Aula 16 - Regra de L'Hôpital

Muller Moreira S Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

29 de setembro de 2023

Cálculo de limites utilizando derivadas

- Definir uma ferramenta utilizando derivadas para calcular limites com indeterminações dos tipos:
  - $\frac{0}{0}$
  - $\frac{\infty}{\infty}$
- A regra de L'Hôpital será um ferramenta extremamente simples para resolver limites que seriam complicados se fosse feitos por substituições.

Cálculo de limites utilizando derivadas

Caso 1: Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$, deriváveis em um intervalo aberto I (exceto possivelmente em um ponto a quando $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

- Neste caso, como temos $f(a) \to 0$ e $g(a) \to 0$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

- Dividindo o numerador e o denominador por $x - a$, temos:

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Cálculo de limites utilizando derivadas

Caso 1:

- Fazendo a substituição $\Delta x = x - a$, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}{\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}}$$

- Pela definição de derivadas:

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

- Ou seja :

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Cálculo de limites utilizando derivadas

Caso 2: Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$, deriváveis em um intervalo aberto I (exceto possivelmente em um ponto a quando $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\frac{\infty}{\infty}$$

- Neste caso, como temos $f(a) \to \infty$ e $g(a) =\to \infty$, temos que mudar a abordagem.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

- Invertendo os termos:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

- Sejam as funções auxiliares $p(x) = \frac{1}{f(x)}$ e $q(x) = \frac{1}{g(x)}$.

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{q(x)}}{\frac{1}{p(x)}} = \frac{1}{L}$$

$$\lim \frac{p(x)}{} \quad 1$$

Cálculo de limites utilizando derivadas

Caso 2:

- Como temos $q(a) \to 0$ e $p(a) \to 0$, usamos o resultado da demonstração anterior.

$$\lim_{x \to a} \frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{1}{L}$$

- Pela regra do quociente, calculamos as derivadas de p e q como:

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}}{\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}} = \frac{1}{L}$$

- Reescrevendo esses termos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \frac{[g(x)]^2}{g'(x)} = \frac{1}{L}$$

Cálculo de limites utilizando derivadas

Caso 2:

- Como temos $q(a) \to 0$ e $p(a) \to 0$, usamos o resultado da demonstração anterior.

$$\lim_{x \to a} \frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{1}{L}$$

- Pela regra do quociente, calculamos as derivadas de p e q como:

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}}{\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}} = \frac{1}{L}$$

- Reescrevendo esses termos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \frac{[g(x)]^2}{[f(x)]^2} = \frac{1}{L}$$

Caso 2:

- Usando a propriedade do limite do produto:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \lim_{x\to a} \frac{[g(x)]^2}{[f(x)]^2} = \frac{1}{L}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \lim_{x\to a} \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)^2 = \frac{1}{L}$$

- Usando a definição de L:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \frac{1}{L^2} = \frac{1}{L}$$

- Portanto:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Definição

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis em um intervalo aberto I (exceto possivelmente em a), exceto quando x se aproxima de a. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$, e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Propriedades da Regra de L'Hôpital

- Se $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ é uma forma indeterminada $0/0$ ou ∞/∞, então a regra de L'Hôpital pode ser aplicada.
- A regra de L'Hôpital também é válida para limites no infinito, ou seja, quando $a = \pm\infty$.
- A regra de L'Hôpital não pode ser usada quando a forma é uma forma indeterminada $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, ou 0^0.

Exercício 1

Calcule o Limite usando a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}$$

Exercício 2

Calcule o Limite usando a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 1}{x}$$

Exercício 3

Calcule o Limite usando a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{sen(4x)}$$

Exercício 4

Calcule o Limite usando a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Obs: Faça manipulações algébricas antes de aplicar a regra

Exercício 5

Calcule o Limite usando a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 - x - 3}$$

Exercício 6

Calcule o Limite usando a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} x^x$$