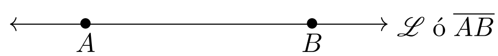
1

Rectas, planos y separación

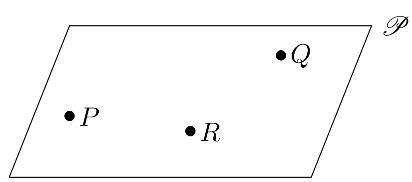
Notación

- Los puntos se representan con letras mayúsculas A, B, C, etc.

- Las rectas los denotamos por: $\mathscr{L}$ ó $\overline{AB}$.



- Los planos se representará con letras cursivas: P.



POSTULADO .1 (Postulado de la distancia) *A cada par de puntos diferentes le corresponde un número real positivo único.*

Definición 1.1 *La distancia entre dos puntos es el número obtenido mediante el postulado de la distancia. Si los puntos P y Q, entonces indicamos la distancia por PQ.*

POSTULADO .2 (Postulado de la regla) *Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que:*

a) *A cada punto de la recta corresponde exactamente un número real,*

b) *a cada número real corresponde exactamente un punto de la recta y*

c) *la distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.*

Definición 1.2 *Una correspondencia como la descrita en el postulado de la regla se llama un sistema de coordenadas. El número correspondencia a un punto dado se llama coordenada del punto.*

POSTULADO .3 (Postulado de la colocación de la regla) *Dados dos puntos P y Q de una recta, se puede escoger el sistema de coordenadas de manera que la coordenada de P sea cero y la coordenada de Q sea positiva.*

Definición 1.3 *B está entre A y B si,*

- **i**) *A, B y C son puntos distintos de una misma recta, y*
- **ii**) $AB + BC = AC$

POSTULADO .4 (Postulado de la recta) *Dados dos puntos distintos cualesquiera hay exactamente una recta que los contiene.*

AB se llama longitud del segmento $\overline{AB}$

Correspondencia biunivoca .- correspondencia uno a uno

Definición 1.4 *Para dos puntos cualesquiera A y B, el segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de los puntos A y B, y de todos los puntos que están entre A y B. Los puntos A y B se llaman los extremos de $\overline{AB}$.*

Definición 1.5 *El número AB se llama longitud del segmento $\overline{AB}$*

Definición 1.6 *Sean A y B puntos de una recta $\mathscr{L}$. El rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos que es la reunión de,*

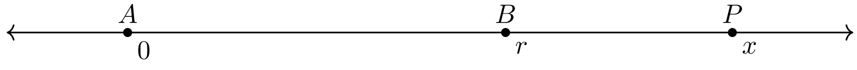
I. *el segmento $\overline{AB}$ y*

II. *el conjunto de todos los puntos C para los cuales es cierto que B está entre A y C. El punto A se llama el extremo de $\overrightarrow{AB}$.*

Definición 1.7 *Si A está entre B y C, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se llaman rayos opuestos.*

TEOREMA 1.1 (Teorema de la localización de puntos) *Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo y sea $x$un número positivo. Entonces existe exactamente un punto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$*

Demostración.- *Dada la recta $\overleftrightarrow{AB}$; por el postulado de la colocación de la regla podemos elegir un sistema de coordenadas donde A sea cero y la coordenada de B sea un número positivo r*



Sea P el punto cuyo coordenada es x; como $x \in \mathbb{R}^+$ entonces $x \in \overrightarrow{AB}$ y $AP = |x - 0| = x$. La unicidad de P se da por el postulado de la regla.

Definición 1.8 *Un punto B se llama punto medio de un segmento $\overline{AC}$, si B está entre A y C tal que $AB = BC$*

*Decimos que el punto medio de un segmento **biseca** al segmento.*

TEOREMA 1.2 *Todo segmento tiene exactamente un punto medio.*

Demostración.- *Si B es el punto medio de $\overline{AC}$ entonces debe cumplirse:*

$$\left.\begin{array}{rcl} AB + BC & = & AC \\ AB & = & BC \end{array}\right\} \Rightarrow AB = \frac{AC}{2}$$

Luego por teorema, el rayo $\overrightarrow{AC}$ con $x = \dfrac{AC}{2} \in \mathbb{R}^+$ hay exactamente un punto B tal que $AB = \dfrac{AC}{2}$. Así $\overline{AC}$ tiene exactamente un punto medio.

Definición 1.9 *Decimos que el punto medio de un segmento biseca al segmento.*

Definición 1.10 *El conjunto de todos los puntos se llama espacio.*

Definición 1.11 *Los puntos de un conjunto están alineados o son colineales, si hay una recta que los contiene a todos.*

Definición 1.12 *Los puntos de un conjunto son coplanarios si hay un plano que los contiene a todos.*

1.1. Repaso del capítulo 2

1. Sea A el conjunto de todos los meses del año cuyos nombres empiezan con la letra J.
Sea B el conjunto de todos los meses del año que tienen exactamente 30 días.
Sea C el conjunto de todos los meses del año cuyos nombres empiezan con la letra F.

(a) ¿Cuál es la intersección de A y C?

(b) ¿Cuál es la reunión de A y C?

(c) ¿Cuál es la intersección de B y C?

(d) ¿Es C un subconjunto del conjunto A? ¿Del conjunto B? ¿Y del conjunto C?

2.

POSTULADO .5 *(Postulado de la Existencia de puntos).*

a) *Todo plano contiene al menos tres puntos no colineales.*

b) *El espacio existe y contiene por lo menos, cuatro puntos no son coplanares.*

c) *Una recta contiene, por lo menos dos puntos.*

TEOREMA 1.3 *Si dos rectas diferentes se intersecan, su intersección contiene un punto solamente.*

Demostración.- (contradicción).
El teo. expreso:

Si las rectas $\mathscr{L}_1$ *y* $\mathscr{L}_2$ *se intersecan entonces existe exactamente un punto* P *tal que* $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \{P\}$

empleando el método de la contradicción; afirmamos $\mathscr{L}_1$ *y* $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_1 \neq \mathscr{L}_2$ *se intersecan y su intersección contiene dos puntos* P *y* Q *Un gráfico de la afirmación (absurda) es:*

Si $\mathscr{L}_1$ *y* $\mathscr{L}_2$ *se intersecan en los puntos* P *y* Q *entonces por los puntos* P *y* Q *pasan las rectas* $\mathscr{L}_1$ *y* $\mathscr{L}_2$*; lo que es una contradicción al postulado de la recta.*

$\therefore$ *La afirmación del teorema es verdad.*

POSTULADO .6 (Postulado de los dos Puntos de la Recta y el Plano) *Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene esta en el mismo plano.*

TEOREMA 1.4 *Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección contiene un solo punto.*

Demostración.- (Contradicción)
Suponemos $\mathscr{L} \not\subset \mathscr{P}$ *y* $\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = \{P, Q\}$
Si $P, Q \in \mathscr{P}$ *y* $P, Q \in \mathscr{L}$ *entonces por postulado 6* $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

POSTULADO .7 (Postulado del Plano) *Tres puntos cualesquiera están al menos en un plano, y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano.*

TEOREMA 1.5 *Dada una recta y un punto fuera de ella, hay exactamente un plano que contiene a ambos.*

Demostración.- *El teorema afirma:*

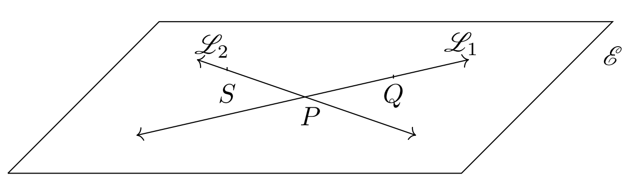
$$\text{Si } P \not\subset \mathscr{L} \Rightarrow \exists! \mathscr{P} / P \in \mathscr{P} \text{ y } \mathscr{L} \subset \mathscr{P}$$

Por el postulado 5 inciso c) $\mathscr{L}$ *contiene al menos dos puntos* R *y* S*; luego* P, R *y* S *son no alineados y por el postulado 7* P, R *y* S *están exactamente en un plano* $\mathscr{P}$*; además como* $R, S \in \mathscr{L}$ *entonces por el postulado 6* $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}$

TEOREMA 1.6 *Dados dos rectas que se intersecan, hay exactamente un plano que las contiene.*

Demostración.-

$$\mathscr{L}_1 \text{ y } \mathscr{L}_2 \text{ son dos rectas y se intersecan en el punto } P \text{, entonces } \exists!\ P \ / \ \mathscr{L}_1 \subset E \text{ y } \mathscr{L}_2 \subset E$$



Por el postulado de la recta consideramos los puntos $Q, P \in \mathscr{L}_1$ y $S, P \in \mathscr{L}_2$, así por hipótesis y teorema 3 podemos decir que P interseca a las dos rectas. Luego si $Q \in \mathscr{L}_1$ y $S \in \mathscr{L}_2$ entonces los puntos P, Q, S son no coloniales, y en consecuencia por el postulado 7 hay exactamente un plano $\mathscr{E}$ que los contiene, por lo tanto por el postulado 6 tenemos que $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{E}$ y $\mathscr{L}_2 \subset \mathscr{E}$.

POSTULADO .8 (Postulado de la Intersección de Planos) *Si dos planos se intersecan, se intersecan exactamente en una recta.*

Definición 1.13 *Un conjunto A se llama convexo, si para cada dos puntos P y Q cualesquiera del conjunto, todo el segmento $\overline{PQ}$ esta en A*

POSTULADO .9 (Postulado de separación del Plano) *Sea $\mathscr{P}$ un plano y $\mathscr{L}$ una recta entonces:*
Los puntos del plano que no están en $\mathscr{L}$ forman dos semiplanos de manera que:

a) *Cada semiplano es un conjunto convexo, y*

b) *si P está en un semiplano y Q en el otro, entonces $\overline{PQ}$ interseca.*

La recta $\mathscr{L}$ se llama arista o borde de cada semiplano.

POSTULADO .10 (Postulado de la Separación del Espacio) *Sea $\mathscr{P}$ un plano en el espacio, los puntos del espacio que no están en $\mathscr{P}$ forman dos semiespacios de manera que:*

a) *Cada semiespacio es un conjunto convexto.*

b) *Si un punto P está en un semiespacio y Q está en el otro, $\overline{AB}$ interseca a $\mathscr{P}$*

El plano $\mathscr{P}$ se llaa cara de cada uno de los semiespacios.

EJEMPLO 1.1 *¿Cuáles de las regiones marcadas con letras mayúsculas son conjuntos convexos?*

Respuesta.- *Regiones convexos: B y C*

NOTAS

Método Indirecto (Método de la contradicción)

$$P \Rightarrow Q \equiv \begin{cases} V \\ F \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q \equiv F \quad &\equiv \quad \sim (p \Rightarrow q) \quad \equiv \quad F \\ &\equiv \quad p \wedge \sim q \quad \equiv \quad V \end{aligned}$$