# CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

## Resolución de problemas por FODE

# Índice general

# 1

# Distintas clases de números

## 1.1. Problemas

**1.** Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

**(i)** $1^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Demostración.- Sea $n = k$:

$$1^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

Para $k = 1$,

$$1^2 = \frac{1(1+2)(2+1)}{6}$$

por lo tanto se cumple para $k = 1$, Luego para $k = k+1$,

$$1^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

así cabe demostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \frac{2k^3 + k^2 + 2k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 3k^2 + 6k^2 + 9k + 4k + 6}{6} \\ \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} \end{aligned}$$

**(ii)** $1^3 + ... + n^3 = (1 + ... + n)^2$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces la igualdad es verdadera ya que $1^3 = 1^2$.Supongamos que se cumple para algún número $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$1^3 + ... + k^3 = (1 + ... + k)^2,$$

Luego suponemos que se cumple para $k+1$,

$$1^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = (1 + ... + (k+1))^2$$

Así solo falta demostrar que

$$
\begin{aligned}
(1+...+(k+1))^2 &= (1+...+k)^2+2(1+...+k)(k+1)+(k+1)^2 \\
&= (1^2+...+k)^2+2\frac{k(k+1)}{2}(k+1)+(k+1)^2 \\
&= 1^3+...+k^3+(k^3+2k^2+k)+(k^2+2k+1) \\
&= 1^3+...+k^3+(k+1)^3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto es válido para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$