1

Diferenciación

Teorema 1.1. Si f es una función constante, $f(x) = c$, entonces
$$f'(a) = 0 \text{ para todo número } a.$$

Demostración.-
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(c+h) - c}{h} = 0.$$

Teorema 1.2. Si f es la función identidad, $f(x) = x$, entonces
$$f'(a) = 1 \text{ para todo número } a.$$

Demostración.-
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Teorema 1.3. Si f y g son diferencibles en a, entonces $f + g$ es también diferenciable en a, y
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Demostración.-
$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - [f(a) + g(a)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= f'(a) + g'(a).
\end{aligned}$$

Teorema 1.4. Si f y g son diferenciables en a, entonces $f \cdot g$ es también diferenciable en a, y

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h)\,(g(a+h) - g(a))}{h} + \frac{(f(a+h) - f(a))\,g(a)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} f(a+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(a) \\
&= f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a).
\end{aligned}$$

Observemos que hemos utilizado el hecho de que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Teorema 1.5. Si $f(x) = cf(x)$ y f es diferenciable en a, entonces g es diferenciable en a, y

$$g'(a) = c \cdot f'(a).$$

Demostración.- Si $h(x) = c$, de manera que $g = h \cdot f$, entonces,

$$\begin{aligned}
g'(a) &= (h \cdot f)'(a) \\
&= h(a) \cdot f'(a) + h'(a) \cdot f(a) \\
&= c \cdot f'(a) + 0 \cdot f(a) \\
&= c \cdot f'(a).
\end{aligned}$$

En particular, $(-f)'(a) = -f'(a)$, por tanto $(f - g)'(a) = (f + [-g])'(a) = f'(a) - g'(a)$.

Teorema 1.6. Si $f(x) = x^n$ para algún número natural n, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{ para todo número } a.$$

Demostración.- La demostración la haremos por inducción sobre n. Para $n = 1$ se aplica simplemente el teorema 2. Supongamos ahora que el teorema es cierto para n, de manera que si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(a) = na^{n-1} \text{ para todo } a.$$

Sea $g(x) = x^{n+1}$. Si $I(x) = x$, la ecuación $x^{n+1} = x^n \cdot x$ se puede escribir como

$$g(x) = f(x) \cdot I(x) \text{ para todo } x.$$

así, $g = f \cdot I$. A partir del teorema 4 deducimos que

$$\begin{aligned} g'(a) &= (f \cdot I)'(a) \\ &= f'(a) \cdot I(a) + f(a) \cdot I'(a) \\ &= na^{n-1} \cdot a + a^n \cdot 1 \\ &= na^n + a^n \\ &= (n+1)a^n, \text{ para todo } a. \end{aligned}$$

Este es precisamente el caso $n+1$ que queríamos demostrar.
Si $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ para algún número natural n, entonces

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1};$$

así es válido tanto para enteros positivos como negativos. Si interpretamos $f(x) = x^0$ como $f(x) = 1$ y $0 \cdot x^{-1}$ como $f'(x) = 0$, entonces se verifica también para $n = 0$.

Teorema 1.7. Si g es diferenciable en a y $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es diferenciable en a, y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Demostración.- Incluso antes de escribir

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h}$$

debemos asegurarnos que esta expresión tiene sentido; es necesario comprobar que $(1/g)(a+h)$ está definido para valores suficientemente pequeños de h. Para ello son necesarias solamente dos observaciones. Como g es, por hipótesis, diferenciable en a, se deduce del teorema 9-1 que g es continua en a. Como $g(a) \neq 0$, deducimos también, a partir del teorema 6-3, que existe un $\delta > 0$ tal que $g(a+h) \neq 0$ para $|h| < \delta$. Por tanto, $(1/g) = (a+h)$ tiene sentido para valores de h suficientemente pequeños, y así podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{g(a+h)} - \dfrac{1}{g(a)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h\,[g(a) \cdot g(a+h)]} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(a) \cdot g(a+h)} \\ &= -g'(a) \cdot \frac{1}{[g(a)]^2}. \end{aligned}$$

Teorema 1.8. Si f y g son diferenciables en a y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en a, y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Demostración.- Como $f/g = f \cdot (1/g)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2} \\
&= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.9 (Regla de la cadena)**.** Si g es diferenciable en a y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a).$$

Demostración.- Definamos una función ϕ de la manera siguiente:

$$\phi(h) = \begin{cases} \dfrac{f[g(a+h)] - f[g(a)]}{g(a+h) - g(a)}, & \text{si } g(a+h) - g(a) \neq 0 \\ \\ f'[g(a)], & \text{si } g(a+h) - g(a) = 0. \end{cases}$$

Se intuye fácilmente que ϕ es continua en 0: cuando h es pequeño, $g(a+h) - g(a)$ también es pequeño, de manera que si $g(a+h) - g(a)$ no es 0, entonces $\phi(h)$ se aproximará a $f'[g(a)]$; y si es 0 entonces $\phi(h)$ es igual a $f'[g(a)]$, lo que es mejor todavía. Ya que la continuidad de ϕ es el punto crucial de toda la demostración, vamos a desarrollar rigurosamente este argumento intuitivo.