1

Distribuciones conjuntas de probabilidad

1.1. Distribución de probabilidad bivariadas

Definición 1.1. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas. La probabilidad de que $X = x$ e $Y = y$ está determinada por la función de probabilidad bivariada

$$p(x, y) = P(X = x, Y = x),$$

en donde $P(x, y) \geq 0$ para toda x, y, de X, Y, y $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$.

La **función de distribución acumulativa bivariada** es la probabilidad conjunta de que $X \leq x$ y $Y \leq y$, dada por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} p(x_i, y_i).$$

La **función de distribución trinomial** viene dado por:

$$p(x, y, n, p_1, p_2) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^{n-x-y}$$

y su generalización llamada **función de distribución multinomial** viene dada por:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}; n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}, \quad x_1 = 0, 1, \ldots, n \text{ para } i = 1, 2, \ldots, k$$

en donde $x_k = n - x_1 - x_2 - \cdots - x_{k-1}$ y $p_k = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{k-1}$.

Definición 1.2. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas. Si existe una función $f(x, y)$ tal que la probabilidad conjunta:

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx$$

para cualquier valor de a, b, c y d en donde $f(x, y) \geq 0$, $-\infty < x, y < \infty$ y $\int_{\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dydx = 1$, entonces $f(x, y)$ es la función de densidad de probabilidad bivariada de X e Y.

La **función de distribución bivariada acumulativa** de X e Y es la probabilidad conjunta de que $X \leq x$ e $Y \leq y$, dada por:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\; dvdu.$$

Por lo tanto, la función de densidad bivariada se encuentra diferenciando $F(x,y)$ con respecto a x e y; es decir,

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

1.2. Distribuciones marginales de probabilidad

Es posible determinar varias distribuciones marginales para cualquier distribución de probabilidad que contenta más de dos variables aleatorias.

Definición 1.3. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas con una función de probabilidad conjunta $p(x-y)$. Las funciones marginales de probabilidad de X y de Y están dadas por

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y) \qquad \text{y} \qquad p_Y(y) = \sum_x p(x,y),$$

respectivamente.

Definición 1.4. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$. Las funciones de densidad de probabilidad de X e Y están dadas por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\; dy \qquad \text{y} \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\; dx,$$

respectivamente.

Para variables aleatorias continuas conjuntas, si se conoce **la función de distribución acumulativa $F(x,y)$**, las distribuciones acumulativas marginales de X e Y se obtienen de la siguiente forma:

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\; dydt, \qquad \text{y} \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\; dt = F(x,\infty)$$

De manera similar

$$P(Y \leq y) = F_Y(y) = \int_{\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\; dxdt = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\; dt = F(\infty, y).$$

1.3. Valores esperados y momentos para distribuciones bivariadas