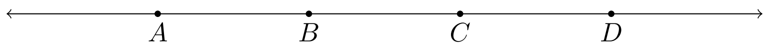
Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Geometría I.**
Práctica: I.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

---

1. Sobre una recta marque cuatro puntos A, B, C y D en orden, de izquierda a derecha. Determine:



(a) $AB \cup BC$

Respuesta.- AC

(b) $AB \cap BC$

Respuesta.- B

(c) $AC \cap BD$

Respuesta.- BC

(d) $AB \cap CD$

Respuesta.-

(e) $S_{AB} \cap S_{BC}$

Respuesta.- S_{BC}

(f) $S_{AB} \cap S_{AD}$

Respuesta.- S_{AB}

(g) $S_{CB} \cap S_{BC}$

Respuesta.- BC

(h) $S_{AB} \cup S_{BC}$

Respuesta.- S_{AB}

2. Pruebe que en un segmento existen infinitos puntos.

Demostración.- Sea una recta m con puntos distintos A y B, supongamos que entre A y B hay puntos finitos, entonces por definición un conjunto es finito cuando puede ser colocado en correspondencia biunívoca en un conjunto $\mathbf{N}$. Luego AB es un conjunto con n elementos $AB = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$

3. Sean $P = \{a, b, c\}$, $m_1 = \{a, b\}$, $m_2 = \{a, c\}$ y $m_3 = \{b, c\}$. Llame a P el plano y a m_1, m_2 y m_3 rectas. Verifique en esta "geometría" si es cierto el axioma I_2.

Demostración.- Observemos que todas las combinaciones posibles entre los puntos del plano P, tomadas de dos en dos pertenecen a una de las tres líneas rectas de esa geometría. Es decir ab, ac, ba, bc, ca, cb. Debemos fijarnos que solo la línea m_1 pasa por ab. Del mismo modo para los otros pares de puntos, pasan sólo una de las líneas mencionadas m_1, m_2, m_3. Esto muestra que en ésta geometría vale el axioma I_2

4. Un subconjunto del plano se dice convexo si el segmento que un dos puntos cualesquiera de sus puntos está totalmente contenido en él. Los ejemplos más simples de conjuntos convexos son el propio plano y cualquier semiplano. Muestre que la intersección de dos semiplanos es un conjunto convexo.

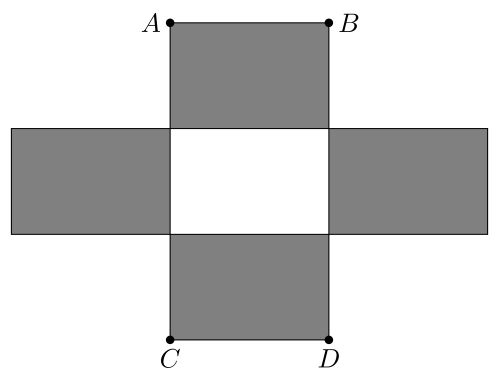
Demostración.- Supongamos los semiplanos S_1, S_2 y S_3 tal que $S_3 = S_1 \cap S_2$ tomando dos puntos $A, B \in S_3$ entonces:

$$A, B \in S_1, S_2$$

Sean S_1 y S_2 convexos entonces $A, B \in S_1, S-2$ y por lo tanto pertenecen a la intersección, luego S_3 es convexo.

5. Muestre, dando un contraejemplo, que la unión de convexos puede no ser un conjunto convexo.

Demostración.- Los cuatro rectángulos en gris son figuras convexas y su unión forma una figura con una cavidad, parte en blanco y por lo tanto cóncava.



6. Tres puntos no colineales determinan tres rectas. ¿Cuántas rectas son determinadas por cuatro puntos tal que cualesquier tres de ellos no son colineales.?

Respuesta.- Veamos la siguiente tabla, donde r_{ij} y la linea determinada por los puntos P_i y P_j

	P_1	P_2	P_3
P_1	$-$	r_{12}	r_{13}
P_2	r_{21}	$-$	r_{23}
P_3	r_{31}	r_{32}	$-$

El número de líneas será $\dfrac{3(3-1)}{2} = 3$ y por n puntos $\dfrac{n(n-1)}{2}$

7. Repita el ejercicio anterior para el caso de 6 puntos.

Respuesta.- $\dfrac{6(6-1)}{2} = 15$

8. Pruebe que, si una recta interseca un lado de un triángulo y no pasa por ninguno de sus vértices, entonces ella intersecta también uno de los otros dos lados.

Demostración.- Dado un triángulo ABC y una recta m, si m interseca el segemento AB, entonces A está en el lado puesto de B con respecto a la recta m. Como por hipótesis m no pasa por C, entones C está del lado de A ó B.
Si C está del lado de A, entonces C es opuesto a B y luego m interseca a BC.
Si C está del lado de B, entonces es contrario a A y m interceca AC.
Entonces siempre interseca un lado.

9. Muestre que no existe una "geometría" con 6 puntos, donde sean válidos los axiomas I_1 y I_2 y que todas las rectas tengan exactamente 3 puntos.

Demostración.- Sea una recta $m = \{P_1, P_2\}$ por hipótesis existe un $Q_1 \in P$ diferente de P_1 y P_2.
Luego sea $Q_2 \in P$ y diferente de P_1, P_2 y Q_1, por hipótesis, tenemos que $Q_2 \notin m$ porque m ya tiene 3 puntos. Por tanto, hay una línea recta $n = \{P_1, Q_2\}$ y que contiene un punto $Q_3 \in P$ con $Q_3 \neq P_1, P_2, Q_1, Q_2$
Ahora tome $Q_4 \in P$ con $Q_4 \neq P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3$. Nuevamente por hipótesis $Q_4 \notin m, n$ porque ambos ya tienen tres puntos. Entonces debe haber una línea $t = \{P_1, Q_4\}$ que debe contener por hipótesis, un tercer punto $Q5$. Entonces tenemos $Q_5 \neq P_1$ y $Q_5 \neq Q_4$, luego $Q_5 \neq Q_1$ y $Q_5 \neq P_2$ porque $m \neq t$, $Q_5 \neq Q_2$ y $Q_5 \neq Q_3$ ya que $n \neq t$. Esto nos lleva a una contradicción porque Q_5 sería el séptimo punto de la geometría dada.

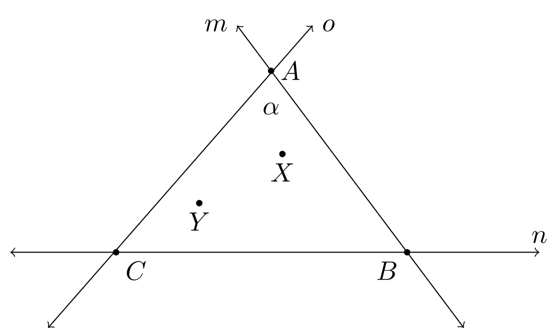
10. Si C pertenece a S_{AB} y $C \neq A$, muestre que: $S_{AB} = S_{AC}, BC \subset S_{AB}$ y que $A \notin BC$.

Demostración-. Dada una semirecta S_{AB} a través de los puntos A y B determinamos la semirrecta S_{BA} donde por la proposición $S_{AB} \cup S_{BA}$ esta contenido en la recta m. Luego por definición S_{AB} es el conjunto de puntos en el segmento AB más el conjunto de puntos X tales que $A - B - X$.
Como $C \in S_{AB}$ por hipótesis ocurre una de las tres posibilidades:

1. $C = B$ en este caso la demostración es trivial.
2. $A - B - C$ En este caso, por definición de semi-recta $S_{AB} = S_{AC}$ siendo $BC = S : bC \cap S_{CA}$ y como $A \notin S_{BC}$ entonces $A \notin BC$.
3. $A - C - B$ se demuestra análogamente al caso anterior.

11. Muestre que un triángulo separa el plano en dos regiones, una de las cuales es convexa.

Demostración.- Tracemos tres rectas m, n y o que se intersecan en los puntos A, B y C de la manera siguiente:



Así formamos el triángulo ABC, que a su vez separa el plano en dos regiones. La región convexa es la región que forma el interior del triángulo. Para probar esto, considere los puntos X e Y que pertenecen al semiplano llamemosle α generado por las tres rectas. Dado que X e Y están en el mismo semiplano generado por la recta m, entonces el segmento XY no interseca a la recta m. De manera similar, XY no puede interceptar las líneas n y o. Esto implica que XY pertenece al semiplano α formado por el triángulo ABC, que por tanto es una región convexa.

12. ¿Puede existir dos segmentos distintos con dos puntos en común?¿Y, teniendo exactamente dos puntos en común?

Respuesta.- Dados los puntos A, B, C y D de modo que $ABCD$ entonces los segmentos AC y BD tendrán el segmento BC en común ya que en un segmento hay puntos infinitos por lo que AC y BD tienen dos puntos en común pero nunca solo tendrán dos puntos.