# 1

# Algunas aplicaciones de la integración

## 1.2. El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

**TEOREMA 1.1** *Supongamos que $f$ y $g$ son integrables y que satisfacen $f \leq q$ en $[a,b]$. La región $S$ entre sus gráficas es medible y su área $a(S)$ viene dada por la integral*

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$$

*Demostración.- Demostración.- Supongamos primero que $f$ y $g$ son no negativas,. Sean $F$ y $G$ los siguientes conjuntos:*

$$F = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x), \quad G = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x).$$

*Esto es, $G$ es el conjunto de ordenadas de $g$, y $F$ el de $f$, menos la gráfica de $f$. La región $S$ es la diferencia $G-F$. Según los teoremas 1.10 y 1.11, $F$ y $G$ son ambos medibles. Puesto que $F \subseteq G$ la diferencia $S = G-F$ es también medible, y se tiene*

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$$

*Consideremos ahora el caso general cuando $f \leq q$ en $[a,b]$, pero no son necesariamente no negativas. Este caso lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada encima del eje $x$. Esto es, elegimos un número positivo $c$ suficientemente grande que asegure que $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$ para todo $x$ en $[a,b]$. Por lo ya demostrado la nueva región $T$ entre las gráficas de $f+c$ y $g+c$ es medible, y su parea viene dad por la integral*

$$a(T) = \int_a^b [(g(x)+c) - (f(x)+c)] = \int_{[} g(x) - f(x)]\ dx$$

*Pero siendo $T$ congruente a $S$, ésta es también medible y tenemos*

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$$

*Esto completa la demostración.*

**Nota 1.1** *En los intervalos* $[a,b]$ *puede descomponerse en un número de subintervalos en cada uno de los cuales* $f \leq g$ *o* $g \leq f$ *la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma*

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$$

**LEMA 1.1 (Área de un disco circular)** *Demostrar que* $A(r) = r^2 A(1)$. *Esto es, el área de un disco de radio* $r$ *es igual al producto del área de un disco unidad (disco de radio* $1$*) por* $r^2$.

*Demostración.-* *Ya que* $g(x) - f(x) = 2g(x)$, *el teorema 2.1 nos da*

$$A(r) = \int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

*En particular, cuando* $r = 1$, *se tiene la fórmula*

$$A(1) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

*Cambiando la escala en el eje* $x$, *y utilizando el teorema 1.19 con* $k = 1/r$, *se obtiene*

$$A(r) = 2\int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} g(rx)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - (rx)^2}\, dx = 2r^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = r^2 A(1)$$

*Esto demuestra que* $A(r) = r^2 A(1)$, *como se afirmó.*

**Definición 1.1** *Se define el número* $\pi$ *como el área de un disco unidad.*

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

La formula que se acaba de demostrar establece que $A(r) = \pi r^2$

Generalizando el anterior lema se tiene

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x)\, dx = k\int_{ka}^{kb} f(x/k)\, dx = k^2\int_a^b f(x)\, dx$$

**TEOREMA 1.2** *Para* $a > 0$, $b > 0$ *y* $n$ *entero positivo, se tiene*

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{b^{1-1/n} - a^{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

*Demostración.-* *Sea* $\int_0^a x^{\frac{1}{n}}$. *El rectángulo de base* $a$ *y altura* $a^{\frac{1}{n}}$ *consta de dos componentes: el conjuntos de ordenadas de* $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ *a* $a$ *y el conjuntos de ordenadas* $g(y) = y^n$ *a* $a^{\frac{1}{n}}$. *Por lo tanto,*

$$a \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}} = \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\, dx + \int_0^{a^{\frac{1}{n}}} y^n\, dy \implies \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\, dx = a^{1+\frac{1}{n}} - \left.\frac{y^{n+1}}{n+1}\right|_0^{a^{\frac{1}{n}}} = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

*Análogamente se tiene*

$$\int_0^b x^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

*Luego notemos que*

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\, dx = \int_0^b x^{\frac{1}{n}}\, dx - \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\, dx$$

*por lo tanto*

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}} - b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

## 1.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, calcular el área de la región $S$ entre las gráficas de $f$ y $g$ para el intervalo $[a,b]$ que en cada caso se especifica. Hacer un dibujo de las dos gráficas y sombrear $S$.

**1.** $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 0, \quad a = -2, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [4 - x^2 - 0]\, dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) - \left(\frac{2^3-(-2)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

**2.** $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 8 - 2x^2, \quad a = -2, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [8 - 2x^2 - (4 - x^2)]\, dx = \int_{-2}^{2} 4 - x^2\, dx = \frac{32}{3} \ (por\, ejercicio\ 1)$$

**3.** $f(x) = x^3 + x^2, \quad g(x) = x^3 + 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^{1} x^3 + 1 - (x^3 + x^2)\, dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\, dx = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{1-(-1)}{3} = \frac{4}{3}$$

**4.** $f(x) = x - x^2, \quad g(x) = -x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_0^2 x - x^2 - (-x)\, dx = \int_0^2 2x - x^2 = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{2}$$

**5.** $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 1$

Respuesta.-

$$\int_0^1 x^{1/3} - x^{1/2}\, dx = \left.\frac{x^{1+1/3}}{1+1/3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

**6.** $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 1, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_1^2 x^{1/2} - x^{1/3}\, dx = \left.\frac{x^{1/2+1}}{1+1/2}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{1/3}+1}{1+1/3}\right|_1^2 = \frac{2^{1/2+1}-1}{1+1/2} - \frac{2^{1/3+1}}{1+1/3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12}$$

**7.** $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Sea

$$\int_0^1 |x^{1/3} - x^{1/2}|\, dx + \int_1^2 |x^{1/3} - x^{1/2}|\, dx$$

por los problemas 5 y 6 se tiene

$$\frac{1}{12} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{6}$$

**8.** $f(x) = x^{1/2}, \quad g(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{1/2} - x^2\, dx + \int_1^2 x^2 - x^{1/2}\, dx &= \left(\left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\right) + \left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_1^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+1/2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2^3-1}{3} - \frac{2^{1+1/2}-1}{1+1/2}\right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \\
&= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

**9.** $f(x) = x^2, \quad g(x) = x+1, \quad a = -1, \quad b = (1+\sqrt{5})/2$

Respuesta.

$$\int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - (x+1)\, dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} (x+1) - x^2\, dx- \ =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - x - 1\, dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} x + 1 - x^2\, dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} + \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{6} \\
&= \frac{5\sqrt{5}-3}{4}
\end{aligned}$$

**10.** $f(x) = x(x^2-1), \quad g(x) = x, \quad a = -1, \quad b = \sqrt{2}$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^{0} x(x^2-1) - x\, dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} x - [x(x^2-1)]\, dx = \int_{-1}^{0} x^3 - 2x\, dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} -x^3 + 2x\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} + 1 + (-1+2) = \frac{7}{4}$$

**11.** $f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad a = -1, \quad b = 1$

Respuesta.- Definimos $f$ de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x \in [-1, 0) \\ x & si \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx &= \int_{-1}^{0} -x - x^2 + 1\, dx + \int_{0}^{1} x - x^2 + 1\, dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

**12.** $f(x) = |x+1|, \quad g(x) = x^2 - 2x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Definamos $f$ de la siguiente manera:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} -(x+1) & si \quad x \in [0, 1) \\ x+1 & si \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)-g(x)\,dx &= \int_0^1 -(x-1)-x^2+2x\,dx+\int_1^2 x-1-x^2+2x\,dx\\
&= \int_0^1 -x^2+x+1\,dx+\int_1^2 -x^2+3x-1\,dx\\
&= \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2\\
&= \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{8}{3}+6-2+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1\right)\\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

**13.** $f(x)=2|x|, \quad g(x)=1-3x^3, \quad a=-\sqrt{3}/3, \quad b=\dfrac{1}{3}$

Respuesta.- Definimos $f$ de la siguiente manera:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x & si \quad x\in[-\sqrt{3}/3,0)\\ x & si \quad x\in[0,1/3]\end{cases}$$

de donde se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)-f(x)\,dx &= \int_{-\frac{-\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)\,dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx\\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} 1-3x^3\,dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0} -2x\,dx-\int_0^{\frac{1}{3}} 2x\,dx\\
&= \left(x-\frac{3}{4}x^4\right)\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}}+x^2\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0}-x^2\Big|_0^{\frac{1}{3}}\\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{108}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{12}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}\\
&= \frac{9\sqrt{3}-1}{27}
\end{aligned}$$

**14.** $f(x)=|x|+|x-1|, \quad g(x)=0, \quad a=-1, \quad b=2$

Respuesta.- En este problema $f(x)\geq g(x)$ en el intervalo $[-1,2]$, por lo tanto

$$\int_{-1}^2 f(x)-g(x)\,dx=\int_{-1}^2 |x|+|x+1|\,dx=\int_{-1}^2 |x|\,dx+\int_{-1}^2 |x-1|\,dx$$

Definimos cada función por separado,

$$|x|=\begin{cases} -x & si \quad x\in[-1,0)\\ x & si \quad x\in[0,2]\end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases} -(x-1) & si \quad x\in[-1,1)\\ x-1 & si \quad x\in[1,2]\end{cases}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} |x|\, dx + \int_{-1}^{2} |x-1|\, dx &= \int_{-1}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{2} x\, dx + \int_{-1}^{1} -(x-1)\, dx + \int_{1}^{2} x-1\, dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2} + \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} + (x)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} + (-x)\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

**15.** Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = cx^3$, siendo $c > 0$, se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(1/c, 1/c^2)$. Determinar $c$ de modo que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo $[0, 1/c]$ tengan área $\frac{2}{3}$.

Respuesta.- Tenemos que $f \geq g$ en el intervalo $[0, 1/c]$ de donde,

$$\int_0^{1/c} x^2 - cx^3\, dx = \int_0^{1/c} x^2\, dx - c\int_0^{1/c} x^3\, dx = \frac{1}{12c^3}$$

luego $\dfrac{1}{12c^3} = \dfrac{2}{3}$ por lo tanto $c = \dfrac{1}{2}$.

**16.** Sea $f(x) = x - x^2$, $g(x) = ax$. Determinar $a$ para que la región situada por encima de la gráfica de $g$ y por debajo de $f$ tenga área $frac92$.

Respuesta.- Tomaremos los casos cuando $a = 0, a > 0$ y $a < 0$.
Veamos primero que si $g(x) \leq f(x)$ entonces

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Longrightarrow x - x^2 - ax \geq 0 \Longrightarrow (1-a)x \geq x^2$$

de donde si $x = 0$ se tiene una igualdad. Luego si $x \neq 0$ entonces $x \leq (1-a)$. Ahora sea $a < 0$ por suposición se tendrá $1 - a > 0$, que nos muestra que el intervalo estará dado por $[0, 1-a]$. Análogamente se tiene el intervalo $[1-a, 0]$ para $a > 0$.

**C 1.** Si $a = 0$, esto no es posible ya que si $a = 0$ entonces $g(x) = ax = 0$ y entonces el área arriba del gráfico de $g$ y debajo del gráfico de $f$ es igual a

$$\int_0^1 x - x^2\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6} \neq \frac{9}{2}$$

**C 2.** Si $a < 0$, $f(x) \geq g(x)$ para $[0, 1-a]$, por lo que tenemos la zona, $a(S)$ de la región entre las dos gráficas dadas por

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-a} x - x^2 - ax\, dx &= (1-a)\int_0^{1-a} x\, dx - \int_0^{1-a} x^2\, dx \\
&= (1-a)\left(\frac{(1-a)^2}{2}\right) - \frac{(1-a)^3}{3} \\
&= -\frac{(1-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

así nos queda que
$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \Longrightarrow (1-a)^3 = -27 \Longrightarrow a = a$$

**C 3.** Sea $a > 0$ y $f(x) \geq g(x)$ entonces $[1-a, 0]$ lo que
$$\begin{array}{rcl} \int_{1-a}^{0} x - x^2 - ax\, dx & = & (1-a)\int_{1-a}^{0} x\, dx - \int_{1-a}^{0} x^2\, dx \\ & = & (1-a)\left(-\frac{(1-a)^2}{2} - \frac{(1-a)^3}{2}\right) \\ & = & -\frac{(1-a)^3}{6} \end{array}$$

Así igualando por $\frac{9}{2}$ tenemos
$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \Longrightarrow (1-a)^3 = -27 \Longrightarrow a = 4$$

Por lo tanto los valores posibles para $a$ son $-2$ y $4$.

**17.** Hemos definido $\pi$ como el área de un disco circular unidad. En el ejemplo 3 de la Sección 2.3, se ha demostrado que $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx$. Hacer uso de las propiedades de la integral para calcular la siguiente en función de $\pi$.

**(a)** $\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\, dx.$

Respuesta.- Por el teorema 19 de dilatación, $\displaystyle\frac{1}{\frac{1}{3}}\int_{-3\frac{1}{3}}^{3\frac{1}{3}}\sqrt{9-\left(\frac{x}{\frac{1}{3}}\right)^2}\, dx$, de donde nos queda $\displaystyle 9\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx$, por lo tanto y en función de $\pi$ se tiene $\displaystyle\frac{9}{2}\pi$.

**(b)** $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\, dx.$

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene
$$\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\, dx = 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

**(c)** $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-3)\sqrt{4-x^2}\, dx.$

Respuesta.- Comencemos usando la linealidad respecto al integrando de donde tenemos $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\, dx - 3\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\, dx$. Luego por el problema 25 de la sección 1.26, $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\, dx = 0$, de donde
$$-6\int_{-1}^{1}\sqrt{4-4x^2}\, dx = -12\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx = -6\pi$$

**18.** Calcular las áreas de los dodecágonos regulares inscrito y circunscrito en un disco circular unidad y deducir del resultado las desigualdades $3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$.

Respuesta.- Como estos son dodecágonos, el ángulo en el origen del círculo de cada sector triangular es $2\pi/12 = \pi/6$, y el ángulo de los triángulos rectángulos formado al dividir cada uno de estos sectores por la mitad es entonces $\pi/12$. Luego usamos el hecho de que,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{2}, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Ahora, para el dodecágono circunscrito tenemos el área del triángulo rectángulo $T$ con base 1 dado por,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-\sqrt{3}) = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro, tenemos el área del dodecaedro circunscrito $D_c$ dada por

$$a(D_c) = 24\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 12(2-\sqrt{3})$$

Por otro lado para el dodecágono inscrito, consideramos el triángulo rectángulo $T$ con hipotenusa 1 en el diagrama. La longitud de uno de los catetos viene dada por $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ y la otra por $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Entonces el área del triángulo es,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Dado que hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro inscrito, $D_i$ tenemos,

$$a(D_i) = 24\cdot\frac{1}{8} = 3$$

Por lo tanto, en vista de que el área del círculo unitario es, por definición $\pi$ y se encuentra entre estos dos dodecaedros, tenemos,

$$3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$$

**19.** Sea $C$ la circunferencia unidad, cuya ecuación cartesiana es $x^2+y^2=1$. Sea $E$ el conjunto de puntos obtenido multiplicando la coordenada $x$ de cada punto $(x,y)$ de $C$ por un factor constante $a>0$ y la coordenada $y$ por un factor constante $b>0$. El conjunto $E$ se denomina elipse. (Cuando $a=b$, la elipse es otra circunferencia.).

**a)** Demostrar que cada punto $(x,y)$ de $E$ satisface la ecuación cartesiana $(x/a)^2+(y/b)^2=1$.

Demostración.- Sea $E = \{(ax,by)/(x,y)\in C, a>0, b>0\}$. Si $(x,y)$ es un punto en $E$ entonces $\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$ es un punto es $C$, ya que todos los puntos de $E$ se obtienen tomando un punto de $C$ y multiplicando la coordenada $x$ por $a$ y la coordenada $y$ por $b$. Por definición de $C$, se tiene

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

**b)** Utilizar las propiedades de la integral para demostrar que la región limitada por esa elipse es medible y que su área es $\pi ab$.

Demostración.- De la parte $(a)$ sabemos que $E$ es el conjunto de puntos $(x,y)$ tales que $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$. Esto implica,

$$g(x)=b\sqrt{1-()^2}, \quad o \quad f(x)=-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}^2$$

Por lo tanto, el área de $E$ es el área cerrada de $-a$, $a$.
Para demostrar que esta región es medible y tiene área $\pi ab$, comenzamos por mencionar

$$\pi=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{rcl}
\pi b & = & 2\displaystyle\int_{-1}^{1} b\sqrt{1-x^2}\,dx \\[2ex]
\pi ab & = & 2a\displaystyle\int_{-1}^{1} b\sqrt{1-x^2}\,dx \\[2ex]
\pi ab & = & 2\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}\,dx \\[2ex]
\pi ab & = & \displaystyle\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x}{a}}-\left(-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)\,dx
\end{array}$$

Por lo tanto, sabemos que la integral de $-a$, $a$ de $g(x)-f(x)$ existe y tiene valor $\pi ab$, concluyendo que $E$ es medible y $a(E)=\pi ab$.

**20.** El ejercicio 19 es una generalización del ejemplo 3 de la sección 2.3. Establecer y demostrar una generalización correspondiente al ejemplo 4 de la sección 2.3.

Demostración.- Para generalizar esto, procedemos de la siguiente manera. Sea $f$ una función integrable no negativa en $[a,b]$, y $S$ sea el conjunto de ordenadas de $f$. Si aplicamos una transformación bajo la cual multiplicamos la coordinada $x$ de cada punto $(x,y)$ en la gráfica de $f$ por una constante $k>0$ y cada coordinada $y$ por una constante $j>0$, entonces obtenemos una nueva función $g$ donde un punto $(x,y)$ está en $g$ si y sólo si $\left(\frac{x}{k},\frac{y}{j}\right)$ está en $f$. Luego,

$$\frac{y}{j}=f\left(\frac{x}{k}\right)\Longrightarrow y=j\cdot f\left(\frac{x}{k}\right)\Longrightarrow g(x)=j\cdot j\left(\frac{x}{k}\right)$$

Sea $jkS$ y denotamos el conjunto ordenado de $g$.

$$a(S)=\int_a^b f(x)\,dx$$

entonces

$$\begin{aligned} a(jsS) &= \int_{ka}^{kb} g(x)\, dx \\ &= j \cdot \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\, dx \\ &= jk \cdot \int_{a}^{b} f(x)\, dx \\ &= \int_{ka}^{kb} jk \cdot a(S)\, dx \end{aligned}$$

**21.** Con un razonamiento parecido al del ejemplo 5 de la sección 2.3 demostrar el teorema 2.2.

Demostración.- Esta demostración ya fue dada junto a la definición del teorema 2.2.

## 1.5. Las funciones trigonométricas

**Propiedad .1**

1. *Dominio de definición. Las funciones seno y coseno están definidas en toda la recta real.*
2. *Valores especiales. Tenemos* $\cos 0 = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1, \cos\pi = -1$.
3. *Coseno de una diferencia. Para $x$ e $y$ cualesquiera, tenemos*

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$

4. *Desigualdades fundamentales. Para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, tenemos*

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

**TEOREMA 1.3** *Si dos funciones* sen *y* cos *satisfacen las propiedades 1 a 4, satisfacen también las siguientes:*

***(a)*** *La identidad pitagórica,* $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, *para todo $x$.*

*Demostración.- La parte (a) se deduce inmediatamente si tomamos $x = y$ en*

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$$

*y usamos la relación* $\cos 0 = 1$.

***(b)*** *Valores especiales,* $\operatorname{sen} 0 = \cos \frac{1}{2}\pi = \operatorname{sen}\pi = 0$.

*Demostración.- Resulta de (a) tomando $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \pi$ y utilizando la relación* $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$.

***(c)*** *El coseno es función par y el seno es función impar. Esto es, para todo $x$ tenemos*

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

*Demostración.-* *Que el coseno es par resulta también de*

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$$

*haciendo $y = 0$. A continuación deducimos la fórmula*

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \operatorname{sen} x,$$

*haciendo $y = \frac{1}{2}\pi$ en $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$. Partiendo de esto, encontramos que el seno es impar, puesto que*

$$\operatorname{sen}(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\pi\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$$

***(d)*** *Co-relaciones. Para todo $x$, se tiene*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{sen} x$$

*Demostración.-* *Para demostrarlo utilizaremos $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \operatorname{sen} x$ reemplazando primero $x$ por $\frac{1}{2}\pi + x$ y luego $x$ por $-x$.*

***(e)*** *Periodicidad. Para todo $x$ se tiene $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.*

*Demostración.-* *El uso reiterado de (d) nos da entonces las relaciones de periodicidad (e).*

***(f)*** *Fórmulas de adición. Para $x$ e $y$ cualesquiera, se tiene*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} y$$

*Demostración.-* *Para demostrar basta reemplazar $x$ por $-x$ en $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$ y tener en cuenta la paridad o imparidad. Luego utilizando la parte (d) y la fórmula de adición para el coseno se obtiene*

$$\operatorname{sen}(x + y) = -\cos\left(x + y + \frac{\pi}{2}\right) == -\cos x \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y$$

***(g)*** *Fórmulas de diferencias. Para todo los valores $a$ y $b$, se tiene*

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\frac{a - b}{2} = \cos\frac{a + b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen}\frac{a + b}{2}\operatorname{sen}\frac{a + b}{2}.$$

*Demostración.- Reemplazaremos primero $y$ por $-y$ en la fórmula de adición para* $\operatorname{sen}(x+y)$ *obteniendo*

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

*Restando ésta de la fórmula para* $\operatorname{sen}(x+y)$ *y haciendo lo mismo para función coseno, llegamos a*

$$\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2 \operatorname{sen} y \cos x,$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$

*Haciendo $x = (a+b)/2$, $y = (a-b)/2$ encontramos que esas se convierten en las fórmulas de diferencia (g).*

***(h)*** *Monotonía. En el intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi]$, el seno es estrictamente creciente y el coseno estrictamente decreciente.*

*Demostración.- La propiedad 4 se usa para demostrar (h). Las desigualdades $0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$ prueban que cosx y* $\operatorname{sen} x$ *son positivas si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Después de esto, si $0 < b < a < \frac{1}{2}\pi$, los números $(a+b)/2$ y $(a-b)/2$ están en el intrevalo $(0, \frac{1}{2}\pi)$, y las fórmulas de diferencias (g) prueban que* $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$ *y* $\cos a < \cos b$. *Esto completa la demostración.*

## 1.6. Fórmulas de integración para el seno y el coseno

**TEOREMA 1.4** *Si $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$, y $n \geq 1$, tenemos*

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{ka}{n} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{ka}{n} \qquad (2.6).$$

*Demostración.- Las desigualdades anterior serán deducidas de la identidad*

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x, \qquad (2.7)$$

*válida para $n \geq 1$ y todo real $x$. Para demostrar, utilizaremos las fórmulas de diferencias (g) del teorema 2.3 para poner*

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos kx = \operatorname{sen}\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\left(k - \frac{1}{2}\right)x$$

*Haciendo $k = 1, 2, ..., n$ y sumando esas igualdades, encontramos que en la suma del segundo miembro se reduce unos términos con otros obteniéndose (2.7).*
*Si $\frac{1}{2}x$ no es un múltiplo entero de $\pi$ podemos dividir ambos miembros de (2.7) por* $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ *resultando*

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2}x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x)}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$$

*Reemplazando $n$ por $n-1$ y sumando 1 a ambos miembros también obtenemos. (Ya que* $\cos 0 = 1$*).*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2}\right)x + \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$$

*Esas dos fórmulas son válidas si* $x \neq 2m\pi$, *siendo* $m$ *entero. Tomando* $x = a/n$, *donde* $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ *encontramos que el par de desigualdades (2.6) es equivalente al siguiente*

$$\frac{a}{n}\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\frac{\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{b} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}$$

*Este par, a su vez es equivalente al par*

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) < \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{\left(\frac{a}{2n}\right)}\operatorname{sen} a < \operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) \qquad (2.8)$$

*Por consiguiente demostrar (2.6) equivale a demostrar (2.8). Demostraremos que se tiene*

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta - \operatorname{sen}\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < \operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta \qquad (2.9)$$

*para* $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. *Cuando* $\theta = a/(2n)$ *(2.9) se reduce a (2.8).*
*Para demostrar la desigualdad de la parte izquierda de (2.9), usamos la fórmula de adición para el seno poniendo*

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\cos\theta + \cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta < \operatorname{sen} 2n\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} + \operatorname{sen}\theta,$$

*habiendo usado también las desigualdades*

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}, \quad 0z < \cos 2n\theta \leq 1, \quad \operatorname{sen}\theta > 0, \qquad (2.10)$$

*siendo todas válidas ya que* $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. *La desigualdad (2.10) equivale a la parte izquierda de (2.9).*
*Para demostrar la parte derecha de (2.9), utilizamos nuevamente la fórmula de adición para el seno poniendo*

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\cos\theta - \cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta$$

*Sumando* $\operatorname{sen}\theta$ *ambos miembros, obtenemos*

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta}\right) \qquad (2.11)$$

*Pero ya que tenemos*

$$\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta} = \frac{2\operatorname{sen}^2 n\theta}{2\operatorname{sen} n\theta\cos n\theta} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}$$

*el segundo miembro de (2.11) es igual a*

$$\operatorname{sen} 2n\theta\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}\right) = \operatorname{sen} 2n\theta\frac{\cos\theta\cos n\theta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta} = \operatorname{sen} 2n\theta\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}$$

*Por consiguiente, para completar la demostración de (2.9), necesitamos tan sólo demostrar que*

$$\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \qquad (2.12)$$

*Pero tenemos*

$$\cos n\theta = \cos(n-1)\cos theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta\operatorname{sen}\theta < \cos(n-1)\theta\cos\theta < \cos(n-1)\theta\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

*en donde otra vez hemos utilizado la desigualdad fundamental* $\cos\theta < \theta/sen\theta$. *ya que* $\left(\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$, *esta último relación implica (2.12), con lo que se completa la demostración del teorema 2.4.*

**TEOREMA 1.5**