Funções

Patrick Terrematte

UFRN
patrickt@imd.ufrn.br

2022.2

Agenda

FUNÇÕES

Definição de Função

função parcial é relação na qual cada elemento do domínio está relacionado com, *no máximo* (exatamente), um elemento da Imagem (contra-domínio)

⟦CC⟧ Para cada indivíduo a de A há *no máximo* um indivíduo b de B tal que $a \overset{f}{\mapsto} b$ (função parcial)

Formalmente: $(\forall a{:}A)(\forall b, c{:}B)((a \overset{f}{\mapsto} b \wedge a \overset{f}{\mapsto} c) \rightarrow b = c)$

⟦MAT⟧ Para todo indivíduo a de A há *exatamente* um indivíduo b de B tal que $a \overset{f}{\mapsto} b$ (função total)

Formalmente: $(\forall a{:}A)(\exists! b{:}B)\ a \overset{f}{\mapsto} b$

FUNÇÕES

Definição de Função

Dizemos que uma relação f é uma **função** se, para todo $a \in Dom(f)$, existe exatamente um b tal que $(a, b) \in f$ (ou $a\ f\ b$).
Nesse caso, dizemos que $f(a) = b$.

Observação: Funções são Relações

Toda função é uma relação.

- Domínio $Dom(f)$ e Imagem $Img(f)$
- Relação Composta $g \circ f$ de f com g (também é Função)
- Relação Inversa f^{-1} de f (nem sempre é Função)

FUNÇÕES

Definição de Função

Dizemos que uma relação f é uma **função** se, para todo $a \in Dom(f)$, existe exatamente um b tal que $(a, b) \in f$ (ou $a\ f\ b$).
Nesse caso, dizemos que $f(a) = b$.

Observação: Funções são Relações

Toda função é uma relação.

- Domínio $Dom(f)$ e Imagem $Img(f)$
- Relação Composta $g \circ f$ de f com g (também é Função)
- Relação Inversa f^{-1} de f (nem sempre é Função)

FUNÇÕES

Definição de Função

Dizemos que uma relação f é uma **função** se, para todo $a \in Dom(f)$, existe exatamente um b tal que $(a, b) \in f$ (ou $a \ f \ b$).
Nesse caso, dizemos que $f(a) = b$.

Observação: Funções são Relações

Toda função é uma relação.

- Domínio $Dom(f)$ e Imagem $Img(f)$
- Relação Composta $g \circ f$ de f com g (também é Função)
- Relação Inversa f^{-1} de f (nem sempre é Função)

FUNÇÕES

Definição de Função

Dizemos que uma relação f é uma **função** se, para todo $a \in Dom(f)$, existe exatamente um b tal que $(a, b) \in f$ (ou $a\ f\ b$).
Nesse caso, dizemos que $f(a) = b$.

Observação: Funções são Relações

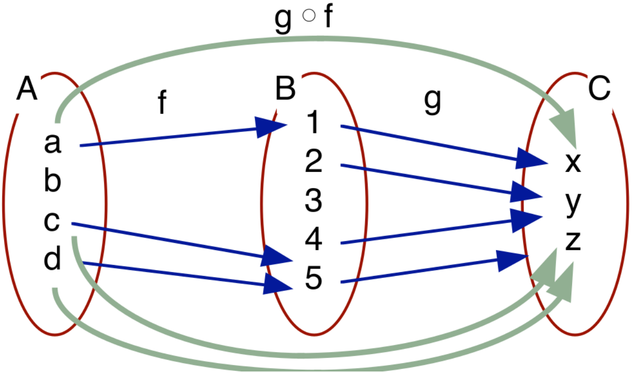
Toda função é uma relação.

- Domínio $Dom(f)$ e Imagem $Img(f)$
- Relação Composta $g \circ f$ de f com g (também é Função)
- Relação Inversa f^{-1} de f (nem sempre é Função)

Composição de Funções

$f = \{\langle a, 1\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle d, 5\rangle\}$

$g = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 4, y\rangle, \langle 5, z\rangle\}$

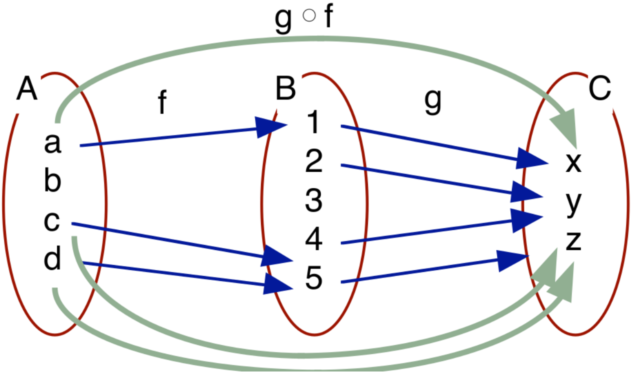


$g \circ f = \{\langle a, x\rangle, \langle c, z\rangle, \langle d, z\rangle\}$

Composição de Funções

$f = \{\langle a, 1\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle d, 5\rangle\}$

$g = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 4, y\rangle, \langle 5, z\rangle\}$

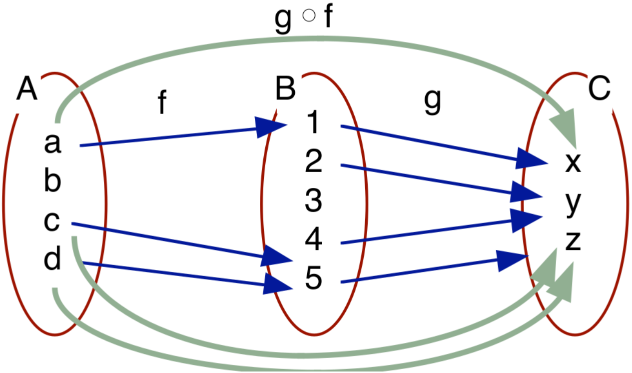


$g \circ f = \{\langle a, x\rangle, \langle c, z\rangle, \langle d, z\rangle\}$

Composição de Funções

$f = \{\langle a, 1\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle d, 5\rangle\}$

$g = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 4, y\rangle, \langle 5, z\rangle\}$

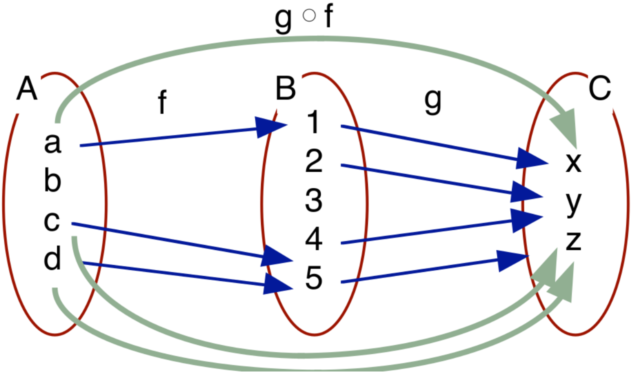


$g \circ f = \{\langle a, x\rangle, \langle c, z\rangle, \langle d, z\rangle\}$

Composição de Funções

$f = \{\langle a, 1\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle d, 5\rangle\}$

$g = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 4, y\rangle, \langle 5, z\rangle\}$



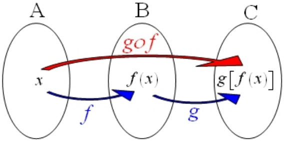
$g \circ f = \{\langle a, x\rangle, \langle c, z\rangle, \langle d, z\rangle\}$

Funções f e g tais que $Im(f) \subseteq Dom(g)$.

$g \circ f$: relação composta de f com g é função

$$
\begin{aligned}
(x, z) \in g \circ f &\implies \exists y : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g \\
&\implies y = f(x) \wedge z = g(y) \\
&\implies z = g(f(x))
\end{aligned}
$$

$g \circ f(x) \; = \; g(f(x))$ é apenas um valor: $g \circ f$ é função.



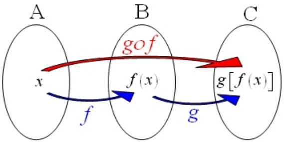
- $Dom(g \circ f) \; = \; Dom(f)$.
- $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$.
- Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então $g \circ f : A \to C$.

Funções f e g tais que $Im(f) \subseteq Dom(g)$.

$g \circ f$: relação composta de f com g é função

$$
\begin{aligned}
(x, z) \in g \circ f &\implies \exists y : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g \\
&\implies y = f(x) \wedge z = g(y) \\
&\implies z = g(f(x))
\end{aligned}
$$

$g \circ f(x) \;=\; g(f(x))$ é apenas um valor: $g \circ f$ é função.



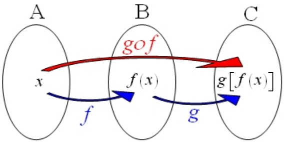
- $Dom(g \circ f) \;=\; Dom(f)$.
- $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$.
- Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então $g \circ f : A \to C$.

Funções f e g tais que $Im(f) \subseteq Dom(g)$.

$g \circ f$: relação composta de f com g é função

$$\begin{aligned}(x,z) \in g \circ f &\Longrightarrow \exists y : (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g \\ &\Longrightarrow y = f(x) \wedge z = g(y) \\ &\Longrightarrow z = g(f(x))\end{aligned}$$

$g \circ f(x) \ = \ g(f(x))$ é apenas um valor: $g \circ f$ é função.



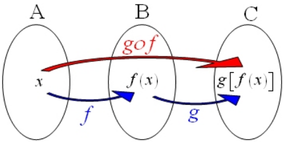
- $Dom(g \circ f) \ = \ Dom(f)$.
- $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$.
- Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, então $g \circ f : A \rightarrow C$.

Funções f e g tais que $Im(f) \subseteq Dom(g)$.

$g \circ f$: relação composta de f com g é função

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in g \circ f &\implies \exists y : (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g \\
&\implies y = f(x) \wedge z = g(y) \\
&\implies z = g(f(x))
\end{aligned}
$$

$g \circ f(x) \;=\; g(f(x))$ é apenas um valor: $g \circ f$ é função.



- $Dom(g \circ f) \;=\; Dom(f)$.
- $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$.
- Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então $g \circ f : A \to C$.

FUNÇÕES - Domínio, Imagem

Definição de Domínio

- $Dom(f) \;=\; \{a \;:\; \exists b,\; f(a) = b\}$

Definição de Imagem

- $Img(f) \;=\; \{b \;:\; \exists a,\; f(a) = b\}$
- Alternativamente,

Para quaisquer conjuntos A B,
$\forall f\colon A \rightarrow B$,
$\forall y$,

$$y \in f(A) \overset{\text{def}}{=} \exists x, (\; x \in A \;\land\; y = f(x) \;)$$

FUNÇÕES - ContraDomínio

Notação $f : A \to B$ e ContraDomínio

Escrevemos $f : A \to B$ quando $Dom(f) = A$ e $Img(f) \subseteq B$.
Nessa notação, dizemos que B é o **ContraDomínio** de f.
ContraDomínio só faz sentido na notação $f : A \to B$.

Exercício

Sejam $S = 0, 2, 4, 6$ e $T = 1, 3, 5, 7$. Determine se cada um dos conjuntos de pares ordenados a seguir é uma função com domínio S e contradomínio T. Se esse for o caso, a função é injetora? É sobrejetora?

- $\{(0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 0)\}$
- $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$
- $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$
- $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$
- $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$

Exercício

Sejam $S = 0, 2, 4, 6$ e $T = 1, 3, 5, 7$. Determine se cada um dos conjuntos de pares ordenados a seguir é uma função com domínio S e contradomínio T. Se esse for o caso, a função é injetora? É sobrejetora?

- $\{(0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 0)\}$
- $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$
- $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$
- $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$
- $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$

Exercício

Sejam $S = 0, 2, 4, 6$ e $T = 1, 3, 5, 7$. Determine se cada um dos conjuntos de pares ordenados a seguir é uma função com domínio S e contradomínio T. Se esse for o caso, a função é injetora? É sobrejetora?

- $\{(0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 0)\}$
- $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$
- $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$
- $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$
- $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$

Exercício

Sejam $S = 0, 2, 4, 6$ e $T = 1, 3, 5, 7$. Determine se cada um dos conjuntos de pares ordenados a seguir é uma função com domínio S e contradomínio T. Se esse for o caso, a função é injetora? É sobrejetora?

- $\{(0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 0)\}$
- $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$
- $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$
- $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$
- $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$

Exercício

Sejam $S = 0, 2, 4, 6$ e $T = 1, 3, 5, 7$. Determine se cada um dos conjuntos de pares ordenados a seguir é uma função com domínio S e contradomínio T. Se esse for o caso, a função é injetora? É sobrejetora?

- $\{(0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 0)\}$
- $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$
- $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$
- $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$
- $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$

Exercício

Seja S = o conjunto de todos os cidadãos brasileiros vivos. Quais dessas funções são injetoras? Quais são sobrejetoras?

1. Contradomínio = o alfabeto, $f(\text{pessoa})$ = inicial do segundo nome da pessoa.
2. Contradomínio = o conjunto de datas entre 1.o de janeiro e 31 de dezembro, $f(\text{pessoa})$ = dia do nascimento da pessoa.
3. Contradomínio = números com 11 algarismos; f (pessoa) = o número do CPF da pessoa.

Exercício

Seja S = o conjunto de todos os cidadãos brasileiros vivos. Quais dessas funções são injetoras? Quais são sobrejetoras?

1. Contradomínio = o alfabeto, $f(\text{pessoa})$ = inicial do segundo nome da pessoa.
2. Contradomínio = o conjunto de datas entre 1.o de janeiro e 31 de dezembro, $f(\text{pessoa})$ = dia do nascimento da pessoa.
3. Contradomínio = números com 11 algarismos; f (pessoa) = o número do CPF da pessoa.

Exercício

Seja S = o conjunto de todos os cidadãos brasileiros vivos. Quais dessas funções são injetoras? Quais são sobrejetoras?

1. Contradomínio = o alfabeto, $f(\text{pessoa})$ = inicial do segundo nome da pessoa.
2. Contradomínio = o conjunto de datas entre 1.o de janeiro e 31 de dezembro, $f(\text{pessoa})$ = dia do nascimento da pessoa.
3. Contradomínio = números com 11 algarismos; f (pessoa) = o número do CPF da pessoa.

FUNÇÕES - Inversa

Relação Inversa de uma função f

- $f^{-1} = \left\{ (f(x), x) \ : \ x \in Dom(f) \right\}$
- Alternativamente,

Para quaisquer conjuntos A B,
$\forall f$: A $\rightarrow$ B,
$\forall x$,

$$x \in f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} (x \in A \wedge f(x) \in B)$$

FUNÇÕES - Inversa - Exercício

Exercício 1

$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. Determine se a inversa é uma função.

(a) $f(x) = x^3$.
(b) $f(x) = e^x$.
(c) $f(x) = sen(x)$.
(d) $f(x) = x^5 + x$.
(e) $f(x) = x^5 - x$.

Solução:

(a) $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. SIM é função.
(b) $f^{-1}(x) = \ell n(x)$. SIM é função.
(c) $f^{-1}(x) = arcsen(x)$. NÃO é função, pois $f(2\pi) = f(0) = 0$
(d) $f^{-1}(x)$ SIM é função, pois $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \implies f$ é estritamente crescente.
(e) $f^{-1}(x)$ NÃO é função, pois $f(0) = f(1) = 0$

FUNÇÕES - Inversa - Exercício

Exercício 1

$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. Determine se a inversa é uma função.

(a) $f(x) = x^3$.

(b) $f(x) = e^x$.

(c) $f(x) = sen(x)$.

(d) $f(x) = x^5 + x$.

(e) $f(x) = x^5 - x$.

Solução:

(a) $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. SIM é função.

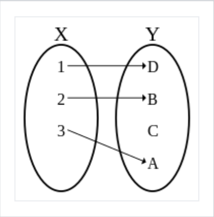
(b) $f^{-1}(x) = \ell n(x)$. SIM é função.

(c) $f^{-1}(x) = arcsen(x)$. NÃO é função, pois $f(2\pi) = f(0) = 0$

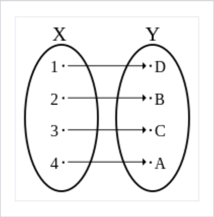
(d) $f^{-1}(x)$ SIM é função, pois $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \implies f$ é estritamente crescente.

(e) $f^{-1}(x)$ NÃO é função, pois $f(0) = f(1) = 0$

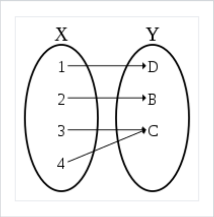
FUNÇÕES - Injetora, Sobrejetora, Bijetora



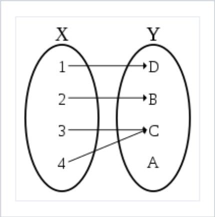
Uma função injetiva, mas não sobrejetiva (**injeção**, mas é não uma bijeção)



Uma função injetiva e sobrejetiva (bijeção)



Uma função sobrejetiva, mas não injetiva (sobrejeção, não é uma bijeção)



Uma função nem injetiva, nem sobrejetiva (também não é uma bijeção)

FUNÇÕES - Injetora, Sobrejetora, Bijetora

f é Injetora

Uma função f é Injetora se e só se:

- $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ para todo $x_1, x_2 \in Dom(f)$; ou seja,
- $\forall y \in Im(f) : \exists! x \in Dom(f), f(x) = y$

FUNÇÕES - Injetora, Sobrejetora, Bijetora

f é Injetora

Uma função f é Injetora se e só se:

- $\forall x_1, x_2 \in Dom(f), (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$.

FUNÇÕES - Sobrejetora

$f : A \to B$ é Sobrejetora

Uma função $f : A \to B$ é Sobrejetora se e só se $Im(f) = B$. Ou seja, $\forall y \in B : \exists x \in A, f(x) = y$.

Para quaisquer conjuntos A B,
$\forall f\colon A \to B$,

f é uma função sobrejetiva $\stackrel{\text{def}}{=} \forall y, (\ y \in B \Rightarrow \exists x, (\ x \in A \wedge y = f(x)\ ))$

FUNÇÕES - Bijetora

$f : A \rightarrow B$ é Bijetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é Bijetora se é injetora e sobrejetora.

FUNÇÕES - Imagem

$f(A) \; = \; \{f(x) : \; x \in A \cap Dom(f)\}$

- $x \in A \;\Rightarrow\; f(x) \in f(A)$
- $f(x) \in f(A) \not\Rightarrow x \in A$ (contraexemplo: $f(x) = 7, \forall x \in \mathbb{Z}$)

FUNÇÕES - Imagem

$f(A) \;=\; \{f(x) : \; x \in A \cap Dom(f)\}$

- $x \in A \;\Rightarrow\; f(x) \in f(A)$
- $f(x) \in f(A) \cancel{\Rightarrow} x \in A$ (contraexemplo: $f(x) = 7, \forall x \in \mathbb{Z}$)

FUNÇÕES - Imagem Reversa de conjunto

Sejam f uma função, A, B subconjuntos de $Dom(f)$ e U, V subconjuntos de $Img(f)$.

$f^{-1}(U) \ = \ \{x \in Dom(f) : \ f(x) \in U\}$

- $f(x) \in U \iff x \in f^{-1}(U)$
- $f(f^{-1}(U)) = U \cap Img(f)$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(U)) &= \{f(x) : x \in f^{-1}(U)\} \\ &= \{f(x) : f(x) \in U\} \\ &= U \cap Img(f) \end{aligned}$$

FUNÇÕES - Imagem Reversa de conjunto

Sejam f uma função, A, B subconjuntos de $Dom(f)$ e U, V subconjuntos de $Img(f)$.

$f^{-1}(U) \ = \ \{x \in Dom(f) : \ f(x) \in U\}$

- $f(x) \in U \iff x \in f^{-1}(U)$
- $f(f^{-1}(U)) = U \cap Img(f)$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(U)) &= \{f(x) : x \in f^{-1}(U)\} \\ &= \{f(x) : f(x) \in U\} \\ &= U \cap Img(f) \end{aligned}$$

FUNÇÕES - Imagem Reversa de conjunto

Conclusões para $C \subseteq Img(f)$:

- $f(x) \in C \iff x \in f^{-1}(C)$
- $x \in A \implies f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$
- $f(x) \in C \iff x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in f(f^{-1}(C))$
- Conclusões: $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ e $f(f^{-1}(C)) = C$

FUNÇÕES - Imagem Reversa de conjunto

Conclusões para $C \subseteq Img(f)$:

- $f(x) \in C \iff x \in f^{-1}(C)$
- $x \in A \implies f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$
- $f(x) \in C \iff x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in f(f^{-1}(C))$
- Conclusões: $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ e $f(f^{-1}(C)) = C$

FUNÇÕES - Imagem Reversa de conjunto

Conclusões para $C \subseteq Img(f)$:

- $f(x) \in C \iff x \in f^{-1}(C)$
- $x \in A \implies f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$
- $f(x) \in C \iff x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in f(f^{-1}(C))$
- Conclusões: $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ e $f(f^{-1}(C)) = C$

FUNÇÕES - Imagem Reversa de conjunto

Conclusões para $C \subseteq Img(f)$:

- $f(x) \in C \iff x \in f^{-1}(C)$
- $x \in A \implies f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$
- $f(x) \in C \iff x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in f(f^{-1}(C))$
- Conclusões: $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ e $f(f^{-1}(C)) = C$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:

(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.
(b) $f(C - D) = f(C) - f(D)$.
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.
(d) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longrightarrow)$

Seja um y arbitrário,

$y \in f(C \cup D) \Longrightarrow \exists x, (x \in C \cup D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Caso 1: Seja um x_1 arbitrário , $x_1 \in C$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Caso 2: Seja um x_2 arbitrário , $x_2 \in D$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(D)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longrightarrow)$

Seja um y arbitrário,

$y \in f(C \cup D) \Longrightarrow \exists x, (x \in C \cup D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Caso 1: Seja um x_1 arbitrário , $x_1 \in C$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Caso 2: Seja um x_2 arbitrário , $x_2 \in D$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(D)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longrightarrow)$

Seja um y arbitrário,

$$y \in f(C \cup D) \Longrightarrow \exists x, (x \in C \cup D \wedge f(x) = y), \text{pela def. de imagem.}$$

Caso 1: Seja um x_1 arbitrário , $x_1 \in C$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Caso 2: Seja um x_2 arbitrário , $x_2 \in D$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(D)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longrightarrow)$

Seja um y arbitrário,

$$y \in f(C \cup D) \Longrightarrow \exists x, (x \in C \cup D \wedge f(x) = y), \text{pela def. de imagem.}$$

Caso 1: Seja um x_1 arbitrário , $x_1 \in C$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Caso 2: Seja um x_2 arbitrário , $x_2 \in D$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(D)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longrightarrow)$

Seja um y arbitrário,

$y \in f(C \cup D) \Longrightarrow \exists x, (x \in C \cup D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Caso 1: Seja um x_1 arbitrário , $x_1 \in C$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Caso 2: Seja um x_2 arbitrário , $x_2 \in D$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(D)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longrightarrow)$

Seja um y arbitrário,

$$y \in f(C \cup D) \Longrightarrow \exists x, (x \in C \cup D \wedge f(x) = y), \text{pela def. de imagem.}$$

Caso 1: Seja um x_1 arbitrário , $x_1 \in C$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Caso 2: Seja um x_2 arbitrário , $x_2 \in D$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(D)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longrightarrow)$

Seja um y arbitrário,

$y \in f(C \cup D) \Longrightarrow \exists x, (x \in C \cup D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Caso 1: Seja um x_1 arbitrário , $x_1 \in C$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Caso 2: Seja um x_2 arbitrário , $x_2 \in D$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(D)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longrightarrow)$

Seja um y arbitrário,

$$y \in f(C \cup D) \Longrightarrow \exists x, (x \in C \cup D \wedge f(x) = y), \text{pela def. de imagem.}$$

Caso 1: Seja um x_1 arbitrário , $x_1 \in C$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Caso 2: Seja um x_2 arbitrário , $x_2 \in D$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(D)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longrightarrow)$

Seja um y arbitrário,

$y \in f(C \cup D) \Longrightarrow \exists x, (x \in C \cup D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Caso 1: Seja um x_1 arbitrário , $x_1 \in C$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Caso 2: Seja um x_2 arbitrário , $x_2 \in D$, por hip.

$\Longrightarrow y \in f(D)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow y \in f(C) \cup f(D)$, pela def. de $\cup$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: ($\Longleftarrow$)

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário.

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário.

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: ($\Longleftarrow$)

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \land f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \land f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \land f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \land f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: ($\Longleftarrow$)

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(a) SIM: $(\Longleftarrow)$

Seja um arbitrário y,

$y \in f(C) \cup f(D)$

Caso 1: $y \in f(C)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in C \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\Longrightarrow x_1 \in C$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_1 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Caso 2: $y \in f(D)$, por hip.

$\Longrightarrow \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

$\Longrightarrow$ Seja um x_2 arbitrário,

$\Longrightarrow x_2 \in D$ e $f(x_2) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\Longrightarrow x_2 \in C \cup D$, pela def. de $\cup$.

$\Longrightarrow y \in f(C \cup D)$, pela def. de imagem.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(b) $f(C - D) = f(C) - f(D)$.

Solução:

(b) NÃO. ContraEx:
$f(1)=f(2)=3$.
$C=\{1\}$, $D=\{2\}$,
$f(C)=f(D)=\{3\}$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(b) $f(C - D) = f(C) - f(D)$.

Solução:

(b) NÃO. ContraEx:
$f(1)=f(2)=3$.
$C=\{1\}$, $D=\{2\}$,
$f(C)=f(D)=\{3\}$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:

(b) $f(C - D) = f(C) - f(D)$.

Solução:

(b) NÃO. ContraEx:

$f(1)=f(2)=3$.

$C=\{1\}$, $D=\{2\}$,

$f(C)=f(D)=\{3\}$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(b) $f(C - D) = f(C) - f(D)$.

Solução:

(b) NÃO. ContraEx:
$f(1)=f(2)=3$.
$C=\{1\}$, $D=\{2\}$,
$f(C)=f(D)=\{3\}$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(b) $f(C - D) = f(C) - f(D)$.

Solução:

(b) NÃO. ContraEx:
$f(1){=}f(2){=}3$.
$C{=}\{1\}$, $D{=}\{2\}$,
$f(C){=}f(D){=}\{3\}$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \to x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.
Seja um arbitrário y,
$y \in f(D)$, por hip.
$\implies \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.
Seja um x_1 arbitrário.
$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.
$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.
$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.
$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \to x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.

Seja um arbitrário y,

$y \in f(D)$, por hip.

$\implies \exists x, (x \in D \land f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.

$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \to x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.

Seja um arbitrário y,

$y \in f(D)$, por hip.

$\implies \exists x, (x \in D \land f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.

$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \to x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.

Seja um arbitrário y,

$y \in f(D)$, por hip.

$\implies \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.

$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \to x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.

Seja um arbitrário y,

$y \in f(D)$, por hip.

$\implies \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.

$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:

(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \rightarrow x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.

Seja um arbitrário y,

$y \in f(D)$, por hip.

$\implies \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.

$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \to x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.

Seja um arbitrário y,

$y \in f(D)$, por hip.

$\implies \exists x, (x \in D \land f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.

$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \to x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.

Seja um arbitrário y,

$y \in f(D)$, por hip.

$\implies \exists x, (x \in D \land f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.

$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \to x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.

Seja um arbitrário y,

$y \in f(D)$, por hip.

$\implies \exists x, (x \in D \land f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.

$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $C, D \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(c) $D \subseteq C \iff f(D) \subseteq f(C)$.

(c) SIM p/ ida ($\Longrightarrow$):

$D \subseteq C \implies (\forall x : x \in D \rightarrow x \in C)$, pela def. de $\subseteq$.

Seja um arbitrário y,

$y \in f(D)$, por hip.

$\implies \exists x, (x \in D \wedge f(x) = y)$, pela def. de imagem.

Seja um x_1 arbitrário,

$\implies x_1 \in D$ e $f(x_1) = y$, por hip. da eliminação do $\exists$.

$\implies x_1 \in C$, pela def. de $\subseteq$.

$\implies y \in f(C)$, pela def. de imagem.

$\implies f(D) \subseteq f(C)$, pela def. de $\subseteq$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(d) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(d) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U \cap V) &\iff f(x) \in U \cap V \\ &\iff f(x) \in U \land f(x) \in V \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \land x \in f^{-1}(V) \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(d) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(d) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U \cap V) &\iff f(x) \in U \cap V \\ &\iff f(x) \in U \wedge f(x) \in V \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \in f^{-1}(V) \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(d) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(d) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U \cap V) &\iff f(x) \in U \cap V \\
&\iff f(x) \in U \wedge f(x) \in V \\
&\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \in f^{-1}(V) \\
&\iff x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(d) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(d) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U \cap V) &\iff f(x) \in U \cap V \\
&\iff f(x) \in U \wedge f(x) \in V \\
&\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \in f^{-1}(V) \\
&\iff x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(d) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(d) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U \cap V) &\iff f(x) \in U \cap V \\ &\iff f(x) \in U \wedge f(x) \in V \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \in f^{-1}(V) \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(d) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(d) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U \cap V) &\iff f(x) \in U \cap V \\ &\iff f(x) \in U \wedge f(x) \in V \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \in f^{-1}(V) \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(e) SIM. $(\Longrightarrow)$

Seja um arbitrário x,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U \cup V) &\Longrightarrow f(x) \in U \cup V \\ &\Longrightarrow f(x) \in U \vee f(x) \in V \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V) \\ &\textbf{Caso 1: } f(x) \in U \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V). \\ &\textbf{Caso 2: } f(x) \in V \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(V). \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(e) SIM. ($\Longrightarrow$)

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U \cup V) &\Longrightarrow f(x) \in U \cup V \\
&\Longrightarrow f(x) \in U \vee f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V)
\end{aligned}
$$

Caso 1: $f(x) \in U$

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Caso 2: $f(x) \in V$

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(V)$.

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(e) SIM. $(\Longrightarrow)$

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U \cup V) &\Longrightarrow f(x) \in U \cup V \\
&\Longrightarrow f(x) \in U \vee f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V)
\end{aligned}
$$

Caso 1: $f(x) \in U$

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Caso 2: $f(x) \in V$

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(V)$.

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(e) SIM. $(\Longrightarrow)$

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U \cup V) &\Longrightarrow f(x) \in U \cup V \\
&\Longrightarrow f(x) \in U \lor f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \lor x \in f^{-1}(V) \\
&\textbf{Caso 1: } f(x) \in U \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V). \\
&\textbf{Caso 2: } f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(V). \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(e) SIM. $(\Longrightarrow)$

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U \cup V) &\Longrightarrow f(x) \in U \cup V \\
&\Longrightarrow f(x) \in U \vee f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V)
\end{aligned}
$$

Caso 1: $f(x) \in U$

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Caso 2: $f(x) \in V$

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(V)$.

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(e) SIM. $(\Longrightarrow)$

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U \cup V) &\Longrightarrow f(x) \in U \cup V \\
&\Longrightarrow f(x) \in U \lor f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \lor x \in f^{-1}(V) \\
&\textbf{Caso 1: } f(x) \in U \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V). \\
&\textbf{Caso 2: } f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(V). \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(e) SIM. $(\Longrightarrow)$

Seja um arbitrário x,

$$x \in f^{-1}(U \cup V) \Longrightarrow f(x) \in U \cup V$$
$$\Longrightarrow f(x) \in U \vee f(x) \in V$$
$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V)$$

Caso 1: $f(x) \in U$

$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Caso 2: $f(x) \in V$

$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(V).$$
$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(e) SIM. $(\Longrightarrow)$

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U \cup V) &\Longrightarrow f(x) \in U \cup V \\
&\Longrightarrow f(x) \in U \vee f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V) \\
&\textbf{Caso 1: } f(x) \in U \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V). \\
&\textbf{Caso 2: } f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(V). \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(e) SIM. $(\Longrightarrow)$

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U \cup V) &\Longrightarrow f(x) \in U \cup V \\
&\Longrightarrow f(x) \in U \vee f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V) \\
&\textbf{Caso 1: } f(x) \in U \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V). \\
&\textbf{Caso 2: } f(x) \in V \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(V). \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute: (f) $f^{-1}(U - V) = f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

Solução:

(f) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U - V) &\iff f(x) \in U - V \\ &\iff f(x) \in U \wedge f(x) \notin V \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \notin f^{-1}(V) \\ &\iff x \in f^{-1}(U) - f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute: (f) $f^{-1}(U - V) = f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

Solução:

(f) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U - V) &\iff f(x) \in U - V \\ &\iff f(x) \in U \wedge f(x) \notin V \\ &\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \notin f^{-1}(V) \\ &\iff x \in f^{-1}(U) - f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute: (f) $f^{-1}(U - V) = f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

Solução:

(f) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U - V) &\iff f(x) \in U - V \\
&\iff f(x) \in U \wedge f(x) \notin V \\
&\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \notin f^{-1}(V) \\
&\iff x \in f^{-1}(U) - f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute: (f) $f^{-1}(U - V) = f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

Solução:

(f) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U - V) &\iff f(x) \in U - V \\
&\iff f(x) \in U \wedge f(x) \notin V \\
&\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \notin f^{-1}(V) \\
&\iff x \in f^{-1}(U) - f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute: (f) $f^{-1}(U - V) = f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

Solução:

(f) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U - V) &\iff f(x) \in U - V \\
&\iff f(x) \in U \wedge f(x) \notin V \\
&\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \notin f^{-1}(V) \\
&\iff x \in f^{-1}(U) - f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute: (f) $f^{-1}(U - V) = f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

Solução:

(f) SIM.

Seja um arbitrário x,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(U - V) &\iff f(x) \in U - V \\
&\iff f(x) \in U \wedge f(x) \notin V \\
&\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \notin f^{-1}(V) \\
&\iff x \in f^{-1}(U) - f^{-1}(V).
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:

(g) $U \subseteq V \iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$.

(g) SIM:

$$\begin{aligned} U \subseteq V &\iff (\forall y : y \in U \to y \in V) \\ &\iff (\forall x : f(x) \in U \to f(x) \in V) \\ &\iff (\forall x : x \in f^{-1}(U) \to x \in f^{-1}(V)) \\ &\iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(g) $U \subseteq V \iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$.

(g) SIM:

$$\begin{aligned} U \subseteq V &\iff (\forall y : y \in U \to y \in V) \\ &\iff (\forall x : f(x) \in U \to f(x) \in V) \\ &\iff (\forall x : x \in f^{-1}(U) \to x \in f^{-1}(V)) \\ &\iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(g) $U \subseteq V \iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$.

(g) SIM:

$$\begin{aligned} U \subseteq V &\iff (\forall y : y \in U \to y \in V) \\ &\iff (\forall x : f(x) \in U \to f(x) \in V) \\ &\iff (\forall x : x \in f^{-1}(U) \to x \in f^{-1}(V)) \\ &\iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:

(g) $U \subseteq V \iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$.

(g) SIM:

$$\begin{aligned} U \subseteq V &\iff (\forall y : y \in U \to y \in V) \\ &\iff (\forall x : f(x) \in U \to f(x) \in V) \\ &\iff (\forall x : x \in f^{-1}(U) \to x \in f^{-1}(V)) \\ &\iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \end{aligned}$$

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:

(g) $U \subseteq V \iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$.

(g) SIM:

$$\begin{aligned} U \subseteq V &\iff (\forall y : y \in U \to y \in V) \\ &\iff (\forall x : f(x) \in U \to f(x) \in V) \\ &\iff (\forall x : x \in f^{-1}(U) \to x \in f^{-1}(V)) \\ &\iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \end{aligned}$$

FUNÇÕES - Inversa - Exercício

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(h) $f^{-1}(f(A)) = A$.

Solução:

(h) NÃO: ContraEx:
$f(x)=7, \forall x \in \mathbb{Z}$.
$A=\{0\}$, $f(A)=\{7\}$,
$f^{-1}(\{7\})=\mathbb{Z}$.
(h) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Já visto.

FUNÇÕES - Inversa - Exercício

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(h) $f^{-1}(f(A)) = A$.

Solução:

(h) NÃO: ContraEx:
$f(x)=7, \forall x \in \mathbb{Z}$.
$A=\{0\}$, $f(A)=\{7\}$,
$f^{-1}(\{7\})=\mathbb{Z}$.
(h) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Já visto.

FUNÇÕES - Inversa - Exercício

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(h) $f^{-1}(f(A)) = A$.

Solução:

(h) NÃO: ContraEx:
$f(x)$=7, $\forall x \in \mathbb{Z}$.
A=$\{0\}$, $f(A)$=$\{7\}$,
$f^{-1}(\{7\})$=$\mathbb{Z}$.
(h) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Já visto.

FUNÇÕES - Inversa - Exercício

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(h) $f^{-1}(f(A)) = A$.

Solução:

(h) NÃO: ContraEx:
$f(x)$=7, $\forall x \in \mathbb{Z}$.
A={0}, $f(A)$={7},
$f^{-1}(\{7\})=\mathbb{Z}$.
(h) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Já visto.

FUNÇÕES - Inversa - Exercício

Exercício 2

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, demonstre ou refute:
(h) $f^{-1}(f(A)) = A$.

Solução:

(h) NÃO: ContraEx:
$f(x)=7, \forall x \in \mathbb{Z}$.
$A=\{0\}$, $f(A)=\{7\}$,
$f^{-1}(\{7\})=\mathbb{Z}$.
(h) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Já visto.

Exercício 4

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Prove que se f e g são injetoras então $g \circ f$ é injetora.

Solução:

$$
\begin{aligned}
g(f(x_1)) = g(f(x_2)) &\overset{g.inj}{\Longrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \\
&\overset{f.inj}{\Longrightarrow} x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

Exercício 4

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Prove que se f e g são injetoras então $g \circ f$ é injetora.

Solução:

$$
\begin{aligned}
g(f(x_1)) = g(f(x_2)) &\overset{g.inj}{\Longrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \\
&\overset{f.inj}{\Longrightarrow} x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

Exercício 4

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Prove que se f e g são injetoras então $g \circ f$ é injetora.

Solução:

$$\begin{aligned} g(f(x_1)) = g(f(x_2)) &\overset{g.inj}{\Longrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \\ &\overset{f.inj}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Exercício 5

Prove que uma função f tem função inversa f^{-1} se e só se f é injetora.

Seja $A = Dom(f) = Img(f^{-1})$ e $B = Im(f) = Dom(f^{-1})$.

$$
\begin{aligned}
f^{-1} \text{ é função } &\overset{def}{\iff} \forall b \in B : \exists! a, (b, a) \in f^{-1} \\
&\iff \forall b \in B : \exists! a, (a, b) \in f \\
&\iff \forall b \in B : \exists! a, f(a) = b \in f \\
&\iff f \text{ é injetora}
\end{aligned}
$$

Exercício 5

Prove que uma função f tem função inversa f^{-1} se e só se f é injetora.

Seja $A = Dom(f) = Img(f^{-1})$ e $B = Im(f) = Dom(f^{-1})$.

$$
\begin{aligned}
f^{-1} \text{ é função } &\overset{def}{\iff} \forall b \in B : \exists! a, (b, a) \in f^{-1} \\
&\iff \forall b \in B : \exists! a, (a, b) \in f \\
&\iff \forall b \in B : \exists! a, f(a) = b \in f \\
&\iff f \text{ é injetora}
\end{aligned}
$$

Exercício 5

Prove que uma função f tem função inversa f^{-1} se e só se f é injetora.

Seja $A = Dom(f) = Img(f^{-1})$ e $B = Im(f) = Dom(f^{-1})$.

$$\begin{aligned} f^{-1} \text{ é função } &\overset{def}{\iff} \forall b \in B : \exists! a, (b, a) \in f^{-1} \\ &\iff \forall b \in B : \exists! a, (a, b) \in f \\ &\iff \forall b \in B : \exists! a, f(a) = b \in f \\ &\iff f \text{ é injetora} \end{aligned}$$

Exercício 5

Prove que uma função f tem função inversa f^{-1} se e só se f é injetora.

Seja $A = Dom(f) = Img(f^{-1})$ e $B = Im(f) = Dom(f^{-1})$.

$$\begin{aligned} f^{-1} \text{ é função } &\overset{def}{\iff} \forall b \in B : \exists! a, (b, a) \in f^{-1} \\ &\iff \forall b \in B : \exists! a, (a, b) \in f \\ &\iff \forall b \in B : \exists! a, f(a) = b \in f \\ &\iff f \text{é injetora} \end{aligned}$$

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 6

Sejam $f : A \to C$ e $g : B \to D$ duas funções injetoras. Considere a função $h : A \times B \to C \times D$ tal que $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Prove que h é uma função injetora.

Solução:

$$
\begin{aligned}
h(a,b) = h(x,y) &\implies (f(a), g(b)) = (f(x), g(y)) \\
&\implies f(a) = f(x) \wedge g(b) = g(y) \\
&\overset{f,g\ inj.}{\implies} (a = x) \wedge (b = y) \\
&\implies (a,b) = (x,y)
\end{aligned}
$$

Como vale para quaisquer pares (a, b) e (x, y), então h é injetora.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 6

Sejam $f : A \to C$ e $g : B \to D$ duas funções injetoras. Considere a função $h : A \times B \to C \times D$ tal que $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Prove que h é uma função injetora.

Solução:

$$
\begin{aligned}
h(a,b) = h(x,y) &\Longrightarrow (f(a), g(b)) = (f(x), g(y)) \\
&\Longrightarrow f(a) = f(x) \land g(b) = g(y) \\
&\overset{f,g\ inj.}{\Longrightarrow} (a = x) \land (b = y) \\
&\Longrightarrow (a,b) = (x,y)
\end{aligned}
$$

Como vale para quaisquer pares (a, b) e (x, y), então h é injetora.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 7

Seja f uma função e sejam $A, B \subseteq Dom(f)$. Prove que
(a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) = y \\
&\Longrightarrow (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\exists x' \in B : f(x') = y) \\
&\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)
\end{aligned}
$$

Contraexemplo p/ =: $f(1) = f(2) = 3$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.
$f(A \cap B) = \emptyset$,
$f(A) \cap f(B) = \{3\}$.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 7

Seja f uma função e sejam $A, B \subseteq Dom(f)$. Prove que
(a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Solução:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) = y \\ &\Longrightarrow (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\exists x' \in B : f(x') = y) \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Contraexemplo p/ =: $f(1) = f(2) = 3$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.
$f(A \cap B) = \emptyset$,
$f(A) \cap f(B) = \{3\}$.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 7

Seja f uma função e sejam $A, B \subseteq Dom(f)$. Prove que
(b) se f é injetora, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Solução:

(b)

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) = y \\ &\Longleftrightarrow (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\exists x' \in B : f(x') = y) \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 7

Seja f uma função e sejam $A, B \subseteq Dom(f)$. Prove que
(b) se f é injetora, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Solução:

(b)

$$
\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) = y \\
&\Longleftrightarrow (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\exists x' \in B : f(x') = y) \\
&\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)
\end{aligned}
$$

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 7

Seja f uma função e sejam $A, B \subseteq Dom(f)$. Prove que
(c) se f é injetora, então $f(B) \subseteq f(A)$ se e só se $B \subseteq A$.

Solução:

(c)

$$
\begin{aligned}
B \subseteq A &\iff (\forall x : x \in B \to x \in A) \\
&\overset{f\ inj.}{\iff} (\forall x : f(x) \in f(B) \to f(x) \in f(A)) \\
&\iff f(B) \subseteq f(A).
\end{aligned}
$$

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 7

Seja f uma função e sejam $A, B \subseteq Dom(f)$. Prove que
(c) se f é injetora, então $f(B) \subseteq f(A)$ se e só se $B \subseteq A$.

Solução:

(c)

$$
\begin{aligned}
B \subseteq A &\iff (\forall x : x \in B \to x \in A) \\
&\overset{f\ \ inj.}{\iff} (\forall x : f(x) \in f(B) \to f(x) \in f(A)) \\
&\iff f(B) \subseteq f(A).
\end{aligned}
$$

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 8

Seja R uma relação de A para B. Escreva expressões lógicas formais (sem palavras, apenas variáveis e símbolos), com todos os quantificadores necessários, que expresse as afirmações: (a) "A relação R é transitiva". (b) "A relação R é uma função injetora".

Solução:

$$\text{(a) } \forall x, y, z: \; ((x,y) \in R \;\wedge\; (y,z) \in R) \;\longrightarrow\; (x,z) \in R$$

$$\text{(a) } \forall x, y, z: \; (xRy \;\wedge\; yRz) \;\longrightarrow\; xRz$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \forall x_1, x_2, y_1, y_2: \; & ((x_1 R y_1 \wedge x_1 R y_2) \longrightarrow y_1 = y_2) \wedge \\ & ((x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_1) \longrightarrow x_1 = x_2) \end{aligned}$$

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 8

Seja R uma relação de A para B. Escreva expressões lógicas formais (sem palavras, apenas variáveis e símbolos), com todos os quantificadores necessários, que expresse as afirmações: (a) "A relação R é transitiva". (b) "A relação R é uma função injetora".

Solução:

(a) $\forall x, y, z: \ ((x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in R) \ \longrightarrow \ (x, z) \in R$

(a) $\forall x, y, z: \ (xRy \ \wedge \ yRz) \ \longrightarrow \ xRz$

(b) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2: \ ((x_1 R y_1 \wedge x_1 R y_2) \ \longrightarrow y_1 = y_2) \wedge$
$((x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_1) \ \longrightarrow x_1 = x_2)$

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 8

Seja R uma relação de A para B. Escreva expressões lógicas formais (sem palavras, apenas variáveis e símbolos), com todos os quantificadores necessários, que expresse as afirmações: (a) "A relação R é transitiva". (b) "A relação R é uma função injetora".

Solução:

(a) $\forall x, y, z : \ ((x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in R) \ \longrightarrow \ (x, z) \in R$

(a) $\forall x, y, z : \ (xRy \ \wedge \ yRz) \ \longrightarrow \ xRz$

(b) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 : \ ((x_1 R y_1 \wedge x_1 R y_2) \ \longrightarrow y_1 = y_2) \wedge$

$((x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_1) \ \longrightarrow x_1 = x_2)$

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício

Exercício 8

Seja R uma relação de A para B. Escreva expressões lógicas formais (sem palavras, apenas variáveis e símbolos), com todos os quantificadores necessários, que expresse as afirmações: (a) "A relação R é transitiva". (b) "A relação R é uma função injetora".

Solução:

(a) $\forall x, y, z : \ ((x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in R) \ \longrightarrow \ (x, z) \in R$

(a) $\forall x, y, z : \ (xRy \ \wedge \ yRz) \ \longrightarrow \ xRz$

(b) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 : \ ((x_1 R y_1 \wedge x_1 R y_2) \ \longrightarrow y_1 = y_2) \wedge$
$((x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_1) \ \longrightarrow x_1 = x_2)$

Questões?