# 1

# Límite, continuidad de la función

## 1.1. Limite de la magnitud variable, variable infinitamente grande

**Definición 1.1** *El número constante a se denomina límite de la variable $x$, si para cualquier número infinitesimal positivo $\epsilon$ prefijado, se puede indicar tal valor de la variable $x$, a partir del cual todos los valores posteriores de la misma satisfacen la desigualdad:*

$$|x - a| < \epsilon$$

*Si el número a es el límite de la variable $x$, se dice que $x$ tiende al límite $a$; su notación es:*

$$x \longrightarrow a \quad \text{ó} \quad \lim x = a$$

*En términos geométricos la definición de limite puede enunciarse así: El número constante a es el limite de la variable $x$, si para cualquiera vecindad infinitesimal prefijada de radio $\epsilon$ y centro en el punto $a$, existe un valor de $x$ tal que todo los puntos correspondientes a los valores posteriores de la variable se encuentren dentro de la misma vecindad.*

**Teorema 1.1** *Una magnitud variable no puede tener dos límites.*

*Demostración.-* *En efecto, si* $\lim x = a$ *y* $\lim x = b(a < b)$, *entonces* $x$ *debe satisfacer las dos desigualdades simultáneamente:* $|x - a| < \epsilon$ *y* $|x - b| < \epsilon$ *siendo* $\epsilon$ *arbitrariamente pequeño, pero esto es imposible, si* $\epsilon < \dfrac{b-a}{2}$

**Definición 1.2** *La variable $x$ tiende al infinito, si para cualquier número positivo $M$ prefijado se puede elegir un valor de $x$ tal que, a partir de él todos los valores posteriores de la variable satisfagan la desigualdad $|x| > M$.*
*La variable $x$ que tiende al infinito, se denomina infinitamente grande y esta tendencia se expresa así:* $x \longrightarrow \infty$.

## 1.2. Limite de la función

**Definición 1.3** *Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida en determinada vecindad del punto $a$ en ciertos puntos de la misma.*
*La función $y = f(x)$ tiende al límite $b$ $(y \to b)$ cuando $x$ tienda a $a$ $(x \to a)$, si para cada número positivo $\epsilon$, por pequeño que éste sea, es posible indicar un número positivo $\delta$ tal que para todos los valores $x$, diferentes de $a$, que satisfacen la desigualdad: $|x - a| < \delta$ , se verificará la desigualdad:*

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

*Si $b$ es el límite de la función $f(x)$, cuando $x \to a$, su notación es:*

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

*o bien $f(x) \to b$, cuando $x \to a$.*
*Si la variable $y = f(x)$ tiende a un límite $b$, cuando $x$ tiende a $a$, escribimos:*

$$\lim_{xtoa} f(x) = b$$

**Definición 1.4** *La función $f(x)$ tiende al límite $b$ cuando $x \to \infty$, si para cualquier número positivo $\epsilon$ arbitrariamente pequeño existe un número positivo $N$ tal que para todos los valores de $x$ que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, se cumpla la desigualdad*

$$|f(x) - b| < \epsilon.$$

## 1.3. Función que tiende al infinito. Funciones acotadas

**Definición 1.5** *La función $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \to a$, es decir, es una magnitud infinitamente grande cuando $x \to a$, si para cualquier número positivo $M$, por grande que sea, existe un valor $\delta > 0$ tal que para todos los valores de $x$ diferentes de $a$ y que satisfacen la condición $|x - a| < \delta$, se cumpla la desigualdad $|f(x)| > M$.*
*Si $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \to a$, se escribe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

**Definición 1.6** *La función $y = f(x)$ se denomina acotada en el dominio dado de variación del argumento $x$, si existe un número positivo $M$ tal que para todos los valores de $x$ pertenecientes al dominio considerado se cumpla la desigualdad $|f(x)| \leq M$. Si el número $M$ no existe, se dice que la función $f(x)$ no está acotada en el dominio dado.*

**Definición 1.7** *La función $f(x)$ se denomina acotada, cuando $x \to a$, si existe una vecindad con centro en el punto $a$ en la cual dicha función está acotada.*

**Definición 1.8** *La función $y = f(x)$ se denomina acotada, cuando $x \to \infty$, si existe un número $N > 0$ tal que para todos los valores de $x$ que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, la función $f(x)$ esté acotada.*

**Teorema 1.2** *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = b$, *siendo* $b$ *un número finito, la función* $f(x)$ *está acotada cuando* $x \to a$.

*Demostración.- Por definición de límite se deduce que para* $\epsilon > 0$ *existe un número* $\delta$ *tal que* $a - \delta < x < a + \delta$ *se cumple la desigualdad*

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

*es decir*

$$|f(x)| < |b| + \epsilon$$

.

**Teorema 1.3** *Si* $\lim_{x \to a} f(x) - b \neq 0$, *la función* $y = \dfrac{1}{f(x)}$ *está acotada, cuando* $x \to a$.

*Demostración.- De la hipótesis del teorema se deduce que para cualquier* $\epsilon > 0$ *arbitrario, en cierta vecindad del punto* $x = a$ *tendremos:* $|f(x) - b| < \epsilon$, *ó* $||f(x)| - |b|| < \epsilon$, *ó* $-\epsilon < |f(x)| - |b| < \epsilon$ *ó* $|b| - \epsilon < |f(x)| < |b| + \epsilon$. *De las últimas desigualdades se deduce:*

$$\frac{1}{|b| - \epsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \epsilon}$$

*Al tomar, por ejemplo,* $\epsilon = \dfrac{1}{10}|b|$ *tenemos*

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}.$$

*lo que significa que la función* $\dfrac{1}{f(x)}$ *está acotada.*

## 1.4. Infinitesimales y sus principales propiedades

**Definición 1.9** *La función* $\alpha = \alpha(x)$ *se denomina infinitamente pequeña (infinitesimal), cuando* $x \to a$ *o cuando* $x \to \infty$, *si* $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$ *ó* $\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$

**Teorema 1.4** *Si la función* $y = f(x)$ *puede ser representada como suma del número constante* $b$ *y la magnitud infinitamente pequeña* $\alpha$:

$$y = b + \alpha$$

*se tiene que*

$$\lim y = b \text{ (cuando } x \to a \text{ ó } x \to \infty)$$

*Recíprocamente, si* $\lim y = b$, *se puede escribir* $y = b + \alpha$, *de donde* $\alpha$ *es una magnitud infinitamente pequeña.*

*Demostración.- De la igualdad se deduce que* $|y - b| = |\alpha|$. *Pero cuando epsilon es arbitrario todos los valores de* $\alpha$, *a partir de uno de ellos, satisfacen la desigualdad* $|\alpha| < \epsilon$; *entonces, para todos los valores de* $y$, *a partir de alguno de ellos, se cumplirá la desigualdad* $|y - b| < \epsilon$, *lo que significa que* $\lim y = b$.
*Recíprocamente: si* $\lim y = b$, *entonces para epsilon arbitrario para todos los valores de* $y$, *a partir de uno de ellos, se verificará la desigualdad* $|y - b| < \epsilon$. *Pero, si designamos* $y - b = \alpha$, *entonces para todos los valores de* $\alpha$, *a partir de alguno de ellos, tendremos* $|\alpha| < \epsilon$, *de lo que significa que* $\alpha$ *es una magnitud infinitamente pequeña.*

**Teorema 1.5** *Si $\alpha = \alpha(x)$ tiende a cero, cuando $x \to a$ (o cuando $x \to \infty$), sin reducirse a cero, se tendrá que $y = \dfrac{1}{\alpha}$ tiende a infinito.*

*Demostración.- Por grande que sea $M > 0$ se cumplirá la desigualdad $\dfrac{1}{|\alpha|} > M$, siempre que se cumpla $|\alpha| > \dfrac{1}{M}$. La última desigualdad se cumplirá para todos los valores de $\alpha$, a partir de algunos de ellos, puesto que $\alpha(x) \to 0$.*

**Teorema 1.6** *La suma algebraica de dos, tres o un número determinado de infinitesimales es una función infinitamente pequeña.*

*Demostración.- Nos limitaremos a dos sumando ya que la demostración es análoga para cualquier número de ellos.*
*Supongamos que $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, donde $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$. Demostraremos que para cualquier $\epsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, se encontrará $\delta > 0$ tal que, al satisfacer la desigualdad $|x - a| < \delta$, se verifica $|u| < \epsilon$. Puesto que $\alpha(x)$ es una magnitud infinitamente pequeña se encontrará $\delta$ tal que en la vecindad de radio $\delta_1$ y centro ubicado en el punto $a$, se verificará, también $|\alpha(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$.*
*Luego puesto que $\beta(x)$ es una magnitud infinitamente pequeña, en la vecindad del punto $a$ de radio $\delta_2$ tendremos $|\beta(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$.*
*Tomemos $\delta$ igual a la menor de las magnitudes $\delta_1$ y $\delta_2$. Entonces, en la vecindad del punto $a$ de radio $\delta$ se cumplirán las desigualdades $|\alpha| < \dfrac{\epsilon}{2}$; $|\beta| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Por tanto, en esta vecindad tendremos:*

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

*es decir, $|u| < \epsilon$, lo que se trataba de demostrar.*
*De modo análogo se demuestra el caso:*

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \beta(x) = 0$$

**Teorema 1.7** *El producto de una función infinitamente pequeña $\alpha = \alpha(x)$ por una función acotada $z = z(\alpha)$, cuando $x \to a$ ó $x \to \infty$ es una magnitud (Función) infinitamente pequeña.*

*Demostración.- Demostremos el teorema para el caso en que $x \to a$. Dado un número $M > 0$, se encontrará tal vecindad del punto $x = a$ en la que se verificará la desigualdad $|z| < M$. Para cualquier $\epsilon > 0$ se encontrará una vecindad en la que se cumplirá la desigualdad $|\alpha| < \dfrac{\epsilon}{M}$. En la menor de estas dos vecindades se cumplirá la desigualdad*

$$|\alpha z| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon.$$

*Esto quiere decir que $\alpha z$ es una magnitud infinitamente pequeña. Se demuestra análogamente para $x \to \infty$.*

**Corolario 1.1** *Si $\lim \alpha = 0$ y $\lim \beta = 0$, entonces $\lim \alpha\beta = 0$, puesto que $\beta(x)$ es una magnitud acotada. Esto se cumple para cualquier número finito de factores.*

**Corolario 1.2** *Si $\lim \alpha = 0$ y $c = const$, entonces $\lim c\alpha = 0$.*

**Teorema 1.8** *El cociente* $\dfrac{\alpha(x)}{z(x)}$ *de la división de una magnitud infinitamente pequeña* $\alpha(x)$ *por una función, cuyo límite es diferente de cero, es una magnitud infinitamente pequeña.*

*Demostración.- Supongamos que* $\lim \alpha(x) = 0$ *y* $\lim x(x) = b \neq 0$*. Basándose en el teoremas se deduce que* $dfrac1z(\alpha)$ *es una magnitud acotada. Por consiguiente la fracción* $\dfrac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x)\dfrac{1}{z(x)}$ *es el producto de una magnitud infinitamente pequeña por otra acotada, es decir, una infinitesimal.*

## 1.5. Teoremas fundamentales sobre limites