1

Algunas aplicaciones de la integración

1.2. El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

TEOREMA 1.1 *Supongamos que f y g son integrables y que satisfacen $f \leq q$ en $[a, b]$. La región S entre sus gráficas es medible y su área $a(S)$ viene dada por la integral*

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Demostración.- Demostración.- Supongamos primero que f y g son no negativas,. Sean F y G los siguientes conjuntos:

$$F = (x, y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x), \quad G = (x, y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x).$$

Esto es, G es el conjunto de ordenadas de g, y F el de f, menos la gráfica de f. La región S es la diferencia $G - F$. Según los teoremas 1.10 y 1.11, F y G son ambos medibles. Puesto que $F \subseteq G$ la diferencia $S = G - F$ es también medible, y se tiene

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Consideremos ahora el caso general cuando $f \leq q$ en $[a, b]$, pero no son necesariamente no negativas. Este caso lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada encima del eje x. Esto es, elegimos un número positivo c suficientemente grande que asegure que $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$ para todo x en $[a, b]$. Por lo ya demostrado la nueva región T entre las gráficas de $f + c$ y $g + c$ es medible, y su parea viene dad por la integral

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)] = \int_[g(x) - f(x)]\, dx$$

Pero siendo T congruente a S, ésta es también medible y tenemos

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Esto completa la demostración.

Nota 1.1 *En los intervalos* $[a, b]$ *puede descomponerse en un número de subintervalos en cada uno de los cuales* $f \leq g$ *o* $g \leq f$ *la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma*

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)| \, dx$$