

# CÁLCULO DE UNA VARIABLE

James Stewart

Resolución de problemas por FODE

---

## Índice general

# Funciones y modelos

**Definición 1.1** Una **función**  $f$  es una regla que asigna a cada elemento  $x$  de un conjunto  $D$  exactamente un elemento, llamado  $f(x)$ , de un conjunto  $E$ .

$$\{(x, f(x)) / x \in D\}$$

la función  $f$  consta de todos los puntos  $(x, y)$  en el plano coordenado tales que  $y = f(x)$  y  $x$  está en el dominio de  $f$

**Definición 1.2** Una función se llama **creciente** sobre un intervalo  $I$  si

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** sobre  $I$  si

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

## 1.1. Ejercicios

1. Si  $f(x) = x + \sqrt{2-x}$  y  $g(u) = u + \sqrt{2-u}$ . ¿Es verdad que  $f = g$ ?

Respuesta.- Es verdad ya que no afecta en nada el símbolo que se podría colocar a la variable dependiente.

2. Si  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$  y  $g(x) = x$  ¿Es verdad que  $f = g$ ?

Respuesta.- No es verdad ya que el dominio de la función  $g$  son todos los reales contrariamente a la función  $f$  que no se cumple para  $x = 1$

3. La gráfica de una función  $f$  está dada.

(a) Indique el valor de  $f(1)$

Respuesta.- El valor es 3

(b) Calcule el valor de  $f(-1)$

Respuesta.- El valor es  $-0,3$  aproximadamente.

(c) ¿Para qué valores de  $x$  es  $f(x) = 1$ ?

Respuesta.- Por definición solo se cumple para  $0$

(d) Calcule el valor de  $x$  tal que  $f(x) = 0$

Respuesta.- El valor es aproximadamente  $-0,7$

(e) Indique el dominio y el rango de  $f$

Respuesta.-  $f_D = \{x \in f_D / -2 \leq x \leq 4\}$ , y  $f_R = \{y \in f_R / -1 \leq y \leq 3\}$

(f) ¿En qué intervalo  $f$  es creciente?

Respuesta.- Es creciente en el intervalo  $[-2, 1]$

**4.** Las gráficas de  $f$  y  $g$  están dadas.

(a) Indique los valores de  $f(-4)$  y  $g(3)$

Respuesta.-  $f(-4) = -2$  y  $g(3) = 4$

(b) ¿Para qué valores de  $x$  es  $f(x) = g(x)$ ?

Respuesta.- Para  $2$ , y  $-2$

(c) Estime la solución de la ecuación  $f(x) = -1$

Respuesta.-  $x = -3$

(d) ¿Sobre qué intervalo  $f$  es decreciente?

Respuesta.- Sobre  $[0, 4]$

(e) Establezca el dominio y el rango de  $f$

Respuesta.- El dominio de  $f$  es  $[-4, 4]$  y el rango de  $[-2, 3]$

(f) Establezca el dominio y el rango de  $g$

Respuesta.- El dominio es de  $[-4, 3]$  y el rango de  $[0, 5, 4]$

5. La gráfica de la figura 1 fue registrada por un instrumento operado por el departamento de minas y geología de California en el hospital Universitario de California del Sur de Los Ángeles. Utilice esta gráfica para estimar el rango de la función aceleración vertical de suelo, en la Universidad de California del Sur, durante el terremoto de Northridge.

Respuesta.- El rango de la función de aceleración vertical del suelo es dado por el intervalo  $[-1, 3]$

6. En esta sección se discuten ejemplos de funciones cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo, de envío postal es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. De otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describen verbalmente. ¿Qué puede decir sobre el dominio y el rango de cada una de sus funciones? Si es posible, trace una gráfica de cada función.

Respuesta.-

7. No cumple con la definición de función.

8. Cumple con la definición de función por lo tanto  $f_D = \{x / -2 \leq x \leq 2\}$  y  $f_R = \{y \in f(x) / -1 \leq y \leq 2\}$

9. Cumple con la definición de función por lo tanto  $f_D = \{x / -3 \leq x < -2 \cup -2 \leq x \leq 2\}$  y  $f_R = \{y \in f(x) / -3 \leq x < -2 \cup -2 \leq y \leq 2,6\}$

10. No cumple con la definición de función por lo tanto no se tiene un dominio y rango.

11. En la figura se muestra una gráfica de la temperatura media global  $T$  durante el siglo  $XX$ . Estime lo siguiente.

(a) La temperatura media mundial en 1950

Respuesta.- 14.5 grados centígrados.

(b) El año en que la temperatura promedio fue de 14,2 C.

Respuesta.- Aproximadamente en 1905

(c) ¿En qué año la temperatura fue más baja? ¿Más alta?

Respuesta.- Fue más baja en 1920 y más alta en 2010

(d) El rango de  $T$

Respuesta.- El rango se encuentra en el intervalo de  $[12,8, 14,8]$

- 12.** Los arboles crecen más rápido y forman anillos más amplios en los años cálidos y crecen más lentamente y forman anillos más angostos en los años más fríos. La figura muestra anillos anchos del pino Siberiano de 1500 a 2000.

(a) ¿Cuál es el rango de la función de ancho de anillo?

Respuesta.- El rango es de 0,1 a 1,41 aproximadamente.

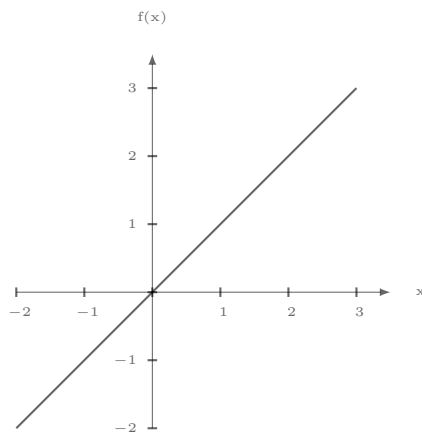
(b) ¿Qué dice la gráfica acerca de la temperatura de la tierra? ¿La gráfica refleja las erupciones volcánicas de la mitad del siglo *XIX*?

Respuesta.- La temperatura cada vez es más cálida mientras pasa los años.

Se ve un pequeño realce entre 1800 – 1890 donde podría haber existido algunas erupciones volcánicas.

- 13.** Se ponen unos cubitos de hielo en un vaso, se llena el vaso con agua fría y luego se coloca sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua conforme transcurre el tiempo. Luego trace una gráfica de la temperatura del agua como una función del tiempo transcurrido.

Respuesta.- La temperatura va disminuyendo constantemente en función a la temperatura ambiente y del tiempo.



- 14.** Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros. La gráfica muestra la distancia recorrida como una función del tiempo de cada corredor. Describa en palabras lo que la gráfica indica acerca de esta carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada corredor terminó la carrera?

Respuesta.- Gano la carrera el competidor A. Efectivamente cada competidor acabo la carrera.

- 15.** La gráfica muestra el consumo de energía para un día de septiembre en San Francisco. ( $P$  se mide en megawatts;  $t$  se registra en horas a partir de la medianoche).

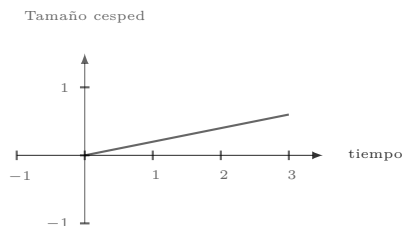
- (a) ¿Cual fue el consumo de potencia a las 6 : 00? ¿A las 18 : 00?

Respuesta.- Para las 6 : 00 el consumo de potencia es 500 megawatts. y para las 18 : 00 es 720 megawatts.

- (b) ¿Cuándo fue el consumo de energía más bajo? ¿Cuándo fue el más alto? ¿Estos tiempos parecen razonables?

Respuesta.- El más bajo fue a hrs. 4 : 00 y el mas alto fue en a hrs. 12 : 00. Los tiempos son razonables por la actividad que se puede realizar a esas horas.

16. Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz en función de la época del año.
17. Trace una gráfica de la temperatura exterior en función del tiempo, durante un día típico de primavera.
18. Trace una gráfica aproximada del valor de mercado de un nuevo automóvil en función del tiempo, durante un periodo de 20 años. Suponga que el automóvil se mantiene en buen estado.
19. Trace la gráfica de la cantidad de una determinada marca de café vendido por una tienda en función del precio del café.
20. Coloque una tarta congelada en un horno y caliéntela durante una hora. Luego sáquela y déjela enfriar antes de comerla. Describa cómo cambia la temperatura de la tarta conforme pasa el tiempo. Luego trace una gráfica de la temperatura de la tarta en función del tiempo.
21. El propietario de una casa poda el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica de la altura del césped como una función del tiempo, en el transcurso de un periodo de cuatro semanas.



22. Un avión despegue desde un aeropuerto y aterriza una hora más tarde en otro aeropuerto a 400 km de distancia. Si  $t$  representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado la terminal.  $x(t)$  es la distancia horizontal recorrida y  $y(t)$  la altitud del avión, trace
- (a) Una posible gráfica de  $x(t)$
- (b) Una posible gráfica de  $y(t)$

(c) Una posible gráfica de la rapidez respecto al suelo.

(d) Una posible gráfica de la velocidad vertical.

- 23.** Las siguientes lecturas de temperatura  $T$  (en  $C^\circ$ ) se registraron cada tres horas desde la medianoche a las 15 : 00 en Montreal, el 13 de junio de 2004. El tiempo  $t$  se midió en horas a partir de la medianoche.

(a) Utilice las lecturas para trazar una gráfica de  $T$  como una función de  $t$ .

(b) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 11 : 00

- 24.** Los investigadores midieron la concentración de alcohol en la sangre de ocho sujetos masculinos adultos después de consumir en forma rápida 30 mL de etanol. La tabla muestra los datos que se obtuvieron promediando la  $BAC$  de los ocho hombres.

(a) Utilice las lecturas para trazar la gráfica de la  $BAC$  en función de  $t$ .

(b) Utilice la gráfica para describir cómo el efecto del alcohol varía con el tiempo.

- 25.** Si  $f(x) = 2x^2 - x + 2$ , determine  $f(2)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(a)$ ,  $f(-a)$ ,  $f(a+1)$ ,  $2f(a)$ ,  $f(2a)$ ,  $f(a^2)$ ,  $[f(a)]^2$ , y  $f(a+h)$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}f(2) &= 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 8 \\f(-2) &= 2 \cdot (-2)^2 - 2 + 2 = 12 \\f(a) &= 2a^2 - a + 2 \\f(-a) &= 2(-a)^2 - (-a) + 2 \\f(a+1) &= 2(a+1)^2 - (a+1) + 2 \\2f(a) &= 2(2a^2 - a + 2) \\f(2a) &= 2(2a)^2 - 2a + 2 \\f(a^2) &= 2(a^2)^2 - a^2 + 2 \\f(a)^2 &= (2a^2 - a + 2)^2 \\f(a+h) &= 2(a+h)^2 - (a+h) + 2\end{aligned}$$

- 26.** Un globo esférico con radio de  $r$  centímetros tiene volumen  $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Encuentre una función que represente la cantidad de aire necesaria para inflar el globo de un radio de  $r$  centímetros a un radio  $r+1$  centímetros.

Respuesta.-  $V(r+1) - V(r) = \frac{4}{3}\pi(r+1)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

(27–30) Evalúe el cociente de diferencia de cada una de las siguientes funciones. Simplifique su respuesta.



**27.**  $f(x) = 4 + 3x - x^2, \quad \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

Respuesta.- Se tiene

$$\frac{4 + 3(3+h) - (3+h)^2 - 4 + 9 - 9}{h} = \frac{9 + 3h - 9 - 6h - h^2}{h} = \frac{-h^2 - 3h}{h} = -(h+3)$$

**28.**  $f(x) = x^3, \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Respuesta.-  $\frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^3 + h^3 - a^3}{h} = \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = h^2 + 3a^2 + 3ah$

**29.**  $f(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Respuesta.-

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a - x}{xa}}{x - a} = \frac{-(x - a)}{xa(x - a)} = -\frac{1}{xa}$$

**30.**  $f(x) = \frac{x+3}{x+1}, \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Respuesta.-

$$\frac{\frac{x+3}{x+1} - 2}{x - 1} = \frac{\frac{x+3 - 2(x+1)}{x+1}}{x - 1} = \frac{\frac{-x - 1}{x+1}}{x - 1} = \frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x-1}$$

31 – 37 Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

**31.**  $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$

Respuesta.- Debemos tomar en cuenta que no podemos dividir por 0. Por lo tanto igualamos el denominador a 0.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0$$

entonces el dominio esta dado por todo  $x - \{-3, 3\}$

**32.**  $f(x) = \frac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

Respuesta.- Ponemos a prueba

$$x^2 + x - 6,$$

entonces  $(x+2)(x-3) = 0$  por lo tanto El dominio esta dado para todo  $x - \{-2, 3\}$

**33.**  $f(t) = \sqrt[3]{2t-1}$

Respuesta.- El dominio es dado para todo  $x$ , ya que la raíz cubica puede ser evaluada para número no positivos.

**34.**  $g(t) = \sqrt{3-y} - \sqrt{2+t}$

Respuesta.- Evaluamos raíces cuadradas para números no negativos por lo tanto,  $3-t \geq 0$ ;  $2+t \geq 0$  entonces el dominio de la función esta dado por  $-2 \leq t \leq 3$ .

**35.**  $h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-5x}}$

Respuesta.- Sea  $x^2 - 5x \geq 0$ , de donde  $x(x-5) \geq 0$ , así,  $x \geq 0 \wedge x-5 \geq 0 \vee x \leq 0 \wedge x-5 \leq 0$ , por lo tanto el dominio esta dado por  $x \leq 0 \vee x \geq 5$ .

**36.**  $f(u) = \frac{u+1}{1+\frac{1}{u+1}}$

Respuesta.- Primeramente evaluamos  $u+1 = 0$ , entonces  $u = -1$ , luego evaluamos  $1 + \frac{1}{u+1} = 0$ , de donde  $u = -2$ , por lo tanto  $\{x/x \neq -1, -2\}$

**37.**  $F(p) = \sqrt{2-\sqrt{p}}$

Respuesta.- Evaluamos primero  $\sqrt{p}$  de donde  $p \geq 0$  luego evaluamos  $\sqrt{2-\sqrt{p}} \geq 0$ , así  $p \leq 4$  por lo tanto el dominio esta dado por  $0 \leq x \leq 4$

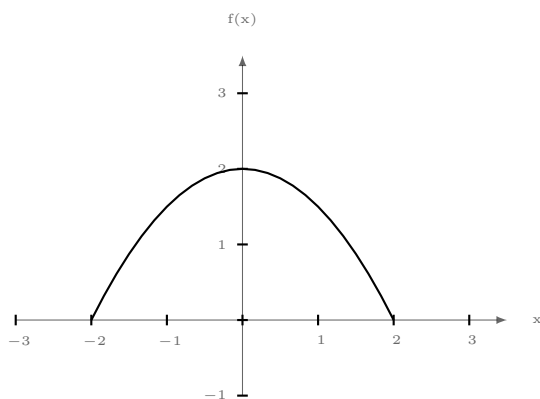
**38.** Encuentre el dominio y el rango, y dibuje la gráfica de la función  $h(x) = \sqrt{4-x^2}$

Respuesta.- Evaluamos el dominio de la función,

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -(x^2 - 4) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \leq 0$$

por lo tanto el dominio esta dado por  $\{x/-2 \leq x \leq 2\}$ .

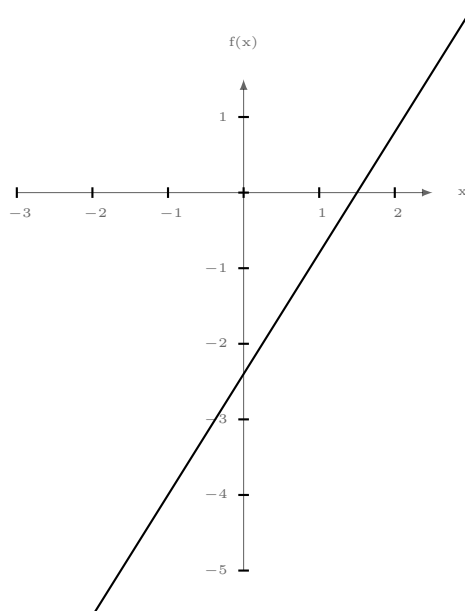
Luego es fácil evaluar el rango,  $\{f(x)/0 \leq f(x) \leq 2\}$



39 – 40 Encuentre el dominio y grafique cada una de las funciones siguientes:

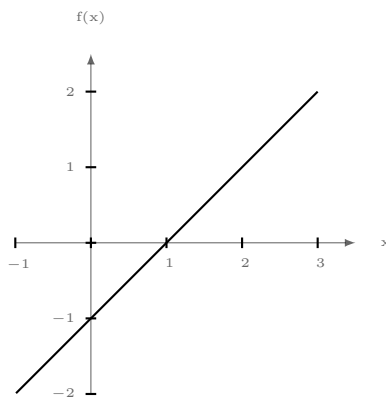
**39.**  $f(x) = 1,6x - 2,4$

Respuesta.- El dominio viene dado por todos los reales.



**40.**  $g(t) = \frac{t^2 - 1}{t + 1}$

Respuesta.- El dominio esta dado por  $\{x/x \neq -1\}$

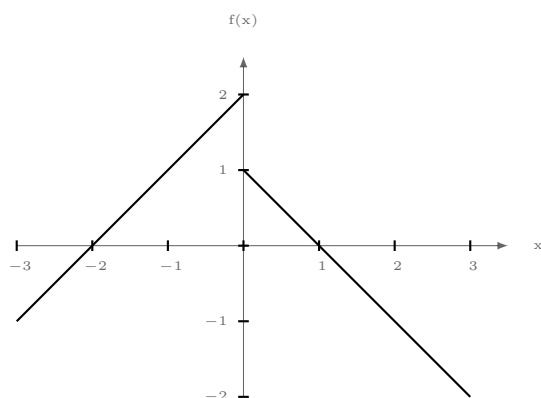


41 – 44 Evalúe  $f(-3)$ ,  $f(0)$  y  $f(2)$  para la función definida por partes. Luego trace la gráfica de la función.

**41.**  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Respuesta.-

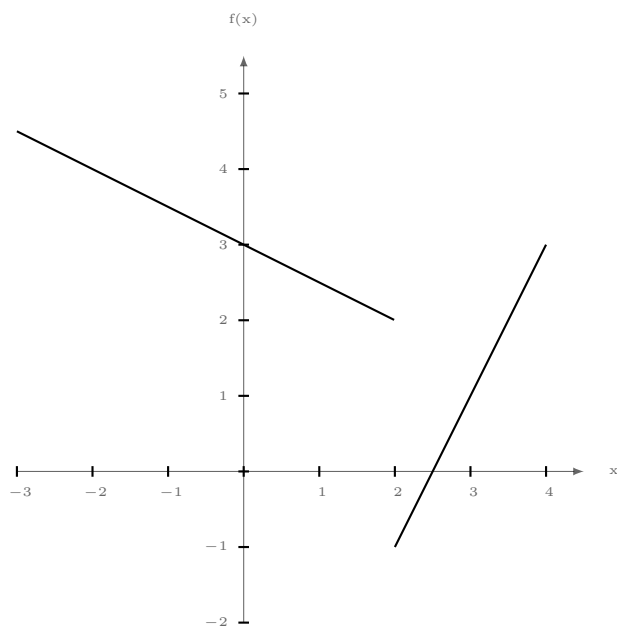
- $f(-3) = x + 2 = -3 + 2 = -1.$
- $f(0) = 1 - x = 1 - 0 = 1.$
- $f(2) = 1 - x = 1 - 2 = -1.$



$$42. f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Respuesta.-

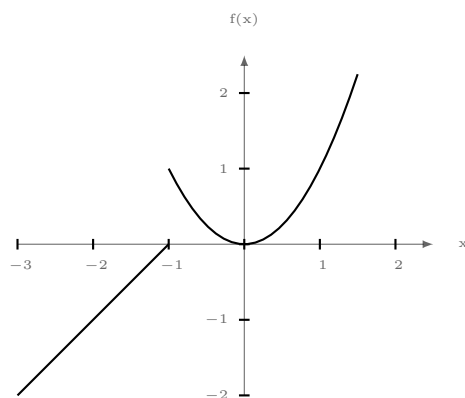
- $f(-3) = 3 - \frac{1}{2}x = 3 - \frac{1}{2}(-3) = \frac{9}{2}.$
- $f(0) = 3 - \frac{1}{2}x = 3 - \frac{1}{2}(0) = 3.$
- $f(2) = 2x - 5 = 2 \cdot 2 - 5 = -1.$



43.  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Respuesta.-

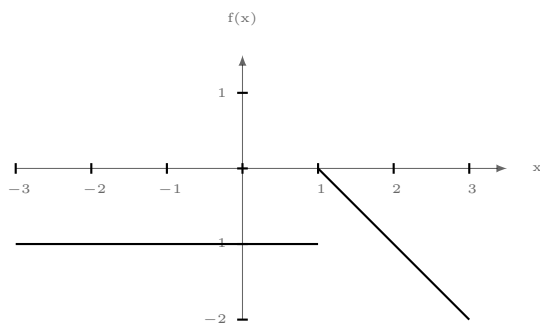
- $f(-3) = x + 1 = -3 + 1 = -2.$
- $f(0) = x^2 = 0^2 = 0.$
- $f(2) = x^2 = 2^2 = 4.$



44.  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ 7 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Respuesta.-

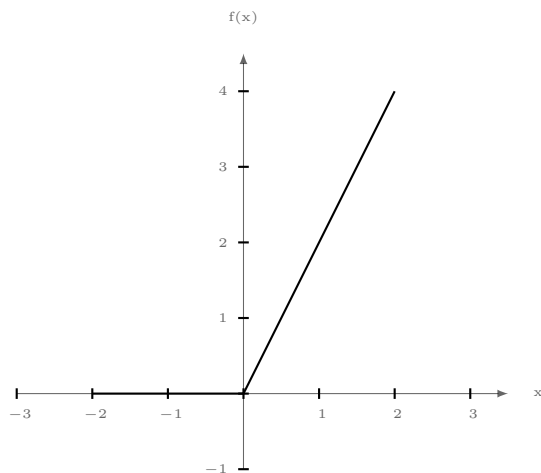
- $f(-3) = -1.$
- $f(0) = -1.$
- $f(2) = 7 - 2x = 7 - 2 \cdot 2 = 3.$



45 – 50 Trace la gráfica de la función.

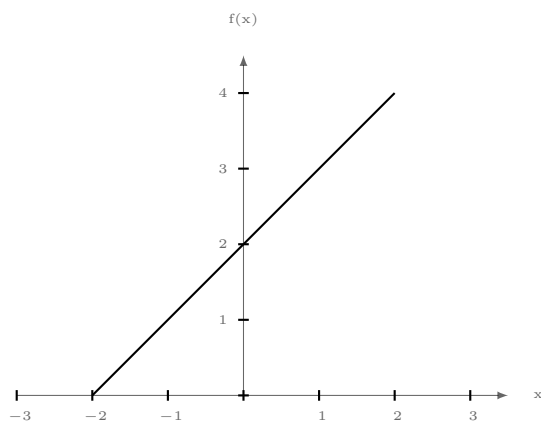
45.  $f(x) = x + |x|$

Respuesta.-



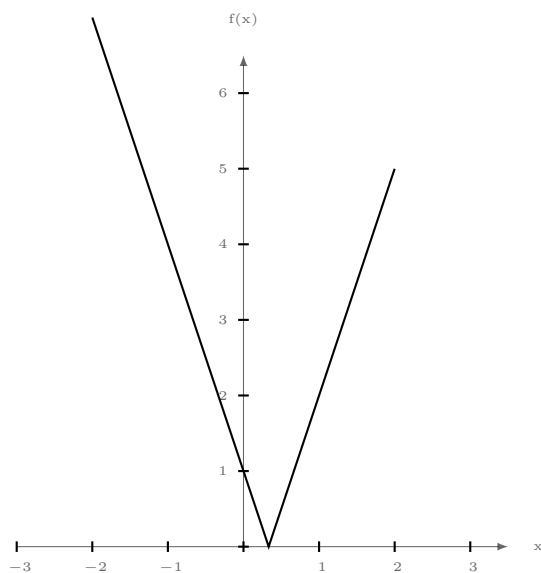
46.  $f(x) = |x + 2|$

Respuesta.-



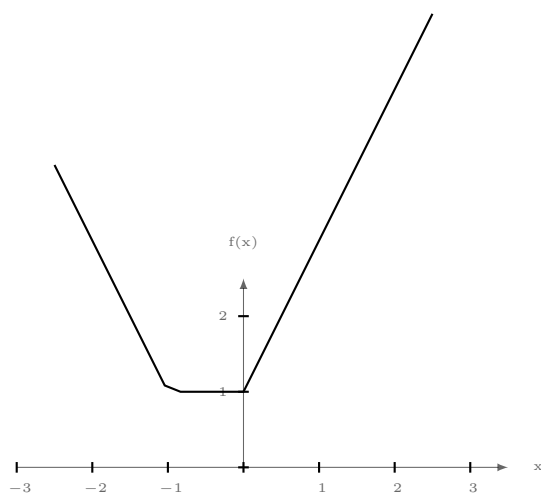
47.  $g(t) = |1 - 3t|$

Respuesta.-



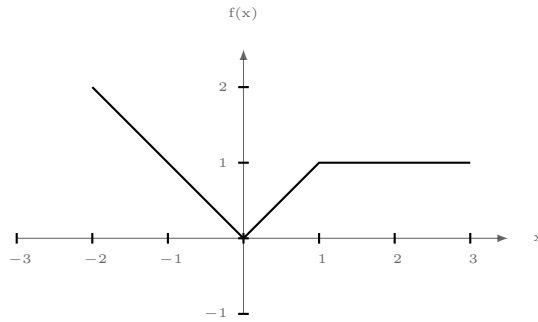
48.  $h(t) = |t| + |t + 1|$

Respuesta.-



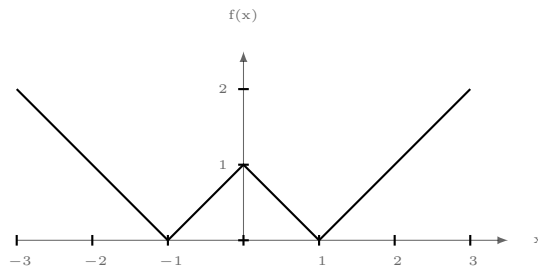
49.  $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

Respuesta.-



**50.**  $g(x) = ||x| - 1|$

Respuesta.-



51 – 56 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

**51.** El segmento de recta que une los puntos  $(1, -3)$  y  $(5, 7)$

Respuesta.- el segmento viene dado por la ecuación  $f(x)ax + b$  donde  $a$  es la pendiente y  $b$  el punto de corte. Formando un sistemas de ecuaciones con el primero y segundo punto respectivamente se tiene

$$-3 = a + b \quad y \quad 7 = 5a + b,$$

operando nos queda que  $a = \frac{10}{4}$  y  $b = -\frac{11}{2}$ , por lo tanto la función viene dado por  $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$ .

**52.** El segmento de recta que une los puntos  $(-5, 10)$  y  $(7, -10)$

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio tenemos las ecuaciones

$$10 = -5a + b \quad y \quad -10 = 7a + b$$

de donde  $a = -\frac{5}{3}$  y  $b = \frac{5}{3}$  y por lo tanto

$$f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$$



**53.** La mitad inferior de la parábola  $x + (y - 1)^2 = 0$

Respuesta.- Se tiene  $(y-1)^2 = -x \implies y = \pm\sqrt{-x}+1$ , luego la mitad inferior esta dada por  $y = -\sqrt{-x}+1$

**54.** La mitad inferior de la circunferencia  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

Respuesta.- Se tiene  $(y - 2)^2 = 4 - x^2 \implies y = \pm\sqrt{5 - x^2} + 2$ , por lo tanto la parte superior de la circunferencia esta dado por  $y = \sqrt{5 - x^2} + 2$

**55.** Respuesta.-

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x - 6 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

**56.** Respuesta.-

$$f(x) = \begin{cases} 2/3x + 3 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ \sqrt{2 - x^2} & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2/3x - 3 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

57 – 61 Encuentre una fórmula y el dominio para cada una de las funciones siguientes.

**57.** Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Expresé el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

Respuesta.- Sea  $A_{rec} = b \cdot h$  el área de un rectángulo y  $2b + 2h = 20$  el perímetro. Entonces  $h = 10 - b$  por lo tanto  $A_{rec} = b(10 - b)$

**58.** Un rectángulo tiene  $16 \text{ m}^2$  de área. Expresé el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

Respuesta.- Similar al anterior problema el perímetro viene dado por  $2b + 2h = P$  y el área por  $16 = b \cdot h$  entonces  $b = \frac{16}{h}$  por lo tanto  $P = \frac{32 + 2h^2}{h}$

**59.** Expresé el área de un triángulo equilátero, como función de la longitud de un lado.

Respuesta.-  $f(x) = \frac{L^2\sqrt{3} \cdot L}{4}$

- 60.** Una caja rectangular cerrada con volumen  $6 \text{ m}^3$  tiene un largo de dos veces el ancho. Expresa la altura de la caja como una función del ancho.

Respuesta.- El volumen viene dado por  $6 = l \cdot a \cdot h$ . Luego nos indica que  $2l = a$ , luego  $h(a) = a + \frac{a}{2} - 6$

- 61.** Una caja rectangular abierta con  $2 \text{ m}^3$  de volumen tiene una base cuadrada. Expresa el área superficial de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base.

Respuesta.- Siendo la base cuadrada:  $Vol = b^2h \implies 2 = b^2h \implies h = 2/b^2$  luego  $A = b^2 + 4 \cdot (bh)$ , de donde nos queda  $A = b^2 + 4(b \cdot \frac{2}{b^2}) = b^2 + \frac{8}{b}$

- 62.** Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la venta es de 10 m, exprese el área  $A$  de la ventana en función del ancho  $x$  de la ventana.

Respuesta.- Sea  $A_{cuad} = x \cdot y$  y  $A_{circ} = \pi \cdot r^2$  de donde  $r = \frac{x}{2}$  por lo tanto  $A_{circ} = \pi \cdot \frac{x^2}{4}$ . Ya que se tiene un semicírculo. Luego el perímetro esta dado por  $10 = 2y + x + 2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{2}$  entonces  $y = \frac{x + \pi x - 10}{2}$ . Finalmente se tiene  $A_{Total} = A_{cuad} + A_{circ}$  entonces  $A_{Total} = x \cdot \frac{x + \pi x - 10}{2} + \frac{\pi x^2}{4} \implies A_{Total} = \frac{\pi^2 x^2}{2} - 10x$

- 63.** Se va a construir una caja sin tapa, a partir de una hoja rectangular de cartón que tiene dimensiones de 12 por 20 centímetros, recortando cuadrados iguales de lado  $x$  en cada una de las esquinas y doblando los lados como se ilustra en la figura. Expresa el volumen  $V$  de la caja en función de  $x$ .

Respuesta.- El volumen es dado por  $V = L \cdot a \cdot h$  luego  $h = x$ ,  $a = 12 - 2x$ ,  $L = 20 - 2x$  por lo tanto

$$V(x) = (20 - 2x)(12 - 2x) \cdot x \implies V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 240x$$

- 64.** Un plan de telefonía celular tiene una carga básica de 35 dólares al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cargos de 10 centavos de dólar por cada minuto adicional de uso. Escriba el costo mensual  $C$  como una función del número  $x$  de minutos utilizados, y trace la gráfica de  $C$  como una función de  $x$  para  $0 \leq x \leq 600$ .

Respuesta.- Sea  $x$  la cantidad de minutos del plan, entonces

$$C(x) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \leq x \leq 400 \\ 35 + 0,1(x - 400) & \text{si } 400 < x \leq 600 \end{cases}$$

- 65.** En cierto estado del país, la velocidad máxima permitida en autopistas es  $100 \text{ km/h}$  y la velocidad mínima es de  $50 \text{ km/h}$ . La multa para los conductores que violan estos límites es \$10 por cada kilómetro por hora arriba de la velocidad máxima o debajo de la velocidad mínima. Expresa el monto de la multa  $F$  como una función de la velocidad  $x$  a la que se conduce y trace la gráfica de  $F(x)$  para  $0 \leq x \leq 180$ .

Respuesta.-

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 50 \leq x \leq 100 \\ 10 & \text{si } 0 \leq x < 50 \text{ o } 100 < x \leq 180 \end{cases}$$

Ahora bien después nos cobran \$10 por una kilómetro por hora mas rápido o mas lento de lo establecido con lo cual:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 50 \leq x \leq 100 \\ 10 & \text{si } 100 < x \leq 101 \text{ o } 49 \leq x < 50 \\ 20 & \text{si } 101 < x \leq 102 \text{ o } 48 \leq x < 49 \end{cases}$$

Luego bien si el automotor se mueve ya sea  $k$  millas por hora mas rápido o mas lento entonces la expresión resultante es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 50 \leq x \leq 100 \\ 10k & \text{si } 100 + (k-1) < x \leq 100 + k \\ & 50 - (k+1) \leq x < 50 - k \end{cases}$$

- 66.** Una compañía de electricidad cobra a sus clientes una tasa base de 10 dólares al mes, más 6 centavos de dólar por kilowatt-hora ( $kWh$ ) por los primeros 1200  $kWh$  y 7 centavos de dólar por  $kWh$  para todo uso arriba de 1200  $kWh$ . Expresa el costo mensual  $E$  como una función de la cantidad  $x$  de electricidad utilizada. Luego trace la gráfica de la función  $E$  para  $0 \leq x \leq 2000$ .

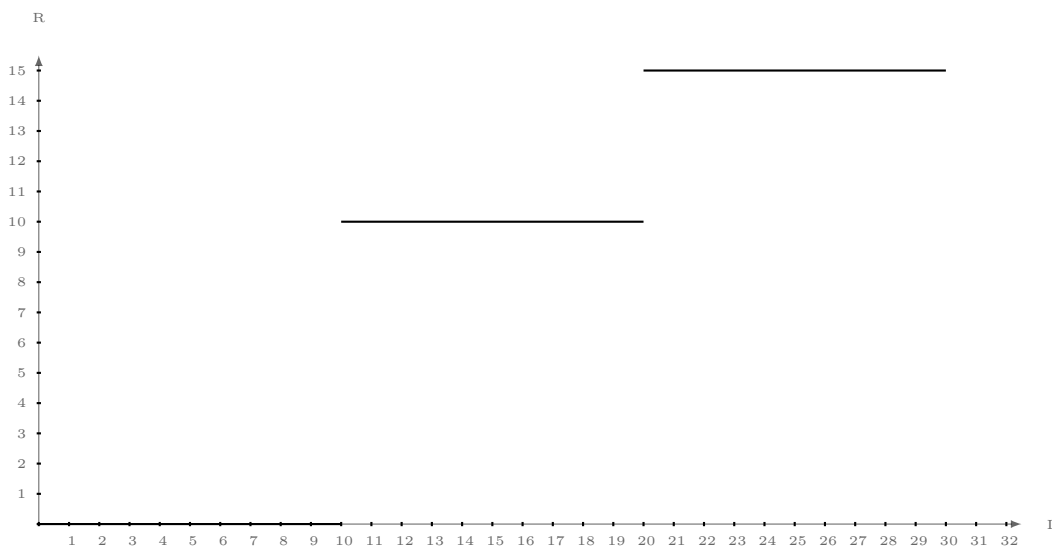
Respuesta.- La ecuación viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 10 + (0,006 \cdot x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1200 \\ 0,07x - 2 & \text{si } x > 1200 \end{cases}$$

- 67.** En un determinado país, el impuesto sobre la renta se calculo como sigue. No hay impuesto sobre la renta para ingresos de hasta \$10000. Los ingresos de más de \$10000 se gravan con una tasa de 10 %, hasta un ingreso de \$20000. Los ingresos superiores a \$20000 se gravan en 15 %.

(a) Trace la gráfica de la tasa de impuestos  $R$  en función del ingreso  $I$ .

Respuesta.-

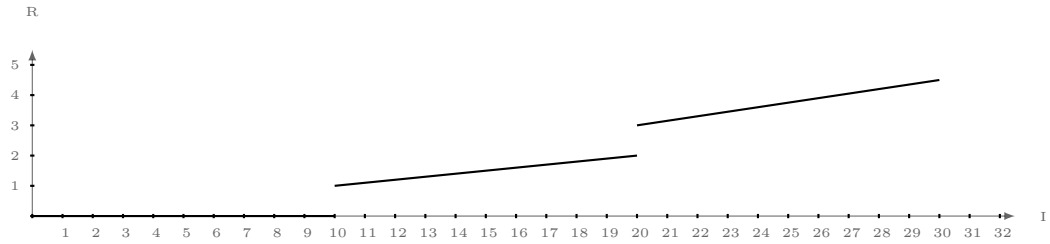


(b) ¿Qué impuesto corresponde a un ingreso de \$14000?

Respuesta.- Le corresponde un impuesto de  $0,1 \cdot 14000 = \$1400$ .

(c) Trace la gráfica del impuesto  $T$  en función del ingreso  $I$ .

Respuesta.-



**68.** Las funciones del ejemplo 10 y el ejercicio 67 se llaman funciones escalón porque sus gráficas parecen escaleras. Sugiera dos ejemplos de funciones escalón que surgen en la vida cotidiana.

Respuesta.- Cualquier ejemplo donde sea constantemente en los subintervalos.

69 – 70 Se muestran las gráficas de  $f$  y  $g$ . Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

**69.** Vemos que  $f$  y  $g$  son par ya que las gráficas son simétricas respecto a la ordenada. Contrariamente a  $g$  que es impar ya que es simétrica al origen.

**70.**  $f$  no es par ni impar ya que no tiene simetría en la ordenada ni respecto al origen. Luego  $g$  es par ya que es simétrico respecto a la ordenada.

**71.** 1) Si el punto  $(5, 3)$  está en la gráfica de una función par ¿Cuál otro punto debe estar en la gráfica?

Respuesta.- Tendría que estar el punto  $(-5, 3)$

2) Si el punto  $(5, 3)$  está en la gráfica de una función impar, ¿Cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

Respuesta.- Estaría el punto  $(-5, -3)$

**72.** Una función  $f$  tiene dominio  $[-5, 5]$  y se muestra una porción de su gráfica.

(a) Complete la gráfica de  $f$  si se sabe que  $f$  es par.

(b) Complete la gráfica de  $f$  si se conoce que  $f$  es impar.

73 – 78 Determine si  $f$  es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora. Utilícela para verificar visualmente su respuesta.

**73.**  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Respuesta.- Sea  $f(-x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$  entonces  $-\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$  por lo tanto la función es impar.

**74.**  $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

Respuesta.-  $f(-x) = \frac{-x^2}{-x^4 + 1} = f(x)$ , por lo tanto es par.

**75.**  $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

Respuesta.-  $f(-x) = \frac{-x}{-x + 1} = -f(x)$ . Por lo tanto es impar.

**76.**  $f(x) = x|x|$

Respuesta.-  $f(-x) = -x|-x| = -f(x)$ . Por lo tanto es impar.

**77.**  $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

Respuesta.-  $f(-x) = 1 + 3(-x)^2 - (-x)^4 = f(x)$  por lo tanto es par.

**78.**  $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

Respuesta.-  $f(-x) = 1 + 3(-x)^3 - (-x)^5 = 1 - 3x^3 + x^5$  no es par ni impar.

**79.** Si  $f$  y  $g$  son funciones pares. ¿es  $f + g$  par? Si  $f$  y  $g$  son funciones impares, ¿Es  $f + g$  impar? ¿Qué sucede si  $f$  es par y  $g$  es impar? Justifique sus respuestas.

Respuesta.- Sea  $f$  y  $g$  par entonces  $f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$  y por lo tanto  $(f + g)(x) = (f + g)(-x)$  de aquí concluimos que la suma de funciones pares da siempre una función par.

Luego sea  $f$  y  $g$  impares entonces  $f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) = -(f + g)(-x)$  ya que  $-f(x) + -g(x) = [-f + (-g)](x)$  por lo tanto se concluye que dos funciones impares dan como resultado otra función impar.

Por último sea  $f$  par y  $g$  impar entonces  $f(x) + g(-x) = f(x) - g(x) = (f - g)(x)$  tanto la función no será ni lo uno ni lo otro.

**80.** Si  $f$  y  $g$  son dos funciones pares, ¿es el producto  $fg$  par? Si  $f$  y  $g$  son dos funciones impares, ¿es  $fg$  impar? ¿Qué sucede si  $f$  es par y  $g$  es impar? Justifique sus respuestas.

Respuesta.- Sea  $f(x) = f(-x)$  y  $g(x) = g(-x)$  entonces  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x) = (f \cdot g)(-x)$  siempre y cuando el dominio de  $f \cdot g$  sea la intersección de los mismo.

Después sea  $-f(-x) = f(x)$  y  $-g(-x) = g(x)$  entonces  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = -f(-x) \cdot -g(-x) = -(f \cdot g)(-x)$  tal que  $D_f \cap D_g$ .

Por último sea  $f(x) = f(-x)$  y  $g(x) = -g(-x)$  entonces  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot -g(-x) =$

$$-(f \cdot g)(-x)$$

ya que por axioma  $f \cdot -g$  es igual a  $-(f \cdot g)$

## 1.2. Ejercicios

1 – 2 Clasifique cada función como una función potencia, función raíz, polinomial (establezca el grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. (a)  $f(x) = \log_2 x$  es una función logarítmica.

(b)  $g(x) = \sqrt[4]{x}$  es una función raíz.

(c)  $h(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$  es una función algebraica o racional.

(d)  $u(t) = 1 - 1,1t + 2,54t^2$  es una función polinómica de segundo grado.

(e)  $v(t) = 5^t$  es una función exponencial.

(f)  $w(\theta) = \sin \theta \cos^2 \theta$  es una función trigonométrica.

2. (a)  $y = \pi^x$  es una relación exponencial.

(b)  $y = x^\pi$  es una relación potencia.

(c)  $y = x^2(2 - x^3)$  es una relación polinómica de quinto grado.

(d)  $y = \tan t - \cos t$  es una relación trigonométrica.

(e)  $y = \frac{s}{1+s}$  es una relación algebraica y racional.

(f)  $y = \frac{\sqrt{x^3-1}}{1+\sqrt[3]{x}}$  es una relación de algebraica.

3 y 4 Relacione cada una de las siguientes ecuaciones con su gráfica. Explique el porqué de su elección. (No utilice computadora o calculadora graficadora.)

**3. (a)**  $y = x^2 \rightarrow h$

**(b)**  $y = x^5 \rightarrow f$

**(c)**  $y = x^8 \rightarrow g$

**4. (a)**  $y = 3x \rightarrow G.$

**(b)**  $y = 3^x \rightarrow f.$

**(c)**  $y = x^3 \rightarrow F.$

**(d)**  $y = \sqrt[3]{x} \rightarrow g.$

Encuentre el dominio de la función.

**5.**  $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

Respuesta.- Esta dado para todo  $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  para cualquier entero  $n$ .

**6.**  $g(x) = \frac{1}{1 - \tan x}$

Respuesta.- El dominio esta dado para todo  $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$  para cualquier entero  $n$ .

**7. a)** Determine una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y trace la gráfica de varios miembros de la familia.

Respuesta.- La ecuación viene dada por  $f(x) = 2x + b$ .

**b)** Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tal que  $f(2) = 1$  y trace varios miembros de la familia.

Respuesta.- Sea  $2a + b = 1$  entonces  $b = 1 - 2a$ , por lo tanto la ecuación vendrá dada por  $f(x) = ax + 1 - 2a = a(x - 2) + 1$ .

**c)** ¿Qué función pertenece a ambas familias?

Respuesta.- Sea  $2 \cdot 2 + b = 1 \Rightarrow b = -3$  por lo tanto la función que pertenece a las dos familias está dado por  $f(x) = 2x - 3$ .

8. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales  $f(x) = 1 + m(x + 3)$ ? Trace varios miembros de la familia.

Respuesta.- Se puede ver que tiene en común los puntos  $(-3, 1)$ .

9. ¿Qué todos los miembros de la familia de funciones lineales  $f(x) = c - x$  tienen en común? Trace varios miembros de la familia.

Respuesta.- Tienen en común que su pendiente es  $-1$ .

10. Encuentre expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas se muestran.

Respuesta.- Partiendo de la traslación de una función cuadrática se tiene que  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  entonces  $f(x) = a(x - 3)^2 + 0$  de donde  $2 = a(4 - 3)^2 \Rightarrow a = 2$ , por lo tanto  $f(x) = 2(x - 3)^2$ .

Para  $g$  sea  $f(x) = ax^2 + bx + c$  entonces por el punto  $(0, 1)$  se tiene  $c = 1$ , luego reemplazamos el punto  $(1, -2,5)$  en la ecuación general de donde tenemos  $-2,5 = a + b + c$ . De la misma forma para el punto  $(-2, 2)$  donde nos queda  $2 = 4a - 2b + c$ . Luego sumando estas dos ecuaciones nos queda que  $a = -1$ , y  $b = -2,5$ , por lo tanto nos queda  $f(x) = -x^2 + 2,5x + 1$ .

11. Encuentre una expresión para un función cúbica  $f$  si  $f(1) = 6$  y  $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$

Respuesta.- Sea  $f(1) = 6 \Rightarrow (1, 6)$  y  $(-1, 0), (0, 0), (2, 0)$  donde se identifica sus raíces y por lo tanto  $y = a(x + 1)(x - 0)(x - 2) \Rightarrow y = ax(x + 1)(x - 2)$ , luego para encontrar el valor de  $a$  reemplazamos  $(1, 6)$  en la ecuación encontrado de donde  $6 = a(1)(1 + 1)(1 - 2) \Rightarrow a = -3$ , entonces

$$f(x) = -3x(x + 1)(x - 2) \Rightarrow f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 6x$$

12. Estudios recientes indican que la temperatura promedio de la superficie de la Tierra ha estado aumentando. Algunos científicos han modelado la temperatura con la función lineal  $T = 0,02t + 8,50$ , donde  $T$  es la temperatura en  $^{\circ}C$  y  $t$  representa años desde 1900.

- (a) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje  $T$ ?

Respuesta.- La pendiente representa la variación que tiene la temperatura con el tiempo. Y la intersección con el eje  $T$  significa que en 1900,  $T = 0$  y la temperatura fue de  $8,5$ .

- (b) Utilice la ecuación para predecir la temperatura para la superficie global en 2100.

Respuesta.- Sea  $2100 - 1900 = 110$  entonces  $T = 0,02 \cdot 110 + 8,5 = 10,7^{\circ}C$

13. Si  $D$  (en mg) es la dosis de un medicamento recomendada para adultos, entonces, para determinar la dosis apropiada  $c$  para un niño de edad  $a$ , el farmacéutico utiliza la ecuación  $c = 0,0417D(a + 1)$ . Suponga que la dosis para un adulto es de 200 mg.



- (a) Encuentre la pendiente de la gráfica de  $c$ . ¿Qué representa?.

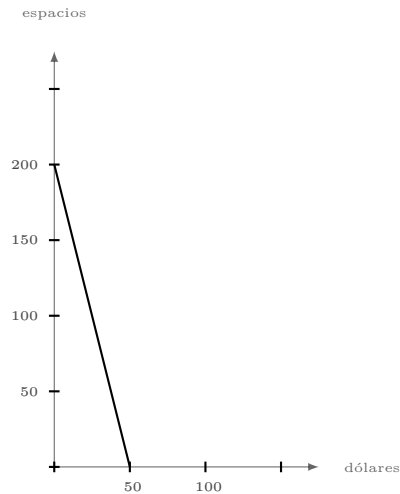
Respuesta.- Dado que  $c = 0,0417 \cdot 200(a + 1)$  entonces la pendiente es 8,34, que representa la variación de la dosis apropiada con respecto a la edad.

- (b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?.

Respuesta.- Sea  $a = 0$  entonces la dosis es 8,34

- 14.** El administrador de un bazar de fin de semana sabe por experiencia que, si cobra  $x$  dólares por el alquiler de un espacio en el bazar, entonces el número  $y$  de espacios que puede alquilar está dado por la ecuación  $y = 200 - 4x$ .

- (a) Trace la gráfica de esta función lineal. (Recuerde que la renta por el espacio y el número de espacios alquilados no pueden ser cantidades negativas.)

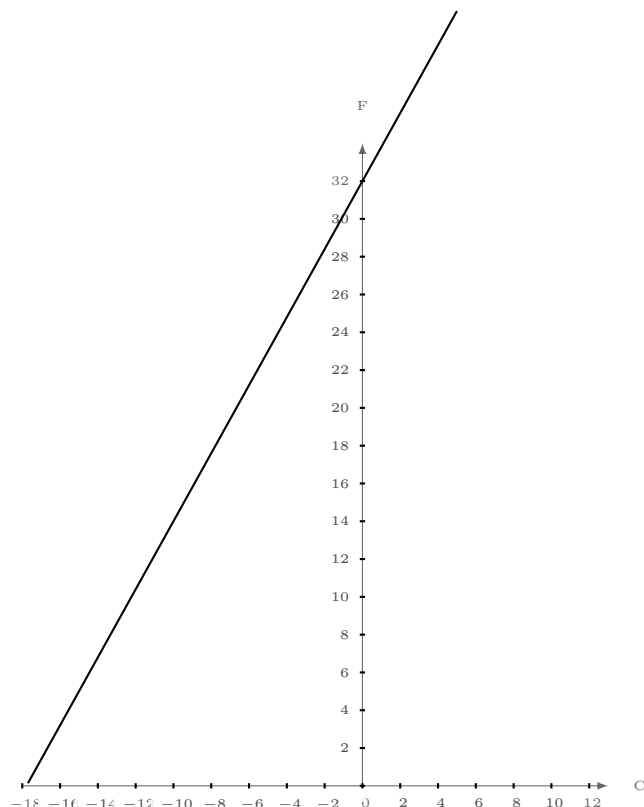


- (b) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con el eje  $y$  y la intersección con el eje  $x$  de la gráfica?

Respuesta.- La pendiente representa la relación de los espacios a ocuparse con respecto al precio en dólares del mismo, luego la intersección con el eje  $x$  y  $y$  representan la demanda de espacios en función al precio.

- 15.** La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit ( $F$ ) y Celsius ( $C$ ) está dada por la función lineal  $F = \frac{9}{5}C + 32$ .

- (a) Trace la gráfica de esta función.



- (b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y que representa? ¿Cuál es la intersección con el eje  $F$  y qué representa?.

Respuesta.- La pendiente es dado por  $\frac{9}{5}$  y representa la relación entre la temperatura Fahrenheit con respecto a los grados Celsius.

La intersección con el eje  $F$  representa la temperatura en Fahrenheit cuando la temperatura en Celsius es 0.

- 16.** Kelly sale de Winnipeg a las 14 : 00 y conduce a rapidez constante hacia el oeste a lo largo de la carretera TransCanadá. Pasa por Brandon, a 210 km de Winnipeg, a las 16 : 00.

- (a) Expresa la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.

Respuesta.- Sea  $t = 2$  y  $d = 210$  entonces la función estará dada por  $d(t) = 105t$  ya que la relación que existe entre la distancia con respecto a tiempo es  $\frac{210}{2} = 105$ .

- (b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).

Respuesta.- El dibujo es una función lineal.

- (c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

Respuesta.- La pendiente es 105 y representa la relación de la distancia con respecto al tiempo.

- 17.** Los biólogos han observado que la tasa de chirridos que emiten los grillos de una determinada especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 112 chirridos por minuto a  $20^{\circ}\text{C}$  y 180 chirridos por minuto a  $29^{\circ}\text{C}$ .

- (a) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura  $T$ , en función del número  $N$  de chirridos por minuto.

Respuesta.- Se tiene dos puntos  $(112, 20)$  y  $(180, 29)$ . Sabemos que una ecuación lineal está dada por  $T(N) = mN + b$ . Para encontrar la pendiente aplicamos  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{29 - 20}{180 - 112} = \frac{9}{68}$ . Para hallar  $b$  que se intersecta con la abscisa, solo se debe remplazar uno de los puntos es decir  $29 = \frac{9}{68} \cdot 180 + b \Rightarrow b = \frac{88}{17}$  y por lo tanto se tiene

$$T(N) = \frac{9}{68} \cdot N - \frac{88}{17}$$

- (b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ¿Qué representa?

Respuesta.- La pendiente de la gráfica es  $\frac{9}{68}$  y representa la relación de la temperatura y los chirridos por minuto del grillo.

- (c) Si los grillos producen 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

Respuesta.-  $T(N) = \frac{9}{68} \cdot 150 + \frac{88}{17} = 25,029$ .

- 18.** El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta \$2200 fabricar 100 sillas en un día y \$4800 producir 300 sillas en un solo día.

- (a) Exprese el costo en función del número de sillas producidas, suponiendo que es lineal. Luego trace la gráfica.

Respuesta.- Sea los puntos  $(100, 2200)$  y  $(300, 4800)$  entonces la pendiente está dada por

$$m = \frac{4800 - 2200}{300 - 100} = \frac{2600}{200} = 13$$

luego remplazando uno de los puntos en la función lineal se tiene  $2200 = 13 \cdot 100 + b \Rightarrow b = 900$ , por lo tanto la función viene dada por  $C(s) = 13s + 900$ .

- (b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

Respuesta.- La pendiente de la gráfica es 13 y representa la razón entre el costo y las sillas fabricadas.

(c) ¿Cuál es la intersección en  $y$  de la gráfica y qué representa?.

Respuesta.- La intersección en  $y$  viene dada por 900 ya que  $C(0) = 13 \cdot 0 + 900$ . Representa el costo de producir 0 sillas.

**19.** En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la presión del aire por encima del agua,  $1,05 \text{ kg/cm}^2$ . Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en  $0,10 \text{ kg/cm}^2$  por cada metro de descenso.

(a) Expresa la presión del agua en función de la profundidad bajo la superficie del océano.

Respuesta.-  $p(s) = 1,05 + 0,10 \cdot s$

(b) ¿A qué profundidad la presión es de  $7 \text{ kg/cm}^2$ ?

Respuesta.-  $7 = 1,05 + 0,10s \Rightarrow s = 59,5 \text{ cm}$ .

**20.** El costo mensual de conducir un auto depende del número de kilómetros recorridos. Lynn encontró que en mayo le costó \$380 conducir 768  $\text{km}$  y en junio le costó \$460 conducir 1280  $\text{km}$ .

(a) Expresa el costo mensual  $C$  como una función de la distancia recorrida  $d$ , suponiendo que una relación lineal da un modelo adecuado.

Respuesta.- Sea la pendiente  $m = \frac{1280 - 768}{460 - 380} = 5,5$ , luego reemplazando uno de los puntos en la ecuación lineal se tiene  $768 = 5,5 \cdot 380 + d \Rightarrow d = -1322$  por lo tanto la ecuación viene dado por

$$C(d) = 5,5 \cdot d - 1322$$

(b) Utilice el inciso (a) para predecir el costo de conducir 2400  $\text{km}$  por mes.

Respuesta.-  $C(d) = 5,5 \cdot 2400 - 1322 = 11878\$$

(c) Dibuje la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?

Respuesta.- La pendiente representa la razón o relación entre el costo y la distancia recorrida por el auto.

(d) ¿Qué representa la intersección en  $y$ ?

Respuesta.- Representa el costo de alquilar un auto sin haber recorrido alguna distancia.

(e) ¿Por qué una función lineal es un modelo adecuado en esta situación?

Respuesta.- Porque la distancia es lineal.

21 – 22 Para cada una de las gráficas de dispersión siguientes, ¿Qué tipo de función elegiría como un modelo para los datos? Explique sus elecciones.

**21.** (a) Respuesta.- Elijo  $f(x) = \sin x + c$  ya que el rango está determinado por  $-1 \leq \cos x + c \leq 1$  y porque es una función par.

(b) Respuesta.- Elijo una función lineal pero inversamente proporcional es decir con su pendiente negativa.  $f(x) = -mx + b$

**22.** (a) Respuesta.- Tal vez podría servir una función exponencial o una función cuadrática pero con el dominio mayor a 0.

(b) Respuesta.- Elijo una función cuadrática de la forma  $ax^2 - bx + c$  con dominio acotado.

**23.**