1

Límites y continuidad

Definición 1.1 (La razón promedio de cambio) *de* $y = f(x)$ *con respecto a* x *en el intervalo* $[x_1, x_2]$ *sabiendo que* $\triangle x = x_2 - x_1 = h$ *es*

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

1.1. Ejercicios

Razones promedio de cambio

En los ejercicios 1 a 6, determine la razón promedio de cambio de la función en el intervalo o intervalos dados.

1. $f(x) = x^3 + 1$

a) $[2, 3]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(3^3 + 1) - (2^3 + 1)}{3 - 2} = 19$

b) $[-1, 1]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(1^3 + 1) - ((-1)^3 + 1)}{1 - (-1)} = 1$

2. $g(x) = x^2 - 2x$

a) $[1, 3]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(3^2 - 2 \cdot 3) - (1^2 - 2 \cdot 1)}{3 - 1} = 2$

b) $[-2,4]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(4^2-2\cdot 4)-((-2)^2-2\cdot(-2))}{4-(-2)} = 0$

3. $h(t) = cot\ t$

(a) $[\pi/4, 3\pi/4]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{cot(\pi/4)-cot(3\pi/4)}{\pi/4-3\pi/4} = \dfrac{1+1}{\dfrac{\pi-3\pi}{4}} = \dfrac{8}{-2\pi}$

(b) $[\pi/6, \pi/2]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{cot(\pi/6)-cot(\pi/2)}{\pi/6-\pi/2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{\pi}$

4. $g(t) = 2+\cos t$

(a) $[0,\pi]$

Respuesta.- $\dfrac{2+\cos\pi-(2+\cos 0)}{\pi-0} = -\dfrac{2}{\pi}$

(b) $[-\pi,\pi]$

Respuesta.- $\dfrac{2+\cos\pi-(2-\cos\pi)}{\pi+\pi} = \dfrac{3-3}{2\pi} = 0$

5. $R(\theta) = \sqrt{4\theta+1};\ [0,2]$

Respuesta.- $\dfrac{\sqrt{4*2+1}+1-(\sqrt{4*0+1}+1)}{2-0} = \dfrac{2}{2} = 1$

6. $P(\theta) = \theta^3-4\theta^2+5\theta;\ [1,2]$

Respuesta.- $\dfrac{2^3-4\cdot 2^2+5\cdot 2-(1^3-4^2+5)}{2-1} = 0$

Pendiente de una curva en un punto

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar *a*) la pendiente de la curva en el punto P dado, y *b*) la ecuación de la recta tangente en P

7. $y = x^2-5, \quad P(2,-1)$

a) Iniciamos con una recta secante que pasa por el punto $(2,-1)$ y el punto cercano $(2+h,(2+h)^2-5)$, luego hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(2+h)^2-5-(2^2-5)}{2+h-2} = \frac{4h+h^2}{h} = 4+h$$

Luego aproximamos h a 0 siendo la pendiente $m=4$.

b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=4x+c$, luego reemplazamos $(2,-1)$, quedándonos $-1=4\cdot 2+c \implies c=-9$. Por lo tanto

$$y=4x-9$$

8. $y=7-x^2, \quad P(2,3)$

a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2,3)$ y el punto cercano $Q\left[2+h, 7-(2+h)^2\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{7-(2+h)^2-(7-2^2)}{2+h-2} = \frac{7-(2+h)^2-3}{h} = \frac{h(-h-4)}{h} = -h-4$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $-h-4$ se aproxima a -4. Tomamos -4 como la pendiente de la parábola en P.

b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=-4x+c$, luego reemplazamos $(2,3)$, así $3=-4(2)+c \Longrightarrow c=11$. Por lo tanto

$$y=-4x+11$$

.

9. $y=x^2-2x-3, \quad P(2,-3)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2,-3)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,(2+h)^2-2(2+h)-3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(2+h)^2-2(2+h)-3-(-3)}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = h+2$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h+2$ se aproxima a 2. Tomamos 2 como la pendiente de la parábola en P.

b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=2x+c$, luego reemplazamos $(2,-3)$, así $-3=2(2)+c \Longrightarrow c=-7$. Por lo tanto

$$y=-2x-7$$

.

10. $y=x^2-4x, \quad P(1,-3)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1,-3)$ y el punto cercano $Q\left[1+h,(1+h)^2-4(1+h)\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(1+h)^2-4(1+h)-(-3)}{1+h-1}=\frac{h^2-2h}{h}=h-2$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h-2$ se aproxima a -2. Tomamos -2 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\implies y-y_1=m(x-x_1)\implies y=-2(x-1)+(-3)\implies y=-2x+2-3$$

por lo tanto

$$y=-2x-1$$

11. $y=x^3,\quad P(2,8)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2,8)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,(2+h)^3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^3-8}{2+h-2}=\frac{h^3+6h^2+12h}{h}=h^2+6h+12$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2+6h+12$ se aproxima a 12. Tomamos 12 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\implies y=m(x-x_1)+y_1\implies y=12(x-2)+8\implies y=12x-24+8$$

por lo tanto

$$y=12x-16$$

12. $y=2-x^3,\quad P(1,1)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1,1)$ y el punto cercano $Q\left[1+h,2-(1+h)^3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{2-(1+h)^3-1}{1+h-1}=\frac{h^3+3h^2+3h}{h}=h^2+3h+3$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante h^2+3h+3 se aproxima a 3. Tomamos 3 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 3(x-1) + 1 \implies y = 3x - 3 + 1$$

por lo tanto

$$y = 3x - 2$$

13. $y = x^3 - 12x, \quad P(1, -11)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1, -11)$ y el punto cercano $Q\left[1+h, (1+h)^3 - 12(1+h)\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(1+h)^3 - 12(1+h) + 11}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 - 9h}{h} = h^2 + 3h - 12$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h - 9$ se aproxima a -9. Tomamos -9 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = -9(x-1) - 11 \implies y = -9x + 9 - 11$$

por lo tanto

$$y = -9x - 2$$

14. $y = x^3 - 3x^2 + 4, \quad P(2, 0)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2, 0)$ y el punto cercano $Q\left[2+h, (2+h)^3 - 3(2+h)^2 + 4\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(2+h)^3 - 3(2+h)^2 + 4 - 0}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 3h^2}{h} = h^2 + 3h$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h$ se aproxima a 0. Tomamos 0 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 0(x-2) - 0$$

por lo tanto

$$y = 0$$

Razones instantáneas de cambio

15. Rapidez de un automóvil. La siguiente figura muestra la gráfica tiempo-distancia de un automóvil deportivo que acelera desde el reposo.

a) Determine las pendientes de la secante PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(10, 220)$	$\dfrac{650-220}{20-10} = 43$
$Q_2(14, 380)$	$\dfrac{650-380}{20-14} = 45$
$Q_3(17, 480)$	$\dfrac{650-480}{20-16} = 43$
$Q_4(17, 550)$	$\dfrac{650-550}{20-18} = 50$

Los resultados anteriores son redondeados.

b) Después estime la rapidez del automóvil para el tiempo $t = 20s$.

Respuesta.- Tomamos el punto mas cercano a P, en este caso Q_4 de donde la velocidad vendrá dado aproximadamente por $50m/s$.

16. La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia de caída libre contra el tiempo para un objeto que cae desde un módulo espacial que se encuentra a una distancia de 80 m de la superficie de la Luna.

a) Estime las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(5, 20)$	$\dfrac{80-20}{10-5} = 12$
$Q_2(7, 38)$	$\dfrac{80-38}{10-7} = 14$
$Q_3(8{,}5, 56)$	$\dfrac{80-56}{10-8{,}5} = 16$
$Q_4(9{,}5, 71)$	$\dfrac{80-71}{10-9{,}5} = 18$

b) ¿Cuál será la rapidez aproximada del objeto cuando choca con la superficie de la Luna?

Respuesta.- Será de $18m/s$.

17. En la siguiente tabla se registran las utilidades de una pequeña empresa en cada uno de sus primeros cinco años de operación:

a) Trace los puntos que representan las utilidades como una función del año, y únalos mediante una curva suave.

b) ¿Cuál es la razón promedio de incremento de las utilidades entre 2012 y 2014?

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{175-63}{2014-20112} = 56$

c) Use su gráfica para estimar la razón a la que cambiaron las utilidades en 2012.

Respuesta.- Sea $\dfrac{63-26}{2012-2011} = 37$ y $\dfrac{112-63}{2013-2012} = 49$ entonces $\dfrac{37+49}{2} = 43$.

18. Elabore una tabla de valores para la función $F(x) = (x+2)/(x-2)$ en los puntos $x = 1{,}2, x = 11/10, x = 101/100, x = 1001/1000, x = 10001/10000$ y $x = 1$

x	1,2	11/10	101/100	1001/1000	10001/10000	1
$F(x)$	-4	$-31/9$	$-301/99$	3001/999	30001/9999	-3

a) Determine la razón promedio de cambio de $F(x)$ en los intervalos $[1,x]$ para cada $x \neq 1$ de su tabla.

b) Si es necesario, amplíe su tabla para intentar determinar la razón de cambio de $F(x)$ en $x = 1$.

19. Sea $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$

a) Obtenga la razón promedio de cambio de $g(x)$ con respecto a x en los intervalos $[1,2]$, $[1,1{,}5]$, $[1,1+h]$

Respuesta.- Para $[1,2]$ se tiene $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$.
Para $[1,1{,}5]$ se tiene $\dfrac{\sqrt{1{,}5}-1}{1{,}5-1} = \dfrac{\sqrt{1{,}5}-1}{0{,}5}$.
Para $[1,1+h]$ se tiene $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{1+h-1} = \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$.

b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de g con respecto a x en el intervalo $[1,1+h]$ para algunos valores de h cercanos a cero, digamos, $h = 0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$, $0{,}0001$, $0{,}00001$ y $0{,}000001$.

Respuesta.-

h	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0,488	0,4987	0,4998	0,49998	0,499998	0,4999998

c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de $g(x)$ con respecto a x en $x=1$?

Respuesta.- 0.5

d) Calcule el límite, cuando h se aproxima a cero, de la razón promedio de cambio de $g(x)$ con respecto a x en el intervalo $[1, 1+h]$.

Respuesta.- 0.5

20. Sea $f(t) = 1/t$ para $t \neq 0$.

a) Obtenga la razón promedio de cambio de f con respecto a t en los intervalos i. de $t=2$ a $t=3$, y ii. de $t=2$ a $t=T$.

Respuesta.- Para i. se tiene $\dfrac{\triangle y}{triangle x} = \dfrac{1/3-1/2}{3-2} = -\dfrac{1}{6}$. Para ii. se tiene $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{1/T-1/2}{T-2} = \dfrac{2-T}{2T(T-2)}$

b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de f con respecto a t en el intervalo $[2, T]$ para algunos valores de T cercanos a 2, digamos, $T = 2{,}1, 2{,}01, 2{,}001, 2{,}0001, 2{,}00001 y 2{,}000001$.

Respuesta.-

2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	2,000001
−0,238	−0,2487	−0,2498	−0,24998	−0,24999	−0,25

c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de f con respecto a t en $t=2$?

Respuesta.- -0.25.

d) Calcule el límite, cuando T se aproxima a 2, de la razón promedio de cambio de f con respecto a t en el intervalo de 2 a T. Tendrá que hacer algo de álgebra antes de que pueda sustituir $T=2$.

Respuesta.- Por la parte $a), ii.$ tenemos $\dfrac{2-T}{2T(T-2)}$ de donde $-\dfrac{1}{2T}$y por lo tanto $-\dfrac{1}{4}$.

21. La siguiente gráfica muestra la distancia total s, que recorre un ciclista después de t horas.

a) Estime la velocidad promedio del ciclista en los intervalos de tiempo $[0, 1], [1, 2{,}5] y [2{,}5, 3{,}5]$.

Respuesta.-

$[0, 1]$	$[1, 2{,}5]$	$[2{,}5, 3{,}5]$
15	3,33	10

b) Estime la velocidad instantánea del ciclista en los tiempos $t = \frac{1}{2}, t = 2$ y $t = 3$. Respuesta.-

1/2	2	3
12	0	4

c) Estime la velocidad máxima del ciclista y el tiempo específico en que ésta se registra.

Respuesta.- Tenemos la velocidad máxima dada por $\dfrac{30-20}{3{,}5-3} = 20$ en la hora 3,5.

22. La siguiente gráfica muestra la cantidad total de gasolina A en el tanque de un automóvil después de conducirlo t días.

a) Estime la razón promedio del consumo de gasolina en los intervalos de tiempo $[0,3], [0,5] y [7,10]$.

Respuesta.-

$[0,3]$	$[0,5]$	$[7,10]$
$-5/3$	$-2{,}24$	$0{,}5$

b) Estime la razón instantánea de consumo de gasolina en los tiempos $t = 1, t = 4$ y $t = 8$. Respuesta.-

1	4	8
-1	-4	$-1/2$

c) Estime la razón máxima de consumo de gasolina y el tiempo específico en que ésta se registra.

Respuesta.- con una razón de -4, en el día 4.

1.2. Límites de una función y leyes de los límites

Teorema 1.1 *Si L, M, c y k son números reales y*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = L + M$

2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x\to c} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$

4. *Regla del producto:* $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

5. *Regla del cociente:* $\lim_{x\to c} = \frac{L}{M},\ M \neq 0$

6. *Regla de la potencia:* $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = L^n,\ n$ *es un entero positivo*

7. *Regla de la raíz:* $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n},\ n$ *es un entero positivo.*

Teorema 1.2 (Límites de las funciones polinomiales) *Si* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ *entonces,*

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + ... + a_0$$

.

Teorema 1.3 (Límites de las funciones racionales) *Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, y $Q(c) \neq 0$, entonces,*

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Teorema 1.4 (El teorema del sándwich) *Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en $x = c$. Suponga también que*

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Teorema 1.5 *Si $f(x) \leq g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$, y los límites de f y g cuando x se aproxima a c, entonces,*

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

1.2. Ejercicios

Límites a partir de gráficas

1. Para la función $g(x)$ cuya gráficas a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a) $\lim_{x\to 1} g(x)$.

Respuesta.- No existe. Cuando x se aproxima a 1 por la derecha, $g(x)$ se aproxima a 0. Cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, $g(x)$ se aproxima a 1. No hay un número único L para el que todos los valores de $g(x)$ estén arbitrariamente cerca cuando $x \to 1$.

b) $\lim_{x\to 2} g(x) = 2$.

c) $\lim_{x\to 3} g(x) = 0$.

d) $\lim_{x\to 2,5} g(x) = 0,5$.

2. Para la función $f(t)$ cuya gráfica aparece a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a) $\lim_{t\to -2} f(t) = 0$.

b) $\lim_{t\to -1} f(t) = -1$.

c) $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$.

d) $\lim\limits_{t \to -0{,}5} f(t) = -1.$

3.