

# CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por FODE

---

# Índice general

<b>1. Funciones</b>	<b>3</b>
1.1. Problemas . . . . .	4

# Funciones

**Definición 1.1** El conjunto de los números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de **dominio** de la función.

**Definición 1.2** Si  $f$  y  $g$  son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función  $f + g$  denominada **suma** de  $f + g$  mediante la ecuación:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los  $x$  que están a la vez en el dominio de  $f$  y en el dominio de  $g$ , es decir:

$$\text{dominio } (f + g) = \text{dominio } f \cap \text{dominio } g$$

**Definición 1.3** El dominio de  $f \cdot g$  es  $\text{dominio } f \cap \text{dominio } g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

**Definición 1.4** Se expresa por dominio  $f \cap \text{dominio } g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Definición 1.5 (Función constante)**

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

**TEOREMA 1.1**  $(f + g) + h = f + (g + h)$

*Demostración.- La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio. Obsérvese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:*

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] + h(x) \\ &\quad y \\ [f + (g + h)](x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)] \end{aligned}$$

*Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de  $(f + g) + h$  y el de  $f + (g + h)$  es evidentemente dominio  $f \cap$  dominio  $g \cap$  dominio  $h$ . Nosotros escribimos, naturalmente  $f + g + h$  por  $(f + g) + h = f + (g + h)$*

**TEOREMA 1.2** *Es igual fácil demostrar que  $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$  y ésta función se designa por  $f \cdot g \cdot h$ . Las ecuaciones  $f + g = g + f$  y  $f \cdot g = g \cdot f$  no deben presentar ninguna dificultad.*

**Definición 1.6 (Composición de función)**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

*El dominio de  $f \circ g$  es  $\{ x : x \text{ está en el dominio de } g \text{ y } g(x) \text{ está en el dominio de } f \}$*

$$D_{f \circ g} = \{ x / x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \}$$

**Propiedad 1.1**  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  *La demostración es una trivalidad.*

**Definición 1.7** Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si  $(a, b)$  y  $(a, c)$  pertenecen ambos a la colección, entonces  $b = c$ ; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

**Definición 1.8** Si  $f$  es una función, el **dominio** de  $f$  es el conjunto de todos los  $a$  para los que existe algún  $b$  tal que  $(a, b)$  está en  $f$ . Si  $a$  está en el dominio de  $f$ , se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número  $b$  único tal que  $(a, b)$  está en  $f$ . Este  $b$  único se designa por  $f(a)$ .

## 1.1. Problemas

1. Sea  $f(x) = 1/(1 + x)$ . Interpretar lo siguiente:

(i)  $f(f(x))$  (¿Para que  $x$  tiene sentido?)

Respuesta.- Sea  $f\left(\frac{1}{1+x}\right)$  entonces  $\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$ , por lo tanto  $\frac{1-x}{x+2}$  de donde llegamos a la conclusión de que  $x$  se cumple para todo número real de 1 y  $-2$

(ii)  $f\left(\frac{1}{x}\right)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$  por lo tanto se cumple para todo  $x \neq -1, 0$

(iii)  $f(cx)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+cx}$  donde se cumple para todo  $x \neq -1$  si  $c \neq 0$

(iv)  $f(x+y)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+x+y}$  donde se cumple para todo  $x+y \neq -1$

(v)  $f(x) + f(y)$

Respuesta.-  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = \frac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$  siempre y cuando  $x \neq -1$  y  $y \neq -1$

(vi) ¿Para que números  $c$  existe un número  $x$  tal que  $f(cx) = f(x)$ ?

Respuesta.- Para todo  $c$  ya que  $f(c \cdot 0) = f(0)$

(vii) ¿Para que números  $c$  se cumple que  $f(cx) = f(x)$  para dos números distintos  $x$ ?

Respuesta.- Solamente  $c = 1$  ya que  $f(x) = f(cx)$  implica que  $x = cx$ , y esto debe cumplirse por lo menos para un  $x \neq 0$

**2.** Sea  $g(x) = x^2$  y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles  $y$  es  $h(y) \leq y$ ?

Respuesta.- Se cumple para  $y \geq 0$  si  $y$  es racional, o para todo  $y \geq 1$

(ii) ¿Para cuáles  $y$  es  $h(y) \leq g(y)$ ?

Respuesta.- Para  $-1 \leq y \leq 1$  siempre que  $y$  sea racional y para todo  $y$  tal que  $|y| \leq 1$

(iii) ¿Qué es  $g(h(z)) - h(z)$ ?

Respuesta.-

$$g(h(z)) = \begin{cases} 0, & z^2 \text{ racional} \\ 1, & z^2 \text{ irracional} \end{cases}$$

Por lo tanto el resultado es 0

(iv) ¿Para cuáles  $w$  es  $g(w) \leq w$ ?

Respuesta.- Para todo  $w$  tal que  $0 \leq w \leq 1$

(v) ¿Para cuáles  $\epsilon$  es  $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$ ?

Respuesta.- Para  $-1, 0, 1$

**3.** Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(i)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Respuesta.- Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene  $1 - x^2 \geq 0$  entonces  $x^2 \leq 1$  por lo tanto el dominio son todos los  $x$  tal que  $|x| \leq 1$

(ii)  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Respuesta.- Se observa claramente que el dominio es  $-1 \leq x \leq 1$

(iii)  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

Respuesta.- Operando un poco tenemos

$$f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)},$$

sabemos que el denominador no puede ser 0 por lo tanto el  $D_f = \{x / x \neq 1, x \neq 2\}$

(iv)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Respuesta.- Claramente notamos que el dominio de  $f$  son  $-1$  y  $1$  ya que si se toma otros números daría un número imaginario.

(v)  $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

Respuesta.- Notamos que no se cumple para ningún  $x$  ya que si  $0 \leq x \leq 1$  entonces no se cumple para  $\sqrt{x-2}$  y si  $x \geq 2$  no se cumple para  $\sqrt{1-x}$

4. Sean  $S(x) = x^2$ ,  $P(x) = 2^x$  y  $s(x) = \operatorname{sen} x$ . Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.

(i)  $(S \circ P)(y)$

Respuesta.- Por definición se tiene que  $(S \circ P)(y) = S(P(y))$  entonces  $S(2^y) = 2^{2y}$  siempre y cuando  $D_{S \circ P} = \{y/y \in D_P \wedge P(y) \in D_S\}$

(ii)  $(S \circ s)(y)$

Respuesta.- Por definición tenemos que  $(S \circ s)(y) = S(s(y))$  entonces  $S(\operatorname{sen} y) = \operatorname{sen}^2 y$  siempre y cuando  $D_{S \circ s} = \{y/y \in D_s \wedge S(y) \in D_S\}$

(iii)  $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Respuesta.-  $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S((P \circ s)(t)) + s(P(t)) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\operatorname{sen} t)) + s(2^t) = S(2^{\operatorname{sen} t}) + \operatorname{sen} 2^t = 2^{2^{\operatorname{sen} t}} + \operatorname{sen} 2^t$

(iv)  $s(t^3)$

Respuesta.-  $s(t^3) = \operatorname{sen} t^3$

5. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de  $S, P, s$  usando solamente  $+, \cdot, \circ$

(i)  $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

Respuesta.- Claramente vemos que  $P \circ s$

(ii)  $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$

Respuesta.-  $s \circ P$

(iii)  $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

Respuesta.-  $s \circ S$

(iv)  $f(x) = \operatorname{sen} x$

Respuesta.-  $S \circ s$

(v)  $f(t) = 2^{2t}$

Respuesta.-  $P \circ P$

(vi)  $f(u) = \text{sen}(2^u + 2^{u^2})$

Respuesta.-  $s \circ (P + P \circ S)$

(vii)  $f(y) = \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(2^{2^{\text{sen } y}})))$

Respuesta.-  $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$

(viii)  $f(a) = 2^{\text{sen}^2 a} + \text{sen}(a^2) + 2^{\text{sen}(a^2 + \text{sen } a)}$

Respuesta.-  $P \circ S \circ s + s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

6. (a) Si  $x_1, \dots, x_n$  son números distintos, encontrar una función polinómica  $f_i$  de grado  $n - 1$  que tome el valor 1 en  $x_i$  y 0 en  $x_j$  para  $j \neq i$ . Indicación: El producto de todos los  $(x - x_j)$  para  $j \neq i$  es 0 en  $x_j$  si  $j \neq i$ . Este producto es designado generalmente por

$$\prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j)$$

donde el símbolo  $\prod$  (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que  $\sum$  para sumas.

Respuesta.- Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija  $n$  y elegir un conjunto de distintas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Por ejemplo supongamos que elegimos  $n = 3$   $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio  $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$ , pero  $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$ . Es decir,  $F_1$  es un cuadrático que tiene ceros en  $x = 2$  y  $x = 3$ , pero es igual a 1 en  $x = 1$ . Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x - 2)(x - 3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante  $a$ . Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con  $x = 1$ , debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x - 2)(x - 3) = 2a,$$

por lo tanto  $a = 1/2$  y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio  $f_2(x)$  tal que  $f_2(2) = 1$  con raíces en  $x = 1, 3$  tendríamos que resolver la ecuación  $1 = a(2 - 1)(2 - 3)$ , lo que da  $a = -1$  por lo tanto  $f_2(x) = -(x - 1)(x - 3)$

Ahora veamos el caso general. El polinomio  $f_i(x)$  satisface  $f_i(x_i) = 1$  y  $f_i(x_j) = 0$  para todo  $j \neq i$ , entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$



Para alguna constante  $a$ . Para encontrar esta constante, aplicamos  $x = x_1$ :

$$f_i(x_i) = 1 = a \prod_{j \neq i} (x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

- (b) Encontrar ahora una función polinómica de grado  $n - 1$  tal que  $f(x_1) = a_1$ , donde  $a_1, \dots, a_n$  son números dados. (Utilícense las Funciones  $f_1$  de la parte (a).) La fórmula que se obtenga es la llamada **Fórmula de interpolación de Lagrange**

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \sum_{j=1} a_j f_j(x)$$

entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_j \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

- 7. (a)** Demostrar que para cualquier función polinómica  $f$  y cualquier número  $a$  existe función polinómica  $g$  y un número  $b$  tales que  $f(x) = (x - a)g(x) + b$  para todo  $x$ . (La idea es esencialmente dividir  $f(x)$  por  $(x - a)$  mediante la división larga hasta encontrar un resto constante.)

Demostración.- Si el grado de  $f$  es 1, entonces  $f$  es de la forma

$$f(x) = cx + d = cx + d + ac - ac = c(x - a) + (d + ac)$$

de tal modo que  $g(x) = c$  y  $b = d + ac$ . Por inducción supongamos que el resultado es válido para polinomios de grado  $\leq k$ . Si  $f$  tiene grado  $k + 1$ , entonces  $f$  tiene la forma

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + \dots + a_1x + a_0$$

luego para grados  $\leq k$  se tiene

$$f(x) - a_{k+1}x^{k+1} = (x - a)g(x) + b$$

así

$$f(x) = (x - a) [g(x) + a_{k+1}(x - a)^k] + b$$

- (b) Demostrar que si  $f(a) = 0$ , entonces  $f(x) = (x - a)g(x)$  para alguna función polinómica  $g$ . (La recíproca es evidente)

Demostración.- Por la parte (a), podemos poner que  $f(x) = (x - a)g(x) + b$ , entonces

$$0 = f(a) = (a - a)g(a) + b = b$$

de modo que  $f(x) = (x - a)g(x)$

- (c) Demostrar que si  $f$  es una función polinómica de grado  $n$ , entonces  $f$  tiene a lo sumo  $n$  raíces, es decir, existen a lo sumo  $n$  números  $a$  tales que  $f(a) = 0$

Demostración.- Supóngase que  $f$  tiene  $n$  raíces  $a_1, \dots, a_n$ . Entonces según la parte (b) podemos poner  $f(x) = (x - a)g_1(x)$  donde el grado de  $g_1(x)$  es  $n - 1$ . Pero

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)g_1(a_2)$$

de modo que  $g_1(a_2) = 0$ , ya que  $a_2 \neq a_1$ . Podemos pues escribir

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)g_2(x),$$

donde el grado de  $g_2$  es  $n - 2$ . Prosiguiendo de esta manera, obtenemos que

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)c$$

para algún número  $c \neq 0$ . Está claro que  $f(a) \neq 0$  si  $a \neq a_1, \dots, a_n$ . Así pues,  $f$  puede tener a lo sumo  $n$  raíces.

- (d) Demostrar que para todo  $n$  existe una función polinómica de grado  $n$  con raíces. Si  $n$  es par, encontrar una función polinómica de grado  $n$  sin raíces, y si  $n$  es impar, encontrar una con una sola raíz

Demostración.- Si  $f(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot \dots \cdot (x - n)$ , entonces  $f$  tiene  $n$  raíces. Si  $n$  es par, entonces  $f(x) = x^n + 1$  no tiene raíces. Si  $n$  es impar, entonces  $f(x) = x^n$  tiene una raíz única, que es 0.

## 8. ¿Para qué números $a, b, c$ y $d$ la función

$$f(x) = \frac{ax + d}{cx + b}$$

satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x$ ?

Respuesta.- Si

$$x = f(f(x)) = \frac{a \left( \frac{ax + d}{cx + b} \right) + d}{c \left( \frac{ax + d}{cx + b} \right) + b}$$

para todo  $x$ , entonces

$$x = \frac{a^2x + ab + bcx + bd}{acx + bc + cdx + d^2}$$

y por lo tanto

$$(ac + cd)x^2 + (d^2 - a^2)x - ab - bd = 0$$

para todo  $x$ , de modo que

$$\begin{aligned} ac + cd &= 0 \\ ab + bd &= 0 \\ d^2 - a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Se sigue que  $a = d$  ó  $a = -d$ . Una posibilidad es  $a = d = 0$ , en cuyo caso  $f(x) = \frac{b}{cx}$  que satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x \neq 0$ . Si  $a = d \neq 0$ , entonces  $b = c = 0$  con lo que  $f(x) = x$ . La tercera posibilidad es  $a + d = 0$ , de modo que  $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ , la cual satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x \neq \frac{a}{c}$  la cual satisface  $f(f(x)) = x$  para todo  $x \neq \frac{a}{c}$ . Estrictamente hablando, podemos añadir la condición  $f(x) \neq \frac{a}{c}$  para  $x \neq \frac{a}{c}$ , lo que significa que

$$\frac{ax+b}{cx-a} \neq \frac{a}{c}, \text{ ó } a^2 + bc \neq 0.$$

- 9. (a)** Si  $A$  es un conjunto cualquiera de números reales, defínase una función  $C_A$  como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ está en } A \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en } A \end{cases}$$

Encuéntrese expresiones para  $C_{A \cap B}$ ,  $C_{A \cup B}$  y  $C_{\mathbb{R}-A}$ , en términos de  $C_A$  y  $C_B$ .

Respuesta.- Según la definición de teoría de conjunto tenemos,

$$\begin{aligned} C_{A \cap B} &= C_A \cdot C_B \\ C_{A \cup B} &= C_A + C_B - C_A \cdot C_B \\ C_{\mathbb{R}-A} &= 1 - C_A \end{aligned}$$

- (b)** Supóngase que  $f$  es una función tal que  $f(x) = 0$  o  $1$  para todo  $x$ . Demostrar que existe un conjunto  $A$  tal que  $f = C_A$

Demostración.- Sea  $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$ , entonces  $f = C_A$ .

- (c)** Demostrar que  $f = f^2$  si y sólo si  $f = C_A$  para algún conjunto  $A$

Demostración.- Sea  $f = f^2$ , entonces para cada real  $x$ ,  $f(x) = f[f(x)]^2$ , así  $f(x) = 0$  ó  $f(x) = 1$ , luego por la parte b),  $f = C_A$  para algún  $A$ .

Por otro lado sea  $f = C_A$  para algún  $A$ . Entonces si  $x \in A$ ,  $f(x) = 1 = 1^2 = f(x)^2$ , mientras si  $x \notin A$ ,  $f(x) = 0 = 0^2 = f(x)^2$ , así en cualquier caso  $f(x) = [f(x)]^2$  y  $f = f^2$

- 10. (a)** ¿Para qué funciones  $f$  existe una función  $g$  tal que  $f = g^2$ ?

Respuesta.- Debido a que algún número elevado al cuadrado siempre será no negativo podemos afirmar que las funciones  $f$  satisfacen a todo  $x$  tal que  $f(x) \geq 0$

- (b)** ¿Para qué función  $f$  existe una función  $g$  tal que  $f = 1/g$ ?

Respuesta.- Dado a que un número dividido entre cero es indeterminado se ve claramente que satisfacen a todo  $x$  tal que  $f(x) \neq 0$

(c) ¿Para qué funciones  $b$  y  $c$  podemos encontrar una función  $x$  tal que

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

para todos los números  $t$ ?

Respuesta.- Por teorema se observa que para las funciones  $b$  y  $c$  que satisfacen  $(b(t))^2 - 4c(t) \geq 0$  para todo  $t$

(d) ¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones  $a$  y  $b$  si ha de existir una función  $x$  tal que

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

para todos los números  $t$ ? ¿Cuántas funciones  $x$  de éstas existirán?

Respuesta.- Es facil notar que  $b(t)$  tiene que ser igual a 0 siempre que  $a(t) = 0$ . Si  $a(t) \neq 0$  para todo  $t$ , entonces existe una función única con esta condición, que es  $x(t) = a(t)/b(t)$ . Si  $a(t) = 0$  para algún  $t$ , entonces puede elegirse arbitrariamente  $x(t)$ , de modo que existen infinitas funciones que satisfacen la condición.

**11.** (a) Supóngase que  $H$  es una función e  $y$  un número tal que  $H(H(y)) = y$ . ¿Cuál es el valor de

$$H(H(H...(H(y))))?$$

Respuesta.- Si aplicamos la hipótesis, tendremos que aplicar 78 veces la función, luego 76 y así, hasta llegar a 2, donde la función sera  $H(H(y))$ , y una vez más por hipótesis tenemos como resultado  $y$ .

(b) La misma pregunta sustituyendo 80 por 81

Respuesta.- Sea  $H(H(y))$  la 78ava vez de la función, entonces la 81ava vez será  $H(H(H(y)))$ , por lo tanto queda como resultado  $H(y)$ .

(c) La misma pregunta si  $H(H(y)) = H(y)$

Respuesta.- Análogamente a la parte a) si la 80ava vez es  $y$  entonces por hipótesis nos queda  $H(y)$ .

(d) Encuéntrase una función  $H$  tal que  $H(H(x)) = H(x)$  para todos los números  $x$  y tal que  $H(1) = 36$ ,  $H(2) = \frac{\pi}{3}$ ,  $H(13) = 47$ ,  $H(36)36$ ,  $H(\pi/3)\frac{\pi}{3}$ ,  $H(47) = 47$

Respuesta.- Dar a  $H(1)$ ,  $H(2)$ ,  $H(13)$ ,  $H(36)$ ,  $H(\pi/3)$ , y  $H(47)$  los valores especificados y hágase  $H(x) = 0$  para  $x \neq 1, 2, 13, 36, \pi/3, 47$ . Al ser, en particular,  $H(0) = 0$ , la condición  $H(H(x)) = H(x)$  se cumple para todo  $x$ .

- (e) Encontrar una función  $H$  tal que  $H(H(x)) = H(x)$  para todo  $x$  y tal que  $H(1) = 7$ ,  $H(17) = 18$

Respuesta.- Hágase  $H(1) = 7$ ,  $H(7) = 7$ ,  $H(17) = 18$ ,  $H(18) = 18$ , y  $H(x) = 0$  para  $x \neq 1, 7, 17, 18$ .

12. Una función  $f$  es par si  $f(x) = f(-x)$ , e impar si  $f(x) = -f(-x)$ . Por ejemplo,  $f$  es par si  $f(x) = x^2$  ó  $f(x) = |x|$  ó  $f(x) = \cos x$ , mientras que  $f$  es impar si  $f(x) = x$  ó  $f(x) = \sin x$ .

- (a) Determinar si  $f + g$  es par, impar o no necesariamente ninguna de las dos cosas, en los cuatro casos obtenidos al tomar  $f$  par o impar y  $g$  par o impar. (Las soluciones pueden ser convenientemente dispuestas en una tabla  $2 \times 2$ )

Respuesta.- Sea  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = |x|$  entonces  $f(-x) + g(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x) + g(x)$  por lo tanto par y par es par.

Sea  $f(x) = x$  y  $g(x) = x$  entonces  $-f(-x) + (-g(-x)) = -(-x) + [-x(-x)] = x + x = f(x) + g(x)$ , por lo tanto impar e impar es impar.

Los otros dos últimos se prueba fácilmente y se llega a la conclusión de que ni uno ni lo otro.

	Par	Par
Par	Par	Ninguno
Par	Ninguno	Par

- (b) Hágase lo mismo para  $f \cdot g$

Respuesta.- Sea  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = |x|$ , entonces  $f(-x) \cdot g(-x) = x^2 \cdot |x| = f(x) \cdot g(x)$ , por lo tanto se cumple para par y par.

Sea  $f(x) = x$  y  $g(x) = x$ , entonces  $-f(-x) \cdot -g(-x) = -(-x) \cdot -(-x) = x \cdot x = f(x) \cdot g(x)$ , por lo tanto impar impar da impar

Sea  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x$ , podemos crear otra función llamada  $h$  que contiene a  $x^2 \cdot x$  por lo tanto  $h(x) = x^3 = -(-x)^2$  y así demostramos que par e impar es impar.

De igual forma al anterior se puede probar que impar y par es impar.

	Par	Par
Par	Par	Impar
Par	Impar	Par

- (c) Hágase lo mismo para  $f \circ g$

Respuesta.- Sea  $f(x) = x$  y  $g(x) = x$ , luego  $h(x) = (f \circ g)(x)$  entonces  $h(x) = x$  luego  $-f(-x) = x$ , por lo tanto impar e impar da impar.

De similar manera se puede encontrar para los demás problemas y queda:

	Par	Par
Par	Par	Par
Par	Par	Impar

- (d) Demostrar que para toda función par  $f$  puede escribirse  $f(x) = g(|x|)$ , para una infinidad de funciones  $g$ .

Demostración.- Sea  $g(x) = f(x)$  sabemos que  $f$  es par si  $f(x) = f(-x)$ , de donde  $g(x) = f(-x)$ , luego por definición de valor absoluto se tiene  $g(|x|) = f(|-x|)$ , y por lo tanto  $f(x) = g(|x|)$

- 13.** (a) Demostrar que para toda función  $f$  con dominio  $\mathbf{R}$  puede ser puesta en la forma  $f = E + O$ , con  $E$  par y  $O$  impar.

Demostración.- Por la parte (b) y resolviendo en  $E(x)$  y  $O(x)$  se tiene

$$E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

- (b) Demuéstrese que esta manera de expresar  $f$  es única. (Si se intenta resolver primero la parte (b) despejando  $E$  y  $O$ , se encontrará probablemente la solución a la parte (a))

Demostración.- Si  $f = E + O$ , siendo  $E$  par y  $O$  impar, entonces

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

$$f(-x) = E(x) - O(x)$$

- 14.** Si  $f$  es una función cualquiera, definir una nueva función  $|f|$  mediante  $|f|(x) = |f(x)|$ . Si  $f$  y  $g$  son funciones, definir dos nuevas funciones,  $\max(f, g)$  y  $\min(f, g)$  mediante

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)),$$

$$\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

Encontrar una expresión para  $\max(f, g)$  y  $\min(f, g)$  en términos de  $||$ .

Respuesta.- Por problema 1,13 se tiene que

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2};$$

$$\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

- 15.** (a) Demostrar que  $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$ . Esta manera particular de escribir  $f$  es bastante usada; las funciones  $\max(f, 0)$  y  $\min(f, 0)$  se llaman respectivamente parte positiva y parte negativa de  $f$

Demostración.- Esta proposición mostrará que se puede dividir una función en sus partes no negativas y no positivas. Es decir para todo los elementos  $x$  de algún dominio, es cierto que el valor de la función  $f$  en un punto  $x$  es igual a la suma dada, que consiste en la parte no negativa de  $\max(f(x), 0)$  y la parte no positiva de  $f$ ,  $\min(f(x), 0)$ .

Para probarlo, lo dividiremos en dos casos. Sabemos que ó  $f(x) \geq 0$  ó  $f(x) \leq 0$ . Si  $f(x) \geq 0$  entonces

$\max(f(x), 0) = f(x)$  y  $\min(f(x), 0) = 0$  por lo que nuestra ecuación se reduce a  $f(x) = f(x) + 0$ . Por otro lado si  $f(x) \leq 0$ , entonces  $\max(f(x), 0) = 0$  y  $\min(f(x), 0) = f(x)$ , por lo que nuestra ecuación se reduce a  $f(x) = 0 + f(x)$ .

En cualquier caso, nuestro lado derecho se reduce a  $f(x)$  y sabemos que al menos uno de estos dos casos es verdadero; por lo tanto concluimos que  $\forall x, f(x) = \max(f(x), 0) + \min(f(x), 0)$  ó  $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$

- (b) Una función  $f$  se dice que es no negativa si  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$ . Demostrar que para cualquier función  $f$  puede ponerse  $f = g - h$  de infinitas maneras con  $g$  y  $h$  no negativas. (La manera corriente es  $g = \max(f, 0)$  y  $h = -\min(f, 0)$ . Cualquier número puede ciertamente expresarse de infinitas maneras como diferencia de dos números no negativos.)

Demostración.- Comenzamos con la observación de que, para cualquier número real no negativo  $r$ , hay infinitos números reales no negativos  $s, t$  tales que

$$r = s - t$$

De hecho, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomamos  $s_n = 2r + n$  y  $t_n = r + n$ . Entonces, dado que  $r \geq 0$ , tanto  $s_n$  como  $t_n$  son no negativos. Además,

$$s_n - t_n = 2r + n - r - n = r$$

Ahora, para cada número real  $x$ , tenemos que  $f(x) \geq 0$ . Por lo tanto, a partir de la observación anterior, vemos que hay infinitos números reales no negativos  $s_x$  y  $t_x$  tales que

$$f(x) = s_x - t_x$$

para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Así que definimos funciones no negativas  $g$  y  $h$  como sigue

$$g(x) = s_x \text{ y } h(x) = t_x$$

. Entonces hemos demostrado que hay infinitas opciones de tales funciones. Además, tenemos que

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

. Por lo tanto, hemos demostrado que hay infinitas funciones no negativas  $g$  y  $h$  tales que

$$f = g - h$$

## 16. Supongase que $f$ satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x$ e $y$ .

- (a) Demostrar que  $f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$

Demostración.- El resultado se cumple para  $n = 1$ ,  $f(x_1) = f(x_1)$ . Luego si  $f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$  para todo  $x_1, \dots, x_n$ , entonces

$$\begin{aligned} f(x_1 + \dots + x_{n+1}) &= f([x_1 + \dots + x_n] + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + \dots + x_n) + f(x_{n+1}) \quad \text{por hipótesis} \\ &= f(x_1) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

- (b) Demostrar que existe algún número  $c$  tal que  $f(x) = cx$  para todos los números racionales  $x$  (en este punto no intentamos decir nada acerca de  $f(x)$  cuando  $x$  es irracional). Indicación: Piénsese primero en cómo debe ser  $c$ . Demostrar luego que  $f(x) = cx$ , primero cuando  $x$  es un entero, después cuando

$x$  es el recíproco de un entero, y finalmente para todo racional  $x$ .

Demostración.- Sea  $c = f(1)$ . Luego para cualquier número natural  $n$  y el inciso (a),

$$f(n) = f(1 + \dots + 1) = f(1) + \dots + f(1) = n \cdot f(1) = cn \quad (1)$$

Al ser

$$f(x) + f(0) = f(x + 0) = f(x),$$

entonces  $f(0) = 0$ . Ahora, puesto que

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0,$$

resulta que  $f(-x) = -f(x)$ . En particular, para cualquier número natural  $n$  y por (1),

$$f(-n) = -f(n) = -cn = c \cdot (-n)$$

Además

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = c$$

de modo que,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n},$$

y en consecuencia

$$f\left(\frac{1}{-n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) = -c \cdot \frac{1}{n} = c \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$$

Por último, cualquier número racional puede escribirse en la forma  $m/n$ , siendo  $m$  un número natural y  $n$  un entero;

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right) = mc \cdot \frac{1}{n} = c \cdot \frac{m}{n}$$

- 17.** Si  $f(x) = 0$  para todo  $x$ , entonces  $f$  satisface  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para todo  $x$  e  $y$  también  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$  para todo  $x$  e  $y$ . Supóngase ahora que  $f$  satisface estas dos propiedades, pero que  $f(x)$  no es siempre 0. Demostrar que

- (a) Demostrar que  $f(1) = 1$

Demostración.- Al ser  $f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) \cdot f(1)$  y  $f(a) \neq 0$  para algún  $a$ , resulta ser  $f(1) = 1$

- (b) Demostrar que  $f(x) = x$  si  $x$  es racional

Demostración.- Por el problema 16,  $f(x) = f(1) \cdot x = x$  para todo número racional  $x$ .

- (c) Demostrar que  $f(x) > 0$  si  $x > 0$ . (Esta parte es artificiosa, pero habiendo puesto atención a las observaciones filosóficas que van con los problemas de los dos últimos capítulos, se sabrá lo que hacer.)

Demostración.- Si  $c > 0$  entonces  $c = d^2$  para algún  $d$ , de modo que  $f(c) = f(d^2) = (f(d))^2 \geq 0$ . Por otro lado, no podemos tener  $f(c) = 0$ , ya que esto implicaría que

$$f(a) = f\left(c \cdot \frac{a}{c}\right) = f(c) \cdot f\left(\frac{a}{c}\right) = 0 \quad \text{para todo } a$$



(d) Demostrar que  $f(x) > f(y)$  si  $x > y$

Demostración.- Si  $x > y$ , entonces  $x - y > 0$ , luego por la parte (c) tenemos que  $f(x) - f(y) > 0$ .

(e) Demostrar que  $f(x) = x$  para todo  $x$ . Indicación: Hágase uso del hecho de que entre dos números cualesquiera existe un número racional

Demostración.- Sea  $f(x) > x$  para algún  $x$ . Elijase un número racional  $r$  con  $x < r < f(x)$ . Entonces, según las partes (b) y (d),

$$f(x) < f(r) = r < f(x),$$

lo cual constituye una contradicción. Análogamente, es imposible que  $f(x) < x$  ya que si  $f(x) < r < x$  entonces

$$f(x) < r = f(r) < f(x).$$

18. ¿Qué condiciones precisas deben satisfacer  $f, g, h$  y  $k$  para que  $f(x)g(y) = h(x)k(y)$  para todo  $x$  e  $y$ ?

Respuesta.- Se satisface la ecuación si  $f = 0$  ó  $g = 0$  y  $h = 0$  ó  $k = 0$ . De no ocurrir esto, existirá algún  $x$  con  $f(x) \neq 0$  y algún  $y$  con  $g(y) \neq 0$ , entonces  $0 \neq f(x)g(y) = h(x)k(y)$ , de modo que también se tendrá  $h(x) \neq 0$  y  $k(y) \neq 0$ . Haciendo  $\alpha = h(x)/f(x)$ , tenemos también  $h(x') = \alpha f(x')$  para todo  $x'$  para todo  $x$ . Tenemos pues. que  $g = \alpha k$  y  $h = \alpha f$  para cierto número  $\alpha \neq 0$ .

19. (a) Demostrar que no existen funciones  $f$  y  $g$  con alguna de las propiedades siguientes:

(i)  $f(x) + g(y) = xy$  para todo  $x$  e  $y$ .

Demostración.- Si  $f(x) + g(y) = xy \forall x, y$  entonces para  $y = 0$  tenemos  $f(x) + g(0) = 0 \forall x$ , de donde  $f(x) = -g(0)$ , e implica que  $f$  es una función constante. Luego

$$xy = f(x) + g(y) = -g(0) + g(y) \forall y$$

porque  $f(x)$  es constante para cualquier  $x$ . Por otro lado sabemos que  $g(0)$  es una constante y  $g(y)$  no depende de  $x$ , sin embargo su diferencia está dada por  $g(y) - g(0) = xy$ . Y finalmente sea  $x = 0$  entonces  $g(y) = g(0) \forall y$ , por lo tanto se concluye que

$$xy = f(x) + g(y) = -g(0) + g(0) = 0 \forall x, y$$

ya que si tomamos  $x = y = 1$  implica que  $1 = 0$  donde llegamos a un absurdo.

(ii)  $f(x) \cdot g(y) = x + y$  para todo  $x$  e  $y$ .

(b) Hallar funciones  $f$  y  $g$  tales que  $f(x + y) = g(xy)$  para todo  $x$  e  $y$ .

Respuesta.-