Aula 9 - Derivadas

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

11 de setembro de 2023

Revisão: Funções contínuas

- Ao estudar o comportamento de uma função em um ponto, geralmente temos que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Mas vimos que nem sempre isso ocorre.
- Define-se o conceito de continuidade para classificar funções "bem comportadas" em torno de $x = a$.

Uma função $f(x)$ é dita contínua em um ponto a se as seguintes condições são satisfeitas

- f é definida em a.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Revisão: Funções contínuas

- Ao estudar o comportamento de uma função em um ponto, geralmente temos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Mas vimos que nem sempre isso ocorre.
- Define-se o conceito de continuidade para classificar funções "bem comportadas" em torno de $x = a$.

Uma função $f(x)$ é dita contínua em um ponto a se as seguintes condições são satisfeitas

- f é definida em a.
- $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Revisão: Funções contínuas

- Ao estudar o comportamento de uma função em um ponto, geralmente temos que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Mas vimos que nem sempre isso ocorre.
- Define-se o conceito de continuidade para classificar funções "bem comportadas" em torno de $x = a$.

Uma função $f(x)$ é dita contínua em um ponto a se as seguintes condições são satisfeitas

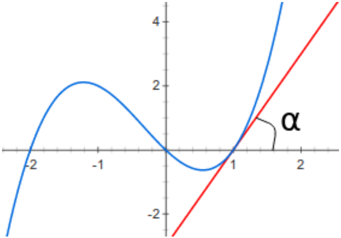
- f é definida em a.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Reta tangente

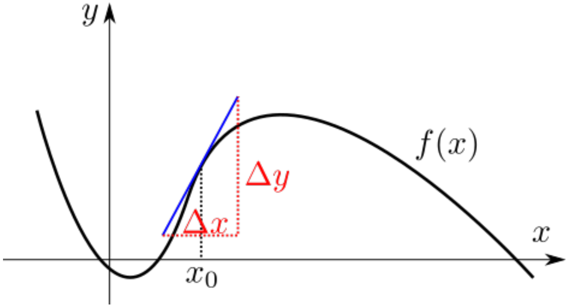
- Um dos grandes interesses do cálculo é encontrar retas que "tocam" uma função em um ponto em comum, mas não cruzam o gráfico da função.
- Estas retas são chamadas de **retas tangentes** à função no ponto dado.

Exemplo

A reta $y = 3x - 3$ tangencia a função $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ no ponto $(1, 0)$.



- Por que estudar inclinação de gráficos? **Taxa de variação** de $f(x)$ no ponto estudado.



Reta tangente: revisão

- Equação geral da reta:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

em que (x_1, y_1) é um ponto conhecido da reta e o coeficiente angular m é dado por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg(\alpha)$$

- A equação da reta requer dois pontos para ser encontrada.
- Desafios:
  - Apenas um ponto da reta tangente é conhecido (o ponto em comum entre a reta e a função).
  - Encontrar o coeficiente angular da reta tangente.

Reta tangente: revisão

- Equação geral da reta:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

em que (x_1, y_1) é um ponto conhecido da reta e o coeficiente angular m é dado por:

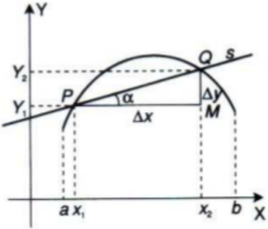
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg(\alpha)$$

- A equação da reta requer dois pontos para ser encontrada.
- Desafios:
  - Apenas um ponto da reta tangente é conhecido (o ponto em comum entre a reta e a função).
  - Encontrar o coeficiente angular da reta tangente.

- A estratégia para obter a reta tangente é aproximá-la por retas secantes

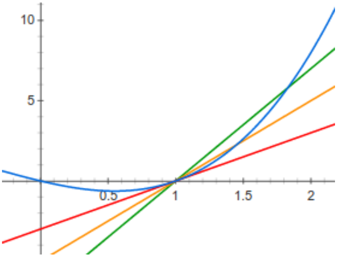
Definição

Uma reta secante é uma reta que passa por pelo menos dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do gráfico de uma função.



Aproximação por retas secantes

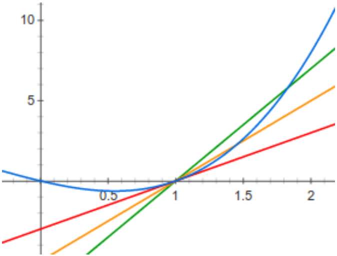
- Seja a mesma função do exemplo (em azul) e a reta tangente a ser encontrada (em vermelho)



- Utilizando o ponto de interesse $(1, 0)$ e outro ponto próximo de $f(x)$ obtém-se as retas:
  - $y = 7x - 7$ ao aproximar com o ponto $(2\sqrt{2} - 1, f(2\sqrt{2} - 1))$
  - $y = 5x - 5$ ao aproximar com o ponto $(\sqrt{6} - 1, f(\sqrt{6} - 1))$
- Obs: $2\sqrt{2} - 1 \approx 1.82$ e $\sqrt{6} - 1 \approx 1.44$

Aproximação por retas secantes

- Seja a mesma função do exemplo (em azul) e a reta tangente a ser encontrada (em vermelho)



- Utilizando o ponto de interesse $(1, 0)$ e outro ponto próximo de $f(x)$ obtém-se as retas:
  - $y = 7x - 7$ ao aproximar com o ponto $(2\sqrt{2} - 1, f(2\sqrt{2} - 1))$
  - $y = 5x - 5$ ao aproximar com o ponto $(\sqrt{6} - 1, f(\sqrt{6} - 1))$
- Obs: $2\sqrt{2} - 1 \approx 1.82$ e $\sqrt{6} - 1 \approx 1.44$

Aproximação por retas secantes

- Quanto mais próxima a coordenada x do ponto escolhido para aproximar a reta tangente por uma reta secante, mais precisa será essa aproximação.
- Utilizando a idéia de limites, podemos ver para qual valor o coeficiente angular de uma reta secante tende a medida em que o segundo ponto escolhido se aproxima do ponto de interesse:

$$m(x_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

em que $m(x_1)$ é o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x)$ no ponto x_1.

- Obtido o coeficiente angular e tendo o ponto de tangencia $(x_1, f(x_1))$ de antemão, a equação da reta tangente é obtida por:

$$y - f(x_1) = m(x_1)\,(x - x_1)$$

Aproximação por retas secantes

- Quanto mais próxima a coordenada x do ponto escolhido para aproximar a reta tangente por uma reta secante, mais precisa será essa aproximação.
- Utilizando a idéia de limites, podemos ver para qual valor o coeficiente angular de uma reta secante tende a medida em que o segundo ponto escolhido se aproxima do ponto de interesse:

$$m(x_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

  em que $m(x_1)$ é o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x)$ no ponto x_1.
- Obtido o coeficiente angular e tendo o ponto de tangencia $(x_1, f(x_1))$ de antemão, a equação da reta tangente é obtida por:

$$y - f(x_1) = m(x_1)\,(x - x_1)$$

Aproximação por retas secantes

- Quanto mais próxima a coordenada x do ponto escolhido para aproximar a reta tangente por uma reta secante, mais precisa será essa aproximação.
- Utilizando a idéia de limites, podemos ver para qual valor o coeficiente angular de uma reta secante tende a medida em que o segundo ponto escolhido se aproxima do ponto de interesse:

$$m(x_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

em que $m(x_1)$ é o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x)$ no ponto x_1.

- Obtido o coeficiente angular e tendo o ponto de tangencia $(x_1, f(x_1))$ de antemão, a equação da reta tangente é obtida por:

$$y - f(x_1) = m(x_1)\,(x - x_1)$$

Derivada de uma função num ponto

- Utilizando $x_2 = x_1 + \Delta x$, os termos da aproximação do coeficiente angular podem ser reescritos como:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

- **Esta operação é chamada de derivar a (ou encontrar a derivada da) função $f(x)$ no ponto x_1.**

Derivada de uma função num ponto

Exemplo anterior

Encontrar a reta tangente à função $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ no ponto $(1, 0)$.

O primeiro passo é encontrar a derivada de $f(x)$ no ponto $x = 1$.

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^3 + (1 + \Delta x)^2 - 2(1 + \Delta x) - 0}{\Delta x}$$

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 3\Delta x^2 + 3\Delta x + \Delta x^3 + 1 + 2\Delta x + \Delta x^2 - 2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x^2 + 4\Delta x + 3$$

$$m(1) = 3$$

Aplicando na equação da reta:

$$y - f(1) = m(1)(x - 1)$$

$$y = 3(x - 1)$$

Portanto, a reta tangente à função $f(x)$ no ponto $(1, 0)$ é $y = 3(x - 1)$.

Derivada de uma função

- De uma forma mais generalizada, podemos calcular a **derivada de uma função**.
- A derivada de uma função é uma nova função (denotada por $f'(x)$) que calcula o coeficiente angular da reta tangente à $f(x)$ para qualquer valor x do seu domínio.

Definição: Derivada da função $f(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Outras notações:

$$\frac{df}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \dot{x}$$

Condições de existência para a derivada:

- O limite:

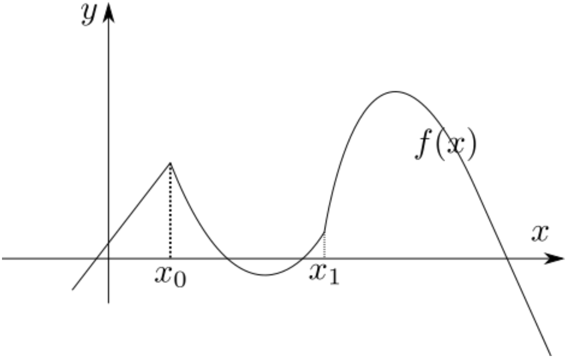
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

  deve existir. Ou seja:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L$$

- Esta condição implica que a função também é contínua, **mas não o contrário**.

- Exemplo de função contínua, mas não derivável em um ponto:



Exemplo

Calcule a derivada da função:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$$

Usando a definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) - \left(x^3 + x^2 - 2x\right)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2x - 2\Delta x - x^3 - x^2 + 2x}{\Delta x}$$

Exemplo

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + \Delta x - 2\right)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + \Delta x - 2\right)$$

Portanto a derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

Observação

- Comparando com o exemplo anterior, para encontrar a derivada no ponto $(1, 0)$ pode-se fazer $f'(1) = 3(1)^2 + 2(1) - 2 = 3$.
- A princípio, calcular a derivada da função para depois obter o valor da mesma no ponto de interesse é mais trabalhoso, mas ao utilizar as regras de derivação que serão apresentadas no futuro, o calculo destes limites não serão mais necessários, tornando mais simples o cálculo da derivada da função.

Exemplo

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + \Delta x - 2\right)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + \Delta x - 2\right)$$

Portanto a derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

Observação

- Comparando com o exemplo anterior, para encontrar a derivada no ponto $(1,0)$ pode-se fazer $f'(1) = 3(1)^2 + 2(1) - 2 = 3$.
- A princípio, calcular a derivada da função para depois obter o valor da mesma no ponto de interesse é mais trabalhoso, mas ao utilizar as regras de derivação que serão apresentadas no futuro, o calculo destes limites não serão mais necessários, tornando mais simples o cálculo da derivada da função.