1

Funciones continuas

1.1 Ejercicios

1. Con el teorema 3.16 establecer las desigualdades siguientes:

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{1}{10}.$$

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad g(x) = x^9.$$

Sustituyendo nuestras definiciones de f y g se tiene,

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Ya que f y g son continuas y g no cambia de signo en $[0,1]$ podemos aplicar el teorema 3.16,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_0^1 g(x)\,dx, \qquad \text{para algún } c \in [0,1].$$

Luego f es estrictamente creciente en $[0,1]$, por lo que,

$$f(0) \geq f(c) \geq f(1) \quad \Rightarrow \quad 1 \geq f(c) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(1)\int_0^1 g(x)\,dx \leq \int_0^1 g(x)\,dx \leq f(0)\int_0^1 g(x)\,dx \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9\,dx \leq f(c)\int_0^1 x^9\,dx \leq \int_0^1 x^9\,dx \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{10\sqrt{2}} \leq f(c)\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

2. teniendo en cuenta que $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)/\sqrt{1-x^2}$ y por medio del teorema 3.16 obtenemos las desigualdades

$$\frac{11}{frm{-}e4} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx \leq \frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad g(x) = 1 - x^2.$$

Entonces,

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} = \int_0^{1/2} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{1/2} f(x)g(x)\, dx = f(c)\int_0^{1/2} g(x)\, dx$$

para algún $c \in [0, \frac{1}{2}]$. Ya que f es estrictamente creciente en $[0, \frac{1}{2}]$, tenemos $f(0) \leq f(c) \leq f(\frac{1}{2})$ el cual implica que $1 \leq f(c) \leq \sqrt{\dfrac{4}{3}}$. Y por lo tanto,

$$f(0)\int_0^{1/2} g(x)\, dx \leq f(c)\int_0^{1/2} g(x)\, dx \leq f(1)\int_0^{1/2} g(x)\, dx.$$

Por otro lado también sabemos que,

$$\int_0^{1/2} g(x)\, dx = \int_0^{1/2} (1-x^2)\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24}.$$

de donde concluimos que

$$\frac{11}{24} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx \leq \frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

3. Utilizar la identidad $1 + x^6 = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$ y el teorema 3.16 para demostrar que para $a > 0$, tenemos

$$\frac{1}{1+a^6}\left(a - \frac{a^5}{3} + \frac{a^5}{5}\right) \leq \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} \leq a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$

Tómese $a = 1/10$ y calcular el valor de la integral con seis cifras decimales.

Respuesta.- Sea

$$f(x)\frac{1}{1+x^6}, \quad g(x) = 1 - x^2 + x^4.$$

Entonces,

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^a \frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}\, dx = \int_0^a f(x)g(x)\, dx = \frac{1}{c}\int_0^a g(x)\, dx$$

para algún $c \in [0, a]$. Ya que f es estrictamente creciente en $[0, a]$, tenemos $f(a) \leq f(c) \leq f(0)$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{1+a^6} \leq f(c) \leq 1.$$

Es más,

$$\int_0^a g(x)\, dx = \int_0^a (1-x^2+x^4)\, dx = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$

Así,

$$\left(\frac{1}{1+a^6}\right)\left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{5}\right) \leq \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} \leq \left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}\right).$$

Ahora calculemos para $a = \dfrac{1}{10}$,

$$\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{10})^6}\right]\left[\frac{1}{10} - \frac{(\frac{1}{10})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{10})^4}{5}\right] \leq \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{dx}{1+x^2} \leq \left(\frac{1}{10} - \frac{(\frac{1}{10})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{10})^5}{5}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0 - 0996686 \leq \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{dx}{1+x^2} \leq 0.0996687$$

.

4. Una de las siguientes afirmaciones es incorrecta. Explicar por qué es falsa.

a) La integral $\int_{2\pi} 4\pi (\operatorname{sen} t)/t \, dt > 0$ debido a que $\int_{2\pi} 3\pi (\operatorname{sen} t)/t \, dt > \int_{3\pi}^{4\pi} |\operatorname{sen} t|/t \, dt$.

Respuesta.- La integral

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt > 0$$

porque

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt > \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} \, dt.$$

b) La integral $\int_{2\pi} 4\pi (\operatorname{sen} t)/t \, dt = 0$ porque, según el teorema 3.16 para un cierto c comprendido entre 2π y 4π tenemos

$$\int_{2\pi}^{4\pi} = \frac{1}{c} \int_{2\pi}^{4\pi} \operatorname{sen} t \, dt 0 \frac{\cos(2\pi) - \cos(4\pi)}{c} = 0.$$

Respuesta.- La declaración (b) es falsa ya que el teorema del valor medio ponderado requiere que la función $g(t)$ no cambie de signo en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$. Pero como $g(t) = \operatorname{sen} t$ cambia de signo en el intervalo, no podemos aplicar el teorema.

5. Si n es un entero positivo, utilizar el teorema 3.16 para demostrar que

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen}(t^2) \, dt = \frac{(-1)^n}{c} \quad \text{donde} \quad \sqrt{n\pi} \leq c \leq \sqrt{(n+1)\pi}.$$

Respuesta.-

6. Supóngase que f es continua en $[a,b]$. Si $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, demostrar que $f(c) = 0$ por lo menos para un c de $[a,b]$.

Demostración.-

7. Supóngase que f es integrable y no negativa en $[a,b]$. Si $\int_a^b f(x)dx = O$, demostrar que $f(x) = O$ en cada punto de continuidad de f.

Demostración.-

8. Supóngase que f es continua en $[a,b]$ y que $\int_a^b f(x)g(x)dx = O$, para toda función g que sea continua en $[a,b]$. Demostrar que $f(x) = O$ para todo x en $[a,b]$.

Demostración.-