Лабораторна робота №3
Тема: Представлення дерева кодом Прюфера.

Теоретичні відомості.

Усі загальні способи представлення графів є дійсними й у випадку дерев. Проте дерево є особливим графом, і для нього можливі також інші способи представлення.

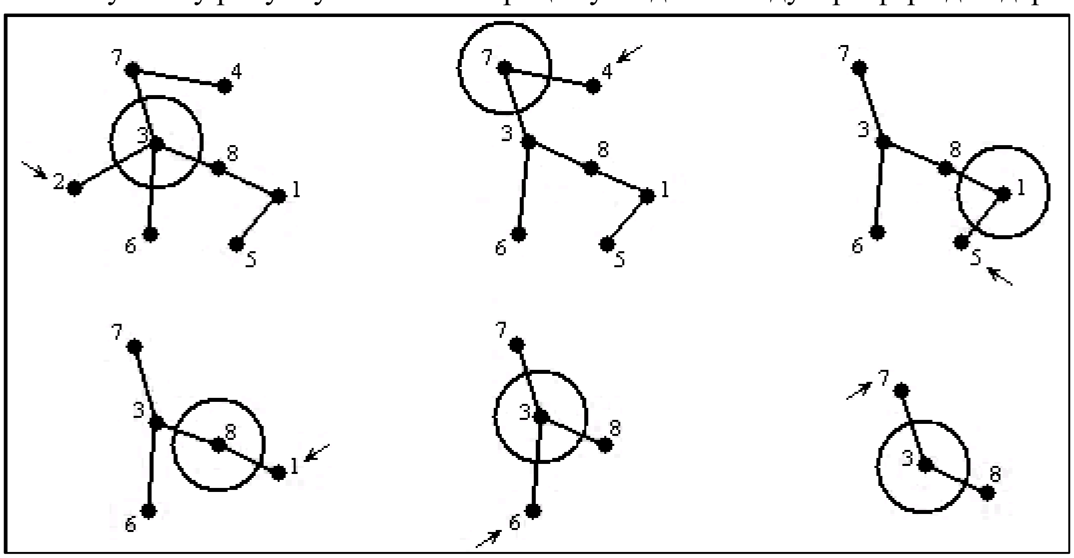
У 1918 році Прюфер запропонував метод представлення дерева з $n > 2$ вершинами, який тепер називають **кодом Прюфера**. Алгоритм укладання коду Прюфера є таким:

```
PRUF{G,Code)
 Перенумерувати вершини дерева G довільним чином.
 while (у дереві не залишилось одне ребро)
   Знайти висячу вершину з найменшим номером.
   Видалити знайдену вершину разом з інцидентним ребром.
   Занести номер вершини, суміжної видаленій, до коду Code.
 end {while}
end {PRUF}
```

Після укладання коду в дереві завжди залишаються дві вершини, тому довжина коду Прюфера для будь-якого дерева буде на два менше числа вершин дерева: **К = n - 2**. Отже, маючи код, можна визначити кількість вершин у графі: їх завжди буде на дві більше кількості елементів коду.

Номери вершин у коді можуть повторюватися, а у випадку зіркового графа вони взагалі будуть однаковими.

На наступному рисунку показаний процес укладання коду Прюфера для дерева.



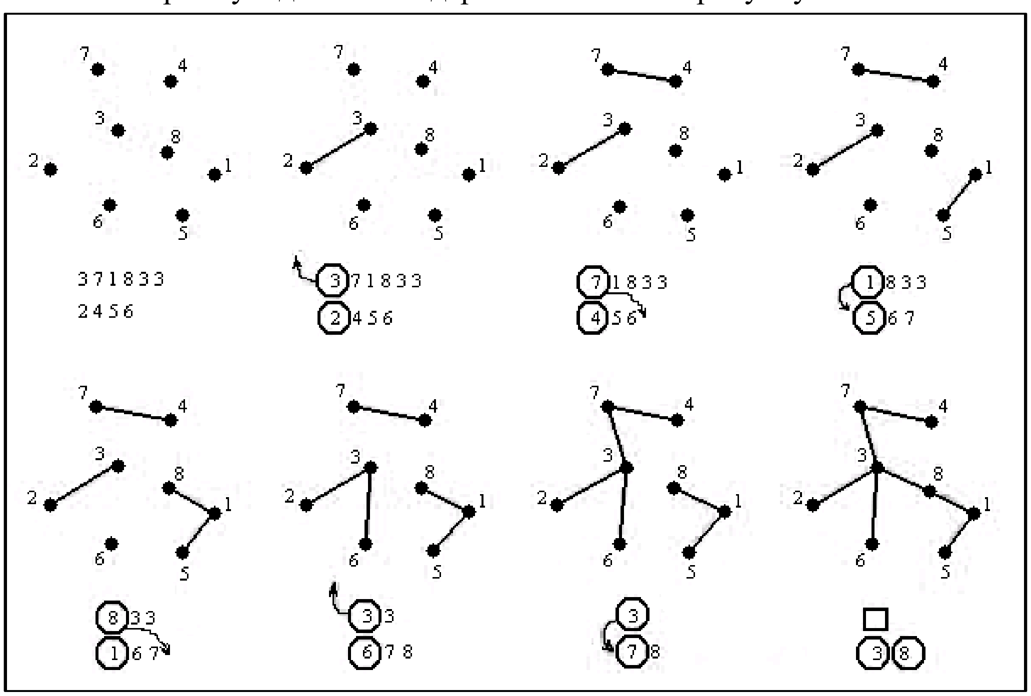
Результатом роботи алгоритму є код **К = 3 7 1 8 3 3**.

Відновлення дерева з коду виконується за допомогою антикоду. Антикод - це впорядкований кортеж, складений з номерів вершин, що не увійшли до коду. Для розглянутого прикладу антикод **А = 2 4 5 6**.

Алгоритм відновлення дерева за кодом Прюфера показаний нижче:

TREE(Code, Tree)
  Встановити кількість вершин дерева: **n - Length(Code) + 2**.
  Отримати антикод **AntiCode**.
  Створити **n** вершин і дати їм номери.
  while (Code > 0)
    Витягнути перші елементи **u** і **v** з коду й антикоду.
    Відновити ребро **(u, v)** в дереві.
    Видалити елемент **v** за антикоду.
    if (елемент **u** ще зустрічається далі в коді)
      then
        Витягнутий елемент коду **u** відкинути
      else
        if (елемент **u** менший за всі елементи антикоду)
          then
            Поставити елемент на початок антикоду
          else
            Витягнутий елемент коду **u** додати в кінець антикоду.
          end {if}
      end {if)
  end {while}
  З'єднати ребром останні дві вершини, що залишились в антикоді.
end {TREE}

Робота алгоритму відновлення дерева показана на рисунку.



Завдання:

1. За кодом Прюфера згенерувати антикод та відновити граф.
2. Побудувати його матриці суміжності вершин та інцидентності.
3. Малюнок графа.

Примітка: *Нумерація вершин починається з 0.*
Граф має 21 вершину.

Індивідуальні завдання:

1. 2, 2, 6, 6, 2, 3, 10, 10, 10, 3, 4, 5, 15, 15, 6, 5, 17, 17, 17.
2. 12, 12, 2, 13, 13, 14, 14, 19, 15, 15, 18, 16, 16, 17, 19, 18, 20, 20, 17.
3. 2, 2, 1, 5, 5, 1, 0, 9, 9, 8, 12, 12, 8, 0, 15, 16, 16, 15, 19.
4. 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 10, 10, 10, 4, 13, 13, 15, 13, 17, 17, 17.
5. 1, 1, 2, 5, 12, 8, 12, 8, 2, 3, 4, 16, 16, 9, 15, 9, 4, 5, 6.
6. 3, 6, 7, 6, 7, 6, 8, 12, 12, 14, 14, 12, 8, 3, 1, 1, 3, 2, 2.
7. 4, 10, 6, 6, 0, 1, 7, 7, 1, 2, 8, 8, 2, 3, 9, 9, 3, 4, 10.
8. 1, 5, 5, 4, 8, 8, 4, 3, 11, 11, 3, 2, 14, 14, 2, 1, 2, 18, 18.
9. 1, 2, 7, 6, 10, 10, 2, 3, 4, 14, 14, 6, 5, 4, 12, 13, 17, 13, 18.
10. 2, 2, 2, 4, 8, 8, 8, 4, 12, 12, 12, 4, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 4.
11. 3, 3, 4, 4, 7, 3, 7, 12, 13, 11, 13, 16, 11, 12, 16, 17, 16, 12, 7.
12. 4, 3, 3, 4, 8, 7, 7, 8, 9, 8, 12, 12, 13, 13, 12, 18, 17, 17, 18.
13. 5, 5, 2, 6, 5, 6, 8, 8, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 14, 14, 13, 17.
14. 4, 5, 6, 4, 5, 9, 10, 8, 11, 10, 14, 14, 8, 9, 15, 15, 9, 10, 16.
15. 2, 2, 6, 7, 5, 7, 6, 5, 6, 10, 11, 14, 13, 14, 11, 10, 13, 17, 17.
16. 1, 10, 7, 7, 7, 7, 8, 10, 8, 12, 8, 8, 10, 12, 12, 12, 10, 13, 13.
17. 1, 5, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 19, 20, 20, 20, 20, 19, 19.
18. 3, 3, 3, 6, 6, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17.
19. 1, 6, 1, 1, 2, 20, 20, 20, 20, 2, 3, 4, 5, 6, 16, 16, 16, 16, 6.
20. 1, 4, 4, 6, 6, 4, 15, 15, 1, 1, 1, 2, 4, 2, 14, 14, 14, 14, 17.
21. 2, 2, 3, 6, 5, 4, 3, 8, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 8, 9, 18, 18.
22. 1, 3, 1, 2, 6, 6, 2, 3, 8, 11, 11, 7, 12, 12, 7, 8, 13, 19, 19.
23. 1, 3, 1, 2, 6, 6, 3, 10, 11, 13, 10, 11, 11, 17, 17, 11, 2, 3, 13.
24. 1, 2, 3, 6, 6, 2, 3, 3, 2, 15, 15, 15, 15, 15, 2, 16, 16, 16, 16.
25. 1, 5, 4, 8, 3, 3, 4, 3, 2, 12, 1, 8, 2, 15, 15, 15, 18, 15, 18.
26. 1, 4, 1, 7, 7, 3, 4, 1, 1, 2, 4, 3, 2, 13, 13, 2, 14, 14, 14.
27. 1, 6, 1, 2, 3, 4, 4, 6, 5, 2, 3, 3, 15, 5, 4, 3, 15, 15, 15.
28. 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2, 10, 3, 2, 10, 10, 10, 15, 13, 13, 13, 10, 15.
29. 1, 3, 1, 2, 3, 6, 6, 6, 2, 12, 3, 3, 2, 12, 12, 12, 18, 12, 18.
30. 1, 3, 6, 1, 2, 7, 9, 3, 7, 12, 7, 2, 15, 15, 3, 3, 2, 15, 15.
31. 3, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 8, 8, 11, 11, 11, 14, 14, 14, 17, 17, 17, 19.
32. 1, 2, 1, 1, 2, 7, 7, 7, 2, 12, 1, 2, 15, 12, 15, 15, 2, 1, 12.

https://ru.coursera.org/learn/teoriya-grafov/lecture/oSPgU/postroieniie-kodov-priufiera

Алгоритм построения кодов Прюфера

Кодирование Прюфера переводит **помеченные деревья порядка** n в последовательность чисел от 1 до n по алгоритму:

Пока количество вершин больше двух:

1. Выбирается лист v с минимальным номером.
2. В код Прюфера добавляется номер вершины, смежной с v.
3. Вершина v и инцидентное ей ребро удаляются из дерева.

Полученная последовательность называется **кодом Прюфера** *(англ. Codes Priifer)* для заданного дерева.

Лемма:

Номер вершины v встречается в коде Прюфера тогда и только тогда, когда v не является листом, причём встречается этот номер к коде дерева в точности $\deg v - 1$ раз.

Доказательство:

1. Вершина с номером n не может быть удалена, следовательно на последнем шаге у неё была смежная вершина, и число nвстретилось в коде.
2. Если вершина не является листом, то у неё на некотором шаге была смежная вершина — лист, следовательно номер этой вершины встречается в коде.
3. Если вершина является листом с номером меньше n, то она была удалена до того, как был удален её сосед, следовательно её номер не встречается в коде.

Таким образом, номера всех вершин, не являющихся листьями или имеющих номер n, встречаются в коде Прюфера, а остальные — нет.

Лемма:

По любой последовательности длины $n-2$ из чисел от 1 до n можно построить помеченное дерево, для которого эта последовательность является кодом Прюфера.

Доказательство:

Доказательство проведем по индукции по числу n

<u>*База индукции:*</u>

$n = 1$ — верно.

<u>*Индукционный переход:*</u>

Пусть для числа n верно, построим доказательство для $n+1$:

Пусть у нас есть последовательность: $A = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}]$.

Выберем минимальное число v не лежащее в A. По предыдущей лемме v — вершина, которую мы удалили первой. Соединим v и a_1 ребром. Выкинем из последовательности A число a_1. Перенумеруем вершины, для всех $a_i > v$ заменим a_i на $a_i - 1$. А теперь мы можем применить предположение индукции.

Теорема:

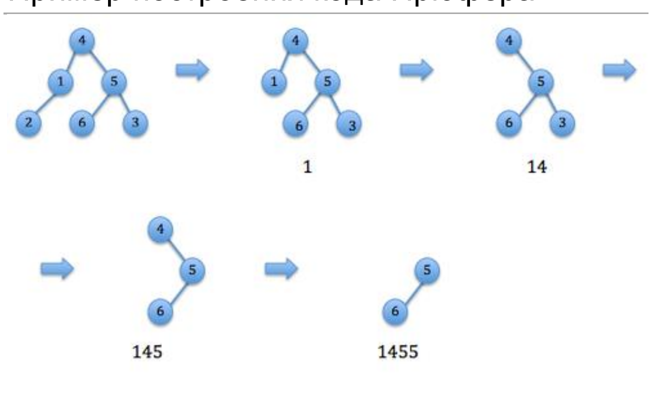
Кодирование Прюфера задаёт биекцию между множествами помеченных деревьев порядка n и последовательностями длиной $n-2$ из чисел от 1 до n

Доказательство:

1. Каждому помеченному дереву приведенный алгоритм сопоставляет последовательность.
2. Каждой последовательности, как следует из предыдущей леммы, соотвествует помеченное дерево.

Следствием из этой теоремы является **формула Кэли.**

Пример построения кода Прюфера



Пример декодирования кода Прюфера