Complexidade assintótica

Jorge E. S. Souza

Complexidade assintótica

- Quando observamos tamanhos de entrada grandes o suficiente para tornar relevante apenas a ordem de crescimento do tempo de execução, estamos estudando a eficiência assintótica dos algoritmos;

- Ou seja, estamos preocupados com a maneira como o tempo de execução de um algoritmo aumenta, à medida que o tamanho da entrada da entrada aumenta INDEFINIDAMENTE;

- Em geral, um algoritmo que é assintoticamente mais eficiente será a melhor escolha para todas as entradas, exceto as muito pequenas.

Complexidade assintótica

- Em 1965 Jack Edmonds introduz a idéia de Complexidade Assintótica.
  - ➔ A função T(x) é chamada de Complexidade Local.
  - ➔ A Complexidade Assintótica fornece limites para T(x).

Para que serve?
Comparação entre complexidades

- ➔ Um problema pode ter mais de um algoritmo para resolvê-lo. **Qual deles escolher?**
- ➔ De maneira geral, consideremos um conjunto **A** de algoritmos para um dado problema.
- ➔ A cada algoritmo **a ∈ A** temos associado a função de avaliação ***aval***.
- ➔ Freqüentemente, interessa-nos identificar um algoritmo ótimo, ou seja, um algoritmo **o**, tal que **aval(o)** é melhor do que **aval(a)** para todo **a ∈ A**.

Complexidade assintótica

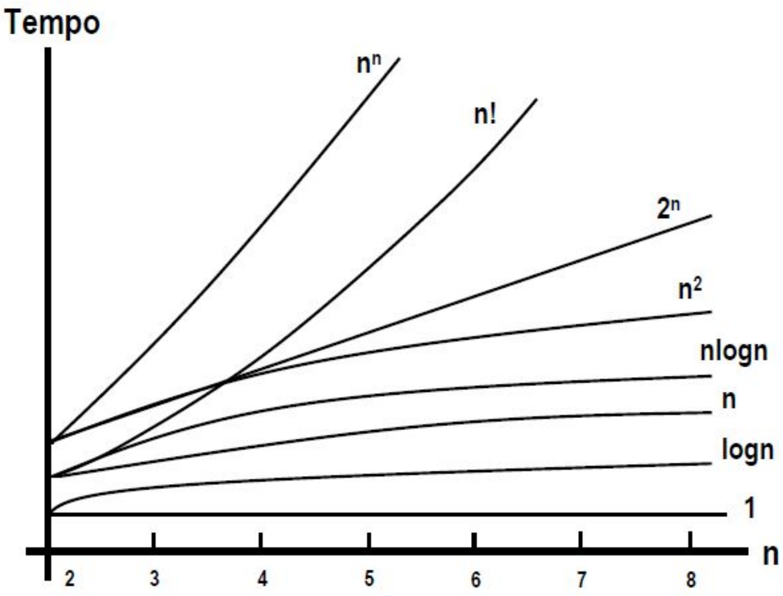
⇒ A complexidade assintótica é definida pelo crescimento da complexidade para entradas suficientemente grandes;

⇒ Um algoritmo assintoticamente mais eficiente é melhor para todas as entradas, exceto para entradas relativamente pequenas;

⇒ Esta complexidade é comumente denotada através de uma COTA;

⇒ As cotas são maneiras de reduzir detalhes realçando apenas os aspectos relevantes de eficiência.

Complexidades



- O(1) constante
- O(log n) logarítmica
- O(n) linear
- O(n log n) log linear
- O(n^2) quadrática
- O(n^3) cúbica
- O(2^n) exponencial

Notações

⇒ A análise assintótica é um conjunto de notações que fornece uma maneira de formular conclusões sobre a comparação da complexidade de algoritmos;

⇒ são elas:

1. notação **O** → limite assintótico superior;
2. notação **Ω** → limite assintótico inferior;
3. notação **Θ** → limite assintoticamente restrito;
4. notação **o** → limite assintoticamente superior não restrito;
5. notação **ω** → limite assintoticamente inferior não restrito;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{\sin(10x)}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} + \frac{sin(10x)}{x^2} \therefore$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{\sin(10x)}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + 0 = 1$$

Notação O, limite superior

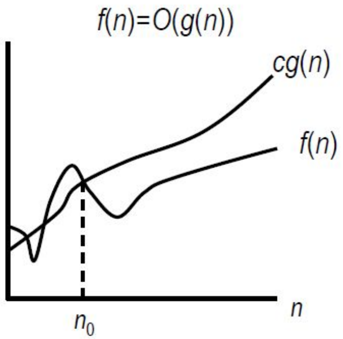
Dadas funções assintoticamente não negativas **f** e **g**, dizemos que **f** está na ordem **O** de **g** e escrevemos **f = O(g)** se:

ordem n^2, ordem n^3

repare que aqui realmente é uma igualdade

$$f(n) \leq c.g(n)$$

para algum **c** positivo e para todo **n** suficientemente grande.



Notação O

A medida de custo ou medida de complexidade relata o crescimento assintótico da operação considerada.

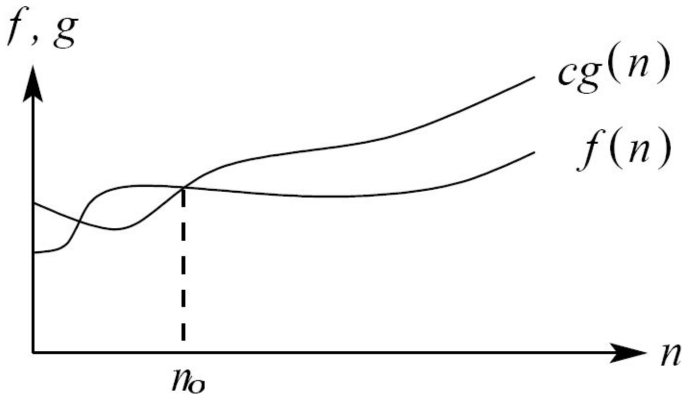
⇒ Definição: Uma função g(n) domina assintoticamente outra função f(n) se existem duas constantes positivas **c e n_0**

⇒ tais que, para qualquer

$n >= n_0$,

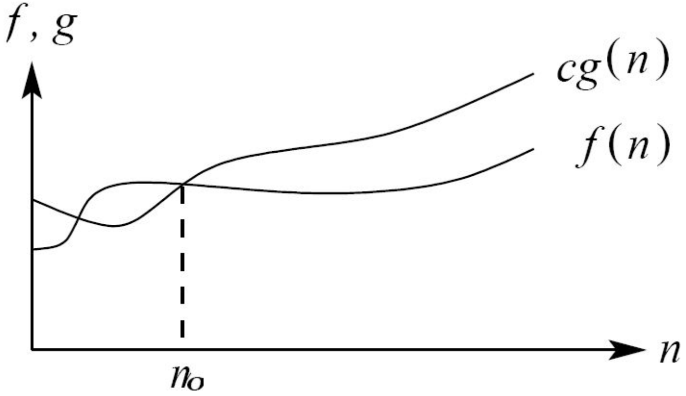
⇒ temos

f(n) <= c . g(n)



Notação O

⇒ Limite assintótico superior



$$O(g(n)) = \{f(n): \exists\ c \text{ e } n_0 > 0 \mid 0 \leq f(n) \leq c.g(n) \ \ \forall\ n \geq n_0\}$$

Formal ou informal

Escrevemos **$g(n) = O(f(n))$** ou **$g(n) \in O(f(n))$** para expressar que **$f(n)$** domina assintoticamente **$g(n)$**.

Encontramos leituras nos modos:

- g(n) é da ordem no máximo f(n); // formal
- g(n) é O de f(n); // informal
- g(n) é igual a O de f(n); // informal
- g(n) pertence a O de f(n); // formal

Exemplo 1:

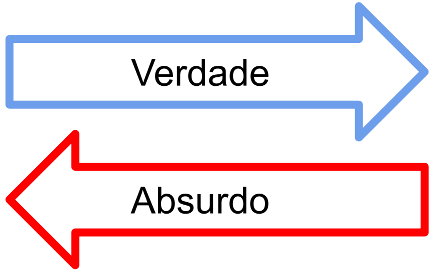
- $f(n) = n$

- $g(n) = n+34$

  - $g(n) \in O(f(n))$???

  - ou

  - $n+34 \in O(n)$???



Nós definimos a constante.

Exemplo 1:

- **$f(n) = n$**
- **$g(n) = n+34$**

  - $g(n) \in O(f(n))$???
  - ou
  - $n+34 \in O(n)$???

$n + 34 <= c.n$, $c = 35$ e $n_0 = 1$.

Testando para n = 1

$1 + 34 <= 35 * 1 \Rightarrow 35 <= 35 \therefore$ verdade

Daria para baixar o valor de c ???

Qual é o custo disso ??? sim

Exemplo 1:

- **$f(n) = n$**
- **$g(n) = n+34$**

  - $g(n) \in O(f(n))$???
  - ou
  - $n+34 \in O(n)$???

$n + 34 <= c.n$, $c = 2$ e $n_0 = ?$.

Testando para n = 1

$1 + 34 <= 2 * 1 \Rightarrow 35 <= 2$

$\therefore$ falso para esse valor de n

Mas quando n $\rightarrow \infty$, se mantém falso?

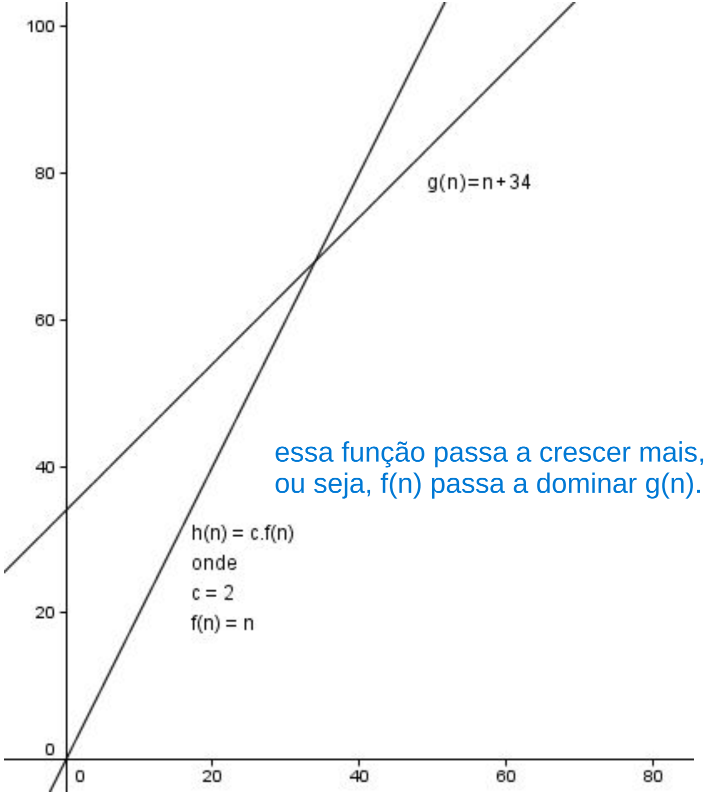
o que acontece ??? não se mantem falso

Exemplo 1:

- $f(n) = n$
- $g(n) = n+34$

  - $g(n) \in O(f(n))$???
  - ou
  - $n+34 \in O(n)$???

    sim



essa função passa a crescer mais, ou seja, f(n) passa a dominar g(n).

Exemplo 2

n^2 é O(n)?

não

$n^2 <= c.n, \quad c = 1$ e $n_0 = 1$.

Testando para n = 1

$1^2 <= 1 * 1 \Rightarrow 1 <= 1 \therefore$ verdadeiro

Mas quando n $\rightarrow \infty$, **se mantém verdadeiro?**

$n^2 <= c.n, \quad c = 1$ e $n = 2$.

$2^2 <= 1 * 2 \Rightarrow 4 <= 2 \therefore$ Absurdo

Exemplo 2

n^2 é $O(n)$?

Suponha: $\exists$ c, n_0

$\forall$ n >= n_0

$n^2 \leq c.n \Rightarrow \frac{n^2}{n} \leq c \cdot \frac{n}{n}$

$\Rightarrow n \leq c$

Absurdo, pois **c** é uma constante e **n** assume valores até o infinito.

Portanto, $\nexists$ c, n_0

n^2 <= c.n, c = 1 e n_0 = 1.

Testando para n = 1

1^2 <= 1 * 1 $\Rightarrow$ 1 <= 1 $\therefore$ verdadeiro

Mas quando n $\rightarrow \infty$, se mantém verdadeiro?

n^2 <= c.n, c = 1 e n = 2.

2^2 <= 1 * 2 $\Rightarrow$ 4 <= 2 $\therefore$ Absurdo

Operações básicas

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
c \times O(f(n)) &= O(f(n)) \qquad c = constante \\
O(f(n)) + O(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(O(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(f(n)) + O(g(n)) &= O(max(f(n), g(n))) \\
O(f(n))O(g(n)) &= O(f(n)g(n)) \\
f(n)O(g(n)) &= O(f(n)g(n))
\end{aligned}
$$

Outras notações

Assim como a notação **O** fornece uma maneira assintótica de dizer que uma função é “menor ou igual a” outra, existem outras notação que fornecem outras conclusões sobre a complexidade de algoritmos;

⇒ são elas:

1. notação **Ω** → limite assintótico inferior;
2. notação **Θ** → limite assintoticamente restrito;
3. notação **o** → limite assintoticamente superior não restrito;
4. notação **ω** → limite assintoticamente inferior não restrito;

Notação Ω

A notação Ω é bem parecida com a notação O;

⇒ O define um limite assintótico superior, e;

⇒ Ω define um limite assintótico inferior.

Exemplos:

$n^4 \in \Omega(n^3)$

$n \in \Omega(1)$

$3.\log(n) \in \Omega(\log(n))$

$1 \in \Omega(1)$

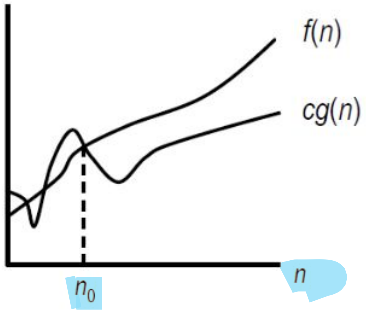
$n! \in \Omega(2^n)$

Notação Ω, limite inferior

Dadas funções assintoticamente não negativas **f** e **g**, dizemos que **f** está em Ω de **g** e escrevemos **f = Ω(g)** se:

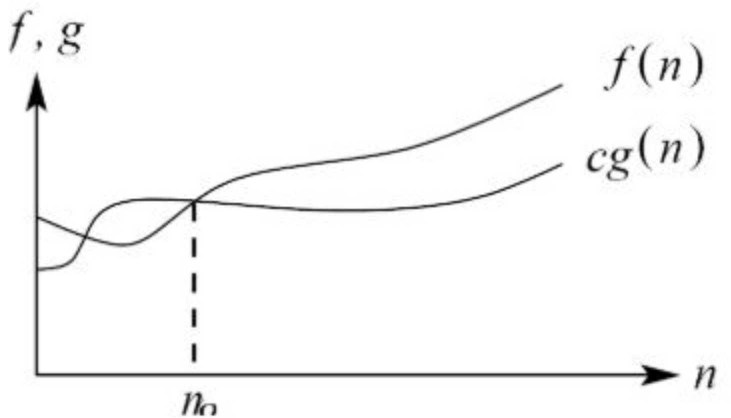
$$f(n) \geq c.g(n)$$

para algum **c** positivo e para todo **n** suficientemente grande.



Notação Ω

⇒ Limite assintótico inferior



$$\Omega(g(n)) = \{f(n):\ \exists\ c \text{ e } n_0 > 0 \mid 0 \leq c.g(n) \leq f(n)\ \ \forall\ n \geq n_0\}$$

assintoticamente inferior

Notação Ω

Na prática a notação Ω não é vista sozinha em análises de algoritmos;

▫ Pelo motivo de não interessar para a análise de algoritmos;

▫ A notação O possui sua importância, pois o programador conclui que seu algoritmo é no máximo tão complexo a uma função.

▫ Mas no mínimo tão complexo, como a notação Ω descreve, não é importante para conclusões práticas sobre algoritmos.

- **Ω** vem na maioria das vezes acompanhada a notação **Θ**;

▫ Como um complemento na análise...

Notação Θ

Conhecida também como “limite firme” ou “limite assintoticamente restrito”.

• A notação O, apesar de fornecer informações sobre a complexidade do algoritmo, nem sempre nos revela algo importante;

• Não faz sentido, para algum algoritmo ordem n, dizer que suas complexidade é por exemplo O(n!). Ou faz?

⇒ Exemplos da falta de precisão de O: $n \in O(n^2)$

$n \in O(n^5)$

complexidades muito maiores

$n \in O(2^n)$

$n \in O(n^n)$

Notação Θ

Conhecida também como “limite firme” ou “limite assintoticamente restrito”.

• A notação O, apesar de fornecer informações sobre a complexidade do algoritmo, nem sempre nos revela algo importante;

• Não faz sentido, para algum algoritmo ordem n, dizer que suas complexidade é por exemplo O(n!). Ou faz?

⇒ Exemplos da falta de precisão de O:

$$n \in O(n^2)$$

$$n \in O(n^5)$$

$$n \in O(2^n)$$

$$n \in O(n^n)$$

Verdadeiras e imprecisas

Notação Θ, limite firme

Dizemos que as funções **f** e **g** estão na mesma ordem e escrevemos **f = Θ(g)** se **f = O(g)** e **f = Ω(g)**.

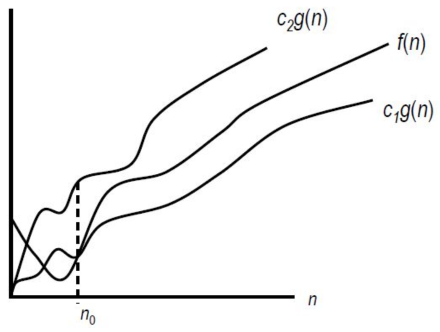
Limite assintoticamente superior e limite assintoticamente inferior

Em outras palavras, **f = Θ(g)** significa que existe números positivos c_1 e c_2 tais que:

$$c1.g(n) \leq f(n) \leq c2.g(n)$$

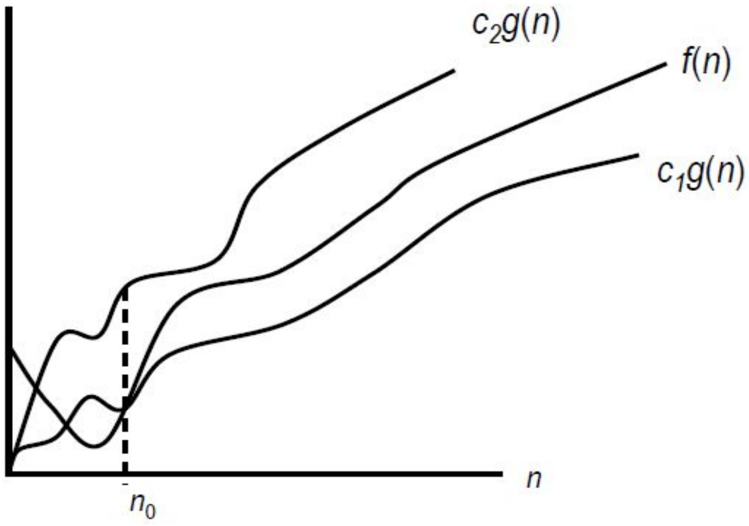
para todo **n** suficientemente grande.

Ou seja, a função f fica no meio! fica no meio das duas funções g que são multiplicadas por c1 e c2



Notação Θ

⇒ Limite assintótico firme



$\Theta(g(n)) = \{f(n)\text{: } \exists\ c_1, c_2 \text{ e } n_0 > 0 \mid 0 \le c_1.g(n) \le f(n) \le c_2.g(n)\ \forall\ n \ge n_0\}$

Exemplo:

Prove que: $\frac{n^2}{2} - 3n \in \Theta(n^2)$

⇒ Para isso, devemos definir constantes c_1, c_2 e n_0 tais que:

$$c_1 n^2 \leq 1/2n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

⇒ Encontre constantes que satisfaça as duas desigualdades...

Exemplo:

Dividindo por n^2:

$$\frac{c_1 n^2}{n^2} \leq \frac{1/2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} \leq \frac{c_2 n^2}{n^2}$$

$$= c_1 \leq 1/2 - 3/n \leq c_2$$

é fácil achar $\Rightarrow$ $c_1 = 1/14, \quad c_2 = 1/2$ e $n_0 = 7$

Fazendo a fatoração, encontramos (n - 6)/2n. Assim, fica claro que n0 precisa ser 7. Substituindo 7 na função, achamos c1 = 1/14. Para achar c2, basta pensarmos em n tendendo ao infinito, de modo que achamos c2 = 1/2

Portanto, se existem tais constantes:

$$\frac{n^2}{2} - 3n \in \Theta\left(n^2\right)$$

é Verdadeiro

Observação:

os c's multiplicam a própria
função g, sempre!

$f(x) \in \Theta\ (g(x))$ Teta

sse

$f(x) \in O\ (g(x))$ "O"

e

$f(x) \in \Omega\ (g(x))$ Omega

Toda função teta é O e omega,
mas o contrário não é verdade

Se f(n) (g(n)) então não existe nenhuma constante que multiplique g e torne ela menor do que o f.

Notação o

⇒ Limite assintoticamente superior não restrito;

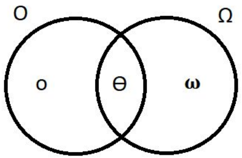
Todas as funções de **O (ó-zão)** que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a "o" (ó-zinho).

se $f(n) \in O(g(n))$ e $f(n) \notin \Omega(g(n))$ então $f(n) \in o(g(n))$

definição perfeita

Exemplos:

Assintoticamente restrito:	$2n^2 \in O(n^2)$	(ó-zão)
Assintoticamente não restrito:	$2n \in O(n^2)$	(ó-zão) e (ó-zinho)
	$\log(n) \in O(c^n)$	(ó-zão) e (ó-zinho)



esses valores esquerdos são muito pequenos,
então não existe constante que faça eles ficarem maiores.

Comparativo: notação O x notação o

Definição: $O(g(n)) = \{f(n): \exists\ c \text{ e } n_0 > 0 \mid 0 \le f(n) \le c.g(n)\ \ \forall\ n \ge n_0\}$

Definição: $o(g(n)) = \{f(n): \exists\ c \text{ e } n_0 > 0 \mid 0 \le f(n) < c.g(n)\ \ \forall\ n \ge n_0\}$

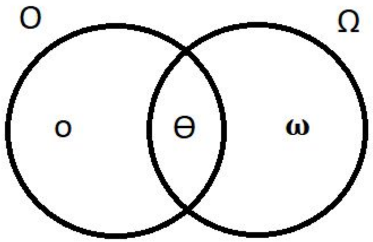
$f(n) \in O(g(n))$, o limite $0 \le f(n) \le c.g(n)$ se mantém válido para alguma constante $c > 0$.

$f(n) \in o(g(n))$, o limite $0 \le f(n) \le c.g(n)$ se mantém válido para todas as constantes $c > 0$.

Facilitando o entendimento...

Se $f(n) \in o(g(n))$ então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$



mesma coisa só que inverso

Notação ω

omega-zinho

Se f(n) O(g(n)), então não existe nenhuma constante c1 que multiplique g(n) e faça ela ficar maior do que f(n).

⇒ Limite assintoticamente inferior não restrito;

Todas as funções de Ω **(ômega-zão)** que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a "ω" (ômega-zinho).

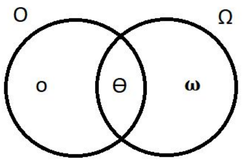
$$\text{se } f(n) \notin O(g(n)) \text{ e } f(n) \in \Omega(g(n)) \text{ então } f(n) \in \omega(g(n))$$

Exemplos:

Assintoticamente restrito: $2n^2 \in \Omega(n^2)$ **(ômega-zão)**

Assintoticamente não restrito: $2n^2 \in \Omega(n)$ **(ômega-zão) e (ômega-zinho)**

$c^n \in \Omega(\log(n))$ **(ômega-zão) e (ômega-zinho)**



os valores da esquerda são muito grandes

Comparativo: notação Ω x notação ω

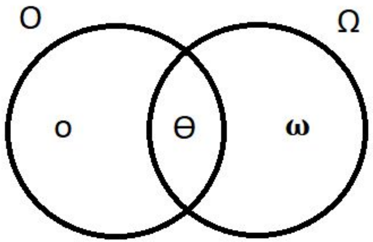
Definição: $\Omega(g(n)) = \{f(n): \exists\ c \text{ e } n_0 > 0 \mid 0 \leq c.g(n) \leq f(n)\ \ \forall\ n \geq n_0\}$

Definição: $\omega(g(n)) = \{f(n): \exists\ c \text{ e } n_0 > 0 \mid 0 \leq c.g(n) < f(n)\ \ \forall\ n \geq n_0\}$

Facilitando o entendimento...

Se $f(n) \in \omega(g(n))$ então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$



Limites para comparar ordens de grandeza

O limite da razão das funções em questão pode levar a três casos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} := \begin{cases} 0, & f(n) \text{ tem ordem de grandeza menor que } g(n) \\ c > 0, & f(n) \text{ tem mesma ordem de grandeza que } g(n) \\ \infty, & f(n) \text{ tem ordem de grandeza maior que } g(n) \end{cases}$$

Caso tenhamos uma indeterminação da forma $\frac{\infty}{\infty}$, usamos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} := \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$$

Comparação de funções

Muitas das propriedades relacionais de números reais também se aplicam a comparações assintóticas. No caso das propriedades seguintes, suponha f(n) e g(n) sejam assintoticamente positivas.

Transitividade:

$$
\begin{array}{llll}
f(n) = \Theta(g(n)) & \text{e} \quad g(n) = \Theta(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = \Theta(h(n)), \\
f(n) = O(g(n)) & \text{e} \quad g(n) = O(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = O(h(n)), \\
f(n) = \Omega(g(n)) & \text{e} \quad g(n) = \Omega(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = \Omega(h(n)), \\
f(n) = o(g(n)) & \text{e} \quad g(n) = o(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = o(h(n)), \\
f(n) = \omega(g(n)) & \text{e} \quad g(n) = \omega(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = \omega(h(n)).
\end{array}
$$

Reflexividade:

$$f(n) = \Theta(f(n))$$
$$f(n) = O(f(n))$$
$$f(n) = \Omega(f(n))$$

Simetria:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ se e somente se } g(n) = \Theta(f(n))$$

Simetria de transposição:

$$f(n) = O(g(n)) \text{ se e somente se } g(n) = \Omega(f(n))$$
$$f(n) = o(g(n)) \text{ se e somente se } g(n) = \omega(f(n))$$

Sabor

Pelo fato dessas propriedades se manterem para notações assintóticas, é possivel traçar uma analogia entre a comparação assintótica de duas funções ***f*** e ***g*** e a comparação de dois números reais ***a*** e ***b***:

$$
\begin{array}{lcl}
f(n) = O(g(n)) & \approx & a \leq b, \\
f(n) = \Omega(g(n)) & \approx & a \geq b, \\
f(n) = \Theta(g(n)) & \approx & a = b, \\
f(n) = o(g(n)) & \approx & a < b, \\
f(n) = \omega(g(n)) & \approx & a > b.
\end{array}
$$

Obrigado

jorge@imd.ufrn.br