

Conceptos en probabilidad

Definición 1.1 Si un experimento que está sujeto al azar resulta de n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes y si n_A de estos resultados tienen un atributo A , la probabilidad de A es la proporción de n_A co respecto a n .

Definición 1.2 Si un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_B de los resultados son favorables a un atributo B , el límite de n_B/n conforme n se vuelve grande, se define como la probabilidad del atributo B .

Definición 1.3 El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio recibe el nombre de espacio muestral.

1.5. Desarrollo axiomático de la probabilidad

Definición 1.4 Se dice que un espacio muestral es discreto si su restado puede ponerse en una correspondencia uno a uno con el conjunto de los enteros positivos.

Definición 1.5 Se dice que un espacio muestral es continuo si sus resultados consisten de un intervalo de números reales.

Definición 1.6 un evento del espacio muestral es un grupo de resultados contenidos en éste, cuyos miembros tienen una característica en común.

Definición 1.7 El evento que contiene a ningún resultado del espacio muestral recibe el nombre de evento nulo o vacío.

Definición 1.8 El evento formado por todos los posibles resultados en E_1 o E_2 o en ambos, recibe el nombre de unión de E_1 y E_2 y se denota por $E_1 \cup E_2$.

Definición 1.9 El evento formado por todos los resultados comunes tanto a E_1 como a E_2 recibe el nombre de intersección de E_1 y E_2 y se denota por $E_1 \cap E_2$.

Definición 1.10 Se dice que los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes o disjuntos si no tienen resultados en común; en otras palabras $E_1 \cap E_2 = \emptyset =$ evento vacío.

Definición 1.11 Si cualquier resultado de E_2 también es un resultado de E_1 , se dice que el evento E_2 está contenido en E_1 , y se denota por $E_2 \subset E_1$

Definición 1.12 El complemento de un evento E con respecto al espacio muestral S , es aquel que contiene a todos los resultados de S que no se encuentran en E , y se denota por \bar{E} .

Definición 1.13 Sean S cualquier espacio muestral y E cualquier evento de éste. Se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral S a $P(E)$ si satisface los siguientes axiomas:

1. $P(E) \geq 0$.
2. $P(S) = 1$.
3. Si, para los eventos E_1, E_2, E_3, \dots $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ entonces

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$$

Teorema 1.1 $P(\emptyset) = 0$.

Demostración.-

$$S \cup \emptyset = S \quad \text{y} \quad S \cap \emptyset = \emptyset.$$

por el axioma 3,

$$P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset);$$

pero por el axioma 2, $P(S) = 1$, y de esta manera $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 1.2 Para cualquier evento $E \subset S$, $0 \leq P(E) \leq 1$.

Demostración.- Por el axioma 1, $P(E) \geq 0$; de aquí sólo es necesario probar que $P(E) \leq 1$.

$$E \cup \bar{E} = S \quad \text{y} \quad E \cap \bar{E} = \emptyset.$$

Por los axiomas 2 y 3,

$$P(E \cup \bar{E}) = P(E) + P(\bar{E}) = P(S) = 1;$$

dado que $P(\bar{E}) \geq 0$, $P(E) \leq 1$.

Teorema 1.3 Sea S un espacio muestral que contiene a cualesquiera dos eventos A y B ; entonces,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

1.6. Probabilidad conjunta, marginal y condicional

Definición 1.14 Sean A y B cualesquiera dos eventos que se encuentran en un espacio muestral S de manera tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A al ocurrir el evento B , es el cociente de la probabilidad conjunto de A y B con respecto a la probabilidad marginal de B ; de esta manera se tiene

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \quad (1.1)$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \quad (1.2)$$

La definición 2.14 puede extenderse para incluir cualquier número de eventos que se encuentren en el espacio muestral. Por ejemplo, puede demostrarse que para tres eventos A, B y C

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}, \quad P(B \cap C) > 0. \quad (1.3)$$

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}, \quad P(C) > 0. \quad (1.4)$$

1.7. Eventos estadísticamente independientes

Definición 1.15 Sean A y B dos eventos cualesquiera de un espacio muestral S . Se dice que el evento A es estadísticamente independiente del evento B si $P(A|B) = P(A)$.

$$P(A|B) = P(A)$$

Definición 1.16 Los eventos A_1, A_2, \dots, A_k de un espacio muestral S son estadísticamente independientes si y sólo si la probabilidad conjunta de cualquier $2, 3, \dots, k$ de ellos es igual al producto de sus respectivas probabilidades marginales.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

1.8. El teorema de Bayes

Teorema 1.4 Si B_1, B_2, \dots, B_n son n eventos mutuamente excluyentes, de los cuales uno debe ocurrir, es decir $\sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$ entonces,

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)} \quad (1.5)$$

1.9. Ejercicios

2.2. Demostración.- sabiendo que $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$, entonces

$$\frac{P(A|B)}{P(A)} + \frac{P(\bar{A}|B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

2.3. Demostración.- Supongamos que los eventos A y B son no vacíos, por definición de evento independientes y mutuamente excluyentes tenemos que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \neq 0$$

Luego se cumple que dos eventos independientes son, también mutuamente excluyentes si por lo menos uno de los eventos es vacío.