Aula 6 - Limites fundamentais

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

25 de agosto de 2023

Merchans

- Aniversário metrópole parque (dia 30 no SEBRAE)

https://metropoleparque.imd.ufrn.br/parque/noticias/7049

- Coleta de lixo eletrônico.

https://metropoleparque.imd.ufrn.br/parque/noticias/7044

- Campanha de doação de Sangue (até dia 31).

https://metropoleparque.imd.ufrn.br/parque/noticias/7041

Limites Fundamentais

- Três limites que apresentam formas indeterminadas e que não são resolvidos por simples fatorações.
- Seus resultados são importantes para a definição de algumas derivadas.

Limites Fundamentais

Limite fundamental 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Limite fundamental 2

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Limite fundamental 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a)$$

em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Limites Fundamentais

Limite fundamental 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Limite fundamental 2

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Limite fundamental 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a)$$

em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Limites Fundamentais

Limite fundamental 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Limite fundamental 2

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

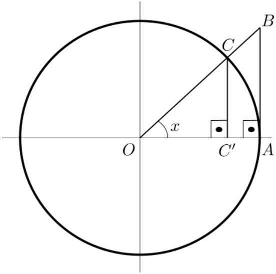
Limite fundamental 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a)$$

em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Limite Fundamental 1

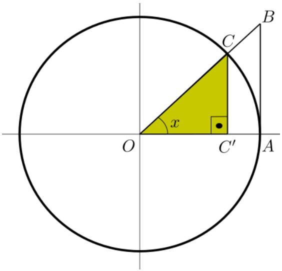
- Seja uma circunferência com cetro na origem do plano cartesiano e o triângulo reto AOB.



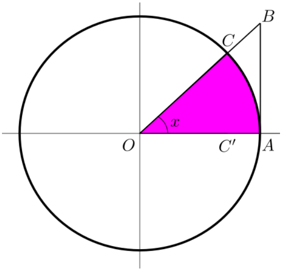
- A reta OB cruza a circunferência no ponto C e os pontos $C'OC$ formam outro triângulo reto.

- Comparando a área destes triângulos e a área do setor $\widehat{AOC}$ temos:

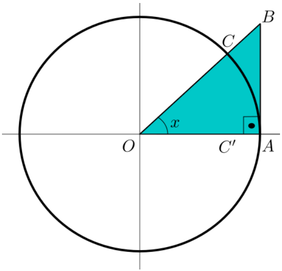
Triângulo AOC



Setor $\widehat{AOC}$



Triângulo AOB



$$Area(AOC) \leq Area(\widehat{AOC}) \leq Area(AOB)$$

Limite Fundamental 1

- Calculando as áreas desta desigualdade, temos:

$$\frac{\bar{OC'} \times \bar{CC'}}{2} \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{2} \leq \frac{\bar{OA} \times \bar{AB}}{2}$$

- Como $x \neq 0$, dividimos todos os termos da desigualdade por $sen(x)$:

$$\frac{\bar{OC'} \times \bar{CC'}}{2} \frac{1}{sen(x)} \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{2sen(x)} \leq \frac{\bar{OA} \times \bar{AB}}{2} \frac{1}{sen(x)}$$

- Pelas figuras anteriores, temos que $sen(x) = \frac{\bar{CC'}}{\bar{OC'}} = \frac{\bar{AB}}{\bar{OB}}$:

$$\frac{\bar{OC'} \times \bar{CC'}}{2} \frac{\bar{OC'}}{\bar{CC'}} \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{2sen(x)} \leq \frac{\bar{OA} \times \bar{AB}}{2} \frac{\bar{OB}}{\bar{AB}}$$

Limite Fundamental 1

- Calculando as áreas desta desigualdade, temos:

$$\frac{\bar{OC'} \times \bar{CC'}}{2} \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{2} \leq \frac{\bar{OA} \times \bar{AB}}{2}$$

- Como $x \neq 0$, dividimos todos os termos da desigualdade por $sen(x)$:

$$\frac{\bar{OC'} \times \bar{CC'}}{2} \frac{1}{sen(x)} \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{2sen(x)} \leq \frac{\bar{OA} \times \bar{AB}}{2} \frac{1}{sen(x)}$$

- Pelas figuras anteriores, temos que $sen(x) = \frac{\bar{CC'}}{\bar{OC'}} = \frac{\bar{AB}}{\bar{OB}}$:

$$\frac{\bar{OC'} \times \bar{CC'}}{2} \frac{\bar{OC'}}{\bar{CC'}} \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{2sen(x)} \leq \frac{\bar{OA} \times \bar{AB}}{2} \frac{\bar{OB}}{\bar{AB}}$$

Limite Fundamental 1

- Simplificando:

$$(\bar{OC'})^2 \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{sen(x)} \leq \bar{OA} \times \bar{OB}$$

- Como $cos(x) = \frac{\bar{OC'}}{\bar{OC}} = \frac{\bar{OA}}{\bar{OB}}$:

$$(\bar{OC})^2 cos^2(x) \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{sen(x)} \leq (\bar{OB})^2 cos(x)$$

- Como $\bar{OA}$ e $\bar{OC}$ são o raio da circunferência, $\bar{OA} = \bar{OC}$, logo, dividindo todos os termos da desigualdade por $(\bar{OA})^2$:

$$cos^2(x) \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{(\bar{OB})^2}{(\bar{OA})^2} cos(x)$$

Limite Fundamental 1

- Simplificando:

$$(\bar{OC'})^2 \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{sen(x)} \leq \bar{OA} \times \bar{OB}$$

- Como $cos(x) = \frac{\bar{OC'}}{\bar{OC}} = \frac{\bar{OA}}{\bar{OB}}$:

$$(\bar{OC})^2 cos^2(x) \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{sen(x)} \leq (\bar{OB})^2 cos(x)$$

- Como $\bar{OA}$ e $\bar{OC}$ são o raio da circunferência, $\bar{OA} = \bar{OC}$, logo, dividindo todos os termos da desigualdade por $(\bar{OA})^2$:

$$cos^2(x) \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{(\bar{OB})^2}{(\bar{OA})^2} cos(x)$$

Limite Fundamental 1

- Simplificando:

$$(\bar{OC'})^2 \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{sen(x)} \leq \bar{OA} \times \bar{OB}$$

- Como $cos(x) = \frac{\bar{OC'}}{\bar{OC}} = \frac{\bar{OA}}{\bar{OB}}$:

$$(\bar{OC})^2 cos^2(x) \leq \frac{x(\bar{OA})^2}{sen(x)} \leq (\bar{OB})^2 cos(x)$$

- Como $\bar{OA}$ e $\bar{OC}$ são o raio da circunferência, $\bar{OA} = \bar{OC}$, logo, dividindo todos os termos da desigualdade por $(\bar{OA})^2$:

$$cos^2(x) \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{(\bar{OB})^2}{(\bar{OA})^2} cos(x)$$

Limite Fundamental 1

- Aplicando novamente $cos(x) = \frac{\bar{OA}}{\bar{OB}}$

$$cos^2(x) \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{1}{cos^2(x)} cos(x)$$

$$cos^2(x) \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{1}{cos(x)}$$

- Invertendo a relação de ordem:

$$\frac{1}{cos^2(x)} \geq \frac{sen(x)}{x} \geq cos(x)$$

Limite Fundamental 1

- Aplicandо novamente $cos(x) = \frac{\bar{OA}}{\bar{OB}}$

$$cos^2(x) \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{1}{cos^2(x)} cos(x)$$

$$cos^2(x) \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{1}{cos(x)}$$

- Invertendo a relação de ordem:

$$\frac{1}{cos^2(x)} \geq \frac{sen(x)}{x} \geq cos(x)$$

Limite Fundamental 1

- Enfim, aplicando o limite com $x \to 0$ nos 3 termos da desigualdade:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{cos^2(x)} \geq \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \geq \lim_{x\to 0} cos(x)$$

$$1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \geq 1$$

- Logo, pelo teorema do Sanduíche:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Limite Fundamental 1

- Enfim, aplicando o limite com $x \to 0$ nos 3 termos da desigualdade:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{cos^2(x)} \geq \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \geq \lim_{x\to 0} cos(x)$$

$$1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \geq 1$$

- Logo, pelo teorema do Sanduíche:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Limite Fundamental 2

Relembrando...

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Demonstração:

- Seja o produto notável:

$$(a+b)^x = \binom{n}{0}a^x + \binom{x}{1}a^{x-1}b + \ldots + \binom{x}{x-1}ab^{x-1} + \binom{x}{x}b^x$$

- Usando notação de somatórios:

$$(a+b)^x = \sum_{i=0}^{x}\binom{x}{i}a^{x-i}b^i$$

Limite Fundamental 2

- Tomando $a = 1$ e $b = \frac{1}{x}$:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} \left(\frac{1}{x}\right)^i$$

- Substuindo os termos binomiais:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x} \frac{x!}{i!\,(x-i)!} \frac{1}{x^i}$$

- Reordenando os termos:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x} \frac{x!}{x^i\,(x-i)!} \frac{1}{i!}$$

Limite Fundamental 2

- Tomando $a = 1$ e $b = \frac{1}{x}$:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} \left(\frac{1}{x}\right)^i$$

- Substuindo os termos binomiais:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x} \frac{x!}{i!\,(x-i)!} \frac{1}{x^i}$$

- Reordenando os termos:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x} \frac{x!}{x^i\,(x-i)!} \frac{1}{i!}$$

Limite Fundamental 2

- Observe que tanto $x!$ e $x^i(x-i)!$ são polinômios de grau x com coeficiente 1 em x^x:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x}\left(1+\frac{P_i^{n-1}(x)}{Q_i^n(x)}\right)\frac{1}{i!}$$

- Em que P_i^{x-1} é um polinômio de grau $x-1$ e Q_i^x é um polinômio de grau x.
- Distribuindo estes somatórios:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x}\frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{x}\frac{P_i^{x-1}(x)}{Q_i^x(x)}\frac{1}{i!}$$

- Observe que tanto $x!$ e $x^i(x-i)!$ são polinômios de grau x com coeficiente 1 em x^x:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x}\left(1+\frac{P_i^{n-1}(x)}{Q_i^n(x)}\right)\frac{1}{i!}$$

- Em que P_i^{x-1} é um polinômio de grau $x-1$ e Q_i^x é um polinômio de grau x.
- Distribuindo estes somatórios:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{x}\frac{1}{i!}+\sum_{i=0}^{x}\frac{P_i^{x-1}(x)}{Q_i^x(x)}\frac{1}{i!}$$

Limite Fundamental 2

- Aplicando o limite com $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!} + \lim_{x\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{P_i^{n-1}(x)}{Q_i^n(x)}\frac{1}{i!}$$

- Como todos os quocientes do segundo somatório convergem para zero quando $x \to$, temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}$$

- Aplicando o limite com $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!} + \lim_{x\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{P_i^{n-1}(x)}{Q_i^n(x)}\frac{1}{i!}$$

- Como todos os quocientes do segundo somatório convergem para zero quando $x \to$, temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}$$

Limite Fundamental 2

- O resultado do somatório em i converge para um número irracional definido como a constante de Euler

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots = e$$

- Na forma decimal, temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2,718281828459045235360287\ldots$$

Forma alternativa

Fazendo uma substituição $u = \frac{1}{x}$, e como $u \to 0$ quando $x \to \infty$, temos:

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Limite Fundamental 3

Relembrando...

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a)$$

em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Demonstração:

- Seja a função:

$$f(x) = \frac{a^x - 1}{x}$$

- Define-se uma variável auxiliar $t = a^x - 1$.
- Isolando a^x e tomando o logaritmo natural desta relação, temos:

$$ln(a^x) = ln(t+1) \qquad \rightarrow \qquad x\, ln(a) = ln(t+1)$$

Limite Fundamental 3

Relembrando...

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a)$$

em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Demonstração:

- Seja a função:

$$f(x) = \frac{a^x - 1}{x}$$

- Define-se uma variável auxiliar $t = a^x - 1$.
- Isolando a^x e tomando o logaritmo natural desta relação, temos:

$$ln(a^x) = ln(t+1) \qquad \to \qquad x\, ln(a) = ln(t+1)$$

Limite Fundamental 3

- Substituindo os termos x pelos valores auxiliares em t:

$$\frac{t}{\frac{ln(t+1)}{ln(a)}}$$

- Assim:

$$f(x) = \frac{t}{ln(t+1)}\, ln(a)$$

- Pela propriedade de divisão de frações:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{ln(t+1)}{t}}\, ln(a)$$

- Propriedade de produto de número real por logarítmo:

$$f(x) = \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\, ln(a)$$

Limite Fundamental 3

- Substituindo os termos x pelos valores auxiliares em t:

$$\frac{t}{\frac{ln(t+1)}{ln(a)}}$$

- Assim:

$$f(x) = \frac{t}{ln(t+1)}\ ln(a)$$

- Pela propriedade de divisão de frações:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{ln(t+1)}{t}}\ ln(a)$$

- Propriedade de produto de número real por logarítmo:

$$f(x) = \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\ ln(a)$$

Limite Fundamental 3

- Igualando a relação obtida em t com a função original:

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\ ln(a)$$

- Aplicando o limite quando $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\ ln(a)$$

- Observe que devido a definição $t = a^x - 1$, temos que $t \to 0$ a medida em que $x \to 0$, logo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\ ln(a)$$

Limite Fundamental 3

- Igualando a relação obtida em t com a função original:

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\ ln(a)$$

- Aplicando o limite quando $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\ ln(a)$$

- Observe que devido a definição $t = a^x - 1$, temos que $t \to 0$ a medida em que $x \to 0$, logo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\ ln(a)$$

Limite Fundamental 3

- Aplicando os limites em t:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)\frac{\lim_{t\to 0}1}{ln\left[\lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}\right]}$$

- Usando a versão alternativa do segundo limite fundamental:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)\frac{1}{ln(e)}$$

- Assim:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)$$

- Aplicando os limites em t:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)\frac{\lim_{t\to 0}1}{ln\left[\lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}\right]}$$

- Usando a versão alternativa do segundo limite fundamental:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)\frac{1}{ln(e)}$$

- Assim:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)$$

Exercicios

Calcule os limites

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{5x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 1}{x}$$

Exercicios

Calcule os limites

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{5x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}$$

Exercicios

Calcule os limites

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{5x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x)-1}{x}$$