Aula 7 - Continuidade

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

28 de agosto de 2023

Funções contínuas

- Ao estudar o comportamento de uma função em um ponto, geralmente temos que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, mas isso nem sempre ocorre.
- Define-se o conceito de continuidade para classificar funções "bem comportadas" em torno de $x = a$.
- Noção intuitiva (sem rigor matemático): Uma função contínua pode ter se gráfico desenhado sem que o lápis deixe de "encostar no papel".

Funções contínuas

- Ao estudar o comportamento de uma função em um ponto, geralmente temos que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, mas isso nem sempre ocorre.
- Define-se o conceito de continuidade para classificar funções "bem comportadas"em torno de $x = a$.
- Noção intuitiva (sem rigor matemático): Uma função contínua pode ter se gráfico desenhado sem que o lápis deixe de "encostar no papel".

Funções contínuas em um ponto a

Uma função $f(x)$ é dita contínua em um ponto a se as seguintes condições são satisfeitas

- f é definida em a.
- $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- Geralmente se testa apenas a terceira condição, pois ela só pode ser válida se as outras duas também forem.
- Uma função contínua em todos os seus pontos é chamada de função contínua.

Funções contínuas em um ponto a

Uma função $f(x)$ é dita contínua em um ponto a se as seguintes condições são satisfeitas

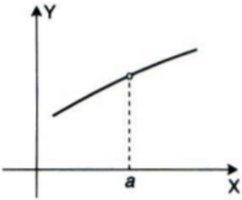
- f é definida em a.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Geralmente se testa apenas a terceira condição, pois ela só pode ser válida se as outras duas também forem.
- Uma função contínua em todos os seus pontos é chamada de função contínua.

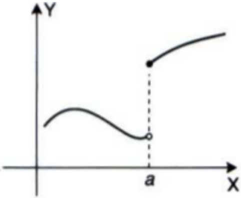
Tipos de descontinuidades

- Exemplos de funções que não são contínuas no ponto $x = a$:

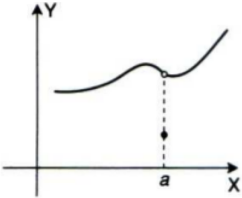
1)



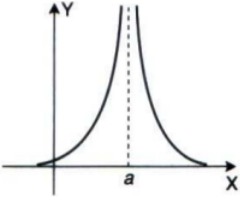
2)



3)



4)



Tipos de descontinuidades

- 1) e 3): Descontinuídade **removível**.
  - Pode ser removida com uma redefinição em $f(a)$.
- 2): Descontinuidade tipo **salto**.
- 4): Descontinuidade **infinita**.
  - Algum dos limites laterais tende a $\pm\infty$.

Funções contínuas: Propriedades

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um ponto $x = a$, então:

- $f(x) + g(x)$ é contínua em $x = a$.
- $f(x) - g(x)$ é contínua em $x = a$.
- $f(x)g(x)$ é contínua em $x = a$.
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em $x = a$ desde que $g(a) \neq 0$.

Reconhecendo funções contínuas

- Funções polinômiais são contínuas para todo número real. Exemplos:
  - $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3$ são contínuas.
- Funções racionais são contínuas para todo número real definido em seu domínio. Exemplos:
  - $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ é contínua em todos os pontos, exceto em $x = \pm 1$.
  - $g(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todos os pontos, exceto em $x = 0$.
- As funções trigonométricas $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$ são contínuas para todo número real.
- A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real.
- A função inversa de uma função contínua é contínua nos pontos do dominio em que é definida.
  - Seja $f(x) = e^x$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, então $f^{-1}(x) = \ln(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, onde a função $\ln$ é definida.

Reconhecendo funções contínuas

- Funções polinômiais são contínuas para todo número real. Exemplos:
  - $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3$ são contínuas.
- Funções racionais são contínuas para todo número real definido em seu domínio. Exemplos:
  - $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ é contínua em todos os pontos, exceto em $x = \pm 1$.
  - $g(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todos os pontos, exceto em $x = 0$.
- As funções trigonométricas $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$ são contínuas para todo número real.
- A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real.
- A função inversa de uma função contínua é contínua nos pontos do dominio em que é definida.
  - Seja $f(x) = e^x$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, então $f^{-1}(x) = \ln(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, onde a função $\ln$ é definida.

Reconhecendo funções contínuas

- Funções polinômiais são contínuas para todo número real. Exemplos:
  - $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3$ são contínuas.
- Funções racionais são contínuas para todo número real definido em seu domínio. Exemplos:
  - $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ é contínua em todos os pontos, exceto em $x = \pm 1$.
  - $g(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todos os pontos, exceto em $x = 0$.
- As funções trigonométricas $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$ são contínuas para todo número real.
- A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real.
- A função inversa de uma função contínua é contínua nos pontos do dominio em que é definida.
  - Seja $f(x) = e^x$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, então $f^{-1}(x) = \ln(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, onde a função $\ln$ é definida.

Reconhecendo funções contínuas

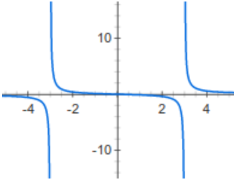
- Funções polinômiais são contínuas para todo número real. Exemplos:
  - $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3$ são contínuas.
- Funções racionais são contínuas para todo número real definido em seu domínio. Exemplos:
  - $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ é contínua em todos os pontos, exceto em $x = \pm 1$.
  - $g(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todos os pontos, exceto em $x = 0$.
- As funções trigonométricas $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$ são contínuas para todo número real.
- A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real.
- A função inversa de uma função contínua é contínua nos pontos do dominio em que é definida.
  - Seja $f(x) = e^x$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, então $f^{-1}(x) = \ln(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, onde a função $\ln$ é definida.

Continuidade em intervalo fechado

Uma função $f(x)$ é dita contínua dentro de um intervalo fechado $[a, b]$ se:

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. ($f$ é contínua à direita no ponto a)
- $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. ($f$ é contínua à esquerda no ponto b)
- f é contínua no intervalo aberto (a, b).

Exemplo: Seja a função $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$



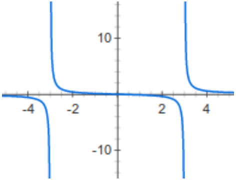
$f(x)$ é contínua no intervalo aberto (a, b), mas não no intervalo $[a, b]$.

Continuidade em intervalo fechado

Uma função $f(x)$ é dita contínua dentro de um intervalo fechado $[a, b]$ se:

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. ($f$ é contínua à direita no ponto a)
- $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. ($f$ é contínua à esquerda no ponto b)
- f é contínua no intervalo aberto (a, b).

Exemplo: Seja a função $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$



$f(x)$ é contínua no intervalo aberto (a, b), mas não no intervalo $[a, b]$.

Avaliando continuidade

Avalie a continuidade da função:

$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3x^4 + 5x^2 + 1}$$

- Domínio de $f(x)$: $x \in [-3, 3]$, exceto as raízes de $3x^4 + 5x^2 + 1$.
- Raízes reais de $3x^4 + 5x^2 + 1$: nenhuma.
- Tomando $c \in (-3, 3)$, temos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3x^4 + 5x^2 + 1} = \frac{\sqrt{9 - c^2}}{3c^4 + 5c^2 + 1} = f(c)$$

- Limites laterais:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{9 - (3^-)^2}}{3(3^-)^4 + 5(3^-)^2 + 1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(3)$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{\sqrt{9 - (-3^+)^2}}{3(-3^+)^4 + 5(-3^+)^2 + 1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(-3)$$

Avaliando continuidade

Avalie a continuidade da função:

$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3x^4 + 5x^2 + 1}$$

- Domínio de $f(x)$: $x \in [-3, 3]$, exceto as raízes de $3x^4 + 5x^2 + 1$.
- Raízes reais de $3x^4 + 5x^2 + 1$: nenhuma.
- Tomando $c \in (-3, 3)$, temos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3x^4 + 5x^2 + 1} = \frac{\sqrt{9 - c^2}}{3c^4 + 5c^2 + 1} = f(c)$$

- Limites laterais:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{9 - (3^-)^2}}{3(3^-)^4 + 5(3^-)^2 + 1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(3)$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{\sqrt{9 - (-3^+)^2}}{3(-3^+)^4 + 5(-3^+)^2 + 1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(-3)$$

Avaliando continuidade

Avalie a continuidade da função:

$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3x^4 + 5x^2 + 1}$$

- Domínio de $f(x)$: $x \in [-3, 3]$, exceto as raízes de $3x^4 + 5x^2 + 1$.
- Raízes reais de $3x^4 + 5x^2 + 1$: nenhuma.
- Tomando $c \in (-3, 3)$, temos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3x^4 + 5x^2 + 1} = \frac{\sqrt{9 - c^2}}{3c^4 + 5c^2 + 1} = f(c)$$

- Limites laterais:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{9 - (3^-)^2}}{3(3^-)^4 + 5(3^-)^2 + 1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(3)$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{\sqrt{9 - (-3^+)^2}}{3(-3^+)^4 + 5(-3^+)^2 + 1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(-3)$$

Avaliando continuidade

Avalie a continuidade da função:

$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3x^4 + 5x^2 + 1}$$

- Domínio de $f(x)$: $x \in [-3, 3]$, exceto as raízes de $3x^4 + 5x^2 + 1$.
- Raízes reais de $3x^4 + 5x^2 + 1$: nenhuma.
- Tomando $c \in (-3, 3)$, temos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3x^4 + 5x^2 + 1} = \frac{\sqrt{9 - c^2}}{3c^4 + 5c^2 + 1} = f(c)$$

- Limites laterais:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{9 - (3^-)^2}}{3(3^-)^4 + 5(3^-)^2 + 1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(3)$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{\sqrt{9 - (-3^+)^2}}{3(-3^+)^4 + 5(-3^+)^2 + 1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(-3)$$

Avaliando continuidade

Avalie a continuidade da função:

$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3x^4+5x^2+1}$$

- Domínio de $f(x)$: $x \in [-3, 3]$, exceto as raízes de $3x^4+5x^2+1$.
- Raízes reais de $3x^4+5x^2+1$: nenhuma.
- Tomando $c \in (-3, 3)$, temos:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \frac{\sqrt{9-x^2}}{3x^4+5x^2+1} = \frac{\sqrt{9-c^2}}{3c^4+5c^2+1} = f(c)$$

- Limites laterais:

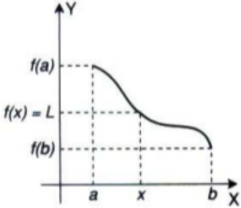
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{9-(3^-)^2}}{3(3^-)^4+5(3^-)^2+1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(3)$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{\sqrt{9-(-3^+)^2}}{3(-3^+)^4+5(-3^+)^2+1} = \frac{0^+}{289^-} = 0 = f(-3)$$

Teorema do valor intermediário

Teorema do valor intermediário

Se $f(x)$ é contínua dentro de um intervalo $[a,b]$ e L é um número tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(a) \geq L \geq f(b)$, então existe um valor de $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = L$.

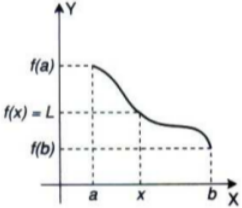


- Este teorema ilustra a idéia de que uma função contínua é aquela em que seu gráfico pode ser desenhado sem que "o lápis deixe de tocar o papel". (o gráfico não possui interrupções)

Teorema do valor intermediário

Teorema do valor intermediário

Se $f(x)$ é contínua dentro de um intervalo $[a,b]$ e L é um número tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(a) \geq L \geq f(b)$, então existe um valor de $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = L$.

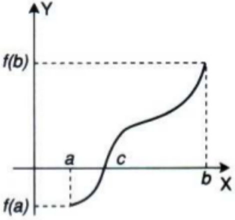


- Este teorema ilustra a idéia de que uma função contínua é aquela em que seu gráfico pode ser desenhado sem que "o lápis deixe de tocar o papel". (o gráfico não possui interrupções)

Teorema do valor intermediário

Corolário

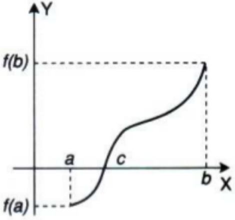
Se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$



- Este corolário é usado para assegurar a existência de raizes da função estudada dentro de um intervalo $[a, b]$.

Corolário

Se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$



- Este corolário é usado para assegurar a existência de raizes da função estudada dentro de um intervalo $[a,b]$.

Teorema do valor intermediário

Observações:

- Esse corolário garante que existe **ao menos** uma raiz no intervalo $[a, b]$.
- Se $f(a)$ e $f(b)$ tem o mesmo sinal, o corolário **não garante** que não existe uma raiz no intervalo.