1

Algunas aplicaciones de la integración

1.1. Valor medio de una función

Definición 1.1 (Definición del valor medio de una función en un intervarlo) *Si f es integrable en un intervalo $[a,b]$, definimos $A(f)$, el valor medio de f en $[a,b]$, por la siguiente fórmula*

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Podemos ahora demostrar que ésta la fórmula es en realidad una extensión del concepto de media aritmética. Sea f una función escalonada que es constante en cada uno de los subintervalos de $[a,b]$, obtenidos al dividirlo en n partes iguales. En particular, sea $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$, y supongamos que $f(x) = f(x_k)$, si $x_{x-1} < x < x_k$. Entonces será $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$, con lo que se tiene

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Así pues, para funciones escalonadas, el promedio $A(f)$ coincide con la media aritmética de los valores $f(x_1), \dots, f(x_k)$ tomados en los intervalos en los que la función es constante.

Definición 1.2 (Definición del valor medio de una función en un intervarlo)

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{f_a^b w(x)\,dx}$$

Definición 1.3 (Primer momento al rededor de 0)

$$\overline{x} = \frac{\int_0^b xp(x)\,dx}{\int_0^a p(x)\,dx} \text{ para } p \text{ llamada densidad de masa.}$$

Definición 1.4 (Segundo momento al rededor de 0 o momento de inercia)

$$r^2 = \frac{\int_0^b x^2 p(x)\,dx}{\int_0^a p(x)\,dx} \text{ para } p \text{ llamada densidad de masa.}$$

1.2. Ejercicios

1. $f(x) = x^2, \quad a \leq x \leq b.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+2ba+a^2}{3}.$$

2. $f(x) = x^2 + x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (x^2+x^3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

3. $f(x) = x^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{4-0}\int_0^4 x^{1/2}\, dx = \frac{1}{4}\cdot\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right|_0^4 = \frac{4}{3}.$$

4. $f(x) = x^{1/3}, \quad 1 \leq x \leq 8.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{8-1}\int_1^8 x^{1/3}\, dx = \frac{1}{7}\cdot\left.\frac{3x^{4/3}}{4}\right|_1^8 = \frac{48-3}{7} = \frac{45}{28}.$$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot(1-\cos\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

6. $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2+\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot(\operatorname{sen}\pi/2+\operatorname{sen}\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{2}{2\pi}\int_{0\cdot 2}^{\frac{\pi}{2}\cdot 2} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{\pi}(1-\cos\pi) = \frac{2}{\pi}$$

.

8. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x \; dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(2x) \; dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \; dx = \frac{1}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

9. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \; dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) \; dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\pi = \frac{1}{2}.$$

10. $f(x) = \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq pi.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x \; dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \; dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) = \frac{1}{2}.$$

11. **(a)** Si $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq a$, hallar un número c que satisfaga $0 < x < a$ y tal que $f(c)$ sea igual al promedio de f en $[0, a]$.

Respuesta.-

$$\frac{1}{a}\int_0^a x^2 \; dx = c^2 \Longrightarrow \frac{1}{a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = c^2 \Longrightarrow c = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

(b) Resolver la parte (a) si $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo cualquiera.

Respuesta.- Generalizando el anterior ejercicio tenemos,

$$c^n = \frac{1}{a}\int_0^a x^n \; dx \Longrightarrow c = \frac{a}{(n+1)^{1/n}}.$$

12. Sea $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$. El valor medio de f en $[0, 1]$ es $\frac{1}{3}$- Hallar una función peso no negativa w tal que la media ponderada de f en $[0, 1]$, definida en 2.19 sea:

Respuesta.- Sabiendo que,

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x)f(x) \; dx}{\int_a^b w(x) \; dx}$$

entonces

(a) $\frac{1}{2}.$

Será $w(x) = x$ para que $A(f) = \frac{1}{2}$. Como se verá a continuación.

$$A(f) = \frac{\int_a^b x \cdot x^2 \; dx}{\int_0^1 x \; dx} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\dfrac{3}{5}$.

Sea $w(x) = x^2$, entonces

$$A(f) = \frac{\int_a^b x^2 \cdot x^2}{\int_0^1 x^2\, dx} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}.$$

(c) $\dfrac{2}{3}$.

Sea $w(x) = x^3$, entonces

$$A(f) = \frac{\int_a^b x^3 \cdot x^2}{\int_0^1 x^3\, dx} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

13. Sea $A(f)$ el promedio de f en $[a, b]$. Demuestre que el promedio tiene las siguientes propiedades:

(a) **Propiedad aditiva:** $A(f + g) = A(f) + A(g)$.

Demostración.- Sea

$$A(f+g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) + g(x)\, dx$$

entonces por la el teorema 1.17 (aditividad respecto al intervalo de integración) se tiene,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\, dx = A(f) + A(g)$$

así queda demostrado la propiedad aditiva del valor medio de una función.

(b) **Propiedad homogénea:** $A(cf) = cA(f)$ si c es algún número real.

Demostración.- Sea

$$A(cf) = \frac{1}{b-a}\int_a^b c[f(x)]\, dx$$

entonces por el teorema 1.16 (linealidad respecto al integrando) se tiene,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b c[f(x)]\, dx = c\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right] = cA(f).$$

(c) **Propiedad monótona:** $A(f) \le A(g)$ si $f \le g$ en $[a, b]$.

Demostración.- dado que $f(x) \le g(x)$ entonces por el teorema de comparación (teorema 1.20) obtenemos que,

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx \implies \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\, dx \implies A(f) \le A(g).$$

14. ¿Cuáles de la propiedades del problema 13 son validas para las medias ponderadas definidas en 2.19?.

Respuesta.- Para $A(f+g)$ tenemos,

$$\begin{aligned} A(f+g) &= \frac{\int_a^b w(x)\left[f(x)+g(x)\right]\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ &= \frac{\int_a^b w(x)f(x)\, dx + \int_a^b w(x)g(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ &= \frac{\int_a^b w(x)f(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} + \frac{\int_a^b w(x)g(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ &= A(f)+A(g) \end{aligned}$$

Para $A(cf)$ tenemos,

$$\begin{aligned} A(cf) &= \frac{\int_a^b cf(x)w(x)\, dx}{int_a^b w(x)\, dx} \\ &= c \cdot \frac{\int_a^b w(x)f(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ &= cA(f) \end{aligned}$$

Por último sea $f \leq q$ en $[a,b]$, entonces ya que w es no negativo tenemos, $w(x)f(x) \leq w(x)g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Se sigue por la propiedad monótona de la integral que,

$$\int_a^b w(x)f(x)\, dx \leq \int_a^b w(x)g(x)\, dx$$

ya que w es no negativo, $\int_a^b w(x)\, dx$ también es no negativo y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\int_a^b w(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} &\leq \frac{\int_a^b w(x)g(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ A(f) &\leq A(g) \end{aligned}$$

15.