Aula 1 - Introdução ao curso e Limites

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

16 de agosto de 2023

12 dias atrás...

Informações de contato

Prof. Dr. Muller Moreira Souza Lopes (Muller)

- e-mail: mullermslopes@gmail.com
- ~~caixa de mensagens do SIGAA~~

Cálculo Diferencial e Integral

- Ramo da matemática dedicado ao estudo de:
  - Tendencias no comportamento de funções.
  - Taxas de variação de grandezas.
  - Acumulação de quantidades.
- Desenvolvido independentemente e simultaneamente por Gottfried Leibniz e Isaac Newton a partir da Álgebra e da Geometria.
- Utilizado em vários conceitos e definições na matemática, química, física, economia, etc.

Ementa

- Limites e Continuidade.
- Derivadas:
  - Definição e Regras de Derivação.
  - Derivadas sucessivas e derivadas implícitas.
  - Aplicações.
- Integrais:
  - Definição e Regras de Integração.
  - Aplicações.
  - Métodos de Integração.

Bibliografia do curso

- **SWOKOWSKI, E. W.; Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1, Makron Books do Brasil Editora, São Paulo.**
- STEWART, J.; Cálculo (volume 1), Brooks/Cole Publ. Co., 1999.
- BOULOS, Paulo. Pré-cálculo. São Paulo: Pearson Education, 2001, 101 p.
- BOULOS, P. Cálculo diferencial e integral, São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1999. v.1. 381 p.
- FLEMMING, D M; GONÇALVES, M B. Cálculo A : funções, limite, derivação, integração. 5 ed. São Paulo: Pearson Makron, 1992. 617 p.
- GUIDORIZZI, H L. Um curso de cálculo. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001. v.1. 632 p.

Avaliação

- 3 Provas (com pontuação extra em cada unidade):
  - P1: metade de setembro.
  - P2: final de outubro.
  - P3: final de dezembro.
- Nota final:

$$M = \frac{P1 + P2 + P3}{3}$$

Resultado

- Aprovado: $M \geq 7,0$.
- Aprovado: $M \geq 5,0$ e P1,P2,P3$\geq 3,0$.
- Avaliação P4 muito próxima ou depois do Natal.

Avaliação

- 3 Provas (com pontuação extra em cada unidade):
  - P1: metade de setembro.
  - P2: final de outubro.
  - P3: final de dezembro.
- Nota final:

$$M = \frac{P1 + P2 + P3}{3}$$

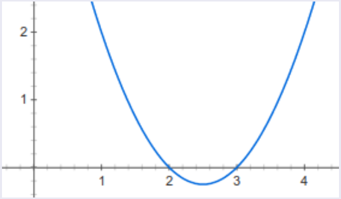
Resultado

- Aprovado: $M \geq 7,0$.
- Aprovado: $M \geq 5,0$ e P1,P2,P3$\geq 3,0$.
- Avaliação P4 muito próxima ou depois do Natal.

- Conceito utilizado para estudar o comportamento de uma função à medida que seu argumento se aproxima de um determinado valor.

Exemplo

Seja a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Para qual valor $f(x)$ se aproxima a medida em que x se aproxima de 2? [a] .



[a] Em outras palavras, isso quer dizer: "Qual o limite da função $f(x)$ quando x tende a 2?".

Limites: Noção intuitiva

- O valor de x pode se aproximar de 2 tanto seguindo pelos numeros maiores, quanto pelos menores do que 2:

Aproximando por valores **menores** do que 2

x	$f(x)$
1.9	0.11
1.99	0.0101
1.999	0.001001
1.9999	0.00010001

Aproximando por valores **maiores** do que 2

x	$f(x)$
2.1	-0.9
2.01	-0.0099
2.001	-0.00099899999
2.0001	-0.00009998999

- As duas sequências convergem para o mesmo valor (no caso 0).
- Desta forma é dito que o limite estudado existe e é 0.

Limites: Notação

- A operação de limite é escrita na forma:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

- Este termo é lido como: "L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a".

Observação

- Nem sempre temos que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- Essa propriedade é característica de funções contínuas, que serão estudadas nas próximas aulas.
- Definição grosseira: função cujo gráfico pode ser desenhado sem remover a caneta do papel.

Ex: função com descontinuidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Limites: Propriedade I

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais, a e c dois números reais e n um número inteiro.

- O limite de uma função multiplicada por um escalar é igual ao escalar multiplicado pelo limite da função:

$$\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} -3x^2 = -3 \lim_{x \to 1} x^2 = -3(1)^2 = -3$$

Limites: Propriedade II

- O limite da soma/diferença é a soma/diferença dos limites:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1}[x^3 - 3x^2 + 2x] = \lim_{x\to 1} x^3 - \lim_{x\to 1} 3x^2 + \lim_{x\to 1} 2x$$

$$\lim_{x\to 1}[x^3 - 3x^2 + 2x] = (1)^3 - 3(1)^2 + 2(1) = 0$$

Limites: Propriedade III

- O limite do produto é o produto dos limites.

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to \pi} [3x^2 \cos(x)] = \lim_{x \to \pi} 3x^2 \cdot \lim_{x \to \pi} \cos(x)$$

$$\lim_{x \to \pi} [3x^2 \cos(x)] = 3(\pi)^2 \cdot \cos(\pi) = 3\pi^2 \cdot (-1) = -3\pi^2$$

- O limite do quociente é o quociente dos limites [1].

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos(x)}{\lim_{x \to 0}(x^2 + 1)} = \frac{\cos(0)}{(0)^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

[1] desde que o $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

- O limite da potência de uma função é igual a potência do limite:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

para todo n inteiro positivo.
Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} (x^2+3)^2 = \left(\lim_{x \to 1} (x^2+3)\right)^2 = \left((1)^2+3\right)^2 = 4^2 = 16$$

Passa o limite pra dentro, resolve e depois aplica a potência.

Limites: Propriedade VI

- O limite da n-ésima raiz de uma função é igual a raiz n do limite [2]:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

para todo n inteiro positivo.
Exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{x^3 + x^2 - 1} = \sqrt{\lim_{x \to 2} (x^3 + x^2 - 1)} = \sqrt{(2)^3 + (2)^2 - 1} = \sqrt{11}$$

---

[2] desde que:
$\lim_{x \to a} f(x) > 0$.
ou
$\lim_{x \to a} f(x) \leq 0$ em que n é um número positivo impar.

- O limite do logaritmo de uma função é igual ao logaritmo do limite desta função [3]:

$$\lim_{x \to a} \log f(x) = \log \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to e} \ln x^2 = \ln \left(\lim_{x \to e} x^2 \right) = \ln(e)^2 = 2 \ln e = 2 \cdot (1) = 2$$

[3] desde que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

Limites: Propriedade VIII

- O limite da exponencial de uma função é igual a exponencial (na mesma base) do limite desta função :

$$\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} 2^{x^2+3x} = 2^{\lim_{x \to 1} \left(x^2+3x\right)} = 2^{(1)^2+3(1)} = 2^4 = 16$$

- O limite do seno (ou cosseno) de uma função é igual ao seno (ou cosseno) do limite desta função :

$$\lim_{x\to a} \sin[f(x)] = \sin\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

$$\lim_{x\to a} \cos[f(x)] = \cos\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to \pi} \cos(x+\pi) = \cos\left[\lim_{x\to \pi} (x+\pi)\right] = \cos\left[(\pi)+\pi\right] = \cos(2\pi) = 1$$

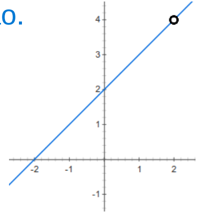
- Nem sempre $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Em muitos casos $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, apesar de $f(a)$ não existir.

Exemplo

- Calcule o limite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Aqui começa a fatoração.



O ponto no gráfico não existe, mas conseguimos definir o limite.

- Neste exemplo, apesar do valor $f(2)$ não existir, é possível observar no gráfico que $f(x)$ se aproxima de 4 quando $x \to 2$.
- Para calcular este limite, é necessário encontrar uma função equivalente a $f(x)$ em que $f(2)$ possa ser obtido.
- Esta relação pode ser encontrada utilizando técnicas de fatoração de polinômios.
- Na prática, deseja-se "levar em evidência"um termo do numerador afim de eliminar um termo do denominador, de forma a evitar a divisão por zero.

Cálculo de limites

- Neste exemplo, apesar do valor $f(2)$ não existir, é possível observar no gráfico que $f(x)$ se aproxima de 4 quando $x \to 2$.
- Para calcular este limite, é necessário encontrar uma função equivalente a $f(x)$ em que $f(2)$ possa ser obtido.
- Esta relação pode ser encontrada utilizando técnicas de fatoração de polinômios.
- Na prática, deseja-se "levar em evidência" um termo do numerador afim de eliminar um termo do denominador, de forma a evitar a divisão por zero.

Cálculo de limites

- Neste exemplo, apesar do valor $f(2)$ não existir, é possível observar no gráfico que $f(x)$ se aproxima de 4 quando $x \to 2$.
- Para calcular este limite, é necessário encontrar uma função equivalente a $f(x)$ em que $f(2)$ possa ser obtido.
- Esta relação pode ser encontrada utilizando técnicas de fatoração de polinômios.
- Na prática, deseja-se "levar em evidência" um termo do numerador afim de eliminar um termo do denominador, de forma a evitar a divisão por zero.

Cálculo de limites

Voltando ao exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

O termo do numerador pode ser fatorado como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = (2) + 2 = 4$$

Observação

No estudo de limites, queremos saber para qual valor $f(x)$ converge a medida em que valores cada vez mais próximos de um valor a (no caso 2) são tomados. Logo, neste exemplo, assumimos que $x \neq 2$, permitindo que a divisão por $x - 2$ seja efetuada.

Cálculo de limites

Voltando ao exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

O termo do numerador pode ser fatorado como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = (2) + 2 = 4$$

Observação

No estudo de limites, queremos saber para qual valor $f(x)$ converge a medida em que valores cada vez mais próximos de um valor a (no caso 2) são tomados. Logo, neste exemplo, assumimos que $x \neq 2$, permitindo que a divisão por $x - 2$ seja efetuada.

Cálculo de limites

Voltando ao exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

O termo do numerador pode ser fatorado como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = (2) + 2 = 4$$

Observação

No estudo de limites, queremos saber para qual valor $f(x)$ converge a medida em que valores cada vez mais próximos de um valor a (no caso 2) são tomados. Logo, neste exemplo, assumimos que $x \neq 2$, permitindo que a divisão por $x - 2$ seja efetuada.

Fatoração de polinômios

Algumas relações úteis para a fatoração de polinômios são:

- Quadrado da soma: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$$

- Quadrado da diferença: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$$

- Diferença entre quadrados: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

Fatoração de polinômios

- Cubo da soma: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$$

- Cubo da diferença: $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^2$$

- Soma entre cubos: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- Diferença entre cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Exercícios

Exercício 1

Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}$$

Exercícios

Exercício 1

Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

Exercício 2

Calcule o limite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1)-1} = -\frac{3}{2}$$

Exercícios

Exercício 2

Calcule o limite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{(-1) - 1} = -\frac{3}{2}$$

Exercício 2

Calcule o limite:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1)-1} = -\frac{3}{2}$$

Exercícios

Exercício 3

Calcule o limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} = 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 = 3x^2$$

Exercício 3

Calcule o limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} = 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 = 3x^2$$

Exercício 3

Calcule o limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} = 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 = 3x^2$$