

# CÁLCULO DE UNA VARIABLE

James Stewart

Resolución de problemas por FODE

---

## Índice general

# Funciones y modelos

**Definición 1.1** Una **función**  $f$  es una regla que asigna a cada elemento  $x$  de un conjunto  $D$  exactamente un elemento, llamado  $f(x)$ , de un conjunto  $E$ .

$$\{(x, f(x)) / x \in D\}$$

la función  $f$  consta de todos los puntos  $(x, y)$  en el plano coordenado tales que  $y = f(x)$  y  $x$  está en el dominio de  $f$

**Definición 1.2** Una función se llama **creciente** sobre un intervalo  $I$  si

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** sobre  $I$  si

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

## 1.1. Ejercicios

1. Si  $f(x) = x + \sqrt{2-x}$  y  $g(u) = u + \sqrt{2-u}$ . ¿Es verdad que  $f = g$ ?

Respuesta.- Es verdad ya que no afecta en nada el símbolo que se podría colocar a la variable dependiente.

2. Si  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$  y  $g(x) = x$  ¿Es verdad que  $f = g$ ?

Respuesta.- No es verdad ya que el dominio de la función  $g$  son todos los reales contrariamente a la función  $f$  que no se cumple para  $x = 1$

3. La gráfica de una función  $f$  está dada.

(a) Indique el valor de  $f(1)$

Respuesta.- El valor es 3

(b) Calcule el valor de  $f(-1)$

Respuesta.- El valor es  $-0,3$  aproximadamente.

(c) ¿Para qué valores de  $x$  es  $f(x) = 1$ ?

Respuesta.- Por definición solo se cumple para  $0$

(d) Calcule el valor de  $x$  tal que  $f(x) = 0$

Respuesta.- El valor es aproximadamente  $-0,7$

(e) Indique el dominio y el rango de  $f$

Respuesta.-  $f_D = \{x \in f_D / -2 \leq x \leq 4\}$ , y  $f_R = \{y \in f_R / -1 \leq y \leq 3\}$

(f) ¿En qué intervalo  $f$  es creciente?

Respuesta.- Es creciente en el intervalo  $[-2, 1]$

**4.** Las gráficas de  $f$  y  $g$  están dadas.

(a) Indique los valores de  $f(-4)$  y  $g(3)$

Respuesta.-  $f(-4) = -2$  y  $g(3) = 4$

(b) ¿Para qué valores de  $x$  es  $f(x) = g(x)$ ?

Respuesta.- Para  $2$ , y  $-2$

(c) Estime la solución de la ecuación  $f(x) = -1$

Respuesta.-  $x = -3$

(d) ¿Sobre qué intervalo  $f$  es decreciente?

Respuesta.- Sobre  $[0, 4]$

(e) Establezca el dominio y el rango de  $f$

Respuesta.- El dominio de  $f$  es  $[-4, 4]$  y el rango de  $[-2, 3]$

(f) Establezca el dominio y el rango de  $g$

Respuesta.- El dominio es de  $[-4, 3]$  y el rango de  $[0, 5, 4]$

5. La gráfica de la figura 1 fue registrada por un instrumento operado por el departamento de minas y geología de California en el hospital Universitario de California del Sur de Los Ángeles. Utilice esta gráfica para estimar el rango de la función aceleración vertical de suelo, en la Universidad de California del Sur, durante el terremoto de Northridge.

Respuesta.- El rango de la función de aceleración vertical del suelo es dado por el intervalo  $[-1, 3]$

6. En esta sección se discuten ejemplos de funciones cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo, de envío postal es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. De otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describen verbalmente. ¿Qué puede decir sobre el dominio y el rango de cada una de sus funciones? Si es posible, trace una gráfica de cada función.

Respuesta.-

7. No cumple con la definición de función.

8. Cumple con la definición de función por lo tanto  $f_D = \{x / -2 \leq x \leq 2\}$  y  $f_R = \{y \in f(x) / -1 \leq y \leq 2\}$

9. Cumple con la definición de función por lo tanto  $f_D = \{x / -3 \leq x < -2 \cup -2 \leq x \leq 2\}$  y  $f_R = \{y \in f(x) / -3 \leq x < -2 \cup -2 \leq y \leq 2,6\}$

10. No cumple con la definición de función por lo tanto no se tiene un dominio y rango.

11. En la figura se muestra una gráfica de la temperatura media global  $T$  durante el siglo  $XX$ . Estime lo siguiente.

(a) La temperatura media mundial en 1950

Respuesta.- 14.5 grados centígrados.

(b) El año en que la temperatura promedio fue de 14,2 C.

Respuesta.- Aproximadamente en 1905

(c) ¿En qué año la temperatura fue más baja? ¿Más alta?

Respuesta.- Fue más baja en 1920 y más alta en 2010

(d) El rango de  $T$

Respuesta.- El rango se encuentra en el intervalo de  $[12,8, 14,8]$

- 12.** Los arboles crecen más rápido y forman anillos más amplios en los años cálidos y crecen más lentamente y forman anillos más angostos en los años más fríos. La figura muestra anillos anchos del pino Siberiano de 1500 a 2000.

(a) ¿Cuál es el rango de la función de ancho de anillo?

Respuesta.- El rango es de 0,1 a 1,41 aproximadamente.

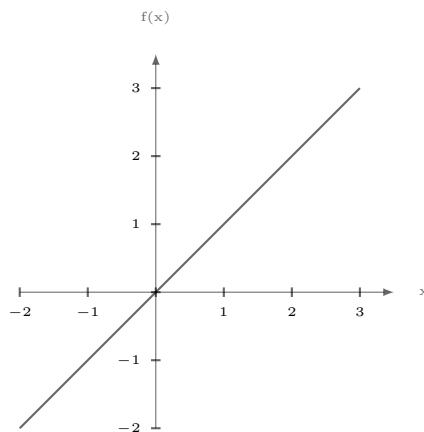
(b) ¿Qué dice la gráfica acerca de la temperatura de la tierra? ¿La gráfica refleja las erupciones volcánicas de la mitad del siglo *XIX*?

Respuesta.- La temperatura cada vez es más cálida mientras pasa los años.

Se ve un pequeño realce entre 1800 – 1890 donde podría haber existido algunas erupciones volcánicas.

- 13.** Se ponen unos cubitos de hielo en un vaso, se llena el vaso con agua fría y luego se coloca sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua conforme transcurre el tiempo. Luego trace una gráfica de la temperatura del agua como una función del tiempo transcurrido.

Respuesta.- La temperatura va disminuyendo constantemente en función a la temperatura ambiente y del tiempo.



- 14.** Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros. La gráfica muestra la distancia recorrida como una función del tiempo de cada corredor. Describa en palabras lo que la gráfica indica acerca de esta carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada corredor terminó la carrera?

Respuesta.- Gano la carrera el competidor A. Efectivamente cada competidor acabo la carrera.

- 15.** La gráfica muestra el consumo de energía para un día de septiembre en San Francisco. ( $P$  se mide en megawatts;  $t$  se registra en horas a partir de la medianoche).

(a) ¿Cual fue el consumo de potencia a las 6 : 00? ¿A las 18 : 00?

Respuesta.- Para las 6 : 00 el consumo de potencia es 500 megawatts. y para las 18 : 00 es 720 megawatts.

(b) ¿Cuándo fue el consumo de energía más bajo? ¿Cuándo fue el más alto? ¿Estos tiempos parecen razonables?

Respuesta.- El más bajo fue a hrs. 4 : 00 y el mas alto fue en a hrs. 12 : 00. Los tiempos son razonables por la actividad que se puede realizar a esas horas.

**16.** Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz en función de la época del año.

Respuesta.-