Aula 5 - Definições de limites e Teorema do sanduiche

Muller Moreira S Lopes

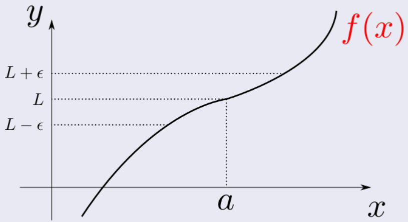
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

23 de agosto de 2023

Limite - Definição formal

Dado uma função $f(x)$ definida em um intervalo aberto que contenha um ponto $x = a$, exceto (possívelmente) no ponto a.

- Valor Limite: L.
- Tolerância: ϵ.



Obs:

- a afirmação "exceto (possívelmente) no ponto a" quer dizer que a pode ser "bolinha tanto aberta quanto fechada" no intervalo.

Limite - Definição formal

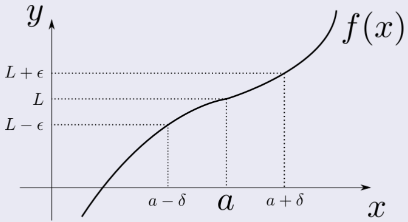
L é o valor limite de $f(a)$ quando $x \to a$ se, para qualquer tolerância $\epsilon > 0$, for possível encontrar um valor $\delta > 0$ tal que:

Se:

$$0 < |x - a| < \delta$$

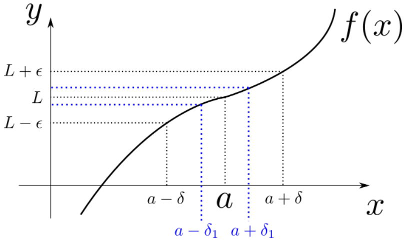
Então:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$



Observações

- A idéia é determinar algum sub-intervalo de $(a - \delta, a + \delta)$ em que todos os valores $f(x)$ da imagem estejam entre $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.
- O intervalo $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ não precisa ser o maior possível.



Como verificar um limite usando a definição formal

- Assumir um valor $\epsilon > 0$ genérico.
- Encontrar algum valor δ em função de ϵ tal que, se:

$$0 < |x - a| < \delta$$

Então:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Exemplo 1

Usar a definição de limites para provar que

$$\lim_{x \to 4}(3x - 5) = 7$$

Exemplo 1

- Assumir um valor ϵ genérico.
- Tomando a tolerância em ϵ:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

$$|(3x - 5) - 7| < \epsilon$$

$$|3x - 12| < \epsilon$$

Exemplo 1

- Assumir um valor ϵ genérico.
- Tomando a tolerância em ϵ:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

$$|(3x - 5) - 7| < \epsilon$$

$$|3x - 12| < \epsilon$$

Exemplo 1

- Como $x \to 4$ neste exemplo, temos que extrair o termo $|x-4|$ nesta inequação:

$$|3x - 12| < \epsilon$$

$$|3(x-4)| < \epsilon$$

$$|3|\ |x-4| < \epsilon$$

$$|x-4| < \frac{1}{3}\epsilon$$

- Assim podemos obter o valor $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ que satisfaz a definição de limites.

Exemplo 1 - verificação

Se:

$$0 < |x - 4| < \delta \qquad \rightarrow \qquad 0 < |x - 4| < \frac{1}{3}\epsilon$$

Então:

$$0 < 3|x - 4| < \epsilon$$

$$0 < |3x - 12| < \epsilon$$

$$0 < |3x - 5 - 7| < \epsilon$$

Assim:

$$0 < |f(x) - 7| < \epsilon$$

Exemplo 2

Usar a definição de limites para provar que

$$\lim_{x \to 5} x^2 = 25$$

Exemplo 2

- Assumir um valor ϵ genérico.
- Tomando a tolerância em ϵ:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

$$|x^2 - 25| < \epsilon$$

Exemplo 2

- Assumir um valor ϵ genérico.
- Tomando a tolerância em ϵ:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

$$|x^2 - 25| < \epsilon$$

Exemplo 2

Caso 1) Se $x > 5$:

$$x^2 - 25 < \epsilon$$

$$x < \sqrt{\epsilon + 25}$$

$$x - 5 < \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Como $x > 5$:

$$|x - 5| < \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Logo:

$$\delta_+ = \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Exemplo 2

Caso 1) Se $x > 5$:

$$x^2 - 25 < \epsilon$$

$$x < \sqrt{\epsilon + 25}$$

$$x - 5 < \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Como $x > 5$:

$$|x - 5| < \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Logo:

$$\delta_+ = \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Exemplo 2

Caso 1) Se $x > 5$:

$$x^2 - 25 < \epsilon$$

$$x < \sqrt{\epsilon + 25}$$

$$x - 5 < \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Como $x > 5$:

$$|x - 5| < \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Logo:

$$\delta_+ = \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Exemplo 2

Caso 2) Se $x < 5$:

$$-(x^2 - 25) < \epsilon$$

$$-x^2 + 25 < \epsilon$$

$$-x^2 < \epsilon - 25$$

$$x^2 > -(\epsilon - 25)$$

Assumindo $x > 0$ por simplicidade:

$$x > \sqrt{-\epsilon + 25}$$

$$x - 5 > \sqrt{-\epsilon + 25} - 5$$

Exemplo 2

Caso 2) Se $x < 5$:

$$-(x^2 - 25) < \epsilon$$

$$-x^2 + 25 < \epsilon$$

$$-x^2 < \epsilon - 25$$

$$x^2 > -(\epsilon - 25)$$

Assumindo $x > 0$ por simplicidade:

$$x > \sqrt{-\epsilon + 25}$$

$$x - 5 > \sqrt{-\epsilon + 25} - 5$$

Exemplo 2

Caso 2) Se $x < 5$:

$$-(x^2 - 25) < \epsilon$$

$$-x^2 + 25 < \epsilon$$

$$-x^2 < \epsilon - 25$$

$$x^2 > -(\epsilon - 25)$$

Assumindo $x > 0$ por simplicidade:

$$x > \sqrt{-\epsilon + 25}$$

$$x - 5 > \sqrt{-\epsilon + 25} - 5$$

Exemplo 2

Caso 2) Se $x < 5$:

$$-(x^2 - 25) < \epsilon$$

$$-x^2 + 25 < \epsilon$$

$$-x^2 < \epsilon - 25$$

$$x^2 > -(\epsilon - 25)$$

Assumindo $x > 0$ por simplicidade:

$$x > \sqrt{-\epsilon + 25}$$

$$x - 5 > \sqrt{-\epsilon + 25} - 5$$

Exemplo 2

Caso 2) Se $x < 5$:

$$-(x^2 - 25) < \epsilon$$

$$-x^2 + 25 < \epsilon$$

$$-x^2 < \epsilon - 25$$

$$x^2 > -(\epsilon - 25)$$

Assumindo $x > 0$ por simplicidade:

$$x > \sqrt{-\epsilon + 25}$$

$$x - 5 > \sqrt{-\epsilon + 25} - 5$$

Exemplo 2

Caso 2) Se $x < 5$:

$$-(x^2 - 25) < \epsilon$$

$$-x^2 + 25 < \epsilon$$

$$-x^2 < \epsilon - 25$$

$$x^2 > -(\epsilon - 25)$$

Assumindo $x > 0$ por simplicidade:

$$x > \sqrt{-\epsilon + 25}$$

$$x - 5 > \sqrt{-\epsilon + 25} - 5$$

Exemplo 2

Multiplicando esta relação por -1:

$$-(x-5) < -\sqrt{-\epsilon+25}+5$$

Como $x < 5$, então $|x-5| = -(x-5)$. Portanto:

$$|x-5| < -\sqrt{-\epsilon+25}+5$$

Logo:

$$\delta_- = -\sqrt{-\epsilon+25}+5$$

Exemplo 2

Conhecendo os dois casos de δ, definimos o subintervalo $(5 - \delta_1, 5 + \delta_1)$ em que:

$$\delta_1 = min(\delta_+, \delta_-) = min(\sqrt{\epsilon + 25} - 5, -\sqrt{-\epsilon + 25} + 5) = \delta_+$$

Exemplo 2 - verificação

Se:

$$0 < |x-5| < \delta_1 \qquad \rightarrow \qquad 0 < |x-5| < \sqrt{\epsilon+25}-5$$

- Caso 1) Assumindo $x > 5$:

Somando 5 em todos os termos da desigualdade:

$$5 < |x-5|+5 < \sqrt{\epsilon+25}$$

Como todos os termos da desigualdade são positivos, é possível elevar todos ao quadrado sem preocupação com os sinais $>$ e $<$.

$$25 < (|x-5|+5)^2 < \epsilon+25$$

$$25 < |x-5|^2 + 10|x-5| + 25 < \epsilon+25$$

$$0 < |x-5|^2 + 10|x-5| < \epsilon$$

Exemplo 2 - verificação

Se:

$$0 < |x-5| < \delta_1 \qquad \rightarrow \qquad 0 < |x-5| < \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

- Caso 1) Assumindo $x > 5$:

Somando 5 em todos os termos da desigualdade:

$$5 < |x-5| + 5 < \sqrt{\epsilon + 25}$$

Como todos os termos da desigualdade são positivos, é possível elevar todos ao quadrado sem preocupação com os sinais $>$ e $<$.

$$25 < (|x-5|+5)^2 < \epsilon + 25$$

$$25 < |x-5|^2 + 10|x-5| + 25 < \epsilon + 25$$

$$0 < |x-5|^2 + 10|x-5| < \epsilon$$

Exemplo 2 - verificação

Como $x > 5$:

$$0 < (x-5)^2 + 10(x-5) < \epsilon$$

$$0 < x^2 - 10x + 25 + 10x - 50 < \epsilon$$

$$0 < x^2 - 25 < \epsilon$$

Como $x > 5$, então $x^2 - 25 = |x^2 - 25|$, logo:

$$0 < |x^2 - 25| < \epsilon$$

$$0 < |f(x) - L| < \epsilon$$

Exemplo 2 - verificação

- Caso 2) Assumindo $x < 5$:

$$0 < |x - 5| < \sqrt{\epsilon + 25} - 5$$

Como $\delta_1 < \delta_-$:

$$0 < |x - 5| < \sqrt{\epsilon + 25} - 5 < \delta_-$$

$$0 < |x - 5| < \delta_-$$

$$0 < |x - 5| < -\sqrt{-\epsilon + 25} + 5$$

Exemplo 2 - verificação

Subtraindo 5 de todos os termos:

$$-5 < |x-5| - 5 < -\sqrt{-\epsilon + 25}$$

Multiplicando por -1

$$5 > -|x-5| + 5 > \sqrt{-\epsilon + 25}$$

$$25 > (-|x-5| + 5)^2 > -\epsilon + 25$$

$$25 > 25 - 10|x-5| + |x-5|^2 > -\epsilon + 25$$

Exemplo 2 - verificação

Subtraindo 25 de todos os termos:

$$0 > -10|x-5| + |x-5|^2 > -\epsilon$$

Multiplicando por -1

$$0 < 10|x-5| - |x-5|^2 < \epsilon$$

Como $x < 5$

$$0 < 10(-(x-5)) - (-(x-5))^2 < \epsilon$$

$$0 < -10x + 50 - (x^2 - 10x + 25) < \epsilon$$

$$0 < -10x + 50 - x^2 + 10x - 25 < \epsilon$$

$$0 < -x^2 + 25 < \epsilon$$

Exemplo 2 - verificação

Como $x < 5$ e ($x > 0$ por simplicidade), então $|x^2 - 25| = -(x^2 - 25) = -x^2 + 25$, logo:

$$0 < |x^2 - 25| < \epsilon$$

Portanto:

$$0 < |f(x) - L| < \epsilon$$

Limite envolvendo o infinito positivo - Definição formal

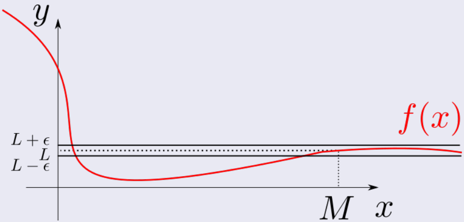
L é o valor limite de $f(a)$ quando $x \to \infty$ se, para qualquer tolerância $\epsilon > 0$, existe um valor $M > 0$ tal que:

Se:

$$x > M$$

Então:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$



Limite envolvendo o infinito negativo - Definição formal

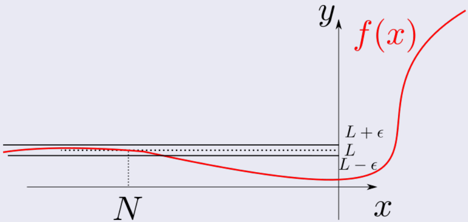
L é o valor limite de $f(a)$ quando $x \to -\infty$ se, para qualquer tolerância $\epsilon > 0$, existe um valor $N < 0$ tal que:

Se:

$$x < N$$

Então:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$



Exemplo 3

Usar a definição de limites para provar que

$$\lim_{x\to\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$$

- Tomando a tolerância em ϵ:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$
$$|2 + \frac{1}{x} - 2| < \epsilon$$
$$|\frac{1}{x}| < \epsilon$$

- Como $x > 0$:

$$\frac{1}{x} < \epsilon$$
$$\frac{1}{\epsilon} < x$$

- Assim, obtemos o valor $M = \frac{1}{\epsilon}$

Exemplo 3

Usar a definição de limites para provar que

$$\lim_{x \to \infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$$

- Tomando a tolerância em ϵ:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

$$|2 + \frac{1}{x} - 2| < \epsilon$$

$$|\frac{1}{x}| < \epsilon$$

- Como $x > 0$:

$$\frac{1}{x} < \epsilon$$

$$\frac{1}{\epsilon} < x$$

- Assim, obtemos o valor $M = \frac{1}{\epsilon}$

Exemplo 3 - verificação

- Tomando:

$$M < x \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{\epsilon} < x$$

- Então:

$$\frac{1}{\epsilon} < x$$

$$\frac{1}{x} < \epsilon$$

Como x é positivo:

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

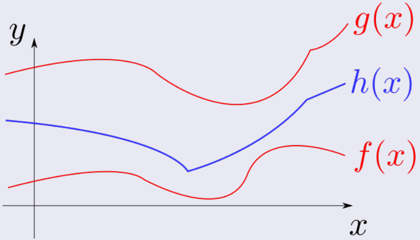
$$\left|\frac{1}{x} + 2 - 2\right| < \epsilon$$

- Portanto

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

Teorema do Sanduíche

Suponhamos $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo o x em um intervalo aberto contendo um valor a.



Teorema do Sanduíche

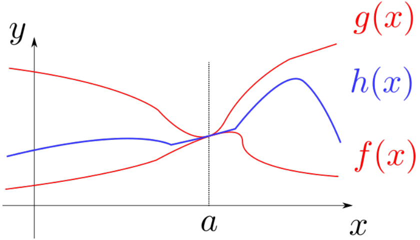
Suponhamos $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo o x em um intervalo aberto contendo um valor a.

Se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

Então:

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$



- Utilidade: determinar limites de funções em que a fatoração não for possível

Exemplo

Calcule o limite

$$\lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

- Considerando a imagem da função seno, temos:

$$-1 \leq sen\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$$

Exemplo

Calcule o limite

$$\lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

- Considerando a imagem da função seno, temos:

$$-1 \leq sen\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$$

Exemplo

- Tomando os limites quando $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} -x^2 \leq \lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq \lim_{x \to 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 0$$

- Assim, pelo teorema do sanduiche:

$$\lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$