Espectro de un anillo

Levia MN

December 20, 2023

1 Topología

Definición 1. *Sea A un anillo denotamos*

$$Spec(A) = \{\mathfrak{p} \subset A; \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo}\}$$

Si $M \subset A$ entonces denotamos

$$V(M) = \{\mathfrak{p} \in A; M \subset \mathfrak{p}\}$$

Si $M = \{f\}$ entonces escribimos $V(f)$.

Observacion 1. *Si $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por $M \subset A$ entonces*

$$V(M) = V(\mathfrak{a})$$

Proof. Si $M \subset \mathfrak{p}$ como $\mathfrak{a}$ es el minimo ideal que contiene a M entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(M) \subset V(\mathfrak{a})$.
Por otro lado si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ como $M \subset \mathfrak{a}$ entonces $M \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(\mathfrak{a}) \subset V(M)$
$\therefore V(M) = V(\mathfrak{a})$ □

Lema 1.
1. *Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ entonces $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$*
2. *$V(0) = Spec(A)$ y $V(1) = \varnothing$*
3. *Si $\{\mathfrak{a}_i \subset A; i \in I\}$ es una familia de ideales de A, entonces*

$$V(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

4. *Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales de A, entonces*

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Proof.
1. Si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$

2. Para cualquier $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ se cumple que $0 \in \mathfrak{p}$

$$\therefore V(0) = Spec(A)$$

Para cualquier $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ se cumple que $1 \notin \mathfrak{p}$

$$\therefore V(1) = \varnothing$$

3. Por la observación se sigue la primer igualdad, para la segunda Dado $j \in I$

$$\mathfrak{a}_j \subset \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$$

así que por 1. $V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \subset V(\mathfrak{a}_j)$

$$\therefore V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \subset \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

Por otro lado si $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$ entonces para todo $i \in I$ ocurre que $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ por lo que $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$

$$\therefore \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) \subset V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$$

4. Como $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ entonces por 1.

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathbf{b}) \subset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

Si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ y $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ entonces $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, es decir, existe $a \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ pero para toda $b \in \mathfrak{b}$ ocurre que $ab \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es in ideal primo $b \in \mathfrak{p}$

$$\therefore \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$$

i.e. $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$

$$\therefore V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Lo que prueba la igualdad entre los tres términos.

□

Observacion 2. *El lema anterior prueba que* $\{V(\mathfrak{a}); \mathfrak{a} \subset A$ *es in ideal*$\}$ *forman los cerrados de una topología sobre* $Spec(A)$

Por otro lado vamos a definir el otro lado de la conección de Galois que nos gustaría crear.

Definición 2. *Sea* $Y \subset Spec(A)$ *definimos*

$$I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$$

Y definiremos $I(\varnothing) = A$

Probemos un lema técnico

Lema 2. *Sea $J \subset A$ un ideal entonces $rad(J) = \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$. Con $\mathfrak{p} \in Spec(A)$*

Proof. Por un lado si $a \in rad(J)$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in J$ Asi que dado $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ tal que $J \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $a^n \in \mathfrak{p}$ y es un ideal primo se sigue que $a \in \mathfrak{p}$

$$\therefore rad(J) \subset \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$$

Por otro lado sea $a \in \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ y supongamos que $a \notin rad(J)$ entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $a^n \notin J$

$$\therefore \mathcal{F} = \{I \subset A;\ \text{I es un ideal, } J \subset I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, a^n \notin I\} \neq \varnothing$$

pues $rad(J) \in \mathcal{F}$ y además esta familia esta ordenada por la contención así que por principio de maximalidad de Hausdorff existe $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$ maximal tal que $rad(J) \subset \mathfrak{q}$.
Veamos que $\mathfrak{q} \in Spec(A)$, en efecto, si $xy \in \mathfrak{q}$ y además se tuviera que $x, y \notin \mathfrak{q}$ entonces $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ y por la maximalidad de $\mathfrak{q}$ se tiene que $\mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle \notin \mathcal{F}$ por lo que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $a^n \mathfrak{q} + \langle x \rangle$ y $a^m \in \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ ya que $J \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ Por lo que $a^n = q_1 + r_1 x$ y $a^m = q_2 + r_2 y$ con $q_1, q_2 \in \mathfrak{q}$ y $r_1, r_2 \in A$

$$a^{n+m} = (q_1 + r_1 x)(q_2 + r_2 y) = q_1 q_2 + q_1 r_2 y + q_2 r_1 x + r_1 r_2 xy \in \mathfrak{q}$$

pues cada termino esta en $\mathfrak{q}$ lo cual es una contradicción y por ende $\mathfrak{q}$ es un ideal primo, es decir, $\mathfrak{q} \in Spec(A)$. Por lo que $a \in \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}, \subset \mathfrak{q}$ pues $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ lo cual es una contradicción pues $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$. Esta contradicción vino de suponer que $a \notin rad(J)$ por lo que $a \in rad(J)$.

$$\therefore \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subset rad(J)$$

Lo cual da la igual que buscabamos.

□

Además tenemos los siguientes resultados

Lema 3. 1. *Si $Y \subset X$ entonces $I(X) \subset I(Y)$*

2. *$rad(I(Y)) = I(Y)$*

3. *$I(V(\mathfrak{a})) = rad(\mathfrak{a})$ y $V(I(Y)) = cl(Y)$ donde cl es la cerradura en Spec(A)*

Proof. 1. Si $p \in I(X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$ entonces, para todo $\mathfrak{p} \in X$, se tiene que $p \in \mathfrak{p}$, como $Y \subset X$ entonces en particular para todo $\mathfrak{p} \in Y$ ocurre que $p \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore I(X) \subset I(Y)$$

2. Siempre ocurre que $I(Y) \subset rad(I(Y))$, y por otro lado si $a \in rad(I(Y))$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I(Y)$ por lo que $a^n \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathbf{p} \in Y$. Como cada uno de estos ideales es primo entonces $a \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in Y$.

$$\therefore rad(I(Y)) \subset I(Y)$$

   Lo que prueba la igualdad

3. Para lo primero notemos que

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = rad(\mathfrak{a})$$

   Por el lema previo.
   Por otro lado observemos que $V(I(Y))$ es un cerrado de $Spec(A)$ Además dado $y \in Y$ entonces $I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} \subset y$ por lo que $y \in V(y) \subset (V(I(Y)))$

$$\therefore Y \subset V(I(Y))$$

   Además si tenemos $V(J)$ un cerrado tal que $Y \subset V(J)$ entonces $J \subset y$ para cualquier $y \in Y$ por lo que $J \subset \bigcap_{y \in Y} y = I(Y)$ asi que $V(I(Y)) \subset V(J)$. Lo que lo hace el cerrado más pequeño en contener a Y, es decir, su cerrad.

$$\therefore V(I(Y)) = cl(Y)$$

$\square$

Observacion 3. *Sean $\mathcal{A} = \{I \subset A;\ I \text{ es un idel radical de } A\}$ y $\mathcal{B} = \{Y \subset Spec(A);\ Y \text{ es un cerrado de } Spec(A)\}$.*
La prueba anterior nos dice que $V : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $I : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ son inversas una de otra y por ende biyecciones entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Observacion 4. *Si $x \in Spec(A)$ entonces $I(x) = x$, por lo que*

$$V(x) = V(I(\{x\})) = cl(\{x\})$$