1

Algunas distribuciones discretas de probabilidad

1.2. La distribución binomial

Llámese éxito a la ocurrencia del evento y fracaso a su no ocurrencia.

Las dos suposiciones claves para la distribución binomial son:

I. La probabilidad de éxito p permanece constante para cada ensayo.

II. Los n ensayos son independientes entre sí.

Para obtener la función de probabilidad de la distribución binomial, primero se determina la probabilidad de tener, en n ensayos, x éxitos consecutivos seguidos de n-x fracasos consecutivos. Dado que, por hipótesis, los n ensayos son independientes de la definición 2.15, se tiene:

$$p \cdot p \cdots p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p) = p^x (1-p)^{n-x}$$

Definición 1.1 (Distribución binomial con función de probabilidad) *Sea X una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n ensayos y p la probabilidad de éxito con cualquiera de éstos. Se dice entonces que X tiene una distribución binomial con función de probabilidad.*

$$p(x;n,p) \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\dots,n. \\ \\ 0 \text{ para cualquier otro valor.} & 0 \le p \le 1. \text{ para } n \text{ entero.} \end{cases}$$

El nombre distribución binomial proviene del hecho de que los valores de $p(x;n,p)$ para $x = 1,2,\dots,n$ son los términos sucesivos de la expansión binomial de $[(1-p)+p]^n$; esto es,

$$\begin{aligned} [(1-p)+p]^n &= (1-p)^n + n(1-p)^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}(1-p)^{n-2}p^2 + \cdots + p^n \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(x-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} p(x;n,p) \end{aligned}$$

Pero dado que $[(1-p)+p]^n = 1$ y $p(x;n,p) \geq 0$ para $x = 0,1,2,\dots n$, este hecho también verifica que $p(x;n,p)$ es una función de probabilidad.

La probabilidad de que una variable aleatoria X sea menor o igual a un valor específico de x, se determina por la **función de distribución acumulativa**.

$$P(X \leq x) = F(x; n, p) = \sum_{i=0}^{x} n \to i P^i (1-p)^{n-1}$$