Aula 10 - Regras de derivação

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

18 de setembro de 2023

Recapitulando...

- A derivada de uma função $f(x)$ é calculada a partir de um limite.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- O cálculo deste limite pode ser trabalhoso em muitos casos.
- O uso de técnicas de derivação consiste em usar resultados conhecidos e propriedades para calcular derivadas.
- Os resultados apresentados nos próximos slides servirão de base para o cálculo de derivadas de funções mais complicadas.

Recapitulando...

- A derivada de uma função $f(x)$ é calculada a partir de um limite.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- O cálculo deste limite pode ser trabalhoso em muitos casos.
- O uso de técnicas de derivação consiste em usar resultados conhecidos e propriedades para calcular derivadas.
- Os resultados apresentados nos próximos slides servirão de base para o cálculo de derivadas de funções mais complicadas.

Recapitulando...

- A derivada de uma função $f(x)$ é calculada a partir de um limite.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- O cálculo deste limite pode ser trabalhoso em muitos casos.
- O uso de técnicas de derivação consiste em usar resultados conhecidos e propriedades para calcular derivadas.
- Os resultados apresentados nos próximos slides servirão de base para o cálculo de derivadas de funções mais complicadas.

Resultados conhecidos I

Sejam $a, n \in \mathbb{R}$ e e o número de Euler:

- Derivada da função constante:

$$f(x) = a \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 0$$

- Derivada da potência:

$$f(x) = x^n \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

- Derivada da função exponencial com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = a^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = a^x \ln a$$

- Derivada da função exponencial de base e:

$$f(x) = e^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = e^x$$

Resultados conhecidos I

Sejam $a, n \in \mathbb{R}$ e e o número de Euler:

- Derivada da função constante:

$$f(x) = a \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 0$$

- Derivada da potência:

$$f(x) = x^n \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

- Derivada da função exponencial com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = a^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = a^x \ln a$$

- Derivada da função exponencial de base e:

$$f(x) = e^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = e^x$$

Resultados conhecidos I

Sejam $a, n \in \mathbb{R}$ e e o número de Euler:

- Derivada da função constante:

$$f(x) = a \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 0$$

- Derivada da potência:

$$f(x) = x^n \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

- Derivada da função exponencial com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = a^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = a^x \ln a$$

- Derivada da função exponencial de base e:

$$f(x) = e^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = e^x$$

Resultados conhecidos II

- Derivada da função logaritmica com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = \log_a x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

- Derivada da função logaritmica natural:

$$f(x) = \ln x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

- Derivada da função seno:

$$f(x) = sen(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = cos(x)$$

- Derivada da função cosseno:

$$f(x) = cos(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = -sen(x)$$

Resultados conhecidos II

- Derivada da função logaritmica com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = \log_a x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

- Derivada da função logaritmica natural:

$$f(x) = \ln x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

- Derivada da função seno:

$$f(x) = sen(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = cos(x)$$

- Derivada da função cosseno:

$$f(x) = cos(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = -sen(x)$$

Resultados conhecidos II

- Derivada da função logaritmica com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = \log_a x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

- Derivada da função logaritmica natural:

$$f(x) = \ln x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

- Derivada da função seno:

$$f(x) = sen(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = cos(x)$$

- Derivada da função cosseno:

$$f(x) = cos(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = -sen(x)$$

Estratégia de derivação

- Os resultados das derivadas destas funções mais simples serão aplicados para o cálculo da derivada de funções mais complicadas.
- A estratégia consiste em decompor a derivada da função mais complicada em termos que dependem da derivada das funções mais simples.
- Esta decomposição é feita utilizando as propriedades apresentadas nos próximos slides.
- Estas propriedades são consequências das propriedades de limites aplicadas sobre a definição de derivada.

Estratégia de derivação

- Os resultados das derivadas destas funções mais simples serão aplicados para o cálculo da derivada de funções mais complicadas.
- A estratégia consiste em decompor a derivada da função mais complicada em termos que dependem da derivada das funções mais simples.
- Esta decomposição é feita utilizando as propriedades apresentadas nos próximos slides.
- Estas propriedades são consequências das propriedades de limites aplicadas sobre a definição de derivada.

Derivada - Propriedades I

Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções derivaveis e $a \in \mathbb{R}$:

- Derivada do produto de uma função por uma constante:

$$f(x) = ag(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = ag'(x)$$

- Derivada da soma/diferença de funções:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Derivada - Propriedades II

Ao contrário das propriedades apresentadas anteriormente, os resultados a seguir não são intuitivos

Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções derivaveis e $a \in \mathbb{R}$:

- Derivada do produto de duas funções:

$$f(x) = g(x)h(x) \qquad \to \qquad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

- Derivada do quociente entre duas funções:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad \to \qquad f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Derivada - Propriedades III

Estes resultados também não são intuitivos e serão abordados em outras aulas

Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções derivaveis e $a \in \mathbb{R}$:

- Derivada de uma função composta (Regra da cadeia):

$$f(x) = g\left[h(x)\right] \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = g'\left[h(x)\right] h'(x)$$

- Derivada de uma função inversa $(f^{-1}(x))$ derivada conhecida:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemplo I

Calcule a derivada da função $f(x)$ dada por:

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 9$$

Aplicando a propriedade da soma de funções (e a notação $\frac{d}{dx}$ para ilustrar as etapas do calculo da derivada)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^4\right) + \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) + \frac{d}{dx}(9)$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 0 = 4x^3 + 3 \times 2x$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x$$

Exemplo II

Calcule a derivada da função $f(x)$ dada por:

$$f(x) = x^2 sen(x)$$

Aplicando a propriedade do produto de funções (e a notação $\frac{d}{dx}$ para ilustrar as etapas do calculo da derivada)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 sen(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) sen(x) + x^2 \frac{d}{dx}\left(sen(x)\right)$$

$$f'(x) = 2x sen(x) + x^2 cos(x)$$

Exemplo III

Calcule a derivada da função $f(x)$ dada por:

$$f(x) = tg(x)$$

Aplicando a identidade trigonométrica $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ e a propriedade do quociente entre funções:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(sen(x))\, cos(x) - sen(x)\frac{d}{dx}(cos(x))}{cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$f'(x) = sec^2(x)$$