Aula 17 - Construção de gráficos

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

4 de outubro de 2023

Construção de gráficos

Propósito

- Aprender a extrair o máximo de informações a partir de uma função.
- Combinar diversos conceitos do estudo de derivadas.

Construção de gráficos

Fazer um esboço do gráfico da seguinte função:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$$

Etapas para se esboçar o gráfico de uma função $f(x)$:

1. Estudar para onde vão os limites de $f(x)$ no infinito e no menos infinito.
2. Verificar se a função possui assíntotas verticais e, caso existam, como $f(x)$ se comporta em torno delas.
3. Determinar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente.
4. Obter os pontos críticos de $f(x)$. (Valores de x em que $f'(x)$ é nula ou inexistente)
5. Obter os pontos máximos e mínimos locais e os pontos de inflexão de $f(x)$.
6. Determinar os intervalos em que $f(x)$ possui concavidade para cima ou para baixo.
7. Obter as raizes de $f(x)$, se possível. E obter $f(0)$, se possível.
8. Esboçar o gráfico.

Construção de gráficos

Fazer um esboço do gráfico da seguinte função:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$$

Etapas para se esboçar o gráfico de uma função $f(x)$:

1. Estudar para onde vão os limites de $f(x)$ no infinito e no menos infinito.
2. Verificar se a função possui assíntotas verticais e, caso existam, como $f(x)$ se comporta em torno delas.
3. Determinar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente.
4. Obter os pontos críticos de $f(x)$. (Valores de x em que $f'(x)$ é nula ou inexistente)
5. Obter os pontos máximos e mínimos locais e os pontos de inflexão de $f(x)$.
6. Determinar os intervalos em que $f(x)$ possui concavidade para cima ou para baixo.
7. Obter as raizes de $f(x)$, se possível. E obter $f(0)$, se possível.
8. Esboçar o gráfico.

Construção de gráficos

Fazer um esboço do gráfico da seguinte função:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$$

Etapas para se esboçar o gráfico de uma função $f(x)$:

1. Estudar para onde vão os limites de $f(x)$ no infinito e no menos infinito.
2. Verificar se a função possui assíntotas verticais e, caso existam, como $f(x)$ se comporta em torno delas.
3. Determinar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente.
4. Obter os pontos críticos de $f(x)$. (Valores de x em que $f'(x)$ é nula ou inexistente)
5. Obter os pontos máximos e mínimos locais e os pontos de inflexão de $f(x)$.
6. Determinar os intervalos em que $f(x)$ possui concavidade para cima ou para baixo.
7. Obter as raizes de $f(x)$, se possível. E obter $f(0)$, se possível.
8. Esboçar o gráfico.

Construção de gráficos

Fazer um esboço do gráfico da seguinte função:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$$

Etapas para se esboçar o gráfico de uma função $f(x)$:

1. Estudar para onde vão os limites de $f(x)$ no infinito e no menos infinito.
2. Verificar se a função possui assíntotas verticais e, caso existam, como $f(x)$ se comporta em torno delas.
3. Determinar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente.
4. Obter os pontos críticos de $f(x)$. (Valores de x em que $f'(x)$ é nula ou inexistente)
5. Obter os pontos máximos e mínimos locais e os pontos de inflexão de $f(x)$.
6. Determinar os intervalos em que $f(x)$ possui concavidade para cima ou para baixo.
7. Obter as raizes de $f(x)$, se possível. E obter $f(0)$, se possível.
8. Esboçar o gráfico.

Etapa 1 - Limites no infinito

Estudar para onde vão os limites de $f(x)$ no infinito e no menos infinito:

- Quando $x \to \infty$:

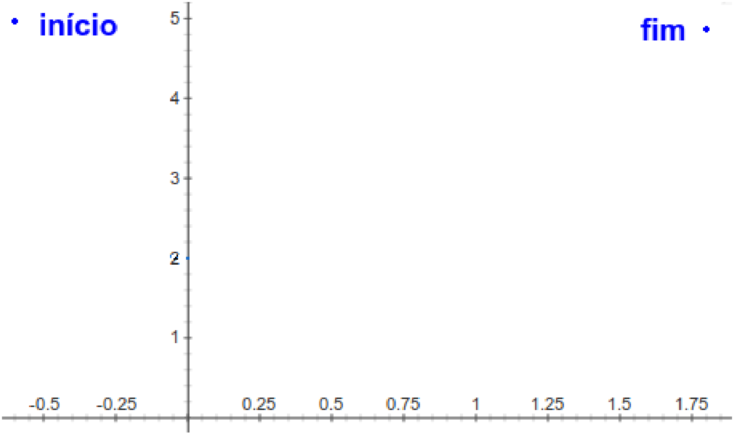
$$\lim_{x\to\infty} 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2 = \lim_{x\to\infty} x^4 \left(3 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = \infty$$

- Quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2 = \lim_{x\to-\infty} x^4 \left(3 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = \infty$$

A função estudada começa e tende para o infinito.

Esboçando o gráfico: Etapa 1



Etapa 2 - Assíntotas verticais

Verificar se a função possui assíntotas verticais e, caso existam, como $f(x)$ se comporta em torno delas.

- $f(x)$ não possui assintotas verticais, pois para nenhum valor de x a função tende para algo do tipo $\frac{1}{0}$.

Etapa 3 - Crescimento/Decrescimento

Determinar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente.

- Intervalo em que $f(x)$ é crescente:

$$f'(x) = 12x(x-1)^2 > 0$$

como $(x-1)^2$ é sempre positivo:

$$f'(x) > 0 \text{ se, e somente se } x > 0$$

- Intervalo em que $f(x)$ é decrescente:

$$f'(x) = 12x(x-1)^2 < 0$$

Analogamente:

$$f'(x) < 0 \text{ se, e somente se } x < 0$$

Etapa 3 - Crescimento/Decrescimento

Determinar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente.

- Intervalo em que $f(x)$ é crescente:

$$f'(x) = 12x(x-1)^2 > 0$$

como $(x-1)^2$ é sempre positivo:

$$f'(x) > 0 \text{ se, e somente se } x > 0$$

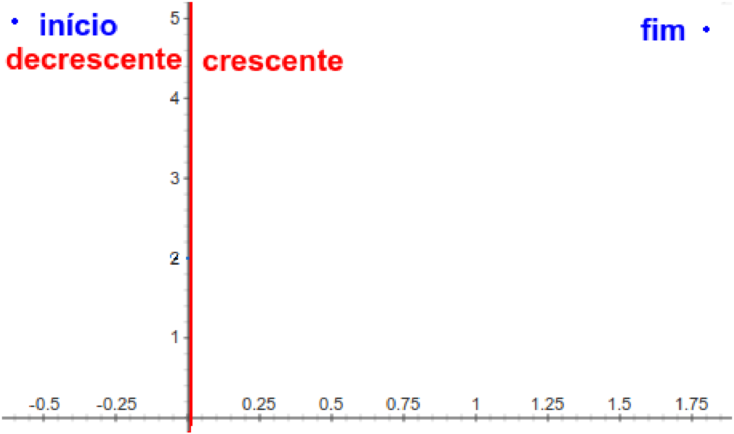
- Intervalo em que $f(x)$ é decrescente:

$$f'(x) = 12x(x-1)^2 < 0$$

Analogamente:

$$f'(x) < 0 \text{ se, e somente se } x < 0$$

Esboçando o gráfico: Etapa 3



Etapa 4 - Pontos críticos

Obter os pontos críticos de $f(x)$. (Valores de x em que $f'(x)$ é nula ou inexistente)

- A derivada de $f(x)$ existe em todos os pontos do dominio.
- Pontos críticos em que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2 + 1) = 12x(x-1)^2$$

Os pontos críticos de $f(x)$ estão em $x = 0$ e $x = 1$.

Etapa 5 - Máximos, mínimos e pontos de inflexão

Segunda derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 12x(x-1)^2$$

$$f''(x) = 12(x-1)^2 + 24x(x-1) = 36x^2 - 48x + 12$$

Analisando os pontos críticos de $f(x)$:

- Ponto $(0, 2)$:

$$f''(0) = 12 > 0$$

Concavidade para cima $\rightarrow$ ponto de mínimo

- Ponto $(1, 3)$:

$$f''(1) = 0$$

Segunda derivada nula. Pode ser um ponto de inflexão.

Etapa 5 - Máximos, mínimos e pontos de inflexão

Segunda derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 12x(x-1)^2$$

$$f''(x) = 12(x-1)^2 + 24x(x-1) = 36x^2 - 48x + 12$$

Analisando os pontos críticos de $f(x)$:

- Ponto $(0,2)$:

  $$f''(0) = 12 > 0$$

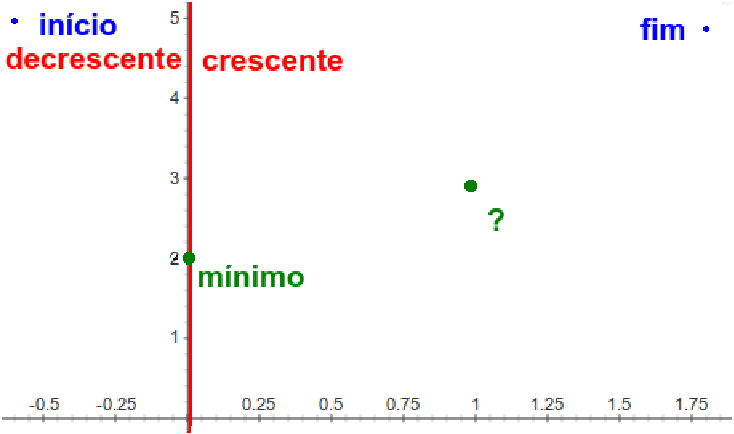
  Concavidade para cima $\rightarrow$ ponto de mínimo

- Ponto $(1,3)$:

  $$f''(1) = 0$$

  Segunda derivada nula. Pode ser um ponto de inflexão.

Esboçando o gráfico: Etapa 5



Etapa 6: Concavidades

Seja a segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 12(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Analisando o sinal desta função dentro dos intervalos:

- $\left[-\infty, \frac{1}{3}\right] \; : \; 12\underbrace{(x-1)}_{\text{negativo}}\underbrace{\left(x - \frac{1}{3}\right)}_{\text{negativo}}$ = positivo $\rightarrow$ Concavidade para cima.
- $\left[\frac{1}{3}, 1\right] \; : \; 12\underbrace{(x-1)}_{\text{negativo}}\underbrace{\left(x - \frac{1}{3}\right)}_{\text{positivo}}$ = negativo $\rightarrow$ Concavidade para baixo.
- $[1, \infty] \; : \; 12\underbrace{(x-1)}_{\text{positivo}}\underbrace{\left(x - \frac{1}{3}\right)}_{\text{positivo}}$ = positivo $\rightarrow$ Concavidade para cima.

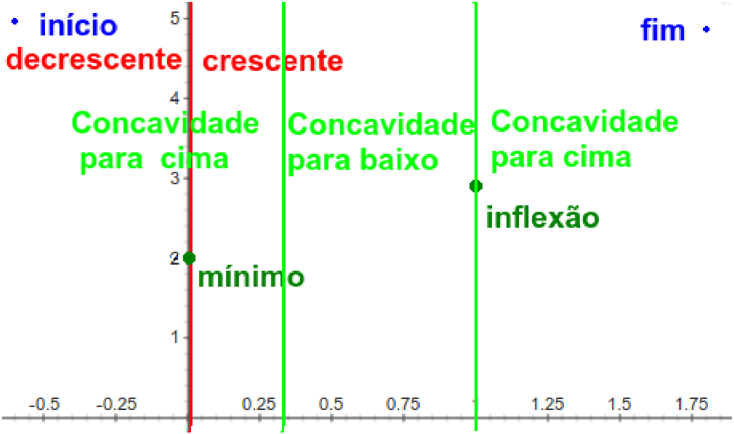
Observação

- Antes do ponto crítico $(1, 3)$, a função apresenta concavidade para baixo.
- Depois do ponto crítico $(1, 3)$, a função apresenta concavidade para cima.
- Logo, o ponto $(1, 3)$ é um ponto de inflexão.

Observação

- Antes do ponto crítico $(1, 3)$, a função apresenta concavidade para baixo.
- Depois do ponto crítico $(1, 3)$, a função apresenta concavidade para cima.
- Logo, o ponto $(1, 3)$ é um ponto de inflexão.

Esboçando o gráfico: Etapa 6



Etapa 7

Obter as raizes de $f(x)$, se possível.

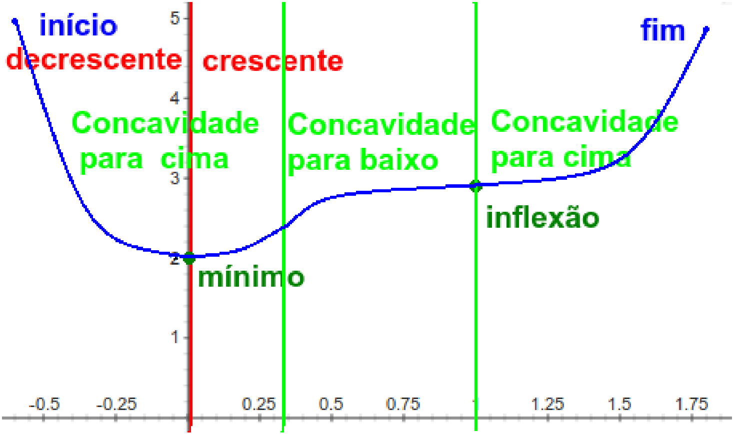
- A função começa com um valor no infinito, termina com um valor infinito e apresenta um valor mínimo de 2 quando $x = 0$.
- Logo a função não cruza o eixo x. (não tem raizes reais)

Etapa 7

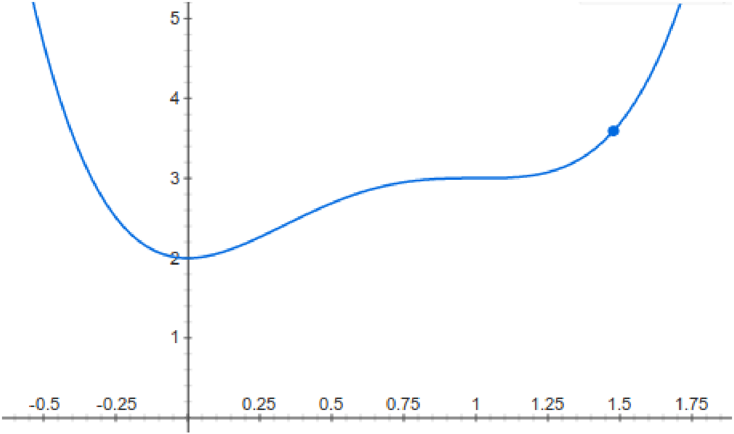
Obter as raizes de $f(x)$, se possível.

- A função começa com um valor no infinito, termina com um valor infinito e apresenta um valor mínimo de 2 quando $x = 0$.
- Logo a função não cruza o eixo x. (não tem raizes reais)

Esboçando o gráfico: Etapa 8



Plotando o gráfico:



Construção de gráficos 2: exercicio

Fazer um esboço do gráfico da seguinte função:

$$f(x) = x^2 - e^x$$