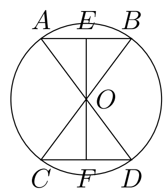
Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Geometría I.**
Práctica: IV.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

---

1. Pruebe que, en un mismo círculo o en círculos de mismo radio, cuerdas congruentes son equidistantes del centro.

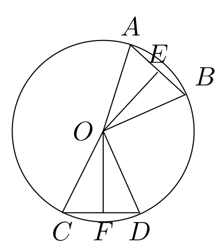
Demostración.-



Construyamos una circunferencia de centro O con segmentos $AB = CD$. Por O trazamos los segmentos $OA = OB = OC = OD = \ Radio$. Entonces $\triangle ABO$ es isosceles, lo mismo para $\triangle COD$. Como $A\widehat{O}B = C\widehat{O}D$, ya que están opuestos por el vértice, entonces $\triangle ABO = \triangle COD$ por el caso LAL. Trazando los segmentos OE y OF de manera que OE y EF son alturas de los triángulos, por lo tanto perpendiculares a AB y CD respectivamente. Como $\triangle AOB = \triangle COD$ entonces $EO = OF$ por lo tanto AB y CD son equidistantes.

2. Pruebe que, en un mismo círculo o en círculos de mismo radio, cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

Demostración.-



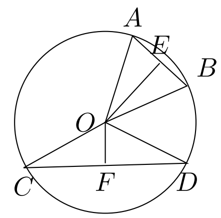
Sabemos por el problema anterior que si dos arcos son equidistantes, entonces hay una perpendicular a cada arco que es congruente, es decir: $OE = OF$ por hipótesis tenemos que OE, $OF \perp AB$, CD respectivamente. Así mismo $\triangle OBE = \triangle OCF = \triangle OFD$ por el caso cateto hipotenusa. Por lo tanto $AE = EB = CF = FD$ así,

$$AE + EB = CF + FD$$

$$AB = CD.$$

3. Pruebe que, en un mismo círculo o en círculos de mismo radio, si dos cuerdas tienen longitudes diferentes, la más corta es la más alejada del centro.

Demostración.-



Como A, B, C y D pertenece al circulo entonces:

$$OC = OD = OA = OB = Radio$$

Luego $\triangle COD, \triangle AOB$ son isosceles.
Los segmentos OE y OF para tener $\triangle AOB = \triangle COD$ ambos rectángulos. Entonces por el teorema de Pitágoras:

$$OA^2 = OF^2 + AF^2 \quad o \quad OC^2 = OE^2 = CE^2$$

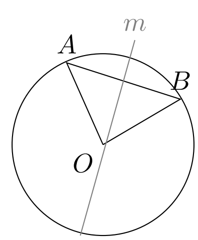
Luego como $OA = OC = Radio$

$$OF^2 + AF^2 = OE^2 + CE^2 \quad (1)$$

Como $AB < CD$ por hipótesis o F o E son puntos medios de AB y CD respectivamente, debido a que $\triangle AOB, \triangle COD$ son isosceles, entonces $AF < CE$ que obliga a la desigualdad $OF > OE$ a mantener la igualdad en (1).

4. Muestre que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro del círculo.

Demostración.- Dada una cuerda AB y una mediatriz m que corta a AB en el punto E de manera que $AE = EB$ y $m \perp AB$, como se ve a continuación:



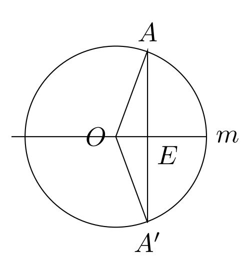
Luego $AO = OB = Radio$ como también $\triangle AOB$ es isosceles de base AB.
Sea OE la mediana relativa a la base AB del $\triangle AOB$ entonces, $OE \perp AB$. Cuando un punto pasa por una sola línea perpendicular, entonces OE es la propia mediana que pasa por el punto O.

5. Explique porque el reflejo de un círculo relativo a una recta que pasa por su centro es el mismo círculo.

Demostración.- Recordando las propiedades de reflexión tenemos:

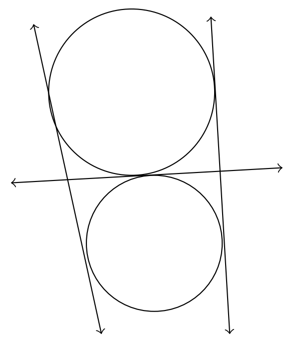
$$F_m(A) = A \; si \; A \in m,$$

luego



Al dibujar una línea recta m que pasa por el centro del círculo, la reflexión del centro es el centro mismo. Sea A cualquier punto que pertenezca al círculo, entonces hay un segmento $AA^{'}$ que se cruza con m en el punto E tal que $AE = A^{'}E$ y $AA^{'} \perp m$. Luego trazamos $\triangle AOE = \triangle EOA^{'}$ que son congruentes en el caso LAL. Entonces $OA = OA^{'}$ y por lo tanto la reflexión de A también pertenece al círculo.

6. En la figura, existen tres rectas que son tangentes simultaneamente a los dos círculos. Estas rectas se dicen tangentes comunes a los círculos. Diga si se puede diseñar dos círculos que tengan:



a) Cuatro tangentes comunes,

Respuesta.- Se puede diseñar 4 tangentes comunes si dos las cruzamos por en medio de los circulos.

b) Exactamente dos tangentes comunes,

Respuesta.- Se puede diseñar sobreponiendo un circulo con el otro.

c) Solamente una tangente común,

Respuesta.- Se puede graficar solamente una tangente si hacemos que el circulo este contenido en el otro.

d) ninguna tangente en común,

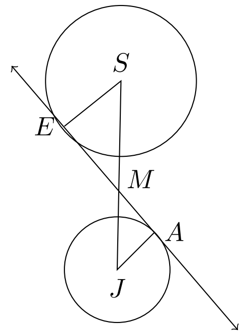
Respuesta.- Se podría siempre y cuando uno de los círculos fuese más pequeño y no tocara con la circunferencia del otro.

e) más de cuatro tangentes en común.

Respuesta.- No se puede graficar mas de 4 tangentes en común.

7. En la figura AE es tangente común y JS une los centros de los círculos. Los puntos E y A son puntos de tangencia y M es el punto de intersección de los segmentos JS y AE. Pruebe que $\widehat{J} = \widehat{S}$.

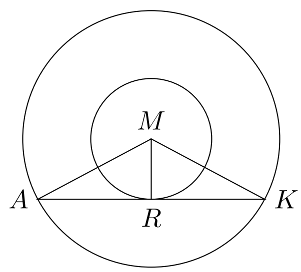
Respuesta.-



Si un radio tiene una línea tangente, la circunferencia en su extremo es entonces perpendicular a la línea tangente.
Según el teorema $\triangle ESB$ y $\triangle JBA$ son rectángulos y $E\widehat{B}S = J\widehat{B}A$, ya que están colocados por el vértice.
Como $\triangle ESB$ y $\triangle JBA$ tienen dos ángulos congruentes, entonces son similares y por lo tanto $\widehat{S} = \widehat{J}$.

8. En la figura siguiente a izquierda, M es el centro de los dos círculos y AK es tangente al círculo menor en el punto R. Muestre que $AR = RK$.

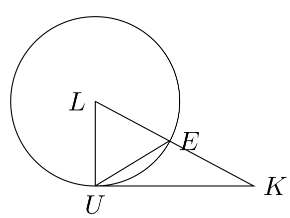
Demostración.-



Construyamos $\triangle MAR$ y $\triangle MRK$ tal que $AM = MK = Radio$
Con m trazamos una línea que interseca a AK en el punto R. Ahora bien, si un rayo corta a una línea en su punto de tangencia, es perpendicular a la línea. En base a esto tendremos $A\widehat{R}M = M\widehat{R}K = 90°$. Por lo tanto, $\triangle AMRy\triangle MRK$son rectángulos y por el criterio de hipotenusa de los triángulos rectangulares $\triangle MRK = \triangle AMR$. Luego $AR = RK$.

9. En la figura anterior a derecha, L es el centro del círculo, UK es tangente al círculo en el punto U y $UE = LU$. Muestre que $LE = EK$.

Demostración.-



Si UK es tangente al círculo en el punto U, entonces $UK \perp LU$ entonces $L\widehat{U}K = 90°$. Por hipótesis $UE = LU$ y como LE es radio, $LE = LU = UE$. Entonces, $\triangle LUE$ es equilátero y $L\widehat{E}U = L\widehat{U}E = U\widehat{L}E = 60°$. Como $L\widehat{E}U$ es el ángulo externo $\triangle EUK$, entonces:

$$L\widehat{E}U = E\widehat{K}U + E\widehat{U}K$$

Sin embargo como $L\widehat{U}K = L\widehat{U}E + E\widehat{U}K$ entonces $L\widehat{U}E + E\widehat{U}K = 90°$ (1)
Como $L\widehat{U}E = 60°$ por (1) $E\widehat{U}K = 30°$
Así $L\widehat{E}U = E\widehat{U}K + E\widehat{K}U$ implica que:

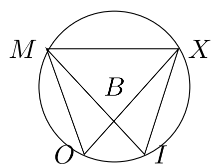
$$60° = 30° + E\widehat{K}U$$

$$E\widehat{K}U = 30°$$

Luego $\triangle E\widehat{U}K$ es isosceles de base UK, porque tienen dos ángulos de 30°, por lo que $EK = EU$ (2).
Como $UE = LU = LE$ (3).
Por (2) y (3) tenemos $LE = EK$.

10. En la figura siguiente a izquierda, $MO = IX$. Pruebe que $MI = OX$.
Dos puntos en un círculo determinan dos arcos. Si los puntos son A y B denotamos por AB al arco menor determinado por estos dos puntos. Si P también pertenece al círculo usaremos la notación APB para representar al arco que contiene al punto P.

Demostración.- Trazando una cuerda MX es posible notar que $M\widehat{O}X = M\widehat{I}X$, porque ambos tienen la misma cuerda.



Como $\triangle MOB$ y $\triangle BXI$ tienen dos ángulos congruentes estos son similares por lo tanto:

$$\frac{MO}{XI} = \frac{OB}{BI}$$

Como $MO = XI$ por hipótesis:

$$\frac{OB}{BI} = 1 \quad \Rightarrow \quad OB = BI$$

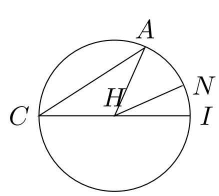
Así $\triangle MOB = \triangle BXI$ por el caso LAL y $MB = BX$, por tanto:

$$MB + BI = BX + OB$$

$$MI = XO$$

11. En la figura anterior a derecha, H es el centro del círculo y CI es un diámetro. Si CA y HN son paralelos, muestre que $\widehat{AN}$ y $\widehat{IN}$ tienen la misma medida.

Demostración.-



Tenemos AH de donde $\widehat{C} = 0{,}5(A\widehat{H}I) \qquad (1)$
Notese que $CA = HA = HN = HI = \textit{Radio}$ por el paralelismo entre CA y HN. También podemos ver que $C\widehat{A}H = A\widehat{H}N$, por los ángulos alternos internos.
Como $\triangle ACH$ es equilátero $AH = CA = CH = \textit{Radio}$ entonces $\widehat{C} = C\widehat{A}H = A\widehat{H}N$.
Luego de (1) vemos:

$$\widehat{C} = 0{,}5A\widehat{H}I = 0{,}5(A\widehat{H}N + N\widehat{H}I)$$

$$\widehat{C} = 0{,}5(A\widehat{H}N + N\widehat{H}I)$$

Como $A\widehat{H}N = \widehat{C}$

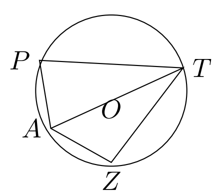
$$\widehat{C} - 0{,}5\widehat{C} = 0{,}5N\widehat{H}I$$

$$0{,}5\widehat{C} = 0{,}5N\widehat{H}I$$

$$N\widehat{H}I = \widehat{C} = A\widehat{H}N$$

Concluyendo que $N\widehat{H}I = A\widehat{H}N$. Como ángulos centrales iguales dan como resultado cuerdas congruentes, completamos la demostración concluyendo que $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{IN}$

12. En la figura siguiente a izquierda, O es el centro del círculo y TA es un diámetro. Si $PA = AZ$, muestre que los triángulos PAT y ZAT son congruentes.



Notemos que $T\widehat{P}A$ y $T\widehat{Z}A$ ambos se refieren a arcos formados por semicírculos de modo que

$$T\widehat{P}A = T\widehat{Z}A = 90^\circ$$

Luego los triángulos PAT y ZAT son congruentes por el caso $PA = AZ$ y TA.

13. En la figura anterior a derecha, se sabe que Y es el centro del círculo y que $BL = ER$. Muestre que BE es paralelo a LR.

14. En la figura siguiente, el cuadrilátero $DIAN$ es un paralelogramo y son colineales los puntos I, A y M. Muestre que $DI = DM$.

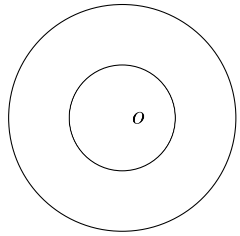
Demostración.- Tenemos $D\widehat{N}A = D\widehat{M}A$, porque se someten al mismo arco $\overset{\frown}{DA}$. Como $DIAN$ es un paralelogramo, $D\widehat{N}A = D\widehat{I}A$, así:

$$D\widehat{M}A = D\widehat{I}A$$

Como I, A y M son colineales y $\triangle DMI$ es isosceles de base MI que implica que $DM = DI$.

15. En la figura siguiente, ¿cuál de los dos arcos, AH o MY tiene mayor medida en grados? Se sabe que los dos círculos son concéntricos.

Respuesta.-



Note que $A\widehat{O}H$ es un ángulo central de la misma circunferencia que $A\widehat{T}H$ está inscrita y por tanto:

$$A\widehat{T}H = \frac{A\widehat{O}H}{2}$$

Como $A\widehat{T}H$ relativo al arco $\widehat{AH}$ y $M\widehat{O}Y$ relativo al arco $\widehat{MY}$.
Como $M\widehat{O}Y > A\widehat{O}H$ que implica directamente que $\widehat{MY} = \widehat{AH}$