1

Algunas distribuciones continuas de probabilidad

1.1. La distribución normal

Definición 1.1. se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0 \end{array}$$

Si se obtienen las dos primeras derivadas de $f(x;\mu,\sigma)$ con respecto a x y se igualan a cero, se tiene que el valor máximo de $f(x;\mu,\sigma)$ ocurre cuando $x=\mu$, y los valores $x = \mu \pm \sigma$ son las abcisas de los dos puntos de inflexión de la curva.

Demostrar que la definición 5.1 es una función de densidad de probabilidad.

Demostración.- El que la función sea no negativa se satisface, ya que $f(x;\mu,\sigma) > 0$ para $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$. Para demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)\ dx = 1.$$

Sea

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dx$$

el valor de la integral y aplíquese la transformación lineal $y = (x-\mu)/\sigma$ de manera tal que $x = \sigma y + \mu$ y $dx = \sigma\ dy$. Esto da como resultado:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\ dy.$$

Si puede demostrarse que $I^2 = 1$, puede deducirse que $I = 1$ puesto que $f(x;\mu,\sigma)$ tiene un valor positivo. De acuerdo con lo anterior:

$$I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\ dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\ dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(y^2+z^2)}{2}}\ dydz,$$

en donde se ha escrito el producto de las dos integrales como una doble integral ya que las funciones de z son contantes con respecto a y como también de manera viceversa. Al cambiar de coordenadas rectangulares representadas por x e y, a coordenadas polares r y θ, en donde $y = r\cos\theta$ y $z = r\operatorname{sen}\theta$. Esto es:

$$y^2 + z^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta = r^2$$

y el elemento de área $dydz$, en coordenadas rectangulares se reemplaza por $rdrd\theta$ en coordenadas polares. Dado que los límites $(-\infty, \infty)$ tanto para y como para z generan el plano completo yz, el plano correspondiente a r y a θ se genera mediante el empleo de los límites $(0, 2\pi)$ para θ y $(0, \infty)$ para r. De esta forma se tiene:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{x} e^{-r^2/2}\, rdrd\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{x} e^{-r^2/2}\, rdr = \frac{\theta}{2\pi}\bigg|_0^{2\pi} \cdot [-e^{-r^2/2}]\bigg|_0^{x} = 1.$$

La media de una variable aleatoria distribuida normalmente se encuentra definida por:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Se pretende demostrar que $E(X) = \mu$. Supóngase que a $E(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$ se suma y se resta

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

La identidad se mantiene, pero después de reacomodar términos se tiene

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx + \mu \end{aligned}$$

dado que el valor de la segunda integral es uno. Al afectar un cambio de variable de integración de manera tal que $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, $x = \sigma y + \mu$ y $dx = \sigma dy$, se tiene:

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2/2}\, dy + \mu = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu.$$

El lector recordará de sus cursos de cálculo que la última integral es cero porque el integrando es una función impar y la integración se lleva a cabo sobre un intervalo simétrico alrededor de cero.

Si el valor máximo de la función de densidad de probabilidad normal ocurre cuando $x = \mu$ este es la media, la mediana y la moda de cualquier variable aleatoria distribuida aleatoriamente.
Para encontrar los demás momentos, se determinará la función generadora de momentos. Por definición:

$$m_{X-\mu}(t) = E\left[e^{t(X-\mu)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-\mu)} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu)\right]}\, dx.$$

de donde se completa el cuadrado en el interior del paréntesis rectangular y se tiene:

$$(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu) = (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu) + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2 = (x-\mu-\sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2.$$

Por lo que,

$$m_{X-\mu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{-\frac{x-(\mu+\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}}\, dx = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

dado que el integrando junto con el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ es una función de densidad de probabilidad normal con parámetros $\mu + \sigma^2 t$ y σ.
Al desarrollar $e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ en serie de potencias se tiene:

$$m_{X-\mu}(t) = 1 + \frac{(\sigma t)^2}{2} + \frac{(\sigma t)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{(\sigma t)^6}{8 \cdot 3!} + \frac{(\sigma t)^8}{16 \cdot 4!} + \ldots$$

Cuando las potencias impares de t no se encuentran presentes, todos los momentos centrales de X de orden impar son cero, de esta forma se asegura la simetría de la curva.

La segunda derivada de $m_{X-\mu}(t)$ evaluada en $t = 0$ es la varianza y está dada por:

$$Var(X) = \left.\frac{d^2 m_{X-\mu}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \sigma^2 + \frac{12t^2\sigma^4}{4 \cdot 2!} + \frac{30t^4\sigma^6}{8 \cdot 3!} + \ldots \Big|_{t=0} = \sigma^2;$$

De esta manera **la desviación estándar es $\boldsymbol{\sigma}$**. De manera similar, la cuarta derivada de $m_{X-\mu}(t)$ evaluada en $t = 0$ es el cuarto momento central, el cual es:

$$\mu_4 = \left.\frac{d^4 m_{X-\mu}(t)}{dt^4}\right|_{t=0} = 3\sigma^4 + \frac{360t^2\sigma^6}{8 \cdot 3!} + \ldots \Big|_{t=0} = 3\sigma^4$$

De acuerdo con lo anterior, para cualquier distribución normal el coeficiente de asimetría es $\alpha_3(X) = 0$, mientras que la curtosis relativa es $\alpha_4(X) = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$. Para momentos alrededor del cero, puede determinarse la función generadora de momentos centrales o viceversa. Dado que

$$m_{X-\mu}(t) = E\left[e^{t(X-\mu)}\right] = e^{-\mu t} E\left[e^{tX}\right] = e^{-ut} m_X(t),$$

para una distribución normal

$$e^{-\mu t} m_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

y

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

pag 150