

# Los conceptos del Cálculo Integral

## 1.3. Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o funciones reales.

**Definición 1.1 (Par ordenado)** Dos pares ordenados  $(a, b)$  y  $(c, d)$  son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

**Definición 1.2 (Definición de función)** Una función  $f$  es un conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  ninguno de los cuales tiene el mismo primero elemento.

Debe cumplir las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

i)  $\forall x \in D_f, \exists y / (x, y) \in f \text{ ó } y = f(x)$

ii)  $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

**Definición 1.3 (Dominio y recorrido)** Si  $f$  es una función, el conjunto de todos los elementos  $x$  que aparecen como primeros elementos de pares  $(x, y)$  de  $f$  se llama el **dominio** de  $f$ . El conjunto de los segundos elementos y se denomina **recorrido** de  $f$ , o conjunto de valores de  $f$ .

**TEOREMA 1.1** Dos funciones  $f$  y  $g$  son iguales si y sólo si

(a)  $f$  y  $g$  tienen el mismo dominio, y

(b)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  del dominio de  $f$ .

*Demostración.-* Sea  $f$  función tal que  $x \in D_f, \exists y / y = f(x)$  es decir  $(x, f(x))$ ,  $g$  una función tal que  $\forall z \in D_g, \exists y / y = g(z)$  es decir  $(z, g(z))$ , entonces por definición de par ordenado tenemos que  $(x, f(x)) = (z, g(z))$  si y sólo si  $x = z$  y  $f(x) = g(z)$

**Definición 1.4 (Sumas, productos y cocientes de funciones)** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones reales que tienen el mismo dominio  $D$ . Se puede construir nuevas funciones a partir de  $f$  y  $g$  por adición, multiplicación o división de sus valores. La función  $u$  definida por,

$$u(x) = f(x) + g(x) \quad \text{si } x \in D$$

se denomina suma de  $f$  y  $g$ , se representa por  $f + g$ . Del mismo modo, el producto  $v = f \cdot g$  y el cociente  $w = f/g$  están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \quad \text{si } x \in D, \quad w(x) = f(x)/g(x) \quad \text{si } x \in D \text{ y } g(x) \neq 0$$

## 1.5. Ejercicios

1.