1

Cálculo diferencial

1.1 Aplicación del teorema del valor medio a propiedades geométricas de las funciones

Teorema 1.1. Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y que admite derivada en cada punto de un intervalo abierto (a, b). Tenemos entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente creciente en $[a, b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

c) Si $f'(x) = 0$ para algún x de (a, b), entonces f es constante en $[a, b]$.

Demostración.- Para probar a) tenemos que demostrar que $f(x) < f(y)$ siempre que $a \leq x < y \leq b$. Por consiguiente, supongamos $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio al intervalo cerrado $[x, y]$. Obtenemos

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x), \quad \text{donde} \quad x < c < y.$$

Puesto que $f'(c)$ e $y - x$ son positivos, lo mismo le ocurre a $f(y) - f(x)$, y esto significa $f(x) < f(y)$, como se afirmó. La demostración de b) es parecida. Para demostrar c), utilizamos la igualdad dada haciendo $x = a$. Ya que $f'(c) = 0$, tenemos $f(y) = f(a)$ para todo y en $[a, b]$, con lo que f es constante en $[a, b]$.

Este teorema podemos emplearlo para demostrar que se presenta un extremo siempre que la derivada cambia de signo.

Teorema 1.2. Supongamos f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que existe la derivada f' en todo punto del intervalo abierto (a, b), excepto posiblemente en un punto c.

a) Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y negativa para todo $x > c$, f tiene un máximo relativo en c.

b) Si, por otra parte, $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$, y positiva para todo $x > c$, f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración.- En el caso a), el teorema 4.7 nos dice que f es estrictamente creciente en $[a, c]$ y estrictamente decreciente en $[c, b]$. Luego $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ en (a, b), con lo que f tiene un máximo relativo en c. Esto demuestra a) y la demostración de b) es completamente análoga.

1.2 Criterio de la derivada segunda para los extremos