

Ejercicios capítulo 4

Christian Limbert Paredes Aguilera

25/1/2022

```
library(ggplot2)
source("funciones_chapter4.R")
```

4.1.

Sea X una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros n y p . Mediante la función de probabilidad binomial, verificar que $p(n - x; n, 1 - p) = p(x; n, p)$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} p(n - x; n, 1 - p) &= \frac{n!}{[n - (n - x)]!(n - x)!} (1 - p)^{n-x} [1 - (1 - p)]^{n-(n-x)} \\ &= \frac{n!}{x!(n - x)!} (1 - p)^{n-x} p^x \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ &= p(x; n, p) \end{aligned}$$

4.2.

En una distribución binomial, sea X el número de éxitos obtenidos en diez ensayos donde la probabilidad de éxito en cada uno es de 0.8. Con el resultado del problema anterior, demostrar que la probabilidad de lograr de manera exacta seis éxitos es igual a la probabilidad de tener cuatro fracasos.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} 0.08808038 &= \frac{10!}{[10 - (10 - 4)]!(10 - 4)!} (1 - 0.8)^{10-6} [1 - (1 - 0.8)]^{10-(10-6)} \\ &= \frac{10!}{6!(10 - 6)!} (1 - 0.8)^{10-6} 0.8^6 = 0.08808038 \end{aligned}$$

```
dbinom(4,10,0.2)
```

```
## [1] 0.08808038
```

```
dbinom(6,10,0.8)
```

```
## [1] 0.08808038
```

4.3

Mediante el empleo de la función de probabilidad binomial, verificar la siguiente fórmula de recursión:

$$p(x+1; n, p) = \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)} p(x; n, p)$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} p(x+1, n, p) &= \frac{n!}{[n-(x+1)]!(x+1)!} p^{x+1} (1-p)^{n-(x+1)} = \frac{n!}{\frac{(n-x)!}{(n-x)} x!(x+1)} p^x p (1-p)^{n-x} (1-p)^{-1} \\ &= \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)} p(x; n, p) \end{aligned}$$

4.4.

sea X una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros $n = 8$ y $p = 0.4$. Emplear la fórmula de recursión del problema anterior para obtener las probabilidades puntuales de los valores de X .

Respuesta.-

$$p(x+1; 8, 0.4) = \frac{(8-x)0.4}{(x+1)(1-0.4)} p(x; 8, 0.4)$$

4.5

Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con $n = 10$ y $p = 0.5$

a)

Determinar las probabilidades de que X se encuentre dentro de una desviación estándar de la media y a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Para una desviación estándar

Sabemos que $\mu = E(X) = np = 10 \cdot 0.5 = 5$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 1.581139$, luego si queremos hallar la desviación estándar de la media tenemos que calcular la desviación hacia la derecha y hacia la izquierda, es decir, $5 \pm 1.581139 = 6.581139$ y 3.418861 . Si restamos y sumamos a 6.581139 y 3.418861 , 0.581139 respectivamente tenemos por un lado 6 y por otro $2.837722 \approx 3$. Así tenemos que,

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) - P(X \leq 3) &= F(6; 10, 0.5) - F(3; 10, 0.5) = \sum_{i=0}^6 \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} - \sum_{i=0}^3 \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} \\ &= 0.65625 \end{aligned}$$

```
pbinom(6,10,0.5) - pbinom(3,10,0.5)
```

```
## [1] 0.65625
```

Para dos desviaciones estándar, tenemos que $\sigma = 2\sqrt{np(1-p)} = 2\sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 3.162278$, de donde $5 \pm 3.162278 = 8.162278$ y 1.837722 . Podemos construir directamente la probabilidad requerida como sigue,

$$P(X \leq 8) - P(X \leq 2) = F(8; 10, 0.5) - F(2; 10, 0.5) = \sum_{i=0}^8 \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} - \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} \\ = 0.9345703$$

```
pbinom(8,10,0.5)-pbinom(2,10,0.5)
```

```
## [1] 0.9345703
```

b)

¿Cómo cambiarían las respuestas de a) si $n = 15$ y $p = 0.4$?

Respuesta.- Para una desviación estándar,

Similar a la parte a) tenemos que $\mu = E(X) = np = 15 \cdot 0.4 = 6$ de donde se tiene $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.4 \cdot (1-0.4)} = 1.897367$ de donde $6 \pm 1.897367 = 7.897367$ y 4.102633 , por lo tanto,

$$P(X \leq 7) - P(X \leq 2) = F(7; 15, 0.4) - F(2; 15, 0.4) = \sum_{i=0}^7 \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} - \sum_{i=0}^2 \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} \\ = 0.5696191$$

```
pbinom(7,15,0.4)-pbinom(2,15,0.4)
```

```
## [1] 0.5696191
```

Para dos desviaciones estándar,

tenemos que $\sigma = 2\sqrt{np(1-p)} = 2\sqrt{15 \cdot 0.4 \cdot (1-0.4)} = 3.794733$, de donde $6 \pm 3.794733 = 9.794733$ y 2.205267 . se sigue,

$$P(X \leq 9) - P(X \leq 2) = F(9; 15, 0.4) - F(2; 15, 0.4) = \sum_{i=0}^9 \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} - \sum_{i=0}^2 \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} \\ = 0.9345703$$

```
pbinom(9,15,0.4)-pbinom(2,15,0.4)
```

```
## [1] 0.9390527
```

4.6

Supóngase que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamble es de 0.05. Si el número de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes

a)

¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades dos se encuentren defectuosas?

Respuesta.-

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0.05^2 \cdot (1-0.05)^{20-2} = 0.1886768$$

```
# opción 1
choose(20,2)*0.05^2*(1-0.05)^(20-2)
```

```
## [1] 0.1886768
```

```
# opción 2
dbinom(2,20,0.05)
```

```
## [1] 0.1886768
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades, dos como límite se encuentren defectuosas?

Respuesta.-

$$P(X \leq 2) = F(2; 20, 0.05) = \sum_{i=0}^2 \binom{20}{i} \cdot 0.05^i \cdot (1 - 0.05)^{20-i} = 0.9245163$$

```
pbinom(2,20,0.05)
```

```
## [1] 0.9245163
```

c)

¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

Respuesta.-

$$1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1; 20, 0.05) = 1 - \sum_{i=0}^1 \binom{20}{i} \cdot 0.05^i \cdot (1 - 0.05)^{20-i} = 0.2641605$$

```
pbinom(1,20,0.05,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2641605
```

4.7

En una fábrica de circuitos electrónicos, se afirma que la proporción de unidades defectuosas de cierto componente que ésta produce, es del 5%. Un buen comprador de estos componentes revisa 15 unidades seleccionadas al azar y encuentra cuatro defectuosas. Si la compañía se encuentra en lo correcto y prevalecen las suposiciones para que la distribución binomial sea el modelo de probabilidad adecuado para esta situación, ¿Cuál es la probabilidad de este hecho?. Con base en el resultado anterior ¿puede concluir que la compañía está equivocada?

Respuesta.-

$$P(X = 4) = \binom{15}{4} \cdot 0.05^4 \cdot (1 - 0.05)^{15-4} = 0.004852576$$

```
dbinom(4,15,0.05)
```

```
## [1] 0.004852576
```

```
choose(15,4)*0.05^4*(1-0.05)^(15-4)
```

```
## [1] 0.004852576
```

```
func_binom(4,15,0.05)
```

```
## [1] 0.004852576
```

Ahora veamos que tan probable es que existe más de 4 circuitos defectuosos.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - F(3; 20, 0.05) = 1 - \sum_{i=0}^3 0.05^i \cdot (1 - 0.05)^{15-i} = 0.005467259$$

```
pbinom(3,15,0.05, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.005467259
```

```
1-acum_binom(3,15,0.05)
```

```
## [1] 0.005467259
```

Por lo que se dice de la afirmación es incorrecta.

4.8

La probabilidad de que un satélite, después de colocarlo en la órbita, funcione de manera adecuada es de 0.9. Supóngase que cinco de éstos se colocan en órbita y operan de manera independiente.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que, por lo menos, el 80% funcione adecuadamente?

Respuesta.- Ya que el 80% de 5 es 4 por lo que

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3; 5, 0.9) = 1 - \sum_{i=0}^3 0.9^i \cdot (1 - 0.9)^{5-i} = 0.91854$$

```
pbinom(3,5,.9,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.91854
```

```
1-acum_binom(3,5,0.9)
```

```
## [1] 0.91854
```

b)

Responder a a) si $n = 10$

Respuesta.-

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 9) = 1 - F(9; 10, 0.9) = 1 - \sum_{i=0}^9 0.9^i \cdot (1 - 0.9)^{10-i} = 0.7360989$$

```
pbinom(8,10,.9,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.7360989
```

```
1-acum_binom(8,10,0.9)
```

```
## [1] 0.7360989
```

c)

Responder a a) si $n = 20$

Respuesta.-

$$P(X \geq 16) = 1 - P(X < 15) = 1 - F(15; 20, 0.9) = 1 - \sum_{i=0}^{15} 0.9^i \cdot (1 - 0.9)^{20-i} = 0.8670467$$

```
pbinom(16,20,.9,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.8670467
```

```
1-acum_binom(16,20,0.9)
```

```
## [1] 0.8670467
```

d)

¿Son inesperados estos resultados? ¿Por qué?

Respuesta.- Son inesperados ya que no se puede ver una tendencia clara cuando n es más grande.

4.9.

Con base en encuestas al consumidor se sabe que la preferencia de éste con respecto a dos marcas, A y B, de un producto dado, se encuentra muy pareja. Si la opción de compra entre estas marcas es independiente, ¿cuál es la probabilidad de que entre 25 personas seleccionadas al azar, no más de diez tengan preferencia por la marca A?

Respuesta.- Ya que A y B se encuentran parejas entonces la probabilidad es de 0.5, luego:

$$P(X \leq 10) = F(10; 25, 0.5) = \sum_{i=0}^{10} 0.5^i \cdot (1 - 0.5)^{25-i} = 0.2121781$$

```
pbinom(10,25,0.5)
```

```
## [1] 0.2121781
```

```
acum_binom(10,25,0.5)
```

```
## [1] 0.2121781
```

4.10

Supóngase que un examen contiene 15 preguntas del tipo falso o verdadero. El examen se aprueba contestando correctamente por lo menos nueve preguntas. Si se lanza una moneda para decidir el valor de verdad de cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

Respuesta.- Ya que al lanzar una moneda se tiene sólo dos opciones entonces la probabilidad es de 0.5, luego:

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - F(8; 15, 0.5) = 1 - \sum_{i=0}^8 0.5^i \cdot (1 - 0.5)^{15-i} = 0.1508789$$

```
pbinom(9,15,0.5,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1508789
```

```
1-acum_binom(9,15,0.5)
```

```
## [1] 0.1508789
```

4.11

Un vendedor de seguros sabe que la oportunidad de vender una póliza es mayor mientras más contactos realice con clientes potenciales. Si la probabilidad de que una persona compre una póliza de seguro después de la visita, es constante e igual a 0.25, y si el conjunto de visitas constituye independiente de ensayos, ¿cuántos compradores potenciales debe visitar el vendedor para que la probabilidad de vender por lo menos una póliza sea de 0.80?

Respuesta.-

$$P(X \geq 1) = 0.25 \Rightarrow 1 - P(X < 0) = 1 - [0.25^0 \cdot (1 - 0.25)^{n-0}] = 1 - 0.75^n = 0.8 \Rightarrow n \ln(0.75) = \ln(0.2)$$

$$n = \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.75)} = 5.59450194 \approx 6$$

```
log(0.20)/log(0.75)
```

```
## [1] 5.594502
```

Por lo que debe existir 6 o más compradores.

4.12.

El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservación sabe, por experiencia, que el 15% de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 25 reservaciones pero sólo dispone de 20 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que a todas las personas que asistan al restaurante se les asigne una mesa?

Respuesta.- Existe la probabilidad de que el 85% asista al restaurante. Por lo que,

$$P(X \leq 20) = F(20; 25, 0.85) = \sum_{i=0}^{20} 0.85^i \cdot (1 - 0.85)^{25-i} = 0.317893$$

```
pbinom(20,25,0.85)
```

```
## [1] 0.317893
```

4.13.

Mediante la probabilidad de Poisson, demostrar la siguiente fórmula de recursión:

$$p(x+1; \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} p(x; \lambda)$$

Demostración.- Por definición de de función de probabilidad de Poisson se tiene que,

$$p(x+1; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x+1}}{(x+1)!}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$$

que también podemos reescribirlo de la siguiente manera,

$$\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x+1}}{(x+1)!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \lambda^x}{x! \cdot (x+1)}$$

y por lo tanto

$$p(x+1; \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{\lambda}{x+1} p(x; \lambda)$$

4.14

Sea X una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Emplear la fórmula del problema anterior para determinar las probabilidades puntuales de $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y hágase una gráfica de la función de probabilidad.

Respuesta.-

- Para $X = 0$

$$p(0+1; 2) = \frac{\lambda}{x+1} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{2}{0+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{0+1}}{(0+1)!} = 0.2707$$

- Para $X = 1$

$$p(1+1; 2) = \frac{2}{1+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{1+1}}{(1+1)!} = 0.2707$$

- Para $X = 2$

$$p(2+1; 2) = \frac{2}{2+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{2+1}}{(2+1)!} = 0.1804$$

- Para $X = 3$

$$p(3+1; 2) = \frac{2}{3+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{3+1}}{(3+1)!} = 0.0902$$

- Para $X = 4$

$$p(4+1; 2) = \frac{2}{4+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{4+1}}{(4+1)!} = 0.036$$

- Para $X = 5$

$$p(5+1; 2) = \frac{2}{5+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{5+1}}{(5+1)!} = 0.012$$

- Para $X = 6$

$$p(6 + 1; 2) = \frac{2}{6 + 1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{6+1}}{(6 + 1)!} = 0.0034$$

- Para $X = 7$

$$p(7 + 1; 2) = \frac{2}{7 + 1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{7+1}}{(7 + 1)!} = 0.0008$$

- Para $X = 8$

$$p(8 + 1; 2) = \frac{2}{8 + 1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{8+1}}{(8 + 1)!} = 0.0001$$

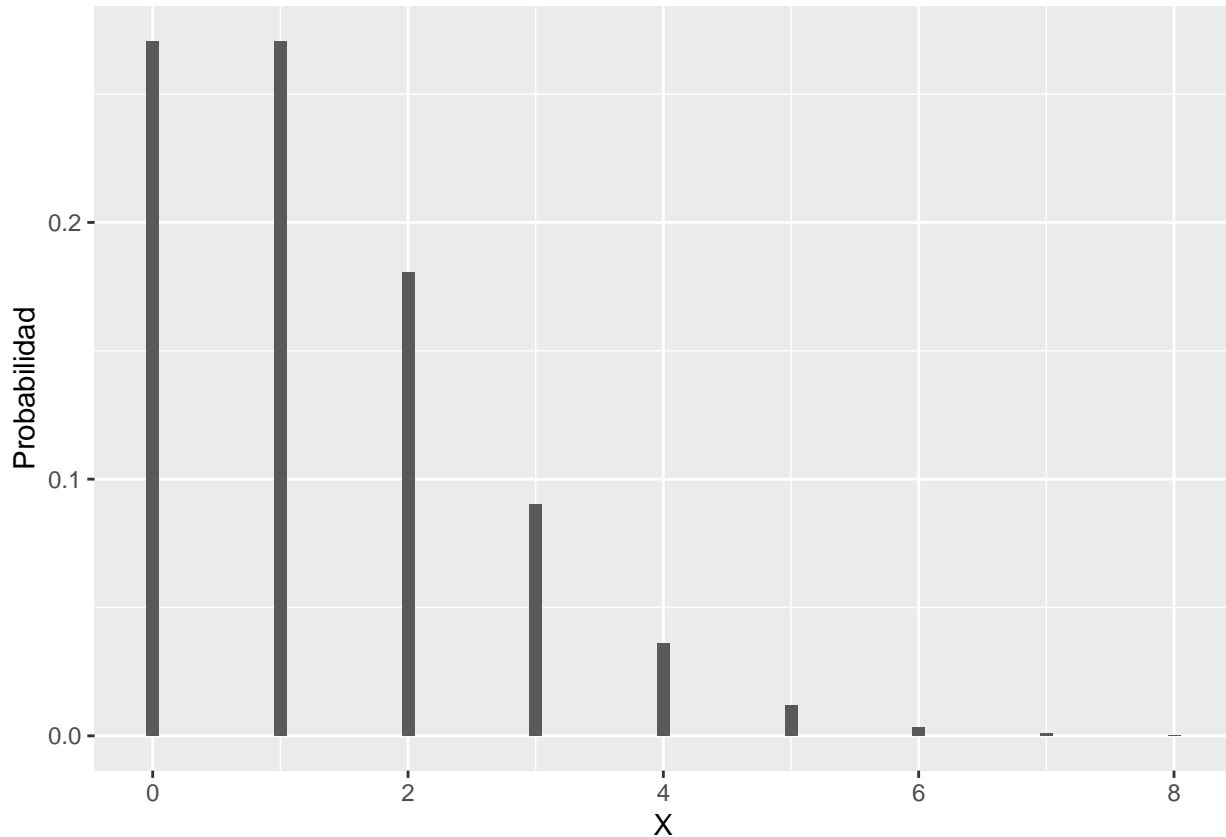
```
lambda = 2

x = 0
while (x<9){
  print(paste0(x, " = ", (exp(-lambda)*lambda^(x+1))/fact((x+1))))
  x = x+1
}

## [1] "0 = 0.270670566473225"
## [1] "1 = 0.270670566473225"
## [1] "2 = 0.180447044315484"
## [1] "3 = 0.0902235221577418"
## [1] "4 = 0.0360894088630967"
## [1] "5 = 0.0120298029543656"
## [1] "6 = 0.00343708655839016"
## [1] "7 = 0.000859271639597541"
## [1] "8 = 0.000190949253243898"

x = 0
X = c()
Probabilidad = c()
while (x<9) {
  X = c(X,x)
  Probabilidad = c(Probabilidad, dpois(x+1,lambda))
  x=x+1
}

ggplot(mapping = aes(X,Probabilidad)) +
  geom_col(width = 0.1)
```



4.15

Para un volumen fijo, el número de células sanguíneas rojas es una variable aleatoria que se presenta con una frecuencia constante. Si el número promedio para un volumen dado es de nueve células para personas normales, determinar la probabilidad de que el número de células rojas para una persona se encuentre dentro de una desviación estándar del valor promedio y a dos desviaciones estándar del promedio.

Respuesta.- Sea la desviación estándar de una variable aleatoria Poisson igual a,

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{9} = 3$$

Entonces una desviación estándar del valor promedio estará dada por:

$$9 \pm 3 = 6 \text{ y } 12$$

Acá debemos tener cuidado ya que estamos trabajando con distribuciones discretas, por lo que tenemos $P(X \leq 6) = P(X < 7)$ es decir cuando restamos $P(X \leq 12) - P(X \leq 6) = P(X \leq 12) - P(X < 7)$, por lo tanto lo correcto será restar

$$P(X \leq 12) - P(X \leq 5) = P(X \leq 12) - P(X < 6)$$

Luego,

$$P(X \leq 12) - P(X \leq 5) = F(12, 9) - F(5, 9) = \sum_{i=0}^{12} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} - \sum_{i=0}^5 \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} = 0.7600829$$

```
ppois(12,9)-ppois(5,9)
```

```
## [1] 0.7600829
```

```
acum_poisson(12,9)-acum_poisson(5,9)
```

```
## [1] 0.7600829
```

Por otro lado para dos desviaciones estándar se tiene,

$$P(X \leq 15) - P(X \leq 2) = F(15, 9) - F(2, 9) = \sum_{i=0}^{15} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} - \sum_{i=0}^2 \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} = 0.9717321.$$

```
ppois(15,9)-ppois(2,9)
```

```
## [1] 0.9717321
```

```
acum_poisson(15,9)-acum_poisson(2,9)
```

```
## [1] 0.9717321
```

4.16

El número total de clientes que llega a un banco es una variable aleatoria Poisson. Si el número promedio es de 120 por hora, ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen por lo menos tres clientes? ¿Puede esperarse que la frecuencia de llegada de los clientes al banco sea constante en un día cualquier?

Respuesta.- Sabiendo que en un minuto el promedio de llegada es 120/60 y que por lo menos se espera que lleguen 3 cliente, entonces

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^2 \frac{e^{-\frac{120}{60}} \cdot \left(\frac{120}{60}\right)^i}{i!} = 0.3233236$$

```
ppois(120/60,2,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3233236
```

```
1-acum_poisson(120/60,2)
```

```
## [1] 0.3233236
```

Luego, puede esperarse que la frecuencia de los clientes al banco sea constante en un día cualquiera, ya que λ es grande.

4.17

Supóngase que en un cruce transitado ocurren de manera aleatoria e independiente dos accidentes por semana. Determinar la probabilidad de que ocurra un accidente en una semana y de que ocurra tres, en la siguiente semana.

Respuesta.-

$$P(X = 1) \cdot P(X = 3) = p(1; 2) \cdot p(3; 2) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!} = 0.0488417$$

```
dpois(1,2)*dpois(3,2)
```

```
## [1] 0.0488417
```

```
func_poisson(1,2)*func_poisson(3,2)
```

```
## [1] 0.0488417
```

4.18

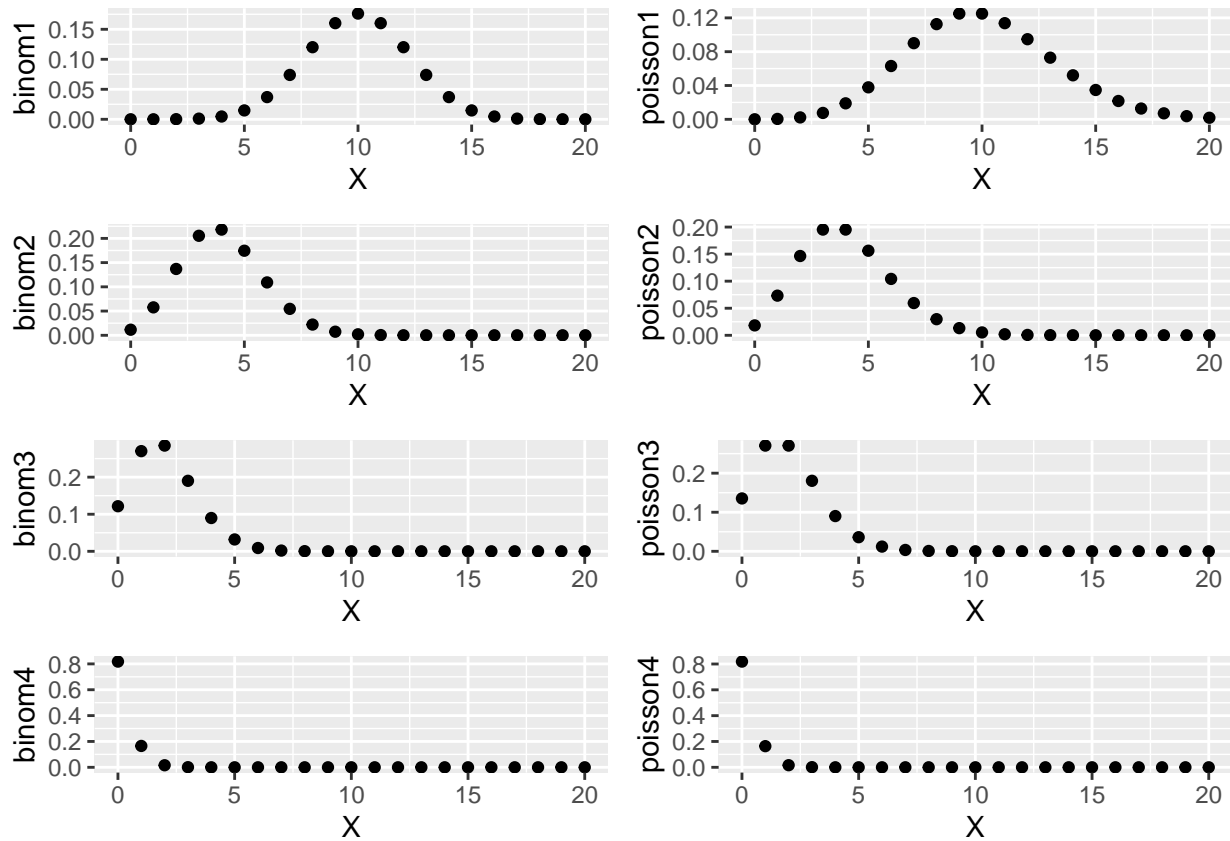
Sea X una variable aleatoria binomial. Para $n = 20$ calcular las probabilidades puntuales binomiales y compararlas con las correspondientes probabilidades de Poisson para $p = 0.5, 0.2, 0.1$ y 0.01 .

Respuesta.- Sea $\lambda = n \cdot p$ entonces,

```
prob = data.frame(X=0:20,  
  binom1=dbinom(0:20,20,0.5),  
  poisson1 = dpois(0:20,0.5*20),  
  binom2=dbinom(0:20,20,0.2),  
  poisson2 = dpois(0:20,0.2*20),  
  binom3=dbinom(0:20,20,0.1),  
  poisson3 = dpois(0:20,0.1*20),  
  binom4=dbinom(0:20,20,0.01),  
  poisson4 = dpois(0:20,0.01*20))
```

```
p1 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom1))+  
  geom_point()  
p2 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom2))+  
  geom_point()  
p3 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom3))+  
  geom_point()  
p4 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom4))+  
  geom_point()  
p5 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson1))+  
  geom_point()  
p6 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson2))+  
  geom_point()  
p7 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson3))+  
  geom_point()  
p8 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson4))+  
  geom_point()  
  
multiplot(p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,cols=2)
```

```
## Loading required package: grid
```



4.19

Una compañía compra cantidades muy grandes de componentes electrónicos. La decisión para aceptar o rechazar un lote de componentes se toma con base en una muestra aleatoria de 100 unidades. Si el lote se rechaza al encontrar tres o más unidades defectuosas en la muestra, ¿Cuál es la probabilidad de rechazar un lote que contenga un 8% de unidades defectuosas?

Respuesta.-