1

Conceptos en probabilidad

Definición 1.1 *Si un experimento que está sujeto al azar resulta de n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes y si n_A de estos resultados tienen un atributo A, la probabilidad de A es la proporción de n_A co respecto a n.*

Definición 1.2 *Si un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_B de los resultados son favorables a un atributo B, el límite de n_B/n conforme n se vuelve grande, se define como la probabilidad del atributo B.*

Definición 1.3 *El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio recibe el nombre de espacio muestral.*

1.5. Desarrollo axiomático de la probabilidad

Definición 1.4 *Se dice que un espacio muestral es discreto si su restado puede ponerse en una correspondencia uno a uno con el conjunto de los enteros positivos.*

Definición 1.5 *Se dice que un espacio muestral es continuo si sus resultados consisten de un intervalo de números reales.*

Definición 1.6 *un evento del espacio muestral es un grupo de resultados contenidos en éste, cuyos miembros tienen una característica en común.*

Definición 1.7 *El evento que contiene a ningún resultado del espacio muestral recibe el nombre de evento nulo o vacío.*

Definición 1.8 *El evento formado por todos los posibles resultados en E_1 o E_2 o en ambos, recibe el nombre de unión de E_1 y E_2 y se denota por $E_1 \cup E_2$.*

Definición 1.9 *El evento formado por todos los resultados comunes tanto a E_1 como a E_2 recibe el nombre de intersección de E_1 y E_2 y se denota por $E_1 \cap E_2$.*

Definición 1.10 *Se dice que los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes o disjuntos si no tienen resultados en común; en otras palabras $E_1 \cap E_2 = \emptyset =$ evento vacío.*

Definición 1.11 *Si cualquier resultado de E_2 también es un resultado de E_1, se dice que el evento E_2 está contenido en E_1, y se denota por $E_2 \subset E_1$*

Definición 1.12 *El complemento de un evento E con respecto al espacio muestral S, es aquel que contiene a todos los resultados de S que no se encuentran en E, y se denota por $\overline{E}$.*

Definición 1.13 *Sean S cualquier espacio muestral y E cualquier evento de éste. Se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral S a $P(E)$ si satisface los siguientes axiomas:*

1. $P(E) \geq 0$.

2. $P(S) = 1$.

3. *Si, para los eventos $E_1, E_2, E_3, \ldots$ $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ entonces*

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots$$

Teorema 1.1 $P(\emptyset) = 0$.

Demostración.-

$$S \cup \emptyset = S \quad y \quad S \cap \emptyset = \emptyset.$$

por el axioma 3,

$$P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset);$$

pero por el axioma 2, $P(S) = 1$, y de esta manera $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 1.2 *Para cualquier evento $E \subset S, 0 \leq P(E) \leq 1$.*

Demostración.- Por el axioma 1, $P(E) \geq 0$; de aquí sólo es necesario probar que $P(E) \leq 1$.

$$E \cup \overline{E} = S \quad y \quad E \cap \overline{E} = \emptyset.$$

Por los axiomas 2 y 3,

$$P(E \cup \overline{E} = P(E) + P(\overline{E}) = P(S) = 1;$$

dado que $P(\overline{E}) \geq 0,\ P(E) \leq 1$.

Teorema 1.3 *Sea S un espacio muestral que contiene a cualesquiera dos eventos A y B; entonces,*

$$A(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

1.6. Probabilidad conjunta, marginal y condicional

Definición 1.14 *Sean A y B cualesquiera dos eventos que se encuentran en un espacio muestral S de manera tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A al ocurrir el evento B, es el cociente de la probabilidad conjunto de A y B con respecto a la probabilidad marginal de B; de esta manera se tiene*

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \tag{1.1}$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \backslash B). \tag{1.2}$$

La definición 2.14 puede extenderse para incluir cualquier número de eventos que se encuentren en el espacio muestral. Por ejemplo, puede demostrarse que para tres eventos A, B y C

$$A \backslash B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap C)}, \quad P(B \cap C) > 0. \tag{1.3}$$

$$P(A \cap B \backslash C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}, \quad P(C) > 0. \tag{1.4}$$

1.7. Eventos estadísticamente independientes

Definición 1.15 *Sean A y B dos eventos cualesquiera de un espacio muestral S. Se dice que el evento A es estadísticamente independiente del evento B si $P(A \backslash B) = P(A)$.*

$$P(A \backslash B) = P(A)$$

Definición 1.16 *Los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de un espacio muestral S son estadísticamente independientes si y sólo si la probabilidad conjunta de cualquier $2, 3, \ldots k$ de ellos es igual al producto de sus respectivas probabilidades marginales.*

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

1.8. El teorema de Bayes

Teorema 1.4 *Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son n eventos mutuamente excluyentes, de los cuales uno debe ocurrir, es decir $\sum_{i=1}^{n} P(B_1) = 1$ entonces,*

$$P(B_j \backslash A) = \frac{P(B_j)P(A \backslash B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \backslash B_i)} \tag{1.5}$$

1.9. Ejercicios

2.2. Demostración.- sabiendo que $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$, entonces

$$\frac{P(A \backslash B)}{P(A)} + \frac{P(\overline{A} \backslash B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

2.3. Demostración.- Supongamos que los eventos A y B son no vacíos, por definición de evento independientes y mutuamente excluyentes tenemos que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \neq \emptyset$$

Luego se cumple que dos eventos independientes son, también mutuamente excluyentes si por lo menos uno de los eventos es vacío.