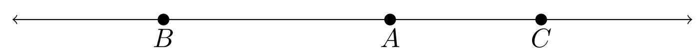
Universidad:	**Mayor de San Ándres.**
Asignatura:	**Geometría I.**
Práctica:	II.
Alumno:	**PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

---

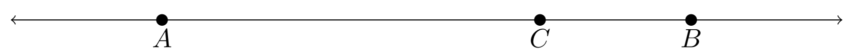
1. Sean A, B y C puntos de una recta. Haga un diseño representándolos, sabiendo que $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ y $\overline{BC} = 5$

Respuesta.-



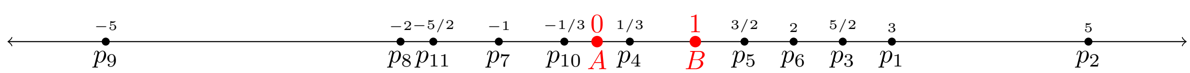
2. Repita el ejercicio anterior, sabiendo que C está entre A y B y que $\overline{AB} = 7$ y $\overline{AC} = 5$.

Respuesta.-



3. Diseñe una recta y sobre ella marque dos puntos A y B. Suponga que la coordenada del punto A sea cero y la del punto B sea 1. Marque ahora puntos cuyas coordenadas son $3, 5, 5/2, 1/3, 3/2, 2, -1, -2, -5, -1/3, -5/3$

Respuesta.-



4. Sean A_1 y A_2 puntos de coordenadas 1 y 2. De la coordenada del punto medio A_3 del segmento A_1A_2. De la coordenada del punto medio A_4 del segmento A_2A_3. De la coordenada del punto medio A_5 del segmento A_3A_4.

Respuesta.- Dado que A_3 es el punto medio del segmento A_1A_2, la coordenada A_3 será la media aritmética.

$$A_3 = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Luego calculamos análogamente para los otros puntos.

$$A_4 = \frac{\frac{3}{2} + 2}{2} = \frac{7}{4}$$

$$A_5 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{7}{4}}{2} = \frac{13}{8}$$

5. Sean a, b, c, d números reales distintos de cero. Pruebe que, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces

a) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

Demostración.- Sea $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces por hipótesis $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{c}$ luego $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

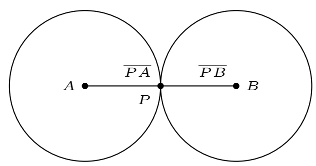
b) $\dfrac{a+c}{a} = \dfrac{c+d}{c}$ y $\dfrac{a-c}{a} = \dfrac{c-d}{c}$

Demostración.- Sea $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ entonces $\dfrac{db}{ac} \cdot \dfrac{a}{b}$ luego $1 + \dfrac{d}{c} = 1 + \dfrac{b}{a}$, de donde $\dfrac{c}{c} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a}{a} \cdot \dfrac{b}{a}$ y por lo tanto $\dfrac{c+d}{c} = \dfrac{b+a}{a}$

c) $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$ y $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$

Demostración.- Sea $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ entonces $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{bd}{ac} = \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{db}{ac}$ luego similar al ejercicio anterior tenemos $-1 \cdot \dfrac{d}{c} = -1 \cdot \dfrac{b}{a}$ y por lo tanto $\dfrac{c-d}{c} = \dfrac{a-b}{a}$

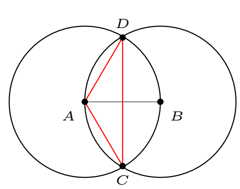
6. Si P es el punto de intersección de los círculos de radio r y centros en A y B, muestre que $\overline{PA} = \overline{PB}$



Demostración.- Como el punto P está en la intersección de los dos círculos. Entonces P pertenece al círculo con centro A y radio r, y por definición de círculo, $PA = r$, igualmente P pertenece al círculo con centro B y radio r, por definición de círculo, $PB = r$, lo que implica que $PA = PB$.

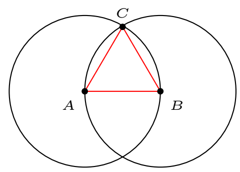
7. Usando regla y compás (regla no numerada), describa un método para la construcción de un triángulo con dos lados de misma longitud. (Un triángulo así, es llamado triángulo isósceles).

Respuesta.- Considere un segmento AB. Con un compás centrada en A, dibuja una circunferencia de radio AB. Ahora con el centro en B, dibuja un círculo de radio BA. La intersección entre los dos círculos generará los puntos C y D. Haciendo el triángulo CAD tendremos un triángulo isósceles con base CD y lados CA, AD.



8. Describa un método para construir un triángulo con sus tres lado de misma longitud.(Un triángulo así, es llamado triángulo equilátero).

Respuesta.- Se traza una recta y se marca dos puntos A y B en ella. Con el centro en A y luego en B, se generan dos circunferencias de radio r generando el punto C, después trazamos los segmentos AC, AB y BC que generará $\triangle ABC$ con lados iguales a r.



9. Muestre que, si $a < b$ entonces $a < \dfrac{a+b}{2}$ y $b > \dfrac{a+b}{2}$

Demostración.- Daremos una demostración que va mas allá del ejercicio en si planteado para entender de mejor manera esta proposición.

Demostrar que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

1. $a < \sqrt{ab}$

   Si $\quad 4a < b$ entonces $a^2 < ab$ y por raíz cuadrada dado que $a,\ b > 0$ entonces $a < \sqrt{ab}$

2. $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

   En vista de que $a,\ b > 0$ y $a < b$ entonces $a - b > 0$, $\quad (a-b)^2 > 0$ por lo tanto, $a^2 - 2ab + b^2 > 0 \Rightarrow 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab - 2ab + 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 4ab < (a+b^)2 \Rightarrow ab < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

3. $\dfrac{a+b}{2} < b$

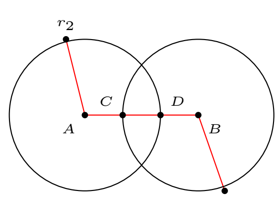
   Si $a < b$ entonces $a + b < 2b$ por lo tanto $\dfrac{a+b}{2} < b$

10. ¿Es posible construir un triángulo con lados de longitud $3, 8$ y 5?

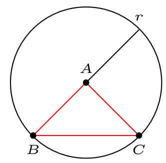
Respuesta.- No, ya que la desigualdad triangular establece que la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado, es decir, si tomamos las medidas de los lados 5 y 3, tendremos 8 que será igual a la tercera medida.

11. El círculo de radio r_1 centrado en A intersecta al círculo de radio r_2 centrado en B en exactamente dos puntos. ¿Qué se puede afirmar sobre $\overline{AB}$?

Respuesta.- Considere el círculo de radio r_2 con centro en A y el círculo de radio r_1 con centro en B y cuyo segmento AB forma los puntos C y D. Note que $AB = AD + CB - CD$ y también que $AD = r_2, CB = r_1$ y que CD es un segmento no nulo. Luego observe que $AB = r_2 + r_1 - CD$, lo que implica que $AB < r_2 + r_1$



12. Considere un círculo de radio r y centro A. Sean B y C puntos de este círculo. ¿Qué se puede afirmar sobre el triángulo ABC?



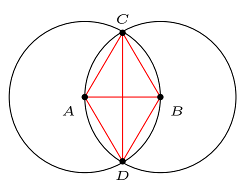
Respuesta.- Si los puntos B y C pertenecen a la circunferencia que forma el círculo entonces $AB = AC = r$ por lo tanto el triángulo es isósceles con base AB.

13. Considere un círculo de radio r y centro O. Sea A un punto de este círculo y sea B un punto tal que el triángulo OAB es equilátero. ¿Cuál es la posición del punto B en relación al círculo?

Respuesta.- Dado que el triángulo es equilátero y uno de sus lados es el segmento OA de tamaño r, entonces $OB = r$, luego el punto B está a una distancia r del centro del círculo, es decir, B pertenece a la circunferencia.

14. Dos círculos de mismo radio y centro A y B se intersectan en dos puntos C y D. ¿Qué se puede afirmar sobre los triángulos ABC y ACD? ¿Y, sobre el cuadrilátero $ACBD$?

Respuesta.-



Los triángulos ABC y ACD son isósceles porque $AC, BC = r$ y $AD = r$ así también $BD = r$. Como el paralelogramo ACBD está formado por la unión de $\triangle ABC$ y $\triangle ADB$, sus lados serían los segmentos que forman el triángulo, luego $AC = BC = AD = BD = r$. Entonces el polígono es un cuadrilátero de lados iguales y los triángulos son isósceles.

15. Dado un segmento AB muestre que existe y es único, un punto C entre A y B tal que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = a,$$

donde a es cualquier número real positivo.

Demostración.- Sean x, b y c las coordenadas de los puntos A, B y C. Podemos suponer que $a < b < c$. Luego para el caso de $x > b > c$, se resuelve de forma totalmente análoga. Entonces, por el axioma III_2 el problema a demostrar pasa por la existencia de un solo punto B entre A y C tal que $\dfrac{m(AC)}{m(BC)} = a$, equivale a mostrar que existe un único número real b tal que $x < b < c$ y $\dfrac{b-x}{c-b} = a$.

Resolviendo en b obtenemos que la única solución es $b = \dfrac{x+ca}{1+a}$. Finalmente, queda demostrar que este b encontrado satisfaga a $x < b < c$. Es decir,

$$x = \frac{x+ax}{1+a} < \frac{x+ca}{1+a} < \frac{c+ca}{1+a}$$

La unicidad del punto B también es una consecuencia del axioma III_2.

16. Pruebe que un segmento de recta que une un punto del círculo, con un punto dentro del mismo, tiene un punto en común con el círculo.

Demostración.- Sea C cualquier punto fuera de un círculo de centro O, entonces $OC > r$ donde r es el radio del círculo. Entonces, hay un punto $D \in OC$ tal que $\overline{OD} = r$. Dado que el círculo está formado por todos los puntos en el plano que están a una distancia r del punto O, entonces el punto D pertenece a la intersección del segmento OC con la circunferencia.

17. Dados los puntos A y B y un número real r mayor que $\overline{AB}$, el conjunto de los puntos C que satisfacen $\overline{CA}+\overline{CB} = r$ es llamado elipse. Establezca los conceptos de región interior y de región exterior a un elipse.

Respuesta.- Si $\overline{CA} + \overline{CB} > r$, entonces el conjunto de puntos es externo. Si $\overline{CA} + \overline{CB} < r$, entonces el conjunto de puntos será interno.

18. Un conjunto M de puntos del plano es acotado si existe un círculo C tal que todos los puntos de M están dentro de C. Pruebe que cualquier conjunto finito de puntos es acotado. Pruebe también que los segmentos son acotados. Concluya el mismo resultado para los triángulos.

Demostración.- Dado el conjunto de puntos $P_1, P_2, ..., P_n$ tome un solo punto P_i que usaremos para el centro de la circunferencia, para cada punto P_j con $i \neq j$ y j variando de 1 a n quitando el propio i, pasará a un segmento diferente. Deje que P_iP_j sea el más grande de todos los segmentos, por lo que se marca a sí mismo un punto $Q(P_1 - P_j - Q)$ en la línea que pasa por el segmento de modo que por P_1Q definimos un círculo de radio $r = P_1Q$ que contendrá todos los demás, ya que el segmento que establece su radio con relación al centro P_1 es mayor que los demás definidos por todos los demás puntos.

19. Pruebe que la unión de una cantidad finita de conjuntos acotados es también un conjunto acotado.

Demostración.-

20. Muestre que dado un punto P y un conjunto acotado M, existe un círculo C con centro en P tal que todos los puntos de M están dentro de C.

Demostración.-

21. Pruebe que las rectas son conjuntos no acotados.

Demostración.-