1

Tres teoremas fuertes

TEOREMA 1.1 *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.*

Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto.

TEOREMA 1.2 *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a, b]$.*

Geométricamente, este teorema significa que la gráfica f queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal.

TEOREMA 1.3 *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe algún número y en $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.*

Se dice que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo en dicho intervalo.

TEOREMA 1.4 *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración.- Sea $g = f - c$. Entonces g es continua, y $g(a) + c < c < g(b) + c \implies g(a) < 0 < g(b)$. Por el teorema 1, existe algún x en $[a, b]$ tal que $g(x) = 0$. Pero esto significa que $f(x) = c$.

TEOREMA 1.5 *Si f es continua*

1.1. Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles está acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo y mínimo.

(i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.