Espectro de un anillo

Levia MN

29 de diciembre de 2023

1. Topología

Definición 1.1: Espectro de un anillo.

Sea A un anillo denotamos

$$Spec(A) = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo}\}$$

Si $M \subset A$ entonces denotamos

$$V(M) = \{\mathfrak{p} \in A \mid M \subset \mathfrak{p}\}$$

Si $M = \{f\}$ entonces escribimos $V(f)$.

Observación 1.1

Si $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por $M \subset A$ entonces

$$V(M) = V(\mathfrak{a})$$

Demostración. Si $M \subset \mathfrak{p}$ como $\mathfrak{a}$ es el minimo ideal que contiene a M entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(M) \subset V(\mathfrak{a})$.
Por otro lado si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ como $M \subset \mathfrak{a}$ entonces $M \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(\mathfrak{a}) \subset V(M)$
$\therefore V(M) = V(\mathfrak{a})$ □

Lema 1.1

1. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ entonces $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$
2. $V(0) = Spec(A)$ y $V(1) = \varnothing$

3. Si $\{\mathfrak{a}_i \subset A; i \in I\}$ es una familia de ideales de A, entonces
$$V\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i\right) = V\left(\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$$
4. Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales de A, entonces
$$V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})$$

Demostración. 1. Si $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$

2. Para cualquier $\mathfrak{p}\in Spec(A)$ se cumple que $0\in\mathfrak{p}$
$$\therefore V(0) = Spec(A)$$
Para cualquier $\mathfrak{p}\in Spec(A)$ se cumple que $1\notin\mathfrak{p}$
$$\therefore V(1) = \varnothing$$

3. Por la observación se sigue la primer igualdad, para la segunda Dado $j\in I$
$$\mathfrak{a}_j \subset \bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i$$
así que por 1. $V(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i)\subset V(\mathfrak{a}_j)$
$$\therefore V(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i) \subset \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$$
Por otro lado si $\mathfrak{p}\in\bigcap_{i\in I}V(\mathfrak{a}_i)$ entonces para todo $i\in I$ ocurre que $\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{p}$ por lo que $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{p}$
$$\therefore \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) \subset V(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i)$$

4. Como $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ entonces por 1.
$$V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})\subset V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subset V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$
Si $\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ y $\mathfrak{p}\notin V(\mathfrak{a})$ entonces $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{p}$, es decir, existe $a\in\mathfrak{a}\setminus\mathfrak{p}$ pero para toda $b\in\mathfrak{b}$ ocurre que $ab\in\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subset\mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es in ideal primo $b\in\mathfrak{p}$
$$\therefore \mathfrak{b}\subset\mathfrak{p}$$
i.e. $\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{b})$
$$\therefore V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\subset V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})$$
Lo que prueba la igualdad entre los tres términos.

□

Observación 1.2

El lema anterior prueba que $\{V(\mathfrak{a}); \mathfrak{a} \subset A$ es in ideal$\}$ forman los cerrados de una topología sobre $Spec(A)$

Por otro lado vamos a definir el otro lado de la conección de Galois que nos gustaría crear.

Definición 1.2: Ideal asociado

Sea $Y \subset Spec(A)$ definimos

$$I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$$

Y definiremos $I(\varnothing) = A$

Probemos un lemma técnico

Lema 1.2

Sea $J \subset A$ un ideal entonces $rad(J) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$.

Demostración. Por un lado si $a \in rad(J)$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in J$ Asi que dado $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ tal que $J \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $a^n \in \mathfrak{p}$ y es un ideal primo se sigue que $a \in \mathfrak{p}$

$$\therefore rad(J) \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$$

Por otro lado sea $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$ y supongamos que $a \notin rad(J)$ entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $a^n \notin J$

$$\therefore \mathcal{F} = \{I \subset A \mid \text{ I es un ideal, } J \subset I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, a^n \notin I\} \neq \varnothing$$

pues $rad(J) \in \mathcal{F}$ y además esta familia esta ordenada por la contención así que por principio de maximalidad de Hausdorff existe $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$ maximal tal que $rad(J) \subset \mathfrak{q}$.
Veamos que $\mathfrak{q} \in Spec(A)$, en efecto, si $xy \in \mathfrak{q}$ y además se tuviera que $x, y \notin \mathfrak{q}$ entonces $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ y por la maximalidad de $\mathfrak{q}$ se tiene que $\mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle \notin \mathcal{F}$ por lo que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $a^n \mathfrak{q} + \langle x \rangle$ y $a^m \in \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ ya que $J \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ Por lo que $a^n = q_1 + r_1 x$ y $a^m = q_2 + r_2 y$ con $q_1, q_2 \in \mathfrak{q}$ y $r_1, r_2 \in A$

$$a^{n+m} = (q_1 + r_1 x)(q_2 + r_2 y) = q_1 q_2 + q_1 r_2 y + q_2 r_1 x + r_1 r_2 xy \in \mathfrak{q}$$

pues cada término esta en $\mathfrak{q}$ lo cual es una contradicción y por ende $\mathfrak{q}$ es un ideal primo, es decir, $\mathfrak{q} \in Spec(A)$. Por lo que $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}, \subset \mathfrak{q}$ pues $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ lo cual es una contradicción pues $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$. Esta contradicción vino de suponer que $a \notin rad(J)$ por lo que $a \in rad(J)$.

$$\therefore \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p} \subset rad(J)$$

Lo cual da la igual que buscabamos. □

Además tenemos los siguientes resultados

Lema 1.3

1. Si $Y \subset X$ entonces $I(X) \subset I(Y)$
2. $rad(I(Y)) = I(Y)$
3. $I(V(\mathfrak{a})) = rad(\mathfrak{a})$ y $V(I(Y)) = cl(Y)$ donde cl es la cerradura en Spec(A)

Demostración.

1. Si $p \in I(X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$ entonces, para todo $\mathfrak{p} \in X$, se tiene que $p \in \mathfrak{p}$, como $Y \subset X$ entonces en particular para todo $\mathfrak{p} \in Y$ ocurre que $p \in \mathfrak{p}$.
$$\therefore I(X) \subset I(Y)$$
2. Siempre ocurre que $I(Y) \subset rad(I(Y))$, y por otro lado si $a \in rad(I(Y))$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I(Y)$ por lo que $a^n \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathbf{p} \in Y$. Como cada uno de estos ideales es primo entonces $a \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in Y$.
$$\therefore rad(I(Y)) \subset I(Y)$$
Lo que prueba la igualdad
3. Para lo primero notemos que
$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = rad(\mathfrak{a})$$
Por el lemma previo.
Por otro lado observemos que $V(I(Y))$ es un cerrado de $Spec(A)$ Además dado $y \in Y$ entonces $I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} \subset y$ por lo que $y \in V(y) \subset (V(I(Y)))$
$$\therefore Y \subset V(I(Y))$$
Además si tenemos $V(J)$ un cerrado tal que $Y \subset V(J)$ entonces $J \subset y$ para cualquier $y \in Y$ por lo que $J \subset \bigcap_{y \in Y} y = I(Y)$ asi que $V(I(Y)) \subset V(J)$. Lo que lo hace el cerrado más pequeño en contener a Y, es decir, su cerradura.
$$\therefore V(I(Y)) = cl(Y)$$

□

Observación 1.3

Sean

$$\mathcal{A} = \{I \subset A;\ \text{I es un idel radical de A}\}$$
$$\mathcal{B} = \{Y \subset Spec(A);\ \text{Y es un cerrado de Spec(A)}\}$$

La prueba anterior nos dice que $V : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $I : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ son inversas una de otra y por ende biyecciones entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Observación 1.4

Si $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ entonces $I(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, por lo que

$$V(\mathfrak{p}) = V(I(\{\mathfrak{p}\})) = cl(\{\mathfrak{p}\})$$

Lema 1.4

Si $I, J \subset A$ son ideales de A, entonces $I \subset rad(J)$ si y solo si $rad(I) \subset rad(J)$

Demostración. $\Longrightarrow$ Supongamos que $I \subset rad(J)$ y sea $a \in rad(I)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I$ por lo que $a^n \in rad(J) = \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ asi que para todo $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ tal que $J \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $a^n \in \mathfrak{p}$ y como cada uno es un ideal primo $a \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore a \in \bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = rad(J)$$

Concluimos que $rad(I) \subset rad(J)$.
$\Longleftarrow$ Supongamos que $rad(I) \subset rad(J)$ entonces como $I \subset rad(I)$ se sigue lo que queriamos. $\square$

Corolario 1.1

Sea $g \in A$ y $I, J \subset A$ un ideales de A, entonces

$$V(I) \subset V(J) \iff$$
$$rad(J) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = rad(I)$$

En particular para $g \in A$

$$V(I) \subset V(g) \iff$$
$$\{g\} \subset rad(I) \iff$$
$$g \in rad(I).$$

Definición 1.3: Abiertos principales

Sea $f \in A$ definimos

$$D(f) = Spec(A) \setminus V(f)$$

y notamos que es un abierto, a los abiertos de este tipo se les llama abiertos principales.

Observación 1.5

Notemos los siguientes hechos:

1. $D(0) = \varnothing$
2. $D(1) = Spec(A)$
3. Dado $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ se cumple que $fg \notin \mathfrak{p}$ si y solo $f, g \notin \mathfrak{p}$ pues $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, por lo que $D(fg) = D(f) \cap D(g)$

Lema 1.5

Sean $\{f_i \mid i \in \Lambda\} \subset A$ y $g \in A$, entonces $D(g) \subset \bigcup_{i\in\Lambda} D(f_i)$ si y solo si $g \in rad\left(\sum_{i\in I} \langle f_i \rangle\right)$

Demostración.

$$D(g) \subset \bigcup_{i\in\Lambda} D(f_i) = \bigcup_{i\in\Lambda} Spec(A) \setminus V(f_i) = Spec(A) \setminus \left(\bigcap_{i\in\Lambda} V(f_i)\right)$$

Y como $\bigcap_{i\in\Lambda} V(f_i) = V(\sum_{i\in\Lambda} \langle f_i \rangle)$ entonces

$$Spec(A) \setminus \left(\bigcap_{i\in\Lambda} V(f_i)\right) = Spec(A) \setminus V\left(\sum_{i\in\Lambda} \langle f_i \rangle\right)$$

por lo que $D(g) \subset \bigcup_{i\in\Lambda} D(f_i)$ si y solo si

$$V\left(\sum_{i\in\Lambda} \langle f_i \rangle\right) \subset V(g)$$

y por el lema 1.1 esto ocurre si y solo si

$$g \in rad\left(\sum_{i\in\Lambda} \langle f_i \rangle\right)$$

□

Observación 1.6

En particular aplicando el lema 1.1 a $g = 1$ entonces:

$$D(1) = Spec(A) \subset \bigcup_{i\in\Lambda} D(f_i) \iff \tag{1}$$
$$1 \in rad(\sum_{i\in\Lambda}\langle f_i\rangle) \iff \tag{2}$$
$$1 \in \sum_{i\in\Lambda}\langle f_i\rangle \iff \tag{3}$$
$$\langle f_i \mid i \in \Lambda\rangle = A \tag{4}$$

en particular $1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{i_j}$ con $n \in \mathbb{N}$, $\quad \alpha_j \in A \quad y \quad i_j \in \Lambda$.
Por lo que $\langle f_{i_j} \mid j \in \{1, ..., n\}\rangle = A$ y por ende $Spec(A) \subset \bigcup_{j=1}^{n} D(f_{i_j})$ Por lo que toda cubierta tiene una subcubierta finita.

Hemos probado entonces que

Corolario 1.2

Spec(A) es compacto.

Proposición 1.1

Sea A un anillo, entonces $\mathcal{B} = \{D(f); f \in A\}$ es una base para la topología de Spec(A).

Demostración. Sea $U \subset Spec(A)$ un abierto, entonces $Spec(A) \setminus U$ es un conjunto cerrado, por lo que existe $I \subset A$ ideal de A tal que $Spec(A) \setminus U = V(I)$, además.

$$V(I) = V\left(\bigcup_{f\in I}\{f\}\right) = \bigcap_{f\in I} V(f)$$

De donde se sigue que:

$$U = Spec(A)\setminus V(I) = Spec(A)\setminus\left(\bigcap_{f\in I} V(f)\right) = \bigcup_{f\in I}(Spec(A)\setminus V(f)) = \bigcup_{f\in I} D(f)$$

□

Proposición 1.2

Sean A un anillo y $f \in A$, entonces $D(f) \subset Spec(A)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{D(g_i) \mid i \in I\}$ una cubierta de $D(f)$ conformada por abiertos básicos. Como son una cubierta $D(f) \subset \bigcup_{i\in I} D(g_i)$ y por el lema 1.1 se sigue que $f \in rad\left(\sum_{i\in I}\langle g_i\rangle\right)$. Y notemos que

$$\sum_{i\in I}\langle g_i\rangle = \langle\{g_i \mid i \in I\}\rangle$$

Por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in \langle\{g_i \mid i \in I\}\rangle$ asi que existe $m \in \mathbb{N}$ para la cual se cumple que $f^n = \sum_{j=1}^m a_j g_{i_j}$ con $a_j \in A$ e $i_j \in I$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, en particular, $f^n \in \langle\{g_{i_j} \mid j \in \{1, \ldots, m\}\}\rangle$ por lo que, $f \in rad\left(\sum_{j=1}^m \langle g_{i_j}\rangle\right)$ y de nuevo por el lema 1.1 se sigue que, $D(f) \subset \bigcup_{j=1}^m D(g_{i_j})$ así que podemos conluir que $\{g_{i_j} \mid j \in \{1, \ldots, m\}\} \subset \mathcal{U}$ es una subcubierta finita. $\square$

Proposición 1.3

Sea A un anillo. Un subespacio $Y \subset Spec(A)$ es irreducible si y solo si $\mathfrak{p} = I(Y)$ es un ideal primo, es decir, $I(Y) \in Spec(A)$. Más aún en este caso $\{\mathfrak{p}\}$ es denso en $cl(Y)$.

Demostración. $\Longrightarrow$ Supongamos que Y es irreducible y sean $f, g \in A$ tales que $fg \in \mathfrak{p}$, entonces

$$Y \subset cl(Y) = V(I(Y)) = V(\mathfrak{p}) \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

. y como Y es irreducible entonces $Y \subset V(f)$ o $Y \subset V(g)$, por lo que $f \in I(V(f)) \subset I(Y) = \mathfrak{p}$ o $g \in I(V(g)) \subset I(Y) = \mathfrak{p}$, es decir, $f \in \mathfrak{p}$ o $g \in \mathfrak{p}$. Lo que prueba que $\mathfrak{p}$ es in ideal primo.
$\Longleftarrow$ Supongamos que $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ entonces

$$cl(Y) = V(I(Y)) = V(\mathfrak{p}) = V(I(\{\mathfrak{p}\})) = cl(\{\mathfrak{p}\})$$

y como $\{\mathfrak{p}\}$ es irreducible, $cl(Y)$ es irreducible y por ende Y es irreducible y eso también prueba que $\{\mathfrak{p}\}$ es denso en $cl(Y)$. $\square$

Corolario 1.3

Sea $\mathcal{A} = \{Y \subset Spec(A); \text{Y es cerrado e irreducible}\}$, entonces

$$f : Spec(A) \to \mathcal{A}$$

dada por $f(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p}) = cl(\mathfrak{p})$ es una biyección.

Demostración. Como $\{\mathfrak{p}\}$ es irreducible entonces $f(\mathfrak{p}) = cl(\{\mathfrak{p}\})$ es cerrado e irreducible. Y si $Y \subset Spec(A)$ es un cerrado irreducible entonces $I(Y) \in Spec(A)$ y además $f(I(Y)) = cl(Y) = Y$ por la Proposición anterior por lo que

f es sobre, y además si $cl(\{\mathfrak{p}\}) = cl(\{\mathfrak{q}\})$ entonces $V(\{\mathfrak{p}\}) = V(\{\mathfrak{q}\})$ por lo que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Asi que f es inyectiva y por ende biyectiva. $\square$

Notemos además que la correspondencia anterior invierte el orden de la contención de cada lado. Pensando a los elementos de $Spec(A)$ con el orden dado al ser ideales de A. Así que si tenemos un ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ minimal $V(\mathfrak{p}) \subset Spec(A)$ es un cerrado e irreducible maximal por lo que es una componente irreducible de $Spec(A)$. Más aún si hay mas de un ideal primo minimal entonces $Spec(A)$ tendrá mas de una componente irreducible por lo que $Spec(A)$ es irreducible si y solo si tiene un único ideal primo minimal, de hecho, eso lo hace mínimo.

Ejemplo 1.1

Un ejemplo concreto de esto podría ser $Spec(\mathbb{Z})$ Aquí nuestro único ideal minimal (de hecho es mínimo) es $\{0\}$ por lo que $V(0) = Spec(\mathbb{Z})$ es un cerrado e irreducible. Más aún sus cerrados irreducibles serán de la forma $V(\langle p \rangle)$ con $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y observemos más

$$
\begin{aligned}
&V(\langle p \rangle) \\
&= \{\langle q \rangle ; \langle p \rangle \subset \langle q \rangle \text{ con q primo}\} \\
&= \{\langle q \rangle ; q \text{ es primo y divide a } p\} \\
&= \{\langle p \rangle\}
\end{aligned}
$$

Por lo que todos los demás cerrados irreducibles son unitarios.