Universidad:	**Mayor de San Ándres.**
Asignatura:	**Álgebra Lineal I**
Práctica:	**1.**
Alumno:	**PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Ejercicio 1. Demostrar que si dos sistemas homogéneos de ecuaciones lineales con dos incógnitas tienen las mismas soluciones, son equivalentes.

Demostración.- Consideremos los dos sistemas homogéneos con dos incógnitas (x_1, x_2).

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcl} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 & = & 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 & = & 0 \\ \vdots & & \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Sean los escalares $c_1, c_2, \ldots c_m$. De donde multiplicamos k ecuaciones del primer sistemas por c_k y sumamos por columnas,

$$(c_1a_{11} + \ldots + c_ma_{m1})\, x_1 + (c_1a_{12} + \ldots + c_ma_{m2})\, x_2 = 0$$

Luego comparando esta ecuación con todas las ecuaciones del segundo sistema y utilizando también el hecho de que ambos sistemas tiene las mismas soluciones, obtenemos

$$c_1a_{11} + c_2a_{21} + \ldots + c_ma_{m1} = b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{m1}$$

y

$$c_1a_{12} + c_2a_{22} + \ldots + c_ma_{m2} = b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{m2}.$$

Lo que demuestra que el segundo sistema es una combinación lineal del primer sistema.

De manera similar podemos demostrar que el primer sistema es una combinación lineal del segundo sistema. Sean los escalares $c_1, c_2, \ldots c_m$, entonces

$$(c_1b_{11} + \ldots + c_mb_{m1})\, x_1 + (c_1b_{12} + \ldots + c_mb_{m2})\, x_2 = 0$$

Después, se tiene

$$c_1b_{11} + c_2b_{21} + \ldots + c_mb_{m1} = a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$$

y

$$c_1b_{12} + c_2b_{22} + \ldots + c_mb_{m2} = a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}.$$

Así concluimos que ambos sistemas son equivalentes.

Ejercicio 2. Demostrar que todo subcuerpo del cuerpo de los números complejos contiene a todo número racional.

Demostración.- Sea F un subcampo en $\mathbb{C}$. De donde tenemos $0 \in F$ y $1 \in F$. Luego ya que F es un subcampo y cerrado bajo la suma, se tiene

$$1 + 1 + \ldots + 1 = n \in F.$$

De este modo $\mathbb{Z} \subseteq F$. Ahora, sabiendo que F es un subcampo, todo elemento tiene un inverso multiplicativo, por lo tanto $\dfrac{1}{n} \in F$. Por otro lado vemos también que F es cerrado bajo la multiplicación. Es decir, para $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ tenemos

$$m \cdot \frac{1}{n} \in F \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} \in F.$$

Así, concluimos que $\mathbb{Q} \subseteq F$.

Ejercicio 3. Si

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}}$$

Hallar todas las soluciones de $\boldsymbol{AX = 0}$ reduciendo $\boldsymbol{A}$ por filas.

Respuesta.- Se efectuará una sucesión finita de operaciones elementales de filas en A, indicando el tipo de operación realizada.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_1 \to R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_2 - 2R_1 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - 3R_1 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad R_3 - \frac{8}{7}R_2 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos: $\dfrac{6}{7}x_3 = 0$, $7x^2 + x^3 = 0$ y $x_1 - 3x_2 = 0$. De donde

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Ejercicio 4. Si

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

Hallar todas las soluciones de $\boldsymbol{AX = 2X}$ y todas las soluciones de $\boldsymbol{AX = 3X}$ (el símbolo $\boldsymbol{cX}$ representa la matriz, cada elemento de la cual es $\boldsymbol{c}$ veces el correspondiente elemento de $\boldsymbol{X}$).

Demostración.- Sea $AX = 2X$, entonces

$$AX = 2X \quad \Rightarrow \quad AX - 2X = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)X = 0.$$

De donde,

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo tenemos,

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 - R_1 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 + \frac{1}{4}R_1 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, las soluciones estarán dadas por,

$$-x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_3 \qquad \text{y} \qquad 4x_1 - 4x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Por lo tanto,

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

Por otro lado si $AX = 3X$, entonces

$$AX = 3X \quad \Rightarrow \quad AX - 3X = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - 3I)X = 0.$$

De donde,

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo tenemos,

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 + 4R_1 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 + 3R_1 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 - \frac{4}{5}R_2 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, $0x_3 = 0 \;\Rightarrow\; x_3 \in \mathbb{R}$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ por lo tanto,

$$x_3 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = 0.$$

Ejercicio 5. Sea

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$$

es una matriz $\mathbf{2 \times 2}$ con elementos complejos. Supóngase que $\boldsymbol{A}$ es reducida por filas y también que $\boldsymbol{a + b + c + d = 0}$. Demostrar que existen exactamente tres de estas matrices.

Demostración.- Ya que A es dado como una matríz reducida por filas, entonces se presentas los siguientes casos.

Caso i. Sea $a = b = c = d = 0$ por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso ii. Sea $c = d = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ con $a = 1$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otra posibilidad podría ser que la fila 1 sea cero. Es decir, $a = b = 0 \Rightarrow c + d = 0 \Rightarrow d = -c$ de donde tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Caso iii. Dos filas distintas de cero. Es decir, $a \neq 0, d \neq 0$, $c = b = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$, de donde A al ser reducido por fila implicará $a = 1 \rightarrow d = -1$. Pero d es la entrada principal distinto de cero de la fila 2 por lo tanto debe ser igual a uno. Así este caso no existe.

De donde concluimos que existe dos matrices que satisfacen la condición dada.

Ejercicio 6. Demostrar que el intercambio de dos filas en una matriz puede hacerse por medio de un número finito de operaciones elementales con filas de los otros tipos.

Demostración.- Consideremos la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que se necesita el intercambio de las filas 1 y 3, entonces se puede realizar la siguiente secuencia para hacerlo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \rightarrow R_1 + R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow -R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Generalizando obtenemos que para realizar el intercambio de R_i y R_j, la secuencia de operaciones elementales de los otros tipos es:

a) $R_j \rightarrow R_j - R_i$. Restar fila i de la fila j, que da como resultado una fila j como el negativo de la fila original i.

b) $R_j \rightarrow -R_j$. Fila negativa j lo que resultará en la fila j cambiando a fila i.

c) $R_j \rightarrow R_i - R_j$. Restar fila j de la fila i que resultará en la fila i cambiando a la fila original j.

Ejercicio 7. Hallar, mediante reducción por filas de la matriz de coeficientes todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{1}{3}x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & & & + & 5x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & 0 \\ -\frac{7}{3}x_1 & + & 2x_2 & - & \frac{8}{3}x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Respuesta.- Consideremos la matriz de la forma $AX = 0$ para la respectiva reducción por filas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad 3R_1 \to R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rcl} R_2 + 4R_1 & \to & R_2 \\ R_3 + 3R_1 & \to & R_3 \\ R_4 + \frac{7}{3}R_1 & \to & R_4 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 24 & -67 \\ 0 & 24 & -67 \\ 0 & 16 & -\frac{134}{3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{24}R_2 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -\frac{67}{24} \\ 0 & 24 & -67 \\ 0 & 16 & -\frac{134}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rcl} R_1 - 6r_2 & \to & R_1 \\ R_3 - 24R_2 & \to & R_3 \\ R_4 - 16R_2 & \to & R_4 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -\frac{67}{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde

$$x_i - \frac{5}{4}x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5}{4}x_3$$

$$x_2 - \frac{67}{24}x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{67}{24}x_3$$

Por lo que la solución está dado por $\left\{ \left(\frac{5}{4}, \frac{67}{24}, 1 \right) t \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$.

Ejercicio 8. Hallar una matriz escalón reducida por filas que sea equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\boldsymbol{i} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{i} & \mathbf{1} + \boldsymbol{i} \end{bmatrix}$$

¿Cuales son las soluciones de $\boldsymbol{AX = 0}$?.

Respuesta.- Por la eliminación Gaussiana se tiene,

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rcl} R_2 - 2R_1 & \to & R_2 \\ R_3 - iR_1 & \to & R_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2+2i \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \frac{1}{i}R_3 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2+2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 + iR_3 & \to & R_1 \\ R_2 - (2+2i)R_3 & \to & R_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que es la matriz escalonada reducida por filas equivalente a A. Por lo tanto la solución esta dada por,

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Ejercicio 9. Dar un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tengan solución.

Respuesta.- Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array}$$

Luego el sistema no tiene solución ya que,

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_3 & = & 2(x_1 + x_2) \\ & = & 2 \cdot 1 \\ & = & 2 \neq 3. \end{array}$$

Ejercicio 10. Mostrar que el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \boldsymbol{x_1} & - & \boldsymbol{2x_2} & + & \boldsymbol{x_3} & + & \boldsymbol{2x_4} & = & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x_1} & + & \boldsymbol{x_2} & - & \boldsymbol{x_3} & + & \boldsymbol{x_4} & = & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x_1} & + & \boldsymbol{7x_2} & - & \boldsymbol{5x_3} & - & \boldsymbol{x_4} & = & \mathbf{3} \end{array}$$

No tiene solución.

Demostración.- Se tiene la matriz

$$AX = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{rcl} R_2 - R_1 & \to & R_2 \\ R_3 - R_1 & \to & R_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{3}R_2 \to R_2 \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 + 2R_2 & \to & R_1 \\ R_3 - 9R_2 & \to & R_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Que es la forma escalonada reducida por filas del sistema. De la última fila, obtenemos $0 = -1$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, el sistema dado no tiene solución.

Ejercicio 11. Hallar todas las soluciones de

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} \boldsymbol{2x_1} & - & \boldsymbol{3x_2} & - & \boldsymbol{7x_3} & + & \boldsymbol{5x_4} & + & \boldsymbol{2x_5} & = & \mathbf{-2} \\ \boldsymbol{x_1} & - & \boldsymbol{2x_2} & - & \boldsymbol{4x_3} & + & \boldsymbol{3x_4} & + & \boldsymbol{x_5} & = & \mathbf{-2} \\ \boldsymbol{2x_1} & & & - & \boldsymbol{4x_3} & + & \boldsymbol{2x_4} & + & \boldsymbol{x_5} & = & \mathbf{3} \\ \boldsymbol{x_1} & - & \boldsymbol{5x_2} & - & \boldsymbol{7x_3} & + & \boldsymbol{6x_4} & + & \boldsymbol{2x_5} & = & \mathbf{-7} \end{array}$$

Respuesta.- Sea la matriz,

$$AX = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 & -7 \end{array}\right] \qquad \frac{1}{2}R_1 \to R_1 \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 & -7 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_2 - R_1 & \to & R_2 \\ R_3 - 2R_1 & \to & R_3 \\ R_4 - R_1 & \to & R_4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 1 & -6 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{2}R_2 \to R_2 \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 1 & -6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 - \frac{3}{2}R_2 & \to & R_1 \\ R_3 - 3R_2 & \to & R_3 \\ R_4 - \frac{7}{2}R_2 & \to & R_4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 - R_3 & \to & R_1 \\ R_4 - R_3 & \to & R_4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Por lo tanto las soluciones estarán dadas por:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 & \Rightarrow & x_1 = 1 + 2x_3 - x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 & \Rightarrow & x_2 = 2 - x_3 + x_4 \\ x_5 & = & 1. \end{array}$$

Sea $x_3 = s \in \mathbb{R}$ y $x_4 = t \in \mathbb{R}$ donde el conjunto de soluciones estará dado por:

$$\{(1,2,0,0,1) + (2,-1,1,0,0)s + (-1,1,0,1,0)t \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejercicio 12. Sea

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

¿Para cuáles ternas (y_1, y_2, y_3) tiene una solución el sistema $AX = Y$?.

Respuesta.- Sea el sistema $AX = Y$ de donde,

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 3 & -1 & 2 & y_1 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 1 & -3 & 0 & y_3 \end{array}\right] \qquad R_1 \leftrightarrow R_3 \qquad \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & -3 & 0 & y_3 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 3 & -1 & 2 & y_1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} R_2 - 2R_1 & \rightarrow & R_2 \\ R_3 - 3R_2 & \rightarrow & R_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & y_3 \\ 0 & 7 & 1 & y_2 - 2y_3 \\ 0 & 8 & 2 & y_1 - 3y_3 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{7}R_2 \rightarrow R_2 \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{y_2-2y_3}{7} \\ 0 & 8 & 2 & y_1 - 3y_3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} R_1 + 3R_2 & \rightarrow & R_1 \\ R_3 + 8R_2 & \rightarrow & R_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{y_3+3y_2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{y_2-2y_3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{7y_1-8y_2-5y_3}{7} \end{array}\right]$$

$$\tfrac{7}{6}R_3 \rightarrow R_3 \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{y_3+3y_2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{y_2-2y_3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7y_1-8y_2-5y_3}{6} \end{array}\right]$$

Por la forma reducida tenemos $Rango(A) = Rango(A/y)$, así el sistema tiene una única solución $y \in \mathbb{R}^3$.