

Espectro de un anillo

Levia MN

30 de diciembre de 2023

1. Topología

Definición 1.1: Espectro de un anillo.

Sea A un anillo denotamos

$$\operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo}\}$$

Si $M \subset A$ entonces denotamos

$$V(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid M \subset \mathfrak{p}\}$$

Si $M = \{f\}$ entonces escribimos $V(f)$.

Observación 1.1

Si \mathfrak{a} es el ideal generado por $M \subset A$ entonces

$$V(M) = V(\mathfrak{a})$$

Demostración. \subset) Si $M \subset \mathfrak{p}$ como \mathfrak{a} es el mínimo ideal que contiene a M entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(M) \subset V(\mathfrak{a})$.

\supset) Por otro lado si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ como $M \subset \mathfrak{a}$ entonces $M \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(\mathfrak{a}) \subset V(M)$.

$$\therefore V(M) = V(\mathfrak{a}) \quad \square$$

Lema 1.1

1. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ entonces $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$
2. $V(0) = \operatorname{Spec}(A)$ y $V(1) = \emptyset$

3. Si $\{\mathfrak{a}_i \subset A; i \in I\}$ es una familia de ideales de A , entonces

$$V\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

4. Si \mathfrak{a} y \mathfrak{b} son ideales de A , entonces

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Demostración. 1. Si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$

2. Para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ se cumple que $0 \in \mathfrak{p}$

$$\therefore V(0) = \text{Spec}(A)$$

Para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ se cumple que $1 \notin \mathfrak{p}$

$$\therefore V(1) = \emptyset$$

3. Por la observación se sigue la primer igualdad, para la segunda Dado $j \in I$

$$\mathfrak{a}_j \subset \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$$

así que por 1. $V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \subset V(\mathfrak{a}_j)$

$$\therefore V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \subset \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

Por otro lado si $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$ entonces para todo $i \in I$ ocurre que $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ por lo que $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$

$$\therefore \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) \subset V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$$

4. Como $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ entonces por 1.

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

Si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ y $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ entonces $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, es decir, existe $a \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ pero para toda $b \in \mathfrak{b}$ ocurre que $ab \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ y como \mathfrak{p} es un ideal primo $b \in \mathfrak{p}$

$$\therefore \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$$

i.e. $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$

$$\therefore V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Lo que prueba la igualdad entre los tres términos.

□

Observación 1.2

El lema anterior prueba que $\{V(\mathfrak{a}); \mathfrak{a} \subset A \text{ es un ideal}\}$ forman los cerrados de una topología sobre $\text{Spec}(A)$

Por otro lado vamos a definir el otro lado de la conexión de Galois que nos gustaría crear.

Definición 1.2: Ideal asociado

Sea $Y \subset \text{Spec}(A)$ definimos

$$I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$$

Y definiremos $I(\emptyset) = A$

Probemos un lemma técnico

Lema 1.2

Sea $J \subset A$ un ideal entonces $\text{rad}(J) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$.

Demostración. Por un lado si $a \in \text{rad}(J)$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in J$. Así que dado $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tal que $J \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $a^n \in \mathfrak{p}$ y como \mathfrak{p} es un ideal primo se sigue que $a \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore \text{rad}(J) \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$$

Por otro lado sea $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$ y supongamos que $a \notin \text{rad}(J)$ entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $a^n \notin J$.

$$\therefore \mathcal{F} = \{I \subset A \mid I \text{ es un ideal, } J \subset I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, a^n \notin I\} \neq \emptyset$$

pues $\text{rad}(J) \in \mathcal{F}$ y además esta familia está ordenada por la contención así que por principio de maximalidad de Hausdorff existe $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$ maximal tal que $\text{rad}(J) \subset \mathfrak{q}$.

Veamos que $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$, en efecto, si $xy \in \mathfrak{q}$ y además se tuviera que $x, y \notin \mathfrak{q}$ entonces $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ y por la maximalidad de \mathfrak{q} se tiene que $\mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle \notin \mathcal{F}$ por lo que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $a^n \mathfrak{q} + \langle x \rangle$ y $a^m \in \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ ya que $J \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$. Por lo que $a^n = q_1 + r_1 x$ y $a^m = q_2 + r_2 y$ con $q_1, q_2 \in \mathfrak{q}$ y $r_1, r_2 \in A$.

$$a^{n+m} = (q_1 + r_1 x)(q_2 + r_2 y) = q_1 q_2 + q_1 r_2 y + q_2 r_1 x + r_1 r_2 xy \in \mathfrak{q}$$

pues cada término está en \mathfrak{q} lo cual es una contradicción y por ende \mathfrak{q} es un ideal primo, es decir, $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$. Por lo que $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ pues $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ lo

cual es una contradicción pues $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$. Esta contradicción vino de suponer que $a \notin \text{rad}(J)$ por lo que $a \in \text{rad}(J)$.

$$\therefore \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p} \subset \text{rad}(J)$$

Lo cual da la igual que buscábamos. \square

Además tenemos los siguientes resultados

Lema 1.3

1. Si $Y \subset X$ entonces $I(X) \subset I(Y)$
2. $\text{rad}(I(Y)) = I(Y)$
3. $I(V(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a})$ y $V(I(Y)) = \text{cl}(Y)$ donde cl es la cerradura en $\text{Spec}(A)$

Demostración. 1. Si $p \in I(X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$ entonces, para todo $\mathfrak{p} \in X$, se tiene que $p \in \mathfrak{p}$, como $Y \subset X$ entonces en particular para todo $\mathfrak{p} \in Y$ ocurre que $p \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore I(X) \subset I(Y)$$

2. Siempre ocurre que $I(Y) \subset \text{rad}(I(Y))$, y por otro lado si $a \in \text{rad}(I(Y))$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I(Y)$ por lo que $a^n \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in Y$. Como cada uno de estos ideales es primo entonces $a \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in Y$.

$$\therefore \text{rad}(I(Y)) \subset I(Y)$$

Lo que prueba la igualdad

3. Para lo primero notemos que

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \text{rad}(\mathfrak{a})$$

Por el lemma previo.

Por otro lado observemos que $V(I(Y))$ es un cerrado de $\text{Spec}(A)$ Además dado $y \in Y$ entonces $I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} \subset y$ por lo que $y \in V(y) \subset (V(I(Y)))$

$$\therefore Y \subset V(I(Y))$$

Además si tenemos $V(J)$ un cerrado tal que $Y \subset V(J)$ entonces $J \subset y$ para cualquier $y \in Y$ por lo que $J \subset \bigcap_{y \in Y} y = I(Y)$ así que $V(I(Y)) \subset V(J)$. Lo que lo hace el cerrado más pequeño en contener a Y , es decir, su cerradura.

$$\therefore V(I(Y)) = \text{cl}(Y)$$

\square

Observación 1.3

Sean

$$\mathcal{A} = \{I \subset A; I \text{ es un ideal radical de } A\}$$

$$\mathcal{B} = \{Y \subset \text{Spec}(A); Y \text{ es un cerrado de } \text{Spec}(A)\}$$

La prueba anterior nos dice que $V : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $I : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ son inversas una de otra y por ende biyecciones entre \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Observación 1.4

Si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ entonces $I(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, por lo que

$$V(\mathfrak{p}) = V(I(\{\mathfrak{p}\})) = cl(\{\mathfrak{p}\})$$

Lema 1.4

Si $I, J \subset A$ son ideales de A , entonces $I \subset rad(J)$ si y solo si $rad(I) \subset rad(J)$

Demostración. \implies) Supongamos que $I \subset rad(J)$ y sea $a \in rad(I)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I$ por lo que $a^n \in rad(J) = \bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ así que para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tal que $J \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $a^n \in \mathfrak{p}$ y como cada uno es un ideal primo $a \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore a \in \bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = rad(J)$$

Concluimos que $rad(I) \subset rad(J)$.

\impliedby) Supongamos que $rad(I) \subset rad(J)$ entonces como $I \subset rad(I)$ se sigue lo que queríamos. □

Corolario 1.1

Sea $g \in A$ y $I, J \subset A$ un ideales de A , entonces

$$V(I) \subset V(J) \iff$$

$$rad(J) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = rad(I)$$

En particular para $g \in A$

$$\begin{aligned} V(I) \subset V(g) &\iff \\ \{g\} \subset \text{rad}(I) &\iff \\ g \in \text{rad}(I). \end{aligned}$$

Definición 1.3: Abiertos principales

Sea $f \in A$ definimos

$$D(f) = \text{Spec}(A) \setminus V(f)$$

y notamos que es un abierto, a los abiertos de este tipo se les llama abiertos principales.

Observación 1.5

Notemos los siguientes hechos:

1. $D(0) = \emptyset$
2. $D(1) = \text{Spec}(A)$
3. Dado $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ se cumple que $fg \notin \mathfrak{p}$ si y solo $f, g \notin \mathfrak{p}$ pues \mathfrak{p} es un ideal primo, por lo que $D(fg) = D(f) \cap D(g)$

Lema 1.5

Sean $\{f_i \mid i \in \Lambda\} \subset A$ y $g \in A$, entonces $D(g) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} D(f_i)$ si y solo si $g \in \text{rad}(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle)$

Demostración.

$$D(g) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} D(f_i) = \bigcup_{i \in \Lambda} \text{Spec}(A) \setminus V(f_i) = \text{Spec}(A) \setminus \left(\bigcap_{i \in \Lambda} V(f_i) \right)$$

Y como $\bigcap_{i \in \Lambda} V(f_i) = V(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle)$ entonces

$$\text{Spec}(A) \setminus \left(\bigcap_{i \in \Lambda} V(f_i) \right) = \text{Spec}(A) \setminus V\left(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle\right)$$

por lo que $D(g) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} D(f_i)$ si y solo si

$$V\left(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle\right) \subset V(g)$$

y por el lema 1.1 esto ocurre si y solo si

$$g \in \text{rad} \left(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle \right)$$

□

Observación 1.6

En particular aplicando el lema 1.1 a $g = 1$ entonces:

$$\begin{aligned} D(1) = \text{Spec}(A) &\subset \bigcup_{i \in \Lambda} D(f_i) \iff \\ 1 &\in \text{rad} \left(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle \right) \iff \\ 1 &\in \sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle \iff \\ \langle f_i \mid i \in \Lambda \rangle &= A \end{aligned}$$

en particular $1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_{i_j}$ con $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in A$ y $i_j \in \Lambda$.

Por lo que $\langle f_{i_j} \mid j \in \{1, \dots, n\} \rangle = A$ y por ende $\text{Spec}(A) \subset \bigcup_{j=1}^n D(f_{i_j})$. Por lo que toda cubierta tiene una subcubierta finita.

Hemos probado entonces que

Corolario 1.2

$\text{Spec}(A)$ es compacto.

Proposición 1.1

Sea A un anillo, entonces $\mathcal{B} = \{D(f); f \in A\}$ es una base para la topología de $\text{Spec}(A)$.

Demostración. Sea $U \subset \text{Spec}(A)$ un abierto, entonces $\text{Spec}(A) \setminus U$ es un conjunto cerrado, por lo que existe $I \subset A$ ideal de A tal que $\text{Spec}(A) \setminus U = V(I)$, además.

$$V(I) = V \left(\bigcup_{f \in I} \{f\} \right) = \bigcap_{f \in I} V(f)$$

De donde se sigue que:

$$U = \text{Spec}(A) \setminus V(I) = \text{Spec}(A) \setminus \left(\bigcap_{f \in I} V(f) \right) = \bigcup_{f \in I} (\text{Spec}(A) \setminus V(f)) = \bigcup_{f \in I} D(f)$$

□

Proposición 1.2

Sean A un anillo y $f \in A$, entonces $D(f) \subset \text{Spec}(A)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{D(g_i) \mid i \in I\}$ una cubierta de $D(f)$ conformada por abiertos básicos. Como son una cubierta $D(f) \subset \bigcup_{i \in I} D(g_i)$ y por el lema 1.1 se sigue que $f \in \text{rad}(\sum_{i \in I} \langle g_i \rangle)$. Y notemos que

$$\sum_{i \in I} \langle g_i \rangle = \langle \{g_i \mid i \in I\} \rangle$$

Por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in \langle \{g_i \mid i \in I\} \rangle$ así que existe $m \in \mathbb{N}$ para la cual se cumple que $f^n = \sum_{j=1}^m a_j g_{i_j}$ con $a_j \in A$ e $i_j \in I$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, en particular, $f^n \in \langle \{g_{i_j} \mid j \in \{1, \dots, m\}\} \rangle$ por lo que, $f \in \text{rad}(\sum_{j=1}^m \langle g_{i_j} \rangle)$ y de nuevo por el lema 1.1 se sigue que, $D(f) \subset \bigcup_{j=1}^m D(g_{i_j})$ así que podemos concluir que $\{g_{i_j} \mid j \in \{1, \dots, m\}\} \subset \mathcal{U}$ es una subcubierta finita. □

Proposición 1.3

Sea A un anillo. Un subespacio $Y \subset \text{Spec}(A)$ es irreducible si y solo si $\mathfrak{p} = I(Y)$ es un ideal primo, es decir, $I(Y) \in \text{Spec}(A)$. Más aún en este caso $\{\mathfrak{p}\}$ es denso en $cl(Y)$.

Demostración. \implies Supongamos que Y es irreducible y sean $f, g \in A$ tales que $fg \in \mathfrak{p}$, entonces

$$Y \subset cl(Y) = V(I(Y)) = V(\mathfrak{p}) \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

. y como Y es irreducible entonces $Y \subset V(f)$ o $Y \subset V(g)$, por lo que $f \in I(V(f)) \subset I(Y) = \mathfrak{p}$ o $g \in I(V(g)) \subset I(Y) = \mathfrak{p}$, es decir, $f \in \mathfrak{p}$ o $g \in \mathfrak{p}$. Lo que prueba que \mathfrak{p} es un ideal primo.

\Leftarrow Supongamos que $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ entonces

$$cl(Y) = V(I(Y)) = V(\mathfrak{p}) = V(I(\{\mathfrak{p}\})) = cl(\{\mathfrak{p}\})$$

y como $\{\mathfrak{p}\}$ es irreducible, $cl(Y)$ es irreducible y por ende Y es irreducible y eso también prueba que $\{\mathfrak{p}\}$ es denso en $cl(Y)$. □

Corolario 1.3

Sea $\mathcal{A} = \{Y \subset \text{Spec}(A); Y \text{ es cerrado e irreducible}\}$, entonces

$$f : \text{Spec}(A) \rightarrow \mathcal{A}$$

dada por $f(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p}) = cl(\mathfrak{p})$ es una biyección.

Demostración. Como $\{\mathfrak{p}\}$ es irreducible entonces $f(\mathfrak{p}) = cl(\{\mathfrak{p}\})$ es cerrado e irreducible. Y si $Y \subset Spec(A)$ es un cerrado irreducible entonces $I(Y) \in Spec(A)$ y además $f(I(Y)) = cl(Y) = Y$ por la Proposición anterior por lo que f es sobre, y además si $cl(\{\mathfrak{p}\}) = cl(\{\mathfrak{q}\})$ entonces $V(\{\mathfrak{p}\}) = V(\{\mathfrak{q}\})$ por lo que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Así que f es inyectiva y por ende biyectiva. \square

Notemos además que la correspondencia anterior invierte el orden de la contención de cada lado. Pensando a los elementos de $Spec(A)$ con el orden dado al ser ideales de A . Así que si tenemos un ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ minimal $V(\mathfrak{p}) \subset Spec(A)$ es un cerrado e irreducible maximal por lo que es una componente irreducible de $Spec(A)$. Más aún si hay mas de un ideal primo minimal entonces $Spec(A)$ tendrá mas de una componente irreducible por lo que $Spec(A)$ es irreducible si y solo si tiene un único ideal primo minimal, de hecho, eso lo hace mínimo.

Ejemplo 1.1

Un ejemplo concreto de esto podría ser $Spec(\mathbb{Z})$ Aquí nuestro único ideal minimal (de hecho es mínimo) es $\{0\}$ por lo que $V(0) = Spec(\mathbb{Z})$ es un cerrado e irreducible. Más aún sus cerrados irreducibles serán de la forma $V(\langle p \rangle)$ con $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y observemos más

$$\begin{aligned} V(\langle p \rangle) &= \{\langle q \rangle; \langle p \rangle \subset \langle q \rangle \text{ con } q \text{ primo}\} \\ &= \{\langle q \rangle; q \text{ es primo y divide a } p\} \\ &= \{\langle p \rangle\} \end{aligned}$$

Por lo que todos los demás cerrados irreducibles son unitarios.

Proposición 1.4

Sea $f \in A$, entonces $D(f) = \emptyset$ si y solo si f es nilpotente

Demostración.

$$\begin{aligned} D(f) = \emptyset &\iff \\ D(f) \subset \emptyset = D(0) &\iff \\ f \in rad(\{0\}) &\iff \\ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n = 0 &\iff \\ f \text{ es nilpotente.} & \end{aligned}$$

\square

Definición 1.4: Puntos

Sean X un espacio topológico y $x, y \in X$ definimos los siguientes conceptos:

1. Decimos que x es un punto cerrado si $\{x\}$ es un conjunto cerrado.
2. Decimos que x es un punto genérico si $cl(\{x\}) = X$.
3. Decimos que x es una generalización de y (o que y es una especialización de x) si $y \in cl(\{x\})$.
4. Decimos que x es un punto maximal si $cl(\{x\})$ es una componente irreducible de X .

Ejemplo 1.2

Si en la definición 1.4 tenemos que $X = Spec(A)$ para algún anillo A entonces las definiciones tienen significados algebraicos.

1. x es cerrado si es un ideal maximal de A .
2. x es un punto genérico si es (el único) ideal primo mínimo de A . y notemos que para que eso ocurra entonces $x = rad(\{0\})$. Así que podemos concluir que la existencia de un punto genérico en $Spec(A)$ depende de que $rad(\{0\}) \in Spec(A)$.
3. x es una generalización de y si $x \subset y$.
4. x es un punto maximal si x es un ideal primo minimal.

Definición 1.5: Radicales

Sea A un anillo definimos el nilradical de A

$$Nil(A) = rad(\{0\})$$

Y el radical de Jacobson de A .

$$Jac(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}} \mathfrak{m}$$

donde $\mathcal{M} = \{\mathfrak{m} \subset A \mid \mathfrak{m} \text{ es un ideal maximal de } A\}$.

Proposición 1.5

Sea A un anillo entonces $\text{Nil}(A) = \text{Jac}(A)$ si y solo si para todo $U \subset \text{Spec}(A)$ abierto no vacío existe $x \in U$ punto cerrado de $\text{Spec}(A)$.

Demostración. \implies) Supongamos que $\text{Nil}(A) = \text{Jac}(A)$ y sea $U \subset \text{Spec}(A)$ un abierto no vacío y supongamos que no tiene ningún punto cerrado, es decir $\forall \mathfrak{m} \in \mathcal{M}, \mathfrak{m} \in \text{Spec}(A) \setminus U$.

Primero, como U es abierto entonces existe $I \subset A$ un ideal de A tal que $U = \text{Spec}(A) \setminus V(I)$. Entonces nuestra hipótesis se traduce a que $\forall \mathfrak{m} \in \mathcal{M}, \mathfrak{m} \in V(I)$, es decir, $I \subset \mathfrak{m}$, por ende $I \subset \text{Jac}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}} \mathfrak{m}$ y como $\text{Nil}(A) = \text{Jac}(A)$, ocurre que $I \subset \text{Nil}(A)$. Sin embargo, notemos que $\text{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{q}$ por el lema 1.1 así que para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, $\text{Nil}(A) \subset \mathfrak{p}$ por lo que $I \subset \mathfrak{p}$ y entonces $V(I) = \text{Spec}(A)$ pero entonces $U = \emptyset$! lo cual es una contradicción. Por ende existe $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ tal que $\mathfrak{m} \in U$.

\impliedby) Por contapuesta supongamos que $\text{Nil}(A) \neq \text{Jac}(A)$ y notemos que como $\mathcal{M} \subset \text{Spec}(A)$ entonces $\text{Nil}(A) \subset \text{Jac}(A)$ y veamos ahora que:

$$V(\text{Jac}(A)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \text{Jac}(A) \subset \mathfrak{p}\} \neq \text{Spec}(A)$$

pues si fuera $\text{Spec}(A)$ entonces para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ $\text{Jac}(A) \subset \mathfrak{p}$ y por ende $\text{Jac}(A) \subset \text{Nil}(A)$! Así que $U = \text{Spec}(A) \setminus V(\text{Jac}(A)) \neq \emptyset$ sin embargo dado cualquier $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ se tiene que $\text{Jac}(A) \subset \mathfrak{m}$ por lo que $\mathfrak{m} \in V(\text{Jac}(A))$, es decir

$$\forall \mathfrak{m} \in \mathcal{M}, \mathfrak{m} \in \text{Spec}(A) \setminus U$$

Por lo tanto U no contiene ningún punto maximal. □

Observación 1.7

Sean A, B un anillos y $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos, si $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$ entonces $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec}(A)$.

Demostración. Es claro que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ es un ideal. Sean $f, g \in A$ tales que $fg \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ entonces $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g) \in \mathfrak{q}$ y como \mathfrak{q} es primo entonces $\varphi(f) \in \mathfrak{q}$ o $\varphi(g) \in \mathfrak{q}$, lo que es equivalente a decir $f \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ o $g \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Así que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ es un ideal primo de A . □

La observación 1.7 nos dice que todo morfismo de anillo induce un morfismo en los Spec de los anillos. Definamosla y veamos sus propiedades.

Definición 1.6

Dados A, B anillos y $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos entre ellos definimos la función $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ dada por $\text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$

Probemos antes un lema técnico

Lema 1.6

Sean A, B anillos, $\mathfrak{b} \subset B$ un ideal de B y $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos entre ellos, entonces $\text{rad}(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = \varphi^{-1}(\text{rad}(\mathfrak{b}))$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 b \in \text{rad}(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) &\iff \\
 \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b^n &\in \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \iff \\
 \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \varphi(b^n) &\in \mathfrak{b} \iff \\
 \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \varphi(b)^n &\in \mathfrak{b} \iff \\
 \varphi(b) &\in \text{rad}(\mathfrak{b}) \iff \\
 b &\in \varphi^{-1}(\text{rad}(\mathfrak{b})).
 \end{aligned}$$

□

Proposición 1.6

Dados A, B anillos, $M \subset A$, $\mathfrak{b} \subset B$ un ideal y $\varphi : A \rightarrow B$ morfismo de anillos, la función $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ cumple que:

1. $\text{Spec}(\varphi)^{-1}(V(M)) = V(\varphi(M))$.
2. $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = \text{cl}(\text{Spec}(\varphi)(V(\mathfrak{b})))$.

Demostración. 1. Sea $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$

⊂) Si $\mathfrak{q} \in V(\varphi(M))$ entonces $\varphi(M) \subset \mathfrak{q}$ por lo que

$$M \subset \varphi^{-1}(\varphi(M)) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

asi que $\text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) \in V(M)$

$$\therefore \mathfrak{q} \in \text{Spec}(\varphi)^{-1}(V(M))$$

.

⊃) Si $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(\varphi)^{-1}(V(M))$ entonces $\text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) \in V(M)$ y por ello, $M \subset \text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ y entonces se sigue que

$$\varphi(M) \subset \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) \subset \mathfrak{q}$$

asi que $\mathfrak{q} \in V(\varphi(M))$.

2. Notemos que

$$\begin{aligned} I(\text{Spec}(\varphi)(V(\mathfrak{b}))) &= I(\varphi^{-1}(V(\mathfrak{b}))) = \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ &= \varphi^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{q}\right) = \varphi^{-1}(\text{rad}(\mathfrak{b})) = \text{rad}(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) \end{aligned}$$

Esto gracias al lema 1.6, así que

$$\begin{aligned} \text{cl}(\text{Spec}(\varphi)(V(\mathfrak{b}))) &= V(I(\text{Spec}(\varphi)(V(\mathfrak{b})))) \\ &= V(\text{rad}(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) \end{aligned}$$

□

Observación 1.8

Observemos que la primer parte de la proposición 1.6 dice que $\text{Spec}(\varphi)$ es una función continua.

Notemos que en particular para $f \in A$

$$\begin{aligned} \text{Spec}(\varphi)^{-1}(D(f)) &= \text{Spec}(\varphi)^{-1}(\text{Spec}(A) \setminus V(f)) \\ &= \text{Spec}(B) \setminus \text{Spec}(\varphi)^{-1}(V(f)) = \text{Spec}(B) \setminus V(\varphi(f)) = D(\varphi(f)) \end{aligned}$$

Además si tenemos dos morfismos de anillos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ ocurre que $\text{Spec}(g \circ f) = \text{Spec}(f) \circ \text{Spec}(g)$, por lo que $\text{Spec}(-)$ define un funtor contravariante de la categoría de anillos a la de espacios topológicos.

Proposición 1.7

Sean A, B anillos y $\varphi : A \rightarrow B$ morfismo de anillos entonces $\text{Spec}(\varphi)$ es un morfismo dominante si y solo si todos los elementos de $\text{Ker}(\varphi)$ son nilpotentes.

Demostración. Por el lema 1.6 se tiene que

$$\begin{aligned} V(\text{Ker}(\varphi)) &= V(\varphi(\{0\})) = \text{cl}(\text{Spec}(\varphi)(V(0))) \\ &= \text{cl}(\text{Spec}(\varphi)(\text{Spec}(A))) = \text{cl}(\text{Im}(\text{Spec}(\varphi))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Spec}(\varphi) \text{ es dominante} &\iff \\ \text{cl}(\text{Im}(\text{Spec}(\varphi))) &= \text{Spec}(B) \iff \\ V(\text{Ker}(\varphi)) &= \text{Spec}(B) \iff \\ \forall f \in \text{Ker}(\varphi), \quad V(f) &= \text{Spec}(B) \iff \\ \forall f \in \text{Ker}(\varphi), \quad D(f) &= \emptyset \iff \\ \forall f \in \text{Ker}(\varphi), \quad f &\text{ es nilpotente.} \end{aligned}$$

Esto último gracias a la proposición 1.4. \square

Recordemos un lema de localizaciones

Lema 1.7

Sean A un anillo, $S \subset A$ un conjunto multiplicativo y $I \subset S^{-1}A$ es un ideal, entonces $I = S^{-1}i^{-1}(I)$ donde $i : A \rightarrow S^{-1}A$ es el morfismo canónico.

Demostración. \subset) Sea $a/s \in I$ entonces, como I es un ideal, $i(a) = a/1 = (s/1)(a/s) \in I$ así que $a \in i^{-1}(I)$ por lo que $a/s \in S^{-1}i^{-1}(I)$.

\supset) Si $a/s \in S^{-1}i^{-1}(I)$ se tiene que $a \in i^{-1}I$ y entonces $i(a) = a/1 \in I$ y como I es un ideal $a/s = (1/s)(a/1) \in I$ \square

Proposición 1.8

Sea A un anillo

1. Sea $\varphi : A \rightarrow B$ un epimorfismo de anillos entonces $\text{Spec}(\varphi)$ es un homeomorfismo entre $\text{Spec}(B)$ y $V(\text{Ker}(\varphi)) \subset \text{Spec}(A)$ con su topología de subespacio.
2. Sean $S \subset A$ un subconjunto multiplicativo y $i : A \rightarrow S^{-1}A$ el morfismo canónico, entonces $\text{Spec}(i)$ es un homeomorfismo entre $\text{Spec}(S^{-1}A)$ y $\mathcal{S} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$

Demostración. 1. Veamos primero que si $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$ entonces $\{0\} \subset \mathfrak{q}$ y por ende $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q})$

$$\therefore \text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) \in V(\text{Ker}(\varphi))$$

Como se quería, ahora veamos la biyectividad.

Por el primer teorema de isomorfismo se tiene que $B \simeq A/\text{Ker}(\varphi)$ y por el teorema de correspondencia hay una biyección entre ideales de $A/\text{Ker}(\varphi)$ e ideales $I \subset A$ tales que $\text{Ker}(\varphi) \subset I$ y la biyección esta dada por tomar preimagen así que en particular $\text{Spec}(\varphi)$ es la restricción de esta biyección a $V(\text{Ker}(\varphi))$ esta biyección es precisamente con $\text{Spec}(A/\text{Ker}(\varphi))$ que por el isomorfismo esta en biyección con $\text{Spec}(B)$. Resumiendo el argumento, el teorema de correspondencia nos garantiza que $\text{Spec}(\varphi)$ es una biyección entre $V(\text{Ker}(\varphi))$ y $\text{Spec}(B)$.

Finalmente si $V(\mathfrak{b}) \subset \text{Spec}(B)$ es un cerrado se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \text{Spec}(\varphi)(V(\mathfrak{b})) \\
 &= \{\text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})\} \\
 &= \{\text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{b} \subset \mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)\} \\
 &= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{b} \subset \mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)\} \\
 &= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in V(\text{Ker}(\varphi))\} \\
 &= \{\mathfrak{p} \in V(\text{Ker}(\varphi)) \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{p}\} \\
 &= V(\text{Ker}(\varphi)) \cap V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))
 \end{aligned}$$

Por lo que $\text{Spec}(\varphi)$ es una función cerrada en su imagen. Concluimos que $\text{Spec}(\varphi)$ es un homeomorfismo en su imagen

2. Recordemos que $i : A \rightarrow S^{-1}A$ esta dada por $i(a) = a/1$ Primero notemos que dado $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(S^{-1}A)$ entonces $\text{Spec}(i)(\mathfrak{p}) \cap S = \emptyset$ pues de lo contrario existiría $s \in S \cap i^{-1}(\mathfrak{p})$, es decir, $i(s) \in \mathfrak{p}$ pero $i(s)$ es una unidad de $S^{-1}A$ y entonces $\mathfrak{p} = S^{-1}A$! pero esto no es posible ya que al ser un ideal primo debe ser propio. Asi que $\text{Im}(\text{Spec}(i)) \subset \mathcal{S}$. Probemos la biyectividad.

Sobre Sea $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ y consideremos

$$S^{-1}\mathfrak{p} = \{p/s \mid p \in \mathfrak{p}, s \in S\}$$

Como $p/s = 1/1 \iff \exists t \in S, t(p-s) = 0 \iff \exists t \in S, tp = ts \in S$ entonces como \mathfrak{p} es un ideal $tp \in \mathfrak{p}$ lo cual contradice la suposición, asi que $1/1 \notin S^{-1}\mathfrak{p}$ entonces es un subconjunto propio de $S^{-1}A$. Más aún, si $p_1/s_1, p_2/s_2 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ entonces $p_1/s_1 + p_2/s_2 = (s_2p_1 + s_1p_2)/(s_1s_2) \in S^{-1}\mathfrak{p}$ y también $(p_1/s_1)(p_2/s_2) = (p_1p_2)/(s_1s_2) \in S^{-1}\mathfrak{p}$ pues \mathfrak{p} es un ideal. Finalmente si $a_1/s_1, a_2/b_2 \in S^{-1}A$ son tales que $(a_1/b_1)(a_2/b_2) \in S^{-1}\mathfrak{p}$ entonces $a_1a_2 \in \mathfrak{p}$ por lo que $a_1 \in \mathfrak{p}$ o $a_2 \in \mathfrak{p}$ por lo tanto, $a_1/b_1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ o $a_2/b_2 \in S^{-1}\mathfrak{p}$, por lo que $S^{-1}\mathfrak{p} \in \text{Spec}(S^{-1}A)$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
 \text{Spec}(i)(S^{-1}\mathfrak{p}) &= i^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) \\
 &= \{a \in A \mid i(a) = a/1 \in \mathfrak{p}\} = \{a \in A \mid a \in \mathfrak{p}\} = \mathfrak{p}
 \end{aligned}$$

Asi que $\text{Spec}(i)$ es sobre.

Inyectiva Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec}(S^{-1}A)$ son tales que $\text{Spec}(i)(\mathfrak{p}) = \text{Spec}(i)(\mathfrak{q})$, es decir, $i^{-1}(\mathfrak{p}) = i^{-1}(\mathfrak{q})$ por el lema 1.7 se tiene que

$$\mathfrak{p} = S^{-1}i^{-1}(\mathfrak{p}) = S^{-1}i^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$$

. Por lo que $\text{Spec}(i)$ es inyectiva.

Y para terminar veamos que es una función cerrada ya que, si $V(\mathfrak{b}) \subset \text{Spec}(S^{-1}A)$ es un cerrado, entonces:

$$\begin{aligned}
 & \text{Spec}(i)(V(\mathfrak{b})) \\
 &= \{\text{Spec}(i)(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})\} \\
 &= \{i^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{b} \subset \mathfrak{q} \in \text{Spec}(S^{-1}A)\} \\
 &= \{i^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathcal{S} \mid i^{-1}(\mathfrak{b}) \subset i^{-1}(\mathfrak{q})\} \\
 &= \mathcal{S} \cap V(i^{-1}(\mathfrak{b}))
 \end{aligned}$$

Concluimos que $\text{Spec}(i)$ es un homeomorfismo entre \mathcal{S} y $\text{Spec}(S^{-1}A)$. \square

Ejemplo 1.3

Consideremos $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la proyección canónica al cociente entonces

$$\text{Ker}(\pi) = \{m \in \mathbb{Z} \mid \overline{m} = \overline{0}\} = \langle n \rangle$$

y por el lema anterior

$$\begin{aligned}
 \text{Spec}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\simeq V(n) \\
 &= \{\langle p \rangle \mid p \text{ es primo y existe } a \in \mathbb{Z}, n = pa\} \\
 &= \{\langle p_1 \rangle, \dots, \langle p_l \rangle\}
 \end{aligned}$$

Donde p_1, \dots, p_l son los factores primos de n . Además cada uno de esos puntos son cerrados en $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ entonces $\text{Spec}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ es discreto y tiene tantos puntos como factores primos distintos tenga n .