# Ejercicios Capitulo 7

Christian Limbert Paredes Aguilera

2022-11-21

## Ejercicios capitulo 7

### 7.1

Una forma de mercadotecnia envía un cuestionario a 1000 residentes de cierto suburbio de una ciudad para determinar sus preferencias como compradores. De los 1000 residentes, 80 responden el cuestionario. ¿Lo anterior constituye una muestra aleatoria? Discutir los méritos de este procedimiento para obtener una muestra aleatoria.

### 7.2

En una planta de armado automotriz se seleccionarán 50 de los primeros 1000 automóviles de un nuevo modelo para ser inspeccionados por el departamento de control de calidad. El gerente de la planta decide inspeccionar un automóvil cada vez que terminan de armarse 20. ¿Este proceso dará como resultado una muestra aleatoria? Comente.

Respuesta.- Dado que el experimento se repite bajo las mismas condiciones, con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Podemos decir que este experimento podría ser sin sesgo.

### 7.3

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituye una muestra aleatoria, obtener las funciones de verosimilitud de las siguientes distribuciones:

#### a)

De Poisson, con parámetro $\lambda$;

Respuesta.- Sea $p(x,\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x}$ para $x = 0,1,2,\ldots$, entonces la función de verosimilitud será

$$L(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!},\ x = 1,2,\ldots$$

#### b)

Hipergeométrica, con parámetro $p$;

Respuesta.- Si p = k/N, puede escribirse la función de probabilidad hipergeométrica como una función de probabilidad binomial y dado que el único parámetro es $p$ entonces, $p(x,n,p) = \dfrac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x},\ x = 0,1,2,\ldots$

**c)**

Uniforme en el intervalo $(a,b)$;

Respuesta.- Sea $\dfrac{1}{b-a}$ para $a \leq x \leq b$ una función de densidad de probabilidad uniforme. Entonces, la función de verosimilitud será:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}$$

**d)**

$N(\mu, \sigma)$

Respuesta.- Sea $f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, la función de densidad de probabilidad. Entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \ldots x_n; \mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum\left[\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \end{aligned}$$

## 7.4

Repetir el ejercicio 7.3 para las siguientes distribuciones:

**a)**

Gama con parámetro $\alpha$ y $\theta$.

Respuesta.- Sea, $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}$ la distribución de densidad gama, entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \ldots x_n; \alpha, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_i/\theta} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_1/\theta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_2/\theta} \cdots \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_n/\theta} \\ &= \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}\right)^n \cdot e^{\left(-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta}\right)}. \end{aligned}$$

**b)**

Weibull con parámetro $\alpha$ y $\theta$.

Respuesta.- Sea $f(x;\alpha,\theta) = \dfrac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\theta)^\alpha}$ la distribución de densidad de probabilidad Weibull, entonces la función de verosimilitud sera:

$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \dots x_n; \alpha, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_i^{\alpha-1} e^{-(x_i/\theta)^\alpha} \\
&= \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_1^{\alpha-1} e^{-(x_1/\theta)^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_2^{\alpha-1} e^{-(x_2/\theta)^\alpha} \cdots \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_n^{\alpha-1} e^{-(x_n/\theta)^\alpha} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\theta^\alpha}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} \cdot e^{\left[-\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\alpha\right]}.
\end{aligned}
$$

## 7.5

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población cuya distribución es normal con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$. De las siguientes, ¿cuáles son estadísticas?

### a)

$\sum X_i - \mu$.

Respuesta.- No es estadística ya que no está definida $X_i$ ni se conoce el valor de $\mu$.

### b)

$\sigma X_1 + \sigma X_2$.

Respuesta.- No es estadística ya que no se conoce el valor de sigma.

### c)

$X_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Respuesta.- Es estadística porque $X_i$ está definida entre 1 y $n$.

### d)

$X_1^2 + X_2^2 - e^{X_3}$.

Respuesta.- Es estadística.

### e)

$\dfrac{X_i}{\sigma},\ i = 1, 2, \dots, n$.

Respuesta.- No es estadística porque no se conoce el valor de $\sigma$.

### f)

$\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

Respuesta.- Es estadística porque es una función completa.

## 7.6

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ $n$ variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente. Mediante el empleo de la función generadora de momentos, demostrar que la suma de estas variables también es una variable aleatoria de Poisson con parámetros $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Respuesta.- Sea,

$$m_{X_i}(t) = e^{\lambda_i (e^t - 1)}$$

la función generadora de momentos de la distribución Poisson, entonces por el teorema 7.1, con $a_i = 1$. La suma de las variables también es una variable aleatoria de Poisson. Es decir, sea

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

de donde,

$$\begin{aligned}
m_Y(t) &= m_{X_1}(t) m_{X_2}(t) \cdots m_{X_n}(t) \\
&= e^{\lambda_1\left(e^t-1\right)} e^{\lambda_2\left(e^t-1\right)} \cdots e^{\lambda_n\left(e^t-1\right)} \\
&= e^{\left[\lambda_1\left(e^t-1\right)+\lambda_2\left(e^t-1\right)+\ldots+\lambda_n\left(e^t-1\right)\right]} \\
&= e^{\left[(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)\left(e^t-1\right)\right]}
\end{aligned}$$

## 7.7

Sean $X_1$ y $X_2$ dos variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros $\lambda_1$ y $\lambda_2$, respectivamente. Demostrar que la diferencia entre $X_1$ y $X_2$ no es una variable aleatoria de Poisson.

Respuesta.- Sea,

$$Y = X_1 - X_2$$

Entonces por el teorema 7.1 con $a_i = 1$,

$$\begin{aligned}
m_Y(t) &= E\left\{e^{t[X_1+(-X_2)]}\right\} \\
&= E\left[e^{tX_1} \cdot e^{(-t)X_2}\right] \\
&= E\left[e^{tX_1}\right] E\left[e^{(-1)X_2}\right] \\
&= m_{X_1}(t) m_{X_2}(-t) \\
&= e^{\lambda_1(t-1)} e^{\lambda_2(-t-1)}
\end{aligned}$$

Por lo que no es una variable aleatoria Poisson.

## 7.8

Sean $X_1$ y $X_2$ dos variables aleatorias independientes binomial con parámetros $n_1$ y $p$, y $n_2$ y $p$, respectivamente. Demostrar que la suma de $X_1$ y $X_2$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $n_1 + n_2$ y $p$.

Respuesta.- Sea la función generadora de momentos:

$$m_X(t) = \left[(1-p) + e^t p\right]^n$$

Entonces, por el teorema 7.1, con a_i=1. La suma de las variables también es una variable aleatoria binomial. Es decir; sea,

$$Y = X_1 + X_2$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) &= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t)\\
&= \left[(1-p)+e^t p\right]^{n_1}\left[(1-p)+e^t p\right]^{n_2}\\
&= \left[(1-p)+e^t p\right]^{n_1+n_2}
\end{aligned}
$$

### 7.9

Sean $X_1$ y $X_2$ dos variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con el mismo parámetro $\theta$. Demostrar que la suma de $X_1$ y $X_2$ es una variable aleatoria gama con parámetros de forma 2 y parámetro de escala $\theta$.

Respuesta.- Sea la función generadora de momentos dado por:

$$m_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$$

Entonces, sea

$$Y = X_1 + X_2$$

de donde,

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) &= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t)\\
&= \frac{\theta}{\theta-t}\cdot\frac{\theta}{\theta-t}\\
&= \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos una variable aleatoria gama con parámetros de forma 2 y parámetro de escala $\theta$.

### 7.10

Para un determinado nivel de ingresos, el Departamento de Hacienda sabe que las cantidades declaradas por concepto de deducciones médicas ($X_1$), contribuciones caritativas ($X_2$) y gastos varios ($X_3$), son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con media $\$400, \$800$ y $\$100$ y desviaciones estándar $\&100, \$250$ y $\$40$, respectivamente.

#### a)

¿Cuàl es la probabilidad de que la cantidad total declarada por concepto de estas tres deducciones, no sea mayor de $1600?

Respuesta.- Sean,

$$
\begin{array}{rcccrcl}
E(X_1) & = & 400 & ; & sd(X_1) & = & 100\\
E(X_2) & = & 800 & ; & sd(X_2) & = & 800\\
E(X_3) & = & 100 & ; & sd(X_3) & = & 100
\end{array}
$$

Por el teorema 7.2, con $a_i = 1$, tenemos

$$
\begin{array}{rclclcl}
E(Y) & = & E(X_1)+E(X_2)+E(X_3) & = & 400+800+100 & = & 1300 \\
\sqrt{sd(Y)} & = & \sqrt{sd^2(X_1)+sd^2(X_2)+sd^2(X_3)} & = & \sqrt{100^2+250^2+40^2} & = & \sqrt{74100}
\end{array}
$$

Lo que implica que,

$$Y \sim N\left(1300, \sqrt{74100}\right)$$

Entonces, la probabilidad de que la cantidad total declarada por concepto de las deducciones dadas no se mayor a \$1600 será:

$$P(Y \leq 1600) = 0.864786$$

```
pnorm(1600,1300,sqrt(74100))
```

```
## [1] 0.864786
```

**b)**

Si una persona con este nivel de ingresos declara por concepto de estas deducciones un total de \$2100, ¿qué tan probable es tener una cantidad igual o mayor a este monto bajo las condiciones dadas?

Respuesta.- Sea $Y \sim N(1300, \sqrt{74100})$. Entonces,

$$P(Y \geq 2100) = 0.001647038$$

```
pnorm(2100,1300,sqrt(74100),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.001647038
```

## 7.11

Una tienda de artículos eléctronicos para el hogar vende tres diferentes marcas de refrigeradores. Sean $X_1, X_2$ y $X_3$ variables aleatorias las cuales representan el volumen de ventas mensuales para cada una de las tres marcas de refrigeradores. Si $X_1, X_2$ y $X_3$ son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con medias \$8000, \$15000 y \$12000, y desviación estándar \$2000 \$5000 y \$3000, respectivamente, obtener la probabilidad de que, para un mes en particular, el volumen de venta total para los tres refrigeradores sea mayor de \$50000.

Respuesta.- Sean,

$$
\begin{array}{rclclcl}
E(Y) & = & E(X_1)+E(X_2)+E(X_3) & = & 8000+15000+12000 & = & 35000 \\
\sqrt{sd(Y)} & = & \sqrt{sd^2(X_1)+sd^2(X_2)+sd^2(X_3)} & = & \sqrt{2000^2+5000^2+3000^2} & = & 6164.414
\end{array}
$$

Lo que implica que,

$$Y \sim N\left(35000, 6164.414\right)$$

Entonces,

$$P(Y \geq 5000) = 0.007480509.$$

```
EY = 8000+15000+12000
sdY = sqrt(2000^2+5000^2+3000^2)
pnorm(50000,EY,sdY,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.007480509
```

### 7.12

En una tienda de servicio el tiempo total del sistema consta de dos componentes (el lapso de tiempo que debe esperar para que el servicio de comienzo ($X_1$) y el lapso de tiempo que este dura ($X_2$)). Si $X_1$ y $X_2$ son variables aleatorias independientes exponencialemente distribuidas con un tiempo medio de 4 minutos cada una, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo total que tarda el sistema en proporcionar el servicio no sea mayor de 15 minutos? (Sugerencia: consulte el ejercicio 7.9.)

Respuesta.- Por el ejercicio 7.9, tenemos

$$m_Y(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^2$$

.

tal que $Y = X_1 + X_2$

### 7.13

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población que tiene una distribución gama con parámetros $\alpha$ y $\theta$. Mediante el uso de la función generadora de momentos, demostrar que la distribución dela media muestral $\overline{X}$ también es de tipo gama, con parámetros de escala y de forma iguales a $n\alpha$ y $\theta/n$ respectivamente.

### 7.14

Mediante el empleo de los resultados de la sección 5.9, generar números aleatorios para las distribuciones binomial y exponencial y usarlos para demostrar el teorema central del límite. De manera específica, para $n = 10$ y $n = 40$, generar 50 muestras de una distribución binomial con $p = 0.4$. Repetir el procedimiento anterior generando 50 muestras de una distribución exponencial con parámetro $\theta = 100$. ¿Se ha demostrado el teorema central del límite en un grado razonable?.

Respuesta.- Sea,

$$Y = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq u \leq p \\ 0 & si \quad p < u \leq 1. \end{cases}$$

cómo obtenemos números aleatorios binomiales. Entonces,

```
binomr = function(n,p){
  set.seed(1)
  v = runif(n)
  x=c()
  for (u in v) {
    if(0<=u & u<=p) {
      x=append(x,1)
    } else if(p<u & u<=1) {
      x=append(x,0)
    }
  }
  return(x)
}
```

```
n10=10
n40=40
p = 0.4
```

```
binom10 = replicate(50,binomr(n10,p))
mean(binom10)
```

```
## [1] 0.4
```

```
binom40 = replicate(50,binomr(n40,p))
mean(binom10)
```

```
## [1] 0.4
```

Por otro lado sea,

$$x = \theta \cdot \ln\left(\frac{1}{1-u}\right)$$

un genedador de números aleatorios para la distribución exponencial, con $\theta = 100$. Entonces,

```
theta=100
exponr=function(n,theta){
  set.seed(1)
  v = runif(n)
  x=c()
  for (u in v) {
    x = append(x,theta*log(1/(1-u)))
  }
  return(x)
}
```

```
exponr10=replicate(50,exponr(n10,theta))
mean(exponr10)
```

```
## [1] 115.5604
```

```
exponr40=replicate(50,exponr(n40,theta))
mean(exponr40)
```

```
## [1] 101.4558
```

Por lo que se demuestra de manera razonable el teorema central del límite.

## 7.15

Para cierta prueba de aptitud se sabe con base a la experiencia que el número de aciertos es 1000 con una desviación estándar de 126. Si se aplica la prueba a 100 personas seleccionadas al azar, aproximar las siguientes probabilidades que involucran a la media muestra $\overline{X}$.

### a)

$P\left(985 < \overline{X} < 1015\right)$

Respuesta.- Sea, $Z = \dfrac{\overline{X} - \theta}{\theta/\sqrt{n}}$, $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(985 < \overline{X} < 1015) &= P\left(985 - \mu < \overline{X} - \mu < 1015 - \mu\right) \\
&= P\left(\frac{985 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{1015 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\frac{985 - 1000}{126/\sqrt{100}} < Z < \frac{1015 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) \\
&= 0.7661407.
\end{aligned}
$$

```r
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(1015,mu,sd/sqrt(n)) - pnorm(985,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.7661407
```

**b)**

$P\left(960 < \overline{X} < 1040\right)$

Respuesta.- Sean $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$
P\left(\frac{960 - 1000}{126/\sqrt{100}} < Z < \frac{1040 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) = 0.9984996.
$$

```r
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(1040,mu,sd/sqrt(n)) - pnorm(960,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.9984996
```

**c)**

$P\left(\overline{X} > 1020\right)$

Respuesta.- Sean $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$
P\left(Z > \frac{1020 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) = 0.05622218.
$$

```r
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(1020,mu,sd/sqrt(n),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.05622218
```

**d)**

$P\left(\overline{X} < 975\right)$

Respuesta.- Sean $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$P\left(Z < \frac{975-1000}{126/\sqrt{100}}\right) = 0.02362084.$$

```
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(975,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.02362084
```

### 7.16

Una contratista piensa comprar una gran cantidad de lámparas de alta intensidad a cierto fabricante. Este asegura al contratista que la duración promedio de las lámparas es de 1000 horas con una desviación estándar igual a 80 horas: El contratista decide comprar las lámparas sólo si una muestra aleatoria de 64 de estas da como resultado una vida promedio de por lo menos 1000 horas. ¿Cuàl es la probabilidad de que el contratista adquiera las lámparas?

Respuesta.- Sean, $\mu = 1000$, $n = 64$ y $\sigma = 80$. Entonces,

$$P\left(Z > \frac{1000-1000}{80/\sqrt{64}}\right) = 0.5.$$

```
mu = 1000
sd = 80
n = 64
pnorm(1000,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.5
```

### 7.17

Un inspector federal de pesos y medidas visita una planta de empacado para verificar que el peso neto de las cajas sea el indicado en estas. El gerente de la planta asegura al inspector que el peso promedio de cada caja es de 750 gr. con una desviación estándar de 5 gr. El inspector selecciona, al azar, 100 cajas y encuentra que el peso promedio es de 748 gr. Bajo estas condiciones, ¿qué tan probable es tener un peso de 748 o menos? ¿Qué actitud debe tomar el inspector?

Respuesta.- Sean, $\mu = 750$, $n = 100$ y $\sigma = 5$. Entonces,

$$P\left(Z < \frac{748-750}{5/\sqrt{100}}\right) = 0.000031671245.$$

```
mu = 750
sd = 5
n = 100
pnorm(748,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 3.167124e-05
```

El inspector confirma que el peso es el que se dio cómo hipótesis.

## 7.18

En la fabricación de cojinetes para motores, se sabe que el diámetro es de 5 cm. con una desviación estándar igual a 0.005 cm. El proceso es vigilado en forma periódica mediante la selección aleatoria de 64 cojinetes, midiendo sus correspondientes diámetros. El proceso no se detiene mientras la probabilidad de que la media muestral se encuentre entre dos límites especificados sea de 0.95. Determinar el valor de estos límites.

Respuesta.- Sean $\mu = 5$, $\sigma = 0.005$, $n = 64$ y $Z_{0.95} = 1.6448$. Entonces

$$P\left(\frac{\theta_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z < \frac{\theta_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.95.$$

Sea $Z_{0.95} = 1.644854$. Igualando $Z = \dfrac{\theta - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.644854$, entonces despejando $\theta$, tenemos

$$\theta = \mu \pm Z \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

Pero dado, que $Z$ se encuentra entre un límite superior e inferior entonces dividimos $Z$ por 2. Es decir,

$$\theta = \mu \pm Z/2 \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{lllll} \theta_1 & = & 5 + 1.6448/2 \cdot 0.005/\sqrt{64} & = & 5.000514. \\ \theta_2 & = & 5 - 1.6448/2 \cdot 0.005/\sqrt{64} & = & 4.999486. \end{array}$$

```
Z = qnorm(0.95)
mu = 5
sigma = 0.005
n = 64
mu+Z/2*sigma/sqrt(n)
```

```
## [1] 5.000514
```

```
mu-Z/2*sigma/sqrt(n)
```

```
## [1] 4.999486
```

## 7.19

En la producción de cierto material para soldar se sabe que la desviación estándar de a tensión de ruptura de este material es de 25 libras. ¿Cuál debe ser la tensión de ruptura promedio del proceso si, con base en una muestra aleatoria de 50 especímenes, la probabilidad de que la media muestral tenga un valor mayor que 250 libras es de 0.95?

Respuesta.- Sean $\sigma = 25$, $n = 50$, $\theta = 250$ y $Z_{0.95} = 1.6448$. Entonces,

$$Z = \frac{\theta - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Despejando $\mu$, tenemos

$$\mu = \theta - Z \cdot \sigma/\sqrt{n} = 250 - 1.6448 \cdot 25/\sqrt{50} = 255.8154.$$

```
Z = qnorm(0.05)
sigma=25
n=50
theta=250
theta-Z*sigma/sqrt(n)
```

```
## [1] 255.8154
```

### 7.20

Genere 50 muestras, cada una de tamaño 25 a partir de una distribución normal con media 60 y desviación estándar 10. Calcule la varianza de cada muestra mediante el empleo de (7.14).

```
set.seed(4)
samples = replicate(50,rnorm(25,60,10))
samples[,49]
```

```
##  [1] 60.33491 45.41503 80.58233 58.98587 70.60089 54.96761 56.57966 54.17480
##  [9] 58.85776 65.05026 40.76087 55.71235 70.13737 70.82118 63.36703 58.00770
## [17] 58.54438 45.96297 76.76807 57.47351 52.66591 78.11288 58.88064 72.62201
## [25] 68.69157
```

Si se muestra una distribución normal con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$, la varianza muestral se define por:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1}.$$

```
muestra = 50

normalr= function(m){
  i=1
  varm = c()
  while(i<=m){
    x0=samples[,i]
    media = mean(x0)
    sum = 0
    for (s in x0) {
      sum = sum+((s-media)^2/(length(x0)-1))
    }
    varm = c(varm,sum)
    i=i+1
  }
  return(varm)
}

normal = normalr(muestra)
```

#### a)

Obtener la media y la varianza de $S^2$ mediante el empleo de los 50 valores calculados. ¿Cómo son estos valores al compararlos con los proporcionados por las extensiones (7.17) y (7.18)?.

Respuesta.-

```
mean(normal)
```

```
## [1] 95.47969
```

```
sqrt(mean(normal))
```

```
## [1] 9.771371
```

```
var(normal)
```

```
## [1] 524.5867
```

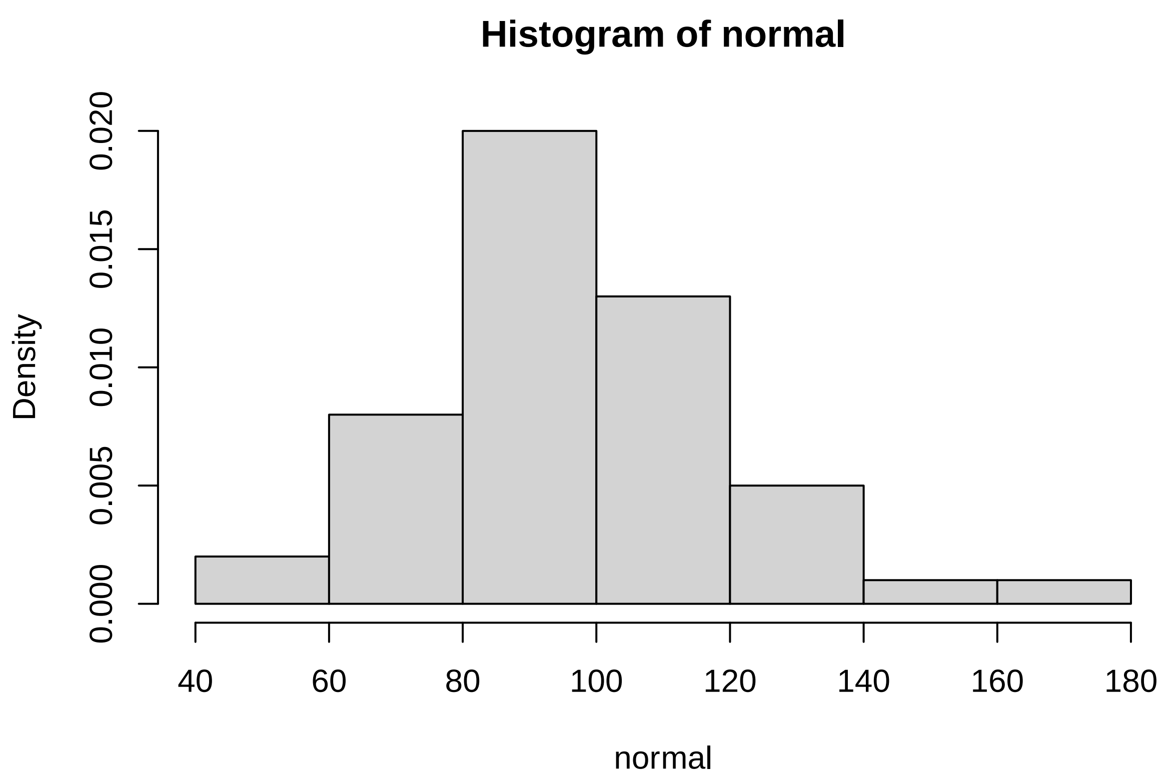
Esto valores son similares a las de las extensiones (7.17) y (7.18).

#### b)

Agrupar los 50 valores calculados de $S^2$ y graficar las frecuencias relativas. Coméntese sobre los resultados.

Respuesta.-

```
hist(normal,freq=FALSE)
```




### 7.21

Repetir el ejercicio 7.20 pero generando los valores a partir de una distribución exponencial con parámetro de escala $\theta = 30$. Haga un comentario sobre sus resultados

```
exponr=function(n,theta){
  v = runif(n)
  x=c()
  for (u in v) {
    x = append(x,theta*log(1/(1-u)))
```

```r
  }
  return(x)
}

samples=replicate(50,exponr(25,30))

muestra = 50
exponr= function(m){
  i=1
  varm = c()
  while(i<=m){
    x0=samples[,i]
    media = mean(x0)
    sum = 0
    for (s in x0) {
      sum = sum+((s-media)^2/(length(x0)-1))
    }
    varm = c(varm,sum)
    i=i+1
  }
  return(varm)
}

expr = exponr(muestra)
```

### a)

Obtener la media y la varianza de $S^2$ mediante el empleo de los 50 valores calculados. ¿Cómo son estos valores al compararlos con los proporcionados por las extensiones (7.17) y (7.18)?.

Respuesta.-

```r
mean(expr)
```

```
## [1] 884.1506
```

```r
sqrt(mean(expr))
```

```
## [1] 29.73467
```

```r
var(expr)
```

```
## [1] 181319.8
```

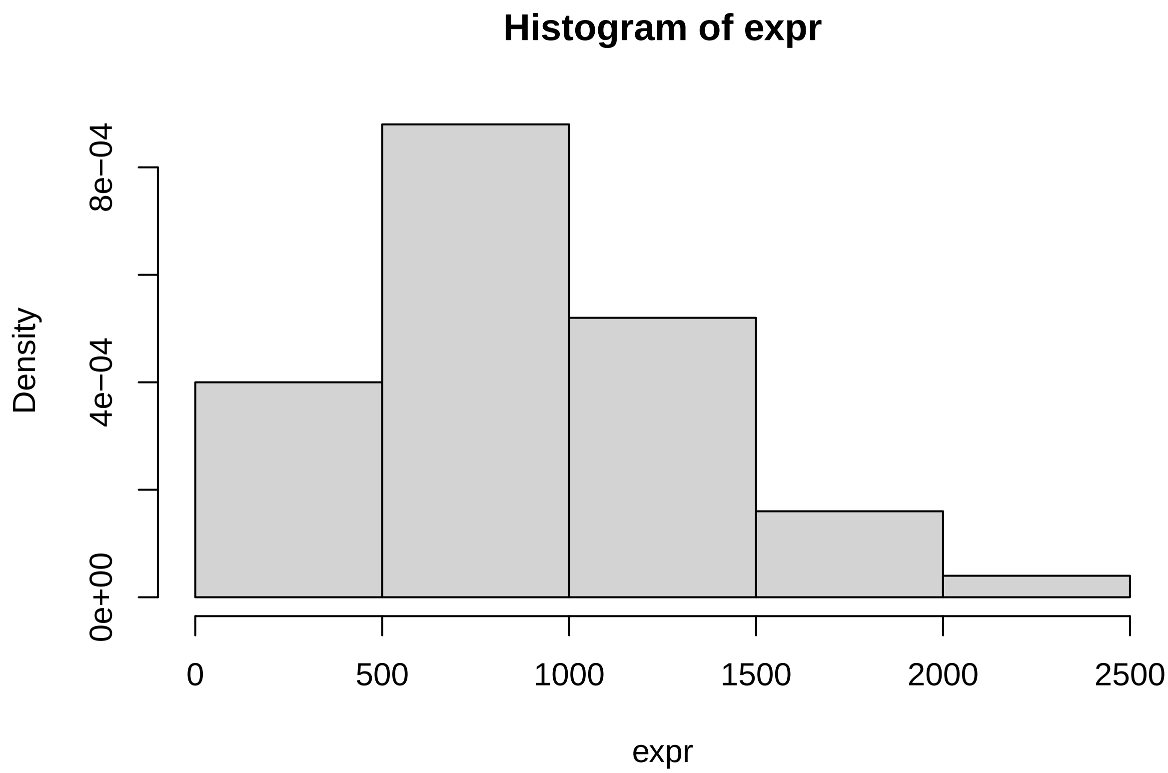
Esto valores son similares a las de las extensiones (7.17) y (7.18).

### b)

Agrupar los 50 valores calculados de $S^2$ y graficar las frecuencias relativas. Coméntese sobre los resultados.

Respuesta.-

```r
hist(expr,freq = FALSE)
```




### 7.22

Para un gerente de planta es muy importante controlar la variación en el espesor de un material plástico. Se sabe que la distribución del espesor del material es normal con una desviación estándar de 0.01 cm. Una muestra aleatoria de 25 piezas de este material da como resultado una desviación estándar muestral de 0.015 cm. Si la varianza de la población es $(0.01)^2 cm^2$. ¿cuál es la probabilidad de que la varianza muestral sea igual o mayor que $(0.015)^2 cm^2$? Por lo tanto, ¿qué puede usted concluir con respecto a la variación de este proceso?.

Respuesta.- Sean, $\sigma = 0.01$ la desviación estándar y$S = 0.015$. Si la varianza de la población es $\sigma^2 = 0.01^2$. Entonces la probabilidad de $S^2 \geq 0.015^2$, cuando el muestreo se lleva a cabo sobre $N(0, 0.01)$ con $n = 25$ es igual a la de

$$
\begin{aligned}
P\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = Y \geq S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{n}\right] &= P\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 = \sigma^2 Y \geq nS^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2\right] \\
&= P\left(Y \geq \frac{nS^2}{\sigma^2}\right) \\
&= P\left(Y \geq \frac{25 \cdot 0.015^2}{0.01^2}\right) \\
&= P(Y \geq 56.25) \qquad (\text{Por el teorema } 7.5, Y \sim X^2_{25}) \\
&= 0.0003365632.
\end{aligned}
$$

```r
pchisq(56.25,df=25,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0003365632
```

Llegamos a la conclusión que la varianza muestral no es probable que sea igual o mayor que $0.015^2\ cm^2$

### 7.23

Si se obtiene una muestra aleatoria de $n = 16$ de una distribución normal con media y varianza desconocidas, obtener $P(S^2/\sigma^2 \le 2.041)$

Respuesta.- La varianza muestral cuando media $\mu$ y varianza $\sigma^2$ son desconocidas vienen dadas por:

$$S^2 = \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1}.$$

Y por el teorema 7.5 la distribución de la variable aleatoria

$$Y = \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

es del tipo chi-cuadrada con $n$ grados de libertad. De donde,

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.041\right) &= P\left(\frac{\sum \frac{(x_i-\mu)^2}{n-1}}{\sum \frac{(x_i-\mu)^2}{Y}} \le 2.041\right) \\
&= P\left(\frac{Y}{n-1} \le 2.041\right) \\
&= P\left[Y \le 2.041(n-1)\right] \\
&= P\left[Y \le 2.041(16-1)\right] \\
&= P(Y \le 30.615) \\
&= 0.9901128.
\end{aligned}$$

```r
pchisq((16-1)*2.041,df=16-1)
```

```
## [1] 0.9901128
```

### 7.24

Si se obtiene una muestra aleatoria de tamaño $n = 21$ de una distribución normal con media y varianza desconocidas, obtener $P(S^2/\sigma^2 \le 1.421)$.

Respuesta.- Similar al ejercicio 7.23 se tiene,

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \le 1.421\right) &= P\left(\frac{\sum \dfrac{(x_i-\mu)^2}{n-1}}{\sum \dfrac{(x_i-\mu)^2}{Y}} \le 1.421\right) \\
&= P\left(\frac{Y}{n-1} \le 1.421\right) \\
&= P\left[Y \le 1.421(n-1)\right] \\
&= P\left[Y \le 1.421(21-1)\right] \\
&= 0.9001761.
\end{aligned}
$$

```
pchisq((21-1)*1.421,df=21-1)
```

```
## [1] 0.9001761
```

### 7.25

Un fabricante de cigarrillos asegura que el contenido promedio de nicotina, en una de sus marcas, es de 0.6 mg por cigarrillo. Una organización independientes mide el contenido de nicotica de 16 cigarrillos de esta marca y encuentra que el promedio y la desviación estándar muestral es de 0.75 y 0.175 mg, respectivamente, de nicotina. Si se supone que la cantidad de nicotina en estos cigarrillos es una variable aleatoria normal, ¿qué tan probable es el resultado muestral dado el dato proporcionado por el fabricante?.

Respuesta.- Por el teorema 7.7, se tiene que

$$
T = \frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}},
$$

tiene una distribución chi-cuadrada con $n-1$ grado de libertad.

Es decir, la función acumulada chi cuadrada vendrá dada por

$$
\begin{aligned}
1-P(T \le t_{1-\alpha,v}) &= 1-\int_{-\infty}^{t_{1-\alpha,v}} f(t;v)\,dt \\
&= 1-\int_{-\infty}^{t_{1-\alpha,v}} \frac{\Gamma\left[\dfrac{(v+1)}{2}\right]}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\dfrac{v}{2}\right)} \left[1+\left(\frac{t^2}{v}\right)\right]^{-\frac{v+1}{2}}\,dt.
\end{aligned}
$$

En nuestro caso particular. Sean $\mu = 0.6$, $\overline{x} = 0.75$, $s = 0.175$ y $n = 16$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
1-P\left(\frac{0.75-0.6}{175/\sqrt{16}}\right) &= 1-P(T\leq 3.428571)\\
&= 1-\int_{-\infty}^{3.428571}\frac{\Gamma\left[\dfrac{(15+1)}{2}\right]}{\sqrt{\pi 15}\,\Gamma\left(\dfrac{15}{2}\right)}\left[1+\left(\frac{3.428571^2}{15}\right)\right]^{-\frac{15+1}{2}}\,dt.\\
&= 0.001866207.
\end{aligned}
$$

```
mu=0.6
mean = 0.75
s=0.175
n=16
t=(mean-mu)/(s/sqrt(n))
t
```

```
## [1] 3.428571
```

```
pt(t,n-1,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.001866207
```

Por lo que concluimos que es muy poco probable el resultado de la organización.

### 7.26

Durante los 12 meses pasados el volumen de ventas de un restaurante fue de \$2000. El gerente piensa que los pròximos 25 dias serán típicos con respecto al volumen de ventas normal. Al finalizar los 25 días, el volumen de ventas y su desviación estándar promedio fueron de \$1800 y \$200, respectivamente. Supóngase que el volumen de ventas diaria es una variable aleatoria normal. Si usted fuese el gerente, ¿tendría alguna razón para creer, con base en este resultado, que hubo una disminución en el volumen de ventas promedio diario?.

Respuesta.- Sean $\mu=2000$, $\overline{x}=1800$, $s=200$ y $n=25$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
1-P\left(\frac{1800-2000}{200/\sqrt{25}}\right) &= 1-P(T\leq -5)\\
&= 1-\int_{-\infty}^{-5}\frac{\Gamma\left[\dfrac{(24+1)}{2}\right]}{\sqrt{\pi 24}\,\Gamma\left(\dfrac{24}{2}\right)}\left[1+\left(\frac{-5^2}{24}\right)\right]^{-\frac{24+1}{2}}\,dt.\\
&= 0.00002.
\end{aligned}
$$

```
mu=2000
mean = 1800
s=200
n=25
t=(mean-mu)/(s/sqrt(n))
pt(t,n-1)
```

```
## [1] 2.078428e-05
```

No se tiene razón para creer que hubo una disminución en el volumen de ventas promedio diario.

## 7.27

El gerente de una refinería piensa modificar el proceso para producir gasolina a partir de petróleo crudo. El gerente hará la modificación sólo si la gasolina promedio que se obtiene por este nuevo proceso (expresada como un porcentaje del crudo) aumenta su valor con respecto al proceso en uso. Con base en un experimento de laboratorio y mediante el empleo de dos muestras aleatorias de tamaño 12, una para cada proceso, la cantidad de gasolina promedio del proceso en uso es de 24.6 con una desviación estándar de 2.3, y para el proceso propuesto fue de 28.2 con una desviación estándar de 2.7. El gerente piensa que los resultados proporcionados por los dos procesos son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con varianza iguales. Con base en esta evidencia, ¿debe adoptarse el nuevo proceso?.

Respuesta.- Dado que $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, si $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$ en el teorema 7.2, la distribución de $\overline{X} - \overline{Y}$ también es normal con media $\mu_X = 0 - 0 = \mu_Y$. Luego, dado que son dos varianzas iguales pero desconocidas, por el teorema 7.6, la distribución de

$$W = \frac{(n_X - 1)S_X^2}{\sigma^2} + \frac{(n_Y - 1)S_Y^2}{\sigma^2}$$

es chi-cuadrada con $n_X + n_Y - 2$ grados de libertad. De donde,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{Z}{\sqrt{X/v}} \\
&= \frac{\dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma}\sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{\sigma^2}}{n_X + n_Y - 2}}} \\
&= \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}\left(\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}\right)}} \\
&= \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}}
\end{aligned}$$

para

$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

Tiene una distribución t de Student con $n_x + n_Y - 2$ grados de libertad. Sabemos que $s_X = 2.3$ y $s_Y = 2.7$ con $n_X = n_Y = 12$ y $\overline{X} = 24.6$ y $\overline{Y} = 28.2$. Por lo tanto,

$$S_p = \sqrt{\frac{(12-1)(2.3)^2 + (12-1)(2.7)^2}{12 + 12 - 2}} = 2.507987.$$

Y

$$T = \frac{2.3 - 2.7 - (0 - 0)}{2.507987\sqrt{\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12}}} = -3.516032.$$

Así,

$$P(T < -3.516032) = 0.002787616.$$

```
meanX=24.6
meanY=28.2
deX2 = 2.3^2
deY2 = 2.7^2
n=12
s = sqrt(((n-1)*deX2+(n-1)*deY2)/(n+n-2))
T = (meanX-meanY)/(s*sqrt(1/12+1/12))
pt(T,df=12-2)
```

```
## [1] 0.002787616
```

Por lo tanto, debe adaptarse el nuevo proceso.

### 7.28

Una organización independiente está intersada en probar la distancia de frenado a una velocidad de 50 mph para dos marcas distintas de automóviles. Para la primera marca se selecionaron nueve automóviles y se probaron en un medio contralado. La media muestral y la desviación estándar fueron de 145 pies y 8 pies, respectivamente. Para la segunda marca se seleccionaron 12 automóviles y la distancia promedio resultó ser de 132 pies y una desviación estándar de 10 pies. Con base en esta evidencia, ¿existe alguna razón para creer que la distancia de frenado para ambas marcas, es la misma?. Supóngase que las distancias de frenado son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con varianzas iguales.

Respuesta.- Sean $n_X = 9$, $\overline{X} = 145$, $de_X = 8$ y $n_Y = 12$, $\overline{Y} = 132$, $de_Y = 10$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \frac{(n_X-1)S_X^2 + (n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2} \\ &= \frac{(9-1)\cdot 8^2 + (12-1)\cdot 10^2}{9+12-2} \\ &= 9.210977. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}} \\ &= \frac{145 - 132 - (0-0)}{9.210977\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12}}} \\ &= 3.200662. \end{aligned}$$

Así,

$$P(T < 3.200662) = 0.9952595.$$

```
meanX=145
meanY=132
deX2 = 8^2
```

```
deY2 = 10^2
nX=9
nY=12
s = sqrt(((nX-1)*deX2+(nY-1)*deY2)/(nX+nY-2))
s
```

```
## [1] 9.210977
```

```
T = (meanX-meanY)/(s*sqrt(1/nX+1/nY))
T
```

```
## [1] 3.200662
```

```
pt(T,df=12-2)
```

```
## [1] 0.9952595
```

Por lo que no existe razón para creer que la distancia de frenado para ambas marcas es la misma.

### 7.29

La variación en el número de unidades diarias de cierto producto, el cual manejan dos operadores $A$ y $B$ debe ser la misma. Con base en muestras de tamaño $n_A = 16$ días y $n_B = 21$ días, el valor calculado de las desviaciones estándar muestrales es de $s_A = 8.2$ unidades y $s_B = 5.8$ unidades. Si el número de estas, manejadas por los dos operadores, por día, son dos variables aleatorias independientes que se encuentran aproximadas, en forma adecuada, por distribuciones normales, ¿existe alguna razón para creer que las varianzas son iguales?.

Respuesta.- Sean $n_A = 16$, $n_B = 21$, $s_A = 8.2$ y $s_B = 5.8$. Entonces, por el teorema 7.8 la variable aleatoria

$$F = \frac{\dfrac{\dfrac{(n_X-1)S_X^2}{\sigma_Y^2}}{n_X-1}}{\dfrac{\dfrac{(n_Y-1)S_y^2}{\sigma_Y^2}}{(n_Y-1)}} = \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$$

tiene una distribución $F$ con $n_X - 1$ y $n_Y - 1$ grados de libertad. Si, suponemos que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, se tiene

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{8.2^2}{5.8^2} = 1.998811.$$

```
nA=16
nB=21
sA=8.2
sB=5.8
f=sA^2/sB^2
pf(f,nA-1,nB-1,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.07411467
```

Dado que $P(F_{15,20} > 1.998811) < 0.10$. Entonces, la razón para creer que las varianzas son iguales es dudosa.

### 7.30

Con base en la información proporcionada en el ejercicio 7.27, ¿existe alguna razón para creer que las varianzas de los dos procesos son iguales?

Respuesta.- Sabemos que $s_X = 2.3$ y $s_Y = 2.7$ con $n_X = n_Y = 12$ y $\overline{X} = 24.6$ y $\overline{Y} = 28.2$. Supongamos que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Entonces,

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{2.3^2}{2.7^2} = 0.7256516.$$

Así,

$$P(F \geq 0.7256516) = 0.6980434.$$

```
nX=12
nY=12
sX=2.3
sY=2.7
f=sX^2/sY^2
pf(f,nX-1,nY-1,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.6980434
```

Dado que la probabilidad de observar un valor de $F$ distinto, es grande, entonces las dos varianzas podrían ser diferentes.