CALCULUS vol 1

Tom M. Apostol

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1

Introducción

Axiomas de cuerpo

Axioma .1 (Propiedad conmutativa) $x + y = y + x,\ xy = yx$

Axioma .2 (Propiedad asociativa) $x + (y + z) = (x + y) + z,\ x(yz) = (xy)z$

Axioma .3 (Propiedad distributiva) $x(y + z) = xy + xz$

Axioma .4 (Existencia de elementos neutros) *Existen dos números reales distintos que se indican por* 0 *y* 1 *tales que para cada número real* x *se tiene:* $0+x = x+0 = x$ *y* $1 \cdot x = x \cdot 1 = 1$

Axioma .5 (Existencia de negativos) *Para cada número real* x *existe un número real* y *tal que* $x + y = y + x = 0$

Axioma .6 (Existena del recíproco) *Para cada número real* $x \neq 0$ *existe un número real* y *tal que* $xy = yx = 1$

TEOREMA 1.1 (Ley de simplificación para la suma) *Si* $a + b = a + c$ *entonces* $b = c$ *(En particular esto prueba que el número 0 del axioma 4 es único)*

Demostración.- Dado a+b=a+c. En virtud de la existencia de negativos, se puede elegir y de manera que $y+a = 0$*, con lo cual* $y+(a+b) = y+(a+c)$ *y aplicando la propiedad asociativa tenemos* $(y+a)+b = (y+a)+c$ *entonces,* $0 + b = 0 + c$*. En virtud de la existencia de elementos neutros, se tiene* $b = c$*.*
por otro lado este teorema demuestra que existe un solo número real que tiene la propiedad del 0 en el axioma 4. En efecto, si 0 *y* $0^{'}$ *tuvieran ambos esta propiedad, entonces* $0 + 0^{'} = 0$ *y* $0 + 0 = 0$*; por lo tanto,* $0 + 0^{'} = 0 + 0$ *y por la ley de simplificación para la suma* $0 = 0^{'}$

TEOREMA 1.2 (Posibilidad de la sustracción) *Dado* a *y* b *existe uno y sólo un* x *tal que* $a + x = b$*. Este* x *se designa por* $b - a$*. En particular* $0 - a$ *se escribe simplemente* $-a$ *y se denomina el negativo de* a

Demostración.- *Dados a y b por el axioma 5 se tiene y de manera que $a+y=0$ ó $y=-a$, por hipótesis y teorema tenemos que $x=b-a$ sustituyendo y tenemos $x=b+y$ y propiedad conmutativa $x=y+b$, entonces $a+x=a+(y+b)=(a+y)+b=0+b=b$ esto por sustitución, propiedad asociativa y propiedad de neutro, Por lo tanto hay por lo menos un x tal que $a+x=b$. Pero en virtud del teorema 1.1, hay a lo sumo una. Luego hay una y sólo una x en estas condiciones.*

TEOREMA 1.3 $b-a=b+(-a)$

Demostración.- *Sea $x=b-a$ y sea $y=b+(-a)$. Se probará que $x=y$. por definición de $b-a$, $x+a=b$ y $y+a=[b+(-a)]+a=b+[(-a)+a]=b+0=b$, por lo tanto, $x+a=y+a$ y en virtud de teorema 1.1 $x=y$*

TEOREMA 1.4 $-(-a)=a$

Demostración.- *Se tiene $a+(-a)=0$ por definición de $-a$ incluido en el teorema 1.1. Pero esta igualdad dice que a es el opuesto de $-a$, es decir, que si $a+(-a)=0$ entonces $a=0-(-a)=a=-(-a)$*

I 3.3 Ejercicios

1. Demostrar los teoremas del 1.5 al 1.15, utilizando los axiomas 1 al 6 y los teoremas I.1 al I.4

TEOREMA 1.5 $a(b-c)=ab-ac$

Demostración.- *Sea $a(b-c)$ por teorema 1.3 tenemos que $a\left[b+(-c)\right]$ y por la propiedad distributiva $[ab+a(-c)]$, y en virtud de los teorema 1.12 y 1.3 nos queda $ab-ac$*

TEOREMA 1.6 $0\cdot a=a\cdot 0=0$

Demostración.- *Sea $0\cdot a$ por la propiedad conmutativa $a\cdot 0$, $a\cdot 0+0$ y $a\cdot 0+[a+(-a)]$ y en virtud la propiedad asociativa y distributiva $a(0+1)+(-a)$ después $1(a)+(-a)$, luego por elemento neutro y existencia de negativos tenemos 0, Así queda demostrado que cualquier número multiplicado por cero es cero.*

TEOREMA 1.7 (Ley de simplificación para la multiplicación) *Si $ab=ac$ y $a\neq 0$, entonces $b=c$. (En particular esto demuestra que el número 1 del axioma 4 es único)*

Demostración.- *Sea b, $a\neq 0$, y por el existencia del recíproco tenemos $a\cdot a^{'}=1$ luego, $b=b\cdot 1=b\left[a(a^{'})\right]=(ab)(a^{'})=(ac)(a^{'})=c(a\cdot a^{'})=c\cdot 1=c$ por lo tanto queda demostrado la ley de simplificación.*

TEOREMA 1.8 (Posibilidad de la división) *Dados a y b con $a \neq 0$, existe uno y sólo un x tal que $ax = b$. La x se designa por b/a ó $\dfrac{b}{a}$ y se denomina cociente de b y a. En particular $1/a$ se escribe también a^{-1} y se designa recíproco de a*

Demostración .- *Sea a y b por axióma 6 se tiene un y de manera que $a \cdot y = 1$ ó $y = a^{-1}$. Por hipótesis y teorema se tiene $x = b \cdot a^{-1}$, sustituyendo tenemos $x = y \cdot b$ entonces $ax = a(y \cdot b) = (a \cdot y)b = 1 \cdot b = b$ por lo tanto hay por lo menos un x tal que $ax = b$ pero en virtud del teorema 1.7 hay por lo mucho uno, luego hay una y sólo una x en estas condiciones.*

TEOREMA 1.9 *Si $a \neq 0$, entonces $b/a = b \cdot a^{-1}$*

Demostración.- *Sea $x = b/a$ y sea $y = b \cdot a^{-1}$ se probará que $x = y$, por definición de b/a, $ax = b$ y $ya = (b \cdot a^{-1})a = b(a^{-1}a) = b \cdot 1 = 1$, entonces $ya = xa$ y por la ley de simplificación para la multiplicación $y = x$*

TEOREMA 1.10 *Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$*

Demostración.- *Si $a \neq 0$ entonces $(a^{-1})^{-1} = 1 \cdot (a^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{a^{-1}} = a$ esto por axioma de neutro, definición de a^{-1} y teorema 1.9, así concluimos que $(a^{-1})^{-1} = a$*

TEOREMA 1.11 *Si $ab = 0$, entonces ó $a = 0$ ó $b = 0$*

Demostración.- *Veamos dos casos, cuando $x \neq 0$ y cuando $x = 0$*
Si $x \neq 0$ y $ab = 0$ entonces $b = b \cdot 1 = b(a \cdot a^{-1}) = (ab)a^{-1} = 0a^{-1} = 0$, ahora si $a = 0$ y virtud del teorema 1.6 nos queda demostrado que la multiplicación de dos números cualesquiera es igual a cero si $a = 0$ ó $b = 0$

TEOREMA 1.12 $(-a)b = -(ab)$ *y* $(-a)(-b) = ab$

Demostración.- *Empecemos demostrando la primera proposición, Por la ley de simplificación para la suma podemos escribir como $(-a)b + ab = 0$ entonces por la propiedad distributiva $b\left[(-a) + a\right]$ por lo tanto $b \cdot 0$, luego por el teorema 1.6 queda demostrado la primera proposición.*
Para demostrar la segunda proposición acudimos a la primera proposición, $(-a)(-b) = -\left[a(-b)\right]$ y luego, $-\left[a(-b) + b + (-b)\right] = -\left[(-b)(a+1) + b\right] = -\left[(-b)(a+1) - 1(-b)\right] = -\left[(-b)(a+1-1)\right] = -\left[(-b)a\right] = -\left[-(ab)\right]$ y en virtud del el teorema 1.4 $(-a)(-b) = ab$ así queda demostrado la proposición.

TEOREMA 1.13 $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)\,/\,(bd)$ *si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.*

Demostración.- *Si $(a/b) + (c/d)$ entonces por definición de a/b, $a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1 = (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1 = (a \cdot b^{-1}) \cdot dd^{-1} + (c \cdot d^{-1}) \cdot bb^{-1}$ por las propiedades asociativa conmutativa y distributiva, $(b^{-1}d^{-1})(ad) + (b^{-1}d^{-1})(cb) = (b^{-1}d^{-1})(ad + cb)$, por lo tanto $(ad + bc)/bd$ esto por definición.*

TEOREMA 1.14 *$(a/b)(c/d)=(ac)/(bd)$ si $b\neq 0$ y $d\neq 0$*

Demostración.- *Por definición, $(ab^{-1})(cd^{-1})$, propiedades conmutativa y asociativa $(ac)(b^{-1}d^{-1})$, y por definición queda demostrado la proposición.*

Corolario 1.1 *Si $c\neq 0$ y $d\neq 0$ entonces $(cd^{-1})=c^{-1}d$*

Demostración.- *Por definición de a^{-1} tenemos que $(cd^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{cd^{-1}}$, por el teorema de posibilidad de la división $1=(c^{-1}d)(cd^{-1})$ y en virtud de los axiomas de conmutatividad y asociatividad $1=(c^{1}c)(dd^{-1})$, luego $1=1$. quedando demostrado el corolario.*

TEOREMA 1.15 *$(a/b)/(c/d)=(ad)/(bc)$ si $b\neq 0$, $c\neq 0$ y $d\neq 0$*

Demostración.- *Sea $(a/b)/(c/d)$ entonces por definición $(ab^{-1})(cd^{-1})^{-1}$, en virtud del corolario 1 se tiene que $(ab^{-1})(c^{-1}d)$, y luego por axioma conmutativa y asociativa $(ad)(c^{-1}b^{-1})$, así por definición concluimos que $(ad)/(cd)$*

2. $-0=0$

Demostración.- Sabemos que por el axioma 5 $a+(-a)=0$, $-[a+(-a)]=0$ y $-a+-(-a)=0$ en virtud de teorema 1.12 y propiedad conmutativa $a+(-a)=0$, por lo tanto $0=0$.

3. $1^{-1}=1$

Demostración.- Por la existencia de elementos nuestros tenemos $1^{-1}\cdot 1$ y por axioma de existencia de reciproco $1=1$

4. El cero no tiene reciproco

Demostración.- Supongamos que el cero tiene reciproco es decir $0\cdot 0^{-1}=1$ pero por el teorema 1.6 se tiene que $0\cdot 0^{-1}=0$ y $0=1$ esto no es verdad, por lo tanto el cero no tiene reciproco.

5. $-(a+b)=-a-b$

Demostración.- Por existencia de reciproco $-[1(a+b)]$ y teorema 1.12 $(-1)(a+b)$ luego por la propiedad distributiva $[(-1)b]+[(-1)b]$, una vez mas por el teorema 1.12 $-(1a)+[-(1b)]$, en virtud del axioma 4 $-a+(-b)$, y teorema 1.3, $-a-b$

6. $-(-a-b)=a+b$

Demostración

Si $-(-a-b)$ entonces por axioma $-[1(-a-b)]$, luego $(-1)(-a-b) = (-1)(-a) - [(-1)b]) = (1 \cdot a) - [-(1 \cdot b)]$ y por axioma $a - [-(b)]$, así por teorema $a+b$.

7. $(a-b)+(b-c) = a-c$

Demostración.- Por definición tenemos $[a+(-b)]+[b+(-c)]$, y axiomas de asociatividad y conmutatividad $[a+(-c)]+[b+(-b)]$, luego por existencia de negativos $[a+(-c)]+0$,, así $a+(-c)$ y $a-c$.

8. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Demostración.- Por hipótesis $\frac{1}{a}\frac{1}{b}$ luego $\frac{1}{ab}$ por lo tanto $(ab)^{-1}$

9. $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ si $b \neq 0$

Demostración.- Primero demostremos que $-(a/b) = (-a/b)$, Sea $b \neq 0$, en virtud de definición de la división y teorema 1.12 no queda que $-(a/b) = (-a) \cdot b^{-1} = -a/b$.
Ahora demostramos que $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$, sea $b \neq 0$, luego $-(b^{-1} \cdot a) = [-(b^-1)] \cdot a = a/-b$.

10. $(a/b)-(c/d) = (ad-bc)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Demostración.- Sea $b \neq 0$ y $d \neq 0$ y por definición $ab^{-1} - cd^{-1}$, luego por axiomas $(ab^{-1})(d \cdot d^{-1}) - (cd^{-1})(b \cdot b^{-1})$, y en virtud del teorema 1.5 y propiedad asociativa $b^{-1} \cdot d^{-1}(ad-bc)$ y $(ad-bc)/bd$

Axiomas de orden