3&2&1\\5&1&3\\2&-3&4\end{vmatrix}=6;\ K_{42}=(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&3\\-1&-3&4\end{vmatrix}=8;\ K_{43}=(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}1&3&1\\0&5&3\\-1&2&4\end{vmatrix}=-10;$$

$$K_{44}=(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}1&3&2\\0&5&1\\-1&2&-3\end{vmatrix}=-10$$

$$K^{-1}=\frac{1}{-58}\cdot\begin{pmatrix}-101&73&-37&6\\-9&-9&-1&8\\33&-25&23&-10\\4&4&-6&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{101}{58}&-\frac{73}{58}&\frac{37}{58}&-\frac{6}{58}\\\frac{9}{58}&\frac{9}{58}&\frac{1}{58}&-\frac{8}{58}\\-\frac{33}{58}&\frac{25}{58}&-\frac{23}{58}&\frac{10}{58}\\-\frac{4}{58}&-\frac{4}{58}&\frac{6}{58}&\frac{10}{58}\end{pmatrix}$$

5) Розв'язати матричне рівняння: а) $AX=B$; б) $XB=A$; в) $CX=D$.

А) $AX=B\rightarrow X=A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix}-3&-4\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X_{11}&X_{21}\\X_{12}&X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}X_{11}&X_{21}\\X_{12}&X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\cdot2+\frac{4}{3}\cdot2&-\frac{1}{3}\cdot1+\frac{4}{3}\cdot0\\0\cdot2+(-1)\cdot2&0\cdot1+(-1)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-\frac{1}{3}\\-2&0\end{pmatrix}$$

Б)

$$X\,B = A \to X = AB^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)\cdot 0 + (-4)\cdot 1 & (-3)\cdot \frac{1}{2} + (-4)\cdot(-1) \\ 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot \frac{1}{2} + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

В)

$$C\,X = D \to X = C^{-1}D$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -11 & -2 \\ -11 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18\cdot 3 + (-11)\cdot 4 + (-2)\cdot 4 & 18\cdot 3 + (-11)\cdot 3 + (-2)\cdot 10 & 18\cdot 3 + (-11)\cdot 4 + (-2)\cdot 4 \\ (-11)\cdot 3 + 7\cdot 4 + 1\cdot 4 & (-11)\cdot 3 + 7\cdot 3 + 1\cdot 10 & (-11)\cdot 3 + 7\cdot 4 + 1\cdot 4 \\ (-2)\cdot 3 + 1\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4 & (-2)\cdot 3 + 1\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 10 & (-2)\cdot 3 + 1\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Обчислити детермінант:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 15 \end{vmatrix}$$

Проведемо тотожні перетворення:

Віднімаємо з рядка 2 рядок 1 помножену на $\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{1}{5}$, з рядка 3 рядок 1 помножену на $\frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{4}{5}$, з рядка 4 рядок 1 помножену на $\frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{2}{5}$, з рядка 5 рядок 1 помножену на $\frac{a_{51}}{a_{11}} = \frac{8}{5}$, одержуємо:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 15 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & -1 & \frac{16}{5} & \frac{21}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & \frac{34}{5} & \frac{39}{5} & \frac{67}{5} \end{vmatrix}$$

Оскільки на головній діагоналі 0, міняємо місцями рядка 2 і 4:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & -1 & \frac{16}{5} & \frac{21}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & \frac{34}{5} & \frac{39}{5} & \frac{67}{5} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{16}{5} & \frac{21}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & \frac{34}{5} & \frac{39}{5} & \frac{67}{5} \end{vmatrix}$$

Віднімаємо з рядка 5 рядок 2 помножену на $\frac{a_{52}}{a_{22}} = -1$:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{16}{5} & \frac{21}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & \frac{34}{5} & \frac{39}{5} & \frac{67}{5} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{5} & -\frac{21}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 10 & 12 & 19 \end{vmatrix}$$

Віднімаємо з рядка 4 рядок 3 помножену на $\frac{a_{43}}{a_{33}} = \frac{17}{2}$, віднімаємо з рядка 5 рядок 3 помножену на $\frac{a_{53}}{a_{33}} = 25$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{16}{5} & \frac{21}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 10 & 12 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{5} & -\frac{21}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{71}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 114 \end{vmatrix}$$

Віднімаємо з рядка 5 рядок 4 помножену на $\frac{a_{54}}{a_{44}} = \frac{54}{17}$:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{16}{5} & \frac{21}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{71}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 114 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{5} & -\frac{21}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{71}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{21}{17} \end{vmatrix}$$

Одержали діагональну матрицю, визначник якої дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\Delta = 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{17}{2} \cdot \frac{21}{17} = 21$$

3. Розв'язати матричне рівняння.

$$X \cdot A = B \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot 2 = -6$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \; A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4; \; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \; A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1; \; A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \; A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 & (-1)\cdot(-4) + 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + 2\cdot 5 & 3\cdot(-4) + (-1)\cdot 0 + 2\cdot(-2) & 3\cdot(-1) + (-1)\cdot(-3) + 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 2\cdot(-3) + 1\cdot 5 & 2\cdot(-4) + 2\cdot 0 + 1\cdot(-2) & 2\cdot(-1) + 2\cdot(-3) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 16 & -16 & 2 \\ 1 & -10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{6} & -\frac{6}{6} & \frac{3}{6} \\ -\frac{16}{6} & \frac{16}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{10}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

4. Розв'язати систему рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 15 \\ x - 3y + z = -8 \\ 3x - 2y + 5z = -5 \end{cases}$$

Представимо у вигляді матричного рівняння:

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Розв'язок матричного рівняння має вигляд: $X = A^{-1}B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2\cdot(-3)\cdot 5 + 3\cdot 3\cdot 1 + (-2)\cdot 1\cdot(-2) - (-2)\cdot(-3)\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 5 - 1\cdot 2\cdot(-2) = -46$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} -13;\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2;\ A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -11;\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16;\ A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 13;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -3;\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4;\ A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{46} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -11 & -3 \\ -2 & 16 & -4 \\ 7 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{46}\cdot\begin{pmatrix}-13&-11&-3\\-2&16&-4\\7&13&-9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}15\\-8\\-5\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{46}\cdot\begin{pmatrix}(-13)\cdot15+(-11)\cdot(-8)+(-3)\cdot(-5)\\(-2)\cdot15+16\cdot(-8)+(-4)\cdot(-5)\\7\cdot15+13\cdot(-8)+(-9)\cdot(-5)\end{pmatrix}=-\frac{1}{46}\cdot\begin{pmatrix}-92\\-138\\46\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{92}{46}\\\frac{138}{46}\\-\frac{46}{46}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$x_1=2;\ x_2=3;\ x_3=-1$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases}2x+3y+z+3u=3\\3x+2y-5z+2u=24\\4x+2y-6z+5u=18\\7x-4y+6z+3u=-25\end{cases}$$

Метод Крамера полягає в знаходженні розв'язку системи лінійних рівнянь по формулах: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta};\ ...;\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta};$

Де: Δ - визначник матриці коефіцієнтів системи рівнянь, $\Delta_1;\ \Delta_2;\ \Delta_3;...;\ \Delta_n$ - визначники матриць коефіцієнтів системи рівнянь, у яких відповідні стовпці замінені на стовпець вільних членів.

Для нашої системи рівнянь:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&3&1&3\\3&2&-5&2\\4&2&-6&5\\7&-4&6&3\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot(-6)\cdot3+3\cdot(-5)\cdot5\cdot7+3\cdot2\cdot6\cdot3+4\cdot(-4)\cdot1\cdot2-$$

$$-7\cdot2\cdot(-5)\cdot3-4\cdot2\cdot1\cdot3-2\cdot(-4)\cdot(-6)\cdot2-3\cdot3\cdot6\cdot5=519$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 24 & 2 & -5 & 2 \\ 18 & 2 & -6 & 5 \\ -25 & -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot(-6)\cdot 3 + 3\cdot(-5)\cdot 5\cdot(-25) + 24\cdot 2\cdot 6\cdot 3 + 18\cdot(-4)\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-(-25)\cdot 2\cdot(-5)\cdot 3 - 18\cdot 2\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot(-4)\cdot(-6)\cdot 2 - 24\cdot 3\cdot 6\cdot 5 = 1557$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 24 & -5 & 2 \\ 4 & 18 & -6 & 5 \\ 7 & -25 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 24\cdot(-6)\cdot 3 + 3\cdot(-5)\cdot 5\cdot 7 + 3\cdot 18\cdot 6\cdot 3 + 4\cdot(-25)\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-7\cdot 18\cdot(-5)\cdot 3 - 4\cdot 24\cdot 1\cdot 3 - (-25)\cdot(-6)\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 6\cdot 5 = 2076$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 24 & 2 \\ 4 & 2 & 18 & 5 \\ 7 & -4 & -25 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 18\cdot 3 + 3\cdot 24\cdot 5\cdot 7 + 3\cdot 2\cdot(-25)\cdot 3 + 4\cdot(-4)\cdot 3\cdot 2 -$$

$$-7\cdot 2\cdot 24\cdot 3 - 4\cdot 2\cdot 3\cdot 3 - (-4)\cdot 18\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot(-25)\cdot 5 = -1557$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 24 \\ 4 & 2 & -6 & 18 \\ 7 & -4 & 6 & -25 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-6)\cdot(-25) + 3\cdot(-5)\cdot 18\cdot 7 + 3\cdot 2\cdot 6\cdot 3 + 4\cdot(-4)\cdot 1\cdot 24 -$$

$$-7\cdot 2\cdot(-5)\cdot 3 - 4\cdot 2\cdot 1\cdot(-25) - (-4)\cdot(-6)\cdot 24\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 6\cdot 18 = -2076$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1557}{519} = 3;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2076}{519} = 4;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1557}{519} = -3;\; x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-2076}{519} = -4;$$

6. Розв'язати систему лінійних рівнянь. Визначити загальний і дві часток розв'язку системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = -1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 - x_5 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 7 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса:

Визначимо спільність системи рівнянь. По теоремі Кронекера-Копелли для того, що б система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісна (мала розв'язок), необхідно й досить, що б ранг основної матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 7 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

і ранг розширеної матриці

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 7 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

були рівні.

Тому що $rang(A)=5$ рівний $rang(B)=5$ і дорівнює кількості невідомих $n=5$, то система має єдиний розв'язок.

Приведемо розширену матрицю до трикутного виду, тобто до такого виду, при якім усі елементи нижче головної діагоналі рівні 0.

Віднімемо 1 рядок від нижніх рядків так, що б в 1 стовпці всі нижчестоящі елементи звернулися в 0, домножая на 1, 5, 2, 3, відповідно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 7 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Віднімемо 2 рядок від нижніх рядків так, що б в 2 стовпці всі нижчестоящі елементи звернулися в 0, домножая на -1, -3, -5, відповідно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -20 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -24 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Тому що елемент в 3-ой рядку й 3-ом стовпці рівний 0, то поміняємо місцями 3-ую й 4-ую рядки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -20 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -24 & 11 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -20 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -24 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Розділимо 3 рядок на, що б елемент в 3 стовпці й в 3 рядку став рівний 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -20 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -24 & 11 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -24 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Віднімемо 3 рядок від нижніх рядків так, що б в 3 стовпці всі нижчестоящі елементи звернулися в 0, домножая на 0, 14, соответсвенно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -24 & 11 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -\frac{19}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Розділимо 4 рядок на, що б елемент в 4 стовпці й в 4 рядку став рівний 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -\frac{19}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -\frac{19}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Віднімемо 4 рядок від нижніх рядків так, що б в 4 стовпці всі нижчестоящі елементи звернулися в 0, домножая на 11, соответсвенно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -\frac{19}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{8} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Розділимо в 5 рядку елементи в 5 і 6 стовпцях на елемент в 5 стовпці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{8} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

На цьому кроці можна завершити перетворення матриці, але для полегшення розрахунків приведемо матрицю до такого виду, що б елементи й над головною діагоналлю звернулися в 0.

Віднімемо 5 рядок з вищих, що б елементи 5 стовпці звернулися в 0, домножая на -3/8, 9/8, 4, 1, відповідно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Віднімемо 4 рядок з вищих, що б елементи 4 стовпці звернулися в 0, домножая на -5/2, -5, 1, відповідно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Віднімемо 3 рядок з вищих, що б елементи 3 стовпці звернулися в 0, домножая на 2, 1, відповідно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Віднімемо 2 рядок з вищих, що б елементи 2 стовпці звернулися в 0, домножая на 1, відповідно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Елементи, що перебувають в 6 стовпці і є розв'язок системи рівнянь: $x_1 = 1;\ \ x_2 = 2;\ \ x_3 = 0;\ \ x_4 = -1;\ \ x_5 = -2$