CONVEXIDAD Y OPTIMIZACIÓN

ENTREGA 1

Christian Limbert Paredes Aguilera

Latex Source: `https://github.com/soyfode/matematicas/blob/master/investmat/src/convexOpt/tareas/entrega1.tex`

Ejercicio 1. Demuestra que la envoltura convexa de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es la intersección de todos los conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a S.

Demostración.- Sean $\text{co}(S)$[1] la envoltura convexa del conjunto S e I como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S. En si lo que vamos a querer demostrar es:

$$\text{co}(S) = I.$$

En otras palabras, queremos demostrar que

$$\text{co}(S) \subseteq I \quad \wedge \quad I \subseteq \text{co}(S).$$

Notemos que $\text{co}(S)$[1] es un conjunto convexo que contiene a S. Esto significa que cualquier otro conjunto convexo que contenga a S debe ser al menos tan grande como $\text{co}(S)$, y debe contener a $\text{co}(S)$. Por lo que cualquier conjunto convexo que contenga a S debe contener también a $\text{co}(S)$. De esta manera, I debe contener al menos a $\text{co}(S)$. Es decir,

$$\text{co}(S) \subseteq I.$$

Para demostrar la otra inclusión, supondremos que

$$\text{co}(S) \not\subseteq I.$$

De lo que notamos que existe al menos un punto $x \in C$ tal que $x \notin \text{co}(S)$. Por definición de envoltura[1], esta x no puede ser escrito como una combinación convexa[2] de puntos en S.

Luego, x esta en I e I es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S. Por lo que, x debe estar en cada conjunto convexo que contiene a S. Y dado que I es la intersección de todos los conjuntos convexos que contiene a S, se sigue que I es un conjunto convexo [3] que contiene a S.

---

[1]Se llama **envoltura convexa** de S al menor conjunto convexo que contienen a S, denotado por $\text{co}(S)$. También es equivalente a decir que: $\text{co}(S) = \{\text{Combinación convexa de puntos de} S\}$.

[2]Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Al vector $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$ se le llama **combinación convexa** de los puntos $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

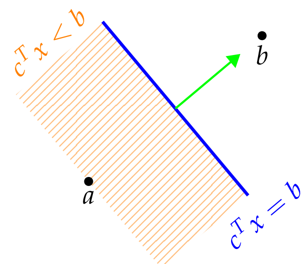
[3]**Demostrar que la intersección de conjuntos convexos es convexo.** Demostremos por contradicción. Sean C_1 y C_2 dos conjuntos convexos. Y sea $C = C_1 \cap C_2$. no convexo. Esto significa que existen x e y tales que $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in \mathbb{R}\} \not\subseteq C$. Supongamos ahora que x e y están en C. Cómo ambos C_1 y C_2 son convexos, el segmento definido debe estar en ambos conjuntos. Es decir, $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq C$. Lo que contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto, C es convexo.

Por el hecho de que $x \in I$, x debe ser una combinación convexa de puntos en S. Pero esto contradice el hecho de que x no puede ser escrito como una combinación convexa de puntos en S. Así concluimos que $I \subseteq \text{co}(S)$. Y por lo tanto,

$$\text{co}(S) = I. \blacksquare$$

Ejercicio 2. La descripción de semiespacios de Voronoi: Sean a y b dos puntos distintos de $\mathbb{R}^n$. Demuestra que el conjunto de todos los puntos que están más cerca de a (en la distancia Euclídea) que de b, i.e., $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2\}$, es un semiespacio. Descríbelo explícitamente como una desigualdad de la forma $c^T \cdot x \leq d$ (donde c es un vector columna de $\mathbb{R}^n$). Haz una representación gráfica de la situación.

Demostración.- Primero, representemos gráficamente la situación.



Ahora, con algunas manipulaciones algebraicas llegaremos a la desigualdad

$$c^T \cdot x \leq d.$$

Que es la forma estándar de un semiespacio[4].

(Por convención diremos que los vectores x, a y b son vectores columna en $\mathbb{R}^n$). Dado que tenemos la desigualdad en término de normas (términos no negativos). Podemos elevar al cuadrado sin cambiar el orden de los elementos. Es decir,

$$\|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2 \quad \Rightarrow \quad \|x - a\|_2^2 \leq \|x - b\|_2^2.$$

Luego, por la definición de norma Euclídea[5] y la propiedad conmutativa de producto interno, tenemos

$$\begin{array}{rcl} (x-a)^T(x-a) & \leq & (x-b)^T(x-b) \\ & \Downarrow & \\ x^Tx - 2a^Tx + a^Ta & \leq & x^Tx - 2b^Tx + b^Tb. \end{array}$$

Después, por la sustracción de vectores podemos simplificar la desigualdad como:

$$2b^Tx - 2a^Tx \leq b^Tb - a^Ta.$$

Que es equivalente a,

$$(b-a)^T x \leq \frac{1}{2}\left(b^Tb - a^Ta\right).$$

[4]Todo **hiperplano** $H = \{x : a^Tx = 0, a \neq 0\}$, define dos semiespacios $\{x \in \mathbb{R}^n : a^Tx \leq 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : a^Tx \geq 0\}$. Más generalmente, $\{x \in \mathbb{R}^n : a^Tx \leq b\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : a^Tx \geq b\}$. son las soluciones de dos sistemas lineales de desigualdades.

[5]$\|x\|_2^2 = x^Tx$.

Podemos definir $c = b - a$ y $d = \dfrac{1}{2}\left(b^T b - a^T a\right)$, para obtener la desigualdad

$$c^T x \leq d.$$

Por lo tanto, el conjunto de todos los puntos que están más cerca de a que de b en la distancia euclídea es un semiespacio. ■

Ejercicio 3. **Demuestra que si A y B son conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ entonces su intersección $A \cap B$ y su suma de Minkowsky $A + B$ son conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$.**

Demostración.- Primero, demostraremos que la intersección $A \cap B$ es convexa. Sabemos por hipótesis que A y B son conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$. Tomemos ahora, dos puntos cualesquiera $x, y \in A \cap B$. Dado que $x, y \in A$. Entonces, para todo $\lambda \in [0,1]$, se tiene:

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in A.^6$$

De manera similar, dado que $x, y \in B$. Entonces, por definición de convexidad para todo $\lambda \in [0,1]$, también tenemos:

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in B^6.$$

Por lo tanto,

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in A \cap B,$$

lo que implica que la intersección de conjuntos convexos es convexa. Esto también se puede demostrar con ([3]).

Ahora, demostraremos que si A y B son conjuntos convexos. Entonces, $A + B$ es convexo. Sean dos puntos cualesquiera $\alpha, \beta \in A + B$, por la suma de Minkowsky,[7], existen $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$ tales que

$$\alpha = a_1 + a_1 \quad \text{y} \quad \beta = a_2 + b_2.$$

La idea es mostrar que para cualquier $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda \alpha + (1-\lambda) \beta \in A + B.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda \alpha + (1-\lambda)\beta &= \lambda(a_1 + b_1) + (1-\lambda)(a_2 + b_2) \\ &= \left[\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2\right] + \left[\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2\right]. \end{aligned}$$

Como A y B son conjuntos convexos[6], sabemos que

$$\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 \in A$$

y

$$\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2 \in B.$$

Por lo tanto,

$$\lambda \alpha + (1-\lambda) \beta \in A + B.$$

Así, $A + B$ es convexo, como se quería demostrar. Esto completa la demostración. ■

[6]Un conjunto C en un espacio vectorial es **convexo**, si para cada par de puntos $x, y \in C$ y para cada número real λ en el intervalo $[0,1]$, se cumple que: $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$.

[7]La **suma de Minkowski** es la operación de conjuntos; es decir, si $A, E \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, $A = x_0 + E = \{x_0 + e : e \in E\}$ o $E = A - x_0 = \{a - x_0 : a \in A\}$.