Espectro de un anillo

Levia MN

30 de diciembre de 2023

1. Topología

Definición 1.1: Espectro de un anillo.

Sea A un anillo denotamos

$$Spec(A) = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo}\}$$

Si $M \subset A$ entonces denotamos

$$V(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid M \subset \mathfrak{p}\}$$

Si $M = \{f\}$ entonces escribimos $V(f)$.

Observación 1.1

Si $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por $M \subset A$ entonces

$$V(M) = V(\mathfrak{a})$$

Demostración. $\subset$) Si $M \subset \mathfrak{p}$ como $\mathfrak{a}$ es el minimo ideal que contiene a M entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(M) \subset V(\mathfrak{a})$.

$\supset$) Por otro lado si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ como $M \subset \mathfrak{a}$ entonces $M \subset \mathfrak{p}$ por lo que $V(\mathfrak{a}) \subset V(M)$.
$\therefore V(M) = V(\mathfrak{a})$ □

Lema 1.1

1. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ entonces $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$
2. $V(0) = Spec(A)$ y $V(1) = \varnothing$

3. Si $\{\mathfrak{a}_i \subset A; i \in I\}$ es una familia de ideales de A, entonces

$$V\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

4. Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales de A, entonces

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Demostración. 1. Si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$

2. Para cualquier $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ se cumple que $0 \in \mathfrak{p}$

$$\therefore V(0) = Spec(A)$$

Para cualquier $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ se cumple que $1 \notin \mathfrak{p}$

$$\therefore V(1) = \varnothing$$

3. Por la observación se sigue la primer igualdad, para la segunda Dado $j \in I$

$$\mathfrak{a}_j \subset \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$$

así que por 1. $V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \subset V(\mathfrak{a}_j)$

$$\therefore V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \subset \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

Por otro lado si $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$ entonces para todo $i \in I$ ocurre que $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ por lo que $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$

$$\therefore \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) \subset V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$$

4. Como $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ entonces por 1.

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

Si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ y $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ entonces $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, es decir, existe $a \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ pero para toda $b \in \mathfrak{b}$ ocurre que $ab \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es in ideal primo $b \in \mathfrak{p}$

$$\therefore \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$$

i.e. $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$

$$\therefore V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Lo que prueba la igualdad entre los tres términos.

□

Observación 1.2

El lema anterior prueba que $\{V(\mathfrak{a}); \mathfrak{a} \subset A$ es in ideal$\}$ forman los cerrados de una topología sobre $Spec(A)$

Por otro lado vamos a definir el otro lado de la conección de Galois que nos gustaría crear.

Definición 1.2: Ideal asociado

Sea $Y \subset Spec(A)$ definimos

$$I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$$

Y definiremos $I(\varnothing) = A$

Probemos un lemma técnico

Lema 1.2

Sea $J \subset A$ un ideal entonces $rad(J) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$.

Demostración. Por un lado si $a \in rad(J)$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in J$ Asi que dado $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ tal que $J \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $a^n \in \mathfrak{p}$ y es un ideal primo se sigue que $a \in \mathfrak{p}$

$$\therefore rad(J) \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$$

Por otro lado sea $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$ y supongamos que $a \notin rad(J)$ entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $a^n \notin J$

$$\therefore \mathcal{F} = \{I \subset A \mid \text{ I es un ideal, } J \subset I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, a^n \notin I\} \neq \varnothing$$

pues $rad(J) \in \mathcal{F}$ y además esta familia esta ordenada por la contención así que por principio de maximalidad de Hausdorff existe $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$ maximal tal que $rad(J) \subset \mathfrak{q}$.
Veamos que $\mathfrak{q} \in Spec(A)$, en efecto, si $xy \in \mathfrak{q}$ y además se tuviera que $x, y \notin \mathfrak{q}$ entonces $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ y por la maximalidad de $\mathfrak{q}$ se tiene que $\mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle \notin \mathcal{F}$ por lo que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $a^n \mathfrak{q} + \langle x \rangle$ y $a^m \in \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ ya que $J \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + \langle x \rangle, \mathfrak{q} + \langle y \rangle$ Por lo que $a^n = q_1 + r_1 x$ y $a^m = q_2 + r_2 y$ con $q_1, q_2 \in \mathfrak{q}$ y $r_1, r_2 \in A$

$$a^{n+m} = (q_1 + r_1 x)(q_2 + r_2 y) = q_1 q_2 + q_1 r_2 y + q_2 r_1 x + r_1 r_2 xy \in \mathfrak{q}$$

pues cada término esta en $\mathfrak{q}$ lo cual es una contradicción y por ende $\mathfrak{q}$ es un ideal primo, es decir, $\mathfrak{q} \in Spec(A)$. Por lo que $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}, \subset \mathfrak{q}$ pues $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ lo cual es una contradicción pues $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$. Esta contradicción vino de suponer que $a \notin rad(J)$ por lo que $a \in rad(J)$.

$$\therefore \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p} \subset rad(J)$$

Lo cual da la igual que buscabamos. □

Además tenemos los siguientes resultados

Lema 1.3

1. Si $Y \subset X$ entonces $I(X) \subset I(Y)$
2. $rad(I(Y)) = I(Y)$
3. $I(V(\mathfrak{a})) = rad(\mathfrak{a})$ y $V(I(Y)) = cl(Y)$ donde cl es la cerradura en Spec(A)

Demostración.

1. Si $p \in I(X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$ entonces, para todo $\mathfrak{p} \in X$, se tiene que $p \in \mathfrak{p}$, como $Y \subset X$ entonces en particular para todo $\mathfrak{p} \in Y$ ocurre que $p \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore I(X) \subset I(Y)$$

2. Siempre ocurre que $I(Y) \subset rad(I(Y))$, y por otro lado si $a \in rad(I(Y))$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I(Y)$ por lo que $a^n \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathbf{p} \in Y$. Como cada uno de estos ideales es primo entonces $a \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in Y$.

$$\therefore rad(I(Y)) \subset I(Y)$$

Lo que prueba la igualdad

3. Para lo primero notemos que

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = rad(\mathfrak{a})$$

Por el lemma previo.
Por otro lado observemos que $V(I(Y))$ es un cerrado de $Spec(A)$ Además dado $y \in Y$ entonces $I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} \subset y$ por lo que $y \in V(y) \subset (V(I(Y)))$

$$\therefore Y \subset V(I(Y))$$

Además si tenemos $V(J)$ un cerrado tal que $Y \subset V(J)$ entonces $J \subset y$ para cualquier $y \in Y$ por lo que $J \subset \bigcap_{y \in Y} y = I(Y)$ asi que $V(I(Y)) \subset V(J)$. Lo que lo hace el cerrado más pequeño en contener a Y, es decir, su cerradura.

$$\therefore V(I(Y)) = cl(Y)$$

□

Observación 1.3

Sean

$$\mathcal{A} = \{I \subset A;\ \text{I es un idel radical de A}\}$$
$$\mathcal{B} = \{Y \subset Spec(A);\ \text{Y es un cerrado de Spec(A)}\}$$

La prueba anterior nos dice que $V : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $I : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ son inversas una de otra y por ende biyecciones entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Observación 1.4

Si $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ entonces $I(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, por lo que

$$V(\mathfrak{p}) = V(I(\{\mathfrak{p}\})) = cl(\{\mathfrak{p}\})$$

Lema 1.4

Si $I, J \subset A$ son ideales de A, entonces $I \subset rad(J)$ si y solo si $rad(I) \subset rad(J)$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $I \subset rad(J)$ y sea $a \in rad(I)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I$ por lo que $a^n \in rad(J) = \bigcap_{J\subset\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ asi que para todo $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ tal que $J \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $a^n \in \mathfrak{p}$ y como cada uno es un ideal primo $a \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore a \in \bigcap_{I\subset\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = rad(J)$$

Concluimos que $rad(I) \subset rad(J)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $rad(I) \subset rad(J)$ entonces como $I \subset rad(I)$ se sigue lo que queriamos.

$\square$

Corolario 1.1

Sea $g \in A$ y $I, J \subset A$ un ideales de A, entonces

$$V(I) \subset V(J) \iff$$
$$rad(J) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(J)} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(I)} \mathfrak{p} = rad(I)$$

En particular para $g \in A$

$$\begin{aligned} &V(I) \subset V(g) \iff \\ &\{g\} \subset rad(I) \iff \\ &g \in rad(I). \end{aligned}$$

Definición 1.3: Abiertos principales

Sea $f \in A$ definimos

$$D(f) = Spec(A) \setminus V(f)$$

y notamos que es un abierto, a los abiertos de este tipo se les llama abiertos principales.

Observación 1.5

Notemos los siguientes hechos:

1. $D(0) = \varnothing$
2. $D(1) = Spec(A)$
3. Dado $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ se cumple que $fg \notin \mathfrak{p}$ si y solo $f, g \notin \mathfrak{p}$ pues $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, por lo que $D(fg) = D(f) \cap D(g)$

Lema 1.5

Sean $\{f_i \mid i \in \Lambda\} \subset A$ y $g \in A$, entonces $D(g) \subset \bigcup_{i\in\Lambda} D(f_i)$ si y solo si $g \in rad\left(\sum_{i\in I}\langle f_i\rangle\right)$

Demostración.

$$D(g) \subset \bigcup_{i\in\Lambda} D(f_i) = \bigcup_{i\in\Lambda} Spec(A) \setminus V(f_i) = Spec(A) \setminus \left(\bigcap_{i\in\Lambda} V(f_i)\right)$$

Y como $\bigcap_{i\in\Lambda} V(f_i) = V(\sum_{i\in\Lambda}\langle f_i\rangle)$ entonces

$$Spec(A) \setminus \left(\bigcap_{i\in\Lambda} V(f_i)\right) = Spec(A) \setminus V\left(\sum_{i\in\Lambda}\langle f_i\rangle\right)$$

por lo que $D(g) \subset \bigcup_{i\in\Lambda} D(f_i)$ si y solo si

$$V\left(\sum_{i\in\Lambda}\langle f_i\rangle\right) \subset V(g)$$

y por el lema 1.1 esto ocurre si y solo si

$$g \in rad\left(\sum_{i\in\Lambda}\langle f_i\rangle\right)$$

□

Observación 1.6

En particular aplicando el lema 1.1 a $g = 1$ entonces:

$$\begin{aligned} D(1) = Spec(A) \subset \bigcup_{i\in\Lambda} D(f_i) &\iff \\ 1 \in rad(\sum_{i\in\Lambda}\langle f_i\rangle) &\iff \\ 1 \in \sum_{i\in\Lambda}\langle f_i\rangle &\iff \\ \langle f_i \mid i \in \Lambda\rangle &= A \end{aligned}$$

en particular $1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{i_j}$ con $n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_j \in A \quad y \quad i_j \in \Lambda$.
Por lo que $\langle f_{i_j} \mid j \in \{1,...,n\}\rangle = A$ y por ende $Spec(A) \subset \bigcup_{j=1}^{n} D(f_{i_j})$ Por lo que toda cubierta tiene una subcubierta finita.

Hemos probado entonces que

Corolario 1.2

Spec(A) es compacto.

Proposición 1.1

Sea A un anillo, entonces $\mathcal{B} = \{D(f); f \in A\}$ es una base para la topología de Spec(A).

Demostración. Sea $U \subset Spec(A)$ un abierto, entonces $Spec(A) \setminus U$ es un conjunto cerrado, por lo que existe $I \subset A$ ideal de A tal que $Spec(A) \setminus U = V(I)$, además.

$$V(I) = V\left(\bigcup_{f\in I}\{f\}\right) = \bigcap_{f\in I} V(f)$$

De donde se sigue que:

$$U = Spec(A)\setminus V(I) = Spec(A)\setminus\left(\bigcap_{f\in I} V(f)\right) = \bigcup_{f\in I}(Spec(A)\setminus V(f)) = \bigcup_{f\in I} D(f)$$

$\square$

Proposición 1.2

Sean A un anillo y $f \in A$, entonces $D(f) \subset Spec(A)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{D(g_i) \mid i \in I\}$ una cubierta de $D(f)$ conformada por abiertos básicos. Como son una cubierta $D(f) \subset \bigcup_{i \in I} D(g_i)$ y por el lema 1.1 se sigue que $f \in rad\left(\sum_{i \in I} \langle g_i \rangle\right)$. Y notemos que

$$\sum_{i \in I} \langle g_i \rangle = \langle \{g_i \mid i \in I\} \rangle$$

Por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in \langle \{g_i \mid i \in I\} \rangle$ asi que existe $m \in \mathbb{N}$ para la cual se cumple que $f^n = \sum_{j=1}^{m} a_j g_{i_j}$ con $a_j \in A$ e $i_j \in I$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, en particular, $f^n \in \langle \{g_{i_j} \mid j \in \{1, \ldots, m\}\} \rangle$ por lo que, $f \in rad\left(\sum_{j=1}^{m} \langle g_{i_j} \rangle\right)$ y de nuevo por el lema 1.1 se sigue que, $D(f) \subset \bigcup_{j=1}^{m} D(g_{i_j})$ así que podemos conluir que $\{g_{i_j} \mid j \in \{1, \ldots, m\}\} \subset \mathcal{U}$ es una subcubierta finita. $\square$

Proposición 1.3

Sea A un anillo. Un subespacio $Y \subset Spec(A)$ es irreducible si y solo si $\mathfrak{p} = I(Y)$ es un ideal primo, es decir, $I(Y) \in Spec(A)$. Más aún en este caso $\{\mathfrak{p}\}$ es denso en $cl(Y)$.

Demostración. $\Longrightarrow$ Supongamos que Y es irreducible y sean $f, g \in A$ tales que $fg \in \mathfrak{p}$, entonces

$$Y \subset cl(Y) = V(I(Y)) = V(\mathfrak{p}) \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

. y como Y es irreducible entonces $Y \subset V(f)$ o $Y \subset V(g)$, por lo que $f \in I(V(f)) \subset I(Y) = \mathfrak{p}$ o $g \in I(V(g)) \subset I(Y) = \mathfrak{p}$, es decir, $f \in \mathfrak{p}$ o $g \in \mathfrak{p}$. Lo que prueba que $\mathfrak{p}$ es in ideal primo.
$\Longleftarrow$ Supongamos que $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ entonces

$$cl(Y) = V(I(Y)) = V(\mathfrak{p}) = V(I(\{\mathfrak{p}\})) = cl(\{\mathfrak{p}\})$$

y como $\{\mathfrak{p}\}$ es irreducible, $cl(Y)$ es irreducible y por ende Y es irreducible y eso también prueba que $\{\mathfrak{p}\}$ es denso en $cl(Y)$. $\square$

Corolario 1.3

Sea $\mathcal{A} = \{Y \subset Spec(A); \text{Y es cerrado e irreducible}\}$, entonces

$$f : Spec(A) \to \mathcal{A}$$

dada por $f(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p}) = cl(\mathfrak{p})$ es una biyección.

Demostración. Como $\{\mathfrak{p}\}$ es irreducible entonces $f(\mathfrak{p}) = cl(\{\mathfrak{p}\})$ es cerrado e irreducible. Y si $Y \subset Spec(A)$ es un cerrado irreducible entonces $I(Y) \in Spec(A)$ y además $f(I(Y)) = cl(Y) = Y$ por la Proposición anterior por lo que f es sobre, y además si $cl(\{\mathfrak{p}\}) = cl(\{\mathfrak{q}\})$ entonces $V(\{\mathfrak{p}\}) = V(\{\mathfrak{q}\})$ por lo que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Asi que f es inyectiva y por ende biyectiva. □

Notemos además que la correspondencia anterior invierte el orden de la contención de cada lado. Pensando a los elementos de $Spec(A)$ con el orden dado al ser ideales de A. Así que si tenemos un ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ minimal $V(\mathfrak{p}) \subset Spec(A)$ es un cerrado e irreducible maximal por lo que es una componente irreducible de $Spec(A)$. Más aún si hay mas de un ideal primo minimal entonces $Spec(A)$ tendrá mas de una componente irreducible por lo que $Spec(A)$ es irreducible si y solo si tiene un único ideal primo minimal, de hecho, eso lo hace mínimo.

Ejemplo 1.1

Un ejemplo concreto de esto podría ser $Spec(\mathbb{Z})$ Aquí nuestro único ideal minimal (de hecho es mínimo) es $\{0\}$ por lo que $V(0) = Spec(\mathbb{Z})$ es un cerrado e irreducible. Más aún sus cerrados irreducibles serán de la forma $V(\langle p \rangle)$ con $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y observemos más

$$\begin{aligned}
&V(\langle p \rangle)\\
&= \{\langle q \rangle; \langle p \rangle \subset \langle q \rangle \text{ con q primo}\}\\
&= \{\langle q \rangle; q \text{ es primo y divide a } p\}\\
&= \{\langle p \rangle\}
\end{aligned}$$

Por lo que todos los demás cerrados irreducibles son unitarios.

Proposición 1.4

Sea $f \in A$, entonces $D(f) = \varnothing$ si y solo si f es nilpotente

Demostración.

$$\begin{aligned}
D(f) = \varnothing &\iff\\
D(f) \subset \varnothing = D(0) &\iff\\
f \in rad(\{0\}) &\iff\\
\text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n = 0 &\iff\\
&f \text{ es nilpotente.}
\end{aligned}$$

□

Definición 1.4: Puntos

Sean X un espacio topologico y $x, y \in X$ definimos los siguientes conceptos:

1. Decimos que x es un punto cerrado si $\{x\}$ es un conjunto cerrado.
2. Decimos que x es un punto generico si $cl(\{x\}) = X$.
3. Decimos que x es una generalizacion de y (o que y es una especialización de x) si $y \in cl(\{x\})$.
4. Decimos que x es un punto maximal si $cl(\{x\})$ es una componente irreducible de X.

Ejemplo 1.2

Si en la definición 1.4 tenemos que $X = Spec(A)$ para algún anillo A entonces las definiciones tienen significados algebraicos.

1. x es cerrado si es un ideal maximal de A.
2. x es un punto generico si es (el único) ideal primo mínimo de A. y notemos que para que eso ocurra entonces $x = rad(\{0\})$. Así que podemos conluir que la existencia de un punto generico en $Spec(A)$ depende de que $rad(\{0\}) \in Spec(A)$.
3. x es una generalización de y si $x \subset y$.
4. x es un punto maximal si x es un ideal primo minimal.

Definición 1.5: Radicales

Sea A un anillo definimos el nilradical de A

$$Nil(A) = rad(\{0\})$$

Y el radical de Jacobson de A.

$$Jac(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}} \mathfrak{m}$$

donde $\mathcal{M} = \{\mathfrak{m} \subset A \mid \mathfrak{m} \text{ es un ideal maximal de } A\}$.

Proposición 1.5

Sea A un anillo entonces $Nil(A) = Jac(A)$ si y solo si para todo $U \subset Spec(A)$ abierto no vacio existe $x \in U$ punto cerrado de $Spec(A)$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $Nil(A) = Jac(A)$ y sea $U \subset Spec(A)$ un abierto no vacío y supongamos que no tiene ningun punto cerrado, es decir $\forall \mathfrak{m} \in \mathcal{M}, \mathfrak{m} \in Spec(A) \setminus U$.

Primero, como U es abierto entonces existe $I \subset A$ un ideal de A tal que $U = Spec(A) \setminus V(I)$. Entonces nuestra hipótesis se traduce a que $\forall \mathfrak{m} \in \mathcal{M}, \mathfrak{m} \in V(I)$, es decir, $I \subset \mathfrak{m}$, por ende $I \subset Jac(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}} \mathfrak{m}$ y como $Nil(A) = Jac(A)$, ocurre que $I \subset Nil(A)$. Sin embargo, notemos que $Nil(A) = \bigcap_{\mathfrak{q} \in Spec(A)} \mathfrak{q}$ por el lema 1.1 asi que para cualquier $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, $Nil(A) \subset \mathfrak{p}$ por lo que $I \subset \mathfrak{p}$ y entonces $V(I) = Spec(A)$ pero entonces $U = \varnothing$! lo cual es una contradicción. Por ende existe $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ tal que $\mathfrak{m} \in U$.

$\Longleftarrow$) Por contapuesta supongamos que $Nil(A) \neq Jac(A)$ y notemos que como $\mathcal{M} \subset Spec(A)$ entonces $Nil(A) \subset Jac(A)$ y veamos ahora que:

$$V(Jac(A)) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid Jac(A) \subset \mathfrak{p}\} \neq Spec(A)$$

pues si fuera $Spec(A)$ entonces para todo $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ $Jac(A) \subset \mathfrak{p}$ y por ende $Jac(A) \subset Nil(A)$! Así que $U = Spec(A) \setminus V(Jac(A)) \neq \varnothing$ sin embargo dado cualquier $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ se tien que $Jac(A) \subset \mathfrak{m}$ por lo que $\mathfrak{m} \in V(Jac(A))$, es decir

$$\forall \mathfrak{m} \in \mathcal{M}, \mathfrak{m} \in Spec(A) \setminus U$$

Por lo tanto U no contiene ningún punto maximal.

$\square$

Observación 1.7

Sean A, B un anillos y $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos, si $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ entonces $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in Spec(A)$.

Demostración. Es claro que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ es un ideal. Sean $f, g \in A$ tales que $fg \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ entonces $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g) \in \mathfrak{q}$ y como $\mathfrak{q}$ es primo entonces $\varphi(f) \in \mathfrak{q}$ o $\varphi(g) \in \mathfrak{q}$, lo que es equivalente a decir $f \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ o $g \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Así que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ es un ideal primo de A. $\square$

La observacion 1.7 nos dice que todo morfimo de anillo induce un morfismo en los *Spec* de los anillos. Definamosla y veamos sus propiedades.

Definición 1.6

Dados A, B anillos y $\varphi : A \to B$ un morfimo de anillos ente ellos definimos la función $Spec(\varphi) : Spec(B) \to Spec(A)$ dada por $Spec(\varphi)(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$

Probemos antes un lema técnico

Lema 1.6

Sean A, B anillos, $\mathfrak{b} \subset B$ un ideal de B y $\varphi : A \to B$ un morfimo de anillos entre ellos, entonces $rad(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = \varphi^{-1}(rad(\mathfrak{b}))$

Demostración.

$$\begin{aligned} b \in rad(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) &\iff \\ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b^n \in \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) &\iff \\ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \varphi(b^n) \in \mathfrak{b} &\iff \\ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \varphi(b)^n \in \mathfrak{b} &\iff \\ \varphi(b) \in rad(\mathfrak{b}) &\iff \\ b \in \varphi^{-1}(rad(\mathfrak{b})). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.6

Dados A, B anillos, $M \subset A$, $\mathfrak{b} \subset B$ un ideal y $\varphi : A \to B$ morfimo de anillos, la función $Spec(\varphi) : Spec(B) \to Spec(A)$ cumple que:

1. $Spec(\varphi)^{-1}(V(M)) = V(\varphi(M))$.
2. $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = cl(Spec(\varphi)(V(\mathfrak{b})))$.

Demostración. 1. Sea $\mathfrak{q} \in Spec(B)$

$\subset$) Si $\mathfrak{q} \in V(\varphi(M))$ entonces $\varphi(M) \subset \mathfrak{q}$ por lo que

$$M \subset \varphi^{-1}(\varphi(M)) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

asi que $Spec(\varphi)(\mathfrak{q}) \in V(M)$

$$\therefore \mathfrak{q} \in Spec(\varphi)^{-1}(V(M))$$

.

$\supset$) Si $\mathfrak{q} \in Spec(\varphi)^{-1}(V(M))$ entonces $Spec(\varphi)(\mathfrak{q}) \in V(M)$ y por ello, $M \subset Spec(\varphi)(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ y entonces se sigue que

$$\varphi(M) \subset \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) \subset \mathfrak{q}$$

asi que $\mathfrak{q} \in V(\varphi(M))$.

2. Notemos que

$$I(Spec(\varphi)(V(\mathfrak{b}))) = I(\varphi^{-1}(V(\mathfrak{b}))) = \bigcap_{\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{b})} \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$
$$= \varphi^{-1}(\bigcap_{\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(rad(\mathfrak{b})) = rad(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$$

Esto gracias al lema 1.6, asi que

$$cl(Spec(\varphi)(V(\mathfrak{b}))) = V(I(Spec(\varphi)(V(\mathfrak{b}))))$$
$$= V(rad(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$$

□

Observación 1.8

Observemos que la primer parte de la proposición 1.6 dice que $Spec(\varphi)$ es una función continua.
Notemos que en particular para $f \in A$

$$Spec(\varphi)^{-1}(D(f)) = Spec(\varphi)^{-1}(Spec(A) \setminus V(f))$$
$$= Spec(B) \setminus Spec(\varphi)^{-1}(V(f)) = Spec(B) \setminus V(\varphi(f)) = D(\varphi(f))$$

Además si tenemos dos morfimos de anillos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ ocurre que $Spec(g \circ f) = Spec(f) \circ Spec(g)$, por lo que $Spec(-)$ define un funtore contravariante de la categoria de anillos a la de espacios topológicos.

Proposición 1.7

Sean A, B anillos y $\varphi : A \to B$ morfismo de anillos entonces $Spec(\varphi)$ es un morfismo dominante si y solo si todos los elementos de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ son nilpotentes.

Demostración. Por el lema 1.6 se tiene que

$$V(\mathrm{Ker}(\varphi)) = V(\varphi(\{0\})) = cl(Spec(\varphi)(V(0)))$$
$$= cl(Spec(\varphi)(Spec(A))) = cl(\mathrm{Im}(Spec(\varphi)))$$

$$\begin{aligned} Spec(\varphi) \text{ es dominante} &\iff \\ cl(\mathrm{Im}(Spec(\varphi))) = Spec(B) &\iff \\ V(\mathrm{Ker}(\varphi)) = Spec(B) &\iff \\ \forall f \in \mathrm{Ker}(\varphi), \quad V(f) = Spec(B) &\iff \\ \forall f \in \mathrm{Ker}(\varphi), \quad D(f) = \varnothing &\iff \\ \forall f \in \mathrm{Ker}(\varphi), \quad \text{f es nilpotente.} & \end{aligned}$$

Esto último gracias a la proposición 1.4. $\square$

Recordemos un lema de localizaciones

Lema 1.7

Sean A un anillo, $S \subset A$ un conjunto multiplicativo y $I \subset S^{-1}A$ es un ideal, entonces $I = S^{-1}i^{-1}(I)$ donde $i : A \to S^{-1}A$ es el morfismo canónico.

Demostración. $\subset$) Sea $a/s \in I$ entonces, como I es un ideal, $i(a) = a/1 = (s/1)(a/s) \in I$ asi que $a \in i^{-1}(I)$ por lo que $a/s \in S^{-1}i^{-1}(I)$.

$\supset$) Si $a/s \in S^{-1}i^{-1}(I)$ se tiene que $a \in i^{-1}I$ y entonces $i(a) = a/1 \in I$ y como I es un ideal $a/s = (1/s)(a/1) \in I$

$\square$

Proposición 1.8

Sea A un anillo

1. Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos entonces $Spec(\varphi)$ es un homeomorfismo entre $Spec(B)$ y $V(\text{Ker}(\varphi)) \subset A$ con su topología de subespacio.

2. Sean $S \subset A$ un subconjunto multiplicativo y $i : A \to S^{-1}A$ el morfismo canónico, entonces $Spec(i)$ es un homeomorfismo entre $Spec(S^{-1}A)$ y $\mathcal{S} = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid S \cap \mathfrak{p} = \varnothing\}$

Demostración. 1. Veamos primero que si $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ entonces $\{0\} \subset \mathfrak{q}$ y por ende $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = Spec(\varphi)(\mathfrak{q})$

$$\therefore Spec(\varphi)(\mathfrak{q}) \in V(\text{Ker}(\varphi))$$

Como se quería, ahora veamos la biyectividad.
Por el primer teorema de isomorfismo se tiene que $B \simeq A/\text{Ker}(\varphi)$ y por el teorema de correspondencia hay una biyección entre ideales de $A/\text{Ker}(\varphi)$ e ideales $I \subset A$ tales que $\text{Ker}(\varphi) \subset I$ y la biyección esta dada por tomar preimagen asi que en particular $Spec(\varphi)$ es la restricción de esta biyección a $V(\text{Ker}(\varphi))$ esta biyección es precisamente con $Spec(A/\text{Ker}(\varphi))$ que por el isomorfismo esta en biyección con $Spec(B)$. Resumiendo el argumento, el teorema de correspondencia nos garantiza que $Spec(\varphi)$ es una biyección entre $V(\text{Ker}(\varphi))$ y $Spec(B)$.

Finalmente si $V(\mathfrak{b}) \subset Spec(B)$ es un cerrado se tiene que

$$\begin{aligned}
&Spec(\varphi)(V(\mathfrak{b})) \\
&= \{Spec(\varphi)(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})\} \\
&= \{Spec(\varphi)(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{b} \subset \mathfrak{q} \in Spec(B)\} \\
&= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{b} \subset \mathfrak{q} \in Spec(B)\} \\
&= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in V(\mathrm{Ker}(\varphi))\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in V(\mathrm{Ker}(\varphi)) \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{p}\} \\
&= V(\mathrm{Ker}(\varphi)) \cap V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))
\end{aligned}$$

Por lo que $Spec(\varphi)$ es una función cerrada en su imagen. Concluimos que $Spec(\varphi)$ es un homeomorfismo en su imagen

2. Recordemos que $i : A \to S^{-1}A$ esta dada por $i(a) = a/1$ Primero notemos que dado $\mathfrak{p} \in Spec(S^{-1}A)$ entonces $Spec(i)(\mathfrak{p}) \cap S = \varnothing$ pues de lo contrario existiria $s \in S \cap i^{-1}(\mathfrak{p})$, es decir, $i(s) \in \mathfrak{p}$ pero $i(s)$ es una unidad de $S^{-1}A$ y entonces $\mathfrak{p} = S^{-1}A!$ pero esto no es posible ya que al ser un ideal primo debe ser propio. Asi que $\mathrm{Im}(Spec(i)) \subset \mathcal{S}$. Probemos la biyectividad.

Sobre Sea $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ y consideremos

$$S^{-1}\mathfrak{p} = \{p/s \mid p \in \mathfrak{p}, s \in S\}$$

Como $p/s = 1/1 \iff \exists t \in S, t(p-s) = 0 \iff \exists t \in S, tp = ts \in S$ entonces como $\mathfrak{p}$ es un ideal $tp \in \mathfrak{p}$ lo cual contradice la suposición, asi que $1/1 \notin S^{-1}\mathfrak{p}$ entonces es un subconjunto propio de $S^{-1}A$. Más aún, si $p_1/s_1, p_2/s_2 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ entonces $p_1/s_1 + p_2/s2 = (s_2p_1 + s_1p_2)/(s_1s_2) \in S^{-1}\mathfrak{p}$ y también $(p_1/s_1)(p_2/s_2) = (p_1p_2)/(s_1s_2) \in S^{-1}\mathfrak{p}$ pues $\mathfrak{p}$ es un ideal. Finalmente si $a_1/s_1, a_2/b_2 \in S^{-1}A$ son tales que $(a_1/b_1)(a_2/b_2) \in S^{-1}\mathfrak{p}$ entonces $a_1a_2 \in \mathfrak{p}$ por lo que $a_1 \in \mathfrak{p}$ o $a_2 \in \mathfrak{p}$ por lo tanto, $a_1/b_1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ o $a_2/b_2 \in S^{-1}\mathfrak{p}$, por lo que $S^{-1}\mathfrak{p} \in Spec(S^{-1}A)$.
Notemos que

$$\begin{aligned}
Spec(i)(S^{-1}\mathfrak{p}) &= i^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) \\
&= \{a \in A \mid i(a) = a/1 \in \mathfrak{p}\} = \{a \in A \mid a \in \mathfrak{p}\} = \mathfrak{p}
\end{aligned}$$

Asi que $Spec(i)$ es sobre.

Inyectiva Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in Spec(S^{-1}A)$ son tales que $Spec(i)(\mathfrak{p}) = Spec(i)(\mathfrak{q})$, es decir, $i^{-1}(\mathfrak{p}) = i^{-1}(\mathfrak{q})$ por el lema 1.7 se tiene que

$$\mathfrak{p} = S^{-1}i^{-1}(\mathfrak{p}) = S^{-1}i^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$$

. Por lo que $Spec(i)$ es inyectiva.

Y para terminar veamos que es una función cerrada ya que, si $V(\mathfrak{b}) \subset Spec(S^{-1}A)$ es un cerrado, entonces:

$$\begin{aligned} &Spec(i)(V(\mathfrak{b})) \\ &= \{Spec(i)(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})\} \\ &= \{i^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{b} \subset \mathfrak{q} \in Spec(S^{-1}A)\} \\ &= \{i^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathcal{S} \mid i^{-1}(\mathfrak{b}) \subset i^{-1}(\mathfrak{q})\} \\ &= \mathcal{S} \cap V(i^{-1}(\mathfrak{b})) \end{aligned}$$

Concluimos que $Spec(i)$ es un homeomorfismo entre $\mathcal{S}$ y $Spec(S^{-1}A)$.

$\square$