1

Transformaciones lineales

1.1 Notación ***F*, *V*, *W*.**

- **F** denota **R** o **C**.
- V y W denota espacios vectoriales sobre **F**.

1.A El espacio vectorial de las Transformaciones lineales

Definición y ejemplos de Transformaciones lineales

1.2 Definición **Transformación lineal.**

Una **transformación lineal** de V en W es una función $T : V \to W$ con las siguientes propiedades:

- **Aditividad**
$$T(u + v) = Tu + Tv \text{ para todo } u, v \in V;$$
- **Homogeneidad**
$$T(\lambda v) = \lambda(Tv) \text{ para todo } \lambda \in \mathbf{F} \text{ y todo } v \in V.$$

1.3 Notación $\mathcal{L}(V, W)$

El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se denota por $\mathcal{L}(V, W)$.

1.5 Teorema **Transformaciones lineales y bases del dominio.**

Suponga que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, \ldots, w_n \in W$. Entonces, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que
$$T(v_j) = w_j$$

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Demostración.- Primero demostremos la existencia de una transformación lineal T, con la propiedad deseada. Defina $T : V \to W$ por

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1w_1 + \cdots + c_nw_n.$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son elementos arbitrarios de $\mathbf{F}$. La lista $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, y por lo tanto, la ecuación anterior de hecho define una función T para V en W (porque cada elemento de V puede ser escrito de manera única en la forma $c_1v_1, \ldots, c_nv_n$). Para cada j, tomando $c_j = 1$ y las otras $c's$ igual a 0 demostramos la existencia de $T(v_j) = w_j$.
Si $u, v \in V$ con $u = a_1v_1, \ldots, a_nv_n$ y $v = c_1v_1, \ldots, c_nv_n$, entonces

$$\begin{aligned} T(v+u) &= T\left[(a_1+c_1)v_1 + \ldots + (a_n+a_n)v_n\right] \\ &= (a_1+c_1)w_1 + \ldots + (a_n+c_n)w_n \\ &= (a_1w_1 + \ldots + a_nw_n) + (c_1w_1 + \ldots + c_nw_n) \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

Similarmente, si $\lambda \in \mathbf{F}$ y $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$, entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda c_1v_1 + \cdots + \lambda c_nv_n) \\ &= \lambda c_1w_1 + \cdots + \lambda c_nw_n \\ &= \lambda(c_1w_1 + \cdots + c_nw_n) \\ &= \lambda T(v). \end{aligned}$$

Así, T es una transformación lineal para V en W.
Para probar que es único, suponga que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y que $T(v_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Sea $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{F}$. La Homogeneidad de T implica que $T(c_jv_j) = c_jw_j$ para $j = 1, \ldots, n$. La Aditividad de T implica que

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1w_1 + \cdots + c_nw_n.$$

Por lo tanto, T se determina de forma única en $\text{span}(v_1, \ldots, v_n)$ para la ecuación de arriba. Porque $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, esto implica que T es determinado únicamente en V. ■

Operaciones algebraicas en $\mathcal{L}(V, W)$

1.6 Definición **Adición y multiplicación escalar en $\mathcal{L}(V, W)$**

Suponga que $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbf{F}$. La **suma** $S + T$ y el **producto** λT son transformaciones lineales para V en W definida por

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v) \quad \text{y} \quad (\lambda T)(v) = \lambda(Tv)$$

para todo $v \in V$.

1.7 Teorema **$\mathcal{L}\,(V, W$ es un espacio vectorial)**

Con las Operaciones de adición y multiplicación escalar como se definió, $\mathcal{L}\,(V, W)$ es un espacio vectorial. ■

Por lo general, no tiene sentido multiplicar dos elementos de un espacio vectorial, pero para algunos pares de combinaciones lineales existe un producto útil. Necesitaremos un tercer espacio vectorial, así que para el resto de esta sección supongamos que U es un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$.

1.8 Definición **Producto de combinaciones lineales.**

Si $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces el producto $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ es definido por

$$(ST)(u) = S(Tu)$$

para $u \in U$.

En otras palabras, ST es solo la composición habitual $S \circ T$ de dos funciones, pero cuando ambas funciones son lineales, la mayoría de los matemáticos escriben ST en lugar de $S \circ T$. Debe verificar que ST es de hecho una transformación lineal de U a W siempre que $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Tenga en cuenta que ST se define solo cuando T se transforma en el dominio de S.

1.9 Teorema **Propiedades algebraicas de producto de transformaciones lineales.**

Asociatividad

$$(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$$

siempre que T_1, T_2 y T_3 sean transformaciones lineales tales que los productos tengan sentido (lo que significa que T_3 se transforma en el dominio de T_2, y T_2 se transfora en el dominio de T_1).

Identidad

$$TI = IT = T$$

siempre que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ (el primer I es la transformación de indentidad en V, y el segundo I es la transformación de identidad en W).

Propiedades distributivas

$$(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T \quad \text{y} \quad S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$$

siempre que $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V, W)$. ■

La multiplicación de aplicaciones lineales no es conmutativa. En otras palabras, no es necesariamente cierto que $ST = TS$, incluso si ambos lados de la ecuación tienen sentido.

1.10 Ejemplo Suponga $D \in \mathcal{L}\,[\mathcal{P}(\mathbf{R}), \mathcal{P}(\mathbf{R})]$ es la transformación de diferenciación definido en el ejemplo 3.4 y $T \in \mathcal{L}\,[\mathcal{P}(\mathbf{R}), \mathcal{P}(\mathbf{R})]$ es la multiplicación por la transformación x^2 definida tempranamente en esta sección. Muestre que $TD \neq DT$.

Demostración.- Se tiene

$$[(TD)p]\,(x) = x^2p'(x) \quad \text{pero} \quad [(DT)p]\,(x) = x^2p'(x) + 2xp(x).$$

En otras palabras, no es lo mismo derivar y luego multiplicar por x^2 que multiplicar por x^2 y luego derivar. ■

1.11 Teorema Transformaciones lineales toman 0 a 0.

Suponga T es una transformación lineal para V en W. Entonces $T(0) = 0$.

Demostración.- Por la aditividad, se tiene

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0).$$

Agregue el inverso aditivo de $T(0)$ cada lado de la ecuación anterior para concluir que $T(0) = 0$. ■

Ejercicios 3.A

1. Suponga $b, c \in \mathbf{R}$. Defina $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ por

$$T(x,y,z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz).$$

Demuestre que T es lineal si y sólo si $b = c = 0$.

Demostración.- Por definición de transformación lineal, tendremos que demostrar que se cumple las propiedades de aditividad y homogeneidad.

Aditividad.- Supongamos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$. Entonces, por la definición de T se tiene

$$\begin{array}{rcl} T\left[(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)\right] & = & T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \\ & = & [2(x_1+x_2) - 4(y_1+y_2) + 3(z_1+z_2) + b, \\ & & 6(x_1+x_2) + c(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)] \\ & = & (2x_1 - 4y_1 + 3z_1 + b, 6x_1 + cx_1y_1z_1) \\ & + & (2x_2 - 4y_2 + 3z_2 + b, 6x_2 + cx_2y_2z_2) \\ & = & T(x_1,y_1,z_1) + T(x_2,y_2,z_2). \end{array}$$

Esto se cumplirá si $2b = b \Leftrightarrow b = 0$ y $cx_1y_1z_1 + cx_1y_2z_1 + cx_2y_1z_1 + cx_2y_2z_1 + cx_1y_1z_2 + cx_1y_2z_2 + cx_2y_1z_2 + cx_2y_2z_2 = cx_1y_1z_1 + cx_2y_2z_2 \Leftrightarrow c = 0$.

Homogeneidad.- Supongamos $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ y $\lambda \in \mathbf{R}$. Entonces, por la definición de T se tiene

$$\begin{array}{rcl} T\left[\lambda(x,y,z)\right] & = & (2\lambda x - 4\lambda y + 3\lambda z + \lambda b, 6\lambda x + c\lambda xyz) \\ & = & \lambda(2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz) \\ & = & \lambda T\left[(x,y,z)\right]. \end{array}$$

Notemos que la homogeneidad se cumplirá para todo $b, c \in \mathbf{R}$. Por lo tanto, T es lineal si y sólo si $b = c = 0$.

2. Suponga $b, c \in \mathbf{R}$. Defina $T : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^2$ por

$$Tp = \left[3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx + c \operatorname{sen} p(0)\right].$$

Demuestre que T es una transformación lineal si y sólo si $b = c = 0$.

Demostración.- Primero demostraremos que si T es una transformación lineal, entonces $b = c = 0$. Por definición para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha T p = T(\alpha p)$$

De esta manera se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha T p &= \alpha \left[3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\ dx + c \operatorname{sen} p(0) \right] \\
&= \left[3\alpha p(4) + 5\alpha p'(6) + b\alpha p(1)p(2), \alpha \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\ dx + c\alpha \operatorname{sen} p(0) \right] \quad (1) \\
T(\alpha p) &= \left[3(\alpha p)(4) + 5(\alpha p)'(6) + b(\alpha p)(1)(\alpha p)(2), \int_{-1}^{2} x^3 (\alpha p)(x)\ dx + c \operatorname{sen}(\alpha p)(0) \right].
\end{aligned}$$

Es decir, si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, entonces

$$(\alpha p)(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)\, x + (\alpha a_2)\, x^2 + \cdots + (\alpha a_n)\, x^n.$$

Por lo tanto, para cada x,

$$\begin{aligned}
(\alpha p)(x) &= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)\, x + (\alpha a_2)\, x^2 + \cdots + (\alpha a_n)\, x^n \\
&= \alpha \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \right) \\
&= \alpha p(x).
\end{aligned}$$

Por esta deducción podemos decir que,

$$\begin{aligned}
T(\alpha p) &= \left[3\alpha p(4) + 5\alpha p'(6) + b\alpha^2 p(1)p(2), \int_{-1}^{2} \alpha x^3 p(x)\ dx + c \operatorname{sen}\left(\alpha p(0)\right) \right] \\
&= \left[\alpha \left(3p(4) + 5p'(6) + b\alpha p(1)p(2) \right), \alpha \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\ dx + c\alpha \operatorname{sen} p(0) \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

Ahora, podemos igualar (1) y (2) si y sólo si

$$b\alpha^2 p(1)p(2) = b\alpha P(1)p(1) \quad \text{y} \quad c \operatorname{sen}(\alpha p(0)) = c\alpha \operatorname{sen} p(0)$$

para cada $p(x)$ y cada $\alpha \in \mathbf{R}$.

Sean $p(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$ y $\alpha = 2$. De donde,

$$b\alpha^2 p(1)p(2) = 4b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad b\alpha p(0)p(1) = 2b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
4b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 4b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) - 2b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad b = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$0 = c \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = c \sin\left(\alpha p(0)\right) = c\alpha \operatorname{sen} p(0) = 2c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2c$$

Por lo tanto,

$$c = 0.$$

Ahora, demostremos que si $b = c = 0$, entonces T es lineal; es decir, que T es aditiva y Homogénea. Supongamos $p, q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ y $\lambda \in \mathbf{R}$, por lo que

$$\begin{aligned}
T(p+q) &= \left[3(p+q)(4) + 5(p+q)'(6), \int_{-1}^{2} x^3 (p+q)(x)\, dx\right] \\
&= \left[3\left(p(4)+q(4)\right) + 5\left(p'(6)+q'(6)\right), \int_{-1}^{2} x^3 \left(p(x)+q(x)\right)\, dx\right] \\
&= \left[3p(4) + 5p'(6) + 3q(4) + 3q'(6), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx + \int_{-1}^{2} x^3 q(x)\, dx\right] \\
&= \left[3p(4) + 5p'(6), \int_{-1}^{2} p(x)\, dx\right] + \left[3q(4) + 3q'(6), \int_{-1}^{2} x^3 q(x)\, dx\right] \\
&= Tp + Tq.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
T(\lambda p) &= \left[3(\lambda p)(4) + 5(\lambda p)'(6), \int_{-1}^{2} x^3 (\lambda p)(x)\, dx\right] \\
&= \left[3\lambda p(4) + 5\lambda p'(6), \lambda \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx\right] \\
&= \left[\lambda(3p(4) + 5p(6)), \lambda \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx\right] \\
&= \lambda \left[3p(4) + 5p'(6), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx\right] \\
&= \lambda T p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es lineal. Así, concluimos que T es lineal si y sólo si $b = c = 0$.

3. Suponga $T \in \mathcal{L}\left(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^m\right)$. Demostrar que existe escalares $A_{j,k} \in \mathbf{F}$ para $j = 1, \ldots, m$ y $k = 1, \ldots, n$ tal que

$$T\left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \mathbf{F}^n.$$

[El ejercicio demuestra que T tiene la forma prometida en el úmtimo apartado del ejemplo 3.4.]

4. Suponga $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v_1, \ldots, v_m$ una lista de vectores en V tal que $Tv_1, \ldots, Tv_m$ es una lista linealmente independiente en W. Demostrar que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sea para $c_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

Luego, multiplicamos por T a ambos lados de la ecuación anterior,

$$T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n) = T(0).$$

Por la definición 1.6 y el torema 3.11 tenemos que

$$c_1 T v_1 + c_2 T v_2 + \cdots + c_n T v_n = 0.$$

Entonces, como $Tv_1, \ldots, Tv_m$ es una lista linealmente independiente en W.

5. Demostrar la afirmación 3.7.

Demostración.- Verificaremos cada propiedad.

- Conmutatividad.- Sean $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, tenemos

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v) = T(v) + S(v) = (T+S)(v).$$

  Por lo tanto, la adición es comunutativa.

- Asociatividad.- Saen $R, S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, tenemos

$$\begin{aligned} [(R+S)+T](v) &= (R+S)(v) + T(v) \\ &= R(v) + S(v) + T(v) \\ &= R(v) + [S(v) + T(v)] \end{aligned}$$

  Por lo que la adición es asociativa. Luego, sean $a, b \in \mathbf{F}$, entonces

$$[(ab)T](v) = (ab)T(v) = a[bT(v)] = [a(bT)](v).$$

  Por lo tanto, la multiplicación es asociativa.

- Identidad aditiva.- Sea $0 \in \mathcal{L}(V, W)$ denotado como transformación cero, sean también $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$. Entonces,

$$(T+0)(v) = T(v) + 0(v) = T(v).$$

  Por lo tanto, la transformación cero es la identidad aditiva.

- Inverso aditivo.- Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, y definamos a $(-T) \in \mathcal{L}(V, W)$ por $(-T)(v) = -T(v)$, entonces

$$[T + (-T)](v) = T(v) + (-T)(v) = T(v) - T(v) = 0,$$

  Por lo que, $(-T)$ es el inverso aditivo para cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

- Identidad multiplicativa.- Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces,

$$(1T)(v) = 1(T(v)) = T(v).$$

  Así la identidad multiplicativa de **F** es la identidad multiplicativa de la multiplicación escalar.

- Propiedad distributiva.- Sean $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, $a, b \in \mathbf{F}$ y $v \in V$. Entonces,

$$\begin{aligned} [a(S+T)](v) &= a(Sv + Tv) \\ &= aS(v) + aT(v) \\ &= (aS)(v) + (aT)(v) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [(a+b)T](v) &= (a+b)T(v) \\ &= aT(v) + bT(v) \\ &= (aT)(v) + (bT)(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

6. Demostrar la afirmación 3.9.

Demostración.-

- Asociatividad.- Para x en el dominio de T_3, tenemos

$$\begin{aligned} [(T_1T_2)T_3](x) &= (T_1T_2)[T_3(x)] \\ &= T_1[T_2[T_3(x)]] \\ &= T_1[(T_2T_3)(x)] \\ &= [T_1(T_2T_3)](x). \end{aligned}$$

- Identidad.- Para $v \in V$, se tiene

$$\begin{aligned} TI(v) &= T[I(v)] \\ &= T(v) \\ &= I[T(v)] \\ &= IT(v). \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $TI = IT = I$.

- Proipedad distributiva.- Para $u \in U$, se tiene

$$\begin{aligned} [(S_1+S_2)T](u) &= (S_1+S_2)[T(u)] \\ &= S_1[T(u)] + S_2[T(u)] \\ &= S_1T(u) + S_2T(u) \\ &= (S_1T+S_2T)(u). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [T(S_1+S_2)](u) &= T[(S_1+S_2)(u)] \\ &= T[S_1(u)+S_2(u)] \\ &= T[S_1(u)] + T[S_2(u)] \\ &= (TS_1+TS_2)(u). \end{aligned}$$

7. Demostrar que toda transformación lineal de un espacio vectorial unidimensional a sí mismo es multiplicación por un escalar. Más precisamente demostrar que si $\dim V = 1$ y $T \in \mathcal{L}(V,V)$, entonces existe $\lambda \in \mathbf{F}$ tal que $Tv = \lambda v$ para todo $v \in V$.

Demostración.- Supongamos que $\dim V = 1$ y $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sea también $u \in V, u \neq 0$. Entonces, todo vector en V es un multiplo escalar de u. En particular, $Tu = au$ para algún $a \in \mathbf{F}$. Ahora, consideremos un vector $v \in V$. Ya que, existe $b \in \mathbf{F}$ tal que $v = bu$. Entonces,

$$\begin{aligned} Tv &= T(bu) \\ &= bT(u) \\ &= b(au) \\ &= a(bu) \\ &= av. \end{aligned}$$

8. Dar un ejemplo de una función $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

para todo $a \in \mathbf{R}$ y para todo $v \in \mathbf{R}^2$ pero φ no es lineal.
[*El ejercicio anterior y el siguiente ejercicio muestran que ni la homogeneidad ni la aditividad por sí solas son suficientes para implicar que una función es una transformación lineal.*]

Respuesta.- Si $v = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, entonces definamos $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ como,

$$\varphi(v) = \varphi[(x,y)] = (x^3+y^3)^{1/3}.$$

Calculemos ahora $\varphi(av)$;

$$\begin{aligned}
\varphi(av) &= \varphi\left[a(x,y)\right] \\
&= \varphi\left[(ax,ay)\right] \\
&= \left[(ax)^3+(ay)^3\right]^{1/3} \\
&= \left[(a^3x^3)+(a^3y^3)\right]^{1/3} \\
&= a\left(x^3+y^3\right)^{1/3} \\
&= a\varphi\left(v\right)
\end{aligned}$$

Ahora, verifiquemos que φ no es lineal. Para ello, consideremos $v_1=(1,0)$ y $v_2=(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(v_1) &= \varphi\left[(1,0)\right]=1 \\
\varphi(v_2) &= \varphi\left[(0,1)\right]=1
\end{aligned}$$

De donde,

$$\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=1+1=2.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(v_1+v_2\right) &= \varphi\left[(1,0)+(0,1)\right] \\
&= \varphi\left[(1,1)\right] \\
&= \left[(1)^3+(1)^3\right]^{1/3} \\
&= 2^{1/3}.
\end{aligned}$$

Ya que,

$$\varphi\left(v_1+v_2\right)\neq\varphi\left(v_1\right)+\varphi\left(v_2\right) \qquad \text{(prop. de aditividad)}$$

entonces φ no es lineal.

9. Dar un ejemplo de una función $\varphi:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ tal que

$$\varphi(w+z)=\varphi(w)+\varphi(z)$$

para todo $w,z\in\mathbf{C}$ pero φ no es lineal. (Aquí $\mathbf{C}$ se considera como un espacio vectorial complejo. [*También existe una función $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tal que φ satisface la condición de aditividad anterior pero φ no es lineal. Sin embargo, mostrar la existencia de tal función implica herramientas considerablemente más avanzadas.*]

Respuesta.- Sean $x_1+y_1i, x_2+y_2i\in\mathbf{C}$ definida por, $\varphi:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ tal que

$$\varphi\left[(x+yi)\right]=x-yi.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi\left[(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)\right] &= \varphi\left[(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i\right] \\ &= (x_1+x_2)-(y_1+y_2)i \\ &= (x_1-y_1i)+(x_2-y_2i) \\ &= \varphi\left[(x_1+y_1i)\right]+\varphi\left[(x_2+y_2i)\right]. \end{aligned}$$

Esto demuestra la aditividad de φ. Sin embargo, sean $v=1+2i\in\mathbf{C}$ y $a=i\in\mathbf{C}$. Entonces,

$$\varphi(av)=\varphi\left[i(\cdot 1+2i)\right]=\varphi\left(i+2i^2\right)=\varphi(-2+1)=-(2+i)$$

y

$$a\varphi(v)=i\cdot\varphi(1+2i)=i(1+2i)=i-2.$$

Esto demuestra que

$$\varphi(av)\neq a\varphi(v)$$

no es lineal.

10. Suponga que U es un subespacio de V con $U\neq V$. Suponga también que $S\in\mathcal{L}(U,W)$ y $S\neq 0$ (lo que significa que $Su\neq 0$ para algún $u\in U$). Defina $T:V\to W$ por

$$Tv=\begin{cases} Sv & \text{si} \quad v\in U \\ 0 & \text{si} \quad v\in V \ \text{ y } \ v\notin U. \end{cases}$$

Demostrar que T no es una transformación lineal en V.

Demostración.- Notemos que $U\neq V$. Luego, podemos elegir $u\in U$ tales que $Su\neq 0$ y $v\in V$, entonces $u+v\in U$. De lo contrario,

$$v=(u+v)-u\in U$$

producirá una contradicción. Por eso $T(u+v)=0$ por definición. Por otro lado, $Tu+Tv=SU\neq 0$. Resulta que $T(u+v)\neq Tu+Tv$, por eso T no es una transformación lineal en V.

11. Suponga que V es de dimensión finita. Demostrar que cada transformación lineal en una subespacio de V puede ser extendida a una transformación lineal en V. En otras palabras, demuestra que si U es un subespacio de V y $S\in\mathcal{L}(U,W)$, entonces existe $T\in\mathcal{L}(V,W)$ tal que $Tu=Su$ para todo $u\in U$.

Demostración.- Sea $v_1,\ldots,v_m$ una base de U, entonces por el teorema 2.33 podemos extenderlo a una base de V. Esto es, $v_1,\ldots,v_m,v_{m+1}\ldots,v_n$ es una extensión base de V tal que $v_{m+1},\ldots,v_n$ linealmente independiente.
Para cualquier $z\in V$, existe $a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{F}$ tal que $z=\sum_{k=1}^n a_kv_k$ definida por

$$\begin{aligned} T \ : \qquad V &\to W \\ \sum_{k=1}^n a_kv_k &\mapsto \sum_{k=1}^m a_kSv_k+\sum_{k=m+1}^n a_kv_k. \end{aligned}$$

Dado que cada $v \in V$ tiene una única representación como una combinación lineal de elementos de nuestra base, la transformación está definida. Primero, demostremos que T existe y es una transformación lineal. Suponga $z_1, z_2 \in V$. Luego, sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$z_1 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad \text{y} \quad z_2 = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

se sigue que,

$$\begin{aligned}
T(z_1 + z_2) &= T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k + \sum_{1}^{n} b_k v_k\right) \\
&= T\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) v_k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) S v_k + \sum_{k=m+1}^{n} (a_k + b_k) v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k S v_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k v_k + \sum_{k=1}^{n} b_k S v_k + \sum_{k=m+1}^{n} b_k v_k \\
&= T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right) + T\left(\sum_{k=1}^{n} b_k v_k\right) \\
&= T(z_1) + T(z_2).
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que T es aditiva. Ahora, sean $\sum_{i=1}^{n} a_k v_k = z \in V$ y $\lambda \in \mathbf{F}$, entonces para $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$, se tiene

$$\begin{aligned}
T(\lambda z) &= T\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right) \\
&= T\left[\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k) v_k\right] \\
&= S\left[\sum_{k=1}^{m} (\lambda a_k) v_k\right] + \sum_{k=m+1}^{n} (\lambda a_k) v_k \\
&= \lambda S\left[\sum_{k=1}^{m} a_k v_k\right] + \lambda \sum_{k=m+1}^{n} a_k v_k \\
&= \lambda \left[S\left(\sum_{k=1}^{m} a_k v_k\right) + \sum_{k=m+1}^{n} a_k v_k\right] \\
&= \lambda T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right) = \lambda T z
\end{aligned}$$

por lo que T es homogénea. Por lo tanto, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Por último, para ver si $T = S$, sea $u \in U$ con $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que $u = \sum_{k=1}^{m} a_k v_k$ se tiene

$$Tu = T\left(\sum_{k=1}^{m} a_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_k S v_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k v_k = S\left(\sum_{k=1}^{m} a_k v_k\right) = Su.$$

Notemos que $\sum_{k=m+1}^{n} a_k v_k$ es linealmente independiente. Así, completamos la demostración.

12. Suponga que V es de dimensión finita con $\dim(V) > 0$, y suponga W es de dimensión infinita. Demostrar que $\mathcal{L}(V,W)$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Cualquier transformación lineal en V está determinado únicamente por su efecto sobre los elementos base. Por lo tanto, es suficiente definir una transformación lineal solo sobre los elementos base. Ahora, Recordemos por el ejercicio por el ejercicio 14A, Capitulo 2, que W es un espacio vectorial de dimensión infinita si y sólo existe una secuencia $w_1, w_2, \ldots \in W$ tal que $w_1, w_2, \ldots, w_m$ es linealmente independiente para cada $m \geq 1$. Sea $T_i \in \mathcal{L}(V,W)$ tal que $T_i(v_1) = w_i$ donde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es una base de V. La existencia de T_i está garatizado por 3.5. Entonces,demostraremos que $T_1, \ldots, T_m$ es linealmente independiente para cada entero positivo m. Supongamos que existen $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1 T_1, + \cdots + a_m T_m = 0.$$

Entonces, tenemos $(a_1 T_1 + \cdots + a_m T_m)(v_1) = 0$. Es decir,

$$a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m = 0.$$

Ya que $W_1, W_2, \ldots, W_m$ es linealmente independiente, se sigue que $a_1 = \cdots = a_m = 0$. Por lo tanto, $T_1, \ldots, T_m$ es linealmente independiente. Una vez más por el ejercicio 14A, Capitulo 2; se tiene que $\mathcal{L}(V,W)$ es de dimensión infinita.

13. Suponga que $v_1, \ldots, v_m$ es una lista de vectores linealmente dependiente en V. Suponga también que $W \neq \{0\}$. Demostrar que existe $w_1, \ldots, w_m \in W$ tal que que ningún $T \in \mathcal{L}(V,W)$ satisface $Tv_k = w_k$ para cada $k = 1, \ldots, m$.

Demostración.- Ya que, $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente dependiente, uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los demás. Sin perdida de generalidad, suponga que este es v_m. Entonces, existe $a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbf{F}$ tal que

$$v_m = a_1 v_1 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1}$$

Ya que, $W \neq \{0\}$, existe algún $z \in W$, $z \neq 0$. Definimos ahora $w_1, \ldots, w_m \in W$ por

$$w_k = \begin{cases} z & \text{si } k = m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora, supongamos que existe $T \in \mathcal{L}(V,W)$ tal que $Tv_k = w_k$ para $k = 1, \ldots, m$. Se sigue que

$$\begin{aligned} T(0) &= T\left(v_m - a_1 v_1 - \cdots - a_{m-1} v_{m-1}\right) \\ &= Tv_m - a_1 Tv_1 - \cdots - a_{m-1} Tv_{m-1} \\ &= z. \end{aligned}$$

Pero como $z \neq 0$, entonces $T(0) \neq 0$, lo cual es un absurvo por (3.11). Por lo tanto, no existe tal transformación lineal.

14. Suponga que V es de dimensión finita con $\dim V \geq 2$. Demostrar que existe $S, T \in \mathcal{L}(V,V)$ tal que $ST \neq TS$.

Demostración.- Ya que, $\dim V \geq 2$, existe una base de V formada por al menos dos vectores. Fijemos una base de V y v_1, v_2 los primeros dos vectores de esa base. Definamos T y S en la base de V tal que

$$T(v_1) = v_2, T(v_2) = v_1 \text{ y } S(v_1) = v_2, S(v_2) = 0.$$

Ahora, calculemos ST y TS para el vector v_1:

$$\begin{array}{rcccccl} ST(v_1) & = & S\left[T(v_1)\right] & = & S(v_2) & = & 0 \\ TS(v_1) & = & T\left[S(v_1)\right] & = & T(v_2) & = & v_1. \end{array}$$

Lo que demuestra que

$$ST(v_1) \neq TS(v_1).$$

Y por lo tanto,

$$ST \neq TS.$$

1.B Espacios Nulos y Rangos

Espacio Nulo (kernel) e Inyectividad

1.12 Definición **Espacio nulo, null T.**

Para $T \in \mathcal{L}(V, W)$, el **espacio nulo** de T denotado por null T es el subconjunto de V formado por aquellos vectores que T transforma a 0:

$$\text{null } T = \{v \in V : Tv = 0\}.$$

Algunos matemáticos usan el termino **kernel** en lugar de **espacio nulo**. La palabra "null" significa cero.

El siguiente resultado demuestra que el espacio nulo o kernel de cada transformación lineal es un subespacio del dominio. En particular, 0 está en el espacio nulo de cada transformación lineal.

1.14 Teorema **El espacio nulo es un subespacio.**

Suponga que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces, null T es un subespacio de V.

Demostración.- Ya que T es una transformación lineal, entonces sabemos por 3.11 que $T(0) = 0$. Por lo tanto, $0 \in$ null T.
Supongamos ahora que $u, v \in$ null T. Entonces,

$$T(u + v) = Tu + Tv = 0 + 0 = 0.$$

De ahí, $u + v \in$ null T. Así null T es cerrado bajo la adición.
Luego, supongamos que $u \in$ null T y $\lambda \in \mathbf{F}$

$$T(\lambda u) = \lambda Tu = \lambda 0 = 0.$$

Por lo que, $\lambda u \in$ null T. Así, null T es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Por 1.34, null T es un subespacio de V. ■

1.15 Definición **Inyectiva.**

Una función $T : V \to W$ es llamada **inyectiva** si $Tu = Tv$ implica $u = v$.

o T es inyectiva si $u \neq v$ implica que $Tu \neq Tv$.

Muchos matemáticos usan el termino **uno a uno**.

El siguiente resultado dice que podemos comprobar si una transformación lineal es inyectivo al verificar si 0 es el único vector que se asigna a 0.

1.16 Teorema **Inyectividad es a equivalente decir que el espacio nulo es igual a $\{0\}$.**

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces, T es inyectiva si y solo si null $T = \{0\}$.

Demostración.- Primero suponga que T es inyectiva. Queremos demostrar que null T = $\{0\}$. Sabemos por 3.11 que $\{0\} \subset$ null T. Para probar la inclusión en la otra dirección, suponga $v \in$ null T. Entonces,

$$t(v) = 0 = T(0).$$

Ya que T es inyectiva, implica que $v = 0$. Así, podemos concluir que null $T = \{0\}$. Como queriamos.

Para probar la implicación en la otra dirección. Si null $T = \{0\}$, entonces demostrarmos que T es inyectiva. Para esto, suponga que $u, v \in V$ y $Tu = Tv$, de donde

$$0 = Tu - Tv = T(u - v)$$

Así, $u - v$ está en null T, el cual es igual a $\{0\}$. Por lo tanto, $u - v = 0$, implica que $u = v$. Concluimos que, T es inyectiva.

■

1.C Rango y sobreyectividad

Damos un nombre al conjunto de resultados de una función.

1.17 Definición **Rango.**

Para T una función de V en W, el **rango** de T es el subconjunto de W que consta de aquellos vectores que son de la forma Tv para algún $v \in V$:

$$\text{rango } T = \{Tv : v \in V\}.$$

Algunos matemáticos usan la palabra **imagen** en lugar de rango.

EL siguiente resultado muestra que el rango de cada transformación lineal es un subespacio del espacio vectorial en el que se esta transformando.

1.18 Teorema **El rango es un subespacio.**

Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces el rango de T es un subespacio de W.

Demostración.- Suponga que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces por 3.11, $T(0) = 0$, lo que implica que $0 \in$ rango T.
Si $w_1, w_2 \in$ range T, entonces existe $v_1, v_2 \in V$ tal que $Tv_1 = w_1$ y $Tv_2 = w_2$. Así,

$$T(v - 1 + v - 2) = Tv_1 + v_2 = w_1 + w_2.$$

Ya que $w_1 + w_2 \in$ rango T. Por lo tanto, rango T es cerrado bajo la adición.
Si $w \in$ rango T y $\lambda \in \mathbf{F}$, entonces existe $v \in V$ tal que $T_v = w$. Por lo que,

$$T(\lambda v) = \lambda Tv = \lambda w.$$

Así, $\lambda w \in$ rango T. Por lo tanto, rango T es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Por 1.34, el rango T es un subespacio de W.

$\blacksquare$