Міністерство освіти і науки України

Чорноморський національний університет
імені Петра Могили

Факультет компьютерних наук
Кафедра інтелектуальних інформаційних систем

І.В.Кулаковська

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Методичні рекомендіції до виконання практичних робіт

Випуск № &&&

Миколаїв 2015

УДК 510.6
ББК 22.18
К73

Рекомендовано до друку методичною радою факультета компьютерних наук Чорноморського державного університету імені Петра Могили (протокол №_____(_____) від 20.12.2013р.)

Рецензент:
Фісун М.Т., д.т.н., професор, завідувач кафедри інтелектуальних інформаційних систем ЧДУ імені Петра Могили.

К73 **Кулаковська І.В.** Математична логіка. Методичні рекомендіції до виконання лабораторних робіт. Випуск № ХХХ. Миколаїв: Видавництво ЧДУ імені Петра Могили, 2015. 105 с.

Методичні рекомендіції до виконання практичних робіт призначені для студентів спеціальності 6.0403003 «Системний аналіз» та 6.050101 «Компьютерні науки», які вивчають курс «Математична логіка» на факультеті компьютерних наук Чорноморського державного університету імені Петра Могили.

УДК 510.6
ББК 22.18

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ДИСЦИПЛІНИ
«МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА»

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс “Математична логіка ” призначений сформувати у студентів знання, вміння і навички, необхідні для усвідомлення і раціонального використання понять, законів і методів математичної логіки, як предмету вивчення, і як засобу для вивчення інших предметних областей.

Математична логіка, будучи частиною математики, займає в ній особливе місце як важливий і могутній інструмент дослідження основ математики, обґрунтування самої математичної науки.

Курс математичної логіки має своєю метою навчити студентів основним поняттям і методам цієї науки, а саме познайомити з:

- формалізацією математичної мови, яка в цьому курсі йде значно дальше, ніж в курсах алгебри, геометрії та математичного аналізу;
- формалізованим аксіоматичним методам побудови математичних теорій, які охоплюють також і логічні засоби;
- його основними складовими частинами: мовою, аксіомами, правилами виводу;
- проблемами несуперечності, повноти, недовідності теорій.

Такий підхід при вивченні математичних теорій характерний для сучасної математики і знаходить більше поширення в інших областях знань.

Завданнями математичної логіки виступають:

- освоєння предметних мов логіки висловлень і логіки предикатів;
- придбання навичок використання дедуктивних методів виводу наслідків з посилок;
- уміння працювати з різними моделями формального уточнення поняття “алгоритм”.

Курс математичної логіки традиційно складається з трьох частин – логіки висловлень (алгебра і числення висловлень), логіки предикатів (алгебри та числення предикатів) та проблем мінімізації булевих функцій (поліноми Жегалкіна, карти Карно).

На практичних заняттях студенти вправляються на прикладах і розв‘язують задачі з розділів “Логіка висловлень” і “Логіка предикатів”. Вони повинні оволодіти технікою логічних перетворень, особливо при роботі з кванторами, навчитися формально доводити формули числення висловлень.

Чотирнадцять занять посібника містять необхідний мінімум теоретичних відомостей, приклади рішення задач з детальними коментарями до них, вправи та завдання для самостійної роботи.

Практична робота1.

Висловлення. Логічні операції. Пропозиційні формули.

Мета: Засвоїти поняття висловлення – основного об‘єкта дослідження алгебри висловлень. Познайомитися з основними операціями над висловленнями. Сформувати навички і вміння використання логічних операцій для побудови нових висловлень з наявних. Сформувати поняття формули алгебри висловлень. Навчити визначати тип формули і її логічне значення.

План

- **Висловлення.**
- **Логічні операції над висловленнями.**
- **Пропозиційні формули алгебри висловлень.**

Короткі теоретичні відомості

Під *висловленням* розуміють оповідальне речення, про яке можна сказати одне із двох: істинне воно або хибне. Звичайно, це не означення. Поняття висловлення є в логіці висловлень вихідне, неозначуване.

Наприклад, «Земля — планета сонячної системи» (істинне висловлення), «Місяць - штучний супутник Землі» (хибне).

Кожне питальне і кожне окличне речення не є висловленням. Означення також не являється висловленнями.

Індивідуальні висловлення будемо позначати буквами v, w, v_1, w_1,w_2,…

У випадку, коли деяке висловлення υ істинне, будемо говорити, що воно приймає *істинносне значення «істинна»,* і записувати $(\upsilon)=1$. Якщо ж деяке висловлення ω хибне, будемо говорити, що воно приймає *істинносне значення «хибність»*, і записувати $(\omega) = 0$. Таким чином, істинна буде позначатися одиницею (1), а хибність - нулем (0). Наприклад, $(3\geq 2) = 1$, $(2 > 5) = 0$, $(2\neq 2) = 0$, (sin x – періодична функція) = 1. Часто замість 1 і 0 пишуть відповідно *і* та *х* або t і f.

Значенням висловлення будемо називати його істинносне значення і надалі ототожнювати висловлення з їхніми значеннями.

Над висловленнями визначають наступні *основні операції*, які дозволяють з певних вихідних висловлень утворювати нові висловлення:

Запереченням висловлення υ називається висловлення, яке позначається $\bar{\upsilon}$, що істинне тоді і тільки тоді, коли υ хибне. Висловлення $\bar{\upsilon}$ читається «не υ». Висловлення «не υ»; «невірно, що υ»; «υ хибне» означають (передають) висловлення $\bar{\upsilon}$.

Кон'юнкцією висловлень υ і ω називається висловлення, яке позначається $\upsilon \wedge \omega$, що істинне тоді і тільки тоді, коли υ і ω істинні, тобто $(\upsilon) = 1$ і $(\omega) = 1$. Висловлення $\upsilon \wedge \omega$ читається « υ і ω ». Висловлення « υ і ω »; «і υ, і ω »; «одночасно обидва висловлення υ і ω істинні» означають висловлення $\upsilon \wedge \omega$.

Диз'юнкцією висловлень υ і ω називається висловлення, яке позначається $\upsilon \vee \omega$, що хибне тоді і тільки тоді, коли υ і ω хибні, тобто $(\upsilon) = 0$ і $(\omega) = 0$. Висловлення $\upsilon \vee \omega$ читається « υ або ω ». Висловлення « υ або ω »; «або υ, або

ω»; «принаймні одне з висловлень υ або ω істинне» означають висловлення $\upsilon \vee \omega$.

Імплікацією висловлень υ і ω називається висловлення, що позначається $\upsilon \to \omega$, хибне тоді і тільки тоді, коли υ істинне, ω хибне, тобто $(\upsilon) = 1$, $(\omega) = 0$. Висловлення $\upsilon \to \omega$ читається « з υ слідує ω ». Висловлення $\upsilon \to \omega$ означає те саме, що і висловлення: «якщо υ , то ω»; «з υ випливає ω»; «з υ слідує ω»; «υ тільки тоді, коли ω»; « υ тягне ω»; « υ тільки в тому випадку, якщо ω»; « υ є достатньою умовою для ω»; « ω за умови, що υ»; «ω, якщо υ»; «ω є необхідною умовою для υ»; «для того щоб υ, необхідно, щоб ω»; «для того, щоб ω, досить, щоб υ»; «ω тоді, коли υ»; «коли υ, тоді ω».

Еквіваленцією висловлень υ і ω називається висловлення, яке позначається $\upsilon \leftrightarrow \omega$, що істинне тоді і тільки тоді, коли значення висловлень υ і ω збігаються. Висловлення $\upsilon \leftrightarrow \omega$ читається «υ еквівалентно ω». Висловлення «υ тоді і тільки тоді, коли ω»; «для того щоб υ, необхідно і достатньо, щоб ω» означають висловлення $\upsilon \leftrightarrow \omega$.

Логічні значення результатів цих операцій пов'язані з логічними значеннями вихідних висловлень так, як вказано у наступній таблиці, що називається *істинносною таблицею* (*таблицею істинності*) (скорочено ТІ) відповідних операцій:

Таблиця 1

v	w	$\bar{\upsilon}$	$v \wedge w$	$v \vee w$	$v \to w$	$v \leftrightarrow w$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Пропозиційні змінні (або просто *змінні*) – нескінченний список букв $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, \ldots,$ за допомогою яких записують висловлення.

Поняття *пропозиційної формули (пф)* вводиться індуктивно.

1. Символи констант 0, 1 є пф.
2. Кожна змінна є пф.

3 – 7. Якщо A і B суть пф, то $\bar{A}$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \to (B)$, $(A) \leftrightarrow (B)$ - також пф.

Пункти 1 і 2 задають так звані вихідні пф, а п.п. 3 – 7 називаються *правилами утворення нових пф* з існуючих. Такі пф будемо називати пф у мові (або базисі) $\{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, 0, 1\}$.

Підформулою формули називається всяка її частина, яка сама є формулою.

Дужки у визначенні пропозиційної формули потрібні для того, щоб можна було указати, як дана пропозиційна формула утворена з вихідних, і довести, що даний вираз є пропозиційною формулою.

Для скорочення запису введемо деякі угоди про опускання дужок. По-перше, будемо опускати дужки, що містять у собі змінні, а також 0 і 1. По-друге, будемо опускати й інші дужки, за умови, що їхнє відновлення відбувається в такий спосіб: завжди вибираємо послідовно із присутніх символів логічних операцій у першу чергу символ $\leftrightarrow$, у другу - $\to$, у третю - $\vee$, у четверту - $\wedge$, у п'яту - $\neg$, причому обраному символу надається найбільша область дії, сумісна з вимогою, щоб увесь вираз був пропозиційною формулою. Інакше кажучи, символ $\neg$ зв'язує сильніше, ніж $\wedge$, а символ $\wedge$ -сильніше від $\vee$, і т.д.

Наприклад, відновлення дужок за зазначеною угодою в пропозиційній формулі $q \leftrightarrow p \rightarrow s \vee r \wedge \overline{q}$ послідовно дає:

$$(q) \leftrightarrow (p \rightarrow s \vee r \wedge \overline{q});$$
$$(q) \leftrightarrow \big((p) \rightarrow (s \vee r \wedge \overline{q})\big);$$
$$(q) \leftrightarrow \big((p) \rightarrow ((s) \vee (r \wedge \overline{q})\big);$$
$$(q) \leftrightarrow \big((p) \rightarrow ((s) \vee ((r) \wedge (\overline{q}))\big);$$
$$(q) \leftrightarrow \Big((p) \rightarrow \Big((s) \vee ((r) \wedge \overline{(q)}\Big)\Big)$$

З висловлень шляхом з'єднання їх за допомогою логічних зв'язок (операцій) можна утворювати нові, так звані *складні висловлення*. Наприклад, «3 не більше 5»; «не вірно, що 2 < 0»; «або 3 $\geq$ 1, або 4 $\geq$ 3»; «$\sin x = 1$ тільки тоді, коли $x = \pi/2$»; «$\sin x = 1$ тоді, коли $x = \pi/2$»; «3 = 2 тоді і тільки тоді, коли 4 $\geq$ 3» і т.д. Такі висловлення будуть *істинними* або *хибними* залежно від істинності або хибності індивідуальних висловлень, що входять до них, і інтерпритації логічних операцій.

Якщо $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ - будь-яка пф, $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$ - довільні висловлення, то, змінюючи в цій пф змінну X_i на υ_i ($i = 1, 2, ..., n$), 1 - на висловлення 2 = 2, 0 - на висловлення 2 $\neq$ 2, якщо в ній зустрічаються константи 1 або 0, отримаємо висловлення $A(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n)$. Значенням пф $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ для даного набору ($\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$) значень змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ відповідно, де υ_i ($1 \leq i \leq n$) є висловлення або 0, або 1, так як висловлення ми ототожнюємо з їхніми значеннями, назвемо *істинносним значення висловлення* $A(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n)$. Значення пф для різних наборів значень її змінних зручно представляти у вигляді таблиці, яка називається *таблицею істинності* цієї пф (табл. 2). Якщо дана пф має *n* різних змінних, то можливо 2^n різних наборів значень цих змінних і, отже, таблиця істинності для такої пф містить 2^n рядків.

Таблиця 2

$p\ \ q\ \ r$	$p \rightarrow q \wedge \overline{r} \vee 0$	$\overline{((\overline{p \vee q}) \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q})}$	$\overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
0 0 0	*1* 0 1 1	*0* 1 0 1 1 1 1	1 0 *1* 1 1 1
0 0 1	*1* 0 0 0	*0* 1 0 1 1 1 1	1 0 *1* 1 1 1
0 1 0	*1* 1 1 1	*0* 0 1 1 1 0 0	1 0 *1* 1 1 0
0 1 1	*1* 0 0 0	*0* 0 1 1 1 0 0	1 0 *1* 1 1 0
1 0 0	*1* 0 1 1	*0* 0 1 1 0 0 1	1 0 *1* 0 1 1
1 0 1	*0* 0 0 0	*0* 0 1 1 0 0 1	1 0 *1* 0 1 1
1 1 0	*1* 1 1 1	*0* 0 1 1 0 0 0	0 1 *1* 0 0 0
1 1 1	*0* 0 0 0	*0* 0 1 1 0 0 0	0 1 *1* 0 0 0

Пропозиційна формула $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *виконуваною (спростовною),* якщо існує такий набір висловлень $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$, який обертає цю пропозиційну формулу на істинне (хибне) висловлення $A(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n)$.

Пропозиційна формула, значення якої для будь-якого набору значень змінних є 1 (відповідно 0), будемо називати *тотожно істинною* пропозиційною формулою або *тавтологією* (відповідно *тотожно хибною* пропозиційною формулою або *запереченням*).

Хід заняття

Висловлення.

Задача 1. Які з наступних оповідальних речень є висловленнями?

1. Київ - столиця України.
2. Студент факультету фізики, математики та інформатики університету.
3. Кожне ціле число є і числом раціональним.
4. Трикутник АВС подібний трикутнику $A'B'C'$.
5. Існує комплексне число x таке, що $x^2 < 0$.
6. Для кожного дійсного числа x $x + 1 > 0$.
7. Каша – смачна страва.
8. $x^2 > 0$.
9. $x + x = 3(x+1)^2$.
10. У романі О. С. Пушкіна «Євгеній Онєгін» 136245 літер.

Розв'язування.

2. Це речення не є висловленням, тому що воно нічого не стверджує про студента.

4. Речення не є висловленням: ми не можемо визначити, істинне воно або хибне, тому що не знаємо, про які саме трикутниках йде мова.

7. Речення не є висловленням, так як поняття «смачна страва» дуже невизначено.

10. Речення - висловлення, але для виявлення його значення істинності треба затратити багато часу.

Логічні операції.

Задача 2. Нехай $v_1=1$, $v_2=0$, $v_3=1$. Знайти значення наступних складових висловлень:

а) $(\overline{\upsilon_1} \to \overline{(\upsilon_2 \to \upsilon_3)}) \wedge (\overline{\upsilon_1} \vee \overline{\upsilon_2} \vee \overline{\upsilon_3})$;

б) $\overline{(\upsilon_1 \to (\overline{\upsilon_2} \to \overline{(\upsilon_3 \leftrightarrow (\overline{\upsilon_1} \vee (\upsilon_2 \vee \upsilon_3)))}))}$.

Задача 3. Придумати два висловлення, що є кон'юнкцією (диз'юнкцією) трьох висловлень, одне з яких істинне, а інші хибні.

Задача 4. Записати за допомогою символів наступні висловлення, вживаючи букви для позначення простих висловлень:

а) 3 є простим числом і 9 – складене число;

б) $\sqrt{3}$ — ірраціональне число або існує раціональне число, що не є цілим;

в) Петро встане і він або Іван вийде;

г) Петро встане і вийде або Іван вийде;

д) студент не може навчатися, якщо він утомився або голодний;

е) у шаховому турнірі ні Петро, ні Іван не виграли свої відкладені партії;

є) якщо Петро спізниться і не піде на першу годину першої лекції, то він не буде задоволений, а якщо він не спізниться, то він буде задоволений;

ж) у степу не буде пилових буревіїв тоді і тільки тоді, коли будуть лісозахисні смуги; якщо лісозахисних смуг не буде, то пилові буревії знищать посіви і нанесуть збитки господарству;

з) або Петро піде на вечір відпочинку і Іван не піде на нього; або Петро не піде на вечір відпочинку і Іван приємно проведе час;

и) Петро ходить у кіно тільки в тому випадку, коли там показують комедію;

і) для того щоб натуральне число a було непарним, достатньо, щоб a було простим і більше за два;

й) необхідною умовою збіжності послідовності S є обмеженість S;

к) якщо «Шахтар» або «Динамо» програють і «Карпати» виграє, то «Таврія» втратить перше місце і, крім того, «Зоря» покине вищу лігу.

л) якщо у трикутнику медіана не є висотою і бісектрисою, то цей трикутник не рівнобедрений і не рівносторонній.

Розв'язування.

л) виділимо і наступним чином позначимо прості складові висловлення:

A: «У трикутнику медіана є висотою»;

B: «У трикутнику медіана є бісектрисою»;

C: «Цей трикутник рівнобедрений»;

D: «Цей трикутник рівносторонній»;

Тоді дане висловлення символічно записується так: $(\overline{\mathrm{A}} \wedge \bar{B}) \longrightarrow (\bar{C} \wedge \bar{D})$

Задача 5. Нехай v_1 буде «сьогодні світить сонце», v_2 — «сьогодні іде сніг», v_3 — «сьогодні похмуро» і v_4 — «учора було ясно». Перевести на звичайну мову наступні висловлення:

а) $v_1 \wedge \overline{v_3}$; б) $v_2 \vee v_3$; в) $v_1 \wedge \overline{(v_3 \vee v_2)}$;

г) $v_1 \rightarrow \overline{(v_3 \wedge v_2)}$; д) $\overline{v_1} \leftrightarrow v_4$; е) $(v_2 \rightarrow v_3) \vee v_1$.

Пропозиційні формули.

Задача 6. Які з наступних виразів, що виписані без застосування угоди про опускання дужок, є пропозиційними формулами?

а) $((\overline{P})) \wedge (Q)$;

б) $(P) \rightarrow ((\overline{Q})) \leftrightarrow (R)$;

в) $((Q) \vee (R)) \wedge \neg(S)$;

г) $((P) \rightarrow (Q)) \rightarrow ((Q) \vee (\overline{R})$;

д) $((P) \wedge ((\overline{Q})) \vee (S) \rightarrow (R)$;

е) $((P \wedge Q)R) \rightarrow \bar{S}$;

ж) $((P \wedge (\bar{Q} \rightarrow R)) \vee ((\bar{P} \leftrightarrow R) \wedge \bar{Q}))$.

Розв'язування.

е) Дана послідовність не є формулою вже тому , що у ній нема зовнішніх дужок. Покажемо, що вона не буде формулою навіть у тому випадку, якщо прийняти угоду про опускання зовнішніх дужок. Дійсно, пропозиційні змінні P, Q, і R згідно п. 2. означення формули є формулами. Тоді, згідно п. 4 цього означення, послідовність (P∧Q) буде формулою. Але наступна послідовність (P∧Q)R формулою не буде, так як формули, що входять до неї (P∧Q) і R не з'єднані ні одним з припустимих символів: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. *Тому і дана послідовність не являється формулою.*

ж) Згідно п.2 і 3-7 означення пропозиційні змінні P, Q, і R і вирази $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $(\bar{Q} \rightarrow R)$, $(\bar{P} \leftrightarrow R)$ *будуть формулами. Далі формулами будуть вирази* $(P \wedge (\bar{Q} \rightarrow R))$, $((\bar{P} \leftrightarrow R) \wedge \bar{Q})$. *Вираз* $((P \wedge (\bar{Q} \rightarrow R)) \vee ((\bar{P} \leftrightarrow R) \wedge \bar{Q}))$ *також є формулою.*

Задача 7. Опустити, на скільки це можливо, дужки у наступних пропозиційних формулах:

а) $((P)\wedge(Q))\vee((\overline{P}))$;

б) $((Q)\to((\overline{R})))\vee((R)\wedge(S))$;

в) $((P_8)\leftrightarrow(Q_7))\wedge(((\overline{R})\wedge(S)))$;

г) $(P)\leftrightarrow((Q)\to((Q)\vee((\overline{R}))))$;

д) $((\overline{P}))\vee((P)\vee((Q)\wedge((\overline{R}))))$;

е) $((\overline{S}))\wedge((R)\wedge((R_1)\to(Q)))$.

Задача 8. Відновити дужки в наступних пропозиційних формулах:

а) $P\vee\overline{Q}\to P$;

б) $\overline{P}\vee\overline{Q}\wedge R\to P$;

в) $P\leftrightarrow Q\to R\vee S\wedge\overline{Q}$;

г) $P\vee\overline{P}\leftrightarrow Q\to R$;

д) $\overline{P}\vee\overline{Q}\wedge R\to P$;

е) $\bar{P}\leftrightarrow\ \bar{Q}\ \vee R\wedge Q$.

Розв'язування.

е) $((\bar{P})\leftrightarrow((\bar{Q})\vee(R\wedge Q)))$

Задача 9. Випишіть всі можливі підформули формули (зовнішні дужки у формули опущені):

$$((A\leftrightarrow B)\wedge\bar{C})\to(((A\vee B)\to A)\to\bar{C})$$

Розв'язування.

Всі можливі підформули формули $((A\leftrightarrow B)\wedge\bar{C})\to(((A\vee B)\to A)\to\bar{C})$:

1. A
2. B
3. $(A\leftrightarrow B)$
4. C
5. $\bar{C}$
6. $((A\leftrightarrow B)\wedge\bar{C})$
7. $(A\vee B)$
8. $((A\vee B)\to A)$
9. $(((A\vee B)\to A)\to\bar{C})$
10. $(((A\leftrightarrow B)\wedge\bar{C})\to(((A\vee B)\to A)\to\bar{C}))$

Задача 10. Складіть таблицю істинності формули і вкажіть тип формули (тобто, чи є формула виконуваною або спростовною, або тотожно істинною (тавтологія), або тотожно хибною (заперечення):

$$((P\vee\bar{Q})\to Q)\wedge(\bar{P}\vee Q)$$

Розв'язування.

Користуючись означеннями логічних зв'язок (операцій над висловленнями), складемо таблицю істинності даної формули. Логічні значення цієї формули записані у останній колонці таблиці, де формула зображена як F(P,Q):

P	Q	$\bar{Q}$	$P\vee\bar{Q}$	$(P\vee\bar{Q})\to Q$	$\bar{P}$	$\bar{P}\vee Q$	$F(P,Q)$
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Із побудованої таблиці істинності бачимо, що дана формула виконувана, так якщо, наприклад, замість пропозиційної змінної P підставити у формулу хибне висловлення, а замість Q – істинне, то вся формула перетвориться в істинне висловлення. Але ця формула є також спростовною, тому що, коли, наприклад, замість змінної P підставити у формулу істинне висловлення, а замість Q – хибне, то вся формула перетвориться в хибне висловлення, тому вихідна формула є, ні тавтологія, ні заперечення.

Задачі для самостійного розв’язування

1.1. Випишіть всі можливі підформули кожної з наступних формул (згідно до домовленості зовнішні дужки у формул опущені):

1. $((A \wedge B) \leftrightarrow C) \to \bar{D}$
2. $(A \wedge (\bar{B} \to C)) \vee ((\bar{A} \leftrightarrow C) \wedge \bar{B})$
3. $((A \leftrightarrow B) \wedge \bar{C}) \to (((A \vee B) \to A) \to \bar{C})$
4. $((A \vee B) \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee (\bar{B} \vee C))$
5. $(A \to B) \to ((A \to \bar{B}) \to (A \wedge B))$
6. $((A \to B) \wedge (C \to D)) \to (\bar{B} \vee D)$
7. $(A \to B) \to ((A \to \bar{B}) \to \bar{B})$
8. $(A \to (B \wedge \bar{C})) \leftrightarrow (A \wedge (B \to C))$
9. $\bar{A} \vee (B \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge \bar{C}))$
10. $((C \vee B) \wedge A) \to (((C \vee A) \to B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B))$
11. $((A \vee (B \to \bar{C})) \vee D) \wedge (\bar{D} \vee (\bar{B} \vee C))$
12. $((A \to \bar{D}) \vee B) \to ((C \leftrightarrow \bar{D}) \to (\bar{A} \wedge C))$
13. $((A \to B) \wedge ((\bar{A} \vee (\bar{B} \vee C)) \to D)) \to (\bar{B} \vee D)$
14. $B \leftrightarrow ((A \to \bar{B}) \to \overline{((\bar{A} \leftrightarrow C) \wedge \bar{B})})$
15. $((D \to ((C \vee B) \wedge A)) \wedge (C \wedge A)) \to (\bar{B} \vee D)$

1.2. Складіть таблиці істинності для наступних формул і вкажіть, які з формул є виконуваними, які спростовними, які тотожно істинними (тавтологіями) і які тотожно хибними (запереченнями):

1. $(P \to Q) \to ((P \to \bar{Q}) \to \bar{P})$
2. $(P \wedge (Q \vee \bar{P})) \wedge ((\bar{Q} \to P) \vee Q)$
3. $((P \wedge \bar{Q}) \to Q) \to (P \to Q)$
4. $((P \vee \bar{Q}) \to Q) \wedge (\bar{P} \vee Q)$
5. $(P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P))$
6. $(\bar{P} \to \overline{(Q \wedge P)}) \to (P \vee R)$
7. $((P \wedge \bar{Q}) \to Q) \to (P \to Q)$
8. $(P \to (Q \to R)) \to (P \to Q)$
9. $(P \wedge (Q \vee \bar{P})) \wedge ((\bar{Q} \to P) \vee Q)$
10. $(Q \to (P \wedge R)) \wedge \overline{((P \vee R) \to Q)}$
11. $(P \wedge Q) \to ((R \vee Q) \to (Q \wedge \bar{Q}))$
12. $((Q \wedge R) \to (Q \to \bar{P})) \to \bar{Q}$
13. $((P \vee Q) \vee R) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$
14. $(P \vee Q) \to ((Q \vee \bar{R}) \wedge (R \vee P))$
15. $(P \vee Q) \to ((\bar{P} \wedge Q) \vee (P \wedge \bar{Q}))$

1.3. Складіть таблиці істинності для наступних формул:

1. **а)** $F = (a \vee b \to c) \to (a \to c) \vee (b \to c)$

б) $F = ((a \to b) \to (c \to d)) \to ((a \to c) \to (b \to d))$

2. **а)** $F = (a \wedge b \to c) \to (a \to c) \vee (b \to \bar{c})$

б) $F = (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee c) \wedge a \wedge \bar{c}$

3. **а)** $F = (a \to b) \wedge (a \to c) \wedge (b \to d) \to (a \to d \wedge c \wedge d)$

б) $F = (b \to (a \to (b \to c))) \to (a \to c)$

4. **а)** $F = (a \to (b \to c)) \to ((c \to d) \to (a \to (b \to d)))$

б) $F = \overline{(a \to b) \wedge (b \to \bar{a})}$

5. **а)** $F = (a \to b) \wedge (c \to d) \to (a \wedge c \to b \wedge d)$

б) $F = ((a \to b) \to (a \to \bar{b})) \to \bar{a}$

6. **а)** $F=(a\to b)\vee(c\to b)\leftrightarrow(a\wedge c\to b)$

б) $F=(a\wedge b\wedge(a\to b))\leftrightarrow a$

7. **а)** $F=(a\leftrightarrow b)\vee(c\leftrightarrow b)\to(a\vee c\to b)$

б) $F=(a\vee b\leftrightarrow(a\wedge(b\to\overline{b})))$

8. **а)** $F=(a\wedge c)\vee(b\wedge d)\to(a\wedge b)\wedge(c\vee d)$

б) $F=(a\wedge b\to c)\leftrightarrow((a\to b)\to c)$

9. **а)** $F=((a\to b)\wedge a\wedge b)\leftrightarrow((a\to b)\wedge a)$

б) $F=(a\wedge b\vee c\wedge d)\to(a\vee b)\wedge\overline{(c\wedge d)}$

10. **а)** $F=(a\to(b\to c))\wedge(a\to b)\wedge a\wedge\overline{c}$

б) $F=(a\to b)\wedge(c\to d)\to(a\vee c\to b\vee d)$

11. **а)** $F=a\wedge b\vee a\wedge\overline{b}\vee\overline{a}\wedge b\vee\overline{a}\wedge\overline{b}$

б) $F=((a\leftrightarrow b)\to(c\to d))\to(a\vee c\to b\vee d)$

12. **а)** $F=b\to((a\to(b\to c))\to(a\to c))$

б) $F=\overline{(\overline{a}\wedge\overline{b})}\vee(a\to b)\wedge a$

13. **а)** $F=(a\vee b)\wedge(b\to a)\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge\overline{b})\vee(b\wedge c)$

б) $F=(a\wedge b\to c)\leftrightarrow(a\to(b\to c))$

14. **а)** $F=\overline{a\to b}\vee\overline{c\to b}\vee b$

б) $F=(\overline{a}\to b)\wedge(b\to a)\wedge(\overline{a\vee b})$

15. **а)** $F=a\wedge c\vee\overline{b}\wedge c\vee\overline{a}\wedge b\vee a\wedge\overline{c}$

б) $F=(a\wedge c\to b\wedge d)\to(a\to b)\wedge(c\to d)$

Практична робота2.

Тавтології алгебри висловлень.

Мета: Закріпити навички та вміння визначати тип формули і її логічне значення. Познайомитися з основними тавтологіями (законами) алгебри висловлень.

План

- ♦ **Тотожно істинні формули алгебри висловлень.**
- ♦ **Основні тавтології алгебри висловлень.**

Короткі теоретичні відомості

Пропозиційна формула, значення якої для будь-якого набору значень змінних є 1, будемо називати *тотожно істинною* пропозиційною формулою або *тавтологією*. Тавтології називають ще законами алгебри висловлень.

Перелічимо деякі *основні тавтології.* Будемо писати $\models A$ для позначення того, що пропозиційна формула A є тавтологія.

Закони логіки

(1) $\models \quad p \vee \bar{p} = 1$ закон виключеного третього

(2) $\models \bar{\bar{p}} \leftrightarrow p$ закон подвійного заперечення

(3) $\models \ p \wedge p \wedge \ldots \wedge p \leftrightarrow p$

(4) $\models p \vee p \vee \ldots \vee p \leftrightarrow p$ закони ідемпотентності

(5) $\models \ p \wedge p \wedge \ldots \wedge p \longrightarrow p$ закони слідування

(6) $\models p \longrightarrow p \vee p \vee \ldots \vee p$

(7) $\models p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ закони комутативності

(8) $\models p \vee q \leftrightarrow q \vee p$

(9) $\models p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ закони асоціативності

(10) $\models p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

(11) $\models p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ закони дистрибутивності

(12) $\models p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(13) $\models \ \overline{p \wedge q} \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ закони де Моргана

(14) $\models \overline{p \vee q} \leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$

(15) $\models p \longrightarrow q \leftrightarrow \bar{q} \longrightarrow \bar{p}$ закон контрапозиції

(16) $\models (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$ закон транзитивності імплікації

(17) $\models (\bar{p} \longrightarrow q) \wedge (\bar{p} \longrightarrow \bar{q}) \longrightarrow p$ закон непрямого доказу

(18) $\models ((p \vee q) \wedge \big((p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)\big)) \longrightarrow r$ закон розбору випадків

(19) $\models((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \longrightarrow (p \leftrightarrow r)$закон транзитивності еквіваленції

(20) $\models (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\bar{p} \leftrightarrow \bar{q})$ закон протилежності

(21) $\models 1 \leftrightarrow p \vee \bar{p}, \ \models \ 1 \leftrightarrow p \longrightarrow p$ вираження 1 через $\neg$, $\vee$ і $\rightarrow$

(22) $\models 0 \leftrightarrow p \wedge \bar{p}, \models 0 \leftrightarrow (\overline{p \longrightarrow p})$ вираження 0 через $\neg$, $\wedge$ і $\vee$,$\rightarrow$

(23) $\models p \longrightarrow q \leftrightarrow \bar{p} \vee q$ вираження $\rightarrow$ через $\neg$ і $\vee$

(24) $\models(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p))$ вираження $\leftrightarrow$ через $\wedge$ і $\rightarrow$

(25) $\models p \wedge q \leftrightarrow \overline{p \longrightarrow \bar{q}}$ вираження $\wedge$ через $\neg$ і $\rightarrow$

(26) $\models \ p \vee q \leftrightarrow \bar{p} \longrightarrow q$ вираження $\vee$ через $\neg$ і $\rightarrow$

(27) $\models \big(p \wedge (p \vee q)\big) \leftrightarrow p$ перший закон поглинання

(28) $\models \big(p \vee (p \wedge q)\big) \leftrightarrow p$ другий закон поглинання

Хід заняття

Задача 1. Побудуйте таблиці істинності і доведіть, що наступні формули є тавтологіями:

1) $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\bar{Q}\rightarrow\bar{P})$
2) $(P\rightarrow Q)\rightarrow((P\rightarrow(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R))$

Розв'язування.

1) $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\bar{Q}\rightarrow\bar{P})$

Складемо таблицю істинності даної формули:

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\bar{Q}$	$\bar{P}$	$\bar{Q}\rightarrow\bar{P}$	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\bar{Q}\rightarrow\bar{P})$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Таблиця показує, що при всіх можливих розподілах істинносних значень пропозиційних змінних P і Q, формула завжди набирає значення 1. Тоді, формула – тавтологія.

2) $(P\rightarrow Q)\rightarrow((P\rightarrow(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R))$

Складемо таблицю істинності даної формули:

P	Q	R	(P→Q)	(Q→R)	(P→(Q→R))	(P→R)	((P→(Q→R))→(P→R))	((P→Q)→((P→(Q→R))→(P→R)))
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблиця показує, що при всіх можливих наборах істинносних значень пропозиційних змінних P, Q і R, формула завжди набирає значення 1. Тоді, формула – тавтологія.

Задачі для самостійного розв'язування

2.1 Склавши таблиці істинності, доведіть наступні закони
:

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	1,16	2,17	3,18	4,19	5,20	6,10	7,2	8,3	9,4	10,5	11,6	12,7	13,8	14,9	15,1

1. закон виключення суперечності
2. закон подвійного заперечення
3. другий закон де Моргана
4. перший закон де Моргана
5. закон транзитивності імплікації

6. комутативність диз'юнкції
7. асоціативність кон'юнкції
8. другий закон поглинання
9. перший закон поглинання
10. ідемпотентність диз'юнкції
11. ідемпотентність кон'юнкції
12. закон контрапозиції
13. закон розбору випадків
14. транзитивності еквіваленції
15. закон транзитивності імплікації
16. закон контрапозиції
17. комутативність диз'юнкції
18. комутативність кон'юнкції
19. дистрибутивність диз'юнкції відносно кон'юнкції
20. дистрибутивність кон'юнкції відносно диз'юнкції

2.2. Склавши таблиці істинності наступних формул, доведіть, що всі вони є тавтологіями:

1. $((P \to Q) \wedge (P \to \bar{Q})) \to \bar{P}$
2. $((P \to Q) \to P) \to P$
3. $(P \leftrightarrow Q) \to (P \to Q) \to ((P \to Q) \vee (Q \to P))$
4. $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$
5. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
6. $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$
7. $(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$
8. $(P \to Q) \to ((P \to \bar{Q}) \to \bar{P})$
9. $(P \to Q) \to ((Q \to P) \to (P \leftrightarrow Q))$
10. $(P \leftrightarrow Q) \to (P \to Q)$ та $(P \to Q) \vee (Q \to P)$
11. $((P \wedge Q) \to P) \to (Q \to (P \wedge Q))$
12. $(P \to R) \to ((P \vee Q) \to (R \vee Q))$
13. $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$
14. $(P \to (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (P \to R))$
15. $P \to (P \vee Q) \wedge P \to (Q \to P)$

2.3. Виконайте завдання 1.3 з практичної 1 за варіантами:

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	2	3	4	5

Практична робота3.

Рівносильність формул.

Мета: Засвоїти поняття рівносильності формул. Познайомити з основними рівносильностями алгебри висловлень. Сформувати вміння та навички застосування основних рівносильностей для перетворення формул.

План

- **Рівносильність формул алгебри висловлень.**
- **Основні рівносильності алгебри висловлень.**

Короткі теоретичні відомості

Дві пропозиційні формули A (x_1, x_2, ..., x_n) і B (x_1, x_2, ..., x_n) назвемо *рівносильними* (або *еквівалентними*), якщо для будь-яких наборів значень змінних x_1, x_2, ..., x_n вони приймають однакові значення. У цьому випадку будемо писати A (x_1, x_2, ..., x_n) ≡ B (x_1, x_2, ..., x_n) (або $A \equiv B$). Символ "≡" не є символом операції алгебри висловлень, а означає певне відношення між формулами, які знаходяться ліворуч та праворуч від символу "≡".

Беручи до уваги означення операції "↔", а також означення тавтології і рівносильності, можна зробити висновок, що кожну тавтологію, в якої головна операція еквіваленція, можна записати як рівносильність двох відповідних формул. Інакше кажучи, ця тавтологія породжує певну рівносильність. Так, тавтологія $\models p \vee \bar{p} = 1$ (закон подвійного заперечення) відповідає рівносильність $\mathrm{A} \vee \overline{\mathrm{A}} \equiv 1$. Зазначимо, що кожна з таких рівносильностей отримує назву відповідної тавтології (закону).

Всі закони є рівносильностями, але існують допоміжні рівносильності, які не є тавтологіями, але завжди справджуються. Перелічимо *найважливіші рівносильності* алгебри висловлень де *А, В і С* є будь-якою пропозиційною формулою:

Рівносильності постійних		**Рівносильність заміни операцій**
0	**1**	
$\mathrm{A} \vee 0 \equiv \mathrm{A}$;	$\mathrm{A} \vee 1 \equiv 1$;	$p \longrightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$;
$\mathrm{A} \wedge 0 \equiv 0$;	$\mathrm{A} \wedge 1 \equiv \mathrm{A}$;	$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p))$
$\mathrm{A} \wedge \overline{\mathrm{A}} \equiv 0$.	$\mathrm{A} \vee \overline{\mathrm{A}} \equiv 1$.	$(p \leftrightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$.
$\mathrm{A} \longrightarrow 0 \equiv \overline{\mathrm{A}}$	$\mathrm{A} \longrightarrow 1 \equiv 1$	

Використовуючи основні рівносильності алгебри висловлень, можемо від однієї формули переходити до рівносильної їй формули. Так само в будь-якій пропозиційній формулі можна замінити довільну її частину, що є пропозиційною формулою, рівносильною і при цьому одержати пропозиційну формулу, рівносильну даній. Такий перехід називається *рівносильним перетворенням* вихідної формули. У тих питаннях, у яких дану пропозиційну формулу можна замінити на рівносильну їй, основні рівносильності алгебри висловлень дозволяють приводити формули до більш простого (по числу символів) або більш зручного вигляду.

Хід заняття

Задача 1. Довести, що відношення рівносильності є відношенням еквівалентності.

Задача 2. Вивести наступні рівносильності із зазначених (при цьому поряд із зазначеною рівносильністю можуть бути використані інші рівносильності, крім виведеної, і деякі твердження типу: якщо A ≡ B, то $\bar{A} \equiv \bar{B}$):

Задача 3. Довести, що пропозиційні формули, що містять тільки символ $\leftrightarrow$, або, інакше кажучи, формули у мові $\{\leftrightarrow\}$ є тавтологією тоді і тільки тоді, коли кожна змінна входить до неї парне число разів.

Задача 4. Довести, що ніяка пропозиційна формула у мові $\{\wedge, \vee\}$ не є: 1) тавтологією; 2) суперечністю.

Задача 5. Наступну формулу перетворіть рівносильним чином так, щоб вона містила тільки операції $\neg$, $\vee$, $\wedge$ і, щоб заперечення відносились тільки до пропозиційних змінних і не стояло б перед дужками:

$$(X \vee Y) \leftrightarrow (\bar{X} \rightarrow Z)$$

Розв'язування.

$(X \vee Y) \leftrightarrow (\bar{X} \underline{\rightarrow Z})$ =*Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$X \vee Y \leftrightarrow \bar{\bar{\bar{X}}} \vee Z$ =*Закон подвійного заперечення*

$\underline{X \vee Y \leftrightarrow X \vee Z}$ =*Вираження еквіваленції через імплікацію та кон'юнкцію*

$(X \vee Y \rightarrow X \vee Z) \wedge (\underline{Z \vee X \rightarrow Y \vee X})$ =

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$(X \vee Y \rightarrow X \vee Z) \wedge (\underline{\overline{(Z \vee X)}} \vee Y \vee X)$ =

Закон де Моргана для диз'юнкції $(\underline{X \vee Y \rightarrow X \vee Z}) \wedge (\bar{Z} \wedge \bar{X} \vee Y \vee X)$ =

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$(\underline{\overline{(X \vee Y)}} \vee X \vee Z) \wedge (\bar{Z} \wedge \bar{X} \vee Y \vee X)$ = *Закон де Моргана для диз'юнкції*

$(\bar{X} \wedge \bar{Y} \vee X \vee Z) \wedge (\bar{Z} \wedge \bar{X} \vee Y \vee X) = (0) \wedge (0) = 0$

Задача 6. Проводячи рівносильні перетворення з використанням основних рівносильностей, доведіть, що формула є тавтологією:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

Розв'язування.

Покажемо, що ця формула рівносильна 1 (істинному висловленню):

$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow \underline{(P \rightarrow R)})$ =

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow \bar{P} \vee R)$ =

Вираження імплікаціїчерез диз'юнкцію та заперечення

$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((\underline{P \rightarrow} \bar{Q} \underline{\vee R}) \rightarrow \bar{P} \vee R)$ =

Вираження імплікаціїчерез диз'юнкцію та заперечення

$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\bar{P} \underline{\vee} \bar{Q} \underline{\vee R \rightarrow} \bar{P} \underline{\vee R})$ =

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$(P \rightarrow Q) \rightarrow \overline{\bar{P} \vee \bar{Q} \vee R} \neg P \vee R$ = *Закон де Моргана для диз'юнкції*

$(\underline{P \rightarrow Q}) \rightarrow \overline{\bar{\bar{P}} \vee \bar{\bar{Q}}} \wedge \bar{R} \vee \bar{P} \vee R$ =

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$\bar P \vee Q \to \neg(\bar P \vee \bar Q) \wedge \bar R \vee \bar P \vee R = \bar P \vee Q \to \overline{\bar P \vee \bar Q} \wedge \bar R \vee \bar P \vee R =$
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення
$\overline{(\bar P \vee Q)} \vee \overline{(\bar P \vee \bar Q)} \wedge \bar R \vee \bar P \vee R =$ *Закон де Моргана для диз'юнкції*
$\underline{P} \wedge \bar Q \vee \overline{(\bar P \vee \bar Q)} \wedge \bar R \vee \bar P \vee R =$ *Закон подвійного заперечення*
$P \wedge \bar Q \vee \underline{\overline{(\bar P \vee \bar Q)}} \wedge \bar R \vee \bar P \vee R =$ *Закон де Моргана для диз'юнкції*
$P \wedge \bar Q \vee \underline{\bar{\bar P}} \wedge \bar{\bar Q} \wedge \bar R \vee \bar P \vee R =$ *Закон подвійного заперечення*
$P \wedge \bar Q \vee P \wedge \underline{\bar{\bar Q}} \wedge \bar R \vee \bar P \vee R =$ *Закон подвійного заперечення*
$P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee \underline{\neg P \vee R} =$ *Закон комутативності диз'юнкції*
$P \wedge \neg Q \vee \underline{P \wedge Q \wedge \bar R \vee R} \vee \bar P =$
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$P \wedge \bar Q \vee (P \wedge Q \vee R) \wedge (\bar R \underline{\vee R}) \vee \bar P =$
Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення
$P \wedge \bar Q \vee \underline{(P \wedge Q \vee R) \wedge (1)} \vee \bar P =$ *Закон одиниці відносно кон'юнкції*
$\underline{P \wedge \bar Q \vee P \wedge Q} \vee R \vee \bar P =$ *Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції*
$P \wedge (\underline{\bar Q \vee Q}) \vee R \vee \neg P =$ *Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення*
$\underline{P \wedge (1)} \vee R \vee \bar P =$ *Закон одиниці відносно кон'юнкції*
$P \vee \underline{R \vee \bar P} =$ *Закон комутативності диз'юнкції*
$\underline{P \vee \bar P} \vee R =$ *Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення*
$\underline{1 \vee R} = 1$ *Закон одиниці відносно диз'юнкції*

Задача 7. Проводячи рівносильні перетворення з використанням основних рівносильностей, доведіть, що формула є тотожно хибною (запереченням):

$$(X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge ((X \wedge \bar Y) \vee (\bar X \wedge Y))$$

Розв'язування.
$(X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge ((X \wedge \bar Y) \vee (\bar X \wedge Y))$
Покажемо, що ця формула рівносильна 0 (хибному висловлюванню):
$(X \to Y) \wedge (\underline{Y \to X}) \wedge ((X \wedge \bar Y) \wedge (\bar X \wedge Y)) =$
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення
$(X \to Y) \wedge (\bar Y \underline{\wedge X}) \wedge (X \wedge \bar Y \wedge \bar X \wedge Y) =$ *Закон комутативності диз'юнкції*
$(X \to Y) \wedge \underline{(X \wedge \bar Y) \wedge (X \wedge \bar Y \wedge \bar X \wedge Y)} =$
Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції
$(\underline{X \to Y}) \wedge ((X \wedge \bar Y) \wedge X \wedge \bar Y \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \bar X \wedge Y) =$
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення
$(\bar X \underline{\wedge Y) \wedge ((X \wedge \bar Y) \wedge X \wedge \bar Y \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \bar X \wedge Y)} =$
Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції
$(\bar X \wedge Y) \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \underline{X \wedge} \bar Y \wedge (\bar X \wedge Y) \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \bar X \wedge Y =$
Вираження кон'юнкції через імплікацію та заперечення
$(\bar X \wedge Y) \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \overline{(X \to \bar{\bar Y})} \wedge (\bar X \wedge Y) \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \bar X \wedge Y =$
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення
$(\bar X \wedge Y) \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \overline{(\bar X \wedge \bar{\bar Y})} \wedge (\bar X \wedge Y) \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \bar X \wedge Y =$ *Закон подвійного заперечення*
$(\bar X \wedge Y) \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \overline{(\bar X \wedge Y)} \wedge (\bar X \wedge Y) \wedge (X \wedge \bar Y) \wedge \bar X \underline{\wedge Y} =$
Вираження кон'юнкції через імплікацію та заперечення

$(\bar{X}\wedge Y)\wedge(X\wedge\bar{Y})\wedge\overline{(\bar{X}\wedge Y)}\wedge(\bar{X}\wedge Y)\wedge(X\wedge\bar{Y})\wedge\overline{(\bar{X}\to\bar{Y})}=$

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$(\bar{X}\wedge Y)\wedge(X\wedge\bar{Y})\wedge\overline{(\bar{X}\wedge Y)}\wedge(\bar{X}\wedge Y)\wedge(X\wedge\bar{Y})\wedge\overline{(\bar{\bar{X}}\wedge\bar{Y})}=$

Закон подвійного заперечення

$(\bar{X}\wedge Y)\wedge\underline{(X\wedge\bar{Y})\wedge\overline{(\bar{X}\wedge Y)}}\wedge(\bar{X}\wedge Y)\wedge(X\wedge\bar{Y})\wedge\overline{(X\wedge\bar{Y})}=$

Закон комутативності кон'юнкції

$\underline{(\bar{X}\wedge Y)\wedge\overline{(\bar{X}\wedge Y)}}\wedge(X\wedge\bar{Y})\wedge(\bar{X}\wedge Y)\wedge(X\wedge\bar{Y})\wedge\overline{(X\wedge\bar{Y})}=$

Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення

$\underline{0\wedge(X\wedge\bar{Y})}\wedge(\bar{X}\wedge Y)\wedge(X\wedge\bar{Y})\wedge\overline{(X\wedge\bar{Y})}=$

Закон нуля відносно кон'юнкції $0\wedge(\bar{X}\wedge Y)\wedge\underline{(X\wedge\bar{Y})\wedge\overline{(X\wedge\bar{Y})}}=$

Закон нуля відносно кон'юнкції $\underline{0\wedge 0}=0$

Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Проводячи рівносильні перетворення з використанням основних рівносильностей, доведіть, що всі формули є тавтологіями:

1. $(P\to Q)\to((P\to(Q\to R))\to(P\to R))$
2. $P\to(Q\to(P\wedge Q))$
3. $P\to(P\vee Q)$ та $(P\wedge Q)\to P$
4. $(P\to(Q\wedge R))\leftrightarrow((P\to Q)\wedge(P\to R))$
5. $((P\to Q)\wedge(P\to\bar{Q}))\to\bar{P}$
6. $(P\to R)\to((Q\to R)\to((P\vee Q)\to R))$
7. $(P\to Q)\to((P\to\bar{Q})\to\bar{P})$
8. $(P\to Q)\vee(Q\to P)$
9. $(P\to Q)\to((Q\to P)\to(P\leftrightarrow Q))$
10. $((P\to Q)\to P)\to P$
11. $(P\leftrightarrow Q)\to(P\to Q)$
12. $(P\to R)\to((P\vee Q)\to(R\vee Q))$
13. $(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$
14. $(A\to(B\to C))\leftrightarrow((A\wedge B)\to C)$
15. $(P\to(Q\to R))\leftrightarrow(Q\to(P\to R))$

3.2. Застосовуючи рівносильні перетворення, приведіть наступні формули до можливо більш простої форми:

1. $\overline{((P\vee Q)\wedge(P\wedge\bar{R}))}$
2. $(P\wedge\bar{Q})\vee\overline{(P\wedge Q)}$
3. $\overline{((P\vee\bar{Q})\wedge Q)}\wedge\overline{(\bar{P}\wedge Q)}$
4. $(P\wedge Q)\vee(\bar{P}\wedge Q)\vee(P\wedge\bar{Q})$
5. $(\bar{P}\wedge Q\wedge R)\vee(\bar{P}\wedge\bar{Q}\wedge R)\vee(Q\wedge R)$
6. $(P\vee\bar{Q}\to(R\to Q\vee\bar{Q}\vee P))\wedge(P\vee(\overline{P\to P}))\to Q$
7. $((P\wedge\overline{(P\wedge\bar{P}\to Q\wedge\bar{Q})})\to R)\vee P\vee(Q\wedge R)$
8. $(P\wedge(Q\vee R\to Q\vee R))\vee(P\wedge P\wedge\bar{Q})\vee P\vee(Q\wedge\overline{(P\wedge\bar{P})})$
9. $\overline{\bar{P}\vee Q}\to((P\vee Q)\to P)$
10. $\overline{(\bar{P}\wedge\bar{Q})}\vee((P\to Q)\wedge P)$
11. $(P\to Q)\wedge(Q\to P)\wedge(P\vee Q)$

12. $(P \to Q) \wedge (Q \to \bar{P}) \wedge (R \to P)$
13. $(P \wedge R) \vee (P \wedge \bar{R}) \vee (Q \wedge R) \vee (\bar{P} \wedge Q \wedge R)$
14. $\neg ((P \to Q) \wedge (Q \to \neg P))$
15. $(\neg (P \vee Q) \to (P \wedge Q \wedge R)) \vee (\bar{P} \wedge R)$

3.3. Наступні формули перетворіть рівносильним чином так, щоб вони містили у собі тільки операції $\neg$, $\vee$, $\wedge$ і, щоб заперечення було віднесено тільки до пропозиційних змінних і не стояло б перед дужками:

1. $(X \vee Y) \leftrightarrow \overline{(\bar{X} \to Z)}$
2. $(\bar{X} \to Y) \to \overline{(X \leftrightarrow Y)}$
3. $((X \vee Y \vee Z) \to X) \to Z$
4. $((X \to Y) \to Z) \to \bar{X}$
5. $(X \leftrightarrow (Y \to Z)) \to X$
6. $(X \to Y) \to (Y \wedge Z)$
7. $(X \wedge Y) \leftrightarrow (X \wedge Y)$
8. $((\bar{X} \wedge \bar{Y}) \to Z) \to (Z \leftrightarrow \bar{Y})$
9. $((X \to (Y \wedge Z)) \to (\bar{Y} \to \bar{X})) \to \bar{Y}$
10. $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$
11. $((X \to Y) \wedge (Y \to X)) \to (X \vee Y)$
12. $((X \to Y) \wedge (Y \to \bar{X})) \to (Z \to X)$
13. $((X \leftrightarrow Y) \wedge (\bar{X} \leftrightarrow \bar{Y})) \to ((X \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee \bar{Y}))$
14. $((X \leftrightarrow \bar{Y}) \to Z) \to (X \leftrightarrow \neg Z)$
15. $(X \to (Y \leftrightarrow Z)) \leftrightarrow ((X \to Y) \leftrightarrow Z)$

3.4. Проводячи рівносильні перетворення з використанням основних рівносильностей, доведіть, що всі формули є тотожно хибними (запереченнями):

1. $X \wedge (X \to Y) \wedge (X \to \bar{Y})$
2. $X \wedge Y \wedge (X \wedge Y \to Z) \wedge \bar{Z}$
3. $(X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge ((X \wedge \bar{Y}) \vee (\bar{X} \wedge Y))$
4. $((X \wedge \bar{Y}) \to (\bar{X} \vee (X \wedge Y))) \wedge ((\bar{X} \vee (X \wedge Y)) \to (X \wedge \bar{Y}))$
5. $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to \overline{(X \to Z)}$
6. $(X \to Y) \wedge (X \to \bar{Y}) \wedge X$
7. $((X \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge \bar{Z})) \leftrightarrow ((X \to Y) \wedge (X \to Z))$
8. $P \wedge (Q \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q}))$
9. $\overline{(((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z))}$
10. $(X \wedge Y) \leftrightarrow \overline{(X \wedge Y)}$
11. $(A \to (B \wedge \bar{C})) \leftrightarrow (A \wedge (B \to C))$
12. $\overline{((C \vee B) \wedge A)} \to (((C \vee A) \to B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B))$
13. $\overline{((A \leftrightarrow B) \wedge \bar{C})} \to (((A \vee B) \to A) \to \bar{C})$
14. $((\bar{X} \wedge Y) \vee (\bar{X} \wedge \bar{Z})) \leftrightarrow ((X \to Y) \wedge (X \to Z))$
15. $(((\bar{X} \to Y) \wedge (Y \to \neg Z)) \to (X \to Z))$

Практична робота4.

Спрощення систем висловлень.

Мета: Сформувати вміння та навички застосування рівносильних перетворень для спрощення систем висловлень.

План

♦ **Спрощення систем висловлень.**

Короткі теоретичні відомості

Спрощення сукупності висловлень засновано на тому, що в залежності від умови задачі, необхідно скласти кон'юнкцію або диз'юнкцію вихідних висловлень, а потім привести її рівносильними перетвореннями до кон'юнкції або диз'юнкції більш простого виду, тим самим можна отримати більш просту систему висловлень, еквівалентну до даної.

Хід заняття

Задача 1. Спростити систему висловлень, якщо всі висловлення, що входять до системи, істинні. Спростити систему, це означає знайти логічно еквівалентну їй систему, що складається з меншої кількості не більш складних висловлень:

$A \to B,\ C \to B,\ (B \wedge C) \to A$

Розв'язування.

Спрощення даної сукупності висловлень спирається на те, що кожне з висловлень буде істинним тоді і тільки тоді, коли істинна кон'юнкція всіх цих висловлень. Тому, склавши кон'юнкцію з даних висловлень і приводячи її еквівалентними перетвореннями до кон'юнкції більш простого виду, можна отримати більш просту систему висловлень, еквівалентну даній:

$\underline{A \to B, C \to B, (B \wedge C) \to A}$

Об'єднуємо висловлення знаком кон'юнкції. $(A \to B) \wedge (C \to B) \wedge (\underline{(B \wedge C) \to A}) =$

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$(A \to B) \wedge (C \to B) \wedge (\underline{\overline{(B \wedge C)} \vee} A) =$

Закон де Моргана для кон'юнкції $(A \to B) \wedge (C \to B) \wedge (\bar{B} \underline{\vee} \bar{C} \vee A) =$

Закон комутативності диз'юнкції $(A \to B) \wedge (\underline{C \to B}) \wedge (\bar{C} \vee \bar{B} \vee A) =$

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$(A \to B) \wedge (\bar{C} \underline{\vee B}) \wedge (\bar{C} \vee \bar{B} \vee A) =$

Закон нуля відносно диз'юнкції $(A \to B) \wedge (\bar{C} \vee B \vee \underline{0}) \wedge (\bar{C} \vee \bar{B} \vee A) =$

Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення

$(A \to B) \wedge (\bar{C} \vee \underline{B \vee A \wedge} \bar{A}) \wedge (\bar{C} \vee \bar{B} \vee A) =$

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

$(A \to B) \wedge (\bar{C} \underline{\vee (B \vee A) \wedge (B \vee} \bar{A})) \wedge (\bar{C} \vee \bar{B} \vee A) =$

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

$(\underline{A \to B}) \wedge (\bar{C} \vee B \vee A) \wedge (\bar{C} \vee B \vee \bar{A}) \wedge (\bar{C} \vee \bar{B} \vee A) =$

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$(\bar{A} \underline{\vee B}) \wedge (\bar{C} \vee B \vee A) \wedge (\bar{C} \vee B \vee \bar{A}) \wedge (\bar{C} \vee \bar{B} \vee A) =$ *Закон нуля відносно диз'юнкції*

$(\bar{A}\vee B\vee 0)\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення
$(\bar{A}\vee B\vee C\wedge\bar{C})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(\bar{A}\vee(B\vee C)\wedge B\vee\bar{C}))\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(\bar{A}\vee B\vee C)\wedge(\bar{A}\vee B\vee\bar{C})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон комутативності кон'юнкції
$(\bar{A}\vee B\vee C)\wedge(\bar{A}\vee B\vee\bar{C})\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон комутативності диз'юнкції
$(\bar{A}\vee B\vee C)\wedge(\bar{A}\vee\bar{C}\vee B)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон комутативності диз'юнкції
$(\bar{A}\vee B\vee C)\wedge(\bar{C}\vee\bar{A}\vee B)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон комутативності диз'юнкції
$(\bar{A}\vee B\vee C)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон ідемпотентності кон'юнкції
$(\bar{A}\vee B\vee C)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон комутативності диз'юнкції
$(\bar{A}\vee C\vee B)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон комутативності диз'юнкції
$(C\vee\bar{A}\vee B)\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон комутативності диз'юнкції
$(C\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$((C\vee B)\wedge(\bar{C}\vee B)\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$((C\wedge\bar{C})\vee B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення
$((0)\vee B\vee\bar{A})\wedge\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон нуля відносно диз'юнкції $(B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\vee A)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B}\vee A)=$
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(B\vee\bar{A})\wedge((\bar{C}\vee B)\wedge(\bar{C}\vee\bar{B})\vee A)=$
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee B\wedge\bar{B}\vee A)=$
Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення $(B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee 0\vee A)=$
Закон нуля відносно диз'юнкції (14°) $(B\vee\bar{A})\wedge(\bar{C}\vee A)=$
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення $(B\vee\bar{A})\wedge(C\to A)=$
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення $(A\to B)\wedge(C\to A)$
Вихідна система висловлень $A\to B, C\to B, (B\wedge C)\to A$
логічно еквівалентна наступній $A\to B$, $C\to A$

Всі висловлення даної системи будуть істинні тоді і тільки тоді, коли будуть істинні висловлювання $A\to B$ і $C\to A$.
Тому дана система висловлювань $A\to B, C\to B, (B\wedge C)\to A$ є логічно еквівалентною більш простій системі двох висловлень $A\to B, C\to A$.

Задача 2. Спростити систему висловлень, якщо відомо, що з висловлень, які входять до неї, що найменше одне з них істинне:

$A\wedge B\wedge \bar{C}$, $\overline{(A\to B)}\wedge \bar{C}$, $\bar{A}\wedge\overline{(B\to C)}$

Розв'язування.

$A\wedge B\wedge \bar{C}$, $\overline{(A\to B)}\wedge \bar{C}$, $\bar{A}\wedge\overline{(B\to C)}$

Що найменше одне з висловлень даної сукупності буде істинним тоді і тільки тоді, коли істинна диз'юнкція всіх даних висловлень. Тому, склавши диз'юнкцію з даних висловлень і приводячи її еквівалентними перетвореннями до диз'юнкції більш простого виду, можна отримати більш просту систему висловлень, еквівалентну даній. У нашому випадку маємо наступну диз'юнкцію, яку послідовно спрощуємо:

$A\wedge B\wedge \bar{C}$, $\overline{(A\to B)}\wedge \bar{C}$, $\bar{A}\wedge\overline{(B\to C)}$

Об'єднуємо висловлення знаком диз'юнкції

$(A\wedge B\wedge \bar{C})\vee(\overline{(A\to B)}\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge\overline{(B\to C)}) =$

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

$(A\wedge B\wedge \bar{C})\vee(\overline{(\bar{A}\vee B)}\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge\overline{(B\to C)}) =$

Закон де Моргана для диз'юнкції (10°)

$(A\wedge B\wedge \bar{C})\vee((\bar{\bar{A}}\wedge \bar{B})\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge\overline{(B\to C)}) =$

Закон подвійного заперечення

$(A\wedge B\wedge \bar{C})\vee((A\wedge \bar{B})\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge\overline{(B\to C)}) =$

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення (21°)

$(A\wedge B\wedge \bar{C})\vee((A\wedge \bar{B})\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge\overline{(\bar{B}\vee C)}) =$

Закон де Моргана для диз'юнкції (

$(A\wedge B\wedge \bar{C})\vee((A\wedge \bar{B})\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge(\bar{\bar{B}}\wedge \bar{C})) =$

Закон подвійного заперечення

$(A\wedge B\wedge \bar{C})\vee((A\wedge \bar{B})\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge(B\wedge \bar{C})) =$

Закон ідемпотентності диз'юнкції (11°)

$((A\wedge B)\wedge \bar{C})\vee((A\wedge B)\wedge \bar{C})\vee((A\wedge \bar{B})\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge(B\wedge \bar{C})) =$

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

$((A\wedge B)\wedge \bar{C})\vee(((A\wedge B)\vee(A\wedge \bar{B}))\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge(B\wedge \bar{C})) =$

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

$((A\wedge B)\wedge \bar{C})\vee((A\wedge(B\vee \bar{B}))\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge(B\wedge \bar{C})) =$

Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення

$((A\wedge B)\wedge \bar{C})\vee((A\wedge(1))\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge(B\wedge \bar{C})) =$

Закон одиниці відносно кон'юнкції

$((A\wedge B)\wedge \bar{C})\vee((A)\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge(B\wedge \bar{C})) =$

Закон комутативності диз'юнкції

$((A\wedge B)\wedge \bar{C})\vee(\bar{A}\wedge(B\wedge \bar{C}))\vee(A\wedge \bar{C}) =$

Закон асоціативності кон'юнкції

$((A\wedge B)\wedge \bar{C})\vee((\bar{A}\wedge B)\wedge \bar{C})\vee(A\wedge \bar{C}) =$

Закон дистрибутивності кон'юнкціївідносно диз'юнкції

$(((A\wedge B)\vee(\bar{A}\wedge B))\wedge \bar{C})\vee(A\wedge \bar{C}) =$

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

$(((A\vee \bar{A})\wedge B)\wedge \bar{C})\vee(A\wedge \bar{C}) =$

Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення (18°)

$(((\underline{(1)\wedge B})\wedge \bar{C})\vee(A\wedge \bar{C}) =$

Закон одиниці відносно кон'юнкціїї(13°)

$((\underline{B})\wedge \bar{C})\vee(A\wedge \bar{C}\underline{)} =$

Закон комутативності диз'юнкції (3°)

$(\underline{A}\wedge \bar{C})\vee(B\wedge \bar{C}\underline{)}$

Вихідна система висловлень $A\wedge B\wedge \bar{C}$, $(\overline{A\to B})\wedge \bar{C}$, $\bar{A}\wedge(\overline{B\to C})$
логічно еквівалентна наступній $(A\wedge \bar{C})$, $(B\wedge \bar{C})$

Таким чином, що найменше одне висловлення даної системи буде істинне тоді і тільки тоді, коли буде істинне одне із висловлень $A\wedge \bar{C}$ *або* $B\wedge \bar{C}$. *Тому дана система трьох висловлювань* $A\wedge B\wedge \bar{C}$, $\overline{(A\to B)}\wedge \bar{C}$ $\bar{A}\wedge(\overline{B\to C})$ *є логічно еквівалентною більш простій системі двох висловлень* $A\wedge \bar{C}$, $B\wedge \bar{C}$.

Задачі для самостійного розв'язування

4.1. Спростіть наступні системи висловлень, якщо відносно них відомо, що всі висловлення, що входять до системи, істинні:

1. $A\to B$, $C\to B$, $(B\wedge C)\to A$
2. $C\to(A\vee B)$, $(B\wedge C)\to A$, $(A\wedge B)\to C$
3. $A\to(B\vee C)$, $B\to(A\vee C)$, $(A\wedge B)\to C$
4. $A\to B$, $A\to(B\vee C)$, $B\to C$
5. $P\to(Q\vee R)$, $W\to(S\vee T)$, $R\to(Q\vee \bar{P})$, $(W\wedge T)\to\bar{S}$
6. $W\to(M\vee S)$, $R\to T$, $\bar{Q}\to T$, $M\to(S\vee W)$, $P\to(T\vee R)$
7. $\bar{A}\to(B\vee C)$, $B\to(\overline{A\wedge C})$, $C\to(A\vee \bar{B})$, $A\to(B\vee C)$, $(A\wedge C)\to B$, $(\bar{A}\wedge \bar{B})\to C$

4.2. Спростіть наступні системи висловлень, якщо відносно них відомо, що з усіх висловлень, що входять до системи, що найменше одне з них істинне:

8. $A\wedge B\wedge \bar{C}$, $(\overline{A\to B})\wedge \bar{C}$, $\bar{A}\wedge(\overline{B\to C})$
9. $(\overline{A\to B})$, $\bar{B}\wedge A$, $\bar{B}\wedge C$, $(\overline{C\to A})$
10. $A\wedge B\wedge C$, $\bar{A}\wedge \bar{B}\wedge \bar{C}$, $A\wedge B\wedge \bar{C}$, $\overline{(A\vee B\vee \bar{C})}$
11. $A\to B$, $A\to C$, $B\to(A\wedge C)$
12. $X\wedge Y\wedge Z$, $X\wedge\overline{(Y\to Z)}$, $(\overline{X\to Y})\wedge Z$, $(\overline{X\vee \bar{Y}})\wedge Z$
13. $X\wedge Y$, $(\overline{X\vee \bar{Y}})$, $\overline{(X\to Y)}$
14. $\bar{X}\wedge Y\wedge Z$, $(\overline{(X\wedge Y)\to \bar{Z}})$, $Y\wedge Z$
15. $P\wedge R$, $(\overline{P\to R})$, $Q\wedge R$, $\bar{P}\wedge Q\wedge R$

Практична робота5.

Логічне слідування.

Мета: Отримати загальні відомості про логічне слідування – центральне поняття логіки. Сформувати вміння та навички перевірки логічного слідування даної формули з формул – посилок. З‘ясувати важливу роль тавтологій як засобу встановлення факту логічного слідування. Сформувати вміння та навички застосування теорії логічного слідування до правильних міркувань.

План

- **Логічне слідування на базі алгебри висловлень.**
- **Методи перевірки логічного слідування даної формули з формул – посилок.**
- **Застосування теорії логічного слідування до правильних міркувань.**

Короткі теоретичні відомості

Говорять, що пропозиційна формула *B слідує логічно* з пропозиційних формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$ якщо для будь-якого набору значень змінних, що входять до $A_1, A_2, \ldots, A_m$ і B, значенням пропозиційної формули B є 1 щоразу, коли значення кожної пропозиційної формули A_i $(1 \le i \le m)$ на цьому наборі є 1. У цьому випадку будемо писати $A_1, A_2, \ldots, A_m \models B$ і читати «з $A_1, A_2, \ldots, A_m$ логічно слідує B».

Якщо скористатися таблицями істинності, то $A_1, A_2, \ldots, A_m \models B$ означає, що сукупність тих наборів, на яких істинна кожна пропозиційна формула (пф) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ знаходиться в сукупності тих наборів, на яких істинна пф B.

Поняття «логічне слідування» пов'язане з поняттям «тавтологія» наступною теоремою.

Теорема. Формула B логічно слідує з посилок $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m \ge 1)$ тоді і тільки тоді, коли формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \to B$ є тавтологією.

Теорема встановлює признак того, що формула являється логічним слідством однієї чи більшої кількості формул. А це зводить питання про відношення логічного слідування, до аналізу певної формули алгебри висловлень – чи є вона тавтологією, чи ні? Тим самим з‘ясовується важлива роль тавтологій як засобу встановлення факту логічного слідування.

Наведене означення досить точно передає те інтуїтивне поняття логічного слідування, що використовується при дедуктивних висновках. Дійсно, висловлення w звичайно вважається логічним наслідком висловлень $w_1, w_2, \ldots, w_m$, якщо знання про істинність кожного $w_1, w_2, \ldots, w_m$ дає істинність w без додаткової інформації. Якщо ж одне з $w_1, w_2, \ldots, w_m$ хибне, то без додаткової інформації не можна стверджувати істинність w. Справді, висловлення $w_1, w_2, \ldots, w_m$ і w можна вважати значеннями пф $A_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $A_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, …, $A_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ і $B(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ для деякого набору $v_1, v_2, \ldots, v_n$ значень змінних $X_1, X_2, \ldots, X_n$. У будь-якому міркуванні в логіці висловлень (яке є набором висловлень) можна перевірити, чи буде істинність логічного наслідку цього міркування визначатися істинністю висловлень, які фігурують у ньому (якщо це підтверджується в даному міркуванні, то говорять, що воно *логічно правильне*).

Хід заняття

Логічне слідування. Методи перевірки логічного слідування даної формули з формул – посилок.

Задача 1. Доведіть, що має місце наступне слідування (виводимість):

$$F \to G,\ K \to \overline{H}, H \vee \overline{G}\ |= F \to \overline{K}$$

Розв'язування.

Складемо для формул $F \to G$, $K \to \overline{H}$, $H \vee \overline{G}$ і $F \to \overline{K}$ таблиці істинності.

F	G	K	H	¬H	¬G	¬K	F→G	K→¬H	H∨¬G	(F→¬K)
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0

Сукупність тих наборів значень змінних, на яких істинна кожна формула-посилка знаходиться в сукупності тих наборів, на яких істинна формула-наслідок

Розглянемо формули $F \to G, K \to \overline{H},, H \vee \overline{G}$ і $F \to \overline{K}$. По таблиці істинності цих формул видно, що маємо точно п'ять рядків, в яких перші три формули приймають значення 1, а саме перший, другий, третій, шостий і чотирнадцятий. В цих рядках четверта формула також приймає значення 1. Отже, за означенням логічного слідування

$$F \to G, K \to \overline{H}, H \vee \overline{G} |= F \to \overline{K}.$$

Звернемо увагу на те, що за означенням <u>досить розглядати</u> тільки ті рядки таблиці істинності, на яких <u>всі посилки одночасно</u> приймають значення <u>1.</u>

Задача 2. Методом від супротивного з'ясуйте, чи вірна наступна виводимість: $F \to G, K \to \overline{H}, H \vee \overline{G} |= F \to \overline{K}$

Розв'язування.

Припустимо, що дана виводимість невірна. Тоді знайдуться такі конкретні висловлення, які перетворюють всі формули-посилки у істинні висловлення, а формулу-наслідок $F \to \overline{K}$ у хибне. Логічне значення формули $F \to \overline{K}$ буде 0 ($(F \to \overline{K})=0$), тоді, коли $F=1$, а формула $\overline{K}$ примає 0 ($\overline{K}= 0$). Значить $K=1$. З $(F \to G)= 1$ і $(F)= 1$ слідує, що $(G)= 1$. Далі, з $(H \vee \overline{G})= 1$ і $(G)= 1$ робимо висновок, що $(\overline{H},)= 0$. І нарешті, з $(K \to \overline{H})= 1$ і $(\overline{H},)= 0$ отримуємо, що $(K)= 0$. Прийшли до протиріччя. Тому, формула $F \to \overline{K}$ не може перетворюватися у хибне висловлення, якщо всі формули $F \to G$, $F \to \overline{K}$ і $H \vee \overline{G}$ перетворилися у істинні висловлення. Це означає, що розглянута виводимість вірна.

Задача 3. З'ясуйте, чи має місце наступне слідування:
$(F\vee G)\to(H\wedge K),\ (K\vee L)\to M \models F\to M$

Розв'язування.
$(F\vee G)\to(H\wedge K),(K\vee L)\to M|=F\to M$
По признаку логічного слідування, дана виводимість буде вірною, якщо наступна формула є тавтологія:

$(F\vee G\to H\wedge K)\wedge(K\vee L\to M)\to(F\to M)$

Для того, щоб визначити чи являється формула тавтологією можна скористатися методом істинностних таблиць або рівносильними перетвореннями. Так як формула залежить від шести пропозиційних змінних, то таблиця істинності такої формули буде мати $2^6=64$ рядків. Тому ми скористаємося рівносильними перетвореннями:
$(F\vee G\to H\wedge K)\wedge(K\vee L\to M)\to(F\to M)$ =
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення
$(F\vee G\to H\wedge K)\wedge(\ (\overline{K\vee L})\vee M)\to(F\to M)$ =
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення
$(F\vee G\to H\wedge K)\wedge(\ (\overline{K\vee L}\vee M)\to \overline{F}\vee M$ =
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення
$((\overline{F\vee G\to H\wedge K)}\wedge(\ (\overline{K\vee L}\vee M))\vee\overline{F}\vee M$ =*Закон де Моргана для кон'юнкції*
$((\overline{F\vee G\to H\wedge K)}\wedge(\ ((\overline{\overline{\overline{K\vee L}}})\vee M)\vee\overline{F}\vee M$ =*Закон де Моргана для диз'юнкції*
$((\overline{F\vee G\to H\wedge K)}\wedge(\ (K\vee L)\wedge\overline{M}\vee\overline{F}\vee M$ =*Закон подвійного заперечення*
$((\overline{F\vee G\to H\wedge K)}\wedge(\ (K\vee L)\wedge\overline{M}\vee\overline{F}\vee M$ =*Закон комутативності диз'юнкції*
$((\overline{F\vee G\to H\wedge K)}\wedge(\ (K\vee L)\wedge\overline{M}\vee M\vee\overline{F}$=
Закон дистрибутивності диз'юнкціїі відносно кон'юнкції
$((\overline{F\vee G\to H\wedge K)}\wedge(\ (K\vee L\vee M)\wedge(\ \overline{M}\vee M)\vee\overline{F}$ =
Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення
$((\overline{F\vee G\to H\wedge K)}\wedge(\ (K\vee L\vee M)\wedge(1)\vee\overline{F}$= *Закон одиниці відносно кон'юнкції*
$((\overline{F\vee G\to H\wedge K)}\wedge(K\vee L\vee M\vee\overline{F})$=
Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення
$\overline{\overline{F\vee G}\vee H\wedge K)}\vee K\vee L\vee M\vee\overline{F}$ =*Закон де Моргана для диз'юнкції*
$(\overline{\overline{\overline{F\vee G}}})\wedge(\overline{H\wedge K})\vee K\vee L\vee M\vee\overline{F}$ =*Закон подвійного заперечення*
$(F\vee G)\wedge(\overline{H\wedge K})\vee K\vee L\vee\overline{F}\ \vee M$ =*Закон де Моргана для кон'юнкції*
$(F\vee G)\wedge(\ \overline{H}\vee\overline{K})\vee K\vee L\vee\overline{F}\ \vee M$ =
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(F\vee G\vee K)\wedge(\ \overline{H}\ \vee\overline{K}\ \vee K)\vee L\vee\overline{F}\ \vee M$ =
Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення
$(F\vee G\vee K)\wedge(\ \overline{H}\ \vee 1)\vee L\vee\overline{F}\ \vee M$ =*Закон одиниці відносно диз'юнкції*
$(F\vee G\vee K)\wedge(1)\vee L\vee\overline{F}\vee M$ = *Закон одиниці відносно кон'юнкції*
$F\vee\overline{F}\vee G\vee K\vee L\vee M$ = *Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення*
$1\vee(G\vee K\vee L\vee M)=1$
Закон одиниці відносно диз'юнкції

Це означає, що формула $F\to M$ логічно слідує з формул $(F\vee G)\to(H\wedge K)$, $(K\vee L)\to M$.

Застосування теорії логічного слідування до правильних міркувань

Задачі для самостійного розв'язування

5.1. Доведіть, що мають місце наступні слідування (виводимості):

1) $(P\to Q)\wedge(Q\to R)|=P\to R$
2) $P\to Q|=(Q\to R)\to(P\to R)$
3) $(P\to Q)\to R|=(P\to Q)\to(P\to R)$
4) $P\to(Q\to R)|=Q\to(P\to R)$
5) $P\to Q\ |=(P\wedge R)\to(Q\wedge R)$
6) $(P\to Q)\to R|=(P\to Q)\to(P\to R)$
7) $P\to(Q\to R)|=Q\to(P\to R)$
8) $P\to(Q\to R)\ |=(P\wedge Q)\to R$
9) $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)|=P\leftrightarrow R$
10) $(P\wedge Q)\to R\ |=P\to(Q\to R)$

11) На підприємстві є три відділи: *A*, *B* і *C*, що домовилися про наступне затвердження проектів: а) якщо відділ *A* не бере участь у затвердженні проекту, то в цьому затвердженні не бере участь і відділ *B*; б) якщо відділ *A* бере участь у затвердженні проекту, то в ньому беруть участь відділи *B* і *C*. З'ясувати, чи зобов'язаний при цих умовах відділ *C* брати участь у затвердженні проекту, коли в ньому бере участь відділ *B*?

12) Скульптор Бєлов, скрипаль Чернов і художник Рижов - друзі. «Чудово, що один з нас має біле, один чорне, і один руде волосся, але в жодного з нас немає волосся тих кольорів, на який указує його прізвище», - помітив чорноволосий. «Ти правий», - сказав Бєлов. Який колір волосся у художника?

13) З'ясувати, чи є логічно правильними наступні міркування:

а) Якщо 3 і 5-прості числа, то вони прості числа-близнюки. Числа 7 і 11 прості. Отже, 7 і 11 - прості числа-близнюки.

б) Або Петро і Іван брати, або вони однокурсники. Якщо Петро і Іван брати, то Сергій і Іван не брати. Якщо Петро і Іван однокурсники, то Іван і Михайло також однокурсники. Отже, або Сергій і Іван не брати, або Іван і Михайло однокурсники.

14) З'ясувати, чи є логічно правильними наступні міркування:

а) Якщо 8 - складене число, то 16 - складене число. Якщо 16 - складене число, то існують прості числа. Якщо існують прості числа, то число 16 - складене. Прості числа існують. Отже, число 8 - складене.

б) Якщо Петро не зустрічав Івана, то або Іван не був на лекціях, або Петро бреше. Якщо Іван був на лекціях, то Петро зустрічав Івана, і Сергій був у читальному залі після лекцій. Якщо Сергій був у читальному залі після лекцій, то або Іван не був на лекціях, або Петро бреше. Отже, Іван не був на лекціях.

15) З'ясувати, чи є логічно правильними наступні міркування:

а) Я піду або в кіно на нову кінокомедію, або на заняття по математичній логіці. Якщо я піду в кіно на нову кінокомедію, то я від всієї душі посміюся. Якщо я піду на заняття по математичній логіці, то зазнаю більшої насолоди під час логічних міркувань. Отже, або я від всієї душі посміюся, або зазнаю більшої насолоди під час логічних міркувань.

б) Якщо Антон ляже сьогодні пізно, то ранком він буде в неробочому стані. Якщо він ляже не пізно, то йому буде здаватися, що він багато часу губить даремно. Отже, або Антон завтра буде в неробочому стані, або йому буде здаватися, що він багато часу губить дарма.

Практична робота6.

Знаходження наслідків з посилок .

Мета: Сформувати вміння та навички знаходження всіх нерівносильних формул-наслідків з формул-посилок.

План

♦ **Методи знаходження всіх формул, що є логічними наслідками даної сукупності формул-посилок.**

Короткі теоретичні відомості

При розв'язуванні задач на знаходження всіх нерівносильних формул-наслідків з формул-посилок спираються на наступну теорему.

Теорема. Пропозиційна формула $B(X_1, X_2, ...,X_n)$*, що не є тавтологією, тоді і тільки тоді буде логічним наслідком пропозиційних формул* $A_1, A_2, ..., A_m$ *, не всі з яких є тавтологіями і також залежні від змінних* $X_1, X_2, ...,X_n$ *, коли всі досконалі диз'юнктивні одночлени з розкладання формули B в ДКНФ входять до ДКНФ формули* $A_1\wedge A_2 \wedge...\wedge A_m$.

Ця теорема визначає *правило для відшукання всіх (нерівносильних) формул, які є логічними наслідками формул-посилок* $A_1, A_2, ..., A_m$:

1) скласти кон'юнкцію посилок $A_1\wedge A_2 \wedge...\wedge A_m$;
2) знайти ДКН-форму формули $A_1\wedge A_2 \wedge...\wedge A_m$;
3) виписати всі досконалі диз'юнктивні одночлени ДКНФ, а також усілякі можливі кон'юнкції цих одночленів по 2, по 3 і т. д., надавши їм більш зручну рівносильну форму.

Хід заняття

Задача 1. Знайти всі нерівносильні між собою і не тотожно істинні формули алгебри висловлень, які є логічними наслідками наступних формул (посилок):

$$X\to(Y\vee Z),\ Z\to Y$$

Розв'язування.

Об'єднуємо висловлення знаком кон'юнкції:

$(X\to(Y\vee Z))\wedge(Z\to Y)$

Виписуємо ДКНФ форму даної формули. Побудувати ДКНФ для формули алгебри висловлень, якщо вона не є тавтологією, можна двома способами. Або за допомогою рівносильних перетворень, або за допомогою її таблиці істинності. Виберемо рівносильні перетворення:

$(X\to(Y\vee Z))\wedge(Z\to Y)$ = *Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(\bar{X}\vee Y\vee Z)\wedge(Z\to Y)$ = *Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(\bar{X}\vee Y\vee Z)\wedge(\bar{Z}\vee Y)$ = *Закон нуля відносно диз'юнкції (*

$(\bar{X}\vee Y\vee Z)\wedge(Y\vee\bar{Z}\vee 0)$ = *Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*

$(\bar{X}\vee Y\vee Z)\wedge(Y\vee\bar{Z}\vee X\wedge\bar{X})$ =

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

$(\bar{X}\vee Y\vee Z)\wedge(Y\vee(\bar{Z}\vee X)\wedge(\bar{Z}\vee\bar{X}))$ =

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

$(\bar{X}\vee Y\vee Z)\wedge(X\vee Y\vee\bar{Z})\wedge(\bar{X}\vee Y\vee\bar{Z})$ *ДКНФ для формули* $(X\to(Y\vee Z))\wedge(Z\to Y)$

<u>Логічними наслідками</u> з даних посилок $(X \vee Y \vee \bar{Z}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z})$ *будуть всі досконалі диз'юнктивні одночлени, які входять до отриманої ДКНФ, а також усілякі можливі кон'юнкції цих одночленів по 2, по 3 і т. д. Виписуємо формули, які при цьому утворюються, надавши їм більш зручну рівносильну форму:*

1. $(\bar{X} \vee Y \vee Z) \equiv (X \to Y) \vee Z$ *Спрощення формули:*

$(\bar{X} \vee Y \vee Z)$ = *Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення* $(X \to Y) \vee Z$

2. $(X \vee Y \vee \bar{Z}) \equiv X \vee (Z \to Y)$ *Спрощення формули:*

$(X \vee Y \vee \bar{Z})$ = *Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення* $X \vee (Z \to Y)$

3. $(\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z}) \equiv Z \to (X \to Y)$ *Спрощення формули:*

$(\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z})$ = *Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(X \to Y) \vee \bar{Z}$ = *Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення* $Z \to (X \to Y)$

4. $(X \vee Y \vee \bar{Z}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee Z) \equiv (Z \leftrightarrow X) \vee Y$ *Спрощення формули:*

$(X \vee \bar{Z} \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee Z \vee Y)$ = *Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції*

$(X \vee \bar{Z}) \wedge (\bar{X} \vee Z) \vee Y$ = *Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(Z \to X) \wedge (\bar{X} \vee Z) \vee Y$ = *Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(Z \to X) \wedge (X \to Z) \vee Y$ = *Вираження еквіваленції через імплікацію та кон'юнкцію*

$(Z \leftrightarrow X) \vee Y$

5. $(X \vee Y \vee \bar{Z}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z}) \equiv Z \to Y$ *Спрощення формули:*

$(X \vee Y \vee \bar{Z}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z})$ = *Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції*

$(X \wedge \bar{X}) \vee Y \vee \bar{Z}$ = *Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*

$(0) \vee Y \vee \bar{Z}$ = *Закон нуля відносно диз'юнкції*

$Y \vee \bar{Z}$ = *Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення* $Z \to Y$

6. $(\bar{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z}) \equiv X \to Y$ *Спрощення формули:*

$(\bar{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z}) = \bar{X} \vee Y \vee Z \wedge \bar{Z} = \bar{X} \vee Y \vee 0 = \bar{X} \vee Y = X \to Y$

7. $(X \vee Y \vee \underline{\bar{Z}}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee \underline{\bar{Z}}) \equiv Z \vee X \to Y$ *Спрощення формули:*

$(X \vee Y \vee \underline{\bar{Z}}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee \underline{\bar{Z}}) = (X \vee Y \vee \underline{\bar{Z}}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee Z \wedge \underline{\bar{Z}}) =$

$= (X \vee Y \vee \underline{\bar{Z}}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee 0) = (X \vee \underline{\bar{Z}} \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee Y) = (X \vee \underline{\bar{Z}}) \wedge \bar{X} \vee Y =$

$= (\underline{X \wedge} \bar{X}) \vee \underline{\bar{Z}} \wedge \bar{X} \vee Y = \underline{(0) \vee \bar{Z} \wedge} \bar{X} \vee Y = \underline{\bar{Z} \wedge} \bar{X} \vee Y = \underline{(\overline{Z \vee X}) \vee Y} = Z \vee X \to Y$

Логічними наслідками для даних посилок будуть наступні формули:

1. $(X \to Y) \vee Z$

2. $X \vee Z \to Y)$

3. $Z \to (X \to Y)$

4. $(Z \leftrightarrow X) \vee Y$

5. $Z \to Y$

6. $X \to Y$

7. $Z \vee X \to Y$

Задачі для самостійного розв'язування

6.1. Знайти всі нерівносильні між собою і не тотожно істинні формули алгебри висловлень, які є логічними наслідками наступних формул (посилок):

1. $X \to (Y \vee Z)$ і $Z \to Y$
2. $X \to Y$ і X
3. $X \to Y$ і $\bar{Y}$
4. $X \leftrightarrow Y$ і $\bar{X}$
5. $X \vee Y$, X і $\bar{Y}$
6. $X \to Y$ і $Y \to Z$
7. $X \leftrightarrow Y$ і $Y \leftrightarrow Z$
8. $(X \wedge Y) \to Z$ і $X \vee Y$
9. $(X \wedge Y) \to Z$ і $Y \to X$
10. $X \to Y$, $Y \vee Z$ і $(X \wedge Y) \leftrightarrow Z$
11. $(X \wedge Y) \to Z$, Y і Z
12. $X \to Y$ і X
13. $X \to Y$ і $\bar{Y}$
14. $X \leftrightarrow Y$ і $\bar{X}$
15. $X \vee Y$, X і $\bar{Y}$

Знаходження посилок для даних наслідків.

Мета: Сформувати вміння та навички знаходження формул-посилок для даних наслідків.

План

- **Методи знаходження формул-посилок для даних наслідків.**

Короткі теоретичні відомості

Для визначення логічним наслідком яких посилок є пропозиційна формула $B(X_1, X_2, ...,X_n)$ необхідно:

1) формулу $B(X_1, X_2, ...,X_n)$ привести до ДКН-форми;
2) виписати всі досконалі диз'юнктивні одночлени, які не входять до її ДКНФ;
3) скласти кон'юнкцію формули $B(X_1, X_2, ...,X_n)$ з досконалими диз'юнктивними одночленами, які не входять до її ДКНФ, взятими по 1, по 2 і т. д., надавши їм більш зручну рівносильну форму.

Будь-яка формула, для якої формула $B(X_1, X_2, ...,X_n)$ є логічним наслідком, рівносильна до однієї з формул, отриманих у п. 3 або тотожно хибна. Оскільки з тотожно хибної формули логічно слідує будь-яка пропозиційна формула, то не будемо згадувати тотожно хибну формулу в числі можливих посилок для $B(X_1, X_2, ...,X_n)$ (за виключенням випадку, коли тотожно хибна формула є єдиною посилкою для $B(X_1, X_2, ...,X_n)$).

Хід заняття

Задача 1. Знайти всі нерівносильні між собою і не тотожно хибні формули алгебри висловлень, для яких наступна формула є логічним наслідком (за виключенням власне даної формули):

$X\leftrightarrow Y$

Розв'язування.

Знайдемо досконалу кон'юнктивну нормальну форму (ДКНФ) для даної формули. Побудувати ДКНФ для формули алгебри висловлень, якщо вона не є тавтологією, можна двома способами. Або за допомогою рівносильних перетворень, або за допомогою її таблиці істинності. Виберемо рівносильні перетворення:

$X\leftrightarrow Y =(X\to Y)\wedge(Y\to X) =(\bar{X}\vee Y)\wedge(Y\to X) =(\bar{X}\vee Y)\wedge(\bar{Y}\vee X)$

Вираження еквіваленції через імплікацію та кон'юнкцію

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення

ДКНФ для формули алгебри висловлень $X \leftrightarrow Y= (\bar{X}\vee Y)\wedge(\bar{Y}\vee X)$.

Досконалими диз'юнктивними одночленами, які не входять до ДКНФ являються $(X\vee Y)$ *і* $(\bar{X}\vee\bar{Y})$. *Тоді шуканими посилками для даної формули являються формули* $X\leftrightarrow Y \wedge(X\vee Y)$, $X\leftrightarrow Y \wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})$ *і* $X\leftrightarrow Y \wedge(X\vee Y)\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})$.

За допомогою рівносильних перетворень перейдемо до більш простих формул:

1. $X\leftrightarrow Y \wedge (X\vee Y) \equiv Y\wedge X$

Спрощення формули:

$((\bar{X}\vee Y)\wedge(\bar{Y}\vee X))\wedge(X\vee Y) =$ *Закон комутативності диз'юнкції*

$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee\bar{Y})\wedge(X\vee Y) =$ *Закон дистрибутивності диз'юнкціївідносно кон'юнкції*

$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee\bar{Y}\wedge Y)$ =*Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee 0)$ = *Закон нуля відносно диз'юнкції*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X)$ =*Закон дистрибутивності кон'юнкціі відносно диз'юнкції*
$\bar{X}\wedge X\vee Y\wedge X$ = *Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*
$0\vee Y\wedge X$ = *Закон нуля відносно диз'юнкції* $=Y\wedge X$

2. $X\leftrightarrow Y \wedge (\bar{X}\vee\bar{Y})\equiv\bar{X}\wedge\bar{Y}$

Спрощення формули:
$((\bar{X}\vee Y)\wedge(\bar{Y}\vee X))\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})$ = *Закон комутативності диз'юнкції*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee\bar{Y})\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})$ = *Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\wedge\bar{X}\vee\bar{Y})$ = *Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(0\vee\bar{Y})$ = *Закон нуля відносно диз'юнкції*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(\bar{Y})$ = *Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції*
$\bar{X}\wedge\bar{Y}\vee Y\wedge\bar{Y}$= *Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*
$\bar{X}\wedge\bar{Y}\vee 0$ = *Закон нуля відносно диз'юнкції* $=\bar{X}\wedge\bar{Y}$

3. $X\leftrightarrow Y \wedge (X\vee Y)\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y}) \equiv 0$

Спрощення формули:
$((\bar{X}\vee Y)\wedge(\bar{Y}\vee X))\wedge(X\vee Y)\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})$ = *Закон комутативності диз'юнкції*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee\bar{Y})\wedge(X\vee Y)\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})$ =
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee\bar{Y}\wedge Y)\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})$ = *Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X\vee 0)\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})$ =*Закон нуля відносно диз'юнкції*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(X)\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})$ =*Закон комутативності кон'юнкції*
$(\bar{X}\vee Y)\wedge(\bar{X}\vee\bar{Y})\wedge X$ = *Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції*
$(\bar{X}\vee\underline{Y\wedge\bar{Y}})\wedge X$ = *Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*
$(\bar{X}\underline{\vee 0})\wedge X$ = *Закон нуля відносно диз'юнкції*
$=\underline{(\bar{X})\wedge X}$ =0 *Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*
(остання посилка являє собою тотожно хибну формулу, з якої логічно слідує довільна формула алгебри висловлень, в тому числі і $X\leftrightarrow Y$*).*

Довільна формула, для якої формула $X\leftrightarrow Y$ *являється логічним наслідком, рівносильна або формулі* $Y\wedge X$*, або формулі* $\bar{X}\wedge\bar{Y}$ *за виключенням тотожно хибних.*

Задачі для самостійного розв’язування

6.2. Знайти всі нерівносильні між собою і не тотожно хибні формули алгебри висловлень, для яких наступна формула є логічним наслідком (за виключенням власне даної формули):

1) $X\leftrightarrow Y$
2) $X\to Y$
3) $X\vee\bar{Y}$
4) $(\overline{X\vee Y})$
5) $(X\vee Y)\to(X\wedge Y)$
6) $(X\to Y)\to(Y\wedge Z)$
7) $(X\vee Y)\leftrightarrow(\bar{X}\to Z)$
8) $((X\vee Y\vee Z)\to X)\to Z$
9) $((X\to Y)\to Z)\to\bar{X}$
10) $(P\wedge(Q\to P))\to\bar{P})$
11) $((P\vee\bar{Q})\to Q)\wedge(\bar{P}\vee Q)$
12) $X\leftrightarrow Y$
13) $X\to Y$
14) $X\vee\bar{Y}$
15) $(\overline{X\vee Y})$

Практична робота7.

Відшукання нормальних форм.

Мета: Отримати загальні відомості про нормальні форми формул алгебри висловлень. Вивчити методи відшукання нормальних форм. Сформувати навички і вміння застосування алгоритмів відшукання нормальних форм для формул алгебри висловлень.

План

♦ **Кон'юнктивні (диз'юнктивні) одночлени.**

♦ **Кон'юнктивні (диз'юнктивні) нормальні форми формул алгебри висловлень.**

♦ **Методи відшукання кон'юнктивних (диз'юнктивних) нормальних форм.**

Короткі теоретичні відомості

Нехай v є 0 або 1. Введемо позначення:

$$X_1^{\upsilon} = \begin{cases} X_1, \text{ якщо } \upsilon = 1; \\ \neg X_1, \text{ якщо } \upsilon = 0. \end{cases}$$

Пропозиційна формула (пф) X_1^{υ} має значення 1 тоді і тільки тоді, коли $X_1 = \upsilon$. Звідси виходить, що пф $X_1^{\upsilon_1} \wedge X_2^{\upsilon_2} \wedge ... \wedge X_2^{\upsilon_2}$ на наборі ($\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$) має значення 1, а на кожному іншому наборі значень своїх змінних $X_1, X_2, ..., X_n$, відмінному від зазначеного, =0.

Аналогічно, $X_1^{\upsilon_1} \wedge X_2^{\upsilon_2} \wedge ... \wedge X_2^{\upsilon_2}$ набуває значення 0, тільки на наборі ($\overline{\upsilon_1}, \overline{\upsilon_2}, ..., \overline{\upsilon_n}$).

Нехай кожне з $v_1, v_2, ..., v_k$ є 0 або 1.

Пропозиційна формула від змінних $X_1, X_2, ..., X_k$ виду $X^{v_1}{}_{i_1} \wedge X^{v_2}{}_{i_2} \wedge ... \wedge X^{v_k}{}_{i_k}, (i_k \geq 1)$ називається *кон'юнктивним одночленом*.

Пропозиційна формула від змінних $X_1, X_2, ..., X_k$ виду $X^{v_1}{}_{i_1} \vee X^{v_2}{}_{i_2} \vee ... \vee X^{v_k}{}_{i_k}, (i_k \geq 1)$ називається *диз'юнктивним одночленом*.

Пропозиційна формула, що рівносильна даній і має вигляд $B_{i_1} \vee B_{i_2} \vee ... \vee B_{i_k} (B_{i_1} \wedge B_{i_2} \wedge ... \wedge B_{i_k}), (i_k \geq 1)$, де $B_{i_m} (1 \leq m \leq k)$ - диз'юнктивний (кон'юнктивний) одночлен, називається *диз'юнктивною* (*кон'юнктивною*) *нормальною формою* (скорочено ДНФ (КНФ)) даної пф.

Диз'юнктивні (кон'юнктивні) одночлени від $X_1, X_2, ..., X_n$ змінних, що задовольняють таким умовам:

1) кожний диз'юнктивний (кон'юнктивний) одночлен має рівно n членів;

2) у кожному диз'юнктивному (кон'юнктивному) одночлені зустрічаються усі n змінних $X_1, X_2, ..., X_n$ і кожна з цих змінних входить до нього рівно один раз зі знаком заперечення чи без знаку заперечення, називається *досконалими диз'юнктивними* (*кон'юнктивними*) *одночленами*.

ДНФ (КНФ) пропозиційної формули $A(X_1, X_2, ..., X_n)$, де кожен диз'юнктивний (кон'юнктивний) одночлен є досконалим і всі дані одночлени попарно різні називається *досконалою диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою* (скорочено ДДНФ (ДКНФ)).

Правило відшукання ДДНФ.

Дану пропозиційну формулу спрощують рівносильними перетвореннями застосовуючи їх необхідне число разів, можна перетворити на їй рівносильну, що не має символів $\leftrightarrow$ і $\rightarrow$, якщо вони в ній були. Потім, застосовуючи визначене число разів рівносильності постійних, отримуємо ДНФ даної пф.

Більше того, якщо вихідна пропозиційна формула не є протиріччям, то можна отримати її ДНФ, що має різні кон'юнктивні одночлени, у кожному з яких немає входжень одних і тих самих змінних, які повторюються. Така ДНФ не буде ДДНФ тільки в тому випадку, якщо який-небудь кон'юнктивний одночлен її не має усіх змінних, що входять до вихідної пф. Але якщо, наприклад, кон'юнктивний одночлен $X_1^{v_1} \wedge X_2^{v_2} \wedge \ldots \wedge X_{n-1}^{v_{n-1}}$ не має змінної X_n, тоді наступні рівносильні перетворення

$$X_1^{v_1} \wedge X_2^{v_2} \wedge \ldots \wedge X_{n-1}^{v_{n-1}} \equiv X_1^{v_1} \wedge X_2^{v_2} \wedge \ldots \wedge X_{n-1}^{v_{n-1}} \wedge 1 \equiv X_1^{v_1} \wedge X_2^{v_2} \wedge \ldots \wedge X_{n-1}^{v_{n-1}} \wedge (X_n \vee \overline{X_n}) \equiv$$
$$\equiv (X_1^{v_1} \wedge X_2^{v_2} \wedge \ldots \wedge X_{n-1}^{v_{n-1}} \wedge X_n) \vee (X_1^{v_1} \wedge X_2^{v_2} \wedge \ldots \wedge X_{n-1}^{v_{n-1}} \wedge \overline{X}_n)$$

дають два кон'юнктивних одночлена, кожен з яких містить «невистачаючу» змінну X_n. З цього слідує, що виконуючи таке перетворення визначене число разів, з такої ДНФ можна отримати ДДНФ.

П р и к л а д . Знайдемо ДНФ пф $P \wedge (Q \rightarrow R)$ і $\left(\overline{S \wedge R}\right) \leftrightarrow Q$.

Маємо: $P \wedge (Q \rightarrow R) \equiv P \wedge (\overline{Q} \vee R) \equiv P \wedge \overline{Q} \vee P \wedge R,$

$$(\overline{S \wedge R}) \leftrightarrow Q \equiv (\overline{S \wedge R}) \wedge Q \vee (\overline{\overline{S \wedge R}}) \wedge \overline{Q} \equiv (\overline{S} \vee \overline{R}) \wedge Q \vee S \wedge R \wedge \overline{Q} \equiv \overline{S} \wedge Q \vee \overline{R} \wedge Q \vee S \wedge R \wedge \overline{Q}.$$

Перетворюємо ДНФ пф $P \wedge (Q \rightarrow R)$ на ДДНФ:

$$P \wedge \overline{Q} \vee P \wedge R \equiv P \wedge \overline{Q} \wedge (R \vee \overline{R}) \vee P \wedge R \wedge (Q \vee \overline{Q}) \equiv P \wedge \overline{Q} \wedge R \vee P \wedge \overline{Q} \wedge \overline{R} \vee P \wedge Q \wedge R.$$

Правило відшукання ДКНФ.

Дану пропозиційну формулу спрощують рівносильними перетвореннями застосовуючи їх необхідне число разів, можна перетворити на їй рівносильну, що не має символів $\leftrightarrow$ і $\rightarrow$, якщо вони в ній були. Потім, застосовуючи визначене число разів рівносильності постійних, отримуємо КНФ даної пф.

Більше того, якщо вихідна пф не є тавтологією, то можна отримати її КНФ, що має різні диз'юнктивні одночлени, у кожному з яких немає входжень одних і тих самих змінних, які повторюються. Така КНФ не буде ДКНФ тільки в тому випадку, якщо який-небудь диз'юнктивний одночлен її не має усіх змінних, що входять до вихідної пф. Але якщо, наприклад, диз'юнктивний одночлен $X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee \ldots \vee X_{n-1}^{v_{n-1}}$ не має змінної X_n, тоді рівносильні перетворення

$$X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee \ldots \vee X_{n-1}^{v_{n-1}} \equiv X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee \ldots \vee X_{n-1}^{v_{n-1}} \vee 0 \equiv X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee \ldots \vee X_{n-1}^{v_{n-1}} \vee (X_n \wedge \overline{X_n}) \equiv$$
$$\equiv (X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee \ldots \vee X_{n-1}^{v_{n-1}} \vee X_n) \wedge (X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee \ldots \vee X_{n-1}^{v_{n-1}} \vee \overline{X_n})$$

дають два диз'юнктивних одночлена, кожен з яких містить «невистачаючу» змінну X_n. З цього слідує, що виконуючи таке перетворення визначене число разів, з такої КНФ можна отримати ДКНФ.

П р и к л а д и . Знайдемо КНФ пф $P \wedge (Q \rightarrow \overline{R})$, маємо: $P \wedge (Q \rightarrow \overline{R}) \equiv P \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}),$

та КНФ для $\overline{P} \leftrightarrow Q \wedge \overline{R} \equiv (\overline{\overline{P}} \vee Q \wedge \overline{R}) \wedge ((\overline{Q \wedge \overline{R}}) \vee \overline{P}) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee \overline{R}) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R).$

Перетворимо КНФ пф $P \wedge (Q \to \overline{R})$ на ДКНФ:

$$P \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}) \equiv (P \vee Q \wedge \overline{Q}) \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R} \vee P \wedge \overline{P}) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q}) \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R} \vee P) \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R} \vee \overline{P}) \equiv$$

$$\equiv (P \vee Q \vee R \wedge \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee R \wedge \overline{R}) \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R} \vee P) \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R} \vee \overline{P}) \equiv$$

$$\equiv (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee R) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R}) \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R} \vee P) \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R} \vee \overline{P}).$$

Правило написання ДДНФ (ДКНФ) для формули, заданої своїми значеннями:

1) необхідно вибрати всі ті набори значень її змінних, на яких формула приймає значення 1 (значення 0);
2) для кожного такого набору виписати досконалі кон'юнктивні (диз'юнктивні) одночлени, що приймають значення 1 (значення 0) лише на цьому наборі;
3) отримані досконалі кон'юнктивні (диз'юнктивні) одночлени з'єднати знаком диз'юнкції (кон'юнкції).

Методичні вказівки

1) Для знахождения **ДДНФ** з таблиці істинності виділити лише ті рядки, результат яких дорівнює 1. Для данной функції

F= (X v $\bar{Y}$) v Z → ($\bar{Z}$ ∧ Y)

X	Y	Z	$\bar{Y}$	Xv$\bar{Y}$vZ	$\bar{Z}$	$\bar{Z}$^Y	F	F=1
0	0	0	1	1	1	0	0	
0	0	1	1	1	0	0	0	
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1(010)**
0	1	1	0	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	1	0	0	
1	0	1	1	1	0	0	0	
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1(110)**
1	1	1	0	1	0	0	0	

набір рядків буде наступним: F(0,1,0) = F(1,1,0)=1

Для кожного рядка виписуємо конюнкцію всіх змінних за правилом:

$\boxed{\begin{array}{c} X \equiv 1, X; \\ X \equiv 0, \overline{X} \end{array}}$ $(\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}), (X \wedge Y \wedge \overline{Z}),$

Потім всі конюнкції з'єднуємо диз'юнкцією $(\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z}),$ це **ДДНФ.**

2) Для знахождения **ДКНФ** з таблиці істинності виділити лише ті рядки, на яких F дорівнює 0. Для данной функції набір рядків буде наступним:

X	Y	Z	$\bar{Y}$	Xv$\bar{Y}$vZ	$\bar{Z}$	$\bar{Z}$^Y	F=0
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0

Набір рядків: F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=F(1,1,1)=0

Для кожного рядка виписуємо дизюнкцію всіх змінних за правилом:

$\boxed{\begin{matrix} X \equiv 1, \overline{X}; \\ X \equiv 0, X \end{matrix}}$ $(X \vee Y \vee Z)$, $(X \vee Y \vee \overline{Z})$, $(X \vee \overline{Y}\, \overline{\vee \overline{Z}})$, $(\overline{X} \vee Y \vee Z)$, $(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})$, $(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$,

Потім всі диз’юнкції зєднуємо кон’юнкцією, отримаємо **ДКНФ.**

$(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$,

Хід заняття

Задача 1. Привести приклади рівносильних елементарних кон’юнкцій (диз'юнкцій), але не рівних.

Задача 2. Рівносильними перетвореннями приведіть формулу до диз‘юнктивної нормальної форми: $\boldsymbol{(\overline{X \vee Z}) \wedge (X \to Y)}$

Розв’язування.

$(\overline{X \vee Z}) \wedge (X \to Y)$ *=Закон де Моргана для диз'юнкції*

$(\overline{X} \wedge \overline{Z}) \wedge (X \to Y)$ *=Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(\overline{X} \wedge \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y)$ *=Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції*

$((\overline{X} \wedge Z) \wedge \overline{X}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Z} \wedge Y)$ *=Закон комутативності кон'юнкції*

$(\overline{X} \wedge (\overline{X} \wedge \overline{Z})) \vee ((\overline{X} \wedge \overline{Z}) \wedge Y)$ *=Закон асоціативності кон'юнкції*

$((\overline{X} \wedge \overline{X}) \wedge \overline{Z}) \vee ((\overline{X} \wedge \overline{Z}) \wedge Y)$ *=Закон ідемпотентності кон'юнкції*

$(\overline{X} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Z} \wedge Y)$

Дана формула має наступну ДН-форму:$(\overline{X} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z})$

Задача 3. Рівносильними перетвореннями приведіть формулу до кон‘юнктивної нормальної форми***:*** $\boldsymbol{(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Z \to T})}$

Розв’язування.

$(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Z \to T})$ *=Вираження еквіваленції через імплікацію та кон'юнкцію*

$(X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge (\overline{Z \to T})$ *=Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(\overline{X} \vee Y) \wedge (Y \to X) \wedge (\overline{Z \to T})$*=Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee X) \wedge (\overline{Z \to T})$ *=Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee X) \wedge (\overline{\overline{Z} \vee T})$ *=Закон де Моргана для диз'юнкції*

$(\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee X) \wedge \overline{\overline{Z}} \wedge \overline{T}$ *=Закон подвійного заперечення*

$(\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee X) \wedge Z \wedge \overline{T}$

Дана формула має наступну КН-форму:$(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \wedge Z \wedge \overline{T}$

Задача 4. Рівносильними перетвореннями приведіть формулу до досконалої диз‘юнктивної нормальної форми: $\boldsymbol{X \vee (Y \wedge Z)}$

Розв’язування.

Кон’юнктивний одночлен $Y \wedge Z$ *<u>не є досконалим</u> від трьох змінних X,Y і Z, так як до нього не входить змінна X. Введення змінної X виконується так:*

$X \vee (Y \wedge Z)$ *=Закон одиниці відносно кон'юнкції*

$X \vee ((Y \wedge Z) \wedge 1)$ *=Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення*

$X \vee ((Y \wedge Z) \wedge (X \vee \overline{X}))$ *=Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції*

$X \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \overline{X})$ =

В одночлені X не вистачає двох змінних Y і Z. Введемо спочатку змінну Y:

$(X \wedge 1) \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$ = *Закон одиниці відносно кон'юнкції*
$(X \wedge (Y \vee \bar{Y})) \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$= *Вираження одиниці через диз'юнкцію*
Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції
$(X \wedge Y) \vee (X \wedge \bar{Y}) \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$ =

В одночлені $X \wedge \bar{Y}$ *не вистачає змінної Z. Введемо змінну Z:*
$(X \wedge Y) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge 1) \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$ = *Закон одиниці відносно кон'юнкції*
$(X \wedge Y) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge (Z \vee \bar{Z})) \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$=
Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення
Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції
$(X \wedge Y) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge Z) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge \bar{Z}) \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$ =

В одночлені $X \wedge Y$ *не вистачає змінної Z. Введемо змінну Z:*
Закон одиниці відносно кон'юнкції
$((X \wedge Y) \wedge 1) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge Z) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge \bar{Z}) \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$ =
Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення
$((X \wedge Y) \wedge (Z \vee \bar{Z})) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge Z) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge \bar{Z}) \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$ =
Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції
$((X \wedge Y) \wedge Z) \vee ((X \wedge Y) \wedge \bar{Z}) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge Z) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge \bar{Z}) \vee ((Y \wedge Z) \wedge X) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$=
Закон комутативності кон'юнкції
$((X \wedge Y) \wedge Z) \vee ((X \wedge Y) \wedge \bar{Z}) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge Z) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge \bar{Z}) \vee (X \wedge (Y \wedge Z)) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$=
Закон ідемпотентності диз'юнкції
$((X \wedge Y) \wedge Z) \vee ((X \wedge Y) \wedge \bar{Z}) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge Z) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge \bar{Z}) \vee ((Y \wedge Z) \wedge \bar{X})$ =
Закон комутативності кон'юнкції
$((X \wedge Y) \wedge Z) \vee ((X \wedge Y) \wedge \bar{Z}) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge Z) \vee ((X \wedge \bar{Y}) \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{X} \wedge (Y \wedge Z))$

Дана формула має наступну ДДН-форму:
$\boldsymbol{(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \underline{\bar{Z}}) \vee (X \wedge \bar{Y} \wedge Z) \vee (X \wedge \bar{Y} \wedge \underline{\bar{Z}}) \vee (\bar{X} \wedge Y \wedge Z)}$

Задача 5. Рівносильними перетвореннями приведіть формулу до досконалої кон‘юнктивної нормальної форми: $\boldsymbol{(X \vee Y) \wedge Z}$
Розв’язування.
Диз’юнктивний одночлен $X \vee Y$ *<u>не є досконалим</u> від трьох змінних X,Y і Z, так як до нього не входить змінна Z. Введення змінної Z виконується так:*
$(X \vee Y) \wedge Z = (X \vee Y \vee 0) \vee Z$ = *Закон нуля відносно диз'юнкції*
$(X \vee Y \vee (Z \vee \bar{Z})) \vee Z$ = *Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(X \vee (Y \vee Z) \vee (Y \vee \bar{Z})) \vee Z = (X \vee Y \vee Z) \vee (X \vee Y \vee \bar{Z}) \vee Z$ =

В одночлені Z не вистачає двох змінних X і Y. Введемо спочатку змінну X:
$(X \vee Y \vee Z) \vee (X \vee Y \vee \bar{Z}) \vee (Z \vee 0)$ =*Закон нуля відносно диз'юнкції*
$(X \vee Y \vee Z) \vee (X \vee Y \vee \bar{Z}) \vee (Z \vee X \vee \bar{X})$=*Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(X \vee Y \vee Z) \vee (X \vee Y \vee \bar{Z}) \vee (Z \vee X) \vee (Z \vee \bar{X})$ =

В одночлені $Z \vee X$ *не вистачає змінної Y. Введемо змінну Y:*
$(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(Z\vee X\vee 0)\vee(Z\vee\bar{X})$ = *Закон нуля відносно диз'юнкції*
Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення
$(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(Z\vee X\vee Y\vee\bar{Y})\vee(Z\vee\bar{X}) =$
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(Z\vee(X\vee Y)\vee(X\vee\bar{Y}))\vee(Z\vee\bar{X}) =$
$(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(Z\vee X\vee Y)\wedge(Z\vee X\vee\bar{Y})\wedge(Z\vee\bar{X}) =$

В одночлені $Z \vee \bar{X}$ *не вистачає змінної Y. Введемо змінну Y:*
Закон нуля відносно диз'юнкції
$(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(Z\vee X\vee Y)\vee(Z\vee X\vee\bar{Y})\vee(Z\vee\bar{X}\vee 0) =$
Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення
$(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(Z\vee X\vee Y)\vee(Z\vee X\vee\bar{Y})\vee(Z\vee\bar{X}\vee Y\vee\bar{Y}) =$
Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(Z\vee X\vee Y)\vee(Z\vee X\vee\bar{Y})\vee(Z\vee(\bar{X}\vee Y)\vee(\bar{X}\vee\bar{Y}) =$
$(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee\bar{Y}\vee Z)\vee(\bar{X}\vee Y\vee Z)\vee(\bar{X}\vee\bar{Y}\vee Z) =$
Закон ідемпотентності кон'юнкції
$(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(X\vee\bar{Y}\vee Z)\vee(\bar{X}\vee Y\vee Z)\vee(\bar{X}\vee\bar{Y}\vee Z)$

Дана формула має наступну ДКН-форму:
$\boldsymbol{(X\vee Y\vee Z)\vee(X\vee Y\vee\bar{Z})\vee(X\vee\bar{Y}\vee Z)\vee(\bar{X}\vee Y\vee Z)\vee(\bar{X}\vee\bar{Y}\vee Z)}$

Задача 6. Використовуючи **ДДН**-форму, знайдіть формулу, що приймає значення 1 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

F(0,1,0)=F(1,0,1)= F(1,1,1)=1

Розв'язування.

Візьмемо першу умову F(0,1,0)=1. Оскільки кон'юнктивний одночлен $X\wedge Y\wedge Z$ *приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли X =1, Y=1, Z=1, то кон'юнкція* $\bar{X}\wedge Y\wedge\bar{Z}$ *приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли* $\bar{X}=1$, $Y=1$, $\bar{Z}=1$, *тому X =0, Y=1, Z=0.*

Першій умові задовольняє лише кон'юнктивний одночлен $\neg X\wedge Y\wedge\neg Z$, *другій* $X\wedge\bar{Y}\wedge Z$, *третій* $X\wedge Y\wedge Z$. *Тоді формула*

$F(X, Y, Z) = (\bar{X}\wedge Y\wedge\bar{Z}) \vee (X\wedge\bar{Y}\wedge Z) \vee (X\wedge Y\wedge Z)$ *приймає значення 1, тоді і тільки тоді, коли* $\bar{X}\wedge Y\wedge\bar{Z}$ *приймає значення 1, або* $X\wedge\bar{Y}\wedge Z$ *приймає значення 1, або* $X\wedge Y\wedge Z$ *приймає значення 1,тобто якщо і тільки якщо (X, Y, Z) = (0,1,0) або (X, Y, Z) = (1,0,1), або (X, Y, Z) = (1,1,1).*

Тоді, $\boldsymbol{F(X, Y, Z) = (\bar{X}\wedge Y\wedge\bar{Z}) \vee (X\wedge\bar{Y}\wedge Z) \vee (X\wedge Y\wedge Z)}$ *знайдена формула.*

Задача 7. Використовуючи **ДКН**-форму, знайдіть формулу, що приймає значення 0 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

F(0,1,1)=F(0,0,0)= F(0,1,0)=0

Розв'язування.

Візьмемо першу умову F(0,1,1)=0. Оскільки диз'юнктивний одночлен $X\vee Y\vee Z$ *приймає значення 0 тоді і тільки тоді, коли X=0, Y=0, Z=0, то диз'юнкція* $X\vee\bar{Y}\vee\bar{Z}$ *приймає значення 0 тоді і тільки тоді, коли X=0,* $\bar{Y}=0$, $\bar{Z}=0$ *тому X=0, Y=1, Z=1.*

Першій умові задовольняє лише диз'юнктивний одночлен $X\vee\bar{Y}\vee\bar{Z}$, *другій* $X\vee Y\vee Z$, *третій* $X\vee\bar{Y}\vee Z$. *Тоді формула*

$F(X, Y, Z) = (X\vee\bar{Y}\vee\bar{Z}) \wedge (X\vee Y\vee Z) \wedge (X\vee\bar{Y}\vee Z)$ *приймає значення 0, тоді і тільки тоді, коли* $X\vee\bar{Y}\vee\bar{Z}$ *приймає значення 0, або* $X\vee Y\vee Z$ *приймає значення 0, або* $X\vee\bar{Y}\vee Z$ *приймає значення 0, тобто якщо і тільки якщо* $(X, Y, Z) = (0,1,1)$, *або* $(X, Y, Z) = (0,0,0)$, *або* $(X, Y, Z) = (0,1,0)$.

Тоді, $\mathbf{F(X, Y, Z) = (X\vee\bar{Y}\vee\bar{Z}) \wedge (X\vee Y\vee Z) \wedge (X\vee\bar{Y}\vee Z)}$ *– знайдена формула.*

Задача 8. Для даної формули алгебри висловлень знайдіть ДДН-форму за допомогою її таблиці істинності: $\overline{(X\wedge Y)}\rightarrow\overline{(X\vee Z)}$

Розв'язування.

Складемо таблицю істинності даної формули:

	X	Y	Z	(X∧Y)	¬(X∧Y)	(X∨Z)	¬(X∨Z)	(¬(X∧Y)→¬(X∨Z))
☑	0	0	0	0	1	0	1	1
☐	0	0	1	0	1	1	0	0
☑	0	1	0	0	1	0	1	1
☐	0	1	1	0	1	1	0	0
☐	1	0	0	0	1	1	0	0
☐	1	0	1	0	1	1	0	0
☑	1	1	0	1	0	1	0	1
☑	1	1	1	1	0	1	0	1

Вибираючи набори значень змінних, на яких формула приймає значення 1, так як це робили в задачі 6, записуємо досконалу диз'юнктивну нормальну форму для даної формули:

$$\overline{(X\wedge Y)}\rightarrow\overline{(X\vee Z)}\equiv(\bar{X}\wedge\bar{Y}\wedge\bar{Z})\vee(\bar{X}\wedge Y\wedge\bar{Z})\vee(X\wedge Y\wedge\bar{Z})\vee(X\wedge Y\wedge Z).$$

Задача 9. Для даної формули алгебри висловлень знайдіть ДКН-форму за допомогою її таблиці істинності: $\overline{(X\wedge Y)}\rightarrow\overline{(X\vee Z)}$

Розв'язування.

За складеною таблицею істинності даної формули, дивись задачу 8, вибираємо набори значень змінних, на яких формула приймає значення 0, так як це робили в задачі 7, записуємо досконалу кон'юнктивну нормальну форму для даної формули: $\overline{(X\wedge Y)}\rightarrow\overline{(X\vee Y)} \equiv (X\vee Y\vee\bar{Z}) \wedge (X\vee\bar{Y}\vee\bar{Z}) \wedge (\bar{X}\vee Y\vee Z) \wedge (\bar{X}\vee Y\vee\bar{Z})$.

Задачі для самостійного розв'язування

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
7.1	1	2	3	4	5										
7.2						1	2	3	4	5					
7.3	6	7	8	9	10	11					1	2	3	4	5
7.4	10	11					1	2	3	4	5	6	7	8	9
7.5			1	2	3	4	5	6	7	8					
7.6	6	7	8								1	2	3	4	5
7.7				1	2	3	4	5	6						
7.8										1	2	3	4	5	6

7.1. Рівносильними перетвореннями приведіть кожну з наступних формул до ДН-форми:

1. $(\overline{X \vee Z}) \wedge (X \rightarrow Y)$
2. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Z \rightarrow T})$
3. $(X \vee (Y \wedge \bar{Z})) \wedge (X \vee Z)$
4. $((X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \rightarrow \bar{X})) \rightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{Z})$
5. $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow \bar{Z}) \rightarrow (X \rightarrow \bar{Y}))$

7.2. Рівносильними перетвореннями приведіть кожну з наступних формул до КН-форми:

1. $(\overline{X \vee Z}) \wedge (X \rightarrow Y)$
2. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Z \rightarrow T})$
3. $(X \vee (Y \wedge \bar{Z})) \wedge (X \vee Z)$
4. $((X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \rightarrow \bar{X})) \rightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{Z})$
5. $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow \bar{Z}) \rightarrow (X \rightarrow \bar{Y}))$

7.3. Рівносильними перетвореннями приведіть кожну з наступних формул до ДДН-форми:

1. $(\bar{X} \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
2. $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z)$
3. $X \vee (Y \wedge Z)$
4. $(X \wedge Y) \vee (Z \wedge T)$
5. $((X \wedge \bar{Y}) \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee Z)$
6. $((X \vee Y) \wedge (X \vee Z)) \vee (\bar{Y} \wedge (Z \vee \bar{Y}))$
7. $X \vee Y \vee Z$
8. $(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee T) \wedge (Z \vee T)$
9. $(X \wedge \bar{Y}) \vee (\bar{X} \wedge Y) \vee (\bar{X} \wedge Z) \vee (X \wedge \underline{\bar{Z}})$
10. $\bar{X} \vee (X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge T)$
11. $X \vee Y \vee Z \vee S \vee T$

7.4. Рівносильними перетвореннями приведіть кожну з наступних формул до ДКН-форми:

1. $(\bar{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$
2. $(X \vee Y) \wedge Z$
3. $(\bar{X} \vee Y) \wedge (X \vee Z)$
4. $(\bar{X} \wedge Y) \vee (Z \wedge T)$
5. $(X \wedge Y \wedge Z) \vee T$
6. $X \wedge Y \wedge Z$
7. $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge T)$
8. $X \vee Y \vee (\underline{\bar{Z}} \wedge T)$
9. $(X \wedge Y) \vee Z$
10. $X \wedge Y \wedge Z \wedge T$
11. $(X \vee \bar{Y}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee Z) \wedge \underline{\bar{Z}}$

7.5. Використовуючи ДДН-форму, знайдіть формулу, що приймає значення 1 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

1. $F(0,0,1)=F(1,0,1)=1$
2. $F(0,1,1)=F(1,0,1)=1$
3. $F(0,1,0)=F(1,0,1)= F(1,1,1)=1$
4. $F(0,1,1)=F(1,1,0)=1$
5. $F(1,0,0)=F(0,1,0)= F(0,0,1)=1$
6. $F(0,1,1)=F(1,0,1)= F(1,1,0)= F(1,1,1)=1$
7. $F(0,0,0)=F(0,1,0)= F(1,1,1)=1$
8. $F(0,1,0,1)=F(1,0,1,0)= F(1,0,0,0)=1$

7.6. Використовуючи ДКН-форму, знайдіть формулу, що приймає значення 0 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

1. F(0,0,1)=F(1,0,1)=0
2. F(0,1,1)=F(1,0,1)=0
3. F(0,1,0)=F(1,0,1)= F(1,1,1)=0
4. F(0,1,1)=F(1,1,0)=0
5. F(1,0,0)=F(0,1,0)= F(0,0,1)=0
6. F(0,1,1)=F(1,0,1)= F(1,1,0)= F(1,1,1)=0
7. F(0,0,0)=F(0,1,0)= F(1,1,1)=0
8. F(0,1,0,1)=F(1,0,1,0)= F(1,0,0,0)=0

7.7. Для кожної з наступних формул алгебри висловлень знайдіть ДДН-форму за допомогою її таблиці істинності:

1. $(\overline{X \wedge Y}) \rightarrow (\overline{X \vee Z})$
2. $(X \wedge Y) \vee Z$
3. $(X \leftrightarrow Z) \rightarrow (X \wedge \bar{Y})$
4. $X \vee (Y \rightarrow (Z \leftrightarrow (X \wedge Y)))$
5. $((X \wedge \bar{Y}) \vee Z) \wedge T$
6. $(X \wedge ((Y \wedge Z) \vee T)) \vee \bar{T}$

7.8. Для кожної з наступних формул алгебри висловлень знайдіть ДКН-форму за допомогою її таблиці істинності:

1. $(\overline{X \wedge Y}) \rightarrow (\overline{X \vee Z})$
2. $(X \vee Y) \wedge (Z \vee \bar{T})$
3. $\overline{(\bar{X} \vee \bar{Y})} \wedge (X \rightarrow (Y \wedge Z))$
4. $(X \wedge Y \wedge Z) \vee T$
5. $X \wedge (\overline{\bar{Y} \wedge (Z \rightarrow (X \leftrightarrow Y))})$
6. $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge T)$

Підготовка до контрольної роботи №1!!!!

Приклади завдань для варіантів.

Варіант №1.

1. Привести F до ДНФ.
$$F \equiv (x \leftrightarrow y) \wedge \overline{(z \rightarrow t)};$$
2. Чи буде F тавтологією на базі КНФ, ДДНФ? Зробити висновок.
$$F \equiv (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \wedge c)));$$
3. По таблиці істинності та за допомогою рівносильних перетворень знайти ДДНФ, ДКНФ.
$$F \equiv (x \vee y) \wedge (\bar{x} \rightarrow (y \wedge z));$$

Варіант №2.

1. Привести F до КНФ.
$$F \equiv \big((x \longrightarrow y) \longrightarrow \bar{y}\big) \vee \big(x \longrightarrow (y \wedge x)\big);$$
2. Чи буде F суперечністтю на базі ДНФ, ДКНФ? Зробити висновок.
$$F \equiv ((p \longrightarrow q) \vee p) \longrightarrow \overline{(\bar{q} \longrightarrow (q \longrightarrow p))}$$
3. По таблиці істинності та за допомогою рівносильних перетворень знайти ДДНФ, ДКНФ.
$$F \equiv \overline{((a \wedge b) \vee c)} \longrightarrow (a \wedge (b \vee c));$$

Практична робота8.

Застосування нормальних форм.

Мета: Закріпити вміння та навички відшукання нормальних форм для формул алгебри висловлень заданих своїми значеннями.

План

- **Методи відшукання досконалих кон‘юнктивних (диз‘юнктивних) нормальних форм для формул заданих своїми значеннями.**

Хід заняття

Задача 1. Знайдіть найпростішу формулу від трьох змінних серед рівносильних формул, останній стовпчик таблиці істинності якої має вигляд:

F=(1100 1100).

Розв'язування.

Так як формула залежить від трьох змінних, то нехай це будуть A,B,C.

A	*B*	*C*	*F(A, B, C)*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Для знаходження формули можна скористатися як ДДН-формой, так і ДКН-формой, так як кількість нулів та одиниць в останньому стовпчику таблиці істинності однакова. Скористаємося, наприклад, ДКН-формою. Виділяємо ті набори значень змінних, для яких формула приймає значення 0: F(0,1,0) = F(0,1,1) = F(1,1,0) = F(1,1,1) = 0. Виписуємо ДКН-форму, яка задовольняє цим умовам.

$F(A,B,C)\equiv(A\vee\bar{B}\vee C)\wedge(A\vee\bar{B}\vee\bar{C})\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C})$

Спрощуємо її за допомогою рівносильних перетворень:

$\underline{(A\vee\bar{B}\vee C)\wedge(A\vee\bar{B}\vee\bar{C})}\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C}) =$

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

$(A\vee\bar{B}\vee\underline{(C\wedge\bar{C})})\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C}) =$

Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення

$(A\vee\bar{B}\underline{\vee(0)})\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C}) =$

Закон нуля відносно диз'юнкції

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

$(A\vee\bar{B})\wedge\underline{(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C})} =(A\vee\bar{B})\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\underline{(C\wedge\bar{C})}) =$

Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення

$(A\vee\bar{B})\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}\underline{\vee(0)}) =\underline{(A\vee\bar{B})\wedge(\bar{A}\vee\bar{B})} =\underline{(A\wedge\bar{A})}\vee\bar{B}=\underline{(0)\vee}\bar{B} = \bar{B}$

Закон нуля відносно диз'юнкції

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення

Закон нуля відносно диз'юнкції

Задачі для самостійного розв’язування

1.1. Знайдіть ДДНФ, ДКНФ для функції від трьох змінних якщо вектор значень має наступний вигляд, спростити її:

1. F=(0000 1111);
2. F=(1100 1100);
3. F=(1000 1001);
4. F=(0101 0101);
5. F=(0100 0101);
6. F=(1011 1101);
7. F=(0010 0100);
8. F=(0001 1101);
9. F=(0000 0111);
10. F=(0011 1111);
11. F=(1001 1110);
12. F=(0111 0001);
13. F=(0100 0011);
14. F=(0001 1101);
15. F=(1000 0001).

1. Знайдіть ДДНФ, ДКНФ для функції від чотирьох змінних якщо вектор значень має наступний вигляд, спростити її:

2. F=(0000 0000 0000 1111);
3. F=(0000 0000 1111 0000);
4. F=(0000 1111 0000 0000);
5. F=(1111 0000 0000 0000);
6. F=(1100 1100 1100 1100);
7. F=(0101 0101 0101 0101);
8. F=(0110 0110 0110 0110);
9. F=(1001 1001 1001 1001);
10. F=(1111 1110 1100 1000);
11. F=(1000 1111 1110 1100);
12. F=(1100 1111 1110 1000);
13. F=(1110 1100 1111 1000);
14. F=(0000 0011 0110 1100);
15. F=(0111 1000 0110 1001);
16. F=(1000 1001 1011 1111).

Практична робота9.

Нормальні форми і поліном Жегалкіна.

Мета: Закріпити навички та вміння визначати тип формули і її логічне значення. Познайомитися з основними методами побудови полінома Жегалкіна.

Основний теоретичний матеріал

Елементарною кон'юнкцією називається вираз $x_{i_1}^{a_1}, x_{i_2}^{a_2}, \ldots, x_{i_m}^{a_m}$, де всі змінні x_{i_k}, які ввійшли у склад кон'юнкції, різні, $m \geq 1$(m – ранг ЕК).

Поліномом Жегалкіна булевої функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається її представлення у вигляді суми за модулем два деяких елементарних кон'юнкцій. Поліном Жегалкіна може бути знайдено за допомогою формул

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1}} \left(x_1 + \overline{a_1}\right) \cdot \left(x_2 + \overline{a_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x_n + \overline{a_n}\right),$$

в якій необхідно розкрити дужки і спростити вираз за допомогою відношень:

$$x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y = x \cdot z\,,$$

$$x \oplus 1 = \overline{x}, \qquad x \oplus 0 = x, \qquad x \oplus x = 0,$$

$$x \oplus y = y \oplus x, \qquad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

Множина булевих функцій, заданих в базисі Жегалкина S4 = {⊕, &, l} називається ***алгеброю Жегалкина***.

Основні властивості.

1. коммутативность

Н1⊕Н2 = Н2⊕Н1

Н1 & Н2 = Н2 & Н1

2. асоціативність

Н1⊕ (Н2⊕Н3) = (Н1⊕Н2) ⊕Н3

Н1 & (Н2 & Н3) = (Н1 & Н2) & Н3

3. дистрибутивность

Н1 & (Н2⊕Н3) = (Н1 & Н2) ⊕ (Н1 & Н3)

4. властивості констант

Н & 1 = Н

Н & 0 = 0

Н⊕0 = Н

5. властивості констант

Н⊕Н = 0

Н & Н = Н

Твердження. Через операції алгебри Жегалкина можна виразити всі інші булеві функції:

$\overline{X} = X \oplus 1$,

XvY = X⊕Y⊕XY

X~Y = 1⊕X⊕Y

X → Y = 1⊕X⊕XY

X ↓ Y = 1⊕X⊕Y ⊕XY

X | Y = 1⊕XY

Визначення 2. Поліномом Жегалкина (поліномом по модулю 2) від n змінних x_1, x_2 ... x_n називається вираз виду:

$C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus \ldots \oplus C_n x_n \oplus C_{12} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus C_{12 \ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n$,

де постійні C_k можуть приймати значення 0 чи 1.

Якщо поліном Жегалкина не містить добутків окремих змінних, то він називається лінійним (лінійна функція).

Наприклад,

f1= X⊕YZ⊕XYZ - поліном, не лінійний.

f2 = 1⊕X⊕Y⊕Z - поліном, є лінійною функцією.

Теорема. Кожна булева функція представляється у вигляді полінома Жегалкина єдиним чином.

Зауважимо, що перевага алгебри Жегалкина (в порівнянні з іншими алгебрами=системами представлень) складається в арифметизации логіки, що дозволяє виконувати перетворення булевих функцій досить просто. Її недоліком в порівнянні з булевої алгеброю є громіздкість формул.

Наведемо основні методи побудови поліномів Жегалкина

Метод невизначених коефіцієнтів.

Нехай P (x_1, x_2 ... x_n) - шуканий поліном Жегалкина, який реалізує задану функцію f (x_1, x_2 ... x_n). Запишемо його у вигляді

$$P = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus \dots \oplus C_nx_n \oplus C_{12}x_1x_2 \oplus \dots \oplus C_{12\dots n}x_1x_2\dots x_n,$$

Знайдемо коефіцієнти C_k. Для цього послідовно додамо змінним x_1, x_2 ... x_n значення з кожного рядка таблиці істинності. У підсумку одержимо систему з 2^n рівнянь з 2^n невідомими, що має єдине рішення. Вирішивши її, знаходимо коефіцієнти полінома P (x_1, x_2 ... x_n).

Приклад 1. Нехай для функції задана таблиця істинності. Запишемо спочатку дану функцію у вигляді полінома Жегалкина з невизначеними коефіцієнтами. Потім по черзі підставляємо набори в порядку збільшення кількості одиниць і знаходимо коефіцієнти з урахуванням того, що $\propto \oplus 1 = \overline{\propto}$, $\propto \oplus 0 = \propto$. За кожну підстановку знаходимо тільки один коефіцієнт.

Побудуємо полімом Жегалкіна з коефіцієнтами ***a***:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha_{0000}\oplus\alpha_{0001}x_4\oplus\alpha_{0010}x_3\oplus\alpha_{0011}x_3x_4\oplus\alpha_{0100}x_2\oplus\alpha_{0101}x_2x_4\oplus \alpha_{0110}x_2x_3\oplus\alpha_{0111}x_2x_3x_4\oplus\alpha_{1000}x_1\oplus\alpha_{1001}x_1x_4\oplus\alpha_{1010}x_1x_3\oplus\alpha_{1011}x_1x_3x_4\oplus\alpha_{1100}x_1x_2\oplus \alpha_{1101}x_1x_2x_4\oplus\alpha_{1110}x_1x_2x_3\oplus\alpha_{1111}x_1x_2x_3x_4$$

x_1	x_2	x_3	x_4	$F(x_1,x_2,x_3,x_4)$		
0	0	0	0	0	*f(0010)= 0→a₀₀₀₀=0*	*const*
0	0	0	1	0	$f(0010)=a_{0000}\oplus a_{0001}=0\rightarrow a_{0001}=0$	x_4
0	0	1	0	0	$f(0010)=a_{0000}\oplus a_{0010}=0\rightarrow a_{0010}=0$	x_3
0	0	1	1	0		
0	1	0	0	0	$f(0100)=a_{0000}\oplus a_{0100}=0\rightarrow a_{0100}=0$	x_2
0	1	0	1	0		
0	1	1	0	1		
0	1	1	1	0		
1	0	0	0	1	$f(1000)=a_{0000}\oplus a_{1000}=1\rightarrow a_{1000}=1$	x_1
1	0	0	1	0		
1	0	1	0	0		
1	0	1	1	1		
1	1	0	0	1		
1	1	0	1	0		
1	1	1	0	1		
1	1	1	1	0		

Далі підставляємо всі інші набори в порядку зростання числа одиниць, підставляючи знову отримані значення в наступні формули:

x_1	x_2	x_3	x_4	F		
0	0	1	1	0	$f(0011)=a_{0000}\oplus a_{0010}\oplus a_{0001}\oplus a_{0011}=0\rightarrow a_{0011}=0$	x_3x_4
0	1	0	1	0	$f(0011)=a_{0000}\oplus a_{0100}\oplus a_{0001}\oplus a_{0101}=0\rightarrow a_{0101}=0$	x_2x_4
0	1	1	0	1	$f(0011)=a_{0000}\oplus a_{0100}\oplus a_{0010}\oplus a_{0110}=1\rightarrow a_{0110}=1$	x_2x_3
1	0	0	1	0	$f(0011)=a_{0000}\oplus a_{1000}\oplus a_{0001}\oplus a_{1001}=0\rightarrow a_{1001}=1$	x_1x_4
1	0	1	0	0	$f(0011)=a_{0000}\oplus a_{1000}\oplus a_{0010}\oplus a_{1010}=0\rightarrow a_{1010}=1$	x_1x_3
1	1	0	0	1	$f(0011)=a_{0000}\oplus a_{1000}\oplus a_{0100}\oplus a_{1100}=1\rightarrow a_{1100}=0$	x_1x_2

Для трьох одиниць:

x_1	x_2	x_3	x_4	F		
0	1	1	1	0	$f(0111)=a_{0000}\oplus a_{0100}\oplus a_{0010}\oplus a_{0001}\oplus a_{0110}\oplus a_{0101}\oplus$ $\oplus a_{0011}\oplus a_{0111}=0\rightarrow a_{0111}=1$	$x_2x_3x_4$
1	1	0	1	0	$f(1101)=a_{0000}\oplus a_{1000}\oplus a_{0100}\oplus a_{0001}\oplus a_{1100}\oplus a_{1001}\oplus$ $\oplus a_{0101}\oplus a_{1101}=0\rightarrow a_{1101}=0$	$x_1x_2x_4$
1	0	1	1	1	$f(1011)=a_{0000}\oplus a_{1000}\oplus a_{0010}\oplus a_{0001}\oplus a_{1010}\oplus a_{1001}\oplus$ $\oplus a_{0011}\oplus a_{1011}=1\rightarrow a_{1011}=0$	$x_1x_3x_4$
1	1	1	0	1	$f(1110)=a_{0000}\oplus a_{1000}\oplus a_{0100}\oplus a_{0010}\oplus a_{1100}\oplus a_{1010}\oplus$ $\oplus a_{0110}\oplus a_{1110}=1\rightarrow a_{1110}=0$	$x_1x_2x_3$

Чотирьох:

x_1	x_2	x_3	x_4	F	$x_1x_2x_3x_4$
1	1	1	1	0	$f(0111)=a_{0000}\oplus a_{1000}\oplus a_{0100}\oplus a_{0010}\oplus a_{0001}\oplus a_{1100}\oplus$ $\oplus a_{1010}\oplus a_{1001}\oplus a_{0110}\oplus a_{0101}\oplus a_{0011}\oplus a_{1110}\oplus a_{1101}\oplus a_{1011}\oplus$ $\oplus a_{0111}\oplus a_{1111}=0\rightarrow a_{1111}=1$

Таким чином, полімон Жегалкіна має вигляд:

$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\oplus 0x_4\oplus 0x_3\oplus 0x_3x_4\oplus 0x_2\oplus 0x_2x_4\oplus 1x_2x_3\oplus 1x_2x_3x_4\oplus 1x_1\oplus 1x_1x_4\oplus 1x_1x_3\oplus 0x_1x_3x_4\oplus 0x_1x_2\oplus 0x_1x_2x_4\oplus 0x_1x_2x_3\oplus 1x_1x_2x_3x_4$;

$F(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_2x_3\oplus x_2x_3x_4\oplus x_1\oplus x_1x_4\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3x_4$;

тобто $F(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1\oplus x_1x_3\oplus x_1x_4\oplus x_2x_3\oplus x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4$.

Метод, заснований на перетворенні формул над множиною зв'язок $\{\neg, \&\}$.

Будують деяку формулу F над безліччю зв'язок $\{\neg, \&\}$, що реалізовує дану функцію f $(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Потім замінюють усюди подформули виду $\bar{A}$ на $A\oplus 1$, розкривають дужки, користуючись дистрибутивним законом, а потім застосовують властивості 4 і 5. Іноді цей метод називають перетворення диз'юнктивній нормальної форми

Цей спосіб заснований на тому, що $\overline{X} = X \oplus 1$. Якщо функція задана у вигляді ДНФ, то можна спочатку прибрати диз'юнкцію, використовуючи правило Де-Моргана, а всі заперечення замінити додатком одиниці по модулю два, після чого розкрити дужки за звичайними правилами, при цьому враховуючи, що парне число однакових доданків дорівнює нулю ($X\oplus X=0$), а непарне число однакових доданків одно одному такому доданку. Або ж можна замінити диз'юнкцію за наступним правилом: $X \vee Y=X \oplus Y \oplus XY$.

Якщо функція задана в ДДНФ, то так як при будь-яких значеннях вхідних змінних в одиницю звертається не більше одного члена вираження, то достатньо просто замінити всі диз'юнкції виключає АБО.

Приклад 2. Побудувати поліном Жегалкина функції $f(x, y) = x \to y$

Розв'язування.

- метод невизначених коефіцієнтів.

Запишемо шуканий поліном у вигляді: $P = C_0 \oplus C_1 x \oplus C_2 y \oplus C_{12} xy$

Користуючись таблицею істинності

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
X→Y	1	1	0	1

отримуємо, що $f(0,0) = P(0,0) = C_0 = 1$

$f(0,1) = P(0,1) = C_0 \oplus C_2 = 1$

$f(1,0) = P(1,0) = C_0 \oplus C_1 = 0$

$f(1,1) = P(1,1) = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_{12} = 1$

Звідки послідовно знаходимо, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_{12} = 1$

Отже: $X \to Y = 1 \oplus X \oplus XY$.

- метод перетворення формул.

Маємо: $X \to Y = \bar{X} v Y = \overline{X\bar{Y}} = (X(Y \oplus 1)) \oplus 1 = 1 \oplus X \oplus XY$

Приклад 3. Побудувати поліном Жегалкина для функції заданої ДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee x_2 =$$

Розв'язування.

Запишемо функцію так: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \vee x_1 x_2 \vee x_2$;

Сгрупуємо доданки і скористаємося перетвореннями $X \vee Y = X \oplus Y \oplus XY$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_4}) \vee (x_1 x_2 \vee x_2) =$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \oplus \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \oplus x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \vee x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 x_2;$$

Скористаємося властивостями кон'юнкції: $X \wedge X = X, X \oplus X = 0, \bar{X} \wedge X = 0$.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \oplus \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \oplus 0) \vee (x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2) =$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \oplus \overline{x_1} \cdot \overline{x_4}) \vee (0 \oplus x_2) = (x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \oplus \overline{x_1} \cdot \overline{x_4}) \vee x_2;$$

Знову заміна диз'юнкції $X \vee Y = X \oplus Y \oplus XY$:

$$f = x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \oplus \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \oplus x_2 \oplus (x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \oplus \overline{x_1} \cdot \overline{x_4})(x_2) =$$

$$= x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \oplus \overline{x_1 x_4} \oplus x_2 \oplus (x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 x_2 \oplus \overline{x_1 x_4} x_2) =$$

$$= x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \oplus \overline{x_1} \overline{x_4} \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \oplus \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} = \overline{x_1} \overline{x_4} \oplus x_2 \oplus \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} =$$

Замінимо заперечення на додавання 1:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \oplus 1)(x_4 \oplus 1) \oplus x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) x_2 (x_4 \oplus 1) =$$

Розкриваємо дужки за арифметичними правилами:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_4 \oplus x_1 \oplus x_4 \oplus 1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_4 \oplus x_2 =$$

Відкидаємо парні доданки і отримаємо результуючу формулу:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \oplus x_4 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_4 \oplus x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus 1$$

Метод трикутника

Метод трикутника дозволяє перетворити таблицю істинності в поліном Жегалкина шляхом побудови допоміжної трикутної таблиці у відповідності з наступними правилами:

1. Будується повна таблиця істинності, в якій рядки йдуть у порядку зростання двійкових кодів від 00…0 до 11…1.

2. Будується допоміжна трикутна таблиця, в якій перший стовпець збігається зі стовпцем значень функції в таблиці істинності.

3. Осередок в кожному наступному стовпці виходить шляхом додавання по модулю 2 двох ячейок попереднього стовпця - в тому ж рядку і рядком нижче.

4. Стовпці допоміжної таблиці нумеруються двійковими кодами в тому ж порядку, що і рядки таблиці істинності.

5. Кожному бінарного коду ставиться у відповідність один з членів полінома Жегалкина залежно від позицій коду, в яких стоять одиниці. Наприклад, ячейці 111 відповідає дек ABC, набору 101 – дек AC, набору 010 - B, 000 → 1 і т.д.

6. Якщо у верхньому рядку якого-небудь стовпця варто одиниця, то відповідний член присутній в поліномі Жегалкина.

Фактично, цей метод є модифікацією методу побудови поліному по таблиці істинності, описаний вище. У порівнянні з ним він зручніше тим, що розрахунки займають мало місця і в них складніше помилитися, але метод трикутника вимагає більшої кількості операцій.

Приклад перетворення таблиці істинності в поліном Жегалкина для функції трьох змінних зображений на малюнку.

Приклад 4. Побудувати поліном Жегалкіна для функції заданої векторно: P=(1010 1001).

Розв'язування.

A	B	C	P
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

000	001	010	011	100	101	110	111
1	C	B	BC	A	AC	AB	ABC
1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	
1	1	0	0	1	0		
0	1	0	1	1			
1	1	1	0				
0	0	1					
0	1						
1							

$$P = 1 \oplus C \oplus AB$$

Щоб отримати формулу, за якою розраховується якоїсь коефіцієнт, потрібно з клітки, в якій він записаний, пройтися всіма можливими шляхами вліво, до наступного стовпця таблиці істинності, роблячи ходи вліво і вліво-вниз, записати значення в кінцевих осередках і **складти їх всі між собою по модулю 2.**

Таким чином, в першому стовпці зверху записаний коефіцієнт, $a_0=P(000)$, у другому – $a_1=P(000) \oplus P(001)$,

у третьому – $a_2 =P(000) \oplus P(001) \oplus P(001) \oplus P(010)= P(000) \oplus P(010)$,

і так далі, тобто при побудові допоміжної таблиці коефіцієнти полінома прораховуються автоматично.

Метод, який базується на перетворенні вектора значень функції.

Приклад 5. Перетворюючи вектор значень функціїї побудувати поліном Жегалкіна для функції $F=x_1x_2Vx_1x_3Vx_2x_3$

Розв'язування.

Знаходимо вектор значень (0001 0111). Розбиваємо його на «послідовні» двомірні набори:

<table>
<tr><th colspan="2">Вектор значень</th><th>двовимірні</th><th>операція T</th><th colspan="2">чотиривимірні</th><th>результат</th></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="2">0, 0⊕0 = = 0,0</td><td rowspan="2">00</td><td rowspan="4">00 , 00⊕01= =00 01</td><td rowspan="4">00, 01</td><td rowspan="8">00 01, 00 01⊕01 11= 0 0 0 1 0 1 1 0</td><td rowspan="8">00 01 01 11 перетворення – вектор коефіцієнтів</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="2">0, 0⊕1= =0, 1</td><td rowspan="2">01</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="2">0,0⊕1= =0,1</td><td rowspan="2">01</td><td rowspan="4">01, 01⊕10= =01 11</td><td rowspan="4">01, 10</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">1, 1⊕1= =1, 0</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
</table>

x	y	z	F	K_i	α	
0	0	0	**0**	$0=K_0$	$\alpha_0=0$	$0=\alpha_0$
0	0	1	**0**	$0=K_1x_3$	$\alpha_3=0$	$0=\alpha_3\oplus\alpha_0=\alpha_3\oplus 0=\alpha_3=0$
0	1	0	**0**	$0=K_2x_2$	$\alpha_2=0$	$0=\alpha_2\oplus\alpha_0=\alpha_2\oplus 0=\alpha_2=0$
0	1	1	**1**	$1=K_3x_2x_3$	$\alpha_{23}=1$	$1=\alpha_2\oplus\alpha_3\oplus\alpha_{23}\oplus\alpha_0=0\oplus 0\oplus\alpha_{23}\oplus 0=\alpha_{23}=1$
1	0	0	**0**	$0=K_4x_1$	$\alpha_1=0$	$0=\alpha_1\oplus\alpha_0=\alpha_1\oplus 0=\alpha_1=0$
1	0	1	**1**	$1=K_5x_1x_3$	$\alpha_{13}=1$	$1=\alpha_1\oplus\alpha_3\oplus\alpha_{13}\oplus\alpha_0=0\oplus 0\oplus\alpha_{13}\oplus 0=\alpha_{13}=1$
1	1	0	**1**	$1=K_6x_1x_2$	$\alpha_{12}=1$	$1=\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus\alpha_{12}\oplus\alpha_0=0\oplus 0\oplus\alpha_{12}\oplus 0=\alpha_{12}=1$
1	1	1	**1**	$1=K_7x_1x_2x_3$	$\alpha_{123}=0$	$\alpha_{123}=0$, $1=\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus\alpha_3\oplus$ $\oplus\alpha_{12}\oplus\alpha_{13}\oplus\alpha_{23}\oplus\alpha_{123}\oplus\alpha_0=$ $=0\oplus 0\oplus 0\oplus 1\oplus 1\oplus 1\oplus\alpha_{123}\oplus 0=1$

Хід заняття

Задача 1. Розкласти функцію $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0100011110001011)$ за змінними x_2,x_4, представляючи отримані функції від двох змінних формулами над множиною елементарних зв'язок: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація. Сума за модулем два, еквіваленція, штрих Шиффера, стрілка Пірса.

Розв'язування. Розкладемо функцію $f(x_1,\ x_2\ ,\ x_3,\ x_4)=(0100\ 0111\ 1000\ 1011)$ за змінними x_2,x_4. Для цього випадку формула диз'юнктивного розкладу приймає вигляд:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\underset{(a_2,a_4)}{\vee}x_2^{a_2}\cdot x_4^{a_4}\cdot f(x_1,a_2,x_3,a_4)=\vee x_2^{a_2}\cdot x_4^{a_4}\cdot f(x_1,a_2,x_3,a_4)=$$

$$x_2^0\cdot x_4^0\cdot f(x_1,0,x_3,0)\vee x_2^0\cdot x_4^1\cdot f(x_1,0,x_3,1)\vee x_2^1\cdot x_4^0\cdot f(x_1,1,x_3,0)\vee x_2^1\cdot x_4^1\cdot f(x_1,1,x_3,1)=,$$

$$\overline{x_2}\cdot\overline{x_4}\cdot f(x_1,0,x_3,0)\vee\overline{x_2}\cdot x_4\cdot f(x_1,0,x_3,1)\vee x_2\cdot\overline{x_4}\cdot f(x_1,1,x_3,0)\vee x_2\cdot x_4\cdot f(x_1,1,x_3,1)$$

Запишемо розвернену таблицю функції $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ і з її допомогою складемо таблиці всіх чотирьох функцій від змінних $x_1,\ x_3$:

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

x_2	x_4	$f(0, x_2, 0, x_4)$	$f(0, x_2, 1, x_4)$	$f(1, x_2, 0, x_4)$	$f(1, x_2, 1, x_4)$
0	0	F(0000)=0	F(0010)=0	F(1000)=1	F(1010)=0
0	1	F(0001)=1	F(0011)=0	F(1001)=0	F(1011)=0
1	0	F(0100)=0	F(0110)=1	F(1100)=1	F(1110)=1
1	1	F(0101)=1	F(0111)=1	F(1101)=0	F(1111)=1

x_2	x_4	$f(0, x_2, 0, x_4)$	$f(0, x_2, 1, x_4)$	$f(1, x_2, 0, x_4)$	$f(1, x_2, 1, x_4)$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Перелічимо усі можливі булеві функції від двох аргументів у таблиці.

Аргументи		Булеві функції															
X	Y	0	$\wedge$	$\overline{\longrightarrow}$	X	$\overline{\longleftarrow}$	Y	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\bar{Y}$	$\leftarrow$	$\bar{X}$	$\rightarrow$	$\mid$	1
		g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Як ми бачимо,

Для $x_2=x_4=0$ маємо набір $f(x_1, 0, x_3, 0)=(0010)=g_2=$ `$(x_1 \rightarrow x_3)$;

Для $x_2=0, x_4=1$ маємо набір $f(x_1, 0, x_3, 1)=(1000)=g_8=x_3 \downarrow x_1$;

Для $x_2=1, x_4=0$ маємо набір $f(x_1, 1, x_3, 0)=(0111)=g_7=x_3 \vee x_1$

Для $x_2=x_4=0$ маємо набір $f(x_1, 1, x_3, 1)=(1101)=g_{13}=(x_1 \rightarrow x_3)$.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=$ (`$x_2$ `x_4) `$(x_1 \rightarrow x_3)$ v(`$x_2 x_4$) $(x_3 \downarrow x_1)$ v(x_2 `x_4) $(x_3 \vee x_1)$ v($x_2 x_4$) $(x_1 \rightarrow x_3)$

Таблицю можна використати і вертикальним способом.

x_2	x_4	$f(0, x_2, 0, x_4)$	$f(0, x_2, 1, x_4)$	$f(1, x_2, 0, x_4)$	$f(1, x_2, 1, x_4)$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Як ми бачимо,

Для $x_1=x_3=0$ маємо набір $f(0, x_2, 0, x_4)=(0101)=g_5=x_4$;

Для $x_1=0, x_3=1$ маємо набір $f(0, x_2, 1, x_4)=(0011)=g_3=x_2$;

Для $x_1=1, x_3=0$ маємо набір $f(1, x_2, 0, x_4)=(1010)=g_{10}=\bar{x}_4$;

Для $x_1=x_3=1$ маємо набір $f(1, x_2, 1, x_4)=(0011)=g_3=x_2$.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)= (\bar{x}_1 \bar{x}_3) (x_4) \vee (\bar{x}_1 x_3) (x_2) \vee (x_1 \bar{x}_3) (\bar{x}_4) \vee (x_2 x_4) (x_2)$

Відповідь:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)= (\bar{x}_2 \bar{x}_4) \overline{(x_1\to x_3)} \vee (\bar{x}_2 x_4) (x_3 \downarrow x_1) \vee (x_2 \bar{x}_4) (x_3 \vee x_1) \vee (x_2 x_4) (x_1 \to x_3)$

або $f(x_1, x_2, x_3, x_4)= (\bar{x}_1 \bar{x}_3) (x_4) \vee (\bar{x}_1 x_3) (x_2) \vee (x_1 \bar{x}_3) (\bar{x}_4) \vee (x_2 x_4) (x_2)$

Задачі для самостійного розв’язування

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
9.1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	2	3
9.1	10	11	12	13	14	15	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
9.2	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	2	3	4	5	6

9.1 Знайти поліном Жегалкіна двома способами для наступних функцій:

1. $F = (1010\ 0101)$;
2. $F = (0110\ 1001)$;
3. $F = (1000\ 1110)$;
4. $F = (0000\ 0111)$;
5. $F = (01110\ 0110)$;
6. $F = (0110\ 1110)$;
7. $F = (0111\ 0011)$;
8. $F = (1010\ 1110)$;
9. $F = (1000\ 0100)$;
10. $F =$(1000 0000 0000 0001);
11. $F =$(0000 1000 1001 0000);
12. $F = (0000\ 0100\ 0110\ 0111)$;
13. $F = (1010\ 1010\ 1011\ 0110)$;
14. $F = (0100\ 0000\ 0001\ 0001)$;
15. $F = (0000\ 0001\ 0001\ 0001)$.

9.2 Перетворити $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ використовуючи формулу диз’юнктивного розкладу по сукупності змінних x_n, x_k, представляючи отримані функції від двох змінних формулами над множиною елементарних зв’язок: заперечення, кон’юнкція, диз’юнкція, імплікація. Сума за модулем два, еквіваленція, штрих Шиффера, стрілка Пірса.

№	f	n	k
1	0110 1110 1101 1001	1	2
2	0110 1110 1101 1001	1	3
3	0110 1110 1101 1001	1	4
4	0110 1110 1101 1001	2	3
5	0110 11101101 1001	2	4
6	0110 1110 1101 1001	3	4
7	1010 111001100101	1	2
8	1010 111001100101	1	3

№	f	n	k
9	1010 1110 0110 0101	1	4
10	1010 1110 0110 0101	2	3
11	1010 1110 0110 0101	2	4
12	1010 1110 0110 0101	3	4
13	1100 0100 0111 0110	1	2
14	1100 0100 0111 0110	1	3
15	1100 0100 0111 0110	1	4

Практична робота10.

Булеві функції. Застосування булевих функцій до аналізу і синтезу релейно-контактних схем.

Мета: Сформувати навички і вміння використовувати булеві функції в теорії релейно-контактних схем. Вивчити методи застосування булевих функцій до аналізу і синтезу релейно-контактних схем.

План

- **Застосування булевих функції в теорії релейно-контактних схем.**
- **Аналіз релейно-контактних схем.**
- **Синтез релейно-контактних схем.**

Короткі теоретичні відомості

Застосування булевих функцій до аналізу і синтезу релейно-контактних схем

Під релейно-контактною схемою ми розуміємо пристрій з провідників і двохпозиційних контактів, через який полюси джерела струму зв‘язані з деяким споживачем. Контакти можуть бути замикаючими або розмикаючими. Кожний контакт підключений до деякого реле (перемикача). Коли реле спрацьовує (знаходиться під струмом), всі підключені до нього замикаючі контакти замкнуті, а розмикаючи контакти розімкнуті; в противному випадку навпаки. Кожному реле ставиться в відповідність своя булева змінна X, яка приймає значення 1, якщо реле спрацьовує, і 0 в противному випадку.

Всі замикаючі контакти, підключені до реле X, позначають тим же самим символом, розмикаючи – символом ¬X. Наприклад, умова, за якої проходе струм через схему, зображену на рис.1, може бути представлена наступною пропозиційною формою: $X_1 \wedge X_3 \vee X_2 \wedge \neg X_1$.

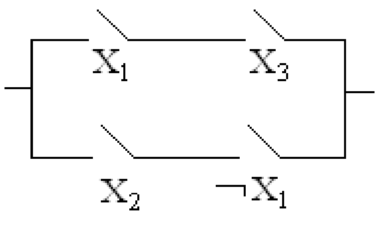


Рис.1.

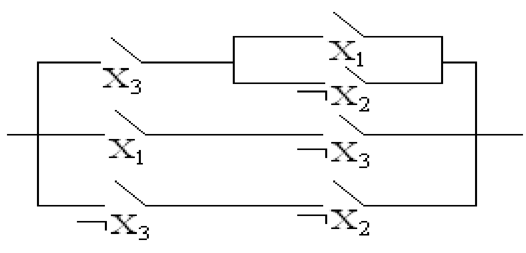


Рис.2.

Всій схемі також ставиться в відповідність булева змінна *f*, яка приймає значення 1, якщо схема проводить струм, і 0 в противному випадку. Змінна *f*, яка відповідає схемі, являється булевою функцією від змінних $X_1, X_2, \ldots, X_n$ відповідних реле. Така функція називається *функцією провідності схеми*, а її таблиця – *умовами роботи схеми*. Наприклад, функція провідності схеми, яка зображена на рис. 2, задається пропозиційною формою:

$$X_3 \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}) \vee X_1 \wedge \overline{X_3} \vee \overline{X}_2 \wedge \overline{X_3}.$$

Дві релейно-контактні схеми називаються *рівносильними*, якщо одна з них проводить струм тоді і тільки тоді, коли друга схема проводить струм, тобто якщо обидві ці схеми мають однакові функції провідності.

Так як $X_3 \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}) \vee X_1 \wedge \overline{X_3} \vee \overline{X_2} \wedge \overline{X}_3 \equiv \equiv X_3 \wedge X_1 \vee X_3 \wedge \overline{X_2} \vee X_1 \wedge \overline{X_3} \vee \overline{X_2} \wedge \overline{X_3} \equiv$

$\equiv X_3 \wedge X_1 \vee X_3 \wedge \overline{X_2} \vee X_1 \wedge \overline{X_3} \vee \overline{X_2} \wedge \overline{X_3} \equiv$ то схема, зображена на рис.2, буде рівносильна схемі, яка зображена на рис.3, функція провідності якої задається пропозиційною формою $x_1 \vee \overline{x_2}$

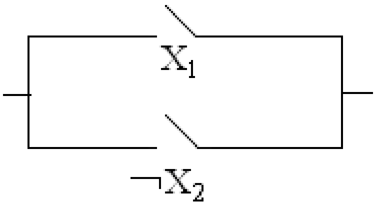


Рис.3.

З двох рівносильних схем більш простою вважається та, яка містить менше число контактів. Релейно-контактна схема на рис.3 є більш простою, ніж схема на рис.2. Тому виникає важлива задача: серед рівносильних пропозиційних форм, а значить і пропозиційних формул, знайти більш просту.

Примітка. У теорії релейно-контактних схем замість $\overline{X}$і $X \wedge Y$ звичайно пишуть $\overline{X}$ та XY.

Хід заняття

Функціонально повні і неповні системи операцій алгебри висловлень

Задача 1. Доведіть повноту наступних систем булевих функцій:

1) $\{\neg, \vee\}$,
2) $\{\neg, \wedge\}$,
3) $\{\neg, \rightarrow\}$,
4) $\{\wedge, \oplus, 1\}$,
5) $\{\rightarrow, 0\}$,
6) $\{\,/\,\}$,
7) $\{\downarrow\}$.

Розв'язування.

1) $\{\neg, \vee\}$

Оскільки система $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *– функціонально повна, то досить показати, що кон'юнкцію можна виразити формулою алгебри висловлень, яка не містить інших символів операцій, крім "*$\neg$*", "*$\vee$*". Останній факт встановлюється рівносильності* $A \wedge B \equiv \overline{(\bar{A} \vee \bar{B})}$*, яку дістаємо з рівносильності* $\overline{(A \wedge B)} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$ *(закон де Моргана для кон'юнкції) наступним чином:*

$$\overline{(A \wedge B)} \equiv \bar{A} \vee \bar{B},\ \overline{\overline{(A \wedge B)}} \equiv \overline{(\bar{A} \vee \bar{B})},\ A \wedge B \equiv \overline{(\bar{A} \vee \bar{B})}.$$

Задача 2. Доведіть, що наступні системи булевих функцій являються функціонально неповними, тобто в кожному випадку вкажіть функцію, яка не може бути виражена через функції даної системи.

1) $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,
2) $\{\neg\}$,
3) $\{\neg, \leftrightarrow\}$.

Розв'язування.

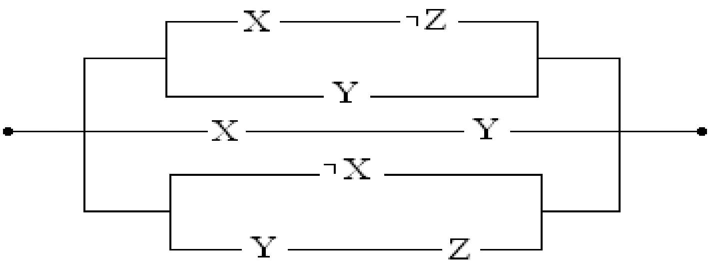
3) $\{\neg, \leftrightarrow\}$

Через заперечення і еквіваленцію можна виразити тільки булеві функції, стовпчик значень яких має, як у зазначених операціях, однакову кількість нулів і одиниць, а, наприклад, булева функція, що представлена формулою $A \rightarrow B$*, такої властивості не має, отже, вона не може бути виражена через функції даної системи.*

Застосування булевих функції в теорії релейно-контактних схем

Аналіз релейно-контактних схем

Задача 3. За даною релейно-контактною схемою знайдіть її функцію провідності і умови роботи:



Розв'язування.

Схема складається з трьох паралельних гілок. Перша гілка у свою чергу складається із двох паралельних гілок, у одній із яких послідовно з'єднані два контакти X і $\bar{Z}$, а у другої є лише один контакт Y. Тому перша із трьох паралельних гілок має наступну функцію провідності: $X\wedge\bar{Z}\vee Y$.

Друга паралельна гілка схеми складається з двох послідовно з'єднаних контактів X і Y і тому має наступну функцію провідності: $X\wedge Y$.

Третя паралельна гілка схеми складається з двох паралельних гілок, у одній з яких єдиний контакт $\overline{X}$*, а в другій послідовно з'єднані контакти Y і Z. Тому функція провідності третьої гілки схеми є* $\overline{X}\vee Y\wedge Z$.

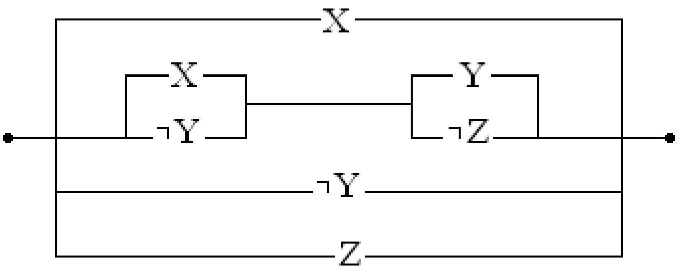
Отже, так як дана схема складається з трьох паралельно з'єднаних гілок, функції провідності яких ми знайшли, то для знаходження функції провідності всієї схеми потрібно побудувати диз'юнкцію знайдених функцій провідності:

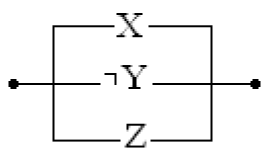
$$f(X,Z,Y)=(X\wedge\bar{Z}\vee Y)\vee X\wedge Y\vee(\overline{X}\vee Y\wedge Z).$$

Умови роботи даної релейно-контактної схеми представлені в наступній таблиці:

X	Y	Z	¬X	¬Z	(X∧¬Z)	((X∧¬Z)∨Y)	(X∧Y)	(((X∧¬Z)∨Y)∨(X∧Y))	(Y∧Z)	(¬X∨(Y∧Z))	f(X,Y,Z)
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Задача 4. Перевірити рівносильність наступних релейно-контактних схем:





Розв'язування.

Спочатку складемо функцію провідності першої з двох даних схем:

$f(X,Z,Y)=X\vee((X\vee\bar{Y})\wedge(Y\vee Z))\vee\bar{Y}\vee Z$

Тепер перетворимо її наступним чином:

$X\vee((X\vee\bar{Y})\wedge(Y\vee Z))\vee\bar{Y}\vee Z=$

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

$X\vee(X\vee\bar{Y}\vee\bar{Y})\wedge(Y\vee Z\vee\bar{Y})\vee Z=$*Закон ідемпотентності диз'юнкції*

$X\vee(X\vee\bar{Y})\wedge(Y\vee Z\vee\bar{Y})\vee Z=$*Закон комутативності диз'юнкції*

$X\vee(X\vee\bar{Y})\wedge(Y\vee\bar{Y}\vee Z)\vee Z=$*Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення*

$X\vee(X\vee\bar{Y})\wedge(1\vee Z)\vee Z=$*Закон одиниці відносно диз'юнкції*

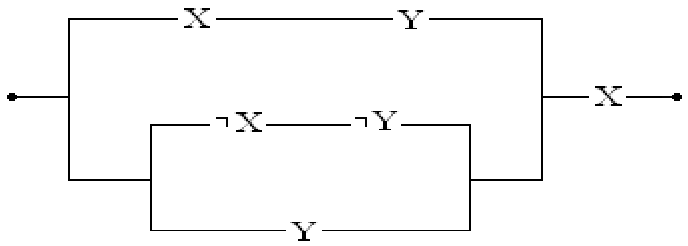
$X\vee(X\vee\bar{Y})\wedge(1)\vee Z=$*Закон одиниці відносно кон'юнкції*

$X\vee X\vee\bar{Y}\vee Z=$*Закон ідемпотентності диз'юнкції* $= X\vee\bar{Y}\vee Z$

$f(X,Z,Y)= X\vee\bar{Y}\vee Z$

Зрозуміло, що отримана функція (функція, звичайно, залишилася такою самою, а змінилася лише пропозиційна форма) є функцією провідності другої з двох даних схем. Отже, дані релейно-контактні схеми рівносильні (еквівалентні).

Задача 5. Спростіть наступну релейно-контактну схему:



Розв'язування.

Складемо функцію провідності даної схеми:

$$f(X,Z,Y)= (X\wedge Y\vee(\bar{X}\wedge\bar{Y}\vee Y))\wedge X$$

Тепер перетворимо її наступним чином:

$(X\wedge Y\vee(\bar{X}\wedge\bar{Y}\vee Y))\wedge X=$

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

$(X\wedge Y\vee(\bar{X}\vee Y)\wedge(\bar{Y}\vee Y))\wedge X=$*Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення*

$(X\wedge Y\vee(\bar{X}\vee Y)\wedge(1))\wedge X=$*Закон одиниці відносно кон'юнкції*

$(X\wedge Y\vee\bar{X}\vee Y)\wedge X=$*Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції*

$((X\vee\bar{X})\wedge(Y\vee\bar{X})\vee Y)\wedge X=$*Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення*

$((1)\wedge(Y\vee\bar{X})\vee Y)\wedge X=$*Закон одиниці відносно кон'юнкції*

$(Y\vee\bar{X}\vee Y)\wedge X=$*Закон комутативності диз'юнкції*

$(Y\vee Y\vee\bar{X})\wedge X=$*Закон ідемпотентності диз'юнкції*

$(Y\vee\bar{X})\wedge X=$*Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції*

$Y\wedge X\vee\bar{X}\wedge X=$*Вираження нуля через кон'юнкцію та заперечення*

$Y\wedge X\vee 0=$*Закон нуля відносно диз'юнкції* $=Y\wedge X$

$f(X,Z,Y)= X\wedge Y$

Функція $f(X,Z,Y)= X\wedge Y$ *є рівносильною до вихідної і являється більш простою.*

Відповідна релейно-контактна схема має вигляд:

Синтез релейно-контактних схем

Задача 6. Побудуйте найбільш просту релейно-контактну схему функція провідності якої задається наступною пропозиційною формою:

$$((X\to Y)\to Z)\vee(Y\to X)\wedge Z$$

Розв'язування.

Виразимо спочатку дану функцію через функції $\neg, \wedge, \vee$*, причому так, щоб знак* $\neg$ *стояв лише перед змінними:*

$((X\to Y)\to Z)\vee(Y\to X)\wedge Z$ =*Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(\overline{X}\vee Y\to Z)\vee(Y\to X)\wedge Z$ =*Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$(\overline{\overline{X}\vee Y})\vee Z\vee(Y\to X)\wedge Z$ =*Закон де Моргана для диз'юнкції*

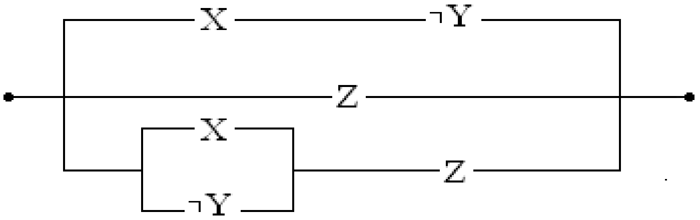
$\overline{\overline{X}}\wedge\overline{Y}\vee Z\vee(Y\to X)\wedge Z$ =*Закон подвійного заперечення*

$X\wedge\overline{Y}\vee Z\vee(Y\to X)\wedge Z$ =*Вираження імплікації через диз'юнкцію та заперечення*

$X\wedge\overline{Y}\vee Z\vee(\overline{Y}\vee X)\wedge Z$ =*Закон комутативності диз'юнкції*

$X\wedge\overline{Y}\vee Z\vee(X\vee\overline{Y})\wedge Z$

Відповідна релейно-контактна схема має вигляд:



Задача 7. Побудуйте найбільш просту релейно-контактну схему з заданими умовами роботи:

$$f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,0)=f(1,0,1)=1$$

Розв'язування.

Для знаходження пропозиційної форми для функції f *необхідно скористатися ДДН-формою.Виділяємо ті набори значень змінних, для яких формула приймає значення 1. Вони будуть такими:* $f(000)=f(001)=f(100)=f(101)=1$*. Виписуємо ДДНФ, яка задовольняє цим умовам:*

$f(X,Y,Z)=(\overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge Z)\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge Z)$

Спрощуємо її за допомогою рівносильних перетворень:

$(\overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(\overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge Z)\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge Z)$ =

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

$((\overline{X}\wedge\overline{Y})\wedge(\overline{Z}\vee Z))\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge Z)$ = *Вираження одиниці через диз'юнкцію*

$((\overline{X}\wedge\overline{Y})\wedge(1))\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge Z)$ =*Закон одиниці відносно кон'юнкції*

$(\overline{X}\wedge\overline{Y})\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Z})\vee(X\wedge\overline{Y}\wedge Z)$ =

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

$(\overline{X}\wedge\overline{Y})\vee((X\wedge\overline{Y})\wedge(\overline{Z}\vee Z))$ =*Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення*

$(\overline{X}\wedge\overline{Y})\vee((X\wedge\overline{Y})\wedge(1))=(\overline{X}\wedge\overline{Y})\vee(X\wedge\overline{Y})=((\overline{X}\vee X)\wedge\overline{Y})=(1\wedge\overline{Y})=\overline{Y}$

Закон одиниці відносно кон'юнкції

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення

f(X,Y,Z)= $\overline{Y}$***. Відповідна релейно-контактна схема має вигляд***

Задача 8. Двері відкриваються, якщо натиснуто не менш двох кнопок із трьох. Побудувати по можливості найбільш просту схему, через яку струм проходив би тоді і тільки тоді, коли не менш двох кнопок натиснуто.

Розв'язування.

Функція провідності такої схеми є функція більшості від трьох змінних. Знайдемо пропозиційну формулу від трьох змінних, яка завжди приймає те саме значення, що і більшість її аргументів.

Для знаходження пропозиційної форми для функції f необхідно скористатися ДДН-формою. Виділяємо ті набори значень змінних, для яких формула приймає значення 1. Вони будуть такими:

$f(0,1,1)= f(1,0,1)= f(1,1,0)= f(1,1,1)=1$

Виписуємо ДДНФ, яка задовольняє таким умовам:

$f(X,Y,Z)= (\bar{X}\wedge Y\wedge Z)\vee(X\wedge\bar{Y}\wedge Z)\vee(X\wedge Y\wedge\bar{Z})\vee(X\wedge Y\wedge Z)$

Спрощуємо її за допомогою рівносильних перетворень:

$(\bar{X}\wedge Y\wedge Z)\vee(X\wedge Y\wedge Z)\vee((X\wedge\bar{Y})\wedge Z)\vee((X\wedge Y)\wedge\bar{Z}) =$

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

$((\bar{X}\vee X)\wedge Y\wedge Z)\vee((X\wedge\bar{Y})\wedge Z)\vee((X\wedge Y)\wedge\bar{Z}) =$

Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення

$((1\wedge Y)\wedge Z)\vee((X\wedge\bar{Y})\wedge Z)\vee((X\wedge Y)\wedge\bar{Z}) =$

Закон одиниці відносно кон'юнкції

$(Y\wedge Z)\vee(X\wedge\bar{Y}\wedge Z)\vee(X\wedge Y\wedge\bar{Z}) =$

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

$((Y\vee X\wedge\bar{Y})\wedge Z)\vee(X\wedge Y\wedge\bar{Z}) =$

Закон дистрибутивності диз'юнкціївідносно кон'юнкції

$(Y\vee X)\wedge(Y\vee\bar{Y})\wedge Z\vee X\wedge Y\wedge\bar{Z}=$

Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення

$(Y\vee X)\wedge 1\wedge Z\vee X\wedge Y\wedge\bar{Z}=$

Закон одиниці відносно кон'юнкції

$(Y\vee X)\wedge Z\vee X\wedge Y\wedge\bar{Z}=$

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

$Y\wedge Z\vee X\wedge Z\vee X\wedge Y\wedge\bar{Z}=$

Закон комутативності диз'юнкції

$X\wedge Z\vee Y\wedge Z\vee X\wedge Y\wedge\bar{Z} =$

Закон комутативності кон'юнкції

$X\wedge Z\vee Y\wedge Z\vee Y\wedge X\wedge\bar{Z} =$

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

$X\wedge Z\vee(Z\vee X\wedge\bar{Z})\wedge Y =$

Закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції

$X\wedge Z\vee(Z\vee X)\wedge(Z\vee\bar{Z})\wedge Y = X\wedge Z\vee(Z\vee X)\wedge 1\wedge Y =$

Вираження одиниці через диз'юнкцію та заперечення

Закон одиниці відносно кон'юнкції

$X\wedge Z\vee(Z\vee X)\wedge Y = X\wedge Z\vee Z\wedge Y\vee X\wedge Y = X\wedge Y\vee Y\wedge Z\vee X\wedge Z$

Закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції

Закон комутативності кон'юнкції

Функція провідності має наступний вигляд: $f(X,Y,Z)= XY\vee YZ\vee XZ$**.**

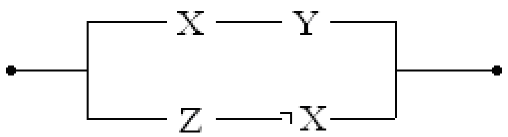
Розвязати завдання за номером варіанта

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10.1	1	2	3	4	5	6	7								
10.2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10.3								1	2	3	4	5	6	7	8
10.4	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

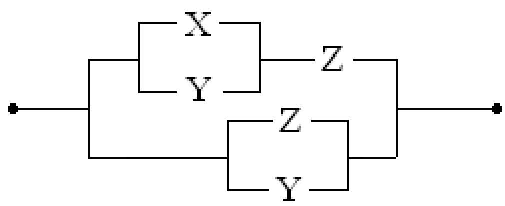
Задачі для самостійного розв’язування

10.1. За даною релейно-контактною схемою знайдіть її функцію провідності і умови роботи:

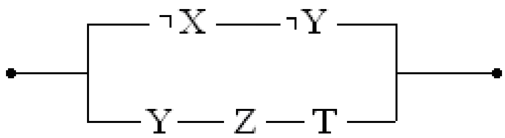
1)



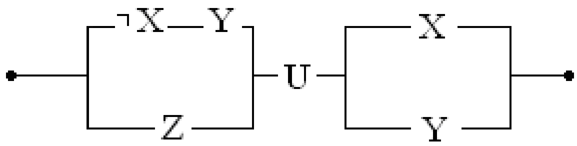
6)



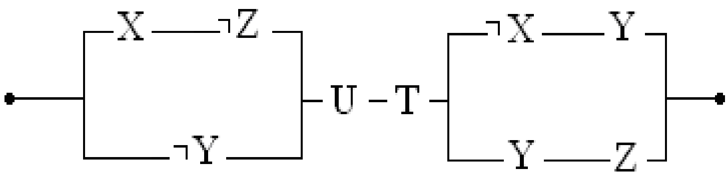
2)



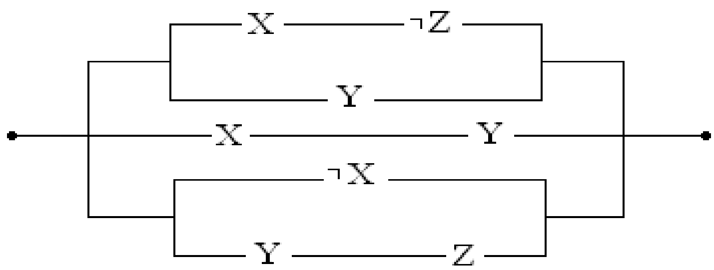
7)



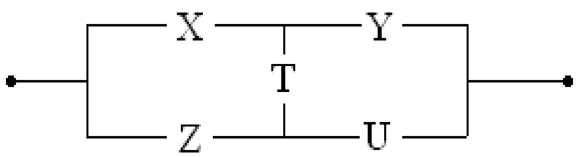
3)



4)

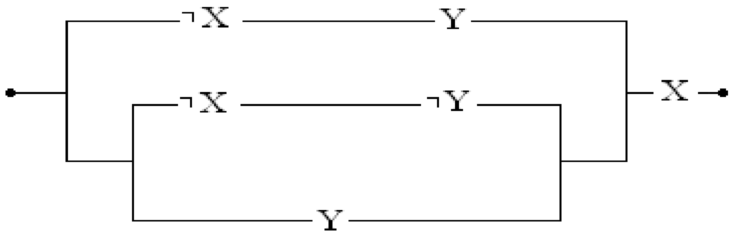


5)

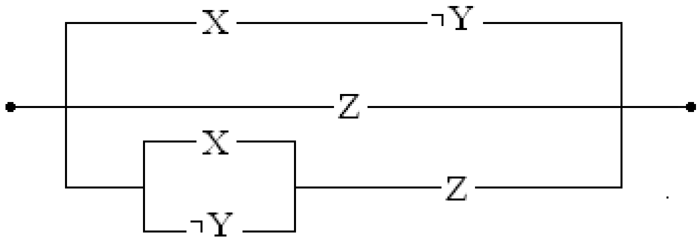


10.2. Спростіть наступні релейно-контактні схеми:

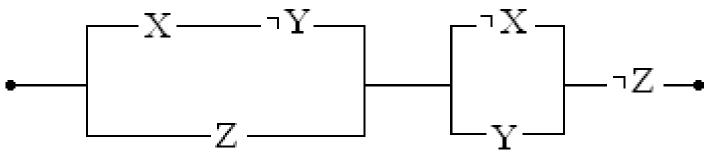
1)



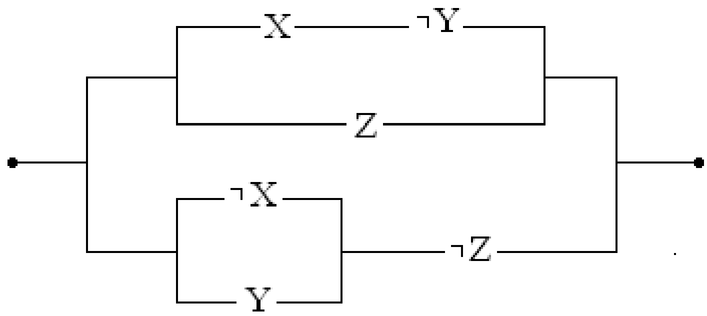
2)



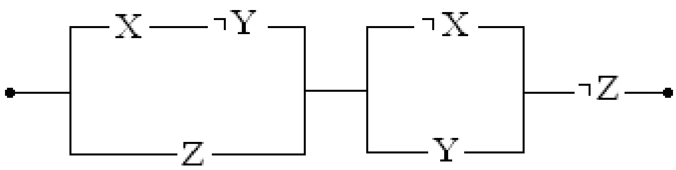
3)



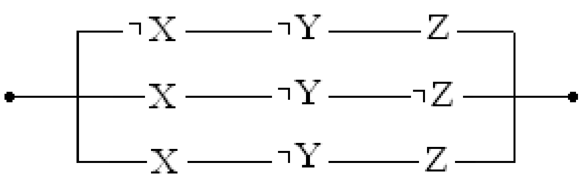
4)



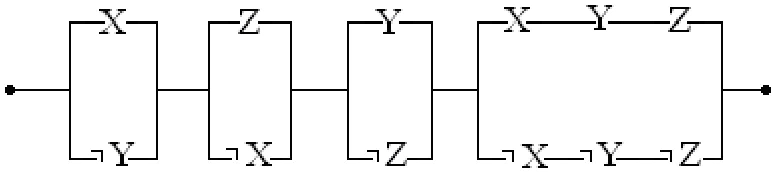
5)



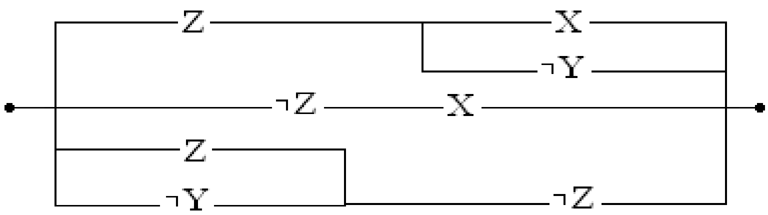
6)



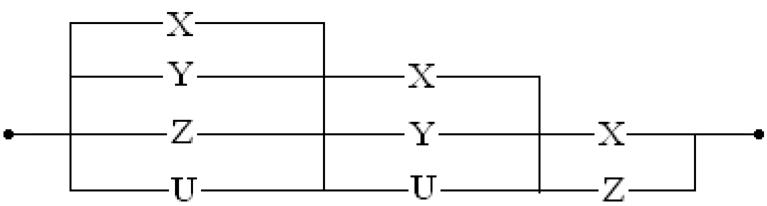
7)


X
Z
Y
X
Y
Z
¬Y
¬X
¬Z
¬X
¬Y
¬Z

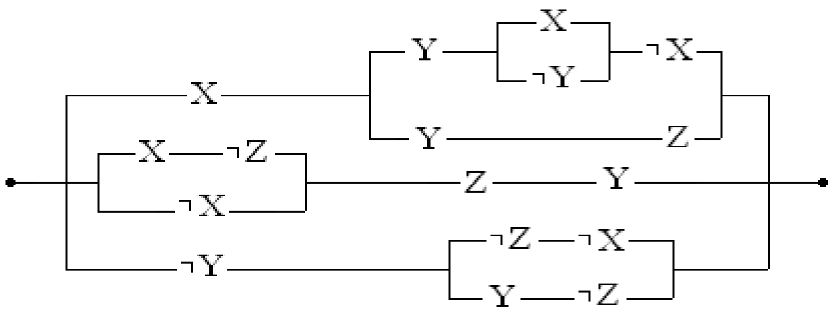
8)


Z
X
¬Y
¬Z
X
Z
¬Y
¬Z

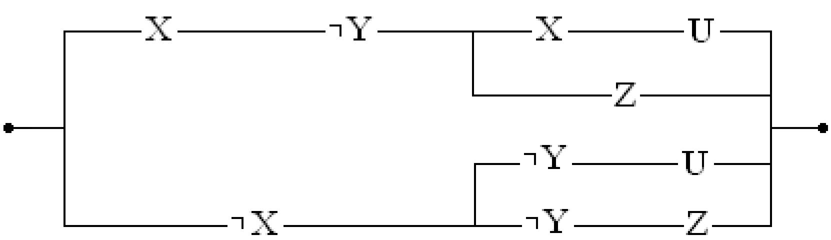
9)


X
Y
Z
U
X
Y
U
X
Z

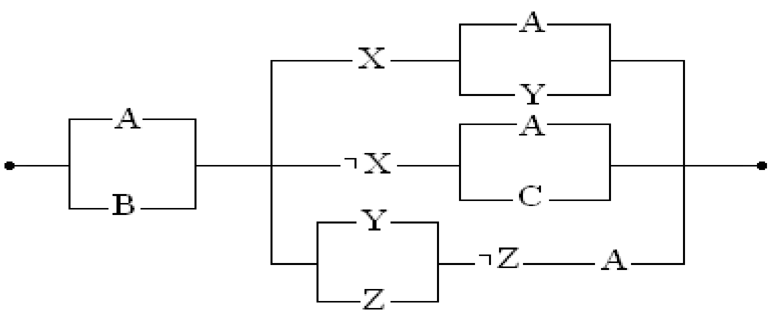
10)


X
¬Y
Y
¬X
X
Y
Z
X
¬Z
¬X
Z
Y
¬Y
¬Z
¬X
Y
¬Z

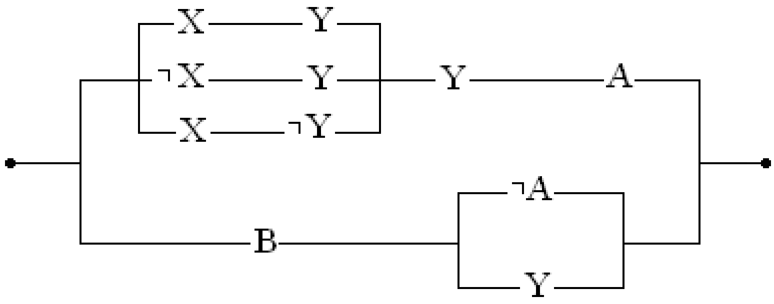
11)


X
¬Y
X
U
Z
¬Y
U
¬X
¬Y
Z

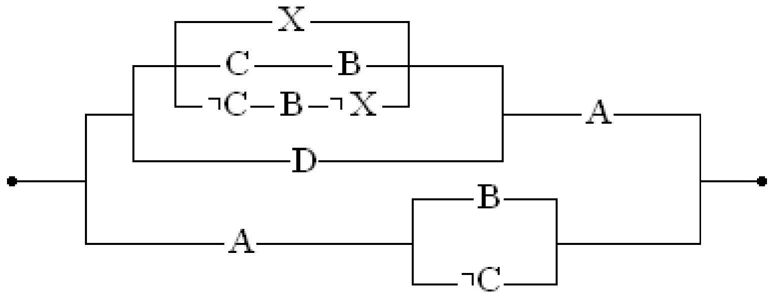
12)


A
B
X
A
Y
¬X
A
C
Y
Z
¬Z
A

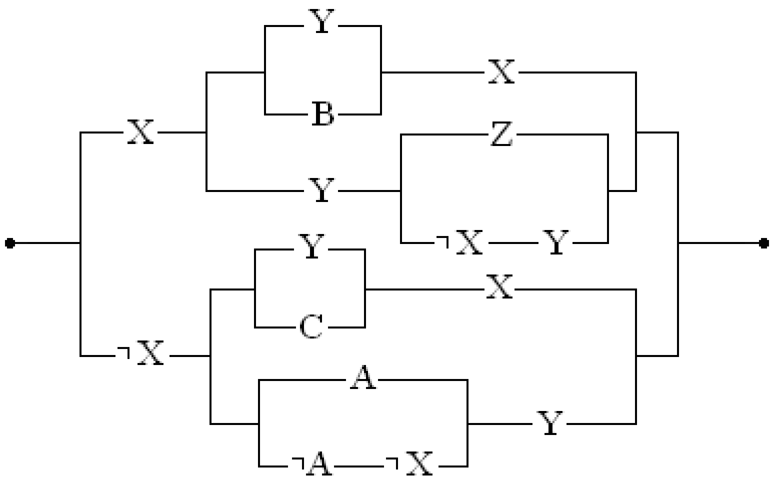
13)



14)

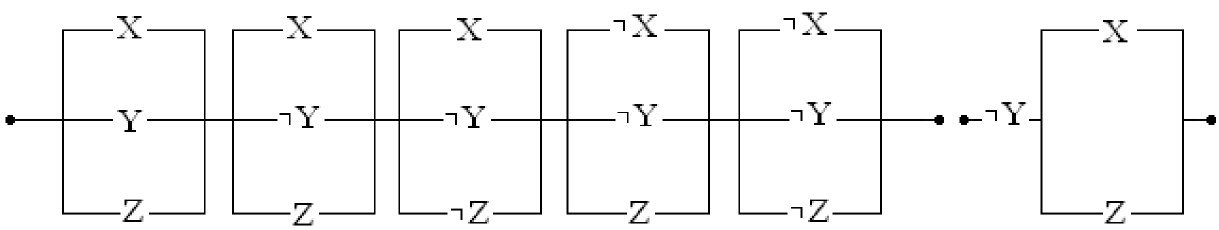


15)

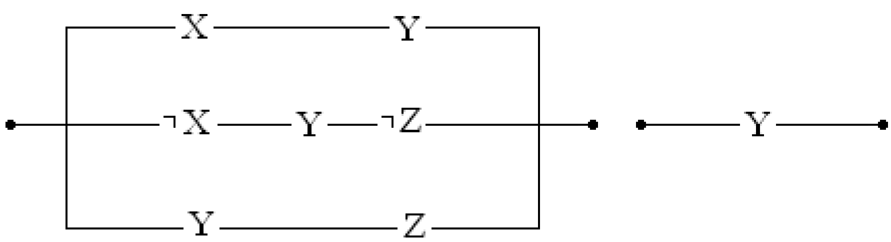


10.3. Перевірити рівносильність наступних релейно-контактних схем:

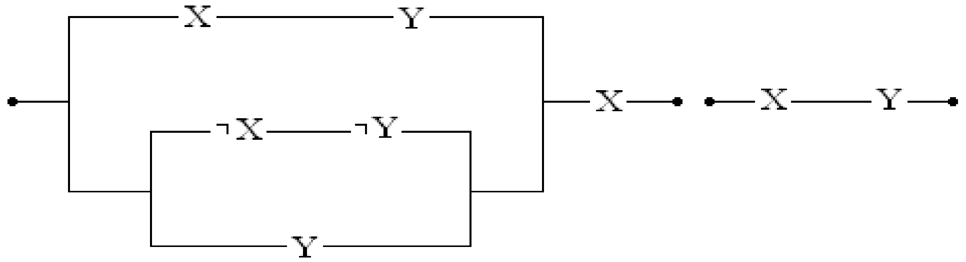
1)



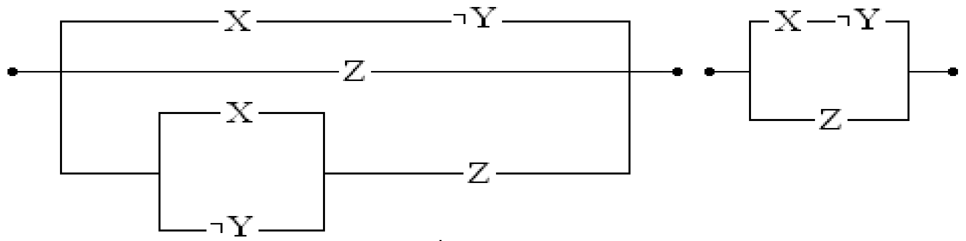
2)



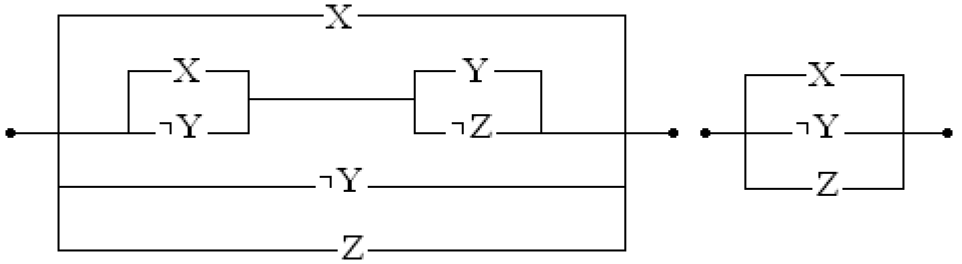
3)


X
Y
¬X
¬Y
Y
X
X
Y

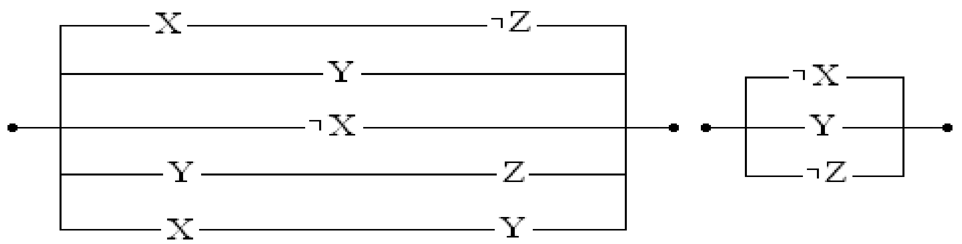
4)


X
¬Y
Z
X
¬Y
Z
X
¬Y
Z

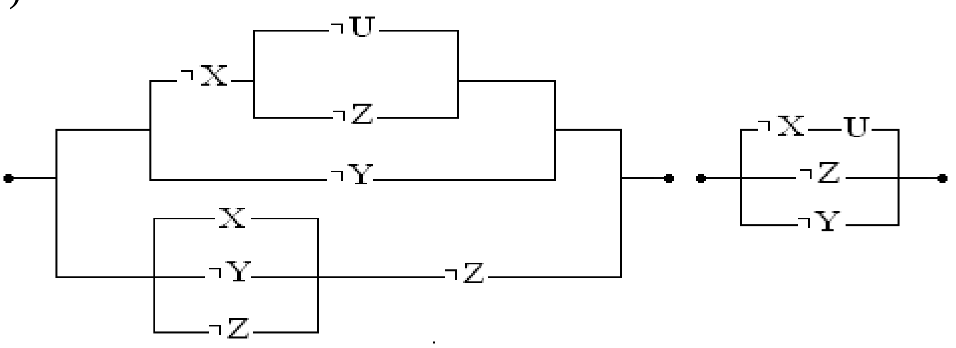
5)


X
X
¬Y
Y
¬Z
¬Y
Z
X
¬Y
Z

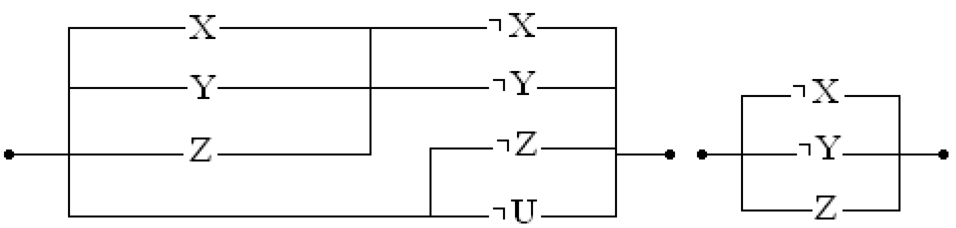
6)


X
¬Z
Y
¬X
Y
Z
X
Y
¬X
Y
¬Z

7)


¬U
¬X
¬Z
¬Y
X
¬Y
¬Z
¬Z
¬X
U
¬Z
¬Y

8)


X
Y
Z
¬X
¬Y
¬Z
¬U
¬X
¬Y
Z

10.4. Побудувати найбільш прості релейно-контактні схеми функції провідності яких задаються наступними пропозиційними формами:

1. $X \wedge Y \vee Z \wedge (\bar{Z} \vee \bar{X})$
2. $(X \vee Y) \wedge \bar{Z} \vee \bar{X} \wedge Z \vee Y$
3. $((\bar{X} \vee Y) \wedge (Y \wedge Z \vee X)) \vee Y \wedge Z$
4. $Y \wedge (X \vee \bar{Y}) \vee X \wedge \bar{Y} \vee Z \wedge (Y \vee X)$
5. $X \wedge \bar{Z} \vee \bar{X} \wedge Y \wedge \bar{Z} \vee \bar{X} \wedge (\bar{Y} \wedge \bar{Z} \vee Y)$
6. $X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge Z \vee Y \wedge Z$
7. $(X \to Y) \to (\bar{X} \wedge (Y \vee Z))$
8. $(X \to (Y \to Z)) \to (Y \to \bar{X})$
9. $(X \to (Y \to \bar{Z})) \vee ((X \wedge Y) \leftrightarrow Z)$
10. $((\bar{X} \vee Y) \wedge (Y \wedge Z \vee X)) \vee \bar{X} \wedge Z$
11. $Y \wedge (X \vee \bar{Y}) \vee X \wedge \bar{Y} \vee Z \wedge (Y \vee X)$
12. $X \wedge \bar{Z} \vee \bar{X} \wedge Y \wedge \bar{Z} \vee \bar{X} \wedge (\bar{Y} \wedge \bar{Z} \vee Y)$
13. $X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge Z \vee Y \wedge Z$
14. $(X \to Y) \to (\bar{X} \wedge (Y \vee Z))$
15. $X \wedge Y \to Z \wedge (\bar{Z} \vee \bar{X})$

10.5. Побудувати найбільш прості релейно-контактні схеми з заданими умовами роботи:

1. f(0,1,0)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=1
2. f(1,0,1)=f(1,1,0)=1
3. f(0,0,1)=f(0,1,1)=f(1,0,1)= f(1,1,1)=1
4. f(1,1,0,1)=f(1,1,1,0)=1
5. f(0,0,1,0)=f(1,0,0,1)=f(1,0,1,1)=1
6. f(1,1,0)=f(0,0,0)=f(1,0,0)=1
7. f(0,0,0)=f(1,0,1)=1
8. f(0,0,1)=f(0,1,0)=f(0,1,1)= f(1,0,1)=1
9. f(0,0,0)=f(0,1,0)=f(1,0,0)= f(0,1,1)=1
10. f(1,1,1,1)=f(0,1,0,1)=1
11. f(0,0,1,1)=f(0,0,0,0)=f(1,1,0,0)=1
12. f(0,0,1,1)=f(1,1,1,0)=f(0,1,1,0)=1
13. f(0,1,0)=f(0,0,1)=f(1,1,1)=1
14. f(0,0,1)=f(0,1,0)=f(1,0,1)= f(1,1,1)=1
15. f(0,0,1)=f(1,1,0)=f(1,0,1)=1

Практична робота11-12.

Мінімізація булевих функцій. Карти Карно.Метод Квайна.

Мета: Закріпити навички та вміння визначати тип формули і її логічне значення. Познайомитися з основними

План

- **Мінімізація нормальних форм усюди визначених булевих функцій..**
- **Основні методи мінімізації.**
- **Карти Карно.**

Короткі теоретичні відомості

Мінімізація нормальних форм усюди визначених булевих функцій.

Елементарна кон'юнкція Е називається ***імпликантою*** булевої функції f, якщо E->f=l.

Імпліканта В називається ***простою***, якщо при видаленні будь-якої букви з неї вона перестає бути імпликантою булевої функції Г.

Скороченою ДНФ називається ДНФ, що складається з усіх простих імплікант даної булевої функції.

Ядрова імпліканта - імпліканта, видалення якої з ДНФ деякої булевої функції f приводить до ДНФ, не рівносильної £

МінімальнаДНФ даної функції f - ДНФ, що має найменше число символів перемінних із усіх ДНФ, що задають функцію f.

Тупикової ДНФ функції f називається така її ДНФ, що складається з простих импликант, що видалення з неї будь-якої кон'юнкції порушує рівносильність ДНФ даної функції.

Складністю ДНФ (КНФ) називається кількість символів перемінних, використаних у записі формули.

Скорочена ДНФ може бути отримана зі ДДНФ послідовним застосуванням, поки це можливо, формули ***неповного склеювання***

$$Ku \vee K\overline{u} = Ku \vee K\overline{u} \vee K,$$

а потім - формули ***поглинання*** $Ku \vee K = K$.

Імплікантна таблиця n-арною бф f- прямокутна таблиця двома входами. Строки позначаються простими імплікантами k_i функції f, а столбчики – двоїчними кортежами σ_j довжиною n, на яких функція $f = 1$, $i = 1,2,\ldots,r,\ j = 1,2,\ldots,s$. Якщо імпліканта k_i накриває двоїчний кортеж σ_j, то на перетині і-тої строки и j-того стовбчика таблиці ставиться *. Всі інші клітини таблиці залишаються порожніми.

Метод Петрика

Кожній простій імпліканті бф f, тобто кожній строці імплікантної таблиці функции f, ставиться у відповідність нова булева змінна.

Метод Блейка

Запишемо формулу склеювання $Ax \vee B\overline{x} = Ax \vee B\overline{x} \vee AB$. Якщо в довільній ДНФ функції f провести всі можливі склеювання, а також виконати всі елементарні поглинання, в результаті отримаємо скорочену ДНФ функції f.

Карти Карно

Будь – яка ЕК змінних накриває в карті Карно деякий прямокутник з сторонами, які є степенями 2.

1. формуємо карту Карно для f.

2. знайти покриття всіх одиниць функції f прямокутниками максимальних розмірів так, щоб кількість таких прямокутників була найменшою.

3. диз'юнкція імплікант, які відповідають прямокутникам покриття, є шуканою мінімальною ДНФ.

Хід заняття

Методичні вказівки до методу Квайна

Задача 1. Для даної функції $f(x,y,z,w)=(1101\,1010\,1101\,1100)$, заданої векторно, проробити наступне :

1) Записати її ДДНФ і ДКНФ.
2) Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.
3) Для скороченої ДНФ побудувати матрицю Квайна, указати ядрові імпліканти.
4) За допомогою матриці Квайна знайти мінімальну ДНФ, указати її складність.
5) Знайти мінімальну ДНФ даної функція за допомогою карт Карно, порівняти отриманий результат із ДНФ, знайденої в п.4 *Розв'язування.*

1) Зобразимо таблицю функції f у виді двовимірної таблиці- карти Карно:

zw / xy	00	01	11	10
00	1	I	1	0
01	1	0	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	1	0

Знайдемо ДДНФ даної функції:

$$f(x,y,z,w) = \wedge(x^{\bar{a}} y^{\bar{b}} z^{\bar{c}} w^{\bar{d}}) = (x^1 \vee y^1 \vee z^0 \vee w^1) \wedge$$
$$(x^1 \vee y^0 \vee z^1 \vee w^0) \wedge (x^1 \vee y^0 \vee z^0 \vee w^0) \wedge (x^0 \vee y^1 \vee z^0 \vee w^1) \wedge$$
$$(x^0 \vee y^0 \vee z^0 \vee w^1) \wedge (x^0 \vee y^0 \vee z^0 \vee w^0) = (x \vee y \vee \bar{z} \vee w) \wedge$$
$$(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{w}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{w}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee w) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee w) \wedge$$
$$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{w})$$

Знайдений ДКНФ даної функції:

$$f(x,y,z,w) = \vee x^a y^b z^c w^d = x^0 y^0 z^0 w^0 \vee$$
$$\vee x^0 y^0 z^0 w^1 \vee x^0 y^0 z^1 w^1 \vee x^0 y^1 z^0 w^0 \vee x^0 y^1 z^1 w^0 \vee$$
$$x^1 y^0 z^0 w^0 \vee x^1 y^0 z^0 w^1 \vee x^1 y^0 z^1 w^1 \vee x^1 y^1 z^0 w^0 \vee$$
$$x^1 y^1 z^0 w^1 = \overline{xyzw} \vee \overline{xyz}w \vee \overline{xy}zw \vee \bar{x}y\overline{zw} \vee \bar{x}yz\bar{w} \vee$$
$$x\overline{yzw} \vee x\overline{yz}w \vee x\bar{y}zw \vee xy\overline{zw} \vee xy\bar{z}w$$

2) Побудуємо скорочену ДНФ зі ДДНФ, використовуючи формули неповного склеювання і поглинання. Для зручності, замість символів перемінних будемо працювати тільки з показниками ступенів перемінних. Наприклад, замість $\bar{x}z$ будемо вживати набір 0-1. Тоді ДДНФ функції буде відповідати безліч усіх її одиничних наборів.

Випишемо одиничні набори даної булевої функції в таблицю, розбивши них на групи відповідно до кількості одиничних компонентів у наборах.

<table>
<tr><td>0</td><td>0 0 0 0 +</td><td rowspan="2">0 0 0 - +
0 - 0 0 +
- 0 0 0 +</td><td rowspan="2">- 0 0 -
- - 0 0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0 0 0 1 +
0 1 0 0 +
1 0 0 0 +</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0 0 1 1 +
0 1 1 0 +
1 0 0 1 +
1 1 0 0 +</td><td>0 0 – 1 +
0 1 – 0
- 0 0 1 +
1 0 0 - +
- 1 0 0 +
1 – 0 0 +</td><td rowspan="2">- 0 - 1
1 – 0 -</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1 0 1 1 +
1 1 0 1 +</td><td>- 0 1 1 +
1 0 – 1 +
1 – 0 1 +
1 1 0 - +</td></tr>
<tr><td>index</td><td>1 смуга</td><td>2 смуга</td><td>3 смуга</td></tr>
</table>

Тоді для застосування формули неповного склеювання досить переглянути всілякі пари наборів, що входять у сусідні групи. Результати склеювання наборів з I смуги помістимо в И смузі, а набори, що беруть участь у склеюваннях, позначимо хрестиком. В другій смузі знову застосовуємо, наскільки можливо, операцію склеювання, записуючи результати в III смугу і т.д. Після завершення процедури склеювання всі прості імпліканти потраплять у таблицю і не будуть позначені хрестиком. Позначені ж кон'юнкції поглинуться на етапі застосування формули поглинання.

Скорочена ДНФ даної булевой функції має вигляд:

$$\bar{x}y\bar{w} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}w \vee x\bar{z}$$

3) Для одержання зі скороченої ДНФ мінімальної ДНФ зобразимо наступну таблицю - матрицю Квайна: Ядровими імплікантами будуть 1, 4 і 5, тому що для кожної з них найдеться одиничний набір, на якому вона одна приймає значення 1.

№ простої імпліканти	1	2	3	4	5
Прості імпліканти / Одиничні набори	$\bar{x}y\bar{w}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{y}w$	$x\bar{z}$
0000		1	1		
0001		1		1	
0011				1	
0100	1		1		
0110	1				
1000		1	1		1
1001		1		1	1
1011				1	
1100			1		1
1101					1

4) Вибираємо найменше число стовпців таких, щоб для кожного рядка з даної таблиці і хоча б однієї одиниці в цьому рядку найшовся б принаймні один стовпець з безлічі обраних стовпців, що містить цю одиницю. Тоді диз'юнкція членів, зіставлених всім обраним стовпцям, є мінімальної ДНФ.

Задача 2. Нехай $f(x,y,z)=(0111\ 0011)$,
$g(x,y,z,w)=(1111\ 1101\ 1010\ 0000)$, $h(x,y,z,w)=(0010\ 1111\ 11111010)$.

Побудувати карту Карно для функції $f(x,y,z)$. Знайти мінімальну КНФ, мінімальну ДНФ функції $g(x,y,z)$.

Розв'язування.

xy \ z	0	1
00	0	1
01	1	1
11	1	1
10	0	0

Карта Карно для функції $f(x,y,z)$ від трьох змінних має такий вигляд.

Ми вважаємо її як би наклеєної на поверхню циліндра, тобто ототожнюємо верхню частину карти Карно з нижньої. При відшуканні мінімальної ДНФ одиниці карти Карно покриваємо прямокутниками виду 2x2 і 1x2, що відповідає імплікантам і xz відповідно, одержуємо мінімальну ДНФ $y \vee \bar{x}z$.

Її складність дорівнює 3.

Для перебування мінімальної КНФ покриваємо нулі карти Карно двома прямокутниками розмірами 1x2, що відповідають елементарним диз'юнкціям $\bar{x} \vee y$ і $z \vee y$. У результаті одержуємо мінімальну КНФ $(\bar{x} \vee y) * (z \vee y)$

При перебуванні мінімальної ДНФ функції $g(x,y,z)$ заповнюємо карту-Карно і покриваємо одиниці карти прямокутниками можливо великих розмірів:

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Одержимо мінімальну ДНФ: $\overline{y}\overline{w} \vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{x}w$. Складність МДНФ дорівнює 6.

Відшукаємо мінімальну КНФ . Для цього зробимо покриття нулів Карно: Мінімальна КНФ буде мати вигляд: $(\bar{x} \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{w}) \cdot (\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{w})$.

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Задачі для самостійного розв'язування практичне 11

11.1 Для даної функції f(x,y,z,w), заданої векторно, пробробити наступне :

1) Записати її ДДНФ і ДКНФ.
2) Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.
3) Для скороченої ДНФ побудувати матрицю Квайна, указати ядрові імпліканти.
4) За допомогою матриці Квайна знайти мінімальну ДНФ, вказати її складність.

№	*f*	№	*f*	№	*f*
1	1111 0101 0011 1101	6	1111 1110 1010 0011	11	0100 1110 1101 1111
2	1101 1110 1010 1110	7	1111 0010 0111 1110	12	1111 1110 0111 1100
3	0111 0001 1111 1101	8	1100 1110 1111 1011	13	1000 1011 1111 1111
4	1011 1111 1111 1000	9	1100 0110 1111 0111	14	1111 1101 1110 0001
5	1101 0101 1101 1111	10	1011 1111 1110 0010	15	1101 0111 1100 1110

11.2 див 11.1

№	*f*	№	*f*	№	*f*
1	1011 1111 0001 1111	6	1110 0110 1111 1100	11	1011 1111 1010 1101
2	1110 1100 1111 1001	7	0111 0111 0101 1011	12	1001 1101 1010 1111
3	1001 1011 1111 1010	8	1101 11111110 1010	13	1110 0110 1111 1100
4	1111 1110 0111 0011	9	1111 00110111 0111	14	0011 1011 1010 1111
5	1010 1111 0111 0011	10	1110 11101010 1101	15	1111 01101110 1110

Задачі для самостійного розв'язування практичне 12

12.1 -12.2 Для завдання 11.1 (11.2) знайти мінімальну ДНФ функції за допомогою карт Карно, порівняти отриманий результат із ДНФ, знайденої в п.4.

12.3 Нехай $f(x,y,z)$, $g(x,y,z,w)$, $h(x,y,z,w)$. Побудувати карту Карно для функцій. Знайти мінімальну КНФ, мінімальну ДНФ функцій.

№	*f*	*g*	*h*
1	1110 0110	1101 1110 1010 0110	1010 1000 0101 1001
2	0111 0101	1111 0111 0111 0001	0111 0101 1011 0011
3	1101 1110	0111 0101 1011 1011	1110 1010 1101 0001
4	1111 0111	11101010 1101 0101	1111 0111 0111 0101
5	11101010	11101010 1101 0011	1110 1010 1010 0001
6	1011 1111	1011 0001 0001 0101	1011 1111 0001 1100
7	1110 1111	1110 1111 1001 0001	1110 1001 1000 1100
8	1011 1111	1011 1010 1110 1000	1011 1111 1010 1101
9	1111 1110	1111 1000 0101 0011	1001 0100 1011 1001
10	1010 0111	1110 0110 1111 0101	1010 1000 0101 1011
11	1100 1110	1011 0001 0001 0101	0111 0101 1011 0011
12	1110 0111	1110 1111 1001 0001	1110 1010 1101 0001
13	11001010	1011 1010 1110 1000	1111 0111 0111 0101
14	1001 1111	0111 0101 1011 1011	1110 1001 1000 1100
15	1100 1111	11101010 1101 0101	1011 1111 1010 1101

Практична робота13

Теорема Поста. Повнота та замкненість функцій.

Мета: Засвоїти знання про функції алгебри логіки (булеві функції). Розкрити поняття функціональної повноти системи операцій алгебри висловлень. Закріпити навички та вміння визначати тип формули і її логічне значення. Познайомитися з основними

План

- **Загальні відомості про булеві функції.**
- **Булеві функції від одного та двох аргументів.**
- **Функціонально повні системи операцій алгебри висловлень.**
- **Визначення класів Поста.**
- **Суперпозиції функцій. Замикання класів. Теорема Поста.**

Короткі теоретичні відомості

Означення. Булевою називається функція, значення якої, як і значення всіх її аргументів, належить заданій двохелементній множині.

Зафіксуємо цю двохелементну множину як $\{0,1\}$. Тоді булева функція від n аргументів (n-місна) є відображенням множини $\{0,1\}^n$ на $\{0,1\}$. Таким чином, функції істинності алгебри висловлень є булевими функціями.

Булеву n-місну функцію $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ можна задати:

а) безпосередньо таблицею істинності, на якій точно визначено, яке значення f відповідає кожній окремій упорядкованій n –ці (набору) значень аргументів $X_1, X_2, ..., X_n$;

б) формулою, в якій задано операції, що їх треба виконати над значенням аргументів $X_1, X_2, ..., X_n$, щоб отримати значення функції.

Число всіх n-місних булевих функцій дорівнює 2^{2^n}. Зокрема, число різних одномісних булевих функцій становить $2^{2^1}=4$, для двомісних булевих функцій це число дорівнює $2^{2^2}=16$, для тримісних – 256.

Представимо всі булеві функції від одного аргументу.

$f_0(X)=0$ - функція, *тотожно рівна 0* (*тотожний нуль*),

$f_1(X)=X$ - *тотожна* функція,

$f_2(X)=\overline{X}$- функція, яку називають *запереченням,*

$f_3(X)=1$ - функція, *тотожно рівна 1* (*тотожна одиниця*).

Перелічимо усі можливі булеві функції **від двох аргументів** у вигляді наступної таблиці, вже знайомої нам з практичного 8.

Таблиця

Аргументи		Булеві функції															
X	Y	0	$\wedge$	$\to'$	X	$\leftarrow'$	Y	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg Y$	$\leftarrow$	$\neg X$	$\to$	$\mid$	1
		g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Багато з перелічених функцій мають назви та спеціальні позначення. Наведемо їх, згрупувавши функції у пари за тим принципом, що кожна функція з пари є запереченням другої функції цієї ж пари:

$g_0(X,Y)=0$ і $g_{15}(X,Y)=1$ – *тотожний нуль* і *тотожна одиниця*.

$g_1(X,Y)$ - називається *кон'юнкцією* і позначається $X\wedge Y$ *(або* $X\cdot Y$*)*.

$g_{14}(X,Y)$ - називається *штрихом Шеффера* і позначається X/Y. Таким чином, $g_{14}(X,Y)=\neg(X\wedge Y)=X/Y$.

$g_7(X,Y)$ - називається *диз'юнкцією* і позначається $X\vee Y$.

$g_8(X,Y)$ - є запереченням функції $g_7(X,Y)$, називається *стрілка Пірса* (або *функція Вебба*) і позначається $X\downarrow Y$. Отже, $g_8(X,Y)=\neg(X\vee Y)=X\downarrow Y$.

$g_{13}(X,Y)$ - називається *імплікацією* і позначається $X\rightarrow Y$, тобто $g_{13}(X,Y)=X\rightarrow Y$.

$g_2(X,Y)=\neg(X\rightarrow Y)$ - *заперечення імплікації.* Спеціальної назви вона не має (у табл. 2 позначена $\rightarrow'$).

$g_{11}(X,Y)$ - називається *антиімплікацією* або *зворотньою імплікацією*, $g_{11}(X,Y)=Y\rightarrow X$ (у табл. 2 позначена $\leftarrow$).

$g_4(X,Y)=\neg(Y\rightarrow X)$ - заперечення функції $g_{11}(X,Y)$. Спеціальної назви вона не має (у табл. 2 позначена $\leftarrow'$).

$g_9(X,Y)$ - називається *еквівалентністю* і позначається $X\leftrightarrow Y$, тобто $g_9(X,Y)=X\leftrightarrow Y$.

$g_6(X,Y)$ - є запереченням функції $g_9(X,Y)$, називається *додаванням за модулем два* або *сумою Жегалкіна*, і позначається $X\oplus Y$.

функції $g_3(X,Y)$ і $g_{12}(X,Y)$. Перша з них приймає завжди ті ж самі значення, що і її перший аргумент, тобто $g_3(X,Y)=X$, а друга функція є запереченням першої: $g_{12}(X,Y)=\neg X$.

функції $g_5(X,Y)$ і $g_{10}(X,Y)$. Перша з них приймає завжди ті ж самі значення, що і її другий аргумент, тобто $g_5(X,Y)=Y$, а друга функція є запереченням першої: $g_{10}(X,Y)=\neg Y$.

Кожній формулі алгебри висловлень відповідає булева функція (функція істинності), що називається *приєднаною функцією* даної пропозиційної формули. Чи має місце обернене твердження , тобто, чи для кожної булевої функції існує формула алгебри висловлень, яка зображає або реалізує цю функцію.

Сформулюємо теорему, яка встановлює це твердження.

Теорема 1. *Кожна булева функція зображується формулою алгебри висловлень, яка містить символи не більш ніж трьох логічних операцій – кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення.*

Зображення довільної булевої функції формулою алгебри висловлень, що містить символи тільки трьох операцій, обумовлює введення нового поняття функціональної повноти.

Означення. *Система операцій алгебри висловлень називається функціонально повною, якщо кожну булеву функцію можна зобразити формулою, яка не містить жодних символів логічних операцій, крім тих, що входять у дану систему.*

Використовуючи це означення, теорему 1 можна сформулювати так:

Система операцій $\{\neg,\wedge,\vee\}$ є функціонально повною.

Сформулюємо теорему, яка встановлює факт існування інших важливих функціонально повних систем операцій алгебри висловлень.

Теорема 2. *Наступні системи операцій є функціонально повними:*

1) $\{\neg,\vee\}$, 2) $\{\neg,\wedge\}$, 3) $\{\neg,\rightarrow\}$, 4) $\{\wedge,\oplus,1\}$, 5) $\{\rightarrow,0\}$, 6) $\{/\}$, 7) $\{\downarrow\}$.

Класами Поста називаються наступні 5 класів: T_0, T_1, L, S, M.

1. ***Клас функцій, що зберігає константу 0***:

$$T_0 = \left\{ f \in P_2 \mid f(0,0,\ldots,0) = 0 \right\}$$

2. ***Клас функцій, що зберігає константу 1***:

$$T_1 = \left\{ f \in P_2 \mid f(1,1,\ldots,1) = 1 \right\}$$

3. ***Клас лінійних функцій***:

$$L = \left\{ f \in P_2 \mid f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = a_0 + a_1x_1 + \ldots a_nx_n \right\}.$$

4. Клас самодвоїстих функцій:

$$S = \left\{ f \in P_2 \middle| f\left(\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}\right) = \overline{f\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)} \right\}.$$

Кажуть, що набір $\alpha = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ передує набору $\beta = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$ і пишуть $\alpha < \beta$, якщо $a_i \le b_i$ для $i = 1,2,..n$.

5. Клас монотонних функцій:

$$M = \left\{ f \in P_2 \middle| \forall_{\alpha<\beta} f(\alpha) \le f(\beta) \right\}.$$

Замиканням множини бф u називається множина всіх суперпозицій функцій класу u і позначається $[u]$.

Клас u називається ***функціонально замкненим***, якщо $[u] = u$.

Теорема. Класи Поста функціонально замкнені.

Клас функцій u називається ***функціонально повним***, якщо $[u] = P_2$.

Клас функцій u називається ***функціонально повним в слабкому смислі***, якщо додавання в u констант 0 і 1 перетворює його в функціонально повний клас.

Теорема Поста. Множина бф u є функціонально повним тоді і тільки тоді, коли для кожного з класів Поста знайдеться в множині u функція, яка не належить цьому класу.

Назва булевої Функції	Позначення	T_0	T_1	M	L	S
Константа 0	0	+	–	+	+	–
Константа 1	1	–	+	+	+	–
Заперечення	$\overline{x}$	–	–	–	+	+
Кон'юнкція	$x \wedge y$	+	+	+	–	–
Диз'юнкція	$x \vee y$	+	+	+	–	–
Додавання за модулем 2	$x + y$ або $x \oplus y$	+	–	–	+	–
Еквівалентність	$x \sim y$	–	+	–	+	–
Імплікація	$x \rightarrow y$	–	+	–	–	–
Штрих Шиффера	$x \mid y$	–	–	–	–	–
Стрілка Пірса	$x \downarrow y$	–	–	–	–	–

Хід заняття

Задача 1. Визначити функції $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ так, щоб $f \in M$, $g \in L$, $h \in S$. Якщо побудова якої-небудь функції неможлива, доведіть це. З'ясуйте питання належності побудованих функцій до класів T_0, T_1.

$f = (-101-0-)$, $h = (1-10-1-)$, $g = (-1-010)$.

Розв'язування. Покажемо розвернуту таблицю даних функцій: визначимо функцію f, використовуючи визначення монотонної функції. Т. я. $f(1,1,0)=0$, то на всіх наборах, яким передує набір $f(1,1,0)$функція f також повинна дорівнювати 0, тобто $f(0,0,0)= f(1,0,0)=0$. Т. я. $f(0,0,1)=1$, то на всіх наборах, яким передує набір $(0,0,1)$ функція f повинна приймати значення 1, тобто f $f(1,0,1)= f(1,1,1)=1$. Отримаємо, $f(x,y,z)=(0101\,0101)$.

Визначимо функцію g, враховуючи те, що вона лінійна. Загальний вигляд лінійної функції від змінних x, y, z має вигляд: $g(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z$.

Будемо підставляти набори значень аргументів, на яких функція визначена.

xyz	f	g	h
000	-	-	1
001	1	-	-
010	0	-	1
011	1	1	0
100	-	-	-
101	-	0	-
110	0	1	1
111	-	0	-

Отримаємо систему відношень:

$$\begin{cases} 1=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 1+a_3\cdot 1 \\ 0=a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+a_3\cdot 1 \\ 1=a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+a_3\cdot 0 \\ 0=a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+a_3\cdot 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_0+a_2+a_3=1 \\ a_0+a_1+a_3=0 \\ a_0+a_1+a_2=1 \\ a_0+a_1+a_2+a_3=0 \end{cases}$$

Замінюючи $a_0+a_1+a_2$ на 1 в 4 рівності системи, маємо: $1+a_3=0 \Rightarrow a_3=1$.

Склавши перші 3 рівності і враховуючи, що $x+x=0$, отримаємо $a_0+0=0 \Rightarrow a_0=0 \Rightarrow a_2=0 \Rightarrow a_1=1$. Тобто, $g(x,y,z)=0+1\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=x+z$. Виходячи з цієї формули, знайдемо значення функції g на тих наборах, на яких вона була невизначена:

$g(0,0,0)=0+0=0$, $g(0,1,0)=0+0=0$,

$g(0,0,1)=0+1=1$, $g(1,0,0)=1+0=1$.

Тобто маємо: $g(x,y,z)=(01011010)$.

Визначимо функцію h, використовуючи визначення само двоїстої функції. Т. я. Набори $(0,0,0)$ і $(1,1,1)$ протилежні і $h(0,0,0)=1 \Rightarrow h(1,1,1)=0$. Протилежними парами наборів значень змінних є також $(0,0,1)$ і $(1,1,0)$, $(0,1,0)$ і

$(1,0,1)$, $(0,1,1)$ і $(1,0,0)$. Використовуючи відомі значення функції h, отримаємо:
$h(0,0,1)=\overline{h(1,1,0)}=\bar{1}=0$
$h(1,0,0)=\overline{h(0,1,1)}=\bar{0}=1\neg.$
$h(1,0,1)=\overline{h(0,1,0)}=\bar{1}=0$

Тобто, $h(x,y,z)=(1010\ 1010)$.

Т. я. $f(0,0,0)=g(0,0,0)=0\neq h(0,0,0)$, то $f\in T_0$, $g\in T_0$, $h\notin T_0$.

Т. я. $g(1,1,1)=h(1,1,1)=0$, $f(1,1,1)=1$, то $f\in T_1\, g\notin T_1$, $,h\notin T_1$.

Задача 2. Для функцій

$$f(x,y,z,t)=x+y+xz+yzt \text{ і } g(x,y,z,t)=1+z+t+xyz+xyzt$$

з'ясувати питання про їх належність класам T_0, T_1, L, M, S. Якщо деяка функція є функціонально повний клас, то виразити з неї за допомогою суперпозицій константи 0 ,1, заперечення $\bar{x}$ і кон'юнкцію $x\wedge y$. Якщо деяка функція є функціонально повною в слабкому сенсі, то виразити з неї за допомогою суперпозицій і фіксованих змінних заперечення $\bar{x}$ і кон'юнкцію $x\wedge y$. Отримані результати перевірити за допомогою побудови таблиці.

Розв'язування. З'ясуємо питання про належність $f(x,y,z,t)$ до класів Поста.

$$f(0,0,0,0)=0\Rightarrow f\in T_0,$$
$$f(1,1,1,1)=0\Rightarrow f\notin T_1, \quad .$$
$$f(1,1,1,0)=1+1+1+0=1$$

Т. я. Набори $(0,0,0,0)$ і $(1,1,1,1)$ протилежні, але $f(0,0,0,0)=0=f(1,1,1,1)\Rightarrow f\notin S$.

Маємо, що $(1,1,1,0)<(1,1,1,1)$, але $f(1,1,1,0)<f(1,1,1,1)\Rightarrow f\notin S$.

Т. я. $f\in T_0$, за теоремою Поста, $\{f\}$ не є фіксовано повним класом, але т. я. $f\notin L,\ f\notin M$, то $\{f\}$- функціонально повний в слабкому сенсі клас. Виразимо з функції f заперечення за допомогою фіксованих змінних. Візьмемо сусідні набори змінних $(0,0,0,0)$ і $(1,1,1,1)$, на яких порушується монотонність і розглянемо функцію $p(x)=f(1,1,1x)$.Знайдемо всі значення функції $p(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} p(0)=f(1,1,1,0)=1 \\ p(1)=f(1,1,1,1)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow p(x)=\bar{x},$$

заперечення побудовано, $\bar{x}=f(1,1,1,x)$.

Для побудови кон'юнкції $x\wedge y$ зафіксуємо дві змінні та, при необхідності, пере позначимо останні змінні так, щоб вираз прийняв вигляд: $x\wedge y+\alpha x+\beta y+\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}$.

Наприклад, зафіксувати змінні можна так: $f(x,0,y,1)=xy+x$.

В цьому випадку $\alpha=1,\ \beta=\gamma=0$ введемо функцію $h(x,y)=f(x+\beta,0,y+\alpha,1)+\alpha\beta+\gamma=f(x,0,\bar{y},1)=f(x,0,f(1,1,1,y),1)$.

Знайдемо значення функції h на всіх наборах:

$$h(0,0)=f(0,0,f(1,1,1,0),1)=f(0,0,1,1)=0+0+0+0=0$$
$$h(0,1)=f(0,0,f(1,1,1,1),1)=f(0,0,0,1)=0+0+0+0=0$$

$h(1,0) = f(1,0, f(1,1,1,0),1) = f(1,0,1,1) = 1 + 0 + 0 + 0 = 0$
$h(1,1) = f(1,0, f(1,1,1,1),1) = f(1,0,0,1) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$.

Як бачимо, $h(x, y) = x \wedge y$, кон'юнкція побудована, $x \wedge y = f(x,0, f(1,1,1, y),1)$.

Перевіримо g на належність до класів Поста.

$$\begin{aligned} &g(0,0,0,0) = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 \Rightarrow g \notin T_0, \\ &g(1,1,1,1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow g \notin T_1 \end{aligned}.$$

Т. я. поліном g має кон'юнкцію, то $g \notin L$. Т. я. $(0,0,0,0) < (1,1,1,1)$ і $g(0,0,0,0) > g(1,1,1,1) \Rightarrow g \notin M$. Зауважимо, що

$g(0,0,0,1) = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0, g(1,1,1,0) = 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 0$.

Т. я. набори $(0,0,0,1)$ і $(1,1,1,0)$ протилежні, а $g(0,0,0,1) = g(1,1,1,0) \Rightarrow g \notin S$. Функція g не належить ні до одного з класів Поста, тобто, за теоремою Поста, $\{g\}$- функціонально повний клас. Побудуємо заперечення. Розглянемо функцію $s(x) = g(x, x, x, x)$, знайдемо всі значення функції s:

$$\left. \begin{aligned} s(0) = g(0,0,0,0) = 1 \\ s(1) = g(1,1,1,1) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s(x) = \bar{x},$$

тобто, $\bar{x} = f(x, x, x, x)$.

Побудуємо константу 0. для цього візьмемо набір з пари протилежних наборів, на яких функція рівна 0, наприклад $(1,1,1,0)$ і розглянемо функцію $n(x) = g(x^1, x^1, x^1, x^0) = g(x, x, x, \bar{x}) = g(x, x, x, g(x, x, x, x))$. Знайдемо значення функції $n(x)$:

$$\left. \begin{aligned} n(0) = g(0,0,0, g(0,0,0,0)) = g(0,0,0,1) = 0 \\ n(1) = g(1,1,1, g(1,1,1,1)) = g(1,1,1,0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(x) \equiv 0$$

Отже, $0 \equiv g(x, x, x, g(x, x, x, x))$.

Знайдемо пару протилежних наборів, на яких функція дорівнює 1:

$$\begin{aligned} &g(0,1,1,1) = 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\ &g(1,0,0,0) = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}.$$

Розглянемо $m(x) = g(x^0, x^1, x^1, x^1) = g(\bar{x}, x, x, x) = g(g(x, x, x, x)x, x, x)$.Знайдемо значення функції m(x):

$$\left. \begin{aligned} m(0) = g(g(0,0,0,0),0,0,0) = g(1,0,0,0) = 1 \\ m(1) = g(g(1,1,1,1),1,1,1) = g(0,1,1,1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m(x) \equiv 1$$

Отже, $1 \equiv g(g(x, x, x, x), x, x, x)$.

Для побудови кон'юнкції $x \wedge y$ зафіксуємо 2 змінні так, щоб поліном g прийняв вигляд $x \wedge y + \alpha x + \beta y + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}$.

Наприклад, зафіксувати змінні можна так: $g(x, y,0,1) = xy + 0 \cdot x + 0 \cdot y$, тобто в цьому випадку $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

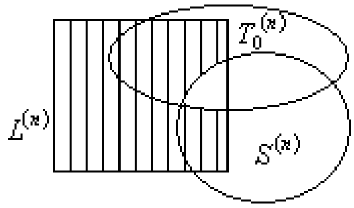
Візьмемо функцію

$r(x, y) = g(x + \beta, y + \alpha,0,1) + \alpha\beta + \gamma = g(x + 0, y + 0,0,1) + 0 + 0 = g(x, y,0,1)$
$= g(x, y, n(x), m(x))$. Знайдемо значення функції $r(x, y)$ на всіх наборах:

$$r(0,0) = g(0,0,n(0),m(0)) = g(0,0,0,1) = 0$$
$$r(0,1) = g(0,1,n(0),m(0)) = g(0,1,0,1) = 1+0+1+0+0+0 = 0$$
$$r(1,0) = g(1,0,n(1),m(1)) = g(1,0,0,1) = 1+0+1+0+0+0 = 0\ ,$$
$$r(1,1) = g(1,1,n(1)m(1)) = g(1,1,0,1) = 1+0+1+1+0+0 = 1$$

Задача 3. Підрахувати число різних булевих функцій від n перемінній, які належать безлічі $L \cdot (T_0 \cap S)$.

Розв'язування. Позначимо через $L^{(n)}$, $T_0^{(n)}$ і $S^{(n)}$ відповідно безлічі лінійних, що зберігають нуль і самодвоїстності функції від n перемінних. Зобразимо безлічі $L^{(n)}$, $T_0^{(n)}$ і $S^{(n)}$ схематично: Заштрихована область відповідає функціям шуканого класу. Очевидно, виконана рівність: $\left|L^{(n)} \setminus \left(T_0^{(n)} \cap S^{(n)}\right)\right| = \left|L^{(n)}\right| - \left|L^{(n)} \cap T_0^{(n)} \cap S^{(n)}\right|$.



.Кожна функція з $L^{(n)}$ має вигляд: $a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Поставимо у відповідність кожної такої функції вектор її двоїчних коефіцієнтів $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Очевидно, що ця відповідність - биєкція, виходить, кількість різних лінійні функції від n перемінних, дорівнює кількості різних двоїчних наборів розмірності $n+1$, тобто 2^{n+1}, отже, $\left|L^{(n)}\right| = 2^{n+1}$. Якщо лінійна функція зберігає константу 0, то $a_0 + a_1 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$, і вона має вигляд $a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Для самодвоїстої функції виконується властивість

$$f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}.$$

З огляду на, що $\bar{\mathrm{x}} = \mathrm{x} + 1$, подивимося, як 6буде виглядати ця рівність у випадку лінійної, що зберігає нуль функції:

$$a_0 + a_1(x_1 + 1) + \ldots + a_n(x_n + 1) = 1 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n\mathrm{a}_1$$

Розкриємо дужки: $a_1 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_n$ Додамо за модулем 2 до обох частин отриманої рівності вираження $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, врахуємо, що $x + x = 0$. Тоді після спрощень будемо мати:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 \qquad (*)$$

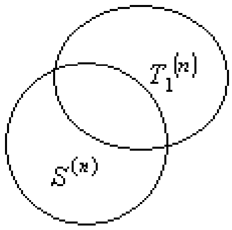
З коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ довільним образом можна призначати n-1 коефіцієнт, а значення n-го коефіцієнта однозначно визначається з рівності (*). Отже, між безліч булевих функцій класу $L^{(n)} \cap T_0^{(n)} \cap S^{(n)}$ і безліччю двоїчних векторів розмірності n-1 існує бієкція, виходить, вірна рівність $\left|L^{(n)} \cap T_0^{(n)} \cap S^{(n)}\right| = 2^{n-1}$

Тобто одержуємо:

$$\left|L^{(n)} \setminus \left(T_0^{(n)} \cap S^{(n)}\right)\right| = \left|L^{(n)}\right| - \left|L^{(n)} \cap T_0^{(n)} \cap S^{(n)}\right| = 2^{n+1} - 2^{n-1} = 2^{n+1}(4-1) = 3 \cdot 2^{n+1}.$$

Задача 4. Підрахувати число різних булевих функцій від n перемінній, приналежній безлічі $S \cup T_1$.

Розв'язування. Позначимо через $S^{(n)}$ і $T_1^{(n)}$ відповідно безлічі самодвоїстих і функцій, що зберігають одиницю, від n перемінних. Зобразимо безлічі $S^{(n)}$ і $T_1^{(n)}$ схематично:



Очевидно, $\left|S^{(n)} \cup T_1^{(n)}\right| = \left|S^{(n)}\right| + \left|T_1^{(n)}\right| - \left|S^{(n)} \cap T_1^{(n)}\right|$.

Нехай $f \in S^{(n)}$, $g \in T_1^{(n)}$, $h \in S^{(n)} \cap T_1^{(n)}$, зобразимо таблиці цих функцій:

x_1 x_2 ... x_{n-1} x_n	f	g	h
0 0 ... 0 0	a_1	b_1	*0*
0 0 ... 0 1	a_2	b_2	c_1
… … ... …	...	...	...
0 1 ... 1 1	$a_{2^{n-1}}$	...	$c_{2^{n-1}-1}$ ...
1 0 ... 0 0	$\overline{a_{2^{n-1}}}$	...	$\overline{c_{2^{n-1}-1}}$
… … ... …	...	...	...
1 1 ... 1 0	$\overline{a_2}$	$b_{2^{n-1}}$	$\overline{c_1}$
1 1 ... 1 1	$\overline{a_1}$	*1*	*1*

Як бачимо, $S \cup T_1$ f взаємно однозначно визначається вектором двоїчних коефіцієнтів розмірності 2^{n-1}, g-розмірності $2^n - 1$, а h-розмірності $2^{n-1} - 1$.

Виходить, потужності безлічей $S^{(n)}$, $T_1^{(n)}$і$S^{(n)} \cap T_1^{(n)}$ рівні відповідно $2^{2^{n-1}}, 2^{2^n-1}, 2^{2^{n-1}-1}$.

Тобто, $\left|S^{(n)} \cap T_1^{(n)}\right| = 2^{2^{n-1}} + 2^{2^n-1} - 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^n-1} + 2^{2^{n-1}-1}$.

Задачі для самостійного розв'язування

13.1 Визначити функції $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ так, щоб $f \in M$, $g \in L$, $h \in S$. Якщо побудова якої-небудь функції неможлива, доведіть це. З'ясуйте питання належності побудованих функцій до класів T_0, T_1.

№	f	g	h
1	$(-10-1---)$	$(-10--0-0)$	$(-0--11-1)$
2	$(---01---)$	$(0---110-)$	$(11--10--)$
3	$(---0-10-)$	$(---00-10)$	$(-1--01-0)$
4	$(-1----0-)$	$(01-0-1--)$	$(101-1---)$
5	$(----0-01-)$	$(--10--01)$	$(--10--01)$

13.2 Для функцій $f(x,y,z,t)$ і $g(x,y,z,t)$ з'ясувати питання про їх належність класам T_0, T_1, L, M, S. Якщо деяка функція є функціонально повний клас, то виразити з неї за допомогою суперпозицій константи 0 ,1, заперечення $\overline{x}$ і кон'юнкцію $x \wedge y$. Якщо деяка функція є функціонально повною в слабкому сенсі, то виразити з неї за допомогою суперпозицій і фіксованих змінних заперечення $\overline{x}$ і кон'юнкцію $x \wedge y$. Отримані результати перевірити за допомогою побудови таблиці.

№	f	g
1	$x+y+t+xy+xt+yzt+xyt+xyzt$	$1+x+y+xz+xt+zt+xzt+yzt$
2	$1+y+z+xt+yz+xzt+zyt+xyzt$	$x+z+t+xy+yz+xyz+xzt+xyzt$

13.3 Підрахувати число різних булевих функцій від n змінних, які належать даній множині A.

№	f	№	f
1	$(L \cup T_0) \setminus T_1$	6	$(L \cup T_1) \setminus T_0$
2	$(S \cup T_0) \setminus T_1$	7	$L \Delta T_1$
3	$S \cup T_0 \cup T_1$	8	$((S \cap T_0) \cup T_1$
4	$((S \cup T_0) \cap T_1$	9	$(S \cap T_1) \cup T_0$
5	$S \Delta T_1$	10	$(S \cup L_1) \setminus T_0$

13.4 Визначити функції $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ так, щоб $f \in M$, $g \in L$, $h \in S$. Якщо побудова якої-небудь функції неможлива, доведіть це. З'ясуйте питання належності побудованих функцій до класів T_0, T_1.

№	f	g	h
1	$(-10-0-0-)$	$(01-01---)$	$(1---11-1)$
2	$(--101---)$	$(0---010-)$	$(10--10--)$
3	$(1--0-10-)$	$(---10-10)$	$(-1--11-0)$
4	$(-1-0--0-)$	$(11-0-1--)$	$(1-1-1---)$
5	$(-1--0-01-)$	$(--00--01)$	$(-010--01)$

13.5. Підрахувати число різних булевих функцій від n змінних, які належать даній множині A.

№	f	№	f
1	$(S \cap T_1) \cup L$	6	$(T_1 \cup T_0) \setminus S$
2	$(T_1 \cup T_0) \cap L$	7	$(T_1 \cup T_0) \setminus L$
3	$(T_1 \cup T_0) \cup L$	8	$(L \cup T_0) \setminus S$
4	$(L \cap T_0) \cup (S \cap T_1)$	9	$T_1 \setminus (S \cup L)$
5	$(S \cap T_1) \setminus (L \cap T_0)$	10	$(T_0 \setminus S) \setminus T_1$

Практична робота14.

Контрольна робота №2.

Мета: Перевірити навички та вміння перетворювати типи формул і їх логічне значення.

Задача 1. Для булевої функції, заданої векторно, визначити ДДНФ; ДКНФ; мінімізувати функцію ДДНФ (ДКНФ – на вибір); побудувати КРС по мінімальній формі, записати поліном Жегалкіна (перетворення або метод невизначених коефіцієнтів – на вибір).

№	*f*	№	*f*
1	1011 0011	11	1011 0010
2	0010 0111	12	0010 0110
3	1010 1011	13	1010 1010
4	0011 0011	14	0011 0010
5	0011 0001	15	0011 0000
6	0110 0011	16	0110 0010
7	1110 1011	17	1110 1010
8	1010 0011	18	1010 0010
9	1110 0001	19	1110 0100
10	1110 0011	20	1110 0010

Задача 2. Перетворити $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ використовуючи формули розкладу по сукупності змінних x_n, x_k, представити отримані функції від двох змінних формулами g_0, g_1,…,g_{15}. Спростити функцію методом Карно.

№	*f*	*n*	*k*
1	0110 1110 1101 1001	1	2
2	0110 1110 1101 1001	1	3
3	0110 1110 1101 1001	1	4
4	0110 1110 1101 1001	2	3
5	0110 1110 1101 1001	2	4
6	0110 1110 1101 1001	3	4
7	1010 1110 0110 0101	1	2
8	1010 1110 0110 0101	1	3
9	1010 1110 0110 0101	1	4
10	1010 1110 0110 0101	2	3

№	*f*	*n*	*k*
11	1010 1110 0110 0101	2	4
12	1010 1110 0110 0101	3	4
13	1100 0100 0111 0110	1	2
14	1100 0100 0111 0110	1	3
15	1011 0001 0001 0101	1	4
16	1110 1111 1001 0001	2	3
17	1011 1010 1110 1000	2	4
18	1111 1000 0101 0011	3	4
19	1110 0110 1111 0101	1	2
20	1100 0100 0111 0110	1	3

Задача 3. Для даної функції f заданої векторно методом Квайна знайти скорочену ДНФ. Для скороченої ДНФ побудувати матрицю Квайна, указати ядрові імпліканти, знайти мінімальну ДНФ.

№	*f*	№	*f*
1	1111 0101 0011 1101	11	0100 1110 1101 1111
2	1101 1110 1010 1110	12	1111 1110 0111 1100
3	0111 0001 1111 1101	13	1000 1011 1111 1111
4	1011 1111 1111 1000	14	1111 1101 1110 0001
5	1101 0101 1101 1111	15	1101 0111 1100 1110
6	1111 1110 1010 0011	16	1011 1111 1010 1101
7	1111 0010 0111 1110	17	1001 1101 1010 1111
8	1100 1110 1111 1011	18	1110 0110 1111 1100
9	1100 0110 1111 0111	19	0011 1011 1010 1111
10	1011 1111 1110 0010	20	1111 0110 1110 1110

№1 Для функції, заданої векторно, визначити ДДНФ, ДКНФ, мінімізувати функцію ДДНФ, побудувати КРС по мінімальній формі, записати поліном Жегалкіна (перетворення або метод невизначених коефіцієнтів)

F={1010 0011}

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

ДДНФ: $\overline{abc} \cup \bar{a}b\bar{c} \cup ab\bar{c} \cup abc$

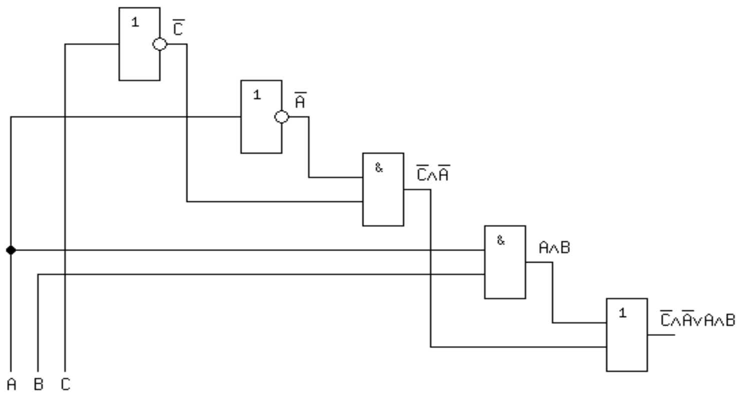
ДКНФ: $(a \cup b \cup \bar{c}) \cap (a \cup \bar{b} \cup \bar{c}) \cap (\bar{a} \cup b \cup c) \cap (\bar{a} \cup b \cup \bar{c})$

Карта Карно:

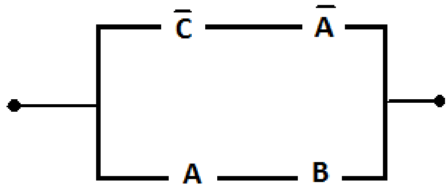
bc \ a	00	01	11	10
0	**1**	0	0	**1**
1	0	0	**1**	**1**

Результат: $\overline{abc} \cup b\bar{c} \cup ab = \bar{c}\left(\overline{ab} \cup b\right) = \overline{ca} \cup ab$

Логічна схема:



КРС:



Поліном Жегалкіна:

$$P(a,b,c) = C_0 \oplus C_1 a \oplus C_2 b \oplus C_3 c \oplus C_{12} ab \oplus C_{13} ac \oplus C_{23} bc \oplus C_{123} abc$$

$$P(0,0,0) = C_0 = 1$$

$$P(0,0,1) = C_0 \oplus C_3 = 0 => 1 \oplus C_3 = 0 => C_3 = 1$$

$$P(0,1,0) = C_0 \oplus C_2 = 1 => 1 \oplus C_2 = 1 => C_2 = 0$$

$$P(0,1,1) = C_0 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_{23} = 0 => 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus C_{23} = 0 => C_{23} = 0$$

$$P(1,0,0) = C_0 \oplus C_1 = 0 => 1 \oplus C_1 = 0 => C_1 = 1$$

$$P(1,0,1) = C_0 \oplus C_1 \oplus C_3 \oplus C_{13} = 0 => 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus C_{13} = 0 => C_{13} = 1$$

$$P(1,1,0) = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_{12} = 1 => 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus C_{12} = 1 => C_{12} = 1$$

$$P(1,1,1) = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_{12} \oplus C_{13} \oplus C_{23} \oplus C_{123} = 1 =>$$

$$> 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus C_{123} = 1 => C_{123} = 0$$

$$P(a,b,c) = 1 \oplus \mathrm{c} \oplus a \oplus ac \oplus ab$$

№2 Перетворити f(X1,X2,X3,X4) використовуючи формули розкладу по сукупності змінних Xn, Xk, представити отримані функції від двох змінних формулами g0,g1,…,g15. Спростити функцію методом Карно

F={1010 1110 0110 0101}, n=1, k=3;

x1	x2	x3	x4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

N=1, k=3 x2	x4	F(0,x2,0,x4)	F(0,x2,1,x4)	F(1,x2,0,x4)	F(1,x2,1,x4)
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1

$((\overline{x_2} * \overline{x_4} * (x_4 \to x_2)) \cup (\overline{x_2} * x_4 * \overline{x_4}) \cup (x_2 * \overline{x_4} * x_4) \cup (x_2 * x_4 * (x_2 \leftrightarrow x_4))$

Метод Карно:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">x_2</td><td colspan="2">$\overline{x_2}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_1</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>$\overline{x_3}$</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td><td rowspan="2">x_3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\overline{x_1}$</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>$\overline{x_3}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\overline{x_4}$</td><td colspan="2">x_4</td><td>$\overline{x_4}$</td><td></td></tr>
</table>

Результат: $x_1\overline{x_3}x_4 \cup x_1x_2x_4 \cup \overline{x_2}x_3\overline{x_4} \cup \overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_4} \cup \overline{x_1}x_2\overline{x_4} \cup \overline{x_1}x_2\overline{x_3}$

№3 Для булевої функції f, заданої векторно, методом Квайна знайти скорочену ДНФ. Для скороченої ДНФ побудувати матрицю Квайна, указати ядрові імпліканти, знайти мінімальну ДНФ

F={1100 1110 1111 1011}

$\overline{abcd} \cup \overline{abc}d \cup \bar{a}b\overline{cd} \cup \bar{a}b\bar{c}d \cup \bar{a}bc\bar{d} \cup a\overline{bcd} \cup a\overline{bc}d \cup a\bar{b}c\bar{d} \cup a\bar{b}cd \cup ab\overline{cd} \cup$
$\cup\, abc\bar{d} \cup abcd$

Index					
0	0000				
1	0001	0100	1000		
2	0101	0110	1001	1010	1100
3	1011	1110			
4	1111				

0-1	000*	0*00	*000						
1-2	0*01	*001	010*	01*0	*100	100*	10*0	1*00	
2-3	*110	10*1	101*	11*0					
3-4	1*11	111*							

0-1-1-2	0*0*	**00	
1-2-2-3	*1*0	10**	1**0
2-3-3-4	1*1*		

	0000	0001	0100	1000	0101	0110	1001	1010	1100	1011	1110	1111
0*0*	x	x	x		x							
**00	x		x	x					x			
*1*0			x			x			x		x	
10**				x			x	x		x		
1**0				x				x	x		x	
1*1*								x		x	x	x

$$\overline{ac} \cup b\bar{d} \cup a\bar{b} \cup ac$$

Використана література

1. *Гладкий А.В.* Математическая логика. М.: Российск. гос. гуманит. ун-т, 1998. - 479с.
2. *Гуц А.К.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие. - Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2003. - 108 с.
3. *Гиндикин С.Г.* Алгебра логики в задачах. М., 1972.
4. *Гохман А. В., Спивак М. А., Розен В. В. и др.* Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. Саратов, 1969.
5. *Эдельман С. Л.* Математическая логика. Учеб. пособие для ин-тов. М., «Высшая школа», 1975. 176 с. с ил.
6. *Игошин В.И.* Математическая логика и теория алгоритмов. - Саратов: изд-во СГУ, 1991. - 256 с.
7. *Игошин В.И.* Задачник-практикум по математической логике. М.: Просвещение, 1986. - 160 с.
8. *Касаткин В.Н.* Информация. Алгоритмы. ЭВМ: /Пособие для учителя. М., 1991.
9. *Клини С.К.* Математическая логика. М.: Мир, 1973.
10. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М.: Наука, 1975.
11. *Лиман Ф.М.* Математична логіка і теорія алгоритмів. К.,1994.
12. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1987.
13. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
14. *Мощенский В. А.* Лекции по математической логике. Мн., Изд-во БГУ, 1973.
15. *Новиков П.С.* Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.
16. *Роджерс Дж.* Теория алгоритмов и эффективная вычислимость.
17. *Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е.* Вводный курс математической логики. - 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. -128 с.
18. *Хромой Я.В.* Математична логіка. – К.: Вища школа, 1983.-208 с.
19. *Хромой Я.В.* Збірник вправ і задач з математичної логіки. – К.: Вища школа, 1978.-160 с.
20. *Черч А.* Введение в математическую логику. М.: Мир, 1960.