

# Gavillas

Levia MN

11 de enero de 2024

## 1. Pregavillas

### Definición 1.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $\tau$  es un conjunto parcialmente ordenado por la contención ( $\subset$ ) podemos considerar la categoría asociada  $C_\tau$  tal que sus elementos son los elementos de  $\tau$  y existe  $V \rightarrow U$  si y solo si  $V \subset U$ . Una pregavilla sobre  $(X, \tau)$  es un funtor  $\mathcal{F} : C_\tau^{op} \rightarrow C$  con  $C$  una categoría, las que nos interesan para los propositos de estas notas son las categorías **Set**, **Ab**, **Ring**, **R-Mod**.

Adicionalmente para nuestra notación pondremos

$$\rho_V^U = \mathcal{F}(V \rightarrow U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

Y los llamaremos los morfismos de restricción.

Diremos que una pregavilla  $\mathcal{F}$  es una gavilla si para todo  $U \in \tau$  y para toda cubierta abierta  $\mathcal{C} = \{U_i \mid i \in I\}$  de  $U$  se cumple que dadas  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  tales que para cualquier par de índices  $i, j \in I$  se tiene que:

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$$

Entonces existe una única  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$

### Ejemplo 1.1

Los ejemplos clásicos de gavillas tienen que ver con funciones que se restringen a abiertos y preservan esa estructura. Algunos ejemplos clásicos son

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua.}\}$$

Y si  $X$  es una variedad suave sobre  $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$$\mathcal{O}(U) = \{f : X \rightarrow k \mid f \text{ es una función suave.}\}$$

como y en ambos ejemplos las restricciones están dadas por  $\rho_V^U(f) = f \circ i_V$ . Con  $i_V : V \rightarrow U$  la inclusión canónica, y es claro que ambas son gavillas sobre  $X$ .

### Definición 1.2

Dada un espacio topológico  $(X, \tau)$  y una gavilla  $\Gamma$  sobre  $X$ , dado  $x \in X$  podemos definir  $M_x = \{(U, s) \mid U \in \tau, s \in \Gamma(U)\}$  y tener la relación dada por  $(U, s) \sim (V, t)$  si y solo si existe  $W \in \mathcal{N}(x)$  tal que  $W \subset U \cap V$  y  $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$ .

### Proposición 1.1

La relación  $\sim$  anterior es una relación de equivalencia.

*Demostración.* 1. Notemos que  $U \subset U = U \cap U$  y  $\rho_U^U(s) = \rho_U^U(s)$  por lo que  $(U, s) \sim (U, s)$

2. La definición es claramente simétrica.

3. Si  $(U, s) \sim (V, t)$  y  $(V, t) \sim (W, r)$  entonces tenemos  $W_1, W_2 \in \mathcal{N}(x)$  tales que  $W_1 \subset U \cap V$  y  $W_2 \subset V \cap W$  y además  $\rho_{W_1}^U(s) = \rho_{W_1}^V(t)$  y  $\rho_{W_2}^V(t) = \rho_{W_2}^W(r)$ .

Consideremos  $W_3 = W_1 \cap W_2 \in \mathcal{N}(x)$  y notemos que  $W_3 \subset (U \cap V) \cap (V \cap W) \subset U \cap W$  y también

$$\begin{aligned} \rho_{W_3}^U(s) &= \rho_{W_3}^{W_1}(\rho_{W_1}^U(s)) = \rho_{W_3}^{W_1}(\rho_{W_1}^V(t)) = \rho_{W_3}^V(t) \\ &= \rho_{W_3}^{W_2}(\rho_{W_2}^V(t)) = \rho_{W_3}^{W_2}(\rho_{W_2}^W(r)) = \rho_{W_3}^W(r) \end{aligned}$$

Pues  $\Gamma$  es un funtor. Por lo tanto  $(U, s) \sim (W, r)$

□

### Definición 1.3

Dado  $(X, \tau)$  espacio topológico y  $\Gamma$  una pregavilla sobre  $X$ , para cada  $x \in X$  definiremos

$$\Gamma_x = M_x / \sim$$

El tallo de la gavilla en  $x$ . Y notemos que en las categorías que nos interesan

$$\Gamma_x = \lim_{U \in \mathcal{N}(x)} \Gamma(U)$$

De hecho si la categoría donde  $\Gamma$  toma valores es alguna arbitraria, esta es la definición del tallo de la gavilla sobre  $x$ .

**Observación 1.1**

Tenemos una función natural para cada  $U \in \mathcal{N}(x)$ ,  $\pi_x^U : \Gamma(U) \rightarrow \Gamma_x$  que asigna  $s \mapsto [U, s]$  y escribimos  $s_x = \pi_x^U(s)$  cuando es claro por el contexto.

**Ejemplo 1.2**

Consideremos dos espacios topológicos  $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$  y una función continua  $p : Y \rightarrow X$ .

Para cada  $U \in \tau_X$  definamos:

$$\Gamma(U) = \{f : U \rightarrow Y \mid p \circ f = id_U, f \text{ es continua.}\}$$

es decir, el conjunto de secciones continuas de  $p$  sobre  $U$ . Entonces  $\Gamma$  es una gavilla sobre  $f$  con las restricciones usuales.

Ya que si  $f \in \Gamma(U)$  y  $V \subset U$  entonces para cualquier  $x \in V$ , entonces  $p \circ (f \circ i_V)(x) = (p \circ f) \circ i_V(x) = id_U(x) = x$  por lo que  $p \circ \rho_V^U(f) = id_V$  así que las restricciones están bien definidas.

Ahora veremos que en cierto sentido cualquier gavilla es la gavilla de secciones continuas sobre algún espacio.

**Definición 1.4**

Para un espacio topológico  $(X, \tau)$  y una pregavilla  $\Gamma$  definiremos

$$\tilde{\Gamma} = \bigsqcup_{x \in X} \Gamma_x$$

Y para cada  $U \in \tau$  y  $s \in \Gamma(U)$

$$\mathcal{V}(U, s) = \{(x, s_x) \mid x \in U\}$$

Finalmente tenemos una función  $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow X$  tal que  $p(x, [U, s]) = x$

**Proposición 1.2**

$\mathcal{B} = \{\mathcal{V}(U, s) \mid U \in \tau, s \in \Gamma(U)\}$  es una base para una topología sobre  $\tilde{\Gamma}$ .

*Demostración.* 1. Dado  $(x, [U, s]) \in \tilde{\Gamma}$  entonces  $(x, [U, s]) = (x, s_x) \in \mathcal{V}(U, s)$  por lo que

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup \mathcal{B}$$

2. Sea  $(x, [W, r]) \in \mathcal{V}(U, s) \cap \mathcal{V}(V, t)$  entonces por definición  $x \in U \cap V$ , y además  $[V, t] = t_x = [W, r] = s_x = [U, s]$  por lo que existe  $W_1 \in \mathcal{N}(x)$   $W_1 \subset U \cap V$  tal que  $h := \rho_{W_1}^U(s) = \rho_{W_1}^V(t) \in \Gamma(W)$  así que consideremos

$B = \mathcal{V}(W_1, h) \in \mathcal{B}$  Notemos que como  $x \in W_1$  y también,  $W_1 \subset W_1 = W_1 \cap U$  y  $\rho_{W_1}^{W_1}(h) = id_{W_1}(h) = h = \rho_{W_1}^U(s)$  por lo que  $[W, r] = [U, s] = [W_1, h] = h_x$  así que  $(x, [W, r]) \in B$

Finalmente dada  $(y, h_y) \in B$  entonces ocurre que  $y \in W_1 \subset U \cap V$  por lo que  $y \in U$  y  $y \in V$  y además  $h_y = [W_1, h] = [U, s] = [V, t]$  en  $\Gamma_y$ , ya que  $W_1 \subset U(V)$  y además  $\rho_{W_1}^U(s) = h = \rho_{W_1}^V(t)$  así que  $(y, h_y) \in \mathcal{V}(U, s) \cap \mathcal{V}(V, t)$  por lo que  $B \subset \mathcal{V}(U, s) \cap \mathcal{V}(V, t)$

Esto prueba que  $\mathcal{B}$  es una base para una topología  $\tilde{\tau}$  sobre  $\tilde{\Gamma}$   $\square$

### Definición 1.5

A  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\tau})$  se le llama el espacio étale de la gavilla  $\Gamma$

### Proposición 1.3

La función  $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow X$  definida arriba es continua y es un homeomorfismo local.

*Demostración.* Dado  $U \in \tau$  se tiene que

$$p^{-1}(U) = \{(x, [V, t]) \mid x \in U, t \in \Gamma(V)\}$$

Así que dado  $(x, [V, t]) \in p^{-1}(U)$  consideremos  $W = U \cap V$ ,  $h = \rho_W^V(t)$  y  $B = \mathcal{V}(W, h)$ . Es fácil ver que  $[V, t] = [W, h]$  en  $\Gamma_x$  ya que  $W \subset W \cap V$  y  $h = \rho_W^W(h) = \rho_W^V(t)$  por lo que  $(x, [V, t]) \in B$ . Dado  $(y, h_y) \in B$  ocurre que  $y \in W \subset U$  por lo que  $(y, h_y) \in p^{-1}(U)$ .

$$\therefore (x, [V, t]) \in B \subset p^{-1}(U)$$

Por lo que  $p^{-1}(U)$  es abierto. Así que  $p$  es una función continua.

Más aún para cada  $U \in \tau$  y  $s \in \Gamma(U)$   $p(\mathcal{V}(U, s)) = U$  por lo que es una función abierta y al restringirla a cualquier abierto básico tenemos un homeomorfismo, como cada punto tiene un abierto básico que lo contiene,  $p$  es un homeomorfismo local.  $\square$

### Proposición 1.4

Sea  $s \in \Gamma(U)$  entonces la función  $f : U \rightarrow \tilde{\Gamma}$  dada por  $f(x) = (x, s_x)$  es una sección continua de  $p$ . Más aún, si  $\Gamma$  es una gavilla se vale el regreso

*Demostración.* Primero, notemos que dado  $x \in f^{-1}(\mathcal{V}(V, t))$  entonces  $(x, s_x) \in \mathcal{V}(V, t)$  entonces  $x \in V$  y también  $s_x = t_x$  así que existe  $W \in \mathcal{N}(x)$  tal que  $W \subset U \cap V$  tal que  $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$  así que dado  $y \in W$  como  $W, U, V \in \mathcal{N}(y)$  y ocurre lo anterior, entonces  $s_y = t_y$ , por lo que  $f(y) = (y, s_y) = (y, t_y) \in \mathcal{V}(V, t)$ . Concluimos que  $x \in W \subset f^{-1}(\mathcal{V}(V, t))$ , así que  $f$  es continua. Y es claro que  $p \circ f(x) = p(x, s_x) = x$  así que si es una sección continua de  $p$ .

Por otro lado, supongamos que  $\Gamma$  es una gavilla y sea  $\sigma : U \rightarrow \tilde{\Gamma}$  una sección continua de  $p$  y escribamos  $\sigma(x) = (x, \sigma_1(x))$ . Sea  $x \in U$  entonces, como  $\mathcal{B}$  es una base, existen  $V^x \in \tau$  y  $t^x \in \Gamma(V)$  tal que  $\sigma(x) \in \mathcal{V}(V^x, t^x)$  y por lo tanto  $\sigma_1(x) = t^x_x$ . Como para todo  $x \in X$ ,  $x \in V^x$  entonces  $X = \bigcup_{x \in X} V^x$  Veamos que  $\{t^x \mid x \in X\}$  son compatibles. Sean  $x, y \in X$  y  $a \in V_x \cap V_y$  entonces,  $t^x_a = \sigma_1(a) = t^y_a$  por lo que existe  $W_a \in \mathcal{N}(a)$  tal que  $W_a \subset V_x \cap V_y$  y

$$\rho_{W_a}^{V_x}(t^x) = \rho_{W_a}^{V_y}(t^y)$$

Así, tenemos a la familia  $\{W_a \mid a \in V_x \cap V_y\}$  la cual cubre a  $V_x \cap V_y$  y a la familia  $\{h_a := \rho_{W_a}^{V_x}(t^x) = \rho_{W_a}^{V_y}(t^y) \in \Gamma(W_a) \mid a \in V_x \cap V_y\}$  y además ocurre que dados  $a, b \in V_x \cap V_y$ .

$$\begin{aligned} \rho_{W_a \cap W_b}^{W_a}(h_a) &= \rho_{W_a \cap W_b}^{W_a}(\rho_{W_a}^{V_x}(t^x)) \\ &= \rho_{W_a \cap W_b}^{V_x}(t^x) = \rho_{W_a \cap W_b}^{W_b}(\rho_{W_b}^{V_x}(t^x)) \\ &= \rho_{W_a \cap W_b}^{W_b}(h_b) \end{aligned}$$

Y como  $\Gamma$  es una gavilla entonces existe una única  $t^{x,y} \in \Gamma(V_x \cap V_y)$  tal que para cualquier  $a \in V_x \cap V_y$  ocurre que:  $\rho_{W_a}^{V_x \cap V_y}(t^{x,y}) = h_a$  Además, veamos que para cualquier  $a \in V_x \cap V_y$

$$\rho_{W_a}^{V_x \cap V_y}(\rho_{V_x \cap V_y}^{V_x}(t^x)) = \rho_{W_a}^{V_x}(t^x) = h_a$$

y como  $t^{x,y}$  es único, se sigue que  $t^{x,y} = \rho_{V_x \cap V_y}^{V_x}(t^x)$ . Pero también ocurre que:

$$\rho_{W_a}^{V_x \cap V_y}(\rho_{V_x \cap V_y}^{V_y}(t^y)) = \rho_{W_a}^{V_y}(t^y) = h_a$$

$\therefore \rho_{V_x \cap V_y}^{V_x}(t^x) = t^{x,y} = \rho_{V_x \cap V_y}^{V_y}(t^y)$ . Y de nuevo como  $\Gamma$  es una gavilla existe  $t \in \Gamma(U)$  tal que para cualquier  $x \in X$ , ocurre que  $\rho_{V_x}^U(t) = t^x$ .

Ahora bien para cualquier  $x \in X$ , debe ocurrir que  $[U, t] = [V_x, t^x]$  ya que  $V_x \subset V_x \cap U$  y  $\rho_{V_x}^{V_x \cap U}(t) = t^x = \rho_{V_x}^U(t)$ , es decir, para toda  $x \in X$ , se tiene que  $t_x = t^x_x = \sigma_1(x)$

$$\therefore \sigma(x) = (x, t_x)$$

Como se quería. □

Notemos que la definición de pregavilla nos da una noción natural de morfismos de pregavillas, es decir, transformaciones naturales entre los funtores.

### Lema 1.1

Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $\Gamma$  una gavilla sobre  $X$ ,  $U \in \tau$  y dos elementos  $\alpha, \beta \in \Gamma(U)$ . Ocurre que  $\alpha = \beta$  si y solo si para cualquier  $x \in U$   $\alpha_x = \beta_x$ .

*Demostración.*  $\implies$  ) Si  $\alpha = \beta$  entonces ocurre que para cualquier  $x \in U$  que

$$\alpha_x = [U, \alpha] = [U, \beta] = \beta_x$$

$\impliedby$  ) Supongamos que para cualquier  $x \in U$  ocurre que  $\alpha_x = \beta_x$  ahora entonces para cada  $x \in U$  existe  $W_x \subset U$  tal que

$$\rho_{W_x}^U(\alpha) = \rho_{W_x}^U(\beta)$$

Así que de  $\{W_x \mid x \in U\}$  es una cubierta abierta de  $U$  y además tenemos a la familia  $\{h_x := \rho_{W_x}^U(\alpha) \in \Gamma(W_x) \mid x \in U\}$  notemos que dados  $x, y \in U$  ocurre que:

$$\begin{aligned} \rho_{W_x \cap W_y}^{W_x}(h_x) &= \rho_{W_x \cap W_y}^{W_x}(\rho_{W_x}^U(\alpha)) = \rho_{W_x \cap W_y}^U(\alpha) \\ &= \rho_{W_x \cap W_y}^{W_y}(\rho_{W_y}^U(\alpha)) = \rho_{W_x \cap W_y}^{W_y}(h_y) \end{aligned}$$

Por lo que esta familia es compatible y como  $\Gamma$  es una gavilla, existe una única  $\gamma \in \Gamma(U)$  tal que para cada  $x \in U$  ocurre que

$$\rho_{W_x}^U(\gamma) = h_x = \rho_{W_x}^U(\alpha) = \rho_{W_x}^U(\beta)$$

entonces se sigue que  $\alpha = \beta$

□

### Teorema 1.1

Sean  $(X, \tau)$  espacio topológico,  $\Gamma$  una gavilla sobre  $X$  y  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\tau})$  su espacio étale, si  $\mathcal{G}$  es la gavilla de secciones de  $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow X$ , entonces  $\Gamma \simeq \mathcal{G}$ .

*Demostración.* Para cada  $U \in \tau$  definamos  $\alpha_U : \Gamma(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  dada por  $\alpha_U(s)(x) = (x, s_x)$  y veamos que es una transformación natural.

Sean  $x \in V \subset U$  y  $s \in \Gamma(U)$

$$\alpha_V(\rho_V^U(s))(x) = (x, \rho_V^U(s)_x) = (x, s_x) = \alpha_U(s) \circ i_V(x)$$

Pues  $s_x = [U, s] = [V, \rho_V^U(s)] = \rho_V^U(s)_x$  ya que  $v \subset V \cap U$  y  $\rho_V^V(\rho_V^U(s)) = \rho_V^U(s)$  por lo que  $\alpha_U$  definen las componentes de una transformación natural.

Por el teorema anterior y gracias a que  $\Gamma$  es una gavilla, se tiene que cada  $\alpha_U$  es suprayectiva y además el lema anterior prueba que  $\alpha_U$  es inyectiva para cada  $U \in \tau$  y por tanto la familia  $\alpha_U$  con  $U \in \tau$  definen las componentes de un isomorfismo natural. □