1

Cálculo diferencial

1.9 Ejercicios

1. Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ para todo x. Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es horizontal.

Respuesta.- Sea $f'(x) = x^2 - 4x + 3$, entonces para que la recta tangente sea horizontal igualamos la derivada a cero de la siguiente manera,

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$$

de donde se obtiene que,

$$x_1 = 3 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 1.$$

2. Sea $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$ para todo x. Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la pendiente es:

a) 0.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces

$$f'(x) = 2x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x-1)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

b) -1.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces

$$f'(x) = 2x^2 + x - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad x(2x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

c) 5.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces

$$f'(x) = 2x^2 + x - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

3. Sea $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ para todo x. Hallar todos los puntos x para los que la gráfica de f en $(x, f(x))$ tiene pendiente cero.

Respuesta.- Para tal efecto igualamos la derivada de $f(x)$ a 0.

$$1 + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

4. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo x. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(2,3)$.

Respuesta.- Primero, derivamos $f(x)$, como sigue

$$g'(x) = 2x + a.$$

Así, si la linea $y = 2x$ es tangente a f en el punto $(2,4)$, tenemos

$$f'(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 + a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -2.$$

Luego, el punto $(2,4)$ debe estar en la gráfica de f, es decir,

$$f(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 + (-2)2 + b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 4.$$

Por lo tanto, los valores son $a = -2$ y $b = 4$.

5. Hallar valores de las constantes a, b y c para los cuales las gráficas de los dos polinomios $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ se intersecten en el punto $(1,2)$ y tengan la misma tangente en dicho punto.

Repuesta.- Dado que f y g se intersectan en $(1,2)$, podríamos tener $f(1) = g(1) = 2$, de donde

$$f(1) = 2 \;\rightarrow\; 1 + a + b = 2 \qquad \text{y} \qquad g(1) = 2 \;\Rightarrow\; 1 - c = 2 \;\Rightarrow\; c = -1.$$

Luego, calculamos las derivadas para que podamos encontrar la pendiente de las rectas tangentes en este punto,

$$f'(x) = 2x + a, \qquad g'(x) = 3x^2.$$

Por el hecho de que estos deben ser los mismos en el punto $(1,2)$ tenemos

$$f'(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Por lo que $1 + a + b = 2 \;\Rightarrow\; b = 0$. Por lo tanto las constantes son

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = -1.$$

6. Considérese la gráfica de la función f definida por la ecuación $f(x) = x^2 + ax + b$, siendo a y b constantes.

(a) Hallar la pendiente de la cuerda que une los puntos de la gráfica para los que $x = x_1$ y $x = x_2$.

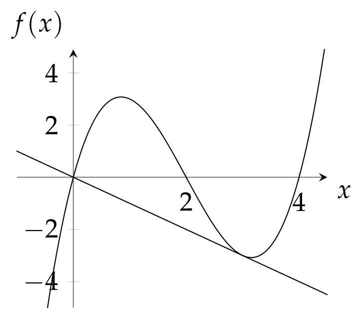
Respuesta.- Los puntos en la gráfica de f en x_1 y x_2 son $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Entonces la cuerda que los une tiene una pendiente dada

(b) Hallar, en función de x_1 y x_2, todos los valores de x para los que la tangente en $(x, f(x))$ tiene la misma pendiente que la cuerda de la parte a).

Repuesta.-

7. Demostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar los puntos de tangencia. ¿Vuelve la tangente a cortar la curva?.

Demostración.-



Primero calculemos la derivada de la recta y la curva, respectivamente

$$y' = -1, \qquad y_0' = 3x^2 - 12x + 8$$

Luego igualando estas ecuaciones obtenemos

$$y_1 = 3x^2 - 12x + 8 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 1.$$

Luego, para que la linea sea tangente a la curva, el punto debe estar en la curva $y_0 = x^3 - 6x^2 + 8x$ como sigue,

- Para $x_1 = 3$, se tiene $y(3) = -3 = -x$ por lo que $y = -x$ es tangente a la curva en $(3, -3)$.

- Para $x_2 = 1$, se tiene $y(1) = 1 \neq -x$ por lo que x_2 no es tangente a la curva.

Esta linea tangente también corta la curva en $(0, 0)$.

8. Dibujar la gráfica de la función cúbica $f(x9x - x^3$ en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$. Hallar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 0)$. Una segunda recta que pasa por $(-1, 0)$ es también tangente a la gráfica de f en el punto (a, c). Determinar las coordenadas a y c.

Respuesta.-