1

Convexidad y Optimización

1.1 Introducción

$$(P)\begin{cases} \min & f_0(x) \\ & \\ s.a. & f_1(x) \leq b_1 \\ & f_2(x) \leq b_2 \\ & \vdots \\ & f_m(x) \leq b_m. \end{cases} \qquad \begin{array}{rl} f_i: & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f_0: & \text{Función objetivo.} \\ f_j: & \text{Función Restricción donde } j = 1, \dots, m. \end{array}$$

- Las funciones objetivos en economía se les puede llamar función de coste.
- Las desigualdades tiene un truco, si multiplicamos por (-1) tenemos en la forma que decidamos.
- Maximizar es lo mismo que minimizar. Por lo que minimizaremos las funciones.

El objetivo de (P) es encontrar x^* el optimo ($\arg\min$) que cumple

$$f_0(x^*) \leq f_0(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n / f_j(x) \leq b_j,\ j = 1, \dots, m.$$

Será en cualquier x que cumple las restricciones. Los puntos que no cumplen las condiciones no sirven para nada.

Al valor $f_0(x^*)$ se le llama valor optimo.

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Existirá algunas funciones que su dominio sera tramposo.

Los Puntos factibles son los $x \in \mathbb{R}^n / f_j(x) \leq b_j,\ j = 1, \dots, m$.

- Si los problemas son lineales se llama programación lineal.

- Cuando es convexa se llama optimización convexa.
- La habilidad es de identificar las restricciones y pasarlas a convexas.

Ejemplo 1.1 Sean $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^k$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Diremos que el un vector cualquiera sera vector columna.

Ahora, el problema será una minimización global dada por:

$$\begin{cases} \min: & \|A\mathbf{x} - b\|_2^2 \\ s.a. & \emptyset. \end{cases}$$

El subindice $_2$ significa la normal Euclidea. Que es la distancia normal que existe en $\mathbb{R}^2$.

El objetivo será encontrar la x donde la operación dada será la menor posible.

Nota Imaginemos que tenemos

$$\{\min \quad f(x)$$

$$\{\min \quad f_0^2(x)$$

Si las función f_0 es positiva las dos formas son equivalentes. El valor optimo no será el mismo porque lo estoy elevando al cuadrado, pero el punto optimo lo será. Porque las funciones son monótomas crecientes. Si el valor al cuadrado me simplifica entonces podemos utilizarla. Esto nos permite que si no tengamos una función convexa podamos convexificarla.

Por diferenciabilidad:

$$f_0(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \langle Ax - b, Ax - b\rangle.$$

Notación.- Podemos escribir Ax como

$$Ax = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}}_{A^1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}}_{A^2} x_2 + \cdots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}}_{A^n} x_n = x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n.$$

A^1 = A super 1 como columna, y A_1 = A super 1 como fila.

Ahora, en términos de filas. Si escribimos los vectores A en columna

$$A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_k^T \end{pmatrix}$$

Donde,

$$Ax = \begin{pmatrix} A_1^T x \\ A_2^T x \\ \vdots \\ A_n^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A_1^T, x \rangle \\ \langle A_2^T, x \rangle \\ \vdots \\ \langle A_n^T, x \rangle \end{pmatrix}$$

Intentaremos demostrar el punto donde las parciales de $f_0 = 0$. Para ello, encontraremos

$$\begin{aligned} D_i f_0 &= D_i \left(\langle Ax - b, Ax - b \rangle \right) \\ &= \langle D_i \left(Ax - b \right), Ax - b \rangle + \langle Ax - b, D_i \left(Ax - b \right) \rangle \\ &= 2 \langle Ax - b, D_i \left(Ax - b \right) \rangle. \end{aligned}$$

Veamos la parcial de $D_i \left(Ax - b \right)$.

$$\begin{aligned} D_i \left(Ax - b \right) &= D_i \left(x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n - b \right) \\ &= A^i. \end{aligned}$$

Dado que b que es constante vale cero, y donde todos los suman que no estén las x_i también valen cero.

Por lo tanto,

$$D_i f_0 = 2 \langle Ax - b, A^i \rangle.$$

Luego,

$$2 \langle Ax - b, A^i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \langle Ax - b, A^i \rangle = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Observemos que,

$$\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} \langle Ax - b, A^1 \rangle \\ \langle Ax - b, A^2 \rangle \\ \vdots \\ \langle Ax - b, A^n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_1)^T \\ (A_2)^T \\ \vdots \\ (A_n)^T \end{pmatrix} (Ax - b) = A^T (Ax - b).$$

En funciones convexas el extremo local será el mínimo global.

$$A^T (Ax - b) = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad A^T A x = A^T b.$$

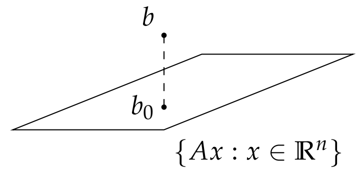
Que es una ecuación normal.

Argumentos geométricos

Sera el mismo calcular el mínimo de la distancia, calcular:

$$\min \|Ax - b\|_2^2 = d(b_i, Ax)^2$$

Donde Ax tendrá la forma geométrica, de un subespacio vectorial. en el caso de $\mathbb{R}^3$ será un plano.



Si $b \in \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in \mathbb{R}^n : Ax^* = b$. El valor optimo $f_0(x^*) = 0$.

Si $b \notin \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$, $f_0(x^*) = d(b, b_0)^2$.

Ahora, cual es el optimo?; es decir cual es el x^*

Donde la solución es:

$$x^* \in \mathbb{R}^n : Ax^* = b_0.$$

Aquí, b_0 está en el plano, si estamos en $\mathbb{R}^3$. ¿Cómo llegamos algebraicamente?:

$$\begin{aligned}
b - b_0 \perp \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \quad &\Leftrightarrow \quad b - b_o \perp A^i,\ i = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow \quad \langle b - b_0, A^i \rangle = 0,\ i = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow \quad \langle b - Ax^*, A^i \rangle = 0,\ i = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow \quad \langle Ax^* - b, A^i \rangle = 0,\ i = 1, \dots, n \\
&\leftrightarrow \quad A^T A x^* = A^T b.
\end{aligned}$$

■

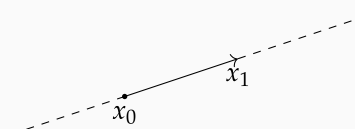
Las ecuaciones normales vienen dadas por la perpendicularidad.

1.2 Conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$

El dominio tendrán que ser conjuntos convexos o Dominio efectivo.

Definición 1.1 **Lineal.**

$$L(x_0, x_1) := \{x_0 + \lambda(x_1 - x_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$



- Cuando λ vale 1 me sale x_1 cuando valga cero me sale x_0 cuando es positivo va hacia la derecha y cuando es negativo va hacia la izquierda.
- Toda la recta nos da un concepto que denominamos Afín.
- Para la convexidad no es necesario tener la linea, solo necesitaremos un segmento.

$$\{x_0 + \lambda(x_1 - x_0) : \lambda \in [a, b]\}$$

- El segmento importante será el intervalo que denotaremos como:

$$[x_0, x_1] := \{x_0 + \lambda(x_1 - x_0) : \lambda \in [0, 1]\} = \{(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 : \lambda \in [0, 1]\}$$

  Es cualquier punto que este entre x_0 y x_1 del gráfico de arriba.

Definición 1.2 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice **Afín**, si para todo $x, y \in A$ se tiene que la $L(x, y) \subseteq A$. (Subespacios vectoriales desplazados).

- Un circulo no es afín ya que la linea es infinita y un circulo no.
- Un plano podría ser Afín
- La recta es afín
- Todo $\mathbb{R}^n$ es afín.
- Un único punto también es afín, dado que $x = y$.
- La diferencia entre espacio vectorial y espacio afín es que el espacio afín esta desplazada; es decir, no necesariamente pasa por el cero como en un subespacio vectorial.

Manejar el concepto de afín con lineas es un poco incomodo, entonces se utiliza el concepto de combinación afín

Definición 1.3 Una **combinación afín** de los vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un vector de la forma

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k.$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

- Lo que decimos que es una combinación lineal de x_0 y x_1.

- Lo demás puntos fuera del segmento son las combinaciones lineales de x_0 y x_1.

Teorema 1.1 A es afín sii A contiene toda combinación afín de sus puntos.

Demostración.- Primero, tomemos puntos arbitrarios $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ en A tal que

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$$

donde $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Ahora, consideremos dos puntos x_i, x_j de z. Dado que A es afín, entonces $L(x_i, x_j) \subseteq A$, para todo x_i, x_j. Esto implica que z está en A. Intuitivamente, si

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_4 \lambda_4, \quad \ldots, \quad \lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_k x_k$$

están en A. Entonces, z tendrá que estar en A.

Para demostrar la otra implicación, tomemos dos puntos cualesquiera x e y en A. Entonces, $L(x, y) \subseteq A$. Por lo tanto, A es afín. ∎

- Quiere decir que este conjunto es estable para combinaciones lineales muy similar al concepto de subespacio vectorial.

Notación 1.1 La suma de Minkowski es la operación de conjuntos; es decir, si $A, E \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$A = x_0 + E = \{x_0 + e : e \in E\} \quad \text{o} \quad E = A - x_0 = \{a - x_0 : a \in A\}.$$

Es sencillamente trasladar los puntos del plano y desplazarlos o moverlos.

Nota 1.1 La definición de subespacio se refiere a tomar dos escalares y dos vectores, realizar la combinación lineal, donde esta combinación lineal no se saldrá del conjunto dado.

Teorema 1.2 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es afín sii existe un $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacio vectorial tal que $A = x_0 + E$ para todo $x_0 \in A$.

Demostración.- Supongamos que A es afín y fijamos $x_0 \in A$. Intentaremos probar que $E = A - x_0$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, esto es equivalente a decir que:

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, e_i, e_2 \subseteq E \quad \Rightarrow \quad \lambda e_i + \mu e_2 \in E.$$

Probemos que $\lambda e_1 + \mu e_2 \in E$; en otras palabras probaremos que $\lambda e_1 + \mu e_2$ es $a - x_0$.

$$\begin{aligned} \lambda e_1 + \mu e_2 &= \lambda(a_1 - x_0) + \mu(a_2 - x_0) \\ &= \lambda a_1 + \lambda a_2 - \lambda x_0 - \mu x_0 \\ &= \lambda a_1 + \lambda a_2 - \lambda x_0 - \mu x_0 + x_0 - x_0 \\ &= \lambda a_1 + \lambda a_2 + (1 - \lambda - \mu)x_0 - x_0. \end{aligned}$$

Observemos que $\lambda a_1 + \lambda a_2 + (1 - \lambda - \mu)x_0$ está en A, dado a que $\lambda + \mu + (1 - \lambda - \mu) = 1$. Por lo tanto,

$$A - x_0 = E.$$

Es un subespacio vectorial.

Ahora, sabemos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $A = E + x_0$ para todo $x_0 \in A$ es afín. Entonces, E es un subespacio vectorial. Para demostrar que A es afín, probaré que cualquier combinación afín de elementos de A sigue estando en A. Sean,

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}\ ,\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k : \sum \lambda_i = 1.$$

De donde,

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k &= \lambda_1(e_1 - x_0) + \lambda_2(e_2 - x_0) + \cdots + \lambda_k(e_k - x_0) \\ &= \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) x_0 \end{aligned}$$

Observemos que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$ es una combinación lineal afín el cual existe en E y por definición, $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) = 1$. Por lo tanto,

$$E + x_0 = A.$$

$\blacksquare$

Definición 1.4 **Envoltura Afín.**

La envolura afín de B, $Aff(B)$, es el menor conjunto afín que contiene a B. Esto implica que es el conjunto de las combinaciones afines de elementos de B o es la intersección de los conjuntos afines que contienen a B

Definición 1.5 Si A es $Affin$ se llama "dimensión afín de A" a la dimensión de su espacio vectorial.

- Dimensión 0 un punto.

- Dimensión 1 una recta.
- Dimensión 2 una plano.

Ejemplo 1.2 Dado $C \in \mathbb{R}^n$ afín. Siempre existirán una matriz $A \in \mathcal{M}_{p\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}.$$

Solución.- Cuál es el conjunto lineal asociado?, será el núcleo de la aplicación lineal; es decir,

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

Cualquier solución de $x_0 \in C$, de modo que $Ax_0 = b$. Tomando un punto de C y otro de E, tenemos

$$A(x_0 + e) = Ax_0 + Ae = b + 0 = b.$$

Por lo tanto,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} = x_0 + E.$$

Así, el conjunto afín no es más que el traslado del espacio vectorial. ■

Definición 1.6 **Topología de $\mathbb{R}^n$.**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$.

1) $a \in A$ está en el interior de A $\left(a \in \text{int}(A) \text{ o } \mathring{A}\right)$, cuando existe $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subseteq A$.

$$B(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le \delta.\}.$$

Por ejemplo en $\mathbb{R}^2$ será un circulo y $\mathbb{R}^3$ será una esfera.

2) A se dice abierto si $A = \text{int}(A) = \mathring{A}$. (Los puntos frontera del conjunto A serán los abiertos).

3) Decimos que $c \in \mathbb{R}^n$ está en el cierre (o clausura) de A, cuando $\exists \{a_n\} \in A | a_n \to c$.

4) Decimos que A es cerrado cuando $A = \overline{A}$ donde $\{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ está en el cierre de } A\}$. (El cierre se divide en los puntos del interior y los puntos frontera).

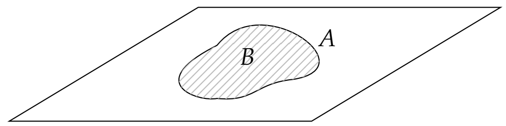
5) Se llama frontera de A, ∂A a la intersección $\overline{A} \cap \left(\overline{\mathbb{R}\backslash A}\right) = \overline{A} \backslash \text{int}(A)$.

6) $a \in \text{relint}(A)$ si existe $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \cap Aff(A) \subseteq A$.
Lo que decimos es que la bola puede ser muy grande y vivir en $\mathbb{R}^3$ e intersecar en el plano, donde se corta transversalmente para proyectar la imagen.

- El concepto de punto interior será importante, porque me dice que me puedo acercar al punto a desde todas las direcciones, y si es relativo interior me puedo acerca por todos los lados del conjunto.

- El punto de adherencia o clausura es un punto que me puedo acercar de alguna forma pero no de todas formas.

Ejemplo 1.3 Dibujemos un plano



- B es el interior con la frontera.
- A es la frontera.
- El objetivo será encontrar el punto optimo de un esfera que está proyectada en este plano.
- El conjunto tendrá que ser convexo.

Veamos algunas propiedades de este conjunto.

1) A es cerrado.- Cualquier punto que ponga en B me puedo acercar por puntos de B.
2) B cerrado.
3) $\mathring{A} = \emptyset$.- Si yo ponga una bola, se saldrá del conjunto A.
4) $\mathring{B} = \emptyset$.- Ya que no existirá en el plano ninguna esfera.
5) $relint(A) = \emptyset$.
6) $relint(B) = B \backslash A$.

■

Definición 1.7 **Combinación convexa.**

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Al vector

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$$

se le llama combinación convexa de los puntos $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

La única diferencia entre combinación convexa y afín es que sean positivos.

Observación 1.1 La definición para 2 puntos $\{x_1, x_2\}$ nos de las combinaciones convexas,

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \qquad \lambda \geq 0, (1-\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0,1] .$$

Esto es el segmento,

$$\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : \lambda \in [0,1]\} = [x_1, x_2] .$$

Nos quedamos con el segmento que los une, eso nos permitirá utilizar las propiedades de los números reales. Por lo que podremos realizar análisis.

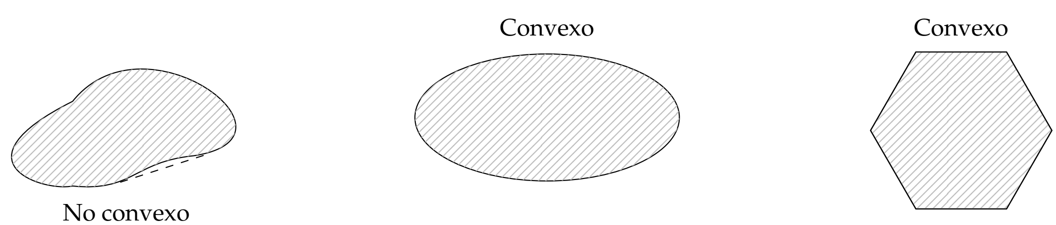
Definición 1.8 **convexo.**

Un conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ se dice convexo cuando C contiene las combinaciones convexas de sus puntos, (Decimos que C es cerrado para las combinaciones convexas), si y sólo si

$$\forall x_1, x_2 \in C \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq C.$$

Un conjunto es convexo si dados dos puntos el segmento que los une se queda adentro.

Ejemplo 1.4



■

Del gráfico 1) ¿Cuál es el menor conjunto convexo que lo contiene?

Definición 1.9 se llama Envoltura convexa de A al menor conjunto convexo que lo contiene $\Leftrightarrow$ la intersección de todos los convexos que contienen a A, denotado por $co(A)$. Es equivalente a decir que

$$co(A) = \{\text{Combinación convexa de puntos de A.}\}$$

Ejercicio 1.1 Demostrar que la intersección de conjuntos convexos es convexo.

Demostración.- ■

Definición 1.10 **Cono.**

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama cono si y sólo si

$$\lambda x \in C \text{ si } x \in C,\ \lambda \geq 0.$$

Contiene los rayos que pasan por el cero e intersecan a un punto dado.

- Un cono siempre contiene al origen.
- La envoltura cónica de un conjunto es $con(A) = \{\lambda : \lambda \geq 0, a \in A\}$ la intersección de todos los conos que contiene a A.
- Un cono C es convexo si y sólo si

$$\lambda_1, \lambda_2 \in C \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

El hiperplano es un caso particular del estudio convexo.

Definición 1.11 **Hiperplano.**

$H \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **hiperplano** si existe $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = a^T x = 0\right\} = a^\perp$