Universidad:	**Mayor de San Ándres.**
Asignatura:	**Geometría II.**
Ejercicio:	3.
Alumno:	**PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

1. Encontrar el punto final de $\vec{a} = (7,6)$ si el punto inicial es $P_0(2,-1)$.

Respuesta.- Sea $\vec{a} = P_1 - P_0$ y $P_1 = (x,y)$, entonces podemos hallar los vectores de la siguiente manera,

$$\begin{array}{rcl} x-2 & = & 7 \\ y+1 & = & 6 \end{array}$$

de donde $x = 9,\ y = 5$ y por lo tanto

$$P_1 = (9,5)$$

2. Sean $\vec{u} = (1,3)$, $\vec{v} = (2,1)$ y $\vec{w} = (4,-1)$. Encontrar las componentes del vector $\vec{x}$ que satisfacen $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$.

Respuesta.- Despejando $\vec{x}$ obtenemos

$$6\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad \Longrightarrow \quad 6\vec{x} = (2,6) - (2,1) - (4,-1)$$

de donde

$$6\vec{x} = (0,5) - (4,-1) \quad \Longrightarrow \quad 6\vec{x} = (-4,6) \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

3. Demuéstrese que: $0\vec{x} = \vec{0}$ y $r\vec{0} = \vec{0}$.

Demostración.- sea $\vec{x} \in V_n$ entonces $0\vec{x} = 0(x_1, x_2, ..., x_n)$, luego por la multiplicación de un número real por un vector tenemos,

$$0\vec{x} = (0 \cdot x_1, 0 \cdot x_2, ..., 0 \cdot x_n) = (0,0,...,0)$$

y por lo tanto se demuestra que

$$0\vec{x} = \vec{0}$$

Por otro lado sea $r \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$r\vec{0} = r(0,0,...,0) = (r \cdot 0, r \cdot 0, ..., r \cdot) = (0,0,...,0)$$

de modo que

$$r\vec{0} = \vec{0}$$

4. Demuéstrese que:

a) Si $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} = \vec{c}$.

Demostración.- Sea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$, entonces por el inverso aditivo en vectores e hipótesis tenemos ,

$$
\begin{aligned}
\vec{b} &= (\vec{b}+\vec{a})-\vec{a}\\
&= (\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}\\
&= (\vec{a}+\vec{c})-\vec{a}\\
&= \vec{c}+(\vec{a}-\vec{a})\\
&= \vec{c}
\end{aligned}
$$

b) Si $r\vec{x}=\vec{0} \quad \Longrightarrow \quad r=0 \vee \vec{x}=\vec{0}$.

Demostración.- Será lo mismo demostrar $r\vec{x}=\vec{0} \wedge r \neq 0 \implies \vec{x}=\vec{0}$. Esto por leyes lógicas.

Sea $r \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in V_n$, entonces

$$r\vec{x}=0 \text{ implica que } \vec{x}=\frac{\vec{0}}{r}, \text{ ya que } r \neq 0.$$

Luego se sigue que

$$\vec{x}=\vec{0}$$

c) Si $r\vec{x}=s\vec{x} \wedge \vec{x} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad r=s$.

Demostración.- Reescribiendo la proposición se tiene: Si $r\vec{x}=s\vec{x} \wedge r \neq s \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}=0$.

De donde se tiene

$$\vec{x}=(r-s)\vec{x} \implies \vec{x}=r\vec{x}-s\vec{x} \text{ ya que } r \neq s$$

y por lo tanto

$$\vec{x}=r(\vec{x}-\vec{x})$$

se sigue

$$\vec{x}=r(0) \implies \vec{x}=0$$

debido a la unicidad y existencia del inverso aditivo. Con esto se demuestra la proposición dada.

5. Demostrar que si $\vec{c} \neq 0$ y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos a $\vec{c}$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos. (Vectores paralelos a un mismo vector no nulo son paralelos entre sí).

Demostración.- Sea $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_n$. Por definición de vectores paralelos se tiene

$$r_1\vec{a}=\vec{c} \quad \text{y} \quad r_2\vec{b}=\vec{c}$$

de donde

$$r_1\vec{a}=r_2\vec{b},$$

en vista de que $r_1 \cdot r_2 \neq 0$ entonces

$$\vec{b}=r_1r_2^{-1}\vec{a},$$

por lo tanto se concluye que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos entre sí.

6. Hallar todos los vectores ortogonales a:

a) $(3,6)$

Respuesta.- Sea (r_1,r_1) un vector, entonces para hallar vectores paralelos a $(3,6)$ utilizamos la definición como sigue,

$$\begin{array}{rcll}(3,6)\circ(r_1,r_2) & = & 0 & \\ 3r_1+6r_2 & = & 0 & \text{producto escalar}\\ 3(r_1+2r_2) & = & 0 & \\ r_1+2r_2 & = & 0 & \\ r_1 & = & -2r_2 \quad (1) & \end{array}$$

de donde tomamos valores para r_2, reemplazamos en (1) y obtendremos n vectores paralelos a $(3,6)$.

b) $(2,-1)$.

Respuesta.- Análogamente al inciso a) tenemos

$$\begin{array}{rcl}(2,-1)\circ(r_1,r_2) & = & 0\\ 2r_1+(-r_2) & = & 0\\ r_1 & = & \frac{1}{2}r_2\end{array}$$

de igual forma al anterior inciso, tomamos valores para r_2, y hallamos n valores ortogonales a $(2,-1)$.

c) $(2,3,-1)$

Respuesta.- Sea (r_1,r_2,r_3) un vector en V_3, entonces,

$$\begin{array}{rcl}(2,3,-1)\circ(r_1,r_2,r_3) & = & 0\\ 2r_1+3r_2-r_3 & = & 0\\ r_1 & = & (r_3-3r_2)/2 \qquad (1)\end{array}$$

luego reemplazamos valores a r_3 y r_2 en (1), de donde obtendremos vectores ortogonales a $(2,3,-1)$.

d) (a_1,a_2)

Respuesta.- Análogo a los anteriores incisos se tiene,

$$(a_1,a_2)\circ(r_1,r_2)=0 \quad\Longrightarrow\quad a_1r_1+a_2r_2=0 \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}a_1=-a_2r_2/r_1\\ a_2=-a_1r_1/r_2\\ r_1=-a_2r_2/a_1\\ r_2=-a_1r_1/a_1\end{array}\right.$$

7. Encontrar un vector que sea ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=-7i+3j+k, \quad \vec{v}=2i+4k$.

Respuesta.-

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 7 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}7 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}k=(3\cdot4-1\cdot0)i-(7\cdot4-2\cdot1)j+(7\cdot0-3\cdot2)k$$

y por lo tanto el vector que deseamos encontrar es

$$\vec{u}\times\vec{v}=(12,-26,-6)$$

b) $\vec{u} = (-1,-1,-1), \quad \vec{v} = (2,0,2)$

Respuesta.-

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

de donde

$$\vec{u} \times \vec{v} = -2i + 2k = (-2, 0, 2)$$

8. Encontrar todos los vectores posibles de longitud 1 ortogonales tanto a $\vec{a} = (3,-2,1)$ como a $\vec{b} = (-2,1,-3)$.

Respuesta.- Primeramente encontraremos el producto vectorial para luego utilizar el teorema $\dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = 1$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5i + 7j - k = (5, 7, -1).$$

Luego

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 1^2} = 5\sqrt{3}$$

de donde,

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$$

por lo tanto los vectores de longitud 1 ortogonales a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right) \qquad \text{y} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$$

El segundo vector cumple con la condición dada ya que es el vector contrario al encontrado primeramente.

9. Sean $\vec{a} = ti + j$ y $\vec{b} = 4i + 3j$. Encontrar el valor de t tal que

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.

Respuesta.- Sea $\vec{a} = ti + j = (t, 1)$ y $\vec{b} = 4i + 3j = (4, 3)$, entonces por definición de ortogonalidad tenemos

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \implies 4t + 3 = 0 \implies t = -3/4$$

b) El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/4$.

Respuesta.- Aplicando $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\pi/4)$ tenemos,

$$4t + 3 = \sqrt{t^2 + 1} \cdot \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \implies (4t^2 + 3)^2 = (t^2 + 1) \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

de donde se tiene

$$7t^2 + 48 - 7 = 0$$

se sigue

$$t = \frac{1}{7} \quad \text{o} \quad t = -7$$

c) El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/6$.

Respuesta.- Análogo al anterior ejercicio tenemos

$$4t+3=\sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{25}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Longrightarrow\quad (4t^2+3)^2=(t^2+1)\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{3}{4} \quad\Longrightarrow\quad -11t^2+96t-39=0$$

de donde

$$t=\frac{48+25\sqrt{3}}{11} \quad \text{o} \quad t=\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$$

d) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos.

Respuesta.- Sea $\vec{a}=(t,1)$ y $\vec{b}=(4,3)$ entonces por definición de vectores paralelos tenemos que

$$\vec{a}=c\vec{b} \quad\Longrightarrow\quad (t,1)=c(4,3) \quad\Longrightarrow\quad (t,1)=(4c,3c)$$

de donde

$$t=4c \qquad \text{y} \qquad 1=3c$$

por lo tanto $c=\dfrac{1}{3}$. Se sigue

$$t=\frac{4}{3}$$

10. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 60° con $\|\vec{a}\|=5$, $\|\vec{b}\|=8$. Determinar $\|\vec{a}-\vec{b}\|$ y $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.

Respuesta.- Sea

$$\|\vec{a}\pm\vec{b}\|^2=\|a\|^2\|b\|^2\pm 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

entonces se tiene,

$$\|a\pm b\|^2=5^2+8^2\pm 2\cdot 5\cdot 8\cos\left(60\cdot\frac{\pi}{180}\right)$$

por lo tanto

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|=7 \qquad y \qquad \|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{129}$$

11. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 30° con $\|\vec{a}\|=1$, $\|\vec{b}\|=\sqrt{3}$. Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$.

Respuesta.- Primero calculemos

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1^2+\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}\cos 30=1$$

Luego calculamos el ángulo α asociado a $\vec{a}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ de donde nos queda

$$\alpha=\arccos\left(\frac{1^2+1^2-\sqrt{3}}{2}\right)=\arccos\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)=82.3$$

Sea $a+b$ la diagonal del paralelogramo formado por los lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de donde el ángulo de $a+b$ será 15°. Por lo tanto $a+b$ y $a-b$ forman un ángulo de,

$$180-82.3-15=82.7$$

12. Dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}\vec{c}$ que satisfacen la condición $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ y sabiendo que $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 1, \|\vec{a}\| = 4$. Calcular $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Respuesta.- Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$ entonces

$$0 = \|\vec{0}\|^2 = \|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2.$$

Luego

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\vec{c}) = 0$$

de donde se tiene,

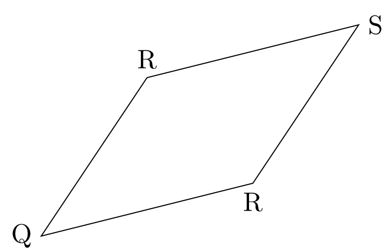
$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\vec{c} = 3^2+1^2+4^2 = 13.$$

13. Dados los puntos $P(3,4)$, $Q(1,1)$ y $R(5,2)$, usar métodos vectoriales para encontrar las coordenadas del cuarto vértice del paralelogramo cuyo lados adyacentes son $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$.

Respuesta.- Sea S vértice a encontrar entonces por ser un paralelogramo se tiene que $\vec{QR} = vecPS$, por lo tanto

$$(1-1)-(5,2) = (3,4)-S \implies S = (3,4)-(-4,-1)$$
$$S = (7,5)$$

El gráfico corrobora el resultado.



14. Demostrar que $(4,5,2), (4,7,9), (8,5,-6)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Respuesta.- Supongamos que las distancias entre A, B y C son iguales, lo que implica que $|A-B| = |B-C| = |B-C|$, de donde

$$\begin{array}{ccccccc} |A-B| & = & |(0,-2,-7)| & = & \sqrt{0^2+(-2)^2+(-7)^2} & = & \sqrt{53} \\ |A-C| & = & |(-4,0,8)| & = & \sqrt{(-4)^2+0^2+8^2} & = & \sqrt{80} \end{array}$$

ya que $|A-B| \neq |A-C|$ se concluye que los puntos dado no son los vertices de un triangulo equilátero.

16. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}^2-\vec{b}\|^2 = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Demostración.- Se tiene que

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}^2-\vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}^2|\right) = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$$

18. Demostrar que: $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$

Demostración.- Análogamente al ejercicio 16 se tiene,

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}^2| = 2|\vec{a}^2 + 2\|\vec{b}|^2$$

20. Supóngase que $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$ y que $\vec{a}\neq 0$. Es posible inferir que $\vec{b}=\vec{c}$?. Explicar la respuesta.

Respuesta.- Esta proposición es falsa ya que si $A=(1,1,1)$, $B=(1,-1,0)$ y $C=(0,-1,1)$ entonces

$$A\cdot B = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 = 0,$$
$$A\cdot C = 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0$$

de donde $B\neq C$.

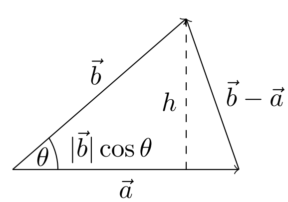
31. Demostrar que $Comp_{\vec{b}}\,(\vec{a_1}+\vec{a_2}) = Comp_{\vec{b}}\vec{a_1} + Comp_{\vec{b}}\vec{a_2}$

Demostración.- Por definición de la componente, al ser la norma del vector b un escalar y por propiedades del producto escalar se tiene,

$$Comp_{\vec{b}}\,(\vec{a_1}+\vec{a_2}) = \frac{(\vec{a_1}+\vec{a_2})\circ\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a_1}\circ\vec{b}+\vec{a_2}\circ\vec{\vec{b}}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a_1}\circ\vec{b}}{\vec{b}} + \frac{\vec{a_2}\circ\vec{\vec{b}}}{|\vec{b}|} = Comp_{\vec{b}}\vec{a_1} + Comp_{\vec{b}}\vec{a_2}$$

41. Demostrar vectorialmente la ley de cosenos.

Demostración.- Supongamos que $\vec{a},\vec{b}\in V_n$ y,



entonces por el teorema de Pitágoras se tiene

$$h^2 = |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}|\cos\theta\Big)^2 \qquad y \qquad |\vec{b}-\vec{a}|^2 = \Big(|\vec{b}|\cos\theta - |\vec{a}|\Big)^2 + h^2$$

de donde

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = \Big(|\vec{b}|\cos\theta - |\vec{a}|\Big)^2 + |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}|\cos\theta\Big)^2 = \Big(|\vec{b}|\cos\theta\Big)^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}|\cos\theta\Big)^2$$

por lo tanto,

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$