

Variables aleatorias y distribución de probabilidad

1.1. El concepto de variables aleatorias

Definición 1.1 Sea S un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea X una función de valor real definida sobre S , de manera que transforme los resultados de S en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que X es un variable aleatoria.

Definición 1.2 Se dice que una variable aleatoria X es discreta si el número de valores que puede tomar es contable (ya sea finito o infinito), y si éstos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con los enteros positivos.

Definición 1.3 Se dice que una variable aleatoria X es continua si sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta de los reales.

1.2. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas

Definición 1.4 Sea X una variable aleatoria discreta. Se llamará a $p(x) = P(X = x)$ función de probabilidad de la variable aleatoria X , si satisface las siguientes propiedades:

1. $p(x) \geq 0$ para todos los valores x de X ;
2. $\sum_x p(x) = 1$.

Definición 1.5 La función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X es la probabilidad de que X sea menor o igual a un valor específico de x y está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

En general, la función de distribución acumulativa $F(x)$ de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores de X , de tal manera que:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ para cualquier x ;

2. $F(x_i) \geq F(x_j)$ si $x_i \geq x_j$;
3. $P(X > x) = 1 - F(x)$.
4. $P(X = x) = F(x) - F(x - 1)$;
5. $P(x_i \geq X \geq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$

1.3. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas

Definición 1.6 1. $f(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$,

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ y

3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Para cualquier a y b , entonces $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X .

Para la función de distribución acumulativa $F(x)$ se tiene:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Dado que para cualquier variable aleatoria continua X ,

$$P(X = x) = \lim_{x \rightarrow x} f(t) dt = 0, \quad \implies \quad P(X \leq x) = P(X < x) = F(x)$$

La distribución acumulativa $F(x)$ es una función lisa no decreciente de los valores de la v.a. con las siguientes propiedades:

1. $F(-\infty) = 0$;
2. $F(\infty) = 1$;
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
4. $dF(x)/dx = f(x)$.

1.4. Valor esperado de una variable aleatoria

Definición 1.7 El valor esperado de una variable aleatoria X es el promedio o valor medio de X y está dado por:

$$E(X) = \sum_x xp(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

En donde $p(x)$ y $f(x)$ son las funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad, respectivamente.

En general, el valor esperado de una función $g(x)$ de la variables aleatoria X , está dado por:

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)p(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

1.4.1. Propiedades

1. El valor esperado de una constante c es el valor de la constante.

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c$$

2. El valor esperado de la cantidad $aX + b$, en donde a y b son constantes, es el producto de a por el valor esperado de x más b .

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = aE(X) + b$$

3. El valor esperado de la suma de dos funciones $g(X)$ y $h(X)$ de X es la suma de los valores esperados de $g(X)$ y $h(X)$.

$$E[g(X) + h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) + h(x)] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx = E[g(X)] + E[h(X)]$$

1.5. Momentos de una variable aleatoria

Los momentos de una variable aleatoria X son los valores esperados de ciertas funciones de X .

Definición 1.8 Sea X una variable aleatoria. El r -ésimo momento de X alrededor de cero se define por:

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_x x^r p(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

El primer momento al rededor del cero es la media o valor esperado de la variable aleatoria. y se denota por μ ; de ésta manera se tiene que $\mu'_1 = \mu = E(X)$.

Definición 1.9 Sea X una variable aleatoria. El r -ésimo momento central de X o el r -ésimo momento alrededor de la media de X se define por:

$$\mu_r = E(X - \mu)^r = \sum_x (x - \mu)^r p(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$\mu_r = E(X - \mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

El momento central de cero de cualquier variable aleatoria es uno, dado que:

$$\mu_0 = E(X - \mu)^0 = E(1) = 1$$

De manera similar, el primer momento central de cualquier variables aleatoria es cero, dado que:

$$\mu_1 = E(X - \mu) = E(X) - \mu = 0$$

El segundo momento central:

$$\mu_2 = E(X - \mu)^2$$

Recibe el nombre de varianza de la variable aleatoria. Puesto que:

$$\begin{aligned} \mu_2 = Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \mu'_2 - \mu^2 \end{aligned}$$

La varianza de cualquier variable aleatoria es el segundo momento alrededor del origen menos el cuadrado de la media. Generalmente se denota por σ^2

Es útil notar que la varianza de una variable aleatoria X es invariable; es decir, $Var(X + b) = Var(X)$ para cualquier constante b . De manera más general, se demostrará que $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ para cualquiera dos constantes a y b . Por definición,

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= E(aX + b)^2 - E^2(aX + b) \\ &= E(a^2 X^2 - 2abX + b^2) - [aE(X) + b]^2 \\ &= a^2 E(X)^2 + 2abE(X) + b^2 - a^2 E^2(X) - 2abE(X) - b^2 \\ &= a^2 E(X)^2 - a^2 E^2(X) \\ &= a^2 [E(X)^2 - E^2(X)] \\ &= a^2 Var(X) \end{aligned}$$

Una medida que compara la dispersión relativa de dos distribuciones de probabilidad es el coeficiente de variación, que está definido por:

$$V = \frac{\sigma}{\mu}$$

Expresa la magnitud de la dispersión de una variable aleatoria con respecto a su valor esperado.

El tercer momento central

$$\mu_3 = E(X - \mu)^3$$

esta relacionado con la asimetría de la distribución de probabilidad de X .

Cualquier momento central de una variable aleatoria X puede expresarse en términos de los momentos de ésta, alrededor de cero. Por definición:

$$u_r = E(X - \mu)^r$$

pero la expansión de $(X - \mu)^r$ puede expresarse como:

$$(X - \mu)^r = \sum_{i=0}^r (-1)^i \frac{r!}{(r-i)!i!} \mu^i x^{r-i} = \sum_{i=0}^r (-1)^i \frac{r!}{(r-i)!i!} \mu^i E(X^{r-i}) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \frac{r!}{(r-i)!i!} \mu^i \mu'_{r-i}$$

En particular,

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3$$

Para las distribuciones de probabilidad que presentan un sólo pico, si $\mu_3 < 0$, se dice que la distribución es asimétrica negativamente, si $\mu_3 > 0$, la distribución es asimétrica positivamente y si $\mu_3 = 0$, la distribución recibe el nombre de simétrica.

Una medida más apropiada de la asimetría, es el tercer momento estandarizado, dado por:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

Que recibe el nombre de coeficiente de asimetría. Una distribución de probabilidad es asimétrica positiva, negativa o simétrica si $\alpha_3 > 0$, $\alpha_3 < 0$ o $\alpha_3 = 0$ respectivamente.

El cuarto momento central,

$$\mu_4 = E(X - \mu)^4 = \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4$$

Es una medida de qué tan puntiaguda es la distribución de probabilidad y recibe el nombre de curtosis. Al igual que para el tercer momento, es preferible emplear el cuarto momento estandarizado,

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Si $\alpha_4 > 3$, la distribución de probabilidad presenta un pico relativamente alto y recibe el nombre de leptocúrtica, si $\alpha_4 < 3$, la distribución es relativamente plana y recibe el nombre de platocúrtica y si $\alpha_4 = 3$, la distribución no presenta un pico muy alto ni muy bajo y recibe el nombre de mesocúrtica.

En este momento se considerará el concepto de variable aleatoria estandarizada. Sea X cualquier variable aleatoria con media μ y desviación estándar σ la cantidad

$$Y = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$

define una variable aleatoria Y con media cero y desviación estándar uno. Esta variable recibe el nombre de **variable aleatoria estandarizada** correspondiente a X

El valor esperado de Y es cero, puesto que:

$$E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = 0$$

De hecho, puesto que $E(Y) = 0$, el r -ésimo momento central de Y es:

$$\begin{aligned}\mu_r(Y) &= E(Y^r) \\ &= E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^r \\ &= \frac{1}{\sigma^r} E(X - \mu)^r \\ &= \frac{\mu_r(X)}{\sigma^r}\end{aligned}$$

De esta manera se tiene que:

$$\mu_r(Y) = \frac{\mu_r(X)}{[\mu_2(X)]^{r/2}}$$

Ya que

$$\sigma^r = \sqrt{[\mu_2(X)]^r}$$

es decir,

$$(\sigma^r)^2 = [\mu_2(X)]^r \implies (\sigma^2)^r = [\mu_2(X)]^r \implies (\sigma^2)^r = (\sigma^2)^r$$

de donde se tiene que $Var(Y) = \mu_2(Y) = 1$. En particular, nótese que $\alpha_3(Y) = \alpha_3(X)$ y $\alpha_4(Y) = \alpha_4(X)$. La estandarización de una variable aleatoria afecta a la media y a la varianza, pero no a los factores de forma.

1.6. Otras medidas de tendencia central y dispersión

Definición 1.10 Para cualquier variable aleatoria X , se define a la mediana $x_{0.5}$ de X , para ser:

$$P(X < x_{0.5}) \leq 1/2 \quad y \quad P(X \leq x_{0.5}) \geq 1/2 \quad \text{si } X \text{ es discreta, o}$$

$$P(X \leq x_{0.5}) = 1/2 \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

Definición 1.11 Para cualquier variable aleatoria X , se define la moda como el valor x_m de X que maximiza la función de probabilidad si X es discreta o la función de densidad si X es continua.

Definición 1.12 Para cualquier variable aleatoria X , el valor cuantil X_q , de orden q . $0 < q < 1$, es el valor de X tal que:

$$P(X < x_q) \leq q \quad y \quad P(X \leq x_q) \geq q \quad \text{si } X \text{ es discreta, o}$$

$$P(X \leq x_q) = q \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

Definición 1.13 La desviación media de una variable aleatoria X es el valor esperado de la diferencia absoluta entre X y su media, y está dado por:

$$E|X - \mu| = \sum |x - \mu|p(x) \quad \text{si } X \text{ es discreta, o}$$

$$E|X - \mu| = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu| dx \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

1.7. Funciones generadoras de momentos

Definición 1.14 Sea X una variable aleatoria. El valor esperado de $\exp(tX)$ recibe el nombre de función generadora de momentos, y se denota por $m_X(t)$, si el valor esperado existe para cualquier valor de t en algún intervalo $-c < t < c$ en donde c es un número positivo. En otras palabras:

$$m_X(t) = E[\exp(tX)] = \sum_x e^{tx} p(x) \quad \text{si } X \text{ es discreta, o}$$

$$m_X(t) = E[\exp(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

Si la función generadora de momentos existe, puede demostrarse que es única y que determina por completo la distribución de probabilidad de X . En otras palabras **si dos variables aleatorias tienen la misma función generadora de momentos, entonces tienen la misma distribución de probabilidad.**

Definición 1.15 Sea X una variable aleatoria. El valor esperado de $\exp[t(X - \mu)]$ recibe el nombre de función generadora de momentos central y denota por $m_{X-\mu}(t)$, si el valor esperado existe para cualquier t en algún intervalo $-c < t < c$ en donde c es un número positivo.

$$m_{X-\mu}(t) = E\exp[t(X - \mu)] = \sum_x \exp[t(x - \mu)] p(x) \quad \text{si } X \text{ es discreta, o}$$

$$m_{X-\mu}(t) = E\exp[t(X - \mu)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[t(x - \mu)] f(x) dx \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

1.8. Ejercicios

Los ejercicios se encuentra en el archivo *Ej_Cap3.Rmd*