Calculo diferencial e integral tomo 1

Nikolai Piskunov

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1

Funciones

1.1. Las funciones y sus gráficas

Definición 1.1 *Una función f de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento $x \in D$ un solo o único elemento $f(x) \in Y$*

Definición 1.2 *Cuando definimos una función $y = f(x)$ mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales x para los cuales la fórmula proporciona valores reales para y , el llamado* ***dominio natural****.*

Cuando el rango de una función es un subconjunto de números reales, se dice que la función tiene ***valores reales (o que es real valuada)***

Definición 1.3 (Valor absoluto) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

Definición 1.4 *Sea una funcion definida en un intervalo I y sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos en I*

1. *Si $f(x_2) > f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es* ***creciente*** *en I.*

2. *Si $f(x_2) < f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es* ***decreciente*** *en I.*

Definición 1.5 *Una función $y = f(x)$ es una*

1. *Función par de x si $f(-x) = f(x)$.*

2. *Función impar de x si $f(-x) = -f(x)$.*

Para toda x en el dominio de la función.

(Los nombres par e impar provienen de las potencias de x).

Definición 1.6 *Dos variables x e y son* ***proporcionales*** *(una con respecto a la otra) si una siempre es un múltiplo constante de la otra; esto es, si $y = kx$ para alguna constante k distinta de 0.*

Si la variable y es proporcional al recíproco $1/x$, entonces algunas veces se dice que y es ***inversamente proporcional*** *a x (puesto que $1/x$ es el inverso multiplicativo de x).*

1.1. Ejercicios

1. $f(x) = 1 + x^2$

Respuesta.- Al evaluar $1 + x^2$ vemos que x se cumple para todos los reales, por lo tanto $f_D = \{x/;\forall\, x \in \mathbb{R}\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 1\}$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- El dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq 0\}$. Y el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \leq 1\}$.

3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$

Respuesta.- Sea $5x + 10 \geq 0$ ya que una raíz par no puede ser no negativo, entonces $x \geq 2$, por lo tanto el dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq -2\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio, evaluaremos $x^2 - 3x \geq 0$, de donde $x(x - 3) \geq 0$, por lo tanto el dominio es $f_D = \{x/ \leq x \leq 0 \cup x \geq 3\}$. Luego el rango viene definido por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

5. $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$

Respuesta.- Sabemos que no se puede dividir un número por 0. Por lo tanto para hallar el dominio de la función debemos evaluar $3 - t = 0$, de donde $t = 3$, así $f_D = \{t/t \neq 3\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \neq 0\}$.

6. $G(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio evaluamos $t^2 - 16 = 0$, de donde $(t-4)(t+4) = 0$, por lo tanto el dominio de la función viene dado por $f_D = \{t/t \neq 4 \land t \neq -4\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/0 < y \leq -\dfrac{1}{8}\}$ ya que al despejar x nos queda $x = \sqrt{\dfrac{2}{y} + 16}$ de donde se debe evaluar por un lado $\dfrac{2}{y}$ y por otro $\dfrac{2}{y} - 16 \geq 0$.

En los ejercicios 7 y 8 ¿Cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de x? ¿Cuáles no representan a funciones de x? Dé razones que apoyen sus respuestas.

7. El inciso a. no es una función ya que no cumple con la prueba de la recta vertical ya una función sólo puede tener un valor $f(x)$ para cada x en su dominio. Y el inciso b. no representa la gráfica de una función.

8. Los incisos a. y b. no representan a funciones de x. El único que no representa una gráfica de una función es el inciso b.

Determinación de fórmulas para funciones.

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado x del triángulo.

Respuesta.- El área se representa por $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$ y el perímetro por $f(x) = 3x$

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del cuadrado. Exprese el área como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La longitud del lado de un cuadrado como función de longitud esta dado por $d = \sqrt{2a^2}$. El área es expresado por $A = \dfrac{d^2}{2}$

11. Exprese la longitud del lado de um cubo como una función de la longitud de la diagonal d del cubo. Exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta-. La expresión de la longitud del lado del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo es

$$L(d) = (\sqrt{2}/2) \cdot d$$

Las expresiones del área de la superficie y el volumen del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo son:

$$A(d) = 3 \cdot d\text{š} \quad y \quad V(d) = (\sqrt{2}/4) \cdot d\text{ş}$$

12. Un punto P en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente de la recta que une a P con el origen.

Respuesta.- Sea el punto en el origen $(0,0)$ y el punto P tenga las coordenadas $(z, z^{'})$. Sabemos que una recta viene definido por $f(x) = ax + b$ entonces formando un sistema de ecuaciones tenemos:

$$0 = 0x + b \quad y \quad z^{'} = az + b$$

Luego $z^{'} = az$ de donde $a = \dfrac{z^{'}}{z}$, y así nos queda la función

$$f(x) = \frac{z^{'}}{z} x$$

13. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de la recta $2x + 4y = 5$. Sea L la distancia del punto (x, y) al origen $(0,0)$. Escriba L como función de x.

Respuesta.- Dado $(x, y) \in 2x + 4y = 5; (0,0)$ entonces

$$x = \frac{5-4y}{2} \qquad \frac{5-2x}{4}$$

Luego $L = \sqrt{(y-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{y^2 + \left(\dfrac{5-4y}{2}\right)} = \sqrt{y^2 + \dfrac{25+40y+16y^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{4y^2}{4} + \dfrac{25-40y+16y^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{20y^2 + 40y + 25}$

14. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de $y = \sqrt{x-3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4, 0)$. Escriba L como función de y.

Respuesta.- $y = \sqrt{x-3}, (x, y) \in y = \sqrt{x-3}$ entonces calculamos la distancia entre $y = \sqrt{x-3}$ y $(4, 0)$.

$$y^2 = x - 3 \Longrightarrow x = y^2 + 3 \quad y \quad y = \sqrt{x-3}$$

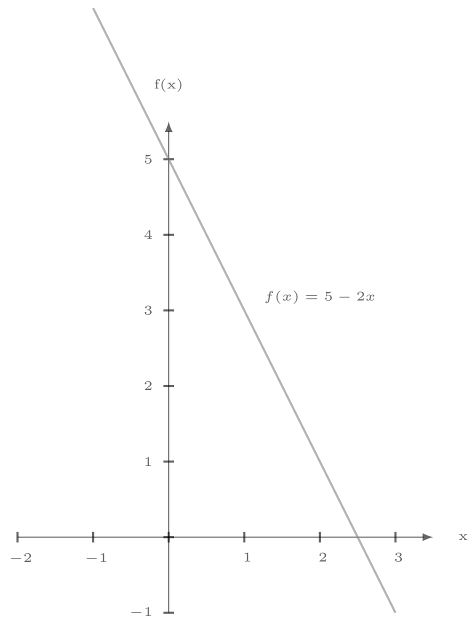
Así $L = \sqrt{(y-o)^2 + (x-y)^2} = \sqrt{y^2 + (y^2+3)^2} = \sqrt{y^2 + y^4 + 6y^2 + 9} = \sqrt{y^4 + 7y^2 + 9}$

Las funciones y sus gráficas.

En los ejercicios 15 al 20, determine el dominio y grafique las funciones

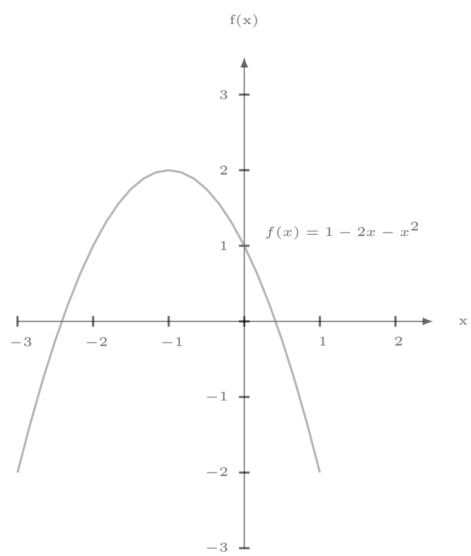
15. $f(x) = 5 - 2x$

Respuesta.- El dominio esta dado para todos los reales x.



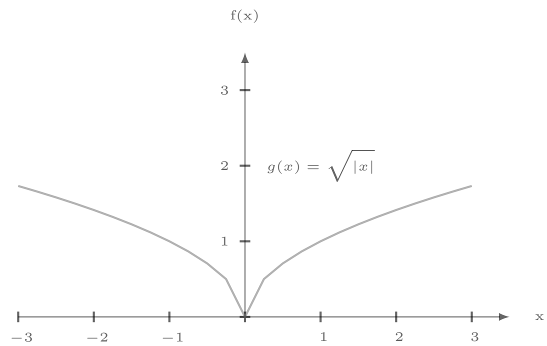
16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo real x positivo.



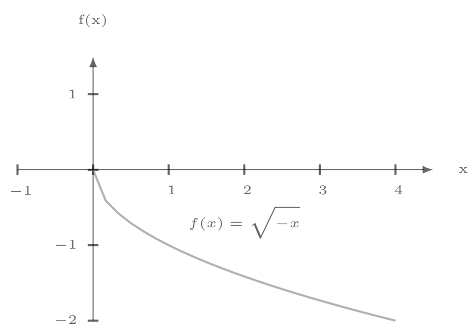
17. $g(x) = \sqrt{|x|}$

Respuesta.- El dominio de la función es para $x \in \mathbb{R}$



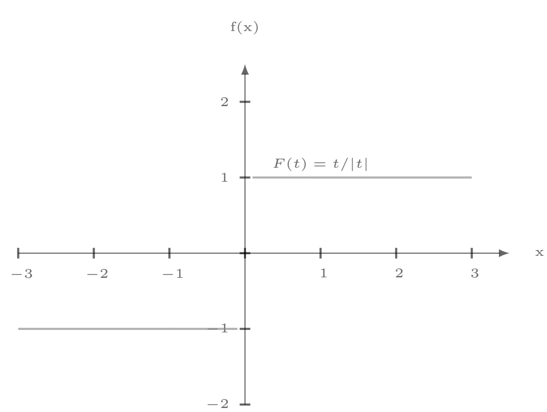
18. $g(x) = \sqrt{-x}$

Respuesta.- El dominio de la función se cumple para los números reales negativos.



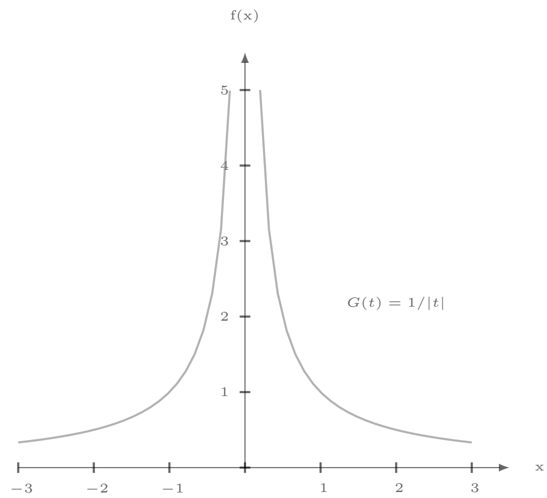
19. $F(t) = t/|t|$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo número real menos el 0.



20. $G(t) = 1/|t|$

Respuesta.- El dominio se cumple para todo número real menos el 0.



21. Determine el dominio de $y = \dfrac{x+3}{4-\sqrt{x^2-9}}$

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el dominio esta dado por $D_f = \{x/x \geq 3 \wedge x \neq 4\}$

22. Determine el rango de $y = 2 + \dfrac{x^2}{x^2+4}$.

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el rango viene dado para todo $y = f(x)$ tal que $y \geq 2$

23. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a. $|y| = x$

Respuesta.- No es una función de x ya que $\sqrt{y^2} = x \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow \pm y = \pm x$

b. $y^2 = x^2$

Respuesta.- Por el anterior problema $23a$.

24. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x

a. $|x| + |y| = 1$

Respuesta.- Ya que $|y| = 1 - |x| \Longrightarrow \sqrt{y^2} = 1 - |x| \Longrightarrow y^2 = (1-|x|)^2 \Longrightarrow \pm y = |1 - |x||$

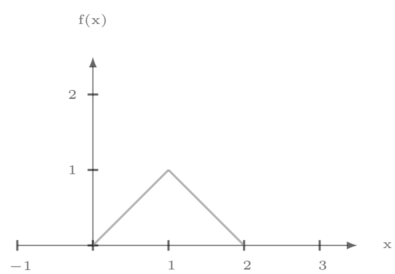
b. $|x+y|=1$

Respuesta.- Ya que $\sqrt{(x+y)^2}=1 \Longrightarrow (x+y)^2=1 \Longrightarrow x^2+2xy+y^2=1 \Longrightarrow y^2=1-2xy-x^2 \Longrightarrow \pm y=\sqrt{1-2xy-x^2}$

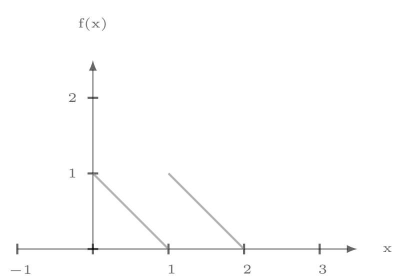
Funciones definidas por partes

En los ejercicios 25 a 28, grafique las funciones:

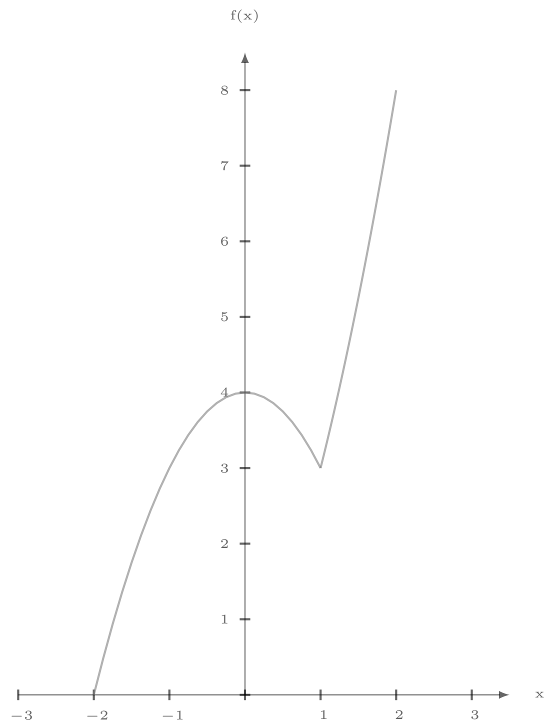
25. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x, & 1<x\leq 2 \end{cases}$



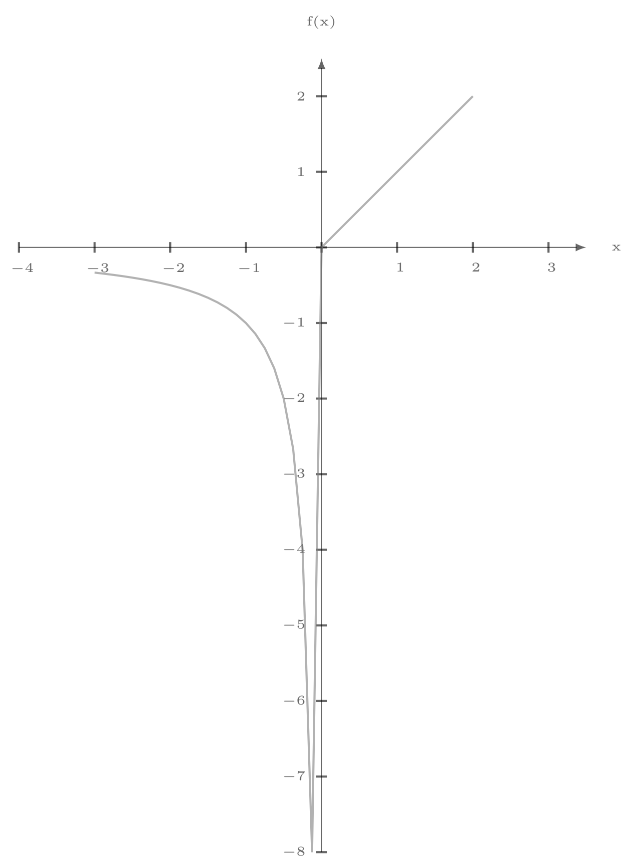
26. $g(x)=\begin{cases} 1-x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x, & 1<x\leq 2 \end{cases}$



27. $F(x)=\begin{cases} 4-x^2, & \leq 1 \\ x^2+2x, & x>1 \end{cases}$



28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$



Determine una fórmula para cada función graficada en los ejercicios 29 a 32

29. **a.** Sea $f(x) = ax+b$ entonces $0 = b$ y $1 = a+b$ luego $a = 1$ por lo tanto $f(x) = x$. Por otro lado $1 = a+b$ y $0 = 2a+2 \Longrightarrow a = -1$ de donde se tiene $f(x^{'}) = -x+2$ así nos queda la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ x+2 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b. Está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 \leq x < 1 \; o \; 2 \leq x < 3 \\ \\ 0 & si \quad 1 \leq x < 2 \text{ ó } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

c.