1

Funciones continuas

1.2 Definición de límite de una función

La continuidad existe si existe continuidad por la izquierda y por la derecha.

Definición 1.1 (Definición de entorno de un punto)**.** Cualquier intervalo abierto que contenga un punto p como su punto medio se denomina entorno de p.

Notación.- Designemos los entornos con $N(p), N_1(p), N_2(p)$, etc. Puesto que un entorno $N(p)$ es un intervalo abierto simétrico respecto a p, consta de todos los números reales x que satisfagan $p - r < x < p + r$ para un cierto $r > 0$. El número positivo r se llama radio del entorno. En lugar de $N(p)$ ponemos $N(p; r)$ si deseamos especificar su radio. Las desigualdades $p - r < x < p + r$ son equivalentes a $-r < x - p < r$, y a $|x - p| < r$. Así pues, $N(p; r)$ consta de todos los puntos x , cuya distancia a p es menor que r.
En la definición que sigue suponemos que A es un número real y que f es una función definida en un cierto entorno de un punto p (excepción hecha acaso del mismo p). La función puede estar definida en p pero esto no interviene en la definición.

Definición 1.2 (Definición de límite de una función)**.** El simbolismo

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \qquad [\text{o } f(x) \to A \quad x \to p]$$

significa que para todo entorno $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x \neq p$$

El entorno $N_1(A)$ se cita en primer lugar, e indica cuán próximo queremos que sea $f(x)$ a su límite A. El segundo entorno, $N_2(p)$, nos indica lo próximo que debe estar x de p para que $f(x)$ sea interior al primer entorno $N_1(p)$. El entorno $N_2(p)$ dependerá del $N_1(A)$ elegido. Un entorno $N_2(p)$ que sirva para un $N_1(A)$ determinado servirá también, naturalmente, para cualquier $N_1(A)$ mayor, pero puede no ser útil para todo $N_1(A)$ más pequeño.
Decir que $f(x) \in N_1(A)$ es equivalente a la desigualdad $|f(x) - A| < \epsilon$ y poner que $x \in N_2(p)$, $x \neq p$ es lo mismo que escribir $0 < |x - p| < \delta$. Por lo tanto, la definición de límite puede también expresarse así:

El símbolo $\lim_{x \to p} f(x) = A$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta.$$

Observamos que las tres desigualdades,

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \lim_{x\to p}(f(x) - A) = 0, \lim_{x\to p}[f(x) - A] = 0$$

Son equivalentes. También son equivalentes las desigualdades,

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \lim_{h\to 0} f(p+h) = A.$$

Todas estas se derivan de la definición de límite.

Definición 1.3 (Límites laterales)**.** Los límites laterales pueden definirse en forma parecida. Por ejemplo, si $f(x) \to A$ cuando $x \to p$ con valores mayores que p, decimos que A es el límite por la derecha de f en p, indicamos esto poniendo

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = A.$$

En la terminología de los entornos esto significa que para todo entorno $N_1(A)$, existe algún entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \quad \text{y} \quad x > p.$$

Los límites a la izquierda, que indican poniendo $x \to p^-$, se definen del mismo modo restringiendo x a valores menores que p.

1.3 Definición de continuidad de una función

Definición 1.4 (Definición de continuidad de una función en un punto)**.** Se dice que una función f es continua en un punto p si

a) f está definida en p, y

b) $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Esta definición también puede formularse con entornos. Una función f es continua en p si para todo entorno $N_1[f(p)]$ existe un entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \in N_2(p).$$

Puesto que $f(p)$ pertenece siempre a $N_1[f(p)]$, no se precisa la condición $x \neq p$.

Especificando los radios de los entornos, la definición de continuidad puede darse como sigue:

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \text{ siempre que } |x - p| < \delta.$$

1.4 Teoremas fundamentales sobre límites. Otros ejemplos de funciones continuas.

Teorema 1.1. Sean f y g dos funciones tales que

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to p} g(x) = B$$

Se tiene entonces

(i) $\lim_{x\to p}[f(x)+g(x)] = A+B,$

(ii) $\lim_{x\to p}[f(x)-g(x)] = A-B,$

(iii) $\lim_{x\to p} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B,$

(iv) $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \qquad \text{si } B \neq 0.$

Las demostraciones estarán dadas en la sección 3.5.

Observemos primero que las afirmaciones del teorema pueden escribirse en forma un poco distinta. Por ejemplo, (i) puede ponerse como sigue:

$$\lim_{x\to p}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x).$$

Es costumbre indicar por $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y f/g las funciones cuyos valores para cada x son:

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad y \quad f(x)/g(x).$$

Teorema 1.2. Sean f y g dos funciones continuas en un punto p. La suma $f+g$, la diferencia $f-g$, el producto $f\cdot g$ y $g(p)\neq 0$ siempre que $g(p)\neq 0$ son también continuas en p.

Demostración.- Puesto que f y g son continuas en p, se tiene $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ y $\lim_{x\to p} g(x) = g(p)$. Aplicando las propiedades para límites, dadas en el teorema 3.1, cuando $A = f(p)$ y $B = g(p)$, se deduce el teorema 3.2.

El teorema que sigue demuestra que si una función g está intercalada entre otras dos funciones que tienen el mismo límite cuando $x\to p$, g tiene también este límite cuando $x\to p$.

Teorema 1.3 (Principio de intercalación)**.** Supongamos que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ para todo $x\neq p$ en un cierto entorno $N(p)$. Supongamos también que

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} h(x) = a.$$

Se tiene entonces $\lim_{x\to p} g(x) = a$.

Demostración.- Sean $G(x) = g(x)-f(x)$, y $H(x) = h(x)-f(x)$. Las desigualdades $f\leq g\leq h$ implican $0\leq g-f\leq h-f$ o

$$0\leq G(x)\leq H(x)$$

para todo $x \neq p$ en $N(p)$. Para demostrar el teorema, basta probar que $G(x) \to 0$ cuando $x \to p$, dado que $H(x) \to 0$ cuando $x \to p$.
Sea $N_1(0)$ un entorno cualquier de 0. Puesto que $H(x) \to 0$ cuando $x \to p$, existe un entorno $N_2(p)$ tal que

$$H(x) \in N_1(0) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x \neq p.$$

Podemos suponer que $N_2(p) \subseteq N(p)$. Entonces la desigualdad $0 \leq G \leq H$ establece que $G(x)$ no está más lejos de 0 si x está en $N_2(p), x \neq p$. Por consiguiente $G(x) \in N_1(0)$ para tal valor x y por tanto $G(x) \to 0$ cuando $x \to p$. La misma demostración es válida si todos los límites son límites a un lado.

Teorema 1.4 (Continuidad de las integrales indefinidas)**.** Supongamos que f es integrable en $[a,x]$ para todo x en $[a,b]$, y sea

$$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Entonces la integral indefinida A es continua en cada punto de $[a,b]$ (En los extremos del intervalo tenemos continuidad a un lado.)

Demostración.- Elijamos p en $[a,b]$. Hay que demostrar que $A(x) \to A(p)$ cuando $x \to p$. Tenemos

$$A(x) - A(p) = \int_p^x f(t)\, dt$$

Puesto que f está acotada en $[a,b]$, existe una constante $M > 0$ tal que $-M \leq f(t) \leq M$ para t en $[a,b]$. Si $x > p$, integramos esas desigualdades en el intervalo $[p,x]$ obteniendo

$$\int_p^x -M\, dt \leq \int_p^x f(t)\, dt \leq \int_p^x M\, dt \quad \Longrightarrow \quad -M(x-p) \leq A(x) - A(p) \leq M(x-p).$$

Si $x < p$, obtenemos las mismas desigualdades con $x - p$ sustituida por $p - x$. Por consiguiente, en uno u otro caso podemos hacer que $x \to p$ y aplicar el principio de intercalación encontrando que $A(x) \to A(p)$. Esto prueba el teorema. Si p es un extremo de $[a,b]$, tenemos que hacer que $x \to p$ desde el interior del intervalo, con lo que los límites son a un lado.

1.5 Demostraciones de los teoremas fundamentales sobre límites

Demostración de (i) y (ii). Puesto que las dos igualdades:

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \;\text{ y }\; \lim_{x \to p} [f(x) - A] = 0$$

son completamente equivalentes, y como se tiene

$$f(x) + g(x) - (A + B) = [f(x) - A] + [g(x) - B],$$

basta demostrar las igualdades (i) y (ii) del teorema cuando los límites de A y B son ambos cero.
Supóngase pues, que $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Se demostrará en primer lugar que $f(x) + g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Para ello se tiene que probar que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) + g(x)| < \epsilon \;\text{ siempre que }\; 0 < |x - p| < \delta.$$

Sea ϵ dado. Puesto que $f(x) \to 0$ cuando $x \to p$, exista un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \;\text{ siempre que }\; 0 < |x - p| < \delta_1.$$

Análogamente, puesto que $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que:

$$|g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ siempre que } 0 < |x-p| < \delta_2.$$

Si se indica por δ el menor de los dos números δ_1 y δ_2, entonces, ambas igualdades últimas son válidas si $0 < |x-p| < \delta$, y por tanto, en virtud de la desigualdad triangular, se tiene:

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Esto demuestra la proposición dada que, a su vez, demuestra (i). La demostración de (ii) es completamente análoga, salvo que en el último paso se emplea la desigualdad $|f(x)-g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$.

Demostración de (iii). Supóngase que se ha demostrado (iii) en el caso particular en que uno de los límites es 0. Entonces el caso general resulta fácilmente de este caso particular, como se deduce de la siguiente igualdad:

$$f(x)g(x) - AB = f(x)[g(x)-B] + B[f(x)-A].$$

El caso particular implica que cada término del segundo miembro tienda a 0 cuando $x \to p$ y en virtud de la propiedad (i) la suma de los dos términos tiende también a 0. Por tanto, basta sólo probar (iii) en el caso en que uno de los límites, por ejemplo B, sea 0.
Supóngase que $f(x) \to A$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Se trata de probar que $f(x) \cdot g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Para ello se ha de ver que dado un número positivo ϵ, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)g(x)| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x-p| < \delta.$$

Puesto que $f(x) \to A$ cuando $x \to p$, existe un δ_1 tal que

$$|f(x)-A| < 1 \text{ siempre que } 0 < |x-p| < \delta_1.$$

Para tal x, tenemos $|f(x)-A+A| \le |f(x)-A| + |A| < 1 + |A|$, y por tanto

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < (1+|A|)|g(x)|.$$

Ya que $f(x) \to 0$ cuando $x \to p$, para todo $\epsilon > 0$ existe un δ_2 tal que

$$|g(x)| < \frac{\epsilon}{1+|A|} \text{ siempre que } 0 < |x-p| < \delta_2.$$

Por consiguiente, si llamamos δ al menor de los dos números δ_1 y δ_2 entonces las dos igualdades son válidas siempre que $0 < |x-p| < \delta$ y para tal valor de x deducimos

$$|f(x)g(x)| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x-p| < \delta.$$

Lo que completa la demostración.

Demostración de (iv). Puesto que el cociente $f(x)/g(x)$ es el producto de $f(x)/B$ por $B/g(x)$ basta demostrar que $B/g(x) \to 1$ cuando $x \to p$ y luego aplicar (iii). Sea $h(x) = g(x)/B$, por lo que $h(x) \to 1$ cuando $x \to p$, y se quiere demostrar que $1/h(x)$ cuando $x \to p$.
Dado $\epsilon > 0$, se trata de ver si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{h(x)}\right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x-p| < \delta.$$

La diferencia se puede escribir como sigue:

$$\left|\frac{1}{h(x)} - 1\right| = \frac{|h(x)-1|}{|g(x)|}.$$

Puesto que $g(x) \to 1$ cuando $x \to p$ se puede elegir un $\delta > 0$ tal que ambas desigualdades:

$$|h(x)-1| < \frac{\delta}{2} \quad \text{y} \quad |h(x)-1| < \frac{1}{2}.$$

se satisfagan siempre que $0 < |x - p| < \delta$. La segunda de estas desigualdades implica $h(x) > \dfrac{1}{2}$ y por tanto $1/|h(x)| = 1/h(x) < 2$ para tales valores de x. Empleando este resultado en junto con la primera desigualdad, obtenemos

$$\left|\frac{1}{h(x)} - 1\right| = \frac{|h(x) - 1|}{|g(x)|}.$$

Esto completa la demostración de (iv).

1.6 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 10, calcular los límites y explicar cuáles han sido los teoremas utilizados en cada caso.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2}$.

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} 1}{\lim\limits_{x\to 2} x^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (iv) y por el hecho de que el límite de una constante es la misma constante.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{25x^3 + 2}{75x^7 - 2}$

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{25x^3 + 2}{75x^7 - 2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 25x^3 + \lim\limits_{x\to 0} 2}{\lim\limits_{x\to 0} 75x^7 - \lim\limits_{x\to 0} 2} = \frac{0+2}{0-2} = -1.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 = 4.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (1).

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} 2x - \lim_{x\to 1} 1 = 1.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (1).

5. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(t+h)^2 - t^2}{h}$.

Respuesta.-

$$\lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2t + h) = \lim_{h\to 0} 2t + \lim_{h\to 0} h = 2t.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (1).

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \qquad a \neq 0.$

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-a}{x+a} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} a}{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} a} = -1.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

7. $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \qquad a \neq 0.$

Respuesta.-

$$\lim_{a\to 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = \lim_{a\to 0} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{a\to 0} \frac{x-a}{x+a} = \frac{\lim\limits_{a\to 0} x - \lim\limits_{a\to 0} a}{\lim\limits_{a\to 0} x + \lim\limits_{a\to 0} a} = 1.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

8. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \qquad a \neq 0.$

Respuesta.-

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x+a} = \frac{\lim\limits_{x\to a} x - \lim\limits_{x\to a} a}{\lim\limits_{x\to a} x + \lim\limits_{x\to a} a} = 0$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

9. $\lim\limits_{t\to 0} \tan t$.

Respuesta.-

$$\lim_{t\to 0} \tan t = 0.$$

10. $\lim\limits_{t\to 0}(\operatorname{sen} 2t + t^2\cos 5t)$.

Respuesta.-
$$\lim_{t\to 0}(\operatorname{sen} 2t + t^2\cos 5t) = \lim_{t\to 0}\operatorname{sen} 2t + \lim_{t\to 0} t^2 \cdot \lim_{t\to 0}\cos 5t = 0.$$
Por el teorema 3.1 incisos (i) y (iii).

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$.

Respuesta.- Ya que $|x| = x$ para $x > 0$, por lo tanto tenemos
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$.

Respuesta.- Ya que $|x| = -x$ para $x < 0$, por lo tanto tenemos
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1.$$

13. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Respuesta.- Para $x > 0$ tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = x$ entonces,
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Respuesta.- Para $x < 0$ tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ entonces,
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1.$$

Utilizar la relación $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x$ para establecer las igualdades de los Ejercicios del 15 al 20.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$.

Respuesta.- Sea $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x\cos x$ entonces
$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{x} = 2\cos x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

de donde

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\cos x\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 2\cdot\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2.$$

16. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} x} = 2.$

Respuesta.- Ya que $\tan 2x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$ entonces,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos 2x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{\cos 2x} = 2.$$

17. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = 5.$

Respuesta.- Primeramente tenemos,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}.$$

Luego usando la formula $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x+x)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x\cos x + \operatorname{sen} x\cos 4x}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{sen} 2x\cos 2x\cos x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cos 4x\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}2\cos 2x\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cos 4x\right)
\end{aligned}$$

pero sabemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$, así

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}2\cos 2x\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cos 4x\right) = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 5.$$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{x} = 2.$

Respuesta.- Sabemos por ejercicios anteriores que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x+x)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x\cos x+\operatorname{sen} x\cos 2x}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\cos x+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cos 2x\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}=2+1=3$$

Así, por el teorema 3.1(ii),

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x-\operatorname{sen} 3x}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}-\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}\\
&= 5-3\\
&= 2.
\end{aligned}$$

19. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a}=\cos a.$

Respuesta.- Por el teorema 2.3 (g) sabemos que

$$\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b=2\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

de donde

$$\lim_{x\to a}\frac{sen x-\operatorname{sen} a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2}\right)$$

pero,

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}=1,\qquad \text{ya que, } y=\frac{x-a}{2}\ \text{ e } y\to 0\ \text{ como } x\to a.$$

así,

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2}=\lim_{x\to a}\frac{x+a}{2}=\cos a.$$

20. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$

Respuesta.- Sea,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

Luego, ya que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \implies 1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

21. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Demostración.- Multiplicando por el límite dado por $1+\sqrt{1-x^2}$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

22. Una función f está definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \le c,\\ ax+b & \text{si} \quad x > c,\end{cases}$$

siendo a, b, c constantes. Si b y c están dados, hallar todos los valores de a (si existe alguno) para los que f es continua en el punto $x = c$.

Respuesta.- Por definición de continuidad, de una función en un punto, conocemos que f es continua en $x = c$ el cual significa que f está definida en c y $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.
Ya que $\operatorname{sen} x$ y $ax + b$ son definidos para todo $x \in \mathbb{R}$, conocemos que f es conocida en $x = c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Entonces podemos encontrar valores de a tal que

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Por la definición de f, sabemos que

$$f(c) = \operatorname{sen} c$$

Entonces, evaluamos el limite en $x \to c$ a través de valores mayores que c (ya que el límite en $x \to c$ a través de valores menos que c es $f(c)$ ya que $\operatorname{sen} x$ es una función continua y para valores menores que c, $f(x) = \operatorname{sen} x$),

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+} ax + b = ac + b$$

y por lo tanto, para que f sea continua en c debemos tener,

$$ac + b = \operatorname{sen} c \implies b = 0, \text{ y } a \text{ es arbitrario.}$$

23. Resolver el ejercicio 22 si f se define de este modo:

$$f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \leq c, \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x > c, \end{cases}$$

Respuesta.- Por la definición de continuidad, conocemos que f es continua en $x = c$ el cual significa que $f(c)$ es definida y $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Ya que $2\cos x$ y $ax^2 + b$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, conocemos que f es definida para todo $c \in \mathbb{R}$. Entonces para demostrar que es continua debemos demostrar

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

De la definición de f sabemos

$$f(c) = 2\cos c.$$

Entonces, tomando el límite como x se aproxima a c por la derecha (ya que $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$, $2\cos x$ es continua y $f(x) = 2\cos x$ cuando x se aproxima a c por la izquierda),

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+} ax^2 + b = ac^2 + b.$$

Así, debemos tener

$$ac^2 + b = 2\cos c \implies a = \frac{2\cos - b}{c^2} \text{ si } c \neq 0.$$

Si $c = 0$ entonces,

$$ac^2 + b = 2\cos c \implies b = 2 \text{ y } a \text{ es arbitrario.}$$

24. ¿En qué punto son funciones continuas la tangente y la cotangente?.

Respuesta.- Sea

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ son continuas para todo los número reales de donde sabemos por el teorema 3.2 que $\tan x$ es continua en todas partes, por lo que $\cos x$ no es cero. Probamos que

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

por lo que $\tan x$ es continuo para

$$\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}\}$$

Similarmente

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

y por el teorema 3.2 tenemos que $\cot x$ es continua en todo lugar donde $\operatorname{sen} x$ no sea cero. Luego probamos que,

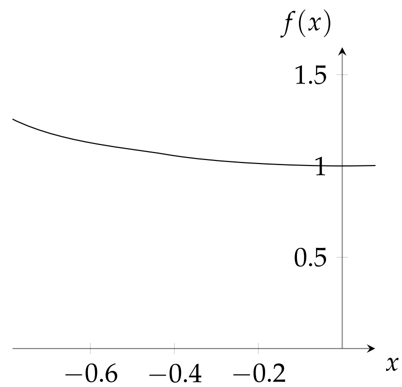
$$\operatorname{sen} x = 0 \iff x = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $\cot x$ es continua para

$$\{x \in \mathbb{R} | x \neq n\pi, \ n \in mathbbR\}.$$

25. Sea $f(x) = (\tan x/x)$ si $x \neq 0$. Esbozar la gráfica de f correspondientes a los intervalos semiabiertos $[-\frac{1}{4}\pi, 0]$. ¿Qué le ocurre a $f(x)$ cuando $x \to 0$? ¿Puede definirse $f(0)$ de modo que f se haga continua en 0?.

Respuesta.-



Tenemos que,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\cos x\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\cos x\\
&= 1.
\end{aligned}$$

ya que $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ no está definida en cero entonces no es una función continua. Sin embargo, dado que el límite existe, podríamos redefinir f por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \quad 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

26. Este ejercicio ofrece otra demostración de la continuidad de las funciones seno y coseno. a) La desigualdad $|\operatorname{sen} x| < |x|$, válida para $0 < |x| < \frac{1}{2}\pi$, fue demostrada en el ejercicio 34 de la sección 2.8. Utilizarla para demostrar que la función seno es continua en 0. b) Hacer uso de la parte a) y de la identidad $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ para demostrar la continuidad del coseno en 0.

Demostración.- Demostraremos primeramente que $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$.
Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\operatorname{sen} x| < \epsilon$ entonces $|x| < \delta$. Sea $\delta = \epsilon$, se tiene

$$|\operatorname{sen} x| < |x|\delta = \epsilon, \qquad \text{de donde } 0 < |x| < \delta$$

así, $\operatorname{sen} x$ es continua en 0.
Por último usando la identidad dada, tenemos que

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \implies \cos x 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2},$$

por lo tanto

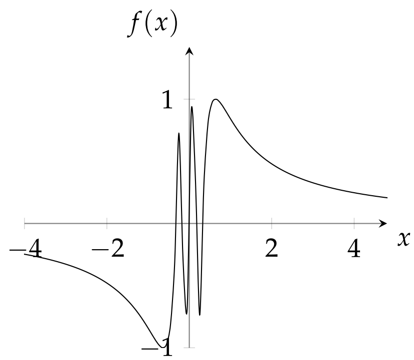
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cos x &= \lim_{x\to 0}\left(1-2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{x}{2}\right)\\ &= 1-2\lim_{x\to 0}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\mathrm{sen}\,\frac{2}{x}\right)\right]\\ &= 1\\ &= \cos 0.\end{aligned}$$

así, el coseno es continuo en 0.

27. La figura siguiente muestra una proporción de la gráfica de la función f definida como sigue:

$$f(x)=\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\quad \text{si}\quad x\neq 0$$

Para $x = 1/(n\pi)$, siendo n entero, tenemos $\mathrm{sen}(1/x) = \mathrm{sen}(n\pi) = 0$. Entre dos de esos puntos, la función asciende hasta 1 y baja otra vez hasta 0 o bien desciende a -1 y vuelve a subir a 0. Por consiguiente, entre cualquiera de esos puntos y el origen, la curva presenta infinitas oscilaciones. Esto sugiere que los valores de la función no tienden a ningún valor fijo cuando $x \to 0$. Demostrar que no existe ningún valor real A tal que $f(x) \to A$ cuando $x \to 0$. Esto demuestra que no es posible definir $f(0)$ de manera que f sea continua en 0.



Demostración.- Supongamos que existe algún $A\in\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = A$. De la definición de límites esto significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-A|<\epsilon \text{ siempre que } 0<|x|<\delta$$

Primero, afirmamos que para cualquiera de estos A debemos tener $|A| \leq 1$. Debe ser así porque si $|A| > 1$ entonces $|A| - 1 > 0$, de donde podríamos elegir ϵ tal que $0 < \epsilon < (|A| - 1)$. Pero se tiene $|f(x)| \leq 1$ para todo x, por consiguiente

$$|f(x)-A| = |A-f(x)| \geq |A|-|f(x)| \geq |A|-1>\epsilon$$

Esto contradice nuestra elección de ϵ, por lo que $|A|$ deber ser menor o igual que 1.
Luego supongamos $|A| \leq 1$ y elegimos $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$. Para obtener nuestra contradicción debemos demostrar que no existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-A|<\frac{1}{2} \text{ siempre que } 0<|x|<\delta$$

Por la propiedad de Arquímedes de los números reales sabemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, existe un entero positivo tal que n con $n = 1$ $(modk\ 4)$. Pero,

$$0 < \frac{2}{n\pi} < |x| \implies 0 < \frac{2}{(n+2)\pi} < |x|$$

Entonces, por la definición de f y ya que $n = 1$ $(mod\ 4)$ y $n + 2 = 3 \pmod 4$, tenemos

$$f\left(\frac{2}{n\pi}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 \qquad f\left[\frac{2}{(n+2)\pi}\right] = \text{sen}\left[\frac{(n+2)\pi}{2}\right] = -1$$

pero,

$$\left| f\left(\frac{n\pi}{2}\right) - A \right| \implies |1 - A| < \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} < A \leq 1$$

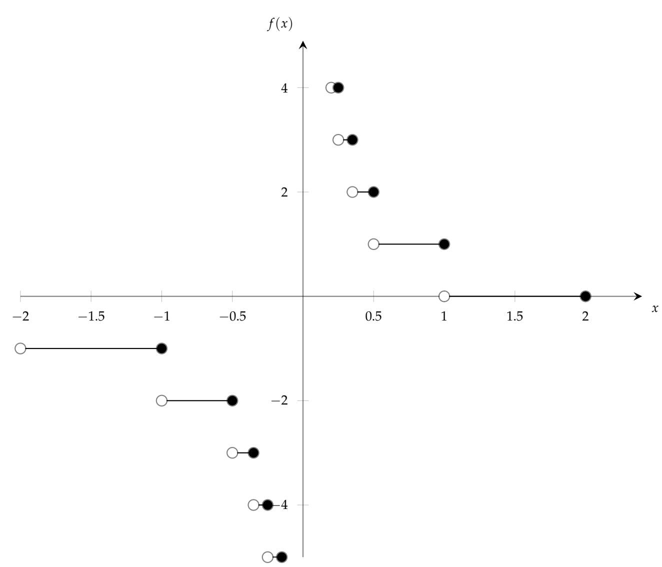
Además,

$$\left| f\left[\frac{(n+2)\pi}{2}\right] - A \right| = |-1 - A| > \frac{1}{2}.$$

Esto contradice que si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$ entonces para cada $\epsilon > 0$ tenemos $|f(x) - A| < \epsilon$ para todo $0 < |x| < \delta$. En otras palabras, encontramos un ϵ mayor que 0 tal que no importa tan pequeño que elijamos δ existe un x tal que $|x|$ es menor que δ, pero $|f(x) - A|$ es mayor que ϵ. Esto contradice la definición de $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$. Por lo tanto no puede haber tal núemero en $A \in \mathbb{R}$.

28. Para $x \neq 0$, sea $f(x) = [1/x]$, designado por $[t]$ el mayor entero $\leq t$. Trazar la gráfica de f para los intervalos $[-2, -\frac{1}{5}]$ y $[\frac{1}{5}, 2]$. ¿Qué le ocurre a $f(x)$ cuando $x \to 0$ tomando valores positivos? ¿y tomando valores negativos? ¿Puede definirse $f(0)$ para que f sea continuo en 0?

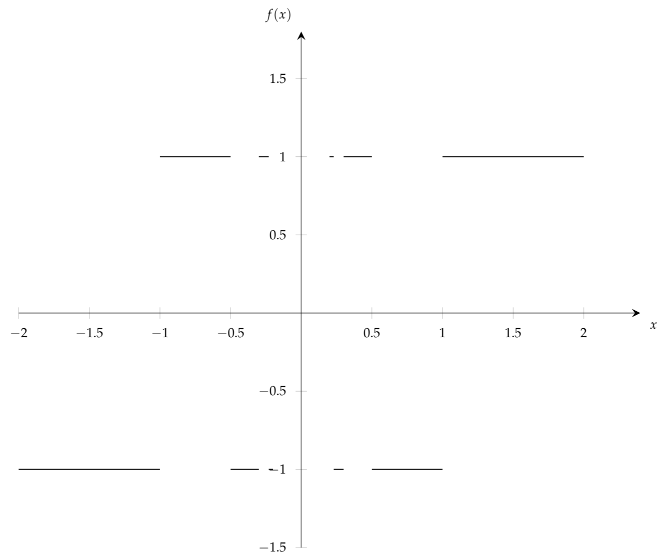
Respuesta.-



Como $x \to 0^+$, $f(x)$ toma valores positivos arbitrariamente grandes.
Como $x \to 0^-$, $f(x)$ toma valores negativos arbitrariamente grandes.
No hay manera de definir $f(0)$ para que f sea continuo en 0.

29. Hacer lo mismo que en el ejercicio 28, cuando $f(x) = (-1)^{[1/x]}$ para $x \neq 0$.

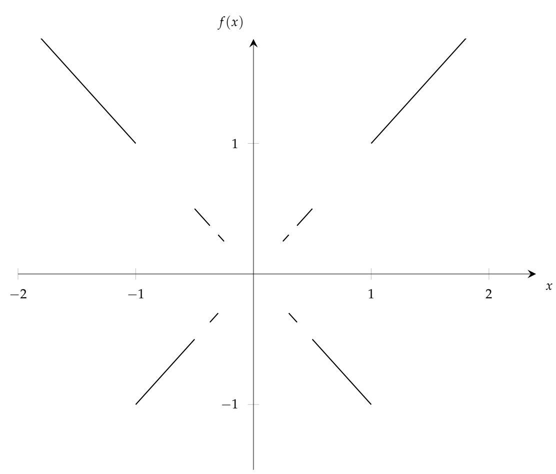
Respuesta.-



Como $x \to 0^+$, $f(x)$ alterna entre 1 y -1.
Como $x \to 0^-$, $f(x)$ alterna entre 1 y -1.
No hay forma de definir $f(0)$ para que f sea continuo en 0, ya que $f(x)$ tomará ambos valores 1 y -1 no importa cuán pequeño elijamos nuestro $\delta > 0$.

30. Los mismo que en el ejercicio 28, cuando $f(x) = x(-1)^{[1/x]}$ para $x \neq 0$.

Respuesta.-



Como $x \to 0^+$, $f(x) \to 0$.
Como $x \to 0^-$, $f(x) \to 0$.
Si definimos $f(0) = 0$ entonces f es continuo en 0.

31. Dar un ejemplo de una función continua en un punto de un intervalo y discontinua en los demás puntos del intervalo, o probar que no existe una tal función.

Demostración.-

32. Sea $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$. Definir $f(0)$ de manera que f sea continua en 0.

Demostración.-

33. Sea f una función tal que $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$ para todos los valores u y v de un intervalo $[a, b]$.

a) Probar que f es continua en cada punto de $[a, b]$.

Demostración.-

b) Suponiendo que f sea integrable en $[a, b]$, demostrar que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - (b-a)f(a) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}$$

Demostración.-

c) Más general. Demostrar que para cualquier c de $[a, b]$, se tiene

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - (b-a)f(c) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}$$

Demostración.-