P

Álgebra Lineal (MAT-131)

Práctica 2

Parte A

Apellidos:	**PAREDES AGUILERA**	C.I.:	**6788578 LP**
Nombres:	**CHRISTIAN PAREDES**	Cel.:	**73055011**
Firma:			

---

1. Suponga v_1, v_2, v_3, v_4 se extiende por V. Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

también se extiende por V.

Demostración.- Sea $v \in V$, entonces existe a_1, a_2, a_3, a_4 tal que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4.$$

Que implica,

$$\begin{array}{rcl} v & = & a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 - a_1v_2 + a_1v_2 - a_1v_3 + a_1v_3 - a_2v_3 + a_2v_3 - a_1v_4 + a_1v_4 \\ & - & a_2v_4 + a_2v_4 - a_3v_4 + a_3v_4 \end{array}$$

De donde,

$$v = a_1(v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(v_3 - v_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)v_4.$$

Por lo tanto, cualquier vector en V puede ser expresado por una combinación lineal de

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4.$$

Así, esta lista se extiende por V.

2. Encuentre un número t tal que

$$(3, 1, 4), (2, -3, 5), (5, 9, t)$$

no es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$.

Respuesta.- Sea,

$$a(3, 1, 4) + b(2, -3, 5) + c(5, 9, t) = 0.$$

Si $c = 0$. Entonces,

$$a(3,1,4) + b(2,-3,5) = 0.$$

Lo que implica

$$\begin{array}{rcl} 3a + 2b & = & 0 \\ a - 3b & = & 0 \\ 4a + 5b & = & 0 \end{array}$$

De donde, resolviendo para a y b se tiene

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = 0.$$

Pero, no queremos que a, b, c sean cero. Así que debemos forzar que $c \neq 0$, como sigue:

$$a(3,1,4) + b(2,-3,5) + c(5,9,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (5,9,t) = -\frac{a}{c}(3,1,4) - \frac{b}{c}(2,-3,5).$$

Es decir, estamos expresando $(5,9,t)$ como una combinación lineal de los vectores restantes. Así, sea $-\dfrac{a}{c} = x$, $-\dfrac{b}{c} = y$ por lo que,

$$(5,9,t) = x(3,1,4) + y(2,-3,5).$$

Así, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 5 \\ x - 3y & = & 9 \\ 4x + 5y & = & t \end{array}$$

Resolviendo para x e y se tiene

$$x = 3 \quad \text{y} \quad y = -2.$$

Por lo tanto,

$$t = 2.$$

3. Demostrar que $\alpha\beta = \beta\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Demostración.- Por la definición de multiplicación de números complejos se muestra que

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

y

$$\beta\alpha = (c + di)(a + bi) = (ca - db) + (ad + bc)i.$$

Las ecuaciones anteriores, la conmutatividad para la suma y la multiplicación y propiedades de números reales muestran que

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

4. (a) Demuestre que si pensamos en $\mathbf{C}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$, entonces la lista $(1+i, 1-i)$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a, b \in \mathbf{R}$, tal que

$$a(1+i) + b(1-i) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a+b) + (a-b)i = 0.$$

Entonces,

$$a + b = 0 \quad \text{y} \quad a - b = 0.$$

Igualando estas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{array}{rcl} a+b=a-b & \Rightarrow & 2b=0 \\ & \Rightarrow & b=0. \end{array}$$

Reemplazando en $a+b=0$,

$$a=0.$$

Por lo tanto, $(1+i, 1-i)$ es linealmente independiente sobre $\mathbf{R}$.

(b) Demuestre que si pensamos en $\mathbf{C}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$, entonces la lista $(1+i, 1-i)$ es linealmente dependiente.

Demostración.- Sean los escalares $i, 1 \in \mathbf{C}$, tal que

$$i(1+i)+1(1-i)=i+i^2+1-i=0 \quad \Rightarrow \quad (i-1)+(1-i)=(i-1)-(i-1)=0.$$

Donde concluimos que $(1+i, 1-i)$ es linealmente dependiente sobre $\mathbf{C}$.

5. Supongamos que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente en V. Demostrar que la lista

$$v_1-v_2, v_2-v_3, v_3-v_4, v_4$$

es también linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a, b, c, d \in F$ tal que

$$a(v_1-v_2)+b(v_2-v_3)+c(v_3-v_4)+d(v_4)=0.$$

De donde,

$$av_1-av_2+bv_2-bv_3+cv_3-cv_4+dv_4=0.$$

Por lo que,

$$av_1+(b-a)v_2+(c-b)v_3+(d-c)v_4=0$$

Ya que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente, entonces

$$\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b-a & = & 0 \\ c-b & = & 0 \\ d-c & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo para a, b, c, d se tiene

$$a=0, \quad b=0, \quad c=0, \quad d=0.$$

Esto implica que

$$0(v_1-v_2)+0(v_2-v_3)+0(v_3-v_4)+0(v_4)=0.$$

Por lo tanto, la lista

$$v_1-v_2, v_2-v_3, v_3-v_4, v_4$$

es linealmente independiente.

6. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V, Entonces

$$5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \ldots, v_m$$

es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i\mathbf{F}$ tal que

$$a_1(5v_1 - 4v_2) + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

De donde,

$$5a_1v_1 + (a_2 - 4a_1)v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

Sabemos que la independencia lineal obliga a todos los escalares de v_i a ser cero. En particular , $5a_1 = 0$ entonces $a_1 = 0$ y $a_2 - 4a_1 = 0$, implica $a_2 = 0$. Por lo tanto,

$$0 \cdot v_1 + (0 - 0)v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

Dado que todos a_i son cero, entonces $5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \ldots, v_m$ es linealmente independiente.

7. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son listas linealmente independientes de vectores en V, entonces $v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a_i, b_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1v_1 + a_1v_2 + \ldots + a_mv_m = 0 \quad \text{y} \quad b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mv_m = 0.$$

Entonces,

$$a_1v_1 + a_1v_2 + \ldots + a_mv_m + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mv_m = 0.$$

De donde,

$$(a_1 - b_1)(v_1 + w_1) + (a_2 - b_2)(v_2 + w_2) + \ldots + (a_m - b_m)(v_m + w_m) = 0.$$

Supongamos $c_i = a_i + b_i \in F$. Luego,

$$c_1(v_1 + w_1) + c_2(v_2 + w_2) + \ldots + c_m(v_m + w_m) = 0.$$

Dado que $a_i = b_i = 0$, ya que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son linealmente independientes. Concluimos que, $v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

8. Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $W \in V$. Demostrar que si $v_1 + w, \ldots, v_m + w$ es linealmente dependiente, entonces $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Demostración.- Por definición de dependencia lineal. Existen $a_1, \ldots a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que

$$a_1(v_1 + w) + a_2(v_2 + w) + \ldots + a_m(v_m + w) = 0.$$

De donde,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)w. \tag{1}$$

Dado que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente, entonces existen escalares $t_i, \ldots, t_m \in \mathbf{F}$, $\forall t_i = 0$, de modo que

$$t_1v_1 + t_2v_2 + \ldots + t_mv_m = 0$$

Es único. Así pues notemos, para $a_i \neq 0$ que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m \neq 0$$

En consecuencia por (1)
$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)w \neq 0.$$
Por lo tanto,
$$w = -\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m) \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

9. Explique por qué no existe una lista de seis polinomios que sea linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Notemos que $1, z, z^2, z^3, z^4$ genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Pero por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], la longitud de la lista linealmente independiente es menor o igual que la longitud de la lista que genera. Es decir, cualquier lista linealmente independiente no tiene más de 5 polinomios.

10. Explique por qué ninguna lista de cuatro polinomios genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si m vectores genera V y si tenemos un conjunto de n vectores linealmente independientes, entonces $n \leq m$. Es decir, el número de vectores en un conjunto linealmente independiente de V, no puede se mayor que el número de vectores en un conjunto generador de V.
Por ejemplo, si cuatro polinomios podrían generar $P_4(\mathbf{F})$. Entonces, por la definición de arriba, cualquier conjunto de polinomios linealmente independientes en $P_4(\mathbf{F})$ podría tener cómo máximo cuatro vectores. Sin embargo, el conjunto $1, z, z^2, z^3, z^4$ tiene cinco polinomio linealmente independientes en $P_4(\mathbf{F})$. Por lo tanto, es imposible que cualquier conjunto de cuatro polinomios genere $P_4(\mathbf{F})$.

11. Demuestre que V es de dimensión infinita, si y sólo si existe una secuencia $v_1, v_2, \ldots,$ de vectores en V tal que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada entero positivo m.

Demostración.- Supongamos que V es de dimensión infinita. Queremos producir una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots,$ tal que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada m. Necesitamos mostrar que para cualquier $k \in \mathbf{N}$ y un conjunto de vectores linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots$ podemos definir un vector v_{k+1} tal que $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ es linealmente independiente. Si podemos probar esto, entonces significará que podemos continuar sumando vectores indefinidamente a conjuntos linealmente independientes de modo que los conjuntos resultantes también sean linealmente independientes. Esto nos dará una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots$, cuyo subconjunto finito es linealmente independiente.

Sea $v_1, v_2, \ldots, v_k$ un conjunto linealmente independiente en V. Ya que V es de dimensión finita, no puede generado por un conjunto finito de vectores. Por lo tanto, $V \neq \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Sea v_{k+1} tal que $v_{k+1} \notin \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Entonces, por el ejercicio 11 [Axler, Linear Algebra, que nos dice: Si $v : 1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$, el conjunto $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente independiente si y sólo si $w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$]. El conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ es linealmente independiente.

Por otro lado, sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un conjunto generador de V. Entonces, por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], cualquier conjunto de vectores linealmente independiente en V pueden tener por lo más n vectores. De esto modo, cualquier conjunto que tenga $n+1$ o más vectores es linealmente dependiente. Así, si V es de dimensión finita, entonces no podemos tener una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots$ tal que, para cada m, el subconjunto $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente. Tomando su recíproca, podemos decir que si existe una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots$ tal que el conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada m. Entonces, V es de dimensión infinita. Lo que completa de demostración.

12. Demostrar que el espacio vectorial real para todos las funciones de valor real continuas en el intervalo $[0,1]$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Por el ejercicio 14 (Axler, Linear Algebra, 2A), tenemos que encontrar una secuencia linealmente independiente de funciones continuas en $[0,1]$. Observe que los monomiales $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ son funciones continuas en $[0,1]$. Ahora, debemos demostrar que $1, x, x^2, \ldots, x^m$ es linealmente independiente en cada m. Para ello, sea $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m = 0$, donde 0 es el cero polinomial. Lo que significa que $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m = 0$ toma el valor cero en todo el intervalo $[0,1]$. Esto implica que cada punto en $[0,1]$ es una raíz del polinomio. Pero, ya que cada polinomio no trivial tiene como máximo un número finito de raíces, esto es imposible a menos que todos los a_i's sean cero. Lo que muestra que $1, x, x^2, \ldots, x^m$ es linealmente independiente para cada $m \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, el conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ es de dimensión infinita.

13. Suponga $p_0, p_1, \ldots, p_m$ son polinomios en $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ tal que $p_j(2) = 0$ para cada j. Demostrar que $p_0, p_1, \ldots, p_m$ no es linealmente independiente en $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Demostración.- Supondremos que $p_0, p_1, \ldots .p_m$ es linealmente independiente. Demostraremos que esto implica que $p_0, p_1, \ldots, p_m$ genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$. Y que esto a su vez conducirá a una contradicción al construir explícitamente un polinomio que no está en este generador. Notemos que la lista $1, z, \ldots, z^{m+1}$ genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ y tiene longitud $m+1$. Por lo tanto, cada lista linealmente independiente debe tener una longitud $m+1$ o menos (2.23). Si $\text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m) \neq \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$, existe algún $p \notin \text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m)$, de donde la lista $p_0, p_1, \ldots, p_m, p$ es linealmente independiente de longitud $m+2$, lo que es una contradicción. Por lo que $\text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m) = \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.
Ahora definamos el polinomio $q = 1$. Entonces $q \in \text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m)$, de donde existe $a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$q = a_0p_0 + a_1p_1 + \cdots + a_mP_m,$$

lo que implica

$$q(2) = a_0p_0(2) + a_1p_1(2) + \cdots + a_mP_m(2).$$

Pero esto es absurdo, ya que $1 = 0$. Por lo tanto, $p_0, p_1, \ldots, p_m$ no puede ser linealmente independiente.

Ejercicios restantes del libro de Álgebra Lineal de Axler

1. Verifique las afirmaciones del Ejemplo 2.18.

(a) Una lista v de un vector $v \in V$ es linealmente independiente si y sólo si $v \neq 0$.

Demostración.- Demostremos que si v es linealmente independiente, entonces $v \neq 0$. Supongamos que $v = 0$. Sea un escalar $a \neq 0$. De donde, $av = 0$ incluso cuando $a \neq 0$. Esto contradice la definición de independencia lineal. Por lo tanto, v debe ser linealmente dependiente. Esto es, $v = 0$ implica que v es un vector linealmente dependiente. Por lo que, si v es linealmente independiente, entonces v es un vector distinto de cero.
Por otro lado, debemos demostrar que $v \neq 0$ implica que v es linealmente independiente. Sea un escalar a tal que $av = 0$. Si $a \neq 0$, entonces av no puede ser 0. Por eso a debe ser 0. Por lo tanto, $v \neq 0$ y $av = 0$ implica que $a = 0$. Así, v es linealmente independiente.

(b) Una lista de dos vectores en V es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

Demostración.- El enunciado siguiente es equivalente. Dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar de otro. Supongamos que v_1, v_2 son dos vectores linealmente dependientes. Por lo que, existe escalares a_1, a_2 tal que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

y no ambos escalares a_1, a_2 son cero. Sea $a_1 \neq 0$, entonces la ecuación se podría reescribir como

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$$

el cual prueba que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Por otro lado, si $a_2 \neq 0$, entonces $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$ de aquí podemos afirmar que v_2 es un múltiplo escalar de v_1.
Ahora supongamos que que uno de los v_1 o v_2 es un múltiplo escalar del otro. Podemos decir, sin perdida de generalidad, que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Esto es, $v_1 = cv_2$ para algún escalar c. Por lo tanto, la ecuación $v_1 - cv_2 = 0$ se cumple, ya que el multiplicador de v_1 es distintos de cero. Esto es precisamente lo que requerimos para la definición de dependencia lineal. Así, v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

(c) $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ es linealmente independiente en $\mathbf{F}^4$.

Demostración.- Utilizaremos la definición de independencia lineal. Sean a, b, c escalares en $\mathbf{F}$ tal que

$$a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$$

Entonces,

$$(a, b, c, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Lo que implica,

$$a, b, c = 0.$$

Esto demuestra que los tres vectores son linealmente independientes.

(d) La lista $1, z, \ldots, z^m$ es linealmente independiente en $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ para cada entero no negativo m.

Demostración.- Demostremos por contradicción. Supongamos que $1, z, \ldots, z^m$ es linealmente dependiente. Por lo que, existe un escalar $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tal que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m = 0.$$

Sea k el indice más grande tal que $a_k \neq 0$. Esto significa que los escalares desde a_{k+1} hasta a_m son cero. Entonces, se deduce que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k = 0.$$

Reescribiendo se tiene

$$z_k = -\frac{a_0}{a_k} - \frac{a_1}{a_k} z - \cdots - \frac{a_{k-1}}{a_k} z^{k-1}.$$

Aquí, expresamos z^k como un polinomio de grado $k-1$ el cual es absurdo. Por lo que $1, z, z^2, \ldots, z^m$ es un conjunto linealmente independiente.

2. Verifique la afirmación en el segundo punto del Ejemplo 2.20. Es decir, la lista $(2, 3, 1), (1, -1, 2), (7, 3, c)$ es linealmente dependientes en $\mathbf{F}^3$ si y sólo si $c = 8$, como debes verificar.

Respuesta.- Sea los escalares a, b, c no todos cero tal que

$$r(2, 3, 1) + s(1, -1, 2) + t(7, 3, c) = (0, 0, 0)$$

De donde, podemos escribir como ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} 2r + s + 7t & = & 0 \\ 3r - s + 3t & = & 0 \\ r + 2s + ct & = & 0 \end{array}$$

De la ecuación 1 y 2 se tiene

$$5r + 10t = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -2t.$$

Luego sustrayendo la ecuación 1 y 3,

$$2r + (c - 4)t = 0.$$

Así, tenemos que

$$2(-2t) + (c - 4)t = 0 \quad \Rightarrow \quad (c - 8)t = 0$$

Por lo que,

$$r = 0 \quad \text{o} \quad c - 8 = 0.$$

Si $t = 0$. Entonces, $r = -2t = 0$, y $s = 0$. Contradiciendo el hecho de que no todos los escalares son cero. Por lo tanto, los tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si $c = 8$.

3. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V y $\gamma \in \mathbf{F}$ con $\gamma \neq 0$, Entonces $\gamma v_1, \gamma v_2, \ldots, \gamma v_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1 \gamma v_1 + a_2 \gamma v_2 + \ldots + a_m \gamma v_m = 0.$$

De donde,

$$\gamma \left(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m \right) = 0.$$

Lo que,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0.$$

Ya que, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente. Entonces, todos los $a_i's$ deben ser cero. Por lo tanto, $a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \ldots + a_m\gamma v_m = 0$. es linealmente independiente.

4. Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$. Demostrar que $v_1, \ldots, v_m$, w es linealmente independiente si y sólo si

$$w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

Demostración.- Supongamos que $w \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Entonces,

$$w = a_1v_1 + \ldots + a_mv_m.$$

De donde,

$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m - w = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + (-1)w = 0.$$

Por lo tanto, $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente dependiente.

Por otro lado: $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente independiente, entonces existe $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbf{F}$, $\forall a_i = 0$, tal que

$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + bw = 0.$$

Dado que $b = 0$, no se puede escribir w como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$. Es decir,

$$w = \frac{1}{0}(a_1v_1 + \ldots + a_mv_m),$$

lo que es imposible. De esta manera

$$w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

5. Demostrar que $\mathbf{F}^\infty$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Sea un elemento $e_m \in \mathbf{F}^\infty$ como el elemento que tiene la coordenada m-ésima igual a 1 los demás elementos iguala a 0. Es decir,

$$(0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Ahora, si varía m sobre el conjunto de los números naturales, entonces tenemos una secuencia $e_1, e_2, \ldots$ en $\mathbf{F}^\infty$, si y sólo si podemos probar que $e_1, e_2, \ldots, e_m$ es linealmente independiente para cada m. Con este fin, sea

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_me_m = 0$$

De donde,

$$(a - 1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0)$$

Inmediatamente implica que $a_i's = 0$ y por lo tanto, $e_i's$ son linealmente independiente.