CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1

Funciones

Definición 1.1 *El conjunto de los números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de* ***dominio*** *de la función.*

Definición 1.2 *Si f y g son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función $f+g$ denominada* ***suma*** *de $f+g$ mediante la ecuación:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los x que están a la vez en el dominio de f y en el dominio de g, es decir:

$$\textit{dominio } (f+g) = \textit{dominio } f \cap \textit{dominio } g$$

Definición 1.3 *El dominio de $f \cdot g$ es dominio $f \cap$ dominio g*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Definición 1.4 *Se expresa por dominio $f \cap$ dominio $g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definición 1.5 (Función constante)

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

TEOREMA 1.1 $(f+g)+h = f+(g+h)$

Demostración.- ***La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio.*** *Obsérvese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:*

$$\begin{aligned}[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= [f(x)+g(x)]+h(x)\end{aligned}$$

$$y$$

$$\begin{aligned}[f+(g+h)](x) &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= f(x)+[g(x)+h(x)]\end{aligned}$$

Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de $(f+g)+h$ y el de $f+(g+h)$ es evidentemente dominio $f \cap$ dominio $g \cap$ dominio h. Nosotros escribimos, naturalmente $f+g+h$ por $(f+g)+h = f+(g+h)$

TEOREMA 1.2 *Es igual fácil demostrar que $(f \cdot g) \cdot g = f \cdot (g \cdot h)$ y ésta función se designa por $f \cdot g \cdot h$. Las ecuaciones $f+g = g+f \quad y \quad f \cdot g = g \cdot f$ no deben presentar ninguna dificultad.*

Definición 1.6 (Composición de función)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{\ x : x$ está en el dominio de $g \quad y \quad g(x)$ está en el dominio de $f\ \}$

$$D_{f\circ g} = \{x \ / \ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

Propiedad 1.1 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ *La demostración es una trivalidad.*

Definición 1.7 *Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si $(a,b) \quad y \quad (a,c)$ pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.*

Definición 1.8 *Si f es una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a,b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a,b) está en f. Este b único se designa por $f(a)$.*

1.1. Problemas

1. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Interpretar lo siguiente:

(i) $f(f(x))$ (¿Para que x tiene sentido?)

Respuesta.- Sea $f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ entonces $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$, por lo tanto $\dfrac{1-x}{x+2}$ de donde llegamos a la conclusión de que x se cumple para todo número real de 1 y -2

(ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$ por lo tanto se cumple para todo $x \neq -1, 0$

(iii) $f(cx)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+cx}$ donde se cumple para todo $x \neq -1$ si $c \neq 0$

(iv) $f(x+y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x+y}$ donde se cumple para todo $x+y \neq -1$

(v) $f(x)+f(y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$ siempre y cuando $x \neq -1$ y $y \neq -1$

(vi) ¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?

Respuesta.- Para todo c ya que $f(c \cdot 0) = f(0)$

(vii) ¿Para que números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos x?

Respuesta.- Solamente $c = 1$ ya que $f(x) = f(cx)$ implica que $x = cx$, y esto debe cumplirse por lo menos para un $x \geq 1$

2. Sea $g(x) = x^2$ y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ } racional \\ 1, & x \text{ } irracional \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?

Respuesta-. Se cumple para $y \geq 0$ si y es racional, o para todo $y \geq 1$

(ii) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?

Respuesta-. Para $-1 \leq y \leq 1$ siempre que y sea racional y para todo y tal que $|y| \leq 1$

(iii) ¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?

Respuesta-.
$$g(h(z)) = \begin{cases} 0, & z^2 \; racional \\ 1, & z^2 \; irracional \end{cases}$$

Por lo tanto el resultado es 0

(iv) ¿Para cuáles w es $g(w) \leq w$?

Respuesta-. Para todo w tal que $0 \leq w \leq 1$

(v) ¿Para cuáles ϵ es $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$?

Respuesta-. Para $-1, 0, 1$

3. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Respuesta.- Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene $1 - x^2 \geq 0$ entonces $x^2 \leq 1$ por lo tanto el dominio son todos los x tal que $|x| \leq 1$

(ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Respuesta.- Se observa claramente que el dominio es $-1 \leq x \leq 1$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

Respuesta.- Operando un poco tenemos
$$f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)},$$
sabemos que el denominador no puede ser 0 por lo tanto el $D_f = \{x \;/\; x \neq 1, \; x \neq 2\}$

(iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Respuesta.- Claramente notamos que el dominio de f son -1 y 1 ya que si se toma otros números daría un número imaginario.

(v) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$

Respuesta.- Notamos que no se cumple para ningún x ya que si $0 \leq x \leq 1$ entonces no se cumple para $\sqrt{x-2}$ y si $x \geq 2$ no se cumple para $\sqrt{1-x}$

4. Sean $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$ y $s(x) = senx$. Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.

(i) $(S \circ P)(y)$

Respuesta.- Por definición se tiene que $(S \circ P)(y) = S(P(y))$ entonces $S(2^y) = 2^{2y}$ siempre y cuando $D_{S \circ P} = \{y/y \in D_P \wedge P(y) \in D_S\}$

(ii) $(S \circ s)(y)$

Respuesta.- Por definición tenemos que $(S \circ s)(y) = S(s(y))$ entonces $S(\operatorname{sen} y) = \operatorname{sen}^2 y$ siempre y cuando $D_{S \circ s} = \{y/y \in D_s \wedge S(y) \in D_S\}$

(iii) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Respuesta.- $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S((P \circ s)(t)) + s(P(t)) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\operatorname{sen} t)) + s(2^t) = S(2^{\operatorname{sen} t}) + \operatorname{sen} 2^t = 2^{2 \operatorname{sen} t} + \operatorname{sen} 2^t$

(iv) $s(t^3)$

Respuesta.- $s(t^3) = \operatorname{sen} t^3$

5. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s usando solamente $+, \cdot, \circ$

(i) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

Respuesta.- Claramente vemos que $P \circ s$

(ii) $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$

Respuesta.- $s \circ P$

(iii) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

Respuesta.- $s \circ S$

(iv) $f(x) = \operatorname{sen} x$

Respuesta.- $S \circ s$

(v) $f(t) = 2^{2t}$

Respuesta.- $P \circ P$

(vi) $f(u) = \operatorname{sen}(2^u + 2^{u^2})$

Respuesta.- $s \circ (P + P \circ S)$

(vii) $f(y) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2^{2^{2^{\operatorname{sen} y}}})))$

Respuesta.- $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$

(viii) $f(a) = 2^{\operatorname{sen}^2 a} + \operatorname{sen}(a^2) + 2^{sen(a^2 + \operatorname{sen} a)}$

Respuesta.- $P \circ S \circ s + s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

6. **(a)** Si $x_1, ..., x_n$ son números distintos, encontrar una función polinómica f_i de grado $n-1$ que tome el valor 1 en x_i y 0 en x_j para $j \neq i$. Indicación: El producto de todos los $(x - x_j)$ para $j \neq i$ es 0 en x_j si $j \neq i$. Este producto es designado generalmente por

$$\prod_{j=1_{j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

donde el símbolo $\prod$ (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que $\sum$ para sumas.

Respuesta.- Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija n y elegir un conjunto de distintas $x_1, x_2, ..., x_n$. Por ejemplo supongamos que elegimos $n = 3$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$, pero $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$. Es decir, F_1 es un cuadrático que tiene ceros en $x = 2$ y $x = 3$, pero es igual a 1 en $x = 1$. Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x-2)(x-3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante a. Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con $x = 1$, debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x-2)(x-3) = 2a,$$

por lo tanto $a = 1/2$ y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio $f_2(x)$ tal que $f_2(2) = 1$ con raíces en $x = 1, 3$ tendríamos que resolver la ecuación $1 = a(2-1)(2-3)$, lo que da $a = -1$ por lo tanto $f_2(x) = -(x-1)(x-3)$

Ahora veamos el caso general. El polinomio $f_i(x)$ satisface $f_i(x_i)$ y $f_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$, entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

Para alguna constante a. Para encontrar esta constante, aplicamos $x = x_1$:

$$f_i(x_i) = 1 = a\prod_{j\neq i}(x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j\neq i}\frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

(b) Encontrar ahora una función polinómica de grado $n-1$ tal que $f(x_1) = a_1$, donde $a_1, ..., a_n$ son números dados. (Utilícense las Funciones f_1 de la parte (a).) La fórmula que se obtenga es la llamada **Fórmula de interpolación de Lagrange**

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i f_i(x)$$

entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i \prod_{j\neq i}\frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

7. **(a)** Demostrar que para cualquier función polinómica f y cualquier número a existe función polinómica g y un número b tales que $f(x) = (x-a)g(x) + b$ para todo x. (La idea es esencialmente dividir $f(x)$ por $(x-a)$ mediante la división larga hasta encontrar un resto constante.)
Demostración.- Si el grado de f es 1, entonces f es de la forma

$$f(x) = cx + d = cx + d + ac - ac = c(x-a) + (d + ac)$$

de tal modo que $g(x) = c$ y $b = d + ac$. Supongamos que el resultado es válido para polinomios de grado $\leq k$.

(b) Demostrar que si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)g(x)$ para alguna función polinómica g. (La reciproca es evidente)

Demostración.-

(c) Demostrar que si f es una función polinómica de grado n, entonces f tiene a lo sumo n raíces, es decir, existen a lo sumo n números a tales que $f(a) = 0$

Demostración.-

(d) Demostrar que para todo n existe una función polinómica de grado n con raíces. Si n es par, encontrar una función polinómica de grado n sin raíces, y si n es impar, encontrar una con una sola raíz

Demostración.-

8. ¿Para qué números a, b, c y d la función

$$f(x) = \frac{ax + d}{cx + b}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo x?

Respuesta.-

9. **(a)** Si A es un conjunto cualquiera de números reales, defínase una función C_A como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & si \text{ x } está\ en \text{ A} \\ 0, & si \text{ x } no\ está\ en \text{ A} \end{cases}$$

Encuéntrese expresiones para $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ y $C_{\mathbb{R}-A}$, en términos de C_A y C_B.

Respuesta.- Según la definición de teoría de conjunto tenemos,

$$\begin{array}{rcl} C_{A\cap B} & = & C_A \cdot C_B \\ C_{A\cup B} & = & C_A + C_B - C_A \cdot C_B \\ C_{\mathbb{R}-A} & = & 1 - C_A \end{array}$$

(b) Supóngase que f es una función tal que $f(x) = 0$ o 1 para todo x. Demostrar que existe un conjunto A tal que $f = C_A$

Demostración.- Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$, entonces $f = C_A$.

(c) Demostrar que $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A

Demostración.- Sea $f = f^2$, entonces para cada real x, $f(x) = f[f(x)]^2$, así $f(x) = 0$ó $f(x) = 1$, luego por la parte b), $f = C_A$ para algún A.
Por otro lado sea $f = C_A$ para algún A. Entonces si $x \in A$, $f(x) = 1 = 1^2 = f(x)^2$, mientras si $x \notin A$, $f(x) = 0 = 0^2 = f(x)^2$, así en cualquier caso $f(x) = [f(x)]^2$ y $f = f^2$