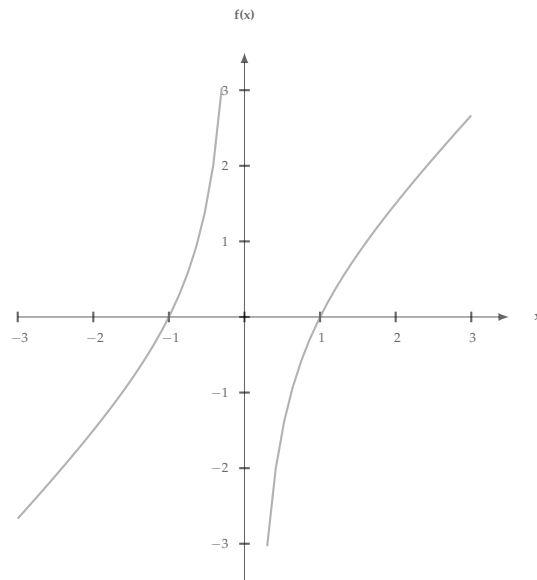


Michael Spivak  
**CALCULUS**

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS  
Y APUNTES**

POR  
**FODE**

**CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA**



**LIBRO EN SU CUARTA EDICIÓN (Ingles)**

**Título de la obra original:**  
**Calculus. Fourth Edition**  
**Edición original en lengua inglesa publicada por:**  
**Publish or Perish, Inc.**

**Sin ninguna revisión de esta obra.**

**Propiedad de esta obra:**  
**CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA**  
**E-mail: soyfode@gmail.com**

**Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.**

# Índice general

<b>1. Propiedades básicas de los números</b>	<b>1</b>
1.1. Propiedades, definiciones y Teoremas . . . . .	1
1.2. Problemas . . . . .	6
<b>2. Distintas clases de números</b>	<b>26</b>
2.1. Problemas . . . . .	26
<b>3. Funciones</b>	<b>48</b>
3.1. Problemas . . . . .	49
3.2. Pares ordenados . . . . .	67
<b>4. Gráficas</b>	<b>68</b>
4.1. Problemas . . . . .	68
4.2. Problemas . . . . .	82
<b>5. Límites</b>	<b>84</b>
5.1. Problemas . . . . .	87
<b>6. Funciones Continuas</b>	<b>108</b>
6.1. Problemas . . . . .	110
<b>7. Tres teoremas fuertes</b>	<b>117</b>
7.1. Problemas . . . . .	120

# Propiedades básicas de los números

## 1.1. Propiedades, definiciones y Teoremas

**Propiedad .1** (Ley asociativa para la suma).

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

**Propiedad .2** (Existencia de una identidad).

$$a + 0 = 0 + a = a$$

**Propiedad .3** (Existencia de inversos para la suma).

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

**Definición 1.1.** Conviene considerar la resta como una operación derivada de la suma: consideremos  $a - b$  como una abreviación de  $a + (-b)$

**Teorema 1.1.** Si un número  $x$  satisface  $a + x = a$  para cierto número  $a$ , entonces es  $x = 0$  (y en consecuencia esta ecuación se satisface también para cualquier  $a$ )

Demostración.- Si  $a + x = a$  entonces  $(-a) + (a + x) = (-a) + a = 0$  de donde  $[(-a) + a] + x = 0$ , por lo tanto  $x = 0$

**Propiedad .4** (Ley conmutativa para la suma).

$$a + b = b + a$$

**Propiedad .5** (Ley asociativa para la multiplicación).

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

**Propiedad .6** (Existencia de una identidad para la multiplicación).

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a; 1 \neq 0$$

**Propiedad .7** (Existencia de inversos para la multiplicación).

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1; \text{ para } a \neq 0$$

**Teorema 1.2.** Si es  $a \cdot b = a \cdot c$  y  $a \neq 0$ , entonces  $b = c$

Demostración.- Si  $a \cdot b = a \cdot c$  y  $a \neq 0$  entonces  $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$  de donde  $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$ , por lo tanto  $b = c$

**Teorema 1.3.** Si  $a \cdot b = 0$  entonces  $a = 0$  ó  $b = 0$

Demostración.- Si  $a \neq 0$  entonces  $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0$  de donde  $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$  por lo tanto  $b = 0$   
(Puede ocurrir que sea a la vez  $a = 0$  y  $b = 0$ ;) esta posibilidad no se excluye cuando decimos  $a = 0$  y  $b = 0$ .

**Definición 1.2.** Se define a la división en función de la multiplicación: el símbolo  $a/b$  significa  $a \cdot b^{-1}$ . Puesto que  $0^{-1}$  no tiene sentido, tampoco lo tiene  $a/0$ ; la división por 0 es siempre indefinida.

**Propiedad .8** (Ley conmutativa para la multiplicación).

$$a \cdot b = b \cdot a$$

**Propiedad .9** (Ley distributiva).

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

**Teorema 1.4.** Determinar cuando es  $a - b = b - a$

Demostración.- Si  $a - b = b - a$  entonces  $(a - b) + b = (b - a) + b = b + (b - a)$  de donde  $a = b + b - a$ , luego  $a + a = (b + b - a) + a = b + b$ , en consecuencia  $a \cdot (1 + 1) = b \cdot (1 + 1)$  y por lo tanto  $a = b$

**Teorema 1.5.** Demostrar que  $a \cdot 0 = 0$

Demostración.- Sea  $0 + 0 = 0$  entonces  $a \cdot (0 + 0) = 0 \cdot a$  de donde  $a \cdot 0 = 0$

**Teorema 1.6.** Demostrar que  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

Demostración.- Notemos que  $(-a) \cdot b = [(-a) + a] \cdot b = 0 \cdot b = 0$ , por lo tanto  $(-a) \cdot b = 0$ . Se sigue inmediatamente [sumando  $-(a \cdot b)$  a ambos miembros] que  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

**Teorema 1.7.** Demostrar que  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Demostración.- Notemos que  $(-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] = (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b = (-a) \cdot [(-b) + b] = (-a) \cdot 0 = 0$ . En consecuencia sumando  $(a \cdot b)$  a ambos lados se obtiene  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

**Ejercicio 1.1.** Resolver  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

$$\begin{aligned}(x - 1) \cdot (x - 2) &= x \cdot (x - 2) + (-1) \cdot (x - 2) \\ &= x \cdot x + x \cdot (-2) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-2) \\ &= x^2 + x[(-2) + (-1)] + 2 \\ &= x^2 - 2x + 2\end{aligned}$$

**Definición 1.3.** Para los números  $a$  que satisfagan:

- $a > 0$ , se llaman **positivos**
- $a < 0$  se llaman **negativos**

**Definición 1.4.**  $a < b$  puede interpretarse como  $b - a > 0$

Conviene considerar el conjunto de todos los números positivos, representados por  $P$

**Propiedad .10** (Ley de tricotomía). Para todo número  $a$  se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

- I)  $a = 0$
- II)  $a$  pertenece al conjunto  $P$
- III)  $-a$  pertenece al conjunto  $P$

**Propiedad .11** (La suma cerrada). Si  $a$  y  $b$  pertenecen a  $P$ , entonces  $a + b$  pertenecen a  $P$ .

**Propiedad .12** (La multiplicación es cerrada). Si  $a$  y  $b$  pertenecen a  $P$ , entonces  $a \cdot b$  pertenece a  $P$

**Definición 1.5.** Estas tres propiedades deben complementarse con las siguientes definiciones.

$$\begin{array}{ll} a > b & \text{si } a - b \text{ pertenece a } P \\ a < b & \text{si } b > a \\ a \geq b & \text{si } a > b \text{ ó } a = b \\ a \leq b & \text{si } a < b \text{ ó } a = b \end{array} \quad \text{Nótese en particular que } a > 0 \text{ si y sólo si } a \text{ pertenece a } P.$$

**Definición 1.6.** Si  $a$  y  $b$  son dos números cualesquiera, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

- I)  $a - b = 0$ ,
- II)  $a - b$  pertenece al conjunto  $p$ ,
- III)  $-(a - b) = b - a$  pertenece al conjunto  $p$ ,

De las definiciones dadas se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

- I)  $a = b$ ,
- II)  $a > b$ ,
- III)  $b > a$ .

**Teorema 1.8.** Si  $a < b$  y  $b < c$  si y sólo si  $a < c$

Demostración.- Si  $a < b$  de modo que  $b - a$  pertenece a  $P$ , entonces evidentemente  $(b + c) + (a + c)$  pertenece a  $P$ ; así si  $a < b$  entonces  $a + c < b + c$ . Igualmente, supongamos  $a < b$  y  $b < c$ . Entonces  $b - a$  y  $c - b$  están en  $P$  así que  $(c - b) + (b - a) = c - a$  está en  $P$ .

**Teorema 1.9.** Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , entonces  $ab > 0$

Demostración.- Por definición  $0 > a$  lo cual significa que  $0 - a = -a$  esta en  $P$ . Del mismo modo,  $-b$  pertenece a  $P$  y, en consecuencia por P12,  $(-a)(-b) = ab$  está en  $P$ . Así pues  $ab > 0$

**Teorema 1.10.** Si  $a \neq 0$  es  $a^2 > 0$

Demostremos por casos.- Si  $a > 0$ , entonces  $a \cdot a > 0$  y  $a^2 > 0$ . Por otro lado, si  $a < 0$ , entonces  $0 - a > 0$  de modo que  $(-a)(-a) > 0$  y por lo tanto  $a^2 > 0$

**Definición 1.7** (Valor absoluto). Se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}$$

**Teorema 1.11.** Para todos los números  $a$  y  $b$  se tiene

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración.- Demostración.- Vamos a considerar cuatro casos:

- (1)  $a \geq 0 \quad b \geq 0$
- (2)  $a \geq 0 \quad b \leq 0$
- (4)  $a \leq 0 \quad b \geq 0$
- (5)  $a \leq 0 \quad b \leq 0$

En el caso (1) tenemos también  $a + b \geq 0$ , esto es evidente; en efecto por definición

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

de modo que en este caso se cumple la igualdad.

En el caso (4) se tiene  $a + b \leq 0$  y de nuevo se cumple la igualdad:

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

En el caso (2), cuando  $a \geq 0$  y  $b \leq 0$ , debemos demostrar que

$$|a + b| \leq a - b$$

Este caso puede dividirse en dos subcasos. Si  $a + b \geq 0$ , entonces tenemos que demostrar que

$$a + b \leq a - b$$

es decir,

$$b \leq -b,$$

lo cual se cumple ciertamente puesto que  $b$  es negativo y  $-b$  positivo. Por otra parte, si  $a + b \leq 0$  debemos demostrar que

$$-a - b \leq a - b$$

es decir

$$-a \leq a,$$

lo cual es verdad puesto que  $a$  es positivo y  $-a$  negativo.

Nótese finalmente que el caso (3) puede despacharse sin ningún trabajo adicional aplicando el caso (2) con  $a$  y  $b$  intercambiados.

Se puede dar una demostración mas corta dado que

$$|a| = \sqrt{a^2} \quad |a|^2 = a^2$$

. Sea  $(|a + b|)^2 = (a + b)^2$  Entonces

$$\begin{aligned} (|a + b|)^2 &= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

De esto podemos concluir que  $|a + b| \leq |a| + |b|$  porque  $x^2 < y^2$  implica  $x < y$

Hay una tercera forma de probar que es utilizando el teorema anterior.

Puesto que  $x = |x|$  ó  $x = -|x|$ , se tiene  $-|x| \leq x \leq |x|$ . Análogamente  $-|y| \leq y \leq |y|$ . Sumando ambas desigualdades se tiene:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

y por tanto en virtud del teorema 4.2 se concluye que:  $|x + y| \leq |x| + |y|$



**1.2. Problemas****1. Demostrar lo siguiente:**

I) Si  $ax = a$  para algún número  $a \neq 0$ , entonces  $x = 1$

Demostración.- Sea  $a \neq 0$  entonces  $(a^{-1} \cdot a)x = a \cdot a^{-1}$  por lo tanto  $1 \cdot x = 1$

II)  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Demostración.- Partamos de  $(x - y)(x + y)$  donde por la propiedad distributiva tenemos  $(x - y)x + (x - y)y$ , luego  $x^2 - xy + xy - y^2$ , por lo tanto por las propiedades de inverso y neutro  $x^2 - y^2$

III) Si  $x^2 = y^2$ , entonces  $x = y$  o  $x = -y$

Demostración.- Dada la hipótesis entonces  $x^2 + [-(y^2)] = y^2 + [-(y^2)]$  y por propiedades de neutro y definición  $x^2 - y^2 = 0$ , luego  $(x - y)(x + y)$  y en virtud del teorema  $ab = 0$  entonces  $a = 0$  o  $b = 0$  no queda  $x - y = 0$  ó  $x + y = 0$ , por lo tanto  $x = y$  ó  $x = -y$

IV)  $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Demostración.- Dado  $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$  entonces por la propiedad distributiva  $(x - y)x^2 + (x - y)xy + (x - y)y^2 = x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 + xy^2 - y^3$  por lo tanto en virtud de las propiedades de inverso y neutro  $x^3 - y^3$ .

V)  $x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

Demostración.-

$$\begin{aligned} & (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \\ &= x(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) - y(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \\ &= x^n + x^{n-1}y + \dots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} - (x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + xy^{n-1} + y^n) \\ &= x^n - y^n \end{aligned}$$

VI)  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Demostración.- Sea  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$  entonces por la propiedad distributiva  $x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$ , por lo tanto  $x^3 + y^3$

**2. ¿Donde está el fallo en la siguiente demostración? Sea  $x = y$ . Entonces**

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 + y^2 &= xy - y^2 \\ (x + y)(x - y) &= y(x - y) \\ x + y &= y \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

El fallo esta en que no se puede dividir un número por 0 sabiendo que  $x = y$

3. Demostrar lo siguiente:

i)  $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ , si  $b, c \neq 0$

Demostración.- Por definición tenemos que  $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ , como  $b, c \neq 0$  entonces  $(ab)(c \cdot c^{-1})$ , por las propiedades asociativa y conmutativa,  $(ac)(b^{-1}c^{-1})$  por lo tanto  $\frac{ac}{bc}$

ii)  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ , si  $b, d \neq 0$

Demostración.-  $(ad + bc)/(bd) = (ad + bc)(bd)^{-1} = (ad + bc)(b^{-1}d^{-1}) = ab^{-1} + cd^{-1} = a/d + c/d$

iii)  $(ab)^1 = a^{-1}b^{-1}$ , si  $a, b \neq 0$  (Para hacer esto hace falta tener presente cómo se ha definido  $(ab)^{-1}$ )

Demostración.- Demostremos que  $a^{-1}b^{-1}(ab) = 1$ , Sea  $a^{-1}b^{-1}(ab) = (a^{-1}a)(b^{-1}b) = 1$

iv)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{db}$ , si  $b, d \neq 0$

Demostración.- Sea por definición  $ab^{-1} \cdot cd^{-1}$  entonces por la propiedad conmutativa  $ac \cdot b^{-1}d^{-1}$ , por lo tanto  $\frac{ac}{bd}$  si  $b, d \neq 0$

**Corolario 1.1.** Si  $c \neq 0$  y  $d \neq 0$  entonces  $(cd^{-1})^{-1} = c^{-1}d$

Demostración.- Por definición de  $a^{-1}$  tenemos que  $(cd^{-1})^{-1} = \frac{1}{cd^{-1}}$ , por el teorema de posibilidad de la división  $1 = (c^{-1}d)(cd^{-1})$  y en virtud de los axiomas de conmutatividad y asociatividad  $1 = (c^{-1}c)(dd^{-1})$ , luego  $1 = 1$ . quedando demostrado el corolario.

v)  $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$  si  $b, c, d \neq 0$

Demostración.- Si  $ab^{-1} \cdot (cd^{-1})^{-1}$  en virtud del anterior corolario se tiene  $ab^{-1} \cdot c^{-1}d$  y por lo tanto  $\frac{ad}{bc}$

vi) Si  $b, c \neq 0$ , entonces  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  si sólo si  $ad = bc$ , Determinar también cuando es  $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$

Demostración.- Sea  $b, c \neq 0$  si sólo si  $ab^{-1} = cd^{-1}$  entonces  $(ab^{-1})b = cd^{-1}b$ , por propiedades asociativa y conmutativa  $a(b \cdot b^{-1}) = (bc)d^{-1}$ ,  $a = (bc)d^{-1}$  luego  $ad = bc(d \cdot d^{-1})$ , por lo tanto  $ad = bc$ .

Por otro lado, si  $ab^{-1} = b^{-1}$  entonces  $a^2 = b^2$ , por lo tanto determinamos que  $a = b$  ó  $a = -b$

4. Encontrar todos los números  $x$  para los que

i)  $4 - x < 3 - 2x$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 4 - x + 2x &< 3 - 2x + 2x \\
\Rightarrow x + 4 &< 3 && \text{Axiomas} \\
\Rightarrow 4 + (-4)x &< 3 + (-4) \\
\Rightarrow x &< -1 && \text{propiedades}
\end{aligned}$$

II)  $5 - x^2 < 8$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (-5) + 5 - x^2 + (-8) &< (-8) + 8 + (-5) \\
\Rightarrow -x^2 - 8 &< -5 \\
\Rightarrow -x^2 - 3 &< 0 \\
\Rightarrow -(-x^2 - 3) &> -0 \\
\Rightarrow x^2 + 3 &> 0
\end{aligned}$$

Sea  $x \neq 0$  entonces por teorema  $x^2 > 0$  y por propiedad se cumple que  $x^2 + 3$  siempre es positivo, y como  $3 > 0$  entonces el valor de  $x$  son todos los números reales.

III)  $5 - x^2 < -2$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (-5) + 5 - x^2 &< -2 + (-5) \\
\Rightarrow -x^2 &< -7 \\
\Rightarrow x^2 &> 7 \\
\Rightarrow x > \sqrt{7} &\quad x < -\sqrt{7}
\end{aligned}$$

IV)  $(x - 1)(x - 3) > 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x - 1 > 0 \quad y \quad x - 3 > 0 \\
x - 1 < 0 \quad y \quad x - 3 < 0 \\
\Rightarrow x > 1 \quad y \quad x > 3 \\
x < 1 \quad y \quad x < 3 \\
\Rightarrow x > 3 \quad x < 1
\end{aligned}$$

V)  $x^2 - 2x + 2 > 0$

Completando cuadrados obtenemos que  $x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 2 > 0$ , después  $(x - 1)^2 + 1^2 > 0$ , luego  $x^2 > 0$ , y en virtud de teorema nos queda que la desigualdad dada satisface a todos los números reales.

VI)  $x^2 + x + 1 > 2$

Aplicando el teorema se tiene  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)}}{2}$ . luego

$$\left( x > \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad y \quad x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad y \quad x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

por lo tanto,

$$x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \cup x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

**vii)**  $x^2 - x + 10 > 16$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 - x - 6 &> 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x+2) &> 0 \\ \Rightarrow x > 3 \quad y \quad x > -2 \\ &x < 3 \quad y \quad x < -2 \\ \Rightarrow x > 3 \quad x < -2 \end{aligned}$$

**viii)**  $x^2 + x + 1 > 0$

Sabemos que  $x^2 > 0$ , para  $x \neq 0$ , luego será verdad para  $x^2 + x + 1 > 0$ , entonces la inecuación se cumple para todo  $x \in \mathbb{R}$

**ix)**  $(x - \pi)(x + 5)(x - 3) > 0$  por la propiedad asociativa  $(x - \pi)[(x + 5)(x - 3)] > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x > \pi \quad \wedge \quad [(x > -5 \wedge x > 3) \vee (x < -5 \wedge x < 3)] \\ &\vee \\ x < \pi \quad \vee \quad [(x < -5 \wedge x > 3) \vee (x > -5 \wedge x < 3)] \\ \Rightarrow x > \pi \quad \wedge \quad (x > 3 \vee x < -5) \\ &\vee \\ x < \pi \quad \wedge \quad -5 < x - 3 \\ \Rightarrow x < \pi \quad \vee \quad -5 < x - 3 \end{aligned}$$

**x)**  $(x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x > \sqrt[3]{2} \quad y \quad x > \sqrt{2} \\ x < \sqrt[3]{2} \quad y \quad x < \sqrt{2} \\ \Rightarrow x > \sqrt{2} \quad x < \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

**xi)**  $2^x < 8$

Podemos reescribir como  $2^x < 2^3$  y por propiedad de logaritmos que se vera mas adelante se tiene que  $x < 3$

**xii)**  $x + 3^x < 4$

Visualizando, está claro que si  $x = 1$  entonces  $1 + 3^2 = 4$ , luego cualquier número menor a 1 debería ser menor a 4, por lo tanto  $x < 1$

**xiii)**  $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{x(1-x)} > 0 \\
&\Rightarrow \frac{1 \cdot [x(1-x)]^2}{x(1-x)} > 0 \cdot [x(1-x)]^2 \\
&\Rightarrow x(1-x) > 0 \\
&\Rightarrow x > 0 \quad y \quad x < 1 \\
&\quad \quad \quad x < 0 \quad y \quad x > 1 \\
&\Rightarrow 0 < x < 1
\end{aligned}$$

$$\text{XIV) } \frac{x-1}{x+1} > 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)^2}{>} > 0(x+1)^2 \\
&\rightarrow (x-1)(x+1) > 0 \\
&\Rightarrow x > 1 \quad y \quad x > -1 \\
&\quad \quad \quad x < 1 \quad y \quad x < -1 \\
&\Rightarrow x > 1 \quad \quad \quad x < -1
\end{aligned}$$

5. Demostrar lo siguiente:

I) Si  $a < b$ , y  $c < d$ , entonces  $a + c < b + d$

Demostración.- Por hipótesis y propiedad de los números reales se tiene  $b - a > 0$  y  $d - c > 0$ , luego  $(b - a) + (d - c) > 0$ , así  $a + c < b + d$

II) Si  $a < b$ , entonces  $-b < -a$

Demostración.- Sea  $-1 < 0$ , por teorema  $-1(a) > -1(b)$ , luego por existencia de elementos neutros  $-a > -b$  por lo tanto  $-b < -a$

III) Si  $a < b$  y  $c > d$ , entonces  $a - c < b - d$

Demostración.- Si  $a < b = b - a > 0$  y  $c > d = d < c = c - d > 0$ , por propiedad de números reales  $(b - a) + (c - d) > 0$ , luego  $(b - d) + (-a + c) > 0$  y en virtud del teorema 1.19 y definición  $(b - d) - (a - c) > 0$ , por lo tanto  $a - c < b - d$

IV) Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$

Demostración.- Por propiedad de números reales  $c(b - a) > 0$ , luego  $bc - ac > 0$ , así  $ac < bc$

v) Si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac > bc$

Demostración.- Sea  $b - a > 0$  y  $0 - c > 0$ , entonces  $-c(b - a) > 0$ , luego  $ac - bc > 0$ , así  $ac > bc$

vi) Si  $a > 1$  entonces  $a^2 > a$

Demostración.- Sea  $1 < a$  y  $a - 1 > 0$ , por propiedad  $a(a - 1) > 0 = a^2 - a > 0$ , luego  $a < a^2$  y  $a^2 > a$

vii) Si  $0 < a < 1$ , entonces  $a^2 < a$

Demostración.- La demostración es similar al teorema 2.14. Por definición  $0 < a$  y  $a < 1$  por lo tanto  $1 - a > 0$  y  $a(1 - a) > 0$ ,  $a^2 < a$ .

viii) Si  $a \leq a < b$  y  $0 \leq c < d$ , entonces  $ac < bd$

Demostración.- Tenemos que  $a \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $a < d$  y  $a < b$ , en virtud de teorema  $ac \leq bc$  y  $ac \leq ad$  (cabe recalcar que por hipótesis podría dar el caso de  $0 \leq 0$  por ello el símbolo " $\leq$ ") por lo tanto  $bc - ac \geq 0$  y  $ad - ac \geq 0$ . luego  $ac - ac \leq ad + bc$  y  $-ad - bc \leq -2ac$ .

Por otro lado sea  $b - a > 0$  y  $d - c > 0$  entonces  $(b - a)(d - c) > 0$  y  $db - ad - bc + ac > 0$ . Si  $-ad - bc \leq -2ac$  entonces  $db - 2ac + ac > 0$  así  $ac < bd$ .

ix) Si  $0 \leq a < b$ , entonces  $a^2 < b^2$ .

Demostración.- Por el problema anterior si  $0 \leq a < b$  entonces  $a \cdot a < b \cdot b$  y  $a^2 < b^2$

x) Si  $a, b \geq 0$  y  $a^2 < b^2$ , entonces  $a < b$

Demostración.- Si  $b^2 - a^2 > 0$ , por teorema  $(b - a)(b + a) > 0$ , luego  $(b - a > 0 \wedge b + a > 0) \vee (b - a < 0 \wedge b + a < 0)$ . Sea  $a, b \geq 0$  queda  $(b - a > 0 \wedge b + a > 0)$  por lo tanto  $a < b$ .

6. a) Demostrar que si  $0 \leq x < y$  entonces  $x^n < y^n$

Demostración.- Sea  $ac < bd$ ,  $x^2 = a$ ,  $y^2 = b$  y  $c = x$ ,  $d = x$  entonces  $x \cdot x \cdot x < y \cdot y \cdot y$ . Si aplicamos  $n$  veces dicho teorema  $x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x < y \cdot y \cdot y \cdot \dots \cdot y$  se tiene  $x^n < y^n$

b) Demostrar que si  $x < y$  y  $n$  es impar, entonces  $x^n < y^n$

Demostración.- Si consideramos  $x \geq 0$  ya quedo demostrado anteriormente. Ahora consideremos el caso donde  $x < y \leq 0$ , por lo tanto  $0 \leq -y < -x$ , así por la parte a)  $-y^n < -x^n$ , que significa que  $n$  es impar, y por lo tanto  $x^n < y^n$ . Finalmente si  $x < 0 \leq y$  entonces  $x^n < 0 \leq y^n$ , ya que  $n$  es impar. Así queda demostrado la proposición dada.

c) Demostrar que si  $x^n = y^n$  y  $n$  es impar, entonces  $x = y$

Demostración.- Sea  $n = 2k - 1$  y  $x^n = y^n$  entonces  $x^{2k-1} - y^{2k-1} = 0$  y por teorema  $(x^{2k-1} - y^{2k-1})(x^{(2k-1)-1} + x^{(2k-1)-2}y^{2k-1} + \dots + x^{2k-1}y^{(2k-1)-2} + y^{(2k-1)-1}) = 0$ . Sea  $x, y \neq 0$  entonces por la propiedad de existencia de recíproco o inverso  $x - y = 0$  por lo tanto  $x = y$

d) Demostrar que si  $x^n = y^n$  y  $n$  es par, entonces  $x = y$  ó  $x = -y$

Demostración.- Si  $n$  es par, entonces  $x, y \geq 0$  y  $x^n = y^n$ , luego  $x = y$ . Además, si  $x, y \leq 0$  y  $x^n = y^n$ , entonces  $-x, -y \geq 0$  y  $(-x)^n = (-y)^n$ , por lo tanto  $x = y$ . La única posibilidad es que  $x$  e  $y$  sea positivo y el otro negativo. En este caso,  $x$  e  $-y$  son ambos positivos o negativos. Además  $x^n = (-y)^n$ , dado que  $n$  es par se sigue de los casos anteriores que  $x = -y$ .

7. Demostrar que si  $0 < a < b$ , entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

Demostración.-

1.  $a < \sqrt{ab}$

Si  $4a < b$  entonces  $a^2 < ab$  y por raíz cuadrada dado que  $a, b > 0$  entonces  $a < \sqrt{ab}$

2.  $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

En vista de que  $a, b > 0$  y  $a < b$  entonces  $a - b > 0$ ,  $(a - b)^2 > 0$  por lo tanto,  $a^2 - 2ab + b^2 > 0 \Rightarrow 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab - 2ab + 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 4ab < (a + b)^2 \Rightarrow ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

3.  $\frac{a+b}{2} < b$

Si  $a < b$  entonces  $a + b < 2b$  por lo tanto  $\frac{a+b}{2} < b$

Y por la propiedad transitiva queda demostrado.

8. Aunque las propiedades básicas de las desigualdades fueron enunciadas en términos del conjunto  $P$  de los números positivos, y  $<$  fue definido en términos de  $P$  este proceso puede ser invertido. Supóngase que las propiedades 10 al 13 se sustituyen por:

**P-10** Cualquier que sean los números  $a$  y  $b$ , se cumple una y sólo una de las relaciones siguientes

- $a = b$
- $a < b$
- $b < a$

**P-11** Cualquiera que sean  $a, b$  y  $c$ , si  $a < b$  y  $b < c$ , entonces  $a < c$ .

**P-12** Cualquiera que sean  $a, b$  y  $c$ , si  $a < b$ , entonces  $a + c < b + c$ .

**P-13** Cualquiera que sean  $a, b$  y  $c$ , si  $a < b$ , y  $0 < c$ , entonces  $ac < bc$ .

Demostrar que las propiedades 10 al 13 se pueden deducir entonces como teoremas.

**Demostración.-** Con respecto a **P-11** se tiene  $b - a > 0$  y  $c - b > 0$  de modo que  $c - a > 0$ , por lo tanto  $a < c$ . Luego para **P-12** se tiene  $b - a > 0$ , por propiedad de neutro aditivo  $b - a + c - c > 0$ , en consecuencia  $a + c < b + c$ . Después para **P-13** tenemos  $c(b - a) > 0$  por lo tanto  $ac < bc$ . Por último si  $a < 0$  entonces  $-a > 0$ ; ya que si  $-a < 0$  se cumpliera, se tendría  $0 = a + (-a) < 0$  el cual es un absurdo. En consecuencia, cualquier número  $a$  satisface una de las condiciones  $a = 0, a > 0$  ó  $-a > 0$ . Con esto queda demostrado **P-10**.

9. Dese una expresión equivalente de cada una de las siguientes utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto.

$$(i) \quad |\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}| \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

$$(ii) \quad ||a + b| - |a| - |b|| \Rightarrow |a + b| - |a| - |b|$$

$$(iii) \quad |(|a + b| + |c| - |a + b + c|)| \Rightarrow |a + b| + |c| - |a + b + c|$$

$$(iv) \quad |x^2 - 2xy + y^2| \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2$$

$$(v) \quad |(|\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} - \sqrt{7}|)| \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} - |\sqrt{5} - \sqrt{7}|$$

10. Expresar lo siguiente prescindiendo de signos de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.

(I)  $|a + b| - |b|$

$$\begin{array}{llll} a & \text{si} & a \geq -b & \text{y} & b \geq 0 \\ -a & \text{si} & a \leq -b & \text{y} & b \leq 0 \\ a + 2b & \text{si} & a \geq -b & \text{y} & b \leq 0 \\ -a - 2b & \text{si} & a \leq -b & \text{y} & b \geq 0 \end{array}$$

(II)  $|x| - |x^2|$

$$\begin{array}{llll} x - x^2 & \text{si} & x \geq 0 \\ -x - x^2 & \text{si} & x \leq 0 \end{array}$$

(III)  $|x| - |x^2|$

$$\begin{array}{llll} x - x^2 & \text{si} & x \leq 0 \\ -x - x^2 & \text{si} & x \geq 0 \end{array}$$

(IV)  $a - |(a - |a|)|$

$$\begin{array}{llll} a & \text{si} & a \leq 0 \\ 3a & \text{si} & a \geq 0 \end{array}$$

11. Encontrar todos los números  $x$  para los que se cumple



(I)  $|x - 3| = 8$

$$\begin{array}{rclcl} -8 & = & x - 3 & = & 8 & \text{teorema 4.1} \\ -5 & = & x & = & 11 \end{array}$$

(II)  $|x - 3| < 8$

$$\begin{array}{rclcl} -8 & < & x - 3 & < & 8 & \text{teorema} \\ -5 & < & x & < & 11 \end{array}$$

(III)  $|x + 4| < 2$

$$\begin{array}{rclcl} -2 & < & x + 4 & < & -2 & \text{teorema} \\ -6 & < & x & < & -2 \end{array}$$

(IV)  $|x - 1| + |x - 2| > 1$

Por definición:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \quad (1.2)$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$\text{Si } x \leq 1 \Rightarrow (1 - x) + (2 - x) > 1 \Rightarrow x < 1$$

$$\text{Si } 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow (x - 1) + (2 - x) > 1 \Rightarrow 1 > 1$$

$$\text{Si } x \geq 2 \Rightarrow (x - 1) + (x - 2) > 1 \Rightarrow x > 2$$

Así:  $x < 1 \vee x > 2$

(V)  $|x - 1| + |x + 1| < 2$

Por definición:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ -1 - x & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$\text{Si } x \leq -1 \Rightarrow (1 - x) + (1 - x) < 2 \Rightarrow x > -1$$

$$\text{Si } -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow (1 - x) + (x + 1) < 2 \Rightarrow 2 < 2$$

$$\text{Si } x \geq 1 \Rightarrow (x - 1) + (x + 1) < 2 \Rightarrow x < 1$$

Pero es falso que  $x$  satisface a  $-1 \leq x \leq 1$ , y contradice a que  $x$  satisface a todos los reales, por lo tanto no existe solución

$$(VI) |x - 1| + |x + 1| < 1$$

De la misma manera que el anterior ejercicio no tiene solución para ningún  $x$ .

$$(VII) |x - 1| \cdot |x + 1| = 0$$

Por definición:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ -1 - x & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \quad (1.6)$$

queda comprobar:

$$\text{Si } x \leq -1 \Rightarrow (1 - x) + (-1 - x) = 0 \Rightarrow x \leq -1 \cup x = 1 \cup x = -1$$

$$\text{Si } -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow (1 - x)(x + 1) = 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \cup x = 1 \cup x = -1$$

$$\text{Si } x \geq 1 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

Por lo tanto  $x = 1$  ó  $x = -1$

$$(VIII) |x - 1| \cdot |x + 2| = 3$$

Si  $x > 1$  ó  $x < -2$ , entonces la condición se convierte en  $(x - 1)(x + 2) = 3$  ó  $x^2 + x - 5 = 0$ , cuyas soluciones son según la formula general son  $\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$  y  $\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$ . Puesto que el primer valor es  $x > 1$  y el segundo es  $x < -2$ , ambos son soluciones de  $|x - 1||x + 2| = 3$ . Para  $-2 < x < 1$ , la condición se convierte en  $(1 - x)(x + 2) = 3$  ó  $x^2 + x + 1 = 0$ , la cual carece de soluciones.

12. Demostrar lo siguiente:

$$(I) |xy| = |x| \cdot |y|$$

Demostración.- Si  $|xy|$  Por teorema  $\sqrt{(xy)^2}$  luego por propiedad  $\sqrt{x^2 \cdot y^2}$ , así  $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}$   
y  $|x| \cdot |y|$

$$(II) \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$$

Demostración.- Si  $\left| \frac{1}{x} \right|$  por definición  $\sqrt{(x^{-1})^2}$ , después  $\left( \frac{1}{x} \right)^{2/2}$ , por propiedad  $\frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{x^2}}$ , luego  $\frac{1}{|x|}$

$$(III) \frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right| \text{ si } y \neq 0$$

Demostración.-

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{x^{2/2}}{y^{2/2}} = \left( \frac{x}{y} \right)^{2/2} = \sqrt{\left( \frac{x}{y} \right)^2} = \left| \frac{x}{y} \right|$$

$$(IV) |x - y| \leq |x| + |y|$$

Demostración.- Sea  $(|x - y|)^2 \leq (|x| + |y|)^2$ , entonces:

$$\begin{aligned} (|x - y|)^2 &= (x - y)^2 \\ &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + |-2xy| + |y|^2 && \text{Ya que } -2xy \leq |-2xy| \\ &= |x|^2 + |-2||x||y| + |y|^2 && \text{Por teorema} \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

luego por teorema  $|x - y| \leq |x| + |y|$

$$(V) |x| - |y| \leq |x - y|$$

Demostración.- Su demostración es parecida al anterior teorema,

$$\begin{aligned} (|x| - |y|)^2 &= |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \\ &\leq x^2 - 2xy + y^2 && \text{por el contrareciproco de } |2xy| \geq 2xy \\ &= (x - y)^2 \\ &= |x - y|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $|x| - |y| \leq |x - y|$

$$(VI) ||x| - |y|| \leq |x - y| \text{ (¿ Por qué se sigue esto inmediatamente del anterior teorema ?)}$$

Demostración.- Sea  $\sqrt{(|x| - |y|)^2}$  entonces,

$$\sqrt{(|x| - |y|)^2} = \sqrt{(x^2 - 2|x||y| + y^2)} \leq \sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$$

y por definición se tiene  $|x - y|$

$$(VII) |x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$$

Demostración.- Sea  $\sqrt{(x+y+9)^2}$  entonces,

$$\sqrt{x^2 + z^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2yz} \leq \sqrt{|x|^2 + |z|^2 + |y|^2 + 2|x||y| + 2|x||z| + 2|y||z|}$$

por lo tanto  $\sqrt{(|x| + |y| + |z|)^2}$ . La igualdad se prueba si  $\forall x, y, z \geq 0$  ó  $\forall x, y, z \leq 0$

13. El máximo de dos números  $x$  e  $y$  se denota por  $\max(x, y)$ . Así  $\max(-1, 3) = \max(3, 3)$  y  $\max(-1, -4) = \max(-4, -1) = -1$ . El mínimo de  $x$  e  $y$  se denota por  $\min(x, y)$ . Demostrar que:

$$1. \max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2}$$

$$2. \min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}$$

Derivar una fórmula para  $\max(x, y, z)$  y  $\min(x, y, z)$ , utilizando. por ejemplo,  $\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z))$

Demostración.- Por definición de valor absoluto se tiene:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{si, } x \geq y \\ y - x & \text{si, } x \leq y \end{cases} \quad (1.7)$$

Por lo tanto

$$\blacksquare \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$$\blacksquare \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

La demostración es parecido para para  $\min(x, y)$

Se deriva una formula para  $\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z))$  de la siguiente manera

$$\max(x, \max(y, z)) = \frac{x + \frac{y + z + |y - z|}{2} + \left| x - \frac{y + z + |y - z|}{2} \right|}{2}$$

14. Demostrar:

(a) Demostrar que  $|a| = |-a|$

Demostración.- Si  $a \geq 0$ , para  $|a|^2$  entonces  $a^2$ , luego  $(-a)^2 = | -a |^2$ , así se demuestra que  $|a| = |-a|$ . Luego es evidente para  $a \leq 0$ .

(b) Demostrar que  $-b \leq a \leq b$  si y sólo si  $|a| \leq b$ . En particular se sigue que  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

Demostración.- Sea  $-a \leq b \wedge a \leq b$  entonces por definición de valor absoluto  $|a| = a \leq b$  si  $a \geq 0$ . Y  $|a| = -a \leq b$  si  $a \leq 0$ .

Por otro lado si  $|a| \leq b$ , entonces es claro que  $b \geq 0$ . Pero  $|a| \leq b$  significa que  $a \leq b$  si  $a \geq 0$  como también  $a \leq b$  si  $a \leq 0$ . Análogamente  $|a| \leq b$  significa que  $-a \leq b$ , y en consecuencia  $-b \leq a$ , si  $a \leq 0$  y  $-b \leq a$ , si  $a \geq 0$ , por lo tanto  $-b \leq a \leq b$

(c) Utilizar este hecho para dar una nueva demostración de  $|a + b| \leq |a| + |b|$

Demostración.- Sea  $-|a| \leq a \leq |a|$  y  $-|b| \leq b \leq |b|$  entonces  $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ , de donde  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

15. Demostrar que si  $x$  e  $y$  son 0 los dos, entonces:

■  $x^2 + xy + y^2 > 0$

Demostración.- Sea  $(x - y)^2 > 0$  entonces  $x^2 + y^2 > xy$ . Por otro lado si  $x, y \neq 0$  por teorema  $x^2 + y^2 > 0$ , dado que  $x^2 + y^2 > xy$  entonces se cumple  $x^2 + y^2 + xy > 0$ .

■  $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

Demostración.- Sea  $(x^5 - y^5)^2 > 0$ , por teorema  $[(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)]^2 > 0$ , así  $(x - y)^2(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)^2 > 0$ ,  $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)^2 > 0$ , por lo tanto  $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) > 0$

16. (a)  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$  solamente cuando  $x = 0$  ó  $y = 0$

Demostración.- Sea  $x = 0$  y  $x^2 + xy + y^2$  por teorema  $0 \cdot y = 0$  entonces  $x^2 + y^2$ . Se demuestra de la misma manera para  $y = 0$

(b)  $(x + y)^3 = x^3 + y^3$  solamente cuando  $x = 0$  ó  $y = 0$  ó  $x = -y$

Demostración.- Es evidente para  $x = 0$  é  $y = 0$ . Solo faltaría demostrar para  $x = -y$ . Si  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$  entonces  $(x + y)^3 = x^3 + 3(-y)^2y + 3(-y)y^2 + y^3 = x^3 + 3y^3 + 3(-y)^3 + y^3$ , por lo tanto  $x^3 + y^3$ .

(c) Haciendo uso del hecho que

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \geq 0$$

demostrar que el supuesto  $4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0$  lleva una contradicción.

Demostración.-

$$\begin{aligned} 4^2 + 8xy + 4y^2 &< 2xy \\ 4(x^2 + 2xy + y^2) &< 2xy \\ x^2 + 2xy + y^2 &< xy/2 \end{aligned}$$

Dado que  $2xy < xy/2$  es falso, concluimos que  $4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0$  también es falso y así llegamos a una contradicción.

(d) Utilizando la parte (b) decir cuando es  $(x + y)^4 = x^4 + y^4$

Demostración.- Se tiene  $(x + y)^2(x + y)^2$ , por lo tanto se cumple que  $x^4 + y^4$ , si  $x = 0$  ó  $y = 0$

- (e) Hallar cuando es  $(x + y)^5 = x^5 + y^5$ . Ayuda: Partiendo del supuesto  $(x + y)^5 = x^5 + y^5$  tiene que ser posible deducir la ecuación  $x^3 + 2x^2y + y^3 = 0$ , si  $xy \neq 0$ . Esto implica que  $(x + y)^3 = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$ .

El lector tendría que ser ahora capaz de intuir cuando  $(x + y)^n = x^n + y^n$ .

Demostración.- Si  $x^5 + y^5 = (x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ , entonces  $0 = 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4$   $0 = 5xy(x^3 + 2x^2y + y + 2xy^2 + y^3)$ . Así  $x^3 + 2x^2y + y + 2xy^2 + y^3 = 0$ . restando esta ecuación de  $(x + y)^3 = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$  obtenemos,  $(x + y)^3 = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$ . Así pues, ó bien  $x + y = 0$  ó  $(x + y)^2 = xy$ ; la última condición implica que  $x^2 + xy + y^2 = 0$ , con lo que  $x = 0$  ó  $y = 0$ . por lo tanto  $x = 0$  ó  $y = 0$  ó  $x = -y$ .

17. (a) El valor mínimo de  $2x^2 - 2x + 4$

Para poder hallar el valor mínimo debemos llevar la ecuación a su forma canónica es decir,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + 4 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 4 \\ &= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + 4 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4 \end{aligned}$$

El mínimo valor posible es  $\frac{23}{8}$ , cuando  $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 0$  ó  $x = \frac{3}{4}$

- (b) El valor mínimo de  $x^2 - 3x + 2y^2 + 4y + 2$

$$x^2 - 3x + 2y^2 + 4y + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2(y + 1)^2 - \frac{9}{4}$$

así el valor mínimo es  $-\frac{9}{4}$ , cuando  $x = \frac{3}{2}$  y  $y = -1$

- (c) Hallar el valor mínimo de  $x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 6y + 7$

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 6y + 7 &= x^2 + 4(y - 1)x + 5y^2 - 6y + 7 \\ &= [x + 2(y - 1)]^2 + 5y^2 - 6y + 7 - 4(y - 1)^2 \\ &= [x + 2(y - 1)]^2 + (y + 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

Así el valor mínimo es 2, cuando  $y = -1$  y  $x = -2(y - 1) = 4$

18. (a) Supóngase que  $b^2 - 4c \geq 0$ . Demostrar que los números

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

satisfacen ambos la ecuación  $x^2 + bx + c = 0$

Demostración.- Para probar que satisfaga a la ecuación dada, podemos empezar a completar al

cuadrado de la siguiente manera:  $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ , así  $\left(x^2 + \frac{b}{2}\right)^2 = -c + \frac{b^2}{4}$ .

Por existencia de raíz cuadrada de los números reales no negativos  $x + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}}$ , luego  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ .

- (b) Supóngase que  $b^2 - 4c < 0$ . Demostrar que no existe ningún número  $x$  que satisfaga  $x^2 + bx + c = 0$ ; de hecho es  $x^2 + bx + c > 0$  para todo  $x$ .

Demostración.- Tenemos

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \geq c - \frac{b^2}{4}$$

pero por hipótesis  $c - \frac{b^2}{4} > 0$ , así  $x^2 + bx + c > 0$  para todo  $x$ .

- (c) Utilizar este hecho para dar otra demostración de que si  $x$  e  $y$  no son ambos 0, entonces  $x^2 + xy + y^2 > 0$

Demostración.- Aplicando la parte b con  $y$  para  $b$  e  $y^2$  para  $c$ , tenemos  $b^2 - 4c = y^2 - 4y^2 < 0$  para  $x \neq 0$ , entonces  $x^2 + xy + y^2 > 0$  para todo  $x$ .

- (d) ¿Para qué número  $\alpha$  se cumple que  $x^2 + \alpha xy + y^2 > 0$  siempre que  $x$  e  $y$  no sean ambos 0?

Demostración.-  $\alpha$  debe satisfacer  $(\alpha y)^2 - 4y^2 < 0$ , o  $\alpha^2 < 4$ , o  $|\alpha| < 2$

- (e) Hállese el valor mínimo posible de  $x^2 + bx + c$  y de  $ax^2 + bx + c$ , para  $a > 0$

Demostración.- Por ser

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \geq c - \frac{b^2}{4},$$

y puesto que  $x^2 + bx + c$  tiene el valor  $c - \frac{b^2}{4}$  cuando  $x = -\frac{b}{2}$ , el valor mínimo es  $c - \frac{b^2}{4}$ .  
Después

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

el mínimo es

$$a \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$$

19. El hecho de que  $a^2 \geq 0$  para todo número  $a$ , por elemental que pueda parecer, es sin embargo la idea fundamental en que se basan en último instancia la mayor parte de las desigualdades. La primerísima de todas las desigualdades es la desigualdad de Schwarz:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Las tres demostraciones de la desigualdad de Schwarz que se esbozan más abajo tienen solamente una cosa en común: el estar basadas en el hecho de ser  $a^2 \geq 0$  para todo  $a$ .

- (a) Demostrar que si  $x_1 = \lambda y_1$  y  $x_2 = \lambda y_2$  para algún número  $\lambda$ , entonces vale el signo igual en la desigualdad de Schwarz. Demuéstrese lo mismo en el supuesto  $y_1 = y_2 = 0$ : supóngase ahora que  $y_1$  e  $y_2$  no son ambos 0 y que no existe ningún número  $\lambda$  tal que  $x_1 = \lambda y_1$  y  $x_2 = \lambda y_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} 0 &< (\lambda y_1 - x_1)^2 + (\lambda y_2 - x_2)^2 \\ &= \lambda^2(y_1^2 + y_2^2) - 2\lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2) + (x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Utilizando el teorema anterior, completar la demostración de la desigualdad de Schwarz.

Demostración.- Primero, Si  $x_1 = \lambda y_1$  y  $x_2 = \lambda y_2$ , entonces reemplazando en la desigualdad de Schwarz,  $\lambda \cdot (y_1)^2 + \lambda \cdot (y_2)^2 = \sqrt{(\lambda y_1)^2 + (\lambda y_2)^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$  luego por propiedades de raíz se cumple

$$\lambda(y_1^2 + y_2^2) = \sqrt{[\lambda(y_1^2 + y_2^2)]^2}$$

Vemos que también se cumple la igualdad para  $y_1 = y_2 = 0$ .

Por último Si un tal  $\lambda$  no existe, entonces la ecuación carece de solución en  $\lambda$ , de modo que por el teorema 1.25 tenemos,

$$\left[ \frac{2(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{y_1^2 + y_2^2} \right]^2 - \frac{4(x_1^2 + x_2^2)}{y_1^2 + y_2^2} < 0$$

lo cual proporciona la desigualdad de Schwartz.

- (b) Demostrar la desigualdad de Schwarz haciendo uso de  $2xy \leq x^2 + y^2$  (¿Cómo se deduce esto?) con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

primero para  $i = 1$  y después para  $i = 2$ .

Demostración.- En vista de que  $(x - y)^2 \geq 0$ , tenemos  $2xy \leq x^2 + y^2$ . Realizando el respectivo remplazo tenemos:

1)

$$2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2}$$

2)

$$2 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_2^2}{y_1^2 + y_2^2}$$

Luego sumando 1) y 2)

$$2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + 2 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_2^2}{y_1^2 + y_2^2}$$

nos queda

$$\frac{2(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq 2$$



(c) Demostrar la desigualdad de Schwarz demostrando primero que

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

Demostración.- Es fácil ver que la igualdad se cumple,

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1)^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + (x_2y_2)^2 + (x_1y_2)^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + (x_2y_1)^2 = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

Ya que  $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$  entonces,

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2$$

(d) Deducir de cada una de estas tres demostraciones que la igualdad se cumple solamente cuando  $y_1 = y_2 = 0$  ó cuando existe un número  $\lambda$  tal que  $x_1 = \lambda y_1$  y  $x_2 = \lambda y_2$

Demostración.- La parte a) ya prueba el resultado deseado.

En la parte b) la igualdad se mantiene sólo si se cumple en (1) y (2). Sea  $2xy = x^2 + y^2$  sólo cuando  $(x - y)^2 = 0$  es decir  $x = y$  esto significa

$$\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} ; \text{ para } i = 1, 2$$

para que podamos elegir  $\lambda = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} / \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ .

En la parte (c), la igualdad se cumple solamente cuando  $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$ . Una posibilidad es  $y_1 = y_2 = 0$ . Si  $y \leq 0$ , entonces  $x_1 = (x_1y_1)/y_1$  y también  $x_2 = (x_1/y_1)y_1$  análogamente, si  $y_2 \leq 0$ , entonces  $\lambda = x_2/y_2$ .

20. Demostrar que si

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$$

entonces

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \epsilon,$$

$$|(x - y) - (x_0 - y_0)| < \epsilon.$$

Demostración.- primeramente si  $|(x + y) - (x_0 + y_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)|$ , por desigualdad triangular e hipótesis,

$$|(x - x_0) + (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Demostramos de similar manera y por teorema 1.7,

$$|(x - y) - (x_0 - y_0)| = |(x - x_0) - (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

21. Demostrar que si

$$|x - x_0| < \min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)} \right) \quad y \quad |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2(x_0 + 1)}$$

entonces  $|xy - x_0y_0| < \epsilon$ .

La primera igualdad de la hipótesis significa precisamente que:

$$|x - x_0| < 1 \quad y \quad |x - x_0| \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

Demostración.- puesto que  $|x - x_0| < 1$  se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

Así pues

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\ &= |x(y - y_0) + y_0(x - x_0)| \\ &\leq |x| \cdot |y - y_0| + |y_0| \cdot |x - x_0| \\ &< (1 + |x_0|) \cdot \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)} + |y_0| \cdot \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)} \quad \text{ya que } |y_0| \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)} < |y_0| \frac{\epsilon}{2|y_0|} \text{ para } |y_0| \neq 0 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \quad \quad \quad \text{ó } |y_0| \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)} = \frac{\epsilon}{2} \text{ si } |y_0| = 0 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

22. Demostrar que si  $y_0 \neq 0$  y

$$|y - y_0| < \min \left( \frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2} \right),$$

entonces  $y \neq 0$  y

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right|$$

Demostración.- Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

de modo que  $|y| < \frac{|y_0|}{2}$ . En particular,  $y \neq 0$ , y

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}.$$

Así pues

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\epsilon|y_0|^2}{2} = \epsilon$$

23. Sustituir los interrogantes del siguiente enunciado por expresiones que encierren  $\epsilon$ ,  $x_0$  e  $y_0$  de tal manera que la conclusión sea válida:

Si  $y_0$  y

$$|y - y_0| < ? \quad y \quad |x - x_0| < ?$$

entonces  $y \neq 0$  y

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0} \right| < \epsilon$$

Sea  $\left| x \frac{1}{y} - x_0 \frac{1}{y_0} \right| < \epsilon$  entonces  $|x \cdot y^{-1} - x_0 \cdot y_0^{-1}| < \epsilon$  por teorema 4.14

$$|x - x_0| < \min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|y_0^{-1}| + 1)} \right) \quad y \quad |y^{-1} - y_0^{-1}| < \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)}$$

luego por teorema 4.15

$$|y - y_0| < \min \left( \frac{\frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)} \cdot |y_0|^2}{2} \right) = \min \left( \frac{\epsilon \cdot |y_0|^2}{4(|x_0| + 1)} \right)$$

24. Este problema hace ver que la colocación de los paréntesis en una suma es irrelevante. Las demostraciones utilizan la "La inducción matemática"; si no se está familiarizado con este tipo de demostraciones, pero a pesar de todo se quiere tratar este problema, se puede esperar hasta haber visto el capítulo 2, en el que se explican las demostraciones por inducción. Convengamos, para fijar ideas que  $a_1 + \dots + a_n$  denota

$$a_1 + (a_2(a_3 + \dots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n)))) \dots$$

Así  $a_1 + a_2 + a_3$  denota  $a_1(a_2 + a_3)$ , y  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  denota  $a_1(a_2 + (a_3 + a_4))$ , etc.

(a) Demostrar que

$$(a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1} = a_1 + \dots + a_{k+1}$$

Demostración.- Sea  $k = 1$  entonces  $a_1 + a_2 = a_1 + a_2$ . Si la ecuación se cumple para  $k$  entonces

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_{k+1}) + a_{k+2} &= [(a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1}] + a_{k+2} \\ &= (a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2}) \\ &= a_1 + \dots + a_k + (a_{k+1} + a_{k+2}) \\ &= a_1 + \dots + a_{k+2} \end{aligned}$$

(b) Demostrar que si  $n \geq k$ , entonces

$$(a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + \dots + a_n) = a_1 + \dots + a_n$$

Demostración.- Para  $k = 1$  la ecuación se reduce a la definición de  $a_1 + \dots + a_k$ . Si la ecuación se cumple para  $k < n$  entonces,

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_{k+1}) + (a_{k+2} + \dots + a_n) &= ([a_1 + \dots + a_k] + a_{k+1}) + (a_{k+2} + \dots + a_n) && \text{parte (a)} \\ &= (a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + (a_{k+2} + \dots + a_n)) && \text{por propiedad} \\ &= (a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + \dots + a_n) && \text{por definición} \\ &= a_1 + \dots + a_n && \text{hipótesis} \end{aligned}$$

(c) Sea  $s(a_1, \dots, a_k)$  una suma formada con  $a_1, \dots, a_k$ . Demostrar que

$$s(a_1, \dots, a_k) = a_1 + \dots + a_k$$

Demostración.- El aserto es claro para  $k = 1$ . Supóngase que se cumple para todo  $l < k$ , entonces

$$\begin{aligned} s(a_1, \dots, a_k) &= s'(a_1, \dots, a_l) + s''(a_{l+1}, \dots, a_k) \\ &= (a_1 + \dots + a_l) + (a_{l+1} + \dots + a_k) \quad \text{hipótesis} \\ &= a_1 + \dots + a_k \quad \text{parte (b)} \end{aligned}$$

25. Supóngase que por número se entiende sólo el 0 ó el 1 y que  $+$  y  $\cdot$  son las operaciones definidas mediante las siguiente tablas.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

	0	1
0	0	0
1	0	1

Comprobar que se cumplen las propiedades P1-P2, aunque  $1+1=0$

P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 resultan evidentes sin más que observar las tablas. Se presentan ocho casos para P1 y este número puede incluso reducirse: al cumplirse P2, resulta claro que  $a + (b + c) = (a + b) + c$  si  $a, b$  ó  $c$  es 0, de modo que bastará comprobar el caso  $a = b = c = 1$ . Una observación análoga puede hacerse para P5. Finalmente, P9 se cumple para  $a = 0$ , ya que  $0 \cdot b = 0$  para todo  $b$ , y para  $a = 1$ , ya que  $1 \cdot b = b$  para todo  $b$ .

## Distintas clases de números

### 2.1. Problemas

1. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

$$(i) \quad 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demostración.- Sea  $n = k$ :

$$1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

Para  $k = 1$ ,

$$1^2 = \frac{1(1+2)(2+1)}{6}$$

por lo tanto se cumple para  $k = 1$ , Luego para  $k = k + 1$ ,

$$1^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

así cabe demostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \frac{2k^3 + k^2 + 2k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 3k^2 + 6k^2 + 9k + 4k + 6}{6} \\ \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad 1^3 + \dots + n^3 = (1 + \dots + n)^2$$

Demostración.- Sea  $n = 1$  entonces la igualdad es verdadera ya que  $1^3 = 1^2$ . Supongamos que se cumple para algún número  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$1^3 + \dots + k^3 = (1 + \dots + k)^2,$$

Luego suponemos que se cumple para  $k + 1$ ,

$$1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + \dots + (k+1))^2$$

Así solo falta demostrar que

$$\begin{aligned}
(1 + \dots + (k+1))^2 &= (1 + \dots + k)^2 + 2(1 + \dots + k)(k+1) + (k+1)^2 \\
&= (1^2 + \dots + k^2) + 2 \frac{k(k+1)}{2} (k+1) + (k+1)^2 \\
&= 1^3 + \dots + k^3 + (k^3 + 2k^2 + k) + (k^2 + 2k + 1) \\
&= 1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3
\end{aligned}$$

Por lo tanto es válido para cualquier  $n \in \mathbb{Z}^+$

## 2. Encontrar una fórmula para

$$(i) \sum_{i=1}^n (2i-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

$$\begin{array}{rclcl}
1 & = & 1 & = & 1^2 \\
1+3 & = & 4 & = & 2^2 \\
1+3+5 & = & 9 & = & 3^2 \\
1+3+5+7 & = & 16 & = & 4^2 \\
1+3+5+7+9 & = & 25 & = & 5^2
\end{array}$$

$$\text{Por lo tanto } \sum_{i=1}^n (2i-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$$

$$\begin{aligned}
1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 &= [1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2] - [2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2] \\
&= [1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2] - 4[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] \\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n(2n+1)[4n+1-2(n+1)]}{6} \\
&= \frac{2n(2n+1)(2n-1)}{6} \\
&= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}
\end{aligned}$$

**Definición 2.1** (Coeficiente Binomial). Si  $0 \leq k \leq n$ , se define el coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$  por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \text{ si } k \neq 0, n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Esto se convierte en un caso particular de la primera fórmula si se define  $0! = 1$ .

3. (a) Demostrar que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Esta relación de lugar a la siguiente configuración, conocida por triángulo de Pascal: Todo número que no esté sobre uno de los lados es la suma de los dos números que tiene encima: El coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$  es el número  $k$ -ésimo de la fila  $(n+1)$ .

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{kn!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\
 &= \binom{n+1}{k}
 \end{aligned}$$

(b) Obsérvese que todos los números del triángulo de Pascal son números naturales. Utilícese la parte (a) para demostrar por inducción que  $\binom{n}{k}$  es siempre un número natural.

Demostración.- Se ve claramente que  $\binom{1}{1}$  es un número natural. Supóngase que  $\binom{n}{p}$  es un número natural para todo  $p \leq n$ . Al ser:

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \text{ para } p \leq n,$$

se sigue que  $\binom{n+1}{p}$  es un número natural para todo  $p \leq n$ , mientras que  $\binom{n+1}{n+1}$  es también un número natural. Así pues,  $\binom{n+1}{p}$  es un número natural para todo  $p \leq n+1$

(c) Dése otra demostración de que  $\binom{n}{k}$  es un número natural, demostrando que  $\binom{n}{k}$  es el número de conjuntos de exactamente  $k$  enteros elegidos cada uno entre  $1, \dots, n$ .

Demostración.- Existen  $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$   $k$ -tuplas de enteros distintos elegidos entre  $1, \dots, n$ , ya que el primero puede ser elegido de  $n$  maneras, el segundo de  $n-1$  maneras, etc. Ahora bien, cada conjunto formado exactamente por  $k$  enteros distintos, da lugar a  $k!$   $k$ -tuplas, de modo que el número de conjuntos será  $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)/k! = \binom{n}{k}$

(d) Demostrar el **TEOREMA DEL BINOMIO**: Si  $a$  y  $b$  son números cualesquiera, entonces

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}a^{n-j}b^j.$$

El teorema del binomio resulta claro para  $n = 1$ . Sea algún número  $k \in \mathbb{Z}^+$

$$(a + b)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} b^j.$$

de donde suponemos que se cumple para  $k + 1$  por lo tanto

$$(a + b)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{k+1-j} b^j.$$

entonces,

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j \quad \text{por la parte (a)} \end{aligned}$$

con lo que el teorema del binomio es válido para  $n + 1$ . y por lo tanto para  $n \in \mathbb{Z}^+$

(e) Demostrar que

$$(i) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Demostración.- Por el teorema del binomio  $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (1^j)(1^{n-j}) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$

$$(ii) \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots \pm \binom{n}{n} = 0$$

Demostración.- De igual manera por el teorema del binomio  $0 = (1 + (-1))^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}$

$$(iii) \sum_{l \text{ impar}} \binom{n}{l} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = 2^{n-1}$$

Demostración.- Restando (ii) de (i) se tiene que,



$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + \dots + 2\binom{n}{n} = 2^n - 0$$

$$2 \sum_{j \text{ impar}}^n \binom{n}{j} = 2^n$$

$$\sum_{j \text{ impar}}^n \binom{n}{j} = 2^n \cdot 2^{-1}$$

$$\sum_{j \text{ impar}}^n \binom{n}{j} = 2^{n-1}$$

$$(iv) \sum_{l \text{ par}} \binom{n}{l} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = 2^{n-1}$$

Demostración.- La demostración es similar al problema anterior pero esta vez sumamos (i) en (ii)

4. (a) Demostrar que

$$\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}$$

Demostración.- La multiplicación de series formales de potencias se realiza recolectando los términos con las mismas potencias de  $x$ :

$$\left( \sum_{a_k}^{\infty} a_k x^k \right) \left( \sum_{a_k}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k a_j x^j b_{k-j} x^{k-j} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) x^k$$

Tenga en cuenta que los subíndices en la suma interna suman  $k$ , la potencia de  $x$  en la suma externa. Luego aplicando la multiplicación de series de potencias a  $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$  y  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$  de donde

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+n}{k} x^k$$

(Los índices en las sumas a  $\infty$  ya que para  $k > n$ ,  $\binom{n}{k} = 0$ ), Se tiene:

$$(1+x)^m (1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} \right] x^k$$

ya que  $(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$  entonces

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$$

(b) demostrar que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Demostración.- Sea  $m = n$ ,  $l = n$  en la parte (a) y notar que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . de donde se tiene que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n+n}{n}$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

5. \_\_\_\_\_(a)\_\_\_\_\_

Demostrar por inducción sobre  $n$  que

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

si  $r \neq 1$  (Si es  $r = 1$ , el cálculo de la suma no presenta problema alguno).

Demostración.- Sea  $n = 1$  entonces

$$1 + r = \frac{1 - r^2}{1 - r}$$

el cual vemos que se cumple.

Luego

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{r+1}}{1 - r} + r^{r+1} \\ \text{(a)} \qquad \qquad \qquad &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

(b) Deducir este resultado poniendo  $S = 1 + r + \dots + r^n$ , multiplicando esta ecuación por  $r$  y despejando  $S$  entre las dos ecuaciones.

Tenemos  $r \cdot S = r + \dots + r^n + r^{n+1}$ , luego sea  $S - rS$  entonces  $S(1 - r) = 1 - r^{n+1}$  por lo tanto

$$S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

6. La fórmula para  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$  se puede obtener como sigue: Empezamos con la fórmula

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

particularmente esta fórmula para  $k = 1, \dots, n$  y sumando, obtenemos

$$\begin{aligned} 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 &= 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (n+1)^3 - n^3 &= n^2 + 3 \cdot n + 1 \\ \hline (n+1)^3 - 1 &= 3[1^2 + \dots + n^2] + 3[1 + \dots + n] + n \end{aligned}$$

De este modo podemos obtener  $\sum_{k=1}^n k^2$  una vez conocido  $\sum_{k=1}^n k$  (lo cual puede obtenerse mediante un procedimiento análogo). Aplíquese este método para obtener.

(i)  $1^3 + \dots + n^3$

Sea  $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1^4$  entonces

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1, \text{ para } k = 1, \dots, n$$

por hipótesis tenemos  $(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n$ , de modo que

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n+1)^4 - 1 - 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} - n}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

(ii)  $1^4 + \dots + n^4$

Similar al anterior ejercicio partimos de  $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$   $k = 1, \dots, n$

para obtener  $(k+1)^5 - k^5 = 5 \left( \sum_{k=1}^n k^4 \right) + 10 \left( \sum_{k=1}^n k^3 \right) + 10 \left( \sum_{k=1}^n k^2 \right) + 5 \left( \sum_{k=1}^n k \right) + n$ , así

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{(n+1)^5 - 1 - 10 \left( \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} - 10 \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - 5 \frac{n(n+1)(n+2)}{2} - n \right)}{5} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

(iii)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

A partir de

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, \dots, n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

(iv)  $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

De

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}, \quad k = 1, \dots, n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

7. Utilizar el método del problema 6 para demostrar que  $\sum_{k=1}^n k^p$  puede escribirse siempre en la forma

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + Cn^{p-2} + \dots$$

Las diez primeras de estas expresiones son

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

Obsérvese que los coeficientes de la segunda columna son siempre  $\frac{1}{2}$  y que después de la tercera columna las potencias de  $n$  de coeficiente no nulo van decreciendo de dos en dos hasta llegar a  $n^2$  o a  $n$ . Los coeficientes de todas las columnas, salvo las dos primeras, parecen bastante fortuitos, pero en realidad obedecen a cierta regla; encontrarla puede considerarse como una prueba de superperspicacia. Para descifrar todo el asunto, véase el problema 26-17)

Demostración.- Sea  $(k+1)^{p+1}$  entonces por el teorema del binomio:

$$(k+1)^{p+1} = \binom{p+1}{p+1}k^{p+1} + \binom{p+1}{p}k^p + \dots + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{0}k^0$$

$$(k+1)^{p+1} = 1 \cdot k^{p+1} + \binom{p+1}{p}k^p + \dots + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{0}k^0$$

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = (p+1)k^p + \dots + (p+1)k + 1 \cdot k^0$$

Luego sumando para cada  $k = 1, \dots, n$  se tiene:

$$\begin{aligned} 2^{p+1} - 1^{p+1} &= (0+1)1^p + \dots + (p+1)1 + 1 \cdot 1^0 \\ 3^{p+1} - 2^{p+1} &= (p+1)2^p + \dots + (p+1)2 + 1 \cdot 2^0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (n+1)^{p+1} &= (p+1)n^p + \dots + (p+1)n + 1 \cdot 0 \end{aligned}$$

Luego por el anterior problema

$$\begin{aligned} (n+1)^{p+1} &= (p+1) \sum_{k=1}^n k^p + \dots + (p+1) \sum_{k=1}^n k^1 + \sum_{k=1}^n k^0 + k^0 \\ \frac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} &= \sum_{k=1}^n k^p + \frac{\binom{p+1}{p-1}}{(p+1)} \sum_{k=1}^n k^{p-1} + \dots + \frac{(p+1)}{(p+1)} \sum_{k=1}^n k^1 + \frac{1}{(p+1)} \left( \sum_{k=1}^n k^0 + k^0 \right) \end{aligned}$$

Luego asumimos que la proposición es verdad para  $p-1$  donde podríamos escribir como,

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} &= \sum_{k=1}^n k^p + \text{términos que involucran las potencias de } n \leq p \\ \sum_{k=1}^n k^p &= \frac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} + \text{términos que involucran las potencias de } n \leq p \end{aligned}$$

8. Demostrar que todo número natural es o par o impar.

Demostración.- Asumimos que  $n$  es impar o par, entonces debemos probar que  $n+1$  también, es o bien impar o bien par.

Sea  $n$  par entonces  $n = 2k$  para algún  $k$ . Así  $n+1 = 2k+1$  y por definición vemos que es impar.

Luego sea  $n$  impar, entonces  $n = 2k+1$  para algún  $k$ . Por lo tanto  $n+1 = 2k+1+1 = 2k+2 = 2(k+1)$ . Así en cualquiera de los dos casos,  $n+1$  es o bien par o impar.

9. Demostrar que si un conjunto  $A$  de números naturales contiene  $n_0$  y contiene  $k+1$  siempre que contenga  $k$ , entonces  $A$  contiene todos los números naturales  $\geq n_0$ .

Demostración.- Sea  $B$  el conjunto de todos los números naturales  $l$  tales que  $n_0 - 1 + 1$  está en  $A$ . Entonces  $1$  está en  $B$ , y  $l+1$  está en  $B$  si  $l$  está en  $B$ , es decir  $k = n_0 - 1 + l$ , por lo tanto  $k+1 = (n_0 - 1) + (l+1)$  está en  $A$ , lo que implica que  $l+1$  está en  $B$  de modo que  $B$  contiene todos los números naturales, los cuales significa que  $A$  contiene todos los números naturales  $\geq n_0$ .

10. Demostrar el principio de inducción completa a partir del principio de buena ordenación.

Demostración.- Supongamos que  $A$  contiene a  $1$  y que  $A$  contiene a  $n+1$ , si contiene a  $n$ . Si  $A$  no contiene todos los números naturales, entonces el conjunto  $B$  de números naturales que no están en  $A$  es distinto de  $\emptyset$ . Por lo tanto,  $B$  tiene un número natural  $n_0$ . Ahora  $n_0 \neq 0$  ya que  $A$  contiene a  $1$  entonces podemos escribir  $n_0 = (n_0 - 1) + 1$ , donde  $n_0 - 1$  es un número natural. Luego  $n_0 - 1$  no está en  $B$ , entonces  $n_0 - 1$  está en  $A$ . Por hipótesis,  $n_0$  debe estar en  $A$ , entonces  $n_0$  no está en  $B$ , el cual es una contradicción.

11. Demostrar el principio de inducción completa a partir del principio de inducción ordinario.

Demostración.- Se sabe que 1 está en  $B$ . Luego si  $k$  está en  $B$ , entonces  $1, \dots, k$  están todos en  $A$ , de modo que  $k + 1$  está en  $A$  y así  $1, \dots, k + 1$  están en  $A$ , con lo que  $k + 1$  está en  $B$ . Por inducción,  $B = N$ , así que también  $A = N$ .

12. (a) Si  $a$  es racional y  $b$  es irracional ¿es  $a + b$  necesariamente irracional? ¿Y si  $a$  y  $b$  es irracional?

Respuesta.- Si, puesto que si  $a + b$  fuese racional, entonces  $b = (a + b) - a$  sería racional. Luego si  $a$  y  $b$  son irracionales, entonces  $a + b$  podría ser racional, ya que  $b$  podría ser  $r - a$  para algún número racional  $a$ .

- (b) Si  $a$  es racional y  $b$  es irracional, ¿es  $ab$  necesariamente irracional?

Respuesta.- Si  $a = 0$ , entonces  $ab$  es racional. Pero si  $a \neq 0$  entonces  $ab$  no podría ser racional, ya que entonces  $b = (ab) \cdot a^{-1}$  sería racional.

- (c) ¿Existe algún número  $a$  tal que  $a^2$  es irracional pero  $a^4$  racional?

Si existe por ejemplo  $\sqrt[4]{2}$

- (d) ¿Existen dos números irracionales tales que sean racionales tanto su suma como su producto?

Si existen por ejemplo  $\sqrt{2}$  y  $-\sqrt{2}$

13. a) Demostrar que  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{6}$  son irracionales. Indicación: Para tratar  $\sqrt{3}$ , por ejemplo, aplíquese el hecho de que todo entero es de la forma  $3n$  ó  $3n + 1$  ó  $3n + 2$  ¿Por qué no es aplicable esta demostración para  $\sqrt{4}$ ?

Demostración.- Puesto que:

$$\begin{aligned}(3n + 1)^2 &= 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1 \\ (3n + 2)^2 &= 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1\end{aligned}$$

queda demostrado que un número no es múltiplo de 3 si es de la forma  $3n + 1$  ó  $3n + 2$ .

se sigue que  $k^2$  es divisible por 3, entonces  $k$  debe ser también divisible por 3. Supóngase ahora que  $\sqrt{3}$  fuese racional, y sea  $\sqrt{3} = p/q$ , donde  $p$  y  $q$  no tienen factores comunes. Entonces  $p^2 = 3q^2$ , de modo que  $p^2$  es divisible por 3, así que también lo debe ser  $p$ . De este modo,  $p = 3p'$  para algún número natural  $p'$ , y en consecuencia  $(3p')^2 = 3q^2$  ó  $(3p')^2 = q^2$ . Así pues,  $q$  es también divisible por 3, lo cual es una contradicción.

Las mismas demostraciones valen para  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{6}$ , ya que las ecuaciones,

$$\begin{aligned}(5n + 1)^2 &= 25n^2 + 10n + 1 = 5(5n^2 + 2n) + 1 \\ (5n + 2)^2 &= 25n^2 + 20n + 4 = 5(5n^2 + 4n) + 4 \\ (5n + 3)^2 &= 25n^2 + 30n + 9 = 5(5n^2 + 6n + 1) + 4 \\ (5n + 4)^2 &= 25n^2 + 40n + 16 = 5(5n^2 + 8n + 3) + 1\end{aligned}$$

la ecuación correspondiente para los números de la forma  $6n + m$  demuestran que si  $k^2$  es divisible por 5 ó 6, entonces también lo debe ser  $k$ . La demostración falla para  $\sqrt{4}$ , porque  $(4n + 2)^2$  es divisible

por 4.

- b) Demostrar que  $\sqrt[3]{2}$  y  $\sqrt[3]{3}$  son irracionales.

Demostración.- Puesto que,

$$(2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1,$$

se sigue que si  $k^3$  es par, entonces  $k$  es par. Si  $\sqrt[3]{2} = p/q$ , donde  $p$  y  $q$  no tienen factores comunes, entonces  $p^3 = 2q^3$ , de modo que  $p^3$  es divisible por 2, por lo que también lo debe ser  $p$ . Así pues,  $p = 2p'$  para algún número natural  $p'$  y en consecuencia  $(2p')^3 = 2q^3$ , ó  $4(p')^3 = q^3$ . Por lo tanto,  $q$  es también par, lo cual es una contradicción.

La demostración para  $\sqrt[3]{3}$  es análogo, utilizando las ecuaciones.

$$(3n+1)^3 = 27n^3 + 27n^2 + 27n + 1 = 3(9n^3 + 9n^2 + 3n) + 1,$$

$$(3n+2)^3 = 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8 = 3(9n^2 + 18n^2 + 12n + 2) + 2.$$

#### 14. Demostrar que:

- (a)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  es irracional.

Demostración.- Sea  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  racional, entonces  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$  sería racional, luego

$$5 + 2\sqrt{6}$$

y en consecuencia  $\sqrt{6}$  sería racional lo cual es falso.

- (b)  $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$  es irracional.

Demostración.- Sea  $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$  racional, entonces

$$\begin{aligned} [\sqrt{6} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 &= 6 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ &= 11 + 2\sqrt{6}[2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})] \end{aligned}$$

Así,  $\sqrt{6}[2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]$  sería racional, con lo que de igual manera sería,

$$\begin{aligned} \{\sqrt{6}[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]\}^2 &= 6[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 \\ &= 11 + 2\sqrt{6}[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})] \end{aligned}$$

De este modo  $\sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})$  y  $\sqrt{6} - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$  serían racionales, lo que implicaría que  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  fuese racional, en contradicción de la parte a).

15. (a) Demostrar que si  $x = p + \sqrt{q}$ , donde  $p$  y  $q$  son racionales, y  $m$  es un número natural, entonces  $x^m = a + b\sqrt{q}$  siendo  $a$  y  $b$  números racionales.

Demostración.- Sea  $m = 1$  entonces  $(p + \sqrt{q})^1 = a + b\sqrt{q}$ . Supongamos que se cumple para  $m$ , entonces

$$(p + \sqrt{q})^{m+1} = (a + b\sqrt{q})(p + \sqrt{q}) = (ap + bq) + (a + pb)\sqrt{q}$$

donde  $ap + bq$  y  $a + pb$  son racionales.

(b) Demostrar también que  $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$

Demostración.- Similar a la parte a), se cumple para  $m = 1$ . Si es verdad para  $m$ , entonces

$$(p - \sqrt{q})^{m+1} = (a - b\sqrt{q})(p - \sqrt{q}) = (ap + bq) - (a + pb)\sqrt{q}$$

16. (a) Demostrar que si  $m$  y  $n$  son números naturales y  $m^2/n^2 < 2$ , entonces  $(m + 2n)^2 / (m + n)^2 > 2$ ; demostrar, además que

$$\frac{(m + 2n)^2}{(m + n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}$$

Demostración.- Si  $m^2/n^2 < 2$  entonces  $m^2 < 2n^2$ , sumando  $m^2$ ,  $4mn$  y  $2n^2$  tenemos  $2m^2 + 4mn + 2n^2 < 4n^2 + m^2 + 4mn$ , luego  $2(m + n)^2 < (m + 2n)^2$ , así nos queda  $(m + 2n)^2 / (m + n)^2 > 2$

Para la segunda parte podemos partir de  $m^2 - 2n^2 < 0$ , entonces:

$$m^2 - 2n^2 < 0$$

$$m^3 - 2mn^2 < 0 \quad \text{multiplicando por } m$$

$$mn^2 + m^3 + mn^2 - 4mn^2 < 0 \quad \text{escribiendo } mn^2 \text{ de otra manera}$$

$$mn^2 + 2n^3 + m^3 + m^2n + mn^2 - 2m^2n - 4mn^2 - 2n^3 < 0 \quad \text{sumando } 2n^3 \text{ y } 2m^2n$$

$$n^2(m + 2n) + [(m^2 + 2mn + n^2)(m - 2n)] < 0$$

$$n^2(m + 2n)^2 + [(m + n)^2(m + 2n)(m - 2n)] < 0 \quad \text{multiplicando por } m + 2n$$

$$n^2(m + 2n)^2 + [(m + n)^2(m^2 - 4n^2)] < 0$$

$$\frac{n^2(m + 2n)^2 - 4n^2(m + n)^2 + m^2(m + n)^2}{n^2(m + n)^2} < 0 \quad \text{dividimos por } n^2(m + n)^2$$

$$\frac{(m + 2n)^2 - 2(m + n)^2 - 2n^2(m + 2n)^2}{n^2(m + n)^2} < -\frac{m^2}{n^2}$$

$$\frac{(m + 2n)^2}{(m + n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}$$

(b) Demostrar los mismos resultados con todos los signos de desigualdad invertidos.

Demostración.- Quedará de la siguiente forma, Si  $m^2/n^2 > 2$ , entonces  $(m + 2n)^2 / (m + n)^2 < 2$ , luego demostrar que

$$\frac{(m + 2n)^2}{(m + n)^2} - 2 > 2 - \frac{m^2}{n^2}$$



Similar a la parte a) tendremos  $m^2 > 2n^2$ , luego  $2m^2 + 4mn + 2n^2 > 4n^2 + m^2 + 4mn$ , así  $(m + 2n)^2 > 2(m + n)^2$

Después se puede demostrar la segunda parte con facilidad siguiendo el ejemplo a) pero invirtiendo la desigualdad ya que  $n$  y  $m$  son números natural.

- (c) Demostrar que si  $m/n < \sqrt{2}$ , entonces existe otro número racional  $m^2/n^2$  con  $m/n < m'/n' < \sqrt{2}$

Demostración.- Sea  $m_1 = m + 2n$  y  $n_1 = m + n$ , luego elegimos y remplazamos en,

$$\begin{aligned} m' &= m_1 + 2n_1 = 3m + 4n \\ n' &= m_1 + n_1 = 2m + 3n \end{aligned}$$

De donde  $\frac{m}{n} < h$  si y sólo si  $0 < m' - mn' = (3m + 4n)n - (2m + 3n)m = 2(2n^2 - m^2)$ . Es claro para  $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$  que  $2n^2 - m^2 > 0$

Por otro lado tenemos  $\frac{m'}{n'}$  si y sólo si  $0 < 2n'^2 - m'^2 = 2(2m + 3n)^2 - (3m + 4n)^2 = 2n^2 - m^2$ . Como antes,  $2n^2 - m^2 > 0$  se sigue de  $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$

17. Parece normal que  $\sqrt{n}$  tenga que ser irracional siempre que el número natural  $n$  no sea el cuadrado de otro número natural. Aunque puede usarse en realidad el método del problema 13 del capítulo 2 de Michael Spivak para tratar cualquier caso particular, no está claro, sin más, que este método tenga que dar necesariamente resultados, y para una demostración del caso general se necesita más información. Un número natural  $p$  se dice que es un número primo si es imposible escribir  $p = ab$ ; por conveniencia se considera que 1 no es un número primo. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Si  $n > 1$  no es primo, entonces  $n = ab$ , con  $a$  y  $b$  ambos  $< n$ ; si uno de los dos  $a$  o  $b$  no es primo, puede ser factorizado de manera parecido; continuando de esta manera se demuestra que se puede escribir  $n$  como producto de números primos. Por ejemplo,  $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$ .

- a) Conviértase este argumento en una demostración riguroso por inducción completa. (En realidad, cualquier matemático razonable aceptaría este argumento informal, pero ello se debería en parte a que para él estaría claro cómo formularla rigurosamente.)

Un teorema fundamental acerca de enteros, que no demostraremos aquí, afirma que esta factorización es única, salvo en lo que respecta al orden de los factores. Así, por ejemplo, 28 no puede escribirse nunca como producto de números primos uno de los cuales sea 3, ni puede ser escrito de manera que 2 aparezca una sola vez (ahora debería verse clara la razón de no admitir a 1 como número primo.)

demostración.- Supóngase que para todo número  $< n$  puede ser escrito como un producto de primos. Si  $n > 1$  no es primo, entonces  $n = ab$ , para  $a, b < n$ . Pero  $a$  y  $b$  son ambos producto de primos, así que  $n = ab$  lo es también.

- b) Utilizando este hecho, demostrar que  $\sqrt{n}$  es irracional a no ser que  $n = m^2$  para algún número natural  $m$ .

Demostración.- Sea  $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ , entonces  $nb^2 = a^2$ , luego si descomponemos en producto de factores primos,  $nb^2$  y  $a^2$  deberían coincidir. Ahora según lo explicado anteriormente, cada número primo debe aparecer un número par de veces en  $a^2$  y  $b^2$ , y por lo tanto deberá ocurrir lo mismo con  $n$ . Esto implica que  $n$  es un cuadrado perfecto.

- c) Demostrar que  $\sqrt[k]{n}$  es irracional a no ser que  $n = m^k$

Demostración.- La Demostración es parecida a la parte b pero haciendo uso del hecho de que cada número primo entra en  $a^k$  y en  $b^k$  un número de veces que es múltiplo de  $k$

- d) Al tratar de números primos no se puede omitir la hermosa demostración de Euclides de que existe un número infinito de ellos. Demuestre que no puede haber sólo un número finito de números primos  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  considerando  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

Demostración.- Si  $p_1, \dots, p_n$  fuesen los únicos números primos, entonces  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$  no podría ser primo, ya que es mayor que cada uno de ellos, de modo que tiene que ser divisible por un número primo. Pero es claro que este número primo no es ninguno de los  $p_1, \dots, p_n$ , lo cual constituye una contradicción. Para poder explicarlo mejor si  $p_1, \dots, p_n$  son los  $n$  primeros números primos, entonces el primo que ocupa el lugar  $n + 1$  es  $\leq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ . Sin embargo,  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$  no tiene que ser necesariamente primo.

18. (a) Demostrar que si  $x$  satisface

$$x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

para algunos enteros  $a_{n-1}, \dots, a_n$  entonces  $x$  es irracional si no es entero. (¿Por qué es esto una generalización del problema 17?)

Demostración.- Supóngase que es  $x = p/q$  donde  $p$  y  $q$  son números naturales primos entre si. Entonces

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_0 = 0,$$

con lo que

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_0q^n = 0$$

Ahora bien, si  $q \neq \pm 1$ , entonces  $q$  tiene por lo menos un divisor primo. Este divisor primo divide a cada uno de los términos que siguen a  $p^n$ , con lo que también deberá dividir a  $p^n$ . Dividirá por lo tanto a  $p$ , lo cual es una contradicción. Así pues,  $q = \pm 1$ , lo que significa que  $x$  es entero.

- (b) Demostrar que  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$  es irracional.

Demostración.- Sea  $a = \sqrt{2} + 2^{1/3}$ . Se demostrará por contradicción. Supongamos que  $a$  es racional, entonces,

$$\begin{aligned} 2 &= (2^{1/3})^3 \\ &= (a - \sqrt{2})^3 \\ &= a^3 - 3a^2\sqrt{2} + 3a \cdot 2 - 2^{3/2} \\ &= a^3 + 6a - \sqrt{2}(3a^2 + 2) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\sqrt{2} = \frac{a^3 + 6a - 2}{3a^2 + 2} \in \mathbb{Q}$$

es bien sabido que  $\sqrt{2}$  es irracional. De ahí llegamos a una contradicción.

19. Demostrar la desigualdad de Bernoulli: Si  $h > -1$ , entonces

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

¿Por qué es esto trivial si  $h > 0$ ?

Demostración.- Si  $n = 1$ , entonces  $(1 + h)^n = 1 + nh$ . Supóngase que  $(1 + h)^n \geq 1 + nh$ . Entonces  $(1 + h)^{n+1} = (1 + h)(1 + h)^n \geq (1 + h)(1 + nh)$ , ya que  $1 + h > 0$  luego  $1 + (n + 1)h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h$

Para  $h > 0$ , la igualdad se sigue directamente del teorema del binomio, ya que todos los demás términos que aparecen en el desarrollo de  $(1 + h)^n$  son positivos.

20. La sucesión de Fibonacci  $a_1, a_2, a_3, \dots$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3 \end{aligned}$$

Esta sucesión, cuyos primeros términos son  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ , fue descubierta por Fibonacci (1175-1250, aprox.) en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número  $a_n$  de parejas nacidas en el  $n$ -ésimo mes es  $a_{n-1} + a_{n-2}$ , puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además, cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una nueva pareja. Es verdaderamente asombroso el número de resultados interesantes relacionados con esta sucesión, hasta el punto de existir una Asociación de Fibonacci que publica una revista, the Fibonacci Quarterly.

Demostrar que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Demostración.- Al ser

$$\frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

La fórmula es válida para  $n = 1$  y también se cumple para  $n = 2$ . Supóngase que es válida para todo  $k < n$ , donde  $n \geq 3$ . En tal caso es válida en particular para  $n - 1$  y para  $n - 2$ , luego por hipótesis

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

21. La desigualdad de Schwarz (problema 1-19) tiene en realidad una forma más general:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Dar de esto tres demostraciones, análogas a las tres demostraciones del problema 1-19

Demostración.-

i) Como antes, la demostración es trivial si para todo  $y_i = 0$  o si hay algún número  $\lambda$  con  $x_i = \lambda y_i$  para todo  $i$ . Es decir,

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_{i=1}^n n(\lambda y_i - x_i)^2 \\
&= \lambda \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - 2\lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) + \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{así por el problema 1-18 queda demostrado.}
\end{aligned}$$

ii) Usando  $2xy \leq x^2 + y^2$  con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}, \quad y = \frac{y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

obtenemos,

$$\frac{2x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \leq \frac{x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (1)$$

luego

$$\frac{\sum_{i=1}^n 2x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} = 2$$

Nuevamente, la igualdad se cumple solo si se cumple en (1) para todo  $i$ , lo que significa que,

$$\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

para todo  $i$ . Si todo  $y_i$  es distinto de 0. Esto significa que  $x_i = \lambda y_i$  para

$$\lambda = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

III) La demostración depende de la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 + \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

al verificar esta igualdad notamos que,

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i^2 y_j^2$$

y por lo tanto,

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2 + \sum_{i \neq j} x_i y_i x_j y_j$$

La diferencia es

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) &= 2 \sum_{i < j} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - x_i y_i x_j y_j) \\ &= 2 \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \end{aligned}$$

Si la igualdad se cumple en la desigualdad de Schwarz, para todo  $x_i y_j = x_j y_i$ . Si algún  $y_i \neq 0$  y  $y_i \neq 0$ , luego  $x_i = \frac{x_1}{y_1} y_i$  para todo  $i$ , así tenemos que  $\lambda = \frac{x_1}{y_1}$

22. El resultado del problema 1-7 tiene una generalización importante:

Si  $a_i, \dots, a_n \geq 0$ , entonces la **media aritmética**

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

y la **media geométrica**

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

satisfacen

$$G_n \leq A_n$$

(a) Supóngase que  $a_1 < A_n$ . Entonces algún  $a_i$  tiene que satisfacer  $a_i > A_n$ , pongamos que sea  $a_2 > A_n$ . Sea  $\bar{a}_1 = A_n$  y sea  $\bar{a}_2 = a_1 + a_2 - \bar{a}_1$ . Demostrar que

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \geq a_1 a_2$$

¿Por qué la repetición de este proceso un suficiente número de veces demuestra que  $G_n \leq A_n$ ? (He aquí otra ocasión en que resulta ser un buen ejercicio establecer una demostración formal por inducción, al tiempo que se da una explicación informal.) ¿Cuándo se cumple la igualdad en la fórmula  $G_n A_n$ ?

Demostración.- Tenemos que probar que

$$A_n(a_1 + a_2 - A_n) \geq a_1 a_2$$

Vemos que es lo mismo demostrar que  $A_n^2 - (a_1 + a_2)A_n + a_1 a_2 \leq 0$  de donde  $(A_n - a_1)(A_n - a_2) \leq 0$ , el cual sabemos que es verdad porque  $(A_n - a_1) > 0$  y  $(A_n - a_2) < 0$

- (b) Haciendo uso del hecho de ser  $G_n \leq A_n$  cuando  $n = 2$ , demostrar por inducción sobre  $k$ , que  $G_n \leq A_n$  para  $n = 2^k$

Demostración.- Sabemos que  $G_n \leq A_n$  cuando  $n = 2^1$ . Supóngase que  $G_n \leq A_n$  para  $n = 2^k$  para luego  $m = 2^{k+1} = 2n$ , entonces,

$$\begin{aligned} G_m &= \sqrt[n]{a_1 \cdots a_m} \\ &= \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_m}} \\ &\leq \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_m}}{2} \quad \text{ya que } G_2 \leq A_2 \\ &\leq \frac{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_m}{n}}{2} \\ &= \frac{a_1 + \dots + a_m}{2n} \\ &= A_m \end{aligned}$$

- (c) Para un  $n$  general, sea  $2^m > n$ . Aplíquese la parte (b) a los  $2^m$  números

$$a_1, \dots, a_n, \underbrace{A_n, \dots, A_n}_{2^m - n \text{ veces}}$$

para demostrar que  $G_n \leq A_n$

Demostrar.- Aplicando la parte (b) a los  $2^m$  números, para  $k = 2^m - n$

$$\begin{aligned} (a_1 \cdots a_n)(A_n)^k &\leq \left[ \frac{a_1 + \dots + a_n + kA_n}{2^m} \right]^{2^m} \\ &= \left[ \frac{nA_n + kA_n}{2^m} \right]^{2^m} \\ &= (A_n)^{2^m} \end{aligned}$$

así,

$$a_1 \cdots a_n \leq (A_n)^{2^m - k} = (A_n)^n$$

23. Lo que sigue es una definición recursiva de  $a_n$  :

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_{n+1} &= a_n \cdot a \end{aligned}$$

Demostrar por inducción que

$$\begin{aligned} a_{n+m} &= a_n \cdot a_m \\ (a^n)^m &= a^{nm} \end{aligned}$$

Demostración.- La primera ecuación es verdad para  $m = 1$  ya que  $a^{n+1} = a^n \cdot a^1$ . Supongamos que  $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ , entonces

$$\begin{aligned} a^{n+(n+1)} &= a^{(n+1)+1} \cdot a \\ &= (a^n \cdot a^m) \cdot a \\ &= a^n \cdot (a^m \cdot a) \\ &= a^n \cdot a^{m+1} \end{aligned}$$

por lo tanto la primera ecuación es verdad para  $m + 1$

La segunda ecuación es verdad para  $m = 1$  ya que  $(a^n)^1 = a^{n \cdot 1}$ . Supóngase que  $(a^n)^m = a^{nm}$ , entonces,

$$\begin{aligned} &= \\ &= (a^n \cdot a^m) \cdot a \\ &= a^n \cdot (a^m \cdot a) \\ &= a^n \cdot a^{m+1} \end{aligned}$$

24. Supóngase que conocemos las propiedades P1 y P4 de los números naturales, pero que no se ha hablado de multiplicación. Entonces se puede dar la siguiente definición recursiva de multiplicación:

$$1 \cdot b = b \quad (a + 1) \cdot b = a \cdot b + b$$

Demostrar lo siguiente (¡en el orden indicado!)

$$\begin{aligned} a \cdot (a + c) &= a \cdot b + a \cdot c && \text{Utilizar inducción sobre } a \\ a \cdot 1 &= a \\ a \cdot b &= b \cdot a && \text{lo anterior era el caso } b = 1 \end{aligned}$$

Demostración.- Al ser

$$\begin{aligned} 1 \cdot (b + c) &= b + c \\ &= 1 \cdot b + 1 \cdot c && \text{por definición,} \end{aligned}$$

el primer resultado es válido para  $a = 1$ . Supóngase que  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  para todo  $b$  y  $c$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (a + 1) \cdot (b + c) &= a \cdot (b + c) + (b + c) \\ &= (a \cdot b + a \cdot c) + (b + c) \\ &= (a \cdot b + b) + (a \cdot c + c) \\ &= (a + 1) \cdot b + (a + 1) \cdot c \end{aligned}$$

La ecuación  $a \cdot 1 = a$  vale para  $a = 1$  por definición. Supóngase que  $a \cdot 1 = a$ . Entonces

$$\begin{aligned} (a + 1) \cdot 1 &= a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= a + 1 \end{aligned}$$

Para  $b = 1$ , la ecuación  $a \cdot b = b \cdot a$  es consecuencia de  $a \cdot 1 = a$ , que acaba de ser demostrada, y de  $1 \cdot a = a$ , que vale por definición. Supóngase que  $a \cdot b = b \cdot a$ , entonces,

$$\begin{aligned} a \cdot (b + 1) &= a \cdot b + a \cdot 1 \\ &= a \cdot b + a \\ &= b \cdot a + a \\ &= (b + 1) \cdot a \end{aligned}$$

25. En este capítulo hemos empezado con los números naturales y gradualmente hemos ido ampliando hasta los reales. Un estudio completamente riguroso de este proceso requiere de por sí un pequeño libro. Nadie ha encontrado la manera de llegar a los números reales como dados, entonces los números naturales pueden ser definidos como los números naturales de la forma  $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1$ , etc. Todo el objeto de este problema consiste en hacer ver que existe una manera matemática riguroso de decir **etc.**

(a) Se dice que un conjunto  $A$  de números reales es **inductivo** si

(i)  $\mathbb{R}$  es inductivo.

Demostración.- Está claro según la definición.

(ii) El conjunto de los números reales positivos es inductivo.

Demostración.- Esto está claro, ya que 1 es positivo, y si  $k$  es positivo, entonces por definición  $k + 1$  es positivo.

(iii) El conjunto de los números reales positivos distintos de  $\frac{1}{2}$  es inductivo.

Demostración.- Está claro que 1 pertenece a este conjunto. Si para el mismo no se cumpliera la condición 2, existiría entonces en el conjunto algún  $k$  con  $k + 1 = 1/2$ . Pero esto es falso, ya que  $k = -1/2$  no es positivo.

(iv) El conjunto de los números reales positivos distintos de 5 no es inductivo.

Demostración.- Este conjunto contiene 4, pero no  $4 + 1$ .

(v) Si  $A$  y  $B$  son inductivos, entonces el conjunto  $C$  de los números reales que están a la vez en  $A$  y en  $B$  es también inductivo.

Demostración.- Al estar 1 en  $A$  y en  $B$ , también está en  $C$ . Si  $k$  está en  $C$ , entonces  $k$  está a la vez en  $A$  y en  $B$ , con lo que  $k + 1$  está en  $A$  y en  $B$ , de modo que  $k + 1$  está en  $C$ .

(b) Un número real  $n$  será llamado **número natural** si  $n$  está en todo conjunto inductivo.

(i) Demostrar que 1 es un número natural.

Demostración.- 1 es un número natural, puesto que 1 está en todo conjunto inductivo, por la misma definición de conjunto inductivo.



(ii) Demostrar que  $k + 1$  es un número natural si  $k$  es un número natural.

Demostración.- Si  $k$  es un número natural, entonces  $k$  está en todo conjunto inductivo. Así pues,  $k + 1$  está en todo conjunto inductivo. Por lo tanto,  $k + 1$  es un número natural.

26. Un rompecabezas consiste en disponer de tres vástagos cilíndricos, el primero de los cuales lleva engastados  $n$  anillos concéntricos de diámetro decreciente. Se puede quitar el anillo superior de un vástago para engastarlo sobre otro vástago siempre que al hacer esto último el anillo desplazado no venga a caer sobre otro de diámetro inferior. Por ejemplo, si el anillo más pequeño se pasa al vástago 2 y el que le sigue pasar también al vástago 3 encima del que le sigue en tamaño. Demostrar que la pila completa se puede pasar al vástago 3 en  $2^n + 1$  pasos y no en menos.

Demostración.- Si hay solo  $n = 1$  anillos, claramente se puede mover al eje 3 en  $1 = 2^1 - 1$  movimientos. Suponiendo el resultado para  $k$  anillos, luego dados  $k + 1$  anillos,

- (a) Mueve los anillos elevados a la  $k$  al eje 2 en  $2k - 1$  movimientos,
- (b) mueva el anillo inferior al eje 3,
- (c) mueva los  $k$  anillos superiores de nuevo al eje 3 en movimientos  $2k - 1$ .

Esto toma  $2(2k - 1) + 1 = 2k + 1 - 1$  se mueve. Si  $2k - 1$  movimientos es el mínimo posible para  $k$  anillos, luego  $2k + 1 - 1$  es el mínimo para  $k + 1$  anillos, ya que la parte inferior El anillo no se puede mover en absoluto hasta que los primeros  $k$  anillos se muevan a algún lugar, tomando al menos  $2k - 1$  se mueve, el anillo inferior debe moverse al eje 3, tomando al menos 1 movimiento, y luego los otros anillos deben colocarse encima, tomando al menos otros movimientos  $2^k - 1$ .

27. Hubo un tiempo en que la universidad  $B$  se preciaba de tener 17 profesores numerarios de matemáticas. La tradición obligaba a que el almuerzo comunitario semanal, al que concurrían fielmente los 17, todo miembro que hubiese descubierto un error en una de sus publicaciones tenía que hacer público este hecho y a continuación dimitir. Una declaración de este tipo no se había producido nunca porque ninguno de los profesores era consciente de la existencia de un error en su propio trabajo. Lo cual, sin embargo, no quiere decir que no existieran errores. De hecho, en el transcurso de los años, por lo menos un error había sido descubierto en el trabajo de cada uno de los miembros por otro de entre ellos. La existencia de este error había sido comunicada a todos los demás miembros del departamento salvo al responsable, con objeto de evitar dimisiones.

Llegó un fatídico año en que el departamento aumentó el número de sus miembros con un visitante de otra universidad, un Profesor  $X$  que venía con la esperanza de que se le ofreciera un puesto permanente al final del año académico. Una vez que vio frustrada su esperanza, el Profesor  $X$  tomó su venganza en el último almuerzo comunitario del año diciendo: Me ha sido muy grata mi estancia entre ustedes, pero hay una cosa que creo que es mi deber comunicarles. Por lo menos uno de entre ustedes tiene publicado un resultado incorrecto, lo cual ha sido descubierto por otro del departamento. ¿Qué ocurrió al año siguiente?

Respuesta.- Primero Suponga que solo hay 2 profesores  $A$  y  $B$ , cada uno consciente del error en el trabajo del otro, pero sin darse cuenta de cualquier error en el suyo. Entonces ninguno se sorprende por la declaración del profesor  $X$ , pero cada uno espera que el otro sea sorprendido, y dimitir en el primer almuerzo del próximo año. Cuando esto no suceda, cada uno se da cuenta que esto solo puede ser porque él también ha cometido un error. Entonces, en la próxima reunión, ambos renunciarán.

A continuación, considere el caso de 3 profesores,  $A$ ,  $B$  y  $C$ . El profesor  $C$  sabe que el profesor  $A$  es consciente de un error en el trabajo del profesor  $B$ , ya sea porque el profesor  $A$  encontró el error e informó, o porque encontró el error e informó al profesor  $A$ . Del mismo modo, él sabe que el profesor  $B$  sabe que hay un error en el trabajo del profesor  $A$ . Pero el profesor  $C$  piensa que no a cometido errores, por lo que a el respecta, la situación frente a los profesores  $A$  y  $B$  es precisamente el analizado en el párrafo

anterior. El profesor  $C$  está asumiendo, de que nadie cree que exista un error cuando uno no lo hace. Entonces el profesor  $C$  espera tanto al profesor  $A$  como al profesor  $B$  renunciar en la segunda reunión. Por supuesto de manera similar los profesores  $A$  y  $B$  esperan que los otros dos renuncien en la segunda reunión. Cuando nadie renuncia todos se dan cuenta de que ha cometido un error, por lo que todos renuncian en la tercera reunión. Podría ser demostrado por inducción.

28. Después de imaginarse, o de consultar, la solución del problema 27, considere lo siguiente: Cada uno de los miembros del departamento era ya sabedor de lo que el Profesor  $X$  afirmaba. ¿Cómo pudo pues su afirmación cambiar las cosas?

Respuesta.- Ganar es una buena idea comenzar con el caso en el que el departamento consta solo de Profesores  $A$  y  $B$ . Ahora, por supuesto, ambos profesores saben que alguien ha publicado un resultado incorrecto, pero el Profesor  $A$  piensa que el Profesor  $B$  no lo sabe, y viceversa. Una vez que el Profesor  $X$  hace su anuncio, el Profesor  $A$  sabe que el Profesor  $B$  lo sabe. Y por eso espera que el Profesor  $B$  renuncie en la próxima reunión. En el caso de tres profesores, la situación es más complicada. Cada uno sabe que alguien ha cometido un error, y además cada uno sabe que los demás saben. Por ejemplo, el Profesor  $C$  sabe que el Profesor  $A$  lo sabe, ya que él y el Profesor  $A$  han discutido el error en el trabajo del Profesor  $B$ , y él sabe de manera similar que el Profesor  $B$  lo sabe. Pero el Profesor  $C$  no cree que el Profesor  $A$  sepa que el Profesor  $B$  lo sabe. Así que el anuncio del Profesor  $X$  cambia las cosas: ahora el Profesor  $C$  sabe que el Profesor  $A$  sabe que el Profesor  $B$  sabe. Bueno, puedes ver lo que pasa en general. Esto parece probar que las declaraciones como  $A$  sabía que  $B$  sabía que  $C$  sabía que realmente tiene sentido.

# 3

## Funciones

**Definición 3.1.** El conjunto de los números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de **dominio** de la función.

**Definición 3.2.** Si  $f$  y  $g$  son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función  $f + g$  denominada **suma** de  $f + g$  mediante la ecuación:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los  $x$  que están a la vez en el dominio de  $f$  y en el dominio de  $g$ , es decir:

$$\text{dominio } (f + g) = \text{dominio } f \cap \text{dominio } g$$

**Definición 3.3.** El dominio de  $f \cdot g$  es  $\text{dominio } f \cap \text{dominio } g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

**Definición 3.4.** Se expresa por  $\text{dominio } f \cap \text{dominio } g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Definición 3.5** (Función constante).

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

**Teorema 3.1.**  $(f + g) + h = f + (g + h)$

**Demostración.-** La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio. Obsérvese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] + h(x) \\ &\quad \text{y} \\ [f + (g + h)](x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)] \end{aligned}$$

Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de  $(f + g) + h$  y el de  $f + (g + h)$  es evidentemente dominio  $f \cap$  dominio  $g \cap$  dominio  $h$ . Nosotros escribimos, naturalmente  $f + g + h$  por  $(f + g) + h = f + (g + h)$

**Teorema 3.2.** Es igual fácil demostrar que  $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$  y ésta función se designa por  $f \cdot g \cdot h$ . Las ecuaciones  $f + g = g + f$  y  $f \cdot g = g \cdot f$  no deben presentar ninguna dificultad.

**Definición 3.6** (Composición de función).

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de  $f \circ g$  es  $\{x : x \text{ está en el dominio de } g \text{ y } g(x) \text{ está en el dominio de } f\}$

$$D_{f \circ g} = \{x / x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

**Propiedad .13.**  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  La demostración es una trivalidad.

**Definición 3.7.** Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si  $(a, b)$  y  $(a, c)$  pertenecen ambos a la colección, entonces  $b = c$ ; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

**Definición 3.8.** Si  $f$  es una función, el **dominio** de  $f$  es el conjunto de todos los  $a$  para los que existe algún  $b$  tal que  $(a, b)$  está en  $f$ . Si  $a$  está en el dominio de  $f$ , se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número  $b$  único tal que  $(a, b)$  está en  $f$ . Este  $b$  único se designa por  $f(a)$ .

### 3.1. Problemas

1. Sea  $f(x) = 1/(1 + x)$ . Interpretar lo siguiente:

(i)  $f(f(x))$  (¿Para que  $x$  tiene sentido?)

Respuesta.- Sea  $f\left(\frac{1}{1+x}\right)$  entonces  $\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$ , por lo tanto  $\frac{1-x}{x+2}$  de donde llegamos a la conclusión de que  $x$  se cumple para todo número real de  $1$  y  $-2$

(ii)  $f\left(\frac{1}{x}\right)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$  por lo tanto se cumple para todo  $x \neq -1, 0$

(iii)  $f(cx)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+cx}$  donde se cumple para todo  $x \neq -1$  si  $c \neq 0$

(iv)  $f(x+y)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+x+y}$  donde se cumple para todo  $x+y \neq -1$

(v)  $f(x) + f(y)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = \frac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$  siempre y cuando  $x \neq -1$  y  $y \neq -1$

(vi) ¿Para que números  $c$  existe un número  $x$  tal que  $f(cx) = f(x)$ ?

Respuesta.- Para todo  $c$  ya que  $f(c \cdot 0) = f(0)$

(vii) ¿Para que números  $c$  se cumple que  $f(cx) = f(x)$  para dos números distintos  $x$ ?

Respuesta.- Solamente  $c = 1$  ya que  $f(x) = f(cx)$  implica que  $x = cx$ , y esto debe cumplirse por lo menos para un  $x \neq 0$

2. Sea  $g(x) = x^2$  y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles  $y$  es  $h(y) \leq y$ ?

Respuesta.- Se cumple para  $y \geq 0$  si  $y$  es racional, o para todo  $y \geq 1$

(ii) ¿Para cuáles  $y$  es  $h(y) \leq g(y)$ ?

Respuesta.- Para  $-1 \leq y \leq 1$  siempre que  $y$  sea racional y para todo  $y$  tal que  $|y| \leq 1$

(III) ¿Qué es  $g(h(z)) - h(z)$ ?

Respuesta.-

$$g(h(z)) = \begin{cases} 0, & z^2 \text{ racional} \\ 1, & z^2 \text{ irracional} \end{cases}$$

Por lo tanto el resultado es 0

(IV) ¿Para cuáles  $w$  es  $g(w) \leq w$ ?

Respuesta.- Para todo  $w$  tal que  $0 \leq w \leq 1$

(v) ¿Para cuáles  $\epsilon$  es  $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$ ?

Respuesta.- Para  $-1, 0, 1$

3. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(I)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Respuesta.- Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene  $1 - x^2 \geq 0$  entonces  $x^2 \leq 1$  por lo tanto el dominio son todos los  $x$  tal que  $|x| \leq 1$

(II)  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Respuesta.- Se observa claramente que el dominio es  $-1 \leq x \leq 1$

(III)  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

Respuesta.- Operando un poco tenemos

$$f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)},$$

sabemos que el denominador no puede ser 0 por lo tanto el  $D_f = \{x / x \neq 1, x \neq 2\}$

(IV)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Respuesta.- Claramente notamos que el dominio de  $f$  son  $-1$  y  $1$  ya que si se toma otros números daría un número imaginario.

(v)  $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

Respuesta.- Notamos que no se cumple para ningún  $x$  ya que si  $0 \leq x \leq 1$  entonces no se

cumple para  $\sqrt{x-2}$  y si  $x \geq 2$  no se cumple para  $\sqrt{1-x}$

4. Sean  $S(x) = x^2$ ,  $P(x) = 2^x$  y  $s(x) = \text{sen } x$ . Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.

(I)  $(S \circ P)(y)$

Respuesta.- Por definición se tiene que  $(S \circ P)(y) = S(P(y))$  entonces  $S(2^y) = 2^{2y}$  siempre y cuando  $D_{S \circ P} = \{y/y \in D_P \wedge P(y) \in D_S\}$

(II)  $(S \circ s)(y)$

Respuesta.- Por definición tenemos que  $(S \circ s)(y) = S(s(y))$  entonces  $S(\text{sen } y) = \text{sen}^2 y$  siempre y cuando  $D_{S \circ s} = \{y/y \in D_s \wedge S(y) \in D_S\}$

(III)  $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Respuesta.-  $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S((P \circ s)(t)) + s(P(t)) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\text{sen } t)) + s(2^t) = S(2^{\text{sen } t}) + \text{sen } 2^t = 2^{2^{\text{sen } t}} + \text{sen } 2^t$

(IV)  $s(t^3)$

Respuesta.-  $s(t^3) = \text{sen } t^3$

5. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de  $S, P, s$  usando solamente  $+, \cdot, \circ$

(I)  $f(x) = 2^{\text{sen } x}$

Respuesta.- Claramente vemos que  $P \circ s$

(II)  $f(x) = \text{sen } 2^x$

Respuesta.-  $s \circ P$

(III)  $f(x) = \text{sen } x^2$

Respuesta.-  $s \circ S$

(IV)  $f(x) = \text{sen } x$

Respuesta.-  $S \circ s$

(v)  $f(t) = 2^{2t}$

Respuesta.-  $P \circ P$

(vi)  $f(u) = \text{sen}(2^u + 2^{u^2})$

Respuesta.-  $s \circ (P + P \circ S)$

(vii)  $f(y) = \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(2^{2^{\text{sen } y}})))$

Respuesta.-  $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$

(viii)  $f(a) = 2^{\text{sen}^2 a} + \text{sen}(a^2) + 2^{\text{sen}(a^2 + \text{sen } a)}$

Respuesta.-  $P \circ S \circ s + s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

6. (a) Si  $x_1, \dots, x_n$  son números distintos, encontrar una función polinómica  $f_i$  de grado  $n - 1$  que tome el valor 1 en  $x_i$  y 0 en  $x_j$  para  $j \neq i$ . Indicación: El producto de todos los  $(x - x_j)$  para  $j \neq i$  es 0 en  $x_j$  si  $j \neq i$ . Este producto es designado generalmente por

$$\prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j)$$

donde el símbolo  $\prod$  (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que  $\sum$  para sumas.

Respuesta.- Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija  $n$  y elegir un conjunto de distintas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Por ejemplo supongamos que elegimos  $n = 3$   $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio  $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$ , pero  $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$ . Es decir,  $f_1$  es un cuadrático que tiene ceros en  $x = 2$  y  $x = 3$ , pero es igual a 1 en  $x = 1$ . Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x - 2)(x - 3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante  $a$ . Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con  $x = 1$ , debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x - 2)(x - 3) = 2a,$$

por lo tanto  $a = 1/2$  y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio  $f_2(x)$  tal que  $f_2(2) = 1$  con raíces en  $x = 1, 3$  tendríamos que resolver la ecuación  $1 = a(2 - 1)(2 - 3)$ , lo que da  $a = -1$  por lo tanto  $f_2(x) = -(x - 1)(x - 3)$

Ahora veamos el caso general. El polinomio  $f_i(x)$  satisface  $f_i(x_i) = 1$  y  $f_i(x_j) = 0$  para todo  $j \neq i$ , entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$



Para alguna constante  $a$ . Para encontrar esta constante, aplicamos  $x = x_1$ :

$$f_i(x_i) = 1 = a \prod_{j \neq i} (x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

- (b) Encontrar ahora una función polinómica de grado  $n - 1$  tal que  $f(x_1) = a_1$ , donde  $a_1, \dots, a_n$  son números dados. (Utilícense las Funciones  $f_1$  de la parte (a).) La fórmula que se obtenga es la llamada **Fórmula de interpolación de Lagrange**

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \sum_{j=1} a_j f_j(x)$$

entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_j \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

7. (a) Demostrar que para cualquier función polinómica  $f$  y cualquier número  $a$  existe función polinómica  $g$  y un número  $b$  tales que  $f(x) = (x - a)g(x) + b$  para todo  $x$ . (La idea es esencialmente dividir  $f(x)$  por  $(x - a)$  mediante la división larga hasta encontrar un resto constante.)

Demostración.- Si el grado de  $f$  es 1, entonces  $f$  es de la forma

$$f(x) = cx + d = cx + d + ac - ac = c(x - a) + (d + ac)$$

de tal modo que  $g(x) = c$  y  $b = d + ac$ . Por inducción supongamos que el resultado es válido para polinomios de grado  $\leq k$ . Si  $f$  tiene grado  $k + 1$ , entonces  $f$  tiene la forma

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + \dots + a_1x + a_0$$

luego para grados  $\leq k$  se tiene

$$f(x) - a_{k+1}x^{k+1} = (x - a)g(x) + b$$

así

$$f(x) = (x - a) \left[ g(x) + a_{k+1}(x - a)^k \right] + b$$

- (b) Demostrar que si  $f(a) = 0$ , entonces  $f(x) = (x - a)g(x)$  para alguna función polinómica  $g$ . (La recíproca es evidente)

Demostración.- Por la parte (a), podemos poner que  $f(x) = (x - a)g(x) + b$ , entonces

$$0 = f(a) = (a - a)g(a) + b = b$$

de modo que  $f(x) = (x - a)g(x)$

- (c) Demostrar que si  $f$  es una función polinómica de grado  $n$ , entonces  $f$  tiene a lo sumo  $n$  raíces, es decir, existen a lo sumo  $n$  números  $a$  tales que  $f(a) = 0$

Demostración.- Supóngase que  $f$  tiene  $n$  raíces  $a_1, \dots, a_n$ . Entonces según la parte (b) podemos poner  $f(x) = (x - a_1)g_1(x)$  donde el grado de  $g_1(x)$  es  $n - 1$ . Pero

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)g_1(a_2)$$

de modo que  $g_1(a_2) = 0$ , ya que  $a_2 \neq a_1$ . Podemos pues escribir

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)g_2(x),$$

donde el grado de  $g_2$  es  $n - 2$ . Prosiguiendo de esta manera, obtenemos que

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)c$$

para algún número  $c \neq 0$ . Está claro que  $f(a) \neq 0$  si  $a \neq a_1, \dots, a_n$ . Así pues,  $f$  puede tener a lo sumo  $n$  raíces.

- (d) Demostrar que para todo  $n$  existe una función polinómica de grado  $n$  con raíces. Si  $n$  es par, encontrar una función polinómica de grado  $n$  sin raíces, y si  $n$  es impar, encontrar una con una sola raíz

Demostración.- Si  $f(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot \dots \cdot (x - n)$ , entonces  $f$  tiene  $n$  raíces. Si  $n$  es par, entonces  $f(x) = x^n + 1$  no tiene raíces. Si  $n$  es impar, entonces  $f(x) = x^n$  tiene una raíz única, que es 0.

8. ¿Para qué números  $a, b, c$  y  $d$  la función

$$f(x) = \frac{ax + d}{cx + b}$$

satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x$ ?

Respuesta.- Si

$$x = f(f(x)) = \frac{a \left( \frac{ax + d}{cx + b} \right) + b}{c \left( \frac{ax + d}{cx + b} \right) + d}$$

para todo  $x$ , entonces

$$x = \frac{a^2x + ab + bcx + bd}{acx + bc + cd + d^2}$$

y por lo tanto

$$(ac + cd)x^2 + (d^2 - a^2)x - ab - bd = 0$$

para todo  $x$ , de modo que

$$\begin{aligned}ac + cd &= 0 \\ab + bd &= 0 \\d^2 - a^2 &= 0\end{aligned}$$

Se sigue que  $a = d$  ó  $a = -d$ . Una posibilidad es  $a = d = 0$ , en cuyo caso  $f(x) = \frac{b}{cx}$  que satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x \neq 0$ . Si  $a = d \neq 0$ , entonces  $b = c = 0$  con lo que  $f(x) = x$ . La tercera posibilidad es  $a + d = 0$ , de modo que  $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ , la cual satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x \neq \frac{a}{c}$  la cual satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x \neq \frac{a}{c}$ . Estrictamente hablando, podemos añadir la condición  $f(x) \neq \frac{a}{c}$  para  $x \neq \frac{a}{c}$ , lo que significa que

$$\frac{ax+b}{cx-a} \neq \frac{a}{c}, \quad a^2 + bc \neq 0.$$

9. (a) Si  $A$  es un conjunto cualquiera de números reales, defínase una función  $C_A$  como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ est en } A \\ 0, & \text{si } x \text{ no est en } A \end{cases}$$

Encuéntrese expresiones para  $C_{A \cap B}$ ,  $C_{A \cup B}$  y  $C_{\mathbb{R}-A}$ , en términos de  $C_A$  y  $C_B$ .

Respuesta.- Según la definición de teoría de conjunto tenemos,

$$\begin{aligned}C_{A \cap B} &= C_A \cdot C_B \\C_{A \cup B} &= C_A + C_B - C_A \cdot C_B \\C_{\mathbb{R}-A} &= 1 - C_A\end{aligned}$$

- (b) Supóngase que  $f$  es una función tal que  $f(x) = 0$  o  $1$  para todo  $x$ . Demostrar que existe un conjunto  $A$  tal que  $f = C_A$

Demostración.- Sea  $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$ , entonces  $f = C_A$ .

- (c) Demostrar que  $f = f^2$  si y sólo si  $f = C_A$  para algún conjunto  $A$

Demostración.- Sea  $f = f^2$ , entonces para cada real  $x$ ,  $f(x) = f[f(x)]^2$ , así  $f(x) = 0$  ó  $f(x) = 1$ , luego por la parte b),  $f = C_A$  para algún  $A$ .

Por otro lado sea  $f = C_A$  para algún  $A$ . Entonces si  $x \in A$ ,  $f(x) = 1 = 1^2 = f(x)^2$ , mientras si  $x \notin A$ ,  $f(x) = 0 = 0^2 = f(x)^2$ , así en cualquier caso  $f(x) = [f(x)]^2$  y  $f = f^2$

10. (a) ¿Para qué funciones  $f$  existe una función  $g$  tal que  $f = g^2$ ?

Respuesta.- Debido a que algún número elevado al cuadrado siempre será no negativo podemos afirmar que las funciones  $f$  satisfacen a todo  $x$  tal que  $f(x) \geq 0$

- (b) ¿Para qué función  $f$  existe una función  $g$  tal que  $f = 1/g$ ?

Respuesta.- Dado a que un número dividido entre cero es indeterminado se ve claramente que satisfacen a todo  $x$  tal que  $f(x) \neq 0$

- (c) ¿Para qué funciones  $b$  y  $c$  podemos encontrar una función  $x$  tal que

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

para todos los números  $t$ ?

Respuesta.- Por teorema se observa que para las funciones  $b$  y  $c$  que satisfacen  $(b(t))^2 - 4c(t) \geq 0$  para todo  $t$

- (d) ¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones  $a$  y  $b$  si ha de existir una función  $x$  tal que

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

para todos los números  $t$ ? ¿Cuántas funciones  $x$  de éstas existirán?

Respuesta.- Es facil notar que  $b(t)$  tiene que ser igual a 0 siempre que  $a(t) = 0$ . Si  $a(t) \neq 0$  para todo  $t$ , entonces existe una función única con esta condición, que es  $x(t) = a(t)/b(t)$ . Si  $a(t) = 0$  para algún  $t$ , entonces puede elegirse arbitrariamente  $x(t)$ , de modo que existen infinitas funciones que satisfacen la condición.

11. (a) Supóngase que  $H$  es una función e y un número tal que  $H(H(y)) = y$ . ¿Cuál es el valor de

$$H(H(H...(H(y))))?$$

Respuesta.- Si aplicamos la hipótesis, tendremos que aplicar 78 veces la función, luego 76 y así, hasta llegar a 2, donde la función sera  $H(H(y))$ , y una vez más por hipótesis tenemos como resultado  $y$ .

- (b) La misma pregunta sustituyendo 80 por 81

Respuesta.- Sea  $H(H(y))$  la 78ava vez de la función, entonces la 81ava vez será  $H(H(H(y)))$ , por lo tanto queda como resultado  $H(y)$ .

- (c) La misma pregunta si  $H(H(y)) = H(y)$

Respuesta.- Análogamente a la parte a) si la 80ava vez es  $y$  entonces por hipótesis nos queda  $H(y)$ .

- (d) Encuéntrese una función  $H$  tal que  $H(H(x)) = H(x)$  para todos los números  $x$  y tal que  $H(1) = 36$ ,  $H(2) = \frac{\pi}{3}$ ,  $H(13) = 47$ ,  $H(36) = 36$ ,  $H(\pi/3) = \frac{\pi}{3}$ ,  $H(47) = 47$

Respuesta.- Dar a  $H(1)$ ,  $H(2)$ ,  $H(13)$ ,  $H(36)$ ,  $H(\pi/3)$ , y  $H(47)$  los valores especificados y hágase  $H(x) = 0$  para  $x \neq 1, 2, 13, 36, \pi/3, 47$ . Al ser, en particular,  $H(0) = 0$ , la condición  $H(H(x)) = H(x)$  se cumple para todo  $x$ .

- (e) Encontrar una función  $H$  tal que  $H(H(x)) = H(x)$  para todo  $x$  y tal que  $H(1) = 7, H(17) = 18$

Respuesta.- Hágase  $H(1) = 7, H(7) = 7, H(17) = 18, H(18) = 18$ , y  $H(x) = 0$  para  $x \neq 1, 7, 17, 18$ .

12. Una función  $f$  es par si  $f(x) = f(-x)$ , e impar si  $f(x) = -f(-x)$ . Por ejemplo,  $f$  es par si  $f(x) = x^2$  ó  $f(x) = |x|$  ó  $f(x) = \cos x$ , mientras que  $f$  es impar si  $f(x) = x$  ó  $f(x) = \sin x$ .

- (a) Determinar si  $f + g$  es par, impar o no necesariamente ninguna de las dos cosas, en los cuatro casos obtenidos al tomar  $f$  par o impar y  $g$  par o impar. (Las soluciones pueden ser convenientemente dispuestas en una tabla  $2 \times 2$ )

Respuesta.- Sea  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = |x|$  entonces  $f(-x) + g(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x) + g(x)$  por lo tanto par y par es par.

Sea  $f(x) = x$  y  $g(x) = x$  entonces  $-f(-x) + (-g(-x)) = -(-x) + [-x(-x)] = x + x = f(x) + g(x)$ , por lo tanto impar e impar es impar.

Los otros dos últimos se prueba fácilmente y se llega a la conclusión de que ni uno ni lo otro.

	Par	Impar
Par	Par	Ninguno
Impar	Ninguno	Par

- (b) Hágase lo mismo para  $f \cdot g$

Respuesta.- Sea  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = |x|$ , entonces  $f(-x) \cdot g(-x) = x^2 \cdot |x| = f(x) \cdot g(x)$ , por lo tanto se cumple para par y par.

Sea  $f(x) = x$  y  $g(x) = x$ , entonces  $-f(-x) \cdot -g(-x) = -(-x) \cdot -(-x) = x \cdot x = f(x) \cdot g(x)$ , por lo tanto impar impar da impar

Sea  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x$ , podemos crear otra función llamada  $h$  que contiene a  $x^2 \cdot x$  por lo tanto  $h(x) = x^3 = -(-x)^2$  y así demostramos que par e impar es impar.

De igual forma al anterior se puede probar que impar y par es impar.

	Par	Impar
Par	Par	Impar
Impar	Impar	Par

- (c) Hágase lo mismo para  $f \circ g$

Respuesta.- Sea  $f(x) = x$  y  $g(x) = x$ , luego  $h(x) = (f \circ g)(x)$  entonces  $h(x) = x$  luego  $-f(-x) = x$ , por lo tanto impar e impar da impar.

De similar manera se puede encontrar para los demás problemas y queda:

	Par	Impar
Par	Par	Par
Impar	Par	Impar

- (d) Demostrar que para toda función par  $f$  puede escribirse  $f(x) = g(|x|)$ , para una infinidad de funciones  $g$ .

Demostración.- Sea  $g(x) = f(x)$  sabemos que  $f$  es par si  $f(x) = f(-x)$ , de donde  $g(x) = f(-x)$ , luego por definición de valor absoluto se tiene  $g(|x|) = f(|-x|)$ , y por lo tanto  $f(x) = g(|x|)$

13. (a) Demostrar que para toda función  $f$  con dominio  $\mathbf{R}$  puede ser puesta en la forma  $f = E + O$ , con  $E$  par y  $O$  impar.

Demostración.- Sea  $E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  entonces  $E(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = E(x)$  donde vemos que  $E(x)$  es una función par. Luego por hipótesis  $O(x) = f(x) - E(x) = f(x) - \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ , así  $O(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -O(x)$  entonces  $O(x)$  es impar. Por lo tanto queda demostrado la proposición.

- (b) Demuéstrese que esta manera de expresar  $f$  es única. (Si se intenta resolver primero la parte (b) despejando  $E$  y  $O$ , se encontrará probablemente la solución a la parte (a))

Demostración.- Si  $f = E + O$ , siendo  $E$  par y  $O$  impar, entonces

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

$$f(-x) = E(x) - O(x)$$

14. Si  $f$  es una función cualquiera, definir una nueva función  $|f|$  mediante  $|f|(x) = |f(x)|$ . Si  $f$  y  $g$  son funciones, definir dos nuevas funciones,  $\max(f, g)$  y  $\min(f, g)$  mediante

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)),$$

$$\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

Encontrar una expresión para  $\max(f, g)$  y  $\min(f, g)$  en términos de  $||$ .

Respuesta.- Por problema 1.13 se tiene que

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2};$$

$$\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

15. (a) Demostrar que  $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$ . Esta manera particular de escribir  $f$  es bastante usada; las funciones  $\max(f, 0)$  y  $\min(f, 0)$  se llaman respectivamente parte positiva y parte negativa de  $f$

Demostración.- Esta proposición mostrará que se puede dividir una función en sus partes no negativas y no positivas. Es decir para todo los elementos  $x$  de algún dominio, es cierto que el valor de la función  $f$  en un punto  $x$  es igual a la suma dada, que consiste en la parte no negativa de

$\max(f(x), 0)$  y la parte no positiva de  $f$ ,  $\min(f(x), 0)$ .

Para probarlo, lo dividiremos en dos casos. Sabemos que ó  $f(x) \geq 0$  ó  $f(x) \leq 0$ . Si  $f(x) \geq 0$  entonces  $\max(f(x), 0) = f(x)$  y  $\min(f(x), 0) = 0$  por lo que nuestra ecuación se reduce a  $f(x) = f(x) + 0$ . Por otro lado si  $f(x) \leq 0$ , entonces  $\max(f(x), 0) = 0$  y  $\min(f(x), 0) = f(x)$ , por lo que nuestra ecuación se reduce a  $f(x) = 0 + f(x)$ .

En cualquier caso, nuestro lado derecho se reduce a  $f(x)$  y sabemos que al menos uno de estos dos casos es verdadero; por lo tanto concluimos que  $\forall x, f(x) = \max(f(x), 0) + \min(f(x), 0)$  ó  $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$

- (b) Una función  $f$  se dice que es no negativa si  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$ . Demostrar que para cualquier función  $f$  puede ponerse  $f = g - h$  de infinitas maneras con  $g$  y  $h$  no negativas. (La manera corriente es  $g = \max(f, 0)$  y  $h = -\min(f, 0)$ . Cualquier número puede ciertamente expresarse de infinitas maneras como diferencia de dos números no negativos.)

Demostración.- Comenzamos con la observación de que, para cualquier número real no negativo  $r$ , hay infinitos números reales no negativos  $s, t$  tales que

$$r = s - t$$

De hecho, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomamos  $s_n = 2r + n$  y  $t_n = r + n$ . Entonces, dado que  $r \geq 0$ , tanto  $s_n$  como  $t_n$  son no negativos. Además,

$$s_n - t_n = 2r + n - r - n = r$$

Ahora, para cada número real  $x$ , tenemos que  $f(x) \geq 0$ . Por lo tanto, a partir de la observación anterior, vemos que hay infinitos números reales no negativos  $s_x$  y  $t_x$  tales que

$$f(x) = s_x - t_x$$

para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Así que definimos funciones no negativas  $g$  y  $h$  como sigue

$$g(x) = s_x \text{ y } h(x) = t_x$$

. Entonces hemos demostrado que hay infinitas opciones de tales funciones. Además, tenemos que

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

. Por lo tanto, hemos demostrado que hay infinitas funciones no negativas  $g$  y  $h$  tales que

$$f = g - h$$

16. Supongase que  $f$  satisface  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para todo  $x$  e  $y$ .

- (a) Demostrar que  $f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$

Demostración.- El resultado se cumple para  $n = 1$ ,  $f(x_1) = f(x_1)$ . Luego si  $f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$  para todo  $x_1, \dots, x_n$ , entonces

$$\begin{aligned} f(x_1 + \dots + x_{n+1}) &= f([x_1 + \dots + x_n] + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + \dots + x_n) + f(x_{n+1}) \quad \text{por hipótesis} \\ &= f(x_1) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

- (b) Demostrar que existe algún número  $c$  tal que  $f(x) = cx$  para todos los números racionales  $x$  (en este punto no intentamos decir nada acerca de  $f(x)$  cuando  $x$  es irracional). Indicación: Piénsese primero en cómo debe ser  $c$ . Demostrar luego que  $f(x) = cx$ , primero cuando  $x$  es un entero, después cuando  $x$  es el recíproco de un entero, y finalmente para todo racional  $x$ .

Demostración.- Sea  $c = f(1)$ . Luego para cualquier número natural  $n$  y el inciso (a),

$$f(n) = f(1 + \dots + 1) = f(1) + \dots + f(1) = n \cdot f(1) = cn \quad (1)$$

Al ser

$$f(x) + f(0) = f(x + 0) = f(x),$$

entonces  $f(0) = 0$ . Ahora, puesto que

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0,$$

resulta que  $f(-x) = -f(x)$ . En particular, para cualquier número natural  $n$  y por (1),

$$f(-n) = -f(n) = -cn = c \cdot (-n)$$

Además

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = c$$

de modo que,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n},$$

y en consecuencia

$$f\left(\frac{1}{-n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) = -c \cdot \frac{1}{n} = c \left(\frac{1}{n}\right)$$

Por último, cualquier número racional puede escribirse en la forma  $m/n$ , siendo  $m$  un número natural y  $n$  un entero;

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right) = mc \cdot \frac{1}{n} = c \cdot \frac{m}{n}$$

17. Si  $f(x) = 0$  para todo  $x$ , entonces  $f$  satisface  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para todo  $x$  e  $y$  también  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$  para todo  $x$  e  $y$ . Supóngase ahora que  $f$  satisface estas dos propiedades, pero que  $f(x)$  no es siempre 0. Demostrar que

- (a) Demostrar que  $f(1) = 1$

Demostración.- Al ser  $f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) \cdot f(1)$  y  $f(a) \neq 0$  para algún  $a$ , resulta ser  $f(1) = 1$

- (b) Demostrar que  $f(x) = x$  si  $x$  es racional

Demostración.- Por el problema 16,  $f(x) = f(1) \cdot x = x$  para todo número racional  $x$ .

- (c) Demostrar que  $f(x) > 0$  si  $x > 0$ . (Esta parte es artificiosa, pero habiendo puesto atención a las observaciones filosóficas que van con los problemas de los dos últimos capítulos, se sabrá lo que hacer.)



Demostración.- Si  $c > 0$  entonces  $c = d^2$  para algún  $d$ , de modo que  $f(c) = f(d^2) = (f(d))^2 \geq 0$ . Por otro lado, no podemos tener  $f(c) = 0$ , ya que esto implicaría que

$$f(a) = f\left(c \cdot \frac{a}{c}\right) = f(c) \cdot f\left(\frac{a}{c}\right) = 0 \quad \text{para todo } a$$

(d) Demostrar que  $f(x) > f(y)$  si  $x > y$

Demostración.- Si  $x > y$ , entonces  $x - y > 0$ , luego por la parte (c) tenemos que  $f(x) - f(y) > 0$ .

(e) Demostrar que  $f(x) = x$  para todo  $x$ . Indicación: Hágase uso del hecho de que entre dos números cualesquiera existe un número racional

Demostración.- Sea  $f(x) > x$  para algún  $x$ . Elíjase un número racional  $r$  con  $x < r < f(x)$ . Entonces, según las partes (b) y (d),

$$f(x) < f(r) = r < f(x),$$

lo cual constituye una contradicción. Análogamente, es imposible que  $f(x) < x$  ya que si  $f(x) < r < x$  entonces

$$f(x) < r = f(r) < f(x).$$

18. ¿Qué condiciones precisas deben satisfacer  $f, g, h$  y  $k$  para que  $f(x)g(y) = h(x)k(y)$  para todo  $x$  e  $y$ ?

Respuesta.- Se satisface la ecuación si  $f = 0$  ó  $g = 0$  y  $h = 0$  ó  $k = 0$ . De no ocurrir esto, existirá algún  $x$  con  $f(x) \neq 0$  y algún  $y$  con  $g(y) \neq 0$ , entonces  $0 \neq f(x)g(y) = h(x)k(y)$ , de modo que también se tendrá  $h(x) \neq 0$  y  $k(y) \neq 0$ . Haciendo  $\alpha = h(x)/f(x)$ , tenemos también  $h(x') = \alpha f(x')$  para todo  $x'$  para todo  $x'$ . Tenemos pues. que  $g = \alpha k$  y  $h = \alpha f$  para cierto número  $\alpha = 0$ .

19. (a) Demostrar que no existen funciones  $f$  y  $g$  con alguna de las propiedades siguientes:

(i)  $f(x) + g(y) = xy$  para todo  $x$  e  $y$ .

Demostración.- Si  $f(x) + g(y) = xy \forall x, y$  entonces para  $y = 0$  tenemos  $f(x) + g(0) = 0 \forall x$ , de donde  $f(x) = -g(0)$ , e implica que  $f$  es una función constante. Luego

$$xy = f(x) + g(y) = -g(0) + g(y) \forall y$$

porque  $f(x)$  es constante para cualquier  $x$ . Por otro lado sabemos que  $g(0)$  es una constante y  $g(y)$  no depende de  $x$ , sin embargo su diferencia está dada por  $g(y) - g(0) = xy$ . Y finalmente sea  $x = 0$  entonces  $g(y) = g(0) \forall y$ , por lo tanto se concluye que

$$xy = f(x) + g(y) = -g(0) + g(0) = 0 \forall x, y$$

ya que si tomamos  $x = y = 1$  implica que  $1 = 0$  donde llegamos a un absurdo.

(II)  $f(x) \cdot g(y) = x + y$  para todo  $x$  e  $y$ .

Demostración.- Sea  $y = 0$ , obtenemos  $f(x) = x/g(0)$ . De la misma forma si  $x = 0$ , entonces  $g(y) = y/f(0)$ . Por lo tanto

$$f(x) \cdot g(y) = x + y \implies \frac{x}{g(0)} \cdot \frac{y}{f(0)} = x + y \quad \forall x, e \forall y$$

Supongamos que  $y = 0$ , entonces  $\frac{x}{g(0)} \cdot \frac{0}{f(0)} = x \quad \forall x \implies 0 = x \quad \forall x$ , lo cual es absurdo.

(b) Hallar funciones  $f$  y  $g$  tales que  $f(x + y) = g(xy)$  para todo  $x$  e  $y$ .

Respuesta.- Sean  $f$  y  $g$  la misma función constante. Argumentos similares a los utilizados en la parte (a) muestran que estas son las únicas opciones posibles.

20. (a) Hallar una función  $f$  que no sea constante y tal que  $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$ .

Respuesta.- Podemos ver que la función  $f(x) = x$  satisface la condición  $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$

(b) Supóngase que  $f(y) - f(x) \leq (y - x)^2$  para todo  $x$  e  $y$ . (¿ Por qué esto implica  $|f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2$ ?) Demostrar que  $f$  es una constante. Indicación: Divídase el intervalo  $[x, y]$  en  $n$  partes iguales.

Demostración.- Supongamos, que puede probar que la siguiente desigualdad es cierta para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ , y  $n \in \mathbb{N}$ :

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{(y - x)^2}{n}$$

Ahora mantengamos los valores de  $x$  e  $y$  constantes. Podemos suponer  $x \neq y$  (porque si  $x = y$  entonces  $f(x) = f(y)$  y así terminaríamos la demostración). Entonces, en el lado derecho, el numerador  $(y - x)^2$  es distinto de 0, y mayor a cero. Por lo tanto, podemos dividir por  $(y - x)^2$ , de donde:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{(y - x)^2} \leq \frac{1}{n}$$

En el lado izquierdo tenemos un número no negativo que es constante (ya que  $x$  e  $y$  se mantienen constantes, el numerador no es negativo y el denominador es positivo). Este número es menor que cada fracción  $\frac{1}{n}$  para todos los números naturales  $n \geq 1$ . Esto implica que el lado izquierdo es igual a cero:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{(y - x)^2} = 0$$

una vez mas multiplicamos por  $(y - x)^2$  entonces

$$|f(y) - f(x)| = 0,$$

de donde

$$|f(y) - f(x)| = 0 \implies f(y) = f(x)$$

Dado que esto es cierto para todos los valores  $x, y$  terminamos la demostración.

21. Demostrar o dar un contraejemplo de las siguientes proposiciones:

(a)  $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h.$

Demostración.- Esto es falso en general ya que si designamos a  $g$  y  $h$  la función identidad y  $f$  sea  $x^2$  entonces

$$[f \circ (g + h)](x) = f(g + h)(x) = f[g(x) + h(x)] = f(x + x) = f(2x) = 4x^2.$$

luego por la parte derecha de la ecuación se tendra:

$$[(f \circ g) + (f \circ h)](x) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = f[g(x)] + f[h(x)] = f(x) + g(x) = x^2 + x$$

De donde  $4x^2 \neq x^2 + x$

(b)  $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f.$

Demostración.- Por definición de composición de función tenemos

$$\begin{aligned} [(g + h) \circ f](x) &= (g + h)[f(x)] \\ &= g[f(x)] + h[f(x)] && \text{por definición} \\ &= (g \circ f)(x) + (h \circ f)(x) \\ &= [(g \circ f) + (h \circ f)](x) \end{aligned}$$

$$\text{Así } (g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f)$$

(c)  $\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ g.$

Demostración.- Por definición se tiene,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f \circ g}\right)(x) &= \frac{1}{(f \circ g)(x)} \\ &= \frac{1}{f[g(x)]} \\ &= \left(\frac{1}{f}\right)[g(x)] \\ &= \left(\frac{1}{f} \circ g\right)(x) \end{aligned}$$

$$\text{Así, } 1/(f \circ g) = (1/f) \circ g$$

(d)  $\frac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\frac{1}{g}\right).$

Demostración.- Esto es falso ya que si consideramos  $f(x) = x + 1$  y  $g(x) = x^2$ , entonces

$$\left(\frac{1}{f \circ g}\right)(x) = \frac{1}{(f \circ g)(x)} = \frac{1}{f[g(x)]} = \frac{1}{f(x^2)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

y por otro lado

$$\left[f \circ \left(\frac{1}{g}\right)\right](x) = f\left[\left(\frac{1}{g}\right)(x)\right] = f\left(\frac{1}{g(x)}\right) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} + 1$$

de donde  $\frac{1}{x^2 + 1} \neq \frac{1}{x^2} + 1$

22. (a) Supóngase que  $g = h \circ f$ . Demostrar que si  $f(x) = f(y)$ , entonces  $g(x) = g(y)$ .

Demostración.-  $g(x) = h(f(x)) = h(f(y)) = g(y)$  esto por definición e hipótesis.

- (b) Recíprocamente, supóngase que  $f$  y  $g$  son dos funciones tales que  $g(x) = g(y)$  siempre que  $f(x) = f(y)$ . Demostrar que  $g = h \circ f$  para alguna función  $h$ . Indicación: Inténtese definir  $h(z)$  cuando  $z$  es de la forma  $z = f(x)$  (Éstos son los únicos  $z$  que importan) y aplicar la hipótesis para demostrar que la definición es consistente.

Demostración.- Si  $z = f(x)$ , defínase  $h(z) = g(x)$ . Esta definición tiene sentido, ya que si  $z = f(x')$ , entonces  $g(x) = g(x')$  según la parte (a). Tenemos entonces, para todo  $x$  del dominio de  $f$ ,  $g(x) = h(f(x))$ .

23. Supóngase que  $f \circ g = I$  donde  $I(x) = x$ . demostrar que

- (a) Si  $x \neq y$ , entonces  $g(x) \neq g(y)$

Demostración.- Supongamos que  $x \neq y$  y  $g(x) = g(y)$  esto implica que  $x = I(x) = f(g(x)) = f(g(y)) = y$ . Donde vemos una contradicción.

- (b) Todo número  $b$  puede escribirse  $b = f(a)$  para algún número  $a$ .

Demostración.- Por hipótesis  $b = f(g(b))$  donde basta con poner  $a = g(b)$ .

24. (a) Supóngase que  $g$  es una función con la propiedad de ser  $g(x) \neq g(y)$  si  $x \neq y$ . Demuéstrese que existe una función  $f$  tal que  $f \circ g = I$

Demostración.- Es equivalente enunciar que si  $x = y$ , entonces  $g(x) = g(y)$ . en consecuencia del problema 22b.

- (b) Supóngase que  $f$  es una función tal que todo número  $b$  puede escribirse en la forma  $b = f(a)$  para algún número  $a$ . Demostrar que existe una función  $g$  tal que  $f \circ g = I$

Demostración.- Para cada  $x$ , elíjase un número  $a$  tal que  $x = f(a)$ . Llámese a este número  $g(x)$ . Entonces  $f(g(x)) = x = I(x)$  para todo  $x$ .

25. Hallar una función  $f$  tal que  $g \circ f = I$  para alguna función  $g$ , pero tal que no exista ninguna función  $h$  con  $f \circ h = I$

Respuesta.- Basta hallar una función  $f$  tal que  $f(x) \neq f(y)$  si  $x \neq y$ , pero tal que no todo número sea de la forma  $f(x)$ , pues entonces según el problema 24(a) existirá una función  $g$  con  $g \circ f = I$ , y

según el problema 23(b) no existiría ninguna función  $g$  con  $f \circ g = I$ . Una función que reúne estas condiciones es:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

ningún número de los comprendidos entre 0 y 1 es de la forma  $f(x)$ .

26. Supóngase  $f \circ g = I$  y  $h \circ f = I$ . Demostrar que  $g = h$ . Indicación: Aplíquese el hecho de que la composición es asociativa.

Demostración.- Sea  $h \circ f \circ g$  entonces  $h \circ (f \circ g) = h \circ I = h$ , como también  $h \circ f \circ g = (h \circ f) \circ g = I \circ g = g$ .

27. (a) Supóngase  $f(x) = x + 1$ . ¿Existen funciones  $g$  tales que  $f \circ g = g \circ f$ ?

Respuesta.- La condición  $f \circ g = g \circ f$  significa que  $f(x) + 1 = g(x + 1)$  para todo  $x$ . Existen muchas funciones  $g$  que satisfacen esta condición. La función  $g$  puede en efecto definirse arbitrariamente para  $0 \leq x < 1$  y para otros  $x$  pueden determinarse sus valores mediante esta ecuación.

- (b) Supóngase que  $f$  es una función constante. ¿Para qué funciones  $g$  se cumple  $f \circ g = g \circ f$ ?

Respuesta.- Si  $f(x) = c$  para todo  $x$ , entonces  $f \circ g = g \circ f$  si y sólo si  $c = f(g(x)) = g(f(x)) = g(c)$ , es decir,  $c = g(c)$ .

- (c) Supóngase que  $f \circ g = g \circ f$  para todas las funciones  $g$ . Demostrar que  $f$  es la función identidad  $f(x) = x$ .

Respuesta.- Si  $f \circ g = g \circ f$  para todo  $g$ , entonces se cumple esto en particular para todas las funciones constantes  $g(x) = c$ . Se sigue de la parte (b) que  $f(c) = c$  para todo  $c$ .

28. (a) Sea  $F$  el conjunto de todas las funciones cuyo dominio es  $\mathbb{R}$ . Demuéstrese que con las definiciones de  $+$  y  $\cdot$  dadas en este capítulo, se cumplen todas las propiedades  $P1 - P9$ , excepto  $P7$ , siempre que 0 y 1 se interpreten como funciones constantes.

Demostración.- Se comprueba fácilmente.

- (b) Demostrar que  $P7$  no se cumple.

Demostración.- Sea  $f$  una función con  $f(x) = 0$  para algún  $x$ , pero no para todo  $x$ . Entonces  $f \neq 0$ , pero claramente no existe ninguna función  $g$  con  $f(x) \cdot g(x) = 1$  para todo  $x$ .

- (c) Demostrar que no pueden cumplirse  $P10 - P12$ . En otros términos, demostrar que no existe ninguna colección  $P$  de funciones en  $F$ , tales que  $P10 - P12$  se cumplen para  $P$ . (Es suficiente, y esto simplificará las cosas, considere sólo funciones que sean 0, excepto en dos puntos  $x_0$  y  $x_1$ ).

Demostración.- Sean  $f$  y  $g$  dos funciones cuyos valores son todos 0 excepto en  $x_0$  y  $x_1$ , siendo  $f(x_0) = 1$ ,  $f(x_1) = 0$ ,  $g(x_0) = 0$ ,  $g(x_1) = 1$ . Ninguna de ellas es 0, de modo que o bien  $f$  o bien  $-f$  tendría que estar en  $P$  y lo mismo podría decirse de  $g$  o  $-g$ . Pero  $(\pm f)(\pm g) = 0$ , en contradicción con  $P_{12}$ .

- (d) Supóngase que se ha definido  $f < g$  en el sentido de que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x$ . ¿Cuáles de las propiedades  $P' - P'_{13}$  (del problema 1 – 8)? se cumplen ahora?

Respuesta.-  $P'_{11}$ ,  $P'_{12}$  y  $P'_{13}$  se cumplen.  $P'_{10}$  es falso; si bien se cumple a lo sumo una de las condiciones, o es necesariamente cierto que se tenga que cumplir por lo menos una de ellas. Por ejemplo, si  $f(x) > 0$  para algún  $x$  y  $y < 0$  para otro  $x$ , entonces ninguna de las condiciones  $f = 0$ ,  $f < 0$  ó  $f > 0$  para todo  $x$ .

- (e) si  $f < g$ , ¿Se cumple  $h \circ f < h \circ g$ ? ¿Es  $f \circ h < g \circ h$ ?

Respuesta.- No para el primer ejemplo; si  $h(x) = -x$ , entonces  $f < g$  implica, en realidad, que  $h \circ f > h \circ g$ . Si para el segundo, ya que  $f(h(x)) < g(h(x))$  para todo  $x$ .

### 3.2. Pares ordenados

**Definición 3.9.**  $(a, b) = \{a, a, b\}$

**Teorema 3.3.** Si  $(a, b) = (c, d)$  entonces  $a = c$  y  $b = d$

Demostración.- La hipótesis significa que

$$\{a, a, b\} = \{c, a, d\},$$

Ahora bien,  $\{a, a, b\}$  contiene justamente dos elementos  $a$  y  $a, b$  y  $a$  es el único elemento común a estos dos elementos de  $\{a, a, b\}$ . Por lo tanto,  $a = c$ . Así pues tenemos

$$\{a, a, b\} = \{a, a, d\},$$

y solamente queda por demostrar  $b = d$ . Conviene distinguir dos casos.

**Caso 1**  $b = a$ . En este caso,  $a, b = a$ , de modo que el conjunto  $\{a, a, b\}$  tiene en realidad un solo elemento que es  $a$ . Lo mismo vale para  $\{a, a, b\}$ , de modo que  $a, d = a$ , lo cual implica  $d = a = b$ .

**Caso 2.**  $b \neq a$ . En este caso,  $b$  pertenece a uno de los elementos de  $\{a, a, b\}$ , pero no al otro. Debe, por lo tanto cumplirse que  $b$  pertenece a uno de los elementos de  $\{a, a, b\}$ , pero no al otro. Esto solamente puede ocurrir si  $b$  pertenece a  $a, d$ , pero no a  $a$ ; así pues,  $b = a$  o  $b = d$ , pero  $b \neq a$ , con lo que  $b = d$ .

# 4

## Gráficas

**NOTA:** Siempre que se habla de un intervalo  $(a, b)$ , el número  $a$  es menor que el  $b$ .

**Ejemplo 4.1.** Hallar la función  $f$  cuya gráfica pasa por  $(a, b)$  y  $(c, d)$ . Esto equivale a decir que  $f(a) = b$  y  $f(c) = d$ .

Respuesta.- Si  $f$  ha de ser de la forma  $f(x) = \alpha x + \beta$ , entonces se debe tener

$$\alpha a + \beta = b,$$

$$\alpha c + \beta = d$$

por lo tanto,  $\alpha = (d - b)/(c - a)$  y  $\beta = b - [(d - b)/(c - a)]a$ , de manera que:

$$f(x) = \frac{d - b}{c - a}x + b - \frac{d - b}{c - a}a = \frac{d - b}{c - a}(x - a) + b, \quad \text{si } a \neq c$$

### 4.1. Problemas

1. Indíquese sobre una recta el conjunto de todas las  $x$  que satisfacen las siguientes condiciones. Dar también un nombre a cada conjunto, utilizando la notación para los intervalos ( en algunos casos será necesario también el signo  $\cup$ ).

(I)  $|x - 3| < 1$

Respuesta.-  $-1 < x - 3 < 1 \implies 2 < x < 4$

(II)  $|x - 3| \leq 1$

Respuesta.-  $2 \leq x \leq 4$

(III)  $|x - a| < \epsilon$

Respuesta.-  $a - \epsilon < x < a + \epsilon$

(IV)  $|x^2 - 1| < \frac{1}{2}$

Respuesta.-  $\pm\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

(V)  $\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{5}$

Respuesta.-  $x^2 - 4 \geq 0 \implies x \geq 2 \vee x \leq -2$

(VI)  $\frac{1}{1+x^2} \leq a$

Respuesta.-  $|x| \geq \pm\sqrt{\frac{1}{a} - 1}$

(VII)  $x^2 + 1 \geq 2$

Respuesta.-  $x \geq \pm 1$

(VIII)  $(x+1)(x-1)(x-2) > 0$

Respuesta.-  $x+1 \geq 0 \wedge x-1 > 0 \wedge x-2 > 0 \implies -1 < x < 1 \cup x > 2$

2. Existe un procedimiento muy útil para descubrir los puntos del intervalo cerrado  $[a, b]$  (Suponiendo como siempre que es  $a < b$ )

(a) Consideremos en primer lugar el intervalo  $[0, b]$ , para  $b > 0$ . Demostrar que si  $x$  está en  $[0, b]$ , entonces  $x = tb$  para cierto  $t$  con  $0 \leq t \leq 1$  ¿Cómo se puede interpretar el número  $t$ ? ¿Cuál es el punto medio del intervalo  $[0, b]$ ?

Demostración.- Sea  $0 \leq x \leq b$  entonces  $0 \leq \frac{x}{b} \leq 1$ , luego sabemos que  $0 \leq t \leq 1$  por lo tanto  $x = \frac{x}{b} \cdot b$ . Ya que  $t = \frac{x}{b}$ ,  $t$  representa la razón en la que  $x$  divide el intervalo  $[0, b]$ . Por último el punto medio del intervalo viene dado por  $b/2$ .

(b) Demostrar ahora que si  $x$  está en  $[a, b]$ , entonces  $x = (1-t)a + tb$  para un cierto  $t$  con  $0 \leq t \leq 1$ . Ayuda: esta expresión se puede poner también en la forma  $a + t(b-a)$ . ¿Cuál es el punto medio del intervalo  $[a, b]$ ? ¿Cuál es el punto que está a  $1/3$  de camino de  $a$  a  $b$ ?

Demostración.- Sea  $a \leq x \leq b$  entonces  $0 \leq x-a \leq b-a$ , por la parte (a) se tiene  $x-a = t(b-a)$  de donde  $x = a + t(b-a)$

Luego el punto medio del intervalo viene dado por  $a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$  y la tercera parte viene dado por  $a + \frac{b-a}{3} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$ .



(c) Demostrar a la inversa que si  $0 \leq t \leq 1$ , entonces  $x = (1-t)a + tb$  esta en  $[a, b]$

Demostración.- Sea  $0 \leq t \leq 1$  entonces  $a \leq bt \leq b$  y  $0 \leq at \leq a$  entonces  $0 \leq bt - at \leq b - a$  de donde  $a \leq bt - at + a \leq b$  así queda demostrado que  $a \leq (1-t)a + tb \leq b$ .

(d) Los puntos del intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces  $x = (1-t)a + tb$  para  $0 < t < 1$ .

Demostración.- la demostración es similar al inciso (b).

3. Dibujar el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  que satisface las siguientes condiciones. (En la mayor parte de los casos la imagen será una parte apreciable del plano y no simplemente una recta o una curva.)

4. Dibujar el conjunto de los puntos  $(x, y)$  que satisfacen las siguientes condiciones:

5. Dibujar el conjunto de los puntos  $(x, y)$  que satisfacen las siguientes condiciones:

6. (a) Demostrar que la recta que pasa por  $(a, b)$  y de pendiente  $m$  es la gráfica de la función  $f(x) = m(x - a) + b$ . Esta fórmula, conocida como forma punto-pendiente, es mucho más conveniente que la expresión equivalente  $f(x) = mx + (b - ma)$ ; con la formula punto-pendiente queda inmediatamente claro que la pendiente es  $m$  y que el valor de  $f$  en  $a$  es  $b$ .

Demostración.- Obsérvese simplemente que la gráfica de  $f(x) = m(x - a) + b = mx + (b - ma)$  es una recta de pendiente  $m$ , que pasa por el punto  $(a, b)$ .

(b) Para  $a \neq c$ , demostrar que la recta que pasa por  $(a, b)$  y  $(c, d)$  es la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{d-b}{c-a}(x-a) + b$$

Demostración.- Se sabe que la pendiente esta dado por  $\frac{d-b}{c-a}$  ya que  $a \neq c$  y por la parte (a) queda demostrado la proposición.

(c) ¿Cuáles son las condiciones para que las gráficas de  $f(x) = mx + b$  y  $g(x) = m'x + b'$  sean rectas paralelas?

Respuesta.- Cuando  $m = m'$  y  $b \neq b'$ .

7. (a) Si  $A$ ,  $B$  y  $C$ , siendo  $A$  y  $B$  distintos de 0, son números cualesquiera, demostrar que el conjunto de todos los  $(x, y)$  que satisfacen  $Ax + By + C = 0$  es una recta (que puede ser vertical). Indicación: Aclarar primero cuándo se tiene una recta vertical.

Demostración.- Si  $B = 0$  y  $A \neq 0$ , entonces el conjunto es la recta vertical formada por todos los puntos  $(x, y)$  con  $x = -\frac{C}{A}$ . Si  $B \neq 0$ , el conjunto es la gráfica de  $f(x) = (-A/B)x + (-C/B)$ .

- (b) Demostrar la inversa que toda recta, incluyendo las verticales, puede ser descrita como el conjunto de todos los  $(x, y)$  que satisfacen  $Ax + By + C = 0$ .

Demostración.- Los puntos  $(x, y)$  de la vertical con  $x = a$  son precisamente los que satisfacen  $1 \cdot x + 0 \cdot y + (-a) = 0$ . Los puntos  $(x, y)$  de la gráfica de  $f(x) = mx + b$  son precisamente los que satisfacen  $(-m)x + 1 \cdot y + (-b) = 0$ .

8. (a) Demostrar que las gráficas de las funciones

$$f(x) = mx + b$$

$$g(x) = nx + c,$$

son perpendiculares si  $mn = -1$ , calculando los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo de la figura 29. (¿Por qué no se restringe la generalidad al considerar este caso especial en que las rectas se cortan en el origen?).

Demostración.- Sea  $\sqrt{(1-1)^2 + (n-m)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-m)^2} + \sqrt{(1-0)^2 + (n-0)^2}$  entonces  $-2mn = 2 \Rightarrow mn = -1$ . Esto demuestra el resultado cuando  $b = c = 0$ . El caso general se deduce de este caso particular, ya que la perpendicular depende sólo de la pendiente.

- (b) Demostrar que las dos rectas que consisten en todos los puntos  $(x, y)$  que satisfacen las condiciones

$$Ax + By + C = 0$$

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

son perpendiculares si y sólo si  $AA' + BB' = 0$ .

Demostración.- Si  $B \neq 0$  y  $B' \neq 0$ , estas rectas son las gráficas de

$$f(x) = (-A/B)x - C/B$$

$$f(x) = (-A'/B')x - C'/B'$$

de modo que, según la parte (a), las rectas son perpendiculares si y sólo si

$$\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \left(\frac{A'}{B'}\right) = -1$$

por lo tanto  $AA' + BB' = 0$ . Si  $B = 0$  y  $A \neq 0$ , entonces la primera recta es vertical, de modo que la segunda le es perpendicular si y sólo si  $A' = 0$ , lo cual ocurre exactamente cuando  $AA' + BB' = 0$ . Análogamente para el caso  $B'$ .

9. (a) Utilizando el problema 1 – 19 demostrar que

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

Demostración.- Esta desigualdad tiene lugar si y sólo si se cumple la que se obtiene al elevar al cuadrado ambos miembros,

$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

lo cual, como puede observarse, es equivalente a la desigualdad de Schwartz.

(b) Demostrar que

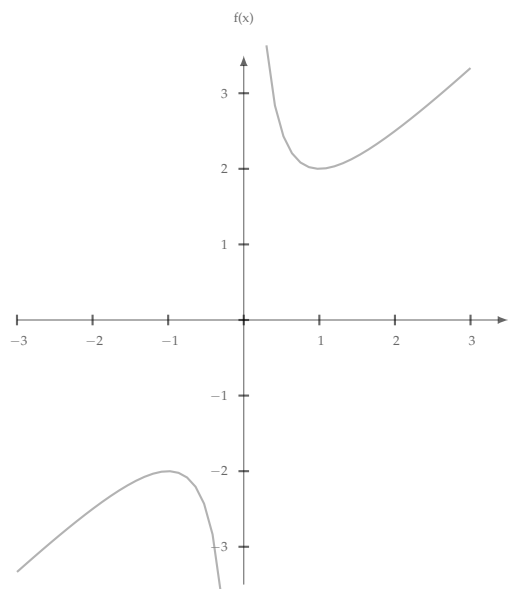
$$\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \leq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

Interpretar esta desigualdad geométrica (llamada desigualdad triangular) ¿En qué casos se satisface la igualdad?

Demostración.- Sustituyendo  $x_1 = x_2 - x_1$ ,  $x_2 = y_2 - y_1$ ,  $y_1 = x_3 - x_2$ ,  $y_2 = y_3 - y_2$  en (a) queda la ecuación esperada. Esta ecuación nos dice que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

10. Esbozar las gráficas de las siguientes funciones, trazando un número de puntos suficiente para obtener una buena idea del aspecto general. (Una parte del problema consiste en hacer una estimación acerca de cuántos puntos serían suficientes; las preguntas que se plantean tienen por objeto hacer ver que vale más discurrir un poco que trazar centenares de puntos.)

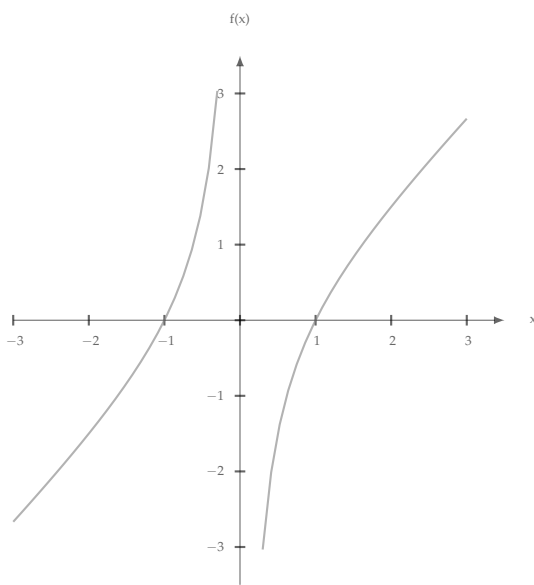
(i)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  (¿Que ocurre cuando  $x$  está próximo a 0 y cuando  $x$  es grande? ¿Qué posición ocupa la gráfica en relación con la gráfica de la función identidad? ¿Por qué es suficiente considerar primero sólo  $x$  positivos?)



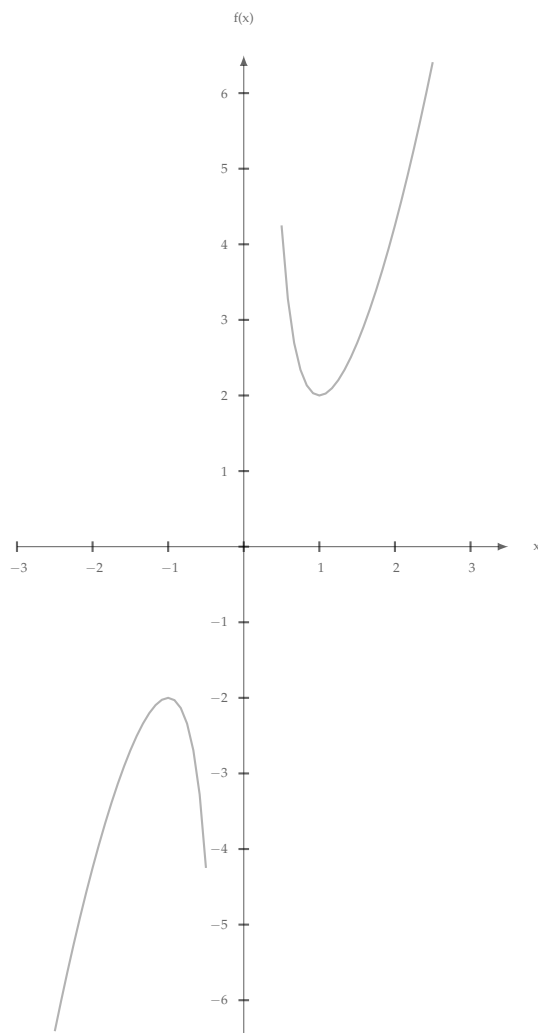
Respuesta.- Cuando  $x$  es próximo a 0 la función tiende al infinito, contrariamente a  $x$  grande que tiende a 1. Con respecto a la gráfica de la función identidad ocupa una similitud interesante. Es suficiente considerar solo los  $x$  positivos ya que se asimila los  $x$  negativos como una imagen de

función impar.

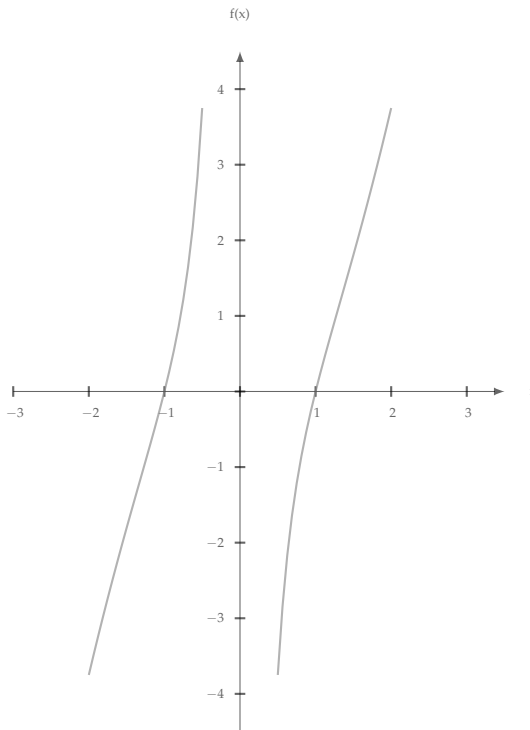
(II)  $f(x) = x - \frac{1}{x}$



(III)  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$



(IV)  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$



11. Describir los rasgos generales de la gráfica de  $f$  si

(I)  $f$  es par.

Respuesta.- La gráfica es simétrica respecto al eje vertical.

(II)  $f$  es impar.

Respuesta.- La gráfica es simétrica respecto al origen.

(III)  $f$  es no negativa.

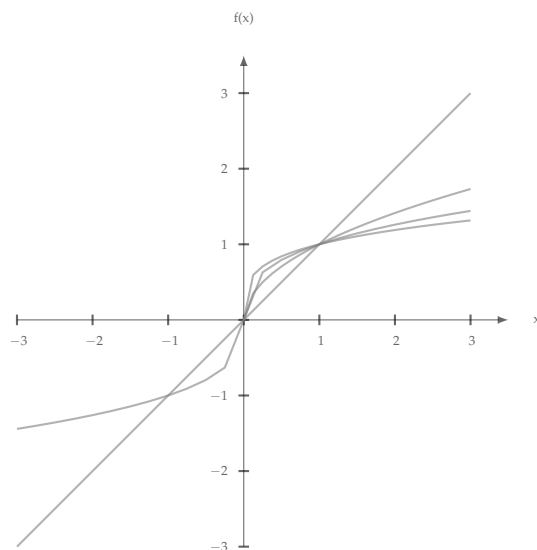
Respuesta.- La gráfica queda sobre el eje horizontal.

(IV)  $f(x) = f(x + a)$  para todo  $x$  (las funciones que tienen esta propiedad reciben el nombre de periódicas con periodo  $a$ ).

Respuesta.- La gráfica de  $f$  repite una y otra vez la parte comprendida entre 0 y  $a$ .

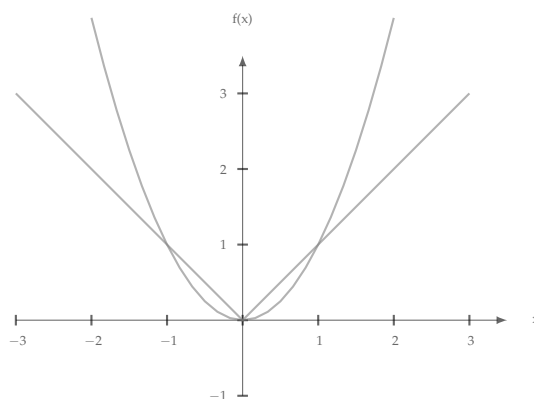
12. Trazar las funciones  $f(x) = \sqrt[m]{x}$  para  $m = 1, 2, 3, 4$ . (Hay una manera fácil de hacer esto, utilizando la figura 14. Recuerdese, sin embargo, que  $\sqrt[m]{x}$  significa la raíz  $m$ -ésima positiva de  $x$  cuando  $m$  es par; se debe también tener presente que existirá una diferencia notable entre las gráficas cuando  $m$  es par y cuando  $m$  es impar.)

Respuesta.-



13. (a) Trazar  $f(x) = |x|$  y  $f(x) = x^2$

Respuesta.-



- (b) Trazar  $f(x) = |\sin x|$  y  $f(x) = \sin^2 x$  (Existe una diferencia importante entre las gráficas, diferencia que todavía no podemos ni siquiera describir con rigor. Inténtese descubrir en qué consiste; la parte (a) está destinada a servir de orientación).

Respuesta.- La gráfica oscila como corresponde similar a (a) con respecto a la analogía.

14. Describir la gráfica de  $g$  en función de la gráfica de  $f$  si:

(I)  $g(x) = f(x) + c$ .

Respuesta.- La gráfica de  $g$  es la gráfica de  $f$  trasladada hacia arriba en  $c$  unidades.

(II)  $g(x) = f(x + c)$ .

Respuesta.- La gráfica de  $g$  es la gráfica de  $f$  trasladada  $c$  unidades hacia la izquierda si  $c > 0$ .

(III)  $g(x) = cf(x)$

Respuesta.- La altura de la gráfica de  $f$  es multiplicada invariablemente por el factor  $c$ . Si  $c = 0$  esto significa que  $g = 0$ ; si  $c > 0$ , las distancias al eje horizontal son afectadas por el factor, pero conservan el mismo sentido;; si  $c < 0$  se invierten los sentidos.

(IV)  $g(x) = f(cx)$

Respuesta.- La gráfica de  $f$  resulta contraída mediante el factor  $c$  si  $c > 0$ ; si  $c < 0$ , la contracción se combina con una simetría respecto al eje vertical. Si  $c = 0$ , entonces  $g$  es una función constante,  $g(x) = f(0)$ .

(V)  $g(x) = f(1/x)$

Respuesta.- Todo lo que ocurre lejos de 0, ocurre también cerca, y viceversa, lo cual queda ampliamente ilustrado con gráfica de  $g(x) = \sin(1/x)$ .

(VI)  $g(x) = f(|x|)$

Respuesta.- La gráfica de  $g$  consiste en la parte de la gráfica a la derecha del eje vertical, junto con la simetría de dicha parte respecto al mismo eje vertical.

(VII)  $g(x) = |f(x)|$

Respuesta.- La gráfica de  $g$  se obtiene levantando hacia arriba todas aquellas partes de la gráfica de  $f$  que quedan por debajo del eje horizontal.

(VIII)  $g(x) = \max(f, 0)$

Respuesta.- La gráfica de  $g$  se obtiene recortando aquellas partes de la gráfica de  $f$  que se encuentran por debajo del eje horizontal.

(IX)  $g(x) = \min(f, 0)$

Respuesta.- La gráfica de  $g$  se obtiene recortando las partes de la gráfica de  $f$  que quedan por encima del eje horizontal.

(X)  $g(x) = \max(f, 1)$

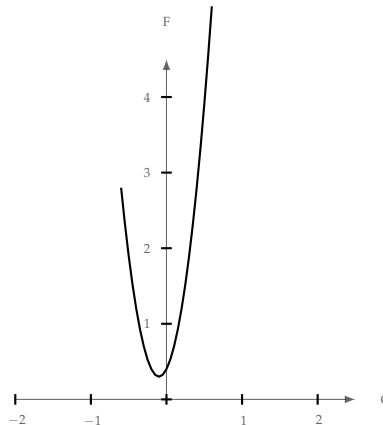
Respuesta.- La gráfica de  $g$  se obtiene recortando la parte de la gráfica de  $f$  que queda por debajo de la horizontal de altura 1 sobre el eje.



15. Trazar la gráfica de  $(x) = ax^2 + bx + c$ . Indicación: utilizar los métodos del problema 1 – 18.

Respuesta.- Al ser

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a} \right) \right]$$



16. Supóngase que  $A$  y  $C$  no son cero a la vez. Demostrar que el conjunto de todos los  $(x, y)$  que satisfacen

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$$

es o bien una parábola, una elipse o una hipérbola (o posiblemente  $\emptyset$ ). El caso  $C = 0$  es en esencia el problema 15 y el caso  $A = 0$  no es más que una variante. Considerar por separado los casos en que  $A$  y  $B$  son a la vez positivos o negativos y en que uno de ellos es positivo y el otro negativo.

Demostración.- Supongamos que  $C = 0$ , donde se tiene la ecuación

$$Ax^2 + Bx + Dy + E = 0$$

para todo  $(x, y)$ . Si  $D \neq 0$  entonces

$$y = -\frac{A}{D}x^2 - \frac{B}{D}x - \frac{E}{D}$$

por lo que el conjunto de todos  $(x, y)$  que satisfacen esta ecuación es el mismo que la gráfica de  $f(x) = (-A/D)x^2 - (B/D)x - (E/D)$ , el cual es una parábola, como se ve en el ejercicio 15.

Si  $D = 0$ , tenemos la ecuación  $Ax^2 + Bx + E = 0$ , ( $A \neq 0$ ), que puede tener cero, una o dos soluciones para  $x$ ; en este caso, el conjunto de todos  $(x, y)$  que satisfacen la ecuación es  $\emptyset$ , una línea recta o dos líneas rectas paralelas. Similarmente, si  $A = 0$  entonces tenemos una parábola nuevamente. Cuando  $A, C \neq 0$  podemos escribir la ecuación como:

$$A \left( x + \frac{B}{2A} \right)^2 + C \left( y + \frac{D}{2C} \right)^2 = F$$

para algún  $F$ .

Cuando  $A = C > 0$  tenemos un círculo, a menos que  $F = 0$ , en cuyo caso tenemos un punto es decir un círculo de radio 0, o  $F < 0$ , en cuyo caso tenemos  $\emptyset$  en general. Cuando  $A, C > 0$  tenemos una elipse no necesariamente centrada en el origen. No es necesario considerar por separado el caso  $A, C < 0$  ya que tenemos la misma situación, reemplazando  $F$  por  $-F$ .

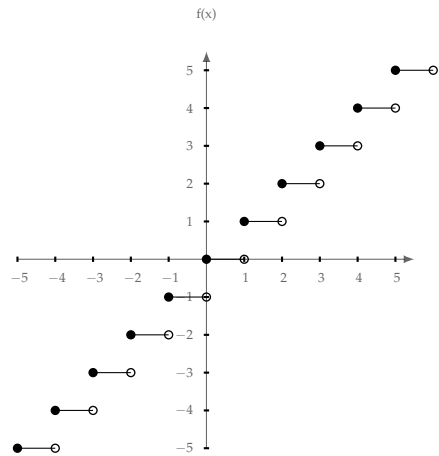
Cuando  $A$  y  $C$  tienen signos diferentes, tenemos una hipérbola para  $F \neq 0$ , donde hacia donde apunte depende del signo de  $A, C$  y  $F$ . Para  $F = 0$  tenemos la ecuación

$$x + \frac{B}{2A} = \pm \sqrt{\frac{-C}{A}} \left( y + \frac{D}{2C} \right)$$

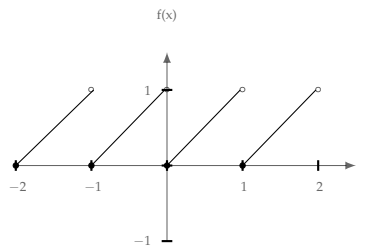
lo que da dos líneas intersectadas es decir una hipérbola degenerada.

17. Por  $[x]$  se designa el mayor entero que es  $\leq x$ . Así,  $[2.1] = [2] = 2$  y  $[-0.9] = [-1.2] = -1$

(I)  $f(x) = [x]$



(II)  $f(x) = x - [x]$



(III)  $f(x) = \sqrt{x - [x]}$

(IV)  $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

(V)  $f(x) = \left[ \frac{1}{x} \right]$

(VI)  $f(x) = \frac{1}{\left[ \frac{1}{x} \right]}$

18. Trazar la gráfica de las funciones siguientes:

(a)  $f(x) = x$ , donde  $x$  es la distancia de  $x$  al entero más próximo

(b)  $f(x) = 2x$

(c)  $f(x) = x + \frac{1}{2}2x$

(d)  $f(x) = 4x$

(e)  $x + \frac{1}{2}2x + \frac{1}{4}4x$

19. Describir lo mejor que se pueda las gráficas de las funciones siguientes.

(i)  $f(x)$  = el primer número del desarrollo decimal de  $x$ .

(ii)  $f(x)$  = el segundo número del desarrollo decimal de  $x$ .

(iii)  $ff(x)$  = el número de sietes del desarrollo decimal de  $x$  si este número es finito, y 0 en el caso contrario.

(iv)  $f(x) = 0$  si el número de sietes del desarrollo decimal de  $x$  es finito y 1 en el caso contrario.

(v)  $f(x)$  = el número obtenido sustituyendo todas las cifras del desarrollo decimal de  $x$  que vienen después del primer 7 si la hay por 0.

(vi)  $f(x) = 0$  si 1 no aparece en el desarrollo decimal de  $x$ , y  $n$  si 1 aparece por primera vez en el  $n$ -ésimo lugar.

20. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ racional en forma irreducible} \end{cases}$$

21. (a) Los puntos de la gráfica de  $f(x) = x^2$  son los de la forma  $(x, x^2)$ . Demostrar que cada uno de tales puntos equidista del punto  $(0, \frac{1}{4})$  y de la gráfica de  $g(x) = -\frac{1}{4}$ .

Demostrar.- Supongamos que la distancia  $d_1 = d_2$  siendo  $d_1$  la distancia entre  $(x, x^2)$  y  $(0, \frac{1}{4})$  y  $d_2$  la distancia entre  $(x, x^2)$  y  $(x, -\frac{1}{4})$  entonces

$$(x-0)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2$$

por lo tanto queda demostrada la proposición.

- (b) Dado un punto  $P = (\alpha, \beta)$  y una recta horizontal  $L$ , gráfica de la función  $g(x) = \gamma$ , demostrar que el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  que equidistan de  $P$  y  $L$  es la gráfica de una función de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Demostración.- El punto  $(x, y)$  satisface esta condición si y sólo si

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (y - \gamma)^2$$

es decir

$$y = \left(\frac{1}{2\beta - 2\gamma}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha}{\gamma - \beta}\right)x + \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\beta - 2\gamma}\right)$$

siempre que  $\beta \neq \gamma$ .

22. (a) Demostrar que el cuadrado de la distancia de  $(c, d)$  a  $(x, mx)$  es

$$x^2(m^2 + 1) + x(-2md - 2c) + d^2 + c^2$$

Utilizando el problema 1 – 18 para encontrar el mínimo de estos números demostrar que la distancia de  $(c, d)$  a la gráfica  $f(x) = mx$  es

$$|cm - d| / \sqrt{m^2 + 1}$$

Demostración.- La demostrar de la primera parte es sencilla si tomamos  $(x - c)^2 + (mx - d)^2$ .

Luego según 1 – 18 el mínimo de dos números se encuentra mediante  $c - \frac{b^2}{4a}$  se tiene  $d^2 + c^2 - \frac{(-2md - 2c)^2}{4(m^2 + 1)}$  resolviendo nos queda  $\frac{(cm - d)^2}{m^2 + 1}$ .

- (b) Hallar la distancia de  $(c, d)$  a la gráfica de  $f(x) = x + b$ . Reducir este caso a la parte (a).

Respuesta.- La distancia de  $(c, d)$  a la gráfica de  $f$  es la misma que la distancia de  $(c, d - b)$  a la gráfica de  $g(x) = mx$ . Entonces por la parte (a), nos queda

$$\frac{|cm - d + b|}{m^2 + 1}$$

.

23. (a) Utilizando el problema 22, demostrar que los números  $x'$  e  $y'$  indicados en la figura 31 vienen dados por

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y,$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

Demostración.- Debido a que todos los ángulos que forman estas rectas son  $45^\circ$  se tiene  $f(x) = -x$  y  $g(x) = x$  entonces por el problema anterior nos queda

$$x' = \frac{|-x-y|}{\sqrt{2}} = |-1| \cdot \left| \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \right|,$$

$$y' = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right|$$

- (b) Demostrar que el conjunto de todos los  $(x, y)$  con  $(x'/\sqrt{2})^2 - (y'/\sqrt{2})^2 = 1$  es lo mismo que el conjunto de todos los  $(x, y)$  con  $xy = 1$ .

Demostración.- Al ser

$$\frac{x'}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2},$$

$$\frac{y'}{\sqrt{2}} = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

luego

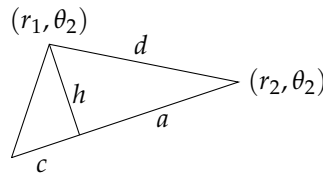
$$\begin{aligned} 1 &= \left( \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right)^2 - \left( -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right)^2 \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2} - \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2} \right) \\ &= xy \end{aligned}$$

## 4.2. Problemas

1. Demostrar que si dos puntos tienen por coordenadas polares  $(r_1, \theta_1)$  y  $(r_2, \theta_2)$ , la distancia  $d$  entre ellos viene dada por

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Demostración.-



Por el teorema de Pitágoras se tiene  $d^2 = a^2 + h^2$  y  $r_1^2 = h^2 + c^2$  entonces  $d^2 = a^2 + r_1^2 - c^2$ . Luego  $r_2 = c + a$  y por lo tanto  $d^2 = (r_2 - c)^2 + r_1^2 - c^2 \Rightarrow d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$ . Nótese que  $c = r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$  y por lo tanto

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$



# 5

## Limites

**Definición 5.1.** La función  $f$  tiende hacia el límite  $l$  en  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ) significa: para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Existe algún  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe algún  $x$  para el cual es  $0 < |x - a| < \delta$ , pero no  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

**Teorema 5.1.** Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en  $a$ . En otros términos si  $f$  tiende hacia  $l$  en  $a$ , y  $f$  tiende hacia  $m$  en  $a$ , entonces  $l = m$ .

Demostración.- Puesto que  $f$  tiende hacia  $l$  en  $a$ , sabemos que para todo  $\epsilon > 0$  existe algún número  $\delta_1 > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta_1$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Sabemos también, puesto que  $f$  tiende hacia  $m$  en  $a$ , que existe algún  $\delta_2 > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta_2$ , entonces  $|f(x) - m| < \epsilon$ .

Hemos empleado dos números  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , ya que no podemos asegurar que el  $\delta$  que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon \text{ y } |f(x) - m| < \epsilon$$

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un  $\epsilon > 0$  particular para el cual las dos condiciones  $|f(x) - l| < \epsilon$  y  $|f(x) - m| < \epsilon$  no puedan cumplirse a la vez si  $l \neq m$ .

Si  $l \neq m$ , de modo que  $|l - m| > 0$  podemos tomar como  $\epsilon$  a  $|l - m|/2$ . Se sigue que existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{|l - m|}{2} \text{ y } |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2}$$

Esto implica que para  $0 < |x - a| < \delta$  tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2} + \frac{|l - m|}{2} = |l - m|$$

El cual es una contradicción.

**Lema 5.1.** Si  $x$  está cerca de  $x_0$  e  $y$  está cerca de  $y_0$ , entonces  $x + y$  estará cerca de  $x_0 + y_0$ ,  $xy$  estará cerca de  $x_0 y_0$  y  $1/y$  estará cerca de  $1/y_0$ .

(1) Si  $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$  y  $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$  entonces  $|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \epsilon$ .

Demostración.-

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(2) Si  $|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}\right)$  y  $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)}$  entonces  $|xy - x_0 y_0| < \epsilon$ .

Demostración.- Puesto que  $|x - x_0| < 1$  se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1,$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

así pues

$$\begin{aligned} |xy - x_0 y_0| &= |x(y - y_0) + y_0(x - x_0)| \\ &\leq |x| \cdot |y - y_0| + |y_0| \cdot |x - x_0| \\ &< (1 + |x_0|) \cdot \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)} + |y_0| \cdot \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Notemos que  $\frac{|y_0|}{|y_0| - 1} < 1$ , por lo tanto  $\frac{|y_0|}{|y_0| - 1} \cdot \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$ .

(3) Si  $y_0 \neq 0$  y  $|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right)$  entonces  $y \neq 0$  y  $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \epsilon$ .

Demostración.- Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

de modo que  $-|y| < -\frac{|y_0|}{2} \implies |y| > |y_0|/2$ . En particular,  $y \neq 0$ , y

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} = \frac{1}{|y|} \cdot \frac{|y_0 - y|}{|y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\epsilon|y_0|^2}{2} = \epsilon$$



**Teorema 5.2.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ , entonces

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + m$

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = l \cdot m$

Además, si  $m \neq 0$ , entonces

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}$

Demostración.- La hipótesis significa que para todo  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \epsilon$$

Esto significa (ya que después de todo,  $\epsilon/2$  es también un número positivo) que existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea ahora  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $0 < |x - a| < \delta_1$  y  $0 < |x - a| < \delta_2$  se cumplen las dos, de modo que es a la vez

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

pero según la parte (1) del lema anterior esto implica que  $|(f + g)(x) - (l + m)| < \epsilon$ .

Para demostrar (2) procedemos de la misma manera, después de consultar la parte (2) del lema. Si  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m| + 1)}\right),$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2(|l| + 1)}$$

Pongamos de nuevo  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces

$$|f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m| + 1)}\right) \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\delta}{2(|l| + 1)}$$

Así pues, según el lema,  $|(f \cdot g)(x) - l \cdot m| < \epsilon$ , y esto demuestra (2).

Finalmente, si  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\epsilon|m|^2}{2}\right)$$

Pero según la parte (3) del lema, esto significa, en primer lugar que  $g(x) \neq 0$ , de modo que  $(1/g)(x)$  tiene sentido, y en segundo lugar que

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \epsilon$$

Esto demuestra (3).

**Definición 5.2.**  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

La condición  $0 < x - a < \delta$  es equivalente a  $0 < |x - a| < \delta$  y  $x > a$

**Definición 5.3.**  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

**Definición 5.4.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un número  $N$  grande, que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

### 5.1. Problemas

1. Hallar los siguientes límites (Estos límites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

$$(I) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$(II) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 2^2 + 4 + 4 = 12$$

$$(III) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{3^3 - 8}{3 - 2} = 19$$

$$(IV) \lim_{x \rightarrow y} \frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = ny^{n-1}$$

$$(V) \lim_{y \rightarrow x} \frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = nx^{n-1}$$

$$(VI) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a+h})^2 - (\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2. Hallar los límites siguientes:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1^2 - (\sqrt{x})^2}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = 0$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}$$

3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un  $\delta$  tal que,  $|f(x) - l| < \epsilon$  para todo  $x$  que satisfice  $0 < |x - a| < \delta$

$$(i) f(x) = x^4; l = a^4$$

Respuesta.- Por la parte (2) del lema anterior se tiene

$$|x^2 - a^2| < \min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2 + 1)} \right).$$

Si aplicamos una vez mas la parte (2) del lema obtenemos

$$|x - a| < \min \left( 1, \frac{\min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2 + 1)} \right)}{2(|a| + 1)} \right) = \min \left( 1, \frac{\epsilon}{4(|a|^2 + 1)(|a| + 1)} \right) = \delta$$

$$(ii) f(x) = \frac{1}{x}; a = 1, l = 1$$

Respuesta.- Por la parte (3) del lema se tiene  $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \epsilon$  por lo tanto  $|y - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right)$

$$(iii) f(x) = x^4 + \frac{1}{x}; a = 1, l = 2$$

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene  $\left| \left( x^4 + \frac{1}{x} \right) - (1 + 1) \right| < \epsilon$  de donde

$$|x^4 - 1| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego por el inciso (i) y (ii)

$$|x - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right) \quad y \quad |x - 1| < \min \left( 1, \frac{\min \left( \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right)}{2(1 + 1)} \right) \implies |x - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{4}, 1, \frac{\epsilon}{32} \right)$$

y por lo tanto

$$|x - 1| < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{32}\right) = \delta$$

(iv)  $f(x) = \frac{x}{1 + \sin^2 x}$ ;  $a = 0$ ,  $l = 0$

Respuesta.- Sea  $\left|\frac{x}{1 + \sin^2 x}\right| < \epsilon$  y  $|x| < \delta$  pero  $\left|\frac{x}{1 + \sin^2 x}\right| \leq |x|$  por lo tanto  
 $\left|\frac{x}{1 + \sin^2 x}\right| \leq |x| < \delta = \epsilon$

(v)  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ;  $a = 0$ ,  $l = 0$

Respuesta.- Sea  $|\sqrt{|x|}| < \epsilon$  entonces  $|(|x|)^{1/2}| = (\sqrt{x^2})^{1/2} = [(x^2)^{1/2}]^{1/2} = \sqrt{x} < \epsilon$ , luego sabemos que la raíz cuadrada de  $x$  debe ser siempre mayor o igual a 0 por lo tanto  $|x| < \epsilon^2$ , de donde concluimos que  $\delta = \epsilon^2$

(vi)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $a = 1$ ,  $l = 1$

Respuesta.- Si  $\epsilon > 1$ , póngase  $\delta = 1$ . Entonces  $|x - 1| < \delta$  implica que  $0 < x < 2$  con lo que  $0 < \sqrt{x} < 2$  y  $|\sqrt{x} - 1| < 1$ . Si  $\epsilon < 1$ , entonces  $(1 - \epsilon)^2 < x < (1 + \epsilon)^2$  implica que  $|\sqrt{x} - 1| < \epsilon$ , de modo que podemos elegir un  $\delta$  tal que  $(1 - \epsilon)^2 \leq 1 - \delta$  y  $1 + \delta \leq (1 + \epsilon)^2$ . Podemos elegir, pues  $\delta = 2\epsilon - \epsilon^2$

4. Para cada una de las funciones del problema 4 – 17, decir para qué números  $a$  existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

(i) Existe el límite si  $a$  no es un entero, ya que en los puntos enteros la función tiene un salto.

(ii) Existe el límite si  $a$  no es un entero.

(iii) De la misma forma que el inciso (ii).

(iv) Existe para todo  $a$ .

(v) Existe para todo  $a$  si sólo si sea  $a = 0$  y  $a = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ .

(vi) El límite no existe para los puntos  $|a| < 1$  y  $a \neq \frac{1}{n}$

5. (a) Hágase lo mismo para cada una de las funciones del problema 4 – 19

- (I) Existe para cualquier número que tenga la forma  $n + \frac{k}{10}$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$
  - (II) Existe para cualquier número que tenga la forma  $n + \frac{k}{100}$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$
  - (III) No es posible para ningún  $a$ .
  - (IV) De la misma forma que el anterior inciso.
  - (V) Existe para todo  $a$  excepto para los que terminan en 7999...
  - (VI) Existe para todo  $a$  excepto para los que terminan en 1999....
- (b) El mismo problema usando decimales infinitos que terminen en una fila de ceros en lugar de los que terminan en una fila de nueves.
- (i) De igual forma de la parte (a) inciso (i).
  - (ii) De igual forma de la parte (a) inciso (ii).
  - (iii) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).
  - (iv) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).
  - (v) Existe para todo  $a$  excepto para los que terminan en 8000...
  - (vi) Existe para todo  $a$  excepto para los que terminan en 2000...

6. Supóngase que las funciones  $f$  y  $g$  tienen la siguiente propiedad: Para todo  $\epsilon > 0$  y todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \sin^2\left(\frac{\epsilon^2}{9}\right) + \epsilon, \text{ entonces } |f(x) - 2| < \epsilon,$$

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \epsilon^2, \text{ entonces } |g(x) - 4| < \epsilon.$$

Para cada  $\epsilon > 0$  hallar un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$(i) \text{ Si } 0 < |x - 2| < \delta, \text{ entonces } |f(x) + g(x) - 6| < \epsilon.$$

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene  $|f(x) - 2| < \frac{\epsilon}{2}$  y  $|g(x) - 4| < \frac{\epsilon}{2}$ , luego reemplazamos  $\epsilon$  por  $\epsilon/2$  de donde nos queda

$$0 < |x - 2| < \sin^2 \left[ \frac{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}{9} \right] \quad y \quad |x - 2| < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$$

Por último, solo hace verificar para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$ . En este caso solo hace falta elegir

$$0 < |x - 2| < \min \left[ \sin^2 \left( \frac{\epsilon^2}{36} \right) + \epsilon, \frac{\epsilon^2}{4} \right] = \delta$$

(II) Si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $|f(x)g(x) - 8| < \epsilon$

Respuesta.- Por la segunda parte del lema demostrado tenemos que

$$|f(x) - 2| < \min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|4| + 1)} \right) \quad y \quad |g(x) - 4| < \frac{\epsilon}{2(|2| + 1)}$$

ya que  $|f(x)g(x) - 2 \cdot 4| < \epsilon$ .

Luego reemplazando en  $\epsilon$  a cada parte obteniendo,

$$0 < |x - 2| < \min \left\{ \sin^2 \left[ \frac{\min \left( \frac{\epsilon}{10} \right)^2}{9} \right] + \min \left( 1, \frac{\epsilon}{10} \right), \left[ \min \left( 1, \frac{\epsilon}{6} \right) \right]^2 \right\} = \delta$$

(III) Si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4} \right| < \epsilon$

Respuesta.- Por la tercera parte del lema se tiene que  $|g(x) - 4| < \min \left( \frac{|4|}{2}, \frac{\epsilon|4|^2}{2} \right)$ , luego reemplazando en  $\epsilon$  obtenemos

$$|x - 2| < [\min(2, 8\epsilon)]^2 = \delta$$

.

(IV) Si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{2} \right| < \delta$

Respuesta.- Sea  $\left| f(x) \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{2} \right| < \delta$  entonces

$$|f(x) - 2| < \min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|1/4| + 1)} \right) \quad y \quad \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4} < \frac{\epsilon}{2(|2| + 1)}$$

, de donde

$$0 < |x - 2| < \min \left\{ \sin^2 \left[ \frac{(\min(1, 2\epsilon/5))^2}{9} \right] + \min(1, 2\epsilon/5), \left[ \min \left( 2, \frac{8\epsilon}{2(|2| + 1)} \right) \right]^2 \right\} = \delta$$

7. Dese un ejemplo de una función  $f$  para la cual la siguiente proposición sea falsa: Si  $|f(x) - l| < \epsilon$  cuando  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon/2$  cuando  $0 < |x - a| < \delta/2$ .

Respuesta.- Tomemos  $a = 0$  y  $l = 0$ . Para  $\epsilon > 0$ , se tiene

$$|x - 0| < \epsilon^2 \implies |\sqrt{|x|} - 0| < \epsilon$$

. Aquí  $\delta = \epsilon^2$ . Pero si

$$0 < |x - 0| < \frac{\epsilon^2}{2} \implies |\sqrt{|x|} - 0| < \frac{\epsilon^2}{4} = \delta.$$

El cual no se cumple la proposición buscada.

8. (a) Si no existen los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , ¿pueden existir  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$  o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ ?

Respuesta.- Si. Por ejemplo considere

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Luego observe que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existen, mientras que  $f(x) + g(x) = 1$  tiene un límite en

$x = 0$ . De similar forma, si tomamos  $f(x) = g(x) = \frac{|x|}{x}$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe, mientras que

$f(x) \cdot g(x) = \frac{|x|^2}{x^2}$  es 1 y, por lo tanto, existe el límite en 0.

- (b) Si existen los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ , ¿debe existir  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ?

Respuesta.- Si, ya que

$$g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$$

- (c) Si existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y no existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , ¿puede existir  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ ?

Respuesta.- No, ya que es sólo otro modo de enunciar la parte (b).

- (d) Si existe los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ , ¿se sigue de ello que existe  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ ?

Respuesta.- No, el razonamiento es análogo a la parte (b), ya que si  $g = (f \cdot g)/f$  no será aplicable si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

9. Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$ .

Demostración.- Sea  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $g(h) = f(a + h)$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$ , tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Ahora bien, si  $0 < |h - 0| < \delta$ , entonces  $|f(a + h) - l| < \epsilon$ , de modo que  $|f(a + h) - l| < \epsilon$ . Esta desigualdad puede escribirse  $|g(h) - l| < \epsilon$ . Así pues,  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = l$ , lo cual puede escribirse también  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = l$ . el mismo razonamiento demuestra que si  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = m$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m$ . Así pues, existe uno cualquiera de los dos

límites si existe el otro, y en este caso son iguales.

10. (a) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - l] = 0$

Demostración.- Por definición vemos que Para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Esta última desigualdad se puede escribir como  $|[f(x) - l] - 0| < \epsilon$  de modo que  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - l] = 0$ . El razonamiento en sentido inverso es igual de simple e intuitivo.

- (b) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x - a)$

Demostración.- Supóngase que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = m$ . Queremos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x - a) = m$ . Para todo  $\epsilon > 0$  existen algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$  con  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - m| < \epsilon$  (1). Si  $0 < |y - a| = |(y - a) - 0| < \delta$ , entonces por (1) implica que  $|f(y - a) - m| < \epsilon$ , por lo tanto  $\lim_{y \rightarrow a} f(y - a) = m$ .

Por el contrario, supóngase  $\lim_{x \rightarrow a} f(x - a) = m$ , donde queremos demostrar  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = m$ . Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$  con  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x - a) - m| < \epsilon$  (2). Si  $0 < |y| = |(y + a) - a| < \delta$ , luego por (2) implica que  $|f(y) - m| = |f[(y + a) - a] - m| < \epsilon$ , por lo tanto  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = m$ .

- (c) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ .

Demostración.- Sea  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ . Para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$ , tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x| < \delta$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Tomemos  $0 < |x| < \min(1, \delta)$ , entonces  $0 < |x^3| < \delta$ , para comprender mejor tomemos un número en particular, por ejemplo  $x = 0.9$  donde  $0 < |0.9| < \min(1, \delta)$  entonces se cumple que  $0 < |0.9^3| < \delta$ . Así pues  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ . Por otro lado, supongamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$  existe, pongamos  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = m$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x| < \delta$ , entonces  $|f(x^3) - m| < \delta$ . Si  $0 < |x| < \delta^3$ , tenemos  $0 < |\sqrt[3]{x}| < \delta$ , de modo que  $|f(\sqrt[3]{x^3}) - m| < \epsilon$ . Por lo tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = m$ .

- (d) Dar un ejemplo en el que exista  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ , pero no  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Respuesta.- Sea  $f(x) = 1$  para  $x \leq 0$  y  $f(x) = -1$  para  $x < 0$ . Entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = 1$ , pero  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.

11. Supóngase que existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) = g(x)$  cuando  $0 < |x - a| < \delta$ . Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

Demostración.- Asumamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Deseamos demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ . Sea  $\epsilon > 0$ , de donde existe algún  $\delta_1 > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta_1$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Luego pongamos  $\delta' = \min(\delta, \delta_1)$  que complace  $0 < |x - a| < \delta'$ , en virtud de como se define  $\delta'$  sabemos que si  $0 < |x - a| < \delta_1$  y  $0 < |x - a| < \delta$  tal que  $f(x) = g(x)$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ , de donde concluimos que  $|g(x) - l| < \epsilon$ .



12. (a) Supóngase que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x$ . Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  siempre que estos existan.

Demostración.- Demostremos por reducción al absurdo. Supóngase que  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ . Luego sea  $l - m > 0$ , existe entonces un  $\delta > 0$  tal que, si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $l - f(x) < \epsilon/2$  y  $|m - g(x)| < \epsilon/2$ . Así pues, para  $0 < |x - a| < \delta$  tenemos

$$g(x) < m + \epsilon/2 = l - \epsilon/2 < f(x),$$

contrario a la hipótesis.

- (b) ¿De qué modo puede obtenerse una hipótesis más débil?

Respuesta.- Basta suponer que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x$  que satisfaga  $0 < |x - a| < \delta$ , para algún  $\delta > 0$ .

- (c) Si  $f(x) < g(x)$  para todo  $x$ . ¿Se sigue de ello necesariamente que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ?

Respuesta.- No necesariamente ya que si  $f(x) = 0$  y  $g(x) = |x|$  para  $x \neq 0$ , y  $g(0) = 1$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

13. Supóngase que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  y que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Demostrar que existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  y que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ .

Demostración.- Intuitivamente vemos que  $g(x)$  esta entre  $f(x)$  y  $h(x)$  donde se aproximan a un mismo número. Sea  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|h(x) - l| < \epsilon$ , como también para  $|f(x) - l| < \epsilon$ , así pues, si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces

$$l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon$$

de modo que  $|g(x) - l| < \epsilon$ .

14. (a) Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = l$  y  $b \neq 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(bx)/x = bl$ .

Demostración.- Tengamos en cuenta que  $x \rightarrow 0$  implica  $bx \rightarrow 0$  siempre que  $b$  sea distinto de 0.

Luego  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  de donde  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = l$ , así  $\lim_{bx \rightarrow 0} g(bx) = l$ , aclaremos que cuando  $g(bx)$  solo ponemos un valor diferente sin alterar la función en si, es decir, sea  $bx = y$  y  $\lim_{bx \rightarrow 0} g(bx) = l$

entonces  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = l$  que es igual a nuestra hipótesis  $\left( \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = l \right)$ . Por lo tanto tenemos,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} b \frac{f(bx)}{bx} = b \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = bl$$

- (b) ¿Qué ocurre si  $b = 0$ ?

Respuesta.- Si  $b = 0$  entonces  $\frac{f(bx)}{bx} = \frac{f(0)}{0}$  el cual no esta definido, por lo tanto el límite no existe, a menos que  $f(0) = 0$ .

- (c) La parte (a) nos permite hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)/x$  en función de  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$ . Hallar este límite por otro procedimiento.

Respuesta.-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x)(\cos x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2.$$

15. Calcular los límites siguientes en función del número  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$ .

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x)(\cos x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \frac{1}{b \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = a\alpha \cdot \frac{1}{b\alpha} = \frac{a}{b}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 2\alpha = 0$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right)^2 = 4\alpha^2$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + 1)} = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x + 2x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan^2 x + 2x}{x}}{1 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2}{1 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2 \right)}{1 + x} = \alpha \cdot 0 + 2 =$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{2}{\alpha}$$

$$(viii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Respuesta.- Se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

de donde por (v) concluimos que  $\alpha \cos x$ .

$$(ix) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1) \sin(x^2 - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1) \sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin h}{h} && \text{Por la misma razón del problema 14(a)} \\
&= 2\alpha
\end{aligned}$$

$$(x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \sin x)}{(x + \sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \sin x}{\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{3}{(1 + \alpha)^2}$$

$$(xi) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)^2 \sin\left(\frac{1}{x - 1}\right)^3 = 0, \text{ ya que } |\sin 1/(x - 1)^3| \leq 1 \text{ para todo } x \neq 1$$

16. (a) Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l|$ .

Demostración.- Sabemos que  $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$  por lo tanto para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \epsilon$  de donde  $\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l|$

(b) Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \max(f, g)(x) = \max(l, m)$  y lo mismo para el mínimo.

Demostración.- ya que  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  y por (a) entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \max(f, g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - g(x)|}{2} \\
&= \frac{l + m + |l - m|}{2} \\
&= \max(l, m)
\end{aligned}$$

De similar manera,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \min(f, g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - g(x)|}{2} \\
&= \frac{l + m - |l - m|}{2} \\
&= \min(l, m)
\end{aligned}$$

17. (a) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$  no existe, es decir, demostrar que, cualquiera que sea  $l$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x = l$  es falso.

Demostración.- Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = l$  entonces por definición se tiene

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \iff \text{si } 0 < |x - 0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

de donde  $|x| > \frac{1}{\epsilon + |l|}$  el cual contradice la suposición de que  $x$  tiende a 0.

- (b) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$  no existe.

Demostración.- Podemos aplicar el mismo criterio del anterior ejercicio.

18. Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , entonces existe un número  $\delta > 0$  y un número  $M$  tal que  $|f(x)| < M$  si  $0 < |x - a| < \delta$ . (¿Cómo puede verse esto gráficamente?).

Demostración.- Por definición tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \text{si } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Tomemos  $\epsilon = 1$  de donde  $l - 1 < f(x) < l + 1$  de modo que podemos tomar  $M > 1 + l$  y  $-M < 1 - l$  por lo tanto  $|f(x)| < M$ .

19. Demostrar que si  $f(x) = 0$  para  $x$  irracional y  $f(x) = 1$  para  $x$  racional, entonces no existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  cualquiera que sea  $a$ .

Demostración.- Para cualquier  $\delta > 0$  tenemos  $f(x) = 0$  para algún  $x$  que satisface  $0 < |x - a| < \delta$  y también  $f(x) = 1$  para algún  $x$  que satisface  $0 < |x - a| < \delta$ . Significa esto que no podemos tener  $|f(x) - l| < 1/2$  tenga  $l$  el valor que tenga.

20. Demostrar que si  $f(x) = x$  para  $x$  racional y  $f(x) = -x$  para  $x$  irracional, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe si  $a \neq 0$ .

Demostración.- Sea el caso  $a > 0$ . Al estar  $f(x)$  cerca de  $a$  para todos los racionales  $x$  que están cerca de  $a$ , y al estar  $f(x)$  cerca de  $-a$  para todos los irracionales  $x$  que están cerca de  $a$ , no podemos tener a  $f(x)$  próximo a ningún número fijo. Es decir, para cualquier  $\delta > 0$  existe  $x$  con  $0 < |x - a| < \delta$  y  $f(x) > a/2$ , así como  $x$  con  $0 < |x - a| < \delta$  y  $f(x) < -a/2$ . Puesto que la distancia entre  $a/2$  y  $-a/2$  es  $a$ , esto significa que no podemos tener  $|f(x) - l| < a$  para todos estos  $x$ , cualquiera que sea el valor de

$l$ .

21. (a) Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \sin 1/x = 0$ .

Demostración.- En consecuencia de (b) y sabiendo que  $|\sin 1/x| \leq 1$  para todo  $x \neq 0$ . Se tiene que el resultado esperado.

- (b) Generalizar este hecho como sigue: Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  y  $|h(x)| \leq M$  para todo  $x$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)h(x) = 0$

Demostración.- Por definición de límites y sea  $M = 1$  se tiene  $|g(x)| < \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$ , para todo  $x$  con  $0 < |x| < \delta$ . Entonces  $|g(x)h(x)| < \epsilon$  ya que  $|h(x)| \leq M$ .

22. Considérese una función  $f$  con la siguiente propiedad: Si  $g$  es una función cualquiera para la cual no existe el  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , entonces tampoco existe  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$ . Demostrar que esto ocurre si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe.

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe, esta claro que  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$  no existe cuando  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, esto según el problema 8(b) y (c). Por otro lado, supongamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe, elija  $g = -f$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, pero  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$  existe.

23. Este problema es el análogo del problema 22 cuando  $f + g$  se sustituye por  $f \cdot g$ . En este caso la situación es considerablemente más compleja y el análisis debe hacerse en varias etapas.

- (a) Supóngase que existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y es  $\neq 0$ . Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, entonces tampoco existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ .

Demostración.- Ya que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}$$

Ponemos  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha$ , por lo cual

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$$

Por lo tanto si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$  no existe.

- (b) Demostrar el mismo resultado si  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$ .

Demostración.- Demostraremos que si  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = l$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

Para entender mejor el problema veamos un ejemplo: Sea  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot x = 1$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ . Ya mas claro el asunto, vayamos a la demostración.

Sea  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$ , para cualquier  $M > 0$  existe algún  $\delta_M > 0$  tal que para todo  $x$ ,

si  $0 < |x - 0| < \delta_M$  entonces  $|f(x)| > M$ .

Luego, para  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = l$  nos dice que para cualquier  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta_l > 0$  tal que para todo  $x$ ,

si  $0 < |x - 0| < \delta_l$  entonces  $|f(x)g(x) - l| < \epsilon$ .

Ahora, para cualquier  $\epsilon$  podemos establecer  $M = \frac{\epsilon + |l|}{\epsilon}$  y escogemos  $\delta_{min} = \min(\delta_M, \delta_l)$ . Así, para todo  $x$ ,

si  $0 < |x - a| < \delta_{min}$  tenemos  $|f(x)g(x) - l| < \epsilon$  y  $|f(x)| > M = \frac{\epsilon + |l|}{\epsilon}$ ,

luego  $|f(x)g(x) - l| \leq |f(x)g(x) - l| < \epsilon$ , de donde  $|f(x)g(x)| < |l| + \epsilon$ , así

$$|g(x)| < \frac{|l| + \epsilon}{|f(x)|} < \frac{|l| + \epsilon}{M} = \frac{|l| + \epsilon}{M} = \frac{|l| + \epsilon}{\frac{|l| + \epsilon}{\epsilon}} = \epsilon$$

Por lo tanto, para cualquier  $\epsilon > 0$  hay un  $\delta_{min}$  tal que para todo  $x$  si

$0 < |x - 0| < \delta_{min}$  entonces  $|g(x)| < \epsilon$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

- (c) Demostrar que si no se cumple ninguna de estas dos condiciones, entonces existe una función  $g$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, pero existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ .

**Demostración.-** Demostraremos por casos.

**Caso 1.** Para algún  $\epsilon > 0$ , existe algún  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  si  $0 < |x| < \delta$ , entonces  $|f(x)| > \epsilon$ . Luego podemos definimos  $g(x)$  para  $x$  como  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ , aclaremos que para  $x$  pequeños el denominador es distinto de 0, de donde

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Así que el límite de  $f(x)g(x)$  existe. Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$ . Pero esto implicaría que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe, con lo que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe.

¿Cómo sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$  y por tanto se aplica a la parte a?. Supongamos  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , según nuestra definición del caso 1 tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Así para cualquier  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  si

$$0 < |x| < \delta \implies \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \epsilon$$

de donde  $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$  y por lo tanto

$$0 < |x| < \delta \implies |f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$$

Esto significa que  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$ , contrario al inciso b.

**Caso 2.** Elíjase  $x_n$  según se indica. Defínase  $g(x) = 0$  para  $x \neq x_n$  y  $g(x) = 1$  para  $x = x_n$ . Entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, pero  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ .

24. Supóngase que, para todo número natural  $n$ ,  $A_n$  es un conjunto finito de número en  $[0, 1]$ , y que  $A_n$  y  $A_m$  carecen de elementos comunes si  $m \neq n$ . Defínase  $f$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x \text{ está en } A_n \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en } A_n \text{ para ningún } n \end{cases}$$

Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  para todo  $a$  de  $[0, 1]$ .

Demostración.- Dado  $\epsilon > 0$ , elíjase  $n$  con  $1/n < \epsilon$  y hágase  $\delta$  igual a la distancia mínima desde  $a$  a todos los puntos de  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , excepto a sí mismo en el caso en que  $a$  sea uno de estos puntos. Entonces  $0 < |x - a| < \delta$  implica que  $x$  no está en  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , de modo que  $f(x) = 0$  o  $1/m$  para  $m > n$ , o sea que  $|f(x)| < \delta$ .

25. Explíquese por qué son correctas las siguientes definiciones de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ : Para todo  $\delta > 0$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

(I) Si  $0 < |x - a| < \epsilon$ , entonces  $|f(x) - l| < \delta$ .

Respuesta.- Ésta es la definición en si, llamando simplemente a los números  $\delta$  como  $\epsilon$  y viceversa.

(II) Si  $0 < |x - a| < \epsilon$  entonces  $|f(x) - l| \leq \delta$ .

Respuesta.- Si la condición se cumple para todos los  $\delta > 0$ , entonces se puede aplicar a  $\delta/2$ , de modo que existe un  $\epsilon > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \epsilon$ , entonces  $|f(x) - l| \leq \delta/2 < \delta$ .

(III) Si  $0 < |x - a| < \epsilon$  entonces  $|f(x) - l| < 5\delta$ .

Respuesta.- Aplíquese a  $5\delta$  para obtener (i).

(IV) Si  $0 < |x - a| < \epsilon/10$  entonces  $|f(x) - l| < \delta$ .

Respuesta.- Dice lo mismo que (i), ya que  $\epsilon/10 > 0$ , y es solamente la existencia de algún  $\delta > 0$  lo que está en litigio.

26. Póngase ejemplos para demostrar que las siguientes definiciones de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  no son correctos.

(a) Para todo  $\delta > 0$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Respuesta.- Aunque se es verdad que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$ , no es verdad que para todo  $\delta > 0$  exista un  $\delta > 0$  con  $|1/x - 1| < \delta$  para  $0 < |x - 1| < \delta$ . En efecto, si  $\delta = 1$ , no existe un  $\epsilon$ , ya que  $1/x$  puede ser tan grande como se quiera, siendo  $0 < x - 1 < 1$ .

(b) Para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|f(x) - l| < \epsilon$  entonces  $0 < |x - a| < \delta$ .

Respuesta.- Si  $f$  es una función constante  $f(x) = c$ , esta condición no se cumple, puesto que  $|f(x) - c| < 1$  no implica ciertamente que  $0 < |x - a| < \delta$ , para algún  $\delta$ .  
Además, la función  $f(x) = x$ , satisface esta condición cualquiera que sea  $a$  y  $l$ .

27. Para cada una de las funciones del problema 4-17 indíquese para qué números  $a$  existen los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

(I) Los dos límites existen para todo  $a$ .

(II) Los dos límites existen para todo  $a$ .

(III) Los dos límites existen para todo  $a$ .

(IV) Los dos límites existen para todo  $a$ .

(V) Los dos límites laterales existen, para  $a \neq 0$ , y ninguno de los dos existe para  $a = 0$ .

(VI) Los dos límites laterales existen para todo  $a$  con  $|a| < 1$ .

28. (a) (I) Los dos límites existen para todo  $a$ .

(II) Los dos límites existen para todo  $a$ .

(III) Ninguno de los dos límites laterales existe, cualquiera que sea  $a$ .

(IV) Ninguno de los dos límites laterales existe, cualquiera que sea  $a$ .

(V) Los dos límites laterales existen para todo  $a$ .

(VI) Los dos límites laterales existen para todos los  $a$  cuyo desarrollo decimal contenga por lo menos un 1; además, el límite por la derecha existe para todo  $a$  cuyo desarrollo decimal no contenga ningún 1, pero que termine en 0999....

(b) Las respuestas son las mismas que para la parte (a).



29. Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{si } 0 < a - x < \delta_2, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

de donde

$$\text{si } a < x < a + \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{si } a - \delta_2 < x < a, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

Sea  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces o bien  $a - \delta_2 < a - \delta < x < a$ , o bien  $a < x < a + \delta < a + \delta_1$ , de modo que  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Se puede escribir también como sigue. Sea  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces o bien  $0 < x - a < \delta < \delta_1$  o bien  $0 < a - x < \delta < \delta_2$ , de modo que  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

30. Demostrar que

$$(I) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x).$$

Demostración.- Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $0 < x - 0 < \delta$ , luego si  $-\delta < x - 0 < 0$ , entonces  $0 < 0 - x < \delta$ , de modo que  $|f(-x) - l| < \epsilon$ . Así pues,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x) = l$ .

La demostración recíproca es análoga.

$$(II) \lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $0 < x < \delta$ . De donde  $0 < |x| < \delta$  pero como  $\delta > 0$  entonces  $0 < |x| < \delta$ , así  $|f(|x|) - l| < \epsilon$ . Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = l$ .

$$(III) \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $0 < x < \delta_1$  de donde  $0 < x^2 < \delta_1$ , como  $|x^2| = x^2$  y  $\delta = \delta_1^2$ , se tiene  $0 < |x^2| < \delta$ , de modo que  $|f(x^2) - l| < \epsilon$ . Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = l$ .

31. Supóngase que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . (Ilústrese esta proposición con un dibujo.) Demostrar que existe algún  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < f(y)$  siempre que  $x < a < y$ ,  $|x - a| < \delta$  e  $|y - a| < \delta$ . ¿Se cumple la recíproca?

Demostración.- Sea  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m$ . Al ser  $m - l > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - l| < \frac{m - l}{2} \text{ cuando } 0 < a - x < \delta$$

$$|f(y) - m| < \frac{m - l}{2} \text{ cuando } 0 < y - a < \delta$$

Esto implica,

$$f(x) < l + \frac{m-l}{2} = m - \frac{l-m}{2} < f(y).$$

la recíproca es falsa como lo demuestra  $f(t) = t$  y cualquier  $a$ . Por ello se concluye que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

32. Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + \dots + a_0) / (b_m x^m + \dots + b_0)$  existe si y sólo si  $m \geq n$ . ¿Cuál es el límite cuando  $m = n$ ? ¿Y cuándo  $m > n$ ? Indicación: El límite fácil es  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^k = 0$ .

Demostración.- Supongamos que  $a_n \neq 0$  y  $b_m \neq 0$ . Si  $x \neq 0$ , entonces si dividimos todo por  $x^n$  nos queda,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{\frac{b_m}{x^{n-m}} + \dots + \frac{b_0}{x^n}}$$

Si  $m < n$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a_n$  pero  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Esto implica que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  no existe. Por el contrario si  $m > n$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

Por otro lado si  $m \geq n$ , entonces si dividimos por  $x^m$  se tiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \frac{\frac{a_n}{x^{m-n}} + \dots + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \dots + \frac{b_0}{x^m}}$$

Entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  si  $m > n$  y  $a_n$  si  $m = n$ , mientras que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b_m$ .

Así pues, si  $m > n$  implica  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$  si  $m = n$ .

33. Hallar los límites siguientes

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin^3 x}{5x + 6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x + \sin^3 x}{x}}{\frac{5x + 6}{x}} = \frac{1}{5}$$

$$(ii) \text{ Respuesta.- } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 5} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{5}{x}} \cdot \sin x = 0 \quad \text{ya que } 1/\infty \text{ tiende a } 0 \text{ y } |\sin x| \leq 1$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \sin^2 x)}{(x + \sin x)^2}$$

Respuesta.- El límite no existe ya que  $\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^2$  se aproxima a 1, pero  $1 + \sin^2 x$  no se aproxima a  $x \rightarrow \infty$ .

$$34. \text{ Demostrar que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $N$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $x > N$ , y evidentemente podemos suponer que  $N > 0$ . Ahora bien, si  $0 < x < 1/N$  entonces  $1/x > N$  de modo que  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x) = l$ . La demostración recíproca es parecida.

$$35. \text{ Hallar los límites siguientes en función del número } \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Respuesta.- Ya que  $|\sin x| \leq 1$  para todo  $x$  entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$36. \text{ Definir " } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l''.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , hay algún  $N$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para algún  $x < N$ .

$$(a) \text{ Hallar } \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + \dots + a_0) / (b_m x^m + \dots + b_0)$$

Respuesta.- La respuesta ya se dio en el problema 32 cuando  $x \rightarrow \infty$ .

$$(b) \text{ Demostrar que } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x).$$

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  para algún  $N$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $x > N$ . Luego por propiedades de números reales se tiene  $-x > N$ , por lo tanto  $|f(-x) - l| < \epsilon$ . Así  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = l$ .

$$(c) \text{ Demostrar que } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(1/x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $x < N$ , de donde asumimos que  $N < 0$ . Luego  $1/N < x < 0$  se sigue  $1/x < N$ , así  $|f(1/x) - l| < \epsilon$ .

$$37. \text{ Definamos } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ en el sentido de que para todo } N \text{ existe un } \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x, \text{ si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } f(x) > N.$$

- (a) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 3} 1/(x-3)^2 = \infty$ .

Demostración.- Sabiendo que  $N > 0$  y sea  $\delta = 1/\sqrt{N}$ , entonces  $0 < |x-3| < \delta$  implica que  $(x-3)^2 < 1/N$ , de donde  $1/(x-3)^2 > N$ .

- (b) Demostrar que si  $f(x) > \epsilon > 0$  para todo  $x$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \infty$$

Demostración.- Dado  $N > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x-a| < \delta$  entonces  $|g(x)| < \frac{\epsilon}{N}$ , luego

$$0 < |x-a| < \delta \implies \frac{f(x)}{|g(x)|} > \frac{\epsilon}{\frac{\epsilon}{N}} = N,$$

luego ya que  $N$  es un número grande, queda demostrada la proposición.

38. (a) Definir  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  (O por lo menos convéznase el lector que podría escribir las definiciones si tuviera humor para ello. ¿Cuántos otros símbolos podría definir?).

Respuesta.-  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$  significa que para todo  $N$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $a < x < a + \delta$ , entonces  $f(x) > N$ .

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$  significa que para todo  $N$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $a - \delta < x < a$ , entonces  $f(x) > N$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  significa que para todo  $N$  existe un  $M$  tal que, para todo  $x$ , si  $x > M$ , entonces  $f(x) > N$ .

También es posible definir para,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- (b) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Demostración.- Dado  $N > 0$ , elegir un  $\delta = 1/N$ . Si  $0 < x < \delta$ , entonces  $1/x > N$ .

- (c) Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(1/x) = \infty$ , entonces para todo  $N$  existe algún  $M$  tal que  $f(1/x) < N$  para  $x > M$ . Escoge  $M > 0$ . Si  $0 < x < 1/M$ , entonces  $x > M$ , así  $f(x) > N$ . Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ . La demostración en dirección contraria es similar.

39. Hallar los siguientes límites, si existen

$$(I) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 7}{7x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2}}{7 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \infty.$$

$$(II) \lim_{x \rightarrow \infty} x(1 + \sin^2 x).$$

Respuesta.- El límite está dado desde  $1 \leq 1 + \sin^2 x \leq 2$  para todo  $x$ .

$$(III) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin^2 x.$$

Respuesta.- El límite no existe, ya que  $\sin^2 x$  oscila entre 0 y 1.

$$(IV) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot x \sin \frac{1}{x} = \infty.$$

$$(V) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1.$$

$$(VI) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1/x}} = \infty$$

$$(VII) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

40. (a) Hallar el perímetro de un  $n$ -ágono regular inscrito en una circunferencia de radio  $r$ ; para las funciones trigonométricas que entren en juego.

Respuesta.- Si trazamos un círculo y un punto central  $O$ , dos puntos  $A$  y  $C$  en el perímetro de la circunferencia y un punto medio  $B$  entre  $A$  y  $C$  trazando una línea recta, entonces el ángulo  $BOC$  es  $\pi/n$ . Luego  $BC = r \sin(\pi/n)$  y  $AC = 2r \sin(\pi/n)$ . Así el perímetro es  $2rn \sin(\pi/n)$ .

(b) ¿A qué valor se aproxima este perímetro cuando  $n$  es muy grande?

Respuesta.- A medida que  $n$  se vuelve muy grande, esto se aproxima a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2rx \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \pi 2r \frac{x}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 2\pi r \alpha$$

donde  $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x)/x$  como el problema 45 ii.

41. Una vez ya en la imprenta el manuscrito de la primera edición de éste libro, se me ocurrió una manera mucho más sencilla de demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$ , sin pasar por todos los pasos de la página 83. Supongamos que queremos demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ , siendo  $a > 0$ . Dado  $\epsilon > 0$  hacemos simplemente que  $\delta$  sea el mínimo de  $\sqrt{a^2 + \epsilon} - a$  y  $a - \sqrt{a^2 - \epsilon}$ ; entonces  $|x - a| < \delta$  implica que  $\sqrt{a^2 - \epsilon} < x < \sqrt{a^2 + \epsilon}$ , de modo que  $a^2 - \epsilon < x^2 < a^2 + \epsilon$ , o  $|x^2 - a^2| < \epsilon$ . Por fortuna no llegué a tiempo para introducir estos cambios, puesto que esta demostración es totalmente falsa. ¿Dónde se encuentra el fallo?

Respuesta.-

## Funciones Continuas

**Definición 6.1.** La función  $f$  es continua en  $a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ .  
Pero en este caso, en que el límite es  $f(a)$ , la frase

$$0 < |x - a| < \delta$$

puede cambiarse por la condición más sencilla

$$|x - a| < \delta$$

puesto que si  $x = a$  se cumple ciertamente que  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ .

**Teorema 6.1.** Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$ , entonces

- (1)  $f + g$  es continua en  $a$ .
  - (2)  $f \cdot g$  es continua en  $a$ .
  - (3)  $1/g$  es continua en  $a$
- Además, si  $g(a) \neq 0$ , entonces

Demostración.- Puesto que  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que  $f + g$  es continua en  $a$ .

Para  $f \cdot g$  se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$$

Por último para  $1/g$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} 1/g = 1/g(a), \quad \text{para } g(a) \neq 0$$

**Teorema 6.2.** Si  $g$  es continua en  $a$ , y  $f$  es continua en  $g(a)$ , entonces  $f \circ g$  es continua en  $a$ .

Demostración.- Sea  $\epsilon > 0$ . Queremos hallar un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \epsilon, \text{ es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de  $f$  para estimar cómo de cerca tiene que estar  $g(x)$  de  $g(a)$  para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que  $f$  es continua en  $g(a)$ , existe un  $\delta' > 0$  tal que para todo  $y$ ,

$$\text{Si } |y - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(y) - f(g(a))| < \epsilon. \quad (1)$$

En particular, esto significa que

$$\text{Si } |g(x) - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon. \quad (2)$$

Aplicamos ahora la continuidad de  $g$  para estimar cómo de cerca tiene que estar  $x$  de  $a$  para que se cumpla la desigualdad  $|g(x) - g(a)| < \delta'$ . El número  $\delta'$  es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar  $\delta'$  como el *epsilon* de la definición de continuidad de  $g$  en  $a$ . Deducimos que existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \delta', \quad (3)$$

combinando (2) y (3) vemos que para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

**Definición 6.2.** Si  $f$  es continua en  $x$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces se dice que  $f$  es continua en  $(a, b)$  si

$$f \text{ es continua en } x \text{ para todo } x \text{ de } (a, b), \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b). \quad (2)$$

**Teorema 6.3.** Supóngase que  $f$  es continua en  $a$ , y  $f(a) > 0$ . Entonces existe un número  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x$  que satisface  $|x - a| < \delta$ . Análogamente, si  $f(a) < 0$ , entonces existe un número  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < 0$  para todo  $x$  que satisface  $|x - a| < \delta$ .

Demostración.- Considérese el caso  $f(a) > 0$  puesto que  $f$  es continua en  $a$ , si  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Puesto que  $f(a) > 0$  podemos tomar a  $f(a)$  como el *epsilon*. Así, pues, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a)$$

Y esta última igualdad implica  $f(x) > 0$ .

Puede darse una demostración análoga en el caso  $f(a) < 0$ ; tómese  $\epsilon = -f(a)$ . O también se puede aplicar el primer caso a la función  $-f$ .



## 6.1. Problemas

1. ¿para cuáles de las siguientes funciones  $f$  existe una función  $F$  de dominio  $R$  tal que  $F(x) = f(x)$  para todo  $x$  del dominio de  $f$ ?

(I)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Respuesta.- Sabiendo que el límite cuando  $x$  tiende a 2 existe, entonces existe una función  $F$  de dominio  $R$  tal que  $F(x) = f(x)$  para todo  $x$  del dominio de  $f$ .

(II)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Respuesta.- No existe  $F$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  no existe.

(III)  $f(x) = 0$ ,  $x$  irracional.

Respuesta.- Existe  $F$  de dominio  $R$  tal que  $F(x) = f(x)$  para todo  $x$  del dominio de  $f$ .

- (IV)  $f(x) = 1/q$ ,  $x = p/q$  racional en fracción irreducible. Respuesta.- No existe  $F$ , ya que  $F(a)$  tendría que ser 0 para los  $a$  irracionales, y entonces  $F$  no podría ser continua en  $a$  si  $a$  es racional.

2. ¿En qué puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?

Respuesta.- Problema 4-17.

Para (i), (ii) y (iii) son continuas para todos los puntos menos para los enteros. Para (iv) es continua en todos los puntos. Para (v) es entera para todos los puntos excepto para 0 y  $1/n$  para  $n$  en los enteros.

Problema 4-19.

(i) todos los puntos que no sean de la forma  $n + k/10$  para todos los enteros  $k$  y  $n$ . El (ii) para todo los puntos que no sea de la forma  $n + k/100$  para todos los enteros  $k$  y  $n$ . (iii) y (iv) para ningún punto. (v) para todos los puntos que el decimal no termine en 7999... Y (vi) para todos los puntos que el decimal contenga al menos un 1.

3. (a) Supóngase que  $f$  es una función que satisface  $|f(x)| \leq |x|$  para todo  $x$ . Demostrar que  $f$  es continua en 0. [Observe que  $f(0)$  debe ser igual a 0.]

Demostración.- Supongamos que  $|f(x)| \leq |x|$ . afirmamos que,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . De hecho dado  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \epsilon$ . Si  $|x| < \delta$  entonces  $|f(x)| \leq |x| < \delta = \epsilon$ . Esto prueba que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Para concluir que  $f$  es constante en 0, tenga en cuenta que, como se señala en la pregunta, aplicar  $|f(x)| \leq |x|$  para todo  $x$ , en  $x = 0$  se da  $|f(0)| \leq 0$  y en consecuencia  $f(0) = 0$ . Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  implica que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , así  $f$  es constante en 0.

- (b) Dar un ejemplo de una función  $f$  que no sea continua en ningún  $a \neq 0$ .

Respuesta.- Sea  $f(x) = 0$  para  $x$  irracional, y  $f(x) = x$  para  $x$  racional.

- (c) Supóngase que  $g$  es continua en 0,  $g(0) = 0$ , y  $|f(x)| \leq |g(x)|$ . Demostrar que  $f$  es continua en 0.

Demostración.- La condición  $|f(x)| \leq |g(x)|$  para todo  $x$  y  $g(0) = 0$  implica que  $f(0) = 0$ , así que sólo tenemos que demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

Sea  $\epsilon > 0$ , luego ya que  $g$  es continua en 0, existe un  $\delta > 0$  tal que  $|x| < \delta$  entonces  $|g(x) - g(0)| = |g(x)| < \epsilon$ . Usando  $|f(x)| \leq |g(x)|$  para todo  $x$ , vemos que  $|x| < \delta$  implica  $|f(x)| \leq |g(x)| < \epsilon$ . Por lo tanto esto demuestra que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

4. Dar un ejemplo de una función  $f$  que no sea continua en ningún punto, pero tal que  $|f|$  sea continua en todos los puntos.

Respuesta.- Sea  $f(x) = 1$  para  $x$  racional, y  $f(x) = -1$  para  $x$  irracional.

5. Para todo número  $a$ , hallar la función que sea continua en  $a$ , pero no lo sea en ningún otro punto.

Respuesta.- Sea  $f(x) = a$  para  $x$  irracional, y  $f(x) = x$  para  $x$  racional.

6. (a) Hallar una función  $f$  que sea discontinua en  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ , pero continua en todos los demás puntos.

Respuesta.- Define  $f$  como sigue,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

- (b) Hallar una función  $f$  que sea discontinua en  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ , y en 0, pero sea continua en ningún en todos los demás puntos.

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

7. Supóngase que  $f$  satisface  $(x + y) = f(x) + f(y)$ , y que  $f$  es continua en 0. Demostrar que  $f$  es continua en  $a$  para todo  $a$ .

Demostración.- Sea  $f(x+0) = f(x) + f(0)$ , por lo tanto  $f(0) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + f(h) - f(a) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(h) - f(0) = 0\end{aligned}$$

8. Supóngase que  $f$  es continua en  $a$  y  $f(a) = 0$ . Demostrar que si  $\alpha \neq 0$ , entonces  $f + \alpha$  es distinta de 0 en algún intervalo abierto que contiene a  $a$ .

Demostración.- Sabiendo que  $(f + \alpha)(a) \neq 0$ , entonces por el teorema 3,  $f + \alpha$  es distinto de cero en algún intervalo que contiene a  $a$ .

9. (a) Supóngase que  $f$  no es continua en  $a$ . Demostrar que para algún  $\epsilon > 0$  existen números  $x$  tan próximos como se quiere de  $a$  con  $|f(x) - f(a)| > \epsilon$ .

Demostración.- Lógicamente equivalente a la definición de continuidad se tiene

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x |x - a| < \delta \text{ y } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|f(x) - f(a)| > \epsilon$ . Luego sea  $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$ , entonces tenemos  $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon > \epsilon'$ .

- (b) Dedúzcase que para algún  $\epsilon > 0$ , o bien existen números  $x$  tan próximos como se quiera de  $a$  con  $f(x) < f(a) - \epsilon$  o bien existen números  $x$  tan próximos como se quiera de  $a$  con  $f(x) > f(a) + \epsilon$ .

Demostración.- La demostración es directa aplicando la reciproca de la definicion de continuidad. Como se vio en el inciso a.

10. (a) Demostrar que si  $f$  es continua en  $a$ , entonces también lo es  $|f|$ .

Demostración.- Ya que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l|$  como se vio en el problema 5-16, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |f(a)| = |f|(a).$$

- (b) Demostrar que toda función continua  $f$  puede escribirse en la forma  $f = E + O$ , donde  $E$  es par y continua y  $O$  es impar y continua.

Demostración.- Por el problema 13 del capítulo 3 (funciones) mostramos que  $E$  y  $O$  son continuas si  $f$  lo es.

- (c) Demostrar que si  $f$  y  $g$  son continuas, también lo son  $\max(f, g)$  y  $\min(f, g)$ .

Demostración.- Por la parte a) y sabiendo que

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

$$\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

- (d) Demostrar que toda función continua  $f$  puede escribirse en la forma  $f = g - h$ , donde  $g$  y  $h$  son no negativas y continuas.

Demostración.- Por el problema 15 del capítulo 3 (funciones) podemos comprobar que  $f = g - h$  siempre que  $f$  sea continua.

11. Demostrar el teorema 1(3) aplicando el teorema 2 y la continuidad de la función  $f(x) = 1/x$ .

Demostración.- Sea  $f \circ g = \frac{1}{g}$  y  $f$  es continua en  $g(a)$  para  $g(a) \neq 0$ , entonces por el teorema 2, se tiene que  $\frac{1}{g}$  es continua en  $a$  para  $g(a) \neq 0$ .

12. (a) Demostrar que si  $f$  es continua en  $l$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(l)$ .

Demostración.- Sea

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

entonces  $G$  es continua en  $a$ , ya que  $G(a) = l = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} G(x)$ . Así  $f \circ G$  es continua en  $a$  esto por el teorema 2. Luego

$$f(l) = f(G(a)) = (f \circ G)(a) = \lim_{x \rightarrow a} = \lim_{x \rightarrow a} (f \circ G)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)).$$

- (b) Demostrar que si no se supone la continuidad de  $f$  en  $l$ , entonces no se cumple, por lo general, que  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$ .

Demostración.- Sea  $g(x) = l + x - a$  y

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ , así  $f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(l) = l$ , pero  $g(x) \neq l$  para  $x \neq a$ , por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$ .

13. (a) Demostrar que si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces existe una función  $g$  el cual es continua en  $\mathbb{R}$  y que satisface a  $g(x) = f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

Demostración.-

(b) Hágase ver con un ejemplo que ésta afirmación es falsa si se sustituye  $[a, b]$  por  $(a, b)$ .

Respuesta.- Definimos  $f(x) = 1/(x^2 - 1)$  en el intervalo  $(-1, 1)$ . Es continuo, pero no existe  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$  ni  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ . Ahora, para que  $f$  se extienda a una función  $g$  que sea constante en toda la línea real, es necesario que existan tanto  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  como  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ , lo que requiere  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  para existir. Entonces  $f$  no se puede extender a una función que sea constante en toda la línea real.

14. (a) Supóngase que  $g$  y  $h$  son continuos en  $a$ , y que  $g(a) = h(a)$ . Defínase  $f(x)$  como  $g(x)$  si  $x \geq a$  y  $h(x)$  si  $x \leq a$ . Demuestre que  $f$  es continua en  $a$ .

Demostración.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq a \\ h(x) & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

Luego se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a)$$

de donde

$$g(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad h(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

y por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- (b) Supóngase que  $g$  es continuo en  $[a, b]$  y  $h$  es continuo en  $[b, c]$  y  $g(b) = h(b)$ . Sea  $f(x)$  igual  $g(x)$  para  $x$  en  $[a, b]$  y  $h(x)$  para  $x$  en  $[b, c]$ . Demuestre que  $f$  es continuo en  $[a, c]$ . (Así pues, las funciones continuas pueden ser "pegados juntos").

Demostración.- la continuidad de  $f$  en  $[a, b]$  y en  $(b, c]$  es evidente. En  $[a, b]$   $f$  es igual a  $g$  y  $g$  es continuo para todo los puntos del intervalo.

Ahora para la continuidad en  $b$ , si  $g$  es continuo en  $b$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = g(b)$ , y  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ . Similarmente,  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$ , aquí tenemos que usar  $g(b) = h(b) = f(b)$ . Luego ya que  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$  y  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$  concluimos que  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$ , es decir  $f$  es también continuo en  $b$ .

15. (a) Demuestre la siguiente versión del teorema 3 para la continuidad por la derecha: Supóngase que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ , y  $f(a) > 0$ . Entonces existe un número  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x$  que satisface  $0 \leq x - a < \delta$ . Análogamente, si  $f(a) < 0$ , entonces existe un número  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < 0$  para todo  $x$  que satisface  $0 \leq x - a < \delta$ .

Demostración.- Se tiene que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall x, \text{ si } 0 \leq x - a < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

luego podemos tomar  $f(a) > 0$  como  $\epsilon$ , así nos queda,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall x, \text{ si } 0 \leq x - a < \delta \implies |f(x) - f(a)| < f(a)$$

de donde implica  $f(x) > 0$ .

Análogamente

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall x, \text{ si } 0 \leq a - x < \delta \implies |f(x) - f(a)| < f(a)$$

luego tomamos  $\epsilon = -f(a) > 0$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall x, \text{ si } 0 \leq x - a < \delta \implies |f(x) - f(a)| < -f(a)$$

de donde implica que  $f(x) < 0$ .

- (b) Demostrar una versión del teorema 3 cuando  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

Demostración.- Similar al anterior inciso podemos decir que,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall x, \text{ si } 0 \leq a - x < \delta \implies |f(x) - f(a)| < f(a)$$

cuando  $f(a) > 0$  que implica que  $f(x) > 0$ .

Análogamente se tiene para  $f(a) < 0$ .

16. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe, pero  $\neq f(a)$ , entonces se dice que  $f$  tiene una discontinuidad evitable en  $a$ .

- (a) Si  $f(x) = \sin 1/x$  para  $x \neq 0$  y  $f(0) = 1$ , ¿tiene  $f$  una discontinuidad evitable en 0? ¿Y si  $f(x) = x \sin 1/x$  para  $x \neq 0$ , y  $f(0) = 1$ ?

Respuesta.- No se tendrá en el primer caso. Y se tendrá en el segundo caso. Por la existencia en cada caso.

- (b) Supóngase que  $f$  tiene una discontinuidad evitable en  $a$ . Sea  $g(x) = f(x)$  para  $x \neq a$ , y sea  $g(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Demuestre que  $g$  es continuo en  $a$ .

Demostración.- Si  $g(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $f(x) = g(x)$  entonces  $g$  es continuo en  $a$ . Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$$

- (c) Sea  $f(x) = 0$  si  $x$  es racional, y sea  $f(p/q) = 1/q$  si  $p/q$  es una fracción irreducible. ¿Qué función es la  $g$  definida por  $g(x) = \lim_{u \rightarrow x} f(u)$ ?

Respuesta.- La función será  $g(x) = 0$  para todo  $x$ .

- (d) Sea  $f$  una función con la propiedad de que todo punto de discontinuidad es una discontinuidad evitable. Esto significa que  $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$  existe para todo  $x$ , pero  $f$  podría ser discontinuo en algunos (incluso en infinitos) números  $x$ . Defínase  $g(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ . Demostrar que  $g$  es continua.

Demostración.- Sea  $g(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$  entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(y) - g(x)| < \epsilon$  para  $0 < |y - x| < \delta$ , esto significa que:

$$f(y) - \epsilon < g(x) < f(y) + \epsilon \quad \text{para} \quad |y - x| < \delta$$

luego,

$$f(y) - \epsilon < \lim_{y \rightarrow x} f(y) < f(y) + \epsilon \quad \text{para } |y - x| < \delta$$

Por definición también sabemos que  $g(a) = \lim_{y \rightarrow a} f(y)$  de donde se sigue que para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $2\delta = \delta' > 0$  tal que  $|y - a| < \delta$  entonces  $|f(y) - g(a)| < \epsilon$  es decir,

$$g(a) - \epsilon < f(y) < g(a) + \epsilon \quad \text{para } |y - a| < \delta'$$

Así por  $|y - a| < \delta'$  y  $|y - x| < \delta$ , se tiene,

$$g(a) - \epsilon \leq f(y) - \epsilon < \lim_{y \rightarrow x} f(y) < f(y) + \delta \leq g(a) + \epsilon \quad \text{para } |x - a| < \delta$$

ya que  $-2\delta - (-\delta) < y - a - (y - x) < 2\delta - \delta$ . Lo cual demuestra que  $|g(x) - g(a)| < \epsilon$  para todo  $x$  que satisfaga  $|x - a| < \delta$ . De modo que  $g$  es continua en  $a$ .

- (e) ¿Existe alguna función  $f$  que sea discontinua en todo punto y que tenga solamente discontinuidades evitables?.

Respuesta.- No existe.

## Tres teoremas fuertes

**Teorema 7.1.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(a) < 0 < f(b)$  entonces existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $f(x) = 0$ .

Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto.

**Teorema 7.2.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  está acotada superiormente en  $[a, b]$ , es decir, existe algún número  $N$  tal que  $f(x) \leq N$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

Geométricamente, este teorema significa que la gráfica  $f$  queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal.

**Teorema 7.3.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces existe algún número  $y$  en  $[a, b]$  tal que  $f(y) \geq f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

Se dice que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo en dicho intervalo.

**Teorema 7.4.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(a) < c < f(b)$ , entonces existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $f(x) = c$ .

Demostración.- Sea  $g = f - c$ . Entonces  $g$  es continua, y  $g(a) + c < c < g(b) + c \implies g(a) < 0 < g(b)$ . Por el teorema 1, existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $g(x) = 0$ . Pero esto significa que  $f(x) = c$ .

**Teorema 7.5.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(a) > c > f(b)$ , entonces existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $f(x) = c$ .

Demostración.- La función  $-f$  es continua en  $[a, b]$  y  $-f(a) < -c < -f(b)$ . Por el teorema 4 existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $-f(x) = -c$ , lo que significa que  $f(x) = c$ .

Si una función continua en un intervalo toma dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre ellos; esta ligera generalización del teorema 1 recibe a menudo el nombre de **teorema de los valores intermedios**.



**Teorema 7.6.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es acotada inferiormente en  $[a, b]$ , es decir, existe algún número  $N$  tal que  $f(x) \geq N$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

Demostración.- La función  $-f$  es continua en  $[a, b]$ , así por el teorema 2 existe un número  $M$  tal que  $-f(x) \leq M$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ . Pero esto significa que  $f(x) \geq -M$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ , así podemos poner  $N = -M$ .

Los teoremas 2 y 6 juntos muestran que una función continua  $f$  en  $[a, b]$  son acotados en  $[a, b]$ , es decir, existe un número  $N$  tal que  $|f(x)| \leq N$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ . En efecto, puesto que el teorema 2 asegura la existencia de un número  $N_1$  tal que  $f(x) \leq N_1$  para todo  $x$  de  $[a, b]$  y el teorema 6 asegura la existencia de un número  $N_2$  tal que  $f(x) \geq N_2$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ , podemos tomar  $N = \max(|N_1|, |N_2|)$ .

**Teorema 7.7.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces existe algún  $y$  en  $[a, b]$  tal que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

Demostración.- La función  $-f$  es continua en  $[a, b]$ ; por el teorema 3 existe algún  $y$  en  $[a, b]$  tal que  $-f(y) \geq -f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ , lo que significa que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

**Teorema 7.8.** Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si  $\alpha > 0$ , entonces existe algún número  $x$  tal que  $x^2 = \alpha$ .

Demostración.- Consideremos la función  $f(x) = x^2$ , el cual es ciertamente continuo. Notemos que la afirmación del teorema puede ser expresado en términos de  $f$ : "el número  $\alpha$  posee una raíz cuadrada" significa que  $f$  toma el valor  $\alpha$ . La demostración de este hecho acerca de  $f$  será una consecuencia fácil del teorema 4.

Existe, evidentemente, un número  $b > 0$  tal que  $f(b) > \alpha$ ; en efecto, si  $\alpha > 1$  podemos tomar  $b = \alpha$ , mientras que si  $\alpha < 1$  podemos tomar  $b = 1$ . Puesto que  $f(0) < \alpha < f(b)$ , el teorema 4 aplicado a  $[0, b]$  implica que para algún  $x$  de  $[0, b]$ , tenemos  $f(x) = \alpha$ , es decir,  $x^2 = \alpha$ .

Precisamente el mismo raciocinio puede aplicarse para demostrar que todo número positivo tiene una raíz  $n$ -ésima, cualquiera que sea el número  $n$ . Si  $n$  es impar, se puede decir mas: todo número tiene una raíz  $n$ -ésima. Para demostrarlo basta observar que si el número positivo  $\alpha$  tiene la raíz  $n$ -ésima  $x$ , es decir, si  $x^n = \alpha$ , entonces  $(-x)^n = -\alpha$  (puesto que  $n$  es impar), de modo que  $\alpha$  tiene una raíz  $n$ -ésima  $-x$ . Afirmando que, para un  $n$  impar, cualquier número  $\alpha$  tiene una raíz  $n$ -ésima equivale a afirmar que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

tiene una raíz si  $n$  es impar. El resultado expresado de este modo es susceptible de gran generalización.

**Teorema 7.9.** Si  $n$  es impar, entonces cualquier ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

posee raíz.

Demostración.- Tendremos que considerar, evidentemente, la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

habría que demostrar que  $f$  es unas veces positiva y otras veces negativa. La idea intuitiva es que para un  $|x|$  grande, la función se parece mucho más a  $g(x) = x^n$  y puesto que  $n$  es impar, ésta función es positiva para  $x$  grandes positivos y negativos para  $x$  grandes negativos. Un poco de cálculo algebraico es todo lo que hace falta para dar forma a esta idea intuitiva.

Para analizar debidamente la función  $f$  conviene escribir

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = x^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

obsérvese que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \dots + \frac{|a_0|}{|x^n|}$$

En consecuencia, si elegimos un  $x$  que satisfaga

$$|x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_0| \quad (*)$$

entonces  $|x^k| > |x|$  y

$$\frac{|a_{n-k}|}{x^k} < \frac{|a_{n-k}|}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n}$$

de modo que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right| \leq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

expresado de otra forma,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Por lo tanto, si elegimos un  $x_1 > 0$  que satisfaga  $(*)$ , entonces

$$\frac{x_1^n}{2} \leq x_1^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \dots + \frac{a_0}{x_1^n} \right) = f(x_1)$$

así que  $f(x_1) > 0$ . Por otro lado, si  $x_2 < 0$  satisface  $(*)$ , entonces  $x_2^n < 0$  y

$$\frac{x_2^n}{2} \geq x_2^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \dots + \frac{a_0}{x_2^n} \right) = f(x_2),$$

así  $f(x_2) < 0$ .

Ahora aplicando el teorema 1 para el intervalo  $[x_2, x_1]$  llegamos a la conclusión de que existe un  $x$  en  $[x_2, x_1]$  tal que  $f(x) = 0$ .

**Teorema 7.10.** Si  $n$  es par y  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ , entonces existe un número  $y$  tal que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$ .

Demostración.- Lo mismo que en el teorema 9, si

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_0|),$$

entonces para todo  $x$  con  $|x| \geq M$ , tenemos

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}$$

Al ser  $n$  par,  $x^n \geq 0$  para todo  $x$ , de modo que

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

siempre que  $|x| \geq M$ . Consideremos ahora el número  $f(0)$ . Sea  $b > 0$  un número tal que  $b^n \geq 2f(0)$  y también  $b > M$ . Entonces si  $x \geq b$ , tenemos

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Análogamente, si  $x \leq -b$ , entonces

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Resumiendo ahora el teorema 7 a la función  $f$  en el intervalo  $[-b, b]$ . Se deduce que existe un número  $y$  tal que

$$(1) \quad \text{si } -b \leq x \leq b, \text{ entonces } f(y) \leq f(x).$$

En particular,  $f(y) \leq f(0)$ . De este modo

$$(2) \quad \text{si } x \leq -b \text{ o } x \geq b, \text{ entonces } f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Cambiando (1) y (2) vemos que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$ .

**Teorema 7.11.** Consideremos la ecuación

$$(*) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = c,$$

y supongamos que  $n$  es par. Entonces existe un número  $m$  tal que  $(*)$  posee una solución para  $c \geq m$  y no posee ninguna para  $c < m$ .

**Demostración.-** Sea  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ . Según el teorema 10, existe un número  $y$  tal que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$ .

Sea  $m = f(y)$ . Si  $c < m$  entonces la ecuación  $(*)$  no tiene, evidentemente, ninguna solución, puesto que el primer miembro tiene un valor  $\geq m$ . Si  $c = m$  entonces  $(*)$  tiene  $y$  como solución. Finalmente, supongamos  $c > m$ . Sea  $b$  un número tal que  $b > y$ ,  $f(b) > c$ . Entonces  $f(y) = m < c < f(b)$ . En consecuencia, según el teorema 4, existe algún número  $x$  en  $[y, b]$  tal que  $f(x) = c$ , con lo que  $x$  es una solución de  $(*)$ .

## 7.1. Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles está acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo y mínimo.

(I)  $f(x) = x^2$  en  $(-1, 1)$ .

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. El mínimo es 0 e no tiene máximo.

(II)  $f(x) = x^3$  en  $(-1, 1)$ .

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. No tiene máximo ni mínimo

(III)  $f(x) = x^2$  en  $\mathbf{R}$ .

Respuesta.- No está acotado superior pero si inferiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(IV)  $f(x) = x^2$  en  $[0, \infty)$ .

Respuesta.- Está acotada inferiormente pero no así superiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(v)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$  en  $(-a-1, a+1)$

Respuesta.- Es acotado superior e inferiormente. Se entiende que  $a > -1$  (de modo que  $-a-1 < a+1$ ). Si  $-1 < a \leq 1/2$ , entonces  $a < -a-1$ , así  $f(x) = a+2$  para todo  $x$  en  $(-a-1, a+1)$ , por lo tanto  $a+2$  es el máximo y mínimo valor. Si  $-1/2 < a \leq 0$ , entonces  $f$  tiene el mínimo valor en  $a^2$ , y si  $a \geq 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo valor en 0. Ya que  $a+2 > (a+1)^2$  solo para  $[-1-\sqrt{5}]/2 < a < [1+\sqrt{5}]/2$ , cuando  $a \geq -1/2$  esta función  $f$  tiene un máximo valor solo para  $a \leq [1+\sqrt{5}]/2$  (el máximo valor será  $a+2$ ).

(vi)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$  en  $[-a-1, a+1]$ .

Respuesta.- Está acotado superior e inferiormente. Como en la parte (v), se asume que  $a > -1$ . Si  $a \leq -1/2$  entonces  $f$  tiene el valor mínimo y un máximo  $3/2$ . Si  $a \geq 0$ , entonces  $f$  tiene un valor mínimo en 0, y un valor máximo  $\max(a^2, a+2)$ . Si  $-1/2 < a < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo valor  $3/2$  y no así con un valor mínimo.

(vii)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$  en  $[0, 1]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es 1.

(viii)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$  en  $[0, 1]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El máximo es 1 y no existe un mínimo.

(ix)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 0, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$  en  $[0, 1]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es  $-1$  y el máximo es 1.

(x)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$  en  $[0, a]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es  $a$ .

(xi)  $f(x) = \sin^2(\cos x + \sqrt{1-a^2})$  en  $[0, a^3]$ .

Respuesta.- Ya que es continua  $f$  tiene máximo como también mínimo.

(xii)  $f(x) = [x]$  en  $[0, a]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es  $a$ .

2. Para cada una de las siguientes funcione polinómicas  $f$ , hallar un entero  $n$  tal que  $f(x) = 0$  para algún  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$ .

(i)  $f(x) = x^3 - x + 3$ .

Respuesta.-  $n = -2$ , ya que  $f(-2) = (-2)^3 + 2 + 3 = -3 < 0 < 3 = (-1)^3 - (-1) + 3$

(ii)  $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ .

Respuesta.-  $n = -5$  ya que  $f(-5) = -11 < 0 < f(-4)$ .

(iii)  $f(x) = x^5 + x + 1$ .

Respuesta.-  $n = -1$  ya que,  $f(-1) = -1 < 0 < f(0)$ .

(iv)  $4x^2 - 4x + 1$

Respuesta.- No existe un entero  $n$  tal que  $f(x) = 0$ .

3. Demostrar que existe algún número  $x$  tal que

(i)  $x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 119$ .

Respuesta.- Si  $x^{179}$  y  $\frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x}$ , son continuas en  $\mathbb{R}$  entonces  $f(x) = x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x}$  es continua en  $\mathbb{R}$  y  $f(1) > 0$ , mientras que  $f(-2) < 0$ , de modo que  $f(x) = 0$  para algún  $x$  en  $(-2, 1)$ .

(ii)  $\sin x = x - 1$ .

Respuesta.- Sea  $f(x) = \sin x - x + 1$  entonces  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y  $f(0) > 0$ , mientras que  $f(2) < 0$ , así por el teoremas 4 se tiene que  $f(x) = c$  para algún  $x$  en  $(0, 2)$ .

4. Este problema es una continuación del problema 3-7

(a) Si  $n - k$  es par, y  $y \geq 0$ , hallar una función polinómica de grado  $n$  que tenga exactamente  $k$  raíces.

Respuesta.- Sea  $l = (n - k)/2$  de donde

$$f(x) = (x^{2(n-k)/2} + 1)(x - 1)(x - 2) \cdots (x - k).$$

- (b) Una raíz  $a$  de una función polinómica  $f$  se dice que tiene multiplicidad  $m$  si  $f(x) = (x - a)^m g(x)$ , donde  $g$  es una función polinómica que no tiene la raíz  $a$ . Sea  $f$  una función polinómica de grado  $n$ . Supóngase que  $f$  tiene  $k$  raíces, contando multiplicidades, es decir supóngase que  $k$  es la suma de las multiplicidades de todas las raíces. Demostrar que  $n - k$  es par.

Demostración.- Por la condición dada,  $f$  es una función polinómica real de grado  $n$  tal que  $f$  tiene exactamente  $k$  raíces en  $\mathbb{R}$  contando multiplicidades. Probaremos que  $n - k$  es par. Para ello consideraremos los siguientes casos.

**Caso 1.-** Si  $n = k$  es trivial decir que  $n - k = 0$  de donde se sabe que es par.

**Caso 2.-** Si  $n > k$ , sea  $x_1, x_2, \dots, x_m$  raíces reales de  $f$  con multiplicidades  $k_1, k_2, \dots, k_m$  respectivamente y por lo tanto,

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = k.$$

Entonces  $f$  puede ser escrito como,

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} p_1(x) p_2(x) \cdots p_l(x)$$

donde  $p_i(x)$  son polinomios irreducibles en  $\mathbb{R}$  tal que el grado de  $p_i$  suma  $n - k$ . Ahora recordemos que todo polinomio irreducible en  $\mathbb{R}$  debe tener de grado un entero par. Esto se debe a que cada polinomio de orden impar tiene al menos una raíz real, esto por el teorema 9, por lo tanto  $p_i(x)$  no puede ser irreducible en  $\mathbb{R}$ . Ahora observe que sin pérdida de generalidad hemos asumido que hay  $l$  polinomios irreducibles tales que la suma de sus grados  $n - k$ . Dado que cada uno de los  $l$  polinomios tienen grado par, entonces la suma de sus grados debe ser un entero par. Se sigue que  $n - k$  es un entero par.

5. Supóngase que  $f$  es continua en  $[a, b]$  y que  $f(x)$  es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de  $f$ ?

Respuesta.-  $f$  es constante, ya que si  $f$  tomara dos valores distintos, entonces  $f$  tomaría todos los valores intermedios, incluyendo valores irracionales, es decir, si no fuera constante, entonces existe dos números racionales  $r_1$  y  $r_2$  tal que para algún  $c, d$  se tiene  $a \leq c < d \leq b$ ,  $f(c) = r_1$  y  $f(d) = r_2$ . Por el teorema 7.4 en el intervalo  $[c, d]$ ,  $f$  toma todos los valores entre  $r_1$  y  $r_2$ , donde se concluye que existe algún número irracional, contradiciendo el hecho de que  $f$  solo toma valores racionales.

6. Supóngase que  $f$  es una función continua en  $[-1, 1]$  tal que  $x^2 + f^2(x) = 1$  para todo  $x$ . (Esto significa que  $(x, f(x))$  siempre está sobre el círculo unidad.) Demostrar que o bien es  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  para todo  $x$ , o bien  $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$  para todo  $x$ .

Demostración.- De lo contrario,  $f$  toma valores tanto positivos como negativos, por lo que  $f$  tendría el valor 0 en  $(-1, 1)$ , lo cual es imposible, ya que  $\sqrt{1 - x^2} \neq 0$  para  $x$  en  $(-1, 1)$ .

7. ¿Cuántas funciones continuas  $f$  existen satisfaciendo  $f^2(x) = x^2$  para todo  $x$ ?

Respuesta.- Existen 4 funciones continuas que satisfacen la condición dada, es decir,

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f(x) &= -x \\ f(x) &= |x| \\ f(x) &= -|x| \end{aligned}$$

8. Supóngase que  $f$  y  $g$  son continuas, que  $f^2 = g^2$ , y que  $f(x) \neq 0$  para todo  $x$ . Demostrar que o bien  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$ , o bien  $f(x) = -g(x)$  para todo  $x$ .

Demostración.- Si no fuera así, entonces  $f(x) = g(x)$  para algún  $x$  y  $f(y) = -g(y)$  para algún  $y$ . Pero ya que  $f(x) \neq 0 \forall x$ , entonces será o bien siempre positiva o bien siempre negativa. Así pues,  $g(x)$  y  $g(y)$  tendría distinto signo. Esto implicaría que  $g(z) = 0$  para algún  $z$ , lo cual es imposible, ya que  $0 \neq f(z) = \pm g(z)$ .

9. (a) Supóngase que  $f$  es continuo, que  $f(x) = 0$  solo para  $x = a$ , y que  $f(x) > 0$  tanto para algún  $x > a$ , así como para algún  $x < a$ . ¿Que puede decirse acerca de  $f(x)$  para todo  $x \neq a$ ?

Respuesta.- Por hipótesis, existe algún  $x_1 \in (a, \infty)$  tal que  $f(x_1) > 0$ . Ahora si existe algún  $y_1 \in (a, \infty)$  con  $f(y_1) < 0$ , entonces debe existir  $z_1 \in (a, \infty)$  entre  $x_1$  y  $y_1$  tal que  $f(z_1) = 0$ . Pero esto contradice que  $f$  es cero solo en  $x = a$ . Por lo tanto, no existe algún  $y_1 \in (a, \infty)$  con  $f(y_1) < 0$ . Esto es,  $f(x) > 0$  para todo  $x \in (a, \infty)$ . Similarmente,  $f(x) > 0$  para todo  $x \in (-\infty, a)$ . Por lo tanto podemos decir que  $f(x) > 0$  para todo  $x \neq a$ .

- (b) Supongamos ahora que  $f$  es continuo y que  $f(x) = 0$  solo para  $x = a$ , pero supongamos, en cambio, que  $f(x) > 0$  para algún  $x > a$  y  $f(x) < 0$  para algún  $x < a$ . Ahora que puede decir de  $f(x)$  para  $x \neq a$ ?

Respuesta.- Por hipótesis, existe algún  $x_1 \in (a, \infty)$  tal que  $f(x_1) > 0$ . Ahora si existe  $y_1 \in (a, \infty)$  con  $f(y_1) < 0$ , entonces existe algún  $z_1 \in (a, \infty)$  entre  $x_1$  y  $y_1$  tal que  $f(z_1) = 0$ . Esto contradice que  $f$  es cero sólo en  $x = a$ . Por lo tanto, no existe algún  $y_1 \in (a, \infty)$  con  $f(y_1) < 0$ . Esto es,  $f(x) > 0$  para todo  $x \in (a, \infty)$ . Luego por similar argumento,  $f(x) < 0$  para todo  $x \in (-\infty, a)$ . Así,  $f(x) > 0$  para todo  $x > a$  y  $f(x) < 0$  para todo  $x < a$ .

- (c) Discutir el signo de  $x^3 + x^2 + xy^2 + y^3$  cuando  $x$  e  $y$  no son ambos 0.

Respuesta.- Para  $y \neq 0$ , sea  $f(x) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ . Luego

$$f(x) = \frac{x^4 - y^4}{x - y}$$

10. Supóngase  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  y que  $f(a) < g(a)$ , pero  $f(b) > g(b)$ . Demostrar que  $f(x) = g(x)$  para algún  $x$  en  $[a, b]$ .

Demostración.- Sea

$$h = f - g$$

entonces por el teorema 1 se tiene

$$h(x) = 0$$

por lo que

$$f(x) = g(x) \text{ para algún } x \in [a, b].$$

11. Supóngase que  $f$  es una función continua en  $[0, 1]$  y que  $f(x)$  es en  $[0, 1]$  para cada  $x$ . Demostrar que  $f(x) = x$  para algún número  $x$ .

Demostración.- Para  $f(0) = 0$  o  $f(1) = 1$  entonces se puede elegir  $x = 0$  o  $x = 1$ . Ya que  $x$  es continuo entonces

$$g(x) = x - f(x)$$

también es continuo. Luego, por el teorema 1 se tiene,

$$f(x) - x = 0 \implies x = f(x) \text{ para algún } x \in [0, 1].$$

12. (a) El problema 11 muestra que  $f$  intersecta la diagonal del cuadrado. Demostrar que  $f$  debe cortar a la otra diagonal.

Demostración.- Vemos que la línea representa una función  $f$  en  $[0, 1]$ , dado por,

$$f(x) = x.$$

es continuo sobre  $[0, 1]$ . Ahora supongamos una nueva función  $g$  en  $[0, 1]$  tal que

$$g(x) = x - f(x)$$

de donde,

$$g(0) = 0 - f(0) = -f(0) \leq 0$$

$$g(1) = 1 - f(1)$$

De las dos funciones anteriores se tiene,

$$f(0) < g(0)$$

$$f(1) > g(1)$$

Por último definamos una nueva función continua  $h$  de forma que,

$$h = f - g$$

entonces,

$$h(1) = f(1) - g(1) > 0$$

$$h(0) = f(0) - g(0) < 0$$

Luego, existe algún punto  $c$  en  $[0, 1]$  por lo que ambas curvas es,

$$h(c) = 0$$

y

$$\begin{aligned} f(c) - g(c) &= 0 \\ f(c) &= g(c) \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay algún  $c$  en  $[0, 1]$  donde  $f$  intersecta a la otra línea diagonal.



- (b) Demostrar el siguiente hecho más general: Si  $g$  es continuo en  $[0, 1]$  y  $g(0) = 0, g(1) = 1$  o  $g(0) = 1, g(1) = 0$ , entonces  $f(x) = g(x)$  para algún  $x$ .

Demostración.- Sea  $f$  en  $[0, 1]$  entonces

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

La otra linea punteada representa una función  $g$  en  $[0, 1]$  dada por,

$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 1$$

De donde

$$f(0) < g(0)$$

$$f(1) > g(1)$$

Ahora definimos una nueva función continua  $h$  de forma que,

$$h = f - g$$

entonces,

$$h(1) = f(1) - g(1) > 0$$

$$h(0) = f(0) - g(0) < 0$$

Luego, existe algún punto  $c$  en  $[0, 1]$  por lo que ambas curvas es,

$$h(c) = 0$$

y

$$\begin{aligned} f(c) - g(c) &= 0 \\ f(c) &= g(c) \end{aligned}$$

Por lo tanto, un continuo  $f(g)$  y  $g$ , existe  $f(x) = g(x)$  para algún  $x$ .

13. (a) Sea  $f(x) = \sin 1/x$  para  $x \neq 0$  y sea  $f(0) = 0$ , ¿Es  $f$  continuo en  $[-1, 1]$ ? Demostrar que  $f$  satisface la conclusión del teorema de valor intermedio en  $[-1, 1]$ ; en otras palabras, si  $f$  toma dos valores comprendidos en  $[-1, 1]$ , toma también todos los valores intermedios.

Demostración.- Sea la secuencia  $x_n$  en  $[-1, 1]$  definida por,

$$x_n = \frac{2}{\pi(4n-3)}, \quad n \geq 1$$

luego notamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Ahora aplicando la función  $f$  se tiene,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi(4n-3)}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi(4n-3)}{2}\right) = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

por lo tanto la función  $f$ , como tal, no es continuo en  $[-1, 1]$ .

Ahora demostraremos que  $f$  satisface el teorema de valor intermedio en  $[-1, 1]$ . Ya que  $f(0) = 0$  según la hipótesis, podemos decir que  $f$  es continuo en  $[0, 1]$ . Vamos a considerar los siguientes casos:

**C1** Si  $a < b$  son dos puntos de  $[-1, 1]$  con  $a, b > 0$  o  $a, b < 0$ , entonces  $f$  toma cada valor entre  $f(a)$  y  $f(b)$  en el intervalo  $[a, b]$  ya que  $f$  es continuo en  $[a, b]$ .

**C2** Si  $a < 0 < b$ , entonces  $f$  toma todos los valores entre  $-1$  y  $1$  en  $[a, b]$ .

Así  $f$  toma todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ . Lo mismo ocurre para  $a = 0$  o  $b = 0$ .

**(b)** Supóngase que  $f$  satisface la conclusión del teorema del valor intermedio y que  $f$  toma cada valor solo una vez. Demostrar que  $f$  es continua.

**Demostración.-** Si  $f$  no fuese continua en  $a$ , entonces por el problema 6-9(b) para algún  $\epsilon > 0$  existirían  $x$  tan cerca como se quiera de  $a$  con  $f(x) > f(a) + \epsilon$  o  $f(x) < f(a) - \epsilon$ . Supongamos que ocurre lo primero. Podemos incluso suponer que existen  $x$  tan cerca como se quiera de  $a$  y  $x > a$ , o bien tan cerca como se quiera de  $a$  y  $x < a$ . Supongamos también aquí lo primero. Tomemos un  $x > a$  con  $f(x) > f(a) + \epsilon$ . Según el teorema de los valores intermedios, existe un  $x'$  entre  $a$  y  $x$  con  $f(x') < f(a) + \epsilon$ . Pero existe también  $y$  entre  $a$  y  $x'$  con  $f(y) < f(a) + \epsilon$ . Pero existe también  $y$  entre  $a$  y  $x'$  con  $f(y) > f(a) + \epsilon$ . Según el teorema de los valores intermedios,  $f$  forma el valor  $f(a) + \epsilon$  entre  $x$  y  $x'$  y también entre  $x'$  e  $y$ , contrariamente a la hipótesis.

**(c)** Generalizar para el caso donde  $f$  toma cada valor solo un número finito de veces.

**Respuesta.-** Lo mismo que en (b) elijase  $x_1 > a$  con  $f(x_1) > f(a) + \epsilon$ . Después elijase  $x'_1$  entre  $a$  y  $x_1$  con  $f(x'_1) < f(a) + \epsilon$ . Luego elijase  $x_2$  entre  $a$  y  $x'_1$  con  $f(x_2) > f(a) + \epsilon$  y  $x'_2$  entre  $a$  y  $x_2$  con  $f(x'_2) < f(a) + \epsilon$ , etc. Entonces  $f$  toma el valor  $f(a) + \epsilon$  en cada uno de los intervalos  $[x'_n, x_n]$  en contradicción con la hipótesis.

**14.** Si  $f$  es una función continua en  $[0, 1]$ , sea  $\|f\|$  el máximo valor de  $|f|$  en  $[0, 1]$ .

**(a)** Demostrar que para algún número  $c$  tenemos  $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$ .

**Demostración.-** Ya que  $|cf| = |c| \cdot |f(x)|$  para todo  $x$  de  $[0, 1]$ , entonces podemos elegir un  $x_0$  tal que  $|f|(x_0) = \|f\|$ , y por lo tanto  $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$ .

**(b)** Demostrar que  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ . Dar un ejemplo donde  $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$ .

**Demostración.-** Para las todas funciones dadas, tenemos

$$\begin{aligned} |f + g|(x) &= |f(x) + g(x)| \\ |f + g|(x) &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ |f + g|(x) &\leq |f|(x) + |g|(x) \end{aligned}$$

También sabemos que si  $f$  o  $g$  tienen el máximo valor en  $x_0$  entonces,

$$\begin{aligned} |f|(x_0) &= \|f\| \\ |g|(x_0) &= \|g\| \end{aligned}$$

Luego si la función  $|f + g|$  tiene el máximo valor en  $x_0$  entonces,

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= |f + g|(x_0) \\ \|f + g\| &\leq |f|(x_0) + |g|(x_0) \\ \|f + g\| &\leq \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

Por último, sea  $f(x) = x + 3$  y  $g(x) = x - 4$  entonces se cumple que  $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$ .

(c) Demostrar que  $\|h - f\| \leq \|h - g\| + \|g - f\|$ .

Demostración.- Para las todos funciones dadas, tenemos

$$\begin{aligned} |h - f|(x) &= |(h - g) - (g - f)|(x) \\ |h - f|(x) &\leq |(h - g)(x)| + |(g - f)(x)| \\ |h - f|(x) &\leq |h - g|(x) + |g - f|(x) \end{aligned}$$

También sabemos que si  $f$  o  $g$  tienen el máximo valor en  $x_0$  entonces,

$$\begin{aligned} |f|(x_0) &= \|f\| \\ |g|(x_0) &= \|g\| \\ |h|(x_0) &= \|h\| \end{aligned}$$

Luego si la función  $|f + g|$  tiene el máximo valor en  $x_0$  entonces,

$$\begin{aligned} \|h - f\| &= |h - f|(x_0) \\ \|h - f\| &\leq |h - g|(x_0) + |g - f|(x_0) \\ \|h - f\| &\leq \|h - g\| + \|g - f\| \end{aligned}$$

15. Supóngase que  $\phi$  es continua y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x)/x^n = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x)/x^n$ .

(a) Demostrar que si  $n$  es impar, entonces existe un número  $x$  tal que  $x^n + \phi(x) = 0$ .

Demostración.- Sea  $b > 0$  tal que

$$\left| \frac{\phi(b)}{b^n} \right| < \frac{1}{2}$$

entonces,

$$b^n + \phi(b) = b^n \left( 1 + \frac{\phi(b)}{b^n} \right) > \frac{1}{2} > 0$$

De la misma manera, sea  $a < 0$  tal que

$$\left| \frac{\phi(a)}{a^n} \right| < \frac{1}{2}$$

entonces, ya que  $n$  es impar,

$$a^n + \phi(a) = a^n \left( 1 + \frac{\phi(a)}{a^n} \right) < \frac{a^n}{2} < 0$$

Por lo tanto, existe un  $x$  tal que

$$x^n + \phi(x) = 0.$$

(b) Demostrar que si  $n$  es par, entonces existe un número  $y$  tal que  $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)$  para todo  $x$ .

Demostración.- Sea  $b > 0$  tal que

$$b^n > 2\phi(0)$$

Y  $|x| > b$

$$\left| \frac{\phi(x)}{x^n} \right| < \frac{1}{2}$$

de donde tenemos,

$$x^n + \phi(x) > x^n \left(1 + \frac{\phi(x)}{x^n}\right)$$

$$x^n + \phi(x) > \frac{x^n}{2}$$

$$x^n + \phi(x) > \frac{b^n}{2}$$

$$x^n + \phi(x) > \phi(0).$$

Así, el mínimo de  $x^n + \phi(x)$  para  $x$  in  $[-b, b]$  es el mínimo del intervalo. Y por lo tanto, existe un número  $y$ , para todo  $x$ , tal que,

$$y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x).$$

16. (a) Supóngase que  $f$  es continua en  $(a, b)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ . Demostrar que  $f$  tiene un mínimo en todo el intervalo  $(a, b)$ .

Demostración.- Sea  $c \in (a, b)$ . Ya que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ , existe  $a_1 \in (a, b)$  tal que  $a_1 < c$  y  $f(x) < f(c)$  para todo  $x \in (a, a_1)$ . Similarmente, ya que  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ , existe un  $b_1 \in (a, b)$  tal que  $b_1 > c$  y  $f(x) > f(c)$  para todo  $x \in (b_1, b)$ , entonces por el teorema 7.7 Se tiene que existe un  $y \in [a_1, b_1]$  tal que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x \in [a_1, b_1]$ . En particular,  $f(y) \leq f(c)$ , de donde si  $x \in [a_1, b_1]$ , entonces  $f(y) \leq f(x)$ . Si  $x \in (a, a_1)$ , entonces  $f(y) \leq f(c) < f(x)$  y si  $x \in (b_1, b)$ , entonces  $f(y) \leq f(c) < f(x)$  de donde demostramos que  $f$  tiene un mínimo  $y$  en  $(a, b)$ .

- (b) Demostrar el correspondiente resultado cuando  $a = -\infty$  y/o  $b = \infty$ .

Demostración.- Sea  $c \in \mathbb{R}$ . Ya que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ , existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $M < c$  y  $f(x) > f(c)$  para todo  $x < M$ . Similarmente, ya que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , existe  $N \in \mathbb{R}$  tal que  $N > c$  y  $f(x) > f(c)$  para todo  $x > N$ . Luego,  $f$  es continua en  $[M, N]$ , alcanza el mínimo en este intervalo. Esto es, existe  $y \in [M, N]$  tal que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x \in [M, N]$ . En particular,  $f(y) \leq f(c)$ , de donde si  $x \in [M, N]$ , entonces  $f(y) \leq f(x)$ . Si  $x < M$ , entonces  $f(y) \leq f(c) < f(x)$ . Si  $x > N$ , entonces  $f(y) \leq f(c) < f(x)$ . Esto muestra que  $f$  tiene un mínimo en  $y \in \mathbb{R}$ .

17. Sea  $f$  cualquier función polinómica. Demostrar que existe algún número  $y$  tal que  $|f(y)| \leq |f(x)|$  para todo  $x$ .

Demostración.- Ya que  $f$  es un polinomio real entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = \infty$$

de donde existe un entero  $N$  tal que

$$|f(0)| < |f(x)| \quad \text{para todo } x \in (-\infty, -N) \cup (N, \infty)$$

Ahora consideremos el intervalo cerrado  $[-N, N]$ , notemos que este intervalo es un conjunto compacto en  $\mathbb{R}$ . Luego sabemos que la función  $|f|$  es continuo en  $[-N, N]$  por lo que debe existir un punto  $y$  en  $[-N, N]$  tal que

$$|f(y)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [-N, N].$$

Ahora note que  $0 \in [-N, N]$ , se sigue que,

$$|f(y)| \leq |f(0)|.$$

por lo tanto,

$$|f(y)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

18. Supóngase que  $f$  es una función continua con  $f(x) > 0$  para todo  $x$ , y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Demostrar que existe algún número  $y$  tal que  $f(y) \geq f(x)$  para todo  $x$ .

Demostración.- Tomemos un número positivo  $b$  tal que  $f(x) < f(0)$  para  $|x| > b$ , entonces el máximo de  $f$  en  $[-b, b]$  es también el máximo en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto existe un número  $y$ , para todo  $x$ , tal que  $f(y) \geq f(x)$ .

19. (a) Supóngase que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , y sea  $x$  algún número. Demostrar que existe un punto en la gráfica de  $f$  el cual es cerrado para  $(x, 0)$ ; en otras palabras existe algún  $y$  en  $[a, b]$  tal que la distancia desde  $(x, 0)$  hasta  $(y, f(y))$  es  $\leq$  a la distancia desde  $(x, 0)$  hasta  $(z, f(z))$  para todo  $z$  en  $[a, b]$ .

Demostración.- Definamos  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $h(z) = \sqrt{(z-x)^2 + f(z)^2}$ . Esta es la distancia del punto  $(z, f(z))$  para el punto  $(x, 0)$ . Esta es una función continua en  $[a, b]$  y por lo tanto alcanza el mínimo. Así, para algún  $y \in [a, b]$ ,  $h(y)$  es mínimo. Esto es, la distancia desde  $(x, 0)$  hasta  $(y, f(y)) \leq$  a la distancia desde  $(x, 0)$  hasta  $(z, f(z))$  para algún  $z \in [a, b]$ .

- (b) Demuestre que la misma afirmación no es necesariamente cierta si  $[a, b]$  es remplazado por  $(a, b)$ .

Demostración.- Sea  $f(x) = x$  en  $(0, 1)$  y sea  $x = 0$ , entonces la distancia entre  $(0, 0)$  y un punto en la gráfica es  $h(z) = \sqrt{(z-0)^2 + f(z)^2} = \sqrt{2}z$ . Esta función no alcanza el mínimo en  $(0, 1)$ .

- (c) Demuestre que este resultado es cierto si  $[a, b]$  se sustituye por  $\mathbb{R}$ .

Demostración.- En otras palabras si  $f$  es una función continua en  $\mathbb{R}$  y si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , entonces  $f$  alcanza el mínimo en  $\mathbb{R}$ .

Defina  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $h(x) = \sqrt{(z-x)^2 + f(z)^2}$ . Esta es la distancia del punto  $(z, f(z))$  desde el punto  $(x, 0)$ . Esta es una función continua en  $\mathbb{R}$ .

Observe que  $h(z) \rightarrow \infty$  si  $z \rightarrow \infty$  así como también si  $z \rightarrow -\infty$ .

Por lo tanto, en virtud del resultado anterior,  $h(y)$  es mínimo para algún  $y \in [a, b]$ . Esto es, la distancia de  $(x, 0)$  hasta  $(y, f(y)) \leq$  a la distancia de  $(x, 0)$  hasta  $(z, f(z))$  para cualquier  $z \in \mathbb{R}$ .

- (d) En los casos (a) y (c), sea  $g(x)$  la mínima distancia de  $(x, 0)$  a un punto de la gráfica de  $f$ . Demuestre que  $g(y) \leq g(x) + |x - y|$ , y concluya que  $g$  es continua.

Demostración.- Sea  $g(x) = d((x, 0), (\alpha, f(\alpha)))$  donde  $d$  denota la distancia. Esto significa que  $(\alpha, f(\alpha))$  es el punto en la gráfica de  $f$  el cual es cerrado para  $(x, 0)$ .

Por la inecuación triangular

$$d((y, 0), (\alpha, f(\alpha))) \leq d((x, 0), (\alpha, f(\alpha))) + d((y, 0), (x, 0))$$

$$d((y, 0), (\alpha, f(\alpha))) < f(x) + |x + y| \quad (1)$$

Ya que  $g(y)$  es la distancia más corta de  $(y, 0)$  para el gráfico de  $f$ .

$$g(y) \leq d((y, 0), (\alpha, f(\alpha))) \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) implican que  $g(y) \leq g(x) + |x + y|$ . Podemos reescribir esto como

$$g(y) - g(x) \leq |x + y|$$

Intercambiando los roles de  $x$  y  $y$ , tenemos

$$g(x) - g(y) \leq |y - x| = |x - y|$$

Ambos implican que

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$$

Para algún  $\epsilon > 0$ , elija  $\delta = \epsilon$ , entonces  $|x - y| < \delta (= \epsilon)$  implica  $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ . Esto demuestra que  $g$  es continua.

- (e) Demuestre que existen números  $x_0$  y  $x_1$  de  $[a, b]$  tales que la distancia de  $(x_0, 0)$  a  $(x_1, f(x_1))$  es *leq* que la distancia  $(x'_0, 0)$  a  $(x'_1, f(x'_1))$  para cualquiera  $x'_0, x'_1$  de  $[a, b]$ .

Demostración.- Sea  $g(x)$  la distancia más corta de  $(x, 0)$  para la gráfica de  $f$ . Entonces, por la anterior parte  $g$  es continua en  $[a, b]$ . Por consiguiente  $g$  alcanza el mínimo sobre  $[a, b]$ . Esto es,  $g(x_0) \leq g(x'_0)$  para cualquier  $x'_0 \in [a, b]$ . Es equivalente a decir que existe  $(x_1, f(x_1))$  tal que la distancia desde  $(x_0)$  hasta  $(x_1, f(x_1))$  es menor o igual a la distancia de  $(x'_0)$  hasta  $(x'_1, f(x'_1))$  para cualquier  $x'_0 \in [a, b]$ .

20. a) Supóngase que  $f$  es continua en  $[0, 1]$  y  $f(0) = f(1)$ . Sea  $n$  cualquier número natural. Demuestre que existe algún número  $x$  tal que  $f(x) = f(x + 1/n)$ , como se muestra en la figura para  $n = 4$ . Considerar la función  $g(x) = f(x) - f(x + 1/n)$ ; ¿qué ocurriría si  $f(x) \neq 0$  para todo  $x$ ?

Demostración.- Sea  $g(x) = f(x) - f(x + 1/n)$ . Entonces,  $g$  es una función continua.

Si  $g(x) = 0$  para algún  $x \in [0, 1]$ , entonces hemos terminado con la demostración. Ahora supóngase que  $g(x) \neq 0$  para cualquier  $x$ . Entonces será  $g(x) > 0$  para todo  $x$  o  $g(x) < 0$  para todo  $x$ .

Asumiendo, que  $g(x) > 0$  para todo  $x$ , implica que  $f(x) > f(x + 1/n)$ , y por lo tanto usando la relación recursiva se tiene

$$f(0) > f(1/n) > f(2/n) > \dots > f[(n-1)/n] > f(n/n) = f(1).$$

Esto contradice la hipótesis que  $f(0) = f(1)$ . Así  $f(x) = f(x + 1/n)$  para algún  $x$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

- b) Suponga que  $0 < a < 1$ , pero que  $a$  no es igual a  $1/n$  para cualquier número natural  $n$ . Encuentre una función  $f$  que sea continua en  $[0, 1]$  y que satisfaga  $f(0) = f(1)$ , pero que no satisfaga  $f(x) = f(x + a)$  para ningún  $x$ .

Respuesta.- Considere  $f(x) = \sin(2\pi x)$ . Entonces,  $f(0) = f(1) = 0$ . Luego sea  $a = \frac{3}{4}$ , donde para que se cumpla  $x + a$  en  $[0, 1]$  solo puede variar de 0 a  $\frac{1}{4}$ . Es decir,

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4} \implies \frac{3}{4} \leq x + a \leq 1.$$

Por lo tanto, cuando  $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ , tenemos  $f(x) > 0$  mientras que  $f(x + a) < 0$ . Así,  $f(x) \neq f(x + a)$  para cualquier admisible valor de  $x$ .

21. a) Demuestre que no existe una función continua  $f$  definida en  $\mathbb{R}$  que tome exactamente dos veces cada uno de los valores, Indicación: Si  $f(a) = f(b)$  para  $a < b$ , entonces o bien  $f(x) > f(a)$  para todo  $x$  de  $(a, b)$ , o bien  $f(x) < f(a)$  para todo  $x$  de  $(a, b)$ . ¿Por qué? En el primer caso todos los valores próximos a  $f(a)$ , pero ligeramente mayores que  $f(a)$ , son alcanzados en algún punto de  $(a, b)$ ; esto implica que  $f(x) < f(a)$  para  $x < a$  y  $x > b$ .

Demostración.- supóngase que  $f$  es una función definida en  $\mathbb{R}$  que toma cada valor exactamente dos veces.

Sea  $a < b$  y  $f(a) = f(b)$ , entonces  $f$  toma cada valor exactamente dos veces, para algunos  $c \in (a, b)$ ,  $f(c) > f(a)$  o  $f(c) < f(a)$ .

Para el primer caso, implica que  $f(x) > f(a)$ ,  $\forall x \in (a, b)$  porque  $f$  es una función continua en  $[a, b]$ , por lo que cambia de signo el término  $f(x) - f(a)$  no es posible sin cruzar la línea  $y = f(a)$  y eso implicaría la ocurrencia del valor  $f(a)$  más de dos veces, contraría a la suposición.

De la misma manera,  $f(c) < f(a) \implies f(x) < f(a)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .

Supongamos el primer caso,  $f(x) > f(a)$ , for all  $x \in (a, b)$ .

Ya que  $f$  es una función continua en  $[a, b]$ , existe algún  $f(d_1) = M$  y  $f(x) \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$  (la función continua en el segmento toma su máximo valor.) Basado en la suposición de que cada valor se toma exactamente dos veces, existe  $d_2$  tal que  $f(d_2) = M$ . Porque  $f(x) < f(a)$  para  $x \in \mathbb{R}/[a, b] \rightarrow d_2 \in (a, b)$ . entonces tenemos  $d_1, d_2 \in (a, b)$ ,  $d_1 \neq d_2$  y  $f(d_1) = f(d_2) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . Para algún

$t \in (d_1, d_2)$ , no es posible  $f(t) > M$  ya que  $m = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . Además, no es posible  $f(t) < M$  por que

el valor  $f(t)$  ya se toma dos veces, una vez para algún  $x_1 \in (a, d_1)$  y una segunda vez para algún  $x_2 \in (d_2, d)$ , porque la continuidad de  $f$  en algún segmento (aquí asumimos  $d_1 < d_2$ .) Sigue siendo  $f(t) = M$ , pero eso es una contradicción con el hecho de que cada valor se toma exactamente dos veces, ya que  $f(d_1) = f(d_2) = M$ .

Entonces, la suposición de que existe la función que toma todos los valores exactamente dos veces conduce a una contradicción, por lo que la suposición no es cierta.

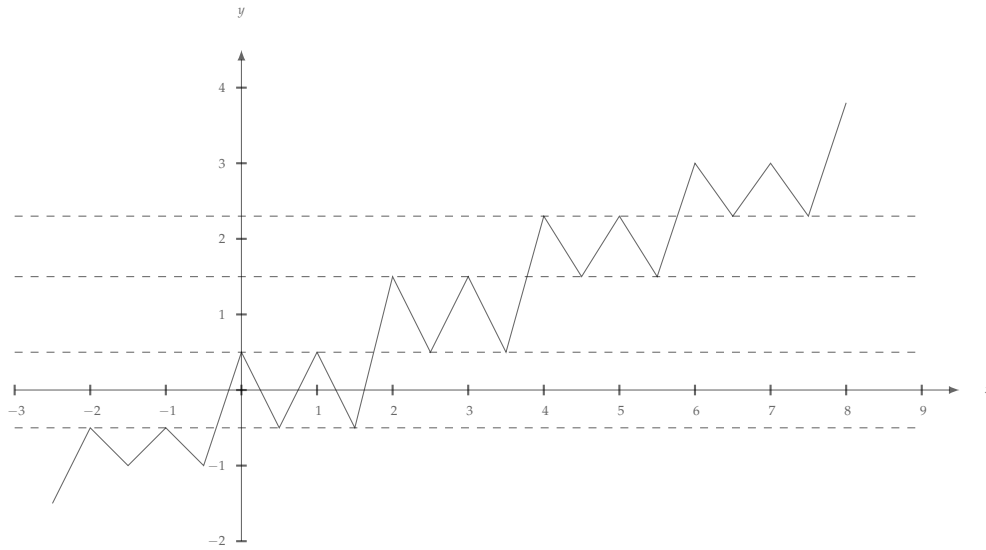
- b) Precise el apartado (a) demostrando que no existe ninguna función continua  $f$  que tome cada valor 2 veces o bien ninguna, es decir, que tome exactamente dos veces cada valor alcanzado por la función. Indicación: La indicación anterior implica que  $f$  posee o bien un valor máximo o un valor mínimo (el cual debe ser alcanzado dos veces). ¿Qué puede decirse acerca de los valores próximos al valor máximo?.

Respuesta.- Suponga lo contrario. Existe un función continua  $f$  que toma cada valor 0 veces o 2 veces.

Entonces, sea  $y \in \mathbb{R}_f$  (la imagen de la función  $f$ ). Entonces  $y$  se toma dos veces. Sea  $a < b$  y  $f(a) = f(b) = y$ . Exactamente la misma consideración que en la parte (a) conduce a una contradicción con el hecho de que  $y$  se toma exactamente dos veces. Concluimos que la suposición era incorrecta.

- c) Halle una función continua  $f$  que tome todos los valores exactamente tres veces. De modo más general, halle una función continua que tome todos los valores exactamente  $n$  veces, si  $n$  es impar.

Respuesta.- La figura que sigue, para  $n = 5$ , ilustra el caso general.



- d) Demuestre que si  $n$  es par, entonces no existe ninguna función continua  $f$  que tome todos los valores exactamente  $n$  veces. Indicación: Para abordar, por ejemplo, el caso  $n = 4$ , ponga  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$ . Entonces, o bien  $f(x) > 0$  para todo  $x$  en dos de los tres intervalos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_3, x_4)$ , o bien  $f(x) < 0$  para todo  $x$  en dos de los tres intervalos.

Demostración.- Supongamos que buscamos una función que tome cada valor exactamente 4 veces. Sea  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  tales que  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$ . Ya que  $f$  es una función continua, es cierto que  $f(x) > f(x_1), \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \forall i, i = 1, 2, 3$  o  $f(x) < f(x_1), \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \forall i, i = 1, 2, 3$  (el término  $f(x) - f(x_1)$  mantiene el mismo signo en cada uno de los intervalos  $(x_i, x_{y_0+1}), i = 1, 2, 3$ ). No es posible que el término  $f(x) - f(x_1)$  tiene el mismo signo en cada uno de los intervalos  $(x_i, x_{y_0+1}), i = 1, 2, 3$ , porque eso conducirá a la ocurrencia de parte del valor más de 4 veces. (Imagine que tenemos 6 valores positivos.) Entonces el término  $f(x) - f(x_1)$  es positivo en dos de los tres intervalos, y negativo en un intervalo, o al contrario. Pero eso significa que tenemos ocurrencias desiguales de los valores, por lo que no es posible lograr exactamente la misma ocurrencia de cada valor.

Dado que el número par de puntos genera el número impar de intervalos, la misma consideración nos lleva a la conclusión de que no es posible que una función continua alcance cada uno de los valores exactamente (cualquier) número par de veces.