1

Algunas aplicaciones de la integración

1.1. Valor medio de una función

Definición 1.1 (Definición del valor medio de una función en un intervarlo) *Si f es integrable en un intervalo $[a, b]$, definimos $A(f)$, el valor medio de f en $[a, b]$, por la siguiente fórmula*

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Podemos ahora demostrar que ésta la fórmula es en realidad una extensión del concepto de media aritmética. Sea f una función escalonada que es constante en cada uno de los subintervalos de $[a, b]$, obtenidos al dividirlo en n partes iguales. En particular, sea $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y supongamos que $f(x) = f(x_k)$, si $x_{x-1} < x < x_k$. Entonces será $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$, con lo que se tiene

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Así pues, para funciones escalonadas, el promedio $A(f)$ coincide con la media aritmética de los valores $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ tomados en los intervalos en los que la función es constante.

1.2. Ejercicios

1. $f(x) = x^2, \quad a \leq x \leq b.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+2ba+a^2}{3}.$$

2. $f(x) = x^2 + x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (x^2+x^3)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

3. $f(x) = x^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{4-0}\int_0^4 x^{1/2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right|_0^4 = \frac{4}{3}.$$

4. $f(x) = x^{1/3}, \quad 1 \leq x \leq 8.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{8-1}\int_1^8 x^{1/3}\,dx = \frac{1}{7}\cdot\left.\frac{3x^{4/3}}{4}\right|_1^8 = \frac{48-3}{7} = \frac{45}{28}.$$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot(1-\cos\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

6. $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2+\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot(\operatorname{sen}\pi/2+\operatorname{sen}\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{0\cdot 2}^{\frac{\pi}{2}\cdot 2} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{\pi}(1-\cos\pi) = \frac{2}{\pi}$$

.

8. $f(x) = \operatorname{sen} x\cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(2x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

9. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\pi = \frac{1}{2}.$$

10. $f(x) = \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq pi.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 x \; dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \; dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi \right) = \frac{1}{2}.$$

11.