

Espacios vectoriales

1.1 Espacios vectoriales

Definición
1.1

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) consta de lo siguiente:

1. Un cuerpo F de escalares;
2. un conjunto V de objetos llamados vectores;
3. una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores α, β de V un vector $\alpha + \beta$ de V , que se llama suma de α y β , de tal modo que:
 - (a) La adición es conmutativa, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
 - (b) la adición es asociativa, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
 - (c) existe un único vector 0 de V , llamado vector nulo tal que $\alpha + 0 = \alpha$, para todo α de V ;
 - (d) para cada vector α de V existe un vector $-\alpha$ de V , tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$;
4. una regla (u operación) llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar c de F y cada vector α de V a un vector $c\alpha$ en V , llamado producto de c y α , de tal modo que:
 - (a) $1\alpha = \alpha$ para todo α de V ;
 - (b) $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$;
 - (c) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$;
 - (d) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

Ejemplo El **espacio de n-tuplas**, F_n . Sea F cualquier cuerpo y sea V el conjunto de todos los n-tuplas $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de escalares x_i de F . Si $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ con y_i de F , la suma de α y β se define por

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (1.1)$$

El producto de un escalar c y el vector α se define por

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n). \quad (1.2)$$

Que esta adición vectorial y multiplicación escalar cumplen las condiciones (3) y (4) es fácil de verificar, usando las propiedades semejantes de la adición y multiplicación de elementos de F . ■

Ejemplo 1.2 El espacio de matrices $m \times n$, $F^{m \times n}$. Sea F cualquier cuerpo y sean m y n enteros positivos. Sea $F^{m \times n}$ el conjunto de todas las matrices $m \times n$ sobre el cuerpo F . La suma de dos vectores A y B en $F^{m \times n}$ se define por

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \quad (1.3)$$

El producto de un escalar c y de la matriz A se define por

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}. \quad (1.4)$$

Obsérvese que $F^{i \times n} = F^n$. ■

Ejemplo 1.3 El espacio de funciones de un conjunto en un cuerpo. Sea F cualquier cuerpo y sea S cualquier conjunto no vacío. Sea V el conjunto de todas las funciones de S en F . La suma de dos vectores f y g de V es el vector $f + g$; es decir, la función de S en F definida por

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s). \quad (1.5)$$

El producto del escalar c y la función f es la función cf definida por

$$(cf)(s) = cf(s). \quad (1.6)$$

Para este tercer ejemplo se indica cómo se puede verificar que las operaciones definidas satisfacen las condiciones (3) y (4). Para la adición vectorial:

(a) Como la adición en F es conmutativa,

$$f(s) + g(s) = g(s) + f(s)$$

para todo s de S , luego las funciones $f + g$ y $g + f$ son idénticas.

(b) Como la adición en F es asociativa,

$$f(s) + [g(s) + h(s)] = [f(s) + g(s)] + h(s)$$

para todo s , luego $f + (g + h)$ es la misma función que $(f + g) + h$.

(c) El único vector nulo es la función cero, que asigna a cada elemento de S el escalar 0 de F .

(d) Para todo f de V , $(-f)$ es la función dada por

$$(-f) = -f(s).$$

El lector encontrará fácil verificar que la multiplicación escalar satisface las condiciones de (4), razonando como se hizo para la adición vectorial. ■

Ejemplo 1.4 El espacio de las funciones polinomios sobre el cuerpo F . Sea F un cuerpo y sea V el conjunto de todas las funciones f de F en F definidas en la forma

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad (1.7)$$

donde c_0, c_1, \dots, c_n son escalares fijos de F (independiente de x). Una función de este tipo se llama **función polinomio sobre F** . Sean la adición y la multiplicación escalar definidas sobre en el ejemplo 3. Se debe observar que si f y g son funciones polinomios y c está en F , entonces $f + g$ y cf son también funciones polinomios. ■

Ejemplo 1.5 El cuerpo C de los números complejos puede considerarse como un espacio vectorial sobre el cuerpo R de los números reales. En forma más general, sea F el cuerpo de los números reales y sea V el conjunto de los n -tuples $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ donde x_1, \dots, x_n son números complejos. Se define la adición vectorial y la multiplicación escalar por (2.1) y (2-2), como en el ejemplo 1. De este modo se obtiene un espacio vectorial sobre el cuerpo R que es muy diferente del espacio C^n y del espacio R_n . ■

Hay unos pocos hechos simples que se desprenden, casi inmediatamente, de la definición de espacio vectorial, y procederemos a derivarlos. Si c es un escalar y 0 es el vector nulo, entonces por 3(c) y 4(c)

$$c0 = c(0 + 0) = c0 + c0.$$

Sumando $-(c0)$ y por 3(d), se obtiene

$$c0 = 0. \quad (1.8)$$

Análogamente, para el escalar 0 y cualquier vector α se tiene que

$$0\alpha = 0. \quad (1.9)$$

Si c es un escalar no nulo y α un vector tal que $c\alpha = 0$, entonces por (2-8), $c^{-1}(c\alpha) = 0$. Pero

$$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1\alpha = \alpha$$

luego, $\alpha = 0$. Así se ve que si c es un escalar y α un vector tal que $c\alpha = 0$, entonces c es el escalar cero o α es el vector nulo.

Si α es cualquier vector de V , entonces

$$0 = 0\alpha = (1 - 1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = \alpha + (-1)\alpha$$

de lo que se sigue que

$$(-1)\alpha = -\alpha. \quad (1.10)$$

Finalmente, las propiedades asociativa y conmutativa de la adición vectorial implican que la suma de varios vectores es independiente de cómo se combinen estos vectores y de cómo se asocien. Por ejemplo, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ son vectores de V , entonces

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)] + \alpha_4$$

y tal suma puede ser escrita, sin confusión,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Definición 1.2 Un vector β de V se dice **combinación lineal** de los vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en V , si existen escalares c_1, \dots, c_n de F tales que

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i.$$

Otras extensiones de la propiedad asociativa de la adición vectorial y las propiedades distributivas 4(c) y 4(d) de la multiplicación escalar se aplican a las combinaciones lineales:

$$\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^n d_i\alpha_i = \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)\alpha_i$$

$$c \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i = \sum_{i=1}^n (cc_i)\alpha_i.$$

Ejercicios

1. Si F es un cuerpo, verificar que F^n (como se definió en el Ejemplo 1) es un espacio vectorial sobre el cuerpo F .

Respuesta.- Sean $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $\gamma = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ elementos de F^n . Como también sean $c, d, c_1, c_2 \in F$. Entonces,

- (3) (a) Conmutatividad para la adición.

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= \beta + \alpha.\end{aligned}$$

- (b) Asociatividad para la adición.

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + z_1 + y_1, x_2 + z_2 + y_2, \dots, x_n + z_n + y_n) \\ &= (\alpha + \beta) + \gamma.\end{aligned}$$

- (c) Existencia del elemento nulo.

$$\begin{aligned}\alpha + 0 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

- (d) Existencia del inverso aditivo.

$$\begin{aligned}\alpha + (-\alpha) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + [-(x_1, x_2, \dots, x_n)] \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, 0, \dots, 0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

- (4) (a) Existencia del elemento neutro para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned}1\alpha &= 1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (1x_1, 1x_2, \dots, 1x_n) \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

- (b) Asociatividad para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned}(c_1 c_2)\alpha &= (c_1 c_2)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (c_1 c_2 x_1, c_1 c_2 x_2, \dots, c_1 c_2 x_n) \\ &= (c_1(c_2 x_1), c_1(c_2 x_2), \dots, c_1(c_2 x_n)) \\ &= (c_1 c_2 x_1, c_1 c_2 x_2, \dots, c_1 c_2 x_n) \\ &= c_1(c_2 \alpha).\end{aligned}$$

- (c) Distributividad para la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{aligned}c(\alpha + \beta) &= c((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\ &= c(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (cx_1 + cy_1, cx_2 + cy_2, \dots, cx_n + cy_n) \\ &= (c\alpha + c\beta).\end{aligned}$$

- (d) Distributividad para la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{aligned}(c + d)\alpha &= (c + d)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (cx_1 + dx_1, cx_2 + dx_2, \dots, cx_n + dx_n) \\ &= c\alpha + d\alpha.\end{aligned}$$

2. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo F , verificar que

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4$$

para todo los vectores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ de v .

Respuesta.- Se tiene,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) &= (\alpha_2 + \alpha_1) + (\alpha_3 + \alpha_4) \\ &= \alpha_2 + [\alpha_1 + (\alpha_3 + \alpha_4)] \\ &= \alpha_2 + [(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_4] \\ &= \alpha_2 + [(\alpha_3 + \alpha_1) + \alpha_4] \\ &= [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4. \end{aligned}$$

3. Si C es el cuerpo de los complejos, ¿qué vectores de C^3 son combinaciones lineales de $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$?

Respuesta.- Sea $(x, y, z) \in C^3$ una combinación lineal de los vectores $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$. Entonces, existen escalares a, b y $c \in C$ tal que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= a(1, 0, -1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 1) \\ &= (a + c, b + c, c - a). \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{cases} a + c = x \\ b + c = y \\ c - a = z. \end{cases}$$

Resolviendo se tiene,

$$\begin{cases} a = \frac{x - z}{2} \\ b = \frac{2z - x - y}{2} \\ c = \frac{x + z}{2}. \end{cases}$$

Por lo tanto, existen escalares a, b y $c \in C$ tal que

$$(x, y, z) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 1).$$

Así, todos los vectores en C^3 pueden ser expresados como una combinación lineal de los vectores $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$.

4. Sea V el conjunto de los pares (x, y) de números reales, y sea F el cuerpo de los números reales. Se define

$$\begin{aligned} (x, y) + (x_1, y_1) &= (x + x_1, y + y_1) \\ c(x, y) &= (cx, y). \end{aligned}$$

¿Es V , con estas operaciones, un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales?

Respuesta.- No es un espacio vectorial ya que,

$$(0, 2) = (0, 1) + (0, 1) = 2(0, 1) = (2 \cdot 0, 1) = (0, 1).$$

5. En \mathbb{R}^n se definen dos operaciones

$$\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$$

$$c \cdot \alpha = -c\alpha.$$

Las operaciones del segundo miembro son las usuales. ¿Qué axiomas de espacio vectorial se cumplen para $\mathbb{R}^n, \oplus, \cdot$?

Respuesta.- Sean $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $\gamma = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ elementos de F^n . Como también sean $c, d, c_1, c_2 \in F$. Entonces,

(3) (a) No es conmutativa para la adición.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= \alpha - \beta \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) - (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \\ &= (-y_1 + x_1, -y_2 + x_2, \dots, -y_n + x_n) \\ &= -\beta + \alpha. \\ &= -(\beta - \alpha) \\ &= -(\beta \oplus \alpha) \\ &\neq \beta \oplus \alpha. \end{aligned}$$

(b) No es asociativa para la adición.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) &= \alpha - (\beta - \gamma) \\ &= (\alpha - \beta) + \gamma \\ &= (\alpha \oplus \beta) + \gamma \\ &\neq \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma). \end{aligned}$$

(c) No existe el elemento nulo.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus 0 &= \alpha - 0 \\ &= \alpha - (0, 0, \dots, 0) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Pero, como \oplus no es conmutativa; es decir, $\alpha \oplus \neq 0 \oplus \alpha$ decimos que no existe la identidad aditiva para \oplus .

(d) No existe el inverso aditivo.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus (-\alpha) &= \alpha - (-\alpha) \\ &= \alpha + \alpha \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

(4) (a) No existe el elemento neutro para la multiplicación escalar.

El elemento 1 no satisface $1 \cdot \alpha = \alpha$ para cualquier $\alpha \neq 0$, ya que de lo contrario tendríamos

$$1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sólo si $x_i = 0$ para todo i .

(b) No es asociativa para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned} c_1(c_2\alpha) &= c_1(-c_2\alpha) \\ &= -c_1(-c_2\alpha) \\ &= -(c_1c_2)\alpha \\ &\neq (c_1c_2)\alpha. \end{aligned}$$

(c) No es distributiva para la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{aligned} c(\alpha + \beta) &= -c(\alpha + \beta) \\ &= -c\alpha - c\beta \\ &= -(c\alpha + c\beta) \\ &\neq c\alpha + c\beta. \end{aligned}$$

(d) No es distributiva para la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{aligned} c\alpha + d\alpha &= -c\alpha - d\alpha \\ &= -(c + d)\alpha \\ &\neq (c + d)\alpha. \end{aligned}$$

6. Sea V el conjunto de todas las funciones que tiene valor complejo sobre el eje real, tales que (para todo t de \mathbb{R})

$$f(t) = \overline{f(t)}$$

. La barra indica conjugación compleja. Demostrar que V , con las operaciones

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$cf(t) = c f(t)$$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Dar un ejemplo de una función en V que no toma valores reales.

Demostración.- Sea $f, g, h \in V$. Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene

(3) (a) Conmutatividad para la adición.

$$\begin{aligned} (f + g)(t) &= f(t) + g(t) \\ &= g(t) + f(t) \\ &= (g + f)(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f + g = g + f$ para todo f y $g \in V$.

(b) Asociatividad para la adición.

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](t) &= (f + g)(t) + h(t) \\ &= [f(t) + g(t)] + h(t) \\ &= f(t) + [g(t) + h(t)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f + g) + h = f + (g + h)$ para todo $f, g, h \in V$.

(c) Existencia del elemento nulo.

Considere la función cero $0(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces para todo $f \in V$, tenemos

$$(f + 0)(t) = f(t) + 0(t) = f(t) + 0 = f(t).$$

Ya que $+$ es conmutativo, se tiene $f = f + 0 = 0 + f$.

(d) Existencia del inverso aditivo.

Para $f \in V$, consideremos $g = (-f)$ como $(-f)(t) = -f(t)$. Claramente $g = -f$ existe en V . Luego,

$$[f + (-f)](t) = f(t) + (-f)(t) = f(t) - f(t) = 0 = 0(t).$$

Ya que, $+$ es conmutativo, tenemos $f + (-f) = 0 = (-f) + f$ para todo $f \in V$. así, el inverso aditivo existe.

- (4) (a) Existencia del elemento neutro para la multiplicación escalar.

$$1 \cdot f = f.$$

Para $f \in V$, se tiene

$$(1 \cdot f)(t) = 1 \cdot f(t) = f(t).$$

Así, $1 \cdot f = f$ para todo $f \in V$.

- (b) Asociatividad para la multiplicación escalar.

Sean $a, b \in R$ y $f \in V$, entonces

$$\begin{aligned} (ab)f &= [(ab) \cdot f](t) \\ &= (ab)f(t) \\ &= a[bf(t)] \\ &= a(b \cdot f) \\ &= a(bf). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(ab) \cdot f = a(b \cdot f)$ para todo $f \in V$ y $a, b \in R$.

- (c) Distributividad para la multiplicación escalar sobre la adición.

Sean $a, b \in R$ y $f, g \in V$, entonces

$$\begin{aligned} [a(f + g)](t) &= a[(f + g)(t)] \\ &= a[f(t) + g(t)] \\ &= (af)(t) + (ag)(t) \end{aligned}$$

- (d) Distributividad para la multiplicación sobre la adición de escalares

Sean $a, b \in R$ y $f \in V$, entonces

$$\begin{aligned} [(a + b)f](t) &= (a + b)(f(t)) \\ &= af(t) + bf(t) \\ &= (af)(t) + (bf)(t). \end{aligned}$$

De esta manera, V satisface todas las propiedades del espacio vectorial respecto a las operaciones de adición y multiplicación escalar.

7. Sea V el conjunto de pares (x, y) de números reales y sea F el cuerpo de los números reales. Se define

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, 0)$$

$$c(x, y) = (cx, 0).$$

¿Es V , con estas operaciones un espacio vectorial?

Respuesta.- No es un espacio vectorial. Sea $u = (x_1, y_1)$ y $0 \in R, 0 = (0, 0) \in V$. Entonces,

$$\begin{aligned} u + 0 &= (x_1, y_1) + (0, 0) \\ &= (x_1 + 0, 0) \\ &= (x_1, 0) \\ &\neq u. \end{aligned}$$

Por lo tanto, no existe un inverso aditivo para V . Así V no es un espacio vectorial.

1.2 Subespacios

Definición 1.3 Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F . Un **subespacio** de V es un subconjunto W de V que, con las operaciones de adición vectorial y multiplicación escalar sobre V , es el mismo un espacio vectorial sobre F .

Esta definición se puede simplificar aún más.

Teorema 1.1 Un subconjunto no vacío W de V es un subespacio de V si, y sólo si, para todo par de vectores α, β de W y todo escalar c de F , el vector $c\alpha + \beta$ está en W .

Demostración.- Supóngase que W sea un subconjunto no vacío de V tal que $c\alpha + \beta$ pertenezca a W para todos los vectores α, β de W y todos los escalares c de F . Como W no es vacío, existe un vector ρ en W , y por tanto, $(-1)\rho + \rho = 0$ está en W . Ahora bien, si α es cualquier vector de W y c cualquier escalar, el vector $c\alpha = c\alpha + 0$ está en W . En particular, $(-1)\alpha = -\alpha$ está en W . Finalmente, si $\alpha + \beta$ están en W , entonces $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta$ está en W . Así, W es un subespacio de V .

Recíprocamente, si W es un subespacio de V , α y β están en W y c es un escalar, ciertamente $c\alpha + \beta$ está en W . ■

Ejemplo 1.7 El espacio solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.. Sea A una matriz $m \times n$ sobre F . Entonces el conjunto de todas las matrices (columna) $n \times 1$, X , sobre F tal que $AX = 0$ es un subespacio del espacio de todas las matrices $n \times 1$ sobre F . Para demostrar esto se necesita probar que $A(cX + Y) = 0$ si $AX = 0$, $AY = 0$ y c un escalar arbitrario de F . Esto se desprende inmediatamente del siguiente hecho general. ■

Lema 1.1 Si A es una matriz $m \times n$ sobre F , y B, C son matrices $n \times p$ sobre F , entonces

$$A(dB + C) = d(AB) + AC \quad (1.11)$$

para todo escalar d de F .

Demostración.-

$$\begin{aligned} [A(dB + C)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(dB + C)_{kj} \\ &= \sum_k (dA_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}) \\ &= d \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} \\ &= d(AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\ &= [d(AB) + AC]_{ij}. \end{aligned}$$

■

En forma semejante se puede ver que $(dB + C)A = d(BA) + CA$, si la suma y el producto de las matrices están definidos.

Teorema 1.2 Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F . La intersección de cualquier colección de subespacios de V es un subespacio de V .

Demostración.- Sea $\{W_a\}$ una colección de subespacios de V , y sea $W = \cap W_a$ su intersección. Recuerdese que W está definido como el conjunto de todos los elementos pertenecientes a cada W_a . Dado que todo W_a es un subespacio, cada uno contiene el vector nulo. Así que el vector nulo está en la intersección W , y W no es vacío. Sean α y β vectores de W y sea c un escalar. Por definición de W ambos α y β pertenecen a cada W_a , y por ser cada W_a un subespacio el vector $(c\alpha + \beta)$ está en cada W_a . Así $(c\alpha + \beta)$ está también en W . Por el teorema 1, W es un subespacio de V . ■

De este teorema se deduce que si S es cualquier colección de vectores de V , entonces existe un subespacio mínimo de V que contiene a S ; esto es, un subespacio que contiene a S y que está contenido en cada uno de los otros subespacios que contienen a S .

Definición 1.4 Sea S un conjunto de vectores de un espacio vectorial V . El **subespacio generado** por S se define como la intersección W de todos los subespacios de V que contienen a S . Cuando S es un conjunto finito de vectores, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ se dice simplemente que W es el **subespacio generado por los vectores** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Teorema 1.3 El subespacio generado por un subconjunto S no vacío de un espacio vectorial V es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de S .

Demostración.- Sea W el subespacio generado por S . Entonces, toda combinación lineal

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m$$

de vectores $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ de S pertenecen evidentemente a W . Así que W contiene el conjunto L de todas las combinaciones lineales de vectores de S . El conjunto L , entonces, por otra parte, contiene a S y no es, pues, vacío. Si α y β pertenecen a L , entonces α es una combinación lineal,

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m$$

de vectores α_i de S , y β es una combinación lineal,

$$\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \dots + y_n\alpha_n$$

de vectores β_j de S . Para cada escalar c ,

$$c\alpha + \beta = \sum_{i=1}^n (cx_i)\alpha_i + \sum_{j=1}^n y_j\beta_j.$$

Luego, $c\alpha + \beta$ pertenece a L . Con lo que L es un subespacio de V .

Se demostró que L es un subespacio de V que contiene a S , y también que todo subespacio que contiene a S contiene a L . Se sigue que L es la intersección de todos los subespacios que contienen a S ; es decir, que L es el subespacio generado por el conjunto S . ■

Definición 1.5 Si S_1, S_2, \dots, S_k son subconjuntos de un espacio vectorial V , el conjunto de todas las sumas

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$$

de vectores α_i de S_i se llama **suma** de los subconjuntos S_1, S_2, \dots, S_k y se representa por

$$S_1 + S_2 + \dots + S_k$$

o por

$$\sum_{i=1}^k S_i.$$

Si W_1, W_2, \dots, W_k son subespacios de V , entonces la suma

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_k$$

como es fácil ver, es un subespacio de V que contiene cada uno de los subespacios W_i . De esto se sigue, como en la demostración del Teorema 3, que W es el subespacio generado por la unión de W_1, W_2, \dots, W_k .

Ejercicios

1. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ de \mathbb{R}^n son subespacios de \mathbb{R}^n ($n \geq 3$)?

(a) todos los α tal que $a_1 \geq 0$;

Respuesta.- Sea $A = \{\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \geq 0\}$. De donde, podemos elegir un vector $\alpha' = (1, 0, \dots, 0) \in A$ tal que $a_1 \geq 0$. Ahora notemos que

$$(-1)\alpha' = (-1)(1, 0, \dots, 0) = (-1, 0, \dots, 0) \notin A.$$

lo que contradice la condición $a_1 \geq 0$. Por lo tanto, A no es cerrado con respecto a la multiplicación escalar, por lo que no es un subespacio.

(b) todos los α tal que $a_1 + 3a_2 = a_3$;

Respuesta.- Sean $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ y $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in A$. Ahora, consideremos $c\alpha + \beta$ de donde tenemos

$$\begin{aligned} c\alpha + \beta &= (ca_1, ca_2, \dots, ca_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (ca_1 + b_1, ca_2 + b_2, \dots, ca_n + b_n) \end{aligned}$$

Después, usando la condición $a_1 + 3a_2 = a_3$ se tiene,

$$\begin{aligned} (ca_1 + b_1) + 3(ca_2 + b_2) &= c(a_1 + 3a_2) + (b_1 + 3b_2) \\ &= ca_3 + b_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $c\alpha + \beta$ está en el subconjunto, entonces es un subconjunto por el teorema 1.

(c) todos los α tal que $a_2 = a_1^2$;

Respuesta.- Tomemos los vectores $\alpha = (-1, 1, 0, \dots, 0)$ y $\beta = (1, 1, 0, \dots, 0)$. Luego,

$$\alpha + \beta = (-1, 1, 0, \dots, 0) + (1, 1, 0, \dots) = (0, 2, 0, \dots, 0)$$

Claramente $2 \neq 0^2$, por lo que $\alpha + \beta$ no pertenece al subconjunto dado. Por lo tanto, no es un subespacio.

(d) todos los α tal que $a_1 a_2 = 0$;

Respuesta.- Sea $\alpha = (0, 1, 0, \dots, 0)$ y $\beta = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Luego,

$$\alpha + \beta = (0, 1, 0, \dots, 0) + (1, 0, 0, \dots, 0) = (1, 1, 0, \dots, 0)$$

Donde, claramente $1 \cdot 1 = 1 \neq 0$. Por lo tanto, $\alpha + \beta$ no pertenece al subconjunto dado. Así, no es un subespacio.

(e) todos los α tal que a_2 es racional.

Respuesta.- Sea el conjunto $A = \{\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_2 \in \mathbb{Q}\}$. Luego sea $\beta = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Entonces para $c = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, tenemos

$$c\beta = \sqrt{2}(0, 1, 0, \dots, 0) = (0, \sqrt{2}, 0, \dots, 0)$$

Claramente $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, por lo que $c\beta$ no pertenece al subconjunto dado. Por lo tanto, no es un subespacio.

2. Sea V el espacio vectorial (real) de todas las funciones f de R en R . ¿Cuál de los siguientes conjuntos de funciones son subespacios de V ?

(a) Todas las f tales que $f(x^2) = f^2(x)$;

Respuesta.- Por el teorema 1, para que cada una de las funciones sea un subespacio, debe ser cerrado respecto a la suma y al multiplicación escalar en V definida como: $f, g \in V$, con $c \in R$, tal que

$$(cf + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Entonces, para este caso en particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, de donde ambos satisfacen la condición inicial; Es decir,

$$f(x^2) = x^2 = f^2(x) \quad \text{y} \quad g(x^2) = (x^2)^2 = g^2(x).$$

Pero para algún $c \in R$,

$$(cf + g)(x^2) = cf(x) + g(x) = cx^2 + x^4$$

Y

$$(cf + g)^2(x) = [cf(x) + g(x)]^2 = (cx + x^2)^2 = x^4 + 2cx^3 + (cx)^2.$$

Dado que no se cumple la igualdad de la condición $f(x^2) = f^2(x)$ para $(f + g) = f(x) + g(x)$. Entonces, el conjunto no es un subespacio de V .

- (b) Todas las
- f
- tales que
- $f(0) = f(1)$
- ;

Respuesta.- Sean f y g dos funciones en V que satisfacen la condición inicial. Entonces, para algún $c \in R$, se tiene

$$(cf + g)(0) = cf(0) + g(0) = cf(1) + g(1) = (cf + g)(1).$$

Por lo tanto, por el teorema 1, el conjunto dado es un subespacio de V .

- (c) Todas las
- f
- tales que
- $f(3) = 1 + f(-5)$
- ;

Respuesta.- Por hipótesis, sean $f(3) = 1 + f(-5)$ y $g(3) = 1 + g(-5)$ en V . Entonces, para $c = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} (cf + g)(3) &= 1 \cdot f(3) + g(3) \\ &= 1 + f(-5) + 1 + g(-5) \\ &= 2 + f(-5) + g(-5) \\ &= 2 + (f + g)(-5) \\ &\neq 1 + (f + g)(-5). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto dado no es un subespacio de V .

- (d) Todas las
- f
- tales que
- $f(-1) = 0$
- ;

Respuesta.- Sean, f y g dos funciones en V que satisfacen la condición inicial; Es decir,

$$f(-1) = 0 = g(-1).$$

Entonces, para algún $c \in R$, se tiene

$$\begin{aligned} (cf + g)(-1) &= cf(-1) + g(-1) \\ &= c \cdot 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto dado es un subespacio de V .

- (e) Todas las
- f
- que son continuas.

Respuesta.- Sea f y g dos funciones continuas en V . Entonces, para algún $c \in R$, cf es continua. Lo mismo pasa para $f + c$, ya que la suma de funciones continuas es también continua.

3. ¿Pertenece el vector $(3, -1, 0, -1)$ al subespacio de R^5 generado por los vectores $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ y $(1, 1, 9, -5)$?

Respuesta.- Por el teorema 3, para que un vector pertenezca a un subespacio generado por un conjunto de vectores, debe ser una combinación lineal de los mismos. Entonces, para el vector $(3, -1, 0, -1)$, tenemos

$$\begin{aligned} (3, -1, 0, -1) &= x(2, -1, 3, 2) + y(-1, 1, 1, -3) + z(1, 1, 9, -5) \\ &= (2x, -x, 3x, 2x) + (-y, y, y, -3y) + (z, z, 9z, -5z) \\ &= (2x - y + z, -x + y + z, 3x + y + 9z, 2x - 3y - 5z). \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones mediante matrices, tenemos

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{array} \right] \quad \frac{R_1}{2} \rightarrow R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{array} \right] \\
 & \begin{array}{l} R_2 + R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4 - 2R_1 \rightarrow R_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array} \right] \\
 & 2R_2 \rightarrow R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array} \right] \\
 & \begin{array}{l} R_3 - \frac{5}{2}R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 + 2R_2 \rightarrow R_4 \\ R_1 + \frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Ya que $0 \neq -7$ y $0 \neq -2$, el vector $(3, -1, 0, -1)$ no pertenece al subespacio generado por los vectores $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ y $(1, 1, 9, -5)$.

4. Sea W