Vectores aleatorios bidimensionales

Christian Limbert Paredes Aguilera

16/2/2022

Vectores aleatorios bidimencionales

Variables aleatorias bidimencionales

Redordemos que una variable aleatoria X es una aplicación que toma valores numéricos para cada resultado de un experimento aleatorio:

$$\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longrightarrow & X(w) \end{array}$$

A partir de la definición anterior, generalizamos la noción de variable aleatoria unidimencional a variable aleatoria bidimencional.

Definición de variable aleatoria bidimencional

Dado un experimentos aleatorio con espacio muestral Ω, definimos variable aleatoria bidimencional (X, Y) a toda aplicación

$$\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ w & \longrightarrow & (X(w), Y(w)) \end{array}$$

La probabilidad de que la variable bidimencional pertenezca a una cierta región del plano B se define de la forma siguiente:

$$P((X,Y)\in B) = P\{w \in \Omega, \mid (X(w), Y(w)) \in B\}$$

o sea, la probabilidad anterior es la probabilidad del suceso formado por los elementos de $w \in \Omega$ que cumplen que su imagen por la variable aleatoria bidimencional (X, Y) esté en B.

Función de distribución conjunta

Definición de función de distribución conjunta:

Dada una variable bidimencional (X, Y), definimos su función de distribución conjunta F_{XY} a la función definida sobre $\mathbb{R}^2$ de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rcl} F_{XY}:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) \end{array}$$

Se buscará que tan probable será que un punto caiga en una región del plano cartesiano.

Entonces la función de distribución conjunta en el valor (x, y) es la probabilidad del suceso formado por aquellos elementos tal que la imagen por la variable aleatoria bidimensional (X, Y) caen dentro de la región sombreada en el gráfico anterior:

$$F_{XY}(x,y) = P\{w \in \Omega | (X(w), Y(w)) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y])\} = P\{w \in \Omega | X(w) \leq Y(w) \leq y\}$$

Propiedades Sea (X, Y) una variable bidimensional. Sean F_{XY} su función de distribución conjunta. Dicha función satisface las propiedades siguientes:

- La función de distribución conjunta es no decreciente en cada una de las variables:

$$\text{Si } x_1 \leq x_2, \text{ y } y_1 \leq y_2, \text{ entonces } F_{XY}(x_1, y_1) \leq F_{XY}(x_2, y_2).$$

- $F_{XY}(x, -\infty) = F_{XY}(-\infty, y) = 0, \ F_{XY}(\infty, \infty) = 1$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- Las variables aleatorias X e Y se llaman variables aleatorias marginales y sus funciones de distribución F_X y F_Y pueden hallarse de la forma siguiente como función de la función de distribución conjunta F_{XY}:

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty), \ F_Y(y) = F_{XY}(\infty . y),$$

  para todo $x, y \in \mathbb{R}$
- La función de distribución conjunta es continua por el norte y por el este:

$$\lim_{x \to a^+} F_{XY}(x, y) = \lim_{x \to a, x > a} F_{XY}(x, y) = F_{XY}(a, y),$$

$$\lim_{x \to b^+} F_{XY}(x, y) = \lim_{x \to b, x > b} F_{XY}(x, y) = F_{XY}(x, b),$$

  para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
- Dados $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$, consideramos B el rectángulo de vértices (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) y (x_2, y_2): $(x_1, y_2] \times (y_1, y_2]$. Entonces,

$$P((X, Y) \in B) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) - F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1)$$

Variables bidimensionlaes discretas.

La función pdado devuelve la probabilidad de que salga la cara x en un dado de n caras donde por defecto $n = 6$.

```r
pdado = function(x,n=6) sapply(x,FUN = function(x)
  if(x %in% c(1:n)) {return(1/n)} else {return(0)})
pdado(4,6)
```

```
## [1] 0.1666667
```

Propiedades de la función de probabilidad conjunta.

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta con conjunto de valores $(X, Y)(\Omega) = \{(x_i, y_j)i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots\}$ Entonces su función de probabilidad conjunta verifica las propiedades siguientes:

La suma de todos los valores de la función de probabilidad conjunta sobre el conjunto de valores siempre vale 1:

$$\sum_i \sum_j P_{XY}(x_i, y_j) = 1$$

En particular sea B una región del plano. El valor de la probabilidad $P((X, Y) \in B)$ se puede calcular de ña forma siguiente:

$$P((X, Y) \in B) = \sum_{(x_i . y_j) \in B} P_{XY}(x_i, y_j)$$

O sea, la probabilidad de que la variable bidimensional coja valores en B es igual a la suma de todos aquellos valores de la función de probabilidad conjunta que están en B.

Luego tenemos la realación siguiente que relaciona la función de distribución conjunta con la función de probabilidad conjunta:

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{x_i \leq x, y_j \leq y} P_{XY}(x_i.y_j).$$

Dicha expresión se deduce de la expresión anterior considerando $B = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$

Las variables marginales

Consideremos una variable aleatoria bidimensional discreta (X,Y) con función de probabilidad conjunta $P_{XY}(x_i, y_i)$, con $x_i, y_i \in (X,Y)(\Omega), i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots$.

Donde P_X y P_Y llamadas distribuciones marginales se pueden obtener de la tabla P_{XY}

Proposición. Expresión de las funciones de probabilidad marginales.

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta $P_{XY}(x_i, y_i)$, con $(x_i, y_i) \in (X,Y)(\Omega),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$

Las funciones de probabilidad marginales $P_X(x_i)$ y $P_Y(y_j)$ se calculan usando las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} P_X(x_i) &= \textstyle\sum_{j=1} P_{XY}(x_i, y_j),\ i = 1, 2, \ldots, \\ P_Y(y_j) &= \textstyle\sum_{i=1} P_{XY}(x_i, y_j),\ j = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

Para obtener la función de probabilidad marginal de la variable X en el valor x_i, $P_X(x_i)$ hay que sumar todos los valores de $P_{XY}(x_i, y_j)$ correspondientes a la fila i-énesima y para obtener la función de probabilidad marginal de la variable Y en el valor y_j, $P_Y(y_j)$ hay que sumar todos los valores de $P_{XY}(x_i.y_j)$ correspondientes a la columna j-ésima.

Variables aleatorias continuas

Definición de variable aleatoria bidimensional continua

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. Diremos que (X,Y) es continua si existe una función $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ llamada función de densidad no negativa $f_{XY}(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que dado cualquier región B del plano, la probabilidad de que (X,Y) esté en B se calcula de la forma siguiente:

$$P((X,Y) \in B) = \int\int_B f_{XY}(x,y)\, dx\, dy.$$

Propiedades de la función de densidad

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad f_{XY}. Entonces dicha función verifica las propiedades siguientes:

- La integral de dicha función sobre todo el plano vale 1:

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = 1.$$

Para ver dicha propiedad, basta considerar $B = \mathbb{R}^2$, tener en cuenta que el suceso $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ es el total Ω y aplicar la definición de f_{XY}

$$P((X,Y) \in \mathbb{R}^2) = 1 = \int\int_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy.$$

- La relación que hay entre la función de distribución F_{XY} y la función de densidad f_{XY} es la siguiente:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,y)\, du\, dv.$$

Para ver dicha propiedad, basta considerar $B = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$ y aplicar la definción de función de distribución:

$$F_{XY}(x,y) = P((X,Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\, du\, dv.$$

- La relación que hay entre la función de densidad f_{XY} y la función de distribución F_{XY} es la siguiente:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$

dicha propiedad se deduce de la anterior, derivando primero respecto a x y después respecto a y para eliminar las dos integrales.

- Las funciones de densidad marginales de las variables X e Y, f_X, $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ respectivamente, se calculan de la forma siguiente:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy,\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx$$

La distribución normal bidimensional.

Definición de distribución Gaussiana bidimensional

Diremos que la distribución de la variable aleatoria bidimensional (X,Y) es gaussiana bidimensional dependiendo del parámetro *rho* si su función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}, \qquad -\infty < x, y < \infty.$$

Propiedades

- Para cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la función de densidad es no nula: f_{XY}(x,y)>0.$
- La función de densidad tiene un único máximo absoluto en el punto $(0,0)$ que vale $f_{XY}(0,0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}$. Por tanto, para $\rho = 0$, dicho máximo alcanza el mínimo valor posible y su $p \to \pm 1$, dicho máximo tiende a ∞.
- Las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son normales $N(0,1)$.

Demostración.-; Veámoslo con $f_X(x)$. Por simetría, quedaría deducido para $f_Y(y)$:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2}{2(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2}{2(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} e^{\frac{\rho^2 x^2}{2(1-\rho^2)}}\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}\, dy, \text{ hacemos cambio } z = \frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{1-\rho^2\, dy} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}
$$

función que coincide con la función de densidad de la variable $N(0,1)$.

En el último paso hemos usado que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dz = 1.$$

Ya que correspondería al área de una función de densidad de una distribución $N(0,1)$