Ejercicios capítulo 6

Christian Limbert Paredes Aguilera

2022-08-12

Ejercicios Capítulo 6

6.1.

Se seleccionaron, aleatoriamente, 60 personas y se le preguntó su preferencia con respecto a tres marcas, A, B y C. Estas fueron de $27, 18$ y 15 respectivamente. ¿Qué tan probable es este resultado si no existen otras marcas en el mercado y la preferencia se comparte por igual entre las tres?.

Respuesta.- Ya que las preferencias son iguales entonces, se utilizará la función de distribución multinomial, comos se verá a continuación:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}; n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

De donde

$$p(27, 18, 15; 60, 1/3, 1/3, 1/3) = \frac{60!}{27!18!15!} \left(\frac{1}{3}\right)^{27} \left(\frac{1}{3}\right)^{18} \left(\frac{1}{3}\right)^{15} = 0.002153159.$$

```
factorial(60)/(factorial(27)*factorial(18)*factorial(15))*(1/3)^(27)*(1/3)^(18)*(1/3)^(15)
```

```
## [1] 0.002153159
```

```
dmultinom(c(27,18,15),60,c(1/3,1/3,1/3))
```

```
## [1] 0.002153159
```

6.2.

Supóngase que de un proceso de producción se seleccionan, de manera aleatoria, 25 artículos. Este proceso de producción por lo general produce un 90% de artículos listos para venderse y un 7% reprocesables. ¿Cuál es la probabilidad de que 22 de los 25 artículos estén listos para venderse y que dos sean reprocesables?.

Respuesta.- Sea la función de distribución trinomial

$$p(x, y; n, p_i, p_2) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^{n-x-y}.$$

Entonces,

$$p(22, 2; 25, 0.9, 0.07) = \frac{25!}{22!2!(25-22-2)!} 0.9^{22} 0.07^2 (1 - 0.9 - 0.07)^{25-22-2} = 0.09988531.$$

```r
(factorial(25)/(factorial(22)*factorial(2)*factorial(25-22-2))*
   0.9^(22)*0.07^(2)*(1-0.9-0.07)^(25-22-2))
```

```
## [1] 0.09988531
```

6.3.

Sean X y Y dos variables aleatorisa continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x-y}{5} & 1<x<2, \quad 1<y<3, \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Obtener la función de distribución conjunta acumulativa.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u-v}{5}\right)\, dvdu = \int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u}{5} - \frac{v}{5}\right)\, dvdu \\ &= \int_1^x \left(\frac{3u}{5}v - \frac{v^2}{10}\right)\Big|_1^y du = \int_1^x \frac{3uy}{5} - \frac{3u}{5} - \frac{y^2}{10} + \frac{1}{10}\, du \\ &= \left(\frac{3u^2y}{10} - \frac{3u^2}{10} - \frac{y^2u}{10} - \frac{u}{10}\right)\Big|_1^x \\ &= \frac{3x^2y}{10} - \frac{3y}{10} - \left(\frac{3x^2}{10} - \frac{3}{10}\right) - \left(\frac{y^2x}{10} - \frac{y^2}{10}\right) + \frac{x}{10} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{3x^2y - xy^2 - 3x^2 + x - 3y + y^2 + 2}{10} \end{aligned}$$

b)

¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $X<3/2$ e $Y<2$?.

Respuesta.- Ya que $\displaystyle\int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u-v}{5}\right)\, dvdu = \frac{3x^2y - xy^2 - 3x^2 + x - 3y + y^2 + 2}{10}$, entonces

$$\begin{aligned} P(X<3/2, Y<2) &= \int_1^{3/2} \int_1^2 \left(\frac{3u-v}{5}\right)\, dvdu \\ &= \frac{3\cdot(3/2)^2\cdot 2 - (3/2)\cdot 2^2 - 3(3/2)^2 + 3/2 - 3\cdot 2 + 2^2 + 2}{10} \\ &= 0.225. \end{aligned}$$

```r
x=3/2
y=2
(3*x^2*y-3*y-3*x^2+x-3*y+y^2+2)/10
```

```
## [1] 0.225
```

c)

Mediante el empleo de sus respuesta a la parte a, obtener las distribuciones acumulativas marginales de X e Y.

Respuesta.- Dado que 2 y 3 son los límite superior para x e y respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) &= F_X(x) = F(x,3) \\
&= \frac{3x^2 \cdot 3 - x \cdot 3^2 - 3x^2 + x - 3 \cdot 3 + 3^2 + 2}{10} \\
&= \frac{9x^2 - 9x - 3x^2 + x - 9 + 9 + 2}{10} \\
&= \frac{3x^2 - 4x + 1}{5}, \quad 1 < x < 2.
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= F_Y(y) = F(2,y) \\
&= \frac{3 \cdot 2^2 y - 2 \cdot y^2 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 3y + y^2 + 2}{10} \\
&= \frac{12y - 2y^2 - 12 + 2 - 3y + y^2 + 2}{10} \\
&= \frac{9y - y^2 - 8}{10}, \qquad 1 < y < 3.
\end{aligned}$$

d)

Obtener las funciones de densidad marginales de X y de Y.

Respuesta.- Sea $F(x,3) = P(X \leq x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{5}$, entonces

$$f_X(x) = \frac{\partial F(x,3)}{\partial x} = \frac{(6x^2 - 4)5}{5^2} = \frac{6x^2 - 4}{5}.$$

Y para $F(2,y) = P(Y \leq y) = \dfrac{9y - y^2 - 8}{10}$, se tiene

$$f_Y(y) = \frac{\partial F(2,y)}{\partial y} = \frac{(9 - 2y)10}{10^2} = \frac{9 - 2y}{10}.$$

6.4.

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x, y > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Demostrar que $f(x,y)$ es una función de densidad conjunta de probabilidad.

Respuesta.-; Ya que $x,y>0$ entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-xy-x}\,dy\,dx &= \int_0^\infty xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}\,dy\,dx \\
&= \int_0^\infty xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}\left(\frac{-x}{-x}\right)\,dy\,dx \\
&= \int_0^\infty -e^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}(-x)\,dy\,dx \\
&= \int_0^\infty -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)\Big|_0^\infty\,dx \\
&= \int_0^\infty -e^{-x}\left(e^{-\infty}-e^0\right)\,dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\,dx = e^{-x}\Big|_0^\infty \\
&= 1.
\end{aligned}$$

```
integrate(function(y) {
  sapply(y, function(y) {
    integrate(function(x) x*exp(-x*(y+1)), 0, Inf)$value
   })
 }, 0, Inf)$value
```

```
## [1] 0.9999956
```

b) ¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $X<2$ e $Y<1$?.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 xe^{-xy-x}\,dy\,dx &= \int_0^2 xe^{-x}\int_0^1 e^{-xy}\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)\Big|_0^1\,dx \\
&= \int_0^2 -e^{-x}\left(e^{-x}-e^0\right)\,dx \\
&= \int_0^2 e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^2 e^{-3x}(-3)\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\left(e^{-3x}\right)\Big|_0^2 = -\frac{1}{3}\left(e^{-6}-1\right) \\
&= 0.3738225
\end{aligned}$$

```r
integrate(function(y) {
  sapply(y, function(y) {
    integrate(function(x) x*exp(-x*(y+1)), 0, 2)$value
   })
 }, 0, 1)$value
```

```
## [1] 0.3738225
```

c)

Obtener las funciones de densidad marginal de X y de Y.

Respuesta.- La densidad marginal para x está dada por:

$$f_X(x) = \int_0^\infty xe^{-xy-x}\,dy = xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}\,dy = -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)\Big|_0^\infty = e^{-x}$$

La densidad marginal para y está dada por:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty xe^{-xy-x}\,dx \\
&= \left(\frac{x}{-y-1}e^{-xy-x} - \frac{1}{-y-1}\int_0^\infty e^{-xy-x}\,dx\right)\Bigg|_0^\infty \\
&= 0 - \frac{1}{(-y-1)^2}e^{xy-x}\Bigg|_0^\infty \\
&= -\frac{1}{(-y-1)^2}\left(e^\infty - e^0\right) \\
&= -\frac{1}{(-y-1)^2}(0-1) \\
&= \frac{1}{(-y-1)^2}.
\end{aligned}$$

d)

¿Son X e Y estadísticamente independientes?.

Respuesta.- por el hecho de que,

$$xe^{-x(y-1)} \neq e^{-x}\frac{1}{(-y-1)^2} = \frac{e^{-x}}{(-y-1)^2}$$

Diremos que X e Y no son estadísticamente independientes.

6.5.

Sean X e Y dos variables aleatorias discretas en donde los posibles valores que estas pueden tomar son -1, 0 y 1. En la siguiente tabla se dan las probabilidades conjuntas para todos los posibles valores de X e Y.