Cálculo una variable

George B. Thomas, Jr.

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1. Funciones **3**
1.1. Las funciones y sus gráficas 3
1.1. Ejercicios 4
1.2. Ejercicios 21

1

Funciones

1.1. Las funciones y sus gráficas

Definición 1.1 *Una función f de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento $x \in D$ un solo o único elemento $f(x) \in Y$*

Definición 1.2 *Cuando definimos una función $y = f(x)$ mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales x para los cuales la fórmula proporciona valores reales para y , el llamado* ***dominio natural****.*

Cuando el rango de una función es un subconjunto de números reales, se dice que la función tiene ***valores reales (o que es real valuada)***

Definición 1.3 (Valor absoluto) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

Definición 1.4 *Sea una funcion definida en un intervalo I y sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos en I*

1. *Si $f(x_2) > f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es* ***creciente*** *en I.*

2. *Si $f(x_2) < f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es* ***decreciente*** *en I.*

Definición 1.5 *Una función $y = f(x)$ es una*

1. *Función par de x si $f(-x) = f(x)$.*

2. *Función impar de x si $f(-x) = -f(x)$.*

Para toda x en el dominio de la función.

(Los nombres par e impar provienen de las potencias de x).

Definición 1.6 *Dos variables x e y son* ***proporcionales*** *(una con respecto a la otra) si una siempre es un múltiplo constante de la otra; esto es, si $y = kx$ para alguna constante k distinta de 0.*

Si la variable y es proporcional al recíproco $1/x$, entonces algunas veces se dice que y es ***inversamente proporcional*** *a x (puesto que $1/x$ es el inverso multiplicativo de x).*

1.1. Ejercicios

1. $f(x) = 1 + x^2$

Respuesta.- Al evaluar $1+x^2$ vemos que x se cumple para todos los reales, por lo tanto $f_D = \{x/ \ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 1\}$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- El dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq 0\}$. Y el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \leq 1\}$.

3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$

Respuesta.- Sea $5x + 10 \geq 0$ ya que una raíz par no puede ser no negativo, entonces $x \geq 2$, por lo tanto el dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq -2\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio, evaluaremos $x^2 - 3x \geq 0$, de donde $x(x-3) \geq 0$, por lo tanto el dominio es $f_D = \{x/ \leq x \leq 0 \cup x \geq 3\}$. Luego el rango viene definido por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

5. $f(t) = \dfrac{4}{3-t}$

Respuesta.- Sabemos que no se puede dividir un número por 0. Por lo tanto para hallar el dominio de la función debemos evaluar $3 - t = 0$, de donde $t = 3$, así $f_D = \{t/t \neq 3\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \neq 0\}$.

6. $G(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio evaluamos $t^2 - 16 = 0$, de donde $(t-4)(t+4) = 0$, por lo tanto el dominio de la función viene dado por $f_D = \{t/t \neq 4 \wedge t \neq -4\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/0 < y \leq -\dfrac{1}{8}\}$ ya que al despejar x nos queda $x = \sqrt{\dfrac{2}{y} + 16}$ de donde se debe evaluar por un lado $\dfrac{2}{y}$ y por otro $\dfrac{2}{y} - 16 \geq 0$.

En los ejercicios 7 y 8 ¿Cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de x? ¿Cuáles no representan a funciones de x? Dé razones que apoyen sus respuestas.

7. El inciso a. no es una función ya que no cumple con la prueba de la recta vertical ya una función sólo puede tener un valor $f(x)$ para cada x en su dominio. Y el inciso b. no representa la gráfica de una función.

8. Los incisos a. y b. no representan a funciones de x. El único que no representa una gráfica de una función es el inciso b.

Determinación de fórmulas para funciones.

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado x del triángulo.

Respuesta.- El área se representa por $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$ y el perímetro por $f(x) = 3x$

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del cuadrado. Exprese el área como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La longitud del lado de un cuadrado como función de longitud esta dado por $d = \sqrt{2a^2}$. El área es expresado por $A = \dfrac{d^2}{2}$

11. Exprese la longitud del lado de um cubo como una función de la longitud de la diagonal d del cubo. Exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta-. La expresión de la longitud del lado del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo es

$$L(d) = (\sqrt{2}/2) \cdot d$$

Las expresiones del área de la superficie y el volumen del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo son:

$$A(d) = 3 \cdot d\text{š} \quad y \quad V(d) = (\sqrt{2}/4) \cdot d\text{ş}$$

12. Un punto P en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente de la recta que une a P con el origen.

Respuesta.- Sea el punto en el origen $(0,0)$ y el punto P tenga las coordenadas $(z,z^{'})$. Sabemos que una recta viene definido por $f(x)=ax+b$ entonces formando un sistema de ecuaciones tenemos:

$$0=0x+b \quad y \quad z^{'}=az+b$$

Luego $z^{'}=az$ de donde $a=\dfrac{z^{'}}{z}$, y así nos queda la función

$$f(x)=\frac{z^{'}}{z}x$$

13. Considere el punto (x,y) que está en la gráfica de la recta $2x+4y=5$. Sea L la distancia del punto (x,y) al origen $(0,0)$. Escriba L como función de x.

Respuesta.- Dado $(x,y)\in 2x+4y=5;(0,0)$ entonces

$$x=\frac{5-4y}{2} \qquad \frac{5-2x}{4}$$

Luego $L=\sqrt{(y-0)^2+(x-0)^2}=\sqrt{y^2+\left(\dfrac{5-4y}{2}\right)}=\sqrt{y^2+\dfrac{25+40y+16y^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{4y^2}{4}+\dfrac{25-40y+16y^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{20y^2+40y+25}$

14. Considere el punto (x,y) que está en la gráfica de $y=\sqrt{x-3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x,y) y $(4,0)$. Escriba L como función de y.

Respuesta.- $y=\sqrt{x-3},(x,y)\in y=\sqrt{x-3}$ entonces calculamos la distancia entre $y=\sqrt{x-3}$ y $(4,0)$.

$$y^2=x-3\Longrightarrow x=y^2+3 \quad y \quad y=\sqrt{x-3}$$

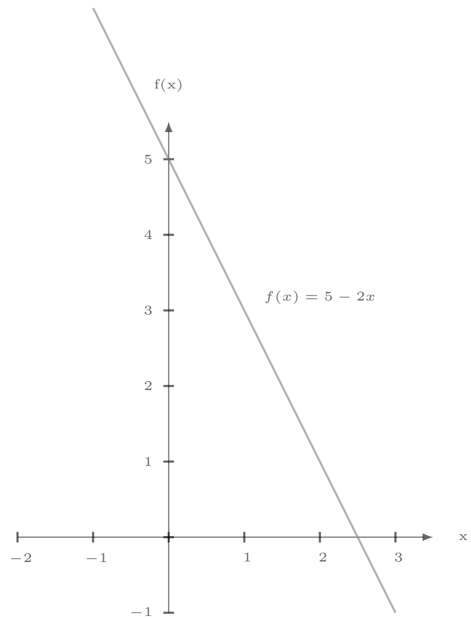
Así $L=\sqrt{(y-o)^2+(x-y)^2}=\sqrt{y^2+(y^2+3)^2}=\sqrt{y^2+y^4+6y^2+9}=\sqrt{y^4+7y^2+9}$

Las funciones y sus gráficas.

En los ejercicios 15 al 20, determine el dominio y grafique las funciones

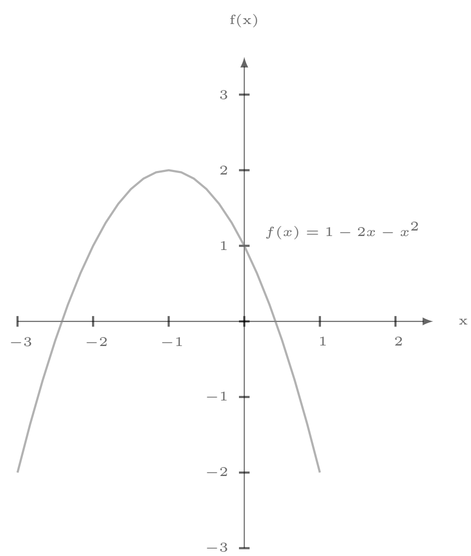
15. $f(x)=5-2x$

Respuesta.- El dominio esta dado para todos los reales x.



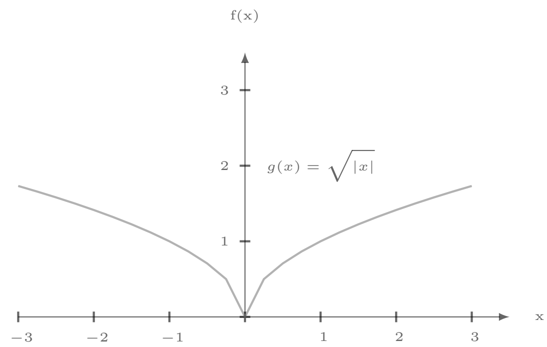
16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo real x positivo.



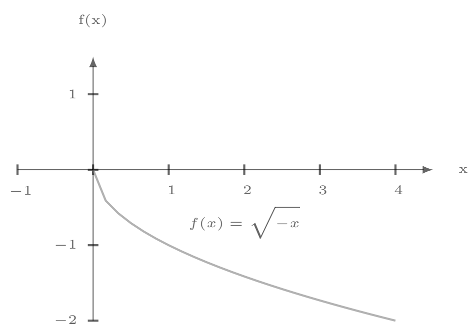
17. $g(x) = \sqrt{|x|}$

Respuesta.- El dominio de la función es para $x \in \mathbb{R}$



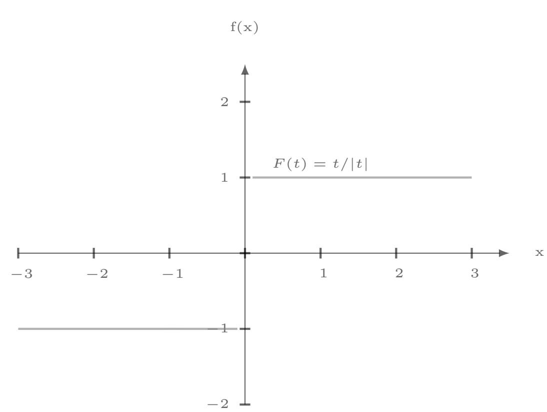
18. $g(x) = \sqrt{-x}$

Respuesta.- El dominio de la función se cumple para los números reales negativos.



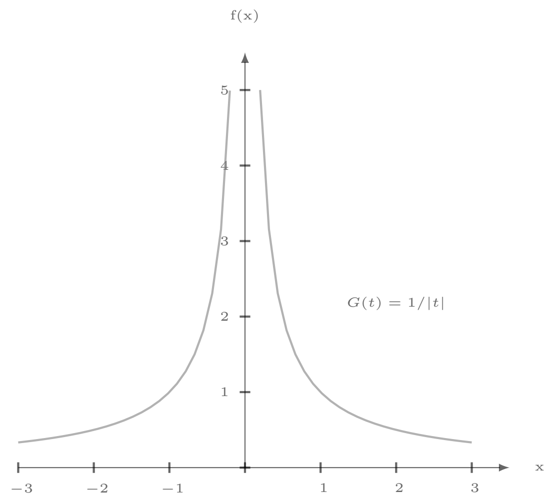
19. $F(t) = t/|t|$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo número real menos el 0.



20. $G(t) = 1/|t|$

Respuesta.- El dominio se cumple para todo número real menos el 0.



21. Determine el dominio de $y = \dfrac{x+3}{4-\sqrt{x^2-9}}$

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el dominio esta dado por $D_f = \{x/x \geq 3 \wedge x \neq 4\}$

22. Determine el rango de $y = 2 + \dfrac{x^2}{x^2+4}$.

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el rango viene dado para todo $y = f(x)$ tal que $y \geq 2$

23. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a. $|y| = x$

Respuesta.- No es una función de x ya que $\sqrt{y^2} = x \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow \pm y = \pm x$

b. $y^2 = x^2$

Respuesta.- Por el anterior problema $23a$.

24. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x

a. $|x| + |y| = 1$

Respuesta.- Ya que $|y| = 1 - |x| \Longrightarrow \sqrt{y^2} = 1 - |x| \Longrightarrow y^2 = (1-|x|)^2 \Longrightarrow \pm y = |1 - |x||$

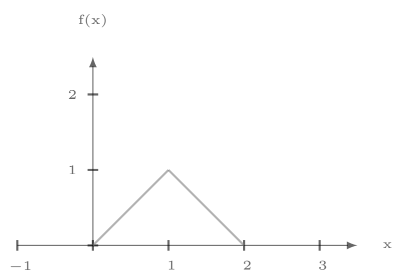
b. $|x+y|=1$

Respuesta.- Ya que $\sqrt{(x+y)^2}=1 \Longrightarrow (x+y)^2=1 \Longrightarrow x^2+2xy+y^2=1 \Longrightarrow y^2=1-2xy-x^2 \Longrightarrow$ $\pm y=\sqrt{1-2xy-x^2}$

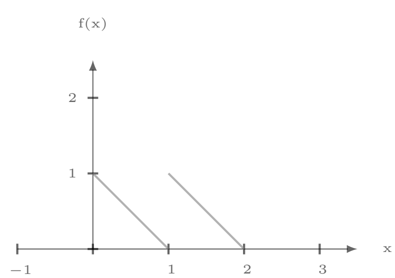
Funciones definidas por partes

En los ejercicios 25 a 28, grafique las funciones:

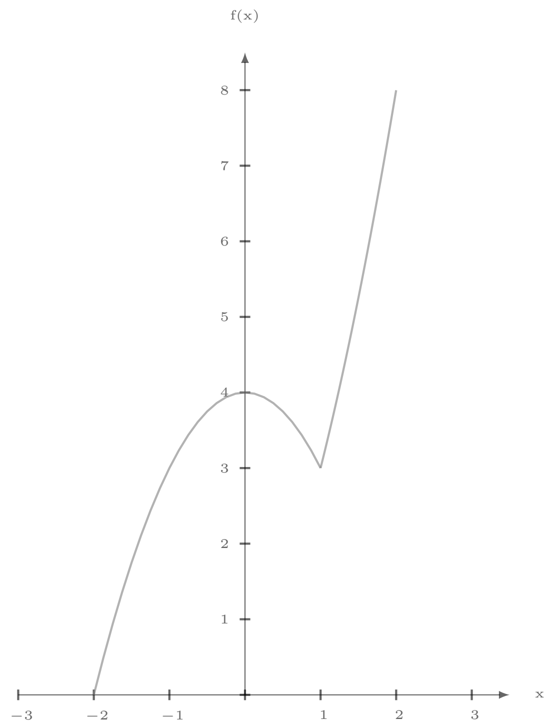
25. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$



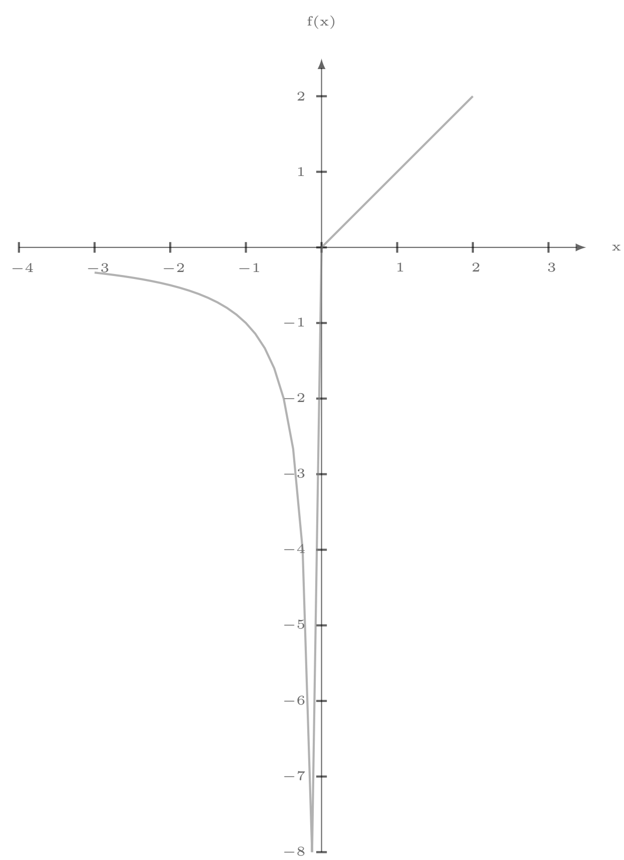
26. $g(x)=\begin{cases} 1-x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$



27. $F(x)=\begin{cases} 4-x^2, & \le 1 \\ x^2+2x, & x>1 \end{cases}$



28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$



Determine una fórmula para cada función graficada en los ejercicios 29 a 32

29. **a.** Sea $f(x) = ax+b$ entonces $0 = b$ y $1 = a+b$ luego $a = 1$ por lo tanto $f(x) = x$. Por otro lado $1 = a+b$ y $0 = 2a + 2 \Longrightarrow a = -1$ de donde se tiene $f(x^{'}) = -x + 2$ así nos queda la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ x+2 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b. Está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 \leq x < 1 \; y \; 2 \leq x < 3 \\ \\ 0 & si \quad 1 \leq x < 2 \; y \; 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

30. **a.** Similar al ejercicio anterior se tiene que la formula

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \\ 1/2x + 5/7 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b. Se tiene

$$f(x) = \begin{cases} -3x-3 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \\ -2x+3 & si \end{cases}$$

31. **a.**

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad -1 \leq x < 0 \\ \\ 1 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ -2x+2 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

b. Sea (a, b) y (c, d) por lo tanto por capitulo 4 de spivak $f(x) = \dfrac{d-b}{c-a}(x-a) + b$ entonces $(-2, -1)$ y $(0, 0)$ así $f(x) = \dfrac{0-1}{0+2}(x+2) + 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 2$

Luego $f(x) = -2x + 2$ y finalmente $f(x) = -1$ de donde,

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x - 2 & si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \\ 2x+2 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ -1 & si \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

32. **a.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{T}{2} \\ \\ \dfrac{2x}{T} - 1 \quad si \quad \dfrac{T}{2} < x \leq T \end{cases}$$

b.

$$f(x) = \begin{cases} A \quad si \quad \dfrac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad T \leq x < \dfrac{3T}{2} \\ \\ -A \quad si \quad \dfrac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad \dfrac{3T}{2} \leq x \leq 2T \end{cases}$$

Las funciones mayor entero y menor entero.

33. Para qué valores de x es

a. $[x] = 0$

respuesta.- Para $0 \leq x < 1$

b. $[x] = 0$

Respuesta.- Para $-1 < x \leq 0$

34. ¿Cuáles valores x de números reales satisfacen la ecuación $[x] = [x]$?

Respuesta.- Sólo el 0.

35. ¿Es cierto que $[-x] = -[x]$ para todo número real x? Justifique su respuesta.

Respuesta.- Es cierto siempre y cuando sea x un entero. Ya que si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x = n$ para algunos $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $[x] = n$ y $-x = -n \Longrightarrow [-x] = n \Longrightarrow [-x] = -[x]$. Por otro lado sea $x \notin \mathbb{Z}$ y $[x] = n$ entonces $n \leq x < n + 1 \Longrightarrow -n - 1 < -x < -n \Longrightarrow [-x] = -n - 1 = -[x] - 1$

36. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} [x], & x \leq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

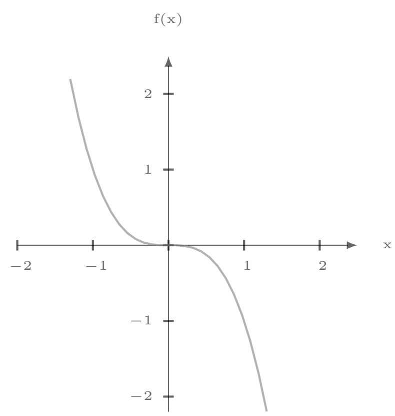
¿Por qué $f(x)$ se donomina parte entera de x?

Respuesta.- Se denomia porque hace corresponder el número inmediato anterior.

Funciones crecientes y funciones decrecientes.

Grafique las funciones en los ejercicios 37 a 46. Si tiene simetrías, ¿Qué tipo de simetría tienen? Especifique los intervalos en os que la función es creciente y los intervalos donde la función es decreciente.

37. $y = -x^3$



Respuesta.- Tiene simetría impar y el intervalo donde decrece esta dado por $(-\infty, \infty)$

38. $y = -\dfrac{1}{x^2}$

Respuesta.- Tiene simetría par y esta dado por lo el intervalo decreciente de $-\infty < x < 0$ y por el intervalo creciente $0 < x < \infty$

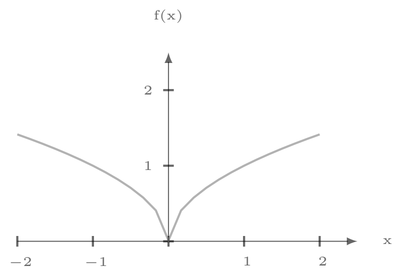
39. $y = -\dfrac{1}{x}$

Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por los intervalos crecientes $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$

40. $y = \dfrac{1}{|x|}$

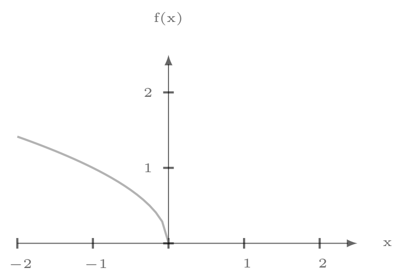
Respuesta.- Tiene simetría par y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < 0$ y el intervalo decreciente $0 < x < \infty$

41. $y = \sqrt{|x|}$



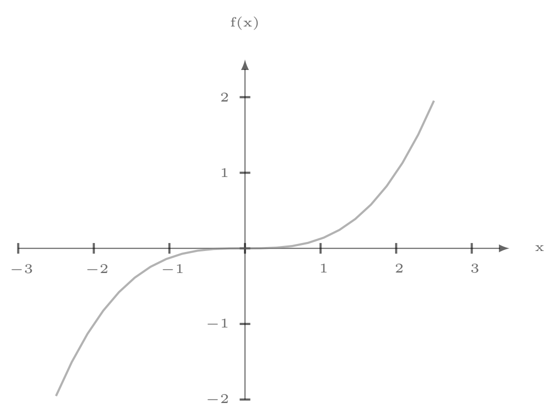
Respuesta.- Tiene simetría par y esta dado por el intervalo decreciente $-\infty < x \leq 0$ y el intervalo creciente $0 \leq x < \infty$

42. $y = \sqrt{-x}$



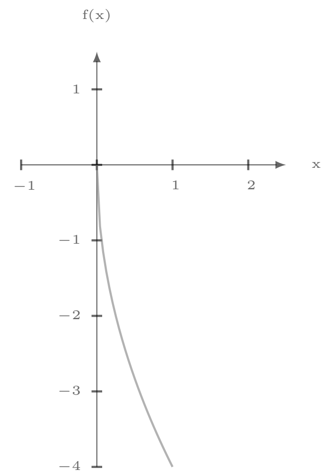
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo decreciente $-\infty < x \leq 0$

43. $y = x^3/8$



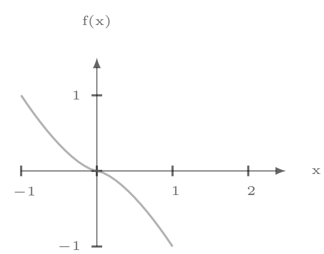
Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < \infty$

44. $y = -4\sqrt{x}$



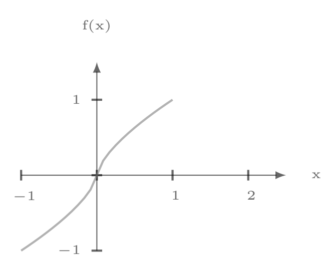
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo $0 \leq x < \infty$

45. $y = -x^{3/2}$



Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo decreciente $-\infty < x < \infty$

46. $y = (-x)^{2/3}$



Respuesta.- La simetría es impar y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < \infty$

Funciones pares y funciones impares

En los ejercicios 47 a 58, indique si la función es par, impar o de ninguno de estos tipos. Justifique su respuesta.

47. $f(x) = 3$

Respuesta.- Sea $f(-x) = 3 = f(x)$ entonces decimos que la función es par.

48. $f(x) = x^{-5}$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^{-5} = -\left(x^{-5}\right) = -f(x)$, por lo tanto la función es impar.

49. $f(x) = x^2 + 1$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, de donde se tiene que la función es par.

50. $f(x) = x^2 + x$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ de donde la función no es par ni impar.

51. $g(x) = x^3 + x$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$ por lo tanto la función es impar.

52. $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

Respuesta.- Sea $g(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 - 1 = g(x)$ por lo tanto la función es par.

53. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea $g(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 1} = g(x)$ por lo tanto la función es par.

54. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea $g(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1} = -g(x)$ de donde la función es impar.

55. $h(t) = \dfrac{1}{t-1}$

Respuesta.- Sea $h(-t) = \dfrac{1}{-t-1}$ entonces la función no es par ni impar.

56. $h(t) = |t^3|$

Respuesta.- Sea $h(-t) = |(-t)^3| = |t^3| = h(t)$ por lo tanto la función es par.

57. $h(t) = 2t + 1$

Respuesta.- Sea $h(-t) = 2(-t) + 1$ entonces la función no es ni par ni impar.

58. $h(t) = 2|t| + 1$

Respuesta.- Sea $h(-t) = 2| - t| + 1 = 2t + 1 = h(t)$ entonces la función es par.

Teoría y ejemplos

59. La variable s es proporcional a t, y $s = 25$ cuando $t = 75$. Determine t cuando $s = 60$.

Respuesta.- Sea $\dfrac{s}{r}$ entonces $\dfrac{25}{75} = \dfrac{60}{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{3} = \dfrac{60}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 180$

60. Energía cinética. La energía cinética K de una masa es proprocional al cuadrado de su velocidad v. Si $K = 12,960$ joules, cuando $v = 18$ m/s, ¿Cuál es el valor de K cuando $v = 10$ m/s?.

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene $\dfrac{K}{v^2} = \dfrac{12,960}{18^2} = \dfrac{K}{10^2}$ entonces $K = 4000$.

61. Las variables r y s son inversamente proporcional, mientras que $r = 6$ cuando $s = 4$. Determine s cuando $r = 10$.

Respuesta.- Tenemos que $6 \cdot 4 = s \cdot 10$ entonces queda que $s = 2{,}4$.

62. Ley de Boyle. La ley de Boyle establece que el volumen V de un gas, a temperatura constante, aumenta cuando la presión P disminuye, de manera que V y P son inversamente proporcionales. Si $P = 14{,}7 lb/in^2$ cuando $V = 1000in^3$, entonces ¿cuál es el valor de V cuando $P = 23{,}4lbs/in^2$?.

Respuesta.- Sea $V \cdot P = V' \cdot P'$ entonces $14{,}7 \cdot 1000 = V \cdot 23{,}4$ y por lo tanto $V = 628{,}2in^3$.

63. Una caja sin tapa se construye a partir de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 14 por 22 pulgadas (in). A la pieza de cartón se le cortan cuadrados de lado x en cada esquina y luego se doblan hacia arriba los lados, como en la figura. Exprese el volumen V de la caja como una función de x.

Respuesta.- El volumen es dado por $V = L \cdot a \cdot h$ luego $h = x$, $\quad a = 14 - 2x$, $\quad L = 22 - 2x$ por lo tanto

$$V(x) = (22 - 2x)(14 - 2x) \cdot x \quad \Longrightarrow \quad V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 308x$$

64. La siguiente figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa tiene una longitud de dos unidades.

a. Exprese la coordenada de P en términos de x. (Podría iniciar escribiendo una ecuación para la recta AB).

Respuesta.- Sea $y = mx + b$ luego en el punto B, se tiene la intersección de ambas rectas que forman un ángulo de 90ř, así que, el ángulo que tiene que tener el punto A es de 45ř o bien $m = -1$ por lo tanto $y = -x + b$ o bien m=-1 ya que la recta va hacia abajo.

b. Exprese el área del rectángulo en términos de x.

Respuesta.- El área de un rectángulo es $b \cdot a$ de donde $area = 2x \cdot y = 2x(b - x)$.

En los ejercicios 65 y 66 relacione cada ecuación con su gráfica. No utilice un dispositivo para graficar y dé razones que justifiquen su respuesta.

65. **a.** $y = x^4 \quad \Rightarrow \quad h$

b. $y = x^7 \quad \Rightarrow \quad f$

c. $y = x^1 0 \quad \Rightarrow \quad g$

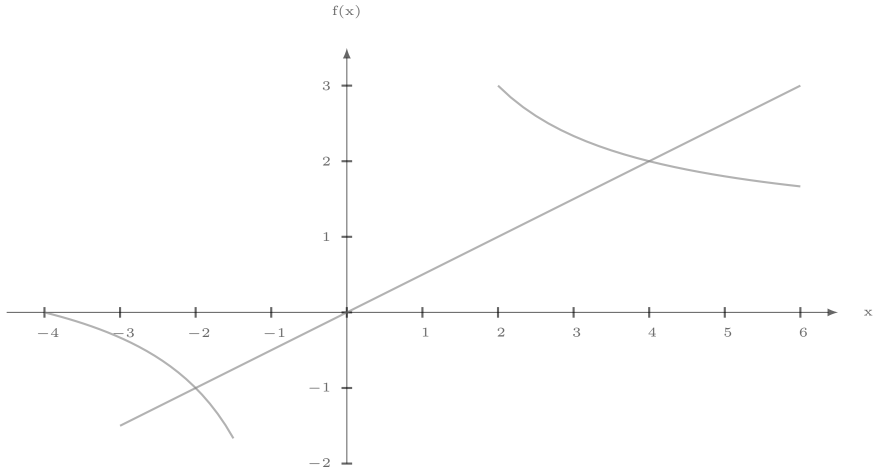
66. **a.** $y = 5x \quad \Rightarrow \quad f.$

b. $y = 5x \quad \Rightarrow \quad f.$

c. $y = x^5 \quad \Rightarrow \quad h.$

67. **a.** Grafique juntas las funciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = 1 + (4/x)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$$

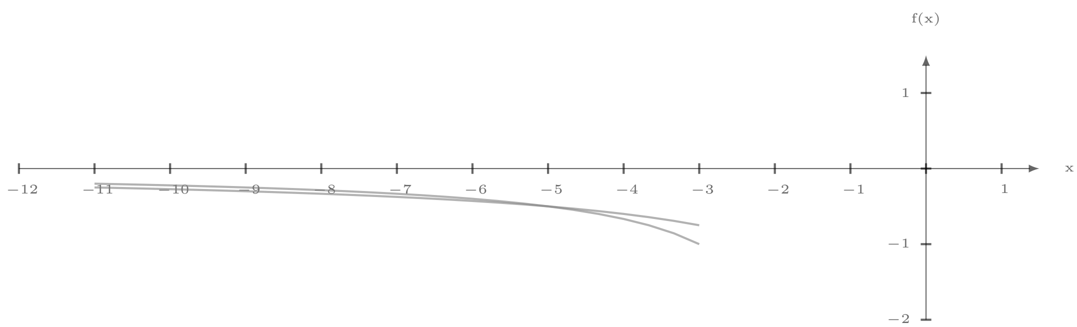


b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inciso a)

Respuesta.- Resolviendo la ecuación nos queda $x^2 - 2x - 8 > 0$ donde se cumple para $x > 4$ ó $x < -2$

68. **a.** Grafique juntas las funciones $f(x) = 3/(x-1)$ y $g(x) = 2/(x+1)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$



b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inicio a).

Respuesta.- Sea $\dfrac{3}{x-1} < \dfrac{2}{x+1} \quad \Rightarrow \quad x < -5$

69. Para que una curva sea simétrica con respecto al eje x, el punto (x, y) debe estar en la curva si y sólo si el punto $(x, -y)$ está en la curva. Explique por qué una curva que es simétrica con respecto al eje x no es la gráfica de una función a menos que la función sea $y = 0$.

Respuesta.- Esto se debe a que contradice a la definición de función. Es decir, a cada elemento x se asigna un solo o único elemento $f(x)$. Si $y = 0$ entonces $(x, y) = (x, -y)$ y por lo tanto se cumple la definición de función

70. Trescientos libros se venden en \$40 cada uno, lo que da por resultado un ingreso de $300 \cdot \$40 = \$12,000$. Por cada aumento de \$5 en el precio, se venden 25 libros menos. Exprese el ingreso R como una función del número x de incrementos de \$5.

Respuesta.- Veamos algunos ejemplos particulares:

$$\begin{array}{rcl} 300 \cdot 40 & = & 12000 \\ (300-25)(40+5) & = & 12375 \\ (300-50)(40+10) & = & 12500 \\ (300-75)(40+15) & = & 12375 \\ (300-100)(40+20) & = & 12000 \end{array}$$

Por lo tanto $R(x) = (300-5x)(40+x) = -125x^2 + 500x + 12000$

71. Se va a construir un corral con la forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud de x pies (ft) e hipotenusa de longitud h ft. Si los costos de la cerca son de $\$5/ft$ para los catetos y $\$lO/ft$ para la hipotenusa, escriba el costo total C de la construcción como una función de h.

Respuesta.- Sea $c^2 + c^2 = h^2 \quad \Rightarrow \quad h = c\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad c = h\sqrt{2}$, luego $C = 2 \cdot c \cdot 5 + h \cdot 10$ por lo tanto $C = 10 \cdot h\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1$

72. Costos industriales: Una central eléctrica se encuentra cerca de un río, donde éste tiene un ancho de 800 ft. Tender un cable de la planta a un lugar en la ciudad, 2 millas (mi) río abajo en el lado opuesto, tiene un costo de $180 por ft que cruce el río y 100$ por ft en tierra a lo largo de la orilla del río.

a. Suponga que el cable va de la planta al punto Q, en el lado opuesto, lugar que se encuentra a x ft del punto P, directamente opuesto a la planta. Escriba una función $C(x)$ que indique el costo de tender el cable en términos de la distancia x.

Respuesta.- Por el teorema de Pitágoras podemos establecer la función $C(x)$ como sigue:

$$C(x) = \sqrt{x^2 + 800^2} \cdot 180 + (10560 - x) \cdot 100$$

b. Genere una tabla de valores para determinar si la ubicación más barata para el punto Q es menor a 2000 ft o mayor a 2000 ft del punto P.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcccl} C(x) & = & \sqrt{1900^2 + 800^2} + (10560 - 1900) \cdot 100 & = & 1270599{,}7 \\ C(x) & = & \sqrt{2100^2 + 800^2} + (10560 - 2100) \cdot 100 & = & 1217079{,}5 \end{array}$$

Por lo tanto es mas barato ubicar el punto Q a una distancia mayor a 2000 ft.

1.2. Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, determine dominios y rangos de $f, g, f+g$ y $f \cdot g$

1. $f(x) = x,\ g(x) = \sqrt{x-1}$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall f(x) \in \mathbb{R}$
g	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$
$f+g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 1$
$f \cdot g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$

2. $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = \sqrt{x-1}$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$x \geq -1$	$f(x) \geq 0$
g	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$
$f+g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq \sqrt{2}$
$f \cdot g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$

En los ejercicios 3 y 4, determine dominios y rangos de $f, g, f/g, g/f$.

3. $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) = 2$
g	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) \geq 1$
f/g	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$0 < f(x) \leq 2$
g/f	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) \geq 0{,}5$

4. $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$.

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) = 1$
g	$x \geq 0$	$f(x) \geq 1$
f/g	$x \geq 0$	$0 < f(x) \leq 1$
g/f	$x \geq 0$	$f(x) \geq 1$

Composición de funciones.

5. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, determine lo siguiente:

a. $f(g(0)) = f(-3) = -3 + 5 = 2$

b. $g(f(0)) = g(5) = 5^2 - 3 = 22$

c. $f(g(x)) = f(x^2 - 3) = x^2 - 3 + 5 = x^2 + 2$ para $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f\}$

d. $g(f(x)) = g(x + 5) = (x + 5)^2 - 3 = x^2 + 10x + 25 - 3 = x^2 + 10x + 22$ para $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

e. $f(f(-5)) = f(0) = 5$

f. $g(g(2)) = g(1) = 1 - 3 = -2$

g. $f(f(x)) = f(x + 5) = x + 5 + 5 = x + 10$

h. $g(g(x)) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 9 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$

6. Si $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 1/(x + 1)$, determine lo siguiente.

a. $f(g(1/2)) = f(2/3) = \dfrac{2}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$

b. $g(f(0)) = g(-1) = \dfrac{1}{-1+1} = indeterminado$

c. $f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x+2}{x+1}$ para $D_{f \circ g} = \{\forall x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

d. $g(f(x)) = g(x - 1) = \dfrac{1}{x - 1 + 1} = \dfrac{1}{x}$ para $D_{g \circ f} = \{\forall \ x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

e. $f(f(-5)) = f(-6) = -6 - 1 = -7$

f. $g(g(2)) = g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3} + 1} = \dfrac{3}{4}$

g. $f(f(x)) = f(x - 1) = x - 2$

h. $g(g(x)) = g\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x+1}+1} = \dfrac{x+1}{x+2} \quad x \neq -1, -2$

En los ejercicios 7 a 10, escriba una fórmula para $f \circ g \circ h$

7.