1

Cálculo diferencial

1.4 Derivada de una función

Definición 1.1 (Definición de derivada)**.** La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

siempre que exista el límite. El número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x.

Ejemplo 1.1 (Derivada de una función potencial de exponente entero positivo)**.** Consideremos el caso $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo. El cociente de diferencias es ahora

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Para estudiar este cociente al tender h a cero, podemos proceder de dos maneras, o por la descomposición factorial del numerador considerado como diferencia de dos potencias n-simas o aplicando el teorema del binomio para el desarrollo de $(x+h)^n$. Seguiremos con el primer método.

En álgebra elemental se tiene la identidad

$$a^n - b^n = (b-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Si se toma $a = x + h$ y $b = x$ y dividimos ambos miembros por h, esa identidad se transforma en

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-1-k}$$

En la suma hay n términos. Cuando h tiende a 0, $(x+h)^k$ tiende a x^k, el k-ésimo término tiende a $x^k x^{n-1-k} = x^{n-1}$, y por tanto la suma de los n términos tiende a nx^{n-1}. De esto resulta que

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall\ x.$$

Ejemplo 1.2 (Derivada de la función seno). Sea $s(x) = \operatorname{sen} x$. El cociente de diferencias es

$$\frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$$

Para transformarlo de modo que haga posible calcular el límite cuando $h \to 0$, utilizamos la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2}$$

poniendo $y = x + h$. Esto conduce a la fórmula

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Como $h \to 0$, el factor $\cos(x + \frac{1}{2}h) \to \cos x$ por la continuidad del coseno. Así mismo, la fórmula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

demuestra que

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1 \ \text{ para todo } \ h \to 0$$

Por lo tanto el cociente de diferencias tiene como límite $\cos x$ cuando $h \to 0$. Dicho de otro modo, $s'(x) = \cos x$; para todo x; la derivada de la función seno es la función coseno.

Ejemplo 1.3 (Derivada de la función coseno). Sea $c(x) = \cos x$. Demostraremos que $c'(x) = -\operatorname{sen} x$; esto es, la derivada de la función coseno es menos la función seno. Partamos de la identidad

$$\cos y - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{y-x}{2} \operatorname{sen} \frac{y+x}{2}$$

y pongamos $y = x + h$. Esto nos conduce a la fórmula

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

La continuidad del seno demuestra que $\left(x + \frac{1}{2}h\right) \to x$ cuando $h \to 0$; luego ya que

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1 \ \text{ para todo } \ h \to 0$$

obtenemos $c'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Ejemplo 1.4 (Derivada de la función raíz n-esima). Si n es un entero positivo, sea $f(x) = x^{1/n}$ para $x > 0$. El cociente de diferencias para f es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{1/n} - x^{1/n}}{h}.$$

Pongamos $u = (x+h)^{1/n}$ y $v = x^{1/n}$. Tenemos entonces $u^n = x + h$ y $v^n = x$, con lo que $h = u^n - v^n$, y el cociente de diferencias toma la forma

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u-v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2}v^{n-1}}$$

La continuidad de la función raíz n-sima prueba que $u \to v$ cuando $h \to O$. Por consiguiente cada término del denominador del miembro de la derecha tiene límite v^{n-1} cuando $h \to O$. En total hay n términos, con lo que el cociente de diferencias tiene como límite v^{1-n}/n. Puesto que $v = x^{1/n}$, esto demuestra que

$$f'(x) = \frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

Ejemplo 1.5 (Continuidad de las funciones que admiten derivada)**.** Si una función f tiene derivada en un punto x, es también continua en x. Para demostrar, empleamos la identidad

$$f(x+h) = f(x) + h\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

que es válida para $h \neq 0$. Si hacemos que $h \to 0$, el cociente de diferencias del segundo miembro tiende a $f'(x)$, puesto que este cociente está multiplicando por un factor que tiende a 0, el segundo término del segundo miembro tiende a $0 \cdot f'(x)$. Esto demuestra que $f(x+h) \to f(x)$ cuando $h \to 0$ y por tanto que f es continua en x.

1.5 Álgebra de las derivadas

Teorema 1.1. Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo común. En cada punto en que f y g tienen derivadas, también las tienen la suma $f+g$