

Límites y continuidad

Definición 1.1 (La razón promedio de cambio) de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ sabiendo que $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

1.1. Ejercicios

Razones promedio de cambio

En los ejercicios 1 a 6, determine la razón promedio de cambio de la función en el intervalo o intervalos dados.

1. $f(x) = x^3 + 1$

a) $[2, 3]$

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3^3 + 1) - (2^3 + 1)}{3 - 2} = 19$

b) $[-1, 1]$

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1^3 + 1) - ((-1)^3 + 1)}{1 - (-1)} = 1$

2. $g(x) = x^2 - 2x$

a) $[1, 3]$

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3^2 - 2 \cdot 3) - (1^2 - 2 \cdot 1)}{3 - 1} = 2$

b) $[-2, 4]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(4^2 - 2 \cdot 4) - ((-2)^2 - 2 \cdot (-2))}{4 - (-2)} = 0$$

3. $h(t) = \cot t$ (a) $[\pi/4, 3\pi/4]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(\pi/4) - \cot(3\pi/4)}{\pi/4 - 3\pi/4} = \frac{1 + 1}{\frac{\pi - 3\pi}{4}} = \frac{8}{-2\pi}$$

(b) $[\pi/6, \pi/2]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(\pi/6) - \cot(\pi/2)}{\pi/6 - \pi/2} = \frac{-3\sqrt{3}}{\pi}$$

4. $g(t) = 2 + \cos t$ (a) $[0, \pi]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{2 + \cos \pi - (2 + \cos 0)}{\pi - 0} = -\frac{2}{\pi}$$

(b) $[-\pi, \pi]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{2 + \cos \pi - (2 - \cos \pi)}{\pi + \pi} = \frac{3 - 3}{2\pi} = 0$$

5. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$; $[0, 2]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 1 - (\sqrt{4 \cdot 0 + 1} + 1)}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$$

6. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - (1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5)}{2 - 1} = 0$$

Pendiente de una curva en un punto

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar a) la pendiente de la curva en el punto P dado, y b) la ecuación de la recta tangente en P

7. $y = x^2 - 5$, $P(2, -1)$

- a) Iniciamos con una recta secante que pasa por el punto $(2, -1)$ y el punto cercano $(2 + h, (2 + h)^2 - 5)$, luego hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^2 - 5 - (2^2 - 5)}{2 + h - 2} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

Luego aproximamos h a 0 siendo la pendiente $m = 4$.

- b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y = mx + c$ de donde $y = 4x + c$, luego reemplazamos $(2, -1)$, quedándonos $-1 = 4 \cdot 2 + c \implies c = -9$. Por lo tanto

$$y = 4x - 9$$

8. $y = 7 - x^2$, $P(2, 3)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2, 3)$ y el punto cercano $Q[2 + h, 7 - (2 + h)^2]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - (2 + h)^2 - (7 - 2^2)}{2 + h - 2} = \frac{7 - (2 + h)^2 - 3}{h} = \frac{h(-h - 4)}{h} = -h - 4$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $-h - 4$ se aproxima a -4 . Tomamos -4 como la pendiente de la parábola en P .

- b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y = mx + c$ de donde $y = -4x + c$, luego reemplazamos $(2, 3)$, así $3 = -4(2) + c \implies c = 11$. Por lo tanto

$$y = -4x + 11$$

9. $y = x^2 - 2x - 3$, $P(2, -3)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2, -3)$ y el punto cercano $Q[2 + h, (2 + h)^2 - 2(2 + h) - 3]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^2 - 2(2 + h) - 3 - (-3)}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h + 2$ se aproxima a 2. Tomamos 2 como la pendiente de la parábola en P .

- b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y = mx + c$ de donde $y = 2x + c$, luego reemplazamos $(2, -3)$, así $-3 = 2(2) + c \implies c = -7$. Por lo tanto

$$y = 2x - 7$$

10. $y = x^2 - 4x$, $P(1, -3)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(1, -3)$ y el punto cercano $Q [1 + h, (1 + h)^2 - 4(1 + h)]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + h)^2 - 4(1 + h) - (-3)}{1 + h - 1} = \frac{h^2 - 2h}{h} = h - 2$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h - 2$ se aproxima a -2 . Tomamos -2 como la pendiente de la parábola en P .

- b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y - y_1 = m(x - x_1) \implies y = -2(x - 1) + (-3) \implies y = -2x + 2 - 3$$

por lo tanto

$$y = -2x - 1$$

11. $y = x^3$, $P(2, 8)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2, 8)$ y el punto cercano $Q [2 + h, (2 + h)^3]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^3 - 8}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h} = h^2 + 6h + 12$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 6h + 12$ se aproxima a 12. Tomamos 12 como la pendiente de la parábola en P .

- b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 12(x - 2) + 8 \implies y = 12x - 24 + 8$$

por lo tanto

$$y = 12x - 16$$

12. $y = 2 - x^3$, $P(1, 1)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(1, 1)$ y el punto cercano $Q [1 + h, 2 - (1 + h)^3]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (1 + h)^3 - 1}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = h^2 + 3h + 3$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h + 3$ se aproxima a 3. Tomamos 3 como la pendiente de la parábola en P .

b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 3(x - 1) + 1 \implies y = 3x - 3 + 1$$

por lo tanto

$$y = 3x - 2$$

13. $y = x^3 - 12x$, $P(1, -11)$

a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(1, -11)$ y el punto cercano $Q[1 + h, (1 + h)^3 - 12(1 + h)]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + h)^3 - 12(1 + h) + 11}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 - 9h}{h} = h^2 + 3h - 9$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h - 9$ se aproxima a -9 . Tomamos -9 como la pendiente de la parábola en P .

b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = -9(x - 1) - 11 \implies y = -9x + 9 - 11$$

por lo tanto

$$y = -9x - 2$$

14. $y = x^3 - 3x^2 + 4$, $P(2, 0)$

a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2, 0)$ y el punto cercano $Q[2 + h, (2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4 - 0}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 3h^2}{h} = h^2 + 3h$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h$ se aproxima a 0. Tomamos 0 como la pendiente de la parábola en P .

b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 0(x - 2) - 0$$

por lo tanto

$$y = 0$$

Razones instantáneas de cambio

- 15.** Rapidez de un automóvil. La siguiente figura muestra la gráfica tiempo-distancia de un automóvil deportivo que acelera desde el reposo.

- a) Determine las pendientes de la secante PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4 , ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(10, 220)$	$\frac{650 - 220}{20 - 10} = 43$
$Q_2(14, 380)$	$\frac{650 - 380}{20 - 14} = 45$
$Q_3(17, 480)$	$\frac{650 - 480}{20 - 16} = 43$
$Q_4(17, 550)$	$\frac{650 - 550}{20 - 18} = 50$

Los resultados anteriores son redondeados.

- b) Después estime la rapidez del automóvil para el tiempo $t = 20s$.

Respuesta.- Tomamos el punto mas cercano a P , en este caso Q_4 de donde la velocidad vendrá dado aproximadamente por $50m/s$.

- 16.** La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia de caída libre contra el tiempo para un objeto que cae desde un módulo espacial que se encuentra a una distancia de 80 m de la superficie de la Luna.

- a) Estime las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4 , ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(5, 20)$	$\frac{80 - 20}{10 - 5} = 12$
$Q_2(7, 38)$	$\frac{80 - 38}{10 - 7} = 14$
$Q_3(8,5, 56)$	$\frac{80 - 56}{10 - 8,5} = 16$
$Q_4(9,5, 71)$	$\frac{80 - 71}{10 - 9,5} = 18$

- b) ¿Cuál será la rapidez aproximada del objeto cuando choca con la superficie de la Luna?

Respuesta.- Será de $18m/s$.

- 17.** En la siguiente tabla se registran las utilidades de una pequeña empresa en cada uno de sus primeros cinco años de operación:

- a) Trace los puntos que representan las utilidades como una función del año, y únalos mediante una curva suave.
- b) ¿Cuál es la razón promedio de incremento de las utilidades entre 2012 y 2014?

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{175 - 63}{2014 - 2012} = 56$

- c) Use su gráfica para estimar la razón a la que cambiaron las utilidades en 2012.

Respuesta.- Sea $\frac{63 - 26}{2012 - 2011} = 37$ y $\frac{112 - 63}{2013 - 2012} = 49$ entonces $\frac{37 + 49}{2} = 43$.

- 18.** Elabore una tabla de valores para la función $F(x) = (x+2)/(x-2)$ en los puntos $x = 1,2, x = 11/10, x = 101/100, x = 1001/1000, x = 10001/10000$ y $x = 1$

x	1,2	11/10	101/100	1001/1000	10001/10000	1
$F(x)$	-4	-31/9	-301/99	3001/999	30001/9999	-3

- a) Determine la razón promedio de cambio de $F(x)$ en los intervalos $[1, x]$ para cada $x \neq 1$ de su tabla.
- b) Si es necesario, amplíe su tabla para intentar determinar la razón de cambio de $F(x)$ en $x = 1$.

- 19.** Sea $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$

- a) Obtenga la razón promedio de cambio de $g(x)$ con respecto a x en los intervalos $[1, 2], [1, 1,5], [1, 1+h]$

Respuesta.- Para $[1, 2]$ se tiene $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$.

Para $[1, 1,5]$ se tiene $\frac{\sqrt{1,5} - 1}{1,5 - 1} = \frac{\sqrt{1,5} - 1}{0,5}$.

Para $[1, 1+h]$ se tiene $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1+h} - 1}{1+h-1} = \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$.

- b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de g con respecto a x en el intervalo $[1, 1+h]$ para algunos valores de h cercanos a cero, digamos, $h = 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001$ y $0,000001$.

Respuesta.-

h	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0,488	0,4987	0,4998	0,49998	0,499998	0,4999998

- c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de $g(x)$ con respecto a x en $x = 1$?

Respuesta.- 0.5

- d) Calcule el límite, cuando h se aproxima a cero, de la razón promedio de cambio de $g(x)$ con respecto a x en el intervalo $[1, 1+h]$.

Respuesta.- 0.5

20. Sea $f(t) = 1/t$ para $t \neq 0$.

- a) Obtenga la razón promedio de cambio de f con respecto a t en los intervalos *i.* de $t = 2$ a $t = 3$, y *ii.* de $t = 2$ a $t = T$.

Respuesta.- Para *i.* se tiene $\frac{\Delta y}{\text{triangle } x} = \frac{1/3 - 1/2}{3 - 2} = -\frac{1}{6}$. Para *ii.* se tiene $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1/T - 1/2}{T - 2} = \frac{2 - T}{2T(T - 2)}$

- b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de f con respecto a t en el intervalo $[2, T]$ para algunos valores de T cercanos a 2, digamos, $T = 2,1, 2,01, 2,001, 2,0001, 2,00001, 2,000001$.

Respuesta.-

$2,1$	$2,01$	$2,001$	$2,0001$	$2,00001$	$2,000001$
$-0,238$	$-0,2487$	$-0,2498$	$-0,24998$	$-0,24999$	$-0,25$

- c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de f con respecto a t en $t = 2$?

Respuesta.- -0.25.

- d) Calcule el límite, cuando T se aproxima a 2, de la razón promedio de cambio de f con respecto a t en el intervalo de 2 a T . Tendrá que hacer algo de álgebra antes de que pueda sustituir $T = 2$.

Respuesta.- Por la parte a), *ii.* tenemos $\frac{2 - T}{2T(T - 2)}$ de donde $-\frac{1}{2T}$ y por lo tanto $-\frac{1}{4}$.

21. La siguiente gráfica muestra la distancia total s , que recorre un ciclista después de t horas.

- a) Estime la velocidad promedio del ciclista en los intervalos de tiempo $[0, 1]$, $[1, 2,5]$ y $[2,5, 3,5]$.

Respuesta.-

$[0, 1]$	$[1, 2,5]$	$[2,5, 3,5]$
15	3,33	10

- b) Estime la velocidad instantánea del ciclista en los tiempos $t = \frac{1}{2}$, $t = 2$ y $t = 3$. Respuesta.-

$\frac{1}{2}$	2	3
$\frac{12}{12}$	0	4

- c) Estime la velocidad máxima del ciclista y el tiempo específico en que ésta se registra.

Respuesta.- Tenemos la velocidad máxima dada por $\frac{30 - 20}{3,5 - 3} = 20$ en la hora 3,5.

- 22.** La siguiente gráfica muestra la cantidad total de gasolina A en el tanque de un automóvil después de conducirlo t días.

- a) Estime la razón promedio del consumo de gasolina en los intervalos de tiempo $[0, 3]$, $[0, 5]$ y $[7, 10]$.

Respuesta.-

$[0, 3]$	$[0, 5]$	$[7, 10]$
$-5/3$	$-2,24$	$0,5$

- b) Estime la razón instantánea de consumo de gasolina en los tiempos $t = 1$, $t = 4$ y $t = 8$. Respuesta.-

1	4	8
-1	-4	$-1/2$

- c) Estime la razón máxima de consumo de gasolina y el tiempo específico en que ésta se registra.

Respuesta.- con una razón de -4 , en el día 4.

1.2. Límites de una función y leyes de los límites

Teorema 1.1 Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. Regla de la suma: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = L + M$

2. Regla de la diferencia: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. Regla del múltiplo constante: $\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$

4. Regla del producto: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

5. Regla del cociente: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{L}{M}, M \neq 0$

6. Regla de la potencia: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n, n$ es un entero positivo

7. Regla de la raíz: $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}, n$ es un entero positivo.

Teorema 1.2 (Límites de las funciones polinomiales) Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ entonces,

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

Teorema 1.3 (Límites de las funciones racionales) Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, y $Q(c) \neq 0$, entonces,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Teorema 1.4 (El teorema del sándwich) Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c , excepto posiblemente en $x = c$. Suponga también que

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

entonces $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Teorema 1.5 Si $f(x) \leq g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c , excepto posiblemente en $x = c$, y los límites de f y g cuando x se aproxima a c , entonces,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

1.2. Ejercicios

Límites a partir de gráficas

1. Para la función $g(x)$ cuya gráficas a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Respuesta.- No existe. Cuando x se aproxima a 1 por la derecha, $g(x)$ se aproxima a 0. Cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, $g(x)$ se aproxima a 1. No hay un número único L para el que todos los valores de $g(x)$ estén arbitrariamente cerca cuando $x \rightarrow 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$.

c) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow 2,5} g(x) = 0,5$.

2. Para la función $f(t)$ cuya gráfica aparece a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a) $\lim_{t \rightarrow -2} f(t) = 0$.

b) $\lim_{t \rightarrow -1} f(t) = -1$.

c) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$.

d) $\lim_{t \rightarrow -0,5} f(t) = -1.$

3. ¿Cuáles de los siguientes enunciados acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe.

Respuesta.- Verdadero.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Respuesta.- Verdadero.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Respuesta.- Falso.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Respuesta.- Falso.

e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

Respuesta.- Falso.

f) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe en todos los puntos c en $(-1, 1)$

Respuesta.- Verdadero.

g) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe.

Respuesta.- Verdadero.

4. ¿Cuáles de los siguientes enunciados acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe.

Respuesta.- Falso.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

Respuesta.- Falso.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe.

Respuesta.- Verdadero.

d) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe en todos los puntos c en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Verdadero.

e) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe en todos los puntos c en $(1, 3)$.

Respuesta.- Verdadero.

Existencia de límites

En los ejercicios 5 y 6, explique por qué los límites no existen.

5.