

---

Universidad: **Mayor de San Andrés.**  
Asignatura: **Geometría II.**  
Ejercicio: 3.  
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

---

1. Encontrar el punto final de  $\vec{a} = (7, 6)$  si el punto inicial es  $P_0(2, -1)$ .

Respuesta.- Sea  $\vec{a} = P_1 - P_0$  y  $P_1 = (x, y)$ , entonces podemos hallar los vectores de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}x - 2 &= 7 \\ y + 1 &= 6\end{aligned}$$

de donde  $x = 9$ ,  $y = 5$  y por lo tanto

$$P_1 = (9, 5)$$

2. Sean  $\vec{u} = (1, 3)$ ,  $\vec{v} = (2, 1)$  y  $\vec{w} = (4, -1)$ . Encontrar las componentes del vector  $\vec{x}$  que satisfacen  $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$ .

Respuesta.- Despejando  $\vec{x}$  obtenemos

$$6\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \implies 6\vec{x} = (2, 6) - (2, 1) - (4, -1)$$

de donde

$$6\vec{x} = (0, 5) - (4, -1) \implies 6\vec{x} = (-4, 6) \implies \vec{x} = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

3. Demuéstrese que:  $0\vec{x} = \vec{0}$  y  $r\vec{0} = \vec{0}$ .

Demostración.- sea  $\vec{x} \in V_n$  entonces  $0\vec{x} = 0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , luego por la multiplicación de un número real por un vector tenemos,

$$0\vec{x} = (0 \cdot x_1, 0 \cdot x_2, \dots, 0 \cdot x_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

y por lo tanto se demuestra que

$$0\vec{x} = \vec{0}$$

Por otro lado sea  $r \in \mathbb{R}$ , por lo tanto

$$r\vec{0} = r(0, 0, \dots, 0) = (r \cdot 0, r \cdot 0, \dots, r \cdot 0) = (0, 0, \dots, 0)$$

de modo que

$$r\vec{0} = \vec{0}$$

4. Demuéstrese que:

a) Si  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \implies \vec{b} = \vec{c}$ .

Demostración.- Sea  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$ , entonces por el inverso aditivo en vectores e hipótesis tenemos

---


$$\begin{aligned}
\vec{b} &= (\vec{b} + \vec{a}) - \vec{a} \\
&= (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} \\
&= (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{a} \\
&= \vec{c} + (\vec{a} - \vec{a}) \\
&= \vec{c}
\end{aligned}$$

b) Si  $r\vec{x} = \vec{0} \implies r = 0 \vee \vec{x} = \vec{0}$ .

Demostración.- Será lo mismo demostrar  $r\vec{x} = \vec{0} \wedge r \neq 0 \implies \vec{x} = \vec{0}$ . Esto por leyes lógicas.

Sea  $r \in \mathbb{R}$  y  $\vec{x} \in V_n$ , entonces

$$r\vec{x} = 0 \text{ implica que } \vec{x} = \frac{\vec{0}}{r}, \text{ ya que } r \neq 0.$$

Luego se sigue que

$$\vec{x} = \vec{0}$$

c) Si  $r\vec{x} = s\vec{x} \wedge \vec{x} \neq 0 \implies r = s$ .

Demostración.- Reescribiendo la proposición se tiene: Si  $r\vec{x} = s\vec{x} \wedge r \neq s \implies \vec{x} = 0$ .

De donde se tiene

$$\vec{x} = (r - s)\vec{x} \implies \vec{x} = r\vec{x} - s\vec{x} \text{ ya que } r \neq s$$

y por lo tanto

$$\vec{x} = r(\vec{x} - \vec{x})$$

se sigue

$$\vec{x} = r(0) \implies \vec{x} = 0$$

debido a la unicidad y existencia del inverso aditivo. Con esto se demuestra la proposición dada.

**5.** Demostrar que si  $\vec{c} \neq 0$  y si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son paralelos a  $\vec{c}$ , entonces  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son paralelos. (Vectores paralelos a un mismo vector no nulo son paralelos entre sí).

Demostración.- Sea  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$ . Por definición de vectores paralelos se tiene

$$r_1\vec{a} = \vec{c} \text{ y } r_2\vec{b} = \vec{c}$$

de donde

$$r_1\vec{a} = r_2\vec{b},$$

en vista de que  $r_1 \cdot r_2 \neq 0$  entonces

$$\vec{b} = r_1 r_2^{-1} \vec{a},$$

por lo tanto se concluye que  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son paralelos entre sí.

**6.** Hallar todos los vectores ortogonales a:

a)  $(3, 6)$

Respuesta.- Sea  $(r_1, r_1)$  un vector, entonces para hallar vectores paralelos a  $(3, 6)$  utilizamos la definición como sigue,

$$\begin{aligned}
(3, 6) \circ (r_1, r_2) &= 0 \\
3r_1 + 6r_2 &= 0 && \text{producto escalar} \\
3(r_1 + 2r_2) &= 0 \\
r_1 + 2r_2 &= 0 \\
r_1 &= -2r_2 && (1)
\end{aligned}$$

de donde tomamos valores para  $r_2$ , reemplazamos en (1) y obtendremos  $n$  vectores paralelos a  $(3, 6)$ .

**b)**  $(2, -1)$ .

Respuesta.- Análogamente al inciso a) tenemos

$$\begin{aligned}
(2, -1) \circ (r_1, r_2) &= 0 \\
2r_1 + (-r_2) &= 0 \\
r_1 &= \frac{1}{2}r_2
\end{aligned}$$

de igual forma al anterior inciso, tomamos valores para  $r_2$ , y hallamos  $n$  valores ortogonales a  $(2, -1)$ .

**c)**  $(2, 3, -1)$

Respuesta.- Sea  $(r_1, r_2, r_3)$  un vector en  $V_3$ , entonces,

$$\begin{aligned}
(2, 3, -1) \circ (r_1, r_2, r_3) &= 0 \\
2r_1 + 3r_2 - r_3 &= 0 \\
r_1 &= (r_3 - 3r_2)/2 && (1)
\end{aligned}$$

luego reemplazamos valores a  $r_3$  y  $r_2$  en (1), de donde obtendremos vectores ortogonales a  $(2, 3, -1)$ .

**d)**  $(a_1, a_2)$

Respuesta.- Análogo a los anteriores incisos se tiene,

$$(a_1, a_2) \circ (r_1, r_2) = 0 \implies a_1 r_1 + a_2 r_2 = 0 \implies \begin{cases} a_1 = -a_2 r_2 / r_1 \\ a_2 = -a_1 r_1 / r_2 \\ r_1 = -a_2 r_2 / a_1 \\ r_2 = -a_1 r_1 / a_1 \end{cases}$$

**7.** Encontrar un vector que sea ortogonal tanto a  $\vec{u}$  como a  $\vec{v}$ .

**a)**  $\vec{u} = -7i + 3j + k$ ,  $\vec{v} = 2i + 4k$ .

Respuesta.-

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} k = (3 \cdot 4 - 1 \cdot 0)i - (7 \cdot 4 - 2 \cdot 1)j + (7 \cdot 0 - 3 \cdot 2)k$$

y por lo tanto el vector que deseamos encontrar es

$$\vec{u} \times \vec{v} = (12, -26, -6)$$

b)  $\vec{u} = (-1, -1, -1), \quad \vec{v} = (2, 0, 2)$

Respuesta.-

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

de donde

$$\vec{u} \times \vec{v} = -2i + 2k = (-2, 0, 2)$$

8. Encontrar todos los vectores posibles de longitud 1 ortogonales tanto a  $\vec{a} = (3, -2, 1)$  como a  $\vec{b} = (-2, 1, -3)$ .

Respuesta.- Primeramente encontraremos el producto vectorial para luego utilizar el teorema  $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = 1$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5i + 7j - k = (5, 7, -1).$$

Luego

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 1^2} = 5\sqrt{3}$$

de donde,

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$$

por lo tanto los vectores de longitud 1 ortogonales a  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , son

$$\left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right) \quad \text{y} \quad \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$$

El segundo vector cumple con la condición dada ya que es el vector contrario al encontrado primeramente.

9. Sean  $\vec{a} = ti + j$  y  $\vec{b} = 4i + 3j$ . Encontrar el valor de  $t$  tal que

a)  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sean ortogonales.

Respuesta.- Sea  $\vec{a} = ti + j = (t, 1)$  y  $\vec{b} = 4i + 3j = (4, 3)$ , entonces por definición de ortogonalidad tenemos

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \implies 4t + 3 = 0 \implies t = -3/4$$

b) El ángulo entre  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sea  $\pi/4$ .

Respuesta.- Aplicando  $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\pi/4)$  tenemos,

$$4t + 3 = \sqrt{t^2 + 1} \cdot \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \implies (4t^2 + 3)^2 = (t^2 + 1) \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

de donde se tiene

$$7t^2 + 48 - 7 = 0$$

se sigue

$$t = \frac{1}{7} \quad \text{o} \quad t = -7$$

---

c) El ángulo entre  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sea  $\pi/6$ .

Respuesta.- Análogo al anterior ejercicio tenemos

$$4t + 3 = \sqrt{t^2 + 1} \cdot \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \implies (4t^2 + 3)^2 = (t^2 + 1) \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{3}{4} \implies -11t^2 + 96t - 39 = 0$$

de donde

$$t = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{11} \quad \text{o} \quad t = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$$

d)  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sean paralelos.

Respuesta.- Sea  $\vec{a} = (t, 1)$  y  $\vec{b} = (4, 3)$  entonces por definición de vectores paralelos tenemos que

$$\vec{a} = c\vec{b} \implies (t, 1) = c(4, 3) \implies (t, 1) = (4c, 3c)$$

de donde

$$t = 4c \quad \text{y} \quad 1 = 3c$$

por lo tanto  $c = \frac{1}{3}$ . Se sigue

$$t = \frac{4}{3}$$

**10.** Los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  forman un ángulo de  $60^\circ$  con  $\|\vec{a}\| = 5$ ,  $\|\vec{b}\| = 8$ . Determinar  $\|\vec{a} - \vec{b}\|$  y  $\|\vec{a} + \vec{b}\|$ .

Respuesta.- Sea

$$\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \pm 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

entonces se tiene,

$$\|a \pm b\|^2 = 5^2 + 8^2 \pm 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos\left(60 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

por lo tanto

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = 7 \quad \text{y} \quad \|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{129}$$

**11.** Los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  forman un ángulo de  $30^\circ$  con  $\|\vec{a}\| = 1$ ,  $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$ . Calcular el ángulo formado por los vectores  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ .

Respuesta.- Primero calculemos

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\cos 30 = 1$$

Luego calculamos el ángulo  $\alpha$  asociado a  $\vec{a}$  y  $\vec{a} - \vec{b}$  de donde nos queda

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1^2 + 1^2 - \sqrt{3}}{2}\right) = \arccos\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) = 82.3$$

Sea  $a + b$  la diagonal del paralelogramo formado por los lados  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  de donde el ángulo de  $a + b$  será  $15^\circ$ . Por lo tanto  $a + b$  y  $a - b$  forman un ángulo de,

$$180 - 82.3 - 15 = 82.7$$

- 12.** Dados dos vectores  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  que satisfacen la condición  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  y sabiendo que  $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 1, \|\vec{c}\| = 4$ . Calcular  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Respuesta.- Si  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  entonces

$$0 = \|\vec{0}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2.$$

Luego

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$$

de donde se tiene,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 3^2 + 1^2 + 4^2 = 13.$$

- 13.** Dados los puntos  $P(3, 4), Q(1, 1)$  y  $R(5, 2)$ , usar métodos vectoriales para encontrar las coordenadas del cuarto vértice del paralelogramo cuyo lados adyacentes son  $\vec{PQ}$  y  $\vec{QR}$ .

Respuesta.-

- 14.** Demostrar que  $(4, 5, 2), (4, 7, 9), (8, 5, -6)$  son los vértices de un triángulo equilátero.

Respuesta.- Supongamos que las distancias entre  $A, B$  y  $C$  son iguales, lo que implica que  $|A - B| = |B - C| = |A - C|$ , de donde

$$|A - B| = |(0, -2, -7)| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$$

$$|A - C| = |(-4, 0, 8)| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

ya que  $|A - B| \neq |A - C|$  se concluye que los puntos dado no son los vertices de un triangulo equilátero.

- 16.** Sean  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$ . Demuéstrese que  $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Demostración.- Se tiene que

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$$

- 18.** Demostrar que:  $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$

Demostración.- Análogamente al ejercicio 16 se tiene,

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$$

- 20.** Supóngase que  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$  y que  $\vec{a} \neq 0$ . Es posible inferir que  $\vec{b} = \vec{c}$ ? Explicar la respuesta.

Respuesta.- Esta proposición es falsa ya que si  $A = (1, 1, 1), B = (1, -1, 0)$  y  $C = (0, -1, 1)$  entonces

$$A \cdot B = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0,$$

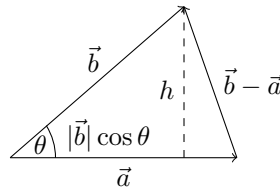
$$A \cdot C = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

de donde  $B \neq C$ .

---

**41.** Demostrar vectorialmente la ley de cosenos.

Demostración.- Supongamos que  $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$  y,



entonces por el teorema de Pitágoras se tiene

$$h^2 = |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{b}| \cos \theta\right)^2 \quad y \quad |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \left(|\vec{b}| \cos \theta - |\vec{a}|\right)^2 + h^2$$

de donde

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = \left(|\vec{b}| \cos \theta - |\vec{a}|\right)^2 + |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{b}| \cos \theta\right)^2 = \left(|\vec{b}| \cos \theta\right)^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{b}| \cos \theta\right)^2$$

por lo tanto,

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$