1

Álgebra vectorial

1.2. El espacio vectorial de las n-plas de números reales

Definición 1.1 *Dos vectores A y B de V_n son iguales siempre que coinciden sus componentes. Esto es, si $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ..., b_3)$, la ecuación vectorial $A = B$ tiene exactamente el mismo significado que las n ecuaciones escalares*

$$a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2, \qquad a_n = b_n$$

La suma $A + B$ se define como el vector obtenido sumando los componentes correspondientes:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

La c es un escalar, definimos cA o Ac como el vector obtenido multiplicando cada componente de A por c:

$$cA = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$$

TEOREMA 1.1 ***a.*** *La adición de vectores es conmutativa.*

$$A + B = B + A$$

Demostración.- Sea V_n el espacio vectorial n-plas y $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ...b_n)$, por lo tanto por definición de adición y propiedad de números reales, tenemos

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, ..., b_n + a_n) = B + A$$

.

b. *y asociativa,*

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Demostración.- Sea V_n el espacio vectorial n-plas y $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ y $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ entonces

$$A + (B + C) = A + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, ..., b_n + c_n) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), ..., a_1 + (b_n + c_n)) =$$

$$((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, ..., (a_n + b_n) + c_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., b_n + c_n) + C = (A + B) + C$$

c. *La multiplicación por escalares es asociativa*

$$c(dA) = (cd)A$$

Demostración.- Sea $c, d \in \mathbb{R}$ *y* $A \in V_n$ *entonces*

$$\begin{array}{rcl} c(dA) & = & c(da_1, da_2, ..., da_n) \\ & = & ((cd)a_1, (cd)a_2, ..., (cd)a_3) \\ & = & (cd)A \end{array}$$

d. *y satisface las dos leyes distributivas*

$$c(A+B) = cA + cB, \quad y \quad (c+d)A = cA + dA$$

Demostración.- Las demostraciones son fáciles de realizar siempre y cuando se tomen en cuenta Las definiciones de 12.1.

e. *El vector con todos los componentes* 0 *se llama vector cero y se representa con* O*. Tiene la propiedad.*

Demostración.- Existencia. Sea $O = (o, o, ..., o)$ *de donde* $A + O = (a_1, a_2, ..., a_n) + (o, o, ..., o) = (a_1 + o, a_2 + o, ..., a_n + o) = (a_1, a_2, ..., a_n) = A$*.*
Unicidad. Supongamos que $O, O' \in V_n; O \neq O$ *tal que*

$$\begin{cases} A + O = A \quad \text{tomando } A = O' : \quad O' + O = O' \\ A + O' = A \quad \text{tomando } A = O : \quad O + O' = O \end{cases}$$

Por lo tanto $O = O'$*.*

f. *El vector* $(-1)A$ *que también se representa con* $-A$ *se llama el apuesto a* A*. También escribimos* $A - B$ *en lugar de* $A + (-B)$ *y lo llamamos diferencia de* A *y* B*. La ecuación* $(A+B) - B = A$*. Demuestra que la sustracción es la operación inversa de la adición. Obsérvese que* $0A = O$ *y que* $1A = A$*.*

1.3. Interpretación geométrica para $n \leq 3$

Definición 1.2 *Dos vectores* A *y* B *de* V_n *tienen la misma dirección si* $B = cA$ *para un cierto escalar positivo* c*, y la dirección opuesta si* $B = cA$ *para un cierto* c *negativo. Se llaman paralelos si* $B = cA$ *para un cierto* c *no nulo.*

1.4. Ejercicios

1.