Aula 22 - Taxas relacionadas

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

18 de outubro de 2023

Taxas Relacionadas

Sejam duas quantidades representadas pelas variáveis $y(t)$ e $x(t)$ dadas em função de uma variável t, as taxas de variação:

$$\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt}$$

que relacionam ambas as variações das variáveis com t, são chamadas de taxas relacionadas.

Objetivos:

- Resolver problemas em que se conhece a variação de uma variável, mas não a variação da outra.

Exemplo

Uma escada de $6m$ de comprimento esta apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razao de $0,6m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a $4m$ do solo?

Etapas para resolução do problema

1. Interpretar o problema e encontrar relações entra as variáveis na forma de uma equação.
2. Aplicar a derivação implícita.
3. Substituir valores e taxas de variação conhecidas, obtendo a taxa de variação desejada.

Obs: só faça as substituições numéricas após reescrever a taxa desejada apenas em função de t.

Voltando ao exemplo

Uma escada de $6m$ de comprimento esta apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razao de $0,6m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a $4m$ do solo?

1. Interpretar o problema e encontrar relações entra as variáveis na forma de uma equação.
   - Teorema de Pitagoras:
   $$y^2 + x^2 = 6^2$$
2. Aplicar a derivação implícita.

$$\frac{d}{dt}(y^2) + \frac{d}{dt}(x^2) = 0$$

$$2y\frac{dy}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0$$

Voltando ao exemplo

Uma escada de $6m$ de comprimento esta apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razao de $0,6m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a $4m$ do solo?

1. Interpretar o problema e encontrar relações entra as variáveis na forma de uma equação.
   - Teorema de Pitagoras:
$$y^2 + x^2 = 6^2$$
2. Aplicar a derivação implícita.

$$\frac{d}{dt}(y^2) + \frac{d}{dt}(x^2) = 0$$

$$2y\frac{dy}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0$$

Voltando ao exemplo

Uma escada de $6m$ de comprimento esta apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razao de $0,6m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a $4m$ do solo?

Como, pelo Teorema de Pitagoras: $x = \sqrt{36 - y^2}$.

$$2y\frac{dy}{dt} + 2\frac{dx}{dt}\sqrt{36 - y^2} = 0$$

3 Substituir valores e taxas de variação conhecidas, obtendo a taxa de variação desejada.

$$2(4)\frac{dy}{dx} + 2(0,6)\sqrt{36 - (4)^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1,2\sqrt{20}}{8} = -\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Exercício 1

Um tanque com a forma de um cone circular reto invertido tem $4m$ de altura (h) e $2m$ de raio da base (R). Se a agua entra no tanque com razão de $0,001m^3/min$, calcule aproximadamente a razao na qual o nivel da água está subindo quando a profundidade for de $1m$.

1. Interpretar o problema e encontrar relações entra as variáveis na forma de uma equação.
   - Volume do cone:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

   - A relação entre h e R pode ser construida com base nas dimensões do cone. Seja α o ângulo entre o eixo e a diretriz do cone, então:

$$tg(\alpha) = \frac{2}{4} = \frac{R}{h}$$

     devido a semelhança de triângulos. Logo: $R = \frac{h}{2}$, então:

$$V = \frac{\pi h^3}{12}$$

Exercício 1

Um tanque com a forma de um cone circular reto invertido tem $4m$ de altura (h) e $2m$ de raio da base (R). Se a agua entra no tanque com razão de $0,001m^3/min$, calcule aproximadamente a razao na qual o nivel da água está subindo quando a profundidade for de $1m$.

1. Interpretar o problema e encontrar relações entra as variáveis na forma de uma equação.
   - Volume do cone:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

   - A relação entre h e R pode ser construida com base nas dimensões do cone. Seja α o ângulo entre o eixo e a diretriz do cone, então:

$$tg(\alpha) = \frac{2}{4} = \frac{R}{h}$$

devido a semelhança de triângulos. Logo: $R = \frac{h}{2}$, então:

$$V = \frac{\pi h^3}{12}$$

Exercício 1

Um tanque com a forma de um cone circular reto invertido tem $4m$ de altura (h) e $2m$ de raio da base (R). Se a agua entra no tanque com razão de $0,001m^3/min$, calcule aproximadamente a razao na qual o nivel da água está subindo quando a profundidade for de $1m$.

2. Aplicar a derivação implícita.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\frac{d}{dt}(h^3)$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{3h^2\pi}{12}\frac{dh}{dt}$$

3. Substituir valores e taxas de variação conhecidas, obtendo a taxa de variação desejada.

$$0,001 = \frac{3(1)^2\pi}{12}\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{0,004}{\pi} \approx 0.0012m/min$$

Exercício 1

$$\frac{0,003}{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{0,012}{\pi} = 2\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{3}{250\pi} = (\sqrt{2}\frac{dh}{dt} + \frac{\sqrt{2}}{4})^2 - \frac{2}{16}$$

$$\frac{12+125\pi}{1000\pi} = (\sqrt{2}\frac{dh}{dt} + \frac{\sqrt{2}}{4})^2$$

Exercício 1

$$\frac{0,003}{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{0,012}{\pi} = 2\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{3}{250\pi} = (\sqrt{2}\frac{dh}{dt} + \frac{\sqrt{2}}{4})^2 - \frac{2}{16}$$

$$\frac{12 + 125\pi}{1000\pi} = (\sqrt{2}\frac{dh}{dt} + \frac{\sqrt{2}}{4})^2$$

Exercício 2

Um balão de ar quente, que sobe na vertical a partir do solo, é rastreado por um telêmetro colocado a 500 metros de distância do ponto da decolagem. No momento em que o ângulo de elevação do telêmetro é de $\frac{\pi}{4}$, o ângulo aumenta a uma taxa de $0,14 rad/min$. A que velocidade o balão sobe neste momento?

Exercício 3

Um farol giratório faz uma volta completa em 15 segundos. O farol está a $60m$ do ponto mais proximo P em uma praia retilínea. Determine a razão na qual um raio de luz do farol está se movendo ao longo da praia em um ponto a $150m$ de P.

Exercício 4

As 8h o navio A está a 25km ao sul do navio B. Se o navio A está navegando para o oeste à 16km/h e o navio B está navegando para o sul a 20km/h então determine a razão em que a distância entre os navios está variando às 8h30min.