Aula 21 - Teorema do Valor médio

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

16 de outubro de 2023

Existência de valores médios

Problema motivador

Dada uma estrada com limite de velocidade de $100Km/h$, um carro passa por 2 radares de velocidade separados por $100Km$ em um intervalo de exatamente $1h$.
Pode-se afirmar que, em algum momento, o carro andou com uma velocidade exatamente igual ao limite de velocidade desta estrada?

Restrição importante: (será justificada em breve)

- A função $f(t)$ que descreve o deslocamento deste carro deve ser contínua e derivável neste intervalo.

Existência de valores médios

Discussão intuitiva:

- Velocidade média: $100Km/h$;
- Caso 1: velocidade constante (Caso trivial).
- Caso 2: Se o carro andou com velocidade abaixo de $100Km/h$ em algum momento do trajeto, não é possível que ele tenha velocidade média de $100Km/h$ sem que ele exceda essa velocidade em algum outro momento.
  - Considerando que a função deslocamento seja contínua e derivável, garante-se que em algum momento, a velocidade instantânea do carro foi de $100Km/h$.

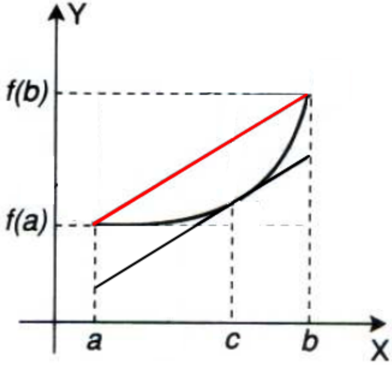
Existência de valores médios

Discussão intuitiva:

- Velocidade média: $100Km/h$;
- Caso 1: velocidade constante (Caso trivial).
- Caso 2: Se o carro andou com velocidade abaixo de $100Km/h$ em algum momento do trajeto, não é possível que ele tenha velocidade média de $100Km/h$ sem que ele exceda essa velocidade em algum outro momento.
    - Considerando que a função deslocamento seja contínua e derivável, garante-se que em algum momento, a velocidade instantânea do carro foi de $100Km/h$.

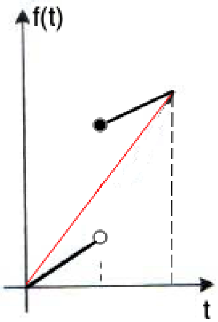
Conclusões:

- Para ambos os casos, em algum momento do trajeto, o carro teve uma velocidade instantânea de $100 Km/h$.

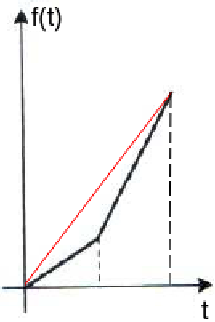


Por que as restrições de diferenciabilidade e continuidade?

Caso $f(t)$ apresentasse um descontinuídade:



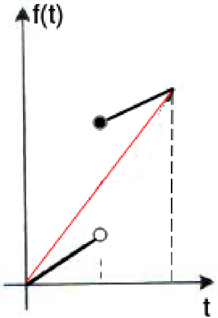
Caso $f(t)$ não fosse derivável em algum ponto:



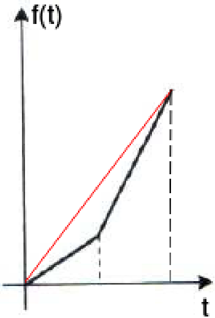
Em ambos os casos não podemos afirmar que, em algum momento do trajeto, o carro teve uma velocidade instantânea de $100Km/h$.

Por que as restrições de diferenciabilidade e continuidade?

Caso $f(t)$ apresentasse um descontinuídade:



Caso $f(t)$ não fosse derivável em algum ponto:



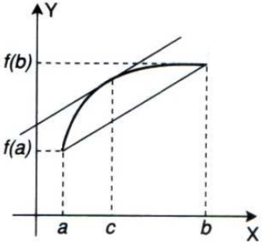
Em ambos os casos não podemos afirmar que, em algum momento do trajeto, o carro teve uma velocidade instantânea de $100Km/h$.

Teorema do Valor Médio (TVM)

Definição:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então **existirá** ao menos um ponto $x = c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Observação importante:

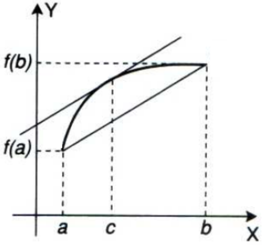
- O TVM garante a existência dos valores c, mas não sua unicidade.

Teorema do Valor Médio (TVM)

Definição:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então **existirá** ao menos um ponto $x = c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



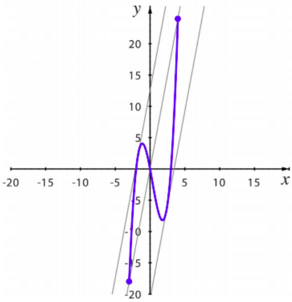
Observação importante:

- O TVM garante a existência dos valores c, mas não sua unicidade.

TVM: Interpretação geométrica

Exemplo:

A função $f(x) = x(x+2)(x-3)$, definida no intervalo $[-3, 4]$, possui dois valores c em que o TVM é válido.

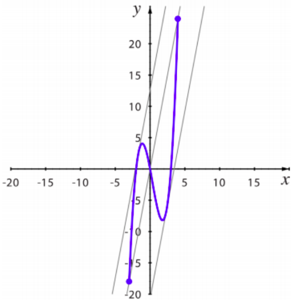


- Conhecendo a função f podemos identificar quem seriam os valores c sem consultar o gráfico da função?

TVM: Interpretação geométrica

Exemplo:

A função $f(x) = x(x+2)(x-3)$, definida no intervalo $[-3, 4]$, possui dois valores c em que o TVM é válido.



- Conhecendo a função f podemos identificar quem seriam os valores c sem consultar o gráfico da função?

TVM: Calculando ocorrências do valor médio

Neste exemplo conhecemos:

- Função estudada: $f(x) = x(x+2)(x-3)$;
  - Derivada: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 6$;
- Intervalo estudado: $[a, b] = [-3, 4]$;

Aplicando o TVM:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} = \frac{24 - (-18)}{7} = 6$$

$$f'(c) = 6$$

TVM: Calculando ocorrências do valor médio

Neste exemplo conhecemos:

- Função estudada: $f(x) = x(x+2)(x-3)$;
  - Derivada: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 6$;
- Intervalo estudado: $[a, b] = [-3, 4]$;

Aplicando o TVM:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} = \frac{24 - (-18)}{7} = 6$$

$$f'(c) = 6$$

- Pelo TVM sabemos que existem pontos c tais que $f'(c) = 6$. Aplicando essa igualdade em $f'(x) = 3x^2 - 2x - 6$ temos:

$$f'(c) = 3c^2 - 2c - 6 = 6$$

- Obtemos a equação do segundo grau:

$$3c^2 - 2c - 12 = 0$$

cujas raizes são $c = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{37}}{3}$.

- Como indicado no gráfico de $f(x)$, obtemos dois valores c em que o TVM é satisfeito.

TVM: Calculando ocorrências do valor médio

- Pelo TVM sabemos que existem pontos c tais que $f'(c) = 6$. Aplicando essa igualdade em $f'(x) = 3x^2 - 2x - 6$ temos:

$$f'(c) = 3c^2 - 2c - 6 = 6$$

- Obtemos a equação do segundo grau:

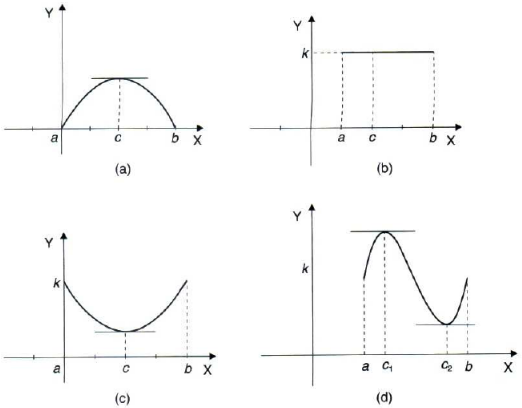
$$\boxed{3c^2 - 2c - 12 = 0}$$

cujas raizes são $c = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{37}}{3}$.

- **Como indicado no gráfico de $f(x)$, obtemos dois valores c em que o TVM é satisfeito.**

Teorema de Rolle

Seja f uma função definida e contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Se $f(a)=f(b)=0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c)=0$.



Argumentação:

- Caso $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, f é constante, logo $f'(x) = 0$ em todo o intervalo.
- Caso $f(x) \neq 0$, para algum $x \in (a, b)$, como f é contínua em $[a, b]$, ela possui valores de máximo e mínimo neste intervalo. Portanto em algum ponto $c \in (a, b)$ temos $f'(c) = 0$.

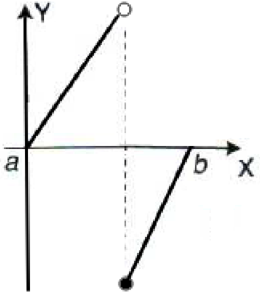
Lema para a demonstração do TVM

Argumentação:

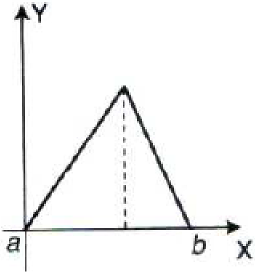
- Caso $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, f é constante, logo $f'(x) = 0$ em todo o intervalo.
- Caso $f(x) \neq 0$, para algum $x \in (a, b)$, como f é contínua em $[a, b]$, ela possui valores de máximo e mínimo neste intervalo. Portanto em algum ponto $c \in (a, b)$ temos $f'(c) = 0$.

Revisitando as restrições de diferenciabilidade e continuidade

Caso f não seja contínua no intervalo $[a, b]$:



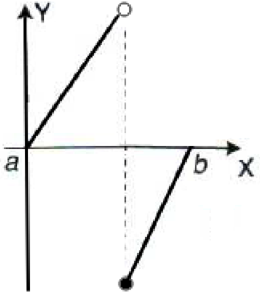
Caso f não seja derivável em algum ponto do intervalo (a, b):



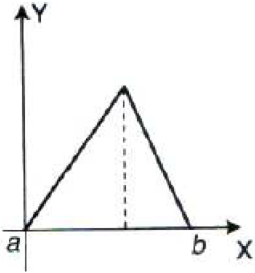
Em ambos os casos o Teorema de Rolle não é satisfeito pois não existe c tal que $f'(c) = 0$.

Revisitando as restrições de diferenciabilidade e continuidade

Caso f não seja contínua no intervalo $[a, b]$:



Caso f não seja derivável em algum ponto do intervalo (a, b):

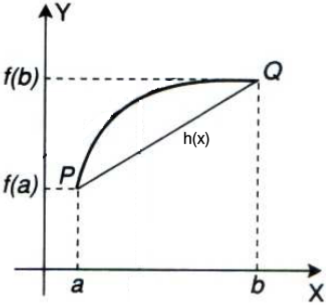


Em ambos os casos o Teorema de Rolle não é satisfeito pois não existe c tal que $f'(c) = 0$.

TVM: Demonstração

- Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).
- Tomando os pontos $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$, é possível traçar uma reta $\bar{PQ}$ cuja equação na forma $y = h(x)$ é dada como:

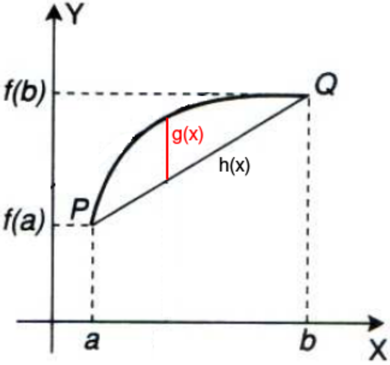
$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$



TVM: Demonstração

- Define-se a função $g(x)$ que determina a distância vertical entre um ponto de $f(x)$ e a reta $\bar{PQ}$:

$$g(x) = f(x) - h(x)$$



TVM: Demonstração

- Com isso temos que:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Voltando ao Teorema de Rolle...

Como $f(x)$ e $h(x)$ são contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), a função $g(x)$ satisfaz o Teorema de Rolle em $[a, b]$. Pois:

- $g(x)$ é contínua em $[a, b]$.
- $g(x)$ é derivável em (a, b).
- $g(a) = g(b) = 0$.

Logo **existe** um ponto c entre a e b tal que $\mathbf{g'(c) = 0}$.

TVM: Demonstração

- Por enquanto, conhecemos a função $g(x)$ e o valor de sua derivada em algum ponto $c \in (a, b)$.
  - $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$;
  - $g'(c) = 0$;
- Tomando a derivada de $g(x)$ temos:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Com isso podemos reescrever $g'(c)$ como:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

- Portanto:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

TVM: Demonstração

- Por enquanto, conhecemos a função $g(x)$ e o valor de sua derivada em algum ponto $c \in (a, b)$.
  - $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$;
  - $g'(c) = 0$;
- Tomando a derivada de $g(x)$ temos:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Com isso podemos reescrever $g'(c)$ como:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

- Portanto:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Corolários do TVM

- Como resultados imediatos do TVM, podemos demonstrar que as derivadas de uma função $f(x)$ podem ser usadas para avaliar alguns de seus comportamentos:
  - 1^a derivada: monotonicidade;
  - 2^a derivada: concavidade;
- Relação entre funções com a mesma derivada.
- Vamos discutir, demonstrar e ilustrar estes resultados individualmente.

Corolários do TVM

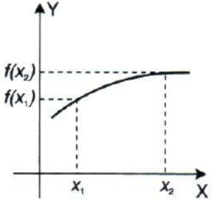
- Como resultados imediatos do TVM, podemos demonstrar que as derivadas de uma função $f(x)$ podem ser usadas para avaliar alguns de seus comportamentos:
    - 1^a derivada: monotonicidade;
    - 2^a derivada: concavidade;
- Relação entre funções com a mesma derivada.
- Vamos discutir, demonstrar e ilustrar estes resultados individualmente.

Corolários do TVM: Monotonicidade

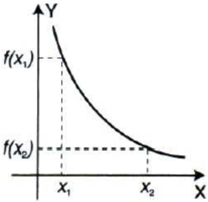
Definição: monotonicidade

Seja uma função f, definida em um intervalo I, e quaisquer $x_1, x_2 \in I$ em que $x_1 < x_2$. A função f é dita:

- Crescente, se $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- Estritamente crescente, se $f(x_1) < f(x_2)$;
- Decrescente, se $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- Estritamente decrescente, se $f(x_1) > f(x_2)$;



$f(x)$ crescente



$f(x)$ descrescente

Corolários do TVM: Monotonicidade

Corolário 1

Seja uma função f, contínua em um intervalo I, e derivável no interior deste intervalo. f é dita:

- Crescente em I, se $f'(x) > 0, \qquad \forall x \in I$;
- Decrescente em I, se $f'(x) < 0, \qquad \forall x \in I$;

Obs: Os casos em que $f'(x) = 0$ são tratados a parte pois são pontos críticos.

Caso 1: função crescente

- Seja f uma função contínua no intervalo I, derivável dentro deste intervalo e tal que $f'(x) > 0$.
- Tomando dois pontos $x_1, x_2 \in I$ distintos em que $x_2 > x_1$, o TVM garante que existe um ponto $c \in (x_1, x_2) \subseteq I$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Como $f'(x) > 0$, temos que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

- Por definição $x_2 > x_1 \leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$. Logo:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Corolário 1: Demonstração

Caso 1: função crescente

- Seja f uma função contínua no intervalo I, derivável dentro deste intervalo e tal que $f'(x) > 0$.
- Tomando dois pontos $x_1, x_2 \in I$ distintos em que $x_2 > x_1$, o TVM garante que existe um ponto $c \in (x_1, x_2) \subseteq I$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Como $f'(x) > 0$, temos que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

- Por definição $x_2 > x_1 \leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$. Logo:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$\square$

Corolário 1: Demonstração

Caso 2: função decrescente

- Seja f uma função contínua no intervalo I, derivável dentro deste intervalo e tal que $f'(x) < 0$.
- Tomando dois pontos $x_1, x_2 \in I$ distintos em que $x_2 > x_1$, o TVM garante que existe um ponto $c \in (x_1, x_2) \subseteq I$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Como $f'(x) < 0$, temos que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

- Por definição $x_2 > x_1 \leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$. Logo:

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

□

Corolário 1: Demonstração

Caso 2: função decrescente

- Seja f uma função contínua no intervalo I, derivável dentro deste intervalo e tal que $f'(x) < 0$.
- Tomando dois pontos $x_1, x_2 \in I$ distintos em que $x_2 > x_1$, o TVM garante que existe um ponto $c \in (x_1, x_2) \subseteq I$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Como $f'(x) < 0$, temos que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

- Por definição $x_2 > x_1 \leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$. Logo:

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

$\square$

Corolários do TVM: igualdade entre derivadas

Lema: funções de derivada nula

Seja f uma função definida e contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$, então f é constante no intervalo (a,b).

Demonstração:

- Tomando dois pontos $x_1, x_2 \in [a,b]$ distintos em que $x_2 > x_1$, o TVM garante que existe um ponto $c \in (x_1, x_2) \subseteq [a,b]$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Como $f'(x) = 0$, temos que: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$
- Logo $f(x_2) = f(x_1)$ para quaisquer valores x_1 e x_2.
- Portanto f é constante em (a,b) e consequentemente, devido a continuidade, em $[a,b]$.

Corolários do TVM: igualdade entre derivadas

Lema: funções de derivada nula

Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$, então f é constante no intervalo (a, b).

Demonstração:

- Tomando dois pontos $x_1, x_2 \in [a, b]$ distintos em que $x_2 > x_1$, o TVM garante que existe um ponto $c \in (x_1, x_2) \subseteq [a, b]$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Como $f'(x) = 0$, temos que: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$
- Logo $f(x_2) = f(x_1)$ para quaisquer valores x_1 e x_2.
- Portanto f é constante em (a, b) e consequentemente, devido a continuidade, em $[a, b]$.

Corolários do TVM: igualdade entre derivadas

Lema: funções de derivada nula

Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$, então f é constante no intervalo (a, b).

Demonstração:

- Tomando dois pontos $x_1, x_2 \in [a, b]$ distintos em que $x_2 > x_1$, o TVM garante que existe um ponto $c \in (x_1, x_2) \subseteq [a, b]$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Como $f'(x) = 0$, temos que: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$
- Logo $f(x_2) = f(x_1)$ para quaisquer valores x_1 e x_2.
- Portanto f é constante em (a, b) e consequentemente, devido a continuidade, em $[a, b]$.

Corolários do TVM: igualdade entre derivadas

Corolário 3:

Sejam f, g funções definidas e contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Se $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a, b)$, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração:

- Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Então h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).
- Derivando $h(x)$ temos:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, \qquad \forall x \in (a, b)$$

- Utilizando o Lema sobre funções de derivada nula, a função $h(x)$ é uma constante.
- Tomando $h(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x) = g(x) + k$$

Corolários do TVM: igualdade entre derivadas

Corolário 3:

Sejam f, g funções definidas e contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Se $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in (a, b)$, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração:

- Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Então h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).
- Derivando $h(x)$ temos:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, \qquad \forall x \in (a, b)$$

- Utilizando o Lema sobre funções de derivada nula, a função $h(x)$ é uma constante.
- Tomando $h(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x) = g(x) + k$$

Corolários do TVM: igualdade entre derivadas

- Esse corolário garante que existe uma familia de funções que possuem uma mesma derivada.
- Esse resultado é extremamente relevante no estudo de integrais.