1

Espacios vectoriales de dimensión finita

1.A Span e independencia lineal

1.2 Notación **Lista of vectores.**

Por lo general, escribiremos listas de vectores sin paréntesis alrededor.

Combinaciones lineales y generadores

1.3 Definición **Combinación lineal.**

Una **combinación lineal** de una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es un vector de la forma

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m,$$

donde $a_1, \ldots a_m \in \mathbf{F}$.

1.5 Definición **Span o generador.**

El conjunto de todas las combinaciones lineales de una lista de vectores $v_1, \ldots, v_m$ en V se denomina **generador** de $v_1, \ldots, v_m$, denotado por $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$. En otras palabras,

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m : a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}\}.$$

El span de la lista vacía $()$ es definida por $\{0\}$.

1.7 Teorema **Span es el subespacio más pequeño que lo contiene.** El **span** de una lista de vectores en V es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los vectores de la lista.

Demostración.- Suponga que $v_1, \ldots, v_m$ es una lista de vectores en V. Primero demostraremos que $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es un subespacio de V. El 0 está en $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$, porque

$$0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m.$$

También, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es cerrado bajo la suma, ya que

$$(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) + (c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = (a_1 + c_1)v_1 + \cdots + (a_m + c_m)v_m.$$

Además, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, dado que

$$\lambda(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = \lambda a_1v_1 + \cdots + \lambda a_mv_m.$$

Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es un subespacio de V. Esto por 1.34.

Cada v_j es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$ (para mostrar esto, establezca $a_j = 1$ y que las otras a's en la definición de combinación lineal sean iguales a 0). Así, el $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ contiene a cada v_j. Por otra parte, debido a que los subespacios están cerrados bajo la multiplicación de escalares y la suma, cada subespacio de V que contiene a cada v_j contiene a $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los demás vectores $v_1, \ldots, v_m$. ■

1.8 Definición **Spans.**

Si $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es igual a V, decimos que $v_1, \ldots, v_m$ se extiende sobre V.

1.10 Definición **Espacio vectorial de dimensión finita.**

Un espacio vectorial se llama finito-dimensional si alguna lista de vectores en él genera el espacio.

1.11 Definición **Polinomio, $\mathcal{P}$ (F)**

- Una función $p : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ es llamado polinomio con coeficientes en $\mathbf{F}$ si existe $a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

  $$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_mz^m$$

  para todo $z \in \mathbf{F}$.
- $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbf{F}$.

Con las operaciones usuales de adición y multiplicación escalar, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$. En otras palabras, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un subespacio de $\mathbf{F}^{\mathbf{F}}$, el espacio vectorial de funciones de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{F}$.

Los coeficientes de un polinomio están determinados únicamente por el polinomio. Así, la siguiente definición define de manera única el grado de un polinomio.

1.12 Definición **Grado de un polinomio,** $deg\ p$.

- Un polinomio $p \in \mathcal{P}(F)$ se dice que tiene **grado** m si existen escalares $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ con $a_m \neq 0$ tal que
$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$
para todo $z \in \mathbf{F}$. Si p tiene grado m, escribimos $deg\ p = m$.
- El polinomio que es identicamente 0 se dice que tiene **grado** $-\infty$.

1.13 Definición $\mathcal{P}_m$ **(F)**

Para m un entero no negativo, $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficiente en $\mathbf{F}$ y grado no mayor a m.

Verifiquemos el siguiente ejemplo, tenga en cuenta que $\mathcal{P}_m(\mathbf{F}) = \operatorname{span}(1, z, \ldots, z^m)$; aquí estamos abusando ligeramente de la notación al permitir que z^k denote una función.

1.15 Definición **Espacio vectorial de dimensión infinita.**

Un espacio vectorial se llama **infinitamente-dimensional** si no es de dimensión finita.

1.16 Ejemplo Demuestre que $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es infinitamente-dimensional.

Demostración.- Considere cualquier lista de elementos de $\mathcal{P}(\mathbf{F})$. Sea m el grado más alto de los polinomios en esta lista. Entonces, cada polinomio en el generador (span) de esta lista tiene grado máximo m. Por lo tanto, z^{m+1} no está en el span de nuestra lista. Así, ninguna lista genera $\mathcal{P}(\mathbf{F})$. Concluimos que $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es de dimensión infinita. ■

Independencia lineal

Suponga $v_1, \ldots, v_m \in V$ y $v \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Por la definición de span, existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m.$$

Considere la cuestión de si la elección de escalares en la ecuación anterior es única. Sea $c_1, \ldots, c_m$ otro conjunto de escalares tal que
$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m.$$
Sustrayendo estas últimas ecuaciones, se tiene

$$0 = (a_1 - c_1)v_1 + \cdots + (a_m - c_m)v_m.$$

Así, tenemos que escribir 0 como una combinación lineal de $(v_1, \ldots, v_m)$. Si la única forma de hacer esto es la forma obvia (usando 0 para todos los escalares), entonces cada $a_j - c_j$ es igual a 0, lo que significa que cada a_j es igual a c_j (y por lo tanto la elección de los escalares fue realmente única). Esta situación es tan importante que le damos un nombre especial, independencia lineal, que ahora definiremos.

1.17 Definición **Linealmente independiente.**

- Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V se llama linealmente independiente si la única posibilidad de que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$ sea igual a 0 es $a_1 = \cdots = a_m = 0$.
- La lista vacía $()$ también se declara linealmente independiente.

El razonamiento anterior muestra que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente si y sólo si cada vector en el span$(v_1, \ldots, v_m)$ tiene sólo una representación lineal en forma de combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$.

1.19 Definición **Linealmente dependiente.**

- Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V se llama linealmente dependiente si no es linealmente independiente.
- En otras palabras, una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es linealmente dependiente si existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$.

1.21 Lema Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es una lista linealmente dependiente en V. Entonces, existen $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que se cumple lo siguente:

(a) $v_j \in \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$;

(b) Si el $j$ésimo término se elimina de $v_1, \ldots, v_m$, el span de la lista restante es igual a span$(v_1, \ldots, v_m)$.

Demostración.- Ya que la lista $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente dependiente, existe números $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que

$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0.$$

Sea j el elemento más grande de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $a_j \neq 0$. Entonces,

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \cdots - \frac{a_{j-1}}{a_j}v_{j-1} \qquad (1).$$

Lo que prueba (a).
Para probar (b), suponga $u \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Entonces, existe números $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m.$$

En la ecuación de arriba, podemos reemplazar v_j con el lado derecho de (1), lo que muestra que u está en el span de la lista obtenida al eliminar el j-ésimo término de $v_1, \ldots, v_m$. Así (b) se cumple. ■

Eligir $j = 1$ en el lema de dependencia lineal anterior, significa que $v_1 = 0$, porque si $j = 1$ entonces la condición (a) anterior se interpreta como que $v_1 \in \text{span}()$. Recuerde que span$() = \{0\}$. Tenga en cuenta también que la demostración del inciso (b) debe modificarse de manera obvia si $v_i = 0$ y $j = 1$.

1.23 Teorema **Longitud de la lista linealmente independiente es $\leq$ a la longitud de la lista que genera.**

En un espacio vectorial finito, la longitud de cada lista linealmente independiente de vectores es menor o igual que la longitud de cada lista de vectores.

Demostración.- Suponga $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente en $\mathbf{V}$. Suponga también que $w_1, \ldots, w_n$ generan V. Necesitamos probar que $m \leq n$. Lo hacemos a través del proceso de pasos que se describe a continuación; tenga en cuenta que en cada paso agregamos una de las $u's$ y eliminamos una de las $w's$.

Paso 1. Sea B la lista $w_1, \ldots, w_n$, que abarca V. Por lo tanto, adjuntar cualquier vector en V a esta lista produce una lista linealmente dependiente (porque el nuevo vector adjunto se puede escribir como una combinación lineal de los otros vectores). En particular, la lista

$$u_1, w_1, \ldots, w_n$$

es linealmente dependiente. Así, por el lema (2.21), podemos eliminar un de las w para que la nueva lista B (de longitud n) que consta de u_1 y las w restantes abarquen V.

Paso 2. La lista B (de longitud n) del paso $j-1$ genera V. Así, adjuntar cualquier vector a esta lista produce una lista linealmente dependiente. En particular, la lista de longitud $(n+1)$ obtenida al unir u_j a B, colocándola justo después de $u_1, \ldots, u_{j-1}$, es linealmente dependiente. Por el lema de dependencia lineal (2.21)m uno de los vectores de esta lista está en el lapso de los anteriores, y porque $u_1, \ldots, u_j$ es linealmente independientes, este vector es uno de los $w's$, no uno de los $u's$. Podemos eliminar esa w para la nueva lista B (de longitud n) que consta de $u_1, \ldots, u_j$ y las $w's$ restantes generan V.

Después del paso m, hemos agregado todas las u y el proceso se detiene. En cada paso, a medida que agregamos un u a B, el lema de dependencia lineal implica que hay algo de w que eliminar. Por lo tanto, hay al menos tantas w como u. ∎

1.26 Teorema **Subespacio de dimensión finita.**

Todo subespacio de un vector de dimensión finita es de dimensión finita.

Demostración.- Suponga que V es de dimensión finita y U es un subespacio de V. Necesitamos demostrar que U es de dimensión finita. Hacemos esto a través de la siguiente construcción de pasos.

Paso 1. Si $u = \{0\}$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \{0\}$, entonces elegimos un vector no nulo $v_1 \in U$

Paso 2. Si $U = \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, entonces elegimos un vector $v_j \in U$ tal que

$$v_j \in \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1}).$$

Después de cada paso, mientras continúa el proceso, hemos construido una lista de vectores tal que ningún vector en esta lista está en el generador de los vectores anteriores. Así, después de cada paso hemos construido una lista linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Esta lista linealmente independiente no puede ser más grande que cualquier lista de expansión de V (por 2,23). Por lo tanto, el proceso eventualmente termina, lo que significa que U es de dimensión finita. ∎

1.A Ejercicios

1. Suponga v_1, v_2, v_3, v_4 se extiende por V. Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

también se extiende por V.

Demostración.- Sea $v \in V$, entonces existe a_1, a_2, a_3, a_4 tal que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4.$$

Que implica,

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 - a_1v_2 + a_1v_2 - a_1v_3 + a_1v_3 - a_2v_3 + a_2v_3 - a_1v_4 + a_1v_4 \\ &- a_2v_4 + a_2v_4 - a_3v_4 + a_3v_4 \end{aligned}$$

De donde,

$$v = a_1(v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(v_3 - v_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)v_4.$$

Por lo tanto, cualquier vector en V puede ser expresado por una combinación lineal de

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4.$$

Así, esta lista se extiende por V.

2. Verifique las afirmaciones del Ejemplo 2.18.

(a) Una lista v de un vector $v \in V$ es linealmente independiente si y sólo si $v \neq 0$.

Demostración.- Demostremos que si v es linealmente independiente, entonces $v \neq 0$. Supongamos que $v = 0$. Sea un escalar $a \neq 0$. De donde, $av = 0$ incluso cuando $a \neq 0$. Esto contradice la definición de independencia lineal. Por lo tanto, v debe ser linealmente dependiente. Esto es, $v = 0$ implica que v es un vector linealmente dependiente. Por lo que, si v es linealmente independiente, entonces v es un vector distinto de cero.
Por otro lado, debemos demostrar que $v \neq 0$ implica que v es linealmente independiente. Sea un escalar a tal que $av = 0$. Si $a \neq 0$, entonces av no puede ser 0. Por eso a debe ser 0. Por lo tanto, $v \neq 0$ y $av = 0$ implica que $a = 0$. Así, v es linealmente independiente.

(b) Una lista de dos vectores en V es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

Demostración.- El enunciado siguiente es equivalente. Dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar de otro. Supongamos que v_1, v_2 son dos vectores linealmente dependientes. Por lo que, existe escalares a_1, a_2 tal que

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0$$

y no ambos escalares a_1, a_2 son cero. Sea $a_1 \neq 0$, entonces la ecuación se podría reescribir como

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2$$

el cual prueba que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Por otro lado, si $a_2 \neq 0$, entonces $v_2 = -\frac{a_1}{a_2}v_1$ de aquí podemos afirmar que v_2 es un múltiplo escalar de v_1.
Ahora supongamos que que uno de los v_1 o v_2 es un múltiplo escalar del otro. Podemos decir, sin perdida de generalidad, que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Esto es, $v_1 = cv_2$ para algún escalar c. Por lo tanto, la ecuación $v_1 - cv_2 = 0$ se cumple, ya que el multiplicador de v_1 es distintos de cero. Esto es precisamente lo que requerimos para la definición de dependencia lineal. Así, v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

(c) $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$ es linealmente independiente en $\mathbf{F}^4$.

Demostración.- Utilizaremos la definición de independencia lineal. Sean a,b,c escalares en $\mathbf{F}$ tal que

$$a(1,0,0,0)+b(0,1,0,0)+c(0,0,1,0)=\mathbf{0}=(0,0,0,0)$$

Entonces,

$$(a,b,c,0)=(0,0,0,0)$$

Lo que implica,

$$a,b,c=0.$$

Esto demuestra que los tres vectores son linealmente independientes.

(d) La lista $1,z,\ldots,z^m$ es linealmente independiente en $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ para cada entero no negativo m.

Demostración.- Demostremos por contradicción. Supongamos que $1,z,\ldots,z^m$ es linealmente dependiente. Por lo que, existe un escalar $a_0,a_1,\ldots,a_m$ tal que

$$a_0+a_1z+\ldots+a_mz^m=0.$$

Sea k el indice más grande tal que $a_k\neq 0$. Esto significa que los escalares desde a_{k+1} hasta a_m son cero. Entonces, se deduce que

$$a_0+a_1z+\ldots+a_kz^k=0.$$

Reescribiendo se tiene

$$z_k=-\frac{a_0}{a_k}-\frac{a_1}{a_k}z-\cdots-\frac{a_{k-1}}{a_k}z^{k-1}.$$

Aquí, expresamos z^k como un polinomio de grado $k-1$ el cual es absurdo. Por lo que $1,z,z^2,\ldots,z^m$ es un conjunto linealmente independiente.

3. Encuentre un número t tal que

$$(3,1,4),(2,-3,5),(5,9,t)$$

no es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$.

Respuesta.- Sea,

$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)+c(5,9,t)=0.$$

Si $c=0$. Entonces,

$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)=0.$$

Lo que implica

$$\begin{array}{rcl} 3a+2b & = & 0 \\ a-3b & = & 0 \\ 4a+5b & = & 0 \end{array}$$

De donde, resolviendo para a y b se tiene

$$a=0 \quad \text{y} \quad b=0.$$

Pero, no queremos que a,b,c sean cero. Así que debemos forzar que $c\neq 0$, como sigue:

$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)+c(5,9,t)=0 \quad \Rightarrow \quad (5,9,t)=-\frac{a}{c}(3,1,4)-\frac{b}{c}(2,-3,5).$$

Es decir, estamos expresando $(5,9,t)$ como una combinación lineal de los vectores restantes. Así, sea $-\frac{a}{c} = x$, $-\frac{b}{c} = y$ por lo que,

$$(5,9,t) = x(3,1,4) + y(2,-3,5).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x - 3y &= 9 \\ 4x + 5y &= t \end{aligned}$$

Resolviendo para x y y se tiene

$$x = 3 \quad \text{y} \quad y = -2.$$

Por lo tanto,

$$t = 2.$$