1

Límite, continuidad de la función

1.1. Limite de la magnitud variable, variable infinitamente grande

Definición 1.1 *El número constante a se denomina límite de la variable x, si para cualquier número infinitesimal positivo ϵ prefijado, se puede indicar tal valor de la variable x, a partir del cual todos los valores posteriores de la misma satisfacen la desigualdad:*

$$|x-a|<\epsilon$$

Si el número a es el límite de la variable x, se dice que x tiende al límite a; su notación es:

$$x \longrightarrow a \quad \text{ó} \quad \lim x = a$$

En términos geométricos la definición de limite puede enunciarse así: El número constante a es el limite de la variable x, si para cualquiera vecindad infinitesimal prefijada de radio ϵ y centro en el punto a, existe un valor de x tal que todo los puntos correspondientes a los valores posteriores de la variable se encuentren dentro de la misma vecindad.

Teorema 1.1 *Una magnitud variable no puede tener dos límites.*

Demostración.- *En efecto, si* $\lim x = a$ *y* $\lim x = b (a < b)$, *entonces x debe satisfacer las dos desigualdades simultáneamente:* $|x-a|<\epsilon$ *y* $|x-b|<\epsilon$ *siendo ϵ arbitrariamente pequeño, pero esto es imposible, si* $\epsilon < \dfrac{b-a}{2}$

Definición 1.2 *La variable x tiende al infinito, si para cualquier número positivo M prefijado se puede elegir un valor de x tal que, a partir de él todos los valores posteriores de la variable satisfagan la desigualdad $|x|>M$.*
La variable x que tiende al infinito, se denomina infinitamente grande y esta tendencia se expresa así: $x \longrightarrow \infty$.

1.2. Limite de la función

Definición 1.3 *Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida en determinada vecindad del punto a en ciertos puntos de la misma.*
La función $y = f(x)$ tiende al límite b ($y \to b$) cuando x tienda a a ($x \to a$), si para cada número positivo ϵ, por pequeño que éste sea, es posible indicar un número positivo δ tal que para todos los valores x, diferentes de a, que satisfacen la desigualdad: $|x - a| < \delta$, se verificará la desigualdad:

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

Si b es el límite de la función $f(x)$, cuando $x \to a$, su notación es:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

o bien $f(x) \to b$, cuando $x \to a$.
Si la variable $y = f(x)$ tiende a un límite b, cuando x tiende a a, escribimos:

$$\lim_{xtoa} f(x) = b$$

Definición 1.4 *La función $f(x)$ tiende al límite b cuando $x \to \infty$, si para cualquier número positivo ϵ arbitrariamente pequeño existe un número positivo N tal que para todos los valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, se cumpla la desigualdad*

$$|f(x) - b| < \epsilon.$$

1.3. Función que tiende al infinito. Funciones acotadas

Definición 1.5 *La función $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \to a$, es decir, es una magnitud infinitamente grande cuando $x \to a$, si para cualquier número positivo M, por grande que sea, existe un valor $\delta > 0$ tal que para todos los valores de x diferentes de a y que satisfacen la condición $|x - a| < \delta$, se cumpla la desigualdad $|f(x)| > M$.*
Si $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \to a$, se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Definición 1.6 *La función $y = f(x)$ se denomina acotada en el dominio dado de variación del argumento x, si existe un número positivo M tal que para todos los valores de x pertenecientes al dominio considerado se cumpla la desigualdad $|f(x)| \leq M$. Si el número M no existe, se dice que la función $f(x)$ no está acotada en el dominio dado.*

Definición 1.7 *La función $f(x)$ se denomina acotada, cuando $x \to a$, si existe una vecindad con centro en el punto a en la cual dicha función está acotada.*

Definición 1.8 *La función $y = f(x)$ se denomina acotada, cuando $x \to \infty$, si existe un número $N > 0$ tal que para todos los valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, la función $f(x)$ esté acotada.*

Teorema 1.2 *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *siendo* b *un número finito, la función* $f(x)$ *está acotada cuando* $x \to a$.

Demostración.- Por definición de límite se deduce que para $\epsilon > 0$ *existe un número* δ *tal que* $a-\delta < x < a+\delta$ *se cumple la desigualdad*

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

es decir

$$|f(x)| < |b| + \epsilon$$

.