Aula 15 - Diferenciais e incrementos

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

4 de outubro de 2023

Introdução

Definição de derivada

Seja uma função contínua e diferenciável $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Formulação alternativa

Seja uma função contínua e diferenciável $y = f(x)$ e os pontos x_0 e x_1, tal que $x_1 - x_0 = \Delta x$:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Introdução

Definição de derivada

Seja uma função contínua e diferenciável $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Formulação alternativa

Seja uma função contínua e diferenciável $y = f(x)$ e os pontos x_0 e x_1, tal que $x_1 - x_0 = \Delta x$:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Diferenciais

Incrementos:

- : em x: $\Delta x = x_1 - x_0$.
- : em y: $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$.

O que acontece quando o incremento em x tende a zero?

Diferenciais.

- : $dx = \lim_{\Delta x \to} \Delta x$.
- : $dy = \lim_{\Delta x \to} \Delta y$.

Obs: dy pode ser visto como o quanto a reta tangente sobe (ou desce) em função de Δx.

Diferenciais

Incrementos:

- : em x: $\Delta x = x_1 - x_0$.
- : em y: $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$.

O que acontece quando o incremento em x tende a zero?

Diferenciais.

- : $dx = \lim_{\Delta x \to} \Delta x$.
- : $dy = \lim_{\Delta x \to} \Delta y$.

Obs: dy pode ser visto como o quanto a reta tangente sobe (ou desce) em função de Δx.

Incrementos:

- : em x: $\Delta x = x_1 - x_0$.
- : em y: $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$.

O que acontece quando o incremento em x tende a zero?
Diferenciais.

- : $dx = \lim_{\Delta x \to} \Delta x$.
- : $dy = \lim_{\Delta x \to} \Delta y$.

Obs: dy pode ser visto como o quanto a reta tangente sobe (ou desce) em função de Δx.

Diferenciais

Incrementos:

- : em x: $\Delta x = x_1 - x_0$.
- : em y: $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$.

O que acontece quando o incremento em x tende a zero?
Diferenciais.

- : $dx = \lim_{\Delta x \to} \Delta x$.
- : $dy = \lim_{\Delta x \to} \Delta y$.

Obs: dy pode ser visto como o quanto a reta tangente sobe (ou desce) em função de Δx.

Idéia da aula

Transmitir a idéia de que a notação $\frac{dy}{dx}$ pode ser usada para representar uma razão de diferenciais ao invés de uma operação.

Formula da aproximação linear

Seja $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, então:

$$dy = f'(x)dx.$$

Consequantemente, para valores pequenos de Δx:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$$

A penúltima relação são os primeiros termos de uma relação conhecida como série de Taylor (mas isso é matéria para cálculo 2).

Diferenciais

Formula da aproximação linear

Seja $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, então:

$$dy = f'(x)dx.$$

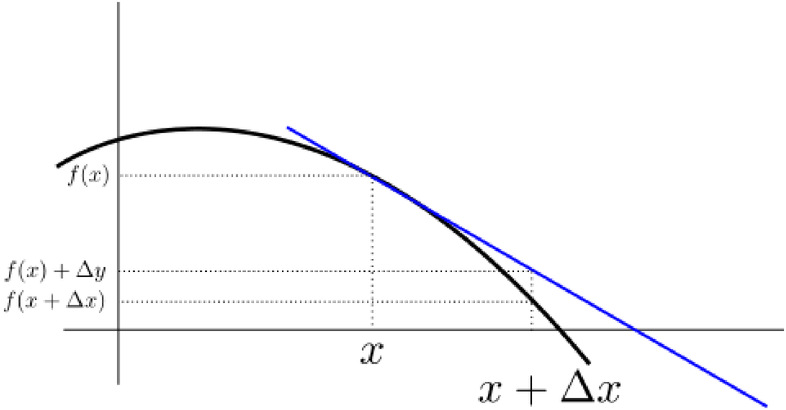
Consequantemente, para valores pequenos de Δx:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$$

A penúltima relação são os primeiros termos de uma relação conhecida como série de Taylor (mas isso é matéria para cálculo 2).

Aproximação linear



Erros

É esperado que tais aproximações produzam erros, definidos como:

- Erro médio: $\epsilon = \frac{\Delta y}{y}$
- Erro percentual: erro medio, mas escrito em porcentagem.

Observe que o erro não é uma medida exata em que voce poderia usa-la para reconstruir o valor real da função, mas é uma estimativa do quão errada pode ser sua medida.

Exemplo

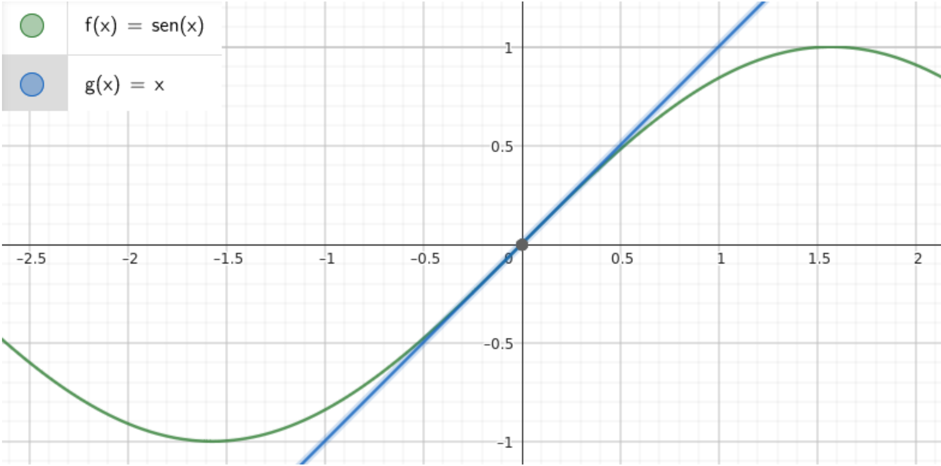
Aproximação linear

Mostre que, para valores pequenos de $a \in \mathbb{R}$, temos que:

$$sen(a) \approx a$$

(esta aproximação é bastante usada em física para estudar pequenas vibrações)

Gráfico do exercicio



Exercício 1

Estimativa

Sabendo que $\left(\frac{15}{16}\right)^3 = 0.824$, estime o valor de $\left(\frac{16}{15}\right)^3$

Exercício 2

Estimativa

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, estime o valor de $sen\left(\frac{4\pi}{15}\right)$. (obs: $\frac{4\pi}{15}$ radianos são 48^o)

Exercício 3

Estimativa

Seja um balão esférico cujo raio foi medido como 12cm e com erro máximo de $\pm 0.06cm$. Aproxime o erro máximo cometido no cálculo do volume desse balão.