1

Los conceptos del Cálculo Integral

1.3. Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o funciones reales.

Definición 1.1 (Par ordenado) *Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.*

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Definición 1.2 (Definición de función) *Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primero elemento.*

Debe cumplir las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

(i) $\forall x \in D_f, \exists y / (x, y) \in f(x)$ ó $y = f(x)$

(ii) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

Definición 1.3 (Dominio y recorrido) *Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el* ***dominio*** *de f. El conjunto de los segundos elementos y se denomina* ***recorrido*** *de f, o conjunto de valores de f.*

TEOREMA 1.1 *Dos funciones f y g son iguales si y sólo si*

(a) *f y g tienen el mismo dominio, y*

(b) *$f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de f.*

Demostración.- *Sea f función tal que $x \in D_f, \exists y \;/\; y = f(x)$ es decir $(x, f(x))$, g una función talque $\forall z \in D_g, \exists y \;/\; y = g(z)$ es decir $(z, g(z))$, entonces por definición de par ordenado tenemos que $(x, f(x)) = (z, g(z))$ si y sólo si $x = z$ y $f(x) = g(z)$*

Definición 1.4 (Sumas, productos y cocientes de funciones) *Sean f y g dos funciones reales que tienen el mismo dominio D. Se puede construir nuevas funciones a partir de f y g por adición, multiplicación o división de sus valores. La función u definida por,*

$$u(x) = f(x) + g(x) \ \ si\ x \in D$$

se denomina suma de f y g, se representa por $f + g$. Del mismo modo, el producto $v = fcdotg$ y el cociente $w = f/g$ están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \ \ si\ x \in D, \quad w(x) = f(x)/g(x) \ \ si\, x \in D\ y\ g(x) \neq 0$$

1.5. Ejercicios

1. Sea $f(x) = x + 1$ para todo real x. Calcular:

- $f(2) = 2 + 1 = 3$
- $f(-2) = -2 + 1 = -1$
- $-f(2) = -(2 + 1) = -3$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
- $\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{3}$
- $f(a + b) = a + b + 1$
- $f(a) + f(b) = (a + 1) + (b + 1) = a + b + 2$
- $f(a) \cdot f(b) = (a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$

2. Sean $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = 1 - x$ para todo real x. calcular:

- $f(2) + g(2) = (1 + 2) + (1 - 2) = 2$
- $f(2) - g(2) = (1 + 2) - (1 - 2) = 4$
- $f(2) \cdot g(2) = (1 + 2) \cdot (1 - 2) = 3 \cdot (-1) = -3$

- $\dfrac{f(2)}{g(2)} = \dfrac{1+2}{1-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$

- $f\left[g(2)\right] = f(1-2) = f(-1) = 1 + (-1) = 0$

- $g\left[f(2)\right] = f(1+2) = g(3) = 1 - 3 = -2$

- $f(a) + g(-a) = (1+a) + (1-a) = 2$

- $f(t) \cdot g(-t) = (1+t) \cdot (1+t) = 1 + t + t + t^2 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$

3. Sea $f(x) = |x-3| + |x-1|$ para todo real x. Calcular:

- $f(0) = |0-3| + |0-1| = 3 + 1 = 4$
- $f(1) = |1-3| + |1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3| + |2-1| = -1 + 1 = 2$
- $f(3) = |3-3| + |3-1| = 2$
- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4 + 2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5 + 3 = 8$

Determinar todos los valores de t para los que $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{array}{rcl} |t+2-3| + |t+2-1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t-1| + |t+1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t+1| & = & t-3 \end{array}$$

Por lo tanto $t = 1$

4. Sea $f(x) = x^2$ para todo real x. Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números erales x, y t, etc., para los que la fórmula dada es válida.

(a) $f(-x) = f(x)$

Demostración.- Se tiene $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $f(y) - f(x) = (y-x)(y+x)$

Demostración.- $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (x-y)(x+y), \; \forall x, \; y \in \mathbb{R}$

(c) $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.- $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2, \; \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.- $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y), \ \forall y \in \mathbb{R}$

(e) $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.- $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

(f) $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.- $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

5. Sea $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de $x, \ y, s$ y t son válidas.

(a) $g(-x) = g(x)$

Se tiene $g(-x) = \sqrt{2 - (-x)^2} = \sqrt{2 - (x)^2} = g(x), \ \ para\ |x| \leq 2$

(b) $g(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4 - (2y)^2} = \sqrt{4(1 - y^2)} = 2\sqrt{1 - y^2}, \ \ para\ |y| \leq 1$ Se obtiene $|y| \leq 1$ de $\sqrt{1 - y^2}$ es decir $1 - y^2 \geq 0$ entonces $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$ y $|y| \leq 1$

(c) $g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}, \ \ para\ |t| \geq \frac{1}{2}$$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar $\sqrt{4t^2 - 1}$. Es decir

$$4t^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow 4t^2 \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq \frac{1}{2^2} \Rightarrow |t| \geq \frac{1}{2}$$

(d) $g(a - 2) = \sqrt{4a - a^2}$

$g(a - 2) = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - (a - 2)^2} = \sqrt{4a - a^2}, \ \ para\ 0 \leq a \leq 4$. Basta probar $4a - a^2 \geq 0$

(e) $g\left(\dfrac{s}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{16 - s^2}$

$s\left(\dfrac{s}{2}\right) = \sqrt{4 - \left(\dfrac{s}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{16 - s^2}}{2}, \ \ para\ |s| \leq 4$. ya que solo basta comprobar que $\sqrt{16 - s^2} \geq 0$

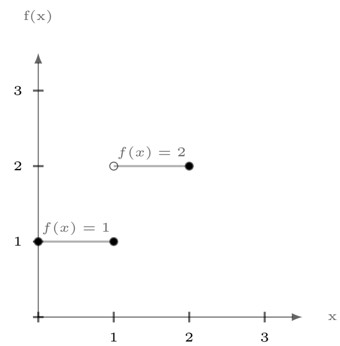
(f) $\dfrac{1}{2 + g(x)} = \dfrac{2 - g(x)}{x^2}$

$$\frac{1}{2+g(x)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-g(x)}{x^2} \; para \;\; |x| \leq 2 \; y \; x \neq 0$$

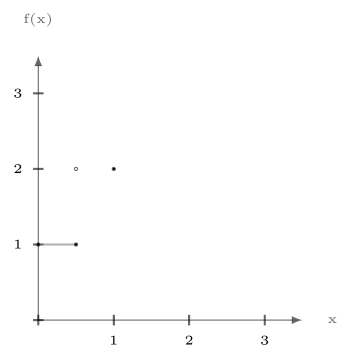
Evaluemos $\sqrt{4-x^2}$. Sea $4-x^2 \geq 0$ entonce $\sqrt{x^2} \leq 2$. Por otro lado tenemos que la función no puede ser 0 por $\dfrac{1}{x^2}$, por lo tanto debe ser $x^2 \neq 0$.

6. Sea f la función definida como sigue: $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ para $1 < x \leq 2$. La función no está definida si $x < 0$ ó si $x > 2$.

(a) Trazar la gráfica de f

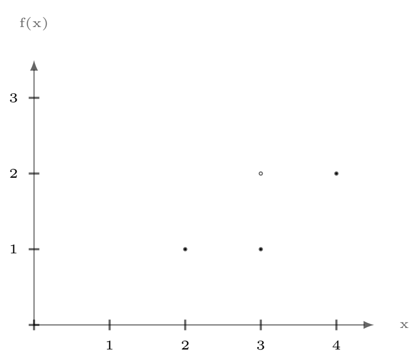


(b) Poner $g(x) = f(2x)$. Describir el dominio de g y dibujar su gráfica.



Debido a que $1 \leq 2x \leq 1$ y $1 < 2x \leq 2$ el dominio de $g(x)$ es $0 \leq x \leq 1$

(c) Poner $h(x) = f(x-2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

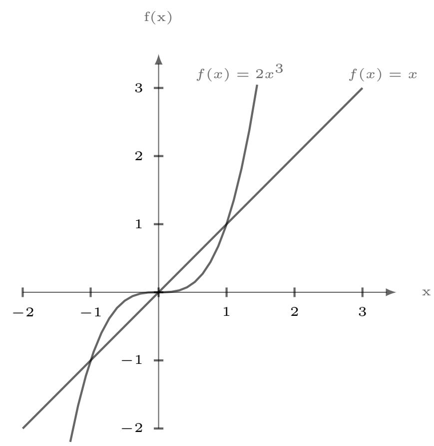


Debido a que $1 \leq x-2 \leq 1$ y $1 < x-2 \leq 2$ el dominio de $h(x)$ es $2 \leq x \leq 4$

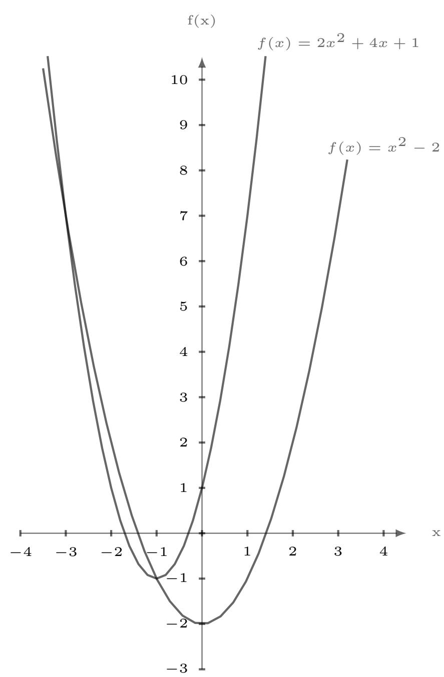
(d) Poner $k(x) = f(2x) + f(x-2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

El dominio está vacío ya $f(2x)$ que solo está definido para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x-2)$ solo está definido para $2 \leq x \leq 4$. Por lo tanto no hay ninguno x que satisfaga ambas condiciones.

7. Las gráficas de los dos polinomios $g(x) = x$ y $f(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.



8. Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.



9. Este ejercicio desarrolla ciertas propiedades fundamentales de los polinomios. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio de grado n. Demostrar cada uno de los siguientes apartados:

(a) Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, $f(x) = xg(x)$, siendo g un polinomio de grado $n-1$.

Para entender lo que nos quiere decir Apostol pongamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un polinomio donde $f(x) = 2x^2+3x-x$ entonces notamos que $f(x) = x(2x+3-1)$ donde $g(x) = 2x+3-1$, esto quiere decir que si $0 = f(0) = c_0 \Rightarrow c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n = x(c_1 + c_2x + ... + c_nx^{n-1})$ Así que debemos demostrar que $f(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $n \geq 1$ tal que $f(0) = 0$, entonces debe haber un polinomio de grado $n-1$, $g(x)$, tal que $f(x) = xg(x)$

Demostración.- Sabemos que

$$f(0) = c_n \cdot 0^n + c_{n-1} \cdot 0^{n-1} + ... + c_1 \cdot 0 + c_0 = c_0,$$

como $f(0) = 0$ se concluye que $c_0 = 0$. Así tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k.$$

Ahora crearemos una función $g(x)$. Dada la función $f(x)$ como la anterior, definamos,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

Ahora crearé una función $g(x)$. Dada una función $f(x)$ como la anterior, definamos

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

donde c_k son los mismos que los dados por la función $f(x)$. Primero notemos que el grado de $g(x)$ es $n-1$. Finalmente, tenemos que

$$xg(x) = x\sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k = f(x).$$

(b) Para cada real a, la función p dada por $p(x) = f(x+a)$ es un polinomio de grado n.

Demostración.- Usando el teorema del binomio,

$$\begin{aligned}
f(x+a) &= \sum_{k=0}^{n}(x+a)^k c_k \\
&= c_o + (x+a)c_1 + (x+a)^2c_2 + ... + (x+a)^n c_n \\
&= c_o + c_1\left(\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}a^jx^{1-j}\right) + c_2\left(\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}a^jx^{2-j}\right) + ... + c_n\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^jx^{n-j}\right) \\
&= (c_o + ac_1 + a^2c_2 + ... + a^nc_n) + x(c_1 + 2ac_2 + ... + na^{n-1}c_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(x^k\left(\sum_{j=k}\binom{j}{j-k}c_jaj-k\right)\right)
\end{aligned}$$

En la linea final reescribimos los coeficientes como sumas para verlos de manera más concisa. De cualquier manera, dado que todos los c_i son constantes, tenemos $\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{j-k}c_ja^{j-k}$ es alguna constante para cada k, de d_k y tenemos,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k x^k$$

(c) Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para un cierto valor real a, entonces $f(x) = (x-a)\, h(x)$, siendo h un polinomio de grado $n-1$. (considérese $p(x) = f(x+a)$.)

Demostración.- Por la parte b) se sabe que $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $p(x) = f(x+a)$ también es un polinomio del mismo grado. Ahora si $f(a) = 0$ entonces por hipótesis $p(0) = f(a) = 0$. Luego por la parte a), tenemos

$$p(x) = x \cdot g(x)$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. Así,

$$p(x-a) = f(x) = f(x) = (x-a) \cdot g(x-a)$$

ya que $p(x) = f(x+a)$. Pero, si $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, entonces por la parte b) nuevamente, también lo es $h(x) = g(x+(-a)) = g(x-a)$. Por lo tanto,

$$f(x) = (x-a) \cdot h(x)$$

para h un grado $n-1$ polinomial, según lo solicitado.

(d) Si $f(x) = 0$ para $n+1$ valores reales de x distintos, todos los coeficientes c_k son cero y $f(x) = 0$ para todo real de x

Demostración.- La prueba se realizara por inducción. Sea $n = 1$, entonces $f(x) = c_o + c_1 x$. Dado que la hipótesis es que existen $n+1$ distintos x de tal manera que $f(x) = 0$, sabemos que existen a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a_1) = f(a_2) = 0, \quad a_1 \neq a_2,$$

Así,

$$\begin{array}{rclrcll} c_0 + c_1 a_1 & = & 0 & \Rightarrow \quad c_1 a_1 - c_1 a_2 & = & 0 & \\ & & & \Rightarrow \quad c_1(a_1 - a_2) & = & 0 & \\ & & & \Rightarrow \quad c_1 & = & 0 & \text{ya que } a_1 \neq a_2 \\ & & & \Rightarrow \quad c_0 & = & 0 & \text{ya que } c_0 + c_1 a_1 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera. Suponga que es cierto para algunos $n = k \in \mathbb{Z}^+$. Luego Sea $f(x)$ un polinomio de grado $k+1$ con $k+2$ distintos de 0, $a_1, ..., a_{k+2}$. ya que $f(a_{k+2}) = 0$, usando la parte c), tenemos,

$$f(x) = (x - a_{k+2}) h(x)$$

donde $h(x)$ es un polinomio de grado k. Sabemos que hay $k+1$ valores distintos $a_1, ...a_{k+1}$ tal que $h(a_i) = 0$. Dado que $f(a_i) = 0$ para $1 < i < k+2y$ y $(x - a_{k+2}) \neq 0$ para $x = a_i$ con $1 < i < k+1$ ya que todos los a_1 son distintos), por lo tanto, según la hipótesis de inducción, cada coeficiente de h es 0 y $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{array}{rclcl} f(x) & = & (x - a_{k+2}) h(x) & = & (x - a_{k+2}) \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{k} c_j x^j \\ & & & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (x - a_{k+2}) c_j x^j \\ & & & = & c_k x^{k+1} + (c_{k-1} - a_k + 2c_k) x^k + ... + (c_1 - a_{k+2} c_0) x + a_{k+2} c_0 \end{array}$$

Pero dado que todos los coeficientes de $h(x)$ son cero y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la afirmación es verdadera para el caso $k+1$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

(e) Sea $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ un polinomio de grado m, siendo $m \geq n$. Si $g(x) = f(x)$, para $m+1$ valores reales de x distintos, entonces $m = n$, $b_k = c_k$ para cada valor de k, y $g(x) = f(x)$ para todo real x

Demostración.- Sea

$$p(x) = g(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{m} (b_k - c_k) x^k$$

donde $c_k = 0$ para $n < k \leq m$, cabe recordar que tenemos $m \geq n$.
Entonces, hay $m+1$ distintos reales x para los cuales $p(x) = 0$. Dado que hay $m+1$ valores reales distintos para lo cuál $g(x) = f(x)$, así en cada uno de estos valores $p(x) = g(x) - f(x) = 0$. Por lo tanto, por la parte d), $b_k - c_k = 0$ para $k = 0, ..., m$ y $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir

$$b_k - c_k = 0 \quad \Rightarrow \quad b_k = c_k \quad para\ k = 0, ..., m$$

y

$$p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ademas desde $b_k - c_k = 0$ para $k = 0, ..., m$ y por supuesto $c_k = 0$ para $k = n+1, ..., m$, tenemos $b_k = 0$ para $k = n+1, ..., m$. Pero entonces,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=n+1}^{m} 0 \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} b^k x^k$$

significa que $g(x)$ es un polinomio de grado n también.

10. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que satisfacen las condiciones dadas.

Sabemos que para un polinomio de grado ≤ 2 es:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $p(x) = p(1-x)$

Sea $f(x) = p(x) - 1$, entonces f es de grado como máximo 2 por la parte d) del problema 9 tenemos que todos los coeficientes de f son 0 y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así,

$$p(x) - 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; p(x) = 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) $p(x) = p(1+x)$

Tenemos $p(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ luego, $p(1) = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ y finalmente, con $c = 1$ y $b = -a$, tenemos: $p(2) = 2 \Rightarrow 4a - 2a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$. por lo tanto

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x(x-1) + 1$$

(c) $p(x) = p(0) = p(1) = 1$

Una vez mas, desde $p(0) = 1$ tenemos: $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ así, $p(x) = ax^2 - ax + 1 = ax(x-1) + 1$

(d) $p(0) = p(1)$

Simplemente sustituyendo estos valores que tenemos, $p(0) = p(1) \Rightarrow c = a + b + c \Rightarrow b = -a$ entonces,

$$p(x) = ax^2 - ax + c = ax(x-1) + c$$

11. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que para todo real x satisfacen las condiciones que se dan. Como p es un polinomio de grado por lo mucho 2, podemos escribir

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad para\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

(a) $p(x) = p(1-x)$

Sustituyendo se tiene $p(x) = p(1-x) = ax^2+bx+c = a(1-x)^2+b(1-x)+c \Rightarrow a-2ax+ax^2+b-bx+c$ por lo tanto

$$ax^2 + (-2a - b)x + (a + b + c)$$

Así para $a = a$, $b = -2a - b \Rightarrow a = -b$, $c = a + b + c$ entonces

$$p(x) = -bx^2 + bx + c = bx(1-x) + c$$

(b) $p(x) = p(x) = p(1+x)$

Una vez más sustituyendo, $p(x) = p(1+x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(1+x)^2 + b(1+x) + c = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)$. Luego, igualando como potencias de x, $a = a$, $b = 2a + b \Rightarrow a = 0$, $c = a + b + c \Rightarrow b = 0$. Por lo tanto $p(x) = c$ donde c es una constante arbitraria.

(c) $p(2x) = 2p(x)$

Sustituyendo, $p(2x) = 2p(x) \Rightarrow 4ax^2 + 2bx + c = 2ax^2 + 2bx + 2c$.. Igualando a las potencias de x, $4a = 2a \Rightarrow a = 0$, $2b = 2b \Rightarrow b\ arbitrario$, $c = 2c \Rightarrow c = 0$.
Así

$$p(x)bx,\ b\ arbitrario$$

(d) $p(2x) = p(x+3)$

Sustituyendo $p(3x) = p(x+3) \Rightarrow 9ax^2 + 3bx + c = ax^2 + (6a+b)x + (9a+3b+c)$. Igualando como potencias de x, $9a = a \Rightarrow a = 0$, $3b = 6a + b \Rightarrow b = 0$, $c = 9a + 3b + c = c \Rightarrow c\ arbitrario$. Por lo tanto

$$p(x) = c\text{para c constante arbitrario.}$$

Corolario 1.1 *Probar que:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad para x \neq 1$$

Demostración.- *Usando propiedades de suma,*

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = -\sum_{k=0}^{n}(x^{k+1} - x^k) = -(x^{n+1} - 1 = 1 - xn + 1)$$

En la penultima igualdad se deriva de la propiedad telescópica, por lo tanto nos queda,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Corolario 1.2 *Probar la identidad*

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^{k-1}}\right) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}, \quad para\ x \neq 1$$

Demostración.- *Para $n=1$ a la izquierda tenemos,*

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^{k-1}}\right) = \prod_{k=0}^{1}\left(1+x^{2^{k-1}} = 1 + x^{2^0} = 1 + x\right)$$

Por otro lado a la derecha se tiene,

$$\frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1 + x$$

Concluimos que la identidad se mantiene para $n=1$. Ahora supongamos que es válido para algunos $n = m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{m+1} &= \left(+x^{2^m}\right)\cdot\prod_{k=1}^{m}\left(1+x^{2^{k+1}}\right) \\
&= \left(1+x^{2^m}\right)\cdot\left(\frac{1-x^{2^m}}{1-x}\right) \\
&= \frac{(1+x^{2^m})(1-x^{2^m})}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera para $m+1$, y así para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

12. Demostrar que las expresiones siguientes son polinomios poniéndolas en la forma $\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ para un valor de m conveniente. En cada caso n es entero positivo.

(a) $(1+x)^{2n}$

Demostración.- Usando el teorema binomial $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2} n\binom{2n}{k}x^k$, sea $m = 2n$ entonces $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{n}x^k$, por lo tanto $\sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ si $c_k = \binom{m}{k}$ para cada k.

(b) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x \neq 1$

Demostración.- Por el corolario anterior

$$\begin{aligned}
\frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= \frac{(1-x)(1+x+...+x^n)}{1-x} \\
&= 1+x+...+x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} 1\cdot x^k
\end{aligned}$$

(c) $\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k})$

Demostración.- Por le corolario anterior,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})}{1-x} \\
&= \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} \\
&= \left(\frac{1-x^{2^n}}{1-x}\right)(1+x^{2^n}) \\
&= (1+x+...+x^{2^n+1})(1+x^{2^n}) \\
&= (1+x+...+x^{2^n+1})(x^{2^n}+x^{2^n+1}+...+x^{2^{n+1}-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} 1\cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} 1\cdot x^k \text{ si } m = 2^{n+1}-1
\end{aligned}$$

Axioma .1 (Definición axiomática de área) *Supongamos que existe una clase M de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto a, cuyo dominio es M, con las propiedades siguientes:*

1. ***Propiedad de no negatividad***. *Para cada conjunto S de M, se tiene $a(S) \geq 0$*

2. ***Propiedad aditiva***. *Si S y T pertenecen a M, también pertenecen a M, $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene*

$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$$

3. ***Propiedad de la diferencia***. *Si S y T pertenecen a M siendo $S \subseteq T$ entonces $T - S$ está en M, y se tiene $a(T - S) = a(T) - a(S)$*

4. ***Invariancia por congruencia***. *Si un conjunto S pertenece a M y T es congruente a S, también T pertenece a M y tenemos $a(S) = a(T)$*

5. ***Elección de escala*** *Todo rectángulo R pertenece a M. Si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces $a(R) = hk$*

6. ***Propiedad de exhaución***. *Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T de modo que*

$$S \subseteq Q \subseteq T.$$

Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades

$$a(S) \leq c \leq a(T)$$

para todas la regiones escalonadas S y T que satisfacen $S \subseteq Q \subseteq T$, entonces Q es medible y $a(Q) = c$

1.7. Ejercicios

1. Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es medible y tiene área nula:

(a) Un conjunto que consta de un solo punto.

Demostración.- Un sólo punto se puede medir con un área 0, ya que un punto es un rectángulo con $h = k = 0$

(b) El conjunto de un número finito de puntos.

Demostración.- Demostraremos por inducción en n, el número de puntos. Para el caso de $n = 1$ ya quedo demostrado en el anterior inciso. Supongamos que es cierto para algunos $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Entonces, tenemos un conjunto $S \in M$ de k puntos en el plano y $a(S) = 0$. Sea T un punto en el plano. Por (a) $T \in M$ y $a(T) = 0$, por tanto por la propiedad aditiva,

$$S \cup T \in M \;\; y \;\; a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$

pero $S \cap T \subseteq S$, entonces

$$a(S \cap T) \leq a(S) \Rightarrow a(S \cap T) \leq 0 \Rightarrow a(S \cap T) = 0.$$

El axioma 1 nos garantiza que $a(S \cap T)$ no puede ser negativo. Por lo tanto, $a(S \Cup T) = 0$, Por tanto, el enunciado es verdadero para $k+1$ puntos en un plano y, por tanto, para todo $n \in Z_{>0}$

(c) La reunión de una colección finita de segmentos de recta en un plano.

Demostración.- Por inducción, sea n el número de segmentos en un plano. Para $n = 1$, dejamos S ser un conjunto con una línea en un plano. Dado que una línea es un rectángulo y todos los rectángulos son medibles, tenemos $S \in M$ ademas, $a(S) = 0$ ya que una línea es un rectángulo con $h = 0$ ó $k = 0$, y así en cualquier caso $hk = 0$. Por lo tanto, el enunciado es verdadero para una sola línea en el plano, el caso $n = 1$.
Asuma entonces que es cierto para $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Sea S un conjunto de rectas en el plano. Luego, por la hipótesis de inducción, $S \in M$ y $a(S) = 0$. Sea T una sola línea en el plano. Por el caso $n = 1$ en $T \in M$ y $a(T) = 0$. Por lo tanto $S \cup T \in M$ y $a(S \cup T) = 0$ (ya que $a(S) = a(T)a(S \cap T) = 0$). Por tanto, la afirmación es verdadera para $k+1$ líneas en un plano, y así para todos $n \in \mathbf{Z}^+$

2. Toda región en forma de triángulo rectángulo es medible pues puede obtenerse como intersección de dos rectángulos. Demostrar que toda región triangular es medible y que su área es la mitad del producto de su base por su altura.

Demostración.-