Distribuciones notables discretas

Christian Limbert Paredes Aguilera

23/12/2021

#library source("funciones.R")

Distribución Bernoulli

- Consideremos un experemento con dos resultados posibles éxito (E) y fracaso (F). El espacio de sucesos será $\Omega = \{E, F\}$
- Supongamos que la probabilidad de éxito es $P(E) = p$, y naturalmente $P(E) = 1 - p = q$ con $0 < p < 1$.
- Consideremos la aplicación
$$X : \Omega = \{E, F\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
definida por
$$E(X) = 1, \quad X(F) = 0$$

Su función de probabilidad es

$$P_X(x) = \begin{cases} 1 - p = q & si \quad x = 0 \\ p & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Su función de distribución es

$$P_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 - p = q & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x \end{cases}$$

- Lo denotaremos por
$$X \equiv Ber(p) \quad o \quad X \equiv B(1, p)$$
- a este tipo de experimentos (éxito/fracaso) se les denomina experimentos Bernoulli.

Esperanza de una v.a. X Ber(p)

Su valor esperado es

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x \cdot P(X = x) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

Calculemos también $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{x=o}^{1} x \cdot P(X = x) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$$

Varianza de una v.a. X Ber(p)

Su varianza es

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p \cdot (1-p) = p \cdot q$$

Su desviación típica es

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{p \cdot (1-p)}$$

```r
#función de probabilidad
dbinom(0, size = 1, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.75
```

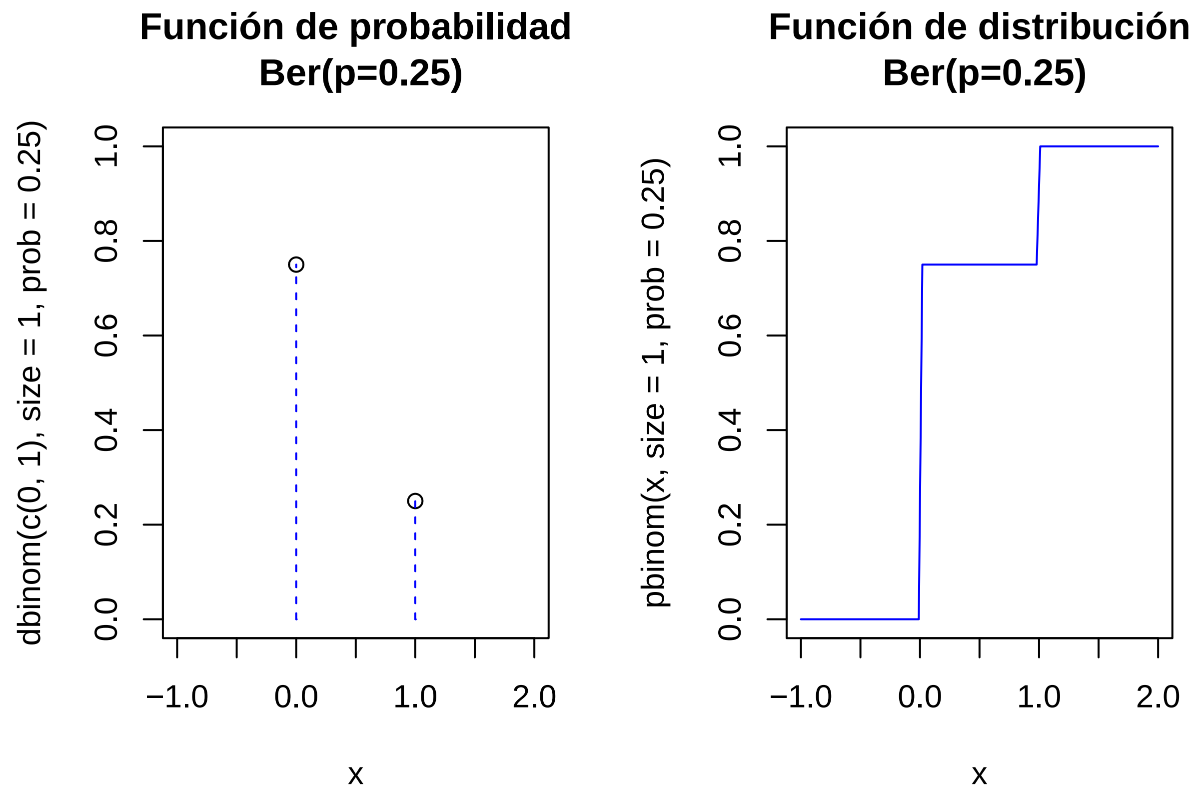
```r
#función de probabilidad
dbinom(1, size = 1, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.25
```

```r
# muestra aleatoria simple de probabilidad Bernoulli
rbinom(n = 20, size = 1, prob = 0.25)
```

```
##  [1] 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1
```

```r
# gráfico de la función de probabilidad y la de distribución de una Ber(p=0.25)
{par(mfrow=c(1,2))
plot(x=c(0,1),y=dbinom(c(0,1),size=1,prob=0.25),
     ylim=c(0,1),xlim=c(-1,2),xlab="x",
     main="Función de probabilidad\n Ber(p=0.25)")
lines(x=c(0,0,1,1),y=c(0,0.75,0,0.25), type = "h", lty = 2,col="blue")
curve(pbinom(x,size=1,prob=0.25),
      xlim=c(-1,2),col="blue",
      main="Función de distribución\n Ber(p=0.25)")
par(mfrow=c(1,1))}
```



Distribución binomial

Si repetimos n veces de forma independiente un experimento Bernoulli de parámetro p. Se conoce a priori cuantas veces se tirará la moneda.

El espacio muestral Ω estará formado por cadenas $E^{'}s$ y F^{s} de longitud n consideremos la v.a.

$$X(EFF\ldots EEF) \ = \ \text{número de éxitos en la cadena}$$

Función de probabilidad de una binomial

$$P_X(x)\left\{\begin{array}{rll} \binom{n}{x}\cdot p^x\cdot (1-p)^{n-x} & si & x=0,1,\ldots,n\\ 0 & si & \text{en otro caso}\end{array}\right.$$

Función de distribución

Su función de distribución no tiene una fórmula cerrada. Hay que acumular la función de probabilidad:

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\sum_{i=0}^{x}P_X(i)$$

$$P_X(x)\left\{\begin{array}{rll} 0 & si & \\ \sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot (1-p)^{n-i} & si & k\leq x<k+1 \quad y \quad k=0,1,\ldots,n\\ 1 & si & n\leq x\end{array}\right.$$

```
# Cuantas maneras distintas hay para elegir 5 jugadores en un conjunto de 6 jugadores. Todo el múndo di
choose(6,5)
```

```
## [1] 6
```

```r
# con 10 jugadores el número de equipos de 5 distintos es bastante más grande
choose(10,5)
```

```
## [1] 252
```

```r
# Y por ejemplo con un equipo de fútbol profesional que tiene en plantilla 22 jugadores (quitamos el po
choose(22,10)
```

```
## [1] 646646
```

Se denotará por

$$X \equiv B(n,p)$$

Obviamente se tiene que una bernoulli es una binomial con $n=1$

$$B(1,p) \equiv Ber(p)$$

Esperanza de un X B(n,p)

Su esperanza es

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = n \cdot p$$

La esperanza de X^2 es

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = n \cdot p \cdot q - (n \cdot p)^2$$

Varianza de una X B(n,p)

Su varianza es

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Su desviación típica es

$$\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

La distribución Binomila en Python y R

Caáculos binomila con R

Veamos los cálculos con funciones de R para una v.a. X con distribución binomial B(n=10,p=0.25)

Si queremos calculo con R algún valor de la función de distribución como por ejemplo $F_X(0) = P(X \leq 0)$

```r
pbinom(0,size = 10, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.05631351
```

si queremos por ejemplo $F_X(4) = P(X \leq 4)$

```r
pbinom(4, size = 10, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.9218731
```

Sin embargo, si queremos calcular algún valor de la función de probabilidad como por ejemplo $P(X = 0)$

```r
dbinom(0,size=10, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.05631351
```

o por ejemplo para $P(X = 4)$

```
dbinom(4, size=10, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.145998
```

Generación de muestras aleatorias con R

Generaremos una muestra eleatoria de 100 valores de una población B(20,0.5)

```
# Repetir 100 veces el experimento lanzar una moneda 20 veces y contar el número de caras.
set.seed(2021)
rbinom(100, size = 20, prob = 0.5)
```

```
##   [1] 10 12 11  9 11 11 11  9 12 15  6 12 11 10 12  8 10 12 14 10  8 14  9  9 10
##  [26] 13 13 13 14 12  6 14 14 13 10  8 13  8 13 10  8 12 10 14  8 12 13  5  6 12
##  [51] 10 11  7 10  9  8 10  9 12 12  6 10  7  9 12  7  7 11  9  6  6 11  7 13  7
##  [76] 10 10  9 11 16 10  9 14 11  9  8 15 12 10  9  8 11 13 10  8 13 11 11 12 11
```

Ejemplo completo de distribución binomial

Tenemos una urna con 100 bolas de las cuales 40 son rojas y 60 blancas. Extraemos al azar una bola, anotamos su color y la devolvemos (la reponemos) a la urna Supongamos que repetimos este proceso $n = 10$ reponiendo en cada ocación la bola extraida. Consideremos la v.a. $X =$ Número de bolas extraidas con repocisión en $n = 10$ repeticiones del mismo experimento Bernoulli. Bajo estas condiciones tenemos que repetimos $n = 10$ veces el mismo experimento Bernoulli con probabilidad de éxito (sacar bola roja) es

$$P(Roja) = P(Exito) = p = \frac{40}{100} = 0.4$$

Así que la variable $X =$ número de bolas rojas extraídas de la urna con reposición en $n = 10$ ocasiones sigue una ley binomial $B(n = 10, p = 0.4)$

1.¿Cual es la probabilidad de que saquemos exactamente 4 rojas?

Respuesta.- Utilizando la función de probabilidad tenemos que

$$P_X(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0.4^4 \cdot (1 - 0.4)^1 0.4 = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^6 = 0.2508227$$

```
dbinom(4, size = 10, prob = 0.4)
```

```
## [1] 0.2508227
```

2. ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos al menos 4 rojas?

Respuesta.- Al menos 4 rojas es $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$ es decir,

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \binom{10}{0} \cdot 0.4^0 \cdot (1 - 0.4)^{10-0} + \binom{10}{1} \cdot 0.4^1 \cdot (1 - 0.4)^{10-1} \\ &+ \binom{10}{2} \cdot 0.4^2 \cdot (1 - 0.4)^{10-2} + \binom{10}{3} \cdot 0.4^3 \cdot (1 - 0.4)^{10-3} \\ &= 0.3822806 \end{aligned}$$

```
pbinom(3,10,0.4)
```

```
## [1] 0.3822806
```

Así, $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.3822806 = 0.6177194$

```
1-pbinom(3,10,0.4)
```

```
## [1] 0.6177194
```

Aunque en estos casos el parámetro lower.tail = FALSE es sin duda nuestra mejor opción:

```
pbinom(3,10,0.4,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.6177194
```

3.- ¿Cuál es la porbabilidad de que saquemos menos 3 rojas?

4.- ¿Cuál es el valor esperado del número de bolas rojas?

Respuesta.- Como X es una $B(10, 0.4)$ sabemos que

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0.4 = 4$$

5.- ¿Cuál es la deviación típica del número de bolas rojas? La varianza es

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 2.4$$

Y por lo tanto $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{2.4} = 1.5491933$

Distribución geométrica

- Repitamos un experimento Bernoulli de parámetro p, de forma independiente hasta obtener el primer éxito.
- Sea X la v.a. que cuenta el número de fracasos antes del primer éxito. Por ejemplo que hayamos tenido x fracasos será una cadena de x fracasos culminada con un éxito. Más concretamente

$$P(FFF, \ldots FE) = P(F)^x \cdot P(E) = (1 - p)^x \cdot p = q^x \cdot p$$

Distribución geométrica

Su función de probabilidad es

$$PX_(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1 - p)^x \cdot p & si \quad x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La denotaremos por $Ge(p)$

Función de distribución

Calculemos $P(X \leq 3)$.

Por la propiedad de la probabilidad del suceso complementario tenemos que

$$P(X \leq 3) = 1 - P(x > 3) = 1 - P(X \geq 4)$$

Efectivamente, el evento tenemos que $X \leq 3$ es que hemos fracasado más de tres veces hasta conseguir el primer éxito; es decir hemos gracasado 4 o más veces, por lo tanto

$$X > 3 = X \geq 4 = FFFF$$

Ahora al ser los intentos sucesos independientes, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X>3) &= P(FFFF) = P(F)\cdot P(F)\cdot P(F)\cdot P(F) \\ &= (1-p)\cdot(1-p)\cdot(1-p)\cdot(1-p) = (1-p)^{3+1} \\ &= (1-p)^4 \end{aligned}$$

calculamos

$$F_X(3) = P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (1-p)^{3+1}$$

por lo que podemos generalizar a cualquier entero positivo $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1-(1-p) & si \quad k = 0 \leq x < 1 \\ 1-(1-p)^2 & si \quad k = 1 \leq x < 2 \\ 1-(1-p)^3 & si \quad k = 2 \leq x < 3 \\ 1-(1-p)^{k+1} & si \quad k \leq x < k+1 \; para \; k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

notemos que si $k = 0, 1, 2, \ldots$ el límite de la función de distribución es

$$\lim_{k\to\infty} F_X(k) = \lim_{k\to\infty} 1-(1-p)^{k+1} = 1$$

ya que $0 < 1-p < 1$

La esperanza y la varianza de una distribución geométrica.

Esperanza de una v.a. Ge(p)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (1-p)^x \cdot p \\ &= p\cdot(1-p)\cdot \sum_{x=1}^{\infty} x\cdot(1-p)^{x-1} \\ &= p\cdot(1-p)\cdot \frac{1}{[1-(1-p)]^2} \\ &= (1-p)\cdot\frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

Valor E(X^2) de una v.a. Ge(p)

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot P_X(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot (1-p)^x \cdot p \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} [x \cdot (x-1) + x] \, (1-p)^x \cdot p \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (x-1) \cdot (1-p)^x \cdot p + \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^x \cdot p \\
&= (1-p)^2 \cdot p \cdot \sum_{x=2}^{\infty} x \cdot (x-1) \cdot (1-p)^{x-2} \\
&+ (1-p) \cdot p \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x-1} \\
&= p \cdot (1-p)^2 \frac{2}{[1-(1-p)]^3} + (1-p) \cdot p \frac{1}{[1-(1-p)]^2} \\
&= p \cdot (1-p)^2 \frac{2}{p^3} + (1-p) \cdot p \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{2 \cdot (1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}
\end{aligned}
$$

Varianza de una v.a. Ge(p)

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \frac{2 \cdot (1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \\
&= \frac{2 \cdot (1-p)^2 + p \cdot (1-p) - (1-p)^2}{p^2} \\
&= \frac{(1-p)^2 + p \cdot (1-p)}{p^2} \\
&= \frac{1 - 2 \cdot pp^2 + p - p^2}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

Propiedad de falta de memoria

Sea X una v.a. discreta con dominio $D_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ con $P(X=0) = p$ entonces X sigue una ley $Ge(p)$ si y sólo si

$$P(X > k + j \mid X \geq j) = P(X > k)$$

para todo $k, j = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Es decir, el número de veces que voy a fallar hasta el primer éxito no está condicionado por las veces que estamos probando. Por ejemplo es lo mismo lanzar 80 veces o lanzar 2 veces hasta el primer éxito.

Demostración.- Si es geométrica entonces el lado derecho de la igualdad es

$$P(X > k) = 1 - P(x \leq k) = 1 - (1 - (1-p)^{k+1}) = (1-p)^{k+1}$$

Luego

$$\begin{aligned} P(X > k + j | X \geq j) &= \frac{P(\{X > k + j\}) \cap \{X \geq j\}}{P(X \geq j)} \\ &= \frac{P(X > k + j)}{P(> \geq j)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq k + j)}{1 - P(X \leq j - 1)} \\ &= \frac{1 - (1 - (1-p)^{k+j+1})}{1 - (1 - (1-p)^{k-1+1})} \\ &= \frac{(1-p)^{k+j+1}}{(1-p)^{j}} \\ &= (1-p)^{k+1} \end{aligned}$$

Para demostrar el recíproco tomemos $j = 1$ y $k \geq 0$ entonces por la propiedad de la pérdida de memoria

$$P(X > k + 1 | X \geq 1) = P(X > k)$$

Como sabemos $P(X = 0) = p$ tenemos $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p$

Luego combinando las igualdades tenemos que

$$P(X < k + 1 | X \geq 1) = \frac{P(X > k + 1, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X > k + 1)}{P(X \geq 1)} = P(X > k)$$

Así podemos poner que

$$\begin{aligned} P(X > k + 1) &= P(X \geq 1) \cdot P(X > k) \\ &= P(X < 1) \cdot P(X > k) \\ &= (1 - P(X = 0)) \cdot P(X > k) \\ &= (1 - p) \cdot P(X > k) \end{aligned}$$

En general tenemos que

$$P(X > k + 1) = (1 - p) \cdot P(X > k)$$

del mismo modo para $j = 2$

$$P(X > k + 2) = (1 - p) \cdot P(X > k + 1)$$

Restando la primera igualdad de la última obtenemos:

$$P(X > k + 1) - P(X > k + 2) = (1 - p) \cdot P(X > k) - (1 - p) \cdot P(X > k + 1)$$

de donde operando en cada lado de la igualdad obtenemos la recurrencia

$$[1 - P(X \leq k+1)] - [1 - P(X \leq k+2)] = (1-p) \cdot [P(X > k) - P(X > k+1)]$$

ahora operando

$$\begin{array}{rcl} P(X \leq k+2) - P(X \leq k+1) & = & (1-p) \cdot [1 - P(X \leq k) - (1 - P(X \leq k+1))] \\ P(X = k+2) & = & (1-p) \cdot [P(X \leq k+1) - P(X \leq k)] \\ P(X = k+2) & = & (1-p) \cdot P(X = k+1) \end{array}$$

De forma similar obtenemos
$$P(X = k+1) = (1-p) \cdot P(X = k)$$

Utilizando la recurrencia anterior para calcular todas las probabilidades a partir de la $P(X = 0) = p$; que vienen dadas por:

$$\begin{array}{rcl} P(X=0) & = & p \\ P(X=1) & = & P(X=0+1) = (1-p) \cdot P(X=0) = (1-p) \cdot p \\ P(X=2) & = & P(X=1+1) = (1-p) \cdot P(X=1) = (1-p) \cdot (1-p) \cdot p = (1-p)^2 \cdot p \\ P(X=k) & = & P(X=(k-1)+1) = (1-p) \cdot P(X=k+1) = (1-p) \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = (1-p)^k \cdot p \end{array}$$

Lo que demuestra el recíproco, es decir que X es Geom(p).

La distribución geométrica con R y Python