1

Cálculo diferencial

1.1 Regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas

Teorema 1.1 (Regla de la cadena)**.** Sea f la función compuesta de dos funciones u y v, expresado por $f = u \circ v$. Suponga que ambas derivadas $v'(x)$ y $u'(y)$ existen, donde $y = v(x)$, entonces la derivada $f'(x)$ también existe y es dado por la fórmula

$$f'(x) = u'(y) \cdot v'(x) \quad \text{o} \quad f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x) \quad \text{o} \quad (u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v' \quad \text{o} \quad u(v)' = u'(v) \circ v'.$$

Dicho de otro modo, para calcular la derivada de $u \circ v$ respecto a x se calcula primero la derivada de u en el punto y donde $y = v(x)$, y se multiplica ésta por $v'(x)$.

Demostración.- Se trata aquí de demostrar $f'(x) = u'(v) \cdot v'(x)$. Se supone que v tiene derivada en x y u tiene derivada en $v(x)$ y se trata de demostrar que f tiene derivada en x dada por el producto $u'[v(x)] \cdot v'(x)$. El cociente de diferencia para f es:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u[v(x+h)] - y[v(x)]}{h}$$

Ahora es conveniente introducir la siguiente notación: Sean $y = v(x)$ y sea $k = v(x+h) - v(x)$. Es importante poner de manifiesto que k depende de h. Entonces se tiene $v(x+h) = y + k$, por lo que el cociente de diferencias de f se transforma en:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{h}$$

El segundo miembro sería el cociente de diferencias cuyo límite define $u'(y)$, si en el denominador en vez de h apareciera k. Si $k \neq 0$ se completa fácilmente la demostración multiplicando el numerador y el denominador por k toma la forma:

$$\frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

Cuando $h \to 0$ el último cociente del segundo miembro tiende a $v'(x)$. Puesto que $k = v(x+h) - v(x)$ y v es continua en x, al tender $h \to 0$ también $k \to 0$; por tanto, el primer cociente del segundo miembro tiende a $u'(y)$ cuando $h \to 0$.
Aunque el razonamiento precedente parece el camino más natural para la demostración, sin embargo no es completamente general. Como $k = v(x+h) - v(x)$, puede ocurrir que $k = 0$ para infinitos valores de h cuando $h \to 0$, en cuyo caso pasar a $\frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$ no es válido.
Para soslayar esta dificultad es necesario modificar ligeramente la demostración.
Volviendo a la ecuación $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{h}$ se expresa el cociente del segundo miembro

de manera que no aparezca k en el denominador, para lo cual se introduce la diferencia entre la derivada $u'(y)$ y el cociente de diferencias cuyo límite es $u'(y)$. Es decir, se define una nueva función g como sigue:

$$g(t) = \frac{u(y+t)}{t} - u'(y) \text{ si } t \neq 0.$$

Esta ecuación define $g(t)$ sólo si $t \neq 0$. Multiplicando por t y transponiendo términos, se puede escribir en la forma:

$$u(y+t) - u(y) = t[g(t) + u'(y)].$$

Aunque esta última forma se había deducido en la hipótesis de ser $t \neq 0$, es válida también para $t = 0$ mientras se asigne algún valor definido a $g(0)$. El valor que se asigne a $g(0)$ no tiene importancia para esta demostración, pero ya que $g(t) \to 0$ cuando $t \to 0$ parece natural definir $g(0)$ igual a 0. Si ahora se sustituye t por k, donde $k = v(x+h) - v(x)$ y se sustituye el segundo miembro de $u(y+t) - u(y) = t[g(t) + u'(y)]$ en $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{u(y+k) - u(y)}{h}$ se obtiene:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{k} = \frac{k}{h}[g(k) + u'(y)]$$

fórmula que es válida aun cuando $k = 0$. Si $h \to 0$ el cociente $k/h \to v'(x)$ y $g(k) \to 0$; por lo tanto el segundo miembro tiende al límite $u'(y) \cdot v'(x)$. Queda pues completada la demostración de la regla de la cadena.

1.2 Aplicaciones de la regla de cadena. Coeficientes de variación ligados y derivación implícita

Introducimos los símbolos

$$y = v(x) \qquad \text{y} \qquad z = u(y).$$

Y designando con dy/dx la derivada $v'(x)$ y con dz/dy la de $u(y)$, la formación de la función compuesta queda indicada por:

$$z = u(y) = u[v(x)] = f(x),$$

siguiente lo notación de Leibniz, dz/dx designa la derivada $f'(x)$, la regla de la cadena tal como estaba expresada se presenta ahora en la forma:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Si $y = v(x)$ y $z = f(x)$, entonces $z = y^n$, $dz/dx = f'(x)$ y la regla de la cadena da:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = ny^{n-1}v'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x).$$

Ejemplo 1.1. Si $f(x) = [v(x)]^n$ donde n es un entero positivo, calcular $f'(x)$ en función de $v(x)$ y $v'8x)$.

Respuesta.- La solución f es una composición, $f(x) = u[v(x)]$, donde $y(x) = x^n$. Puesto que $u'(x) = nx^{n-1}$, se tiene $u'[v(x)]\ u'[v(x)] = n[v(x)]^{n-1}v'(x)$. Y la regla de la cadena da:

$$f'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x).$$

Si se omite la referencia a x y se escribe como una igualdad entre funciones, se obtiene la importante fórmula:

$$(v^n)' = nv^{n-1}v'$$

que indica cómo se deriva la potencia n-ésima de v cuando v' existe. La fórmula es también válida para las potencias racionales si v^n y v^{n-1} están definidas.

1.3 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, determinar la derivada $f'(x)$. En cada caso se sobrentiende que x toma sólo los valores para los que $f(x)$ tiene sentido.

1. $f(x) \cos 2x - 2 \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = (-\operatorname{sen} 2x)2 - (0 \cdot \operatorname{sen} x + 2\cos x) = -2\operatorname{sen} 2x - 2\cos x.$$

2. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. $f(x) = (2-x^2)\cos x^2 + 2x \operatorname{sen} x^3$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -2x\cos x^2 + (2-x^2)(-2x\operatorname{sen} x^2) + 2\operatorname{sen} x^3 \cdot 2\operatorname{sen} x^3 + 2x \cdot 3x^3 \cdot \cos x^3 \\ & = & (2x^3 - 4x)\operatorname{sen} x^2 - 2x\cos x^2 + 2\operatorname{sen} x^2 + 6x^3 \cos x^3. \end{array}$$

4. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x) \cdot \cos(\operatorname{sen}^2 x)$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \cos\left(\cos^2 x\right)(-2\cos x \operatorname{sen} x)\cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right)\left[-\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right] 2\operatorname{sen} x \cos x \\ & = & (-2\operatorname{sen} x\cos x)\left[\cos\left(\cos^2 x\right)\cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right] \\ & = & -\operatorname{sen}(2x)\left[\cos\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)\right] \\ & = & -\operatorname{sen}(2x)\cos\left(\cos 2x\right). \end{array}$$

5. $f(x) = \operatorname{sen}^n x \cdot \cos nx$.

Respuesta.- Por el hecho de que $(v^n)' = nv^{n-1}v'$ tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & n\left(\operatorname{sen}^{n-1} x\right)\cos x \cos nx + \operatorname{sen}^n x(-\operatorname{sen} nx)n \\ & = & \left(n\operatorname{sen}^{n-1} x\right)\left[\cos x\cos nx - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx\right] \end{array}$$

Luego por la identidad $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ concluimos que,

$$f'(x) = \left(n\operatorname{sen}^{n-1} x\right)\cos\left[(n+1)x\right].$$

6. $f(x) = \operatorname{sen}[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)]$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \cos\left[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\right] \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x.$$

7. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2\operatorname{sen} x \cos x)\left[\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right] - \left(\operatorname{sen}^2 x\right)\left[2x\cos\left(x^2\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(x^2\right)} \\ &= \frac{2\operatorname{sen} x\left[\cos x \operatorname{sen}\left(x^2\right) - x\operatorname{sen} x\cos\left(x^2\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(x^2\right)}. \end{aligned}$$

8. $f(x) = \tan\dfrac{x}{2} - \cot\dfrac{x}{2}$.

Respuesta.- Sabemos que $(\tan x)' = \sec^2 x$ y $(\cot x)' = csc^2 x$ por lo tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right] \\ &= \frac{1}{2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]} \end{aligned}$$

Luego ya que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x\cos x$, es decir

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x.$$

Se tiene,

$$\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} x} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

9. $f(x) = \sec^2 x + csx^2 x$.

Respuesta.- Simplificando la expresión dada, tenemos

$$f(x) = \sec^2 x + \csc^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\dfrac{1}{4} \cdot \operatorname{sen}^2(2x)} = \frac{4}{\operatorname{sen}^2(2x)}$$

Por lo tanto la derivada de f estará dada por,

$$f'(x) = \frac{-4[\cos(2x)][\operatorname{sen}(2x)]2}{\operatorname{sen}^4(2x)} = -\frac{16\cos(2x)}{\operatorname{sen}^3(2x)}.$$

10. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

11. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{-x^2} - x\dfrac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2} = \frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

12. $f(x) = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{3x^2\left(1-x^3\right) - \left(1+x^3\right)\left(-3x^2\right)}{\left(1-x^3\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{6x^2}{\left(1-x^3\right)^2} \\
&= \frac{2x^2}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{2x^2\left(1-x^3\right)}{\left(1-x^3\right)\left(1+x^3\right)} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{2x^2}{1-x^6} \cdot \frac{1+x^3}{1-x^3} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{2x^2}{1-x^6} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

Respuesta.- Primeramente simplifiquemos la expresión dada,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2-x^2)} \\ &= 1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Ahora, derivemos f de la siguiente manera,

$$f'(x) = -\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}2x}{1+x^2}\right] = -\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

14. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

Respuesta.- Sea $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, entonces

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1}{2g(x)} + \frac{1}{3\sqrt{x}g(x)}.$$

Luego usando $g(x)$ en la ecuación del enunciado tenemos,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{x+g(x)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+g(x)}}\left(1+g'(x)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+g(x)}}\left(1+\frac{1}{2g(x)}+\frac{1}{4\sqrt{x}g(x)}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{x}g(x)+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}g(x)\sqrt{x+g(x)}}. \end{aligned}$$

15. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = (1+x)(2+x^2)^{1/2}(3+x^3)^{1/3},\ x^3 \neq -3.$

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2+x^2\right)^{1/2}\left(3+x^3\right)^{1/3} + (1+x)\left[\frac{1}{2}\left(2+x^2\right)^{-1/2}\left(3+x^3\right)^{1/3} + \left(2+x^2\right)^{1/2}\frac{1}{3}\left(\right)^{-2/3}3x^2\right] \\
&= \left(\right)^{1/2}\left(3+x^3\right)^{1/3} + (1+x)\left(3+x^3\right)^{1/3}\frac{x}{\left(2+x^2\right)^{1/2}} + (1+x)\left(2+x^2\right)^{1/2}\frac{x^2}{\left(3+x^3\right)^{2/3}} \\
&= \frac{3x^5+2x^4+4x^3+8x^2+3x+6}{\left(2+x^2\right)^{1/2}\left(3+x^3\right)^{2/3}}.
\end{aligned}$$

16. Sean $f(x) = \dfrac{1}{1+1/x}$ si $x \neq 0$ y $g(x) = \dfrac{1}{1+1/f(x)}$. Calcular $f'(x)$ y $g'(x)$.

Respuesta.- Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+1/x} = \dfrac{x}{x+1}$, entonces aplicando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Luego sea $g(x) = \dfrac{1}{1+1/f(x)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{1+1/x}}} = \dfrac{1}{2+x^{-1}}$ entonces la derivada de g estará dada por,

$$g'(x) = \frac{x^{-2}}{\left(2+x^{-1}\right)^2} = \frac{1}{x^2\left(4+4x^{-1}+x^{-2}\right)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}.$$

17. La siguiente tabla de valores se calculó sus derivadas respectivas para f' y g'. Construir la correspondiente tabla para las dos funciones compuestas h y k dadas por $h(x) = f[g(x)]$, $k(x) = g[f(x)]$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	5	2	-5
1	3	-2	0	1
2	0	2	3	1
3	2	4	1	-6

Respuesta.-