Problemas resueltos: Probabilidad y estadística aplicaciones y métodos George Canavos

Por: Christian Paredes Aguilera (Fode)

12/2/2022

```r
#librerias
library(ggplot2)
source("funciones_chapter4.R")
```

Ejercicios Capítulo 3

3.1

Sea X una variable aleatoria que representa el número de llamadas que recibe un conmutador en un intervalo de cinco minutos y cuta función de probabilidad está dada por $p(x) = e^{-3}(3)^x/x!, x = 0, 1, 2, \dots$.

a)

Determinar las probabilidades de que X sea igual a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7.

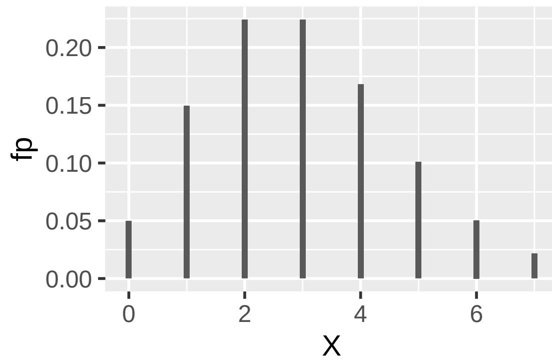
```r
X <- c(0,1,2,3,4,5,6,7)
fp <- c()
for (x in 0:7) {
  fp <- c(fp, exp(-3)*3^x / factorial(x))
}
df <- data.frame(X,fp)
df
```

```
##   X         fp
## 1 0 0.04978707
## 2 1 0.14936121
## 3 2 0.22404181
## 4 3 0.22404181
## 5 4 0.16803136
## 6 5 0.10081881
## 7 6 0.05040941
## 8 7 0.02160403
```

b)

Graficar la función de probabilidad para estos valores de X

```r
ggplot(data = df, mapping = aes(X,fp)) +
  geom_col(width = 0.1)
```



c)

Determinar la función de distribución acumulativa para estos valores de X

```
fda <- c()
sum <- 0
for (x in 0:7) {
  sum <- sum + (exp(-3)*3^x / factorial(x))
  fda <- c(fda,sum)
}
df <- data.frame(X,fp,fda)
print(fda)
```

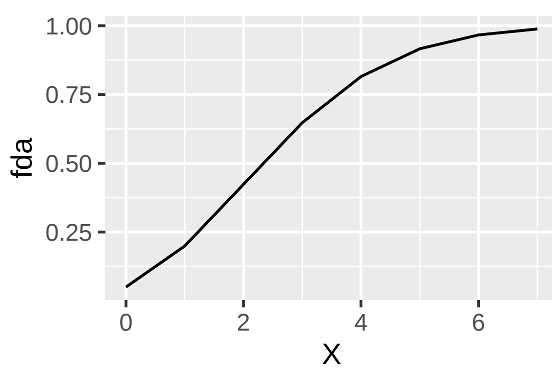
```
## [1] 0.04978707 0.19914827 0.42319008 0.64723189 0.81526324 0.91608206 0.96649146
## [8] 0.98809550
```

d)

Graficar la función de distribución acumulativa.

```
ggplot(data = df, mapping = aes(X,fda)) +
  geom_line(width = 2)
```

```
## Warning: Ignoring unknown parameters: width
```



3.2.

Sea X una variable aleatoria discreta. Determinar el valor de k para que la función $p(x) = k/x, x = 1, 2, 3, 4$, sea la función de probabilidad de X. Determinar $P(1 \leq X \leq 3)$

Respuesta.- Por definición 3.4, sea

$$k + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{12}{25}$$

entonces la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X estará dada por:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{25} & si \quad x = 1 \\ \\ \dfrac{6}{25} & si \quad x = 2 \\ \\ \dfrac{4}{25} & si \quad x = 3 \\ \\ \dfrac{3}{25} & si \quad x = 4 \end{cases}$$

Así, la probabilidad de $P(1 \leq X \leq 3)$ será,

$$P(1 \leq X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25} = 1.88$$

3.3.

Sea X una variable aleatoria continua.

a)

Determinar el valor de k, de manera tal que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 \leq x \leq 1, \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X.

Respuesta.- Según la definición 3.6 se tiene,

$$\int_{-x}^{x} kx^2 \, dx = \int_{-1}^{1} kx^2 \, dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

```
integrate(function(x) 3/2*x^2, lower = -1, upper = 1)
```

```
## 1 with absolute error < 1.1e-14
```

b)

Determinar la función de distribución acumulativa de X y graficar $F(x)$.

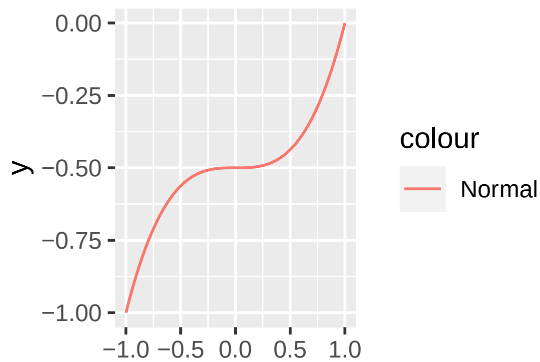
Respuesta.-

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^{x} \frac{3}{2} t^2 \, dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3 + 1}{3} = \frac{x^3 + 1}{2}$$

```
funcdist <- function(x) (x^3+1)/2
```

$$P(X \leq x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{2} & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & si \quad \text{Para cualquier otro valor} \end{cases}$$

```
ggplot() +
   xlim(-1, 1) +
   geom_function(
     aes(color = "Normal"),
     fun =~ (.x^3-1)/2
     )
```



c)

Calcular $P(X \geq 1/2)$ y $P(-1/2 \leq X \leq 1/2)$.

Respuesta.-

$$P(X \geq 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - \frac{x^3+1}{2} = 1 - \frac{(1/2)^3+1}{2} = 1 - \frac{9/8}{2} = \frac{7}{16}$$

```
1-funcdist(1/2)
```

```
## [1] 0.4375
```

$$P(-1/2 \leq X \leq 1/2) = P(X \leq 1/2) - P(X \leq -1/2) = \frac{(1/2)^3}{2} - \frac{(-1/2)^3}{2} = \frac{1}{8}$$

```
# primera manera
funcdist(1/2) - funcdist(-1/2)
```

```
## [1] 0.125
```

```
# segunda manera
integrate(function(x) 3/2*x^2, lower = -1/2, upper = 1/2)
```

```
## 0.125 with absolute error < 1.4e-15
```

3.4.

Sea X una variable aleatoria continua.

a)

Determinar el valor de k para que la función

Respuesta.-

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X

Respuesta.- Por la definición 3.6 se tiene y sabiendo que $x \leq 0$ es cero.

$$\int_{-\infty}^{\infty} k \cdot e^{-x/5}\, dx = \int_{0}^{\infty} k \cdot e^{-x/5}\, dx$$

Luego igualando a uno,

$$\int_{0}^{\infty} k \cdot e^{-x/5}\, dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{5}$$

```
integrate(function(x) 1/5 * exp(-x/5), lower = 0, upper = Inf)
```

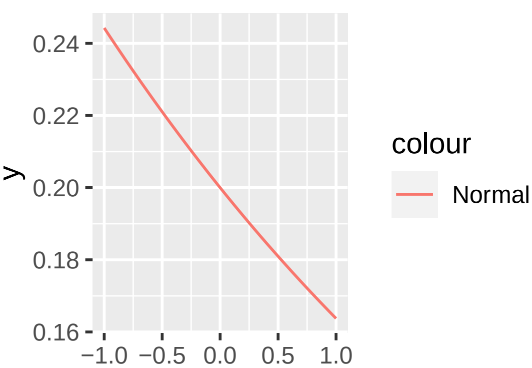
```
## 1 with absolute error < 2e-07
```

b)

Graficar $f(x)$

Respuesta.-

```
ggplot() +
   xlim(-1, 1) +
   geom_function(
     aes(color = "Normal"),
     fun =~ 1/5 * exp(-.x/5)
     )
```



c)

Calcular $P(X \leq 5)$ y $P(0 \leq X \leq 8)$.

Respuesta.-

$$P(X \leq 5) = \int_{0}^{5} \frac{1}{5} e^{-x/5}\, dx = 1 - \frac{1}{e}$$

```
integrate(function(x) 1/5 * exp(-x/5), lower = 0, upper = 5)
```

```
## 0.6321206 with absolute error < 7e-15
```

$$P(0 \leq X \leq 8) = \int_{0}^{8} \frac{1}{5} e^{-x/5}\, dx = 1 - \frac{1}{e^{8/5}}$$

```r
integrate(function(x) 1/5 * exp(-x/5), lower = 0, upper = 8)
```

```
## 0.7981035 with absolute error < 8.9e-15
```

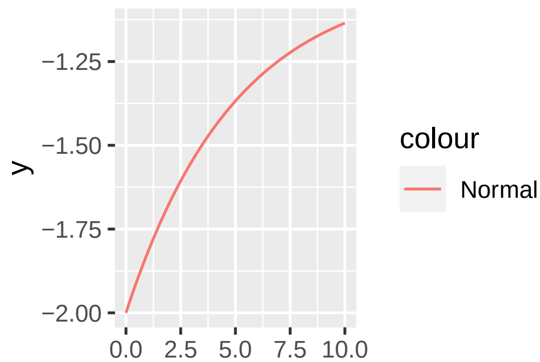
d)

Determinar $F(x)$ y graficarla.

Respuesta.- La función de distribución acumulativa esta dado por

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \frac{1}{5}\int_{0}^{x} e^{-t/5}\ dt = -e^{-x/5} - 1$$

```r
ggplot() +
  xlim(0, 10) +
  geom_function(
    aes(color = "Normal"),
    fun =~ -exp(-.x/5) - 1
    )
```



3.5

La duración en horas de un componente electrónico, es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulativa es $F(x) = 1 - e^{-x/100}, x > 0$

a)

Determinar la función de probabilidad de X.

Respuesta.-

$$F^{'}(x) = 1 - e^{-x/100} = \frac{1}{100}e^{-x/100}$$

b)

Determinar la probabilidad de que el componente trabaje más de 200 horas.

Respuesta.-

$$1 - (1 - exp(-200/100)) = 0.13533$$

```r
1-(1-exp(-200/100))
```

```
## [1] 0.1353353
```

```r
integrate(function(x) 1/100 * exp(-x/100), lower = 0, upper = 200)
```

```
## 0.8646647 with absolute error < 9.6e-15
```

3.6

La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria está dada por

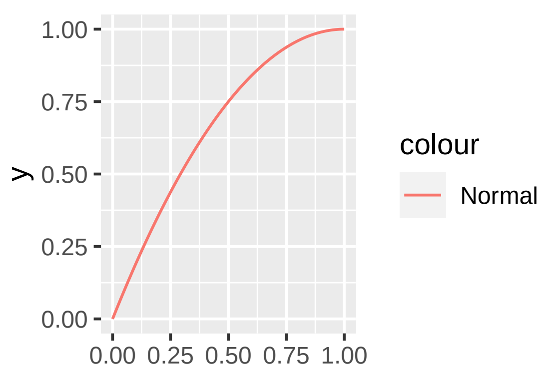
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

a)

Graficar $F(x)$.

Respuesta.-

```r
# gráfico de F(x)
ggplot() +
   xlim(0, 1) +
   geom_function(
     aes(color = "Normal"),
     fun =~ 2*.x - .x^2,
     )
```



b)

Obtener $P(X < 1/2)$ y $P(X > 3/4)$.

Respuesta.-

$P(X < 1/2) = 2 \cdot 1/2 - (1/2)^2 = 3/4 = 0.75$

```r
func <- function(x) 2*x - x^2
func(0.5)
```

```
## [1] 0.75
```

$1 - P(X > 3/4) = 1 - (2 \cdot 3/4 - (3/4)^2) = 1 - (-3/4)1 - (15/16) = 1/16 = 0.0625$

```r
1-func(3/4)
```

```
## [1] 0.0625
```

c)

Determinar $f(x)$.

Respuesta.-

$F^{'}(x) = 2x - 2^2 = 2 - x$

3.7

Sea X una variable aleatoria que representa el número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora. Dada la siguiente información

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	0.05	0.10	0.10	0.10	0.20	0.25	0.10	0.05	0.05

encontrar $E(x)$ y $Var(X)$

Respuesta.-

```
x <- c(0,1,2,3,4,5,6,7,8)
px <- c(0.05,0.1,0.1,0.1,0.2,0.25,0.1,0.05,0.05)
```

$E(X) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot p(x) = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.1 + \ldots + 8 \cdot 0.05 = 4$

```
sum <- 0
for (i in 1:length(x)){
 sum <- sum + x[i]*px[i]
}
sum
```

```
## [1] 4
```

$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 p(x) = 0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.1 + \ldots + 8^2 \cdot 0.05 = 20.1$

```
sum2 <- 0
for (i in 1:length(x)){
 sum2 <- sum2 + x[i]^2 * px[i]
}
sum2
```

```
## [1] 20.1
```

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 20.1 - 4^2 = 4.1$

```
sum2 - sum^2
```

```
## [1] 4.1
```

3.8

Una compañía de seguros debe determinar la cuota anual a cobrarse por un seguro de 50 mil dolares para hombres cuya edad se encuentra entre los 30 y 35 años. Con base en las tablas actuariales el número de fallecimientos al año, para este grupo, es de 5 por cada mil. Si X es la variable aleatoria que representa la ganancia de la compañía de seguros, determinar el monto de la cuota anual para que la compañía no pierda, a pesar de tener un número grande de tales seguros.

Respuesta.- Calculamos el valor para un ganancia nula

$$E[X] = 0 = \frac{C \cdot 995}{1000} - \frac{50000 \cdot 5}{100} \Longrightarrow 995C = 250000 \Longrightarrow C = 251.26$$

3.9

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$$

Determinar:

a)

$E(X)$

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)\, dx = \int_0^1 2x - 2x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

```
func <- function(x) x*2*(1-x)
integrate(func, lower = 0, upper = 1)
```

```
## 0.3333333 with absolute error < 3.7e-15
```

b)

$Var(X)$

Respuesta.-

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x)\, dx = \int_0^1 2x^2 - 2x^3\, dx = \frac{1}{6}$$

```
func <- function(x) x^2*2*(1-x)
integrate(func, lower = 0, upper = 1)
```

```
## 0.1666667 with absolute error < 1.9e-15
```

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

```
# varianza
1/6 - (1/3)^2
```

```
## [1] 0.05555556
```

3.10

Sea X una variable aleatoria que representa la magnitud de la desviación, a partir de una valor prescrito, del peso neto de ciertos recipientes, los que se llenan mediante una máquina. Función de densidad de una v.a. de X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a)

$E(X)$.

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{1}{10} x \cdot \; dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} x \; dx = 5$$

```r
func <- function(x) 1/10 * x
integrate(func, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 5 with absolute error < 5.6e-14
```

b)

$Var(X)$.

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{1}{10} x^2 \cdot \; dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} x^2 \; dx = \frac{100}{3}$$

```r
func <- function(x) 1/10 * x^2
integrate(func, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 33.33333 with absolute error < 3.7e-13
```

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3} = 8.33333$$

```r
# varianza
100/3 - 5^2
```

```
## [1] 8.333333
```

c)

$\alpha_3(X)$.

Respuesta.-

α_3 también llamado coeficiente de asimetría estará dado por

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

de donde μ_3 será:

$$\mu_3 = E(X-5)^3 = \int_0^{10} \frac{1}{10} \cdot (x-5)^3 \; dx = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} (x^3 - 15x^2 + 75x - 125) \; dx = 0$$

para μ_2 tenemos

$$Var(X) = E(X-5)^2 = \int_0^{10} \frac{1}{10} \cdot (x-5)^2 \; dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} (x^2 - 10x + 25) \; dx = \frac{25}{3}$$

Entonces

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{0}{\left(\frac{25}{3}\right)^{3/2}} = 0$$

```r
func <- function(x) 1/10 * (x-5)^3
func2 <- function(x) 1/10 * (x-5)^2
integrate(func, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 1.204593e-15 with absolute error < 3.5e-13
```

```r
integrate(func2, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 8.333333 with absolute error < 9.3e-14
```

Donde nos menciona que se tiene un coeficiente de asimetría simétrica.

d)

$\alpha_4(X)$.

Respuesta.-

Para α_4 como medida relativa de la curtosis tenemos

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

de donde tenemos μ_4 de la siguiente manera

$$\mu_4 = E(X-5)^4 = \int_0^{10} \frac{1}{10} \cdot (x-5)^4 \, dx = 125$$

```r
func4 <- function(x) 1/10 * (x-5)^4
integrate(func4, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 125 with absolute error < 1.4e-12
```

para luego:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{125}{\frac{25^2}{3^3}} = 5.4$$

Donde nos dice que la distribución presenta un pico relativamente alto

3.11

Supóngase que la duración en minutos de una llamada de negocios, es una variable aleatoria cuyo función de densidad de probabilidad está determinada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4} & x > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a)

$E(X)$.

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{4}e^{-x/4} \, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x/4} \, dx = 4$$

```r
func <- function(x) 1/4*x*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 4 with absolute error < 1.2e-05
```

b)

$Var(X)$.

Respuesta.-

$$Var(X) = E(X-4)^2 = \int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-x/4} \cdot (x-4)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-x/4} \cdot (x-4)^2 \, dx = 16$$

```r
func <- function(x) 1/4*(x-4)^2*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 16 with absolute error < 0.00051
```

c)

$\alpha_3(x)$.

Respuesta.-

$$\mu_3 = E(X-4)^3 = \frac{1}{4} \int_0^\infty (x-4)^3 \cdot e^{-x/4} \, dx = 128$$

```r
func <- function(x) 1/4*(x-4)^3*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 128 with absolute error < 0.00029
```

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{128}{16^{3/2}} = 2$$

```r
128/(16^(3/2))
```

```
## [1] 2
```

De donde podemos mencionar que se tiene una asimetría positiva.

d)

$\alpha_4(X)$.

Respuesta.-

$$\mu_4 = E(X-4)^4 = \frac{1}{4} \int_0^\infty (x-4)^4 \cdot e^{-x/4} \, dx = 2304$$

```r
func <- function(x) 1/4*(x-4)^4*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 2304 with absolute error < 0.0025
```

así,

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{2304}{16^2} = 9$$

```
2304/16^2
```

```
## [1] 9
```

e)

Defiérase al ejercicio 3.10. Basandose en sus respuestas a, a d del problema 3.11, compare las dos distribuciones de probabilidades. ¿Cuál muestra la mayor dispersión relativa?.

Respuesta.-

Del ejercico 3.10

$$V_X = \frac{E(X)}{Var(X)} = \frac{5}{8.33333}$$

```
5/8.33333
```

```
## [1] 0.6000002
```

Del ejercio 3.11

$$V_Y = \frac{E(X)}{Var(X)} = \frac{4}{16}$$

```
4/16
```

```
## [1] 0.25
```

De donde V_Y muestra mayor dispersión relativa con respecto a la media que la distribución correspondiente a X

3.12

La calificación promedio en una prueba de estadística fue de 62.5 con una desviación estándar de 10. El profesor sospecha que el examen fue difícil. De acuerdo con lo anterior, desea ajustar las calificaciones de manera que el promedio sea de 70 y la desviación estándar de 8. ¿Qué ajuste del tipo $aX + b$, debe utilizar?.

Respuesta.- Sea

$$E(X) = 62.5, \qquad y \qquad \sqrt{Var(X)} = 10 \Rightarrow Var(X) = 100$$

y

$$E(aX + b) = 70 \qquad y \qquad Var(aX + b) = 80$$

entonces

$$a^2 Var(X) = 80 \implies a = 2\sqrt{\frac{1}{5}}$$

y

$$aE(X) + b = 70 \implies b = 14.098$$

Entonces la respuesta estará dada por

$$aX + b = 2\sqrt{\frac{1}{5}}X + \left(70 - 125\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

```
EX <- function(x) 2*(1/5)^(1/2)*x + 70-125*(1/5)^(1/2)
EX(62.5)
```

```
## [1] 70
```

```
VarX <- function(varx) (2*(1/5)^(1/2))^2 * varx
VarX(100)
```

```
## [1] 80
```

3.13

Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2.

a)

Evaluar $E(X-c)^2$ en términos de μ y σ^2 en donde c es una constante.

Respuesta.- Sea $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$ entonces,

$$E(X-c)^2 = E(X^2 - 2cX + c^2) = E(X^2) - 2cE(X) + c^2 = E(X^2) - E^2(X) + E(X)\cdot E(X) - 2cE(X) + c^2 =$$

$$Var(X) + (E(X) - c)^2 = \sigma^2 + (\mu - c)^2$$

b)

¿Para qué valor de c es $E(X-c)^2$ mínimo?.

Respuesta.- Cuando $c = \mu$

3.14

Con respecto al ejercicio 3.11, demostrar que la variable aleatoria $Y = (X-4)/4$ tiene media cero y desviación estándar uno. Demostrar que los factores de forma, primero y segundo, de la distribución de Y son los mismos de la distribución de X.

Respuesta.-

$$E(Y) = E\left(\frac{X-4}{4}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{x-4}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{-x/4}\,dx = \frac{1}{16}\int_0^\infty (x-4)\cdot e^{-x/4}\,dx = 0$$

```
fx = function(x) ((x-4)/4) * 1/4 * exp( -x/4 )
integrate(fx,lower = 0, upper = Inf)
```

```
## -5.632717e-13 with absolute error < 3e-06
```

$$Var(Y) = Var\left(\frac{X-4}{4}\right)^2 = \int_0^\infty \left(\frac{x-4}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{-x/4}\,dx = \frac{1}{64}\int_0^\infty (x-4)^2\cdot e^{-x/4}\,dx = 1$$

```
fx = function(x) 1/64 * (x-4)^2 * exp(-x/4)
integrate(fx,lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 1 with absolute error < 3.2e-05
```

3.15

Considérese la función de densidad de probabilidad de X dada en el ejercicio 3.9. Determinar la desviación media de X y compararla con su desviación estándar.

Respuesta.-

$$E\left|X-\frac{1}{3}\right| = \int_0^1 \left|x-\frac{1}{3}\right| \cdot 2(1-x)\ dx = \int_0^{1/3} \left(\frac{1}{3}-x\right) * 2(1-x)\ dx + \int_{1/3}^1 \left(x-\frac{1}{3}\right) * 2(1-x)\ dx = 0.1975309$$

```r
f <- function(x) abs(x-1/3)*2*(1-x)
integrate(f,lower = 0,upper = 1)
```

```
## 0.1975309 with absolute error < 5e-06
```

La desviación estandar del ejercicio 3.9 viene dada por $\sqrt{\dfrac{1}{18}} = 0.2357$

Luego comparando con la desviación media vemos que se tiene poca diferencia.

3.16

Considérese la función de densidad de probabilidad de X dada en el ejercicio 3.10. Determinar la desviación media de X y compararla con su desviación estándar.

Respuesta.-

$$E|X-\mu| = \int_0^{10} |x-5| \cdot \frac{1}{10}\ dx = \frac{1}{10}\left[\int_0^5 (5-x)\ dx + \int_5^{10} (x-5)\ dx\right] = \frac{1}{10}\left(5x\Big|_0^5 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 + \frac{x^2}{2}\Big|_5^{10} - 5x\Big|_5^{10}\right) =$$

$$\frac{1}{10}\left(25-\frac{25}{2}+\frac{75}{2}-25\right) = \frac{5}{2}$$

```r
f <- function(x) abs(x-5)*1/10
integrate(f,lower = 0,upper = 10)
```

```
## 2.5 with absolute error < 2.8e-14
```

```r
# desviación típica del ejercicio 10
(25/3)^(1/2)
```

```
## [1] 2.886751
```

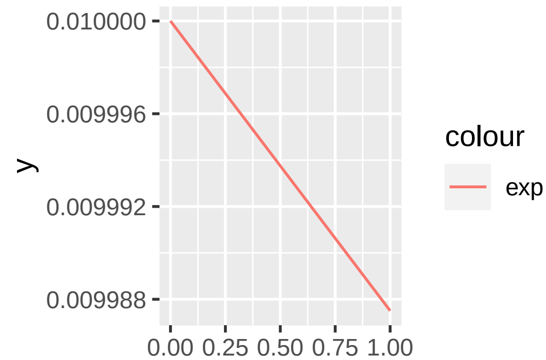
De lo que concluimos que entre la desviación media de X y la desviación estándar de ejercicio 10 se tiene una diferencia de 0.33.

3.17

Supóngase que el ingreso semanal de un asesor profesional es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está determinada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{800}e^{-x/800} & x > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

```
ggplot() +
  xlim(0, 1) +
  geom_function(
    aes(color = "exp"),
    fun =~ 1/100*exp(-.x/800)
    )
```



a)

Determinar los ingresos medios y medianos

Respuesta.- La media es:

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{800} \cdot e^{-x/800}\, dx = \frac{1}{800} \int_0^\infty x \cdot e^{-x/800} = 800$$

```
integrate(function(x) 1/800*x*exp(-x/800), lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 800 with absolute error < 0.034
```

La mediana es:

$$F(x_{0.5}) = P(X \leq x_{0.5}) = \frac{1}{800} \int_0^{x_{0.5}} e^{(-x/800)}\, dx = 0.5 \implies -e^{-x_{0.5}/800} + 1 = 0.5 \Longrightarrow x_{0.5} = 554.5177$$

```
-800*log(0.5)
```

```
## [1] 554.5177
```

b)

Determinar el recorrido intercuartil.

Respuesta.- Recorrido intercuartil

$$F(x_{0.25}) = P(X \leq x_{0.25}) = \frac{1}{800} \int_0^{x_{0.25}} e^{(-x/800)}\, dx = 0.25 \implies -e^{-x_{0.25}/800} + 1 = 0.25 \Longrightarrow x_{0.25}$$
$$\Longrightarrow x_{0.25} = -800 \cdot ln(0.25) = 1109.03548$$

$$F(x_{0.75}) = -800 \cdot ln(0.75) = 230.14565$$

por lo que

$$x_{0.75} - x_{0.25} = |230.14565 - 1109.03548| = 878.8898$$

c)

Determinar el recorrido interdecil.

Respuesta.- Recorrido interdecil

$$F(x_{0.1}) = P(X \leq x_{0.1}) = \frac{1}{800}\int_0^{x_{0.1}} e^{(-x/800)}\, dx = 0.1 \implies -e^{-x_{0.1}/800} + 1 = 0.1$$
$$\implies x_{0.1} \implies x_{0.1} = -800 \cdot ln(0.1) = 1842.068$$

$$F(x_{0.9}) = -800 \cdot ln(0.9) = 84.2884$$

$$x_{0.9} - x_{0.1} = |84.2884 - 1842.068| = 1757.78$$

d)

Determinar la probabilidad de que el ingreso semanal exceda al ingreso promedio.

Respuesta.-

$$P(X \geq 800) = 1 - P(X \leq 800) = 1 - \frac{1}{800}\int_0^{800} e^{-x/800}\, dx = 1 - 0.3678794 = 0.3679$$

```r
integrate(function(x) 1/800*exp(-x/800), lower = 0, upper = 800)
```

```
## 0.6321206 with absolute error < 7e-15
```

```r
1 - 0.6321206
```

```
## [1] 0.3678794
```

3.18

Comprobar que la función generadora de momentos central de una variable aleatoria X, genera todos los momentos centrales de X.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^r m_{X-\mu}(t)}{dt^r}\right|_{t=\mu} &= \left.\frac{d^r}{dt^r}E[e^{t(X-\mu)}]\right|_{t=0} \\
&= E\left\{\frac{d^r}{dt^r}\left[e^{t(X-\mu)}\right]\right\} \\
&= \left.E\left[(X-\mu)^r e^{t(X-\mu)}\right]\right|_{t=0} \\
&= E[X-\mu]^r \\
&= u_r
\end{aligned}$$

3.19

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está determinada:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{16}xe^{-x/4} & x > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a)

Determinar la función generadora de momentos de X.

Respuesta.-

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{1}{16} \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{4}}\, dx = \frac{1}{16}\int_0^\infty x \cdot e^{\frac{x(4t-1)}{4}}\, dx = (1-4t)^{-2}$$

b)

Utilizar la función generadora de momentos para encontrar la media y la varianza de X.

Respuesta.-

$$\left.\frac{dm_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\cdot(1-4t)^{-2}\right|_{t=0} = \left.\frac{8}{(1-4x)^3}\right|_{t=0} = 8 = E(X)$$

$$\left.\frac{d^2m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}(1-4x)^{-2} = \left.\frac{d}{dt}\frac{8}{(1-4x)^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{96}{(-4x+1)^4}\right|_{t=0} = 96 = E(X^2)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 96 - 8^2 = 32$$

3.20

Considérese la función de densidad de probabilidad dada en el ejercicio 3.11. Encontrar la función generadora de momentos y utilizaría para comprobar los valores de la media y la varianza, determinados en el ejercicio 3.11.

Respuesta.-

$$m_X(t) = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{tx}\cdot e^{-\frac{x}{4}}\, dx$$

3.21

Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(x) = 0, 1, 2, \ldots, n$, y sean a, b y c constantes. Demostrar que $E(c) = c$, $E(aX + b) = aE(X) + b$, y $E[g(X) + h(X)] = E[g(X) + E[g(X)]]$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones de X.

Respuesta.- $E(c) = \sum_x c \cdot p(x) = c\sum_x p(x) = c$

$E(cX + b) = \sum_x (cx + b)p(x) = c\sum_x x\cdot p(x) + b\sum_x p(x) = cE(x) + b$

$E[g(X) + h(X)] = \sum_x [g(x) + h(x)]p(x) + \sum_x g(x)p(x) + \sum_x h(x)p(x) = E[g(X)] + E[h(X)]$

3.22

Para la variable aleatoria discreta del ejercicio anterior, utilizar las definiciones 3.8 y 3.9 para demostrar que $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Respuesta.-

$$Var(X) = (X-\mu)^2 = \sum_x (x-\mu)^2 p(x) = \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x xp(x) + \mu^2 \sum_x p(x) =$$
$$E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Ejercicios capítulo 4.

4.1.

Sea X una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros n y p. Mediante la función de probabilidad binomial, verificar que $p(n-x;n,1-p) = p(x;n,p)$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
p(n-x;n,1-p) &= \frac{n!}{[n-(n-x)]!(n-x)!}(1-p)^{n-x}\left[1-(1-p)\right]^{n-(n-x)} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!}(1-p)^{n-x}p^x \text{ para } x = 0,1,2,\ldots n \\
&= p(x;n,p)
\end{aligned}$$

4.2.

En una distribución binomial, sea X el número de éxistos obtenidos en diez ensayos donde la probabilidad de éxito en cada uno es de 0.8. Con el resultado del problema anterior, demostrar que la probabilidad de lograr de manera exacta seis éxitos es igual a la probabilidad de tener cuatro fracasos.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
0.08808038 &= \frac{10!}{[10-(10-4)]!(10-4)!}(1-0.8)^{10-6}\left[1-(1-0.8)\right]^{10-(10-6)} \\
&= \frac{10!}{6!(10-6)!}(1-0.8)^{10-6}0.8^6 = 0.08808038
\end{aligned}$$

```
dbinom(4,10,0.2)
```

```
## [1] 0.08808038
```

```
dbinom(6,10,0.8)
```

```
## [1] 0.08808038
```

4.3

Mediante el empleo de la función de probabilidad binomial, verificar la siguiente fórmula de recursión:

$$p(x+1;n,p) = \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)}p(x;n,p)$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
p(x+1,n,p) = \frac{n!}{[n-(x+1)]!(x+1)!}p^{x+1}(1-p)^{n-(x+1)} &= \frac{n!}{\frac{(n-x!)}{(n-x)}x!(x+1)}p^x p(1-p)^{n-x}(1-p)^{-1} \\
&= \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)}p(x;n,p)
\end{aligned}$$

4.4.

sea X una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros $n = 8$ y $p = 0.4$. Emplear la fórmula de recursión del problema anterior para obtener las probabilidades puntuales de los valores de X.

Respuesta.-

$$p(x+1;8,0.4) = \frac{(8-x)0.4}{(x+1)(1-0.4)} p(x;8,0.4)$$

4.5

Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con $n = 10$ y $p = 0.5$

a)

Determinar las probabilidades de que X se encuentre dentro de una desviación estándar de la media y a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Para una desviación estándar

Sabemos que $\mu = E(X) = np = 10 \cdot 0.5 = 5$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 1.581139$, luego si queremos hallar la desviación estándar de la media tenemos que calcular la desviación hacia la derecha y hacia la izquierda, es decir, $5 \pm 1.581139 = 6.581139$ y 3.418861. Si restamos y sumamos a 6.581139 y 3.418861, 0.581139 respectivamente tenemos por un lado 6 y por otro $2.837722 \approx 3$. Así tenemos que,

$$P(X \le 6) - P(X \le 3) = F(6;10,0.5) - F(3;10,0.5) = \sum_{i=0}^{6} \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} - \sum_{i=0}^{3} \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i}$$
$$= 0.65625$$

```
pbinom(6,10,0.5) - pbinom(3,10,0.5)
```

```
## [1] 0.65625
```

Para dos desviaciones estándar, tenemos que $\sigma = 2\sqrt{np(1-p)} = 2\sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 3.162278$, de donde $5 \pm 3.162278 = 8.162278$ y 1.837722. Podemos construir directamente la probabilidad requerida como sigue,

$$P(X \le 8) - P(X \le 2) = F(8;10,0.5) - F(2;10,0.5) = \sum_{i=0}^{8} \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} - \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i}$$
$$= 0.9345703$$

```
pbinom(8,10,0.5)-pbinom(2,10,0.5)
```

```
## [1] 0.9345703
```

b)

¿Cómo cambiarían las respuestas de a) si $n = 15$ y $p = 0.4$?

Respuesta.- Para una desviación estándar,

Similar a la parte a) tenemos que $\mu = E(X) = np = 15 \cdot 0.4 = 6$ de donde se tiene $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.4 \cdot (1-0.4)} = 1.897367$ de donde $6 \pm 1.897367 = 7.897367$ y 4.102633, por lo tanto,

$$P\left(X\leq 7\right)-P\left(X\leq 2\right)=F\left(7;15,0.4\right)-F\left(2;15,0.4\right)=\sum_{i=0}^{7}\binom{15}{i}0.4^{i}(1-0.4)^{15-i}-\sum_{i=0}^{2}\binom{15}{i}0.4^{i}(1-0.4)^{15-i}$$
$$=0.5696191$$

```
pbinom(7,15,0.4)-pbinom(4,15,0.4)
```

```
## [1] 0.5696191
```

Para dos desviaciones estándar,

tenemos que $\sigma = 2\sqrt{np(1-p)} = 2\sqrt{15\cdot 0.4\cdot(1-0.4)} = 3.794733$, de donde $6 \pm 3.794733 = 9.794733$ y 2.205267. se sigue,

$$P\left(X\leq 9\right)-P\left(X\leq 2\right)=F\left(9;15,0.4\right)-F\left(2;15,0.4\right)=\sum_{i=0}^{9}\binom{15}{i}0.4^{i}(1-0.4)^{15-i}-\sum_{i=0}^{2}\binom{15}{i}0.4^{i}(1-0.4)^{15-i}$$
$$=0.9345703$$

```
pbinom(9,15,0.4)-pbinom(2,15,0.4)
```

```
## [1] 0.9390527
```

4.6

Supóngase que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamble es de 0.05. Si el número de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes

a)

¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades dos se encuentren defectuosas?

Respuesta.-

$$P(X=2)=\binom{20}{2}\cdot 0.05^{2}\cdot(1-0.05)^{20-2}=0.1886768$$

```
# opción 1
choose(20,2)*0.05^2*(1-0.05)^(20-2)
```

```
## [1] 0.1886768
```

```
# opción 2
dbinom(2,20,0.05)
```

```
## [1] 0.1886768
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades, dos como límite se encuentren defectuosas?

Respuesta.-

$$P(X\leq 2)=F(2;20,0.05)=\sum_{i=0}^{2}\binom{20}{i}\cdot 0.05^{i}\cdot(1-0.05)^{20-i}=0.9245163$$

```r
pbinom(2,20,0.05)
```

```
## [1] 0.9245163
```

c)

¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

Respuesta.-

$$1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1; 20, 0.05) = 1 - \sum_{i=0}^{1} \binom{20}{i} \cdot 0.05^i \cdot (1 - 0.05)^{20-i} = 0.2641605$$

```r
pbinom(1,20,0.05,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2641605
```

4.7

En una fábrica de circuitos electrónicos, se afirma que la proporción de unidades defectuosas de cierto componente que ésta produce, es del 5%. Un buen comprador de estos componentes revisa 15 unidades seleccionadas al azar y encuentra cuatro defectuosas. Si la compañia se encuentra en lo correcto y prevalecen las suposiciones para que la distribución binomial sea el modelo de probabilidad adecuado para esta situación, ¿Cuál es la probabilidad de este hecho?. Con base en el resultado anterior ¿puede concluir que la compañia está equivocada?

Respuesta.-

$$P(X = 4) = \binom{15}{4} \cdot 0.05^4 \cdot (1 - 0.05)^{15-4} = 0.004852576$$

```r
dbinom(4,15,0.05)
```

```
## [1] 0.004852576
```

```r
choose(15,4)*0.05^4*(1-0.05)^(15-4)
```

```
## [1] 0.004852576
```

```r
func_binom(4,15,0.05)
```

```
## [1] 0.004852576
```

Ahora veamos que tan probable es que existe más de 4 circuitos defectuosos.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - F(3; 20, 0.05) = 1 - \sum_{i=0}^{3} 0.05^i \cdot (1 - 0.05)^{15-i} = 0.005467259$$

```r
pbinom(3,15,0.05, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.005467259
```

```r
1-acum_binom(3,15,0.05)
```

```
## [1] 0.005467259
```

Por lo que se dice de la afirmación es incorrecta.

4.8

La probabilidad de que un satélite, después de colocarlo en la órbita, funcione de manera adecuada es de 0.9. Supóngase que cinco de éstos se colocan en órbita y operan de manera independiente.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que, por lo menos, el 80% funcione adecuadamente?

Respuesta.- Ya que el 80% de 5 es 4 por lo que

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3; 5, 0.9) = 1 - \sum_{i=0}^{3} 0.9^i \cdot (1 - 0.9)^{5-i} = 0.91854$$

```
pbinom(3,5,.9,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.91854
```

```
1-acum_binom(3,5,0.9)
```

```
## [1] 0.91854
```

b)

Responder a a) si $n = 10$

Respuesta.-

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 9) = 1 - F(9; 10, 0.9) = 1 - \sum_{i=0}^{9} 0.9^i \cdot (1 - 0.9)^{10-i} = 0.7360989$$

```
pbinom(8,10,.9,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.7360989
```

```
1-acum_binom(8,10,0.9)
```

```
## [1] 0.7360989
```

c)

Responder a a) si $n = 20$

Respuesta.-

$$P(X \geq 16) = 1 - P(X < 15) = 1 - F(15; 20, 0.9) = 1 - \sum_{i=0}^{15} 0.9^i \cdot (1 - 0.9)^{5-i} = 0.8670467$$

```
pbinom(16,20,.9,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.8670467
```

```
1-acum_binom(16,20,0.9)
```

```
## [1] 0.8670467
```

d)

¿Son inesperados estos resultados? ¿Por qué?

Respuesta.- Son inesperados ya que no se puede ver una tendencia clara cuando n es más grande.

4.9.

Con base en encuestas al consumidor se sabe que la preferencia de éste con respecto a dos marcas, A y B, de un producto dado, se encuentra muy pareja. Si la opción de compra entre estas marcas es independiente, ¿cuál es la probabilidad de que entre 25 personas seleccionadas al azar, no más de diez tengan preferencia por la marca A?

Respuesta.- Ya que A y B se encuentran parejas entonces la probabilidad es de 0.5, luego:

$$P(X \leq 10) = F(10; 25, 0.5) = \sum_{i=0}^{10} 0.5^i \cdot (1 - 0.5)^{25-i} = 0.2121781$$

```
pbinom(10,25,0.5)
```

```
## [1] 0.2121781
```

```
acum_binom(10,25,0.5)
```

```
## [1] 0.2121781
```

4.10

Supóngase que un examen contiene 15 preguntas del tipo falso o verdadero. El examen se aprueba contestando correctamente por lo menos nueve preguntas. Si se lanza una moneda para decidir el valor de verdad de cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

Respuesta.- Ya que al lanzar una moneda se tiene sólo dos opciones entonces la probabilidad es de 0.5, luego:

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \geq 8) = 1 - F(8; 15, 0.5) = 1 - \sum_{i=0}^{8} 0.5^i \cdot (1 - 05)^{15-i} = 0.1508789$$

```
pbinom(9,15,0.5,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1508789
```

```
1-acum_binom(9,15,0.5)
```

```
## [1] 0.1508789
```

4.11

Un vendedor de seguros sabe que la oportunidad de vender una póliza es mayor mientras más contactos realice con clientes potenciales. Si la probabilidad de que una persona compre una póliza de seguro después de la visita, es constante e igual a 0.25, y si el conjunto de visitas constituye independiente de ensayos, ¿cuántos compradores potenciales debe visitar el vendedor para que la probabilidad de vender por lo menos una póliza sea de 0.80?

Respuesta.-

$$P(X \geq 1) = 0.25 \;\Rightarrow\; 1 - P(X < 0) = 1 - [0.25^0 \cdot (1 - 0.25)^{n-0}] = 1 - 0.75^n = 0.8 \;\Rightarrow\; n \ln(0.75) = \ln(0.2)$$

$$n = \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.75)} = 5.59450194 \approx 6$$

```
log(0.20)/log(0.75)
```

```
## [1] 5.594502
```

Por lo que debe existir 6 o más compradores.

4.12.

El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservación sabe, por experiencia, que el 15% de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 25 reservaciones pero sólo dispone de 20 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que a todas las personas que asistan al restaurante se les asigne una mesa?.

Respuesta.- Existe la probabilidad de que el 85% asista al restaurante. Por lo que,

$$P(X \leq 20) = F(20; 25, 0.85) = \sum_{i=0}^{20} 0.85^i \cdot (1 - 0.85)^{25-i} = 0.317893$$

```
pbinom(20,25,0.85)
```

```
## [1] 0.317893
```

4.13

Mediante la probabilidad de Poisson, demostrar la siguiente fórmula de recursión:

$$p(x+1; \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} p(x; \lambda)$$

Demostración.- Por definición de de función de probabilidad de Poisson se tiene que,

$$p(x+1; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x+1}}{(x+1)!}, \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, \ \lambda > 0$$

que también podemos reescribirlo de la siguinete manera,

$$\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x+1}}{(x+1)!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \lambda^x}{x! \cdot (x+1)}$$

y por lo tanto

$$p(x+1; \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{\lambda}{x+1} p(x; \lambda)$$

4.14

Sea X una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Emplear la fórmula del problema anterior para determinar las probabilidades puntuales de $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y hágase una gráfica de la función de probabilidad.

Respuesta.-

- Para $X = 0$

$$p(0+1; 2) = \frac{\lambda}{x+1} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{2}{0+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{0+1}}{(0+1)!} = 0.2707$$

- Para $X = 1$

$$p(1+1;2) = \frac{2}{1+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{1+1}}{(1+1)!} = 0.2707$$

- Para $X = 2$

$$p(2+1;2) = \frac{2}{2+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{2+1}}{(2+1)!} = 0.1804$$

- Para $X = 3$

$$p(3+1;2) = \frac{2}{3+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{3+1}}{(3+1)!} = 0.0902$$

- Para $X = 4$

$$p(4+1;2) = \frac{2}{4+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{4+1}}{(4+1)!} = 0.036$$

- Para $X = 5$

$$p(5+1;2) = \frac{2}{5+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{5+1}}{(5+1)!} = 0.012$$

- Para $X = 6$

$$p(6+1;2) = \frac{2}{6+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{6+1}}{(6+1)!} = 0.0034$$

- Para $X = 7$

$$p(7+1;2) = \frac{2}{7+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{7+1}}{(7+1)!} = 0.0008$$

- Para $X = 8$

$$p(8+1;2) = \frac{2}{8+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{8+1}}{(8+1)!} = 0.0001$$

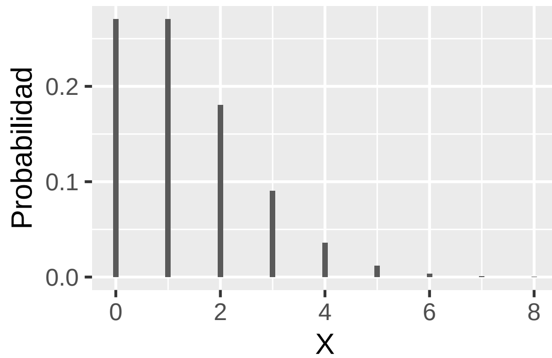
```r
lambda = 2

x = 0
while (x<9){
  print(paste0(x," = ", (exp(-lambda)*lambda^(x+1))/fact((x+1))))
  x = x+1
}
```

```
## [1] "0 = 0.270670566473225"
## [1] "1 = 0.270670566473225"
## [1] "2 = 0.180447044315484"
## [1] "3 = 0.0902235221577418"
## [1] "4 = 0.0360894088630967"
## [1] "5 = 0.0120298029543656"
## [1] "6 = 0.00343708655839016"
## [1] "7 = 0.000859271639597541"
## [1] "8 = 0.000190949253243898"
```

```
x = 0
X = c()
Probabilidad = c()
while (x<9) {
  X = c(X,x)
  Probabilidad = c(Probabilidad, dpois(x+1,lambda))
  x=x+1
}

ggplot(mapping = aes(X,Probabilidad)) +
  geom_col(width = 0.1)
```



4.15

Para un volumen fijo, el número de células sanguíneas rojas es una variable aleatoria que se presenta con una frecuencia constante. Si el número promedio para un volumen dado es de nueve células para personas normales, determinar la probabilidad de que el número de células rojas para una persona se encuentre dentro de una desviación estándar del valor promedio y a dos desviaciones estándar del promedio.

Respuesta.- Sea la desviación estándar de una variable aleatoria Poisson igual a,

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{9} = 3$$

Entonces una desviación estándar del valor promedio estará dada por:

$$9 \pm 3 = 6 \text{ y } 12$$

Acá debemos tener cuidado ya que estamos trabajando con distribuciones discretas , por lo que tenemos $P(X \leq 6) = P(X < 7)$ es decir cuando restamos $P(X \leq 12) - P(X \leq 6) = P(X \leq 12) - P(X < 7)$, por lo tanto lo correcto será restar

$$P(X \leq 12) - P(X \leq 5) = P(X \leq 12) - P(X < 6)$$

Luego,

$$P(X \leq 12) - P(X \leq 5) = F(12,9) - F(5,9) = \sum_{i=0}^{12} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} - \sum_{i=0}^{5} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} = 0.7600829$$

```
ppois(12,9)-ppois(5,9)
```

```
## [1] 0.7600829
```

```
acum_poisson(12,9)-acum_poisson(5,9)
```

```
## [1] 0.7600829
```

Por otro lado para dos desviaciones estándar se tiene,

$$P(X \leq 15) - P(X \leq 2) = F(15,9) - F(2,9) = \sum_{i=0}^{15} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} - \sum_{i=0}^{2} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} = 0.9717321.$$

```
ppois(15,9)-ppois(2,9)
```

```
## [1] 0.9717321
```

```
acum_poisson(15,9)-acum_poisson(2,9)
```

```
## [1] 0.9717321
```

4.16

El número total de clientes que llega a un banco es una variable aleatoria Poisson. Si el número promedio es de 120 por hora, ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen por lo menos tres clientes? ¿Puede esperarse que la frecuencia de llegada de los clientes al banco sea contante en un día cualquier?

Respuesta.- Sabiendo que en un minuto el promedio de llegada es 120/60 y que por lo menos se espera que lleguen 3 cliente, entonces

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{e^{-\frac{120}{60}} \cdot \left(\frac{120}{60}\right)^i}{i!} = 0.3233236$$

```
ppois(120/60,2,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3233236
```

```
1-acum_poisson(120/60,2)
```

```
## [1] 0.3233236
```

Luego, puede esperarse que la frecuencia de los clientes al banco sea constante en un día cualquiera, ya que λ es grande.

4.17

Supóngase que en un cruce transitado ocurren de manera aleatoria e independiente dos accidentes por semana. Determinar la probabilidad de que ocurra un accidente en una semana y de que ocurra tres, en la siguiente semana.

Respuesta.-

$$P(X = 1) \cdot P(X = 3) = p(1;2) \cdot p(3;2) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!} = 0.0488417$$

```
dpois(1,2)*dpois(3,2)
```

```
## [1] 0.0488417
```

```
func_poisson(1,2)*func_poisson(3,2)
```

```
## [1] 0.0488417
```

4.18

Sea X una variable aleatoria binomial. Para $n = 20$ calcular las probabilidades puntales binomiales y compararlas con las correspondientes probabilidades de Poisson para $p = 0.5,\ 0.2,\ 0.1$ y 0.01.

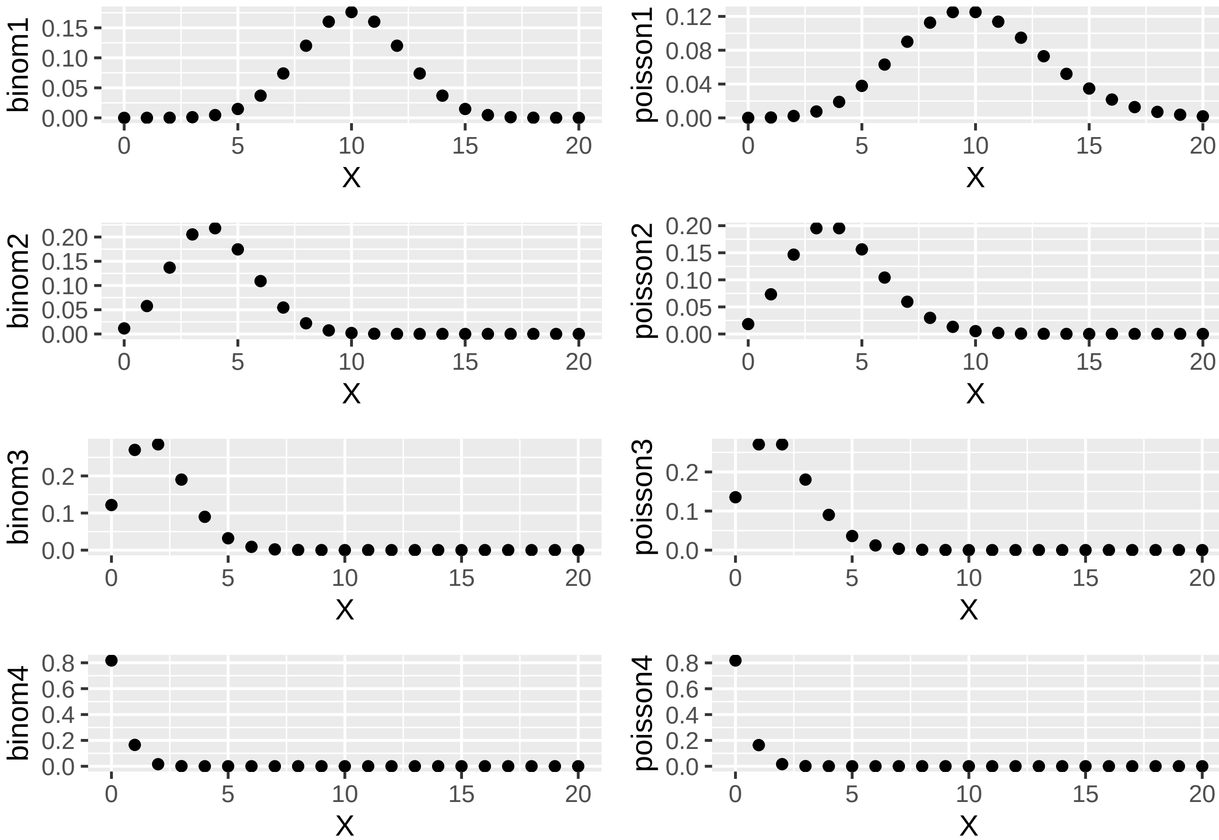
Respuesta.- Sea $\lambda = n \cdot p$ entonces,

```
prob = data.frame(X=0:20,
           binom1=dbinom(0:20,20,0.5),
           poisson1 = dpois(0:20,0.5*20),
           binom2=dbinom(0:20,20,0.2),
           poisson2 = dpois(0:20,0.2*20),
           binom3=dbinom(0:20,20,0.1),
           poisson3 = dpois(0:20,0.1*20),
           binom4=dbinom(0:20,20,0.01),
           poisson4 = dpois(0:20,0.01*20))

p1 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom1))+
  geom_point()
p2 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom2))+
  geom_point()
p3 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom3))+
  geom_point()
p4 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom4))+
  geom_point()
p5 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson1))+
  geom_point()
p6 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson2))+
  geom_point()
p7 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson3))+
  geom_point()
p8 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson4))+
  geom_point()

multiplot(p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,cols=2)
```

```
## Loading required package: grid
```



4.19

Una compañia compra cantidades muy grandes de componentes electrónicos. La decisión para aceptar o rechazar un lote de componentes se toma con base en una muestra aleatoria de 100 unidades. Si el lote se rechaza al encontrar tres o más unidades defectuosas en la muestra, ¿Cuál es la probabilidad de rechazar un lote que contenga un 8% de unidades defectuosas?

Respuesta.- Ya que $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$ y $\lambda = 1/100$ Entonces,

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{e^{\frac{1}{100}} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^i}{i!} = 0.0803014$$

```
ppois(2,1,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0803014
```

```
1- acum_poisson(2,1)
```

```
## [1] 0.0803014
```

Análogamente pasa para $\lambda = 8/100$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{e^{\frac{8}{100}} \cdot \left(\frac{8}{100}\right)^i}{i!} = 0.0803014$$

```r
ppois(2,8,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.986246
```

```r
1- acum_poisson(2,8)
```

```
## [1] 0.986246
```

4.20

El número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de operación es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de éstas es ocho:

a)

¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

Respuesta.- Primero realizamos la regla de tres par determinar λ

$$\lambda_{25} = \frac{25 \cdot 8}{100} = 2$$

Luego,

$$P(X = 1) = p(1; 2) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} = 0.2706706$$

```r
dpois(1,2)
```

```
## [1] 0.2706706
```

```r
func_poisson(1,2)
```

```
## [1] 0.2706706
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?

Respuesta.- Sea $\lambda = 4$ y $P(X \leq 2)$, entonces

$$P(X \leq 2) = p(1; 4) = \sum_{i=0}^{4} \frac{e^{-4} \cdot 4^i}{i!} = 0.2381033$$

```r
ppois(2,4)
```

```
## [1] 0.2381033
```

```r
acum_poisson(2,4)
```

```
## [1] 0.2381033
```

c)

¿Cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

Respuesta.- $\lambda = 10$ y $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - p(9;10) = \sum_{i=0}^{9} \frac{e^{-10} \cdot 10^i}{i!} = 0.5420703$$

```
ppois(9,10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.5420703
```

```
1 - acum_poisson(9,10)
```

```
## [1] 0.5420703
```

4.21

Mediante estudios recientes se ha determinado que la probabilidad de morir por causa de cierta vacuna contra gripe es de 0.00002. Si se administra la vacuna a 100 mil personas y se supone que éstas constituyen un conjunto independiente de ensayos, ¿cuál es la probabilidad de que mueran no más de dos personas a causa de la vacuna?

Respuesta.- Sea $\lambda = 100000 \cdot 0.00004 = 2$ y

$$P(X \leq 2) = F(2;2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{e^{-2} \cdot 2^i}{i!} = 0.6766764$$

```
ppois(2,2)
```

```
## [1] 0.6766764
```

```
acum_poisson(2,2)
```

```
## [1] 0.6766764
```

4.22

Un fabricante asegura a una compañía que el porcentaje de unidades defectuosas es de sólo dos. La compañía revisa 50 unidades seleccionadas aleatoriamente y encuentra cinco defectuosas. ¿Qué tan probable es este resultado si el porcentaje de unidades defectuosas es el que el fabricante asegura?

Respuesta.- Ya que $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$ entonces,

$$P(X \leq 5) - [1 - P(X \leq 1)] = \sum_{i=0}^{5} \frac{e^{-2} \cdot 2^i}{i!} - 1 - \sum_{i=0}^{1} \frac{e^{-2} \cdot 2^i}{i!} = 0.3894422$$

```
ppois(5,2) - ppois(1,2,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3894422
```

```
acum_poisson(5,2)-(1-ppois(1,2))
```

```
## [1] 0.3894422
```

4.23

El número de accidentes graves en una planta industrial es de diez por año, de manera tal que el gerente instituye un plan que considera efectivo para reducir el número de accidentes en la planta. Un año después de ponerlo en marcha, sólo han ocurrido cuatro accidentes. ¿Qué probabilidad hay de cuatro o menos accidentes por año, si la frecuencia promedio aún es diez? Después de lo anterior ¿puede concluirse que, luego de un año, el número de accidentes promedio ha disminuido?

Respuesta.- Ya que cada experimentos es independiente entonces

$$P(X \leq 4) = F(4; 10) = \sum_{i=0}^{4} \frac{e^{-10} \cdot 10^i}{i!} = 0.02925269$$

```
ppois(4,10)
```

```
## [1] 0.02925269
```

```
acum_poisson(4,10)
```

```
## [1] 0.02925269
```

Concluimos que si disminuyo los accidentes.

4.24

El departamento de protección del Ambiente ha adquirido 40 instrumentos de precisión para medir la contaminación del aire en distintas localidades. Se seleccionan aleatoriamente ocho instrumentos y se someten a una prueba para encontrar defectos. Si cuatro de los 40 instrumentos se encuentran defectuosos ¿cuál es la probabilidad de que la muestra contenga no más de un instrumento defectuoso?

Respuesta.- Sea $N = 40$ los instrumentos de precisión adquiridos de donde se estableció que $k = 4$ son defectuosos, para ello se selecciono $n = 8$ instrumentos y se quiere saber $P(X < 1) = P(X \leq 0)$ (ya que la función es discreta), entonces:

$$P(X \leq 0) = p(x; N, n, k) = p(0; 40, 8, 4) = \frac{\binom{4}{0}\binom{40-4}{8-0}}{\binom{40}{8}} = 0.3934785$$

```
choose(4,0)*choose(40-4,8-0)/choose(40,8)
```

```
## [1] 0.3934785
```

```
func_hiper(0,40,8,4)
```

```
## [1] 0.3934785
```

```
dhyper(0,4,40-4,8)
```

```
## [1] 0.3934785
```

4.25

Se sospecha que por causa de un error humano se han incluido en un embarque de 50 unidades, dos (o más) defectuosas. El fabricante admite el error y envía al cliente sólo 48 unidades. Antes de recibir el embarque, el cliente selecciona aleatoriamente cinco unidades y encuentra una defectuosa ¿Debe reclamar una indemnización al fabricante?

Respuesta.- Vemos que se mando $N = 50$ unidades de manera que $k = 2$ unidades son defectuosos, luego se selecciona una muestra de $n = 5$ unidades de donde $x = 1$ es defectuoso, entonces:

$$P(X = 1) = p(x; N, n, k) = p(1, 50, 5, 2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{50-2}{5-1}}{\binom{50}{5}} = 0.1836735$$

```r
choose(2,1)*choose(50-2,5-1)/choose(50,5)
```

```
## [1] 0.1836735
```

```r
func_hiper(1,50,5,2)
```

```
## [1] 0.1836735
```

```r
dhyper(1,2,50-2,5)
```

```
## [1] 0.1836735
```

Por lo que el cliente no debe reclamar una indemnización al fabricante.

4.26

Los jurados para una corte federal de distrito se seleccionan de manera aleatoria entre la lista de votantes del distrito. En un determinado mes se selecciona una lista de 25 candidatos. Ésta contiene los nombres de 20 hombres y cinco mujeres.

$$N = 25, \quad k = 20$$

a)

Si la lista de votantes se encuentra igualmente dividida por sexo. ¿cuál es la probabilidad de tener una lista que contenga a 20 hombres y cinco mujeres?

Respuesta.-

$$N = 25, \quad k = 15, \qquad n = 25, \quad x = 20$$

```r
dhyper(20,15,25-15,25)*dhyper(5,15,25-15,25)
```

```
## [1] 0
```

```r
dhyper(5,5,25-5,25)
```

```
## [1] 1
```

```r
dhyper(20,20,25-20,25)
```

```
## [1] 1
```

b)

Supóngase que de esta lista se elige un jurado de doce personas, de las cuales sólo una es mujer. ¿Cuál es la probabilidad de este hecho, si los miembros del jurado se seleccionan de manera aleatoria?

Respuesta.-

c)

Si el lector fuera el abogado de la defensa, ¿que podría argumentar mediante el empleo de las respuesta de la parte a y b?

Respuesta.-

4.27

Una compañia recibe un lote de 1000 unidades. Para aceptarlo se seleccionan diez unidades de manera aleatoria, y se inspeccionan. Si ninguna se encuentra defectuosa, el lote se acepta; de otro modo, se rechaza. Si el lote contiene un 5% de unidades defectuosas:

a)

Determinar la probabilidad de aceptarlo mediante el empleo de la distribución hipergeométrica.

Respuesta.- Sea $N = 1000$ $n = 10$ $P(X \leq 0)$ $k = 1000 * 0.05 = 50$, entonces

$$P(X \leq 0) = p(0, 1000, 10, 50) = \frac{\binom{50}{0}\binom{1000-50}{10-0}}{\binom{1000}{10}} = 0.5973113$$

```
choose(50,0)*choose(1000-50,10-0)/choose(1000,10)
```

```
## [1] 0.5973113
```

```
phyper(0,50,1000-50,10)
```

```
## [1] 0.5973113
```

b)

Aproximar la respuesta de la parte a mediante el empleo de la distribución binomial.

Respuesta.- Ya que $N \to \infty$ entonces,

$$P(X \leq 0) = p(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{10}{0} 0.05^0 \cdot (1-0.05)^{10-0} = 0.5987369$$

```
choose(10,0)*0.05^0*(1-0.05)^10
```

```
## [1] 0.5987369
```

```
dbinom(0,10,0.05)
```

```
## [1] 0.5987369
```

```
func_binom(0,10,0.05)
```

```
## [1] 0.5987369
```

c)

Aproximar la respuesta de la parte b mediante el empleo de la distribución de Poisson.

Respuesta.- Sea $\lambda = n \cdot p = 10 * 0.05 = 0.5$, entonces

$$P(X \leq 0) = p(0, 0.5) = \frac{e^{-0.5} \cdot 0.5^0}{0!} = 0.6065307$$

```
exp(-0.5)*0.05^0/factorial(0)
```

```
## [1] 0.6065307
```

```
dpois(0,0.5)
```

```
## [1] 0.6065307
```

4.28

En el ejercicio anterior, ¿cómo cambiarían las respuestas de la parte a, b y c si el tamaño del lote fuera de 40 unidades?

a)

Determinar la probabilidad de aceptarlo mediante el empleo de la distribución hipergeométrica.

Respuesta.- Sea $N = 40$ $n = 10$ $P(X \leq 0)$ $k = 40 * 0.05 = 2$, entonces

$$P(X \leq 0) = p(0, 40, 10, 2) = \frac{\binom{2}{0}\binom{40-2}{10-0}}{\binom{40}{10}} = 0.5576923$$

```
choose(2,0)*choose(40-2,10-0)/choose(40,10)
```

```
## [1] 0.5576923
```

```
phyper(0,2,40-2,10)
```

```
## [1] 0.5576923
```

b)

Aproximar la respuesta de la parte a mediante el empleo de la distribución binomial.

Respuesta.- Ya que $N = 40$ entonces,

$$P(X \leq 0) = p(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{10}{0} 0.05^0 \cdot (1 - 0.05)^{10-0} =$$

```
choose(10,0)*0.05^0*(1-0.05)^10
```

```
## [1] 0.5987369
```

```
dbinom(0,10,0.05)
```

```
## [1] 0.5987369
```

```
func_binom(0,10,0.05)
```

```
## [1] 0.5987369
```

c)

Aproximar la respuesta de la parte b mediante el empleo de la distribución de Poisson.

Respuesta.- Sea $\lambda = n \cdot p = 10 * 0.05 = 0.5$, entonces

$$P(X \leq 0) = p(0, 0.5) = \frac{e^{-0.5} \cdot 0.5^0}{0!} = 0.6065307$$

```
exp(-0.5)*0.05^0/factorial(0)
```

```
## [1] 0.6065307
```

```
dpois(0,0.5)
```

```
## [1] 0.6065307
```

4.29.

Considere las funciones de probabilidad binomial y binomial negativa dadas por las expresiones 4.1 y 4.34, respectivamente. Demostrar que:

$$p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k; x+k, p).$$

Demostración.- Sea

$$\frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{y} \qquad \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x$$

$$\begin{aligned}
p_{NB}(x;k,p) &= \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x \\
&= \frac{(k+x-1)!}{(k+x-1-k+1)!(k-1)!} p^k (1-p)^x \\
&= \frac{(x+k-1)!}{x!(k-1)!} p^k (1-p)^{x+k-k} \\
&= \frac{k}{x+k} \frac{(x+k+1-1)!}{x!(k-1+1)!} p^k (1-p)^{x+k-k} \\
&= \frac{k}{x+k} \cdot \frac{(x+k)!}{[(x+k)-k]!k!} p^k (1-p)^{x+k-k} \\
&= \frac{k}{x+k} p_B(k; x+k, p)
\end{aligned}$$

4.30.

Sea X una variable aleatoria binomial negativa con parámetros $k=3$ y $p=0.4$. Emplee el resultado del problema anterior para calcular las probabilidades puntuales para las siguientes valores de $X: 0,1,2,3$ y 5.

Respuesta.- Sea $k=3$ y $p=0.4$, entonces

- Para P(X=0)

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= p(0,3,0.4) \\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p) = p(3;0+3,0.4) \\
&= \frac{3}{0+3} \cdot \frac{(0+3)!}{(0+3-3)!3!} 0.4^3 (1-0.4)^{0+3-3} \\
&= 0.064
\end{aligned}$$

```
dnbinom(0,3,0.4)
```

```
## [1] 0.064
```

```
3/(0+3)*(factorial(0+3))/((factorial(0+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(0+3-3)
```

```
## [1] 0.064
```

```r
3/(0+3)*dbinom(3,0+3,0.4)
```

```
## [1] 0.064
```

- Para P(X=1)

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= p(1,3,0.4) \\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p) = p(3;1+3,0.4) \\
&= \frac{3}{1+3} \cdot \frac{(1+3)!}{(1+3-3)!3!} 0.4^3 (1-0.4)^{1+3-3} \\
&= 0.1152
\end{aligned}
$$

```r
dnbinom(1,3,0.4)
```

```
## [1] 0.1152
```

```r
3/(1+3)*(factorial(1+3))/((factorial(1+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(1+3-3)
```

```
## [1] 0.1152
```

```r
3/(1+3)*dbinom(3,1+3,0.4)
```

```
## [1] 0.1152
```

- Para P(X=2)

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= p(2,3,0.4) \\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p) = p(3;2+3,0.4) \\
&= \frac{3}{2+3} \cdot \frac{(2+3)!}{(2+3-3)!3!} 0.4^3 (1-0.4)^{2+3-3} \\
&= 0.13824
\end{aligned}
$$

```r
dnbinom(2,3,0.4)
```

```
## [1] 0.13824
```

```r
3/(2+3)*(factorial(2+3))/((factorial(2+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(2+3-3)
```

```
## [1] 0.13824
```

```r
3/(2+3)*dbinom(3,2+3,0.4)
```

```
## [1] 0.13824
```

- Para P(X=3)

$$
\begin{aligned}
P(X=3) &= p(3,3,0.4)\\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p) = p(3;3+3,0.4)\\
&= \frac{3}{3+3}\cdot\frac{(3+3)!}{(3+3-3)!3!}0.4^3(1-0.4)^{3+3-3}\\
&= 0.13824
\end{aligned}
$$

```r
dnbinom(3,3,0.4)
```

```
## [1] 0.13824
```

```r
3/(3+3)*(factorial(3+3))/((factorial(3+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(3+3-3)
```

```
## [1] 0.13824
```

```r
3/(3+3)*dbinom(3,3+3,0.4)
```

```
## [1] 0.13824
```

- Para P(X=5)

$$
\begin{aligned}
P(X=5) &= p(5,3,0.4)\\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p) = p(3;5+3,0.4)\\
&= \frac{3}{5+3}\cdot\frac{(5+3)!}{(5+3-3)!3!}0.4^3(1-0.4)^{5+3-3}\\
&= 0.1045094
\end{aligned}
$$

```r
dnbinom(5,3,0.4)
```

```
## [1] 0.1045094
```

```r
3/(5+3)*(factorial(5+3))/((factorial(5+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(5+3-3)
```

```
## [1] 0.1045094
```

```r
3/(5+3)*dbinom(3,5+3,0.4)
```

```
## [1] 0.1045094
```

4.31

Greenwood y Yule dieron a conocer el número de accidentes ocurrido entre 414 operadores de maquinaria, en un periodo de tres meses consecutivos. En la tabla la primera columna indica el número de accidentes sufridos por un mismo operador, y la segunda indica la frecuencia relativa para aquellos que habían sufrido la cantidad de accidentes indicada en el lapso de tres meses.

Con el procedimiento del ejemplo 4.10, comparar las frecuencias relativas observadas con las correspondientes probabilidades si el número de accidentes es una variable aleatoria binomial negativa.

Respuesta.- Sea $x = 0$, $E(X) = 0.08333333$, $Var(X) = 0.007143697$ entonces,

$$p = \frac{E(X)}{Var(X)} = \frac{0.08333333}{0.007143697} = 0.4889976$$

$$y$$

$$k = \frac{E(X)^2}{Var(X) - E(X)} = \frac{0.08333333^2}{0.007143697 - 0.08333333} = 0.4593301$$

sea $\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\, du, \ \ n > 0$, y dado que k no es entero entonces,

$$p(x; k, p) = \frac{\Gamma(k + x)}{x!\Gamma(k)} p^k(1 - p)^x = \frac{\Gamma(0.4593301 - 0)}{0!\Gamma(0.4593301)} 0.4889976^{0.4593301}(1 - 0.4889976)^0 = 0.7199282179$$

El mismo procedimiento para las demás x.

```
x = c(0,1,2,3,4,5,6,7,8)
fr = c(0.715,0.179,0.063,0.019,0.010,0.010,0.002,0.000,0.002)
EX = function(x,fr){
  e = 0
  for(i in 1:length(x)){
    e = e + x[i]*fr[i]
  }
  return(e)
}
EX2 = function(x,fr){
  e = 0
  for(i in 1:length(x)){
    e = e + x[i]^2*fr[i]
  }
  return(e)
}
m = EX(x,fr)
v = EX2(x,fr)-EX(x,fr)^2
p = m/v
k = m^2/(v-m)
teo = c()
for(i in 0:8){
  teo = c(teo,(gamma(k+i)/(factorial(i)*gamma(k))) * p^k * (1-p)^i)
}
t = data.frame(x,fr,teo)
colnames(t) = c("x","Freq relativa","Prob teórica")
t
```

```
##   x Freq relativa Prob teórica
## 1 0         0.715 0.7199282179
## 2 1         0.179 0.1689807064
## 3 2         0.063 0.0630062536
## 4 3         0.019 0.0263938177
## 5 4         0.010 0.0116642605
## 6 5         0.010 0.0053159368
## 7 6         0.002 0.0024716723
## 8 7         0.000 0.0011654760
## 9 8         0.002 0.0005553108
```

4.32

Un contador recientemente graduado pretende realizar el examen CPA. Si el número de veces que se hace el examen constituye un conjunto de eventos independientes con una probabilidad de aprobar a 0.6, ¿cuál es la probabilidad de que no se necesiten más de cuatro intentos para aprobar el examen? ¿Son válidas las suposiciones de independencia y probabilidad constante?

Respuesta.- Ya que $K = 1$ surge un caso especial de la distribución binomial negativa, que se conoce con el nombre de distribución geométrica y cuya función de probabilidad está dada por

$$p(x;p) = p(1-p)^x$$

Sabiendo que esta variable geométrica representa el número de fallas que ocurren antes de que se presente el primer éxito, y que nosotros tenemos que calcular la probabilidad hasta el primer éxito entonces la función acumulada estará dada por

$$P(X \leq 4) = F(x;p) = 1-(1-p)^x = 1-(1-0.6)^4 = 0.9744$$

```
pgeom(4-1,0.6)
```

```
## [1] 0.9744
```

```
1-(1-0.6)^4
```

```
## [1] 0.9744
```

Efectivamente son válidas las suposiciones de independencia y probabilidad constante, debido a que éstas distribuciones se derivan de la distribución binomial.

4.33

En un departamento de control de calidad se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una linea de ensamble. Se piensa que la proposición de unidades defectuosas es de 0.05.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentre defectuosa?

Respuesta.- Sean $P(X = 20)$, $k = 2$ y $p = 0.05$ por la función binomial negativa tenemos,

$$P(X=20) = p(x;k,p) = \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x = p(20;2,0.05) = \binom{2+20-1}{2-1} 0.05^2 (1-0.05)^{20} = 0.01882$$

```
dnbinom(20,2,0.05)
```

```
## [1] 0.01882051
```

b)

Supóngase que la décimo quinta unidad inspeccionada es la segunda que se encuentra defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de este hecho bajo condiciones determinadas?

Respuesta.- Similar al inciso a)

$$P(X=15) = p(x;k,p) = \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x = p(20;2,0.05) = \binom{2+15-1}{2-1} 0.05^2 (1-0.05)^{15} = 0.01853165$$

```r
dnbinom(15,2,0.05)
```

```
## [1] 0.01853165
```

4.33

De las distribuciones binomial, Poisson, hipergeometrica y binomial negativa, ¿cuáles no consideraría si alguien le dijera, de una distribución en particular que:

a)

¿La media es igual a la varianza?

Respuesta.- No consideraría a las distribuciones binomial, hipergeométrica y binomial negativa.

b)

¿La media es más grande que la varianza?

Respuesta.- no consideraría a la distribución de Poisson.

c)

¿La media es menor a la varianza?

Respuesta.- Todas son consideradas.

d)

El tercer momento, alrededor de la media, ¿es negativo?

Respuesta.- no consideraría a las distribuciones binomial, Poisson y binomial negativa.

e)

¿El fenómeno aleatorio de interés constituye un grupo de ensayos independientes?

Respuesta.- no consideraría a las distribuciones binomial, Poisson y binomial negativa.

f)

¿El muestreo se lleva a cabo con reemplazo?

Respuesta.- no consideraría a las distribuciones hipergeométrica y Poisson.

g)

¿El muestreo se lleva a cabo sin reemplazo?

Respuesta.- No se consideraría a las distribuciones binomial, binomial negativa y Poisson

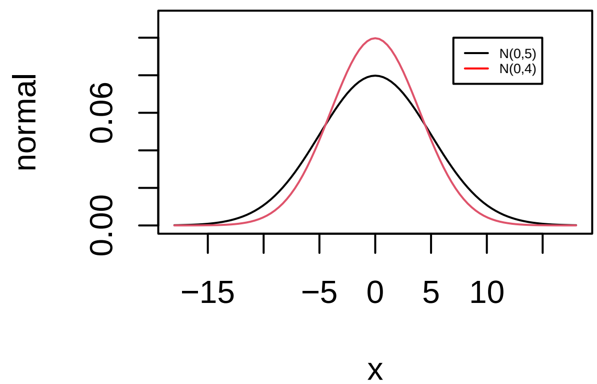
Ejercicios Capítulo 5

5.1.

En la misma gráfica, dibujar las distribuciones normales $N(0,5)$ y $N(0,4)$

Respuesta.-

```
curve(dnorm(x, mean=0, sd=5), ylim =c(0,.11) ,from = -18, to = 18, ylab = "normal")
curve(dnorm(x, mean=0, sd=4),  add = TRUE, col = 2)
legend(7, .1, legend=c("N(0,5)", "N(0,4)"),
       col=c("black", "red"), lty=1:1, cex=0.4)
```



5.2.

Sea $X \sim N(50,10)$. Determinar las siguientes probabilidades

a)

$P(X < 40)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z < (40-50)/10] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{40-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = 0.1586553.$$

```
pnorm(40,50,10)
```

```
## [1] 0.1586553
```

```
integrate(function(x) (1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2),-Inf,(40-50)/10)
```

```
## 0.1586553 with absolute error < 4.8e-07
```

```
1/(sqrt(2*pi))*(-exp(-((-1)^2/2)) + exp(-(-Inf)^2/2))
```

```
## [1] -0.2419707
```

b)

$P(X < 65)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z < (65-50)/10] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{65-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = 0.9331928$$

```r
pnorm(65,50,10)
```

```
## [1] 0.9331928
```

```r
integrate(function(x) (1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2),-Inf,(65-50)/10)
```

```
## 0.9331928 with absolute error < 1.1e-07
```

c)

$P(X > 55)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z > (55-50)/10] = 1 - P[Z \leq (55-50)/10] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{55-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.3085375$$

```r
pnorm(55,50,10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3085375
```

d)

$P(X > 35)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z > (35-50)/10] = 1 - P[Z \leq (35-50)/10] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{35-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.93319285$$

```r
pnorm(35,50,10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.9331928
```

e)

$P(40 < X < 45)$

Respuesta.-

$$P(40 < X < 45) = P\left(\frac{40-50}{10} < Z < \frac{45-50}{10}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{45-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{40-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.1498823.$$

```r
pnorm(45,50,10) - pnorm(40,50,10)
```

```
## [1] 0.1498823
```

f)

$P(38 < X < 62)$

Respuesta.-

$$P(38 < X < 62) = P\left(\frac{38-50}{10} < Z < \frac{62-50}{10}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{62-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{38-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.7698607.$$

```r
pnorm(62,50,10) - pnorm(38,50,10)
```

```
## [1] 0.7698607
```

5.3.

Sea $X \sim N(200, 20)$. Determinar las siguientes probabilidades:

a)

P(185<X<210)

Respuesta.-

$$P\left(\frac{185-200}{20} < Z < \frac{210-200}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{210-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{185-210}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.4648351.$$

```r
pnorm(210,200,20)-pnorm(185,200,20)
```

```
## [1] 0.4648351
```

b)

P(215<X<250)

Respuesta.-

$$P\left(\frac{215-200}{20} < Z < \frac{250-200}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{250-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{215-210}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.2204177.$$

```r
pnorm(250,200,20)-pnorm(215,200,20)
```

```
## [1] 0.2204177
```

c)

P(X>240)

Respuesta.-

$$P\left(Z > \frac{240-200}{20}\right) = P1 - \left(Z \leq \frac{240-200}{20}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{240-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.02275013.$$

```r
pnorm(240,200,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02275013
```

d)

P(X>178)

Respuesta.-

$$P\left(Z > \frac{178-200}{20}\right) = P1 - \left(Z \leq \frac{178-200}{20}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{178-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.8643339.$$

```r
pnorm(178,200,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.8643339
```

5.4.

Sea $X \sim N(-25, 10)$. Encontrar los valores de x que corresponden a las siguientes probabilidades:

a)

$P(X < x) = 0.1251$. Respuesta.- Viendo la tabla z tenemos

$$z = \frac{x + 25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = -1.15 \cdot 10 - 25 = -35.5$$

```r
qnorm(0.1251)*10-25
```

```
## [1] -36.49864
```

b)

$P(X < x) = 0.9382$ Respuesta.-

$$z = \frac{x + 25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 1.54 \cdot 10 - 25 = -9.6$$

```r
qnorm(0.9382)*10-25
```

```
## [1] -9.601626
```

c)

$P(X > x)00.3859$ Respuesta.-

$$z = \frac{x + 25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = -0.29 \cdot 10 - 25 = -27.9$$

```r
qnorm(0.3859)*10-25
```

```
## [1] -27.90021
```

d)

$P(X > x)00.8340$ Respuesta.-

$$z = \frac{x + 25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 0.97 \cdot 10 - 25 = .15.3$$

```r
qnorm(0.8340)*10-25
```

```
## [1] -15.29907
```

5.5.

Sea $X \sim N(10, 5)$. Encontrar los valores de x que corresponden a las siguientes probabilidades:

a)

$P(X < x) = 0.05$ Respuesta.-

$$z = \frac{x-10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -1.645 \cdot 5 + 10 = 1.775$$

```
qnorm(0.05)*5+10
```

```
## [1] 1.775732
```

b)

$P(X < x) = 0.95$ Respuesta.-

$$z = \frac{x-10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 1.645 \cdot 5 + 10 = 18.225$$

```
qnorm(0.95)*5+10
```

```
## [1] 18.22427
```

c)

$P(X < x) = 0.99$ Respuesta.-

$$z = \frac{x-10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 2.33 \cdot 5 + 10 = 21.65$$

```
qnorm(0.99)*5+10
```

```
## [1] 21.63174
```

d)

$P(X < x) = 0.01$ Respuesta.-

$$z = \frac{x-10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -2.33 \cdot 5 + 10 = -1.65$$

```
qnorm(0.01)*5+10
```

```
## [1] -1.631739
```

e)

$P(X < x) = 0.025$ Respuesta.-

$$z = \frac{x-10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -1.96 \cdot 5 + 10 = 0.2$$

```
qnorm(0.025)*5+10
```

```
## [1] 0.2001801
```

f)

$P(X < x) = 0.975$

Respuesta.-

$$z = \frac{x-10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 1.96 \cdot 5 + 10 = 19.8$$

```
qnorm(0.975)*5+10
```

```
## [1] 19.79982
```

5.6.

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$. Determinar la media y la varianza de X si los cuantiles son $x_{0.4} = 50$ y $x_{0.8} = 100$.

Respuesta.- Sea $z_1 = \dfrac{x_{0.4} - \mu}{\sigma} \qquad z_2 = \dfrac{z_{0.8} - \mu}{\sigma}$, entonces

$$\frac{50-\mu}{z_1} = \frac{100-\mu}{z_2}$$

Así,

$$\mu = \frac{100z_1 - 50z_2}{z_1 - z_2} = \frac{100 \cdot (-0.225) - 50 \cdot 0.845}{-0.225 - 0.845} = 60.51402$$

Luego reemplazamos μ en z_1 para hallar σ,

$$\sigma = \frac{x_{0.4} - \mu}{z_1} = \frac{50 - 60.51402}{-0.225} = 46.72898$$

```
mu = (100*qnorm(0.4)-50*qnorm(0.8))/(qnorm(0.4)-qnorm(0.8))
mu
```

```
## [1] 61.5687
```

```
(50-mu)/qnorm(0.4)
```

```
## [1] 45.66342
```

5.7.

Una universidad espera recibir, para el siguiente año escolar, 16000 solicitudes de ingreso el primer año de licenciatura. Se supone que las calificaciones obtenidas por los aspirantes en la prueba SAT se pueden calcular, de manera adecuada, por una distribución normal con media 950 y desviación estándar 100. Si la universidad decide admitir al 25% de todos los aspirantes que obtengan las calificaciones más altas en la prueba SAT, ¿cuál es la mínima calificación que es necesario obtener en esta prueba, para ser admitido por la universidad?

Respuesta.- Sea $P(X > x_{0.25})$ entonces $P(X < x_{0.75}) = -1.96$ así

$$x_{0.75} = 0.675 * 100 + 950 = 1017.5 \simeq 1018$$

```
qnorm(0.75)*100+950
```

```
## [1] 1017.449
```

5.8.

Una fábrica produce pistones cuyos diámetros se encuentran adecuadamente clasificados por una distribución normal con un diámetro promedio de 5 cm y una desviación estándar igual a 0.001 cm. Para que un pistón sirva, su diámetro debe encontrarse entre 4.998 y 5.002 cm. Si el diámetro del pistón es menor que 4.998 se desecha; si es mayor que 5.002 el pistón puede reprocesarse. ¿Qué porcentaje de pistones servirá? ¿Qué porcentaje será desechado? ¿Qué porcentaje será reprocesado?.

Respuesta.- Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ de donde, el porcentaje que servirá vendrá dado por

$$P\left(\frac{4.998-5}{0.001} \leq Z \leq \frac{5.002-5}{0.001}\right)$$

entonces,

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = F_Z(2,0,1) - F_Z(-2,0,1) = 0.9772 - 0.0228 = 0.9544.$$

```
pnorm((5.002-5)/0.001)-pnorm((4.998-5)/0.001)
```

```
## [1] 0.9544997
```

El porcentaje que será desechado viene dado por:

$$P(Z \leq -2) = F_Z(-2;0,1) = 0.0228.$$

```
pnorm((4.998-5)/0.001)
```

```
## [1] 0.02275013
```

El porcentaje que será reprocesado está dado por:

$$P(Z \geq 2) = 1 - F_Z(2;0,1) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

```
pnorm((5.002-5)/0.001, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02275013
```

5.9.

La demanda mensual de cierto producto A tiene una distribución normal con una media de 200 unidades y desviación estándar igual a 40 unidades. La demanda de otro producto B también tiene una distribución normal con media de 500 unidades y desviación estándar igual a 80 unidades. Un comerciante que vende estos productos tiene en su almacén 280 unidades de A y 650 de B al comienzo de un mes, ¿cuál es la probabilidad de que, en el mes, se vendan todas las unidades de ambos productos? Puede suponerse independencia entre ambos eventos.

Respuesta.- Sea $z_A = \dfrac{280-200}{40} = 2$ y $z_B = \dfrac{650-500}{80} = 1.875$, entonces para hallar la probabilidad de que se vendan ambos productos estará dado por

$$P(Z_A \geq 2) \cdot P(Z_B \geq 1.875) = [1 - F_{Z_A}(2;0,1)] \cdot [1 - F_{Z_B}(1.875;0,1)] = (1-0.9772)(1-0.9696) = 0.00069312$$

```
pnorm((280-200)/40,lower.tail = FALSE)*pnorm((650-500)/80,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0006915212
```

5.10.

El peso de cereal que contiene una caja se aproxima a una distribución normal con una media de 600 gramos. El proceso de llenado de las cajas está diseñado para que de entre 100 cajas, el peso de una se encuentre fuera del intervalo 590-610 gramos. ¿Cuál es el valor máximo de la desviación estándar para alcanzar este requerimiento?

Respuesta.- Si una caja de entre 100 (1/100) queda fuera del intervalo $590 - 610$ entonces lo que queda dentro estará dado por $(99/100) = 0.99$. Sabemos que la distribución Normal estandarizada es simétrica respecto al 0, por lo que,

$$P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right)$$

Luego, ya que

$$P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right)$$

entonces,

$$P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.99 \quad \Rightarrow \quad P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.495$$

Pero $P(Z \geq 0) = -F_Z(Z \leq 0) = -0.5$ de donde

$$P\left(Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) - 0.5 \geq 0.495 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.995$$

Así,

$$z \geq 2.58 \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{\sigma} \geq 2.58 \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq 3.876.$$

Por lo que el valor máximo de σ para alcanzar el requerimiento estará dado por 3.876.

5.11

En una tienda de descuento la demanda diaria de acumuladores para automóvil se calcula mediante una distribución normal con una media de 50 acumuladores que tienen una desviación estándar de 10. En dos días consecutivos se venden 80 y 75 acumuladores respectivamente. Si estos días son típicos, ¿qué tan probable es, bajo las suposiciones dadas, vender 80 o más y 75 o más acumuladores?

Respuesta.- Sea $X \sim N(50, 10)$ entonces

$$\begin{aligned}
P(X_1 \geq 80) \cdot P(X_2 \geq 75) &= \left(Z_1 \geq \frac{80-50}{10}\right) \cdot P\left(Z_2 \geq \frac{75-50}{10}\right) \\
&= [1 - F_{Z_1}(3; 0, 1)] \cdot [1 - F_{Z_2}(2.5; 0, 1)] \\
&= (1 - 0.9987) \cdot (1 - 0.9938) \\
&= 0.00000806.
\end{aligned}$$

```
pnorm((80-50)/10,lower.tail = FALSE) * pnorm((75-50)/10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 8.382415e-06
```

5.12.

Un fabricante de aviones desea obtener remaches para montar los propulsores de sus aviones. El esfuerzo a la tensión mínimo necesario de cada remache es de 25000 lb. Se pide a tres fabricantes de remaches (A,B y C) que proporcionen toda la información pertinente con respecto a los remaches que producen. Los tres fabricantes aseguran que la resistencia a la tensión de sus remaches se encuentran distribuida, de manera aproximada, normalmente con un valor medio de $28000, 30000$ y 29000 lb, respectivamente.

a)

¿Tiene el fabricante la suficiente información para hacer una selección?

Respuesta.- No, ya qua no se definio la desviación estándar.

b)

Supóngase que las desviaciones estándar para A, B y C son $1000, 1800$ y 1200, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que un remache producido ya sea por A, B o C no reúna los requisitos mínimos?

Respuesta.- Para $X_A \sim N(28000, 1000)$ se tiene

$$P(X_A \leq 25000) = P\left(Z_A \leq \frac{25000 - 28000}{1000}\right) = F_{Z_A}(-3; 0, 1) = 0.0013.$$

```
pnorm((25000-28000)/1000)
```

```
## [1] 0.001349898
```

Para $X_B \sim N(30000, 1800)$ se tiene

$$P(X_B \leq 25000) = P\left(Z_B \leq \frac{25000 - 30000}{1800}\right) = F_{Z_B}(-2.78; 0, 1) = 0.0027$$

```
pnorm((25000-30000)/1800)
```

```
## [1] 0.002736602
```

Para $X_C \sim N(29000, 1200)$ se tiene

$$P(X_C \leq 25000) = P\left(Z_C \leq \frac{25000 - 29000}{1200}\right) = F_{Z_C}(-3.33; 0, 1) = 0.0004$$

```
pnorm((25000-29000)/1200)
```

```
## [1] 0.0004290603
```

c)

Si usted fuera el fabricante de aviones, ¿podría elegir entre A, B y C, con base a sus respuesta al inciso b)? ¿Por qué?.

Respuesta.- Escogería a C ya que tiene la probabilidad más baja de que se rompa un remache.

5.13.

Un fabricante de escapes para automóviles desea garantizar su producto durante un periodo igual al de la duración del vehículo. El fabricante supone que el tiempo de duración de su producto es una variable aleatoria con una distribución normal, con una vida promedio de tres años y una desviación estándar de seis meses. Si el costo de reemplazo por unidad es de $10, ¿cuál puede ser el costo total de reemplazo para los primeros dos años, si se instalan 1000000 unidades?

Respuesta.- Sea $\mu = 3$ y $\sigma = 0.5$, entonces

$$P(X \leq 2) = P(Z \leq \frac{2-3}{0.5}) = P(Z \leq -2) = F_Z(-2; 0, 1) = 0.0228.$$

Ahora ya que el costo de reemplazo es de %10, de donde sólo el 2.28% de 1000000 será cambiado entonces el costo total de reemplazo estará dado por:

$$1000000 * 0.0228 * 10 = 228000.$$

```
pnorm((2-3)/0.5)*1000000*10
```

```
## [1] 227501.3
```

5.14.

El tiempo necesario para armar cierta unidad es una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 30 minutos y desviación estándar igual a dos minutos. Determinar el tiempo de armado de manera tal que la probabilidad de exceder este sea de 0.02.

Respuesta.- Sea $\mu = 30$ y $\sigma = 2$, entonces

$$P\left(Z \geq \frac{T-30}{2}\right) = 0.02 \;\Rightarrow\; 1 - F_Z(T) = 0.02 \;\Rightarrow\; F_Z(T) = 0.98 \;\Rightarrow\; \frac{T-30}{2} = 2.06 \;\Rightarrow\; T = 34.12.$$

```
2*qnorm(0.02,lower.tail = FALSE)+30
```

```
## [1] 34.1075
```

5.15.

Un periódico llevó a cabo una encuesta entre 400 personas seleccionadas aleatoriamente, en un estado, sobre el control de armas. De las 400 personas, 220 se pronunciaron en favor de un estricto control.

a)

¿Qué tan probable resulta el hecho de tener 220 o más personas a favor del control de armas, si la población en este estado se encuentra dividida en opinión de igual manera?.

Respuesta.- Sea, $p = 0.5$, $\mu = np = 400 \cdot 0.5 = 200$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 10$, entonces

$$P\left(Z \geq \frac{220-200}{10}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - F_Z(2; 0, 1) = 0.0228.$$

```
pnorm((220-200)/10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02275013
```

b)

Supóngase que se encuesta a 2000 personas teniendo la misma proporción de estas a favor del control de armas, que la del inciso anterior. ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso a)?.

Respuesta.- Sea, $p = 0.5$, $\mu = np = 2000 \cdot 0.5 = 1000$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2000 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \sqrt{500}$, entonces dado que la proporción es de $220/400 = 0.55$

$$P(X \geq 1100) = P\left(Z \geq \frac{1100 - 1000}{\sqrt{500}}\right) = P(Z \geq 4.47) = 1 - F_Z(4.47; 0, 1) = 0$$

```
pnorm((1100-1000)/sqrt(500),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 3.872108e-06
```

c)

Si el número de personas encuestadas es de 10000, ¿cuál es la probabilidad de tener una ocurrencia diferente al del inciso b)?.

Respuesta.- Sea, $p = 0.5$, $\mu = np = 10000 \cdot 0.5 = 5000$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10000 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 50$, entonces dado que la proporción es de $220/400 = 0.55$

$$P(X \geq 5500) = P\left(Z \geq \frac{5500 - 5000}{50}\right) = P(Z \geq 10) = 1 - F_Z(10; 0, 1) = 0$$

```
pnorm((5500-5000)/50,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 7.619853e-24
```

5.16.

Una prueba de opción múltiple contiene 25 preguntas y cada una de estas cinco opciones. ¿Cuál es la probabilidad de que, al contestar de manera aleatoria cada pregunta, más de la mitad de las respuetas sea incorrecta?

Respuesta.- Sea $p = 4/5$ la probabilidad de contestar una pregunta mal y dado que $\mu = np = 25 \cdot \dfrac{4}{5} = 20$ y $\sigma = \sqrt{25 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{5}} = 2$, entonces

$$P(X \geq 13) = P\left(Z \geq \frac{13 - 20}{2}\right) = 1 - F_Z(-3.5) = 1 - 0.0002 = 0.9998$$

```
pnorm((13-20)/2,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.9997674
```

5.17.

Una organización llevó a cabo una encuesta entre 1600 personas, seleccionadas de manera aleatoria de toda la población del país, para conocer su opinión con respecto a la seguridad en las plantas de energía nuclear. De este grupo, el 60% opinó que las plantas de energía nuclear tienen muy poca seguridad. Con base en estos resultados ¿existe alguna razón para dudar que la población en general tiene una opinión neutral con respecto a este asunto?.

Respuesta.- Sea $\mu = 1600 \cdot 0.6 = 960$ y $\sigma = \sqrt{1600 * 0.4 * (1 - 0.4)} = \sqrt{384}$, entonces

$$P(X \leq 800) = P\left(Z \leq \frac{800-960}{\sqrt{384}}\right) = P(-160/\sqrt{384}; 0, 1) = 0.$$

```
pnorm((800-1600*0.6)/sqrt(1600*0.4*(1-0.4)))
```

```
## [1] 1.607631e-16
```

Si existe ya que la probabilidad es prácticamente 0.

5.18.

Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente.

a)

Para $n=15,\ p=0.25$ y $n=15$ y $p=0.5$, calcular las siguientes probabilidades:

Respuesta.-

P(X=8)

$$P(X=8) = p(8; 15, 0.25) = \binom{15}{8} \cdot 0.25^8 \cdot (1-0.25)^{15-8} = 0.01310682$$

```
choose(15,8)*0.25^(8)*(1-0.25)^(15-8)
```

```
## [1] 0.01310682
```

```
dbinom(8,15,0.25)
```

```
## [1] 0.01310682
```

$$P(X=8) = p(8; 15, 0.5) = \binom{15}{8} \cdot 0.5^8 \cdot (1-0.5)^{15-8} = 0.1963806$$

```
choose(15,8)*0.5^(8)*(1-0.5)^(15-8)
```

```
## [1] 0.1963806
```

```
dbinom(8,15,0.5)
```

```
## [1] 0.1963806
```

P(X<=3)

$$P(X \leq 3) = F(3; 15, 0.25) = \sum_{i=0}^{3} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0.4612869$$

```
pbinom(3,15,0.25)
```

```
## [1] 0.4612869
```

$$P(X \leq 3) = F(3; 15, 0.5) = \sum_{i=0}^{3} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.01757813$$

```
pbinom(3,15,0.5)
```

```
## [1] 0.01757813
```

P(X<=7)

$$P(X \leq 7) = F(7; 15, 0.25) = \sum_{i=0}^{7} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0.9827002$$

```
pbinom(7,15,0.25)
```

```
## [1] 0.9827002
```

$$P(X \leq 7) = F(8; 15, 0.5) = \sum_{i=0}^{7} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.5$$

```
pbinom(7,15,0.5)
```

```
## [1] 0.5
```

P(X>=9)

$$P(X \geq 9) = 1-P(X < 9) = 1-P(X \leq 8) = 1-F(8; 15, 0.25) = 1-\sum_{i=0}^{8} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0.004193014$$

```
pbinom(8,15,0.25,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.004193014
```

$$P(X \geq 9) = F(9; 15, 0.5) = 1-P(X < 9) = 1-P(X \leq 8) = 1-\sum_{i=0}^{8} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.3036194$$

```
pbinom(8,15,0.5,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3036194
```

P(X>=12)

$$P(X \geq 12) = 1-P(X < 12) = 1-P(X \leq 11) = 1-F(11; 15, 0.25) = 1-\sum_{i=0}^{11} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0$$

```
pbinom(12,15,0.25,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 9.229407e-07
```

$$P(X \geq 12) = F(12; 15, 0.5) = 1-P(X < 12) = 1-P(X \leq 11) = 1-\sum_{i=0}^{11} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.01757813$$

```
pbinom(11,15,0.5,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.01757813
```

b)

Aproxímense los valores de las probabilidades anteriores mediante el empleo de la distribución normal.

P(X=8)

$$P(X=8) = P\left(Z = \frac{8-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot (1-0.25)}}\right) = p(2.53;0,1) = 0$$

```
dnorm((8-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))))
```

```
## [1] 0.01608208
```

$$P(X=8) = P\left(Z = \frac{8-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot (1-0.5)}}\right) = p(2.25;0,1) = 0$$

P(X<=3)

$$P(X\leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot (1-0.25)}}\right) = p(-0.447;0,1) = 0.328$$

```
pnorm((3-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))))
```

```
## [1] 0.3273604
```

$$P(X\leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot (1-0.5)}}\right) = p(-2.32;0,1) = 0.0102$$

```
pnorm((3-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))))
```

```
## [1] 0.01006838
```

P(X<=7)

$$P(X\leq 7) = P\left(Z \leq \frac{7-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot (1-0.25)}}\right) = p(1.937;0,1) = 0.9735$$

```
pnorm((7-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))))
```

```
## [1] 0.9736838
```

$$P(X\leq 7) = P\left(Z \leq \frac{7-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot (1-0.5)}}\right) = p(-0.258;0,1) = 0.397$$

```
pnorm((7-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))))
```

```
## [1] 0.3981267
```

P(X>=9)

$$P(X\geq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot (1-0.25)}}\right) = 1 - p(3.13;0,1) = 0$$

```
pnorm((9-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0008725593
```

$$P(X\leq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot (1-0.5)}}\right) = 1 - p(0.77;0,1) = 1 - 0.7794 = 0.2206$$

```
pnorm((9-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.219289
```

P(X>=12)

$$P(X \geq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9 - 15 \cdot 0.25}{\sqrt{15 \cdot 0.25 \cdot (1 - 0.25)}}\right) = 1 - p(4.91; 0, 1) = 0$$

```
pnorm((12-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 4.341614e-07
```

$$P(X \leq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9 - 15 \cdot 0.5}{\sqrt{15 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = 1 - p(2.32; 0, 1) = 1 - 0.9898 = 0.0102$$

```
pnorm((12-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.01006838
```

5.19.

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (a, b)

a)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre a una desviación estándar de la media?

Respuesta.- Sea $\sigma = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$ la desviación estándar de una distribución uniforme. Cabe mencionar que σ es la longitud de del subintervalo que queremos calcular. Dado que existe σ a la derecha y a la izquierda se tiene,

$$P(\sigma^- \leq X \leq \sigma^+) = 2 \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773503$$

```
punif(1/(sqrt(3)))
```

```
## [1] 0.5773503
```

b)

¿Puede tomar X un valor que se encuentre a dos desviaciones estándar de la media?

Repuesta.- No puedo, dado que tendríamos que multiplicar $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ por 4 el cual es mayor a 1.

5.20

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (a, b). ¿Cuál es la máxima distancia, en términos de la desviación estándar, a la que puede encontrarse un valor X a partir de la media?

Respuesta.- Sea x la máxima distnacia en terminos de la desviación estándar, entonces como se vio en el anterior ejercicio se tiene,

$$x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{3}$$

donde la distnacia máxima estará dada por $2\sqrt{3}$.

5.21

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intrevalo (a,b). Si $E(X)=10$ y $Var(X)=12$, encontrar los valores de a y de b.

Respuesta.- Sean $E(X)=\dfrac{a+b}{2}=10$ y $Var(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$, entonces

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{a+b}{2} & = & 10\\ \dfrac{(b-a)^2}{12} & = & 12\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl}a+b & = & 20\\ b-a & = & 12\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad a=4,\quad b=16.$$

5.22

Supóngase que la concentración de cierto contaminante se encuentra distribuida de manera uniforme en el intervalo de 4 a 20 ppm (partes por millón). Si se considera como tóxica una concentración de 15 ppm o más ¿Cuál es la probabilidad de que al tomarse una muestra la concentración de ésta sea tóxica?

Respuesta.- Sea $a=4$ y $b=20$ entonces,

$$P(X\geq 15)=1-P(X<15)=1-F(15;3,20)=1-\frac{15-4}{20-4}=0.3125$$

```
punif(15,4,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3125
```

5.23

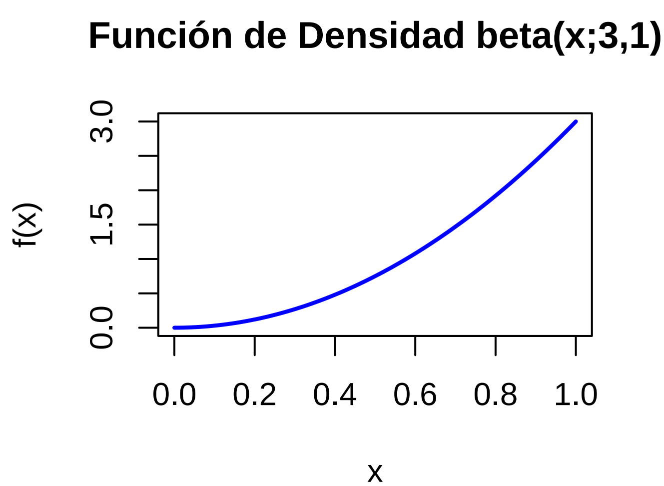
Sea X una variable aleatoria con distribución beta y parámetros $\alpha=3$ y $\beta=1$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad.

Respuesta.-

```
curve(dbeta(x,3,1),xlim=c(0,1),col="blue",lwd=2,
      xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad beta(x;3,1)")
```



b)

Obtener la media, la varianza, la desviación media, el coeficiente de asimetría y a curtosis relativa.

Respuesta.- La media de la distribución beta viene dada por

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+1} = 0.75$$

La varianza viene dada por

$$Var(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{3\cdot 1}{(3+1)^2(3+1+1)} = 0.0375$$

```
alpha=3
beta = 1
alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1))
```

```
## [1] 0.0375
```

Coeficiente de asimetría.

$$\alpha_3(X) = \frac{2(\beta-\alpha)\sqrt{\alpha+\beta+1}}{\sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta+2)} = \frac{2(1-3)\sqrt{3+1+1}}{\sqrt{3\cdot 1}(3+1+2)} = -0.860663.$$

```
alpha=3
beta = 1
(2*(beta-alpha)*sqrt(alpha+beta+1))/(sqrt(alpha*beta)*(alpha+beta+2))
```

```
## [1] -0.860663
```

Curtosis relativa

$$\alpha_3(X) = \frac{3(\alpha+\beta+1)\left[2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta(\alpha+\beta-6)\right]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} = \frac{3(3+1+1)\left[2(3+1)^2+3\cdot 1(3+1-6)\right]}{3\cdot 1(3+1+2)(3+1+3)} = 3.095238.$$

```
alpha=3
beta = 1
(3*(alpha+beta+1)*(2*(alpha+beta)^2+alpha*beta*(alpha+beta-6)))/
  (alpha*beta*(alpha+beta+2)*(alpha+beta+3))
```

```
## [1] 3.095238
```

c)

¿Cual es la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre dentro de una desviación estándar a partir de la media? ¿A dos desviaciónes estándar?

Respuesta.- Sean $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\sqrt{Var(x)} = \sqrt{\dfrac{3\cdot 1}{(3+1)^2(3+1+1)}} = \sqrt{0.0375}$ y $= E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \dfrac{3}{3+1} = 0.75$, entonces

$$
\begin{aligned}
P\left(0.75-\sqrt{0.0375} \leq X \leq 0.75+\sqrt{0.0375}\right) &= F\left(0.75+\sqrt{0.0375};3,1\right) - F\left(0.75-\sqrt{0.0375};3,1\right)\\
&= \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)}\int_0^{0.75+\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\,dt\\
&- \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)}\int_0^{0.75-\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\,dt\\
&= 0.6680896
\end{aligned}
$$

```
pbeta(sqrt(0.0375)+0.75,3,1) - pbeta(0.75-sqrt(0.0375),3,1)
```

```
## [1] 0.6680896
```

$$
\begin{aligned}
P\left(0.75-2\sqrt{0.0375} \leq X \leq 0.75+2\sqrt{0.0375}\right) &= F\left(0.75+2\sqrt{0.0375};3,1\right) - F\left(0.75-2\sqrt{0.0375};3,1\right)\\
&= \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)}\int_0^{0.75+2\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\,dt\\
&- \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)}\int_0^{0.75-2\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\,dt\\
&= 0.9522857.
\end{aligned}
$$

```
pbeta(2*sqrt(0.0375)+0.75,3,1) - pbeta(0.75-2*sqrt(0.0375),3,1)
```

```
## [1] 0.9522857
```

5.24.

Si los parámetros de la distribución beta son enteros, puede demostrarse que la función de distribución acumulativa beta se encuentra relacionada con la distribución binomial en la siguiente forma:

$$P(X<p) = I_p(\alpha,\beta) = \sum_{y=\alpha}^{n} \frac{n!}{(n-y)!y!}p^y(1-p)^{n-y},$$

en donde $n=\alpha+\beta-1$ y $0<p<1$. Si X es una variable aleatoria con una distribución beta con parámetros $\alpha=2$ y $\beta=3$, emplear la relación anterior para obtener $P(X<0.1)$, $P(X<0.25)$ y $P(X<0.5)$.

Respuesta.- Sea $n=2+3-1=4$ entonces

Para P(X<0.1)

$$P(X<0.1) = I_{0.1}(\alpha,\beta) = \sum_{y=2}^{4} \frac{4!}{(4-2)2!}0.1^2(1-0.1)^{n-2} = 0.0523.$$

```
a=2
b=3
n=a+b-1
p = 0.1
```

```r
sum=0
for(y in a:n){
  sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
sum
```

```
## [1] 0.0523
```

```r
pbeta(p,a,b)
```

```
## [1] 0.0523
```

Para P(X<0.25)

$$P(X < 0.1) = I_{0.25}(\alpha, \beta) = \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.25^2 (1-0.25)^{n-2} = 0.267188.$$

```r
a=2
b=3
n=a+b-1
p = 0.25
sum=0
for(y in a:n){
  sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
sum
```

```
## [1] 0.2617188
```

```r
pbeta(p,a,b)
```

```
## [1] 0.2617188
```

Para P(X<0.5)

$$P(X < 0.1) = I_{0.5}(\alpha, \beta) = \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.5^2 (1-0.5)^{n-2} = 0.6875.$$

```r
a=2
b=3
n=a+b-1
p = 0.5
sum=0
for(y in a:n){
  sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
sum
```

```
## [1] 0.6875
```

```r
pbeta(p,a,b)
```

```
## [1] 0.6875
```

5.25.

Tomando como referencia el ejercicio anterior, determinar la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre dentro de un intervalo igual a una desviación estándar de la media y posteriormente, de un intervalo igual a dos desviaciones estándar.

Respuesta.- Sean $n = 3 + 2 - 1 = 4$ y

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+2} = 0.6$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{3\cdot 2}{(3+2)^2(3+2+1)} = 0.04, \qquad \sqrt{Var(X)} = 0.2$$

```
alpha = 3
beta = 2
sqrt(alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1)))
```

```
## [1] 0.2
```

$$\begin{aligned} P(0.6-0.2 < X < 0.6+0.2) &= I_{0.8}(3,2) - I_{0.4}(3,2) \\ &= \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.8^2(1-0.8)^{n-2} - \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.4^2(1-0.4)^{n-2} \\ &= 0.64. \end{aligned}$$

```
beta=function(p,a,b){
  sum=0
  n=a+b-1
  for(y in a:n){
    sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
  return(sum)
}
beta(0.8,3,2)-beta(0.4,3,2)
```

```
## [1] 0.64
```

```
pbeta(0.8,3,2)-pbeta(0.4,3,2)
```

```
## [1] 0.64
```

Y para dos desviaciones estándar se tiene,

$$\begin{aligned} P(0.6-2\cdot 0.2 < X < 0.6+2\cdot 0.2) &= I_{1}(3,2) - I_{0.2}(3,2) \\ &= \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 1^2(1-1)^{n-2} - \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.2^2(1-0.2)^{n-2} \\ &= 0.9728. \end{aligned}$$

```r
beta=function(p,a,b){
  sum=0
  n=a+b-1
  for(y in a:n){
    sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
  return(sum)
}
beta(1,3,2)-beta(0.2,3,2)
```

```
## [1] 0.9728
```

```r
pbeta(1,3,2)-pbeta(0.2,3,2)
```

```
## [1] 0.9728
```

5.26.

La proporción de unidades defectuosas en un proceso de fabricación es una variable aleatoria que se encuentra aproximada por una distribución beta con $\alpha = 1$ y $\beta = 20$.

a)

¿Cuál es el valor de la media y de la desviación estándar?

Respuesta.-

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{1+20} = 0.04761905$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1\cdot 20}{(1+20)^2(1+20+1)} = 0.002061431, \qquad \sqrt{Var(X)} = 0.04540298$$

```r
alpha = 1
beta = 20
sqrt(alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1)))
```

```
## [1] 0.04540298
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos sea mayor que un 10%? ¿Mayor que un 15?.

Respuesta.-

Mayor que un 10%

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 0.1) &= 1 - F(x;\alpha,\beta) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt} \\
&= 1 - F(0.1;1,20) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^{0.1} t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt} = 0.1215767.
\end{aligned}
$$

```
bx = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,0.1)
b = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,1)
1-bx$value/b$value
```

```
## [1] 0.1215767
```

```
pbeta(0.1,1,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1215767
```

Mayor a 15%

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 0.1) &= 1 - F(x;\alpha,\beta) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt} \\
&= 1 - F(0.15;1,20) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^{0.15} t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt} = 0.03875953.
\end{aligned}
$$

```
bx = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,0.15)
b = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,1)
1-bx$value/b$value
```

```
## [1] 0.03875953
```

```
pbeta(0.15,1,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.03875953
```

5.27.

Aproxime su respuesta al inciso b) del ejercicio anterior mediante el empleo de la aproximación normal dada por la expresión

$$F(x;\alpha,\beta) = F_N(x_u,0,1) - F_N(z_t;0,1)$$

tal que

$$z_u = \frac{[\beta] - 0.5 - (\alpha+\beta-1)(1-x)}{[x(\alpha+\beta-1)(1-x)]^{1/2}},$$

$$z_t = -\frac{(\alpha+\beta-1)(1-x)+0.5}{[x(\alpha+\beta-1)(1-x)]^{1/2}},$$

y $[\beta]$ denota el entero más grande que no excesa a β.

Respuesta.- Sean $p = 0.1$,

$$z_u = \frac{[20]-0.5-(1+20-1)(1-0.1)}{[0.1(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} = 1.118034$$

y

$$z_t = -\frac{(1+20-1)(1-0.1)+0.5}{[0.1(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} - 13.78909$$

$$\begin{array}{rcl} P(X \geq 1) & = & 1 - F(x;1,20) \\ & = & 1 - F_N(1.118034;0,1) - F_N(-13.78909,0,1) \\ & = & 0.1317762 \end{array}$$

```
a = 1
b = 20
x = 0.1
zu = (floor(b)-0.5-(a+b-1)*(1-x)) / ((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
zt = -((a+b-1)*(1-x)+0.5)/((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
1-(pnorm(zu)-pnorm(zt))
```

```
## [1] 0.1317762
```

Sean $p = 0.15$,

$$z_u = \frac{[20]-0.5-(1+20-1)(1-0.15)}{[0.15(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} = 1.565561$$

y

$$z_t = -\frac{(1+20-1)(1-0.1)+0.5}{[0.1(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} = -10.95893$$

$$\begin{array}{rcl} P(X \geq 1) & = & 1 - F(x;1,20) \\ & = & 1 - F_N(1.565561;0,1) - F_N(-10.95893,0,1) \\ & = & 0.05872575. \end{array}$$

```
a = 1
b = 20
x = 0.15
zu = (floor(b)-0.5-(a+b-1)*(1-x)) / ((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
zt = -((a+b-1)*(1-x)+0.5)/((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
1-(pnorm(zu)-pnorm(zt))
```

```
## [1] 0.05872575
```

5.28.

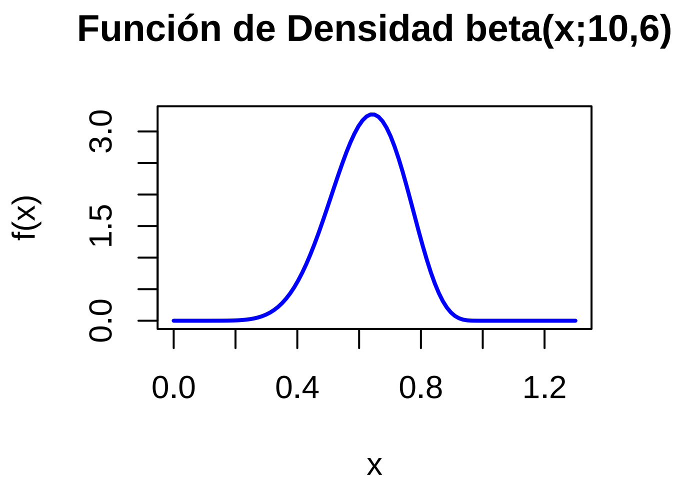
La comptencia en el mercado de una compañia de computadoras varía de manera aleatoria de acuerdo con una distribución beta con $\alpha = 10$ y $\beta = 6$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad

Respuesta.-

```r
curve(dbeta(x,10,6),xlim=c(0,1.3),col="blue",lwd=2,
xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad beta(x;10,6)")
```



b)

Encontrar la media y la desviación estándar.

Respuesta.-

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{10}{10+6} = 0.625$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{10\cdot 6}{(10+6)^2(10+6+1)} = 0.01378676, \qquad \sqrt{Var(X)} = 0.1174171.$$

```r
alpha = 10
beta = 6
sqrt(alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1)))
```

```
## [1] 0.1174171
```

c)

Obtener la probabilidad de que la competencia en el mercado sea menor que la media.

Respuesta.-

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 0.625) &= F(x;\alpha,\beta) = \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt} \\
&= F(0.625;10,6) = \frac{\displaystyle\int_0^{0.625} t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt} = 0.4826844.
\end{aligned}
$$

```
bx = integrate(function(x) x^{10-1}*(1-x)^{6-1},0,0.625)
b = integrate(function(x) x^{10-1}*(1-x)^{6-1},0,1)
bx$value/b$value
```

```
## [1] 0.4826844
```

```
pbeta(0.625,10,6)
```

```
## [1] 0.4826844
```

d)

Encontrar la probabilidad de que la competencia en el mercado se encuentre dentro de una desviación estándar de la media, y posteriormente de un intervalo igual a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Para una desviación estándar se tiene, $\sqrt{Var(X)} = 0.1174171$ entonces

$$
\begin{aligned}
P(0.625 - 0.1174171 \leq X \leq 0.625 + 0.1174171) &= F(X \leq 0.7424171;10,6) - F(X \leq 0.5075829;10,6) \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{0.7424171} t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt} \\
&+ \frac{\displaystyle\int_0^{0.5075829} t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt} \\
&= 0.6692339.
\end{aligned}
$$

```
pbeta(0.7424171,10,6) - pbeta(0.5075829,10,6)
```

```
## [1] 0.6692339
```

5.29.

Sea X una variable aleatoria con distribución gama con $\alpha = 2$ y $\beta = 50$

a)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor menor al valor de la media?

Respuesta.- La media viene dada por $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 50 = 100$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(X \leq E(X)) = P(X \leq 50 * 2) &= F(x;\alpha,\theta) = F(100, 2, 50) \\ &= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma(100/50;2)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du} = \frac{\displaystyle\int_0^{2} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\ &= 0.5939942. \end{aligned}$$

```r
alpha=2
theta=50
x = 100
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.5939942
```

```r
pgamma(100,2,scale = 50)
```

```
## [1] 0.5939942
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor mayor de dos desviaciones estándar con respecto a la media?

Respuesta.- Sean $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 50 = 100$ y $2\sqrt{Var(X)} = 2\sqrt{\alpha\theta^2} = 2 \cdot 50\sqrt{2} = 100\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned} P(X \geq E(X) + 2\sqrt{Var(X)}) &= P(X \geq 100 + 100\sqrt{2}) \\ &= F(x;\alpha,\theta) \\ &= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma\left(\frac{100+100\sqrt{2}}{50};2\right)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{100+100\sqrt{2}}{50}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\ &= 0.04662213. \end{aligned}$$

```r
alpha=2
theta=50
```

```r
x = 100+2*sqrt(2)*50
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
1-gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.04662213
```

```r
pgamma(100+2*sqrt(2)*50,2,scale = 50,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.04662213
```

c)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor menor al de su moda?

Respuesta.- La moda viene dado por $(\alpha-1)\theta = (2-1)50 = 50$, de donde

$$
\begin{aligned}
P(X \leq Moda) = P(X \leq 50) &= F(x;\alpha,\theta) = F(50,2,50) \\
&= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma(50/50;2)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du} = \frac{\displaystyle\int_0^{1} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.2642411.
\end{aligned}
$$

```r
alpha=2
theta=50
x = (alpha-1)*theta
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.2642411
```

```r
pgamma((2-1)*50,2,scale=50)
```

```
## [1] 0.2642411
```

5.30.

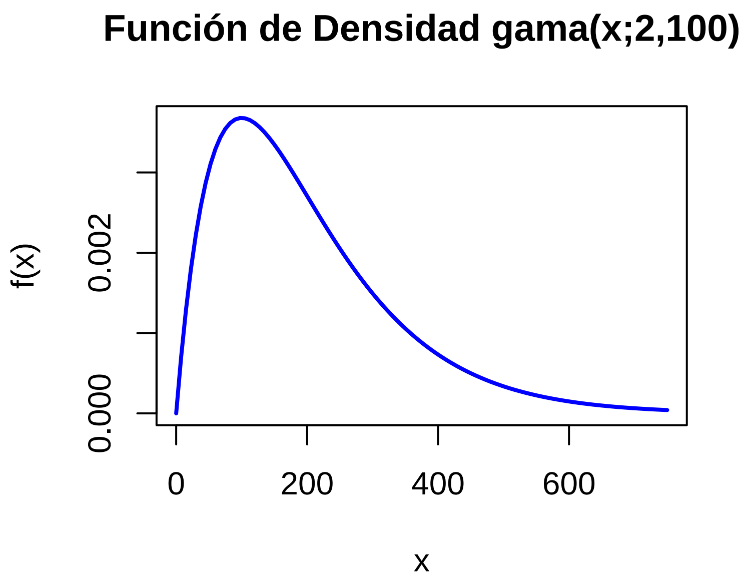
Sea X una variable aleatoria con distribución gama y $\alpha = 2$ y $\theta = 100$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad.

Respuesta.-

```r
curve(dgamma(x,2,scale = 100),xlim=c(0,750),col="blue",lwd=2,
xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad gama(x;2,100)")
```



b)

Encontrar la probabilidad de que, primero, X tome un valor dentro de un intervalo igual a una desviación estándar de la media y, posteriormente, de un intervalo igual a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Sean $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 100 = 200$ y $\sqrt{Var(X)} = \theta\sqrt{\alpha} = 100\sqrt{2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
P\left(200 - 100\sqrt{2} \leq X \leq 200 + 100\sqrt{2}\right) &= F\left(200 + 100\sqrt{2}; 2, 100\right) - F\left(200 - 100\sqrt{2}; 2, 100\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{200 + 100\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{200 - 100\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200+100\sqrt{2}}{100}} u^{2-1} e^{-u}\, du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1} e^{-u}\, du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200-100\sqrt{2}}{100}} u^{2-1} e^{-u}\, du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1} e^{-u}\, du} \\
&= 0.7375188.
\end{aligned}
$$

```r
pgamma(2*100+100*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*100-100*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.7375188
```

Por otro lado sea $2\sqrt{Var(X)} = 200\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(200 - 200\sqrt{2} \leq X \leq 200 + 200\sqrt{2}\right) &= F\left(200 + 200\sqrt{2}; 2, 100\right) - F\left(200 - 200\sqrt{2}, 2, 100\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{200 + 200\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{200 - 200\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200+200\sqrt{2}}{100}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200-200\sqrt{2}}{100}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.9533779.
\end{aligned}$$

```
pgamma(2*100+200*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*100-200*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.9533779
```

c)

¿Cómo cambiarian sus respuestas a la parte b) si $\theta = 200$?

Respuesta.- Sean $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 200 = 400$ y $\sqrt{Var(X)} = \theta\sqrt{\alpha} = 200\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(400 - 200\sqrt{2} \leq X \leq 400 + 200\sqrt{2}\right) &= F\left(400 + 200\sqrt{2}; 2, 200\right) - F\left(400 - 200\sqrt{2}; 2, 200\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{400 + 200\sqrt{2}}{200}; 2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{400 - 200\sqrt{2}}{200}; 2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400+200\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400-200\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.6644504.
\end{aligned}$$

```
pgamma(2*200+200*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*200-200*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.6644504
```

Por otro lado sea $2\sqrt{Var(X)} = 400\sqrt{2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
P\left(400-400\sqrt{2} \leq X \leq 400+400\sqrt{2}\right) &= F\left(400+400\sqrt{2};2,200\right) - F\left(400-400\sqrt{2};2,200\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{400+400\sqrt{2}}{200};2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{400-400\sqrt{2}}{200};2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400+400\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400-400\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.9993181.
\end{aligned}
$$

```
pgamma(2*200+400*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*200-400*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.9993181
```

5.31.

La edad a la que un hombre contrae matrimonio por primera vez es una variable aletoria con distribución gama. Si la edad promedio es de 30 años y lo más común es que el hombre se case a los 22 años, encontrar los valores de los parámetros α y θ, apra esta distribución.

Respuesta.- Sea $E(X) = \alpha\theta = 30$ y $moda = (\alpha-1)\theta$, entonces

$$
\left\{\begin{array}{rcl} \alpha\beta &=& 30 \\ (\alpha-1)\beta &=& 22 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{30}{8}, \qquad \beta = 8
$$

3.32.

La información que a continuación se presenta es una tabulación parcial de la función gama incompleta tal como se encuentra definida por $I(u,p) = F(x;\alpha,\theta)$ para $\alpha = 16$

u	$I(u,15)$
2.0	0.0082
2.5	0.0487
3.0	0.1556
3.5	0.3306
4.0	0.5333
4.5	0.7133
5.0	0.8435
5.5	0.9231
6.0	0.9656
6.5	0.9858
7.0	0.9946

Para $\theta = 10$, comparar estas probabilidades con las que se proporcionaron al emplear una aproximación normal.

Respuestas.- Sean $\mu = E(X) = 16\cdot 10 = 160$, $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{16\cdot 10^2} = 40$ y $u = \dfrac{x}{\theta\sqrt{\alpha}} \;\Rightarrow\; x = u\cdot\theta\sqrt{\alpha}$, entonces

```r
u = c(2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5,6,6.5,7)
for(i in u){
  x=i*10*sqrt(16)
  print(pnorm(x,160,40))
}
```

```
## [1] 0.02275013
## [1] 0.0668072
## [1] 0.1586553
## [1] 0.3085375
## [1] 0.5
## [1] 0.6914625
## [1] 0.8413447
## [1] 0.9331928
## [1] 0.9772499
## [1] 0.9937903
## [1] 0.9986501
```

u	$I(u,15)$	$F(x;\mu,\sigma)$
2.0	0.0082	0.02275013
2.5	0.0487	0.0668072
3.0	0.1556	0.1586553
3.5	0.3306	0.3085375
4.0	0.5333	0.5
4.5	0.7133	0.6914625
5.0	0.8435	0.8413447
5.5	0.9231	0.9331928
6.0	0.9656	0.9772499
6.5	0.9858	0.9937903
7.0	0.9946	0.9986501

5.33.

Mediante el empleo de la función generadora de momentos de la distribución gama, encontrar expresiones para la media y la varianza.

Respuesta.-; La función generadora de momentos para la variable aleatoria gama X está dada por:

$$E[e^{tX}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-\frac{1-\theta t}{\theta}} \; dx.$$

Sea $u = \frac{(1-\theta t)x}{\theta}$, $x = \dfrac{u\theta}{1-\theta t}$ y $dx = \left[\dfrac{\theta}{1-\theta t}\right] \; du$, entonces:

$$\begin{aligned}
E\left[e^{tX}\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\theta}} \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha-1}\theta^{\alpha-1}}{(1-\theta t)^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{\theta}{1-\theta t} \; du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\theta t)^{\alpha}} \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-y} \; du \\
&= (1-\theta t)^{-\alpha}, \quad 0 \le t < \frac{1}{\theta}.
\end{aligned}$$

Sacando la primera y segunda derivada tenemos

$$\left.\frac{dE[e^{tX}]}{dt}\right|_{t=0} = -\alpha(1-\theta t)^{-\alpha-1}\cdot(-\theta)\Big|_{t=0} = \alpha\theta = E[X].$$

$$\left.\frac{d^2E[e^{tX}]}{dt^2}\right|_{t=0} = -\alpha(-\alpha-1)(1-\theta t)^{-\alpha-2}(-\theta)(-\theta)\Big|_{t=0} = \alpha^2\theta^2+\alpha\theta^2 = E[X^2]$$

Por lo tanto ya que $\sigma = Var(X) = E[X^2]-E[X]^2$, entonces

$$Var(X) = \alpha^2\theta^2+\alpha\theta^2-(\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2.$$

5.34.

La duración de cierto componente es una variable aleatoria con distribución gama y parámetro $\alpha = 2$.

a)

Obtener la función de confiabilidad.

Respuesta.- La función es está dada por

$$R(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\lambda^2}{\Gamma(2)}\int_t^\infty t^{2-1}e^{-\lambda t}\,dt$$

b)

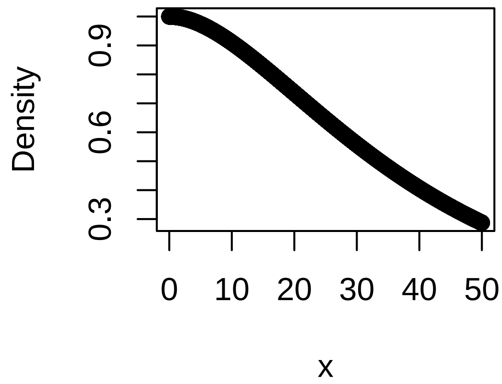
Para $\theta = 20$, obtener la frecuencia de falla y graficarla como una función de t.

Respuesta.- Sea $\lambda = \dfrac{1}{\theta} = \dfrac{1}{20}$, entonces

$$R(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\frac{1}{20^2}}{\Gamma(2)}\int_t^\infty t^{2-1}e^{-\frac{1}{20}t}\,dt = \frac{1}{20^2\Gamma(2)}\int_t^\infty t^{2-1}e^{-\frac{1}{20}t}\,dt$$

```
F <- function(a) {
        return((1/(20^2*integrate(function(x) (x)^{alpha-1}*exp(-x),
                               lower = 0,
                               upper = Inf)$value))*integrate(function (x) x^(2-1)*exp(-1/20*x),a,In
               }
x<-c()
for (i in seq(0,50,.01)) {
  x<-c(x,F(i))
}

plot(seq(0,50,.01),x,xlab = "x", ylab="Density")
```



c)

Si $\theta = 20$. ¿Cuál es la confianza del componente en $t = 80$?

Respuesta.-

$$R(t) = \frac{\frac{1}{20^2}}{\Gamma(2)} \int_{20}^{\infty} 20^{2-1} e^{-\frac{1}{20}t}\, dt$$

5.35 Para armar un artículo se necesita cuatro etapas. Si el tiempo total necesario para armar un artículo en horas, es una variable aleatoria con distribución gama y parámetro de escala $\theta = 2$. ¿Cuál es la probabilidad de armar un artículo en menos de 15 horas?

Respuesta.- Sea $\alpha = 4$, entonces

$$\begin{aligned}
P(X \leq 15) &= \; = F(15, 4, 2) \\
&= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma(15/2;4)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1} e^{-u}\, du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u}\, du} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{15}{2}} u^{4-1} e^{-u}\, du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{4-1} e^{-u}\, du} \\
&= 0.2642411.
\end{aligned}$$

```r
alpha=4
theta=2
x = 15
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.9408545
```

```r
pgamma(15,4,scale=2)
```

```
## [1] 0.9408545
```

5.36.

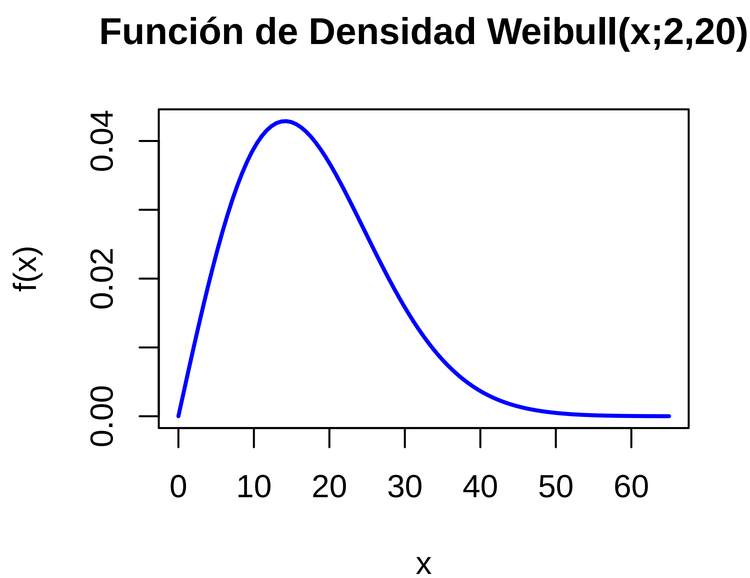
Sea X una variable aleatoria con distribución de Weibull y parámetros $\alpha = 2$ y $\theta = 20$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad.

Respuesta.-

```
curve(dweibull(x,2,scale = 20),xlim=c(0,65),col="blue",lwd=2,
xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad Weibull(x;2,20)")
```



b)

Obtener la probabilidad de que X tome un valor mayor que la media.

Respuesta.- Sea la media

$$E(X) = \theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 20\int_0^\infty u^{1/2}e^{-u}\,du = 17.72453$$

```
int = integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
20*int$value
```

```
## [1] 17.72453
```

Entonces,

$$P(X \geq E(X)) = 1 - P(X \leq E(X)) = 1 - F(E(X);\alpha,\theta) = 1 - \left[1 - e^{-(E(X)/\theta)^\alpha}\right] = e^{-(E(X)/\theta)^\alpha}$$

$$P(X \geq 17.72453) = e^{-(17.72453/20)^2} = 0.4559385.$$

```
int = integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
EX=20*int$value
exp(-(EX/20)^2)
```

```
## [1] 0.4559385
```

```r
pweibull(EX,2,scale = 20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.4559385
```

c)

Obtener la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre en un intervalo igual a una desviación estándar y después en un intervalo a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Sea la la desviación estándar como se detalla a continuación

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{20^2\left[\int_0^\infty u^{2/2}e^{-u}\,du - \int_0^\infty u^{1/2}e^{-u}\,du\right]} = 9.265045.$$

```r
int = integrate(function(u) u^(2/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
int1 = integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
sqrt(20^2*(int$value-(int1$value)^2))
```

```
## [1] 9.265045
```

Entonces,

$$P(X \leq 9.265045) = F(9.265045; 2, 20) = 1 - e^{-(9.265045/20)^2} = 0.193138.$$

```r
1-exp(-(9.265045/20)^2)
```

```
## [1] 0.193138
```

Luego sean $E(X) = 17.72453$ y $2\sqrt{Var(X)} = 2 * 0.193138 = 0.386276$, entonces

$$\begin{aligned}
P(17.72453 - 0.386276 \leq X \leq 17.72453 + 0.386276) &= F(17.63158; 2, 20) - F(16.85902; 2, 20) \\
&= 1 - e^{-(17.63158/20)^2} - \left[1 - e^{(16.85902/20)^2}\right] \\
&= 0.03166598.
\end{aligned}$$

```r
1-exp(-(17.63158/20)^2)-(1-exp(-(16.85902/20)^2))
```

```
## [1] 0.03166598
```

```r
pweibull(17.63158,2,scale=20) - pweibull(16.85902,2,scale=20)
```

```
## [1] 0.03166598
```

5.37.

El tiempo de duración de un sistema se encuentra aproximado por una distribución Wiebull con $\alpha = 2$ y $\theta = 50$.

a)

Obtener la media y los deciles de esta distribución.

Respuesta.- Sea $E(X) = \theta\Gamma\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)$, entonces

$$E(X) = 50\int_0^{\infty} u^{1+\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,du = 50\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{\alpha}}e^{-u}\,du = 44.31132.$$

```r
50*integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u), lower = 0, upper = Inf)$value
```

```
## [1] 44.31132
```

Los deciles estan dados por $x_q = \theta\left[\ln\left(\dfrac{1}{1-q}\right)\right]^{1-\alpha}$, entonces

$$x_{0.1} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.1}\right)\right]^{1/2} = 16.22964.$$

```r
50*((log(1/(1-0.1))))^(1/2)
```

```
## [1] 16.22964
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.2}\right)\right]^{1/2} = 23.61904.$$

```r
50*((log(1/(1-0.2))))^(1/2)
```

```
## [1] 23.61904
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.3}\right)\right]^{1/2} = 29.86113.$$

```r
50*((log(1/(1-0.3))))^(1/2)
```

```
## [1] 29.86113
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.4}\right)\right]^{1/2} = 35.73603.$$

```r
50*((log(1/(1-0.4))))^(1/2)
```

```
## [1] 35.73603
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.5}\right)\right]^{1/2} = 41.62773.$$

```r
50*((log(1/(1-0.5))))^(1/2)
```

```
## [1] 41.62773
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.6}\right)\right]^{1/2} = 47.86154.$$

```
50*((log(1/(1-0.6))))^(1/2)
```

```
## [1] 47.86154
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.7}\right)\right]^{1/2} = 54.86285.$$

```
50*((log(1/(1-0.7))))^(1/2)
```

```
## [1] 54.86285
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.8}\right)\right]^{1/2} = 63.43181.$$

```
50*((log(1/(1-0.8))))^(1/2)
```

```
## [1] 63.43181
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.9}\right)\right]^{1/2} = 75.87136.$$

```
50*((log(1/(1-0.9))))^(1/2)
```

```
## [1] 75.87136
```

b)

Obtener la confiabilidad de este sistema en $t = 75$.

Respuesta.-

$$P(X \geq 75) = 1 - (1 - e^{-(x/\theta)^{\alpha}}) = 1 - (1 - e^{-(75/50)^2}) = 0.1053992.$$

```
exp(-(75/50)^2)
```

```
## [1] 0.1053992
```

```
pweibull(75,2,scale=50,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1053992
```

5.38.

Un sistema está formado por dos componentes independientes A y B. El sistema permanecerá operando mientras uno o ambos componentes funcionen. Si el tiempo de vida de la componente A es una variable aleatoria de Weibull con $\alpha = 1/2$ y $\theta = 10$, y si el tiempo de vida de B es también una variable de Weibull con $\alpha = 2$ y $\theta = 12$. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema trabaje más de 20 horas?.

Respuesta.- Sabiendo que A y B son independientes entonces,

$$P_A(X \geq 20) + P_B(X \geq 20) = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{20}{10}\right)^{1/2}}\right] + 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{20}{12}\right)^{2}}\right] = e^{-\left(\frac{20}{10}\right)^{1/2}} + e^{-\left(\frac{20}{12}\right)^{2}} = 0.3052933.$$

```
exp(-(20/10)^(1/2))+exp(-(20/12)^2)
```

```
## [1] 0.3052933
```

```r
pweibull(20,1/2,scale=10,lower.tail=FALSE) + pweibull(20,2,scale=12,lower.tail=FALSE)
```

```
## [1] 0.3052933
```

5.39.

Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor mayor que la media?

Respuesta.- La media viene dado por $E(X) = \theta$, de donde la probabilidad de que X tome un valor mayor a la media vendrá dado por,

$$P(X \geq E(X)) = F(\theta;\theta) = 1 - \left(1 - e^{-\theta/\theta}\right) = e^{-1} = 0.3678794.$$

```r
exp(-1)
```

```
## [1] 0.3678794
```

b)

¿Cuáles son las probabilidades de que X tome un valor que se encuentre en un intervalo igual a una desviación estándar, primero y en un intervalo igual a dos desviación estándar de la media?

Respuesta.- Sea $E(X) = \theta$ y $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{\theta^2} = \theta$, entonces

$$P(\theta - \theta \leq X \leq \theta + \theta) = F(2;X) - F(0;X) = 1 - e^{-2\theta/\theta} - \left(1 - e^{-0/\theta}\right) = -e^{-2} + e^{-1} = 0.2325442.$$

```r
exp(-1)-exp(-2)
```

```
## [1] 0.2325442
```

5.40.

Si la frecuencia con que falla un componente es constante y la confiabilidad de este tiene un valor en $t = 55$ de 0.4,

a)

Obtener la función de densidad de probabilidad

Respuesta.- Sean la función de confiabilidad $R(55) = 0.4$ y la frecuencia de falla $h(t) = \dfrac{1}{\theta}$, entonces la función de densidad será,

$$f(55) = \frac{1}{\theta} \cdot 0.4 = \frac{0.4}{\theta}.$$

b)

Obtener la confiabilidad del componente para $t = 100$.

Respuesta.- Sea $R(t) = e^{-t/\theta} = 0.4$ y sea $t = 55$, entonces

$$\theta = \frac{-55}{\ln(0.4)} = 60.02.$$

De donde la confiabilidad vendrá dada por

$$P(T > 100) = 1 - F(100) = 1 - \left(1 - e^{-100/60.02}\right) = 0.1889805.$$

```
exp(-100/60.02)
```

```
## [1] 0.1889805
```

5.41.

Un dispositivo tiene una frecuencia de falla constante $h(t) = 10^{-2}$ por hora.

a)

¿Cuál es la confiabilidad del dispositivo para $t = 200$ horas?

Respuesta.- Sea $h(t) = \dfrac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \dfrac{1}{10^{-2}} = 100$, entonces la función de densidad de probabilidad viene dada por,

$$f(t) = \frac{1}{100}e^{-200/100} = 0.001353353.$$

Así la confiabilidad del dispositivo será,

$$R(t) = f(t)/h(t) = 0.001353353/10^{-2} = 0.1353353.$$

b)

Si 500 de estos dispositivos fallan de manera independiente, ¿cuál es el número esperado de fallas entre estos, después de 200 horas?

Respuesta.-; Estará dado por: $500(1 - 0.1353353) = 432.3324 = 433$.

5.42.

El compresor de una unidad de aire acondicionado tiene una frecuencia de falla $h(t) = 2 \cdot 10^{-8}t$ por hora.

a)

¿Cuál es la función de confiabilidad del compresor?

Respuesta.- Sea la función de confiabilidad $R(t) = f(t)/h(t)$, de donde

$$f(t) = h(t)e^{-\int_0^t h(t)\,dt} = 2 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8}t\,dx}$$

entonces,

$$R(t) = \frac{2 \cdot 10^{-8}e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8}t\,dx}}{2 \cdot 10^{-8}} = e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8}t\,dx}.$$

b)

¿Cuál es la confiabilidad del compresor para $t = 15000$ horas?

Respuesta.-

$$R(t) = e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8} t \, dx} = e^{-\int_0^{15000} 2\cdot 10^{-8} 15000 \, dx} = e^{-6\cdot 10^{-4}} = 0.9994002.$$

c)

¿Cuál es la vida media del compresor?

Respuesta.- Sea la frecuencia de falla $h(x) = \dfrac{1}{\theta}$, y sabiendo que $E(X) = \theta$, entonces

$$E(X) = \theta = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-8}} = 5 \cdot 10^7.$$

d)

¿Cuál es la mediana de su duración?

Respuesta.- La mediana viene dada por el valor cuantil con $\alpha = 1$,

$$x_{0.5} = \theta \left[\ln \left(\frac{1}{1-q} \right) \right]^{1/\alpha} = 5 \cdot 10^7 \left[\ln \left(\frac{1}{1-0.5} \right) \right]^1 = 34657359.$$

```
5*10^7 * (log(1/(1-0.5)))
```

```
## [1] 34657359
```

5.43.

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Demostrar que la variable aleatoria $Y = -2\ln(X)$ tiene distribución chi-cuadrado con dos grados de libertad.

Respuesta.- Notemos que $y = -2\ln(x)$ es una función decreciente en el intrevalo $[0,1]$. Luego la relación inversa es,

$$x = e^{-y/2}$$

De donde el Jacobiano estará dado por

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \left| -\frac{1}{2} e^{-y/2} \right| = \frac{1}{\Gamma(2/2) \cdot 2^{\frac{2}{2}}} y^{\frac{2}{2}-1} e^{-y/2}$$

Así,

$$f_Y(y; a, b) = f_X \left(e^{-y/2}, b, a \right) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{1-0} \cdot \frac{1}{\Gamma(2/2) \cdot 2^{2/2}} y^{2/2-1} e^{-y/2} = \frac{1}{\Gamma(2/2) \cdot 2^{2/2}} y^{2/2-1} e^{-y/2}$$

5.44.

Si X es una variable aleatoria con una distribución exponencial y parámetros θ, obtener la distribución de $Y = \dfrac{X-\theta}{\theta}$.

Respuesta.- Sea $f(x;\theta) = \dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$ una distribución exponencial. De donde

$$f_Y\left(y;\theta\right) = f_X\left[g^{-1}(y);\theta\right]\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Por hipotesis

$$y = \frac{x-\theta}{\theta} \quad \Rightarrow \quad x = \theta y + \theta.$$

y

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \theta$$

Por lo tanto

$$f_Y(y;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{\theta y+\theta}{\theta}} \cdot \theta = e^{-\frac{\theta y+\theta}{\theta}}.$$

5.45.

Si X es una variable aleatoria con una distribución de Weibull y parámetros α y θ obtener la distribución de $Y = X^\alpha$.

Respuesta.- Sea $\dfrac{\alpha}{\theta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\theta)^\alpha}$ la distribución de Weibull. De donde

$$f_Y\left(y;\alpha,\theta\right) = f_X\left[g^{-1}(y);\alpha,\theta\right]\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Por hipótesis,

$$y = x^\alpha \quad \Rightarrow \quad x = y^{1/2}$$

y

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2}y^{-1/2}$$

Por lo tanto,

$$f_Y(y;\alpha,\theta) = \frac{\alpha}{\theta}y^{(1/2)^{\alpha-1}}e^{-\left[\left(y^{1/2}\right)/\theta\right]^\alpha} \cdot \frac{1}{2}y^{-1/2}$$

5.46.

Seleccione una distribución de probabilidad discreta y una continua de la sección 5.9 y generar dos muestras aleatorias de 50 números aleatorios cada una. Para cada caso agrupe los datos y obtenga las frecuencias relativas. Calcule la media y la desviación estándar de cada una de las muestras y compare los resultados con los que se obtienen de manera teórica.

Respuesta.- La función de densidad de probabilidad de una distribución Weibull es:

$$f(x;\alpha,\theta) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\theta)^\alpha}, \qquad x > 0.$$

Para generar números aleatorios de Weibull $x > 0$, se resuelve la ecuación

$$\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-(t/\theta)^{\alpha}}\, dt = u \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\right)\left(-\frac{\theta^{\alpha}}{\alpha}\right) e^{-(x/\theta)^{\alpha}} = u$$

$$o \qquad 1 - e^{-(x/\theta)^{\alpha}} = u, \qquad y \qquad x = \theta \left[\ln\left(\frac{1}{1-u}\right)\right]^{1/\alpha}.$$

Dado que para $\alpha = 1$, la distribución de Weibull se reduce a la exponencial, donde pueden generarse números aleatorios para una distribución.

$$E(X) = \theta$$
$$Var(X) = \theta^2$$

```r
u=runif(50,min=0,max=1)
theta=4
alpha=1
x = c()
for (i in u){
  x=c(x,theta*(log(1/(1-i)))^(1/alpha))
}
freq = transform(table(cut(x, breaks = 7)))
freq["Frec_rel"] = freq$Freq/length(x)
freq
```

```
##           Var1 Freq Frec_rel
## 1 (0.134,2.68]   23     0.46
## 2  (2.68,5.21]   14     0.28
## 3  (5.21,7.75]    9     0.18
## 4  (7.75,10.3]    2     0.04
## 5  (10.3,12.8]    1     0.02
## 6  (12.8,15.3]    0     0.00
## 7  (15.3,17.9]    1     0.02
```

```r
mean(x)
```

```
## [1] 3.579357
```

```r
sd(x)
```

```
## [1] 3.304654
```

Esto también es válido para la distribución Poisson.