1

Funciones inversas

Definición 1.1 Una función f es **uno-uno** (que se lee "uno a uno") si $f(a) \neq f(b)$ cuando $a \neq b$.

La condición $f(a) \neq f(b)$ para $a \neq b$ significa que ninguna línea *horizontal* corta a la gráfica de f en más de un punto.

Definición 1.2 Para cualquier función f, la **inversa** de f, denotada por f^{-1}, es el conjunto de todos los pares (a,b) para los que el par (b,a) pertenece a f.

Teorema 1.1 f^{-1} es una función si y sólo si f es uno-uno.

Demostración.- Supongamos primero que f es uno-uno. Sean (a,b) y (a,c) dos pares de f^{-1}. Entonces (b,a) y (c,a) pertenecen a f, de manera que $a = f(b)$ y $a = f(c)$; como f es uno-uno, $b = c$. Por lo tanto, f^{-1} es una función.
Recíprocamente, Supongamos que f^{-1} es una función. Si $f(b) = f(c)$, entonces f contiene a los pares $(b, f(b))$ y $(c, f(c)) = (c, f(b))$, y por lo tanto $(f(b), b)$ y $(f(b), c)$ pertenecen a f^{-1}. Como por hipótesis, f^{-1} es una función, $b = c$; es decir, f es uno-uno. ■

Es evidente por definición que

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Como (a,b) pertenece a f si y sólo si (b,a) pertenece a f^{-1}, deducimos que

$$b = f(a) \text{ significa lo mismo que } a = f^{-1}(b).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(b)$ es el *único* número a tal que $f(a) = b$.

El hecho de que $f^{-1}(x)$ sea el número y tal que $f(y) = x$, puede ser expresado de una forma mucho más compacta:

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = x \text{ para todo } x \text{ del dominio de } f^{-1}.$$

Además,

$$f^{-1}[f(x)] = x \text{ para todo } x \text{ del dominio de } f.$$

Estas dos importantes ecuaciones pueden escribirse como

$$f \circ f^{-1} = I,$$

$$f^{-1} \circ f = I.$$

Lema 1.1 Si f es creciente, f^{-1} también es creciente, y si f es decreciente, f^{-1} también es decreciente.

Demostración.- ■

Lema 1.2 f es creciente si y sólo si $-f$ es decreciente.

Demostración.- ■

Teorema 1.2 Si f es continua y uno-uno en un intervalo, entonces f es creciente o decreciente en dicho intervalo.

Demostración.- La demostración se da en tres etapas sencillas:

(1) Si $a < b < c$ son tres puntos del intervalo, entonces

(i) o bien $f(a) < f(b) < f(c)$

(ii) o $f(a) > f(b) > f(c)$.

Supongamos, por ejemplo, que $f(a) < f(c)$. Si $f(b) < f(a)$, entonces aplicando el Teorema del valor intermedio al intervalo $[b, c]$ se obtendrá un x con $b < x < c$ y $f(x) = f(a)$. Lo que contradice el hecho de que f sea uno-uno en $[a, c]$. Análogamente, $f(b) > f(c)$ conduciría también a una contradicción, de manera que $f(a) < f(b) < f(c)$. Naturalmente, el mismo argumento sirve para el caso $f(a) > f(c)$.

(2) Si $a < b < c < d$ son cuatro puntos del intervalo, entonces

(i) o bien $f(a) < f(b) < f(c) < f(d)$,

(ii) o $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.

■