# 1

# Funciones Continuas

**Definición 1.1** *La función $f$ es continua en $a$ si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

*Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x$, si $0 < |x - a| < \delta$.*
*Pero en este caso, en que el límite es $f(a)$, la frase*

$$0 < |x - a| < \delta$$

*puede cambiarse por la condición más sencilla*

$$|x - a| < \delta$$

*puesto que si $x = a$ se cumple ciertamente que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.*

**TEOREMA 1.1** *Si $f$ y $g$ son continuas en $a$, entonces*

$$\begin{array}{rl} (1) & f + g \text{ es continua en } a. \\ (2) & f \cdot g \text{ es continua en } a. \\ \text{Además, si } g(a) \neq 0, \text{ entonces } (3) & 1/g \text{ es continua en } a \end{array}$$

*Demostración.-* *Puesto que $f$ y $g$ son continuas en $a$,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

*Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que*

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

*lo cual es precisamente la afirmación de que $f + g$ es continua en $a$.*
*Para $f \cdot g$ se tiene que*

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = f(a) \cdot fg(a) = (f \cdot g)(a)$$

*Por último para $1/g$ tenemos que*

$$\lim_{x \to a} 1/g = 1/g(a), \qquad \text{para } g(a) \neq 0$$

**TEOREMA 1.2** *Si $g$ es continua en $a$, y $f$ es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en $a$.*

*Demostración.-* *Sea $\epsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo $x$,*

$$\text{Si } |x-a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \epsilon, \text{ es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$$

*Tendremos que aplicar primero la continuidad de $f$ para estimar cómo de cerca tiene que estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que $f$ es continua en $g(a)$, existe un $\delta^{'} > 0$ tal que para todo $y$,*

$$\text{Si } |y - g(a)| < \delta^{'}, \text{ entonces } |f(y) - f(g(a))| < \epsilon. \qquad (1)$$

*En particular, esto significa que*

$$\text{Si } |g(x) - g(a)| < \delta^{'}, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon. \qquad (2)$$

*Aplicamos ahora la continuidad de $g$ para estimar cómo de cerca tiene que estar $x$ de $a$ para que se cumpla la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta^{'}$. El número $\delta^{'}$ es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar $\delta^{'}$ como el epsilon de la definición de continuidad de $g$ en $a$. Deducimos que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x$,*

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \delta^{'}, \qquad (3)$$

*combinando (2) y (3) vemos que para todo $x$,*

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

**Definición 1.2** *Si $f$ es continua en $x$ para todo $x$ en $(a,b)$, entonces se dice que $f$ es continua en $(a,b)$ si*

$$f \text{ es continua en } x \text{ para todo } x \text{ de } (a,b), \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b). \qquad (2)$$

**TEOREMA 1.3** *Supóngase que $f$ es continua en $a$, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x$ que satisface $|x-a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) > 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x$ que satisface $|x-a| < \delta$.*

*Demostración.-* *Considérese el caso $f(a) > 0$ puesto que $f$ que es continua en $a$, si $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x$,*

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

*Puesto que $f(a) > 0$ podemos tomar a $f(a)$ como el epsilon. Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x$,*

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a)$$

*Y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.*
*Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\epsilon = -f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$.*

## 1.1. Problemas

**1.** ¿para cuáles de las siguientes funciones $f$ existe una función $F$ de dominio $R$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x$ del dominio de $f$?

**(i)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Respuesta.- Sabiendo que el límite cuando $x$ tiende a 2 existe, entonces existe una función $F$ de dominio $R$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x$ del dominio de $f$.

**(ii)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

Respuesta.- No existe $F$, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

**(iii)** $f(x) = 0,\ x$ irracional.

Respuesta.- Existe $F$ de dominio $R$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x$ del dominio de $f$.

**(iv)** $f(x) = 1/q,\ x = p/q$ racional en fracción irreducible. Respuesta.- No existe $F$, ya que $F(a)$ tendría que ser 0 para los $a$ irracionales, y entonces $F$ no podría ser continua en $a$ si $a$ es racional.

**2.** ¿En qué puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?.

Respuesta.- Problema 4-17.
Para (i), (ii) y (iii) son continuas para todos los puntos menos para los enteros. Para (iv) es continua en todos los puntos.Para (v) es entera para todos los puntos excepto para 0 y $1/n$ para $n$ en los enteros.

Problema 4-19.
(i) todos los puntos que no sean de la forma $n + k/10$ para todos los enteros $k$ y $n$. El (ii) para todo los puntos que no sea de la forma $n + k/100$ para todos los enteros $k$ y $n$. (iii) y (iv) para ningún punto. (v) para todos los puntos que el decimal no termine en $7999\ldots$. Y (vi) para todos los puntos que el decimal contenga al menos un 1.

**3.**