

Ejercicios Capitulo 7

Christian Limbert Paredes Aguilera

2022-11-21

Ejercicios capitulo 7

7.1

Una forma de mercadotecnia envía un cuestionario a 1000 residentes de cierto suburbio de una ciudad para determinar sus preferencias como compradores. De los 1000 residentes, 80 responden el cuestionario. ¿Lo anterior constituye una muestra aleatoria? Discutir los méritos de este procedimiento para obtener una muestra aleatoria.

7.2

En una planta de armado automotriz se seleccionarán 50 de los primeros 1000 automóviles de un nuevo modelo para ser inspeccionados por el departamento de control de calidad. El gerente de la planta decide inspeccionar un automóvil cada vez que terminan de armarse 20. ¿Este proceso dará como resultado una muestra aleatoria? Comente.

Respuesta.- Dado que el experimento se repite bajo las mismas condiciones, con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Podemos decir que este experimento podría ser sin sesgo.

7.3

Si X_1, X_2, \dots, X_n constituye una muestra aleatoria, obtener las funciones de verosimilitud de las siguientes distribuciones:

a)

De Poisson, con parámetro λ ;

Respuesta.- Sea $p(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ para $x = 0, 1, 2, \dots$, entonces la función de verosimilitud será

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_2}}{x_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}, \quad x = 1, 2, \dots$$

b)

Hipergeométrica, con parámetro p ;

Respuesta.- Si $p = k/N$, puede escribirse la función de probabilidad hipergeométrica como una función de probabilidad binomial y dado que el único parámetro es p entonces, $p(x, n, p) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

c)

Uniforme en el intervalo (a, b) ;

Respuesta.- Sea $\frac{1}{b-a}$ para $a \leq x \leq b$ una función de densidad de probabilidad uniforme. Entonces, la función de verosimilitud será:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{b-a} \cdots \frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}$$

d)

$N(\mu, \sigma)$

Respuesta.- Sea $f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, la función de densidad de probabilidad. Entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum \left[\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \end{aligned}$$

7.4

Repetir el ejercicio 7.3 para las siguientes distribuciones:

a)

Gama con parámetro α y θ .

Respuesta.- Sea, $\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}$ la distribución de densidad gama, entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha, \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_i/\theta} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_1/\theta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_2/\theta} \cdots \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_n/\theta} \\ &= \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}\right)^n \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta}}. \end{aligned}$$

b)

Weibull con parámetro α y θ .

Respuesta.- Sea $f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\theta)^\alpha}$ la distribución de densidad de probabilidad Weibull, entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha, \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_i^{\alpha-1} e^{-(x_i/\theta)^\alpha} \\
&= \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_1^{\alpha-1} e^{-(x_1/\theta)^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_2^{\alpha-1} e^{-(x_2/\theta)^\alpha} \dots \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_n^{\alpha-1} e^{-(x_n/\theta)^\alpha} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\theta^\alpha} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \cdot e^{\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^\alpha \right]}.
\end{aligned}$$

7.5

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población cuya distribución es normal con media μ y varianza σ^2 . De las siguientes, ¿cuáles son estadísticas?

a)

$$\sum X_i - \mu.$$

Respuesta.- No es estadística ya que no está definida X_i ni se conoce el valor de μ .

b)

$$\sigma X_1 + \sigma X_2.$$

Respuesta.- No es estadística ya que no se conoce el valor de sigma.

c)

$$X_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Respuesta.- Es estadística porque X_i está definida entre 1 y n .

d)

$$X_1^2 + X_2^2 - e^{X_3}.$$

Respuesta.- Es estadística.

e)

$$\frac{X_i}{\sigma}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Respuesta.- No es estadística porque no se conoce el valor de σ .

f)

$$\sum (X_i - \bar{X})^2.$$

Respuesta.- Es estadística porque es una función completa.

7.6

Sean X_1, X_2, \dots, X_n n variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente. Mediante el empleo de la función generadora de momentos, demostrar que la suma de estas variables también es una variable aleatoria de Poisson con parámetros $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Respuesta.- Sea,

$$m_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)}$$

la función generadora de momentos de la distribución Poisson, entonces por el teorema 7.1, con $a_i = 1$. La suma de las variables también es una variable aleatoria de Poisson. Es decir, sea

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

de donde,

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t) \cdots m_{X_n}(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} \cdots e^{\lambda_n(e^t-1)} \\ &= e^{[\lambda_1(e^t-1) + \lambda_2(e^t-1) + \dots + \lambda_n(e^t-1)]} \\ &= e^{[(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)(e^t-1)]} \end{aligned}$$

7.7

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 , respectivamente. Demostrar que la diferencia entre X_1 y X_2 no es una variable aleatoria de Poisson.

Respuesta.- Sea,

$$Y = X_1 - X_2$$

Entonces por el teorema 7.1 con $a_i = 1$,

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E \{ e^{t[X_1 + (-X_2)]} \} \\ &= E [e^{tX_1} \cdot e^{(-t)X_2}] \\ &= E [e^{tX_1}] E [e^{(-t)X_2}] \\ &= m_{X_1}(t) m_{X_2}(-t) \\ &= e^{\lambda_1(t-1)} e^{\lambda_2(-t-1)} \end{aligned}$$

Por lo que no es una variable aleatoria Poisson.

7.8

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes binomial con parámetros n_1 y p , y n_2 y p , respectivamente. Demostrar que la suma de X_1 y X_2 es una variable aleatoria binomial con parámetros $n_1 + n_2$ y p .

Respuesta.- Sea la función generadora de momentos:

$$m_X(t) = [(1-p) + e^t p]^n$$

Entonces, por el teorema 7.1, con $a_i=1$. La suma de las variables también es una variable aleatoria binomial. Es decir; sea,

$$Y = X_1 + X_2$$

por lo que

$$\begin{aligned}
m_Y(t) &= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t) \\
&= [(1-p) + e^tp]^{n_1} [(1-p) + e^tp]^{n_2} \\
&= [(1-p) + e^tp]^{n_1+n_2}
\end{aligned}$$

7.9

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con el mismo parámetro θ . Demostrar que la suma de X_1 y X_2 es una variable aleatoria gama con parámetros de forma 2 y parámetro de escala θ .

Respuesta.- Sea la función generadora de momentos dado por:

$$m_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$$

Entonces, sea

$$Y = X_1 + X_2$$

de donde,

$$\begin{aligned}
m_Y(t) &= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t) \\
&= \frac{\theta}{\theta - t} \cdot \frac{\theta}{\theta - t} \\
&= \left(\frac{\theta}{\theta - t} \right)^2.
\end{aligned}$$

Así, tenemos una variable aleatoria gama con parámetros de forma 2 y parámetro de escala θ .

7.10

Para un determinado nivel de ingresos, el Departamento de Hacienda sabe que las cantidades declaradas por concepto de deducciones médicas (X_1), contribuciones caritativas (X_2) y gastos varios (X_3), son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con media \$400, \$800 y \$100 y desviaciones estándar \$100, \$250 y \$40, respectivamente.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad total declarada por concepto de estas tres deducciones, no sea mayor de \$1600?

Respuesta.- Sean,

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= 400 & ; & \quad sd(X_1) = 100 \\
E(X_2) &= 800 & ; & \quad sd(X_2) = 250 \\
E(X_3) &= 100 & ; & \quad sd(X_3) = 40
\end{aligned}$$

Por el teorema 7.2, con $a_i = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) &= 400 + 800 + 100 &= 1300 \\
\sqrt{sd(Y)} &= \sqrt{sd^2(X_1) + sd^2(X_2) + sd^2(X_3)} &= \sqrt{100^2 + 250^2 + 40^2} &= \sqrt{74100}
\end{aligned}$$

Lo que implica que,

$$Y \sim N(1300, \sqrt{74100})$$

Entonces, la probabilidad de que la cantidad total declarada por concepto de las deducciones dadas no sea mayor a \$1600 será:

$$P(Y \leq 1600) = 0.864786$$

```
pnorm(1600,1300,sqrt(74100))
```

```
## [1] 0.864786
```

b)

Si una persona con este nivel de ingresos declara por concepto de estas deducciones un total de \$2100, ¿qué tan probable es tener una cantidad igual o mayor a este monto bajo las condiciones dadas?

Respuesta.- Sea $Y \sim N(1300, \sqrt{74100})$. Entonces,

$$P(Y \geq 2100) = 0.001647038$$

```
pnorm(2100,1300,sqrt(74100),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.001647038
```

7.11

Una tienda de artículos electrónicos para el hogar vende tres diferentes marcas de refrigeradores. Sean X_1 , X_2 y X_3 variables aleatorias las cuales representan el volumen de ventas mensuales para cada una de las tres marcas de refrigeradores. Si X_1 , X_2 y X_3 son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con medias \$8000, \$15000 y \$12000, y desviación estándar \$2000, \$5000 y \$3000, respectivamente, obtener la probabilidad de que, para un mes en particular, el volumen de venta total para los tres refrigeradores sea mayor de \$50000.

Respuesta.- Sean,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) &= 8000 + 15000 + 12000 &= 35000 \\
\sqrt{sd(Y)} &= \sqrt{sd^2(X_1) + sd^2(X_2) + sd^2(X_3)} &= \sqrt{2000^2 + 5000^2 + 3000^2} &= 6164.414
\end{aligned}$$

Lo que implica que,

$$Y \sim N(35000, 6164.414)$$

Entonces,

$$P(Y \geq 50000) = 0.007480509.$$

```
EY = 8000+15000+12000
sdY = sqrt(2000^2+5000^2+3000^2)
pnorm(50000,EY,sdY,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.007480509
```

7.12

En una tienda de servicio el tiempo total del sistema consta de dos componentes (el lapso de tiempo que debe esperar para que el servicio de comienzo (X_1) y el lapso de tiempo que este dura (X_2)). Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes exponencialmente distribuidas con un tiempo medio de 4 minutos cada una, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo total que tarda el sistema en proporcionar el servicio no sea mayor de 15 minutos? (Sugerencia: consulte el ejercicio 7.9.)

Respuesta.- Por el ejercicio 7.9, tenemos

$$m_Y(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t} \right)^2$$

.

tal que $Y = X_1 + X_2$

7.13

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población que tiene una distribución gama con parámetros α y θ . Mediante el uso de la función generadora de momentos, demostrar que la distribución de la media muestral \bar{X} también es de tipo gama, con parámetros de escala y de forma iguales a $n\alpha$ y θ/n respectivamente.

7.14

Mediante el empleo de los resultados de la sección 5.9, generar números aleatorios para las distribuciones binomial y exponencial y usarlos para demostrar el teorema central del límite. De manera específica, para $n = 10$ y $n = 40$, generar 50 muestras de una distribución binomial con $p = 0.4$. Repetir el procedimiento anterior generando 50 muestras de una distribución exponencial con parámetro $\theta = 100$. ¿Se ha demostrado el teorema central del límite en un grado razonable?.

7.15

Para cierta prueba de aptitud se sabe con base a la experiencia que el número de aciertos es 1000 con una desviación estándar de 126. Si se aplica la prueba a 100 personas seleccionadas al azar, aproximar las siguientes probabilidades que involucran a la media muestral \bar{X} .

a)

$$P(985 < \bar{X} < 1015)$$

Respuesta.- Sea, $Z = \frac{\bar{X} - \theta}{\theta/\sqrt{n}}$, $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$\begin{aligned}
P(985 < \bar{X} < 1015) &= P(985 - \mu < \bar{X} - \mu < 1015 - \mu) \\
&= P\left(\frac{985 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{1015 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\frac{985 - 1000}{126/\sqrt{100}} < Z < \frac{1015 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) \\
&= 0.7661407.
\end{aligned}$$

```
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(1015,mu,sd/sqrt(n)) - pnorm(985,mu,sd/sqrt(n))

## [1] 0.7661407
```

b)

$$P(960 < \bar{X} < 1040)$$

Respuesta.- Sean $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$P\left(\frac{960 - 1000}{126/\sqrt{100}} < Z < \frac{1040 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) = 0.9984996.$$

```
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(1040,mu,sd/sqrt(n)) - pnorm(960,mu,sd/sqrt(n))

## [1] 0.9984996
```

c)

$$P(\bar{X} > 1020)$$

Respuesta.- Sean $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$P\left(Z > \frac{1020 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) = 0.05622218.$$

```
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(1020,mu,sd/sqrt(n),lower.tail = FALSE)

## [1] 0.05622218
```

d)

$$P(\bar{X} < 975)$$

Respuesta.- Sean $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$P\left(Z < \frac{975 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) = 0.02362084.$$

```
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(975,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.02362084
```

7.16

Una contratista piensa comprar una gran cantidad de lámparas de alta intensidad a cierto fabricante. Este asegura al contratista que la duración promedio de las lámparas es de 1000 horas con una desviación estándar igual a 80 horas: El contratista decide comprar las lámparas sólo si una muestra aleatoria de 64 de estas da como resultado una vida promedio de por lo menos 1000 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que el contratista adquiera las lámparas?

Respuesta.- Sean, $\mu = 1000$, $n = 64$ y $\sigma = 80$. Entonces,

$$P\left(Z > \frac{1000 - 1000}{80/\sqrt{64}}\right) = 0.5.$$

```
mu = 1000
sd = 80
n = 64
pnorm(1000,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.5
```

7.17

Un inspector federal de pesos y medidas visita una planta de empackado para verificar que el peso neto de las cajas sea el indicado en estas. El gerente de la planta asegura al inspector que el peso promedio de cada caja es de 750 gr. con una desviación estándar de 5 gr. El inspector selecciona, al azar, 100 cajas y encuentra que el peso promedio es de 748 gr. Bajo estas condiciones, ¿qué tan probable es tener un peso de 748 o menos? ¿Qué actitud debe tomar el inspector?

Respuesta.- Sean, $\mu = 750$, $n = 100$ y $\sigma = 5$. Entonces,

$$P\left(Z < \frac{748 - 750}{5/\sqrt{100}}\right) = 0.000031671245.$$

```
mu = 750
sd = 5
n = 100
pnorm(748,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 3.167124e-05
```

El inspector confirma que el peso es el que se dio cómo hipótesis.

7.18

En la fabricación de cojinetes para motores, se sabe que el diámetro es de 5 cm. con una desviación estándar igual a 0.005 cm. El proceso es vigilado en forma periódica mediante la selección aleatoria de 64 cojinetes, midiendo sus correspondientes diámetros. El proceso no se detiene mientras la probabilidad de que la media muestral se encuentre entre dos límites especificados sea de 0.95. Determinar el valor de estos límites.

Respuesta.- Sean $\mu = 5$, $\sigma = 0.005$, $n = 64$ y $Z_{0.95} = 1.6448$. Entonces

$$P\left(\frac{\theta_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z < \frac{\theta_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.95.$$

Sea $Z_{0.95} = 1.644854$. Igualando $Z = \frac{\theta - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.644854$, entonces despejando θ , tenemos

$$\theta = \mu \pm Z \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

Pero dado, que Z se encuentra entre un límite superior e inferior entonces dividimos Z por 2. Es decir,

$$\theta = \mu \pm Z/2 \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

Por lo tanto

$$\theta_1 = 5 + 1.6448/2 \cdot 0.005/\sqrt{64} = 5.000514.$$

$$\theta_2 = 5 - 1.6448/2 \cdot 0.005/\sqrt{64} = 4.999486.$$

```
Z = qnorm(0.95)
mu = 5
sigma = 0.005
n = 64
mu+Z/2*sigma/sqrt(n)
```

```
## [1] 5.000514
```

```
mu-Z/2*sigma/sqrt(n)
```

```
## [1] 4.999486
```

7.19

En la producción de cierto material para soldar se sabe que la desviación estándar de la tensión de ruptura de este material es de 25 libras. ¿Cuál debe ser la tensión de ruptura promedio del proceso si, con base en una muestra aleatoria de 50 especímenes, la probabilidad de que la media muestral tenga un valor mayor que 250 libras es de 0.95?

Respuesta.- Sean $\sigma = 25$, $n = 50$, $\theta = 250$ y $Z_{0.95} = 1.6448$. Entonces,

$$Z = \frac{\theta - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Despejando μ , tenemos

$$\mu = \theta - Z \cdot \sigma/\sqrt{n} = 250 - 1.6448 \cdot 25/\sqrt{50} = 255.8154.$$

```
Z = qnorm(0.05)
sigma=25
n=50
theta=250
theta-Z*sigma/sqrt(n)
```

```
## [1] 255.8154
```

7.20

Genere 50 muestras, cada una de tamaño 25 a partir de una distribución normal con media 60 y desviación estándar 10. Calcule la varianza de cada muestra mediante el empleo de (7.14).

a)

Obtener la media y la varianza de S^2 mediante el empleo de los 50 valores calculados. ¿Cómo son estos valores al compararlos con los proporcionados por las extensiones (7.17) y (7.18)?.

Respuesta.-

b)

Agrupar los 50 valores calculados de S^2 y graficar las frecuencias relativas. Coméntese sobre los resultados.

Respuesta.-