

# 麦克纳姆轮全向移动机器人运动模型及应用分析



作者：混沌无形  
日期：2021-06-30



**摘要：**麦克纳姆轮平台因其优异的机动性而备受关注，本文深入分析麦克纳姆轮的运动机理及其麦轮平台运动过程中的受力情况，先后分析麦轮平台的 6 种运动模式及其内在运动规律；并采用速度分解的方法，详细分析了电机转速-麦轮实际运动速度-麦轮平台中心点速度之间的关系，给出完整的物理分析及数学推导过程，构建麦轮平台的运动学模型；最后从速度空间、运动效率等方面分析麦轮平台的适用场景。

## 1 引言

从运动空间分类，轮式移动机器人可分为非全向移动类型和全向移动类型。在之前的系列文章中已经介绍了两轮差速机器人、car-like robot、四轮驱动（SSMR）机器人及履带式机器人，这都属于非全向（差速驱动）移动机器人的范畴，而本文将介绍全向移动机器人中的一款——基于麦克纳姆轮的全向移动机器人（下文简称为**麦轮平台**）。

麦克纳姆轮（下文简称**麦轮**）在生活中并不常见，多被应用于科研教学、机器人竞赛等场景，其运动模式非常炫酷，包括前行、横移、斜行、旋转及其组合等多种运动方式。由此诸多 DIYer 常制作麦轮平台，并遥控操纵麦轮平台运动。（点击下图链接查看麦轮平台运动视频）

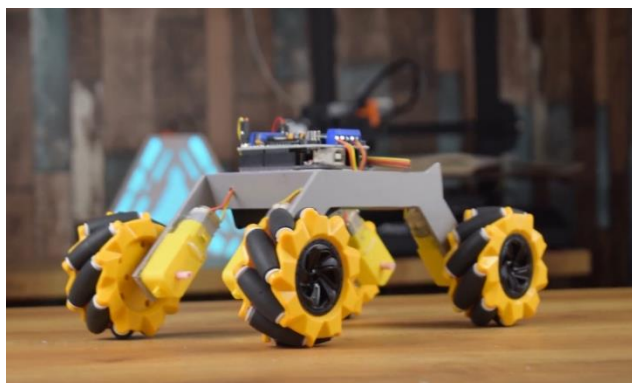


图 1.1 MIT RACECAR

（[视频链接](https://mp.weixin.qq.com/s/X0KfnTeu4G6LH3zcR8YeyA):https://mp.weixin.qq.com/s/X0KfnTeu4G6LH3zcR8YeyA）

如图 1.1 所示，麦轮平台就是由四个麦克纳姆轮按照一定规律排布组成的移动平台，麦轮平台能够全向移动主要依赖于具有特殊构型的麦轮（由轮毂和辊子组成，见图 1.2（a）），而最大的亮点是麦轮能够斜向运动。（**重点：**关于麦轮构型、受力及速度的分析见文章《[麦克纳姆轮运动特性分析](#)》）

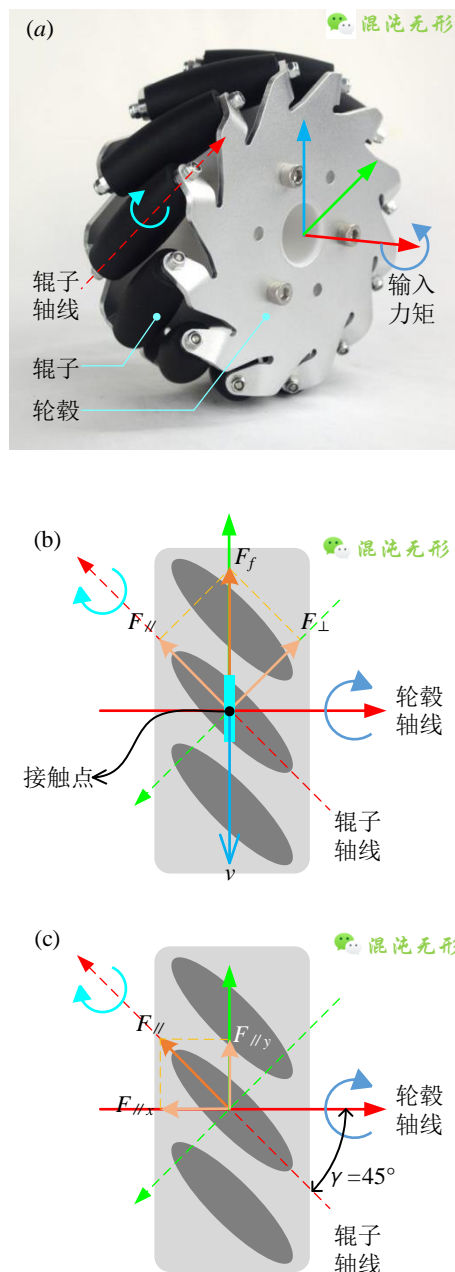


图 1.2 麦克纳姆轮结构示意图.（a）轮结构分析，（b）辊子受力分析。（c）麦轮受力分析 图中坐标系红色表示  $x$  轴，绿色表示  $y$  轴，蓝色表示  $z$  轴，辊子坐标系用虚线表示，轮毂坐标系用实线表示；黄色箭头表示麦轮和辊子的受力分析；蓝色箭头表示速度方向。

## MARK 1. 麦轮奥秘的根源

麦轮能够斜向运动的根源在于被动滚动的辊子的轴线与轮毂轴线的夹角为  $45^\circ$ ，这就导致了电机驱动麦轮轮毂转动时，麦轮整体运动方向是沿着辊子轴线的。

关于麦轮运动特性的详细分析请参考《[麦克纳姆轮运动特性分析](#)》，这也是理解本文运动学模型的一个核心要点。

从《[麦克纳姆轮运动特性分析](#)》中得到的结论是：结合图 1.2 (b)，地面作用于辊子的摩擦力 ( $F_f$ ) 分解为滚动摩擦力 ( $F_{\perp}$ ) 和静摩擦力 ( $F_{\parallel}$ )。滚动摩擦力促使辊子转动，属于无效运动；静摩擦力促使辊子相对地面运动，而辊子被轮毂“卡住”，因而带动整个麦轮沿着辊子轴线运动（即轮毂逆时针旋转，运动方向为左上  $45^\circ$ ；轮毂顺时针旋转，运动方向为右下  $45^\circ$ ）。因此改变辊子轴线和轮毂轴线的夹角，就可以改变麦轮实际的（受力）运动方向。具体效果见图 1.3（可见微信原文动图）

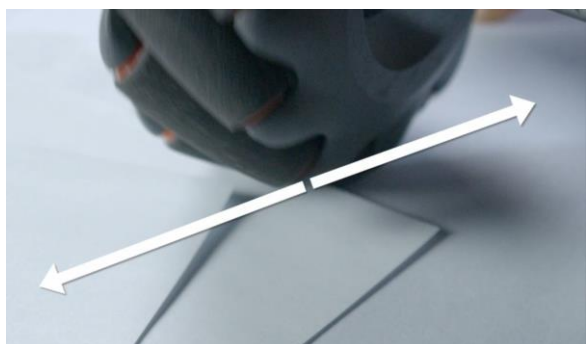


图 1.3 麦轮运动效果. 朝向左下的箭头为纸张运动方向，朝向右上的箭头表示麦轮运动方向.（图片来源参考[3]）

结合图 1.2 (c) 进一步分析，静摩擦力 ( $F_{\parallel}$ ) 才是驱动麦轮运动的力，将之沿着轮毂坐标系的坐标轴分解，得到沿轮毂径向（纵向）分力 ( $F_{\parallel y}$ ) 和沿轮毂轴向（横向）的分力 ( $F_{\parallel x}$ )。

根据麦轮受力特点，因此有着多种构型的麦轮平台。图 1.4 中呈现了两种常见的麦轮平台构型，子图 (a) 为“外八”构型，形象表示两前轮的辊子是朝向外开的；子图 (b) 的两前轮辊子是朝向内闭的，呈“内八”构型。

麦轮平台构型是有规律的：两前轮和两后轮关于横向中轴线上下对称，两左侧轮和两右侧轮关于纵向中轴线左右对称。因为对称才能平衡纵向或横向上的分力，后续会通过理论分析来验证这条论断。

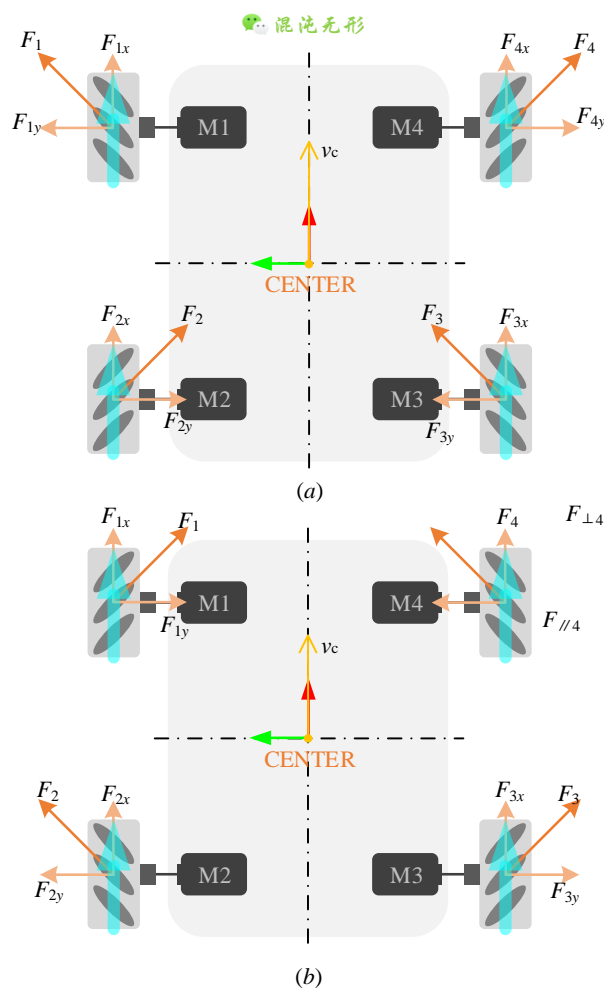


图 1.4 麦轮平台构型. (a)“外八”构型，(b)“内八”构型. 蓝色箭头表示轮子运动方向，橘黄色箭头表示麦轮的受力分析情况

尽管麦轮平台的实际构型随着应用场景需求不同而有相应的变化，但运动模型原理及分析方法都是一致的。因此，本文以图 1.4 (b) 中的构型为例做进一步分析，第 2 章将先分析麦轮平台不同运动模式的规律及机理，并采用速度分解方法分析麦轮转速与麦轮平台中心点速度之间的关系，以此构建麦轮平台的正逆运动学模型；第 3 章将描述麦轮平台运动模型的应用场景及其开源项目，第 4 章对比分析差速机器人和麦轮平台之间差异，最后进行总结和展望。

## 2 运动模型分析

### 2.1 机器人坐标系说明

**建立坐标系：**如图 2.1 所示，建立以机器人几何中心（AC 与 DB 的交点）为原点的 CENTER 坐标系，机器人前向运动方向为  $x$  轴正方向（红色箭头），与之垂直向左为  $y$  轴正方向（绿色箭头）， $z$  轴垂直

于纸面向外，满足右手定则。

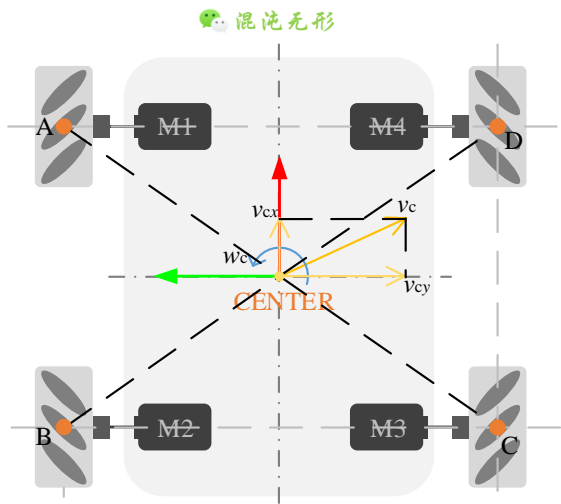


图 2.1 “内八”构型麦轮平台坐标系示意图

麦轮平台是全向移动机器人的原因是其有三个自由度，意味着可以在平面内做出任意方向平移同时自旋的动作，如图 2.1 所示，采用任意方向的线速度及角速度 $[v_c \ w]^T$ 来描述 CENTER 的速度，而  $v_c$  可沿着坐标轴分解为两个分速度，表示为 $[v_{cx} \ v_{cy}]^T$ 。

其线速度 $[v_{cx} \ v_{cy}]^T$ 方向为沿着坐标轴正方向则为正，反方向为负；而机器人逆时针旋转的时候，角速度  $w$  为正，反之为负。（定义方式与《[两轮差速驱动机器人运动模型及应用分析](#)》中的相似）

2.2 运动模型规律分析

在对麦轮平台运动规律分析之前需要做两个基本假设：①麦轮平台运动过程中，轮子不会悬空而发生空转现象；②麦轮平台质量分布均匀，且质心位置在点 CENTER 处，以保证四个轮子在地面接触点受到的支撑力相同，确保四个等转速的轮子受到地面作用的摩擦力大小相同。

基于上述假设条件，并按照一定规律联合控制四个轮子等速转动，便可实现。这是因为轮毂轴与边子转轴夹角呈 45 度，如图 1.2 (c) 所示，沿边子轴线的静摩擦力可沿着轮毂轴向和径向分解，进一步迁移至图 1.4 分析，**只有当轮毂轴与边子转轴夹角呈 45 度时，才能保证左右和前后对称位置的(等速)麦轮在轮毂轴向及径向上的分力可以恰好相互抵消，进而形成合力而运动。**

要满足上述的分力能够相互抵消的条件是麦轮（或电机）转速大小相同，因为每个麦轮受到的地面支持力相同（基于假设①②），4 个电机又匀速等速转动，意味着电机输出扭矩与地面作用于麦轮的摩擦力是平衡的，4 个麦轮摩擦力在轮毂轴向和径向上

分解的大小是相同的，而速度分解与力分解类似，所以 4 个麦轮沿轮毂轴向和径向的分速度大小是相同的。（详细分析见《[麦克纳姆轮运动特性分析](#)》）

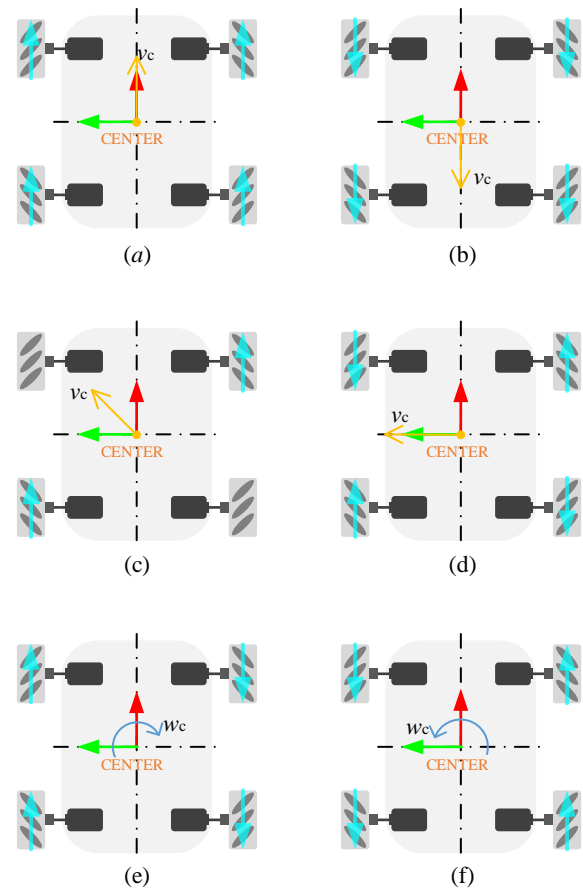


图 2.2 运动模式示意图. (a) 前向运动，(b) 后向运动，(c) 斜向运动，(d) 左向运动，(e) 顺时针自旋运动，(f) 逆时针自旋运动

表 2-1 运动模式及规律分析

模式	左前轮	左后轮	右后轮	右前轮
(a)	+	+	+	+
(b)	-	-	-	-
(c)	0	+	0	+
(d)	-	+	-	+
(e)	+	+	-	-
(f)	-	-	+	+

备注：+表示轮子正转（前向滚动），-表示轮子反转（后向滚动），0 表示轮子不转动；左前轮对应电机 M1，左后轮对应电机 M2，右后轮对应电机 M3，右前轮对应电机 M4，且四个电机的转速大小相同。

如图 2.2 中呈现了麦轮平台的 6 种常规的运动模式。结合表 2-1 的信息做进一步分析：

①纵向直线运动：以图 2.2 (a) 为例，四个麦轮

均做前向运动,再结合图 1.4(a)中麦轮的受力分析,当四个麦轮同向等速转动时,**横向分力相互抵消,纵向分力形成合力**,驱动麦轮平台向前,用数学公式表达为

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{4y} = 0 \\ F_{2y} + F_{3y} = 0 \\ F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $[F_{1x} F_{2x} F_{3x} F_{4x}]$ 和 $[F_{1y} F_{2y} F_{3y} F_{4y}]$ 分别表示四个麦轮静摩擦力 $[F_1 F_2 F_3 F_4]$ 对应的纵向分力和横向分力,  $F_{\Sigma x}$  表示麦轮平台受到的纵向合力。所以,四个麦轮同向等速转动时,麦轮平台做前进/后退的纵向直线运动。

②**斜向运动**:以图 2.2 (c) 为例,当左后轮和右前轮前向转动,且右后轮和左前轮不转动时,再结合图 1.4 (a) 的受力分析,仅有斜向力 $[F_2 F_4]$ ,且二者**方向平行**,形成的合力驱动麦轮平台**斜向左上运动**;若左后轮和右前轮后向转动,形成反向合力,驱动麦轮平台**斜向右下运动**;若右前轮和左后轮不转动,左前轮和右后轮前向转动,则合力驱动麦轮平台**斜向右上运动**,若左前轮和右后轮后向转动,则合力驱动麦轮平台**斜向左下运动**。

③**横向直线运动**:以图 2.2 (d) 为例,其分析方式和纵向直线运动相似,**纵向分力相互抵消,横向分力形成合力**,驱动麦轮平台向右运动;若四个麦轮均反向转动,则横向合力驱动麦轮平台向左运动。

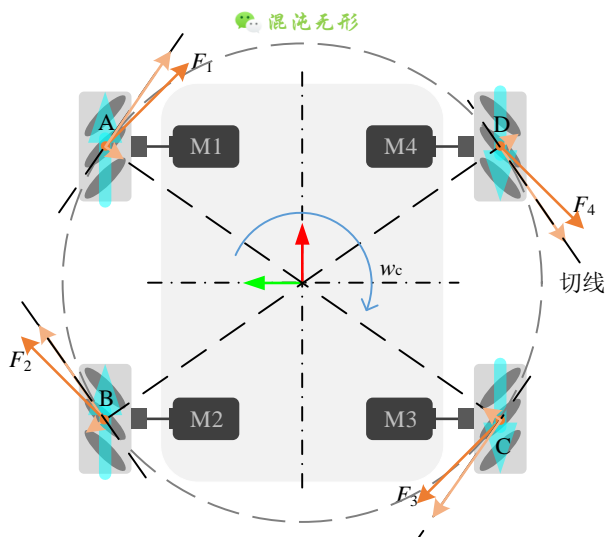


图 2.3 麦轮平台自旋受力分析示意图

④**自旋运动**:以图 2.2 (e) 为例,四个麦轮按照设定的方向转动,对应的受力分析如图 2.3,需要注意的是**作用力 $[F_1 F_2 F_3 F_4]$ 方向并不一定是圆的切线方向**,当且仅当四边形 ABCD 为正方形时,麦轮作用力方向为圆的切线方向。具体分析如下:

麦轮作用力方向平行于辊子轴线,而辊子轴线方向呈斜向 45 度(或 135 度),只有当四边形 ABCD 为正方形时,对角线 AC 与左前轮、右后轮的辊子轴线垂直;对角线 BD 与右前、左后轮的辊子轴线垂直,所以麦轮作用力方向平行于辊子轴线也就意味着麦轮作用力方向垂直于正方向 ABCD 的对角线,所以麦轮作用力方向就是正方向 ABCD 外接圆的切线方向。也说明:四边形 ABCD 不为正方形时,麦轮作用力方向就与四边形 ABCD 外接圆切线不重合。

本文对此做一般化分析,认为四边形 ABCD 为普通矩形,这就需要对四个麦轮作用力 $[F_1 F_2 F_3 F_4]$ 做分解,如图 2.3 所示,将麦轮作用力沿四边形 ABCD 外接圆的切向和径向分解,可知:对角的两个麦轮作用力 ( $[F_1 F_3]$ 和 $[F_2 F_4]$ ) 方向平行反向,大小相等;左前轮和右后轮的径向分力相互抵消,右前轮和左后轮的径向分力相互抵消;而剩下的四个麦轮作用力的切向分力,大小相同,且均为顺时针方向,则形成合力驱动麦轮平台顺时针旋转。同样的分析,当四个麦轮转向均反向,则麦轮平台逆时针旋转。

通过上述定性分析可知,通过联合控制四个麦轮的转动,便可驱动麦轮平台按照不同的模式运动,为进一步精准控制麦轮平台运动,还需要做定量分析,这就需要建立运动学模型。

## 2.3 运动学模型建立

如图 2.4 所示,麦轮平台运动学模型是要建立四个麦轮转速与几何中心速度之间的关系。正运动学模型是已知四个麦轮的转速,计算麦轮平台中心点 CENTER 的速度;逆运动模型是已知麦轮平台中心点 CENTER 的速度,计算四个麦轮的转速。

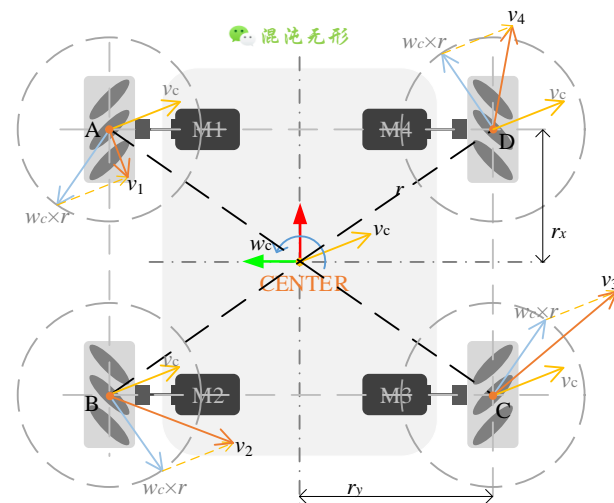


图 2.4 麦轮平台运动分解示意图. 图中  $r$  表示中心点 CENTER 到麦轮与地面接触点之间的距离,  $r_x$  和



$r_x$  分别表示  $r$  在 CENTER 坐标系  $x$  轴和  $y$  轴上的投影距离（均为正值）。

那就先从逆运动模型开始：已知点 CENTER 速度  $[v_c w]^T$ ，需要分解到各个麦轮上，采用平面刚体运动规律分析方法，单个麦轮的速度是由点 CENTER 速度及角速度共同作用合成的，可表示为

$$v_i = v_c + w_c \times r_i (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

式中， $v_i$  表示第  $i$  个麦轮的合速度，对应图 2.4 中的橘黄色箭头； $v_c$  表示点 CENTER 的线速度，对应图 2.4 中淡黄色箭头； $w_c$  表示点 CENTER 的角速度速度， $r$  表示点 CENTER 到麦轮与地面接触点的矢量，因此  $w_c \times r$  表示由麦轮平台按角速度  $w_c$  自旋产生的速度，对应图 2.4 中浅蓝色箭头，该分速度方向及大小满足叉乘计算规则（右手定则），且公式中均为矢量运算，遵循平行四边形法则。

### S1：对麦轮 4 进行速度分析

为计算电机输出轴转速，需要进一步分析。这里结合图 2.4 和图 2.5(b)，先以右前轮为例进行分析，将点 D 的合速度沿着坐标系  $x_D y$  分解，表示为

$$\begin{bmatrix} v_{4x} \\ v_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{cx} + w_c r_y \\ v_{cy} + w_c r_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中，

$$\begin{bmatrix} v_c \\ v_4 \\ w_c \times r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{cx} + v_{cy} \\ v_{4x} + v_{4y} \\ w_c \times r_x + w_c \times r_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中， $[v_{4x} v_{4y}]^T$  表示  $v_4$  的在坐标系  $x_D y$  的分速度， $[v_{cx} v_{cy}]^T$  表示  $v_c$  的分速度， $[r_x r_y]^T$  表示  $r$  的在坐标系  $x_D y$  对应坐标轴下的分量（加粗表示矢量，常规是标量）。

（对标量的正负号说明：在公式（3）中  $v_{cx}$  是正数， $v_{cy}$  是负数， $w_c$  为正数（逆时针旋转为正），变量  $[v_{cx} v_{cy} w_c]$  隐含了符号的，但没有在公式中显示表达出来的原因是我们在实际编程控制时就会输入带符号的形参；但是距离  $[r_x r_y]$  均为正数，也是因为我们习惯将距离表述为正数。变量符号是根据自己建模喜好而定义的，但最好与常规表达一致）

显然，仅仅按照上述分析，是没法求解电机输出轴转速的。还需要从另外一个角度突破，麦轮是由辇子和轮毂共同组成的，轮毂轴心与电机输出轴固连，电机输出动力让轮毂转动起来，轮毂带动辇子绕轮毂轴线而转动（主动），辇子与地面接触而产生摩擦力而迫使辇子绕辇子轴线转动（被动），所以辇子不仅绕辇子轴线转动，还绕着轮毂轴线而转动，是这两种转动合成了最终的（实际）运动。

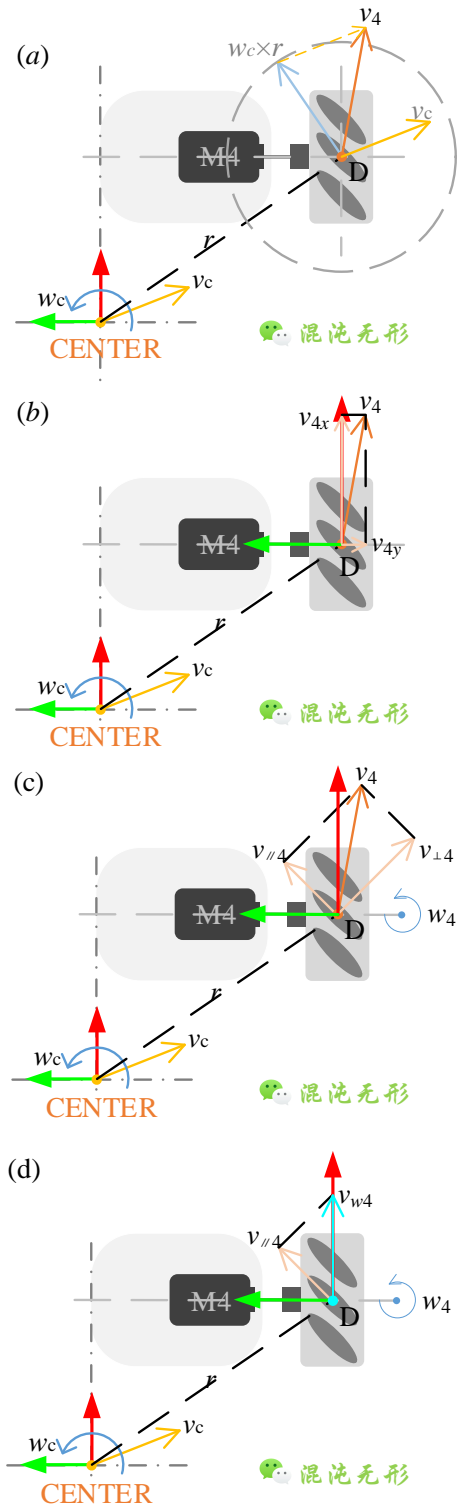


图 2.5 右前轮运动分解分析。（a）速度合成，（b）速度坐标轴分解，（c）速度横纵向分解，（d）有效速度分解。

按照上述分析思路，可将右前轮的速度  $v_4$  沿着辇子轴线方向（ $v_{//4}$ ）及辇子滚动方向（ $v_{\perp 4}$ ）进行速度分解，分解效果如图 2.5 (c) 所示，用数学公式可以表示为

$$\begin{bmatrix} v_{\parallel 4} \\ v_{\perp 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_4 \cdot e_{\parallel 4} \\ v_4 \cdot e_{\perp 4} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中,  $e_{\parallel 4}$  和  $e_{\perp 4}$  分别表示平行于辊子轴线及垂直于轴线的单位矢量。

结合公式 (3-5), 基于坐标系  $xDy$  对  $v_{\parallel 4}$  进行分析, 如下

$$v_{\parallel 4} = v_4 \cdot e_{\parallel 4} = (v_{4x}i + v_{4y}j) \cdot \left( i \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{4x} + \frac{\sqrt{2}}{2} v_{4y} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \begin{bmatrix} v_{cx} + w_c r_y \\ v_{cy} + w_c r_x \end{bmatrix} \quad (6)$$

化简得

$$v_{\parallel 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{cx} + \frac{\sqrt{2}}{2} v_{cy} + \frac{\sqrt{2}}{2} w_c (r_x + r_y) \quad (7)$$

式中,  $i$  和  $j$  分别表示沿坐标系  $xDy$  的坐标轴的单位矢量。

进一步分析, 垂直于辊子轴线的速度 ( $v_{\perp 4}$ ) 是由辊子被动滚动产生的: ①电机轴主动转动带动轮毂转动, 轮毂带动辊子运动; ②麦轮平台的其他麦轮转动相互影响, 由这两种作用力共同产生 (关键知识点)。

**问题 1:** 那平行于辊子轴线的速度 ( $v_{\parallel 4}$ ) 又是怎么产生的呢?

基于图 1.2 (b)、MARK 1 和《[麦克纳姆轮运动特性分析](#)》中的分析, 将图 2.5 (d) 视为一套系统, 辊子外侧与地面接触点的线速度 ( $v_{w4}$ ) 和轮毂转动角速度 ( $w_4$ ) 的关系表示为

$$v_{w4} = w_4 R \quad (8)$$

式中,  $R$  表示麦轮 (等效) 半径。

而平行于辊子轴线的速度 ( $v_{\parallel 4}$ ) 与电机转速 (也是轮毂转动角速度) 的关系可表示为

$$v_{\parallel 4} = v_{w4} \cos(45^\circ) = w_4 R \cos(45^\circ) \quad (9)$$

上述公式 (8-9) 在《[麦克纳姆轮运动特性分析](#)》中有详细论证和推导。

可见, 电机输出轴转速与麦轮分速度 ( $v_{\parallel 4}$ ) [也是麦轮实际有效运动速度] 呈固定比例关系, 而垂直于辊子轴线的速度 ( $v_{\perp 4}$ ) 用于提供辊子自身旋转了, 也可以认为是被用于滚动摩擦内耗掉了, 并为对麦轮实际运动提供有效推动作用。

基于上述分析, 在麦轮平台运动过程中, 电机输出轴转速与麦轮平台几何中心点 CENTER 的速度关系可表示为 (将公式 (7) 带入公式 (9)):

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_{cx} + \frac{\sqrt{2}}{2} v_{cy} + \frac{\sqrt{2}}{2} w_c (r_x + r_y) = \frac{\sqrt{2}}{2} w_4 R \quad (10)$$

化简得

$$w_4 = \frac{1}{R} [v_{cx} + v_{cy} + w_c (r_x + r_y)] \quad (11)$$

## MARK 2. 麦轮速度分解再理解

从上述公式 (9) 可知, 当电机转速是一定的情况下, 由电机扭矩产生分解得到的辊子移动速度 ( $v_{\parallel 4}$ ) 及辊子滚动速度 ( $v_{\perp 4}$ ) 均是确定的, 意思是电机转速不变, 辊子移动速度 ( $v_{\parallel 4}$ ) 则不会发生变化, 这在麦轮平台系统中分析也是这个结论, 但区别在于辊子滚动速度 ( $v_{\perp 4}$ ) 却有可能变化。

如图 2.4 所示, 当麦轮 4 对应的电机转速不变时, 但麦轮平台的其他麦轮转速发生变化, 这就会导致麦轮平台中心点 CENTER 的速度发生变化, 也就造成麦轮 4 的合速度发生变化, 而辊子移动速度 ( $v_{\parallel 4}$ ) 仅由电机转速决定, 所以就只有辊子滚动速度 ( $v_{\perp 4}$ ) 发生了变化。

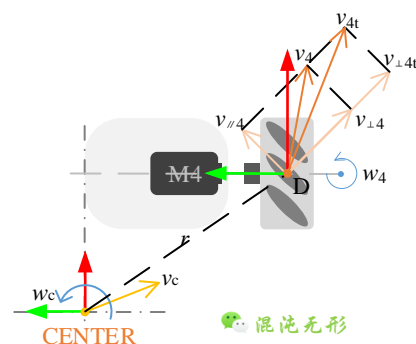


图 2.6 辊子滚动速度 ( $v_{\perp 4}$ ) 变化影响

**问题 2:** 那为什么只有辊子滚动速度 ( $v_{\perp 4}$ ) 发生了变化?

这是因为辊子滚动是被动运动, 而辊子运动是由两部分组成的: ①由电机 M4 转动, 带动麦轮 4 转动, 并与地面摩擦而产生的; ②麦轮平台的其他麦轮转动驱动力综合影响麦轮 4, 从而会改变麦轮 4 的辊子滚动速度。

举一个例子进行说明: 参考图 2.2 (c), 右前轮和左后轮向前运动, 而左前轮和右后轮不转动, 麦轮平台整体朝斜向上运动, 在运动过程中, 左前轮和右后轮受到地面的摩擦而滚动, 产生了滚动速度, 这个滚动速度就是由于麦轮平台的其他麦轮转动驱动力综合影响下产生的。

## S2: 对麦轮 1 进行速度分析

这里再采用同样的方法对左前轮的运动情况进行分析, 具体如图 2.7 所示。

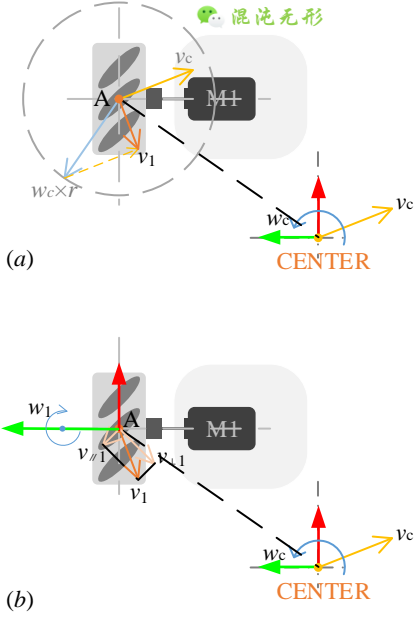


图 2.7 左前轮运动分解。(a) 速度合成，(b) 速度纵向分解

将点 A 的合速度沿着坐标系 xAy 分解，表示为

$$\begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{cx} - w_c r_y \\ v_{cy} + w_c r_x \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中， $[v_{1x} \ v_{1y}]^T$  表示  $v_1$  的在坐标系 xAy 的分速度。

将速度  $v_1$  沿着辊子轴线方向 ( $v_{\parallel 1}$ ) 及辊子滚动方向 ( $v_{\perp 1}$ ) 进行速度分解，分解效果如图 2.7 (b) 所示，用数学公式可以表示为

$$\begin{bmatrix} v_{\parallel 1} \\ v_{\perp 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cdot e_{\parallel 1} \\ v_1 \cdot e_{\perp 1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中， $e_{\parallel 1}$  和  $e_{\perp 1}$  分别表示平行于辊子轴线及垂直于轴线的单位矢量。

结合公式 (12-13)，基于坐标系 xDy 对  $v_{\parallel 4}$  进行分析，如下

$$\begin{aligned} v_{\parallel 1} &= v_1 \cdot e_{\parallel 1} = (v_{1x}i + v_{1y}j) \cdot (-i \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}) = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}v_{1x} + \frac{\sqrt{2}}{2}v_{1y} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{cx} - w_c r_x \\ v_{cy} + w_c r_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

化简得

$$v_{\parallel 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}v_{cx} + \frac{\sqrt{2}}{2}v_{cy} + \frac{\sqrt{2}}{2}w_c(r_x + r_y) \quad (15)$$

式中， $i$  和  $j$  分别表示沿坐标系 xAy 的坐标轴的单位矢量。

平行于辊子轴线的速度 ( $v_{\parallel 1}$ ) 与电机转速的关系可表示为

$$v_{\parallel 1} = -v_{w1} \cos(45^\circ) = -w_1 R \cos(45^\circ) \quad (16)$$

式中， $w_1$  表示电机输出轴的实际角速度，表示  $v_{w1}$  麦轮悬空的实际线速度。

**要点：**式 (16) 中之所以有带负号，是因为结合式 (14) 和图 2.7 (b) 可知，矢量  $v_1$  和  $e_{\parallel 1}$  的夹角为锐角，意味着计算结果 ( $v_{\parallel 1}$ ) 为正，但在麦轮平台坐标系下是负数，所以需要添一个负号。

将公式 (15) 带入公式 (16) 化简得

$$w_1 = \frac{1}{R}[v_{cx} - v_{cy} - w_c(r_x + r_y)] \quad (17)$$

### S3: 麦轮平台的速度分解与合成

如图 2.8 所示，剩余两个麦轮分速度分解方法思路类似，本文不再赘述，将 4 个麦轮速度分解方程写成矩阵形式，也就是逆运动学方程，表示为

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(r_x + r_y) \\ 1 & +1 & -(r_x + r_y) \\ 1 & -1 & +(r_x + r_y) \\ 1 & +1 & +(r_x + r_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{cx} \\ v_{cy} \\ w_c \end{bmatrix} \quad (18)$$

而正运动学方程就是基于 4 个麦轮的转速计算点 CENTER 的速度，理论分析和逆运动学相似，最简单的做法是将公式 (18) 逆变换即可，表示为

$$\begin{bmatrix} v_{cx} \\ v_{cy} \\ w_c \end{bmatrix} = \frac{R}{4} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (19)$$

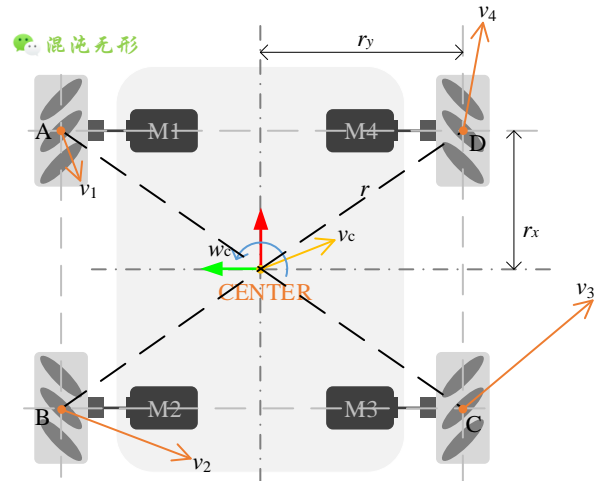


图 2.8 运动分解示意图

### S4: 麦轮平台的旋转中心位置计算

如图 2.9 所示，麦轮平台运动过程也存在瞬时旋转中心 (ICR, Instantaneous Center of Rotation)，这在《[两轮差速驱动机器人运动模型及应用分析](#)》中有详细介绍。这里需要分情况讨论：

平移运动：当仅有平移运动时，是不存在 ICR 的。

自旋运动：当仅有自旋运动时，ICR 的位置就是

点 CENTER。

平移+自旋运动：当既有平移运动，又有自旋运动时，ICR 的位置由点 CENTER 的速度决定，用公式可表达为

$$R_c = v_c / w_c (w_c \neq 0) \quad (20)$$

式中， $R_c$  表示点 ICR 到点 CENTER 距离。当  $R_c > 0$  时，点 ICR 在向量  $v_c$  的左侧，反之，在右侧。

而线段 ICR-CENTER 与向量  $v_c$  是垂直关系，由此便可确定 ICR 在 CENTER 坐标系下的位置。

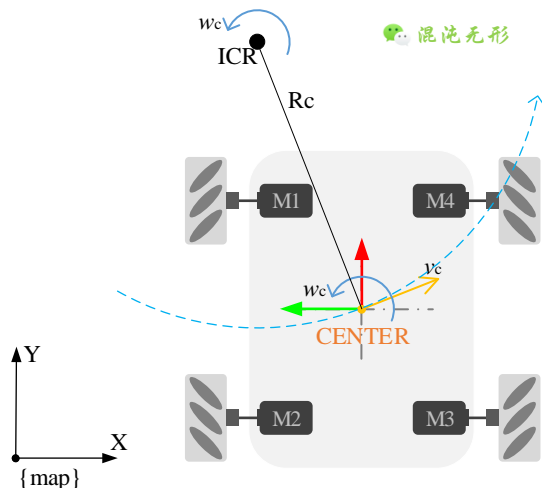


图 2.9 麦轮平台 ICR 计算. ICR 表示麦轮平台中心点对应的旋转中心，蓝色虚线表示麦轮平台中心点 CENTER 在该速度下的预测运动轨迹。

## 2.4 运动学模型应用

那问题来了，在实际中这两个模型（18-19）是怎么在实际工程中体现的呢？

**正运动学模型应用：** 4 个麦轮通过编码器测量各自的轮转速，基于公式（19）便可计算得到麦轮平台 CENTER 的速度信息  $[v_{cx} \ v_{cy} \ w_c]$ ，并可进一步被用于计算机器人的里程计（里程计算会在后续文章中更新）。

**逆运动学模型应用：** 用于控制机器人运动。如控制麦轮平台 CENTER 以设定的速度  $[v_{cx} \ v_{cy} \ w_c]$  运动，那就通过公式（18）计算得到 4 个麦轮的转速，转化的控制信号，输入到驱动电机控制器，再采用 PID 算法控制驱动轮精确转动。（需要注意的是，由于 4 个电机安装是左右对称的，所以相同的控制信号，左右电机输出轴的转向是相反的。）

## 3 实验测试

如图 3.1 所示，Josh Villbrandt 在 ROS 官网维护

了一套开源的麦轮平台套件，在麦轮平台上搭载了 2D 激光雷达和 Microsoft Kinect，可实现自主导航及目标跟随等诸多功能。开源的资料包括：机械 CAD 图纸、硬件 PCB 及其选型和上下位机软件包，感兴趣的读者可以下载试试（也适合作为科研平台）。

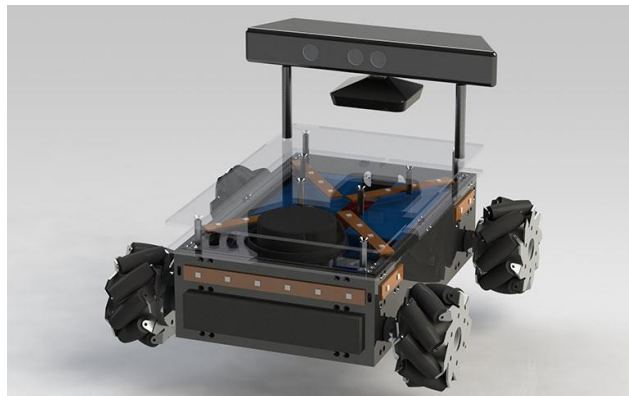


图 3.1 Mecanumbot

（来源：<http://wiki.ros.org/Robots/Mecanumbot>）

## 4 场景应用对比分析

不同类型的机器人具备不同的特点，其适用场景也有所不同。通过上述对麦轮平台运动特点的详细分析，可以看出麦轮平台与之前文章中的差速驱动机器人存在诸多不同之处。

### 4.1 速度空间分析

**速度空间范围不同：** 如图 4.1 所示，在之前的文章《[两轮差速驱动机器人运动模型及应用分析](#)》中对两轮差速驱动机器人的速度空间做了分析，其只有 2 个自由度，不能沿着机器人坐标系 Y 轴运动，所以速度空间是一个矩形平面，效果如图 4.1（a）所示；而基于上述分析可知，麦轮平台有 3 个自由度，既可纵向、横向移动，又可自旋，其速度空间范围是一个长方体，效果如图 4.1（b）所示。

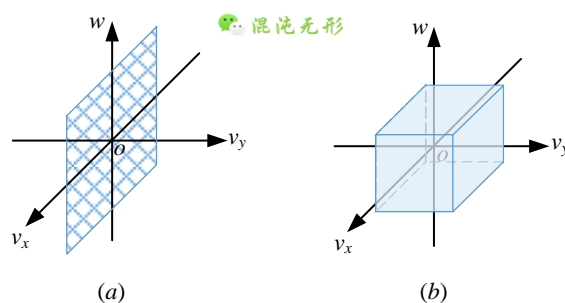


图 4.1 速度空间.（a）表示差速驱动机器人的速度空间范围，（b）表示麦轮平台的速度空间范围。



因此,麦轮平台运动灵活性更好,能够在空间狭窄有限、直角弯偏多的环境内运动,且四轮对称布置,稳定性也很好,尤其是位姿调整非常灵活,很适合作为高精运动移动平台,能够极大帮助其搭载的机械臂进行作业。

## 4.2 运动效率分析

在章节 2.1 中分析,麦轮平台的各个轮子产生的力会相互抵消一部分,因此同样转矩产生的净推力效率较低,也就是一部分功率被内耗掉了,效率不如普通轮胎。且麦轮运动过程中同时存在纵向和横向分力,所以做机构设计时需要为电机轴(或联轴器)等加保护。

## 4.3 其他方面

此外,麦轮运动过程中存在滚动摩擦,因此辍子的磨损比普通轮胎严重,因此适用于比较平滑的路面,若遭遇粗糙复杂的地形时耐久性要大打折扣。

由于辍子之间的非连续性,所以麦轮运动过程汇总存在连续微小震动,因此需要设计悬挂机构等辅助机构来消除。

轮轂结构较为复杂,单个麦轮的零部件较多,因此生产制造成本也较高。

总体而言,麦轮平台主要适用于运动空间非常受限的场景,比如狭小仓库等,也常被应用于机器人比赛,以达到高机动性的要求。

## 5 结论及展望

本文从分析麦轮构型及其特性入手,基于对单麦轮受力分析的基础上,详细分析了麦轮平台 6 种运动模式的规律及机理;接着也是单麦轮速度分解入手,逐步详细剖析了麦轮运动过程中 CENTER 点速度与麦轮实际速度、麦轮速度与辍子速度及辍子速度与电机输出轴转速等几类速度之间的合成与分解,并以麦轮 1 和 4 为例做了详尽的数学推导,导出麦轮平台的正逆运动学模型。最后,将麦轮平台与差速驱动平台从速度空间、运动效率等方面进行了分析,并指出麦轮平台全向特性的优势及其主要应用场景。

后面会持续更新其他类型的移动平台的分析,敬请期待。

(文章仅笔者个人分析,有误请指正,谢谢!)

## 参考资料

[1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Mecanum\\_wheel](https://en.wikipedia.org/wiki/Mecanum_wheel)

[2] Li X, Herberger W, Xu W, et al. Experimental

validation of energy consumption model for the four-wheeled omnidirectional Mecanum robots for energy-optimal motion control[C]// 2016 IEEE 14th International Workshop on Advanced Motion Control (AMC). IEEE, 2016.

[3] <https://www.bilibili.com/video/BV1gJ411V7sy?from=search&seid=6746914678707764427>

## 延伸阅读

《[麦克纳姆轮运动特性分析](#)》

《[两轮差速驱动机器人运动模型及应用分析](#)》

《[四轮驱动\(SSMR\)移动机器人运动模型及应用分析](#)》

《[履带式机器人运动模型及应用分析](#)》

《[Car-like Robot 运动模型及应用分析](#)》

《[机器人电量估计方法及实践](#)》

## 相关声明

全文完,感谢阅读!! 如果觉得写的不错,那就关注我的公众号吧(公众号中可下载更多文章 PDF)。



如果转载本文,文末务必注明:“转自微信公众号:混沌无形。”

喜欢作者,给他打赏



“谢谢打赏”