1

Tres teoremas fuertes

TEOREMA 1.1 *Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = 0$.*

Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto.

TEOREMA 1.2 *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a,b]$.*

Geométricamente, este teorema significa que la gráfica f queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal.

TEOREMA 1.3 *Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe algún número y en $[a,b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.*

Se dice que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo en dicho intervalo.

TEOREMA 1.4 *Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración.- Sea $g = f - c$. Entonces g es continua, y $g(a) + c < c < g(b) + c \implies g(a) < 0 < g(b)$. Por el teorema 1, existe algún x en $[a,b]$ tal que $g(x) = 0$. Pero esto significa que $f(x) = c$.

TEOREMA 1.5 *Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a,b]$ y $-f(a) < -c < -f(b)$. Por el teorema 4 existe algún x en $[a,b]$ tal que $-f(x) = -c$, lo que significa que $f(x) = c$.

Si una función continua en un intervalo toma dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre ellos; esta ligera generalización del teorema 1 recibe a menudo el nombre de **teorema de los valores**

intermedios.

TEOREMA 1.6 *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es acotada inferiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo x en $[a,b]$.*

Demostración.- *La función $-f$ es continua en $[a,b]$, así por el teorema 2 existe un número M tal que $-f(x) \leq M$ para todo x en $[a,b]$. Pero esto significa que $f(x) \geq -M$ para todo x en $[a,b]$, así podemos poner $N = -M$.*

Los teoremas 2 y 6 juntos muestran que una función continua f en $[a,b]$ son acotados en $[a,b]$, es decir, existe un número N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo x en $[a,b]$. En efecto, puesto que el teorema 2 asegura la existencia de un número N_1 tal que $f(x) \leq N$, para todo x de $[a,b]$ y el teorema 6 asegura la existencia de un número N_2 tal que $f(x) \geq N$, para todo x en $[a,b]$, podemos tomar $N = \text{máx}(|N_1|, |N_2|)$.

TEOREMA 1.7 *Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe algún y en $[a,b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.*

Demostración.- *La función $-f$ es continua en $[a,b]$; por el teorema 3 existe algún y en $[a,b]$ tal que $-f(y) \geq -f(x)$ para todo x en $[a,b]$, lo que significa que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.*

TEOREMA 1.8 *Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si $\alpha > 0$, entonces existe algún número x tal que $x^2 = \alpha$.*

Demostración.- *Consideremos la función $f(x) = x^2$, el cual es ciertamente continuo. Notemos que la afirmación del teorema puede ser expresado en términos de f: "el número α posee una raíz cuadrada" significa que f toma el valor alpha. La demostración de este hecho acerca de f será una consecuencia fácil del teorema 4.*
Existe, evidentemente, un número $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$; en efecto, si $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$, mientras que si $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Puesto que $f(0) < \alpha < f(b)$, el teorema 4 aplicado a $[0,b]$ implica que para algún x de $[0,b]$, tenemos $f(x) = \alpha$, es decir, $x^2 = \alpha$.

Precisamente el mismo raciocinio puede aplicarse para demostrar que todo número positivo tiene una raíz n-ésima, cualquiera que sea el número n. Si n es impar, se puede decir mas: todo número tiene una raíz n-ésima. Para demostrarlo basta observar que si el número positivo α tiene la raíz n-ésima x, es decir, si $x^n = \alpha$, entonces $(-x)^n = -\alpha$ (puesto que n es impar), de modo que α tiene una raíz n-ésima $-\alpha$. Afirmar que, para un n impar, cualquier número α tiene una raíz n-ésima equivale a afirmar que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

tiene una raíz si n es impar. El resultado expresado de este modo es susceptible de gran generalización.

TEOREMA 1.9 *Si n es impar, entonces cualquier ecuación*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

posee raíz.

Demostración.- *Tendremos que considerar, evidentemente, la función*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

habría que demostrar que f es unas veces positiva y otras veces negativa. La idea intuitiva es que para un $|x|$ grande, la función se parece mucho más a $g(x) = x^n$ y puesto que n es impar, ésta función es positiva para x grandes positivos y negativos para x grandes negativos. Un poco de cálculo algebraico es todo lo que hace falta para dar formar a esta idea intuitiva.
Para analizar debidamente la función f conviene escribir

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

obsérvese que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \ldots + \frac{|a_0|}{|x^n|}$$

En consecuencia, si elegimos un x que satisfaga

$$|x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0| \qquad (*)$$

entonces $|x^k| > |x|$ y

$$\frac{|a_{n-k}}{x^k} < \frac{a_{n-k}}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}} = \frac{1}{2n}$$

de modo que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

expresado de otra forma,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x_n} \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x_n}..$$

Por lo tanto, si elegimos un $x_1 > 0$ que satisfaga $(*)$, entonces

$$\frac{x_1^n}{2} \leq x_1^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x_1)$$

así que $f(x_1) > 0$. Por otro lado, si $x_2 < 0$ satisface $(*)$, entonces $x_2^n < 0$ y

$$\frac{x_2^n}{2} \geq x_2^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \ldots + \frac{a_0}{x_2^n}\right) = f(x_2),$$

así $f(x_2) < 0$.
Ahora aplicando el teorema 1 para el intervalo $[x_2, x_1]$ llegamos a la conclusión de que existe un x en $[x_2, x_1]$ tal que $f(x) = 0$.

TEOREMA 1.10 *Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, entonces existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.*

Demostración.- *Lo mismo que en el teorema 9, si*

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|),$$

entonces para todo x con $|x| \geq M$, tenemos

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}$$

Al ser n par, $x^n \geq 0$ para todo x, de modo que

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

siempre que $|x| \geq M$. *Consideremos ahora el número* $f(0)$. *Sea* $b > 0$ *un número tal que* $b^n \geq 2f(0)$ *y también* $b > M$. *Entonces si* $x \geq b$, *tenemos*

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Análogamente, si $x \leq -b$, *entonces*

$$f(x) \geq \quad \geq \quad = \quad \geq f(0).$$

Resumiendo ahora el teorema 7 a la función f *en el intervalo* $[-b, b]$. *Se deduce que existe un número* y *tal que*

$$(1) \qquad si \ -b \leq x \leq b, \ entonce \ f(y) \leq f(x).$$

En particular, $f(y) \leq f(0)$. *De este modo*

$$(2) \qquad si \ x \leq -b \ o \ x \geq b, \ entonces \ f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Cambiando (1) y (2) vemos que $f(y) \leq f(x)$ *para todo* x.

TEOREMA 1.11 *Consideremos la ecuación*

$$(*) \qquad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = c,$$

y supongamos que n *es par. Entonces existe un número* m *tal que* $(*)$ *posee una solución para* $c \geq m$ *y no posee ninguna para* $c < m$.

Demostración.- Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ *Según el teorema 10, existe un número* y *tal que* $f(y) \leq f(x)$ *para todo* x.
Sea $m = f(y)$. *Si* $c < m$ *entonces la ecuación* $(*)$ *no tiene, evidentemente, ninguna solución, puesto que el primer miembro tiene un valor* $\geq m$. *Si* $c = m$ *entonces* $(*)$ *tiene* y *como solución. Finalmente, supongamos* $c > m$. *Sea* b *un número tal que* $b > y$, $f(b) > c$. *Entonces* $f(y) = m < c < f(b)$. *En consecuencia, según el teorema 4, existe algún número* x *en* $[y, b]$ *tal que* $f(x) = c$, *con lo que* x *es una solución de* $(*)$.

1.1. Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles está acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo y mínimo.

(i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. El mínimo es 0 e no tiene máximo.

(ii) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. No tiene máximo ni mínimo

(iii) $f(x) = x^2$ en $\mathbf{R}$.

Respuesta.- No está acotado superior pero si inferiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(iv) $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$.

Respuesta.- Está acotada inferiormente pero no así superiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le a \\ a+2, & x \ge a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$

Respuesta.- Es acotado superior e inferiormente. Se entiende que $a > -1$ (de modo que $-a-1 < a+1$). Si $-1 < a \le 1/2$, entonces $a < -a-1$, así $f(x) = a+2$ para todo x en $(-a-1, a+1)$, por lo tanto $a+2$ es el máximo y mínimo valor. Si $-1/2 < a \le 0$, entonces f tiene el mínimo valor en a^2, y si $a \ge 0$, entonces f tiene un mínimo valor en 0. Ya que $a+2 > (a+1)^2$ solo para $[-1-\sqrt{5}]/2 < a < [1+\sqrt{5}]/2$, cuando $a \ge -1/2$ésta función f tiene un máximo valor solo para $a \le [1+\sqrt{5}]/2$ (el máximo valor será $a+2$).

(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \ge a \end{cases}$ en $[-a-1, a+1]$.

Respuesta.- Está acotado superior e inferiormente. Como en la parte (v), se asume que $a > -1$. Si $a \le -1/2$ entonces f tiene el valor mínimo y un máximo $3/2$. Si $a \ge 0$, entonces f tiene un valor mínimo en 0, y un valor máximo $max(a^2, a+2)$. Si $-1/2 < a < 0$, entonces f tiene un máximo valor $3/2$ y no así con un valor mínimo.

(vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es 1.

(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El máximo es 1 y no existe un mínimo.

(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 0, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es -1 y el máximo es 1.

(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$ en $[0, a]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es a.

(xi) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x + \sqrt{1-a^2})$ en $[0, a^3]$.

Respuesta.- Ya que es continua f tiene máximo como también mínimo.

(xii) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es a.

2. Para cada una de las siguientes funcione polinómicas f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n + 1$.

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.

Respuesta.- $n = -2$, ya que $f(-2) = (-2)^3 + 2 + 3 = -3 < 0 < 3 = (-1)^3 - (-1) + 3$

(ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.

Respuesta.- $n = -5$ ya que $f(-5) = -11 < 0 < f(-4)$.

(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.

Respuesta.- $n = -1$ ya que, $f(-1) = -1 < 0f(0)$.

(iv) $4x^2 - 4x + 1$

Respuesta.- No existe un entero n tal que $f(x) = 0$.

3. Demostrar que existe algún número x tal que

(i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$.

Respuesta.- Si x^{179} y $\dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x}$, son continuas en $\mathbb{R}$ entonces $f(x) = x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x}$ es continua en $\mathbb{R}$ y $f(1) > 0$, mientras que $f(-2) < 0$, de modo que $f(x) = 0$ para algún x en $(-2, 1)$.

(ii) $\operatorname{sen} x = x - 1$.

Respuesta.- Sea $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$ entonces f es continua en $\mathbb{R}$ y $f(0) > 0$, mientras que $f(2) < 0$, así por el teoremas 4 se tiene que $f(x) = c$ para algún x en $(0, 2)$.

4. Este problema es una continuación del problema 3-7

(a) Si $n - k$ es par, y ≥ 0, hallar una función polinómica de grado n que tenga exactamente k raíces.

Respuesta.- Sea $l = (n - k)/2$ de donde

$$f(x) = (x^{2(n-k)/2} + 1)(x - 1)(x - 2) \cdots (x - k).$$

(b) Una raíz a de una función polinómica f se dice que tiene multiplicidad m si $f(x) = (x-a)^m g(x)$, donde g es una función polinómica que no tiene la raíz a. Sea f una función polinómica de grado n. Supóngase que f tiene k raíces, contando multiplicidades, es decir supóngase que k es la suma de las multiplicidades de todas las raíces. Demostrar que $n-k$ es par.

Demostración.- Por la condición dada, f es una función polinómica real de grado n tal que f tiene exactamente k raíces en $\mathbb{R}$ contando multiplicidades. Probaremos que $n-k$ es par. Para ello consideraremos los siguientes casos.

Caso 1.- Si $n=k$ es trivial decir que $n-k=0$ de donde se sabe que es par.

Caso 2.- Si $n>k$, sea $x_1, x_2, \ldots,_m$ raíces reales de f con multiplicidades $k_1, k_2, \ldots, k_m$ respectivamente y por lo tanto,

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k.$$

Entonces f puede ser escrito como,

$$f(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_m)^{k_m} p_1(x) p_2(x) \cdots p_i(x)$$

donde $p_i(x)$ son polinomios irreducibles en $\mathbb{R}$ tal que el grado de p_i suma $n-k$. Ahora recordemos que todo polinomio irreducible en $\mathbb{R}$ debe tener de grado un entero par. Esto se debe a que cada polinomio de orden impar tiene al menos una raíz real, esto por el teorema 9, por lo tanto $p_i(x)$ no puede ser irreducible en $\mathbb{R}$. Ahora observe que sin pérdida de generalidad hemos asumido que hay l polinomios irreducibles tales que la suma de sus grados $n-k$. Dado que cada uno de los l polinomios tienen grado par, entonces la suma de sus grados debe ser un entero par. Se sigue que $n-k$ es un entero par.

5. Supóngase que f es continua en $[a,b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?.

Respuesta.- f es constante, ya que si f tomara dos valores distintos, entonces f tomaría todos los valores intermedios, incluyendo valores irracionales, es decir, si no fuera constante, entonces existe dos números racionales r_1 y r_2 tal que para algún c, d se tiene $a \leq c < d \leq$, $f(c) = r_1$ y $f(d) = r_2$. Por el teorema 7.4 en el intervalo $[c,d]$, f toma todos los valores entre r_1 y r_2, donde se concluye que existe algún número irracional, contradiciendo el hecho de que f solo toma valores racionales.

6. Supóngase que f es una función continua en $[-1,1]$ tal que $x^2 + f^2(x) = 1$ para todo x. (Esto significa que $(x, f(x))$ siempre está sobre el circulo unidad.) Demostrar que o bien es $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para todo x, o bien $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ para todo x.

Demostración.- De lo contrario, f toma valores tanto positivos como negativos, por lo que f tendría el valor 0 en $(-1,1)$, lo cual es imposible, ya que $\sqrt{1-x^2} \neq 0$ para x en $(-1,1)$.

7. ¿Cuántas funciones continuas f existen satisfaciendo $f^2(x) = x^2$ para todo x?.

Respuesta.- Existen 4 funciones continuas que satisfacen la condición dada, es decir,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x \\ f(x) & = & -x \\ f(x) & = & |x| \\ f(x) & = & -|x| \end{array}$$

8. Supóngase que f y g son continuas, que $f^2 = g^2$, y que $f(x) \neq 0$ para todo x. Demostrar que o bien $f(x) = g(x)$ para todo x, o bien $f(x) = -g(x)$ para todo x.

Demostración.- Si no fuera así, entonces $f(x) = g(x)$ para algún x y $f(y) = -g(y)$ para algún y. Pero ya que $f(x) \neq 0 \; \forall \; x$, entonces será o bien siempre positiva o bien siempre negativa. Así pues, $g(x)$ y $g(y)$ tendría distinto signo. Esto implicaría que $g(z) = 0$ para algún z, lo cual es imposible, ya que $0 \neq f(z) = \pm g(z)$.

9. **(a)** Supóngase que f es continuo, que $f(x) = 0$ solo para $x = a$, y que $f(x) > 0$ tanto para algún $x > a$, así como para algún $x < a$. ¿Que puede decirse acerca de $f(x)$ para todo $x \neq a$?.

Respuesta.- Por hipótesis, existe algún $x_1 \in (a, \infty)$ tal que $f(x_1) > 0$. Ahora si existe algún $y_i \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$, entonces debe existir $z_1 \in (a, \infty)$ entre x_1 y y_1 tal que $f(z_1) = 0$. Pero esto contradice que f es cero solo en $x = a$. Por lo tanto, no existe algún $y_1 \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$.
Esto es, $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, \infty)$. Similarmente, $f(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, a)$. Por lo tanto podemos decir que $f(x) > 0$ para todo $x \neq a$.

(b) Supongamos ahora que f es continuo y que $f(x) = 0$ solo para $x = a$, pero supongamos, en cambio, que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ y $f(x) < 0$ para algún $x < a$. Ahora que puede decir de $f(x)$ para $x \neq a$?.

Respuesta.- Por hipótesis, existe algún $x_1 \in (a, \infty)$ tal que $f(x_1) > 0$.. Ahora si existe $y_1 \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$, entonces existe algún $z_1 \in (a, \infty)$ entre x_1 y y_1 tal que $f(z_1) = 0$. Esto contradice que f es cero sólo en $x = a$. Por lo tanto, no existe algún $y_1 \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$.
Esto es, $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, \infty)$. Luego por similar argumento, $f(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, a)$. Así, $f(x) > 0$ para todo $x > a$ y $f(x) < 0$ para todo $x < a$.

(c) Discutir el signo de $x^3 + x^2 + xy^2 + y^3$ cuando x e y no son ambos 0.

Respuesta.- Para $y \neq 0$, sea $f(x) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$. Luego

$$f(x) = \frac{x^4 - y^4}{x - y}$$

10. Supóngase f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en $[a, b]$.

Demostración.- Sea

$$h = f - g$$

entonces por el teorema 1 se tiene

$$h(x) = 0$$

por lo que

$$f(x) = g(x) \text{ para algún } x \in [a, b].$$

11. Supóngase que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ es en $[0, 1]$ para cada x. Demostrar que $f(x) = x$ para algún número x.

Demostración.- Para $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$ entonces se puede elegir $x = 0$ o $x = 1$. Ya que x es continuo entonces

$$g(x) = x - f(x)$$

también es continuo. Luego, por el teorema 1 se tiene,

$$f(x) - x = 0 \implies x = f(x) \text{ para algún } x \in [0,1].$$

12. **(a)** El problema 11 muestra que f intersecta la diagonal del cuadrado. Demostrar que f debe cortar a la otra diagonal.

Demostración.- Vemos que la linea representa una función f en $[0,1]$, dado por,

$$f(x) = x.$$

es continuo sobre $[0,1]$. Ahora supongamos una nueva función g en $[0,1]$ tal que

$$g(x) = x - f(x)$$

de donde,

$$g(0) = 0 - f(0) = -f(0) \leq 0$$

$$g(1) = 1 - f(1)$$

De las dos funciones anteriores se tiene,

$$f(0) < g(0)$$

$$f(1) > g(1)$$

Por último definamos una nueva función continua h de forma que,

$$h = f - g$$

entonces,

$$h(1) = f(1) - g(1) > 0$$

$$h(0) = f(0) - g(0) < 0$$

Luego, existe algún punto c en $[0,1]$ por lo que ambas curvas es,

$$h(c) = 0$$

y

$$\begin{array}{rcl} f(c) - g(c) & = & 0 \\ f(c) & = & g(c) \end{array}$$

Por lo tanto, hay algún c en $[0,1]$ donde f intersecta a la otra linea diagonal.

(b) Demostrar el siguiente hecho más general: Si g es continuo en $[0,1]$ y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ o $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, entonces $f(x) = g(x)$ para algún x.

Demostración.- Sea f en $[0,1]$ entonces

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

La otra linea punteada representa una función g en $[0,1]$ dada por,

$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 1$$

De donde

$$f(0) < g(0)$$

$$f(1) > g(1)$$

Ahora definimos una nueva función continua h de forma que,

$$h = f - g$$

entonces,

$$h(1) = f(1) - g(1) > 0$$

$$h(0) = f(0) - g(0) < 0$$

Luego, existe algún punto c en $[0,1]$ por lo que ambas curvas es,

$$h(c) = 0$$

y

$$\begin{array}{rcl} f(c) - g(c) & = & 0 \\ f(c) & = & g(c) \end{array}$$

Por lo tanto, un continuo $f(g)$ y g, existe $f(x) = g(x)$ para algún x.

13. **(a)** Sea $f(x) = \operatorname{sen} 1/X$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$, ¿Es f continuo en $[-1,1]$?. Demostrar que f satisface la conclusión del teorema de valor intermedio en $[-1,1]$; en otras palabras, si f toma dos valores comprendidos en $[-1,1]$, toma también todos los valores intermedios.

Demostración.- Sea la secuencia $x_{n\,n}$ en $[-1,1]$ definida por,

$$x_= \frac{2}{\pi(4n-3)}, \quad n \geq 1$$

luego notamos que

$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0$$

Ahora aplicando la función f se tiene,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi(4n-3)}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi(4n-3)}{2}\right) = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

por lo tanto la función f, como tal, no es continuo en $[-1,1]$.

Ahora demostraremos que f satisface el teorema de valor intermedio en $[-1,1]$. Ya que $f(0) = 0$ según la hipótesis, podemos decir que f es continuo en $[0,1]$. Vamos a considerar los siguientes casos:

C1 Si $a < b$ son dos puntos de $[-1,1]$ con $a, b > 0$ o $a, b < 0$, entonces f toma cada valor entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a,b]$ ya que f es continuo en $[a,b]$.

C2 Si $a < 0 < b$, entonces f toma todos los valores entre -1 y 1 en $[a, b]$.

Así f tomas todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Lo mismo ocurre para $a = 0$ o $b = 0$.

(b) Supóngase que f satisface la conclusión del teorema del valor intermedio y que f toma cada valor solo una vez. Demostrar que f es continua.

Demostración.- Si f no fuese continua en a, entonces por el problema 6-9(b) para algún $\epsilon > 0$ existirían x tan cerca como se quiera de a con $f(x) > f(a) + \epsilon$ $f(x) < f(a) - \epsilon$. Supongamos que ocurre lo primero. Podemos incluso suponer que existen x tan cerca como se quiera de a y $> a$, o bien tan cerca como se quiera de a y $< a$. Supongamos también aquí lo primero. Tomemos un $x > a$ con $f(x) > f(a) + \epsilon$. Según el teorema de los valores intermedios, existe un $x^{'}$ entre a y x con $f(x^{'}) < f(a) + \epsilon$. Pero existe también y entre a y $x^{'}$ con $f(y) < f(a) + \epsilon$. Pero existe también y entre a y $x^{'}$ con $f(y) > f(a) + \epsilon$. Según el teorema de los valores intermedios, f forma el valor $f(a) + \epsilon$ entre x y $x^{'}$ y también entre $x^{'}$ e y, contrariamente a la hipótesis.

(c) Generalizar para el caso donde f toma cada valor solo un número finito de veces.

Respuesta.- Lo mismo que en (b) elíjase $x_1 > a$ con $f(x_1) > f(a) + \epsilon$. Después elijase $x_1^{'}$ entre a y x_1 con $f(x_1^{'}) < f(a) + \epsilon$. Luego elíjase x_2 entre a y $x_1^{'}$ con $f(x_2) > f(a) + \epsilon$ y $x_2^{'}$ entre a y x_2 con $f(x_2^{'}) < f(a) + \epsilon$, etc. Entonces f toma el valor $f(a) + \epsilon$ en cada uno de los intervalos $[x_n^{'}, x_n]$ en contradicción con la hipótesis.

14. Si f es una función continua en $[0, 1]$, sea $\|f\|$ el máximo valor de $|f|$ en $[0, 1]$.

(a) Demostrar que para algún número c tenemos $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.

Demostración.- Ya que $|cf| = |c| \cdot |f(x)|$ para todo x de $[0, 1]$. entonces podemos elegir un x_0 tal que $|f|(x_0) = \|f\|$, y por lo tanto $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.

(b) Demostrar que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Dar un ejemplo donde $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$.

Demostración.- Para las todos funciones dadas, tenemos

$$\begin{array}{rcl} |f+g|(x) & = & |f(x)+g(x)| \\ |f+g|(x) & \leq & |f(x)|+|g(x)| \\ |f+g|(x) & \leq & |f|(x)+|g|(x) \end{array}$$

También sabemos que si f o g tienen el máximo valor en x_0 entonces,

$$\begin{array}{rcl} |f|(x_0) & = & \|f\| \\ |g|(x_0) & = & \|g\| \end{array}$$

Luego si la función $|f + g|$ tiene el máximo valor en x_0 entonces,

$$\begin{array}{rcl} \|f+g\| & = & |f+g|(x_0) \\ \|f+g\| & \leq & |f|(x_0)+|g|(x_0) \\ \|f+g\| & \leq & \|f\|+\|g\| \end{array}$$

Por último, sea $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x - 4$ entonces se cumple que $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$.

(c) Demostrar que $\|h-f\| \leq \|h-g\| + \|g-f\|$.

Demostración.- Para las todos funciones dadas, tenemos

$$\begin{array}{rcl} |h-f|(x) & = & |(h-g)-(g-f)|(x) \\ |h-f|(x) & \leq & |(h-g)(x)| + |(g-f)(x)| \\ |h-f|(x) & \leq & |h-g|(x) + |g-f|(x) \end{array}$$

También sabemos que si f o g tienen el máximo valor en x_0 entonces,

$$\begin{array}{rcl} |f|(x_0) & = & \|f\| \\ |g|(x_0) & = & \|g\| \\ |h|(x_0) & = & \|h\| \end{array}$$

Luego si la función $|f+g|$ tiene el máximo valor en x_0 entonces,

$$\begin{array}{rcl} \|h-f\| & = & |h-f|(x_0) \\ \|h-f\| & \leq & |h-g|(x_0) + |g-f|(x_0) \\ \|h-f\| & \leq & \|h-g\| + \|g-f\| \end{array}$$

15. Supóngase que ϕ es continua y $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x)/x^n = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x)/x^n$.

(a) Demostrar que si n es impar, entonces existe un número x tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

Demostración.- Sea $b > 0$ tal que

$$\left|\frac{\phi(b)}{b^n}\right| < \frac{1}{2}$$

entonces,

$$b^n + \phi(b) = b^n\left(1 + \frac{\phi(b)}{b^n}\right) > \frac{1}{2} > 0$$

De la misma manera, sea $a < 0$ tal que

$$\left|\frac{\phi(a)}{a^n}\right| < \frac{1}{2}$$

entonces, ya que n es impar,

$$a^n + \phi(a) = a^n\left(1 + \frac{\phi(a)}{a^n}\right) < \frac{a^n}{2} < 0$$

Por lo tanto, existe un x tal que

$$x^n + \phi(x) = 0.$$

(b) Demostrar que si n es par, entonces existe un número y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)$ para todo x.

Demostración.- Sea $b > 0$ tal que

$$b^n > 2\phi(0)$$

Y $|x| > b$

$$\left|\frac{\phi(x)}{x^n} < \frac{1}{2}\right|$$

de donde tenemos,

$$\begin{aligned} x^n + \phi(x) &> x^n\left(1 + \frac{\phi(x)}{x^n}\right) \\ x^n + \phi(x) &> \frac{x^n}{2} \\ x^n + \phi(x) &> \frac{b^n}{2} \\ x^n + \phi(x) &> \phi(0). \end{aligned}$$

Así, el mínimo de $x^n + \phi(x)$ para x in $[-b, b]$ es el mínimo del intevalo. Y por lo tanto, existe un número y, para todo x, tal que,

$$y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x).$$

16. **(a)** Supóngase que f es continua en (a, b) y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Demostrar que f tiene un mínimo en todo el intervalo (a, b).

Demostración.- Sea $c \in (a, b)$. Ya que $\lim_{x\to a^-} = \infty$, existe $a_1 \in (a, b)$ tal que $a_1 < c$ y $f(x) < f(c)$ para todo $x \in (a, a_1)$. Similarmente, ya que $\lim_{x\to b^+} = \infty$, existe un $b_1 \in (a, b)$ tal que $b_1 > c$ y $f(x) > f(c)$ para todo $x \in (b_1, b)$, entonces por el teorema 7.7 Se tiene que existe un $y \in [a_1, b_1]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo $x \in [a_1, b_1]$.
En particular, $f(y) \leq f(c)$, de donde si $x \in [a_1, b_1]$, entonces $f(y) \leq f(x)$. Si $x \in (a, a_1)$, entonces $f(y) \leq f(c) < f(x)$ y si $x \in (b_1, b)$, entonces $f(y) \leq f(c) < f(x)$ de donde demostramos que f tiene un mínimo y en (a, b).

(b) Demostrar el correspondiente resultado cuando $a = -\infty$ y/o $b = \infty$.

Demostración.- Sea $c \in \mathbb{R}$. Ya que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M < c$ y $f(x) > f(c)$ para todo $x < M$. Similarmente, ya que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $N > c$ y $f(x) > f(c)$ para todo $x > N$.
Luego, f es continua en $[M, N]$, alcanza el mínimo en este intervalo. Esto es, existe $y \in [M, N]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo $x \in [M, N]$. En particular, $f(y) \leq f(c)$, de donde si $x \in [M, N]$, entonces $f(y) \leq f(x)$. Si $x < M$, entonces $f(y) \leq f(c) < f(x)$. Si $x > N$, entonces $f(y) \leq f(c) < f(x)$. Esto muestra que f tiene un mínimo en $y \in \mathbb{R}$.

17. Sea f cualquier función polinómica. Demostrar que existe algún número y tal que $|f(y)| \leq |f(x)|$ para todo x.

Demostración.- Ya que f es un polinomio real entonces,

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \lim_{x\to -\infty} |f(x)| = \infty$$

de donde existe un entero N tal que

$$|f(0)| < |f(x)| \quad \text{para todo } x \in (-\infty, -N) \cup (N, \infty)$$

Ahora consideremos el intervalo cerrado $[-N, N]$, notemos que este intervalo es un conjunto compacto en $\mathbb{R}$. Luego sabemos que la función $|f|$ es continuo en $[-N, N]$ por lo que debe existir un punto y en $[-N, N]$ tal que

$$|f(y)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [-N, N].$$

Ahora note que $0 \in [-N, N]$, se sigue que,

$$|f(y)| \leq |f(0)|.$$

por lo tanto,

$$|f(y)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

18.