1

Espacios vectoriales

1.1 Espacios vectoriales

Definición 1.1 Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) consta de lo siguiente:

1. Un cuerpo F de escalares;
2. un conjunto V de objetos llamados vectores;
3. una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores α, β de V un vector $\alpha + \beta$ de V, que se llama suma de α y β, de tal modo que:
   (a) La adición es conmutativa, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
   (b) la adición es asociativa, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
   (c) existe un único vector 0 de V, llamado vector nulo tal que $\alpha + 0 = \alpha$, para todo α de V;
   (d) para cada vector α de V existe un vector $-\alpha$ de V, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$;
4. una regla (u operación) llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar c de F y cada vector α de V a un vector $c\alpha$ en V, llamado producto de c y α, de tal modo que:
   (a) $1\alpha = \alpha$ para todo α de V;
   (b) $(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$;
   (c) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$;
   (d) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

Ejemplo 1.1 **El espacio de n-tuplas, F_n.** Sea F cualquier cuerpo y sea V el conjunto de todos los n-tuples $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de escalares x_i de F. Si $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ con y_i de F, la suma de α y β se define por

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{1.1}$$

El producto de un escalar c y el vector α se define por

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n). \tag{1.2}$$

Que esta adición vectorial y multiplicación escalar cumplen las condiciones (3) y (4) es fácil de verificar, usando las propiedades semejantes de la adición y multiplicación de elementos de F. ■

Ejemplo 1.2 **El espacio de matrices $m \times n$, $F^{m\times n}$.** Sea F cualquier cuerpo y sean m y n enteros positivos. Sea $F^{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices $m \times n$ sobre el cuerpo F. La suma de dos vectores A y B en $F^{m\times n}$ se define por

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \tag{1.3}$$

El producto de un escalar c y de la matriz A se define por

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}. \tag{1.4}$$

Obsérvece que $F^{i\times n} = F^n$. ■

Ejemplo 1.3 **El espacio de funciones de un conjunto en un cuerpo.** Sea F cualquier cuerpo y sea S cualquier conjunto no vacío. Sea V el conjunto de todas las funciones de S en F. La suma de dos vectores f y g de V es el vector $f+g$; es decir, la función de S en F defina por

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s). \tag{1.5}$$

El producto del escalar c y la función f es la función cf definida por

$$(cf)(s) = cf(s). \tag{1.6}$$

Para este tercer ejemplo se indica cómo se puede verificar que las operaciones definidas satisfacen las condiciones (3) y (4). Para la adición vectorial:

(a) Como la adición en F es conmutativa,

$$f(s) + g(s) = g(s) + f(s)$$

para todo s de S, luego las funciones $f+g$ y $g+f$ son idénticas.

(b) Como la adición en F es asociativa,

$$f(s) + [g(s) + h(s)] = [f(s) + g(s)] + h(s)$$

para todo s, luego $f + (g+h)$ es la misma función que $(f+g)+h$.

(c) El único vector nulo es la función cero, que asigna a cada elemento de S el escalar 0 de F.

(d) Para todo f de V, $(-f)$ es la función dada por

$$(-f) = -f(s).$$

El lector encontrará fácil verificar que la multiplicación escalar satisface las condiciones de (4), razonando como se hizo para la adición vectorial.

■

Ejemplo 1.4 **El espacio de las funciones polinomios sobre el cuerpo F.** Sea F un cuerpo y sea V el conjunto de todas las funciones f de F en F definidas en la forma

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \tag{1.7}$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son escalares fijos de F (independiente de x). Una función de este tipo se llama **función polinomio sobre F**. Sean la adición y la multiplicación escalar definidas sobre en el ejemplo 3. Se debe observar que si f y g son funciones polinomios y c está en F, entonces $f+g$ y cf son también funciones polinomios. ■

Ejemplo 1.5 El cuerpo C de los números complejos puede considerarse como un espacio vectorial sobre el cuerpo R de los números reales. En forma más general, sea F el cuerpo de los números reales y sea V el conjunto de los n-tuples $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ donde $x_1, \ldots, x_n$ son números complejos. Se define la adición vectorial y la multiplicación escalar por (2.1) y (2-2), como en el ejemplo 1. De este modo se obtiene un espacio vectorial sobre el cuerpo R que es muy diferente del espacio C^n y del espacio R_n. ■

Hay unos pocos hechos simples que se desprenden, casi inmediatamente, de la definición de espacio vectorial, y procederemos a derivarlos. Si c es un escalar y 0 es el vector nulo, entonces por 3(c) y 4(c)

$$c0 = c(0+0) = c0 + c0.$$

Sumando $-(c0)$ y por $3(d)$, se obtiene

$$c0 = 0. \tag{1.8}$$

Análogamente, para el escalar 0 y cualquier vector α se tiene que

$$0\alpha = 0. \tag{1.9}$$

Si c es un escalar no nulo y α un vector tal que $c\alpha = 0$, entonces por (2-8), $c^{-1}(c\alpha) = 0$. Pero

$$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1\alpha = \alpha$$

luego, $\alpha = 0$. Así se ve que si c es un escalar y α un vector tal que $c\alpha = 0$, entonces c es el escalar cero o α es el vector nulo.

Si α es cualquier vector de V, entonces

$$0 = 0\alpha = (1-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = \alpha + (-1)\alpha$$

de lo que se sigue que

$$(-1)\alpha = -\alpha. \tag{1.10}$$

Finalmente, las propiedades asociativa y conmutativa de la adición vectorial implican que la suma de varios vectores es independiente de cómo se combinen estos vectores y de cómo se asocien. Por ejemplo, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ son vectores de V, entonces

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)] + \alpha_4$$

y tal suma puede ser escrita, sin confusión,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Definición 1.2 Un vector β de V se dice **combinación lineal** de los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en V, si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ de F tales que

$$\beta = c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i.$$

Otras extensiones de la propiedad asociativa de la adición vectorial y las propiedades distributivas 4(c) y 4(d) de la multiplicación escalar se aplican a las combinaciones lineales:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} d_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (c_i + d_i)\alpha_i$$

$$c\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (cc_i)\alpha_i.$$

Ejercicios

1. Si F es un cuerpo, verificar que F^n (como se definio en el Ejemplo 1) es un espacio vectorial sobre el cuerpo F.

Respuesta.- Sean $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $\gamma = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ elementos de F^n. Como también sean $c, d, c_1, c_2 \in F$. Entonces,

(3) (a) Conmutatividad para la adición.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + y_2, \ldots, y_n + x_n) \\ &= \beta + \alpha. \end{aligned}$$

(b) Asociatividad para la adición.

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ &= (x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + x_2 + z_1, \ldots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (\alpha + \beta) + \gamma. \end{aligned}$$

(c) Existencia del elemento nulo.

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) \\ &= (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

(d) Existencia del inverso aditivo.

$$\begin{aligned} \alpha + (-\alpha) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [-(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, \ldots, x_n - x_n) \\ &= (0, 0, \ldots, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(4) (a) Existencia del elemento neutro para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned} 1\alpha &= 1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_n) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

(b) Asociatividad para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned} (c_1 c_2)\alpha &= (c_1 c_2)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (c_1 c_2 x_1, c_1 c_2 x_2, \ldots, c_1 c_2 x_n) \\ &= (c_1(c_2 x_1), c_1(c_2 x_2), \ldots, c_1(c_2 x_n)) \\ &= (c_1 c_2 x_1, c_1 c_2 x_2, \ldots, c_1 c_2 x_n) \\ &= c_1(c_2 \alpha). \end{aligned}$$

(c) Distributividad para la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{aligned} c(\alpha + \beta) &= c((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \\ &= c(x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (cx_1 + cx_2, \ldots, cx_n + cy_n) \\ &= (c\alpha + c\beta). \end{aligned}$$

(d) Distributividad para la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{aligned} (c + d)\alpha &= (c + d)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (cx_1 + dx_1, \ldots, cx_n + dx_n) \\ &= c\alpha + d\alpha. \end{aligned}$$

2. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo F, verificar que

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)=[\alpha_2+(\alpha_3+\alpha_1)]+\alpha_4$$

para todo los vectores $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ de v.

Respuesta.- Se tiene,

$$\begin{array}{rcl}(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4) & = & (\alpha_2+\alpha_1)+(\alpha_3+\alpha_4)\\ & = & \alpha_2+[\alpha_1+(\alpha_3+\alpha_4)]\\ & = & \alpha_2+[(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_4]\\ & = & \alpha_2+[(\alpha_3+\alpha_1)+\alpha_4]\\ & = & [\alpha_2+(\alpha_3+\alpha_1)]+\alpha_4.\end{array}$$

3. Si C es el cuerpo de los complejos, ¿qué vectores de C^3 son combinaciones lineales de $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ y $(1,1,1)$?.

Respuesta.- Sea $(x,y,z)\in C^3$ una convinación lineal de los vectores $(1,0,-1),(0,1,1)$ y $(1,1,1)$. Entonces, existen escalares a,b y $c\in C$ tal que

$$\begin{array}{rcl}(x,y,z) & = & a(1,0,-1)+b(0,1,1)+c(1,1,1)\\ & = & (a+c,b+c,c-a).\end{array}$$

De donde,

$$\left\{\begin{array}{rcl}a+c & = & x\\ b+c & = & y\\ c-a & = & z.\end{array}\right.$$

Resolviendo se tiene,

$$\left\{\begin{array}{rcl}a & = & \dfrac{x-z}{2}\\ b & = & \dfrac{2z-x-y}{2}\\ c & = & \dfrac{x+z}{2}.\end{array}\right.$$

Por lo tanto, existen escalares a,b y $c\in C$ tal que

$$(x,y,z)=a(1,0,-1)+b(0,1,1)+c(1,1,1).$$

Así, todos los vectores en C^3 pueden ser expresados como una combinación lineal de los vectores $(1,0,-1),(0,1,1)$ y $(1,1,1)$.

4. Sea V el conjunto de los pares (x,y) de números reales, y sea F el cuerpo de los números reales. Se define

$$\begin{array}{rcl}(x,y)+(x_1,y_1) & = & (x+x_1,y+y_1)\\ c(x,y) & = & (cx,y).\end{array}$$

¿Es V, con estas operaciones, un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales?.

Respuesta.- No es un espacio vectorial ya que,

$$(0,2)=(0,1)+(0,1)=2(0,1)=(2\cdot 0,1)=(0,1).$$

5. En $\mathbb{R}^n$ se definen dos operaciones

$$\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$$

$$c \cdot \alpha = -c\alpha.$$

Las operaciones del segundo miembro son las usuales. ¿Qué axiomsa de espacio vectorial se cumplen para $\mathbb{R}^n, \oplus, \cdot$?.

Respuesta.- Sean $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $\gamma = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ elementos de F^n. Como también sean $c, d, c_1, c_2 \in F$. Entonces,

(3) (a) No es conmutativa para la adición.

$$\begin{array}{rcl} \alpha \oplus \beta & = & \alpha - \beta \\ & = & (x_1, x_2, \ldots, x_n) - (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ & = & (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n) \\ & = & (-y_1 + x_1, -y_2 + x_2, \ldots, -y_n + x_n) \\ & = & -\beta + \alpha. \\ & = & -(\beta - \alpha) \\ & = & -(\beta \oplus \alpha) \\ & \neq & \beta \oplus \alpha. \end{array}$$

(b) No es asociativa para la adición.

$$\begin{array}{rcl} \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) & = & \alpha - (\beta - \gamma) \\ & = & (\alpha - \beta) + \gamma \\ & = & (\alpha \oplus \beta) + \gamma \\ & \neq & \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma). \end{array}$$

(c) No existe el elemento nulo.

$$\begin{array}{rcl} \alpha \oplus 0 & = & \alpha - 0 \\ & = & \alpha - (0, 0, \ldots, 0) \\ & = & \alpha. \end{array}$$

Pero, como $\oplus$ no es conmutativa; es decir, $\alpha \oplus \neq 0 \oplus \alpha$ decimos que no existe la identidad aditiva para $\oplus$.

(d) No existe el inverso aditivo.

$$\begin{array}{rcl} \alpha \oplus (-\alpha) & = & \alpha - (-\alpha) \\ & = & \alpha + \alpha \\ & \neq & 0 \end{array}$$

(4) (a) No existe el elemento neutro para la multiplicación escalar.
El elemento 1 no satisface $1 \cdot \alpha = \alpha$ para cualquier $\alpha \neq 0$, ya que de lo contrario tendríamos

$$1 \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-x_1, x_2 \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sólo si $x_i = 0$ para todo i.

(b) No es asociativa para la multiplicación escalar.

$$\begin{array}{rcl} c_1(c_2\alpha) & = & c_1(-c_2\alpha) \\ & = & -c_1(-c_2\alpha) \\ & = & -(c_1c_2)\alpha \\ & \neq & (c_1c_2)\alpha. \end{array}$$

(c) No es distributiva para la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{aligned} c(\alpha+\beta) &= -c(\alpha+\beta) \\ &= -c\alpha - c\beta \\ &= -(c\alpha + c\beta) \\ &\neq c\alpha + c\beta. \end{aligned}$$

(d) No es distributiva para la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{aligned} c\alpha + d\alpha &= -c\alpha - d\alpha \\ &= -(c+d)\alpha \\ &\neq (c+d)\alpha. \end{aligned}$$

6. Sea V el conjunto de todas las funciones que tiene valor complejo sobre el eje real, tales que (para todo t de R)

$$f-(t) = \overline{f(t)}$$

. La barra indica conjugación compleja. Demostrar que V, con las operaciones

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$cf(t) = cf(t)$$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Dar un ejemplo de una función en V que no toma valores reales.

Demostración.- Sea $f, g, h \in V$. Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene

(3) (a) Conmutatividad para la adición.

$$\begin{aligned} (f+g)(t) &= f(t) + g(t) \\ &= g(t) + f(t) \\ &= (g+f)(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f + g = g + f$ para todo f y $g \in V$.

(b) Asociatividad para la adición.

$$\begin{aligned} \left[(f+g)+h\right](t) &= (f+g)(t) + h(t) \\ &= \left[f(t)+g(t)\right] + h(t) \\ &= f(t) + \left[g(t)+h(t)\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f+g)+h = f+(g+h)$ para todo $f, g, h \in V$.

(c) Existencia del elemento nulo.
Considere la función cero $0(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces para todo $f \in V$, tenemos

$$(f+0)(t) = f(t) + 0(t) = f(t) + 0 = f(t).$$

Ya que $+$ es conmutativo, se tiene $f = f = 0 + f$.

(d) Existencia del inverso aditivo.

(4) (a) Existencia del elemento neutro para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned} 1\alpha &= 1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_n) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

(b) Asociatividad para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned}
(c_1c_2)\alpha &= (c_1c_2)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= (c_1c_2x_1, c_1c_2x_2, \ldots, c_1c_2x_n) \\
&= (c_1(c_2x_1), c_1(c_2x_2), \ldots, c_1(c_2x_n)) \\
&= (c_1c_2x_1, c_1c_2x_2, \ldots, c_1c_2x_n) \\
&= c_1(c_2\alpha).
\end{aligned}$$

(c) Distributividad para la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{aligned}
c(\alpha + \beta) &= c((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \\
&= c(x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n) \\
&= (cx_1 + cx_2, \ldots, cx_n + cy_n) \\
&= (c\alpha + c\beta).
\end{aligned}$$

(d) Distributividad para la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{aligned}
(c + d)\alpha &= (c + d)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= (cx_1 + dx_1, \ldots, cx_n + dx_n) \\
&= c\alpha + d\alpha.
\end{aligned}$$