Vectores aleatorios bidimensionales

Christian Limbert Paredes Aguilera

16/2/2022

VEctores aleatorios bidimencionales

Variables aleatorias bidimencionales

Redordemos que una variable aleatoria X es una aplicación que toma valores numéricos para cada resultado de un experimento aleatorio:

$$\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longrightarrow & X(w) \end{array}$$

A partir de la definición anterior, generalizamos la noción de variable aleatoria unidimencional a variable aleatoria bidimencional.

Definición de variable aleatoria bidimencional

Dado un experimentos aleatorio con espacio muestral Ω, definimos variable aleatoria bidimencional (X, Y) a toda aplicación

$$\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ w & \longrightarrow & (X(w), Y(w)) \end{array}$$

La probabilidad de que la variable bidimencional pertenezca a una cierta región del plano B se define de la forma siguiente:

$$P((X, Y) \in B) = P\{w \in \Omega, \mid (X(w), Y(w)) \in B\}$$

o sea, la probabilidad anterior es la probabilidad del suceso formado por los elementos de $w \in \Omega$ que cumplen que su imagen por la variable aleatoria bidimencional (X, Y) esté en B.

Función de distribución conjunta

Definición de función de distribución conjunta:

Dada una variable bidimencional (X, Y), definimos su función de distribución conjunta F_{XY} a la función definida sobre $\mathbb{R}^2$ de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rcl} F_{XY}:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \end{array}$$

Se buscará que tan probable será que un punto caiga en una región del plano cartesiano.

Entonces la función de distribución conjunta en el valor (x, y) es la probabilidad del suceso formado por aquellos elementos tal que la imagen por la variable aleatoria bidimensional (X, Y) caen dentro de la región sombreada en el gráfico anterior:

$$F_{XY}(x, y) = P\{w \in \Omega | (X(w), Y(w)) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y])\} = P\{w \in \Omega | X(w) \leq Y(w) \leq y\}$$

Propiedades Sea (X, Y) una variable bidimensional. Sean F_{XY} su función de distribución conjunta. Dicha función satisface las propiedades siguientes:

- La función de distribución conjunta es no decreciente en cada una de las variables:

$$\text{Si } x_1 \leq x_2, \text{ y } y_1 \leq y_2, \text{ entonces } F_{XY}(x_1, y_1) \leq F_{XY}(x_2, y_2).$$

- $F_{XY}(x, -\infty) = F_{XY}(-\infty, y) = 0, \ F_{XY}(\infty, infty) = 1$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- Las variables aleatorias X e Y se llaman variables aleatorias marginales y sus funciones de distribución F_X y F_Y pueden hallarse de la forma siguiente como función de la función de distribución conjunta F_{XY}:

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty), \ F_Y(y) = F_{XY}(\infty . y),$$

  para todo $x, y \in \mathbb{R}$
- La función de distribución conjunta es continua por el norte y por el este:

$$\lim_{x \to a^+} F_{XY}(x, y) = \lim_{x \to a, x > a} F_{XY}(x, y) = F_{XY}(a, y),$$

$$\lim_{x \to b^+} F_{XY}(x, y) = \lim_{x \to b, x > b} F_{XY}(x, y) = F_{XY}(x, b),$$

  para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
- Dados $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$, consideramos B el rectángulo de vértices (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) y (x_2, y_2): $(x_1, y_2] \times (y_1, y_2]$. Entonces,

$$P((X, Y) \in B) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) - F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1)$$