

# Cálculo una variable

George B. Thomas, Jr.

Resolución de problemas por FODE

---

# Índice general

<b>1. Funciones</b>	<b>3</b>
1.1. Las funciones y sus gráficas . . . . .	3
1.1. Ejercicios . . . . .	4
1.2. Ejercicios . . . . .	21

# Funciones

## 1.1. Las funciones y sus gráficas

**Definición 1.1** Una función  $f$  de un conjunto  $D$  a un conjunto  $Y$  es una regla que asigna a cada elemento  $x \in D$  un solo o único elemento  $f(x) \in Y$

**Definición 1.2** Cuando definimos una función  $y = f(x)$  mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales  $x$  para los cuales la fórmula proporciona valores reales para  $y$ , el llamado **dominio natural**.

Cuando el rango de una función es un subconjunto de números reales, se dice que la función tiene **valores reales** (o que es **real valuada**)

**Definición 1.3 (Valor absoluto)**  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

**Definición 1.4** Sea una función definida en un intervalo  $I$  y sean  $x_1$  y  $x_2$  cualesquiera dos puntos en  $I$

1. Si  $f(x_2) > f(x_1)$ , siempre que  $x_1 < x_2$  entonces se dice que  $f$  es **creciente** en  $I$ .
2. Si  $f(x_2) < f(x_1)$ , siempre que  $x_1 < x_2$  entonces se dice que  $f$  es **decreciente** en  $I$ .

**Definición 1.5** Una función  $y = f(x)$  es una

1. Función par de  $x$  si  $f(-x) = f(x)$ .

2. Función impar de  $x$  si  $f(-x) = -f(x)$ .

Para toda  $x$  en el dominio de la función.

(Los nombres par e impar provienen de las potencias de  $x$ ).

**Definición 1.6** Dos variables  $x$  e  $y$  son **proporcionales** (una con respecto a la otra) si una siempre es un múltiplo constante de la otra; esto es, si  $y = kx$  para alguna constante  $k$  distinta de 0.

Si la variable  $y$  es proporcional al recíproco  $1/x$ , entonces algunas veces se dice que  $y$  es **inversamente proporcional** a  $x$  (puesto que  $1/x$  es el inverso multiplicativo de  $x$ ).

## 1.1. Ejercicios

1.  $f(x) = 1 + x^2$

Respuesta.- Al evaluar  $1+x^2$  vemos que  $x$  se cumple para todos los reales, por lo tanto  $f_D = \{x / \forall x \in \mathbb{R}\}$ . Luego el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/y \geq 1\}$

2.  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- El dominio viene dado por  $f_D = \{x/x \geq 0\}$ . Y el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/y \leq 1\}$ .

3.  $F(x) = \sqrt{5x+10}$

Respuesta.- Sea  $5x+10 \geq 0$  ya que una raíz par no puede ser no negativo, entonces  $x \geq -2$ , por lo tanto el dominio viene dado por  $f_D = \{x/x \geq -2\}$ . Luego el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$ .

4.  $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio, evaluaremos  $x^2 - 3x \geq 0$ , de donde  $x(x-3) \geq 0$ , por lo tanto el dominio es  $f_D = \{x / x \leq 0 \cup x \geq 3\}$ . Luego el rango viene definido por  $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$ .

5.  $f(t) = \frac{4}{3-t}$

Respuesta.- Sabemos que no se puede dividir un número por 0. Por lo tanto para hallar el dominio de la función debemos evaluar  $3-t \neq 0$ , de donde  $t \neq 3$ , así  $f_D = \{t/t \neq 3\}$ . Luego el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/y \neq 0\}$ .

6.  $G(t) = \frac{2}{t^2 - 16}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio evaluamos  $t^2 - 16 = 0$ , de donde  $(t - 4)(t + 4) = 0$ , por lo tanto el dominio de la función viene dado por  $f_D = \{t/t \neq 4 \wedge t \neq -4\}$ . Luego el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/0 < y \leq -\frac{1}{8}\}$  ya que al despejar  $x$  nos queda  $x = \sqrt{\frac{2}{y} + 16}$  de donde se debe evaluar por un lado  $\frac{2}{y}$  y por otro  $\frac{2}{y} - 16 \geq 0$ .

En los ejercicios 7 y 8 ¿Cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de  $x$ ? ¿Cuáles no representan a funciones de  $x$ ? Dé razones que apoyen sus respuestas.

7. El inciso  $a$ . no es una función ya que no cumple con la prueba de la recta vertical ya una función sólo puede tener un valor  $f(x)$  para cada  $x$  en su dominio. Y el inciso  $b$ . no representa la gráfica de una función.
8. Los incisos  $a$ . y  $b$ . no representan a funciones de  $x$ . El único que no representa una gráfica de una función es el inciso  $b$ .

Determinación de fórmulas para funciones.

9. Expresa el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado  $x$  del triángulo.

Respuesta.- El área se representa por  $f(x) = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$  y el perímetro por  $f(x) = 3x$

10. Expresa la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud  $d$  de la diagonal del cuadrado. Expresa el área como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La longitud del lado de un cuadrado como función de longitud esta dado por  $d = \sqrt{2a^2}$ . El área es expresado por  $A = \frac{d^2}{2}$

11. Expresa la longitud del lado de un cubo como una función de la longitud de la diagonal  $d$  del cubo. Expresa el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La expresión de la longitud del lado del cubo como función de la longitud de la diagonal  $d$  del cubo es

$$L(d) = (\sqrt{2}/2) \cdot d$$

Las expresiones del área de la superficie y el volumen del cubo como función de la longitud de la diagonal  $d$  del cubo son:

$$A(d) = 3 \cdot d^2 \quad y \quad V(d) = (\sqrt{2}/4) \cdot d^3$$

- 12.** Un punto  $P$  en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . Exprese las coordenadas de  $P$  como funciones de la pendiente de la recta que une a  $P$  con el origen.

Respuesta.- Sea el punto en el origen  $(0,0)$  y el punto  $P$  tenga las coordenadas  $(z, z')$ . Sabemos que una recta viene definido por  $f(x) = ax + b$  entonces formando un sistema de ecuaciones tenemos:

$$0 = 0x + b \quad y \quad z' = az + b$$

Luego  $z' = az$  de donde  $a = \frac{z'}{z}$ , y así nos queda la función

$$f(x) = \frac{z'}{z}x$$

- 13.** Considere el punto  $(x, y)$  que está en la gráfica de la recta  $2x + 4y = 5$ . Sea  $L$  la distancia del punto  $(x, y)$  al origen  $(0, 0)$ . Escriba  $L$  como función de  $x$ .

Respuesta.- Dado  $(x, y) \in 2x + 4y = 5; (0, 0)$  entonces

$$x = \frac{5 - 4y}{2} \quad \frac{5 - 2x}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } L &= \sqrt{(y - 0)^2 + (x - 0)^2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{5 - 4y}{2}\right)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{25 + 40y + 16y^2}{4}} = \sqrt{\frac{4y^2}{4} + \frac{25 + 40y + 16y^2}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{20y^2 + 40y + 25} \end{aligned}$$

- 14.** Considere el punto  $(x, y)$  que está en la gráfica de  $y = \sqrt{x - 3}$ . Sea  $L$  la distancia entre los puntos  $(x, y)$  y  $(4, 0)$ . Escriba  $L$  como función de  $y$ .

Respuesta.-  $y = \sqrt{x - 3}, (x, y) \in y = \sqrt{x - 3}$  entonces calculamos la distancia entre  $y = \sqrt{x - 3}$  y  $(4, 0)$ .

$$y^2 = x - 3 \implies x = y^2 + 3 \quad y \quad y = \sqrt{x - 3}$$

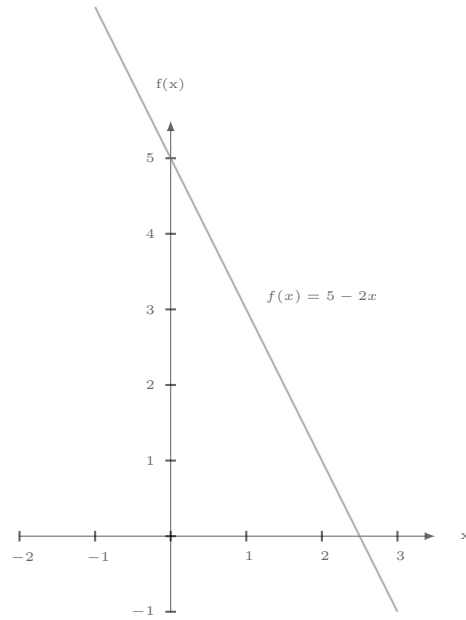
$$\text{Así } L = \sqrt{(y - 0)^2 + (x - y)^2} = \sqrt{y^2 + (y^2 + 3)^2} = \sqrt{y^2 + y^4 + 6y^2 + 9} = \sqrt{y^4 + 7y^2 + 9}$$

Las funciones y sus gráficas.

En los ejercicios 15 al 20, determine el dominio y grafique las funciones

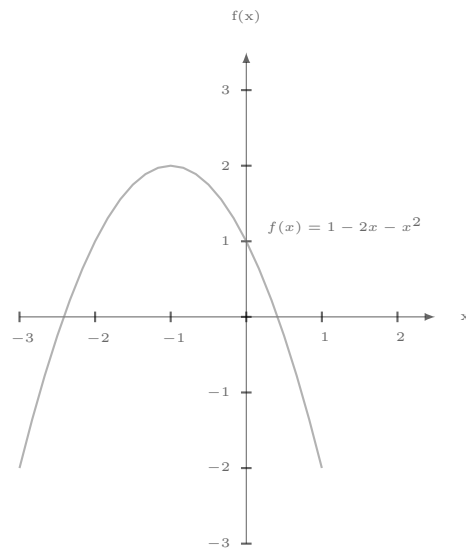
- 15.**  $f(x) = 5 - 2x$

Respuesta.- El dominio esta dado para todos los reales  $x$ .



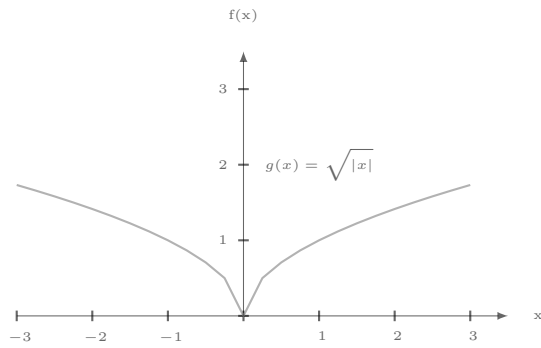
**16.**  $f(x) = 1 - 2x - x^2$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo real  $x$  positivo.



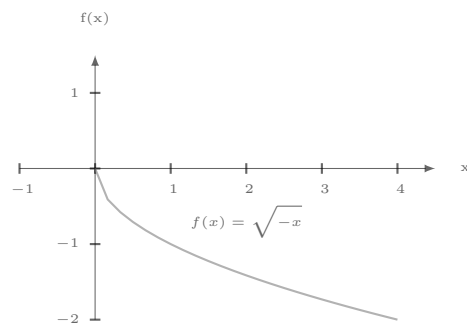
**17.**  $g(x) = \sqrt{|x|}$

Respuesta.- El dominio de la función es para  $x \in \mathbb{R}$



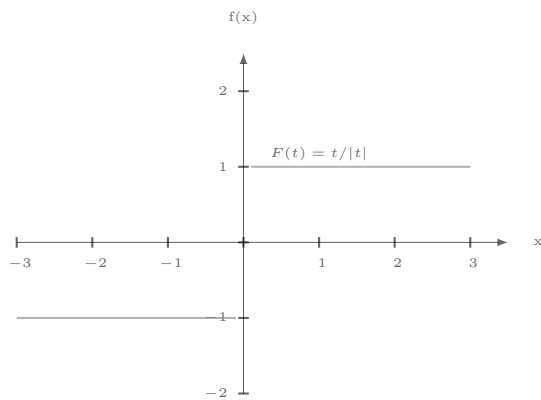
18.  $g(x) = \sqrt{-x}$

Respuesta.- El dominio de la función se cumple para los números reales negativos.



19.  $F(t) = t/|t|$

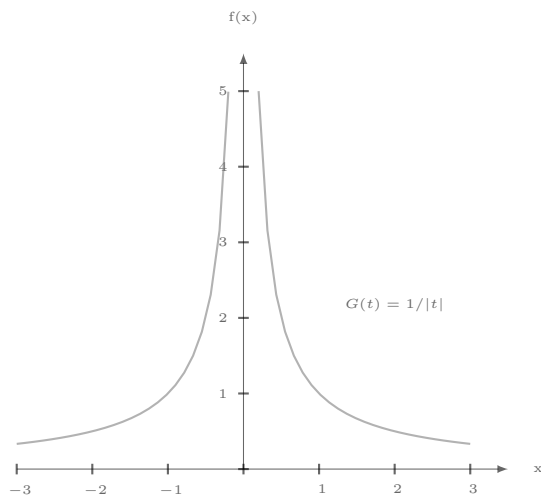
Respuesta.- El dominio viene dado para todo número real menos el 0.



20.  $G(t) = 1/|t|$

Respuesta.- El dominio se cumple para todo número real menos el 0.





- 21.** Determine el dominio de  $y = \frac{x+3}{4-\sqrt{x^2-9}}$

Respuesta.- Si  $y = f(x)$  entonces el dominio esta dado por  $D_f = \{x/x \geq 3 \wedge x \neq 4\}$

- 22.** Determine el rango de  $y = 2 + \frac{x^2}{x^2+4}$ .

Respuesta.- Si  $y = f(x)$  entonces el rango viene dado para todo  $y = f(x)$  tal que  $y \geq 2$

- 23.** Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de  $x$ .

**a.**  $|y| = x$

Respuesta.- No es una función de  $x$  ya que  $\sqrt{y^2} = x \implies y^2 = x^2 \implies \pm y = \pm x$

**b.**  $y^2 = x^2$

Respuesta.- Por el anterior problema 23a.

- 24.** Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de  $x$

**a.**  $|x| + |y| = 1$

Respuesta.- Ya que  $|y| = 1 - |x| \implies \sqrt{y^2} = 1 - |x| \implies y^2 = (1 - |x|)^2 \implies \pm y = |1 - |x||$

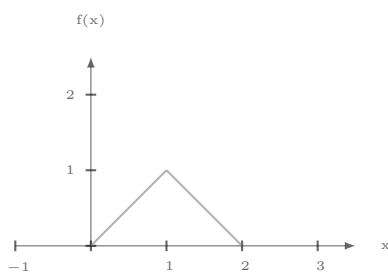
b.  $|x + y| = 1$

Respuesta.- Ya que  $\sqrt{(x + y)^2} = 1 \implies (x + y)^2 = 1 \implies x^2 + 2xy + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - 2xy - x^2 \implies \pm y = \sqrt{1 - 2xy - x^2}$

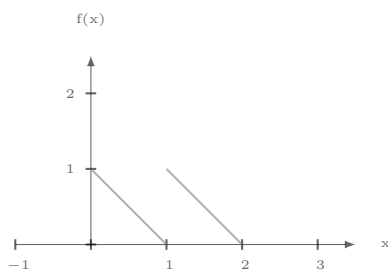
Funciones definidas por partes

En los ejercicios 25 a 28, grafique las funciones:

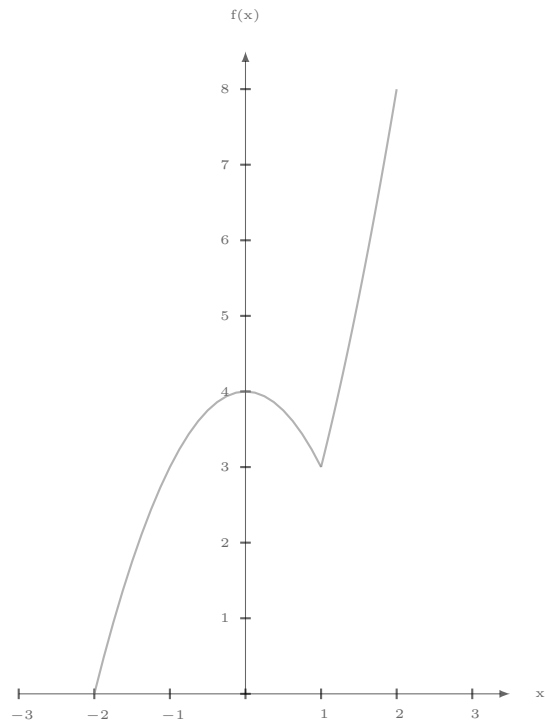
25.  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



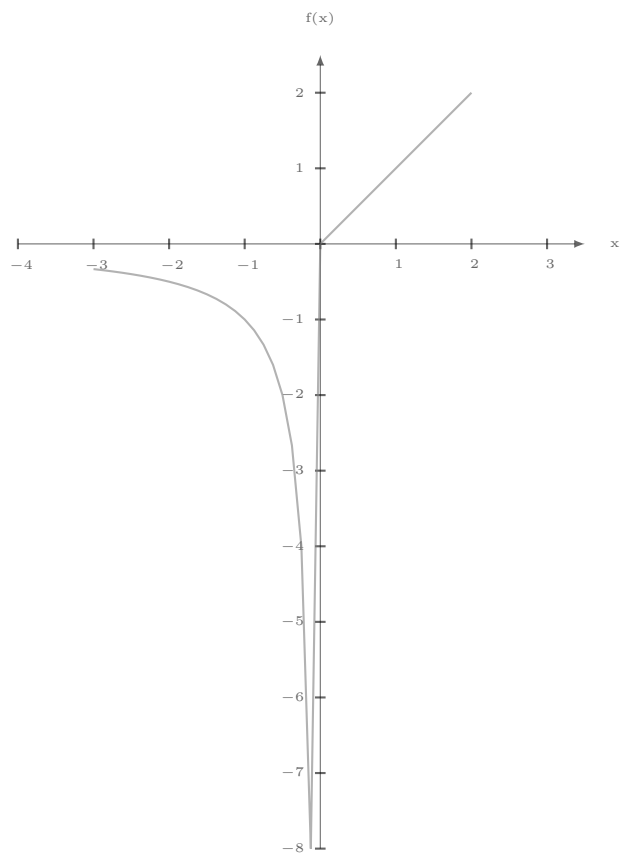
26.  $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



27.  $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$



28.  $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$



Determine una fórmula para cada función graficada en los ejercicios 29 a 32

- 29. a.** Sea  $f(x) = ax + b$  entonces  $0 = b$  y  $1 = a + b$  luego  $a = 1$  por lo tanto  $f(x) = x$ . Por otro lado  $1 = a + b$  y  $0 = 2a + 2 \implies a = -1$  de donde se tiene  $f(x) = -x + 2$  así nos queda la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- b.** Está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ y } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ y } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- 30. a.** Similar al ejercicio anterior se tiene que la formula

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1/2x + 5/7 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- b.** Se tiene

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x + 3 & \text{si } \end{cases}$$

- 31. a.**

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -2x + 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- b.** Sea  $(a, b)$  y  $(c, d)$  por lo tanto por capitulo 4 de spivak  $f(x) = \frac{d-b}{c-a}(x-a) + b$  entonces  $(-2, -1)$  y  $(0, 0)$  así  $f(x) = \frac{0-1}{0+2}(x+2) + 0 \implies f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$

Luego  $f(x) = -2x + 2$  y finalmente  $f(x) = -1$  de donde,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 2x + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

**32. a.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2x}{T} - 1 & \text{si } \frac{T}{2} < x \leq T \end{cases}$$

**b.**

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{si } \frac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad T \leq x < \frac{3T}{2} \\ -A & \text{si } \frac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad \frac{3T}{2} \leq x \leq 2T \end{cases}$$

Las funciones mayor entero y menor entero.

**33.** Para qué valores de  $x$  es

**a.**  $[x] = 0$

respuesta.- Para  $0 \leq x < 1$

**b.**  $[x] = 0$

Respuesta.- Para  $-1 < x \leq 0$

**34.** ¿Cuáles valores  $x$  de números reales satisfacen la ecuación  $[-x] = [x]$ ?

Respuesta.- Sólo el 0.

**35.** ¿Es cierto que  $[-x] = -[x]$  para todo número real  $x$ ? Justifique su respuesta.

Respuesta.- Es cierto siempre y cuando sea  $x$  un entero. Ya que si  $x \in \mathbb{Z}$  entonces  $x = n$  para algunos  $n \in \mathbb{Z}$ , por lo tanto  $[x] = n$  y  $-x = -n \implies [-x] = n \implies [-x] = -[x]$ . Por otro lado sea  $x \notin \mathbb{Z}$  y  $[x] = n$  entonces  $n \leq x < n+1 \implies -n-1 < -x < -n \implies [-x] = -n-1 = -[x]-1$

**36.** Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} [x], & x \leq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

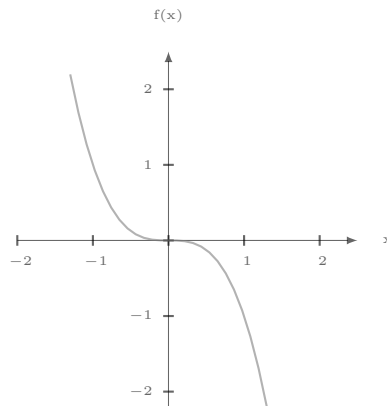
¿Por qué  $f(x)$  se denomina parte entera de  $x$ ?

Respuesta.- Se denomina porque hace corresponder el número inmediato anterior.

Funciones crecientes y funciones decrecientes.

Grafique las funciones en los ejercicios 37 a 46. Si tiene simetrías, ¿Qué tipo de simetría tienen? Especifique los intervalos en los que la función es creciente y los intervalos donde la función es decreciente.

**37.**  $y = -x^3$



Respuesta.- Tiene simetría impar y el intervalo donde decrece está dado por  $(-\infty, \infty)$

**38.**  $y = -\frac{1}{x^2}$

Respuesta.- Tiene simetría par y está dado por el intervalo decreciente de  $-\infty < x < 0$  y por el intervalo creciente  $0 < x < \infty$

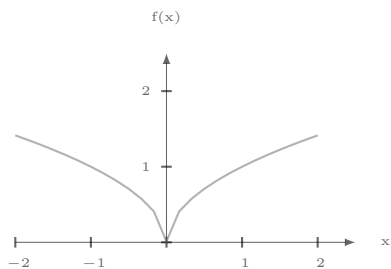
**39.**  $y = -\frac{1}{x}$

Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por los intervalos crecientes  $-\infty < x < 0$  y  $0 < x < \infty$

**40.**  $y = \frac{1}{|x|}$

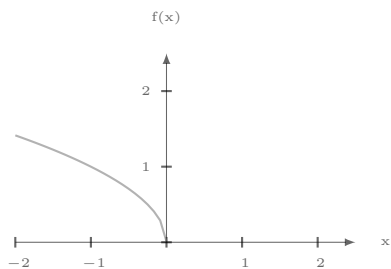
Respuesta.- Tiene simetría par y viene dado por el intervalo creciente  $-\infty < x < 0$  y el intervalo decreciente  $0 < x < \infty$

**41.**  $y = \sqrt{|x|}$



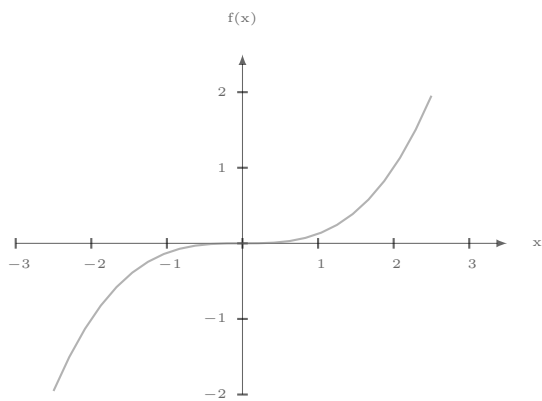
Respuesta.- Tiene simetría par y esta dado por el intervalo decreciente  $-\infty < x \leq 0$  y el intervalo creciente  $0 \leq x < \infty$

**42.**  $y = \sqrt{-x}$



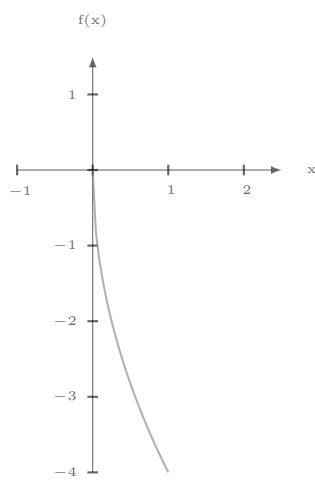
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo decreciente  $-\infty < x \leq 0$

**43.**  $y = x^3/8$



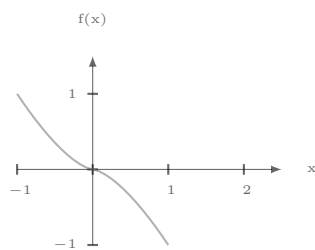
Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo creciente  $-\infty < x < \infty$

44.  $y = -4\sqrt{x}$



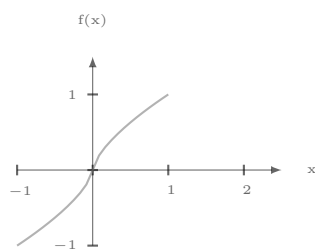
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo  $0 \leq x < \infty$

45.  $y = -x^{3/2}$



Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo decreciente  $-\infty < x < \infty$

46.  $y = (-x)^{2/3}$





Respuesta.- La simetría es impar y viene dado por el intervalo creciente  $-\infty < x < \infty$

Funciones pares y funciones impares

En los ejercicios 47 a 58, indique si la función es par, impar o de ninguno de estos tipos. Justifique su respuesta.

**47.**  $f(x) = 3$

Respuesta.- Sea  $f(-x) = 3 = f(x)$  entonces decimos que la función es par.

**48.**  $f(x) = x^{-5}$

Respuesta.- Sea  $f(-x) = (-x)^{-5} = -(x^{-5}) = -f(x)$ , por lo tanto la función es impar.

**49.**  $f(x) = x^2 + 1$

Respuesta.- Sea  $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ , de donde se tiene que la función es par.

**50.**  $f(x) = x^2 + x$

Respuesta.- Sea  $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$  de donde la función no es par ni impar.

**51.**  $g(x) = x^3 + x$

Respuesta.- Sea  $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$  por lo tanto la función es impar.

**52.**  $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

Respuesta.- Sea  $g(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 - 1 = g(x)$  por lo tanto la función es par.

**53.**  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea  $g(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = g(x)$  por lo tanto la función es par.

**54.**  $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea  $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -g(x)$  de donde la función es impar.

**55.**  $h(t) = \frac{1}{t-1}$

Respuesta.- Sea  $h(-t) = \frac{1}{-t-1}$  entonces la función no es par ni impar.

**56.**  $h(t) = |t^3|$

Respuesta.- Sea  $h(-t) = |(-t)^3| = |t^3| = h(t)$  por lo tanto la función es par.

**57.**  $h(t) = 2t + 1$

Respuesta.- Sea  $h(-t) = 2(-t) + 1$  entonces la función no es ni par ni impar.

**58.**  $h(t) = 2|t| + 1$

Respuesta.- Sea  $h(-t) = 2|-t| + 1 = 2t + 1 = h(t)$  entonces la función es par.

Teoría y ejemplos

**59.** La variable  $s$  es proporcional a  $t$ , y  $s = 25$  cuando  $t = 75$ . Determine  $t$  cuando  $s = 60$ .

Respuesta.- Sea  $\frac{s}{r}$  entonces  $\frac{25}{75} = \frac{60}{x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 180$

**60.** Energía cinética. La energía cinética  $K$  de una masa es proporcional al cuadrado de su velocidad  $v$ . Si  $K = 12,960$  joules, cuando  $v = 18$  m/s, ¿Cuál es el valor de  $K$  cuando  $v = 10$  m/s?.

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene  $\frac{K}{v^2} = \frac{12,960}{18^2} = \frac{K}{10^2}$  entonces  $K = 4000$ .

**61.** Las variables  $r$  y  $s$  son inversamente proporcional, mientras que  $r = 6$  cuando  $s = 4$ . Determine  $s$  cuando  $r = 10$ .

Respuesta.- Tenemos que  $6 \cdot 4 = s \cdot 10$  entonces queda que  $s = 2,4$ .

**62.** Ley de Boyle. La ley de Boyle establece que el volumen  $V$  de un gas, a temperatura constante, aumenta cuando la presión  $P$  disminuye, de manera que  $V$  y  $P$  son inversamente proporcionales. Si  $P = 14,7 \text{ lb/in}^2$  cuando  $V = 1000 \text{ in}^3$ , entonces ¿cuál es el valor de  $V$  cuando  $P = 23,4 \text{ lbs/in}^2$ ?

Respuesta.- Sea  $V \cdot P = V' \cdot P'$  entonces  $14,7 \cdot 1000 = V \cdot 23,4$  y por lo tanto  $V = 628,2 \text{ in}^3$ .

**63.** Una caja sin tapa se construye a partir de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 14 por 22 pulgadas (in). A la pieza de cartón se le cortan cuadrados de lado  $x$  en cada esquina y luego se doblan

hacia arriba los lados, como en la figura. Expresa el volumen  $V$  de la caja como una función de  $x$ .

Respuesta.- El volumen es dado por  $V = L \cdot a \cdot h$  luego  $h = x$ ,  $a = 14 - 2x$ ,  $L = 22 - 2x$  por lo tanto

$$V(x) = (22 - 2x)(14 - 2x) \cdot x \implies V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 308x$$

**64.** La siguiente figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa tiene una longitud de dos unidades.

a. Expresa la coordenada de  $P$  en términos de  $x$ . (Podría iniciar escribiendo una ecuación para la recta  $AB$ ).

Respuesta.- Sea  $y = mx + b$  luego en el punto  $B$ , se tiene la intersección de ambas rectas que forman un ángulo de  $90^\circ$ , así que, el ángulo que tiene que tener el punto  $A$  es de  $45^\circ$  o bien  $m = -1$  por lo tanto  $y = -x + b$  o bien  $m = -1$  ya que la recta va hacia abajo.

b. Expresa el área del rectángulo en términos de  $x$ .

Respuesta.- El área de un rectángulo es  $b \cdot a$  de donde  $area = 2x \cdot y = 2x(b - x)$ .

En los ejercicios 65 y 66 relacione cada ecuación con su gráfica. No utilice un dispositivo para graficar y dé razones que justifiquen su respuesta.

**65.** a.  $y = x^4 \implies h$

b.  $y = x^7 \implies f$

c.  $y = x^{10} \implies g$

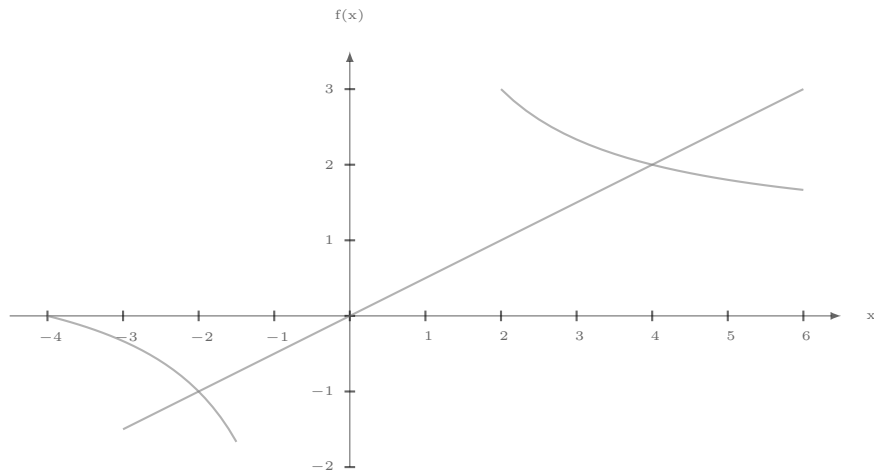
**66.** a.  $y = 5x \implies f$ .

b.  $y = 5x \implies f$ .

c.  $y = x^5 \implies h$ .

**67.** a. Grafique juntas las funciones  $f(x) = x/2$  y  $g(x) = 1 + (4/x)$  para identificar los valores de  $x$  que satisfacen

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$$

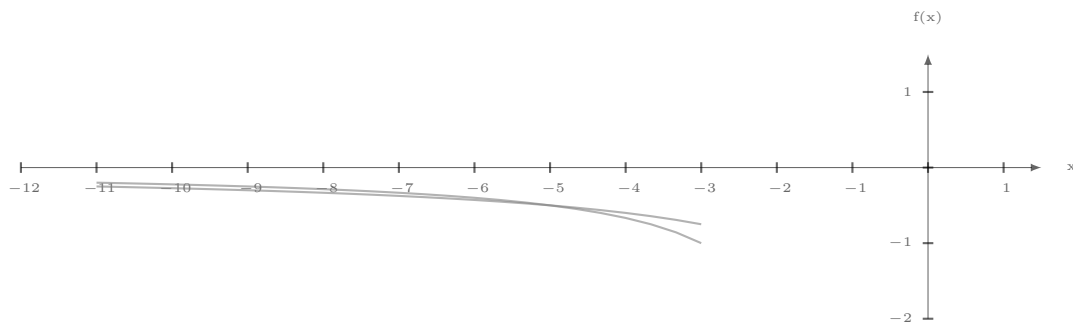


b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inciso a)

Respuesta.- Resolviendo la ecuación nos queda  $x^2 - 2x - 8 > 0$  donde se cumple para  $x > 4$  ó  $x < -2$

**68. a.** Grafique juntas las funciones  $f(x) = 3/(x-1)$  y  $g(x) = 2/(x+1)$  para identificar los valores de  $x$  que satisfacen

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$



b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inicio a).

Respuesta.- Sea  $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1} \Rightarrow x < -5$

**69.** Para que una curva sea simétrica con respecto al eje  $x$ , el punto  $(x, y)$  debe estar en la curva si y sólo si el punto  $(x, -y)$  está en la curva. Explique por qué una curva que es simétrica con respecto al eje  $x$  no es la gráfica de una función a menos que la función sea  $y = 0$ .

Respuesta.- Esto se debe a que contradice a la definición de función. Es decir, a cada elemento  $x$  se asigna un solo o único elemento  $f(x)$ . Si  $y = 0$  entonces  $(x, y) = (x, -y)$  y por lo tanto se cumple la definición de función

- 70.** Trescientos libros se venden en \$40 cada uno, lo que da por resultado un ingreso de  $300 \cdot \$40 = \$12,000$ . Por cada aumento de \$5 en el precio, se venden 25 libros menos. Expresa el ingreso  $R$  como una función del número  $x$  de incrementos de \$5.

Respuesta.- Veamos algunos ejemplos particulares:

$$\begin{array}{rcl} 300 \cdot 40 & = & 12000 \\ (300 - 25)(40 + 5) & = & 12375 \\ (300 - 50)(40 + 10) & = & 12500 \\ (300 - 75)(40 + 15) & = & 12375 \\ (300 - 100)(40 + 20) & = & 12000 \end{array}$$

Por lo tanto  $R(x) = (300 - 5x)(40 + x) = -125x^2 + 500x + 12000$

- 71.** Se va a construir un corral con la forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud de  $x$  pies (ft) e hipotenusa de longitud  $h$  ft. Si los costos de la cerca son de \$5/ft para los catetos y \$10/ft para la hipotenusa, escriba el costo total  $C$  de la construcción como una función de  $h$ .

Respuesta.- Sea  $c^2 + c^2 = h^2 \Rightarrow h = c\sqrt{2} \Rightarrow c = h\sqrt{2}$ , luego  $C = 2 \cdot c \cdot 5 + h \cdot 10$  por lo tanto  $C = 10 \cdot h \frac{1}{\sqrt{2}} + 10$

- 72.** Costos industriales: Una central eléctrica se encuentra cerca de un río, donde éste tiene un ancho de 800 ft. Tender un cable de la planta a un lugar en la ciudad, 2 millas (mi) río abajo en el lado opuesto, tiene un costo de 180 por ft que cruce el río y 100 por ft en tierra a lo largo de la orilla del río.

- a. Suponga que el cable va de la planta al punto  $Q$ , en el lado opuesto, lugar que se encuentra a  $x$  ft del punto  $P$ , directamente opuesto a la planta. Escriba una función  $C(x)$  que indique el costo de tender el cable en términos de la distancia  $x$ .

Respuesta.- Por el teorema de Pitágoras podemos establecer la función  $C(x)$  como sigue:

$$C(x) = \sqrt{x^2 + 800^2} \cdot 180 + (10560 - x) \cdot 100$$

- b. Genere una tabla de valores para determinar si la ubicación más barata para el punto  $Q$  es menor a 2000 ft o mayor a 2000 ft del punto  $P$ .

Respuesta.-

$$\begin{array}{rclcl} C(x) & = & \sqrt{1900^2 + 800^2} + (10560 - 1900) \cdot 100 & = & 1270599,7 \\ C(x) & = & \sqrt{2100^2 + 800^2} + (10560 - 2100) \cdot 100 & = & 1217079,5 \end{array}$$

Por lo tanto es mas barato ubicar el punto  $Q$  a una distancia mayor a 2000 ft.

## 1.2. Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, determine dominios y rangos de  $f, g, f + g$  y  $f \cdot g$

1.  $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x-1}$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
$f$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall f(x) \in \mathbb{R}$
$g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$
$f + g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 1$
$f \cdot g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$

2.  $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \sqrt{x-1}$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
$f$	$x \geq -1$	$f(x) \geq 0$
$g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$
$f + g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq \sqrt{2}$
$f \cdot g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$

En los ejercicios 3 y 4, determine dominios y rangos de  $f, g, f/g, g/f$ .

3.  $f(x) = 2, g(x) = x^2 + 1$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
$f$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f(x) = 2$
$g$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f(x) \geq 1$
$f/g$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$0 < f(x) \leq 2$
$g/f$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f(x) \geq 0,5$

4.  $f(x) = 1, g(x) = 1 + \sqrt{x}$ .

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
$f$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f(x) = 1$
$g$	$x \geq 0$	$f(x) \geq 1$
$f/g$	$x \geq 0$	$0 < f(x) \leq 1$
$g/f$	$x \geq 0$	$f(x) \geq 1$

Composición de funciones.

5. Si  $f(x) = x + 5$  y  $g(x) = x^2 - 3$ , determine lo siguiente:

a.  $f(g(0)) = f(-3) = -3 + 5 = 2$

b.  $g(f(0)) = g(5) = 5^2 - 3 = 22$

c.  $f(g(x)) = f(x^2 - 3) = x^2 - 3 + 5 = x^2 + 2$  para  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

d.  $g(f(x)) = g(x + 5) = (x + 5)^2 - 3 = x^2 + 10x + 25 - 3 = x^2 + 10x + 22$  para  $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

e.  $f(f(-5)) = f(0) = 5$

f.  $g(g(2)) = g(1) = 1 - 3 = -2$

g.  $f(f(x)) = f(x + 5) = x + 5 + 5 = x + 10$

h.  $g(g(x)) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 9 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$

**6.** Si  $f(x) = x - 1$  y  $g(x) = 1/(x + 1)$ , determine lo siguiente.

a.  $f(g(1/2)) = f(2/3) = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

b.  $g(f(0)) = g(-1) = \frac{1}{-1 + 1} = \text{indeterminado}$

c.  $f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x + 1}\right) = \frac{1}{x + 1} - 1 = \frac{-x + 2}{x + 1}$  para  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

d.  $g(f(x)) = g(x - 1) = \frac{1}{x - 1 + 1} = \frac{1}{x}$  para  $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

e.  $f(f(-5)) = f(-6) = -6 - 1 = -7$

f.  $g(g(2)) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{3}{4}$

g.  $f(f(x)) = f(x - 1) = x - 2$

$$\text{h. } g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{x+1}{x+2} \quad x \neq -1, -2$$

En los ejercicios 7 a 10, escriba una fórmula para  $f \circ g \circ h$

$$\text{7. } f(x) = x + 1, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = 4 - x$$

Respuesta.- Se tiene  $f(g(h(x))) = f(g(4 - x)) = f(12 - 3x) = 12 - 3x + 1 = 13 - 3x$  para  $D_{f \circ g \circ h} = \{\forall x \in D_h / h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f\}$

$$\text{8. } f(x) = 3x + 4, \quad g(x) = 2x - 1, \quad h(x) = x^2$$

Respuesta.- Se tiene  $f(g(h(x))) = f(g(x^2)) = f(2x^2 - 1) = 3(2x^2 - 1) + 4 = 6x^2 + 1$  para  $D_{f \circ g \circ h} = \{\forall x \in D_h / h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f\}$

$$\text{9. } f(x) = \sqrt{x+1}, \quad \frac{1}{x+4}, \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

Respuesta.-  $f(g(h(x))) = f\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{x} + 4}\right) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x} + 4} + 1} = \sqrt{\frac{5x+1}{4x+1}}$  para  $x \neq 0, -\frac{1}{4}$ .

$$\text{10. } f(x) = \frac{x+2}{3-x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad h(x) = \sqrt{2-x}$$

Respuesta.-  $f(g(\sqrt{2-x})) = f\left(\frac{|2-x|}{|2-x|+1}\right) = \frac{\frac{|2-x|}{|2-x|+1} + 2}{3 - \left(\frac{|2-x|}{|2-x|+1}\right)}$

Sean  $f(x) = x - 3$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $h(x) = x^3$  y  $j(x) = 2x$ . Exprese cada una de las funciones de los ejercicios 11 y 12 como una composición de funciones que incluyan a una o más de  $f, g, h$  y  $j$ .

$$\text{11. a. } y = \sqrt{x} - 3 \Rightarrow f(\sqrt{x}) \Rightarrow f(g(x))$$

$$\text{b. } y = 2\sqrt{x} \Rightarrow j(\sqrt{x}) \Rightarrow j(g(x))$$

$$\text{c. } y = x^{1/4} \Rightarrow g(\sqrt{x}) \Rightarrow g(g(x))$$

$$\text{d. } y = 4x \Rightarrow j(j(x))$$



e.  $y = \sqrt{(x-3)^3} \Rightarrow g((x-3)^3) \Rightarrow g(h(x-3)) \Rightarrow g(h(f(x)))$

f.  $y = (2x-6)^3 \Rightarrow h(2x-6) = h(j(x-3)) = h(j(f(x)))$ .

**12.** a.  $y = 2x - 3 \Rightarrow f(2x) \Rightarrow f(j(x))$

b.  $y = x^{3/2} \Rightarrow g(x^3) \Rightarrow g(h(x))$

c.  $y = x^9 \Rightarrow h(x^3) \Rightarrow h(h(x))$

d.  $y = x - 6 \Rightarrow f(f(x))$

e.  $y = 2\sqrt{x-3} \Rightarrow j(\sqrt{x-3}) \Rightarrow j(g(x-3)) \Rightarrow j(g(f(x)))$

f.  $y = \sqrt{x^3-3} \Rightarrow g(x^3-3) \Rightarrow g(f(x^3)) \Rightarrow g(f(h(x)))$

**13.** Copie complete la siguiente tabla:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
b.	$x + 2$	$2x$	$3x + 6$
c.	$x^2$	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
d.	$\frac{x}{x-1}$	$\sqrt{xx} - 1$	$\frac{x}{(x-1)^2}$
e.	$x^3$	$1 + \frac{1}{x}$	$1 + \frac{1}{x^3}$
f.	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\frac{1}{x}}$

**14.** Copie y complete la siguiente tabla.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
<hr/>			
a.	$\frac{1}{x-1}$	$ x $	$\left  \frac{1}{x-1} \right $
b.	$x+2$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x+1}$
c.	$x^2$	$\sqrt{x}$	$ x $
d.	$\sqrt{x}$	$x^2$	$ x $

**15.** Evalúe cada expresión utilizando la siguiente tabla de valores.

a.  $f(g(-1)) = f(0) = -2$

b.  $g(f(0)) = g(-2) = 2$

c.  $f(f(-1)) = f(0) = -2$

d.  $g(g(2)) = g(0) = 0$

e.  $g(f(-2)) = g(1) = -1$

f.  $f(g(1)) = f(-1) = 0$

**16.** Evalúe cada expresión con el uso de las funciones.

$$f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a.  $f(g(0)) = f(0 - 1) = 2 + 1 = 3$

b.  $g(f(0)) = g(2) = 1$

c.  $g(g(-1)) = g(1) = 0$

d.  $f(f(2)) = f(0) = 2$

e.  $g(f(0)) = g(2) = 1$

f.  $f(g(1/2)) = f(-1/2) = 5/2$

En los ejercicios 17 y 18, (a) escriba fórmulas para  $f \circ g$  y  $g \circ f$ , luego determine (b) el dominio y (c) el rango de cada una.

**17.**  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$

Respuesta.- Para  $f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$  de donde el dominio viene dado por  $x > 0 \wedge x \leq -1$ , y el rango viene dado por  $f(x) \geq 0$ . Luego para  $g \circ f = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  de donde el dominio es  $x > -1$  y el rango  $\forall \mathbb{R}, x \neq 0$ .

**18.**  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- Para  $f(1 - \sqrt{x}) = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + |x|$  el dominio viene dado por  $x \geq 0$  y el rango por  $f(g(x)) \geq 0$ .  
Luego para  $g(x^2) = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$  el dominio viene dado por  $x \geq 0$  y el rango  $g(f(x)) \geq 1$ .

**19.** Sea  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ . Determine una función  $y = g(x)$  de modo que  $(f \circ g)(x) = x$ .

Respuesta.- Sea  $f(g(x)) = x$  entonces  $\frac{g(x)}{g(x)-2} = x$  ó  $\frac{y}{y-2} = x$  por lo tanto  $y = g(x) = \frac{-2x}{1-x}$ .

**20.** Sea  $f(x) = 2x^3 - 4$ . Determine una función  $y = g(x)$  de modo que  $(f \circ g)(x) = x + 2$ .

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio tenemos que  $2y^3 - 4 = x + 2$  de donde nos queda

$$y = g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$$

Traslación de gráficas.

**21.** La siguiente figura muestra la gráfica de  $y = -x^2$  desplazada a dos posiciones nuevas. Escriba las ecuaciones de las gráficas nuevas.

Respuesta.-

a)  $y = -(x + 7)^2$

b)  $y = -(x - 4)^2$

- 22.** La siguiente figura muestra la gráfica de  $y = x^2$  desplazada a dos posiciones nuevas. Escriba las ecuaciones de las gráficas nuevas.

Respuesta.-

a)  $y = x^2 + 3$

b)  $x^2 - 5$

- 23.** Relacione las ecuaciones listadas en los incisos a) a d) con las gráficas de la figura.

Respuesta.-

a)  $y = (x - 1)^2 - 4 =$  Posición 4.

b)  $y = (x - 2)^2 + 2 =$  Posición 1.

c)  $y = (x + 2)^2 + 2 =$  Posición 2.

d)  $y = (x + 3)^2 - 2 =$  Posición 3.

- 24.** La siguiente figura muestra la gráfica de  $y = -x^2$  desplazada a cuatro posiciones nuevas. Escriba una ecuación para cada nueva gráfica.

Respuesta.-

a)  $y = -(x - 1)^2 + 4$

b)  $y = -(x + 2)^2 + 3$

c)  $y = -(x + 4)^2 - 1$

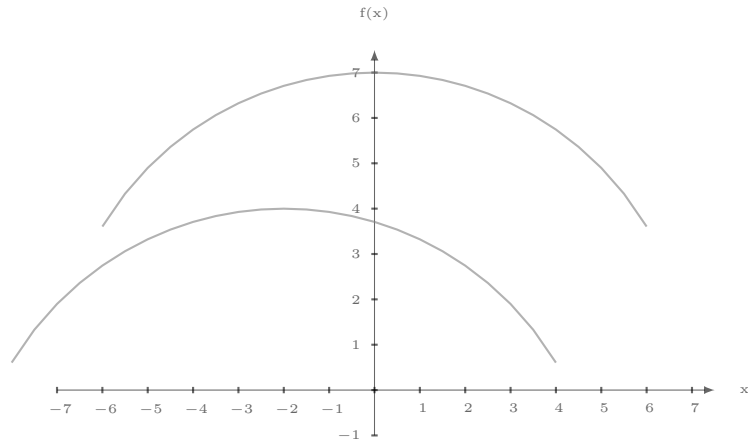
d)  $y = -(x - 2)^2$

En los ejercicios 25 a 34 se establece cuántas unidades y en qué direcciones se trasladarán las gráficas de las ecuaciones dadas. Proporcione una ecuación para la gráfica desplazada: después, en el mismo plano cartesiano, trace la gráfica de la función original y la gráfica de la ecuación desplazada, anotando junto a cada gráfica la ecuación que le corresponda.

**25.**  $x^2 + y^2 = 49$  abajo 3, izquierda 2.

Respuesta.-

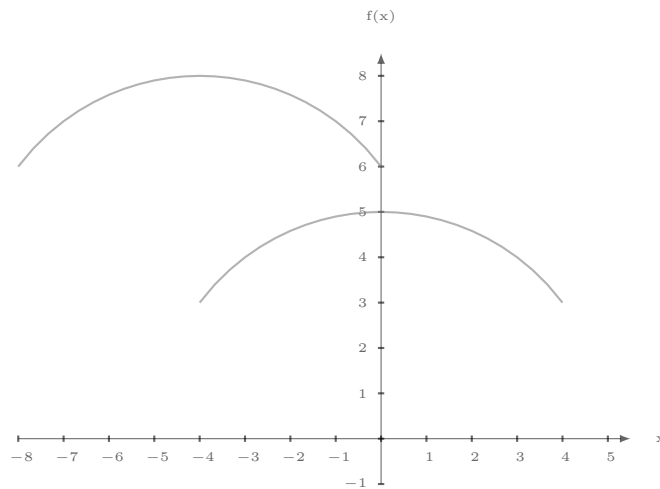
$$y = \sqrt{49 - (x + 2)^2} - 3 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$$



**26.**  $x^2 + y^2 = 25$  Arriba 3, izquierda 4

Respuesta.-

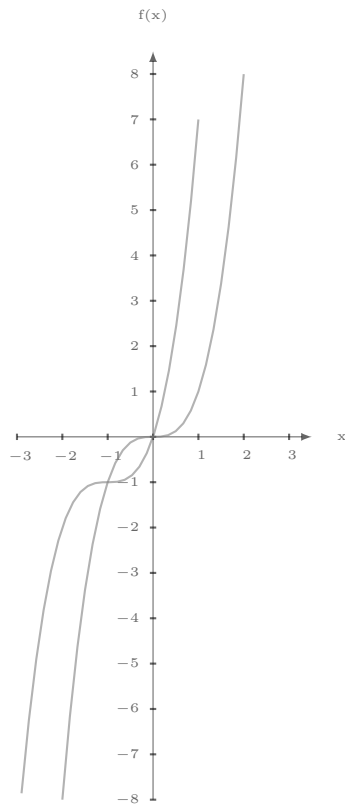
$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$$



**27.**  $y = x^3$  Izquierda 1, abajo 1.

Respuesta.-

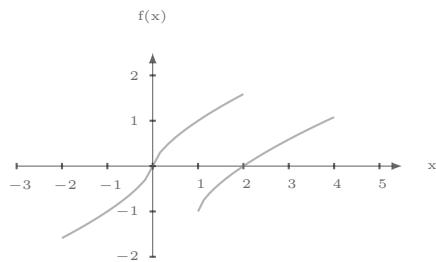
$$y = (x + 1)^3 - 1$$



**28.**  $y = x^{2/3}$  Derecha 1, abajo 1

Respuesta.-

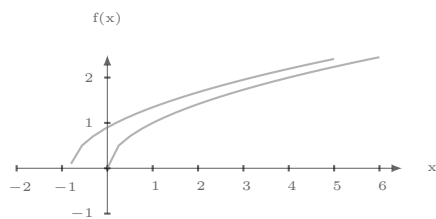
$$y = (x - 1)^{2/3} - 1$$



**29.**  $y = \sqrt{x}$  Izquierda 0.81

Respuesta.-

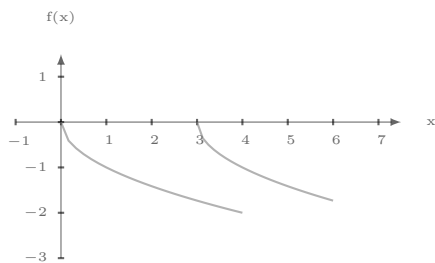
$$\sqrt{x + 0,81}$$



**30.**  $y = -\sqrt{x}$  Derecha 3

Respuesta.-

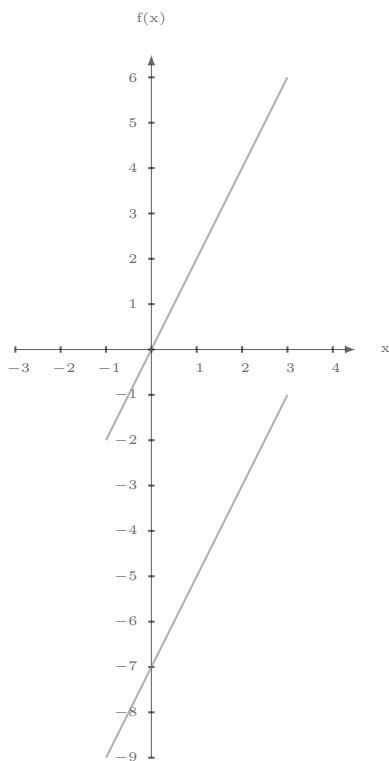
$$y = -\sqrt{x - 3}$$



**31.**  $y = 2x - 7$  Arriba 7

Respuesta.-

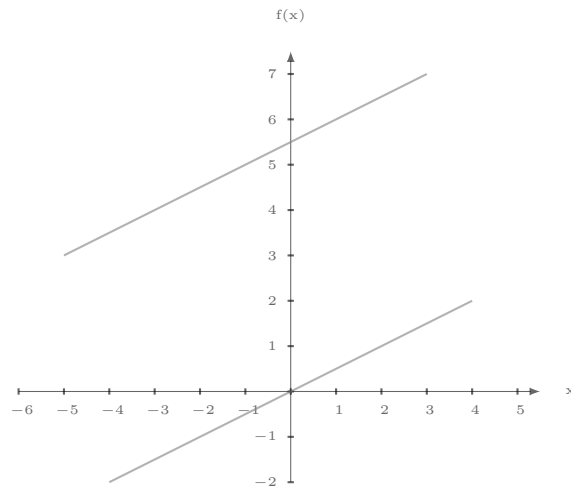
$$y = 2x$$



**32.**  $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$  Abajo 5, derecha 1

Respuesta.-

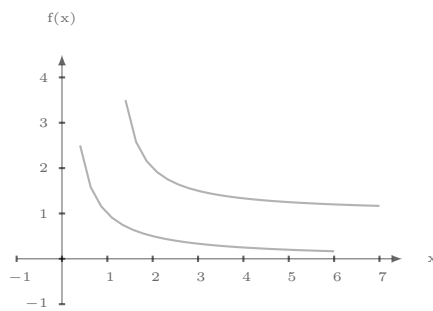
$$y = \frac{1}{2}x$$



**33.**  $y = \frac{1}{x}$  Arriba 1, derecha 1

Respuesta.-

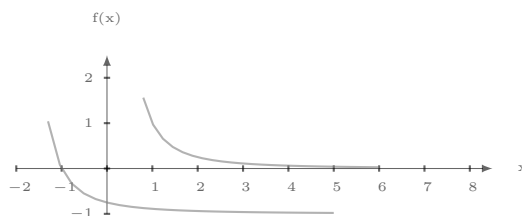
$$y = \frac{1}{x-1} + 1$$



**34.**  $y = \frac{1}{x^2}$  Izquierda 2, abajo 1

Respuesta.-

$$y = \frac{1}{(x+2)^2} - 1$$



Grafique las funciones de los ejercicios 35 a 54

**35.**