Distribuciones notables discretas

Christian Limbert Paredes Aguilera

#library source("functiones.R")

Distribución Bernoulli

- Consideremos un experemento con dos resultados posibles éxito (E) y fracaso (F). El espacio de sucesos será $\Omega = \{E, F\}$
- Supongamos que la probabilidad de éxito es P(E) = p, y naturalmente P(E) = 1 p = q con 0 .
- Consideremos la aplicación

$$X: \Omega = \{E, F\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$E(X) = 1, \quad X(F) = 0$$

Su función de probabilidad es

$$P_X(x) = \begin{cases} 1 - p = q & si & x = 0 \\ p & si & x = 1 \\ 0 & si & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Su función de distribución es

$$P_X(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 0 \\ 1 - p = q & si & 0 \le x < 1 \\ 1 & si & 1 \le x \end{cases}$$

• Lo denotaremos por

$$X \equiv Ber(p)$$
 o $X \equiv B(1,p)$

• a este tipo de experimentos (éxito/fracaso) se les denomina experimentos Bernoulli.

Esperanza de una v.a. X Ber(p)

Su valor esperado es

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x \cdot P(X = x) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

Calculemos también $E(X^2)$

$$E(X^{2}) = \sum_{x=0}^{1} x \cdot P(X = x) = 0^{2} \cdot (1 - p) + 1^{2} \cdot p = p$$

Varianza de una v.a. X Ber(p)

Su varianza es

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p \cdot (1 - p) = p \cdot q$$

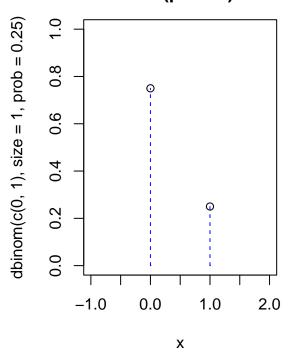
Su desviación típica es

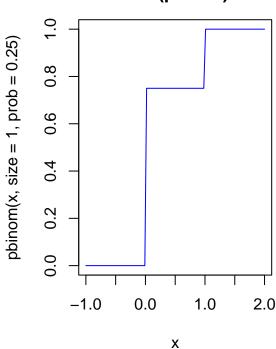
$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{p \cdot (1-p)}$$

```
#función de probabilidad
dbinom(0, size = 1, prob = 0.25)
## [1] 0.75
#función de probabilidad
dbinom(1, size = 1, prob = 0.25)
## [1] 0.25
# muestra aleatoria simple de probabilidad Bernoulli
rbinom(n = 20, size = 1, prob = 0.25)
## [1] 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0
# gráfico de la función de probabilidad y la de distribución de una Ber(p=0.25)
{par(mfrow=c(1,2))
plot(x=c(0,1),y=dbinom(c(0,1),size=1,prob=0.25),
     ylim=c(0,1),xlim=c(-1,2),xlab="x",
     main="Función de probabilidad\n Ber(p=0.25)")
lines(x=c(0,0,1,1),y=c(0,0.75,0,0.25), type = "h", lty = 2,col="blue")
curve(pbinom(x,size=1,prob=0.25),
      xlim=c(-1,2),col="blue",
      main="Función de distribución\n Ber(p=0.25)")
par(mfrow=c(1,1))}
```

Función de probabilidad Ber(p=0.25)

Función de distribución Ber(p=0.25)





Distribución binomial

Si repetimos n veces de forma independiente un experimento Bernoulli de parámetro p. Se conoce a priori cuantas veces se tirará la moneda.

El espacio muestral Ω estará formado por cadenas E's y F^s de longitud n consideremos la v.a.

$$X(EFF...EEF) = \text{número de éxitos en la cadena}$$

Función de probabilidad de una binomial

$$P_X(x) \left\{ \begin{array}{ccc} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} & si & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & si & \text{en otro caso} \end{array} \right.$$

Función de distribución

Su función de distribución no tiene una fórmula cerrada. Hay que acumular la función de probabilidad:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} P_X(i)$$

$$P_X(x) \begin{cases} 0 & si \\ \sum_{i=1}^k {n \choose i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} & si & k \le x < k+1 \quad y \quad k = 0, 1, \dots, n \\ 1 & si & n \le x \end{cases}$$

Cuantas maneras distintas hay para elegir 5 jugadores en un conjunto de 6 jugadores. Todo el múndo di choose(6,5)

[1] 6

con 10 jugadores el número de equipos de 5 distintos es bastante más grande choose(10,5)

[1] 252

Y por ejemplo con un equipo de fútbol profesional que tiene en plantilla 22 jugadores (quitamos el pochoose(22,10)

[1] 646646

Se denotará por

$$X \equiv B(n, p)$$

Obviamente se tiene que una bernoulli es una binomial con n=1

$$B(1,p) \equiv Ber(p)$$

Esperanza de un X B(n,p)

Su esperanza es

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot q^{n-k} = n \cdot p$$

La esperanza de X^2 es

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = n \cdot p \cdot q - (n \cdot p)^2$$

Varianza de una X B(n,p)

Su varianza es

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Su desviación típica es

$$\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

La distribución Binomila en Python y R

Caáculos binomila con R

Veamos los cálculos con funciones de R para una v.a. X con distribución binomial B(n=10,p=0.25)

Si queremos calculo con R algún valor de la función de distribución como por ejemplo $F_X(0) = P(X \le 0)$

$$pbinom(0, size = 10, prob = 0.25)$$

[1] 0.05631351

si queremos por ejemplo $F_X(4) = P(X \le 4)$

```
pbinom(4, size = 10, prob = 0.25)
```

[1] 0.9218731

Sin embargo, si queremos calcular algún valor de la función de probabilidad como por ejemplo P(X=0) dbinom(0,size=10, prob = 0.25)

[1] 0.05631351

o por ejemplo para P(X=4)

```
dbinom(4, size=10, prob = 0.25)
```

[1] 0.145998

Generación de muestras aleatorias con R

Generaremos una muestra eleatoria de 100 valores de una población B(20,0.5)

```
# Repetir 100 veces el experimento lanzar una moneda 20 veces y contar el número de caras. set.seed(2021) rbinom(100, size = 20, prob = 0.5)
```

```
[1] 10 12 11 9 11 11 11 9 12 15
                                      6 12 11 10 12
                                                     8 10 12 14 10
##
    [26] 13 13 13 14 12 6 14 14 13 10
                                      8 13
                                            8 13 10
                                                     8 12 10 14
                                                                 8 12 13
              7 10 9 8 10 9 12 12
                                      6 10
                                            7
                                               9 12
                                                     7
                                                       7 11
                                                              9
   [76] 10 10 9 11 16 10 9 14 11 9
                                      8 15 12 10
                                                 9
                                                    8 11 13 10
                                                                8 13 11 11 12 11
```

Ejemplo completo de distribución binomial

Tenemos una urna con 100 bolas de las cuales 40 son rojas y 60 blancas. Extraemos al azar una bola, anotamos su color y la devolvemos (la reponemos) a la urna Supongamos que repetimos este proceso n=10 reponiendo en cada ocación la bola extraida. Consideremos la v.a. X=Número de bolas extraidas con repocisión en n=10 repeticiones del mismo experimento Bernoulli. Bajo estas condiciones tenemos que repetimos n=10 veces el mismo experimento Bernoulli con probabilidad de éxito (sacar bola roja) es

$$P(Roja) = P(Exito) = p = \frac{40}{100} = 0.4$$

Así que la variable X = número de bolas rojas extraídas de la urna con reposición en n = 10 ocasiones sigue una ley binomial B(n = 10, p = 0.4)

1.¿Cual es la probabilidad de que saquemos exactamente 4 rojas?

Respuesta.- Utilizando la función de probabilidad tenemos que

$$P_X(X=4) = {10 \choose 4} \cdot 0.4^4 \cdot (1-0.4)^1 \cdot 0.4 = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^6 = 0.2508227$$

```
dbinom(4, size = 10, prob = 0.4)
```

[1] 0.2508227

2. ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos al menos 4 rojas?

Respuesta.- Al menos 4 rojas es $P(X \ge 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \le 3)$ es decir,

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= {10 \choose 0} \cdot 0.4^{0} \cdot (1 - 0.4)^{10 - 0} + {10 \choose 1} \cdot 0.4^{1} \cdot (1 - 0.4)^{10 - 1}$$

$$+ {10 \choose 2} \cdot 0.4^{2} \cdot (1 - 0.4)^{10 - 2} + {10 \choose 3} \cdot 0.4^{3} \cdot (1 - 0.4)^{10 - 3}$$

$$= 0.3822806$$

pbinom(3,10,0.4)

[1] 0.3822806

Así,
$$P(X \ge 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \le 3) = 1 - 0.3822806 = 0.6177194$$

1-pbinom(3,10,0.4)

[1] 0.6177194

Aunque en estos casos el parámetro lower.tail = FALSE es sin duda nuestra mejor opción:

pbinom(3,10,0.4,lower.tail = FALSE)

[1] 0.6177194

3.- ¿Cuál es la porbabilidad de que saguemos menos 3 rojas?

4.- ¿Cuál es el valor esperado del número de bolas rojas?

Respuesta.- Como X es una B(10, 0.4) sabemos que

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0.4 = 4$$

5.- ¿Cuál es la deviación típica del número de bolas rojas? La varianza es

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 2.4$$

Y por lo tanto $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{2.4} = 1.5491933$

Distribución geométrica

- Repitamos un experimento Bernoulli de parámetro p, de forma independiente hasta obtener el primer éxito.
- Sea X la v.a. que cuenta el número de fracasos antes del primer éxito. Por ejemplo que hayamos tenido x fracasos será una cadena de x fracasos culminada con un éxito. Más concretamente

$$P(FFF, \dots FE) = P(F)^{x} \cdot P(E) = (1-p)^{x} \cdot p = q^{x} \cdot p$$

Distribución geométrica

Su función de probabilidad es

$$PX_{i}(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^{x} \cdot p & si \quad x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & en otro caso \end{cases}$$

La denotaremos por Ge(p)

Función de distribución

Calculemos P(X < 3).

Por la propiedad de la probabilidad del suceso complementario tenemos que

$$P(X < 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - P(X > 4)$$

Efectivamente, el evento tenemos que $X \leq 3$ es que hemos fracasado más de tres veces hasta conseguir el primer éxito; es decir hemos gracasado 4 o más veces, por lo tanto

$$X>3=X\geq 4=FFFF$$

Ahora al ser los intentos sucesos independientes, tenemos que:

$$\begin{array}{lcl} P(X>3) & = & P(FFFF) = P(F) \cdot P(F) \cdot P(F) \cdot P(F) \\ & = & (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) = (1-p)^{3+1} \\ & = & (1-p)^4 \end{array}$$

calculamos

$$F_X(3) = P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (1 - p)^{3+1}$$

por lo que podemos generalizar a cualquier entero positivo $k = 0, 1, 2, \dots$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 - (1 - p) & si \quad k = 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$1 - (1 - p)^2 & si \quad k = 1 \le x < 2$$

$$1 - (1 - p)^3 & si \quad k = 2 \le x < 3$$

$$1 - (1 - p)^{k+1} & si \quad k \le x < k + 1 \ para \ k = 0, 1, 2, \dots$$

notemos que si $k=0,1,2,\ldots$ el límite de la función de distribución es

$$\lim_{k \to \infty} F_X(k) = \lim_{k \to \infty} 1 - (1 - p)^{k+1} = 1$$

ya que 0 < 1 - p < 1

La esperanza y la varianza de una distribución geométrica. Esperanza de una v.a. Ge(p)

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (1-p)^x \cdot p$$

$$= p \cdot (1-p) \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x-1}$$

$$= p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{[1-(1-p)]^2}$$

$$= (1-p) \cdot \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1-p}{p}$$

Valor $E(X^2)$ de una v.a. Ge(p)

$$E(X^{2}) = \sum_{x=0}^{\infty} x^{2} \cdot P_{X}(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^{2} \cdot (1-p)^{x} \cdot p$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} [x \cdot (x-1) + x] (1-p)^{x} \cdot p$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (x-1) \cdot (1-p)^{x} \cdot p + \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x} \cdot p$$

$$= (1-p)^{2} \cdot p \cdot \sum_{x=2}^{\infty} x \cdot (x-1) \cdot (1-p)^{x-2}$$

$$+ (1-p) \cdot p \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x-1}$$

$$= p \cdot (1-p)^{2} \frac{2}{[1-(1-p)]^{3}} + (1-p) \cdot p \frac{1}{[1-(1-p)]^{2}}$$

$$= p \cdot (1-p)^{2} \frac{2}{p^{3}} + (1-p) \cdot p \frac{1}{p^{2}}$$

$$= \frac{2 \cdot (1-p)^{2}}{p^{2}} + \frac{1-p}{p}$$

Varianza de una v.a. Ge(p)

$$\begin{split} Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \frac{2 \cdot (1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \\ &= \frac{2 \cdot (1-p)^2 + p \cdot (1-p) - (1-p)^2}{p^2} \\ &= \frac{(1-p)^2 + p \cdot (1-p)}{p^2} \\ &= \frac{1-2 \cdot pp^2 + p - p^2}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2} \end{split}$$

Propiedad de falta de memoria

Sea X una v.a. discreta con dominio $D_X = \{0, 1, 2, ...\}$ con P(X = 0) = p entonces X sigue una ley Ge(p) si y sólo si

$$P(X > k + j \mid X \ge j) = P(X > k)$$

para todo k, j = 0, 1, 2, 3, ...

Es decir, el número de veces que voy a fallar hasta el primer éxito no está condicionado por las veces que estamos probando. Por ejemplo es lo mismo lanzar 80 veces o lanzar 2 veces hasta el primer éxito.

Demostración.- Si es geométrica entonces el lado derecho de la igualdad es

$$P(X > k) = 1 - P(x \le k) = 1 - (1 - (1 - p)^{k+1}) = (1 - p)^{k+1}$$

Luego

$$P(X > k + j | X \ge j) = \frac{P(\{X > k + j\}) \cap \{X \ge j\}}{P(X \ge j)}$$

$$= \frac{P(X > k + j)}{P(> \ge j)}$$

$$= \frac{1 - P(X \le k + j)}{1 - P(X \le j - 1)}$$

$$= \frac{1 - (1 - (1 - p)^{k + j + 1})}{1 - (1 - (1 - p)^{k - 1 + 1})}$$

$$= \frac{(1 - p)^{k + j + 1}}{(1 - p)^{j}}$$

$$= (1 - p)^{k + 1}$$

Para demostrar el recíproco tomemos j=1 y $k\geq 0$ entonces por la propiedad de la pérdida de memoria

$$P(X > k + 1 | X \ge 1) = P(X > k)$$

Como sabemos P(X=0)=p tenemos $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-p$ Luego combinando las igualdades tenemos que

$$P(X < k+1 | X \ge 1) = \frac{P(X > k+1, X \ge 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X > k+1)}{P(X > 1)} = P(X > k)$$

Así podemos poner que

$$P(X > k + 1) = P(X \ge 1) \cdot P(X > k)$$

$$= P(X < 1) \cdot P(X > k)$$

$$= (1 - P(X = 0)) \cdot P(X > k)$$

$$= (1 - p) \cdot P(X > k)$$

En general tenemos que

$$P(X > k + 1) = (1 - p) \cdot P(X > k)$$

del mismo modo para j=2

$$P(X > k + 2) = (1 - p) \cdot P(X > k + 1)$$

Restando la primera igualdad de la última obtenemos:

$$P(X > k+1) - P(X > k+2) = (1-p) \cdot P(X > k) - (1-p) \cdot P(X > k+1)$$

de donde operando en cada lado de la igualdad obtenemos la recurrencia

$$[1 - P(X \le k + 1)] - [1 - P(X \le k + 2)] = (1 - p) \cdot [P(X > k) - P(X > k + 1)]$$

ahora operando

$$P(X \le k+2) - P(X \le k+1) = (1-p) \cdot [1 - P(X \le k) - (1 - P(X \le k+1))]$$

$$P(X = k+2) = (1-p) \cdot [P(X \le k+1) - P(X \le k)]$$

$$P(X = k+2) = (1-p) \cdot P(X = k+1)$$

De forma similar obtenemos

$$P(X = k + 1) = (1 - p) \cdot P(X = k)$$

Utilizando la recurrencia anterior para calcular todas las probabilidades a partir de la P(X = 0) = p; que vienen dadas por:

$$\begin{array}{lll} P(X=0) & = & p \\ P(X=1) & = & P(X=0+1) = (1-p) \cdot P(X=0) = (1-p) \cdot p \\ P(X=2) & = & P(X=1+1) = (1-p) \cdot P(X=1) = (1-p) \cdot (1-p) \cdot p = (1-p)^2 \cdot p \\ P(X=k) & = & P(X=(k-1)+1) = (1-p) \cdot P(X=k+1) = (1-p) \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = (1-p)^k \cdot p \end{array}$$

Lo que demuestra el recíproco, es decir que X es Geom(p).

La distribución geométrica con R y Python

Veamos los cálculos básicos con R para la distribución geométrica Ge(p=0.25). R implementa la geométrica que cuenta el número de fracasos.

$$P(X = 0) = (1 - 0.25)^{0} \cdot 0.25 = 0.25$$

dgeom(0,prob = 0.25)

[1] 0.25

$$P(X \le 0) = 1 - (1 - 0.25)^{0+1} = 1 - 0.75 = 0.25$$

pgeom(0,prob = 0.25)

[1] 0.25

$$P(X \le 4) = 1 - (1 - 0.25)^{4+1} = 1 - 0.75^5 = 0.7626953$$

pgeom(4,prob = 0.25)

[1] 0.7626953

Una muestra de tamaño 25 de una Ge(0.25)

$$rgeom(n = 25, prob = 0.25)$$

[1] 2 18 3 1 7 1 0 10 2 2 2 0 9 9 4 8 2 0 1 5 8 1 1 2 2