# Calculo diferencial e integral tomo 1

Nikolai Piskunov

## Resolución de problemas por FODE

# Índice general

# 1

# Número, variable y función

## 1.1. Números reales. Representación de número reales por medio de puntos en el eje numérico

**Definición 1.1** *El número racional puede expresarse como la razón* $\dfrac{p}{q}$ *de dos números enteros* $p$ *y* $q$.

*El número entero* $p$ *se puede considerar como la razón de dos números enteros* $\dfrac{p}{1}$.

**Definición 1.2** *Los números en forma de fracciones decimales indefinidas no periódicas, se denominan números irracionales.*

**Definición 1.3** *Para cualquier par de números reales* $x$ *e* $y$ *existen una correlación, y sólo una, de las siguientes:*

$$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y$$

**Teorema 1.1** *Todo número irracional* $\alpha$ *se puede expresar con cualquier grado de precisión por medio de números racionales.*

*Demostración.-* *En efecto, siendo el número irracional* $\alpha > 0$, *calculamos* $\alpha$ *con un error no mayor de* $\dfrac{1}{n}$ *(por ejemplo,, de* $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}$, *etc.)*
*Cualquiera que sea el número* $\alpha$, *está comprendido entre dos números enteros consecutivos* $N$ *y* $N+1$. *Dividamos el segmento comprendido entre* $N$ *y* $N+1$ *en* $n$ *partes, entonces el número* $\alpha$ *resulta comprendido entre los número racionales* $N + \dfrac{m}{n}$ *y* $N + \dfrac{m+1}{n}$. *Dado que la diferencia entre estos números es* $\dfrac{1}{n}$, *cada uno de ellos expresa* $\alpha$ *con un grado de precisión predeterminado: El primero por defecto y el segundo por exceso.*

## 1.2. Valor absoluto del número real

**Definición 1.4** *Un número real no negativo, que satisface las condiciones:*

$$|x| = x, \ si \ x \geq 0;$$

$$|x| = -x, \ si \ x < 0$$

*se llama valor absoluto (o módulo) de un número real $x$.*

**Propiedad 1.1** *El valor absoluto de la suma albegraica de varios números reales no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

*Demostración.- Sea $x + y \geq 0$, entonces:*

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

*(ya que $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$).*
*Supongamos ahora que $x + y < 0$, entonces:*

$$|x + y| = -/x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|,$$

*como se trataba de demostrar.*

**Propiedad 1.2** *El valor absoluto de la diferencia de dos números no es mejor que la diferencia de los valores absolutos del minuendo y sustraendo:*

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

*Demostración Supongamos que $x - y = x$. Entonces $x = y + z$, y según lo demostrado anteriormente, se tiene:*

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |z| + |x - y|,$$

*de donde*

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

*como se trataba de demostrar.*

**Propiedad 1.3** *El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores:*

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

**Propiedad 1.4** *El valor absoluto del cociente es igual al cociente de dividir el valor absoluto del dividendo por el del divisor:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

## 1.4. Campo de variación de la magnitud variable

**Definición 1.5** *El conjunto de todos los valores numéricos de la masgnitud variable se denomina campo de variación de la variable.*

## 1.5. Variable ordenada. Variable crecientes y decrecientes , variable acotada

**Definición 1.6** *La variable se denomina creciente, si cada valor posterior es mayor que el anterior. Por el contrario, si cada valor posterior es menor que el anterior, la variable se denomina decreciente.*

**Definición 1.7** *La variable $x$ se denomina magnitud acotada, si existe un número constante $M > 0$ tal que, a partir de cierto valor, todos los posteriores satisfagan la condición.*

$$-M \leq x \leq M, \quad \textit{es decir}, \quad |x| \leq M$$

## 1.6. Función

**Definición 1.8** *Si a cada valor de la variable $x$, perteneciente a cierto campo, le corresponde un sólo valor determinado de otra variable $y$, entonces ésta será función de $x$, y podemos escribir simbólicamente:*

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad \textit{etc.}$$

*La dependencia que existe entre las variables $x$ e $y$ se llaman funcional.*

**Definición 1.9** *El conjunto de los valores de $x$ para los cuales se terminan los valores de la función $y$, en virtud de la ley $f(x)$, se llama* ***dominio de definición de la función***

**Definición 1.10** *La función $y = f(x)$ se llama creciente, cuando a un mayor valor del argumento $x$ corresponde un mayor valor de la función. De modo análogo se define la función decreciente.*

## 1.8. Funciones elementales fundamentales

**Definición 1.11** *La función $y = f(x)$ se denomina periódica, si existe un número constante $C$ tal que, al sumario (o restario) al argumento $x$, el valor de la función no se altere, $f(x + C) = f(x)$. El valor mínimo de este número constante se denomina periodo de la función.*

**Definición 1.12** *La función que puede ser dada por la fórmula de la forma $y = f(x)$, donde el segundo miembro de la igualdad está compuesto de funciones elementales fundamentales y constantes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y función de función, se llama* ***función elemental****.*

*La función que no es algebraica se llama transcendentes: $y = \cos x \quad y = 10^x$*

## 1.9. Ejercicios para el capítulo 1

I. Dada la función $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Comprobar que $f(1) = 3$, $f(3) = 23$.

   Repuesta.-