

# Los conceptos del Cálculo Integral

## 1.3. Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o funciones reales.

**Definición 1.1 (Par ordenado)** Dos pares ordenados  $(a, b)$  y  $(c, d)$  son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

**Definición 1.2 (Definición de función)** Una función  $f$  es un conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  ninguno de los cuales tiene el mismo primero elemento.

Debe cumplir las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

(i)  $\forall x \in D_f, \exists y / (x, y) \in f \text{ ó } y = f(x)$

(ii)  $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

**Definición 1.3 (Dominio y recorrido)** Si  $f$  es una función, el conjunto de todos los elementos  $x$  que aparecen como primeros elementos de pares  $(x, y)$  de  $f$  se llama el **dominio** de  $f$ . El conjunto de los segundos elementos y se denomina **recorrido** de  $f$ , o conjunto de valores de  $f$ .

**TEOREMA 1.1** Dos funciones  $f$  y  $g$  son iguales si y sólo si

(a)  $f$  y  $g$  tienen el mismo dominio, y

(b)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  del dominio de  $f$ .

*Demostración.-* Sea  $f$  función tal que  $x \in D_f, \exists y / y = f(x)$  es decir  $(x, f(x))$ ,  $g$  una función tal que  $\forall z \in D_g, \exists y / y = g(z)$  es decir  $(z, g(z))$ , entonces por definición de par ordenado tenemos que  $(x, f(x)) = (z, g(z))$  si y sólo si  $x = z$  y  $f(x) = g(z)$

**Definición 1.4 (Sumas, productos y cocientes de funciones)** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones reales que tienen el mismo dominio  $D$ . Se puede construir nuevas funciones a partir de  $f$  y  $g$  por adición, multiplicación o división de sus valores. La función  $u$  definida por,

$$u(x) = f(x) + g(x) \quad \text{si } x \in D$$

se denomina suma de  $f$  y  $g$ , se representa por  $f + g$ . Del mismo modo, el producto  $v = f \cdot g$  y el cociente  $w = f/g$  están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \quad \text{si } x \in D, \quad w(x) = f(x)/g(x) \quad \text{si } x \in D \text{ y } g(x) \neq 0$$

## 1.5. Ejercicios

1. Sea  $f(x) = x + 1$  para todo real  $x$ . Calcular:

- $f(2) = 2 + 1 = 3$
- $f(-2) = -2 + 1 = -1$
- $-f(2) = -(2 + 1) = -3$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
- $\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{3}$
- $f(a + b) = a + b + 1$
- $f(a) + f(b) = (a + 1) + (b + 1) = a + b + 2$
- $f(a) \cdot f(b) = (a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$

2. Sean  $f(x) = 1 + x$  y  $g(x) = 1 - x$  para todo real  $x$ . calcular:

- $f(2) + g(2) = (1 + 2) + (1 - 2) = 2$
- $f(2) - g(2) = (1 + 2) - (1 - 2) = 3$
- $f(2) \cdot g(2) = (1 + 2) \cdot (1 - 2) = 3 \cdot (-1) = -3$

- $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$
- $f[g(2)] = f(1-2) = f(-1) = 1 + (-1) = 0$
- $g[f(2)] = f(1+2) = g(3) = 1-3 = -2$
- $f(a) + g(-a) = (1+a) + (1-a) = 2$
- $f(t) \cdot g(-t) = (1+t) \cdot (1+t) = 1+t+t+t^2 = t^2+2t+1 = (t+1)^2$

**3.** Sea  $f(x) = |x-3| + |x-1|$  para todo real  $x$ . Calcular:

- $f(0) = |0-3| + |0-1| = 3+1 = 4$
- $f(1) = |1-3| + |1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3| + |2-1| = -1+1 = 0$
- $f(3) = |3-3| + |3-1| = 2$
- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4+2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5+3 = 8$

Determinar todos los valores de  $t$  para los que  $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{aligned} |t+2-3| + |t+2-1| &= |t-3| + |t-1| \\ |t-1| + |t+1| &= |t-3| + |t-1| \\ |t+1| &= t-3 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $t = 1$

**4.** Sea  $f(x) = x^2$  para todo real  $x$ . Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números reales  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , etc., para los que la fórmula dada es válida.

(a)  $f(-x) = f(x)$

Demostración.- Se tiene  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

(b)  $f(y) - f(x) = (y-x)(y+x)$

Demostración.-  $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x), \forall x, y \in \mathbb{R}$

(c)  $f(x+h) + f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.-  $f(x+h) + f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2, \forall x \in \mathbb{R}$

(d)  $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.-  $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y), \forall y \in \mathbb{R}$

(e)  $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.-  $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

(f)  $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.-  $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

5. Sea  $g(x) = \sqrt{4-x^2}$  para  $|x| \leq 2$ . Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de  $x$ ,  $y$ ,  $s$  y  $t$  son válidas.

a)  $g(-x) = g(x)$

Se tiene  $g(-x) = \sqrt{2 - (-x)^2} = \sqrt{2 - (x)^2} = g(x)$ , para  $|x| \leq 2$

b)  $g(2y) = 2\sqrt{1-y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4 - (2y)^2} = \sqrt{4(1-y^2)} = 2\sqrt{1-y^2}$ , para  $|y| \leq 1$  Se obtiene  $|y| \leq 1$  de  $\sqrt{1-y^2}$  es decir  $1-y^2 \geq 0$  entonces  $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$  y  $|y| \leq 1$

c)  $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$

$g\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2-1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$ , para  $|t| \geq \frac{1}{2}$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar  $\sqrt{4t^2-1}$

d)  $g(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$

$g(a-2) = \sqrt{4 - (a-2)^2} = \sqrt{4a-a^2}$ , para  $0 \leq a \leq 4$

e)  $g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$

$s\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16-s^2}}{2}$ , para  $|s| \leq 4$

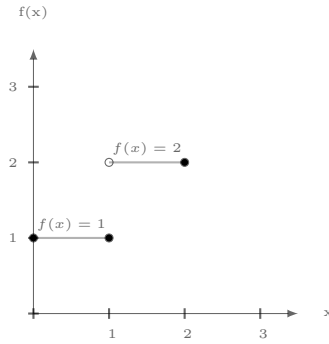
f)  $\frac{1}{2+g(x)} = \frac{2-g(x)}{x^2}$

$\frac{1}{2+g(x)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-g(x)}{x^2}$  para  $0 < |x| \leq 2$

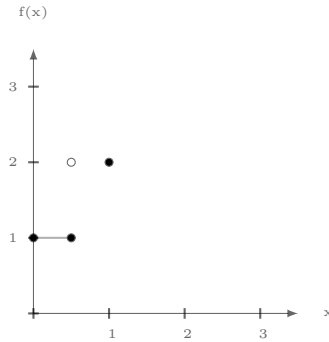
Evaluemos  $\sqrt{4-x^2}$ . Sea  $4-x^2 \geq 0$  entonces  $\sqrt{x^2} \leq 2$ . Por otro lado tenemos que la función no puede ser 0 por  $\frac{1}{x^2}$ , por lo tanto debe ser  $x^2 \leq 0$ .

6. Sea  $f$  la función definida como sigue:  $f(x) = 1$  para  $0 \leq x \leq 1$ ;  $f(x) = 2$  para  $1 < x \leq 2$ . La función no está definida si  $x < 0$  ó si  $x > 2$ .

(a) Trazar la gráfica de  $f$

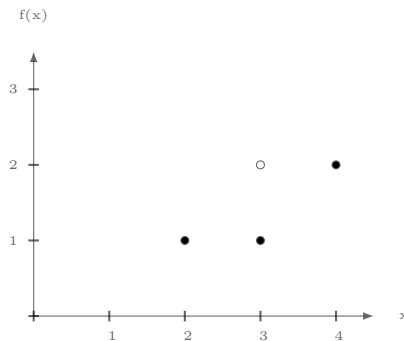


(b) Poner  $g(x) = f(2x)$ . Describir el dominio de  $g$  y dibujar su gráfica.



Debido a que  $1 \leq 2x \leq 1$  y  $1 < 2x \leq 2$  el dominio de  $g(x)$  es  $0 \leq x \leq 1$

(c) Poner  $h(x) = f(x-2)$ . Describir el dominio de  $k$  y dibujar su gráfica.



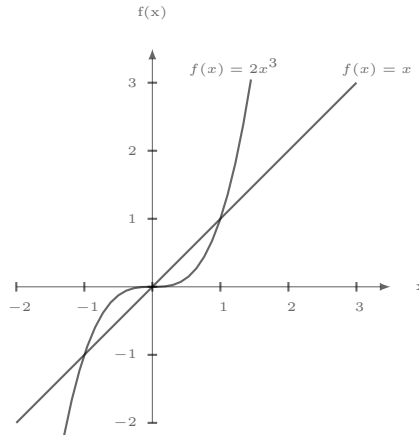
Debido a que  $1 \leq x-2 \leq 1$  y  $1 < x-2 \leq 2$  el dominio de  $h(x)$  es  $2 \leq x \leq 4$

(d) Poner  $k(x) = f(2x) + f(x-2)$ . Describir el dominio de  $k$  y dibujar su gráfica.

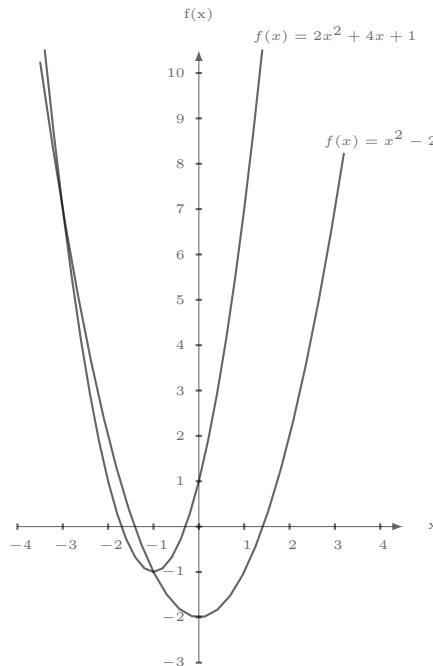
El dominio está vacío ya  $f(2x)$  que solo está definido para  $0 \leq x \leq 1$  y  $f(x-2)$  solo está

definido para  $2 \leq x \leq 4$ . Por lo tanto no hay ninguno  $x$  que satisfaga ambas condiciones.

7. Las gráficas de los dos polinomios  $g(x) = x$  y  $f(x) = x^3$  se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.



8. Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos  $f(x) = x^2 - 2$  y  $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$  se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.



9. Este ejercicio desarrolla ciertas propiedades fundamentales de los polinomios. Sea  $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  un polinomio de grado  $n$ . Demostrar cada uno de los siguientes apartados:

(a) Si  $n \geq 1$  y  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = xg(x)$ , siendo  $g$  un polinomio de grado  $n - 1$ .

Para entender lo que nos quiere decir Apostol pongamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un polinomio donde  $f(x) = 2x^2 + 3x - x$  entonces notamos que  $f(x) = x(2x + 3 - 1)$  donde  $g(x) = 2x + 3 - 1$ , esto quiere decir que si  $0 = f(0) = c_0 \Rightarrow c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n = x(c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1})$  Así que

debemos demostrar que  $f(x)$  es un polinomio arbitrario de grado  $n \geq 1$  tal que  $f(0) = 0$ , entonces debe haber un polinomio de grado  $n - 1$ ,  $g(x)$ , tal que  $f(x) = xg(x)$

Demostración.- Sabemos que

$$f(0) = c_n \cdot 0^n + c_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \dots + c_1 \cdot 0 + c_0 = c_0,$$

como  $f(0) = 0$  se concluye que  $c_0 = 0$ . Así tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k.$$

Ahora crearemos una función  $g(x)$ . Dada la función  $f(x)$  como la anterior, definamos,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1}$$

Ahora crearé una función  $g(x)$ . Dada una función  $f(x)$  como la anterior, definamos

$$g(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1}$$

donde  $c_k$  son los mismos que los dados por la función  $f(x)$ . Primero notemos que el grado de  $g(x)$  es  $n - 1$ . Finalmente, tenemos que

$$xg(x) = x \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n c_k x^k = f(x).$$

(b) Para cada real  $a$ , la función  $p$  dada por  $p(x) = f(x + a)$  es un polinomio de grado  $n$ .

Demostración.- Usando el teorema del binomio,

$$\begin{aligned} f(x+a) &= \sum_{k=0}^n (x+a)^k c_k \\ &= c_0 + (x+a)c_1 + (x+a)^2 c_2 + \dots + (x+a)^n c_n \\ &= c_0 + c_1 \left( \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a^j x^{1-j} \right) + c_2 \left( \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} a^j x^{2-j} \right) + \dots + c_n \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j x^{n-j} \right) \\ &= (c_0 + ac_1 + a^2 c_2 + \dots + a^n c_n) + x(c_1 + 2ac_2 + \dots + na^{n-1} c_n) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( x^k \left( \sum_{j=k}^n \binom{j}{j-k} c_j a^{j-k} \right) \right) \end{aligned}$$

En la línea final reescribimos los coeficientes como sumas para verlos de manera más concisa. De cualquier manera, dado que todos los  $c_i$  son constantes, tenemos  $\sum_{j=k}^n \binom{j}{j-k} c_j a^{j-k}$  es alguna constante para cada  $k$ , de  $d_k$  y tenemos,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k$$

- (c) Si  $n \geq 1$  y  $f(a) = 0$  para un cierto valor real  $a$ , entonces  $f(x) = (x-a)h(x)$ , siendo  $h$  un polinomio de grado  $n-1$ . (considérese  $p(x) = f(x+a)$ .)

Demostración.- Por la parte b) se sabe que  $f(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , entonces  $p(x) = f(x+a)$  también es un polinomio del mismo grado. Ahora si  $f(a) = 0$  entonces por hipótesis  $p(0) = f(a) = 0$ . Luego por la parte a), tenemos

$$p(x) = x \cdot g(x)$$

donde  $g(x)$  es un polinomio de grado  $n-1$ . Así,

$$p(x-a) = f(x) = f(x) = (x-a) \cdot g(x-a)$$

ya que  $p(x) = f(x+a)$ . Pero, si  $g(x)$  es un polinomio de grado  $n-1$ , entonces por la parte b) nuevamente, también lo es  $h(x) = g(x+(-a)) = g(x-a)$ . Por lo tanto,

$$f(x) = (x-a) \cdot h(x)$$

para  $h$  un grado  $n-1$  polinomial, según lo solicitado.

- (d) Si  $f(x) = 0$  para  $n+1$  valores reales de  $x$  distintos, todos los coeficientes  $c_k$  son cero y  $f(x) = 0$  para todo real de  $x$

Demostración.- La prueba se realizara por inducción. Sea  $n = 1$ , entonces  $f(x) = c_0 + c_1x$ . Dado que la hipótesis es que existen  $n+1$  distintos  $x$  de tal manera que  $f(x) = 0$ , sabemos que existen  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(a_1) = f(a_2) = 0, \quad a_1 \neq a_2,$$

Así,

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 a_1 &= 0 &\Rightarrow c_1 a_1 - c_1 a_2 &= 0 \\ &&\Rightarrow c_1 (a_1 - a_2) &= 0 \\ &&\Rightarrow c_1 &= 0 \quad \text{ya que } a_1 \neq a_2 \\ &&\Rightarrow c_0 &= 0 \quad \text{ya que } c_0 + c_1 a_1 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera. Suponga que es cierto para algunos  $n = k \in \mathbb{Z}^+$ . Luego Sea  $f(x)$  un polinomio de grado  $k+1$  con  $k+2$  distintos de  $0, a_1, \dots, a_{k+2}$ . ya que  $f(a_{k+2}) = 0$ , usando la parte c), tenemos,

$$f(x) = (x - a_{k+2})h(x)$$

donde  $h(x)$  es un polinomio de grado  $k$ . Sabemos que hay  $k+1$  valores distintos  $a_1, \dots, a_{k+1}$  tal que  $h(a_i) = 0$ . Dado que  $f(a_i) = 0$  para  $1 < i < k+2$  y  $(x - a_{k+2}) \neq 0$  para  $x = a_i$  con  $1 < i < k+1$  ya que todos los  $a_i$  son distintos), por lo tanto, según la hipótesis de inducción, cada coeficiente de  $h$  es 0 y  $h(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Así,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_{k+2})h(x) = (x - a_{k+2}) \cdot \sum_{j=0}^k c_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^k (x - a_{k+2})c_j x^j \\ &= c_k x^{k+1} + (c_{k-1} - a_{k+2}c_k)x^k + \dots + (c_1 - a_{k+2}c_0)x + a_{k+2}c_0 \end{aligned}$$

Pero dado que todos los coeficientes de  $h(x)$  son cero y  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, la afirmación es verdadera para el caso  $k+1$  y para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$



- (e) Sea  $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$  un polinomio de grado  $m$ , siendo  $m \geq n$ . Si  $g(x) = f(x)$ , para  $m+1$  valores reales de  $x$  distintos, entonces  $m = n$ ,  $b_k = c_k$  para cada valor de  $k$ , y  $g(x) = f(x)$  para todo real  $x$

Demostración.- Sea

$$p(x) = g(x) - f(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k - \sum_{k=0}^n c_k x^k = \sum_{k=0}^m (b_k - c_k) x^k$$

donde  $c_k = 0$  para  $n < k \leq m$ , cabe recordar que tenemos  $m \geq n$ .

Entonces, hay  $m+1$  distintos reales  $x$  para los cuales  $p(x) = 0$ . Dado que hay  $m+1$  valores reales distintos para lo cual  $g(x) = f(x)$ , así en cada uno de estos valores  $p(x) = g(x) - f(x) = 0$ . Por lo tanto, por la parte d),  $b_k - c_k = 0$  para  $k = 0, \dots, m$  y  $p(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Es decir

$$b_k - c_k = 0 \Rightarrow b_k = c_k \text{ para } k = 0, \dots, m$$

y

$$p(x) = 0 \Rightarrow g(x) - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Además desde  $b_k - c_k = 0$  para  $k = 0, \dots, m$  y por supuesto  $c_k = 0$  para  $k = n+1, \dots, m$ , tenemos  $b_k = 0$  para  $k = n+1, \dots, m$ . Pero entonces,

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + \sum_{k=n+1}^m 0 \cdot x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k$$

significa que  $g(x)$  es un polinomio de grado  $n$  también.

- 10.** En cada caso, hallar todos los polinomios  $p$  de grado  $\leq 2$  que satisfacen las condiciones dadas.

Sabemos que para un polinomio de grado  $\leq 2$  es:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- (a)  $p(x) = p(1-x)$

Sea  $f(x) = p(x) - 1$ , entonces  $f$  es de grado como máximo 2 por la parte d) del problema 9 tenemos que todos los coeficientes de  $f$  son 0 y  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , así,

$$p(x) - 1 = 0 \Rightarrow p(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- (b)  $p(x) = p(1+x)$

Tenemos  $p(0) = 1 \Rightarrow c = 1$  luego,  $p(1) = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$  y finalmente, con  $c = 1$  y  $b = -a$ , tenemos:  $p(2) = 2 \Rightarrow 4a - 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ . por lo tanto

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x(x-1) + 1$$

(c)  $p(x) = p(0) = p(1) = 1$

Una vez mas, desde  $p(0) = 1$  tenemos:  $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$  así,  $p(x) = ax^2 - ax + 1 = ax(x - 1) + 1$

(d)  $p(0) = p(1)$

Simplemente sustituyendo estos valores que tenemos,  $p(0) = p(1) \Rightarrow c = a + b + c \Rightarrow b = -a$  entonces,

$$p(x) = ax^2 - ax + c = ax(x - 1) + c$$

- 11.** En cada caso, hallar todos los polinomios  $p$  de grado  $\leq 2$  que para todo real  $x$  satisfacen las condiciones que se dan. Como  $p$  es un polinomio de grado por lo mucho 2, podemos escribir

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R}$$

(a)  $p(x) = p(1 - x)$

Sustituyendo se tiene  $p(x) = p(1 - x) = ax^2 + bx + c = a(1 - x)^2 + b(1 - x) + c \Rightarrow a - 2ax + ax^2 + b - bx + c$  por lo tanto

$$ax^2 + (-2a - b)x + (a + b + c)$$

Así para  $a = a$ ,  $b = -2a - b \Rightarrow a = -b$ ,  $c = a + b + c$  entonces

$$p(x) = -bx^2 + bx + c = bx(1 - x) + c$$

(b)  $p(x) = p(x) = p(1 + x)$

Una vez más sustituyendo,  $p(x) = p(1 + x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(1 + x)^2 + b(1 + x) + c = ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c)$ . Luego, igualando como potencias de  $x$ ,  $a = a$ ,  $b = 2a + b \Rightarrow a = 0$ ,  $c = a + b + c \Rightarrow b = 0$ . Por lo tanto  $p(x) = c$  donde  $c$  es una constante arbitraria.

(c)  $p(2x) = 2p(x)$

Sustituyendo,  $p(2x) = 2p(x) \Rightarrow 4ax^2 + 2bx + c = 2ax^2 + 2bx + 2c$ . Igualando a las potencias de  $x$ ,  $4a = 2a \Rightarrow a = 0$ ,  $2b = 2b \Rightarrow b$  arbitrario,  $c = 2c \Rightarrow c = 0$ .

Así

$$p(x) = bx, \quad b \text{ arbitrario}$$

(d)  $p(2x) = p(x + 3)$

Sustituyendo  $p(2x) = p(x + 3) \Rightarrow 9ax^2 + 3bx + c = ax^2 + (6a + b)x + (9a + 3b + c)$ . Igualando como potencias de  $x$ ,  $9a = a \Rightarrow a = 0$ ,  $3b = 6a + b \Rightarrow b = 0$ ,  $c = 9a + 3b + c = c \Rightarrow c$  arbitrario. Por lo tanto

$$p(x) = c \text{ para } c \text{ constante arbitrario.}$$

**Corolario 1.1** *Probar que:*

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ para } x \neq 1$$

*Demostración.- Usando propiedades de suma,*

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n (x^k - x^{k+1}) = - \sum_{k=0}^n (x^{k+1} - x^k) = -(x^{n+1} - 1) = 1 - x^{n+1}$$

*En la penultima igualdad se deriva de la propiedad telescópica, por lo tanto nos queda,*

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

**Corolario 1.2** *Probar la identidad*

$$\prod_{k=1}^n (1+x^{2^{k-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}, \text{ para } x \neq 1$$

*Demostración.- Para  $n=1$  a la izquierda tenemos,*

$$\prod_{k=1}^n (1+x^{2^{k-1}}) = \prod_{k=0}^1 (1+x^{2^k} = 1+x^{2^0} = 1+x)$$

*Por otro lado a la derecha se tiene,*

$$\frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x$$

*Concluimos que la identidad se mantiene para  $n=1$ . Ahora supongamos que es válido para algunos  $n=m \in \mathbb{Z}^+$ ,*

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m+1} &= (1+x^{2^m}) \cdot \prod_{k=1}^m (1+x^{2^{k-1}}) \\ &= (1+x^{2^m}) \cdot \left( \frac{1-x^{2^m}}{1-x} \right) \\ &= \frac{(1+x^{2^m})(1-x^{2^m})}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x} \end{aligned}$$

*Por lo tanto, la afirmación es verdadera para  $m+1$ , y así para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$*

- 12.** Demostrar que las expresiones siguientes son polinomios poniéndolas en la forma  $\sum_{k=0}^m a_k x^k$  para un valor de  $m$  conveniente. En cada caso  $n$  es entero positivo.

(a)  $(1+x)^{2n}$

Demostración.- Usando el teorema binomial  $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$ , sea  $m = 2n$  entonces

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k, \text{ por lo tanto } \sum_{k=0}^m c_k x^k \text{ si } c_k = \binom{m}{k} \text{ para cada } k.$$

(b)  $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1$

Demostración.- Por el corolario anterior

$$\begin{aligned} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= \frac{(1-x)(1+x+\dots+x^n)}{1-x} \\ &= 1+x+\dots+x^n \\ &= \sum_{k=0}^n 1 \cdot x^k \end{aligned}$$

(c)  $\prod_{k=0}^n (1+x^{2^k})$

Demostración.- Por el corolario anterior,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n (1+x^{2^k}) &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})}{1-x} \\ &= \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \left( \frac{1-x^{2^n}}{1-x} \right) (1+x^{2^n}) \\ &= (1+x+\dots+x^{2^n-1})(1+x^{2^n}) \\ &= (1+x+\dots+x^{2^n-1})(x^{2^n}+x^{2^n+1}+\dots+x^{2^{n+1}-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} 1 \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^m 1 \cdot x^k \text{ si } m = 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$