Ejercicio 1. **Encontrar el punto final de $\vec{a} = (7,6)$ si el punto inicial es $P_0(2,-1)$.**

Respuesta.- Sea $\vec{a} = P_1 - P_0$ y $P_1 = (x,y)$, entonces podemos hallar los vectores de la siguiente manera,

$$\begin{array}{rcl} x-2 & = & 7 \\ y+1 & = & 6 \end{array}$$

de donde $x = 9,\ y = 5$ y por lo tanto

$$P_1 = (9,5)$$

Ejercicio 2. **Sean $\vec{u} = (1,3)$, $\vec{v} = (2,1)$ y $\vec{w} = (4,-1)$. Encontrar las componentes del vector $\vec{x}$ que satisfacen $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$.**

Respuesta.- Despejando $\vec{x}$ obtenemos

$$6\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad \Longrightarrow \quad 6\vec{x} = (2,6) - (2,1) - (4,-1)$$

de donde

$$6\vec{x} = (0,5) - (4,-1) \quad \Longrightarrow \quad 6\vec{x} = (-4,6) \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

Ejercicio 3. **Demuéstrese que: $0\vec{x} = \vec{0}$ y $r\vec{0} = \vec{0}$.**

Demostración.- sea $\vec{x} \in V_n$ entonces $0\vec{x} = 0(x_1, x_2, ..., x_n)$, luego por la multiplicación de un número real por un vector tenemos,

$$0\vec{x} = (0 \cdot x_1, 0 \cdot x_2, ..., 0 \cdot x_n) = (0,0,...,0)$$

y por lo tanto se demuestra que

$$0\vec{x} = \vec{0}$$

Por otro lado sea $r \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$r\vec{0} = r(0,0,...,0) = (r \cdot 0, r \cdot 0, ..., r \cdot) = (0,0,...,0)$$

de modo que

$$r\vec{0} = \vec{0}$$

Ejercicio 4. **Demuéstrese que:**

a) **Si $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} = \vec{c}$.**

Demostración.- Sea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$, entonces por el inverso aditivo en vectores e hipótesis tenemos ,

$$\begin{array}{rcl} \vec{b} & = & (\vec{b} + \vec{a}) - \vec{a} \\ & = & (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} \\ & = & (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{a} \\ & = & \vec{c} + (\vec{a} - \vec{a}) \\ & = & \vec{c} \end{array}$$

b) Si $r\vec{x} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad r = 0 \vee \vec{x} = \vec{0}$.

Demostración.- Será lo mismo demostrar $r\vec{x} = \vec{0} \wedge r \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$. Esto por leyes lógicas.

Sea $r \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in V_n$, entonces

$$r\vec{x} = 0 \;\text{ implica que }\; \vec{x} = \frac{\vec{0}}{r}, \;\text{ ya que }\; r \neq 0.$$

Luego se sigue que

$$\vec{x} = \vec{0}$$

c) Si $r\vec{x} = s\vec{x} \;\wedge\; \vec{x} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad r = s$.

Demostración.- Reescribiendo la proposición se tiene: Si $r\vec{x} = s\vec{x} \;\wedge\; r \neq s \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = 0$.

De donde se tiene

$$\vec{x} = (r - s)\vec{x} \;\Longrightarrow\; \vec{x} = r\vec{x} - s\vec{x} \;\text{ ya que }\; r \neq s$$

y por lo tanto

$$\vec{x} = r(\vec{x} - \vec{x})$$

se sigue

$$\vec{x} = r(0) \;\Longrightarrow\; \vec{x} = 0$$

debido a la unicidad y existencia del inverso aditivo. Con esto se demuestra la proposición dada.

Ejercicio 5. Demostrar que si $\vec{c} \neq 0$ y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos a $\vec{c}$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos. (Vectores paralelos a un mismo vector no nulo son paralelos entre sí).

Demostración.- Sea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$. Por definición de vectores paralelos se tiene

$$r_1\vec{a} = \vec{c} \quad \text{y} \quad r_2\vec{b} = \vec{c}$$

de donde

$$r_1\vec{a} = r_2\vec{b},$$

en vista de que $r_1 \cdot r_2 \neq 0$ entonces

$$\vec{b} = r_1 r_2^{-1}\vec{a},$$

por lo tanto se concluye que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos entre sí.

Ejercicio 6. Hallar todos los vectores ortogonales a:

a) $(3, 6)$

Respuesta.- Sea (r_1, r_1) un vector, entonces para hallar vectores paralelos a $(3, 6)$ utilizamos la definición como sigue,

$$\begin{array}{rcll} (3,6) \circ (r_1, r_2) & = & 0 & \\ 3r_1 + 6r_2 & = & 0 & \text{producto escalar} \\ 3(r_1 + 2r_2) & = & 0 & \\ r_1 + 2r_2 & = & 0 & \\ r_1 & = & -2r_2 & (1) \end{array}$$

de donde tomamos valores para r_2, reemplazamos en (1) y obtendremos n vectores paralelos a $(3,6)$.

b) $\mathbf{(2,-1)}$**.**

Respuesta.- Análogamente al inciso a) tenemos

$$\begin{array}{rcl} (2,-1)\circ(r_1,r_2) & = & 0 \\ 2r_1+(-r_2) & = & 0 \\ r_1 & = & \frac{1}{2}r_2 \end{array}$$

de igual forma al anterior inciso, tomamos valores para r_2, y hallamos n valores ortogonales a $(2,-1)$.

c) $\mathbf{(2,3,-1)}$

Respuesta.- Sea (r_1,r_2,r_3) un vector en V_3, entonces,

$$\begin{array}{rcll} (2,3,-1)\circ(r_1,r_2,r_3) & = & 0 & \\ 2r_1+3r_2-r_3 & = & 0 & \\ r_1 & = & (r_3-3r_2)/2 & \qquad (1) \end{array}$$

luego reemplazamos valores a r_3 y r_2 en (1), de donde obtendremos vectores ortogonales a $(2,3,-1)$.

d) $\boldsymbol{(a_1,a_2)}$

Respuesta.- Análogo a los anteriores incisos se tiene,

$$(a_1,a_2)\circ(r_1,r_2)=0 \quad\Longrightarrow\quad a_1r_1+a_2r_2=0 \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} a_1=-a_2r_2/r_1 \\ a_2=-a_1r_1/r_2 \\ r_1=-a_2r_2/a_1 \\ r_2=-a_1r_1/a_1 \end{array}\right.$$

Ejercicio 7. Encontrar un vector que sea ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

a) $\boldsymbol{\vec{u}=-7i+3j+k,\quad \vec{v}=2i+4k.}$

Respuesta.-

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{array}\right| i - \left|\begin{array}{cc} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{array}\right| j + \left|\begin{array}{cc} 7 & 3 \\ 2 & 0 \end{array}\right| k = (3\cdot4-1\cdot0)i-(7\cdot4-2\cdot1)j+(7\cdot0-3\cdot2)k$$

y por lo tanto el vector que deseamos encontrar es

$$\vec{u}\times\vec{v}=(12,-26,-6)$$

b) $\vec{u} = (-1,-1,-1), \quad \vec{v} = (2,0,2)$

Respuesta.-

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

de donde

$$\vec{u} \times \vec{v} = -2i + 2k = (-2,0,2)$$

Ejercicio 8. **Encontrar todos los vectores posibles de longitud 1 ortogonales tanto a $\vec{a} = (3,-2,1)$ como a $\vec{b} = (-2,1,-3)$.**

Respuesta.- Primeramente encontraremos el producto vectorial para luego utilizar el teorema $\dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = 1$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5i + 7j - k = (5,7,-1).$$

Luego

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 1^2} = 5\sqrt{3}$$

de donde,

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$$

por lo tanto los vectores de longitud 1 ortogonales a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right) \qquad \text{y} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$$

El segundo vector cumple con la condición dada ya que es el vector contrario al encontrado primeramente.

Ejercicio 9. **Sean $\vec{a} = ti + j$ y $\vec{b} = 4i + 3j$. Encontrar el valor de t tal que**

a) **$\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.**

Respuesta.- Sea $\vec{a} = ti + j = (t,1)$ y $\vec{b} = 4i + 3j = (4,3)$, entonces por definición de ortogonalidad tenemos

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \implies 4t + 3 = 0 \implies t = -3/4$$

b) **El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/4$.**

Respuesta.- Aplicando $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\pi/4)$ tenemos,

$$4t + 3 = \sqrt{t^2 + 1} \cdot \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \implies (4t^2 + 3)^2 = (t^2 + 1) \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

de donde se tiene
$$7t^2 + 48 - 7 = 0$$
se sigue
$$t = \frac{1}{7} \quad \text{o} \quad t = -7$$

c) **El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/6$.**

Respuesta.- Análogo al anterior ejercicio tenemos

$$4t+3 = \sqrt{t^2+1} \cdot \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad (4t^2+3)^2 = (t^2+1) \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad -11t^2 + 96t - 39 = 0$$

de donde
$$t = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{11} \quad \text{o} \quad t = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$$

d) **$\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos.**

Respuesta.- Sea $\vec{a} = (t,1)$ y $\vec{b} = (4,3)$ entonces por definición de vectores paralelos tenemos que
$$\vec{a} = c\vec{b} \quad \Longrightarrow \quad (t,1) = c(4,3) \quad \Longrightarrow \quad (t,1) = (4c, 3c)$$
de donde
$$t = 4c \qquad \text{y} \qquad 1 = 3c$$
por lo tanto $c = \dfrac{1}{3}$. Se sigue
$$t = \frac{4}{3}$$

Ejercicio 10. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 60° con $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$. Determinar $||\vec{a} - \vec{b}||$ y $\|\vec{a} + \vec{b}\|$.

Respuesta.- Sea
$$\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \pm 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$$
entonces se tiene,
$$\|a \pm b\|^2 = 5^2 + 8^2 \pm 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos\left(60 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$
por lo tanto
$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = 7 \qquad y \qquad \|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{129}$$

Ejercicio 11. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 30° con $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$. Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$.

Respuesta.- Primero calculemos

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\cos 30 = 1$$

Luego calculamos el ángulo α asociado a $\vec{a}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ de donde nos queda

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1^2+1^2-\sqrt{3}}{2}\right) = \arccos\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = 82.3$$

Sea $a+b$ la diagonal del paralelogramo formado por los lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de donde el ángulo de $a+b$ será $15°$. Por lo tanto $a+b$ y $a-b$ forman un ángulo de,

$$180 - 82.3 - 15 = 82.7$$

Ejercicio 12. Dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que satisfacen la condición $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ y sabiendo que $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 1, \|\vec{a}\| = 4$. Calcular $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Respuesta.- Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ entonces

$$0 = \|\vec{0}\|^2 = \|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2.$$

Luego

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\vec{c}) = 0$$

de donde se tiene,

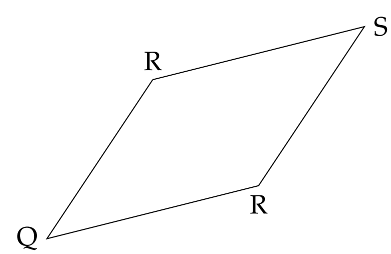
$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\vec{c} = 3^2+1^2+4^2 = 13.$$

Ejercicio 13. Dados los puntos $P(3,4)$, $Q(1,1)$ y $R(5,2)$, usar métodos vectoriales para encontrar las coordenadas del cuarto vértice del paralelogramo cuyo lados adyacentes son $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$.

Respuesta.- Sea S vértice a encontrar entonces por ser un paralelogramo se tiene que $\vec{QR} = vecPS$, por lo tanto

$$(1-1)-(5,2) = (3,4)-S \implies S = (3,4)-(-4,-1)$$
$$S = (7,5)$$

El gráfico corrobora el resultado.



Ejercicio 14. Demostrar que $(4,5,2), (4,7,9), (8,5,-6)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Respuesta.- Supongamos que las distancias entre A, B y C son iguales, lo que implica que $|A-B| = |B-C| = |B-C|$, de donde

$$\begin{array}{rcccccc} |A-B| & = & |(0,-2,-7)| & = & \sqrt{0^2+(-2)^2+(-7)^2} & = & \sqrt{53} \\ |A-C| & = & |(-4,0,8)| & = & \sqrt{(-4)^2+0^2+8^2} & = & \sqrt{80} \end{array}$$

ya que $|A-B| \neq |A-C|$ se concluye que los puntos dado no son los vertices de un triangulo equilátero.

Ejercicio 15. **Demostrar que**

a) **$(2,1,6),(4,7,9)$ y $(8,5,-6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.**

Respuesta.-

b) **¿En cuál de los vértices está el ángulo de 90°?.**

Respuesta.-

c) **Encontrar el área del triángulo.**

Respuesta.-

Ejercicio 16. **Sean $\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}^2-\vec{b}\|^2 = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$.**

Demostración.- Se tiene que

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}^2-\vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}^2|\right) = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Ejercicio 17. **Demuéstrese que $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$. ¿Cuál es la interpretación geométrica del problema?.**

Demostración.-

Ejercicio 18. **Demostrar que:**

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

Demostración.- Análogamente al ejercicio 16 se tiene,

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}^2| = 2|\vec{a}^2 + 2\|\vec{b}|^2$$

Ejercicio 19. **Demostrar que**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2.$$

Demostración.-

Ejercicio 20. **Supóngase que $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$ y que $\vec{a} \neq 0$. Es posible inferir que $\vec{b} = \vec{c}$?. Explicar la respuesta.**

Respuesta.- Esta proposición es falsa ya que si $A = (1,1,1)$, $B = (1,-1,0)$ y $C = (0,-1,1)$ entonces

$$A\cdot B = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 = 0,$$
$$A\cdot C = 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0$$

de donde $B \neq C$.

Ejercicio 21. Explicar por qué las expresiones siguientes no tienen sentido

a)

Ejercicio 22.

Ejercicio 23.

Ejercicio 24.

Ejercicio 25.

Ejercicio 26.

Ejercicio 27.

Ejercicio 28.

Ejercicio 29.

Ejercicio 30.

Ejercicio 31. Demostrar que $Comp_{\vec{b}}\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)=Comp_{\vec{b}}\vec{a}_1+Comp_{\vec{b}}\vec{a}_2$

Demostración.- Por definición de la componente, al ser la norma del vector b un escalar y por propiedades del producto escalar se tiene,

$$Comp_{\vec{b}}\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)=\frac{(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\circ\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}_1\circ\vec{b}+\vec{a}_2\circ\vec{\vec{b}}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}_1\circ\vec{b}}{\vec{b}}+\frac{\vec{a}_2\circ\vec{\vec{b}}}{|\vec{b}|}=Comp_{\vec{b}}\vec{a}_1+Comp_{\vec{b}}\vec{a}_2$$

Ejercicio 32.

Ejercicio 33.

Ejercicio 34.

Ejercicio 35.

Ejercicio 36.

Ejercicio 37.

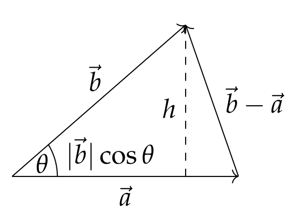
Ejercicio 38.

Ejercicio 39.

Ejercicio 40.

Ejercicio 41. Demostrar vectorialmente la ley de cosenos.

Demostración.- Supongamos que $\vec{a},\vec{b}\in V_n$ y,



entonces por el teorema de Pitágoras se tiene

$$h^2 = |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}|\cos\theta\Big)^2 \qquad y \qquad |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \Big(|\vec{b}|\cos\theta - |\vec{a}|\Big)^2 + h^2$$

de donde

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = \Big(|\vec{b}|\cos\theta - |\vec{a}|\Big)^2 + |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}|\cos\theta\Big)^2 = \Big(|\vec{b}|\cos\theta\Big)^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}|\cos\theta\Big)^2$$

por lo tanto,

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Ejercicio 42.