# 1

# Variables aleatorias y distribución de probabilidad

## 1.1. El concepto de variables aleatorias

**Definición 1.1** *Sea $S$ un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea $X$ una función de valor real definida sobre $S$, de manera que transforme los resultados de $S$ en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que $X$ es un variable aleatoria.*

**Definición 1.2** *Se dice que una variable aleatoria $X$ es discreta si el número de valores que puede tomar es contable (ya sea finito o infinito), y si éstos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con los enteros positivos.*

**Definición 1.3** *Se dice que una variable aleatoria $X$ es continua si sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta de los reales.*

## 1.2. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas

**Definición 1.4** *Sea $X$ una variable aleatoria discreta. Se llamará a $p(x) = P(X = x)$ función de probabilidad de la variable aleatoria $X$, si satisface las siguientes propiedades:*

***1.*** *$p(x) \geq 0$ para todos los valores $x$ de $X$;*

***2.*** *$\sum_x p(x) = 1$.*

**Definición 1.5** *La función de distribución acumulativa de la variable aleatoria $X$ es la probabilidad de que $X$ sea menor o igual a un valor específico de $x$ y está dada por:*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

En general, la función de distribución acumulativa $F(x)$ de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores de $X$, de tal manera que:

**1.** $0 \leq F(x) \leq 1$ para cualquier $x$;

**2.** $F(x_i) \geq F(x_j)$ si $x_i \geq x_j$;

**3.** $P(X > x) = 1 - F(x)$.

**4.** $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$;

**5.** $P(x_i \geq X \geq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$

## 1.3. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas

**Definición 1.6** *1.* $f(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$,

*2.* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ *y*

*3.* $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

Para la función de distribución acumulativa $F(x)$ se tiene:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Dado que para cualquier varible aleatoria continua $X$,

$$P(X = x) = \inf_x^x f(t)\, dt = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad P(X \leq x) = P(X < x) = F(x)$$

La distribución acumulativa $F(x)$ es una función lisa no decreciente de los valores de la v.a. con las siguiente propiedades:

**1.** $F(-\infty) = 0$;

**2.** $F(\infty) = 1$;

**3.** $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

**4.** $dF(x)/dx = f(x)$.

## 1.4. Valor esperado de una variable aleatoria

**Definición 1.7** *El valor esperado de una variable aleatoria $X$ es el promedio o valor medio de $X$ y está dado por:*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x xp(x) && \text{Si } x \text{ es discreta, o} \\ E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx && \text{Si } x \text{ es continua.} \end{aligned}$$

*En donde $p(x)$ y $f(x)$ son las funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad, respectivamente.*

*En general, el valor esperado de una función $g(x)$ de la variables aleatoria $X$, está dado por:*

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \sum_x g(x)p(x) && \text{Si } x \text{ es discreta, o} \\ E(g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)xf(x)\,dx && \text{Si } x \text{ es continua.} \end{aligned}$$

### 1.4.1. Propiedades

**1.** El valor esperado de una constante $c$ es el valor de la constante.

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c$$

**2.** El valor esperado de la cantidad $aX + b$, en donde $a$ y $b$ son constantes, es el producto de $a$ por el valor esperado de $x$ más $b$.

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)f(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = aE(X) + b$$

**3.** El valor esperado de la suma de dos funciones $g(X)$ y $h(X)$ de $X$ es la suma de los valores esperados de $g(X)$ y $h(X)$.

$$E\left[g(X)+h(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x)+h(x)\right]\,dx \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{i} nftyh(x)f(x)\,dx = E\left[g(X)\right] + E\left[h(X)\right]$$

## 1.5. Momentos de una variable aleatoria

Los momentos de una variable aleatoria $X$ son los valores esperados de ciertas funciones de $X$.

**Definición 1.8** *Sea $X$ una variable aleatoria. El $r$-ésimo momento de $X$ alrededor de cero se define por:*

$$\begin{aligned} \mu_r^{'} &= E(X^r) = \sum_x x^r p(x) && \text{Si } x \text{ es discreta, o} \\ \mu_r^{'} &= E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx && \text{Si } x \text{ es continua.} \end{aligned}$$

El primer momento al rededor del cero es la media o valor esperado de la variable aleatoria. y se denota por $\mu$; de ésta manera se tiene que $\mu_1^{'} = \mu = E(X)$.

**Definición 1.9** *Sea $X$ una variable aleatoria. El r-ésimo momento central de $X$ o el r-ésimo momento alrededor de la media de $X$ se define por:*

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(X-u)^r = \sum_x (x-\mu)^r p(x) & \textit{Si } x \textit{ es discreta, o} \\ \mu_r &= E(X-u)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)\, dx & \textit{Si } x \textit{ es continua.} \end{aligned}$$

El momento central de cero de cualquier variable aleatoria es uno, dado que:

$$\mu_0 = E(X-\mu)^0 = E(1) = 1$$

De manera similar, el primer momento central de cualquier variables aleatoria es cero, dado que:

$$\mu_1 = E(E-\mu)^0 = E(X) - \mu = 0$$

El segundo momento central:

$$\mu_2 = E(X-\mu)^2$$

Recibe el nombre de varianza de la variable aleatoria. Puesto que:

$$\begin{aligned} \mu_2 = Var(X) &= E(X-\mu)^2 \\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \mu_2' - \mu^2 \end{aligned}$$

La varianza de cualquier variable aleatoria es el segundo momento alrededor del origen menos el cuadrado de la media. Generalmente se denota por $\sigma^2$