1

Variables aleatorias y distribución de probabilidad

1.1. El concepto de variables aleatorias

Definición 1.1 *Sea S un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea X una función de valor real definida sobre S, de manera que transforme los resultados de S en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que X es un variable aleatoria.*

Definición 1.2 *Se dice que una variable aleatoria X es discreta si el número de valores que puede tomar es contable (ya sea finito o infinito), y si éstos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con los enteros positivos.*

Definición 1.3 *Se dice que una variable aleatoria X es continua si sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta de los reales.*

1.2. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas

Definición 1.4 *Sea X una variable aleatoria discreta. Se llamará a $p(x) = P(X = x)$ función de probabilidad de la variable aleatoria X, si satisface las siguientes propiedades:*

1. $p(x) \geq 0$ *para todos los valores* x *de* X*;*
2. $\sum_{x} p(x) = 1$.

Definición 1.5 *La función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X es la probabilidad de que X sea menor o igual a un valor específico de x y está dada por:*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

En general, la función de distribución acumulativa $F(x)$ de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores de X, de tal manera que:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ para cualquier x;

2. $F(x_i) \geq F(x_j)$ si $x_i \geq x_j$;

3. $P(X > x) = 1 - F(x)$.

4. $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$;

5. $P(x_i \geq X \geq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$

1.3. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas

Definición 1.6 *1.* $f(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$,

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ *y*

3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

Para la función de distribución acumulativa $F(x)$ se tiene:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Dado que para cualquier varible aleatoria continua X,

$$P(X = x) = \inf_x^x f(t)\, dt = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad P(X \leq x) = P(X < x) = F(x)$$

La distribución acumulativa $F(x)$ es una función lisa no decreciente de los valores de la v.a. con las siguiente propiedades:

1. $F(-\infty) = 0$;

2. $F(\infty) = 1$;

3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

4. $dF(x)/dx = f(x)$.

1.4. Valor esperado de una variable aleatoria