1

Funciones inversas

Definición 1.1 Una función f es **uno-uno** (que se lee "uno a uno") si $f(a) \neq f(b)$ cuando $a \neq b$.

La condición $f(a) \neq f(b)$ para $a \neq b$ significa que ninguna línea *horizontal* corta a la gráfica de f en más de un punto.

Definición 1.2 Para cualquier función f, la **inversa** de f, denotada por f^{-1}, es el conjunto de todos los pares (a, b) para los que el par (b, a) pertenece a f.

Teorema 1.1 f^{-1} es una función si y sólo si f es uno-uno.

Demostración.- Supongamos primero que f es uno-uno. Sean (a, b) y (a, c) dos pares de f^{-1}. Entonces (b, a) y (c, a) pertenecen a f, de manera que $a = f(b)$ y $a = f(c)$; como f es uno-uno, $b = c$. Por lo tanto, f^{-1} es una función.
Recíprocamente, Supongamos que f^{-1} es una función. Si $f(b) = f(c)$, entonces f contiene a los pares $(b, f(b))$ y $(c, f(c)) = (c, f(b))$, y por lo tanto $(f(b), b)$ y $(f(b), c)$ pertenecen a f^{-1}. Como por hipótesis, f^{-1} es una función, $b = c$; es decir, f es uno-uno. $\blacksquare$

Es evidente por definición que

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Como (a, b) pertenece a f si y sólo si (b, a) pertenece a f^{-1}, deducimos que