

Universidad: **Mayor de San Andrés.**  
 Asignatura: **Geometría I.**  
 Práctica: **I.**  
 Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

1. Sobre una recta marque cuatro puntos  $A, B, C$  y  $D$  en orden, de izquierda a derecha. Determine:



(a)  $AB \cup BC$

Respuesta.- AC

(e)  $S_{AB} \cap S_{BC}$

Respuesta.-  $S_{BC}$

(b)  $AB \cap BC$

Respuesta.- B

(f)  $S_{AB} \cap S_{AD}$

Respuesta.-  $S_{AB}$

(c)  $AC \cap BD$

Respuesta.- BC

(g)  $S_{CB} \cap S_{BC}$

Respuesta.- BC

(d)  $AB \cap CD$

Respuesta.-

(h)  $S_{AB} \cup S_{BC}$

Respuesta.-  $S_{AB}$

2. Pruebe que en un segmento existen infinitos puntos.

Demostración.- Sea una recta  $m$  con puntos distintos  $A$  y  $B$ , supongamos que entre  $A$  y  $B$  hay puntos finitos, entonces por definición un conjunto es finito cuando puede ser colocado en correspondencia bi-unívoca en un conjunto  $\mathbb{N}$ . Luego  $AB$  es un conjunto con  $n$  elementos  $AB = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$

3. Sean  $P = \{a, b, c\}$ ,  $m_1 = \{a, b\}$ ,  $m_2 = \{a, c\}$  y  $m_3 = \{b, c\}$ . Llame a  $P$  el plano y a  $m_1, m_2$  y  $m_3$  rectas. Verifique en esta "geometría" si es cierto el axioma  $I_2$ .

Demostración.- Observemos que todas las combinaciones posibles entre los puntos del plano  $P$ , tomadas de dos en dos pertenecen a una de las tres líneas rectas de esa geometría. Es decir  $ab, ac, ba, bc, ca, cb$ . Debemos fijarnos que solo la línea  $m_1$  pasa por  $ab$ . Del mismo modo para los otros pares de puntos, pasan sólo una de las líneas mencionadas  $m_1, m_2, m_3$ . Esto muestra que en ésta geometría vale el axioma  $I_2$

4. Un subconjunto del plano se dice convexo si el segmento que un dos puntos cualesquiera de sus puntos está totalmente contenido en él. Los ejemplos más simples de conjuntos convexos son el propio plano y cualquier semiplano. Muestre que la intersección de dos semiplanos es un conjunto convexo.

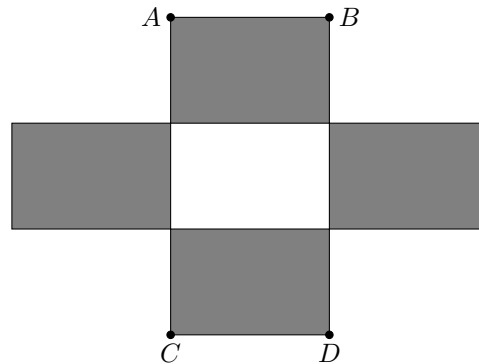
Demostración.- Supongamos los semiplanos  $S_1, S_2$  y  $S_3$  tal que  $S_3 = S_1 \cap S_2$  tomando dos puntos  $A, B \in S_3$  entonces:

$$A, B \in S_1, S_2$$

Sean  $S_1$  y  $S_2$  convexos entonces  $A, B \in S_1, S_2$  y por lo tanto pertenecen a la intersección, luego  $S_3$  es convexo.

5. Muestre, dando un contraejemplo, que la unión de convexos puede no ser un conjunto convexo.

Demostración.- Los cuatro rectángulos en gris son figuras convexas y su unión forma una figura con una cavidad, parte en blanco y por lo tanto cóncava.



6. Tres puntos no colineales determinan tres rectas. ¿Cuántas rectas son determinadas por cuatro puntos tal que cualesquier tres de ellos no son colineales.?

Respuesta.- Veamos la siguiente tabla, donde  $r_{ij}$  y la línea determinada por los puntos  $P_i$  y  $P_j$

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$P_1$	—	$r_{12}$	$r_{13}$
$P_2$	$r_{21}$	—	$r_{23}$
$P_3$	$r_{31}$	$r_{32}$	—

El número de líneas será  $\frac{3(3-1)}{2} = 3$  y por  $n$  puntos  $\frac{n(n-1)}{2}$

7. Repita el ejercicio anterior para el caso de 6 puntos.

Respuesta.-  $\frac{6(6-1)}{2} = 15$

8. Pruebe que, si una recta interseca un lado de un triángulo y no pasa por ninguno de sus vértices, entonces ella interseca también uno de los otros dos lados.

Demostración.- Dado un triángulo  $ABC$  y una recta  $m$ , si  $m$  interseca el segmento  $AB$ , entonces  $A$  está en el lado puesto de  $B$  con respecto a la recta  $m$ . Como por hipótesis  $m$  no pasa por  $C$ , entonces  $C$  está del lado de  $A$  ó  $B$ .

Si  $C$  está del lado de  $A$ , entonces  $C$  es opuesto a  $B$  y luego  $m$  interseca a  $BC$ .

Si  $C$  está del lado de  $B$ , entonces es contrario a  $A$  y  $m$  interseca  $AC$ .

Entonces siempre interseca un lado.

9. Muestre que no existe una "geometría" con 6 puntos, donde sean válidos los axiomas  $I_1$  y  $I_2$  y que todas las rectas tengan exactamente 3 puntos.

Demostración.- Sea una recta  $m = \{P_1, P_2\}$  por hipótesis existe un  $Q_1 \in P$  diferente de  $P_1$  y  $P_2$ . Luego sea  $Q_2 \in P$  y diferente de  $P_1, P_2$  y  $Q_1$ , por hipótesis, tenemos que  $Q_2 \notin m$  porque  $m$  ya tiene 3 puntos. Por tanto, hay una línea recta  $n = \{P_1, Q_2\}$  y que contiene un punto  $Q_3 \in P$  con  $Q_3 \neq P_1, P_2, Q_1, Q_2$ . Ahora tome  $Q_4 \in P$  con  $Q_4 \neq P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3$ . Nuevamente por hipótesis  $Q_4 \notin m, n$  porque ambos ya tienen tres puntos. Entonces debe haber una línea  $t = \{P_1, Q_4\}$  que debe contener por hipótesis, un tercer punto  $Q_5$ . Entonces tenemos  $Q_5 \neq P_1$  y  $Q_5 \neq Q_4$ , luego  $Q_5 \neq Q_1$  y  $Q_5 \neq P_2$  porque  $m \neq t$ ,  $Q_5 \neq Q_2$  y  $Q_5 \neq Q_3$  ya que  $n \neq t$ . Esto nos lleva a una contradicción porque  $Q_5$  sería el séptimo punto de la geometría dada.

10. Si  $C$  pertenece a  $S_{AB}$  y  $C \neq A$ , muestre que:  $S_{AB} = S_{AC}$ ,  $BC \subset S_{AB}$  y que  $A \notin BC$ .

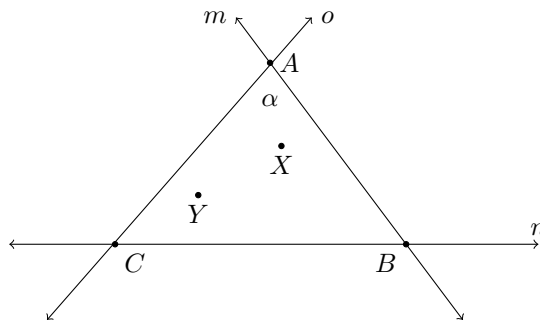
Demostración.- Dada una semirecta  $S_{AB}$  a través de los puntos  $A$  y  $B$  determinamos la semirecta  $S_{BA}$  donde por la proposición  $S_{AB} \cup S_{BA}$  está contenido en la recta  $m$ . Luego por definición  $S_{AB}$  es el conjunto de puntos en el segmento  $AB$  más el conjunto de puntos  $X$  tales que  $A - B - X$ .

Como  $C \in S_{AB}$  por hipótesis ocurre una de las tres posibilidades:

1.  $C = B$  en este caso la demostración es trivial.
2.  $A - B - C$  En este caso, por definición de semi-recta  $S_{AB} = S_{AC}$  siendo  $BC = S : bC \cap S_{CA}$  y como  $A \notin S_{BC}$  entonces  $A \notin BC$ .
3.  $A - C - B$  se demuestra análogamente al caso anterior.

11. Muestre que un triángulo separa el plano en dos regiones, una de las cuales es convexa.

Demostración.- Tracemos tres rectas  $m, n$  y  $o$  que se intersecan en los puntos  $A, B$  y  $C$  de la manera siguiente:



Así formamos el triángulo  $ABC$ , que a su vez separa el plano en dos regiones. La región convexa es la región que forma el interior del triángulo. Para probar esto, considere los puntos  $X$  e  $Y$  que pertenecen al semiplano llamémosle  $\alpha$  generado por las tres rectas. Dado que  $X$  e  $Y$  están en el mismo semiplano generado por la recta  $m$ , entonces el segmento  $XY$  no interseca a la recta  $m$ . De manera similar,  $XY$  no puede interceptar las líneas  $n$  y  $o$ . Esto implica que  $XY$  pertenece al semiplano  $\alpha$  formado por el triángulo  $ABC$ , que por tanto es una región convexa.

12. ¿Puede existir dos segmentos distintos con dos puntos en común? ¿Y, teniendo exactamente dos puntos en común?

Respuesta.- Dados los puntos  $A, B, C$  y  $D$  de modo que  $ABCD$  entonces los segmentos  $AC$  y  $BD$  tendrán el segmento  $BC$  en común ya que en un segmento hay puntos infinitos por lo que  $AC$  y  $BD$  tienen dos puntos en común pero nunca solo tendrán dos puntos.