Problemas resueltos: Probabilidad y estadística aplicaciones y métodos George Canavos

Christian Paredes Aguilera (Fode)

12/2/2022

Ejercicios Capítulo 3

```
#librerias
library(ggplot2)
```

3.1

Sea X una variable aleatoria que representa el número de llamadas que recibe un conmutador en un intervalo de cinco minutos y cuta función de probabilidad está dada por $p(x) = e^{-3}(3)^x/x!, x = 0, 1, 2, \ldots$.

a)

Determinar las probabilidades de que X sea igual a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7.

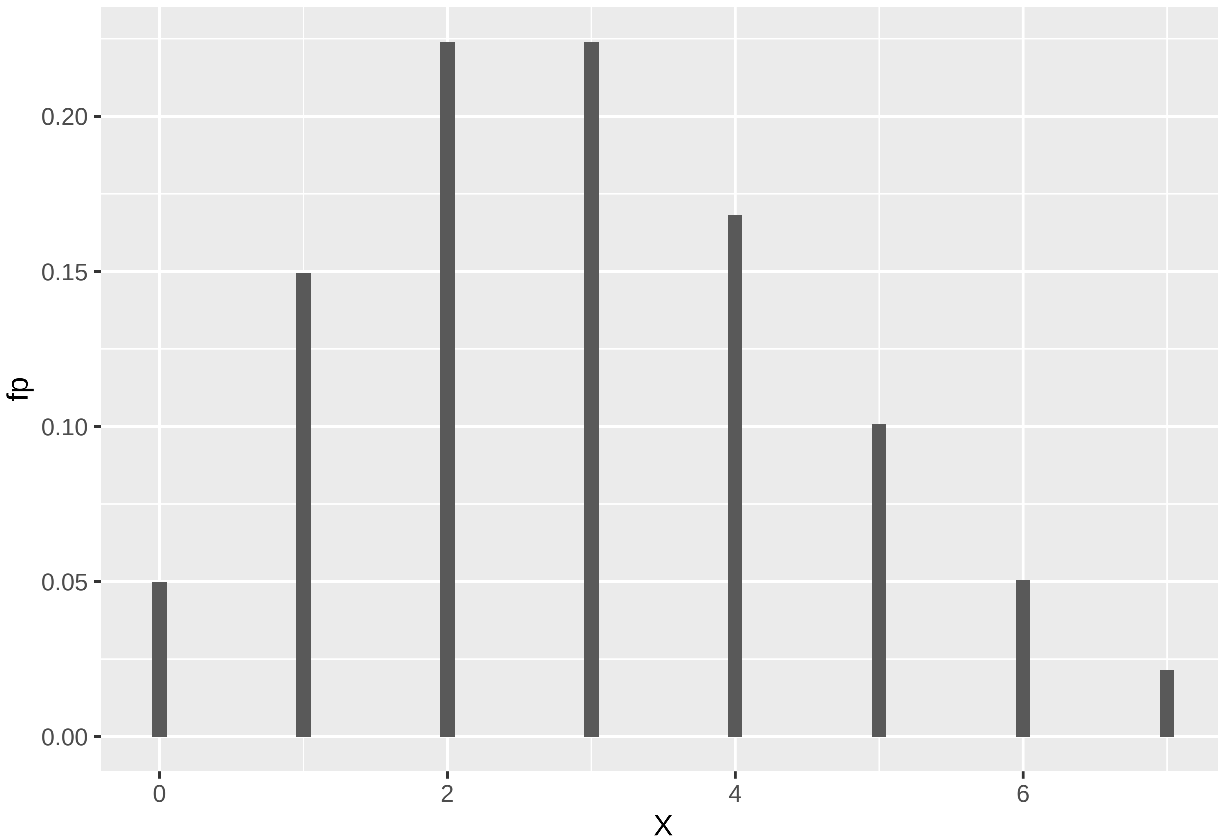
```
X <- c(0,1,2,3,4,5,6,7)
fp <- c()
for (x in 0:7) {
  fp <- c(fp, exp(-3)*3^x / factorial(x))
}
df <- data.frame(X,fp)
df
```

```
##   X         fp
## 1 0 0.04978707
## 2 1 0.14936121
## 3 2 0.22404181
## 4 3 0.22404181
## 5 4 0.16803136
## 6 5 0.10081881
## 7 6 0.05040941
## 8 7 0.02160403
```

b)

Graficar la función de probabilidad para estos valores de X

```
ggplot(data = df, mapping = aes(X,fp)) +
  geom_col(width = 0.1)
```



c)

Determinar la función de distribución acumulativa para estos valores de X

```
fda <- c()
sum <- 0
for (x in 0:7) {
  sum <- sum + (exp(-3)*3^x / factorial(x))
  fda <- c(fda,sum)
}
df <- data.frame(X,fp,fda)
print(fda)
```

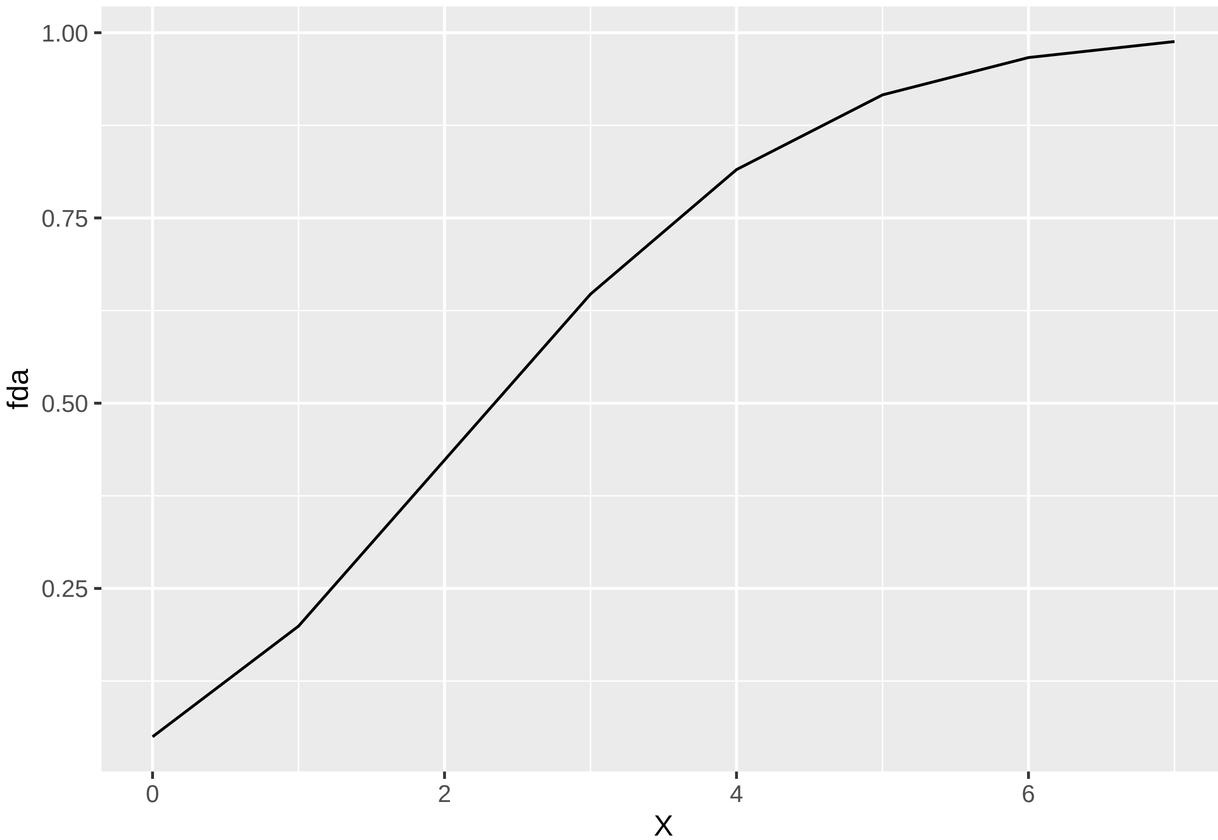
```
## [1] 0.04978707 0.19914827 0.42319008 0.64723189 0.81526324 0.91608206 0.96649146
## [8] 0.98809550
```

d)

Graficar la función de distribución acumulativa.

```
ggplot(data = df, mapping = aes(X,fda)) +
  geom_line(width = 2)
```

```
## Warning: Ignoring unknown parameters: width
```



3.2.

Sea X una variable aleatoria discreta. Determinar el valor de k para que la función $p(x) = k/x, x = 1, 2, 3, 4,$ sea la función de probabilidad de X. Determinar $P(1 \leq X \leq 3)$

Respuesta.- Por definición 3.4, sea

$$k + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{12}{25}$$

entonces la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X estará dada por:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{25} & si \quad x = 1 \\[2ex] \dfrac{6}{25} & si \quad x = 2 \\[2ex] \dfrac{4}{25} & si \quad x = 3 \\[2ex] \dfrac{3}{25} & si \quad x = 4 \end{cases}$$

Así, la probabilidad de $P(1 \leq X \leq 3)$ será,

$$P(1 \leq X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25} = 1.88$$

3.3.

Sea X una variable aleatoria continua.

a)

Determinar el valor de k, de manera tal que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 \leq x \leq 1, \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X.

Respuesta.- Según la definición 3.6 se tiene,

$$\int_{-x}^{x} kx^2 \, dx = \int_{-1}^{1} kx^2 \, dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

```r
integrate(function(x) 3/2*x^2, lower = -1, upper = 1)
```

```
## 1 with absolute error < 1.1e-14
```

b)

Determinar la función de distribución acumulativa de X y graficar $F(x)$.

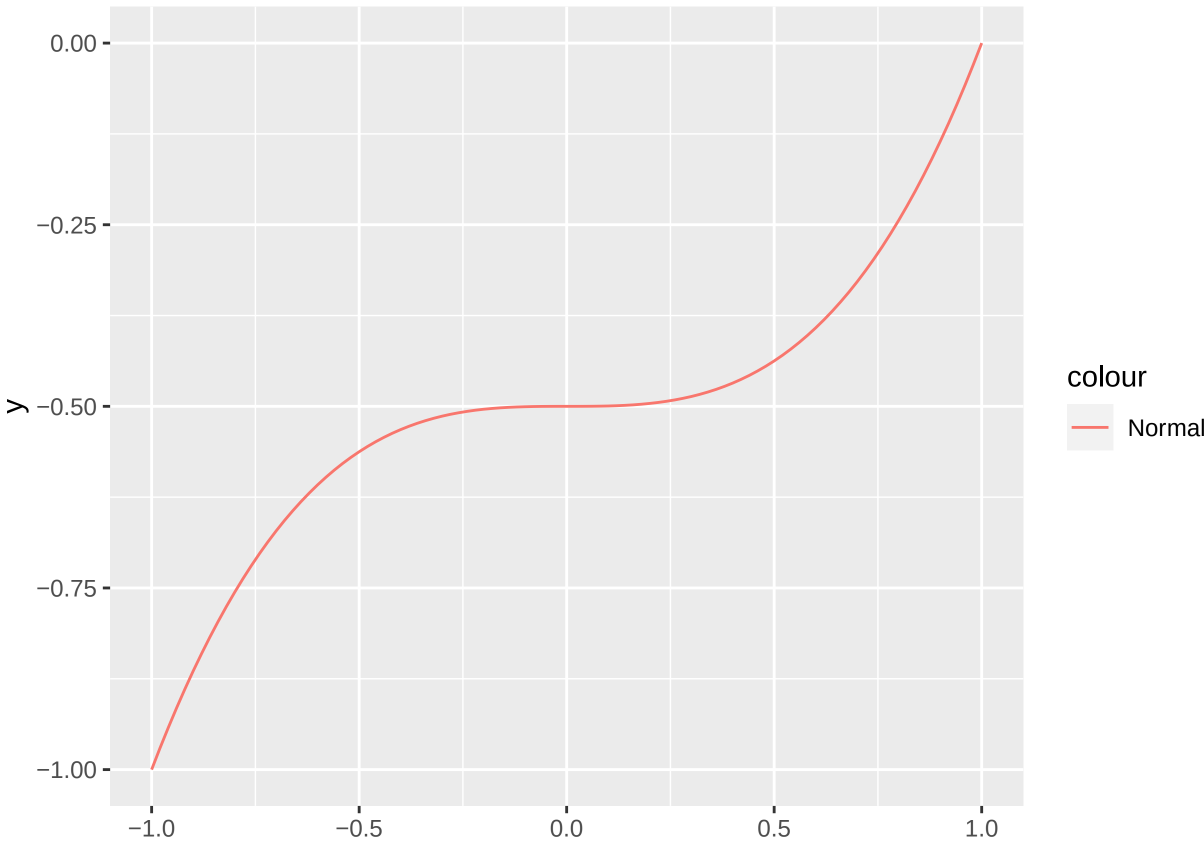
Respuesta.-

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^{x} \frac{3}{2}t^2 \, dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3+1}{3} = \frac{x^3+1}{2}$$

```r
funcdist <- function(x) (x^3+1)/2
```

$$P(X \leq x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{2} & si \quad x > 0 \\ \\ \qquad 0 & si \quad \text{Para cualquier otro valor} \end{cases}$$

```r
ggplot() +
  xlim(-1, 1) +
  geom_function(
    aes(color = "Normal"),
    fun =~ (.x^3-1)/2
    )
```



c)

Calcular $P(X \geq 1/2)$ y $P(-1/2 \leq X \leq 1/2)$.

Respuesta.-

$$P(X \geq 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - \frac{x^3 + 1}{2} = 1 - \frac{(1/2)^3 + 1}{2} = 1 - \frac{9/8}{2} = \frac{7}{16}$$

```
1-funcdist(1/2)
```

```
## [1] 0.4375
```

$$P(-1/2 \leq X \leq 1/2) = P(X \leq 1/2) - P(X \leq -1/2) = \frac{(1/2)^3}{2} - \frac{(-1/2)^3}{2} = \frac{1}{8}$$

```
# primera manera
funcdist(1/2) - funcdist(-1/2)
```

```
## [1] 0.125
```

```
# segunda manera
integrate(function(x) 3/2*x^2, lower = -1/2, upper = 1/2)
```

```
## 0.125 with absolute error < 1.4e-15
```

3.4.

Sea X una variable aleatoria continua.

a)

Determinar el valor de k para que la función

Respuesta.-

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/5} & x > 0 \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X

Respuesta.- Por la definición 3.6 se tiene y sabiendo que $x \leq 0$ es cero.

$$\int_{-\infty}^{\infty} k \cdot e^{-x/5}\, dx = \int_{0}^{\infty} k \cdot e^{-x/5}\, dx$$

Luego igualando a uno,

$$\int_{0}^{\infty} k \cdot e^{-x/5}\, dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{5}$$

```
integrate(function(x) 1/5 * exp(-x/5), lower = 0, upper = Inf)
```

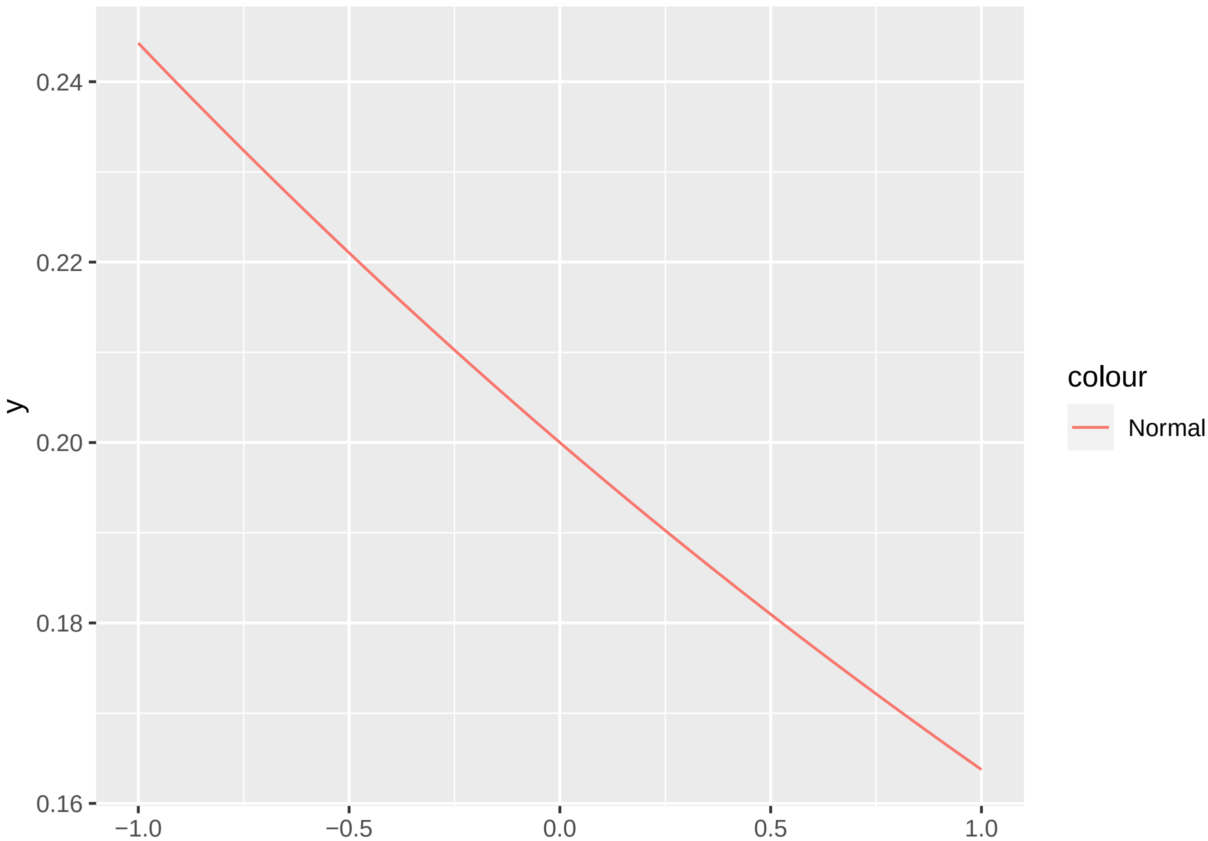
```
## 1 with absolute error < 2e-07
```

b)

Graficar $f(x)$

Respuesta.-

```
ggplot() +
   xlim(-1, 1) +
   geom_function(
     aes(color = "Normal"),
     fun =~ 1/5 * exp(-.x/5)
     )
```



c)

Calcular $P(X \leq 5)$ y $P(0 \leq X \leq 8)$.

Respuesta.-

$$P(X \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{5} e^{-x/5}\, dx = 1 - \frac{1}{e}$$

```
integrate(function(x) 1/5 * exp(-x/5), lower = 0, upper = 5)
```

```
## 0.6321206 with absolute error < 7e-15
```

$$P(0 \leq X \leq 8) = \int_0^8 \frac{1}{5} e^{-x/5}\, dx = 1 - \frac{1}{e^{8/5}}$$

```
integrate(function(x) 1/5 * exp(-x/5), lower = 0, upper = 8)
```

```
## 0.7981035 with absolute error < 8.9e-15
```

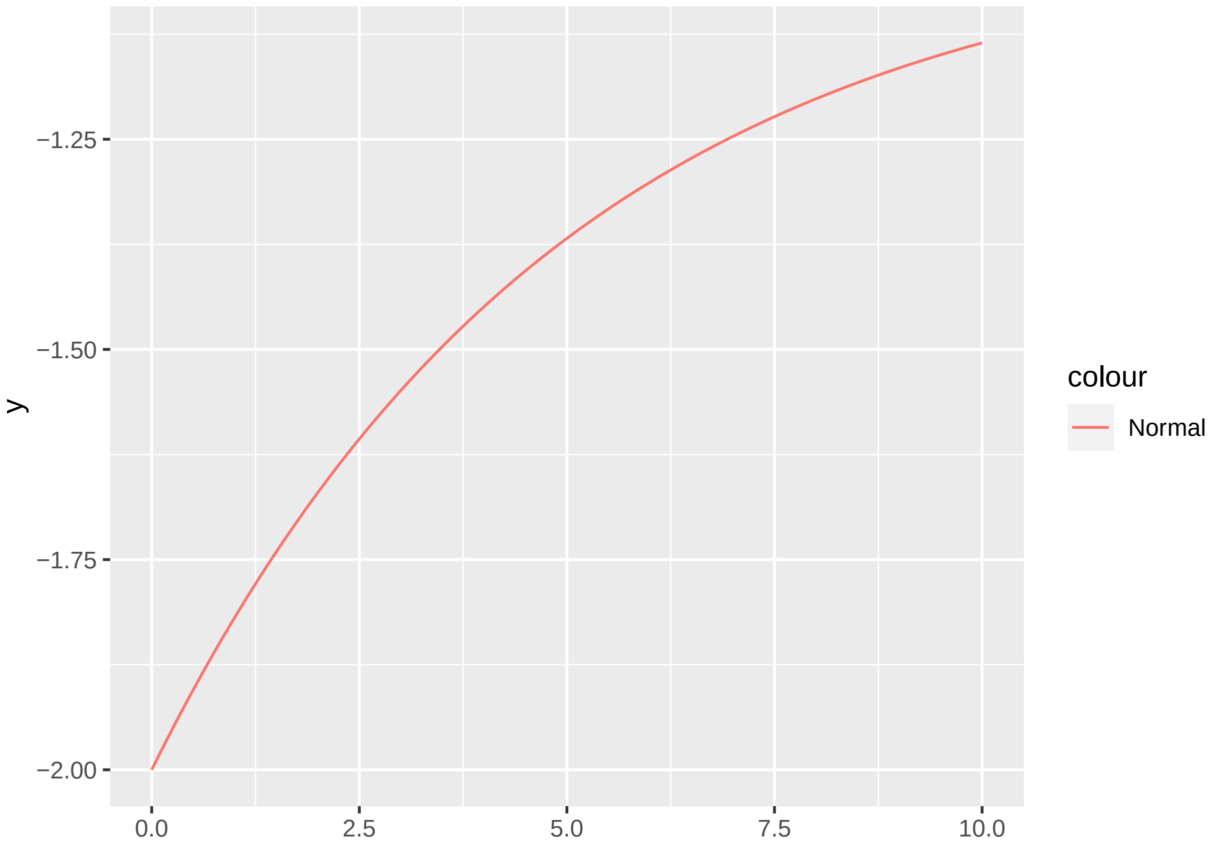
d)

Determinar $F(x)$ y graficarla.

Respuesta.- La función de distribución acumulativa esta dado por

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \frac{1}{5} \int_0^x e^{-t/5}\, dt = -e^{-x/5} - 1$$

```r
ggplot() +
  xlim(0, 10) +
  geom_function(
    aes(color = "Normal"),
    fun =~ -exp(-.x/5) - 1
    )
```



3.5

La duración en horas de un componente electrónico, es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulativa es $F(x) = 1 - e^{-x/100}, x > 0$

a)

Determinar la función de probabilidad de X.

Respuesta.-

$$F^{'}(x) = 1 - e^{-x/100} = \frac{1}{100}e^{-x/100}$$

b)

Determinar la probabilidad de que el componente trabaje más de 200 horas.

Respuesta.-

$$1 - (1 - exp(-200/100)) = 0.13533$$

```
1-(1-exp(-200/100))
```

```
## [1] 0.1353353
```

```
integrate(function(x) 1/100 * exp(-x/100), lower = 0, upper = 200)
```

```
## 0.8646647 with absolute error < 9.6e-15
```

3.6

La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria está dada por

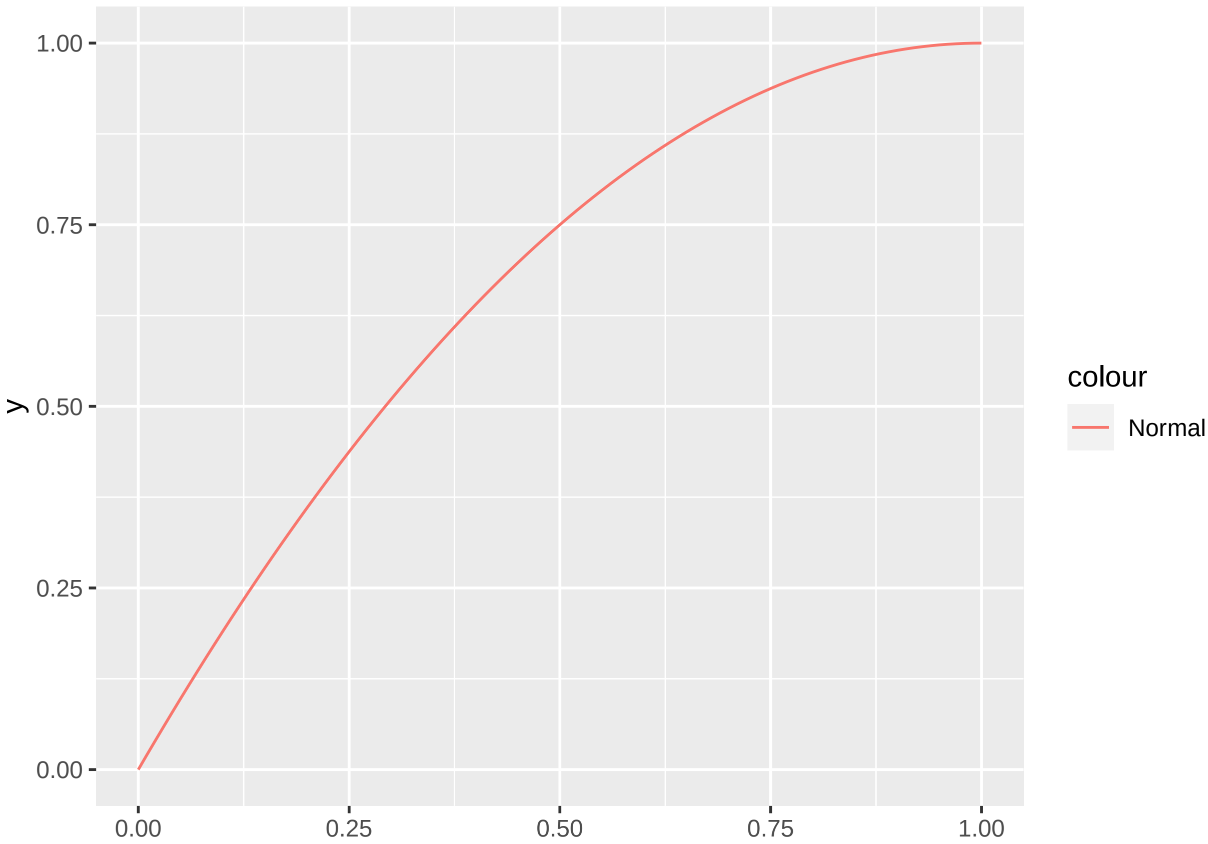
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

a)

Graficar $F(x)$.

Respuesta.-

```
# gráfico de F(x)
ggplot() +
   xlim(0, 1) +
   geom_function(
     aes(color = "Normal"),
     fun =~ 2*.x - .x^2,
     )
```



b)

Obtener $P(X < 1/2)$ y $P(X > 3/4)$.

Respuesta.-

$P(X < 1/2) = 2 \cdot 1/2 - (1/2)^2 = 3/4 = 0.75$

```
func <- function(x) 2*x - x^2
func(0.5)
```

```
## [1] 0.75
```

$1 - P(X > 3/4) = 1 - (2 \cdot 3/4 - (3/4)^2) = 1 - (-3/4)1 - (15/16) = 1/16 = 0.0625$

```
1-func(3/4)
```

```
## [1] 0.0625
```

c)

Determinar $f(x)$.

Respuesta.-

$F^{'}(x) = 2x - 2^2 = 2 - x$

3.7

Sea X una variable aleatoria que representa el número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora. Dada la siguiente información

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	0.05	0.10	0.10	0.10	0.20	0.25	0.10	0.05	0.05

encontrar $E(x)$ y $Var(X)$

Respuesta.-

```
x <- c(0,1,2,3,4,5,6,7,8)
px <- c(0.05,0.1,0.1,0.1,0.2,0.25,0.1,0.05,0.05)
```

$E(X) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot p(x) = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.1 + \ldots + 8 \cdot 0.05 = 4$

```
sum <- 0
for (i in 1:length(x)){
 sum <- sum + x[i]*px[i]
}
sum
```

```
## [1] 4
```

$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 p(x) = 0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.1 + \ldots + 8^2 \cdot 0.05 = 20.1$

```
sum2 <- 0
for (i in 1:length(x)){
 sum2 <- sum2 + x[i]^2 * px[i]
}
sum2
```

```
## [1] 20.1
```

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 20.1 - 4^2 = 4.1$

```
sum2 - sum^2
```

```
## [1] 4.1
```

3.8

Una compañía de seguros debe determinar la cuota anual a cobrarse por un seguro de 50 mil dolares para hombres cuya edad se encuentra entre los 30 y 35 años. Con base en las tablas actuariales el número de fallecimientos al año, para este grupo, es de 5 por cada mil. Si X es la variable aleatoria que representa la ganancia de la compañía de seguros, determinar el monto de la cuota anual para que la compañía no pierda, a pesar de tener un número grande de tales seguros.

Respuesta.- Calculamos el valor para un ganancia nula

$$E[X] = 0 = \frac{C \cdot 995}{1000} - \frac{50000 \cdot 5}{100} \Longrightarrow 995C = 250000 \Longrightarrow C = 251.26$$

3.9

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$$

Determinar:

a)

$E(X)$

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)\ dx = \int_0^1 2x - 2x^2\ dx = \frac{1}{3}$$

```
func <- function(x) x*2*(1-x)
integrate(func, lower = 0, upper = 1)
```

```
## 0.3333333 with absolute error < 3.7e-15
```

b)

$Var(X)$

Respuesta.-

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x)\ dx = \int_0^1 2x^2 - 2x^3\ dx = \frac{1}{6}$$

```
func <- function(x) x^2*2*(1-x)
integrate(func, lower = 0, upper = 1)
```

```
## 0.1666667 with absolute error < 1.9e-15
```

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

```
# varianza
1/6 - (1/3)^2
```

```
## [1] 0.05555556
```

3.10

Sea X una variable aleatoria que representa la magnitud de la desviación, a partir de una valor prescrito, del peso neto de ciertos recipientes, los que se llenan mediante una máquina. Función de densidad de una v.a. de X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a)

$E(X)$.

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{1}{10} x \cdot\ dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} x\ dx = 5$$

```r
func <- function(x) 1/10 * x
integrate(func, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 5 with absolute error < 5.6e-14
```

b)

$Var(X)$.

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{1}{10}x^2 \cdot \, dx = \frac{1}{10}\int_0^{10} x^2 \, dx = \frac{100}{3}$$

```r
func <- function(x) 1/10 * x^2
integrate(func, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 33.33333 with absolute error < 3.7e-13
```

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3} = 8.33333$$

```r
# varianza
100/3 - 5^2
```

```
## [1] 8.333333
```

c)

$\alpha_3(X)$.

Respuesta.-

α_3 también llamado coeficiente de asimetría estará dado por

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

de donde μ_3 será:

$$\mu_3 = E(X-5)^3 = \int_0^{10} \frac{1}{10} \cdot (x-5)^3 \, dx = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} (x^3 - 15x^2 + 75x - 125) \, dx = 0$$

para μ_2 tenemos

$$Var(X) = E(X-5)^2 = \int_0^{10} \frac{1}{10} \cdot (x-5)^2 \, dx = \frac{1}{10}\int_0^{10} (x^2 - 10x + 25) \, dx = \frac{25}{3}$$

Entonces

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{0}{\left(\frac{25}{3}\right)^{3/2}} = 0$$

```r
func <- function(x) 1/10 * (x-5)^3
func2 <- function(x) 1/10 * (x-5)^2
integrate(func, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 1.204593e-15 with absolute error < 3.5e-13
```

```r
integrate(func2, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 8.333333 with absolute error < 9.3e-14
```

Donde nos menciona que se tiene un coeficiente de asimetría simétrica.

d)

$\alpha_4(X)$.

Respuesta.-

Para α_4 como medida relativa de la curtosis tenemos

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

de donde tenemos μ_4 de la siguiente manera

$$\mu_4 = E(X-5)^4 = \int_0^{10} \frac{1}{10} \cdot (x-5)^4 \, dx = 125$$

```r
func4 <- function(x) 1/10 * (x-5)^4
integrate(func4, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 125 with absolute error < 1.4e-12
```

para luego:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{125}{\frac{25^2}{3^3}} = 5.4$$

Donde nos dice que la distribución presenta un pico relativamente alto

3.11

Supóngase que la duración en minutos de una llamada de negocios, es una variable aleatoria cuyo función de densidad de probabilidad está determinada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4} & x > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a)

$E(X)$.

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{4}e^{-x/4} \, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x/4} \, dx = 4$$

```r
func <- function(x) 1/4*x*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 4 with absolute error < 1.2e-05
```

b)

$Var(X)$.

Respuesta.-

$$Var(X) = E(X-4)^2 = \int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-x/4} \cdot (x-4)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-x/4} \cdot (x-4)^2 \, dx = 16$$

```
func <- function(x) 1/4*(x-4)^2*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 16 with absolute error < 0.00051
```

c)

$\alpha_3(x)$.

Respuesta.-

$$\mu_3 = E(X-4)^3 = \frac{1}{4} \int_0^\infty (x-4)^3 \cdot e^{-x/4} \, dx = 128$$

```
func <- function(x) 1/4*(x-4)^3*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 128 with absolute error < 0.00029
```

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{128}{16^{3/2}} = 2$$

```
128/(16^(3/2))
```

```
## [1] 2
```

De donde podemos mencionar que se tiene una asimetría positiva.

d)

$\alpha_4(X)$.

Respuesta.-

$$\mu_4 = E(X-4)^4 = \frac{1}{4} \int_0^\infty (x-4)^4 \cdot e^{-x/4} \, dx = 2304$$

```
func <- function(x) 1/4*(x-4)^4*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 2304 with absolute error < 0.0025
```

así,

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{2304}{16^2} = 9$$

```
2304/16^2
```

```
## [1] 9
```

e)

Defiérase al ejercicio 3.10. Basandose en sus respuestas a, a d del problema 3.11, compare las dos distribuciones de probabilidades. ¿Cuál muestra la mayor dispersión relativa?.

Respuesta.-

Del ejercico 3.10

$$V_X = \frac{E(X)}{Var(X)} = \frac{5}{8.33333}$$

```
5/8.33333
```

```
## [1] 0.6000002
```

Del ejercio 3.11

$$V_Y = \frac{E(X)}{Var(X)} = \frac{4}{16}$$

```
4/16
```

```
## [1] 0.25
```

De donde V_Y muestra mayor dispersión relativa con respecto a la media que la distribución correspondiente a X

3.12

La calificación promedio en una prueba de estadística fue de 62.5 con una desviación estándar de 10. El profesor sospecha que el examen fue difícil. De acuerdo con lo anterior, desea ajustar las calificaciones de manera que el promedio sea de 70 y la desviación estándar de 8. ¿Qué ajuste del tipo $aX + b$, debe utilizar?.

Respuesta.- Sea

$$E(X) = 62.5, \qquad y \qquad \sqrt{Var(X)} = 10 \;\Rightarrow\; Var(X) = 100$$

y

$$E(aX + b) = 70 \qquad y \qquad Var(aX + b) = 80$$

entonces

$$a^2 Var(X) = 80 \implies a = 2\sqrt{\frac{1}{5}}$$

y

$$aE(X) + b = 70 \implies b = 14.098$$

Entonces la respuesta estará dada por

$$aX + b = 2\sqrt{\frac{1}{5}}X + \left(70 - 125\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

```
EX <- function(x) 2*(1/5)^(1/2)*x + 70-125*(1/5)^(1/2)
EX(62.5)
```

```
## [1] 70
```

```r
VarX <- function(varx) (2*(1/5)^(1/2))^2 * varx
VarX(100)
```

```
## [1] 80
```

3.13

Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2.

a)

Evaluar $E(X-c)^2$ en términos de μ y σ^2 en donde c es una constante.

Respuesta.- Sea $E(X)=\mu$ y $Var(X)=\sigma^2$ entonces,

$$E(X-c)^2 = E(X^2-2cX+c^2) = E(X^2)-2cE(X)+c^2 = E(X^2)-E^2(X)+E(X)\cdot E(X)-2cE(X)+c^2 =$$

$$Var(X)+(E(X)-c)^2 = \sigma^2+(\mu-c)^2$$

b)

¿Para qué valor de c es $E(X-c)^2$ mínimo?.

Respuesta.- Cuando $c=\mu$

3.14

Con respecto al ejercicio 3.11, demostrar que la variable aleatoria $Y=(X-4)/4$ tiene media cero y desviación estándar uno. Demostrar que los factores de forma, primero y segundo, de la distribución de Y son los mismos de la distribución de X.

Respuesta.-

$$E(Y) = E\left(\frac{X-4}{4}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{x-4}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{-x/4}\,dx = \frac{1}{16}\int_0^\infty (x-4)\cdot e^{-x/4}\,dx = 0$$

```r
fx = function(x) ((x-4)/4) * 1/4 * exp( -x/4 )
integrate(fx,lower = 0, upper = Inf)
```

```
## -5.632717e-13 with absolute error < 3e-06
```

$$Var(Y) = Var\left(\frac{X-4}{4}\right)^2 = \int_0^\infty \left(\frac{x-4}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{-x/4}\,dx = \frac{1}{64}\int_0^\infty (x-4)^2\cdot e^{-x/4}\,dx = 1$$

```r
fx = function(x) 1/64 * (x-4)^2 * exp(-x/4)
integrate(fx,lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 1 with absolute error < 3.2e-05
```

3.15

Considérese la función de densidad de probabilidad de X dada en el ejercicio 3.9. Determinar la desviación media de X y compararla con su desviación estándar.

Respuesta.-

$$E\left|X-\frac{1}{3}\right| = \int_0^1 \left|x-\frac{1}{3}\right| \cdot 2(1-x)\ \ dx = \int_0^{1/3} \left(\frac{1}{3}-x\right) * 2(1-x)\ dx + \int_{1/3}^1 \left(x-\frac{1}{3}\right) * 2(1-x)\ dx = 0.1975309$$

```
f <- function(x) abs(x-1/3)*2*(1-x)
integrate(f,lower = 0,upper = 1)
```

```
## 0.1975309 with absolute error < 5e-06
```

La desviación estandar del ejercicio 3.9 viene dada por $\sqrt{\dfrac{1}{18}} = 0.2357$

Luego comparando con la desviación media vemos que se tiene poca diferencia.

3.16

Considérese la función de densidad de probabilidad de X dada en el ejercicio 3.10. Determinar la desviación media de X y compararla con su desviación estándar.

Respuesta.-

$$E|X-\mu| = \int_0^{10} |x-5| \cdot \frac{1}{10}\ dx = \frac{1}{10}\left[\int_0^5 (5-x)\ dx + \int_5^{10} (x-5)\ dx\right] = \frac{1}{10}\left(5x\Big|_0^5 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 + \frac{x^2}{2}\Big|_5^{10} - 5x\Big|_5^{10}\right) =$$

$$\frac{1}{10}\left(25 - \frac{25}{2} + \frac{75}{2} - 25\right) = \frac{5}{2}$$

```
f <- function(x) abs(x-5)*1/10
integrate(f,lower = 0,upper = 10)
```

```
## 2.5 with absolute error < 2.8e-14
```

```
# desviación típica del ejercicio 10
(25/3)^(1/2)
```

```
## [1] 2.886751
```

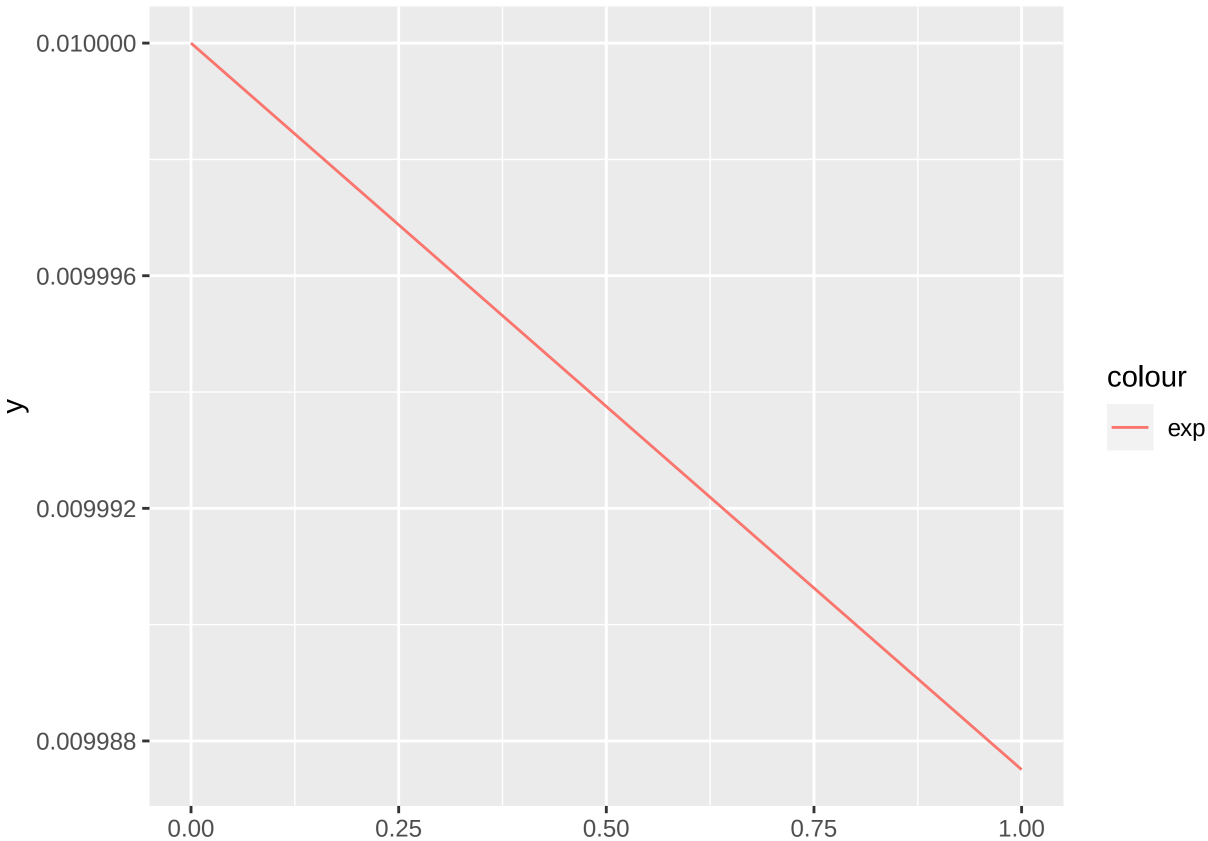
De lo que concluimos que entre la desviación media de X y la desviación estándar de ejercicio 10 se tiene una diferencia de 0.33.

3.17

Supóngase que el ingreso semanal de un asesor profesional es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está determinada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{800}e^{-x/800} & x > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

```
ggplot() +
  xlim(0, 1) +
  geom_function(
    aes(color = "exp"),
    fun =~ 1/100*exp(-.x/800)
    )
```



a)

Determinar los ingresos medios y medianos

Respuesta.- La media es:

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{800} \cdot e^{-x/800}\, dx = \frac{1}{800} \int_0^\infty x \cdot e^{-x/800} = 800$$

```
integrate(function(x) 1/800*x*exp(-x/800), lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 800 with absolute error < 0.034
```

La mediana es:

$$F(x_{0.5}) = P(X \leq x_{0.5}) = \frac{1}{800} \int_0^{x_{0.5}} e^{(-x/800)}\, dx = 0.5 \implies -e^{-x_{0.5}/800} + 1 = 0.5 \Longrightarrow x_{0.5} = 554.5177$$

```
-800*log(0.5)
```

```
## [1] 554.5177
```

b)

Determinar el recorrido intercuartil.

Respuesta.- Recorrido intercuartil

$$F(x_{0.25}) = P(X \leq x_{0.25}) = \frac{1}{800}\int_0^{x_{0.25}} e^{(-x/800)}\, dx = 0.25 \implies -e^{-x_{0.25}/800} + 1 = 0.25 \Longrightarrow x_{0.25}$$

$$\Longrightarrow x_{0.25} = -800 \cdot ln(0.25) = 1109.03548$$

$$F(x_{0.75}) = -800 \cdot ln(0.75) = 230.14565$$

por lo que

$$x_{0.75} - x_{0.25} = |230.14565 - 1109.03548| = 878.8898$$

c)

Determinar el recorrido interdecil.

Respuesta.- Recorrido interdecil

$$F(x_{0.1}) = P(X \leq x_{0.1}) = \frac{1}{800}\int_0^{x_{0.1}} e^{(-x/800)}\, dx = 0.1 \implies -e^{-x_{0.1}/800} + 1 = 0.1$$

$$\Longrightarrow x_{0.1} \Longrightarrow x_{0.1} = -800 \cdot ln(0.1) = 1842.068$$

$$F(x_{0.9}) = -800 \cdot ln(0.9) = 84.2884$$

$$x_{0.9} - x_{0.1} = |84.2884 - 1842.068| = 1757.78$$

d)

Determinar la probabilidad de que el ingreso semanal exceda al ingreso promedio.

Respuesta.-

$$P(X \geq 800) = 1 - P(X \leq 800) = 1 - \frac{1}{800}\int_0^{800} e^{-x/800}\, dx = 1 - 0.3678794 = 0.3679$$

```
integrate(function(x) 1/800*exp(-x/800), lower = 0, upper = 800)
```

```
## 0.6321206 with absolute error < 7e-15
```

```
1 - 0.6321206
```

```
## [1] 0.3678794
```

3.18

Comprobar que la función generadora de momentos central de una variable aleatoria X, genera todos los momentos centrales de X.

Respuesta.-

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^r m_{X-\mu}(t)}{dt^r}\right|_{t=\mu} &= \left.\frac{d^r}{dt^r}E[e^{t(X-\mu)}]\right|_{t=0} \\
&= E\left\{\frac{d^r}{dt^r}\left[e^{t(X-\mu)}\right]\right\} \\
&= \left.E\left[(X-\mu)^r e^{t(X-\mu)}\right]\right|_{t=0} \\
&= E[X-\mu]^r \\
&= u_r
\end{aligned}
$$

3.19

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está determinada:

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{16}xe^{-x/4} & x > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}
$$

a)

Determinar la función generadora de momentos de X.

Respuesta.-

$$
m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^\infty e^{tx}\cdot\frac{1}{16}\cdot x\cdot e^{-\frac{x}{4}}\,dx = \frac{1}{16}\int_0^\infty x\cdot e^{\frac{x(4t-1)}{4}}\,dx = (1-4t)^{-2}
$$

b)

Utilizar la función generadora de momentos para encontrar la media y la varianza de X.

Respuesta.-

$$
\left.\frac{dm_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\cdot(1-4t)^{-2}\right|_{t=0} = \left.\frac{8}{(1-4x)^3}\right|_{t=0} = 8 = E(X)
$$

$$
\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}(1-4x)^{-2} = \left.\frac{d}{dt}\frac{8}{(1-4x)^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{96}{(-4x+1)^4}\right|_{t=0} = 96 = E(X^2)
$$

$$
Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 96 - 8^2 = 32
$$

3.20

Considérese la función de densidad de probabilidad dada en el ejercicio 3.11. Encontrar la función generadora de momentos y utilizaría para comprobar los valores de la media y la varianza, determinados en el ejercicio 3.11.

Respuesta.-

$$m_X(t) = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{x}{4}}\ dx$$

3.21

Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(x) = 0, 1, 2, \ldots, n$, y sean a, b y c constantes. Demostrar que $E(c) = c$, $E(aX + b) = aE(X) + b$, y $E[g(X) + h(X)] = E[g(X) + E[g(X)]]$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones de X.

Respuesta.- $E(c) = \sum\limits_x c \cdot p(x) = c\sum\limits_x p(x) = c$

$E(cX + b) = \sum\limits_x (cx + b)p(x) = c\sum\limits_x x \cdot p(x) + b\sum\limits_x p(x) = cE(x) + b$

$E[g(X) + h(X)] = \sum\limits_x [g(x) + h(x)]p(x) + \sum\limits_x g(x)p(x) + \sum\limits_x h(x)p(x) = E[g(X)] + E[h(X)]$

3.22

Para la variable aleatoria discreta del ejercicio anterior, utilizar las definiciones 3.8 y 3.9 para demostrar que $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Respuesta.-

$$Var(X) = (X - \mu)^2 = \sum_x (x - \mu)^2 p(x) = \sum_x x^2 p(x) - 2\mu\sum_x xp(x) + \mu^2\sum_x p(x) =$$

$$E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$