

Guía 1

1. Suponga que a, b son números reales no nulos simultáneamente. Hallar números reales c y d tales que,

$$\frac{1}{a + bi} = c + di$$

Respuesta.- Hallemos $c \in \mathbb{R}$ como sigue,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + bi} &= c + di \\ \frac{1}{a + bi} - di &= c + di - di \\ c &= \frac{1}{a + bi} - di \end{aligned}$$

Ya que, $i^4 = i^3 i = (-i)i = -(i^2) = -(-1) = 1$ y

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i,$$

Luego hallamos $d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + bi} &= c + di \\ di &= \frac{1}{a + bi} - c \\ di \cdot i^3 &= i^3 \left(\frac{1}{a + bi} - c \right) \\ d &= \frac{-i}{a + bi} + ci \end{aligned}$$

$$\text{Así, } c = \frac{1}{a + bi} - di \quad ; \quad d = \frac{-i}{a + bi} + ci.$$

2. Hallar dos raíces cuadradas distintas de i .

Respuesta.- $x^2 - 1 = 0$ y $x^2 - 4 = 0$.

3. Probar que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Demostración.- Sea $\alpha = a + bi$ y $\beta = c + di$, entonces por definición de números complejos para la adición, tenemos que,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (c + di) + (a + bi) \\ &= \beta + \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

De donde se demuestra la proposición dada.

4. Probar que $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$, para todo $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración.- Sea $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ y $\lambda = e + fi$ entonces,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \lambda &= [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) \\ &= (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)] \\ &= \beta + (\alpha + \lambda) \end{aligned}$$

Así, $(\alpha + \beta) + \lambda = \beta + (\alpha + \lambda)$.

5. Probar que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, existe un único $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha + \beta = 0$.

Demostración.- La existencia queda demostrada por la propiedad identidad para la adición.

Ahora demostremos su unicidad de la siguiente manera:

Supongamos que existen $\beta', \beta \in \mathbb{C}$ tales que $\alpha + \beta = 0$ y $\alpha + \beta' = 0$ que implica,

$$\alpha + \beta = \alpha + \beta' \implies \beta = \beta'.$$

Y por lo tanto, queda demostrada la unicidad.

Demostrada la existencia y unicidad concluimos que se cumple la propiedad del inverso aditivo para \mathbb{C} .

6. Probar que para todo $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, existe un único $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha\beta = 1$.

Demostración.- Similar al anterior ejercicio podemos demostrar la existencia de β por la propiedad de identidad para la multiplicación. Luego demostremos la unicidad de la siguiente manera:

Sean $\beta, \beta' \in \mathbb{C}$ tales que $\alpha\beta = 1$ y $\alpha\beta' = 1$ entonces

$$\alpha\beta = \alpha\beta'$$

como $\alpha \neq 0$, nos queda que, $\beta = \beta'$.

Así, queda demostrada la propiedad del inverso multiplicativo para \mathbb{C} .

7. Hallar $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $(4, -3, 1, 7) + 2x = (5, 9, -6, 8)$.

Respuesta.- se tiene que,

$$\begin{aligned}(4, -3, 1, 7) + 2x &= (5, 9, -6, 8) \\ 2x &= (5, 9, -6, 8) - (4, -3, 1, 7) \\ 2x &= (5 - 4, 9 + 3, -6 - 1, 8 - 7) \\ 2x &= (1, 12, -7, 1)\end{aligned}$$

De donde $x = \left(\frac{1}{2}, 6, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

8. Probar que $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in F^n$.

Demostración.- Sea

$$\begin{aligned}x &= (x_1, \dots, x_n) \\ y &= (y_1, \dots, y_n) \\ z &= (z_1, \dots, z_n)\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= [(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] \\ &+ (z_1, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &+ (z_1, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, \dots, x_n) \\ &+ [(y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)] \\ &= (x_1, \dots, x_n) \\ &+ (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n)\end{aligned}$$

De donde se tiene que,

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

9. Probar que $(ab)x = a(bx)$ para todo $x \in F^n$ y para todo $a, b \in F$.

Demostración.- Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ entonces,

$$\begin{aligned}(ab)x &= (ab)(x_1, \dots, x_n) \\ &= ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) \\ &= a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= a(bx).\end{aligned}$$

De ésta manera se demuestra que la propiedad dada.

10.