CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1

Funciones

Definición 1.1 *El conjunto de los números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de **dominio** de la función.*

Definición 1.2 *Si f y g son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función $f+g$ denominada **suma** de $f+g$ mediante la ecuación:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los x que están a la vez en el dominio de f y en el dominio de g, es decir:

$$\textit{dominio } (f+g) = \textit{dominio } f \cap \textit{dominio } g$$

Definición 1.3 *El dominio de $f \cdot g$ es dominio $f \cap$ dominio g*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Definición 1.4 *Se expresa por dominio $f \cap$ dominio $g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definición 1.5 (Función constante)

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

TEOREMA 1.1 $(f+g)+h = f+(g+h)$

Demostración.- ***La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio.*** *Obsérvese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:*

$$\begin{array}{rcl} [(f+g)+h](x) & = & (f+g)(x)+h(x) \\ & = & [f(x)+g(x)]+h(x) \\ \\ & y & \\ \\ [f+(g+h)](x) & = & f(x)+(g+h)(x) \\ & = & f(x)+[g(x)+h(x)] \end{array}$$

Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de $(f+g)+h$ y el de $f+(g+h)$ es evidentemente dominio f $\cap$ dominio g $\cap$ dominio h. Nosotros escribimos, naturalmente $f+g+h$ por $(f+g)+h = f+(g+h)$

TEOREMA 1.2 *Es igual fácil demostrar que $(f \cdot g) \cdot g = f \cdot (g \cdot h)$ y ésta función se designa por $f \cdot g \cdot h$. Las ecuaciones $f+g = g+f$ y $f \cdot g = g \cdot f$ no deben presentar ninguna dificultad.*

Definición 1.6 (Composición de función)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{\ x : x$ está en el dominio de g y $g(x)$ está en el dominio de $f\ \}$

$$D_{f \circ g} = \{x \ / \ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

Propiedad 1.1 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ *La demostración es una trivalidad.*

Definición 1.7 *Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a,b) y (a,c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b=c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.*

Definición 1.8 *Si f es una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a,b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a,b) está en f. Este b único se designa por $f(a)$.*

1.1. Problemas

1. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Interpretar lo siguiente:

(i) $f(f(x))$ (¿Para que x tiene sentido?)

Respuesta.- Sea $f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ entonces $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$, por lo tanto $\dfrac{1-x}{x+2}$ de donde llegamos a la conclusión de que x se cumple para todo número real de 1 y -2

(ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$ por lo tanto se cumple para todo $x \neq -1, 0$

(iii) $f(cx)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+cx}$ donde se cumple para todo $x \neq -1$ si $c \neq 0$

(iv) $f(x+y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x+y}$ donde se cumple para todo $x+y \neq -1$

(v) $f(x)+f(y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$ siempre y cuando $x \neq -1$ y $y \neq -1$

(vi) ¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?

Respuesta.- Para todo c ya que $f(c \cdot 0) = f(0)$

(vii) ¿Para que números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos x?

Respuesta.- Solamente $c = 1$ ya que $f(x) = f(cx)$ implica que $x = cx$, y esto debe cumplirse por lo menos para un $x \geq 1$

2. Sea $g(x) = x^2$ y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?

Respuesta-. Se cumple para $y \geq 0$ si y es racional, o para todo $y \geq 1$

(ii) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?

Respuesta-. Para $-1 \leq y \leq 1$ siempre que y sea racional y para todo y tal que $|y| \leq 1$

(iii) ¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?

Respuesta-.

$$g(h(z)) = \begin{cases} 0, & z^2 \; racional \\ 1, & z^2 \; irracional \end{cases}$$

Por lo tanto el resultado es 0

(iv) ¿Para cuáles w es $g(w) \leq w$?

Respuesta-. Para todo w tal que $0 \leq w \leq 1$

(v) ¿Para cuáles ϵ es $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$?

Respuesta-. Para $-1, 0, 1$

3. encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Respuesta.- Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene $1 - x^2 \geq 0$ entonces $x^2 \leq 1$ por lo tanto el dominio son todos los x tal que $|x| \leq 1$

(ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Respuesta.- Se observa claramente que el dominio es $-1 \leq x \leq 1$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

Respuesta.- Operando un poco tenemos

$$f(x) = \frac{2x - 3}{(x-1)(x-2)},$$

sabemos que el denominador no puede ser 0 por lo tanto el $D_f = \{x \; / \; x \neq 1, \; x \neq 2\}$

(iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Respuesta.- Claramente notamos que el dominio de f es $[-1, 1]$ ya que si se tomara un número mayor a este daría un número imaginario.

(v) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$

Respuesta.- Notamos que no cumple para ningún x ya que si $0 \leq x \leq 1$ entonces no se cumple para $\sqrt{x-2}$ y si $x \geq 2$ no se cumple para $\sqrt{1-x}$

4.