

# CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por FODE

---

# Índice general

<b>1. Funciones</b>	<b>3</b>
1.1. Problemas . . . . .	4

# Funciones

**Definición 1.1** El conjunto de los números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de **dominio** de la función.

**Definición 1.2** Si  $f$  y  $g$  son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función  $f + g$  denominada **suma** de  $f + g$  mediante la ecuación:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los  $x$  que están a la vez en el dominio de  $f$  y en el dominio de  $g$ , es decir:

$$\text{dominio } (f + g) = \text{dominio } f \cap \text{dominio } g$$

**Definición 1.3** El dominio de  $f \cdot g$  es  $\text{dominio } f \cap \text{dominio } g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

**Definición 1.4** Se expresa por dominio  $f \cap \text{dominio } g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Definición 1.5 (Función constante)**

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

**TEOREMA 1.1**  $(f + g) + h = f + (g + h)$ 

*Demostración.- La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio. Obsérvese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:*

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] + h(x) \end{aligned}$$

$y$

$$\begin{aligned} [f + (g + h)](x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)] \end{aligned}$$

*Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de  $(f + g) + h$  y el de  $f + (g + h)$  es evidentemente dominio  $f \cap$  dominio  $g \cap$  dominio  $h$ . Nosotros escribimos, naturalmente  $f + g + h$  por  $(f + g) + h = f + (g + h)$*

**TEOREMA 1.2** *Es igual fácil demostrar que  $(f \cdot g) \cdot g = f \cdot (g \cdot h)$  y ésta función se designa por  $f \cdot g \cdot h$ . Las ecuaciones  $f + g = g + f$  y  $f \cdot g = g \cdot f$  no deben presentar ninguna dificultad.*

**Definición 1.6 (Composición de función)**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

*El dominio de  $f \circ g$  es  $\{ x : x \text{ está en el dominio de } g \text{ y } g(x) \text{ está en el dominio de } f \}$*

$$D_{f \circ g} = \{ x / x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \}$$

**Propiedad 1.1**  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  *La demostración es una trivalidad.*

**Definición 1.7** Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si  $(a, b)$  y  $(a, c)$  pertenecen ambos a la colección, entonces  $b = c$ ; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

**Definición 1.8** Si  $f$  es una función, el **dominio** de  $f$  es el conjunto de todos los  $a$  para los que existe algún  $b$  tal que  $(a, b)$  está en  $f$ . Si  $a$  está en el dominio de  $f$ , se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número  $b$  único tal que  $(a, b)$  está en  $f$ . Este  $b$  único se designa por  $f(a)$ .

## 1.1. Problemas

1. Sea  $f(x) = 1/(1 + x)$ . Interpretar lo siguiente:

(i)  $f(f(x))$  (¿Para que  $x$  tiene sentido?)

Respuesta.- Sea  $f\left(\frac{1}{1+x}\right)$  entonces  $\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$ , por lo tanto  $\frac{1-x}{x+2}$  de donde llegamos a la conclusión de que  $x$  se cumple para todo número real de 1 y  $-2$

(ii)  $f\left(\frac{1}{x}\right)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$  por lo tanto se cumple para todo  $x \neq -1, 0$

(iii)  $f(cx)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+cx}$  donde se cumple para todo  $x \neq -1$  si  $c \neq 0$

(iv)  $f(x+y)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+x+y}$  donde se cumple para todo  $x+y \neq -1$

(v)  $f(x) + f(y)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = \frac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$  siempre y cuando  $x \neq -1$  y  $y \neq -1$

(vi) ¿Para que números  $c$  existe un número  $x$  tal que  $f(cx) = f(x)$ ?

Respuesta.- Para todo  $c$  ya que  $f(c \cdot 0) = f(0)$

(vii) ¿Para que números  $c$  se cumple que  $f(cx) = f(x)$  para dos números distintos  $x$ ?

Respuesta.- Solamente  $c = 1$  ya que  $f(x) = f(cx)$  implica que  $x = cx$ , y esto debe cumplirse por lo menos para un  $x \neq 0$

**2.** Sea  $g(x) = x^2$  y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles  $y$  es  $h(y) \leq y$ ?

Respuesta.- Se cumple para  $y \geq 0$  si  $y$  es racional, o para todo  $y \geq 1$

(ii) ¿Para cuáles  $y$  es  $h(y) \leq g(y)$ ?

Respuesta.- Para  $-1 \leq y \leq 1$  siempre que  $y$  sea racional y para todo  $y$  tal que  $|y| \leq 1$

(iii) ¿Qué es  $g(h(z)) - h(z)$ ?

Respuesta.-

$$g(h(z)) = \begin{cases} 0, & z^2 \text{ racional} \\ 1, & z^2 \text{ irracional} \end{cases}$$

Por lo tanto el resultado es 0

(iv) ¿Para cuáles  $w$  es  $g(w) \leq w$ ?

Respuesta.- Para todo  $w$  tal que  $0 \leq w \leq 1$

(v) ¿Para cuáles  $\epsilon$  es  $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$ ?

Respuesta.- Para  $-1, 0, 1$

**3.** Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(i)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Respuesta.- Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene  $1 - x^2 \geq 0$  entonces  $x^2 \leq 1$  por lo tanto el dominio son todos los  $x$  tal que  $|x| \leq 1$

(ii)  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Respuesta.- Se observa claramente que el dominio es  $-1 \leq x \leq 1$

(iii)  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

Respuesta.- Operando un poco tenemos

$$f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)},$$

sabemos que el denominador no puede ser 0 por lo tanto el  $D_f = \{x / x \neq 1, x \neq 2\}$

(iv)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Respuesta.- Claramente notamos que el dominio de  $f$  son  $-1$  y  $1$  ya que si se toma otros números daría un número imaginario.

(v)  $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

Respuesta.- Notamos que no se cumple para ningún  $x$  ya que si  $0 \leq x \leq 1$  entonces no se cumple para  $\sqrt{x-2}$  y si  $x \geq 2$  no se cumple para  $\sqrt{1-x}$

4. Sean  $S(x) = x^2$ ,  $P(x) = 2^x$  y  $s(x) = \operatorname{sen} x$ . Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.

(i)  $(S \circ P)(y)$

Respuesta.- Por definición se tiene que  $(S \circ P)(y) = S(P(y))$  entonces  $S(2^y) = 2^{2y}$  siempre y cuando  $D_{S \circ P} = \{y/y \in D_P \wedge P(y) \in D_S\}$

(ii)  $(S \circ s)(y)$

Respuesta.- Por definición tenemos que  $(S \circ s)(y) = S(s(y))$  entonces  $S(\operatorname{sen} y) = \operatorname{sen}^2 y$  siempre y cuando  $D_{S \circ s} = \{y/y \in D_s \wedge S(y) \in D_S\}$

(iii)  $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Respuesta.-  $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S((P \circ s)(t)) + s(P(t)) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\operatorname{sen} t)) + s(2^t) = S(2^{\operatorname{sen} t}) + \operatorname{sen} 2^t = 2^{2^{\operatorname{sen} t}} + \operatorname{sen} 2^t$

(iv)  $s(t^3)$

Respuesta.-  $s(t^3) = \operatorname{sen} t^3$

5. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de  $S, P, s$  usando solamente  $+, \cdot, \circ$

(i)  $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

Respuesta.- Claramente vemos que  $P \circ s$

(ii)  $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$

Respuesta.-  $s \circ P$

(iii)  $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

Respuesta.-  $s \circ S$

(iv)  $f(x) = \operatorname{sen} x$

Respuesta.-  $S \circ s$

(v)  $f(t) = 2^{2t}$

Respuesta.-  $P \circ P$

(vi)  $f(u) = \text{sen}(2^u + 2^{u^2})$

Respuesta.-  $s \circ (P + P \circ S)$

(vii)  $f(y) = \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(2^{2^{\text{sen } y}})))$

Respuesta.-  $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$

(viii)  $f(a) = 2^{\text{sen}^2 a} + \text{sen}(a^2) + 2^{\text{sen}(a^2 + \text{sen } a)}$

Respuesta.-  $P \circ S \circ s + s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

6. (a) Si  $x_1, \dots, x_n$  son números distintos, encontrar una función polinómica  $f_i$  de grado  $n - 1$  que tome el valor 1 en  $x_i$  y 0 en  $x_j$  para  $j \neq i$ . Indicación: El producto de todos los  $(x - x_j)$  para  $j \neq i$  es 0 en  $x_j$  si  $j \neq i$ . Este producto es designado generalmente por

$$\prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j)$$

donde el símbolo  $\prod$  (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que  $\sum$  para sumas.

Respuesta.- Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija  $n$  y elegir un conjunto de distintas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Por ejemplo supongamos que elegimos  $n = 3$   $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio  $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$ , pero  $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$ . Es decir,  $F_1$  es un cuadrático que tiene ceros en  $x = 2$  y  $x = 3$ , pero es igual a 1 en  $x = 1$ . Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x - 2)(x - 3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante  $a$ . Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con  $x = 1$ , debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x - 2)(x - 3) = 2a,$$

por lo tanto  $a = 1/2$  y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio  $f_2(x)$  tal que  $f_2(2) = 1$  con raíces en  $x = 1, 3$  tendríamos que resolver la ecuación  $1 = a(2 - 1)(2 - 3)$ , lo que da  $a = -1$  por lo tanto  $f_2(x) = -(x - 1)(x - 3)$

Ahora veamos el caso general. El polinomio  $f_i(x)$  satisface  $f_i(x_i) = 1$  y  $f_i(x_j) = 0$  para todo  $j \neq i$ , entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$



Para alguna constante  $a$ . Para encontrar esta constante, aplicamos  $x = x_1$ :

$$f_i(x_i) = 1 = a \prod_{j \neq i} (x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

- (b) Encontrar ahora una función polinómica de grado  $n - 1$  tal que  $f(x_1) = a_1$ , donde  $a_1, \dots, a_n$  son números dados. (Utilícense las Funciones  $f_1$  de la parte (a).) La fórmula que se obtenga es la llamada **Fórmula de interpolación de Lagrange**

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \sum_{j=1} a_j f_j(x)$$

entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_j \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

- 7. (a)** Demostrar que para cualquier función polinómica  $f$  y cualquier número  $a$  existe función polinómica  $g$  y un número  $b$  tales que  $f(x) = (x - a)g(x) + b$  para todo  $x$ . (La idea es esencialmente dividir  $f(x)$  por  $(x - a)$  mediante la división larga hasta encontrar un resto constante.)

Demostración.- Si el grado de  $f$  es 1, entonces  $f$  es de la forma

$$f(x) = cx + d = cx + d + ac - ac = c(x - a) + (d + ac)$$

de tal modo que  $g(x) = c$  y  $b = d + ac$ . Por inducción supongamos que el resultado es válido para polinomios de grado  $\leq k$ . Si  $f$  tiene grado  $k + 1$ , entonces  $f$  tiene la forma

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + \dots + a_1x + a_0$$

luego para grados  $\leq k$  se tiene

$$f(x) - a_{k+1}x^{k+1} = (x - a)g(x) + b$$

así

$$f(x) = (x - a)[g(x) + a_{k+1}(x - a)^k] + b$$

- (b) Demostrar que si  $f(a) = 0$ , entonces  $f(x) = (x - a)g(x)$  para alguna función polinómica  $g$ . (La recíproca es evidente)

Demostración.- Por la parte (a), podemos poner que  $f(x) = (x - a)g(x) + b$ , entonces

$$0 = f(a) = (a - a)g(a) + b = b$$

de modo que  $f(x) = (x - a)g(x)$

- (c) Demostrar que si  $f$  es una función polinómica de grado  $n$ , entonces  $f$  tiene a lo sumo  $n$  raíces, es decir, existen a lo sumo  $n$  números  $a$  tales que  $f(a) = 0$

Demostración.- Supóngase que  $f$  tiene  $n$  raíces  $a_1, \dots, a_n$ . Entonces según la parte (b) podemos poner  $f(x) = (x - a)g_1(x)$  donde el grado de  $g_1(x)$  es  $n - 1$ . Pero

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)g_1(a_2)$$

de modo que  $g_1(a_2) = 0$ , ya que  $a_2 \neq a_1$ . Podemos pues escribir

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)g_2(x),$$

donde el grado de  $g_2$  es  $n - 2$ . Prosiguiendo de esta manera, obtenemos que

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)c$$

para algún número  $c \neq 0$ . Está claro que  $f(a) \neq 0$  si  $a \neq a_1, \dots, a_n$ . Así pues,  $f$  puede tener a lo sumo  $n$  raíces.

- (d) Demostrar que para todo  $n$  existe una función polinómica de grado  $n$  con raíces. Si  $n$  es par, encontrar una función polinómica de grado  $n$  sin raíces, y si  $n$  es impar, encontrar una con una sola raíz

Demostración.- Si  $f(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot \dots \cdot (x - n)$ , entonces  $f$  tiene  $n$  raíces. Si  $n$  es par, entonces  $f(x) = x^n + 1$  no tiene raíces. Si  $n$  es impar, entonces  $f(x) = x^n$  tiene una raíz única, que es 0.

## 8. ¿Para qué números $a, b, c$ y $d$ la función

$$f(x) = \frac{ax + d}{cx + b}$$

satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x$ ?

Respuesta.- Si

$$x = f(f(x)) = \frac{a \left( \frac{ax + d}{cx + b} \right) + b}{c \left( \frac{ax + d}{cx + b} \right) + d}$$

para todo  $x$ , entonces

$$x = \frac{a^2x + ab + bcx + bd}{acx + bc + cdx + d^2}$$

y por lo tanto

$$(ac + cd)x^2 + (d^2 - a^2)x - ab - bd = 0$$

para todo  $x$ , de modo que

$$\begin{aligned} ac + cd &= 0 \\ ab + bd &= 0 \\ d^2 - a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Se sigue que  $a = d$  ó  $a = -d$ . Una posibilidad es  $a = d = 0$ , en cuyo caso  $f(x) = \frac{b}{cx}$  que satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x \neq 0$ . Si  $a = d \neq 0$ , entonces  $b = c = 0$  con lo que  $f(x) = x$ . La tercera posibilidad es  $a + d = 0$ , de modo que  $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ , la cual satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x \neq \frac{a}{c}$  la cual satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x \neq \frac{a}{c}$ . Estrictamente hablando, podemos añadir la condición  $f(x) \neq \frac{a}{c}$  para  $x \neq \frac{a}{c}$ , lo que significa que

$$\frac{ax+b}{cx-a} \neq \frac{a}{c}, \text{ ó } a^2 + bc \neq 0.$$

**9. (a)** Si  $A$  es un conjunto cualquiera de números reales, defínase una función  $C_A$  como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ está en } A \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en } A \end{cases}$$

Encuéntrese expresiones para  $C_{A \cap B}$ ,  $C_{A \cup B}$  y  $C_{\mathbb{R}-A}$ , en términos de  $C_A$  y  $C_B$ .

Respuesta.- Según la definición de teoría de conjunto tenemos,

$$\begin{aligned} C_{A \cap B} &= C_A \cdot C_B \\ C_{A \cup B} &= C_A + C_B - C_A \cdot C_B \\ C_{\mathbb{R}-A} &= 1 - C_A \end{aligned}$$

**(b)** Supóngase que  $f$  es una función tal que  $f(x) = 0$  o  $1$  para todo  $x$ . Demostrar que existe un conjunto  $A$  tal que  $f = C_A$

Demostración.- Sea  $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$ , entonces  $f = C_A$ .

**(c)** Demostrar que  $f = f^2$  si y sólo si  $f = C_A$  para algún conjunto  $A$

Demostración.- Sea  $f = f^2$ , entonces para cada real  $x$ ,  $f(x) = f[f(x)]^2$ , así  $f(x) = 0$  ó  $f(x) = 1$ , luego por la parte b),  $f = C_A$  para algún  $A$ .

Por otro lado sea  $f = C_A$  para algún  $A$ . Entonces si  $x \in A$ ,  $f(x) = 1 = 1^2 = f(x)^2$ , mientras si  $x \notin A$ ,  $f(x) = 0 = 0^2 = f(x)^2$ , así en cualquier caso  $f(x) = [f(x)]^2$  y  $f = f^2$

**10. (a)** ¿Para qué funciones  $f$  existe una función  $g$  tal que  $f = g^2$ ?

Respuesta.-

**(b)** ¿Para qué función  $f$  existe una función  $g$  tal que  $f = 1/g$ ?

Respuesta.-

**(c)** ¿Para qué funciones  $b$  y  $c$  podemos encontrar una función  $x$  tal que

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

para todos los números  $t$ ?

Respuesta.-

(d) ¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones  $a$  y  $b$  si ha de existir una función  $x$  tal que

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

para todos los números  $t$ ? ¿Cuántas funciones  $x$  de éstas existirán?

Respuesta.-