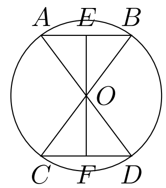
Universidad:	**Mayor de San Ándres.**
Asignatura:	**Geometría I.**
Práctica:	IV.
Alumno:	**PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

1. Pruebe que, en un mismo círculo o en círculos de mismo radio, cuerdas congruentes son equidistantes del centro.

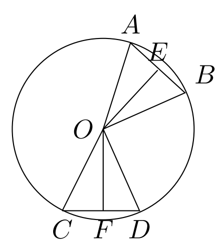
Demostración.-



Construyamos una circunferencia de centro O con segmentos $AB = CD$. Por O trazamos los segmentos $OA = OB = OC = OD = \ Radio$. Entonces $\triangle ABO$ es isosceles, lo mismo para $\triangle COD$. Como $A\widehat{O}B = C\widehat{O}D$, ya que están opuestos por el vértice, entonces $\triangle ABO = \triangle COD$ por el caso LAL. Trazando los segmentos OE y OF de manera que OE y EF son alturas de los triángulos, por lo tanto perpendiculares a AB y CD respectivamente. Como $\triangle AOB = \triangle COD$ entonces $EO = OF$ por lo tanto AB y CD son equidistantes.

2. Pruebe que, en un mismo círculo o en círculos de mismo radio, cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

Demostración.-



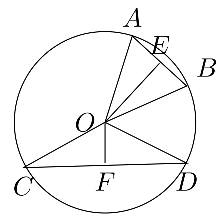
Sabemos por el problema anterior que si dos arcos son equidistantes, entonces hay una perpendicular a cada arco que es congruente, es decir: $OE = OF$ por hipótesis tenemos que OE, $OF \perp AB$, CD respectivamente. Así mismo $\triangle OBE = \triangle OCF = \triangle OFD$ por el caso cateto hipotenusa. Por lo tanto $AE = EB = CF = FD$ así,

$$AE + EB = CF + FD$$

$$AB = CD.$$

3. Pruebe que, en un mismo círculo o en círculos de mismo radio, si dos cuerdas tienen longitudes diferentes, la más corta es la más alejada del centro.

Demostración.-



Como A, B, C y D pertenece al circulo entonces:

$$OC = OD = OA = OB = Radio$$

Luego $\triangle COD, \triangle AOB$ son isosceles.
Los segmentos OE y OF para tener $\triangle AOB = \triangle COD$ ambos rectángulos. Entonces por el teorema de Pitágoras:

$$OA^2 = OF^2 + AF^2 \quad o \quad OC^2 = OE^2 = CE^2$$

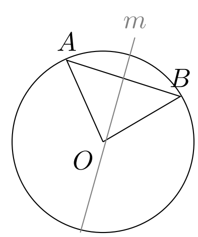
Luego como $OA = OC = Radio$

$$OF^2 + AF^2 = OE^2 + CE^2 \quad (1)$$

Como $AB < CD$ por hipótesis o F o E son puntos medios de AB y CD respectivamente, debido a que $\triangle AOB, \triangle COD$ son isosceles, entonces $AF < CE$ que obliga a la desigualdad $OF > OE$ a mantener la igualdad en (1).

4. Muestre que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro del círculo.

Demostración.- Dada una cuerda AB y una mediatriz m que corta a AB en el punto E de manera que $AE = EB$ y $m \perp AB$, como se ve a continuación:



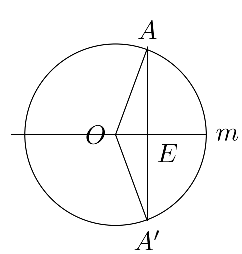
Luego $AO = OB = Radio$ como también $\triangle AOB$ es isosceles de base AB.
Sea OE la mediana relativa a la base AB del $\triangle AOB$ entonces, $OE \perp AB$. Cuando un punto pasa por una sola línea perpendicular, entonces OE es la propia mediana que pasa por el punto O.

5. Explique porque el reflejo de un círculo relativo a una recta que pasa por su centro es el mismo círculo.

Demostración.- Recordando las propiedades de reflexión tenemos:

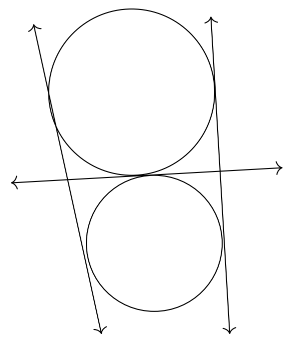
$$F_m(A) = A \; si \; A \in m,$$

luego



Al dibujar una línea recta m que pasa por el centro del círculo, la reflexión del centro es el centro mismo. Sea A cualquier punto que pertenezca al círculo, entonces hay un segmento $AA^{'}$ que se cruza con m en el punto E tal que $AE = A^{'}E$ y $AA^{'} \perp m$. Luego trazamos $\triangle AOE = \triangle EOA^{'}$ que son congruentes en el caso LAL. Entonces $OA = OA^{'}$ y por lo tanto la reflexión de A también pertenece al círculo.

6. En la figura, existen tres rectas que son tangentes simultaneamente a los dos círculos. Estas rectas se dicen tangentes comunes a los círculos. Diga si se puede diseñar dos círculos que tengan:



a) Cuatro tangentes comunes,

Respuesta.- Se puede diseñar 4 tangentes comunes si dos las cruzamos por en medio de los circulos.

b) Exactamente dos tangentes comunes,

Respuesta.- Se puede diseñar sobreponiendo un circulo con el otro.

c) Solamente una tangente común,

Respuesta.- Se puede graficar solamente una tangente si hacemos que el circulo este contenido en el otro.

d) ninguna tangente en común,

Respuesta.- Se podría siempre y cuando uno de los círculos fuese más pequeño y no tocara con la circunferencia del otro.

e) más de cuatro tangentes en común.

Respuesta.- No se puede graficar mas de 4 tangentes en común.

7. En la figura AE es tangente común y JS une los centros de los círculos. Los puntos E y A son puntos de tangencia y M es el punto de intersección de los segmentos JS y AE. Pruebe que $\widehat{J} = \widehat{S}$.

Respuesta.-

8. En la figura siguiente a izquierda, M es el centro de los dos círculos y AK es tangente al círculo menor en el punto R. Muestre que $AR = RK$.

Demostración.-

9. En la figura anterior a derecha, L es el centro del círculo, UK es tangente al círculo en el punto U y $UE = LU$. Muestre que $LE = EK$.

Demostración.-

10. En la figura siguiente a izquierda, $MO = IX$. Pruebe que $MI = OX$.
Dos puntos en un círculo determinan dos arcos. Si los puntos son A y B denotamos por AB al arco menor determinado por estos dos puntos. Si P también pertenece al círculo usaremos la notación APB para representar al arco que contiene al punto P.

Demostración.-

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.