Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Geometría II.**
Ejercicio: 6.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Ejercicio 1. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$**: Si** $\vec{a} \perp \vec{b}$ **y** $\vec{a} \perp \vec{c} \;\Rightarrow\; \vec{a} \parallel \vec{b} \times \vec{c}$**.**

Demostración.- Ya que $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$. Entonces

$$a \circ b = 0 \qquad \text{y} \qquad a \circ c = 0.$$

Luego sabemos que $a \parallel \vec{b} \times \vec{c} \;\Leftrightarrow\; a \circ (a \times c)$, así por propiedades de producto triple tenemos

$$a \circ (b \times c) = c \circ (a \times b) = b \circ (c \times a) = b \circ [-(a \times c)] = 0.$$

Por lo tanto,

$$a \circ (b \times c) = c \circ (0) = b \circ [-(0)] = 0.$$

De esta manera $\vec{a} \parallel \vec{b} \times \vec{c}$.

Ejercicio 2. Si $\vec{b}$ **y** $\vec{c}$ **son linealmente independientes y** $\vec{a}, \vec{b}$ **y** $\vec{c}$ **son linealmente dependientes. Entonces existen números reales** s **y** t **tal que** $\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c}$**.**

Demostración.- Ya que $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes, entonces

$$s_1\vec{b} + t_1\vec{c} = 0. \qquad \text{para } r_1, r_2 = 0.$$

Por otro lado se sabe que $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes, de esta manera obtenemos:

$$r\vec{a} + s_2\vec{b} + t_2\vec{c} = 0, \qquad \text{para todo real } \; r \text{ o } s_2 \text{ o } t_2 \neq 0$$

Luego, sea $r = -1$. De donde,

$$-\vec{a} + s_2\vec{b} + t_2\vec{c} = s_1\vec{b} + s_1\vec{c}$$

Por lo tanto

$$\vec{a} = (s_2 - s_1)\vec{b} + (t_2 - t_1)\vec{c}$$

Así, concluimos que existe números reales $s = (s_2 - s_1)$ y $t = (t_2 - t_1)$ tal que

$$\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c}.$$