

Límites y continuidad

Definición 1.1 (La razón promedio de cambio) de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ sabiendo que $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

1.1. Ejercicios

Razones promedio de cambio

En los ejercicios 1 a 6, determine la razón promedio de cambio de la función en el intervalo o intervalos dados.

1. $f(x) = x^3 + 1$

a) $[2, 3]$

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3^3 + 1) - (2^3 + 1)}{3 - 2} = 19$

b) $[-1, 1]$

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1^3 + 1) - ((-1)^3 + 1)}{1 - (-1)} = 1$

2. $g(x) = x^2 - 2x$

a) $[1, 3]$

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3^2 - 2 \cdot 3) - (1^2 - 2 \cdot 1)}{3 - 1} = 2$

b) $[-2, 4]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(4^2 - 2 \cdot 4) - ((-2)^2 - 2 \cdot (-2))}{4 - (-2)} = 0$$

3. $h(t) = \cot t$ (a) $[\pi/4, 3\pi/4]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(\pi/4) - \cot(3\pi/4)}{\pi/4 - 3\pi/4} = \frac{1 + 1}{\frac{\pi - 3\pi}{4}} = \frac{8}{-2\pi}$$

(b) $[\pi/6, \pi/2]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(\pi/6) - \cot(\pi/2)}{\pi/6 - \pi/2} = \frac{-3\sqrt{3}}{\pi}$$

4. $g(t) = 2 + \cos t$ (a) $[0, \pi]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{2 + \cos \pi - (2 + \cos 0)}{\pi - 0} = -\frac{2}{\pi}$$

(b) $[-\pi, \pi]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{2 + \cos \pi - (2 - \cos \pi)}{\pi + \pi} = \frac{3 - 3}{2\pi} = 0$$

5. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$; $[0, 2]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 1 - (\sqrt{4 \cdot 0 + 1} + 1)}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$$

6. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - (1^3 - 4^2 + 5)}{2 - 1} = 0$$

Pendiente de una curva en un punto

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar a) la pendiente de la curva en el punto P dado, y b) la ecuación de la recta tangente en P

7.