Aula 2 - Limites Laterais e Limites envolvendo infinitos

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

17 de agosto de 2023

11 dias atrás

Recapitulando...

- Seja o primeiro problema apresentado na aula passada:

Exemplo

Dada a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, qual o limite de $f(x)$ quando x tende a 2?

- A operação de limite estuda para qual valor a função $f(x)$ se aproxima a medida em que valores mais próximos de um valor predeterminado (no caso 2) são tomados.

Recapitulando...

- Neste exemplo, o valor de $f(x)$ se aproximou de 0 ao fazer $x \to 2$ tanto ao se utilizar valores maiores, quanto por valores menores do que 2:

Sequência obtida ao aproximar $f(x)$ por valores **menores** e cada vez mais próximos do que 2

x	$f(x)$
1.9	0.11
1.99	0.0101
1.999	0.001001
1.9999	0.00010001

Sequência obtida ao aproximar $f(x)$ por valores **maiores** e cada vez mais próximos do que 2

x	$f(x)$
2.1	-0.9
2.01	-0.0099
2.001	-0.00099899999
2.0001	-0.00009998999

- Desta forma, diz-se o limite estudado existe e é 0.

Limites Laterais

- Ao estudar o limite de $f(x)$ quando $x \to a$, nem sempre as sequências obtidas por valores maiores e menores do que a convergem para o mesmo valor.

Exemplo

Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

aqui ele tende
pro infinito negativo
ou positivo

Limites Laterais

Ao observar o gráfico, percebe-se que:

- ao fazer $x \to 0$ com valores **maiores** do que 0, a sequência de valores converge para 1.
- ao fazer $x \to 0$ com valores **menores** do que 0, a sequência de valores converge para -1.

Definição

1. O limite obtido a partir da sequência de valores **maiores** do que o valor de x estudado é chamado de **Limite lateral à direita**.
2. O limite obtido a partir da sequência de valores **menores** do que o valor de x estudado é chamado de **Limite lateral à esquerda**.

Limites Laterais: Notação

- **Limite lateral à direita**: Limite de $f(x)$ quando $x \to a$ utilizando valores **maiores** do que a:

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

- **Limite lateral à esquerda**: Limite de $f(x)$ quando $x \to a$ utilizando valores **menores** do que a:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Condição de existência de um limite

Diz-se que o limite L de $f(x)$ quando $x \to a$ existe se, e somente se:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Exercício 1

Calcule, se existir, o limite $\lim_{x\to 3} f(x)$, em que a função $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x < 3 \\ 3x-7, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Limite lateral à esquerda:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x - 1 = 2$$

Limite lateral à direita:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 3x - 7 = 2$$

O limite $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe e é igual a 2, pois: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$

Exercício

Exercício 1

Calcule, se existir, o limite $\lim_{x\to 3} f(x)$, em que a função $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x < 3 \\ 3x-7, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Limite lateral à esquerda:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x - 1 = 2$$

Limite lateral à direita:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 3x - 7 = 2$$

O limite $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe e é igual a 2, pois:
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$

Exercício

Exercício 1

Calcule, se existir, o limite $\lim_{x\to 3} f(x)$, em que a função $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x < 3 \\ 3x-7, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Limite lateral à esquerda:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x - 1 = 2$$

Limite lateral à direita:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 3x - 7 = 2$$

O limite $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe e é igual a 2, pois:
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$

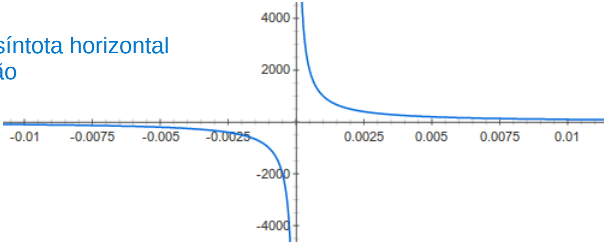
Mudou o assunto.

Exemplo

Calcule o limite abaixo, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

0 é uma assíntota horizontal
dessa função



Limites envolvendo infinitos

- Ao observar o gráfico, percebe-se que os limites laterais não convergem para o mesmo valor. Logo, o limite não existe.
- No caso do limite à direita, o valor de $f(x)$ assume valores cada vez mais altos a medida em que $x \to 0$. Desta forma, diz-se que o limite à direita **tende ao infinito**:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

- Analogamente, o limite à esquerda tende para o "menos infinito":

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Limites envolvendo infinitos

- Ao observar o gráfico, percebe-se que os limites laterais não convergem para o mesmo valor. Logo, o limite não existe.
- No caso do limite à direita, o valor de $f(x)$ assume valores cada vez mais altos a medida em que $x \to 0$. Desta forma, diz-se que o limite à direita **tende ao infinito**:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

- Analogamente, o limite à esquerda tende para o "menos infinito":

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

- Ao observar o gráfico, percebe-se que os limites laterais não convergem para o mesmo valor. Logo, o limite não existe.
- No caso do limite à direita, o valor de $f(x)$ assume valores cada vez mais altos a medida em que $x \to 0$. Desta forma, diz-se que o limite à direita **tende ao infinito**:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

- Analogamente, o limite à esquerda tende para o "menos infinito":

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exemplo

Calcule o limite lateral abaixo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Aplicando as propriedades de limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty - \infty$$

Esse exemplo vem para nos apresentar o conceito de uma indeterminação. Analisando o resultado anterior, é de se imaginar que pudessemos quebrar o problema em algo parecido.

Este resultado é o que chamamos de expressão indeterminada

Exemplo

Calcule o limite lateral abaixo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Aplicando as propriedades de limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty - \infty$$

Este resultado é o que chamamos de expressão indeterminada

Expressões indeterminadas

- Apesar de "soar lógico", a expressão $\infty - \infty \neq 0$.
  - Isso ocorre pois os termos $\frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x}$ não convergirem para o infinito "na mesma velocidade".

x	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$
0.1	100	10	90
0.01	10000	100	9900
0.001	1000000	1000	999000

- Este tipo de problema ocorre em diversas situações e cada caso deve ser estudado individualmente.

Expressões indeterminadas

- Expressões indeterminadas são valores que não possuem um significado matemático definido.
- Exemplos:
  - $\frac{0}{0}$;
  - $\frac{\infty}{\infty}$;
  - $\infty - \infty$;
  - $0 \times \infty$;
  - 0^0;
  - ∞^0;
  - 1^∞;
- No cálculo de limites, estas expressões podem ser contornadas através de manipulações algébricas.
  - Exemplo da aula passada: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.

Expressões indeterminadas: Propriedades

Propriedades das operações envolvendo limites que tendem ao infinito:

	$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$h(x) =$	$\lim h(x)$	simbolicamente
01	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x) + g(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty \pm\infty = \pm\infty$
02	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) - g(x)$	?	$(+\infty) - (+\infty)$ é indeterminação
03	$+\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$+\infty$	$+\infty + k = +\infty$
04	$-\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$-\infty$	$-\infty + k = -\infty$
05	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
06	$+\infty$	$-\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
07	$+\infty$	$k > 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$+\infty \cdot k = +\infty, k > 0$
08	$+\infty$	$k < 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$+\infty \cdot k = -\infty, k < 0$
09	$\pm\infty$	0	$f(x) \cdot g(x)$	?	$\pm\infty \cdot 0$ é indeterminação
10	k	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	0	$k/\pm\infty = 0$
11	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	?	$\pm\infty/\pm\infty$ é indeterminação
12	$k > 0$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$k/0^+ = +\infty, k > 0$
13	$+\infty$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$+\infty/0^+ = +\infty$
14	$k > 0$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$k/0^- = -\infty, k > 0$
15	$+\infty$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$+\infty/0^- = -\infty$
16	0	0	$f(x)/g(x)$	?	$0/0$ é indeterminação

Exemplo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Aplicando manipulações algébricas:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{x^2}$$

Aplicando propriedades de limites:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0^+} 1-x\right)\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\right) = 1 \times \infty = \infty$$

Portanto, o limite estudado tende ao infinito.

Voltando ao exemplo

Exemplo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Aplicando manipulações algébricas:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{x^2}$$

Aplicando propriedades de limites:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0^+} 1 - x\right)\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\right) = 1 \times \infty = \infty$$

Portanto, o limite estudado tende ao infinito.

manipula de um jeito que
trás pra algo que sabemos

Exercicio 1

Esboce o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{se } x < 1 \\ x^2 + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Depos encontre os limites:

- $\lim_{x \to 1^+} f(x)$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x)$
- $\lim_{x \to 1} f(x)$

Exercicio 1

Esboce o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{se } x < 1 \\ x^2 + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Depos encontre os limites:

- $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
- $\lim_{x\to 1} f(x)$

Exercicio 2

Considere função f definida por:

$$f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$$

Encontre os limites:

- $\lim_{x\to 4^+} f(x)$
- $\lim_{x\to 4^-} f(x)$
- $\lim_{x\to 4} f(x)$

Exercicio 2

Considere função f definida por:

$$f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$$

Encontre os limites:

- $\lim_{x\to 4^+} f(x)$
- $\lim_{x\to 4^-} f(x)$
- $\lim_{x\to 4} f(x)$

Exercicio 3

Calcule o limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2}$$

Aqui estamos lidando com um limite tendendo ao infinito. Lidando com isso, tenhamos algumas coisas em mente:
1. Se temos um valor arbitrario sendo dividido por um x tendendo ao infinito, ele irá para zero. Essa é a base de usar o maior grau para dividir em cima em baixo. (Sempre o maior grau!!!!)
2. Os limites no infinito de uma função polinomial, são iguais aos limites do termo de maior grau. Isso é equivalente a realizar a operação de dividir em cima e em baixo pelo termo de maior grau, e manipular depois com x tendendo ao infinito. Na prova, devo fazer a manipulação algébrica

Exercicio 4

Calcule o limite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^4 + x + 2}$$

Exercicio 5

Isso aqui tá difícil. Tentar mais depois.

Calcule os limites:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2}}{4x + 3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2}}{4x + 3}$$