

Transformaciones lineales

1.1 Notación F, V, W .

- F denota \mathbf{R} o \mathbf{C} .
- V y W denota espacios vectoriales sobre F .

1.A El espacio vectorial de las Transformaciones lineales

Definición y ejemplos de Transformaciones lineales

1.2 Definición Transformación lineal.

Una **transformación lineal** de V en W es una función $T : V \rightarrow W$ con las siguientes propiedades:

- **Aditividad**

$$T(u + v) = Tu + Tv \text{ para todo } u, v \in V;$$

- **Homogeneidad**

$$T(\lambda v) = \lambda(Tv) \text{ para todo } \lambda \in F \text{ y todo } v \in V.$$

1.3 Notación $\mathcal{L}(V, W)$

El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se denota por $\mathcal{L}(V, W)$.

1.5 Teorema Transformaciones lineales y bases del dominio.

Suponga que v_1, \dots, v_n es una base de V y $w_1, \dots, w_n \in W$. Entonces, existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que

$$T(v_j) = w_j$$

para cada $j = 1, \dots, n$.

Demostración.- Primero demosremos la existencia de una transformación lineal T , con la propiedad deseada. Defina $T : V \rightarrow W$ por

$$T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = c_1w_1 + \dots + c_nw_n.$$

donde c_1, \dots, c_n son elementos arbitrarios de \mathbf{F} . La lista v_1, \dots, v_n es una base de V , y por lo tanto, la ecuación anterior de hecho define una función T para V en W (porque cada elemento de V puede ser escrito de manera única en la forma c_1v_1, \dots, c_nv_n). Para cada j , tomando $c_j = 1$ y las otras c 's igual a 0 demostramos la existencia de $T(v_j) = w_j$.

Si $u, v \in V$ con $u = a_1v_1, \dots, a_nv_n$ y $v = c_1v_1, \dots, c_nv_n$, entonces

$$\begin{aligned} T(v+u) &= T[(a_1+c_1)v_1 + \dots + (a_n+c_n)v_n] \\ &= (a_1+c_1)w_1 + \dots + (a_n+c_n)w_n \\ &= (a_1w_1 + \dots + a_nw_n) + (c_1w_1 + \dots + c_nw_n) \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

Similarmente, si $\lambda \in \mathbf{F}$ y $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$, entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda c_1v_1 + \dots + \lambda c_nv_n) \\ &= \lambda c_1w_1 + \dots + \lambda c_nw_n \\ &= \lambda(c_1w_1 + \dots + c_nw_n) \\ &= \lambda T(v). \end{aligned}$$

Así, T es una transformación lineal para V en W .

Para probar que es único, suponga que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y que $T(v_j) = w_j$ para $j = 1, \dots, n$. Sea $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{F}$. La Homogeneidad de T implica que $T(c_jv_j) = c_jw_j$ para $j = 1, \dots, n$. La Aditividad de T implica que

$$T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = c_1w_1 + \dots + c_nw_n.$$

Por lo tanto, T se determina de forma única en $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ para la ecuación de arriba. Porque v_1, \dots, v_n es una base de V , esto implica que T es determinado únicamente en V . ■

Operaciones algebraicas en $\mathcal{L}(V, W)$

1.6 Definición Adición y multiplicación escalar en $\mathcal{L}(V, W)$

Suponga que $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbf{F}$. La **suma** $S + T$ y el **producto** λT son transformaciones lineales para V en W definida por

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v) \quad \text{y} \quad (\lambda T)(v) = \lambda(Tv)$$

para todo $v \in V$.

1.7 Teorema $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial

Con las Operaciones de adición y multiplicación escalar como se definió, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial. ■

Por lo general, no tiene sentido multiplicar dos elementos de un espacio vectorial, pero para algunos pares de combinaciones lineales existe un producto útil. Necesitaremos un tercer espacio vectorial, así que para el resto de esta sección supongamos que U es un espacio vectorial sobre F .

1.8 Definición Producto de combinaciones lineales.

Si $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces el producto $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ es definido por

$$(ST)(u) = S(Tu)$$

para $u \in U$.

En otras palabras, ST es solo la composición habitual $S \circ T$ de dos funciones, pero cuando ambas funciones son lineales, la mayoría de los matemáticos escriben ST en lugar de $S \circ T$. Debe verificar que ST es de hecho una transformación lineal de U a W siempre que $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Tenga en cuenta que ST se define solo cuando T se transforma en el dominio de S .

1.9 Teorema Propiedades algebraicas de producto de transformaciones lineales.

Asociatividad

$$(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$$

siempre que T_1, T_2 y T_3 sean transformaciones lineales tales que los productos tengan sentido (lo que significa que T_3 se transforma en el dominio de T_2 , y T_2 se transforma en el dominio de T_1).

Identidad

$$TI = IT = T$$

siempre que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ (el primer I es la transformación de identidad en V , y el segundo I es la transformación de identidad en W).

Propiedades distributivas

$$(S_1 + S_2)T = S_1 T + S_2 T \quad \text{y} \quad S(T_1 + T_2) = S T_1 + S T_2$$

siempre que $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V, W)$. ■

La multiplicación de aplicaciones lineales no es conmutativa. En otras palabras, no es necesariamente cierto que $ST = TS$, incluso si ambos lados de la ecuación tienen sentido.

1.10 Ejemplo Suponga $D \in \mathcal{L}[\mathcal{P}(\mathbf{R}), \mathcal{P}(\mathbf{R})]$ es la transformación de diferenciación definido en el ejemplo 3.4 y $T \in \mathcal{L}[\mathcal{P}(\mathbf{R}), \mathcal{P}(\mathbf{R})]$ es la multiplicación por la transformación x^2 definida tempranamente en esta sección. Muestre que $TD \neq DT$.

Demostración.- Se tiene

$$[(TD)p](x) = x^2 p'(x) \quad \text{pero} \quad [(DT)p](x) = x^2 p'(x) + 2xp(x).$$

En otras palabras, no es lo mismo derivar y luego multiplicar por x^2 que multiplicar por x^2 y luego derivar. ■

1.11 Teorema Transformaciones lineales toman 0 a 0.

Suponga T es una transformación lineal para V en W . Entonces $T(0) = 0$.

Demostración.- Por la aditividad, se tiene

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0).$$

Agregue el inverso aditivo de $T(0)$ cada lado de la ecuación anterior para concluir que $T(0) = 0$. ■

Ejercicios 3.A

1. Suponga $b, c \in \mathbf{R}$. Defina $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ por

$$T(x, y, z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz).$$

Demuestre que T es lineal si y sólo si $b = c = 0$.

Demostración.- Por definición de transformación lineal, tendremos que demostrar que se cumple las propiedades de aditividad y homogeneidad.

Aditividad.- Supongamos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$. Entonces, por la definición de T se tiene

$$\begin{aligned} T[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= [2(x_1 + x_2) - 4(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) + b, \\ &\quad 6(x_1 + x_2) + c(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2)] \\ &= (2x_1 - 4y_1 + 3z_1 + b, 6x_1 + cx_1y_1z_1) \\ &\quad + (2x_2 - 4y_2 + 3z_2 + b, 6x_2 + cx_2y_2z_2) \\ &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Esto se cumplirá si $2b = b \Leftrightarrow b = 0$ y $cx_1y_1z_1 + cx_1y_2z_1 + cx_2y_1z_1 + cx_2y_2z_1 + cx_1y_1z_2 + cx_1y_2z_2 + cx_2y_1z_2 + cx_2y_2z_2 = cx_1y_1z_1 + cx_2y_2z_2 \Leftrightarrow c = 0$.

Homogeneidad.- Supongamos $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ y $\lambda \in \mathbf{R}$. Entonces, por la definición de T se tiene

$$\begin{aligned} T[\lambda(x, y, z)] &= (2\lambda x - 4\lambda y + 3\lambda z + \lambda b, 6\lambda x + c\lambda xyz) \\ &= \lambda(2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz) \\ &= \lambda T[(x, y, z)]. \end{aligned}$$

Notemos que la homogeneidad se cumplirá para todo $b, c \in \mathbf{R}$. Por lo tanto, T es lineal si y sólo si $b = c = 0$.

2. Suponga $b, c \in \mathbf{R}$. Defina $T : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^2$ por

$$Tp = \left[3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^2 x^3 p(x) dx + c \sen p(0) \right].$$

Demuestre que T es una transformación lineal si y sólo si $b = c = 0$.

Demostración.- Primero demostraremos que si T es una transformación lineal, entonces $b = c = 0$. Por definición para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha Tp = T(\alpha p)$$

De esta manera se tiene

$$\begin{aligned} \alpha Tp &= \alpha \left[3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^2 x^3 p(x) dx + c \operatorname{sen} p(0) \right] \\ &= \left[3\alpha p(4) + 5\alpha p'(6) + b\alpha p(1)p(2), \alpha \int_{-1}^2 x^3 p(x) dx + c\alpha \operatorname{sen} p(0) \right] \quad (1) \\ T(\alpha p) &= \left[3(\alpha p)(4) + 5(\alpha p)'(6) + b(\alpha p)(1)(\alpha p)(2), \int_{-1}^2 x^3 (\alpha p)(x) dx + c \operatorname{sen}(\alpha p)(0) \right]. \end{aligned}$$

Es decir, si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, entonces

$$(\alpha p)(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \cdots + (\alpha a_n)x^n.$$

Por lo tanto, para cada x ,

$$\begin{aligned} (\alpha p)(x) &= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \cdots + (\alpha a_n)x^n \\ &= \alpha (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \\ &= \alpha p(x). \end{aligned}$$

Por esta deducción podemos decir que,

$$\begin{aligned} T(\alpha p) &= \left[3\alpha p(4) + 5\alpha p'(6) + b\alpha^2 p(1)p(2), \int_{-1}^2 \alpha x^3 p(x) dx + c \operatorname{sen}(\alpha p(0)) \right] \\ &= \left[\alpha (3p(4) + 5p'(6) + b\alpha p(1)p(2)), \alpha \int_{-1}^2 x^3 p(x) dx + c\alpha \operatorname{sen} p(0) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

Ahora, podemos igualar (1) y (2) si y sólo si

$$b\alpha^2 p(1)p(2) = b\alpha p(1)p(2) \quad \text{y} \quad c \operatorname{sen}(\alpha p(0)) = c\alpha \operatorname{sen} p(0)$$

para cada $p(x)$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sean $p(x) = x + \frac{\pi}{2}$ y $\alpha = 2$. De donde,

$$b\alpha^2 p(1)p(2) = 4b \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad b\alpha p(0)p(1) = 2b \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 4b \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) &= 2b \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 4b \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) - 2b \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2b \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$0 = c \operatorname{sen} \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = c \sin (\alpha p(0)) = c \alpha \operatorname{sen} p(0) = 2c \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2c$$

Por lo tanto,

$$c = 0.$$

Ahora, demostremos que si $b = c = 0$, entonces T es lineal; es decir, que T es aditiva y Homogénea. Supongamos $p, q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ y $\lambda \in \mathbf{R}$, por lo que

$$\begin{aligned} T(p+q) &= \left[3(p+q)(4) + 5(p+q)'(6), \int_{-1}^2 x^3(p+q)(x) dx \right] \\ &= \left[3(p(4) + q(4)) + 5(p'(6) + q'(6)), \int_{-1}^2 x^3(p(x) + q(x)) dx \right] \\ &= \left[3p(4) + 5p'(6) + 3q(4) + 3q'(6), \int_{-1}^2 x^3 p(x) dx + \int_{-1}^2 x^3 q(x) dx \right] \\ &= \left[3p(4) + 5p'(6), \int_{-1}^2 p(x) dx \right] + \left[3q(4) + 3q'(6), \int_{-1}^2 x^3 q(x) dx \right] \\ &= Tp + Tq. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(\lambda p) &= \left[3(\lambda p)(4) + 5(\lambda p)'(6), \int_{-1}^2 x^3(\lambda p)(x) dx \right] \\ &= \left[3\lambda p(4) + 5\lambda p'(6), \lambda \int_{-1}^2 x^3 p(x) dx \right] \\ &= \left[\lambda(3p(4) + 5p'(6)), \lambda \int_{-1}^2 x^3 p(x) dx \right] \\ &= \lambda \left[3p(4) + 5p'(6), \int_{-1}^2 x^3 p(x) dx \right] \\ &= \lambda Tp. \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es lineal. Así, concluimos que T es lineal si y sólo si $b = c = 0$.

3. Suponga $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^m)$. Demostrar que existe escalares $A_{j,k} \in \mathbf{F}$ para $j = 1, \dots, m$ y $k = 1, \dots, n$ tal que

$$T(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}^m.$$

[El ejercicio demuestra que T tiene la forma prometida en el último apartado del ejemplo 3.4.]

4. Suponga $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y v_1, \dots, v_m una lista de vectores en V tal que Tv_1, \dots, Tv_m es una lista linealmente independiente en W . Demostrar que v_1, \dots, v_m es linealmente independiente.

Demostración.- Sea para $c_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0.$$

Luego, multiplicamos por T a ambos lados de la ecuación anterior,

$$T(c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n) = T(0).$$

Por la definición 1.6 y el teorema 3.11 tenemos que

$$c_1Tv_1 + c_2Tv_2 + \dots + c_nTv_n = 0.$$

Entonces, como Tv_1, \dots, Tv_m es una lista linealmente independiente en W .

5. Demostrar la afirmación 3.7.

Demostración.- Verificaremos cada propiedad.

- Conmutatividad.- Sean $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, tenemos

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v) = T(v) + S(v) = (T + S)(v).$$

Por lo tanto, la adición es conmutativa.

- Asociatividad.- Sean $R, S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, tenemos

$$\begin{aligned} [(R + S) + T](v) &= (R + S)(v) + T(v) \\ &= R(v) + S(v) + T(v) \\ &= R(v) + [S(v) + T(v)] \end{aligned}$$

Por lo que la adición es asociativa. Luego, sean $a, b \in \mathbf{F}$, entonces

$$[(ab)T](v) = (ab)T(v) = a[bT(v)] = [a(bT)](v).$$

Por lo tanto, la multiplicación es asociativa.

- Identidad aditiva.- Sea $0 \in \mathcal{L}(V, W)$ denotado como transformación cero, sean también $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$. Entonces,

$$(T + 0)(v) = T(v) + 0(v) = T(v).$$

Por lo tanto, la transformación cero es la identidad aditiva.

- Inverso aditivo.- Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, y definamos a $(-T) \in \mathcal{L}(V, W)$ por $(-T)(v) = -T(v)$, entonces

$$[T + (-T)](v) = T(v) + (-T)(v) = T(v) - T(v) = 0,$$

Por lo que, $(-T)$ es el inverso aditivo para cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

- Identidad multiplicativa.- Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces,

$$(1T)(v) = 1(T(v)) = T(v).$$

Así la identidad multiplicativa de \mathbf{F} es la identidad multiplicativa de la multiplicación escalar.

- Propiedad distributiva.- Sean $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, $a, b \in \mathbf{F}$ y $v \in V$. Entonces,

$$\begin{aligned} [a(S + T)](v) &= a(Sv + Tv) \\ &= aS(v) + aT(v) \\ &= (aS)(v) + (aT)(v) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [(a + b)T](v) &= (a + b)T(v) \\ &= aT(v) + bT(v) \\ &= (aT)(v) + (bT)(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

6. Demostrar la afirmación 3.9.

Demostración.-

- Asociatividad.- Para x en el dominio de T_3 , tenemos

$$\begin{aligned} [(T_1 T_2) T_3](x) &= (T_1 T_2)[T_3(x)] \\ &= T_1[T_2[T_3(x)]] \\ &= T_1[(T_2 T_3)(x)] \\ &= [T_1(T_2 T_3)](x). \end{aligned}$$

- Identidad.- Para $v \in V$, se tiene

$$\begin{aligned} TI(v) &= T[I(v)] \\ &= T(v) \\ &= I[T(v)] \\ &= IT(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $TI = IT = I$.

- Propiedad distributiva.- Para $u \in U$, se tiene

$$\begin{aligned}
 [(S_1 + S_2)T](u) &= (S_1 + S_2)[T(u)] \\
 &= S_1[T(u)] + S_2[T(u)] \\
 &= S_1T(u) + S_2T(u) \\
 &= (S_1T + S_2T)(u).
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 [T(S_1 + S_2)](u) &= T[(S_1 + S_2)(u)] \\
 &= T[S_1(u) + S_2(u)] \\
 &= T[S_1(u)] + T[S_2(u)] \\
 &= (TS_1 + TS_2)(u).
 \end{aligned}$$

7.