Aula 19 - Derivação implícita

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

9 de outubro de 2023

Revisão: Regra da cadeia

Seja uma função $h(x) = f(g(x))$, então sua derivada é calculada como:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Como estávamos fazendo:

- Construir os termos da função composta:
  - Parte interna: $g(x)$
  - Parte externa: $f(g)$
- Derivar estes termos:
  - Parte interna: $\frac{dg}{dx}$
  - Parte externa: $\frac{df}{dg}$
- Multiplicar estas derivadas.

Seja uma função $h(x) = f(g(x))$, então sua derivada é calculada como:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Como estávamos fazendo:

- Construir os termos da função composta:
  - Parte interna: $g(x)$
  - Parte externa: $f(g)$
- Derivar estes termos:
  - Parte interna: $\frac{dg}{dx}$
  - Parte externa: $\frac{df}{dg}$
- Multiplicar estas derivadas.

Revisão: Regra da cadeia (fazendo rápido)

Seja uma função $h(x) = f(g(x))$, então sua derivada é calculada como:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Como fazer mais rápido:

- Determinar (de cabeça) quem é a parte interna e externa da função composta.
- **Resultado:** Derivada da parte externa (em relação a parte interna) vezes derivada da parte interna.

Revisão: Regra da cadeia Exemplos

Derivar em relação a x:

1. $f(x) = (3x^2 - x)^{\frac{3}{2}}$
2. $f(x) = cos(x^2)$
3. $f(x) = \sqrt{ln(x)}$

Derivar em relação a x:

1. $f(x) = (3x^2 - x)^{\frac{3}{2}}$
2. $f(x) = cos(x^2)$
3. $f(x) = \sqrt{ln(x)}$

Derivar em relação a x:

1. $f(x) = (3x^2 - x)^{\frac{3}{2}}$
2. $f(x) = cos(x^2)$
3. $f(x) = \sqrt{ln(x)}$

Definições

- Função explícita: função em que é possível escrever sua imagem na forma de uma relação $y = f(x)$.
- Função implícita: função em que **não** é possível escrever sua imagem na forma de uma relação $y = f(x)$. Este tipo de função é representada implícitamente por uma equação que envolve os termos x e y de seus pontos no gráfico. (Na prática, quando y não tiver como ser isolado).

Objetivo: encontrar a derivada de funções que não podem ser escritas na forma $y = f(x)$

Exemplo: (Circunferência de raio 3 e centro em (1,2))

$$(y-2)^2 + (x-1)^2 = 9$$

ou

$$y^2 - 4y + x^2 - 2x = 4$$

Como derivar isso? Regra da cadeia (só que não agora). Derivando os dois termos desta igualdade em relação a x, temos:

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 - 4y + x^2 - 2x\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

Distribuindo as operações de derivada:

$$\frac{d}{dx}(y^2) - 4\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(x^2) - 2\frac{dx}{dx} = 0$$

Objetivo: encontrar a derivada de funções que não podem ser escritas na forma $y = f(x)$

Exemplo: (Circunferência de raio 3 e centro em (1,2))

$$(y-2)^2 + (x-1)^2 = 9$$

ou

$$y^2 - 4y + x^2 - 2x = 4$$

Como derivar isso? Regra da cadeia (só que não agora). Derivando os dois termos desta igualdade em relação a x, temos:

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 - 4y + x^2 - 2x\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

Distribuindo as operações de derivada:

$$\frac{d}{dx}(y^2) - 4\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(x^2) - 2\frac{dx}{dx} = 0$$

Derivação implícita

Objetivo: encontrar a derivada de funções que não podem ser escritas na forma $y = f(x)$

Exemplo: (Circunferência de raio 3 e centro em (1,2))

$$(y-2)^2 + (x-1)^2 = 9$$

ou

$$y^2 - 4y + x^2 - 2x = 4$$

Como derivar isso? Regra da cadeia (só que não agora). Derivando os dois termos desta igualdade em relação a x, temos:

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 - 4y + x^2 - 2x\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

Distribuindo as operações de derivada:

$$\frac{d}{dx}(y^2) - 4\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(x^2) - 2\frac{dx}{dx} = 0$$

Objetivo: encontrar a derivada de funções que não podem ser escritas na forma $y = f(x)$

Exemplo: (Circunferência de raio 3 e centro em (1,2))

$$(y-2)^2 + (x-1)^2 = 9$$

ou

$$y^2 - 4y + x^2 - 2x = 4$$

Como derivar isso? Regra da cadeia (só que não agora). Derivando os dois termos desta igualdade em relação a x, temos:

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 - 4y + x^2 - 2x\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

Distribuindo as operações de derivada:

$$\frac{d}{dx}(y^2) - 4\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(x^2) - 2\frac{dx}{dx} = 0$$

Derivação implícita

- Aplicando a derivada nos termos em x, temos:

$$\frac{d}{dx}(y^2) - 4\frac{dy}{dx} + 2x - 2 = 0$$

- Considerando que $\frac{dy}{dx}$ é o que queremos encontrar, o que fazer com $\frac{d}{dx}(y^2)$?
- Agora aplicamos a regra da cadeia para a função composta $h(x) = [y(x)]^2$.
  - Parte interna: $g(x) = y$
  - Parte externa: $f(g) = g^2$
  - Derivada: $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$

- Substituindo a derivada de y^2:

$$2y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} + 2x - 2 = 0$$

- Substituindo a derivada de y^2:

$$\frac{dy}{dx}(2y - 4) = -2x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 2}{2y - 4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + 1}{y - 2}$$

Exercício 1

Calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$ da função:

$$sen^2(3y) = x + y - 1$$

Exercício 2

Obtenha a equação da reta tangente à curva:

$$x^3 + y^3 - 12xy = 0$$

no ponto $P(6, 6)$.

Exercício 3

Obtenha a equação da reta tangente à curva:

$$(x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) = 65$$

no ponto $P(3, -\sqrt{2})$.