

# CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por FODE

---

# Índice general

1. Distintas clases de números	3
1.1. Problemas . . . . .	3

# Distintas clases de números

## 1.1. Problemas

1. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

$$(i) \quad 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demostración.- Sea  $n = k$ :

$$1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

Para  $k = 1$ ,

$$1^2 = \frac{1(1+2)(2+1)}{6}$$

por lo tanto se cumple para  $k = 1$ , Luego para  $k = k + 1$ ,

$$1^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

así cabe demostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \frac{2k^3 + k^2 + 2k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 3k^2 + 6k^2 + 9k + 4k + 6}{6} \\ \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad 1^3 + \dots + n^3 = (1 + \dots + n)^2$$

Demostración.- Sea  $n = 1$  entonces la igualdad es verdadera ya que  $1^3 = 1^2$ . Supongamos que se cumple para algún número  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$1^3 + \dots + k^3 = (1 + \dots + k)^2,$$

Luego suponemos que se cumple para  $k + 1$ ,

$$1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + \dots + (k+1))^2$$

Así solo falta demostrar que

$$\begin{aligned}
(1 + \dots + (k+1))^2 &= (1 + \dots + k)^2 + 2(1 + \dots + k)(k+1) + (k+1)^2 \\
&= (1^2 + \dots + k^2) + 2 \frac{k(k+1)}{2} (k+1) + (k+1)^2 \\
&= 1^3 + \dots + k^3 + (k^3 + 2k^2 + k) + (k^2 + 2k + 1) \\
&= 1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3
\end{aligned}$$

Por lo tanto es válido para cualquier  $n \in \mathbb{Z}^+$

## 2. Encontrar una fórmula para

$$(i) \sum_{i=1}^n (2i-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

$$\begin{array}{rclcl}
1 & = & 1 & = & 1^2 \\
1+3 & = & 4 & = & 2^2 \\
1+3+5 & = & 9 & = & 3^2 \\
1+3+5+7 & = & 16 & = & 4^2 \\
1+3+5+7+9 & = & 25 & = & 5^2
\end{array}$$

$$\text{Por lo tanto } \sum_{i=1}^n (2i-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$$

$$\begin{aligned}
1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 &= [1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2] - [2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2] \\
&= [1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2] - 4[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] \\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n(2n+1)[4n+1-2(n+1)]}{6} \\
&= \frac{2n(2n+1)(2n-1)}{6} \\
&= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}
\end{aligned}$$

**Definición 1.1 (Coeficiente Binomial)** Si  $0 \leq k \leq n$ , se define el coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$  por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \text{ si } k \neq 0, n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Esto se convierte en un caso particular de la primera fórmula si se define  $0! = 1$ .

**3. (a)** Demostrar que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Esta relación de lugar a la siguiente configuración, conocida por triángulo de Pascal: Todo número que no esté sobre uno de los lados es la suma de los dos números que tiene encima: El coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$  es el número  $k$ -ésimo de la fila  $(n+1)$ .

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

**(b)** Obsérvese que todos los números del triángulo de Pascal son números naturales. Utilícese la parte (a) para demostrar por inducción que  $\binom{n}{k}$  es siempre un número natural.

Demostración.- Se ve claramente que  $\binom{1}{1}$  es un número natural. Supóngase que  $\binom{n}{p}$  es un número natural para todo  $p \leq n$ . Al ser:

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \text{ para } p \leq n,$$

se sigue que  $\binom{n+1}{p}$  es un número natural para todo  $p \leq n$ , mientras que  $\binom{n+1}{n+1}$  es también un número natural. Así pues,  $\binom{n+1}{p}$  es un número natural para todo  $p \leq n+1$

**(c)** Dése otra demostración de que  $\binom{n}{k}$  es un número natural, demostrando que  $\binom{n}{k}$  es el número de conjuntos de exactamente  $k$  enteros elegidos cada uno entre  $1, \dots, n$ .

Demostración.- Existen  $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$   $k$ -tuplas de enteros distintos elegidos entre  $1, \dots, n$ , ya que el primero puede ser elegido de  $n$  maneras, el segundo de  $n-1$  maneras, etc. Ahora bien, cada conjunto formado exactamente por  $k$  enteros distintos, da lugar a  $k!$   $k$ -tuplas, de modo que el número de conjuntos será  $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)/k! = \binom{n}{k}$

**(d)** Demostrar el **TEOREMA DEL BINOMIO**: Si  $a$  y  $b$  son números cualesquiera, entonces

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}a^{n-j}b^j.$$

El teorema del binomio resulta claro para  $n = 1$ . Sea algún número  $k \in \mathbb{Z}^+$

$$(a + b)^k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

de donde suponemos que se cumple para  $k + 1$  por lo tanto

$$(a + b)^k = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j.$$

entonces,

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j \quad \text{por la parte (a)} \end{aligned}$$

con lo que el teorema del binomio es válido para  $n + 1$ . y por lo tanto para  $n \in \mathbb{Z}^+$

(e) Demostrar que

$$(i) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Demostración.- Por el teorema del binomio  $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (1^j)(1^{n-j}) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$

$$(ii) \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots \pm \binom{n}{n} = 0$$

Demostración.- De igual manera por el teorema del binomio  $0 = (1 + (-1))^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}$

$$(iii) \sum_{l \text{ impar}} \binom{n}{l} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = 2^{n-1}$$

Demostración.- Restando (ii) de (i) se tiene que,

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + \dots + 2\binom{n}{n} = 2^n - 0$$

$$2 \sum_{j \text{ impar}}^n \binom{n}{j} = 2^n$$

$$\sum_{j \text{ impar}}^n \binom{n}{j} = 2^n \cdot 2^{-1}$$

$$\sum_{j \text{ impar}}^n \binom{n}{j} = 2^{n-1}$$

$$(iv) \sum_{l \text{ par}} \binom{n}{l} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = 2^{n-1}$$

Demostración.- La demostración es similar al problema anterior pero esta vez sumamos (i) en (ii)

**4. (a)** Demostrar que

$$\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}$$

Demostración.- La multiplicación de series formales de potencias se realiza recolectando los términos con las mismas potencias de  $x$ :

$$\left( \sum_{a_K}^{\infty} a_k x^k \right) \left( \sum_{a_K}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k a_j x^j b_{k-j} x^{k-j} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) x^k$$

Tenga en cuenta que los subíndices en la suma interna suman  $k$ , la potencia de  $x$  en la suma externa. Luego aplicando la multiplicación de series de potencias a  $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$  y  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$  de donde

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+n}{k} x^k$$

(Los índices en las sumas a  $\infty$  ya que para  $k > n$ ,  $\binom{n}{k} = 0$ ), Se tiene:

$$(1+x)^m (1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} \right] x^k$$

ya que  $(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$  entonces

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$$

**(b)** demostrar que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Demostración.- Sea  $m = n$ ,  $l = n$  en la parte (a) y notar que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . de donde se tiene que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n+n}{n}$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

## 5. \_\_\_\_\_(a)\_\_\_\_\_

Demostrar por inducción sobre  $n$  que

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

si  $r \neq 1$  (Si es  $r = 1$ , el cálculo de la suma no presenta problema alguno).

Demostración.- Sea  $n = 1$  entonces

$$1 + r = \frac{1 - r^2}{1 - r}$$

el cual vemos que se cumple.

Luego

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \\ \text{(a)} \qquad \qquad \qquad &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

- (b) Deducir este resultado poniendo  $S = 1 + r + \dots + r^n$ , multiplicando esta ecuación por  $r$  y despejando  $S$  entre las dos ecuaciones.

Tenemos  $r \cdot S = r + \dots + r^n + r^{n+1}$ , luego sea  $S - rS$  entonces  $S(1 - r) = 1 - r^{n+1}$  por lo tanto  $S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

## 6. La fórmula para $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ se puede obtener como sigue: Empezamos con la fórmula

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

particularmente esta fórmula para  $k = 1, \dots, n$  y sumando, obtenemos

$$\begin{aligned} 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 &= 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (n+1)^3 - n^3 &= n^2 + 3 \cdot n + 1 \\ \hline (n+1)^3 - 1 &= 3[1^2 + \dots + n^2] + 3[1 + \dots + n] + n \end{aligned}$$



De este modo podemos obtener  $\sum_{k=1}^n k^2$  una vez conocido  $\sum_{k=1}^n k$  (lo cual puede obtenerse mediante un procedimiento análogo). Aplíquese este método para obtener.

(i)  $1^3 + \dots + n^3$

Sea  $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1^4$  entonces

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1, \text{ para } k = 1, \dots, n$$

por hipótesis tenemos  $(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n$ , de modo que

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n+1)^4 - 1 - 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} - n}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

(ii)  $1^4 + \dots + n^4$

Similar al anterior ejercicio partimos de  $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$   $k = 1, \dots, n$  para obtener  $(k+1)^5 - k^5 = 5 \left( \sum_{k=1}^n k^4 \right) + 10 \left( \sum_{k=1}^n k^3 \right) + 10 \left( \sum_{k=1}^n k^2 \right) + 5 \left( \sum_{k=1}^n k \right) + n$ , así

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{(n+1)^5 - 1 - 10 \left( \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \right) - 10 \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - 5 \frac{n(n+1)(n+2)}{2} - n}{5} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

(iii)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

A partir de

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, \dots, n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

(iv)  $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

De

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}, \quad k = 1, \dots, n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

7. Utilizar el método del problema 6 para demostrar que  $\sum_{k=1}^n k^p$  puede escribirse siempre en la forma

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + Cn^{p-2} + \dots$$

Las diez primeras de estas expresiones son

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{66}n$$

Obsérvese que los coeficientes de la segunda columna son siempre  $\frac{1}{2}$  y que después de la tercera columna las potencias de  $n$  de coeficiente no nulo van decreciendo de dos en dos hasta llegar a  $n^2$  o a  $n$ . Los coeficientes de todas las columnas, salvo las dos primeras, parecen bastante fortuitos, pero en realidad obedecen a cierta regla; encontrarla puede considerarse como una prueba de superperspicacia. Para descifrar todo el asunto, véase el problema 26-17)

Demostración.- Sea  $(k+1)^{p+1}$  entonces por el teorema del binomio:

$$\begin{aligned}
(k+1)^{p+1} &= \binom{p+1}{p+1}k^{p+1} + \binom{p+1}{p}k^p + \dots + \binom{p+1}{1}k^1 + \binom{p+1}{0}k^0 \\
(k+1)^{p+1} &= 1 \cdot k^{p+1} + \binom{p+1}{p}k^p + \dots + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{0}k^0 \\
(k+1)^{p+1} - k^{p+1} &= (p+1)k^p + \dots + (p+1)k + 1 \cdot k^0
\end{aligned}$$

Luego sumando para cada  $k = 1, \dots, n$  se tiene:

$$\begin{aligned}
2^{p+1} - 1^{p+1} &= (p+1)1^p + \dots + (p+1)1 + 1 \cdot 1^0 \\
3^{p+1} - 2^{p+1} &= (p+1)2^p + \dots + (p+1)2 + 1 \cdot 2^0 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
(n+1)^{p+1} &= (p+1)n^p + \dots + (p+1)n + 1 \cdot n^0
\end{aligned}$$

Luego por el anterior problema

$$\begin{aligned}
(n+1)^{p+1} &= (p+1) \sum_{k=1}^n k^p + \dots + (p+1) \sum_{k=1}^n k^1 + \sum_{k=1}^n k^0 + k^0 \\
\frac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} &= \sum_{k=1}^n k^p + \frac{\binom{p+1}{p-1}}{(p+1)} \sum_{k=1}^n k^{p-1} + \dots + \frac{(p+1)}{(p+1)} \sum_{k=1}^n k^1 + \frac{1}{(p+1)} \left( \sum_{k=1}^n k^0 + k^0 \right)
\end{aligned}$$

Luego asumimos que la proposición es verdad para  $p-1$  donde podríamos escribir como,

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} &= \sum_{k=1}^n k^p + \text{términos que involucran las potencias de } n \leq p \\
\sum_{k=1}^n k^p &= \frac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} + \text{términos que involucran las potencias de } n \leq p
\end{aligned}$$

## 8. Demostrar que todo número natural es o par o impar.

Demostración.- Asumimos que  $n$  es impar o par, entonces debemos probar que  $n+1$  también, es o bien impar o bien par.

Sea  $n$  par entonces  $n = 2k$  para algún  $k$ . Así  $n+1 = 2k+1$  y por definición vemos que es impar.

Luego sea  $n$  impar, entonces  $n = 2k+1$  para algún  $k$ . Por lo tanto  $n+1 = 2k+1+1 = 2k+2 = 2(k+1)$ . Así en cualquiera de los dos casos,  $n+1$  es o bien par o impar.

## 9. Demostrar que si un conjunto $A$ de números naturales contiene $n_0$ y contiene $k+1$ siempre que contenga $k$ , entonces $A$ contiene todos los números naturales $\geq n_0$ .

Demostración.- Sea  $B$  el conjunto de todos los números naturales  $l$  tales que  $n_0 - 1 + 1$  está en  $A$ . Entonces 1 está en  $B$ , y  $l+1$  está en  $B$  si  $l$  está en  $B$ , es decir  $k = n_0 - 1 + l$ , por lo tanto  $k+1 = (n_0 - 1) + (l+1)$  está en  $A$ , lo que implica que  $l+1$  está en  $B$  de modo que  $B$  contiene todos los números naturales, los cuales significa que  $A$  contiene todos los números naturales  $\geq n_0$

## 10. Demostrar el principio de inducción completa a partir del principio de buena ordenación.

Demostración.- Supongamos que  $A$  contiene a 1 y que  $A$  contiene a  $n + 1$ , si contiene a  $n$ . Si  $A$  no contiene todos los números naturales, entonces el conjunto  $B$  de números naturales que no están en  $A$  es distinto de  $\emptyset$ . Por lo tanto,  $B$  tiene un número natural  $n_0$ . Ahora  $n_0 \neq 0$  ya que  $A$  contiene a 1 entonces podemos escribir  $n_0 = (n_0 - 1) + 1$ , donde  $n_0 - 1$  es un número natural. Luego  $n_0 - 1$  no está en  $B$ , entonces  $n_0 - 1$  está en  $A$ . Por hipótesis,  $n_0$  debe estar en  $A$ , entonces  $n_0$  no está en  $B$ , el cual es una contradicción.

**11.** Demostrar el principio de inducción completa a partir del principio de inducción ordinario.

Demostración.- Se sabe que 1 está en  $B$ . Luego si  $k$  está en  $B$ , entonces  $1, \dots, k$  están todos en  $A$ , de modo que  $k + 1$  está en  $A$  y así  $1, \dots, k + 1$  están en  $A$ , con lo que  $k + 1$  está en  $B$ . Por inducción,  $B = N$ , así que también  $A = N$ .

**12.** (a) Si  $a$  es racional y  $b$  es irracional ¿es  $a + b$  necesariamente irracional? ¿Y si  $a$  y  $b$  es irracional?

Respuesta.- Si, puesto que si  $a + b$  fuese racional, entonces  $b = (a + b) - a$  sería racional. Luego si  $a$  y  $b$  son irracionales, entonces  $a + b$  podría ser racional, ya que  $b$  podría ser  $r - a$  para algún número racional  $a$ .

(b) Si  $a$  es racional y  $b$  es irracional, ¿es  $ab$  necesariamente irracional?

Respuesta.- Si  $a = 0$ , entonces  $ab$  es racional. Pero si  $a \neq 0$  entonces  $ab$  no podría ser racional, ya que entonces  $b = (ab) \cdot a^{-1}$  sería racional.

(c) ¿Existe algún número  $a$  tal que  $a^2$  es irracional pero  $a^4$  racional?

Si existe por ejemplo  $\sqrt[4]{2}$

(d) ¿Existen dos números irracionales tales que sean racionales tanto su suma como su producto?

Si existen por ejemplo  $\sqrt{2}$  y  $-\sqrt{2}$

**13. a)** Demostrar que  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{6}$  son irracionales. Indicación: Para tratar  $\sqrt{3}$ , por ejemplo, aplíquese el hecho de que todo entero es de la forma  $3n$  ó  $3n+1$  ó  $3n+2$  ¿Por qué no es aplicable esta demostración para  $\sqrt{4}$ ?

Demostración.- Puesto que:

$$\begin{aligned} (3n+1)^2 &= 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1 \\ (3n+2)^2 &= 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1 \end{aligned}$$

queda demostrado que un número no es múltiplo de 3 si es de la forma  $3n + 1$  ó  $3n + 2$ .

se sigue que  $k^2$  es divisible por 3, entonces  $k$  debe ser también divisible por 3. Supóngase ahora que  $\sqrt{3}$  fuese racional, y sea  $\sqrt{3} = p/q$ , donde  $p$  y  $q$  no tienen factores comunes. Entonces  $p^2 = 3q^2$ , de modo que  $p^2$  es divisible por 3, así que también lo debe ser  $p$ . De este modo,  $p = 3p'$  para algún número natural  $p'$ , y en consecuencia  $(3p')^2 = 3q^2$  ó  $(3p')^2 = q^2$ . Así pues,  $q$  es también divisible por 3, lo cual es una contradicción.

Las mismas demostraciones valen para  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{6}$ , ya que las ecuaciones,

$$\begin{array}{rclcl}
(5n+1)^2 & = & 25n^2 + 10n + 1 & = & 5(5n^2 + 2n) + 1 \\
(5n+2)^2 & = & 25n^2 + 20n + 4 & = & 5(5n^2 + 4n) + 4 \\
(5n+3)^2 & = & 25n^2 + 30n + 9 & = & 5(5n^2 + 6n + 1) + 4 \\
(5n+4)^2 & = & 25n^2 + 40n + 16 & = & 5(5n^2 + 8n + 3) + 1
\end{array}$$

la ecuación correspondiente para los números de la forma  $6n + m$  demuestran que si  $k^2$  es divisible por 5 ó 6, entonces también lo debe ser  $k$ . La demostración falla para  $\sqrt{4}$ , porque  $(4n+2)^2$  es divisible por 4.

b) Demostrar que  $\sqrt[3]{2}$  y  $\sqrt[3]{3}$  son irracionales.

Demostración.- Puesto que,

$$(2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1,$$

se sigue que si  $k^3$  es par, entonces  $k$  es par. Si  $\sqrt[3]{2} = p/q$ , donde  $p$  y  $q$  no tienen factores comunes, entonces  $p^3 = 2q^3$ , de modo que  $p^3$  es divisible por 2, por lo que también lo debe ser  $p$ . Así pues,  $p = 2p'$  para algún número natural  $p'$  y en consecuencia  $(2p')^3 = 2q^3$ , ó  $4(p')^3 = q^3$ . Por lo tanto,  $q$  es también par, lo cual es una contradicción.

La demostración para  $\sqrt[3]{3}$  es análogo, utilizando las ecuaciones.

$$(3n+1)^3 = 27n^3 + 27n^2 + 27n + 1 = 3(9n^3 + 9n^2 + 3n) + 1,$$

$$(3n+2)^3 = 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8 = 3(9n^2 + 18n^2 + 12n + 2) + 2.$$

## 14. Demostrar que:

(a)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  es irracional.

Demostración.- Sea  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  racional, entonces  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$  sería racional, luego

$$5 + 2\sqrt{6}$$

y en consecuencia  $\sqrt{6}$  sería racional lo cual es falso.

(b)  $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$  es irracional.

Demostración.- Sea  $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$  racional, entonces

$$\begin{aligned}
[\sqrt{6} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 &= 6 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\
&= 11 + 2\sqrt{6}[2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]
\end{aligned}$$

Así,  $\sqrt{6}[2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]$  sería racional, con lo que de igual manera sería,

$$\begin{aligned}
\{\sqrt{6}[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]\}^2 &= 6[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 \\
&= 11 + 2\sqrt{6}[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]
\end{aligned}$$

De este modo  $\sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})$  y  $\sqrt{6} - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$  serían racionales, lo que implicaría que  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  fuese racional, en contradicción de la parte a).

- 15. (a)** Demostrar que si  $x = p + \sqrt{q}$ , donde  $p$  y  $q$  son racionales, y  $m$  es un número natural, entonces  $x^m = a + b\sqrt{q}$  siendo  $a$  y  $b$  números racionales.

Demostración.- Sea  $m = 1$  entonces  $(p + \sqrt{q})^1 = a + b\sqrt{q}$ . Supongamos que se cumple para  $m$ , entonces

$$(p + \sqrt{q})^{m+1} = (a + b\sqrt{q})(p + \sqrt{q}) = (ap + bq) + (a + pb)\sqrt{q}$$

donde  $ap + bq$  y  $a + bp$  son racionales.

- (b)** Demostrar también que  $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$

Demostración.- Similar a la parte a), se cumple para  $m = 1$ . Si es verdad para  $m$ , entonces

$$(p - \sqrt{q})^{m+1} = (a - b\sqrt{q})(p - \sqrt{q}) = (ap + bq) - (a + pb)\sqrt{q}$$

- 16. (a)** Demostrar que si  $m$  y  $n$  son números naturales y  $m^2/n^2 < 2$ , entonces  $(m + 2n)^2 / (m + n)^2 > 2$ ; demostrar, además que

$$\frac{(m + 2n)^2}{(m + n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}$$

Demostración.- Si  $m^2/n^2 < 2$  entonces  $m^2 < 2n^2$ , sumando  $m^2$ ,  $4mn$  y  $2n^2$  tenemos  $2m^2 + 4mn + 2n^2 < 4n^2 + m^2 + 4mn$ , luego  $2(m + n)^2 < (m + 2n)^2$ , así nos queda  $(m + 2n)^2 / (m + n)^2 > 2$ . Para la segunda parte podemos partir de  $m^2 - 2n^2 < 0$ , entonces:

$$m^2 - 2n^2 < 0$$

$$m^3 - 2mn^2 < 0 \quad \text{multiplicando por } m$$

$$mn^2 + m^3 + mn^2 - 4mn^2 < 0 \quad \text{escribiendo } mn^2 \text{ de otra manera}$$

$$mn^2 + 2n^3 + m^3 + m^2n + mn^2 - 2m^2n - 4mn^2 - 2n^3 < 0 \quad \text{sumando } 2n^3 \text{ y } 2m^2n$$

$$n^2(m + 2n) + [(m^2 + 2mn + n^2)(m - 2n)] < 0$$

$$n^2(m + 2n)^2 + [(m + n)^2(m + 2n)(m - 2n)] < 0 \quad \text{multiplicando por } m + 2n$$

$$n^2(m + 2n)^2 + [(m + n)^2(m^2 - 4n^2)] < 0$$

$$\frac{n^2(m + 2n)^2 - 4n^2(m + n)^2 + m^2(m + n)^2}{n^2(m + n)^2} < 0 \quad \text{dividimos por } n^2(m + n)^2$$

$$\frac{(m + 2n)^2 - 2(m + n)^2 - 2n^2(m + 2n)^2}{n^2(m + n)^2} < -\frac{m^2}{n^2}$$

$$\frac{(m + 2n)^2}{(m + n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}$$

- (b)** Demostrar los mismos resultados con todos los signos de desigualdad invertidos.

Demostración.- Quedará de la siguiente forma, Si  $m^2/n^2 > 2$ , entonces  $(m+2n)^2/(m+n)^2 < 2$ , luego demostrar que

$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 > 2 - \frac{m^2}{n^2}$$

Similar a la parte a) tendremos  $m^2 > 2n^2$ , luego  $2m^2 + 4mn + 2n^2 > 4n^2 + m^2 + 4mn$ , así  $(m+2n)^2 > 2(m+n)^2$

Después se puede demostrar la segunda parte con facilidad siguiendo el ejemplo a) pero invirtiendo la desigualdad ya que  $n$  y  $m$  son números natural.

(c) Demostrar que si  $m/n < \sqrt{2}$ , entonces existe otro número racional  $m^2/n^2$  con  $m/n < m'/n' < \sqrt{2}$

Demostración.- Sea  $m_1 = m + 2n$  y  $n_1 = m + n$ , luego elegimos y remplazamos en,

$$\begin{aligned} m' &= m_1 + 2n_1 = 3m + 4n \\ n' &= m_1 + n_1 = 2m + 3n \end{aligned}$$

De donde  $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$  si y sólo si  $0 < m' - mn' = (3m + 4n)n - (2m + 3n)m = 2(2n^2 - m^2)$ . Es claro para  $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$  que  $2n^2 - m^2 > 0$

Por otro lado tenemos  $\frac{m'}{n'}$  si y sólo si  $0 < 2n'^2 - m'^2 = 2(2m + 3n)^2 - (3m + 4n)^2 = 2n^2 - m^2$ . Como antes,  $2n^2 - m^2 > 0$  se sigue de  $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$

**17.** Parece normal que  $\sqrt{n}$  tenga que ser irracional siempre que el número natural  $n$  no sea el cuadrado de otro número natural. Aunque puede usarse en realidad el método del problema 13 del capítulo 2 de Michael Spivak para tratar cualquier caso particular, no está claro, sin más, que este método tenga que dar necesariamente resultados, y para una demostración del caso general se necesita más información. Un número natural  $p$  se dice que es un número primo si es imposible escribir  $p = ab$ ; por conveniencia se considera que 1 no es un número primo. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Si  $n > 1$  no es primo, entonces  $n = ab$ , con  $a$  y  $b$  ambos  $< n$ ; si uno de los dos  $a$  o  $b$  no es primo, puede ser factorizado de manera parecido; continuando de esta manera se demuestra que se puede escribir  $n$  como producto de números primos. Por ejemplo,  $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$ .

a) Conviértase este argumento en una demostración riguroso por inducción completa. (En realidad, cualquier matemático razonable aceptaría este argumento informal, pero ello se debería en parte a que para él estaría claro cómo formularla rigurosamente.)

Un teorema fundamental acerca de enteros, que no demostraremos aquí, afirma que esta factorización es única, salvo en lo que respecta al orden de los factores. Así, por ejemplo, 28 no puede escribirse nunca como producto de números primos uno de los cuales sea 3, ni puede ser escrito de manera que 2 aparezca una sola vez (ahora debería verse clara la razón de no admitir a 1 como número primo.)

demostración.- Supóngase que para todo número  $< n$  puede ser escrito como un producto de primos. Si  $n > 1$  no es primo, entonces  $n = ab$ , para  $a, b < n$ . Pero  $a$  y  $b$  son ambos producto de primos, así que  $n = ab$  lo es también.

b) Utilizando este hecho, demostrar que  $\sqrt{n}$  es irracional a no ser que  $n = m^2$  para algún número natural  $m$ .

Demostración.- Sea  $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ , entonces  $nb^2 = a^2$ , luego si descomponemos en producto de factores primos,  $nb^2$  y  $a^2$  deberían coincidir. Ahora según lo explicado anteriormente, cada número primo

debe aparecer un número par de veces en  $a^2$  y  $b^2$ , y por lo tanto deberá ocurrir lo mismo con  $n$ . Esto implica que  $n$  es un cuadrado perfecto.

- c) Demostrar que  $\sqrt[k]{n}$  es irracional a no ser que  $n = m^k$

Demostración.- La Demostración es parecida a la parte  $b$  pero haciendo uso del hecho de que cada número primo entra en  $a^k$  y en  $b^k$  un número de veces que es múltiplo de  $k$

- d) Al tratar de números primos no se puede omitir la hermosa demostración de Euclides de que existe un número infinito de ellos. Demuestre que no puede haber sólo un número finito de números primos  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  considerando  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

Demostración.- Si  $p_1, \dots, p_n$  fuesen los únicos números primos, entonces  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$  no podría ser primo, ya que es mayor que cada uno de ellos, de modo que tiene que ser divisible por un número primo. Pero es claro que este número primo no es ninguno de los  $p_1, \dots, p_n$ , lo cual constituye una contradicción. Para poder explicarlo mejor si  $p_1, \dots, p_n$  son los  $n$  primeros números primos, entonces el primo que ocupa el lugar  $n+1$  es  $\leq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ . Sin embargo,  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$  no tiene que ser necesariamente primo.

## 18. (a) Demostrar que si $x$ satisface

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

para algunos enteros  $a_{n-1}, \dots, a_n$  entonces  $x$  es irracional si no es entero. (¿Por qué es esto una generalización del problema 17?)

Demostración.- Supóngase que es  $x = p/q$  donde  $p$  y  $q$  son números naturales primos entre si. Entonces

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_0 = 0,$$

con lo que

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_0q^n = 0$$

Ahora bien, si  $q \neq \pm 1$ , entonces  $q$  tiene por lo menos un divisor primo. Este divisor primo divide a cada uno de los términos que siguen a  $p^n$ , con lo que también deberá dividir a  $p^n$ . Dividirá por lo tanto a  $p$ , lo cual es una contradicción. Así pues,  $q = \pm 1$ , lo que significa que  $x$  es entero.

- (b) Demostrar que  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$  es irracional.

Demostración.- Sea  $a = \sqrt{2} + 2^{1/3}$ . Se demostrará por contradicción. Supongamos que  $a$  es racional, entonces,

$$\begin{aligned} 2 &= (2^{1/3})^3 \\ &= (a - \sqrt{2})^3 \\ &= a^3 - 3a^2\sqrt{2} + 3a \cdot 2 - 2^{3/2} \\ &= a^3 + 6a - \sqrt{2}(3a^2 + 2) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\sqrt{2} = \frac{a^3 + 6a - 2}{3a^2 + 2} \in \mathbb{Q}$$

es bien sabido que  $\sqrt{2}$  es irracional. De ahí llegamos a una contradicción.



**19.** Demostrar la desigualdad de Bernoulli: Si  $h > -1$ , entonces

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

¿Por qué es esto trivial si  $h > 0$ ?

Demostración.- Si  $n = 1$ , entonces  $(1+h)^n = 1+nh$ . Supóngase que  $(1+h)^n \geq 1+nh$ . Entonces  $(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh)$ , ya que  $1+h > 0$  luego  $1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$ . Para  $h > 0$ , la igualdad se sigue directamente del teorema del binomio, ya que todos los demás términos que aparecer en el desarrollo de  $(1+h)^n$  son positivos.

**20.** La sucesión de Fibonacci  $a_1, a_2, a_3, \dots$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3 \end{aligned}$$

Esta sucesión, cuyos primeros términos son 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., fue descubierta por Fibonacci (1175-1250, aprox.) en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número  $a_n$  de parejas nacidas en el  $n$ -ésimo mes es  $a_{n-1} + a_{n-2}$ , puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además, cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una nueva pareja. Es verdaderamente asombroso el número de resultados interesantes relacionados con esta sucesión, hasta el punto de existir una Asociación de Fibonacci que publica una revista, the Fibonacci Quarterly.

Demostrar que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Demostración.- Al ser

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

La fórmula es válida para  $n = 1$  y también se cumple para  $n = 1$ . Supóngase que es válida para todo  $k < n$ , donde  $n \geq 3$ . En tal caso es válida en particular para  $n-1$  y para  $n-2$ , luego por hipótesis

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

**21.** La desigualdad de Schwarz (problema 1-19) tiene en realidad una forma más general:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Dar de esto tres demostraciones, análogas a las tres demostraciones del problema 1-19

Demostración.-