

Los conceptos del Cálculo Integral

1.3. Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o funciones reales.

Definición 1.1 (Par ordenado) Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Definición 1.2 (Definición de función) Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primero elemento.

Debe cumplir las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

i) $\forall x \in D_f, \exists y / (x, y) \in f \text{ ó } y = f(x)$

ii) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

Definición 1.3 (Dominio y recorrido) Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el **dominio** de f . El conjunto de los segundos elementos y se denomina **recorrido** de f , o conjunto de valores de f .

TEOREMA 1.1 Dos funciones f y g son iguales si y sólo si

(a) f y g tienen el mismo dominio, y

(b) $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de f .

Demostración.- Sea f función tal que $x \in D_f, \exists y / y = f(x)$ es decir $(x, f(x))$, g una función tal que $\forall z \in D_g, \exists y / y = g(z)$ es decir $(z, g(z))$, entonces por definición de par ordenado tenemos que $(x, f(x)) = (z, g(z))$ si y sólo si $x = z$ y $f(x) = g(z)$

Definición 1.4 (Sumas, productos y cocientes de funciones) Sean f y g dos funciones reales que tienen el mismo dominio D . Se puede construir nuevas funciones a partir de f y g por adición, multiplicación o división de sus valores. La función u definida por,

$$u(x) = f(x) + g(x) \quad \text{si } x \in D$$

se denomina suma de f y g , se representa por $f + g$. Del mismo modo, el producto $v = f \cdot g$ y el cociente $w = f/g$ están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \quad \text{si } x \in D, \quad w(x) = f(x)/g(x) \quad \text{si } x \in D \text{ y } g(x) \neq 0$$

1.5. Ejercicios

1.