1

Cálculo diferencial

1.9 Ejercicios

1. Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ para todo x. Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es horizontal.

Respuesta.- Sea $f'(x) = x^2 - 4x + 3$, entonces para que la recta tangente sea horizontal igualamos la derivada a cero de la siguiente manera,

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$$

de donde se obtiene que,

$$x_1 = 3 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 1.$$

2. Sea $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$ para todo x. Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la pendiente es:

a) 0.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces

$$f'(x) = 2x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x-1)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

b) -1.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces

$$f'(x) = 2x^2 + x - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad x(2x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

c) 5.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces

$$f'(x) = 2x^2 + x - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

3. Sea $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ para todo x. Hallar todos los puntos x para los que la gráfica de f en $(x, f(x))$ tiene pendiente cero.

Respuesta.- Para tal efecto igualamos la derivada de $f(x)$ a 0.

$$1 + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = (2n+1)\pi, \; n \in \mathbb{Z}.$$

4. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo x. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 3)$.

Respuesta.- Primero, derivamos $f(x)$, como sigue

$$g'(x) = 2x + a.$$

Así, si la linea $y = 2x$ es tangente a f en el punto $(2, 4)$, tenemos

$$f'(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 + a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -2.$$

Luego, el punto $(2, 4)$ debe estar en la gráfica de f, es decir,

$$f(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 + (-2)2 + b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 4.$$

Por lo tanto, los valores son $a = -2$ y $b = 4$.

5. Hallar valores de las constantes a, b y c para los cuales las gráficas de los dos polinomios $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ se intersecten en el punto $(1, 2)$ y tengan la misma tangente en dicho punto.

Repuesta.- Dado que f y g se intersectan en $(1, 2)$, podríamos tener $f(1) = g(1) = 2$, de donde

$$f(1) = 2 \; \rightarrow \; 1 + a + b = 2 \qquad \text{y} \qquad g(1) = 2 \; \Rightarrow \; 1 - c = 2 \; \Rightarrow \; c = -1.$$

Luego, calculamos las derivadas para que podamos encontrar la pendiente de las rectas tangentes en este punto,

$$f'(x) = 2x + a, \qquad g'(x) = 3x^2.$$

Por el hecho de que estos deben ser los mismos en el punto $(1, 2)$ tenemos

$$f'(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Por lo que $1 + a + b = 2 \; \Rightarrow \; b = 0$. Por lo tanto las constantes son

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = -1.$$

6. Considérese la gráfica de la función f definida por la ecuación $f(x) = x^2 + ax + b$, siendo a y b constantes.

(a) Hallar la pendiente de la cuerda que une los puntos de la gráfica para los que $x = x_1$ y $x = x_2$.

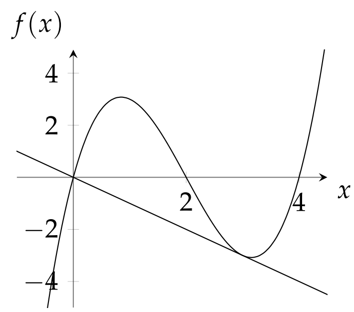
Respuesta.- Los puntos en la gráfica de f en x_1 y x_2 son $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Entonces la cuerda que los une tiene una pendiente dada

(b) Hallar, en función de x_1 y x_2, todos los valores de x para los que la tangente en $(x, f(x))$ tiene la misma pendiente que la cuerda de la parte a).

Repuesta.-

7. Demostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar los puntos de tangencia. ¿Vuelve la tangente a cortar la curva?.

Demostración.-



Primero calculemos la derivada de la recta y la curva, respectivamente

$$y' = -1, \qquad y_0' = 3x^2 - 12x + 8$$

Luego igualando estas ecuaciones obtenemos

$$y_1 = 3x^2 - 12x + 8 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 1.$$

Luego, para que la linea sea tangente a la curva, el punto debe estar en la curva $y_0 = x^3 - 6x^2 + 8x$ como sigue,

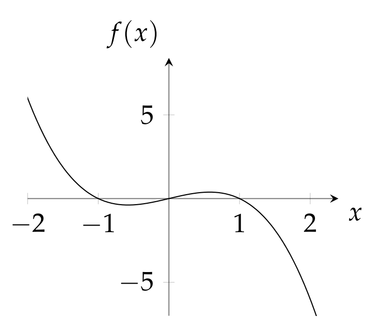
- Para $x_1 = 3$, se tiene $y(3) = -3 = -x$ por lo que $y = -x$ es tangente a la curva en $(3, -3)$.

- Para $x_2 = 1$, se tiene $y(1) = 1 \neq -x$ por lo que x_2 no es tangente a la curva.

Esta linea tangente también corta la curva en $(0, 0)$.

8. Dibujar la gráfica de la función cúbica $f(x) = x - x^3$ en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$. Hallar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 0)$. Una segunda recta que pasa por $(-1, 0)$ es también tangente a la gráfica de f en el punto (a, c). Determinar las coordenadas a y c.

Respuesta.-



Sea $f'(x) = 1 - 3x^2$, entonce la tangente de la linea en el punto $(-1, 0)$ será

$$f'(-1) = 1 - 3(-1)^2 = -2 \quad \Rightarrow \quad m = -2.$$

de donde b estará dado por,

$$y = mx + b \quad \Rightarrow \quad 0 = -2(-1) + b \quad \Rightarrow \quad b = -2.$$

Por lo tanto

$$y = -2x - 2.$$

Después, supongamos otra linea tangente $y_1 = m_1 x + b_1$ a f en el punto (a, c) con pendiente

$$f'(a) = 1 - 3a^2 = m_1$$

sabiendo que esta recta pasa por $(-1, 0)$, entonces

$$y_1(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - 3a^2)(-1) + b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 1 - 3a^2$$

Por lo que la recta y_1 es de la forma,

$$y_1 = (1 - 3a^2)x + (1 - 3a^2).$$

Por último, dado que el punto (a, c) está tanto en esta linea y_1 como en la curva f tenemos

$$f(a) = c \quad \Rightarrow \quad a - a^3 = c$$

y

$$y_1(a) = c \quad \Rightarrow \quad (1 - 3a^2)a + (1 - 3a^2) = c.$$

Igualando c se tiene,

$$a - a^3 = (1 - 3a^2)a + (1 - 3a^2) \quad \Rightarrow \quad 2a^3 + 3a^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a = \frac{1}{2}.$$

Ya que $a - a^3 = c$ entonces $c = \dfrac{3}{8}$. Así, el otro punto tangente está dado por $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$.

9. Una función f está definida del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > c, \\ a + bx^2 & \text{si} \quad |x| \leq c. \end{cases}$$

Hallar los valores de a y b (en función de c) tales que $f'(c)$ exista.

Respuesta.- Sabemos que la derivada $f'(c)$ existe si y sólo si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Existe. También sabemos que el límite existe si

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Por lo que si tomamos c y nos acercamos a $ax+b$ desde la derecha, a x^2 desde la izquierda y tomando a $f(c)=c^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\
\lim_{h\to 0^+}\frac{a(c+h)+b-c^2}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{(c+h)^2-c^2}{h}\\
\lim_{h\to 0^+}\frac{ac+b-c^2}{h}+a &= 2c.
\end{aligned}$$

Dado que $ac+b-c^2$ es una constante, entonces $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{ac+b-c^2}{h}=0$. Por lo que nos queda la ecuación

$$a=2c.$$

Ahora dado que $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{ac+b-c^2}{h}=0$, entonces

$$ac+b-c^2=0 \quad\Rightarrow\quad b=-c^2.$$

10. Resolver el ejercicio 9 cuando f es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x|>c,\\[2ex] a+bx^2 & \text{si} \quad |x|\le c.\end{cases}$$

Respuesta.- Supongamos que $c>0$ de lo contrario $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$ para todo x. Entonces, existe la derivada para todo los valores de las constantes de a y b. Luego sabemos que si una función tiene derivada en un punto x, entonces también es continua en x, por lo tanto la función f es continua en c, así,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c^+} f(x) &= \lim_{x\to c^-} f(x)\\
\lim_{x\to c^+}\frac{1}{|x|} &= \lim_{x\to c^-} a+bx^2\\
\frac{1}{c} &= a+bc^2\\
ac+bc^3 &= 1
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} f(x)\\
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{|c+h|} - a + bc^2}{h} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{a + b(c+h)^2 - (a+bc^2)}{h}\\
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{c+h} - a + bc^2}{h} \cdot \frac{c+h}{c+h} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{2bch + bh^2}{h}\\
\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - ac - bc^3 - ah - bc^2h}{h(c+h)} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{h(2bc+bh)}{h}\\
\lim_{x\to 0^+} \frac{ac + bx^3 - ac - bc^3 - ah - bc^2h}{h} &= \lim_{x\to 0^-} 2bc + bh\\
\lim_{x\to 0^+} \frac{-h(a+bc^2)}{h(c+h)} &= 2bc + \lim_{x\to 0^-} bh\\
\lim_{x\to 0^+} -\frac{a+bc^2}{c+h} &= 2bc.\\
-\frac{a+bc^2}{c} &= 2bc.
\end{aligned}$$

Por último resolvemos las dos ecuaciones anteriores:

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{a+bc^2}{c} &= 2bc \\ ac + bc^3 &= 1 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} b &= -\frac{1}{2c^3} \\ a &= -\frac{3}{2c} \end{aligned}\right.$$

11. Resolver el ejercicio 9 cuando f es:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \le c \\ ax + b & \text{si} \quad x > c. \end{cases}$$

Respuesta.- Sabemos que $f'(c)$ existe si y sólo si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Existe. También sabemos que el límite existe si y sólo si los dos límites unilaterales existen y son iguales, es decir

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Por lo tanto usando la definición de f tenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{a(c+h)+b-\operatorname{sen} c}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(c+h)-\operatorname{sen} c}{h} \\
\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{ac+b-\operatorname{sen} c}{h}\right)+a &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} c\cos h+\operatorname{sen} h\cos c-\operatorname{sen} c}{h} \\
\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{ac+b-\operatorname{sen} c}{h}\right)+a &= \lim_{h\to 0^-} \left[\frac{\operatorname{sen} c(\cos h-1)}{h}\right]+\cos c
\end{aligned}$$

Al simplificar el lado derecho usamos el hecho de que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h}=1$. Además para que existe el límite por el lado izquierdo debemos tener $ac+b-\operatorname{sen} c=0$ de lo contrario el límite divergirá como $h\to 0$. Ahora, para la expresión de la derecha, vemos que el límite tiende a 0. Eso se puede ver ya que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} c(\cos h-1)}{h} = \operatorname{sen} c \lim_{h\to c^-} \frac{\cos h-1}{h} = \operatorname{sen} c \lim_{h\to c^-} \frac{\cos(0+h)-\cos 0}{h}$$

Pero este límite es la derivada de $\cos x$ en $x=0$. Luego ya que $(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} 0=0$ el termino tiende a 0. Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{ac+b-\operatorname{sen} c}{h}\right)+a = \lim_{h\to 0^-} \left[\frac{\operatorname{sen} c(\cos h-1)}{h}\right]+\cos c \quad \Rightarrow \quad a=\cos c.$$

Así, dado que $ac+b-\operatorname{sen} c=0$ entonces

$$b=\operatorname{sen} c-c\cos c.$$

12. Si $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ para $x>0$, hallar fórmulas para $Df(x)$, $D^2f(x)$ y $D^3f(x)$.

Respuesta.- La fórmula para $Df(x)$ es:

$$Df(x)=\frac{(1+\sqrt{x})\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}-(1-\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

Para $D^2f(x)$,

$$D^2f(x)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x(1+\sqrt{x})^4}=\frac{1+3\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^3}.$$

Por último para $D^3f(x)$,

$$D^3f(x)=\frac{\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\cdot 2(x+\sqrt{x})^3-6(1+3\sqrt{x})(x+\sqrt{x})^2\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4(x+\sqrt{x})^6}=-\frac{3(1+4\sqrt{x}+5x)}{4\left[\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^4\right]}.$$

13.