

# Espacios vectoriales

## 1.1 Espacios vectoriales

**Definición**  
1.1

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) consta de lo siguiente:

1. Un cuerpo  $F$  de escalares;
2. un conjunto  $V$  de objetos llamados vectores;
3. una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $V$  un vector  $\alpha + \beta$  de  $V$ , que se llama suma de  $\alpha$  y  $\beta$ , de tal modo que:
  - (a) La adición es conmutativa,  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;
  - (b) la adición es asociativa,  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ;
  - (c) existe un único vector  $0$  de  $V$ , llamado vector nulo tal que  $\alpha + 0 = \alpha$ , para todo  $\alpha$  de  $V$ ;
  - (d) para cada vector  $\alpha$  de  $V$  existe un vector  $-\alpha$  de  $V$ , tal que  $\alpha + (-\alpha) = 0$ ;
4. una regla (u operación) llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar  $c$  de  $F$  y cada vector  $\alpha$  de  $V$  a un vector  $c\alpha$  en  $V$ , llamado producto de  $c$  y  $\alpha$ , de tal modo que:
  - (a)  $1\alpha = \alpha$  para todo  $\alpha$  de  $V$ ;
  - (b)  $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$ ;
  - (c)  $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ ;
  - (d)  $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$ .

**Ejemplo** El **espacio de n-tuplas**,  $F_n$ . Sea  $F$  cualquier cuerpo y sea  $V$  el conjunto de todos los n-tuplas  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de escalares  $x_i$  de  $F$ . Si  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  con  $y_i$  de  $F$ , la suma de  $\alpha$  y  $\beta$  se define por

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (1.1)$$

El producto de un escalar  $c$  y el vector  $\alpha$  se define por

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n). \quad (1.2)$$

Que esta adición vectorial y multiplicación escalar cumplen las condiciones (3) y (4) es fácil de verificar, usando las propiedades semejantes de la adición y multiplicación de elementos de  $F$ . ■

**Ejemplo 1.2** El espacio de matrices  $m \times n$ ,  $F^{m \times n}$ . Sea  $F$  cualquier cuerpo y sean  $m$  y  $n$  enteros positivos. Sea  $F^{m \times n}$  el conjunto de todas las matrices  $m \times n$  sobre el cuerpo  $F$ . La suma de dos vectores  $A$  y  $B$  en  $F^{m \times n}$  se define por

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \quad (1.3)$$

El producto de un escalar  $c$  y de la matriz  $A$  se define por

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}. \quad (1.4)$$

Obsérvese que  $F^{i \times n} = F^n$ . ■

**Ejemplo 1.3** El espacio de funciones de un conjunto en un cuerpo. Sea  $F$  cualquier cuerpo y sea  $S$  cualquier conjunto no vacío. Sea  $V$  el conjunto de todas las funciones de  $S$  en  $F$ . La suma de dos vectores  $f$  y  $g$  de  $V$  es el vector  $f + g$ ; es decir, la función de  $S$  en  $F$  definida por

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s). \quad (1.5)$$

El producto del escalar  $c$  y la función  $f$  es la función  $cf$  definida por

$$(cf)(s) = cf(s). \quad (1.6)$$

Para este tercer ejemplo se indica cómo se puede verificar que las operaciones definidas satisfacen las condiciones (3) y (4). Para la adición vectorial:

(a) Como la adición en  $F$  es conmutativa,

$$f(s) + g(s) = g(s) + f(s)$$

para todo  $s$  de  $S$ , luego las funciones  $f + g$  y  $g + f$  son idénticas.

(b) Como la adición en  $F$  es asociativa,

$$f(s) + [g(s) + h(s)] = [f(s) + g(s)] + h(s)$$

para todo  $s$ , luego  $f + (g + h)$  es la misma función que  $(f + g) + h$ .

(c) El único vector nulo es la función cero, que asigna a cada elemento de  $S$  el escalar 0 de  $F$ .

(d) Para todo  $f$  de  $V$ ,  $(-f)$  es la función dada por

$$(-f) = -f(s).$$

El lector encontrará fácil verificar que la multiplicación escalar satisface las condiciones de (4), razonando como se hizo para la adición vectorial. ■

**Ejemplo 1.4** El espacio de las funciones polinomios sobre el cuerpo  $F$ . Sea  $F$  un cuerpo y sea  $V$  el conjunto de todas las funciones  $f$  de  $F$  en  $F$  definidas en la forma

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad (1.7)$$

donde  $c_0, c_1, \dots, c_n$  son escalares fijos de  $F$  (independiente de  $x$ ). Una función de este tipo se llama **función polinomio sobre  $F$** . Sean la adición y la multiplicación escalar definidas sobre en el ejemplo 3. Se debe observar que si  $f$  y  $g$  son funciones polinomios y  $c$  está en  $F$ , entonces  $f + g$  y  $cf$  son también funciones polinomios. ■

**Ejemplo 1.5** El cuerpo  $C$  de los números complejos puede considerarse como un espacio vectorial sobre el cuerpo  $R$  de los números reales. En forma más general, sea  $F$  el cuerpo de los números reales y sea  $V$  el conjunto de los  $n$ -tuples  $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$  donde  $x_1, \dots, x_n$  son números complejos. Se define la adición vectorial y la multiplicación escalar por (2.1) y (2-2), como en el ejemplo 1. De este modo se obtiene un espacio vectorial sobre el cuerpo  $R$  que es muy diferente del espacio  $C^n$  y del espacio  $R_n$ . ■

Hay unos pocos hechos simples que se desprenden, casi inmediatamente, de la definición de espacio vectorial, y procederemos a derivarlos. Si  $c$  es un escalar y  $0$  es el vector nulo, entonces por 3(c) y 4(c)

$$c0 = c(0 + 0) = c0 + c0.$$

Sumando  $-(c0)$  y por 3(d), se obtiene

$$c0 = 0. \quad (1.8)$$

Análogamente, para el escalar  $0$  y cualquier vector  $\alpha$  se tiene que

$$0\alpha = 0. \quad (1.9)$$

Si  $c$  es un escalar no nulo y  $\alpha$  un vector tal que  $c\alpha = 0$ , entonces por (2-8),  $c^{-1}(c\alpha) = 0$ . Pero

$$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1\alpha = \alpha$$

luego,  $\alpha = 0$ . Así se ve que si  $c$  es un escalar y  $\alpha$  un vector tal que  $c\alpha = 0$ , entonces  $c$  es el escalar cero o  $\alpha$  es el vector nulo.

Si  $\alpha$  es cualquier vector de  $V$ , entonces

$$0 = 0\alpha = (1 - 1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = \alpha + (-1)\alpha$$

de lo que se sigue que

$$(-1)\alpha = -\alpha. \quad (1.10)$$

Finalmente, las propiedades asociativa y conmutativa de la adición vectorial implican que la suma de varios vectores es independiente de cómo se combinen estos vectores y de cómo se asocien. Por ejemplo, si  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  son vectores de  $V$ , entonces

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)] + \alpha_4$$

y tal suma puede ser escrita, sin confusión,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

**Definición 1.2** Un vector  $\beta$  de  $V$  se dice **combinación lineal** de los vectores  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  en  $V$ , si existen escalares  $c_1, \dots, c_n$  de  $F$  tales que

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i.$$

Otras extensiones de la propiedad asociativa de la adición vectorial y las propiedades distributivas 4(c) y 4(d) de la multiplicación escalar se aplican a las combinaciones lineales:

$$\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^n d_i\alpha_i = \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)\alpha_i$$

$$c \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i = \sum_{i=1}^n (cc_i)\alpha_i.$$

**Ejercicios**

1. Si  $F$  es un cuerpo, verificar que  $F^n$  (como se definió en el Ejemplo 1) es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $F$ .

Respuesta.- Sean  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  y  $\gamma = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  elementos de  $F^n$ . Como también sean  $c, d, c_1, c_2 \in F$ . Entonces,

- (3) (a) Conmutatividad para la adición.

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= \beta + \alpha.\end{aligned}$$

- (b) Asociatividad para la adición.

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + z_1 + y_1, x_2 + z_2 + y_2, \dots, x_n + z_n + y_n) \\ &= (\alpha + \gamma) + \beta.\end{aligned}$$

- (c) Existencia del elemento nulo.

$$\begin{aligned}\alpha + 0 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

- (d) Existencia del inverso aditivo.

$$\begin{aligned}\alpha + (-\alpha) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + [-(x_1, x_2, \dots, x_n)] \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, 0, \dots, 0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

- (4) (a) Existencia del elemento neutro para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned}1\alpha &= 1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (1x_1, 1x_2, \dots, 1x_n) \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

- (b) Asociatividad para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned}(c_1 c_2)\alpha &= (c_1 c_2)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (c_1 c_2 x_1, c_1 c_2 x_2, \dots, c_1 c_2 x_n) \\ &= (c_1(c_2 x_1), c_1(c_2 x_2), \dots, c_1(c_2 x_n)) \\ &= (c_1 c_2 x_1, c_1 c_2 x_2, \dots, c_1 c_2 x_n) \\ &= c_1(c_2 \alpha).\end{aligned}$$

- (c) Distributividad para la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{aligned}c(\alpha + \beta) &= c((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\ &= c(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (cx_1 + cy_1, cx_2 + cy_2, \dots, cx_n + cy_n) \\ &= (c\alpha + c\beta).\end{aligned}$$

- (d) Distributividad para la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{aligned}(c + d)\alpha &= (c + d)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (cx_1 + dx_1, cx_2 + dx_2, \dots, cx_n + dx_n) \\ &= c\alpha + d\alpha.\end{aligned}$$

2. Si  $V$  es un espacio vectorial sobre un cuerpo  $F$ , verificar que

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4$$

para todo los vectores  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  de  $v$ .

Respuesta.- Se tiene,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) &= (\alpha_2 + \alpha_1) + (\alpha_3 + \alpha_4) \\ &= \alpha_2 + [\alpha_1 + (\alpha_3 + \alpha_4)] \\ &= \alpha_2 + [(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_4] \\ &= \alpha_2 + [(\alpha_3 + \alpha_1) + \alpha_4] \\ &= [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4. \end{aligned}$$

3. Si  $C$  es el cuerpo de los complejos, ¿qué vectores de  $C^3$  son combinaciones lineales de  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 1)$  y  $(1, 1, 1)$ ?

Respuesta.- Sea  $(x, y, z) \in C^3$  una combinación lineal de los vectores  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 1)$  y  $(1, 1, 1)$ . Entonces, existen escalares  $a, b$  y  $c \in C$  tal que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= a(1, 0, -1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 1) \\ &= (a + c, b + c, c - a). \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{cases} a + c = x \\ b + c = y \\ c - a = z. \end{cases}$$

Resolviendo se tiene,

$$\begin{cases} a = \frac{x - z}{2} \\ b = \frac{2z - x - y}{2} \\ c = \frac{x + z}{2}. \end{cases}$$

Por lo tanto, existen escalares  $a, b$  y  $c \in C$  tal que

$$(x, y, z) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 1).$$

Así, todos los vectores en  $C^3$  pueden ser expresados como una combinación lineal de los vectores  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 1)$  y  $(1, 1, 1)$ .

4. Sea  $V$  el conjunto de los pares  $(x, y)$  de números reales, y sea  $F$  el cuerpo de los números reales. Se define

$$\begin{aligned} (x, y) + (x_1, y_1) &= (x + x_1, y + y_1) \\ c(x, y) &= (cx, y). \end{aligned}$$

¿Es  $V$ , con estas operaciones, un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales?

Respuesta.- No es un espacio vectorial ya que,

$$(0, 2) = (0, 1) + (0, 1) = 2(0, 1) = (2 \cdot 0, 1) = (0, 1).$$

5. En  $\mathbb{R}^n$  se definen dos operaciones

$$\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$$

$$c \cdot \alpha = -c\alpha.$$

Las operaciones del segundo miembro son las usuales. ¿Qué axiomas de espacio vectorial se cumplen para  $\mathbb{R}^n, \oplus, \cdot$ ?

Respuesta.- Sean  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  y  $\gamma = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  elementos de  $F^n$ . Como también sean  $c, d, c_1, c_2 \in F$ . Entonces,

(3) (a) No es conmutativa para la adición.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= \alpha - \beta \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) - (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \\ &= (-y_1 + x_1, -y_2 + x_2, \dots, -y_n + x_n) \\ &= -\beta + \alpha. \\ &= -(\beta - \alpha) \\ &= -(\beta \oplus \alpha) \\ &\neq \beta \oplus \alpha. \end{aligned}$$

(b) No es asociativa para la adición.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) &= \alpha - (\beta - \gamma) \\ &= (\alpha - \beta) + \gamma \\ &= (\alpha \oplus \beta) + \gamma \\ &\neq \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma). \end{aligned}$$

(c) No existe el elemento nulo.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus 0 &= \alpha - 0 \\ &= \alpha - (0, 0, \dots, 0) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Pero, como  $\oplus$  no es conmutativa; es decir,  $\alpha \oplus \neq 0 \oplus \alpha$  decimos que no existe la identidad aditiva para  $\oplus$ .

(d) No existe el inverso aditivo.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus (-\alpha) &= \alpha - (-\alpha) \\ &= \alpha + \alpha \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

(4) (a) No existe el elemento neutro para la multiplicación escalar.

El elemento 1 no satisface  $1 \cdot \alpha = \alpha$  para cualquier  $\alpha \neq 0$ , ya que de lo contrario tendríamos

$$1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sólo si  $x_i = 0$  para todo  $i$ .

(b) No es asociativa para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned} c_1(c_2\alpha) &= c_1(-c_2\alpha) \\ &= -c_1(-c_2\alpha) \\ &= -(c_1c_2)\alpha \\ &\neq (c_1c_2)\alpha. \end{aligned}$$

(c) No es distributiva para la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{aligned} c(\alpha + \beta) &= -c(\alpha + \beta) \\ &= -c\alpha - c\beta \\ &= -(c\alpha + c\beta) \\ &\neq c\alpha + c\beta. \end{aligned}$$

(d) No es distributiva para la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{aligned} c\alpha + d\alpha &= -c\alpha - d\alpha \\ &= -(c + d)\alpha \\ &\neq (c + d)\alpha. \end{aligned}$$

6. Sea  $V$  el conjunto de todas las funciones que tiene valor complejo sobre el eje real, tales que (para todo  $t$  de  $R$ )

$$f(-t) = \overline{f(t)}$$

. La barra indica conjugación compleja. Demostrar que  $V$ , con las operaciones

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$cf(t) = c f(t)$$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Dar un ejemplo de una función en  $V$  que no toma valores reales.

Respuesta.-