1

Cálculo diferencial

1.1 Aplicaciones de la derivación a la determinación de los extremos de las funciones

Recordemos que se dice que una función f de valores reales tiene un máximo absoluto en un conjunto S si existe por lo menos un punto c en S tal que

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \text{ en } S.$$

El concepto de máximo relativo se define así:

Definición 1.1 (Definición de máximo relativo)**.** Una función f, definida en un conjunto S, tiene un máximo relativo en un punto c de S si existe un cierto intervalo abierto I que contiene c tal que

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \text{ situado en } I \cap S.$$

el concepto de mínimo relativo se define del mismo modo con la desigualdad invertida.

Es decir, un máximo relativo en e es un máximo absoluto en un cierto entorno de c, si bien no es necesariamente un máximo absoluto en todo el conjunto S. Naturalmente, cualquier máximo absoluto es, en particular, un máximo relativo.

Definición 1.2 (Definición de extremo)**.** Un número que es o un máximo relativo o un mínimo relativo de un función f se denomina valor extremo o un extremo de f.

Teorema 1.1 (Anulación de la derivada en un extremo interior)**.** Sea f definida en un intervalo abierto I y supongamos que f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en un punto c interior a I. Si la derivada $f'(c)$ existe, es $f'(x) = 0$.

Demostración.- Definamos en I un función Q como sigue:

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{si} \quad x \neq c, \quad Q(c) = f'(c).$$

Puesto que $f'(c)$ existe, $Q(x) \to Q(c)$ cuando $x \to c$, entonces Q es continua en c. Queremos probar que $Q(c) = 0$. Esto lo conseguiremos demostrando que cada una de las desigualdades $q(c) > 0$ y $Q(c) < 0$ nos lleva a una contradicción.
Supongamos $Q(c) > 0$. Según la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas, existe un intervalo que contiene a c en el que $Q(x)$ es positiva. Por tanto el numerador del cociente $Q(x)$ tiene el mismo signo que el denominador para todo $x \neq c$ en ese intervalo. Dicho de otro modo, $f(x) > f(c)$ cuando $x > c$ y $f(x) < f(c)$ cuando $x < c$. Esto contradice la hipótesis de que f tiene un extremo en c. De

similar manera se muestra que no puede ser $Q(c) < 0$. Por lo tanto $Q(c) = 0$. Puesto que $Q(c) = f'(c)$, esto demuestra el teorema.

Es importante notar que el hecho de ser derivada nula en c no implica extremo en c. Por ejemplo sea $f(c) = x^3$. Puesto que $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$. Sin embargo, esta función es creciente en todo intervalo que contenga el origen por lo cual no existe extremo en c. Cabe mencionar que el teorema anterior supone que hay un extremo, es decir, en ausencia de puntos angulosos, la derivada necesariamente debe anularse en un extremo, si éste se presenta en el interior de un intervalo. Este criterio se expone más adelante en el teorema 4.8 y nos dice que un extremo siempre se presenta en un punto en el que la derivada cambia de signo. Pero como no es difícil de demostrar deduciremos este resultado como una consecuencia del teorema del valor medio para derivadas.

1.2 Teorema del valor medio para derivadas

El teorema del valor medio para derivadas es importante en cálculo porque muchas de las propiedades de las funciones pueden deducirse fácilmente a partir de él. Antes de establecer el teorema del valor medio, examinaremos uno de sus casos particulares a partir del cual puede deducirse el teorema general. Este caso particular lo descubrió en 1690 Michel Rolle (1652-1719), matemático francés.

Teorema 1.2 (Teorema de Rolle)**.** Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en cada punto del intervalo abierto (a, b). Supongamos también que

$$f(a) = f(b).$$

Entonces existe por lo menos un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

En este teorema se afirma tan sólo que la curva debe tener una tangente horizontal en algún punto entre a y b.

Demostración.- Supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo abierto (a, b) y llegamos a una contradicción como se ve a continuación. Según el teorema de los valores extremos para funciones continuas, f debe alcanzar su máximo absoluto M y su mínimo absoluto m en algún punto del intervalo cerrado $[a, b]$. El teorema 4.3 nos dice que ningún extremo puede ser alcanzado en puntos interiores (de otra manera sería nula la derivada ahí). Luego, ambos valores extremos son alcanzados en los extremos a y b. Pero como $f(a) = f(b)$, esto significa que $m = M$ y por tanto f es constante en $[a, b]$. Esto contradice el hecho de que $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b). Resulta pues que $f'(x) = 0$ por lo menos en un c que satisfaga $a < c < b$, lo que demuestra el teorema.

Teorema 1.3 (Teorema del valor medio para derivadas)**.** Si f es una función continua en todo un intervalo cerrado $[a, b]$ que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto (a, b), existe por lo menos un punto c interior a (a, b), existe por lo menos un punto c interior a (a, b) para el que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demostración.- Para aplicar el teorema de Rolle necesitamos una función que tenga valores iguales en los extremos a y b. A fin de construirla, modificamos f en la forma siguiente:

$$h(x) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)].$$

Entonces $h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$. También, h es continua en $[a,b]$ y tiene derivada en el intervalo abierto (a,b). Aplicando el teorema de Rolle a h, encontramos que $h'(c) = 0$ para un cierto c de (a,b). Pero

$$h'(x) = f'(x)(b-a) - [f(b) - f(a)],$$

cuando $x = c$, se obtiene la igualdad $h(x) = f(x)(b-a) - x[f(b) - f(a)]$.

Con frecuencia es útil la siguiente extensión del teorema del valor medio.

Teorema 1.4 (Fórmula del valor medio de Cauchy)**.** Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ y que admitan derivadas en todo el intervalo abierto (a,b). Entonces, para un cierto c de (a,b), tenemos

$$f'(c) = [g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Demostración.- La demostración es parecida a la del teorema 4.5 (Tom Apostol). Pongamos

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

Entonces $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Aplicando el teorema de Rolle a h, encontramos que $h'(c)$ a partir de la fórmula que define h, obteniendo la fórmula del valor medio de Cauchy. El teorema 4.5 (Tom Apostol) es un caso particular de este teorema obtenido tomando $g(x) = x$.

1.3 Ejercicios

1. Probar que en la parabola $y = Ax^2 + Bx + C$, la cuerda que une los puntos para los cuales $x = a$ y $x = b$ es paralela a la tangente en el punto para el cual $x = \dfrac{a+b}{2}$.

Demostración.- Observamos que la propiedad de que dos rectas sean paralelas es la misma que la propiedad de que las dos rectas tengan la misma pendiente. Para cualquier polinomio de grado dos podemos escribir,

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2Ax + B.$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente en el punto $x = \dfrac{a+b}{2}$ es,

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = A(b+a) + B.$$

Así, la pendiente de la cuerda que uno a $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$ viene dada por el cociente de diferencias:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{Ab^2 + Bb + C - Aa^2 - Ba - C}{b-a} = \frac{A\left(b^2 - a^2\right) + B(b-a)}{b-a} = A(b-a) + B.$$

2. Aplicando el teorema de Rolle, demostrar que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $-1 \le x \le 1$, cualquiera que sea el valor de b.

Demostración.- Supongamos que existe en $x^3 - 3x + b = 0$ dos puntos c_1 y c_2 en el intervalo $[-1,1]$ por el cual $f(c_1) = f(c_2) = 0$ tal que,

$$-1 \le c_1 < c_2 \le 1.$$

Dado que $f(x) = x^3 - 3x + b$ es continua en $[-1,1]$, derivable en $(-1,1)$ donde aplicamos el teorema de Rolle en el intervalo $[c_1, c_2]$ para concluir que existe $c \in (c_1, c_2)$ tal que

$$f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3c^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 1.$$

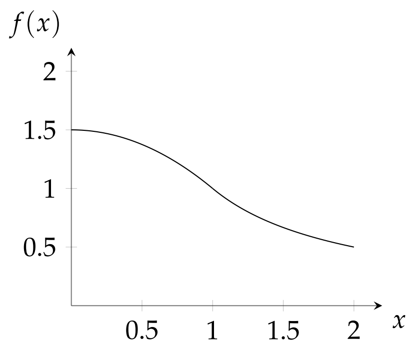
Pero esto contradice que $c \in (-1,1)$. Por lo tanto, puede haber a lo sumo un punto $x \in [-1,1]$ tal que $f(x) = 0$.

3. Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \frac{3-x^2}{2} \text{ si } x \leq 1, \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 1.$$

(a) Dibujar la gráfica de $f(x)$ para x en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.

Respuesta.-



(b) Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.

Demostración.- Dado que $\frac{3-x^2}{2}$ y $\frac{1}{x}$ son continuos en $[0,1]$ y $[1,2]$ respectivamente y diferenciables en $(0,1)$ y $(1,2)$. Donde el único punto donde la función podría ser discontinua y no diferenciable es en $x = 1$. Analicemos este punto. Sea $x = 1$ por lo que,

$$\lim_{x \to 1-} \frac{3-x^2}{2} = 1, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1} = 1.$$

Ya que los límites por la izquierda y la derecha son iguales, entonces f es continua en $x = 1$. Luego verifiquemos que la derivada existe en $x = 1$. Sea $f'(1) = \left(\frac{3-x^2}{2}\right)' = -x = -1 = -\frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)'$, entonces la derivada existe.
Sabiendo esto, podemos aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$, como sigue:

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2-0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{3-0^2}{2} = 2 \cdot f'(c) \quad \Rightarrow \quad f'(c) = -\frac{1}{2}.$$

Por último hallemos c para $x \leq 1$ y para $x \geq 1$, de la siguiente manera.

$$f'(c) = -c \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} = -c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}.$$

y

$$f'(c) = -\frac{1}{c^2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{c^2} \quad \Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{2}.$$

Por lo tanto los valores medios serán,

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad c = \sqrt{2}.$$

4. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Probar que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explicar por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

Demostración.- Calculemos directamente para $f(1)$ y $f(-1)$.

$$f(1) = 1 - 1^{2/3} = 0 = 1 - (-1)^{2/3} = f(-1).$$

Luego calculamos su derivada,

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

Para mostrar que $f'(x) \neq 0$ en $[-1, 1]$ consideraremos tres casos:

- Si $x < 0$ entonces $x^{-1/3}$ implica $f'(x) > 0$, ya que $-\frac{2}{3}$ veces un negativo es positivo.
- Si $x > 0$ entonces $x^{-1/3} > 0$ implica $f'(x) < 0$, ya que $-\frac{2}{3}$ veces un positivo es negativo.
- Si $x = 0$, entonces $f'(x)$ no está definida, ya que $x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}$.

Por lo tanto, $f'(x) \neq 0$ para cualquier x en $[-1, 1]$.
Esto no es una violación del teorema de Rolle, ya que el teorema requiere que $f(x)$ sea diferenciable para todo x en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Como $f'(x)$ no está definido en $x = 0$, tenemos que $f(x)$ no es derivable en todo el intervalo.

5. Probar que $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ se verifica exactamente para dos valores de x.

Demostración.- Queremos encontrar los ceros de esta función ya que serán los puntos que satisfacen a la ecuación. Sea $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$, entonces

$$f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x - x\cos x + \operatorname{sen} x = x(2 - \cos x).$$

Ya que $2 - \cos x \neq 0$ para cualquier x con $\cos x \leq 1$, tenemos

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Por lo tanto f es continua y derivable en todas partes. Por el teorema de Rolle sabemos que f tiene como máximo dos ceros. (Si hubiera tres o más, por ejemplo x_1, x_2 y x_3 entonces debe haber números distintos c_1 y c_2 con $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3$ tal que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$, pero sabemos que solo hay un c tal que $f'(c) = 0$). Además, f tiene al menos dos ceros desde $f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, $f(0) = -1 < 0$ y $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$. Así por el teorema de Bolzano hay ceros entre cada uno de estos puntos. Tenemos que el número de ceros de f es como máximo dos y como mínimo dos. Por lo tanto, el número de ceros debe ser exactamente dos.

6. Probar que la fórmula del valor medio se puede expresar en la forma:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta h) \quad \text{donde} \quad 0 < \theta < 1.$$

Determinar θ en función de x y h cuando (a) $f(x) = x^2$, (b) $f(x) = x^3$. Dejar x fijo, $x \neq 0$ y determinar en cada caso el límite de θ cuando $h \to 0$.

Demostración.- Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces por el teorema del valor medio tenemos

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), \quad \text{para algún } c\in[a,b].$$

Sea $a=x$ y $b=x+h$ para algún $h>0$ con $b>a$, entonces

$$c\in[a,b] \quad \Rightarrow \quad c=x+\theta h \quad \text{para algún } \theta\in(0,1)$$

Esto se deduce de nuestras definiciones, ya que h es la distancia desde $b-a$. Entonces, dado que c está en algún lugar del intervalo $[a,b]$, su valor debe ser a más una parte de la distancia hasta b. Esta parte es θ, con $0<\theta<1$. Luego sustituyendo $x=a$, $x+h=b$ y $c=x+\theta h$, se tiene

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad \to \quad f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)(x+h-x) \quad \Rightarrow \quad f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h),$$

donde $0<\theta<1$ y $h>0$.

(a) Si $f(x)=x^2$, tenemos $f'(x)=2x$. Entonces,

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h) \;\Rightarrow\; (x+h)^2=x^2+2h(x+\theta h) \;\Rightarrow\; h^2=2\theta h^2 \;\Rightarrow\; \theta=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}.$$

(b) Si $f(x)=x^3$, tenemos $f'(x)=3x^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h) \quad &\Rightarrow \quad x^3+3x^3h+3xh^2+h^3=x^3+3hx^2+6\theta xh^2+3\theta^2h^3 \\ &\Rightarrow \quad 0=\left(3h^3\right)\theta^2+\left(6xh^2\right)\theta-\left(3xh^2+h^3\right) \\ &\Rightarrow \quad 0=h\theta^2+2x\theta+\left(-x-\frac{h^2}{3}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{-2x+\sqrt{4x^2+4hx+\frac{4h^2}{3}}}{2h} \\ \theta &= \frac{\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}-x}{h} \\ \theta &= \frac{\left(\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}-x\right)\left(\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}+x\right)}{h\left(\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}+x\right)} \\ \theta &= \frac{x^2+xh+\frac{h^2}{3}-x^2}{h\left(\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}+x\right)} \\ \theta &= \frac{x+\frac{h}{3}}{x+\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}} \\ \theta &= \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7.