

Espectro de un anillo

Levia MN

29 de diciembre de 2023

1. Topología

Definición 1. Sea A un anillo denotamos

$$\text{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A; \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo}\}$$

Si $M \subset A$ entonces denotamos

$$V(M) = \{\mathfrak{p} \in A; M \subset \mathfrak{p}\}$$

Si $M = \{f\}$ entonces escribimos $V(f)$.

Observación 1. Si \mathfrak{a} es el ideal generado por $M \subset A$ entonces

$$V(M) = V(\mathfrak{a})$$

Demostración. Si $M \subset \mathfrak{p}$ como \mathfrak{a} es el mínimo ideal que contiene a M entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(M) \subset V(\mathfrak{a})$.

Por otro lado si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ como $M \subset \mathfrak{a}$ entonces $M \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(\mathfrak{a}) \subset V(M)$
 $\therefore V(M) = V(\mathfrak{a})$ \square

Lema 1. 1. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ entonces $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$

2. $V(0) = \text{Spec}(A)$ y $V(1) = \emptyset$

3. Si $\{\mathfrak{a}_i \subset A; i \in I\}$ es una familia de ideales de A , entonces

$$V\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

4. Si \mathfrak{a} y \mathfrak{b} son ideales de A , entonces

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Demostración. 1. Si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$

2. Para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ se cumple que $0 \in \mathfrak{p}$

$$\therefore V(0) = \text{Spec}(A)$$

Para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ se cumple que $1 \notin \mathfrak{p}$

$$\therefore V(1) = \emptyset$$

3. Por la observación se sigue la primer igualdad, para la segunda Dado $j \in I$

$$\mathfrak{a}_j \subset \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$$

así que por 1. $V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \subset V(\mathfrak{a}_j)$

$$\therefore V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \subset \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

Por otro lado si $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$ entonces para todo $i \in I$ ocurre que $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ por lo que $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$

$$\therefore \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) \subset V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$$

4. Como $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ entonces por 1.

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

Si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ y $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ entonces $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, es decir, existe $a \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ pero para toda $b \in \mathfrak{b}$ ocurre que $ab \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ y como \mathfrak{p} es un ideal primo $b \in \mathfrak{p}$

$$\therefore \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$$

i.e. $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$

$$\therefore V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Lo que prueba la igualdad entre los tres términos.

□

Observacion 2. El lemma anterior prueba que $\{V(\mathfrak{a}); \mathfrak{a} \subset A \text{ es un ideal}\}$ forman los cerrados de una topología sobre $\text{Spec}(A)$

Por otro lado vamos a definir el otro lado de la conexión de Galois que nos gustaría crear.

Definición 2. Sea $Y \subset \text{Spec}(A)$ definimos

$$I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$$

Y definiremos $I(\emptyset) = A$

Probemos un lemma técnico

Lema 2. Sea $J \subset A$ un ideal entonces $\text{rad}(J) = \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$. Con $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$

Demostración. Por un lado si $a \in \text{rad}(J)$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in J$. Así que dado $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tal que $J \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $a^n \in \mathfrak{p}$ y es un ideal primo se sigue que $a \in \mathfrak{p}$

$$\therefore \text{rad}(J) \subset \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$$

Por otro lado sea $a \in \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ y supongamos que $a \notin \text{rad}(J)$ entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $a^n \notin J$

$$\therefore \mathcal{F} = \{I \subset A; I \text{ es un ideal}, J \subset I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, a^n \notin I\} \neq \emptyset$$

pues $\text{rad}(J) \in \mathcal{F}$ y además esta familia esta ordenada por la contención así que por principio de maximalidad de Hausdorff existe $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$ maximal tal que $\text{rad}(J) \subset \mathfrak{q}$.

Veamos que $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$, en efecto, si $xy \in \mathfrak{q}$ y además se tuviera que $x, y \notin \mathfrak{q}$ entonces $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ y por la maximalidad de \mathfrak{q} se tiene que $\mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle \notin \mathcal{F}$ por lo que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $a^n \mathfrak{q} + \langle x \rangle$ y $a^m \in \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ ya que $J \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$. Por lo que $a^n = q_1 + r_1 x$ y $a^m = q_2 + r_2 y$ con $q_1, q_2 \in \mathfrak{q}$ y $r_1, r_2 \in A$

$$a^{n+m} = (q_1 + r_1 x)(q_2 + r_2 y) = q_1 q_2 + q_1 r_2 y + q_2 r_1 x + r_1 r_2 xy \in \mathfrak{q}$$

pues cada termino esta en \mathfrak{q} lo cual es una contradicción y por ende \mathfrak{q} es un ideal primo, es decir, $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$. Por lo que $a \in \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ pues $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ lo cual es una contradicción pues $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$. Esta contradicción vino de suponer que $a \notin \text{rad}(J)$ por lo que $a \in \text{rad}(J)$.

$$\therefore \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subset \text{rad}(J)$$

Lo cual da la igual que buscabamos. □

Además tenemos los siguientes resultados

Lema 3. 1. Si $Y \subset X$ entonces $I(X) \subset I(Y)$

$$2. \text{rad}(I(Y)) = I(Y)$$

$$3. I(V(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a}) \text{ y } V(I(Y)) = \text{cl}(Y) \text{ donde cl es la cerradura en } \text{Spec}(A)$$

Demostración. 1. Si $p \in I(X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$ entonces, para todo $\mathfrak{p} \in X$, se tiene que $p \in \mathfrak{p}$, como $Y \subset X$ entonces en particular para todo $\mathfrak{p} \in Y$ ocurre que $p \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore I(X) \subset I(Y)$$

2. Siempre ocurre que $I(Y) \subset \text{rad}(I(Y))$, y por otro lado si $a \in \text{rad}(I(Y))$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I(Y)$ por lo que $a^n \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in Y$. Como cada uno de estos ideales es primo entonces $a \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in Y$.

$$\therefore \text{rad}(I(Y)) \subset I(Y)$$

Lo que prueba la igualdad

3. Para lo primero notemos que

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \text{rad}(\mathfrak{a})$$

Por el lemma previo.

Por otro lado observemos que $V(I(Y))$ es un cerrado de $\text{Spec}(A)$ Además dado $y \in Y$ entonces $I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} \subset y$ por lo que $y \in V(y) \subset (V(I(Y)))$

$$\therefore Y \subset V(I(Y))$$

Además si tenemos $V(J)$ un cerrado tal que $Y \subset V(J)$ entonces $J \subset y$ para cualquier $y \in Y$ por lo que $J \subset \bigcap_{y \in Y} y = I(Y)$ así que $V(I(Y)) \subset V(J)$. Lo que lo hace el cerrado más pequeño en contener a Y , es decir, su cerradura.

$$\therefore V(I(Y)) = \text{cl}(Y)$$

□

Observacion 3. Sean $\mathcal{A} = \{I \subset A; I \text{ es un ideal radical de } A\}$ y $\mathcal{B} = \{Y \subset \text{Spec}(A); Y \text{ es un cerrado de } \text{Spec}(A)\}$.

La prueba anterior nos dice que $V : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $I : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ son inversas una de otra y por ende biyecciones entre \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Observacion 4. Si $x \in \text{Spec}(A)$ entonces $I(x) = x$, por lo que

$$V(x) = V(I(\{x\})) = \text{cl}(\{x\})$$

Lema 4. Si $I, J \subset A$ son ideales de A , entonces $I \subset \text{rad}(J)$ si y solo si $\text{rad}(I) \subset \text{rad}(J)$

Demostración. \implies Supongamos que $I \subset \text{rad}(J)$ y sea $a \in \text{rad}(I)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I$ por lo que $a^n \in \text{rad}(J) = \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ así que para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tal que $J \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $a^n \in \mathfrak{p}$ y como cada uno es un ideal primo $a \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore a \in \bigcap_{J \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \text{rad}(J)$$

Concluimos que $\text{rad}(I) \subset \text{rad}(J)$.

\Leftarrow Supongamos que $\text{rad}(I) \subset \text{rad}(J)$ entonces como $I \subset \text{rad}(I)$ se sigue lo que queríamos. □

Corolario 1. Sea $g \in A$ y $I, J \subset A$ un ideales de A , entonces $V(I) \subset V(J)$ si y solo si $\text{rad}(J) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \text{rad}(I)$ en particular para $V(g)$, $V(I) \subset V(g)$ si y solo si $\{g\} \subset \text{rad}(I)$ si y solo si $g \in \text{rad}(I)$.

Definición 3. Sea $f \in A$ definimos

$$D(f) = \text{Spec}(A) \setminus V(f)$$

y notamos que es un abierto, a los abiertos de este tipo se les llama abiertos principales.

Observacion 5. Notemos los siguientes hechos $D(0) = \emptyset$, $D(1) = \text{Spec}(A)$ y como dado $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ se cumple que $fg \notin \mathfrak{p}$ si y solo $f, g \notin \mathfrak{p}$ pues \mathfrak{p} es primo, por lo que $D(fg) = D(f) \cap D(g)$

Lema 5. Sean $\{f_i; i \in \Lambda\} \subset A$ y $g \in A$, entonces $D(g) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} D(f_i)$ si y solo si $g \in \text{rad}(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle)$

Demostración.

$$D(g) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} D(f_i) = \bigcup_{i \in \Lambda} \text{Spec}(A) \setminus V(f_i) = \text{Spec}(A) \setminus \left(\bigcap_{i \in \Lambda} V(f_i) \right)$$

Y como $\bigcap_{i \in \Lambda} V(f_i) = V(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle)$ entonces

$$\text{Spec}(A) \setminus \left(\bigcap_{i \in \Lambda} V(f_i) \right) = \text{Spec}(A) \setminus V\left(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle\right)$$

por lo que $D(g) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} D(f_i)$ si y solo si

$$V\left(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle\right) \subset V(g)$$

y por corollary y lemma previos se sigue que esto ocurre si y solo si

$$g \in \text{rad}\left(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle\right)$$

□

Observacion 6. En particular aplicando el lemma anterior a $g = 1$ entonces $\{D(f_i) \mid i \in \Lambda\}$ cubre a $D(1) = \text{Spec}(A)$ si y solo si $1 \in \text{rad}(\sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle)$ y esto es si y solo si $1 \in \sum_{i \in \Lambda} \langle f_i \rangle$ si y solo si $\langle f_i; i \in \Lambda \rangle = A$ en particular $1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_{i_j}$ con $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in A$ y $i_j \in \Lambda$.

Por lo que $\langle f_{i_j}; j \in \{1, \dots, n\} \rangle = A$ por lo que $\text{Spec}(A) \subset \bigcup_{j=1}^n D(f_{i_j})$ Por lo que toda cubierta tiene una subcubierta finita.

Hemos probado entonces que

Corolario 2. $\text{Spec}(A)$ es compacto.

Proposición 1. Sea A un anillo, entonces $\mathcal{B} = \{D(f); f \in A\}$ es una base para la topología de $\text{Spec}(A)$.

Demostración. Sea $U \subset \text{Spec}(A)$ un abierto, entonces $\text{Spec}(A) \setminus U$ es un conjunto cerrado, por lo que existe $I \subset A$ ideal de A tal que $\text{Spec}(A) \setminus U = V(I)$, además.

$$V(I) = V\left(\bigcup_{f \in I} \{f\}\right) = \bigcap_{f \in I} V(f)$$

De donde se sigue que:

$$U = \text{Spec}(A) \setminus V(I) = \text{Spec}(A) \setminus \left(\bigcap_{f \in I} V(f)\right) = \bigcup_{f \in I} (\text{Spec}(A) \setminus V(f)) = \bigcup_{f \in I} D(f)$$

□

Proposición 2. Sean A un anillo y $f \in A$, entonces $D(f) \subset \text{Spec}(A)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{D(g_i); i \in I\}$ una cubierta de $D(f)$ conformada por abiertos básicos. Como son una cubierta $D(f) \subset \bigcup_{i \in I} D(g_i)$ y por un lema previo se sigue que $f \in \text{rad}(\sum_{i \in I} \langle g_i \rangle)$. Y notemos que

$$\sum_{i \in I} \langle g_i \rangle = \langle \{g_i; i \in I\} \rangle$$

Por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in \langle \{g_i; i \in I\} \rangle$ así que existe $m \in \mathbb{N}$ para la cual se cumple que $f^n = \sum_{j=1}^m a_j g_{i_j}$ con $a_j \in A$ e $i_j \in I$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, en particular, $f^n \in \langle \{g_{i_j}; j \in \{1, \dots, m\}\} \rangle$ por lo que, $f \in \text{rad}\left(\sum_{j=1}^m \langle g_{i_j} \rangle\right)$ y de nuevo por el lema previo se sigue que, $D(f) \subset \bigcup_{j=1}^m D(g_{i_j})$ así que podemos concluir que $\{g_{i_j}; j \in \{1, \dots, m\}\} \subset \mathcal{U}$ es una subcubierta finita. □

Proposición 3. Sea A un anillo. Un subespacio $Y \subset \text{Spec}(A)$ es irreducible si y solo si $\mathfrak{p} = I(Y)$ es un ideal primo, es decir, $I(Y) \in \text{Spec}(A)$. Más aún en este caso $\{\mathfrak{p}\}$ es denso en $\text{cl}(Y)$.

Demostración. \implies Supongamos que Y es irreducible y sean $f, g \in A$ tales que $fg \in \mathfrak{p}$, entonces

$$Y \subset \text{cl}(Y) = V(I(Y)) = V(\mathfrak{p}) \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

. y como Y es irreducible entonces $Y \subset V(f)$ o $Y \subset V(g)$, por lo que $f \in I(V(f)) \subset I(Y) = \mathfrak{p}$ o $g \in I(V(g)) \subset I(Y) = \mathfrak{p}$, es decir, $f \in \mathfrak{p}$ o $g \in \mathfrak{p}$. Lo que

prueba que \mathfrak{p} es un ideal primo.

\Leftarrow Supongamos que $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ entonces

$$cl(Y) = V(I(Y)) = V(\mathfrak{p}) = V(I(\{\mathfrak{p}\})) = cl(\{\mathfrak{p}\})$$

y como $\{\mathfrak{p}\}$ es irreducible, $cl(Y)$ es irreducible y por ende Y es irreducible y eso también prueba que $\{\mathfrak{p}\}$ es denso en $cl(Y)$. \square

Corolario 3. Sea $\mathcal{A} = \{Y \subset \text{Spec}(A); Y \text{ es cerrado e irreducible}\}$, entonces

$$f : \text{Spec}(A) \rightarrow \mathcal{A}$$

dada por $f(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p}) = cl(\mathfrak{p})$ es una biyección.

Demostración. Como $\{\mathfrak{p}\}$ es irreducible entonces $f(\mathfrak{p}) = cl(\{\mathfrak{p}\})$ es cerrado e irreducible. Y si $Y \subset \text{Spec}(A)$ es un cerrado irreducible entonces $I(Y) \in \text{Spec}(A)$ y además $f(I(Y)) = cl(Y) = Y$ por la Proposición anterior por lo que f es sobre, y además si $cl(\{\mathfrak{p}\}) = cl(\{\mathfrak{q}\})$ entonces $V(\{\mathfrak{p}\}) = V(\{\mathfrak{q}\})$ por lo que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Así que f es inyectiva y por ende biyectiva. \square

Notemos además que la correspondencia anterior invierte el orden de la contención de cada lado. Pensando a los elementos de $\text{Spec}(A)$ con el orden dado al ser ideales de A . Así que si tenemos un ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ minimal $V(\mathfrak{p}) \subset \text{Spec}(A)$ es un cerrado e irreducible maximal por lo que es una componente irreducible de $\text{Spec}(A)$. Más aún si hay mas de un ideal primo minimal entonces $\text{Spec}(A)$ tendrá mas de una componente irreducible por lo que $\text{Spec}(A)$ es irreducible si y solo si tiene un único ideal primo minimal, de hecho, eso lo hace mínimo.

Un ejemplo concreto de esto podría ser $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ Aquí nuestro único ideal minimal (de hecho es mínimo) es $\{0\}$ por lo que $V(0) = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ es un cerrado e irreducible. Más aún sus cerrados irreducibles serán de la forma $V(\langle p \rangle)$ con $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y observemos más

$$V(\langle p \rangle) = \{\langle q \rangle; \langle p \rangle \subset \langle q \rangle \text{ con } q \text{ primo}\} = \{\langle q \rangle; q \text{ primo y divide a } p\} = \{\langle p \rangle\}$$

Por lo que todos los demás cerrados irreducibles son unitarios.