

## Algunas aplicaciones de la integración

### 1.2. El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

**TEOREMA 1.1** *Supongamos que  $f$  y  $g$  son integrables y que satisfacen  $f \leq g$  en  $[a, b]$ . La región  $S$  entre sus gráficas es medible y su área  $a(S)$  viene dada por la integral*

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

*Demostración.- Demostración.- Supongamos primero que  $f$  y  $g$  son no negativas,. Sean  $F$  y  $G$  los siguientes conjuntos:*

$$F = (x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x), \quad G = (x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x).$$

*Esto es,  $G$  es el conjunto de ordenadas de  $g$ , y  $F$  el de  $f$ , menos la gráfica de  $f$ . La región  $S$  es la diferencia  $G - F$ . Según los teoremas 1.10 y 1.11,  $F$  y  $G$  son ambos medibles. Puesto que  $F \subseteq G$  la diferencia  $S = G - F$  es también medible, y se tiene*

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

*Consideremos ahora el caso general cuando  $f \leq g$  en  $[a, b]$ , pero no son necesariamente no negativas. Este caso lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada encima del eje  $x$ . Esto es, elegimos un número positivo  $c$  suficientemente grande que asegure que  $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ . Por lo ya demostrado la nueva región  $T$  entre las gráficas de  $f + c$  y  $g + c$  es medible, y su área viene dada por la integral*

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)] = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

*Pero siendo  $T$  congruente a  $S$ , ésta es también medible y tenemos*

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

*Esto completa la demostración.*

**Nota 1.1** En los intervalos  $[a, b]$  puede descomponerse en un número de subintervalos en cada uno de los cuales  $f \leq g$  o  $g \leq f$  la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

**LEMA 1.1 (Área de un disco circular)** Demostrar que  $A(r) = r^2 A(1)$ . Esto es, el área de un disco de radio  $r$  es igual al producto del área de un disco unidad (disco de radio 1) por  $r^2$ .

*Demostración.-* Ya que  $g(x) - f(x) = 2g(x)$ , el teorema 2.1 nos da

$$A(r) = \int_{-r}^r g(x) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

En particular, cuando  $r = 1$ , se tiene la fórmula

$$A(1) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

Cambiando la escala en el eje  $x$ , y utilizando el teorema 1.19 con  $k = 1/r$ , se obtiene

$$A(r) = 2 \int_{-r}^r g(x) dx = 2r \int_{-1}^1 g(rx) dx = 2r \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - (rx)^2} dx = 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = r^2 A(1)$$

Esto demuestra que  $A(r) = r^2 A(1)$ , como se afirmó.

**Definición 1.1** Se define el número  $\pi$  como el área de un disco unidad.

La formula que se acaba de demostrar establece que  $A(r) = \pi r^2$

Generalizando el anterior lema se tiene

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x) dx = k \int_{ka}^{kb} f(x/k) dx = k^2 \int_a^b f(x) dx$$

**TEOREMA 1.2** Para  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $n$  entero positivo, se tiene

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{b^{1+1/n} - a^{1+1/n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

*Demostración.-* Sea  $\int_0^a x^{\frac{1}{n}}$ . El rectángulo de base  $a$  y altura  $a^{\frac{1}{n}}$  consta de dos componentes: el conjunto de ordenadas de  $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$  a  $a$  y el conjunto de ordenadas  $g(y) = y^n$  a  $a^{\frac{1}{n}}$ . Por lo tanto,

$$a \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}} = \int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx + \int_0^{a^{\frac{1}{n}}} y^n dy \implies \int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{a^{\frac{1}{n}}} = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Análogamente se tiene

$$\int_0^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Luego notemos que

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}} dx = \int_0^b x^{\frac{1}{n}} dx - \int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx$$

por lo tanto

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}} - a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

## 1.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, calcular el área de la región  $S$  entre las gráficas de  $f$  y  $g$  para el intervalo  $[a, b]$  que en cada caso se especifica. Hacer un dibujo de las dos gráficas y sombrear  $S$ .

**1.**  $f(x) = 4 - x^2$ ,  $g(x) = 0$ ,  $a = -2$ ,  $b = 2$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^2 [4 - x^2 - 0] dx = 4x \Big|_{-2}^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = 4(2 - (-2)) - \left( \frac{2^3 - (-2)^3}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

**2.**  $f(x) = 4 - x^2$ ,  $g(x) = 8 - 2x^2$ ,  $a = -2$ ,  $b = 2$ .

Respuesta.-

$$\int_{-2}^2 [8 - 2x^2 - (4 - x^2)] dx = \int_{-2}^2 4 - x^2 dx = \frac{32}{3} \text{ (por ejercicio 1)}$$

**3.**  $f(x) = x^3 + x^2$ ,  $g(x) = x^3 + 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ .

Respuesta.-

$$\int_{-1}^1 x^3 + 1 - (x^3 + x^2) dx = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = x \Big|_{-1}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 2 - \frac{1 - (-1)}{3} = \frac{4}{3}$$

**4.**  $f(x) = x - x^2$ ,  $g(x) = -x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$

Respuesta.-

$$\int_0^2 x - x^2 - (-x) dx = \int_0^2 2x - x^2 dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 2 \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{3}$$

**5.**  $f(x) = x^{1/3}$ ,  $g(x) = x^{1/2}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$

Respuesta.-

$$\int_0^1 x^{1/3} - x^{1/2} dx = \left. \frac{x^{1+1/3}}{1+1/3} \right|_0^1 - \left. \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} \right|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

**6.**  $f(x) = x^{1/3}$ ,  $g(x) = x^{1/2}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ .

Respuesta.-

$$\int_1^2 x^{1/2} - x^{1/3} dx = \left. \frac{x^{1/2+1}}{1+1/2} \right|_1^2 - \left. \frac{x^{1/3+1}}{1+1/3} \right|_1^2 = \frac{2^{1/2+1} - 1}{1+1/2} - \frac{2^{1/3+1}}{1+1/3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12}$$

**7.**  $f(x) = x^{1/3}$ ,  $g(x) = x^{1/2}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$

Respuesta.- Sea

$$\int_0^1 |x^{1/3} - x^{1/2}| dx + \int_1^2 |x^{1/3} - x^{1/2}| dx$$

por los problemas 5 y 6 se tiene

$$\frac{1}{12} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{6}$$

**8.**  $f(x) = x^{1/2}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{1/2} - x^2 dx + \int_1^2 x^2 - x^{1/2} dx &= \left( \left. \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} \right|_0^1 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \right) + \left( \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 - \left. \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} \right|_1^2 \right) \\ &= \left( \frac{1}{1+1/2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{2^3 - 1}{3} - \frac{2^{1+1/2} - 1}{1+1/2} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2} - 2}{3} \\ &= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

**9.**  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x + 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = (1 + \sqrt{5})/2$

Respuesta.

$$\int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - (x+1) dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} (x+1) - x^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - x - 1 \, dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} x + 1 - x^2 \, dx \\
&= \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} + \left( \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{6} \\
&= \frac{5\sqrt{5} - 3}{4}
\end{aligned}$$

**10.**  $f(x) = x(x^2 - 1)$ ,  $g(x) = x$ ,  $a = -1$ ,  $b = \sqrt{2}$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^0 x(x^2 - 1) - x \, dx + \int_0^{\sqrt{2}} x - [x(x^2 - 1)] \, dx = \int_{-1}^0 x^3 - 2x \, dx + \int_0^{\sqrt{2}} -x^3 + 2x \, dx = \\
&= \left( \frac{x^4}{4} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left( -\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} + 1 + (-1 + 2) = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

**11.**  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = x^2 - 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$

Respuesta.- Definimos  $f$  de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x) - g(x) \, dx &= \int_{-1}^0 -x - x^2 + 1 \, dx + \int_0^1 x - x^2 + 1 \, dx \\
&= \left( -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 \\
&= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

**12.**  $f(x) = |x + 1|$ ,  $g(x) = x^2 - 2x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$

Respuesta.- Definamos  $f$  de la siguiente manera:

$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} -(x + 1) & \text{si } x \in [0, 1) \\ x + 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) - g(x) \, dx &= \int_0^1 -(x-1) - x^2 + 2x \, dx + \int_1^2 x - 1 - x^2 + 2x \, dx \\&= \int_0^1 -x^2 + x + 1 \, dx + \int_1^2 -x^2 + 3x - 1 \, dx \\&= \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 + \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 \\&= \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) + \left( -\frac{8}{3} + 6 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 \right) \\&= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

**13.**