Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Álgebra Lineal I**
Ejercicio: **Práctica 1.**
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Ejercicio 1. Encontrar dos matrices $2\times 2, A$ diferentes tales que $A^2 = 0$ pero $A \neq 0$.

Respuesta.- Consideremos las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

De este modo encontramos dos matrices tal que $A^2 = 0$.

Ejercicio 2. Para cada A del ejercicio 2, hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tal que

$$\boldsymbol{E_k \cdot E_2 E_1 A = I.}$$

Respuesta.- Considere la matriz A dada y reduzca por filas de la siguiente manera y mencione correspondientemente las matrices elementales.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 - 2R_1 \to R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_3 - 3R_1 \to R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \frac{R_2}{2} \to R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad R_1 + R_2 \to R_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E_4 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad R_3 - 3R_2 \to R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$E_5 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad -\frac{R_3}{2} \to R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_6 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_1 - \frac{R_3}{2} \to R_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_7 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 + \frac{R_3}{2} \to R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_8 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la sucesión de matrices elementales son $E_1, E_2, \ldots, E_8$ tal que

$$E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A = I.$$

Ejercicio 3. Sean A y B matrices 2×2 tales que $AB = I$. Demostrar que $BA = I$.

Demostración.- Ya que $AB = I$, entonces $A, B \neq 0$. Luego

$$\begin{array}{rcl} AB = I & \Rightarrow & ABA = IA = A \\ & \Rightarrow & ABA - A = I \\ & \Rightarrow & A(BA - I) = I \\ & \Rightarrow & BA - I = 0 \\ & \Rightarrow & BA = I. \end{array}$$

Ejercicio 4. Sea,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar una matriz escalón reducida por filas $\boldsymbol{R}$ que sea equivalente a $\boldsymbol{A}$, y una matriz inversible 3×3, $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{PA}$.

Respuesta.-

Ejercicio 5. Repetir el ejercicio 1, pero con

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & i \\ 1 & -3 & -i \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Respuesta.-

Ejercicio 6. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

¿Para qué $\boldsymbol{X}$ existe un escalar $\boldsymbol{c}$ tal que $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{cX}$?.

Respuesta.-

Ejercicio 7. Determinar si

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es inversible y hallar $\boldsymbol{A}^{-1}$ si existe.

Respuesta.-

Ejercicio 8. Supóngase que $\boldsymbol{A}$ es una matriz 2×1 y que $\boldsymbol{B}$ es una matriz 1×2. Demostrar que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ no es inversible.

Demostración.-

Ejercicio 9. Una matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{A}$, se llama triangular superior si $\boldsymbol{A}_{ij} = 0$ para $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{j}$; esto es, si todo elemento por debajo de la diagonal principal es 0. Demostrar que una matriz (cuadrada) triangular superior es inversible si, y sólo si, cada elemento de su diagonal principal es diferente de 0.

Demostración.-

Ejercicio 10. **Demostrar la siguiente generalización del ejercicio 6. Si A es una matriz $m \times n$, B es una matriz $n \times m$ y $n < m$, entonces AB no es inversible.**

Demostración.-

Ejercicio 11. **El resultado del ejemplo 16 sugiere que tal vez la matriz**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

es inversible y A^{-1} tiene elementos enteros.¿Se puede demostrar esto?.

Respuesta.-