Guía 1

1. Suponga que a, b son números reales no nulos simultáneamente. Hallar números reales c y d tales que,

$$\frac{1}{a+bi} = c + di$$

Respuesta.- Hallemos $c \in \mathbb{R}$ como sigue,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{a+bi} & = & c+di \\ \dfrac{1}{a+bi} - di & = & c + di - di \\ c & = & \dfrac{1}{a+bi} - di \end{array}$$

Ya que, $i^4 = i^3 i = (-i)i = -(i^2) = -(-1) = 1$ y

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i,$$

Luego hallamos $d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{a+bi} & = & c+di \\ di & = & \dfrac{1}{a+bi} - c \\ di \cdot i^3 & = & i^3\left(\dfrac{1}{a+bi} - c\right) \\ d & = & \dfrac{-i}{a+bi} + ci \end{array}$$

Así, $c = \dfrac{1}{a+bi} - di$; $d = \dfrac{-i}{a+bi} + ci.$

2. Hallar dos raíces cuadradas distintas de i.

Respuesta.- $x^2 - 1 = 0 \quad$ y $\quad x^2 - 4 = 0.$

3. Probar que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Demostración.- Sea $\alpha = a + bi$ y $\beta = c + di$, entonces por definición de números complejos para la adición, tenemos que,

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & (a+bi) + (c+di) \\ & = & (c+di) + (a+bi) \\ & = & \beta + \alpha \in \mathbb{C} \end{array}$$

De donde se demuestra la proposición dada.

4. Probar que $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$, para todo $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración.- Sea $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ y $\lambda = e + fi$ entonces,

$$\begin{array}{rcl} (\alpha+\beta)+\lambda & = & [(a+bi)+(c+di)] + (e+fi) \\ & = & (a+bi) + [(c+di)+(e+fi)] \\ & = & \beta + (\alpha + \lambda) \end{array}$$

Así, $(\alpha + \beta) + \lambda = \beta + (\alpha + \lambda)$.

5. Probar que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, existe un único $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha + \beta = 0$.

Demostración.- La existencia queda demostrada por la propiedad identidad para la adición.
Ahora demostremos su unicidad de la siguiente manera:
Supongamos que existen $\beta', \ \beta \in \mathbb{C}$ tales que $\alpha + \beta = 0$ y $\alpha + \beta' = 0$ que implica,

$$\alpha + \beta = \alpha + \beta' \implies \beta = \beta'.$$

Y por lo tanto, queda demostrada la unicidad.

Demostrada la existencia y unicidad concluimos que se cumple la propiedad del inverso aditivo para $\mathbb{C}$.

6. Probar que para todo $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, existe un único $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha\beta = 1$.

Demostración.- Similar al anterior ejercicio podemos demostrar la existencia de β por la propiedad de identidad para la multiplicación. Luego demostremos la unicidad de la siguiente manera:

Sean $\beta, \beta' \in \mathbb{C}$ tales que $\alpha\beta = 1$ y $\alpha\beta = 1$ entonces

$$\alpha\beta = \alpha\beta'$$

como $\alpha \neq 0$, nos queda que, $\beta = \beta'$.

Así, queda demostrada la propiedad del inverso multiplicativo para $\mathbb{C}$.

7. Hallar $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $(4, -3, 1, 7) + 2x = (5, 9, -6, 8)$.

Respuesta.- se tiene que,

$$\begin{aligned}
(4,-3,1,7) + 2x &= (5,9,-6,8) \\
2x &= (5,9,-6,8) - (4,-3,1,7) \\
2x &= (5-4, 9+3, -6-1, 8-7) \\
2x &= (1,12,-7,1)
\end{aligned}$$

De donde $x = \left(\dfrac{1}{2}, 6, -\dfrac{7}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

8. Probar que $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in \mathbf{F}^n$.

Demostración.-