# 1

# Límites y continuidad

**Definición 1.1 (La razón promedio de cambio)** *de $y = f(x)$ con respecto a $x$ en el intervalo $[x_1, x_2]$ sabiendo que $\triangle x = x_2 - x_1 = h$ es*

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

## 1.1. Ejercicios

**Razones promedio de cambio**

En los ejercicios 1 a 6, determine la razón promedio de cambio de la función en el intervalo o intervalos dados.

**1.** $f(x) = x^3 + 1$

**a)** $[2, 3]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(3^3 + 1) - (2^3 + 1)}{3 - 2} = 19$

**b)** $[-1, 1]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(1^3 + 1) - ((-1)^3 + 1)}{1 - (-1)} = 1$

**2.** $g(x) = x^2 - 2x$

**a)** $[1, 3]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(3^2 - 2 \cdot 3) - (1^2 - 2 \cdot 1)}{3 - 1} = 2$

**b)** $[-2,4]$

Respuesta.- $$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(4^2-2\cdot 4)-((-2)^2-2\cdot(-2))}{4-(-2)}=0$$

**3.** $h(t)=cot\ t$

**(a)** $[\pi/4,3\pi/4]$

Respuesta.- $$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{cot(\pi/4)-cot(3\pi/4)}{\pi/4-3\pi/4}=\frac{1+1}{\frac{\pi-3\pi}{4}}=\frac{8}{-2\pi}$$

**(b)** $[\pi/6,\pi/2]$

Respuesta.- $$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{cot(\pi/6)-cot(\pi/2)}{\pi/6-\pi/2}=\frac{-3\sqrt{3}}{\pi}$$

**4.** $g(t)=2+\cos t$

**(a)** $[0,\pi]$

Respuesta.- $$\frac{2+\cos\pi-(2+\cos 0)}{\pi-0}=-\frac{2}{\pi}$$

**(b)** $[-\pi,\pi]$

Respuesta.- $$\frac{2+\cos\pi-(2-\cos\pi)}{\pi+\pi}=\frac{3-3}{2\pi}=0$$

**5.** $R(\theta)=\sqrt{4\theta+1};\ [0,2]$

Respuesta.- $$\frac{\sqrt{4*2+1}+1-(\sqrt{4*0+1}+1)}{2-0}=\frac{2}{2}=1$$

**6.** $P(\theta)=\theta^3-4\theta^2+5\theta;\ [1,2]$

Respuesta.- $$\frac{2^3-4\cdot 2^2+5\cdot 2-(1^3-4^2+5)}{2-1}=0$$

**Pendiente de una curva en un punto**

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar *a*) la pendiente de la curva en el punto $P$ dado, y *b*) la ecuación de la recta tangente en $P$

**7.** $y=x^2-5,\quad P(2,-1)$

**a)** Iniciamos con una recta secante que pasa por el punto $(2,-1)$ y el punto cercano $(2+h,(2+h)^2-5)$, luego hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^2-5-(2^2-5)}{2+h-2}=\frac{4h+h^2}{h}=4+h$$

Luego aproximamos $h$ a 0 siendo la pendiente $m=4$.

**b)** La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=4x+c$, luego reemplazamos $(2,-1)$, quedándonos $-1=4\cdot 2+c \implies c=-9$. Por lo tanto

$$y=4x-9$$

**8.** $y=7-x^2, \quad P(2,3)$

**a)** Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2,3)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,7-(2+h)^2\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{7-(2+h)^2-(7-2^2)}{2+h-2}=\frac{7-(2+h)^2-3}{h}=\frac{h(-h-4)}{h}=-h-4$$

Con forme $Q$ se aproxima a $P$ a lo largo de la curva, $h$ se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $-h-4$ se aproxima a $-4$. Tomamos $-4$ como la pendiente de la parábola en $P$.

**b)** La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=-4x+c$, luego reemplazamos $(2,3)$, así $3=-4(2)+c \Longrightarrow c=11$. Por lo tanto

$$y=-4x+11$$

.

**9.** $y=x^2-2x-3, \quad P(2,-3)$

**a)** Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2,-3)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,(2+h)^2-2(2+h)-3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^2-2(2+h)-3-(-3)}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=h+2$$

Con forme $Q$ se aproxima a $P$ a lo largo de la curva, $h$ se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h+2$ se aproxima a 2. Tomamos 2 como la pendiente de la parábola en $P$.

**b)** La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=2x+c$, luego reemplazamos $(2,-3)$, así $-3=2(2)+c \Longrightarrow c=-7$. Por lo tanto

$$y=-2x-7$$

.

**10.** $y=x^2-4x, \quad P(1,-3)$

**a)** Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1,-3)$ y el punto cercano $Q\left[1+h,(1+h)^2-4(1+h)\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(1+h)^2-4(1+h)-(-3)}{1+h-1}=\frac{h^2-2h}{h}=h-2$$

Con forme $Q$ se aproxima a $P$ a lo largo de la curva, $h$ se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h-2$ se aproxima a $-2$. Tomamos $-2$ como la pendiente de la parábola en $P$.

**b)** Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\implies y-y_1=m(x-x_1)\implies y=-2(x-1)+(-3)\implies y=-2x+2-3$$

por lo tanto

$$y=-2x-1$$

**11.** $y=x^3,\quad P(2,8)$

**a)** Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2,8)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,(2+h)^3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^3-8}{2+h-2}=\frac{h^3+6h^2+12h}{h}=h^2+6h+12$$

Con forme $Q$ se aproxima a $P$ a lo largo de la curva, $h$ se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2+6h+12$ se aproxima a 12. Tomamos 12 como la pendiente de la parábola en $P$.

**b)** Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\implies y=m(x-x_1)+y_1\implies y=12(x-2)+8\implies y=12x-24+8$$

por lo tanto

$$y=12x-16$$

**12.** $y=2-x^3,\quad P(1,1)$

**a)** Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1,1)$ y el punto cercano $Q\left[1+h,2-(1+h)^3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{2-(1+h)^3-1}{1+h-1}=\frac{h^3+3h^2+3h}{h}=h^2+3h+3$$

Con forme $Q$ se aproxima a $P$ a lo largo de la curva, $h$ se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2+3h+3$ se aproxima a 3. Tomamos 3 como la pendiente de la parábola en $P$.

**b)** Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 3(x - 1) + 1 \implies y = 3x - 3 + 1$$

por lo tanto

$$y = 3x - 2$$

**13.** $y = x^3 - 12x, \quad P(1, -11)$

**a)** Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1, -11)$ y el punto cercano $Q\left[1 + h, (1 + h)^3 - 12(1 + h)\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(1 + h)^3 - 12(1 + h) + 11}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 - 9h}{h} = h^2 + 3h - 12$$

Con forme $Q$ se aproxima a $P$ a lo largo de la curva, $h$ se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h - 9$ se aproxima a $-9$. Tomamos $-9$ como la pendiente de la parábola en $P$.

**b)** Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = -9(x - 1) - 11 \implies y = -9x + 9 - 11$$

por lo tanto

$$y = -9x - 2$$

**14.** $y = x^3 - 3x^2 + 4, \quad P(2, 0)$

**a)** Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2, 0)$ y el punto cercano $Q\left[2 + h, (2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4 - 0}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 3h^2}{h} = h^2 + 3h$$

Con forme $Q$ se aproxima a $P$ a lo largo de la curva, $h$ se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h$ se aproxima a 0. Tomamos 0 como la pendiente de la parábola en $P$.

**b)** Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 0(x - 2) - 0$$

por lo tanto

$$y = 0$$

**Razones instantáneas de cambio**

**15.** Rapidez de un automóvil. La siguiente figura muestra la gráfica tiempo-distancia de un automóvil deportivo que acelera desde el reposo.

**a)** Determine las pendientes de la secante $PQ_1, PQ_2, PQ_3$ y $PQ_4$, ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

| Q | PQ |
|---|---|
| $Q_1(10, 220)$ | $\dfrac{650-220}{20-10} = 43$ |
| $Q_2(14, 380)$ | $\dfrac{650-380}{20-14} = 45$ |
| $Q_3(17, 480)$ | $\dfrac{650-480}{20-16} = 43$ |
| $Q_4(17, 550)$ | $\dfrac{650-550}{20-18} = 50$ |

Los resultados anteriores son redondeados.

**b)** Después estime la rapidez del automóvil para el tiempo $t = 20s$.

Respuesta.- Tomamos el punto mas cercano a $P$, en este caso $Q_4$ de donde la velocidad vendrá dado aproximadamente por $50m/s$.

**16.**