CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por:

FODE (Christian Limbert Paredes Aguilera)

Índice general

1

Limites

Definición 1.1 *La función f tiende hacia el límite l en a $\left(\lim_{x\to a} f(x) = l\right)$ significa: para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.*

Existe algún $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x para el cual es $0 < |x-a| < \delta$, pero no $|f(x) - l| < \epsilon$.

TEOREMA 1.1 *Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otros términos si f tiende hacia l en a, y f tiende hacia m en a, entonces $l = m$.*

Demostración.- Puesto que f tiende hacia l en a, sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.
Sabemos también, puesto que f tiende hacia m en a, que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - m| < \epsilon$.
Hemos empleado dos números $delta_1$ y δ_2, ya que no podemos asegurar que el δ que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2), \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon \text{ y } |f(x) - m| < \epsilon$$

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un $\epsilon > 0$ particular para el cual las dos condiciones $|f(x) - l| < \epsilon$ y $|f(x) - m| < \epsilon$ no puedan cumplirse a la vez si $l \neq m$
Si $l \neq m$, de modo que $|m - l| > 0$ podemos tomar como ϵ a $|l - m|/2$. Se sigue que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{|l-m|}{2} \text{ y } |f(x) - m| < \frac{|l-m|}{2}$$

Esto implica que para $0 < |x-a| < \delta$ tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{|l-m|}{2} + \frac{|l-m|}{2} = |l - m|$$

El cual es una contradicción.

LEMA 1.1 *Si x está cerca de x_0 e y está cerca de y_0, entonces $x+y$ estará cerca de x_0+y_0, xy estará cerca de x_0y_0 y $1/y$ estará cerca de $1/y_0$.*

(1) *Si* $|x-x_0|<\dfrac{\epsilon}{2}$ *y* $|y-y_0|<\dfrac{\epsilon}{2}$ *entonces* $|(x+y)-(x_0+y_0)|<\epsilon$.

Demostración.-

$$|(x+y)-(x_0+y_0)| = |(x-x_0)+(y-y_0)| \le |x-x_0|+|y-y_0| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(2) *Si* $|x-x_0|<\text{mín}\left(1,\dfrac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}\right)$ *y* $|y-y_0|<\dfrac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}$ *entonces* $|xy-x_0y_0|<\epsilon$.

Demostración.- Puesto que $|x-x_0|<1$ *se tiene*

$$|x|-|x_0| \le |x-x_0| < 1,$$

de modo que

$$|x| < 1+|x_0|$$

así pues

$$\begin{aligned}
|xy-x_0y_0| &= |x(y-y_0)+y_0(x-x_0)| \\
&\le |x|\cdot|y-y_0|+|y_0|\cdot|x-x_0| \\
&< (1+|x_0|)\cdot\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}+|y_0|\cdot\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)} \\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon
\end{aligned}$$

Notemos que $\dfrac{|y_0|}{|y_0|-1}<1$*, por lo tanto* $\dfrac{|y_0|}{|y_0|-1}\cdot\dfrac{\epsilon}{2}<\dfrac{\epsilon}{2}$.

(3) *Si* $y_0\neq 0$ *y* $|y-y_0|<\text{mín}\left(\dfrac{|y_0|}{2},\dfrac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right)$ *entonces* $y\neq 0$ *y* $\left|\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y_0}\right|<\epsilon$.

Demostración.- Se tiene

$$|y_0|-|y| < |y-y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

de modo que $-|y|<-\dfrac{|y_0|}{2}\Longrightarrow |y|>|y_0|/2$*. En particular.* $y\neq 0$*, y*

$$\frac{1}{|y|}<\frac{2}{|y_0|}$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0-y|}{|y|\cdot|y_0|} = \frac{1}{|y|}\cdot\frac{|y_0-y|}{|y_0|} < \frac{2}{|y_0|}\cdot\frac{1}{|y_0|}\cdot\frac{\epsilon|y_0|^2}{2} = \epsilon$$

TEOREMA 1.2 *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = m$, *entonces*

(1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l+m$

(2) $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l\cdot m$

Además, si $m \neq 0$, *entonces*

(3) $\lim_{x\to a}(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{m}$

Demostración.- La hipótesis significa que para todo $\epsilon > 0$ *existen* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que, para todo* x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x)-l| < \epsilon$$

$$y \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x)-m < \epsilon|$$

Esto significa (ya que después de todo, $\epsilon/2$ *es también un número positivo) que existen* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que, para todo* x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x)-l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$y \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea ahora $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. *Si* $0 < |x-a| < \delta$, *entonces* $0 < |x-a| < \delta_1$ *y* $0 < |x-a| < \delta_2$ *se cumplen las dos, de modo que es a la vez*

$$|f(x)-l| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}$$

pero según la parte (1) *del lema anterior esto implica que* $|(f+g)(x)-(l+m)| < \epsilon$.

Para demostrar (2) *procedemos de la misma manera, después de consultar la parte* (2) *del lema. Si* $\epsilon > 0$ *existen* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que, para todo* x

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m|+1)}\right),$$

$$y \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2(|l|)+1}$$

Pongamos de nuevo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. *Si* $0 < |x-a| < \delta$, *entonces*

$$|f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m|+1)}\right) \qquad y \qquad |g(x)-m| < \frac{\delta}{2(|l|+1)}$$

Así pues, según el lema, $|(f\cdot g)(x) - l\cdot m| < \epsilon$, *y esto demuestra* (2).

Finalmente, si $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } |g(x)-m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\epsilon|m|^2}{2}\right)$$

Pero según la parte (3) *del lema, esto significa, en primer lugar que* $g(x) \neq 0$, *de modo que* $(1/g)(x)$ *tiene sentido, y en segundo lugar que*

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \epsilon$$

Esto demuestra (3).

Definición 1.2 $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

La condición $0 < x - a < \delta$ *es equivalente a* $0 < |x - a| < \delta$ *y* $x > a$

Definición 1.3 $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

Definición 1.4 $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un número* N *grande, que, para todo* x,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

1.1. Problemas

1. Hallar los siguientes limites (Estos limites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

(i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$

(ii) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 2^2 + 4 + 4 = 12$

(iii) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{3^3 - 8}{3 - 2} = 19$

(iv) $\lim_{x \to y} \frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} =$

$$= ny^{n-1}$$

(v) $\lim_{y \to x} \frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} = nx^{n-1}$

(vi) $\lim_{h \to 0} = \frac{\sqrt{a + h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a + h} + \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a + h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a + h} + \sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a + h})^2 - (\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a + h} + \sqrt{a}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2. Hallar los límites siguientes:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1^2-(\sqrt{x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=0$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}$

3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un δ tal que, $|f(x)-l|<\epsilon$ para todo x que satisface $0<|x-a|<\delta$

(i) $f(x)=x^4;\ l=a^4$

Respuesta.- Por la parte (2) del lema anterior se tiene

$$|x^2-a^2|<\text{mín}\left(1,\frac{\epsilon}{2(|a|^2+1)}\right).$$

Si aplicamos una vez mas la parte (2) del lema obtenemos

$$|x-a|<\text{mín}\left(1,\frac{\text{mín}\left(1,\frac{\epsilon}{2(|a|^2+1)}\right)}{2(|a|+1)}\right)=\text{mín}\left(1,\frac{\epsilon}{4(|a|^2+1)(|a|+1)}\right)=\delta$$

(ii) $f(x)=\dfrac{1}{x};\ a=1,\ l=1$

Respuesta.- Por la parte (3) del lema se tiene $\left|\dfrac{1}{x}-1\right|<\epsilon$ por lo tanto $|y-1|<\text{mín}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\epsilon}{2}\right)$

(iii) $f(x)=x^4+\dfrac{1}{x};\ a=1,\ l=2$

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene $\left|\left(x^4+\dfrac{1}{x}\right)-(1+1)\right|<\epsilon$ de donde

$$|x^4-1|<\frac{\epsilon}{2}\quad y\quad \left|\frac{1}{x}-1\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

Luego por el inciso (i) y (ii)

$$|x-1|<\text{mín}\left(\frac{1}{2},\frac{\frac{\epsilon}{2}}{2}\right)\quad y\quad |x-1|<\text{mín}\left(1,\frac{1,\text{mín}\left(\frac{\frac{\epsilon}{2}}{2(1+1)}\right)}{2(1+1)}\right)\implies |x-1|<\text{mín}\left(\frac{1}{2},\frac{\epsilon}{4},1,\frac{\epsilon}{32}\right)$$

y por lo tanto

$$|x-1|<\text{mín}\left(\frac{1}{2},\frac{\epsilon}{32}\right)=\delta$$

(iv) $f(x) = \dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$; $a = 0,\ l = 0$

Respuesta.- Sea $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| < \epsilon \quad y \quad |x| < \delta$ pero $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| \leq |x|$ por lo tanto $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| \leq |x| < \delta = \epsilon$

(v) $f(x) = \sqrt{|x|}$; $a = 0,\ l = 0$

Respuesta.- Sea $\left|\sqrt{|x|}\right| < \epsilon$ entonces $\left|(|x|)^{1/2}\right| = \left(\sqrt{x^2}\right)^{1/2} = \left[(x^2)^{1/2}\right]^{1/2} = \sqrt{x} < \epsilon$, luego sabemos que la raíz cuadrada de x debe ser siempre mayor o igual a 0 por lo tanto $|x| < \epsilon^2$, de donde concluimos que $\delta = \epsilon^2$

(vi) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1,\ l = 1$

Respuesta.- Si $\epsilon > 1$, póngase $\delta = 1$. Entonces $|x-1| < \delta$ implica que $0 < x < 2$ con lo que $0 < \sqrt{x} < 2$ y $|\sqrt{x}-1| < 1$. Si $\epsilon < 1$, entonces $(1-\epsilon)^2 < x < (1+\epsilon)^2$ implica que $|\sqrt{x}-1| < \epsilon$, de modo que podemos elegir un δ tal que $(1-\epsilon)^2 \leq 1-\delta$ y $1+\delta \leq (1-\epsilon)^2$. Podemos elegir, pues $\delta = 2\epsilon - \epsilon^2$

4. Para cada una de las funciones del problema $4-17$, decir para qué números a existe el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

(i) Existe el límite si a no es un entero, ya que en los puntos enteros la función tiene un salto.

(ii) Existe el límite si a no es un entero.

(iii) De la misma forma que el inciso (ii).

(iv) Existe para todo a.

(v) Existe para todo a si sólo si sea $a = 0$ y $a = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

(vi) El límite no existe para los puntos $|a| < 1\ y\ a \neq \dfrac{1}{n}$

5. **(a)** Hágase lo mismo para cada una de las funciones del problema $4-19$

(i) Existe para cualquier número que tenga la forma $n + \dfrac{k}{10},\ n,k \in \mathbb{Z}$

(ii) Existe para cualquier número que tenga la forma $n + \dfrac{k}{100},\ n,k \in \mathbb{Z}$

(iii) No es posible para ningún a.

(iv) De la misma forma que el anterior inciso.

(v) Existe para todo a excepto para los que terminan en 7999...

(vi) Existe para todo a excepto para los que terminan en 1999....

(b) El mismo problema usando decimales infinitos que terminen en una fila de ceros en lugar de los que terminan en una fila de nueves.

(i) De igual forma de la parte (a) inciso (i).

(ii) De igual forma de la parte (a) inciso (ii).

(iii) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).

(iv) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).

(v) Existe para todo a excepto para los que terminan en 8000...

(vi) Existe para todo a excepto para los que terminan en 2000...

6. Supóngase que las funciones f y g tiene n la siguiente propiedad: Para todo $\epsilon > 0$ y todo x,

$$si\ 0 < |x-2| < \operatorname{sen}^2\left(\frac{\epsilon^2}{9}\right) + \epsilon,\ entonces\ |f(x)-2| < \epsilon,$$

$$si\ 0 < |x-2| < \epsilon^2,\ entonces\ |g(x)-4| < \epsilon.$$

Para cada $\epsilon > 0$ hallar un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

(i) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x)+g(x)-6| < \epsilon$.

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene $|f(x)-2| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $|g(x)-4| < \dfrac{\epsilon}{2}$, luego remplazamos ϵ por $\epsilon/2$ de donde nos queda

$$0 < |x-2| < \operatorname{sen}^2\left[\frac{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}{9}\right] \quad y \quad |x-2| < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$$

Por último, solo hace verificar para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$. En este caso solo hace falta elegir

$$0 < |x-2| < \text{mín}\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\epsilon^2}{36}\right) + \epsilon, \frac{\epsilon^2}{4}\right] = \delta$$

(ii) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x)g(x) - 8| < \epsilon$

Respuesta.- Por la segunda parte del lema demostrado tenemos que

$$|f(x) - 2| < \text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{2(|4|+1)}\right) \quad y \quad |g(x) - 4| < \frac{\epsilon}{2(|2|+1)}$$

ya que $|f(x)g(x) - 2 \cdot 4| < \epsilon$.
Luego reemplazando en ϵ a cada parte obteniendo,

$$0 < |x-2| < \text{mín}\left\{\text{sen}^2\left[\frac{\text{mín}\left(\frac{\epsilon}{10}\right)^2}{9}\right] + \text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{10}\right), \left[\text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{6}\right)\right]^2\right\} = \delta$$

(iii) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4}\right| < \epsilon$

Respuesta.- Por la tercera parte del lema se tiene que $|g(x) - 4| < \text{mín}\left(\frac{|4|}{2}, \frac{\epsilon|4|^2}{2}\right)$, luego remplazando en ϵ obtenemos

$$|x-2| < [\text{mín}\,(2, 8\epsilon)]^2 = \delta$$

.

(iv) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{2}\right| < \delta$

Respuesta.- Sea $\left|f(x)\frac{1}{g(x)} - 2dfrac14\right|$ entonces

$$|f(x) - 2| < \text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{2(|1/4|+1)}\right) \quad y \quad \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4} < \frac{\epsilon}{2(|2|+1)}$$

, de donde

$$0 < |x-2|\,\text{mín}\left\{\text{sen}^2\left[\frac{(\text{mín}(1, 2\epsilon/5))^2}{9}\right] + \text{mín}(1, 2\epsilon/5), \left[\text{mín}\left(2, \frac{8\epsilon}{2(|2|+1)}\right)\right]^2\right\} = \delta$$

7.