Aula 11 - Regras de derivação 2

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

18 de setembro de 2023

Revisão: resultados conhecidos I

Sejam $a, n \in \mathbb{R}$ e e o número de Euler:

- Derivada da função constante:

$$f(x) = a \qquad \to \qquad f'(x) = 0$$

- Derivada da potência:

$$f(x) = x^n \qquad \to \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

- Derivada da função exponencial com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = a^x \qquad \to \qquad f'(x) = a^x \ln a$$

- Derivada da função exponencial de base e:

$$f(x) = e^x \qquad \to \qquad f'(x) = e^x$$

Revisão: resultados conhecidos I

Sejam $a, n \in \mathbb{R}$ e e o número de Euler:

- Derivada da função constante:

$$f(x) = a \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 0$$

- Derivada da potência:

$$f(x) = x^n \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

- Derivada da função exponencial com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = a^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = a^x \ln a$$

- Derivada da função exponencial de base e:

$$f(x) = e^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = e^x$$

Revisão: resultados conhecidos I

Sejam $a, n \in \mathbb{R}$ e e o número de Euler:

- Derivada da função constante:

$$f(x) = a \qquad \to \qquad f'(x) = 0$$

- Derivada da potência:

$$f(x) = x^n \qquad \to \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

- Derivada da função exponencial com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = a^x \qquad \to \qquad f'(x) = a^x \ln a$$

- Derivada da função exponencial de base e:

$$f(x) = e^x \qquad \to \qquad f'(x) = e^x$$

Revisão: resultados conhecidos II

- Derivada da função logaritmica com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = \log_a x \qquad \to \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

- Derivada da função logaritmica natural:

$$f(x) = \ln x \qquad \to \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

- Derivada da função seno:

$$f(x) = sen(x) \qquad \to \qquad f'(x) = cos(x)$$

- Derivada da função cosseno:

$$f(x) = cos(x) \qquad \to \qquad f'(x) = -sen(x)$$

Revisão: resultados conhecidos II

- Derivada da função logaritmica com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = \log_a x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

- Derivada da função logaritmica natural:

$$f(x) = \ln x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

- Derivada da função seno:

$$f(x) = sen(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = cos(x)$$

- Derivada da função cosseno:

$$f(x) = cos(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = -sen(x)$$

Revisão: resultados conhecidos II

- Derivada da função logaritmica com base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = \log_a x \qquad \to \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

- Derivada da função logaritmica natural:

$$f(x) = \ln x \qquad \to \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

- Derivada da função seno:

$$f(x) = sen(x) \qquad \to \qquad f'(x) = cos(x)$$

- Derivada da função cosseno:

$$f(x) = cos(x) \qquad \to \qquad f'(x) = -sen(x)$$

Propriedades I

Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções derivaveis e $a \in \mathbb{R}$:

- Derivada do produto de uma função por uma constante:

$$f(x) = ag(x) \qquad \to \qquad f'(x) = ag'(x)$$

- Derivada da soma/diferença de funções:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \qquad \to \qquad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Propriedades II

Ao contrário das propriedades apresentadas anteriormente, os resultados a seguir não são intuitivos

Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções derivaveis e $a \in \mathbb{R}$:

- Derivada do produto de duas funções:

$$f(x) = g(x)h(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

- Derivada do quociente entre duas funções:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Cálculo de derivadas de funções compostas

Como derivar:

- $f(x) = e^{x^2}$
- $f(x) = cos(x^3)$
- $f(x) = (x^2 + 3)^5 0$
- $f(x) = e^x sen(2x)$

Regra da cadeia

Seja uma função $h(x) = f(g(x))$, então sua derivada é calculada como:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Exemplo 1:

Derivar em relação a x:

$$h(x) = e^{x^2}$$

Nesse caso temos:

- $f(g) = e^g \to \frac{df}{dg} = e^g$
- $g(x) = x^2 \to \frac{dg}{dx} = 2x$

Então:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx} = 2xe^g$$

Logo:

$$\frac{dh}{dx} = 2xe^{x^2}$$

Exemplo 2:

Derivar em relação a x:

$$h(x) = cos(x^3)$$

Nesse caso temos:

- $f(g) = cos(g) \rightarrow \frac{df}{dg} = -sen(g)$
- $g(x) = x^3 \rightarrow \frac{dg}{dx} = 3x^2$

Então:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx} = -3x^2 sen(g)$$

Logo:

$$\frac{dh}{dx} = -3x^2 sen(x^3)$$

Exemplo 2:

Derivar em relação a x:

$$h(x) = cos(x^3)$$

Nesse caso temos:

- $f(g) = cos(g) \to \frac{df}{dg} = -sen(g)$
- $g(x) = x^3 \to \frac{dg}{dx} = 3x^2$

Então:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx} = -3x^2 sen(g)$$

Logo:

$$\frac{dh}{dx} = -3x^2 sen(x^3)$$

Exemplo 3:

Derivar em relação a x:

$$h(x) = (x^2 + 3)^{50}$$

Nesse caso temos:

- $f(g) = g^{50} \rightarrow \frac{df}{dg} = 50g^{49}$
- $g(x) = x^2 + 3 \rightarrow \frac{dg}{dx} = 2x$

Então:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx} = 100xg^{49}$$

Logo:

$$\frac{dh}{dx} = 100x(x^2 + 3)^{49}$$

Exemplo 3:

Derivar em relação a x:

$$h(x) = (x^2 + 3)^{50}$$

Nesse caso temos:

- $f(g) = g^{50} \to \frac{df}{dg} = 50g^{49}$
- $g(x) = x^2 + 3 \to \frac{dg}{dx} = 2x$

Então:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx} = 100xg^{49}$$

Logo:

$$\frac{dh}{dx} = 100x(x^2 + 3)^{49}$$

Exemplo 4:

Derivar em relação a x:

$$h(x) = e^x sen(2x)$$

Regra do produto:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) sen(2x) + e^x \frac{d}{dx}(sen(2x))$$

$$\frac{dh}{dx} = e^x sen(2x) + e^x \frac{d}{dx}(sen(2x))$$

Regra da cadeia:

$$\frac{dh}{dx} = e^x sen(2x) + 2e^x cos(2x)$$

Logo:

$$\frac{dh}{dx} = e^x (sen(2x) + 2cos(2x))$$

Exemplo 4:

Derivar em relação a x:

$$h(x) = e^x sen(2x)$$

Regra do produto:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x)sen(2x) + e^x \frac{d}{dx}(sen(2x))$$

$$\frac{dh}{dx} = e^x sen(2x) + e^x \frac{d}{dx}(sen(2x))$$

Regra da cadeia:

$$\frac{dh}{dx} = e^x sen(2x) + 2e^x cos(2x)$$

Logo:

$$\frac{dh}{dx} = e^x (sen(2x) + 2cos(2x))$$

Exemplo 5

Derivar em relação a x:

$$f(x) = tg(x)$$

Aplicando a identidade trigonométrica $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ e a propriedade do quociente entre funções:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}\left(sen(x)\right)cos(x) - sen(x)\frac{d}{dx}\left(cos(x)\right)}{cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$f'(x) = sec^2(x)$$

Derivada de função em que a derivada de sua inversa é conhecida

Seja uma função $f(x)$ tal que a derivada de sua inversa f^{-1} é conhecida, sua derivada é calculada como:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\frac{df^{-1}}{dy}}$$

Exemplo 6:

Derivar em relação a x:

$$f(x) = arcsen(x)$$

Nesse caso temos:

- $f^{-1}(y) = sen(y) \rightarrow \frac{df^{-1}}{dy} = cos(y)$

Então:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\frac{df^{-1}}{dy}} = \frac{1}{cos(y)}$$

Usando a identidade trigonométrica, temos: $cos(y) = \sqrt{1 - sen^2 y}$ e $y = sen(x)$, logo:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Exemplo 6:

Derivar em relação a x:

$$f(x) = arcsen(x)$$

Nesse caso temos:

- $f^{-1}(y) = sen(y) \rightarrow \frac{df^{-1}}{dy} = cos(y)$

Então:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\frac{df^{-1}}{dy}} = \frac{1}{cos(y)}$$

Usando a identidade trigonométrica, temos: $cos(y) = \sqrt{1 - sen^2 y}$ e $y = sen(x)$, logo:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$