1

Algunas distribuciones continuas de probabilidad

1.1. La distribución normal

Definición 1.1. se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0 \end{array}$$

Si se obtienen las dos primeras derivadas de $f(x;\mu,\sigma)$ con respecto a x y se igualan a cero, se tiene que el valor máximo de $f(x;\mu,\sigma)$ ocurre cuando $x = \mu$, y los valores $x = \mu \pm \sigma$ son las abcisas de los dos puntos de inflexión de la curva.

Demostrar que la definición 5.1 es una función de densidad de probabilidad.

Demostración.- El que la función sea no negativa se satisface, ya que $f(x;\mu,\sigma) > 0$ para $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$. Para demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)\,dx = 1.$$

Sea

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

el valor de la integral y aplíquese la transformación lineal $y = (x-\mu)/\sigma$ de manera tal que $x = \sigma y + \mu$ y $dx = \sigma\,dy$. Esto da como resultado:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy.$$

Si puede demostrarse que $I^2 = 1$, puede deducirse que $I = 1$ puesto que $f(x;\mu,\sigma)$ tiene un valor positivo. De acuerdo con lo anterior:

$$I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(y^2+z^2)}{2}}\,dydz,$$

en donde se ha escrito el producto de las dos integrales como una doble integral ya que las funciones de z son contantes con respecto a y como también de manera viceversa. Al cambiar de coordenadas rectangulares representadas por x e y, a coordenadas polares r y θ, en donde $y = r\cos\theta$ y $z = r\operatorname{sen}\theta$. Esto es:

$$y^2 + z^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta = r^2$$

y el elemento de área $dydz$, en coordenadas rectangulares se reemplaza por $rdrd\theta$ en coordenadas polares. Dado que los límites $(-\infty, \infty)$ tanto para y como para z generan el plano completo yz, el plano correspondiente a r y a θ se genera mediante el empleo de los límites $(0, 2\pi)$ para θ y $(0, \infty)$ para r. De esta forma se tiene:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{x} e^{-r^2/2}\, rdrd\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{x} e^{-r^2/2}\, rdr = \frac{\theta}{2\pi}\bigg|_0^{2\pi} \cdot [-e^{-r^2/2}]\bigg|_0^{x} = 1.$$

La media de una variable aleatoria distribuida normalmente se encuentra definida por:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Se pretende demostrar que $E(X) = \mu$. Supóngase que a $E(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$ se suma y se resta

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

La identidad se mantiene, pero después de reacomodar términos se tiene

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx + \mu \end{aligned}$$

dado que el valor de la segunda integral es uno. Al afectar un cambio de variable de integración de manera tal que $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, $x = \sigma y + \mu$ y $dx = \sigma dy$, se tiene:

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2/2}\, dy + \mu = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu.$$

El lector recordará de sus cursos de cálculo que la última integral es cero porque el integrando es una función impar y la integración se lleva a cabo sobre un intervalo simétrico alrededor de cero.

Si el valor máximo de la función de densidad de probabilidad normal ocurre cuando $x = \mu$ este es la media, la mediana y la moda de cualquier variable aleatoria distribuida aleatoriamente.
Para encontrar los demás momentos, se determinará la función generadora de momentos. Por definición:

$$m_{X-\mu}(t) = E\left[e^{t(X-\mu)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-\mu)}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu)\right]}\, dx.$$

de donde se completa el cuadrado en el interior del paréntesis rectangular y se tiene:

$$(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu) = (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu) + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2 = (x-\mu-\sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2.$$

Por lo que,

$$m_{X-\mu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{-\frac{x-(\mu+\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}}\, dx = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

dado que el integrando junto con el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ es una función de densidad de probabilidad normal con parámetros $\mu+\sigma^2 t$ y σ.

Al desarrollar $e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ en serie de potencias se tiene:

$$m_{X-\mu}(t) = 1 + \frac{(\sigma t)^2}{2} + \frac{(\sigma t)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{(\sigma t)^6}{8 \cdot 3!} + \frac{(\sigma t)^8}{16 \cdot 4!} + \dots$$

Cuando las potencias impares de t no se encuentran presentes, todos los momentos centrales de X de orden impar son cero, de esta forma se asegura la simetría de la curva.

La segunda derivada de $m_{X-\mu}(t)$ evaluada en $t=0$ es **la varianza** y está dada por:

$$Var(X) = \left.\frac{d^2 m_{X-\mu}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \sigma^2 + \frac{12t^2\sigma^4}{4 \cdot 2!} + \frac{30t^4\sigma^6}{8 \cdot 3!} + \dots\Big|_{t=0} = \sigma^2;$$

De esta manera **la desviación estándar es σ**. De manera similar, la cuarta derivada de $m_{X-\mu}(t)$ evaluada en $t=0$ es el cuarto momento central, el cual es:

$$\mu_4 = \left.\frac{d^4 m_{X-\mu}(t)}{dt^4}\right|_{t=0} = 3\sigma^4 + \frac{360t^2\sigma^6}{8 \cdot 3!} + \dots\Big|_{t=0} = 3\sigma^4$$

De acuerdo con lo anterior, para cualquier distribución normal el coeficiente de asimetría es $\alpha_3(X) = 0$, mientras que la curtosis relativa es $\alpha_4(X) = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$. Para momentos alrededor del cero, puede determinarse la función generadora de momentos centrales o viceversa. Dado que

$$m_{X-\mu}(t) = E\left[e^{t(X-\mu)}\right] = e^{-\mu t}E\left[e^{tX}\right] = e^{-ut}m_X(t),$$

para una distribución normal

$$e^{-\mu t}m_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

y

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

La probabilidad de que una variable aleatoria normalmente distribuida X sea menor o igual a un valor específico, x está dada por **función de distribución acumulativa**

$$P(X \le x) = F(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Sea Z una variable aleatoria definida por la siguiente relación:

$$Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$$

en donde μ y σ son la media y la desviación estándar de X, respectivamente. De acuerdo con lo anterior, Z es una variable aleatoria estandarizada con media cero y desviación estándar uno. Así,

$$P(X \le x) = P[X \le (x-\mu)/\sigma] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{\frac{-z^2}{2}}\sigma\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz.$$

El integrando junto con el factor $1/\sqrt{2\pi}$ es la **función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria normal estandarizada Z**. De donde

$$F_X(x;\mu,\sigma) = F_Z(z;0,1)$$

Para cualquier valor específico de z, el correspondiente valor en la tabla es la probabilidad de que la variable aleatoria normal estándar Z sea menor o igual a z; esto es

$$P(Z \leq z) = F_Z(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt.$$

La notación $X \sim N(\mu,\sigma)$ denotará que la variable X se encuentra distribuida normalmente con media μ y desviación estándar σ.

Determinaremos la probabilidad de que un valor de X se encuentre entre a y b, si $X \sim N(\mu,\sigma)$. Por definición:

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx,$$

pero, mediante el empleo de $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} (x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx + \mu$ se tiene:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = F_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma};0,1\right) - F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma};0.1\right)$$

Teorema 1.1. Sea X una variable aleatoria binomial con media np y desviación estándar $\sqrt{np(1-p)}$. La distribución de la variable aleatoria tiende a la normal

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

estándar conforme el número de ensayos independientes $n \to \infty$.

Demostración.- La demostración que aquí se presenta se basa en el hecho de que una función generadora de momentos define, de manera única, a una distribución. Se demostrará que la función generadora de momentos de Y tiende a una distribución normal conforme $n \to \infty$. X es una variable aleatoria binomial:

$$m_X(t) = [(1-p) + pe^t]^n$$

Entonces:

$$m_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left[e^{\frac{t(X-np)}{\sqrt{np(1-p)}}}\right] = e^{\frac{npt}{\sqrt{np(1-p)}}} \cdot E\left[e^{\frac{tX}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]$$

donde $E\left[e^{\frac{tX}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]$ es la función generadora de momentos de X con argumento $\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}$. De esta forma se tiene:

$$m_y(t) = e^{\frac{-npt}{\sqrt{np(1-p)}}} \left[(1-p) + pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]^n;$$

pero:

$$e^{-\frac{npt}{\sqrt{np(1-p)}}} = \left(e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^n$$

y:

$$m_y(t) = \left[(1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}} - \frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]^n = \left[(1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{\frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]^n.$$

En la última expresión, al expander ambas funciones exponenciales en una serie de potencias, se tiene:

$$\begin{aligned}(1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} &= (1-p) - \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)p^2t^2}{2np(1-p)} + \text{términos en } (-1)^k\left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, \ k=3,4,\dots \\ &= (1-p) - \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{pt^2}{2n} + \text{términos en } (-1)^k\left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, \ k=3,4,\dots\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}pe^{-\frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}}} &= p + \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)pt^2}{2np(1-p)} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, \ k=3,4,\dots \\ &= p + \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)t^2}{2n} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, \ k=3,4,\dots\end{aligned}$$

Al sustituir los resultados anteriores en $m_Y(t)$ y agrupar términos,

$$m_Y(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \text{ términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}\right]^n, \ k=3,4,\dots$$

Dado que todos los términos que contiene a $(1/n)^{k/2}, \ k=3,4,\dots$, tienen exponentes mayores que uno, puede factorizarse el término $1/n$. De esta forma se tiene que:

$$m_Y(t) = \left[1 + \frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2} + \text{ términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{(k-2)/2}\right)\right]^n, \ k=3,4,\dots$$

Por definición:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u$$

entonces, conforme $n \to \infty$, la última expresión para $m_Y(t)$ es idéntica a esta forma, con u representando a todo lo que se encuentra entre paréntesis de esta expresión. Pero conforme $n \to \infty$, todos los términos de u, excepto el primero, tienen un valor de cero, dado que todos tienen potencias positivas de n en sus denominadores. De acuerdo con lo anterior.

$$\lim_{n\to\infty} m_Y(t) = e^{t^2/2},$$

que es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar.

La aproximación del teorema anterior es adecuada tanto como $np > 5$ cuando $p \leq 1/2$, o cuando $n(1-p) > 5$ para $p > 1/2$. Esto es

$$P(a \leq X_B \leq b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_N \leq \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

en donde Z_N es $N(0,1)$. Como también

$$P(X_B = x) \approx P\left(\frac{x-np-1/2}{\sqrt{no(1-p)}} \leq Z_N \leq \frac{x-np+1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

por lo que se puede modificar la expresión de desigualdad de la siguiente manera:

$$P(a \leq X_B \leq b) = P\left(\frac{a-np-0.5}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_N \leq \frac{b-np+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

1.2. La distribución uniforme

Definición 1.2. Se dice que una variable aleatoria X está distribuida uniformemente sobre el intervalo (a, b) si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

La función de distribución acumulativa se determina de manera fácil y está dada por

$$P(X \leq x) = F_{x;a,b} = \frac{1}{b-a} \int_a^x dt = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

Se sigue entonces que para cualquier subintervalo (a_1, b_1) interior a (a, b):

$$P(a_1 \leq X \leq b_1) = F(b_1; a, b) - F(a_1; a, b) = \frac{b_1 - a_1}{b - a}.$$

El **valor esperado** de una variable aleatoria distribuida de manera uniforme es

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \frac{a+b}{2}.$$