Aula 12 - Aplicações de derivadas

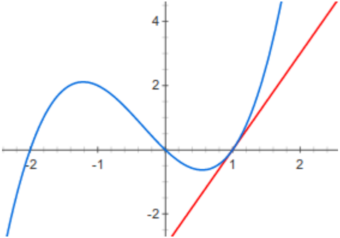
Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

18 de setembro de 2023

Recapitulando...

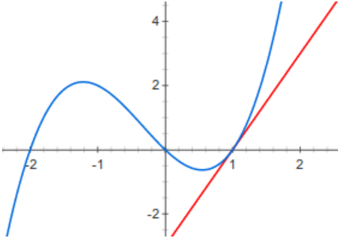
- A derivada de uma função $f(x)$ em um ponto $x = a$ retorna o coeficiente angular da uma reta tangente à função $f(x)$ neste ponto.



- Qual o significado disso?

Recapitulando...

- A derivada de uma função $f(x)$ em um ponto $x = a$ retorna o coeficiente angular da uma reta tangente à função $f(x)$ neste ponto.



- **Qual o significado disso?**

Taxa de variação de uma função $y = f(x)$:

- Uma variação de Δx em x produz uma variação de Δy em $f(x)$.
- A proporção destes valores (Taxa de variação média) é expressa por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Utilizando o conceito de limite, esta formula para variação média pode ser extendida para obter uma taxa de variação em um instante específico (Taxa de variação instantanea).
- Quando $\Delta x \to 0$, esta proporção se torna a derivada da função:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Taxa de variação de uma função $y = f(x)$:

- Uma variação de Δx em x produz uma variação de Δy em $f(x)$.
- A proporção destes valores (Taxa de variação média) é expressa por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Utilizando o conceito de limite, esta formula para variação média pode ser extendida para obter uma taxa de variação em um instante específico (Taxa de variação instantanea).
- Quando $\Delta x \to 0$, esta proporção se torna a derivada da função:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Taxa de variação: Velocidade

- Um exemplo clássico no estudo de taxas de variação é o conceito de velocidade.
- Seja $s(t)$ uma função que descreve a posição de um corpo em função do tempo t.
- A velocidade média v de um corpo é a razão entre seu deslocamento Δs e o tempo necessário para isso (Δt):

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- Velocidade instantanea $(\Delta t \to 0)$:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

- Logo, a derivada de uma função que descreve a trajetória $s(t)$ de um corpo no tempo é uma função $v(t)$ que descreve a velocidade deste corpo para todo instante t do dominio.

Taxa de variação: Aceleração

- Assim como a função de posição, a taxa de variação da função de velocidade (aceleração) pode ser calculada.
- A aceleração média a de um corpo é a razão entre a variação de velocidade Δv e o tempo em que essa variação ocorreu (Δt):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- Aceleração instantanea $(\Delta t \to 0)$:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

- Logo, a derivada de uma função que descreve a velocidade $v(t)$ de um corpo no tempo é uma função $a(t)$ que descreve a aceleração deste corpo para todo instante t do dominio.

Exemplo: sistema amortecido

Seja o problema de um objeto preso a uma mola verticalmente como na figura. Após ser solto da altura $y(0) = 1$, a altura do objeto em relação ao eixo x varia de acordo com a função:

$$y(t) = e^{-t} sen(t)$$

Determine a velocidade e a aceleração do objeto no instante $t = 1.5$

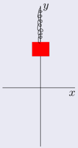


Ilustração do problema

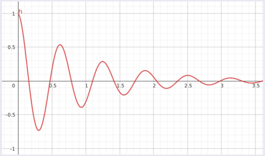


gráfico da função

Derivada em ordem superior

- A função de aceleração é a derivada da derivada da função de posição $s(t)$.
- Desta forma, a função de aceleração é dita derivada segunda da função de $s(t)$.
- Derivada segunda de uma função $f(x)$. Notação:
  - $f''(x)$;
  - $\frac{d^2 f}{dx^2}$;
- A derivada de ordem n de uma função $f(x)$ é a função obtida após derivar $f(x)$ por n vezes. Notação:
  - $f^{(n)}(x)$;
  - $\frac{d^n f}{dx^n}$;

Derivada em ordem superior

- A função de aceleração é a derivada da derivada da função de posição $s(t)$.
- Desta forma, a função de aceleração é dita derivada segunda da função de $s(t)$.
- Derivada segunda de uma função $f(x)$. Notação:
  - $f''(x)$;
  - $\frac{d^2f}{dx^2}$;
- A derivada de ordem n de uma função $f(x)$ é a função obtida após derivar $f(x)$ por n vezes. Notação:
  - $f^{(n)}(x)$;
  - $\frac{d^nf}{dx^n}$;

Derivada em ordem superior

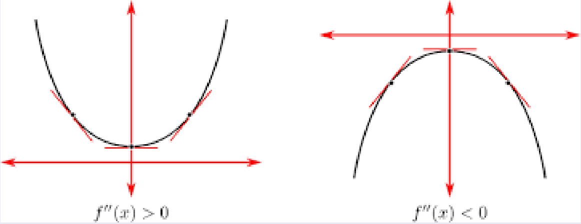
- A função de aceleração é a derivada da derivada da função de posição $s(t)$.
- Desta forma, a função de aceleração é dita derivada segunda da função de $s(t)$.
- Derivada segunda de uma função $f(x)$. Notação:
  - $f''(x)$;
  - $\frac{d^2 f}{dx^2}$;
- A derivada de ordem n de uma função $f(x)$ é a função obtida após derivar $f(x)$ por n vezes. Notação:
  - $f^{(n)}(x)$;
  - $\frac{d^n f}{dx^n}$;

Derivada em ordem superior

- A função de aceleração é a derivada da derivada da função de posição $s(t)$.
- Desta forma, a função de aceleração é dita derivada segunda da função de $s(t)$.
- Derivada segunda de uma função $f(x)$. Notação:
  - $f''(x)$;
  - $\frac{d^2 f}{dx^2}$;
- A derivada de ordem n de uma função $f(x)$ é a função obtida após derivar $f(x)$ por n vezes. Notação:
  - $f^{(n)}(x)$;
  - $\frac{d^n f}{dx^n}$;

Significado da derivada segunda

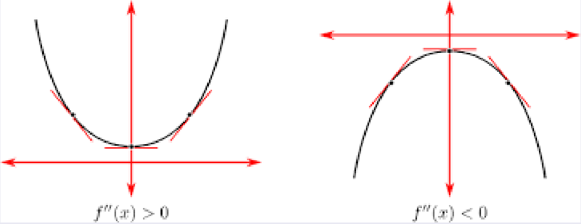
Descreve a evolução da taxa de variação da derivada de $f(x)$



- Na Figura à esquerda, a inclinação da reta tangente varia de muito inclinada (de forma decrescente), para horizontal e depois para inclinada (de forma crescente). O coeficiente angular das retas tangentes são **crescentes** ao longo de tempo.
- Na Figura à direita, a inclinação da reta tangente varia de muito inclinada (de forma crescente), para horizontal e depois para inclinada (de forma decrescente). O coeficiente angular das retas tangentes são **decrescentes** ao longo de tempo.

Significado da derivada segunda

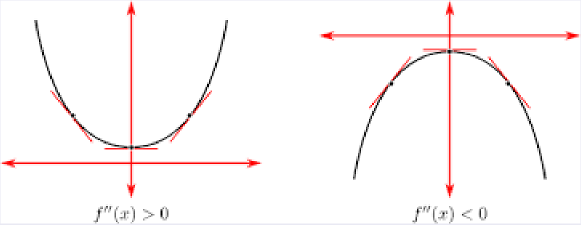
Descreve a evolução da taxa de variação da derivada de $f(x)$



- Na Figura à esquerda, a inclinação da reta tangente varia de muito inclinada (de forma decrescente), para horizontal e depois para inclinada (de forma crescente). O coeficiente angular das retas tangentes são **crescentes** ao longo de tempo.
- Na Figura à direita, a inclinação da reta tangente varia de muito inclinada (de forma crescente), para horizontal e depois para inclinada (de forma decrescente). O coeficiente angular das retas tangentes são **decrescentes** ao longo de tempo.

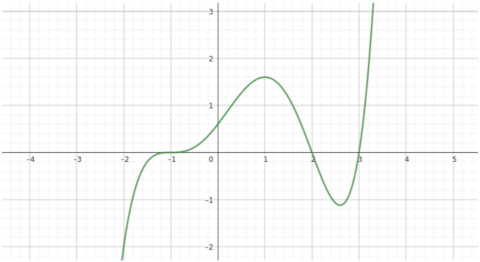
Significado da derivada segunda

Descreve a evolução da taxa de variação da derivada de $f(x)$

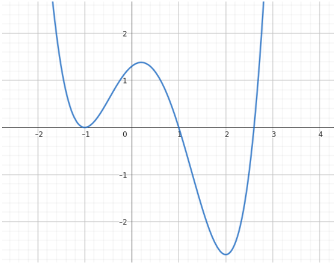


- O sinal da derivada segunda no ponto está associada a concavidade da curva.
- Ex: $y = x^2 + 3$ tem concavidade para cima, enquanto $y = -x^2 + 3$ tem concavidade para baixo em todo o domínio.

- Seja a função do gráfico abaixo. Em que intervalos ela é crescente e decrescente?
- Como relacionar isso com a derivada?



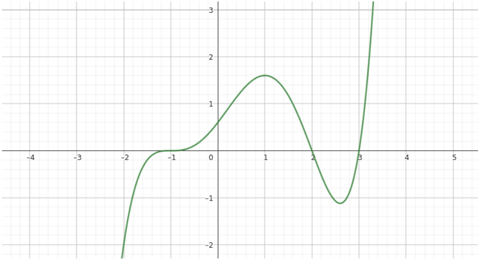
$f(x)$



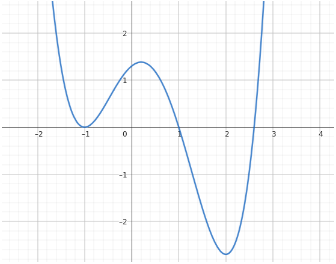
$f'(x)$

Considerando a derivada, o comportamento da função em um ponto x_0 é descrito como:

- Crescente: quando $f'(x_0) > 0$
- Decrescente: quando $f'(x_0) < 0$
- **Ponto crítico: quando $f'(x_0) = 0$ ou não existe**



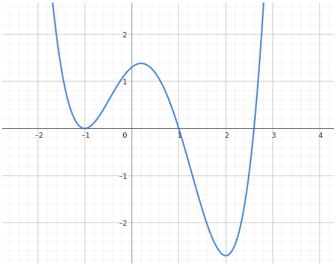
$f(x)$



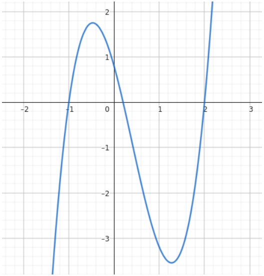
$f'(x)$

Opções nesse problema:

- Mínimo local: Se $f''(x_0) > 0$ (função com concavidade para cima)
- Máximo local: Se $f''(x_0) < 0$ (função com concavidade para baixo)
- Ponto de inflexão horizontal: $f''(x_0) = 0$ **+ troca de sinal em** $f''(x_0)$ (troca de concavidade)



$f'(x)$



$f''(x)$

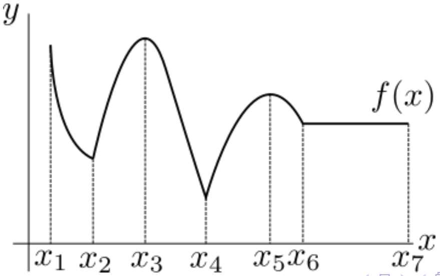
Pontos críticos

Outras opções:

- Mínimo/máximo local: x_0 pode ser min/max independente da derivada se estiver no estremo9 do intervalo estudado.
- Ponto de inflexão vertical (reversão):

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty$$

- Indeterminação: $f'(x) = f''(x_0) = 0$ sem troca de sinal em $f''(x_0)$.
- Pontos com bicos.

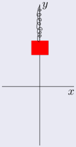


Exemplo: sistema amortecido 2

Seja o problema de um objeto preso a uma mola verticalmente como na figura. Após ser solto da altura $y(0) = 1$, a altura do objeto em relação ao eixo x varia de acordo com a função:

$$y(t) = e^{-t} sen(t)$$

Determine o instante em que o objeto obtém velocidade máxima:



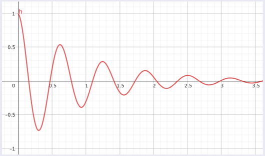


Ilustração do problema   gráfico da função