

# Ejercicios capítulo 4

Christian Limbert Paredes Aguilera

25/1/2022

```
library(ggplot2)
source("funciones_chapter4.R")
```

## Ejercicios capitulo 4

### 4.1.

Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros  $n$  y  $p$ . Mediante la función de probabilidad binomial, verificar que  $p(n - x; n, 1 - p) = p(x; n, p)$ .

Respuesta.-

$$\begin{aligned} p(n - x; n, 1 - p) &= \frac{n!}{[n - (n - x)]!(n - x)!} (1 - p)^{n-x} [1 - (1 - p)]^{n-(n-x)} \\ &= \frac{n!}{x!(n - x)!} (1 - p)^{n-x} p^x \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ &= p(x; n, p) \end{aligned}$$

### 4.2.

En una distribución binomial, sea  $X$  el número de éxitos obtenidos en diez ensayos donde la probabilidad de éxito en cada uno es de 0.8. Con el resultado del problema anterior, demostrar que la probabilidad de lograr de manera exacta seis éxitos es igual a la probabilidad de tener cuatro fracasos.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} 0.08808038 &= \frac{10!}{[10 - (10 - 4)]!(10 - 4)!} (1 - 0.8)^{10-6} [1 - (1 - 0.8)]^{10-(10-6)} \\ &= \frac{10!}{6!(10 - 6)!} (1 - 0.8)^{10-6} 0.8^6 = 0.08808038 \end{aligned}$$

```
dbinom(4,10,0.2)
```

```
## [1] 0.08808038
```

```
dbinom(6,10,0.8)
```

```
## [1] 0.08808038
```

### 4.3

Mediante el empleo de la función de probabilidad binomial, verificar la siguiente fórmula de recursión:

$$p(x+1; n, p) = \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)} p(x; n, p)$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} p(x+1, n, p) &= \frac{n!}{[n-(x+1)]!(x+1)!} p^{x+1} (1-p)^{n-(x+1)} = \frac{n!}{\frac{(n-x)!}{(n-x)} x!(x+1)} p^x p (1-p)^{n-x} (1-p)^{-1} \\ &= \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)} p(x; n, p) \end{aligned}$$

### 4.4.

sea  $X$  una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros  $n = 8$  y  $p = 0.4$ . Emplear la fórmula de recursión del problema anterior para obtener las probabilidades puntuales de los valores de  $X$ .

Respuesta.-

$$p(x+1; 8, 0.4) = \frac{(8-x)0.4}{(x+1)(1-0.4)} p(x; 8, 0.4)$$

### 4.5

Sea  $X$  una variable aleatoria distribuida binomialmente con  $n = 10$  y  $p = 0.5$

a)

Determinar las probabilidades de que  $X$  se encuentre dentro de una desviación estándar de la media y a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Para una desviación estándar

Sabemos que  $\mu = E(X) = np = 10 \cdot 0.5 = 5$  y  $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 1.581139$ , luego si queremos hallar la desviación estándar de la media tenemos que calcular la desviación hacia la derecha y hacia la izquierda, es decir,  $5 \pm 1.581139 = 6.581139$  y  $3.418861$ . Si restamos y sumamos a  $6.581139$  y  $3.418861$ ,  $0.581139$  respectivamente tenemos por un lado  $6$  y por otro  $2.837722 \approx 3$ . Así tenemos que,

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) - P(X \leq 3) &= F(6; 10, 0.5) - F(3; 10, 0.5) = \sum_{i=0}^6 \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} - \sum_{i=0}^3 \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} \\ &= 0.65625 \end{aligned}$$

```
pbinom(6,10,0.5) - pbinom(3,10,0.5)
```

```
## [1] 0.65625
```

Para dos desviaciones estándar, tenemos que  $\sigma = 2\sqrt{np(1-p)} = 2\sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 3.162278$ , de donde  $5 \pm 3.162278 = 8.162278$  y  $1.837722$ . Podemos construir directamente la probabilidad requerida como sigue,

$$P(X \leq 8) - P(X \leq 2) = F(8; 10, 0.5) - F(2; 10, 0.5) = \sum_{i=0}^8 \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} - \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i}$$

$$= 0.9345703$$

```
pbinom(8,10,0.5)-pbinom(2,10,0.5)
```

```
## [1] 0.9345703
```

b)

¿Cómo cambiarían las respuestas de a) si  $n = 15$  y  $p = 0.4$ ?

Respuesta.- Para una desviación estándar,

Similar a la parte a) tenemos que  $\mu = E(X) = np = 15 \cdot 0.4 = 6$  de donde se tiene  $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.4 \cdot (1-0.4)} = 1.897367$  de donde  $6 \pm 1.897367 = 7.897367$  y  $4.102633$ , por lo tanto,

$$P(X \leq 7) - P(X \leq 2) = F(7; 15, 0.4) - F(2; 15, 0.4) = \sum_{i=0}^7 \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} - \sum_{i=0}^2 \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} = 0.5696191$$

```
pbinom(7,15,0.4)-pbinom(2,15,0.4)
```

```
## [1] 0.5696191
```

Para dos desviaciones estándar,

tenemos que  $\sigma = 2\sqrt{np(1-p)} = 2\sqrt{15 \cdot 0.4 \cdot (1-0.4)} = 3.794733$ , de donde  $6 \pm 3.794733 = 9.794733$  y  $2.205267$ . se sigue,

$$P(X \leq 9) - P(X \leq 2) = F(9; 15, 0.4) - F(2; 15, 0.4) = \sum_{i=0}^9 \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} - \sum_{i=0}^2 \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} = 0.9345703$$

```
pbinom(9,15,0.4)-pbinom(2,15,0.4)
```

```
## [1] 0.9390527
```

## 4.6

Supóngase que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamble es de 0.05. Si el número de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes

a)

¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades dos se encuentren defectuosas?

Respuesta.-

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0.05^2 \cdot (1 - 0.05)^{20-2} = 0.1886768$$

```
# opción 1
```

```
choose(20,2)*0.05^2*(1-0.05)^(20-2)
```

```
## [1] 0.1886768
```

```
# opción 2
dbinom(2,20,0.05)
```

```
## [1] 0.1886768
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades, dos como límite se encuentren defectuosas?

Respuesta.-

$$P(X \leq 2) = F(2; 20, 0.05) = \sum_{i=0}^2 \binom{20}{i} \cdot 0.05^i \cdot (1 - 0.05)^{20-i} = 0.9245163$$

```
pbinom(2,20,0.05)
```

```
## [1] 0.9245163
```

c)

¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

Respuesta.-

$$1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1; 20, 0.05) = \sum_{i=0}^1 \binom{20}{i} \cdot 0.05^i \cdot (1 - 0.05)^{20-i} = 0.2641605$$

```
pbinom(1,20,0.05,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2641605
```

## 4.7

En una fábrica de circuitos electrónicos, se afirma que la proporción de unidades defectuosas de cierto componente que ésta produce, es del 5%. Un buen comprador de estos componentes revisa 15 unidades seleccionadas al azar y encuentra cuatro defectuosas. Si la compañía se encuentra en lo correcto y prevalecen las suposiciones para que la distribución binomial sea el modelo de probabilidad adecuado para esta situación, ¿Cuál es la probabilidad de este hecho?. Con base en el resultado anterior ¿puede concluir que la compañía está equivocada?

Respuesta.-

$$P(X = 4) = \binom{15}{4} \cdot 0.05^4 \cdot (1 - 0.05)^{15-4} = 0.004852576$$

```
dbinom(4,15,0.05)
```

```
## [1] 0.004852576
```

```
choose(15,4)*0.05^4*(1-0.05)^(15-4)
```

```
## [1] 0.004852576
```

```
func_binom(4,15,0.05)
```

```
## [1] 0.004852576
```

Ahora veamos que tan probable es que existe más de 4 circuitos defectuosos.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - F(3; 20, 0.05) = \sum_{i=0}^3 \cdot 0.05^i \cdot (1 - 0.05)^{15-i} = 0.005467259$$

```
pbinom(3,15,0.05, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.005467259
```

```
1-acum_binom(3,15,0.05)
```

```
## [1] 0.005467259
```

Por lo que se dice de la afirmación es incorrecta.

## 4.8

La probabilidad de que un satélite, después de colocarlo en la órbita, funcione de manera adecuada es de 0.9. Supóngase que cinco de éstos se colocan en órbita y operan de manera independiente.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que, por lo menos, el 80% funcione adecuadamente?

Respuesta.-