1

Teoría elemental de la probabilidad

Sea E una colección de elementos $\xi.\eta, \zeta, \ldots,$ que llamaremos sucesos elementales, y $\mathfrak{F}$ un conjunto de subconjuntos de E; los elementos del conjunto $\mathfrak{F}$ se llamarán eventos aleatorios.

Axioma .1 *$\mathfrak{F}$ es un campo de conjuntos. (Un sistema de conjuntos se denomina campo si la suma, el producto y la diferencia de dos conjuntos del sistema también pertenecen al mismo sistema).*

Axioma .2 *$\mathfrak{F}$ contiene el conjunto E.*

Axioma .3 *A cada conjunto A en $\mathfrak{F}$ se le asigna un número real no negativo $P(A)$. Este número $P(A)$ se llama probabilidad del evento A.*

Axioma .4 *$P(E)$ es igual a 1.*

Axioma .5 *Si A y B no tienen ningún elemento en común, entonces*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

1.4. Corolarios inmediatos de los axiomas; Probabilidades condicionales; teorema de Bayes

De $A + \overline{A} = E$ y los axiomas IV y V se sigue que,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{.1}$$

$$P(\overline{A} = 1 - P(A). \tag{.2}$$

Ya que $\overline{E} = 0$, en particular se tiene,

$$P(0) = 0. \tag{.3}$$

Si $A, B, ..., N$ son incompatibles, entonces por el Axioma V se sigue la fórmula (**teorema de la suma**),

$$P(A+B+\ldots,+N) = P(A) + P(B) + \ldots + P(N) \tag{.4}$$

Si $P(A) > 0$, entonces el cociente

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{.5}$$

Es definida como la probabilidad condicional del evento B bajo la condición A.

Luego por (.5) se sigue que,

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{.6}$$

Y por inducción obtenemos la fórmula general (**el teorema de la multiplicación**)

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A,A_2\ldots A_{n-1}}(A_n) \tag{.7}$$

Los siguientes teoremas se siguen fácilmente,

$$P_A(B) \geq 0, \tag{.8}$$

$$P_A(E) = 1, \tag{.9}$$

$$P_A(B + C) = P_A(B) + P_A(C). \tag{.10}$$

$$P_A(A) = 1. \tag{.11}$$

Por (.6) y la fórmula análoga

$$P(AB) = P(B)P_B(A)$$

obtenemos la fórmula,

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}, \tag{.12}$$

que contiene el esencia el **teorema de bayes**

Teorema 1.1 (Teorema de la probabilidad total) *Sea $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E$ (Sea asume que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes) y sea X arbitrario. Entonces*

$$P(X) = P(A_1)P_{A_1}(X) + P(A_2)P_{A_2}(X) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(X); \tag{.13}$$

Prueba.- *Sea*

$$X = A_1X + A_2X + \ldots + A_nX;$$

Usando (.4) tenemos,

$$P(X) = P(A_1X) + P(A_2X) + \ldots + P(A_nX)$$

y según (.6) tenemos al mismo tiempo

$$P(A_iX) = P(A_i)P_{A_t}(X)$$

Teorema 1.2 (Teorema de Bayes) *Sea $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E$ y X sea arbitrario, entonces*

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(X)}{P(A_1)P_{A_1}(X) + P(A_2)P_{A_2}(X) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(X)}, \quad para \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{.14}$$

Prueba.- *De* (.12) *se tiene,*

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(X)}{P(X)}$$

Para obtener la fórmula (.14) solo queda sustituir la probabilidad $P(X)$ por su valor derivado de (.13) aplicando el teorema de la probabilidad total.

1.5. Independencia