1

Espacios vectoriales

1.1 Espacios vectoriales

Definición 1.1 Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) consta de lo siguiente:

1. Un cuerpo F de escalares;
2. un conjunto V de objetos llamados vectores;
3. una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores α, β de V un vector $\alpha + \beta$ de V, que se llama suma de α y β, de tal modo que:
   (a) La adición es conmutativa, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
   (b) la adición es asociativa, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
   (c) existe un único vector 0 de V, llamado vector nulo tal que $\alpha + 0 = \alpha$, para todo α de V;
   (d) para cada vector α de V existe un vector $-\alpha$ de V, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$;
4. una regla (u operación) llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar c de F y cada vector α de V a un vector $c\alpha$ en V, llamado producto de c y α, de tal modo que:
   (a) $1\alpha = \alpha$ para todo α de V;
   (b) $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$;
   (c) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$;
   (d) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

Ejemplo 1.1 **El espacio de n-tuplas, F_n.** Sea F cualquier cuerpo y sea V el conjunto de todos los n-tuples $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de escalares x_i de F. Si $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ con y_i de F, la suma de α y β se define por

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{1.1}$$

El producto de un escalar c y el vector α se define por

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n). \tag{1.2}$$

Que esta adición vectorial y multiplicación escalar cumplen las condiciones (3) y (4) es fácil de verificar, usando las propiedades semejantes de la adición y multiplicación de elementos de F. ■

Ejemplo 1.2 **El espacio de matrices $m \times n$, $F^{m \times n}$.** Sea F cualquier cuerpo y sean m y n enteros positivos. Sea $F^{m \times n}$ el conjunto de todas las matrices $m \times n$ sobre el cuerpo F. La suma de dos vectores A y B en $F^{m \times n}$ se define por

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \tag{1.3}$$

El producto de un escalar c y de la matriz A se define por

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}. \tag{1.4}$$

Obsérvece que $F^{i \times n} = F^n$. ■

Ejemplo 1.3 **El espacio de funciones de un conjunto en un cuerpo.** Sea F cualquier cuerpo y sea S cualquier conjunto no vacío. Sea V el conjunto de todas las funciones de S en F. La suma de dos vectores f y g de V es el vector $f + g$; es decir, la función de S en F defina por

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s). \tag{1.5}$$

El producto del escalar c y la función f es la función cf definida por

$$(cf)(s) = cf(s). \tag{1.6}$$

Para este tercer ejemplo se indica cómo se puede verificar que las operaciones definidas satisfacen las condiciones (3) y (4). Para la adición vectorial:

(a) Como la adición en F es conmutativa,

$$f(s) + g(s) = g(s) + f(s)$$

para todo s de S, luego las funciones $f + g$ y $g + f$ son idénticas.

(b) Como la adición en F es asociativa,

$$f(s) + [g(s) + h(s)] = [f(s) + g(s)] + h(s)$$

para todo s, luego $f + (g + h)$ es la misma función que $(f + g) + h$.

(c) El único vector nulo es la función cero, que asigna a cada elemento de S el escalar 0 de F.

(d) Para todo f de V, $(-f)$ es la función dada por

$$(-f) = -f(s).$$

El lector encontrará fácil verificar que la multiplicación escalar satisface las condiciones de (4), razonando como se hizo para la adición vectorial.

■

Ejemplo 1.4 **El espacio de las funciones polinomios sobre el cuerpo F.** Sea F un cuerpo y sea V el conjunto de todas las funciones f de F en F definidas en la forma

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \tag{1.7}$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son escalares fijos de F (independiente de x). Una función de este tipo se llama **función polinomio sobre F**. Sean la adición y la multiplicación escalar definidas sobre en el ejemplo 3. Se debe observar que si f y g son funciones polinomios y c está en F, entonces $f + g$ y cf son también funciones polinomios. ■

Ejemplo 1.5 El cuerpo C de los números complejos puede considerarse como un espacio vectorial sobre el cuerpo R de los números reales. En forma más general, sea F el cuerpo de los números reales y sea V el conjunto de los n-tuples $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ donde $x_1, \ldots, x_n$ son números complejos. Se define la adición vectorial y la multiplicación escalar por (2.1) y (2-2), como en el ejemplo 1. De este modo se obtiene un espacio vectorial sobre el cuerpo R que es muy diferente del espacio C^n y del espacio R_n. ■

Hay unos pocos hechos simples que se desprenden, casi inmediatamente, de la definición de espacio vectorial, y procederemos a derivarlos. Si c es un escalar y 0 es el vector nulo, entonces por 3(c) y 4(c)

$$c0 = c(0+0) = c0 + c0.$$

Sumando $-(c0)$ y por $3(d)$, se obtiene

$$c0 = 0. \tag{1.8}$$

Análogamente, para el escalar 0 y cualquier vector α se tiene que

$$0\alpha = 0. \tag{1.9}$$

Si c es un escalar no nulo y α un vector tal que $c\alpha = 0$, entonces por (2-8), $c^{-1}(c\alpha) = 0$. Pero

$$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1\alpha = \alpha$$

luego, $\alpha = 0$. Así se ve que si c es un escalar y α un vector tal que $c\alpha = 0$, entonces c es el escalar cero o α es el vector nulo.

Si α es cualquier vector de V, entonces

$$0 = 0\alpha = (1-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = \alpha + (-1)\alpha$$

de lo que se sigue que

$$(-1)\alpha = -\alpha. \tag{1.10}$$

Finalmente, las propiedades asociativa y conmutativa de la adición vectorial implican que la suma de varios vectores es independiente de cómo se combinen estos vectores y de cómo se asocien. Por ejemplo, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ son vectores de V, entonces

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)] + \alpha_4$$

y tal suma puede ser escrita, sin confusión,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Definición 1.2 Un vector β de V se dice **combinación lineal** de los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en V, si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ de F tales que

$$\beta = c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i.$$

Otras extensiones de la propiedad asociativa de la adición vectorial y las propiedades distributivas 4(c) y 4(d) de la multiplicación escalar se aplican a las combinaciones lineales:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} d_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}(c_i + d_i)\alpha_i$$

$$c\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}(cc_i)\alpha_i.$$

Ejercicios

1. Si F es un cuerpo, verificar que F^n (como se definio en el Ejemplo 1) es un espacio vectorial sobre el cuerpo F.

Respuesta.- Sean $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $\gamma = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ elementos de F^n. Como también sean $c, d, c_1, c_2 \in F$. Entonces,

(3) (a) Conmutatividad para la adición.

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ & = & (x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n) \\ & = & (y_1 + y_2, \ldots, y_n + x_n) \\ & = & \beta + \alpha. \end{array}$$

(b) Asociatividad para la adición.

$$\begin{array}{rcl} \alpha + (\beta + \gamma) & = & (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ & = & (x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n + z_n) \\ & = & (x_1 + x_2 + z_1, \ldots, x_n + y_n + z_n) \\ & = & (\alpha + \beta) + \gamma. \end{array}$$

(c) Existencia del elemento nulo.

$$\begin{array}{rcl} \alpha + 0 & = & (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) \\ & = & (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) \\ & = & \alpha. \end{array}$$

(d) Existencia del inverso aditivo.

$$\begin{array}{rcl} \alpha + (-\alpha) & = & (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [-(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \\ & = & (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \\ & = & (x_1 - x_1, \ldots, x_n - x_n) \\ & = & (0, 0, \ldots, 0) \\ & = & 0. \end{array}$$

(4) (a) Existencia del elemento neutro para la multiplicación escalar.

$$\begin{array}{rcl} 1\alpha & = & 1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & = & (1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_n) \\ & = & \alpha. \end{array}$$

(b) Asoaciatividad para la multiplicación escalar.

$$\begin{array}{rcl} (c_1c_2)\alpha & = & (c_1c_2)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & = & (c_1c_2x_1, c_1c_2x_2, \ldots, c_1c_2x_n) \\ & = & (c_1(c_2x_1), c_1(c_2x_2), \ldots, c_1(c_2x_n)) \\ & = & (c_1c_2x_1, c_1c_2x_2, \ldots, c_1c_2x_n) \\ & = & c_1(c_2\alpha). \end{array}$$

(c) Distributividad de la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{array}{rcl} c(\alpha + \beta) & = & c((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \\ & = & c(x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n) \\ & = & (cx_1 + cx_2, \ldots, cx_n + cy_n) \\ & = & (c\alpha + c\beta). \end{array}$$

(d) Distributividad de la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{array}{rcl} (c + d)\alpha & = & (c + d)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & = & (cx_1 + dx_1, \ldots, cx_n + dx_n) \\ & = & c\alpha + d\alpha. \end{array}$$

2. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo F, verificar que

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4$$

para todo los vectores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ de v.

Respuesta.- Se tiene,

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) & = & (\alpha_2 + \alpha_1) + (\alpha_3 + \alpha_4) \\ & = & \alpha_2 + [\alpha_1 + (\alpha_3 + \alpha_4)] \\ & = & \alpha_2 + [(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_4] \\ & = & \alpha_2 + [(\alpha_3 + \alpha_1) + \alpha_4] \\ & = & [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4. \end{array}$$

3. Si C es el cuerpo de los complejos, ¿qué vectores de C^3 son combinaciones lineales de $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$?.

Respuesta.-