APUNTES DE CONVEXIDAD Y OPTIMIZACIÓN.

Incluye demostraciones propuestos en clases (en azul).

Source: `https://github.com/soyfode/matematicas/tree/master/investmat/src/convexOpt`

Christian Limbert Paredes Aguilera

2023

1

Convexidad y Optimización

1.1 Introducción

$$(P)\begin{cases} \min & f_0(x) \\ & \\ s.a. & f_1(x) \leq b_1 \\ & f_2(x) \leq b_2 \\ & \vdots \\ & f_m(x) \leq b_m. \end{cases}$$

Donde,

$$\begin{array}{rl} f_i: & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f_0: & \text{Función objetivo.} \\ f_j: & \text{Función Restricción donde } j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

El objetivo de (P) es encontrar x^* el optimo (arg min) que cumpla:

$$f_0(x^*) \leq f_0(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n / f_j(x) \leq b_j,\ j = 1, \ldots, m.$$

Los Puntos factibles son los $x \in \mathbb{R}^n / f_j(x) \leq b_j,\ j = 1, \ldots, m.$

Cuando el problema sea de la forma convexa se llama optimización convexa. Al final, la habilidad es identificar las restricciones y convertirlas a convexas.

- Las funciones objetivos en economía se les puede llamar funciones de coste.
- Multiplicamos las desigualdades por (-1) para darle la forma que más nos convenga darle al problema de optimización.
- Maximizar será lo mismo que minimizar. En nuestro caso minimizaremos las funciones.
- Al valor $f_0(x^*)$ se le llamará valor optimo.
- En $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existirán algunas funciones el cual su dominio sera "tramposo".

Nota 1.1. *Imaginemos que tenemos*

$$\{\min \quad f(x)$$

$$\{\min \quad f_0^2(x)$$

- *Si las función f_0 es positiva las dos formas son equivalentes.*
- *El valor optimo no será el mismo, pero el punto optimo lo será, ya que las funciones son monótomas crecientes.*
- *Si el valor al cuadrado simplificará la solución, entonces podemos utilizarla. Esto nos permite que si no tengamos una función convexa podamos convexificarla.*

Notación 1.1 Podemos escribir Ax como

$$\begin{aligned} Ax &= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}}_{A^1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}}_{A^2} x_2 + \cdots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}}_{A^n} x_n \\ &= x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n. \end{aligned}$$

A^1 = A super 1 como columna, y A_1 = A super 1 como fila.

Ahora, en términos de filas. Si escribimos los vectores A en columna

$$A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_k^T \end{pmatrix}$$

Donde,

$$Ax = \begin{pmatrix} A_1^T x \\ A_2^T x \\ \vdots \\ A_n^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A_1^T, x \rangle \\ \langle A_2^T, x \rangle \\ \vdots \\ \langle A_n^T, x \rangle \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.1 Sean $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^k$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

El problema será una minimización global dada por: $\begin{cases} \min : & \|A\mathbf{x} - b\|_2^2 \\ s.a. & \emptyset. \end{cases}$

Solución.- Por diferenciabilidad se tiene,

$$f_0(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \langle Ax - b, Ax - b \rangle.$$

- Diremos que el un vector cualquiera sera vector columna.
- El subindice $_2$ significa la normal Euclidea. Que es la distancia normal que existe en $\mathbb{R}^2$.

Intentaremos demostrar el punto donde las parciales de $f_0 = 0$. Para ello, encontraremos

$$\begin{aligned} D_i f_0 &= D_i\left(\langle Ax-b, Ax-b\rangle\right) \\ &= \langle D_i\left(Ax-b\right), Ax-b\rangle + \langle Ax-b, D_i\left(Ax-b\right)\rangle \\ &= 2\langle Ax-b, D_i\left(Ax-b\right)\rangle. \end{aligned}$$

Veamos la parcial de $D_i\left(Ax-b\right)$.

$$D_i\left(Ax-b\right) = D_i\left(x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n - b\right) = A^i.$$

Dado que b que es constante vale cero, y donde todos los suman que no estén las x_i también valen cero. Por lo tanto,

$$D_i f_0 = 2\langle Ax-b, A^i\rangle.$$

Luego,

$$2\langle Ax-b, A^i\rangle = 0\ \forall i = 1,\ldots,n \quad \Rightarrow \quad \langle Ax-b, A^i\rangle = 0, \quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

Observemos que,

- En funciones convexas el extremo local será el mínimo global.

$$\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} \langle Ax-b, A^1\rangle \\ \langle Ax-b, A^2\rangle \\ \vdots \\ \langle Ax-b, A^n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_1)^T \\ (A_2)^T \\ \vdots \\ (A_n)^T \end{pmatrix} (Ax-b) = A^T(Ax-b).$$

$$A^T(Ax-b) = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad A^TAx = A^Tb.$$

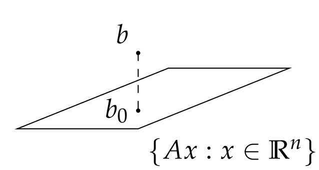
El cual es una ecuación normal.

Por último, veamos los argumentos geométricos. Notemos que,

$$\min \|Ax-b\|_2^2 = d(b_i, Ax)^2$$

Donde Ax tendrá la forma geométrica de un subespacio vectorial (en el caso de $\mathbb{R}^3$ será un plano). Entonces,

- Si $b \in \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \;\Leftrightarrow\; x^* \in \mathbb{R}^n : Ax^* = b$. El valor optimo es $f_0(x^*) = 0$.
- Si $b \notin \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$, $f_0(x^*) = d(b, b_0)^2$.



Ahora, cual es el optimo?; es decir cual es el x^*. Para ello,

$$x^* \in \mathbb{R}^n : Ax^* = b_0.$$

Aquí, b_0 está en el plano, si estamos en $\mathbb{R}^3$. ¿Cómo llegamos algebraicamente?:

$$
\begin{aligned}
b - b_0 \perp \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \quad &\Leftrightarrow \quad b - b_o \perp A^i,\ i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow \quad \langle b - b_0, A^i \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow \quad \langle b - Ax^*, A^i \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow \quad \langle Ax^* - b, A^i \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow \quad A^T A x^* = A^T b.
\end{aligned}
$$

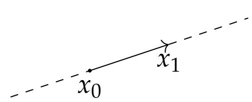
(Las ecuaciones normales vienen dadas por la perpendicularidad.)

1.2 Conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$

El dominio serán conjuntos convexos o dominio efectivo.

Definición 1.1 **Lineal.**

$$L(x_0, x_1) := \{x_0 + \lambda(x_1 - x_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$



- Cuando λ vale 1 será x_1 cuando valga cero x_0.
- Cuando es positivo irá a la derecha, cuando es negativo hacia la izquierda.
- Toda la recta nos da un concepto que denominamos Afín. Es cualquier punto que este entre x_0 y x_1 del gráfico de arriba.

Para la convexidad no es necesario tener la linea, solo necesitaremos un segmento definido por:

$$[x_0, x_1] := \{x_0 + \lambda(x_1 - x_0) : \lambda \in [0, 1]\} = \{(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 : \lambda \in [0, 1]\}$$

Definición 1.2 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice **Afín**, si $\forall x, y \in A$ se tiene que la $L(x, y) \subseteq A$. (Subespacios vectoriales desplazados).

- Manejar el concepto de afín con lineas es incomodo, por lo que se utiliza el concepto de combinación afín.
- La diferencia entre espacio vectorial y espacio afín es que el espacio afín esta desplazado; es decir, no necesariamente pasa por el cero como en un subespacio vectorial.

- Un circulo no es afín ya que la linea es infinita.
- Un plano podría ser Afín.
- La recta es afín.
- Todo $\mathbb{R}^n$ es afín.

- Un único punto también es afín, dado que $x = y$.

Definición 1.3 Una **combinación afín** de los vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un vector de la forma

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k.$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

- $(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ es una combinación lineal de x_0 y x_1. Donde $(1-\lambda)+\lambda = 1$.
- Lo demás puntos fuera del segmento son las combinaciones lineales de x_0 y x_1.

Teorema 1.1 A es afín sii A contiene toda combinación afín de sus puntos.

Demostración.- Primero, tomemos puntos arbitrarios $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ en A tal que

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$$

donde $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Ahora, consideremos dos puntos x_i, x_j de z. Dado que A es afín, entonces $L(x_i, x_j) \subseteq A$, para todo x_i, x_j. Esto implica que z está en A. Intuitivamente, si

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad \lambda_3\lambda_3 + \lambda_4\lambda_4, \quad \ldots, \quad \lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_k x_k. \qquad \text{con } \sum_{i01}^{k} y_i = 1.$$

están en A. Entonces, z tendrá que estar en A.

Para demostrar la otra implicación, tomemos dos puntos cualesquiera x_1 e x_k en A. Queremos demostrar que

$$L(x_1, x_k) = \{x_1 + \lambda(x_k - x_1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

está contenido en A. Por el hecho de que x_1 e x_k están en A, podemos considerar la línea $L(x_1, x_k)$. Cualquier punto en esta línea se puede expresar como

$$z = x_1 + \lambda(x_k - x_1),$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Ahora, notemos que $\lambda + (1-\lambda) = 1$, lo cual es la condición de combinación afín. Y dado que A contiene toda combinación afín de sus puntos, esto implica que z está en A. Por lo tanto, A es afín. ■

- Este conjunto es estable para combinaciones lineales, muy similar al concepto de subespacio vectorial.

Notación 1.2 La suma de Minkowski es la operación de conjuntos; es decir, si $A, E \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$A = x_0 + E = \{x_0 + e : e \in E\} \quad \text{o} \quad E = A - x_0 = \{a - x_0 : a \in A\}.$$

Nota 1.2. *La definición de subespacio se refiere a tomar dos escalares y dos vectores, realizar la combinación lineal, donde esta combinación lineal no se saldrá del conjunto dado.*

Es sencillamente trasladar los puntos del plano y desplazarlos o moverlos.

Teorema 1.2 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es afín sii existe un subespacio vectorial $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $A = x_0 + E$ para todo $x_0 \in A$.

Demostración.- Supongamos que A es afín y fijamos $x_0 \in A$. Intentaremos probar que $E = A - x_0$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, esto es equivalente a decir que:

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, e_i, e_2 \subseteq E \quad \Rightarrow \quad \lambda e_i + \mu e_2 \in E.$$

Probemos que $\lambda e_1 + \mu e_2 \in E$; en otras palabras, probaremos que $\lambda e_1 + \mu e_2$ es $a - x_0$.

$$\begin{aligned} \lambda e_1 + \mu e_2 &= \lambda(a_1 - x_0) + \mu(a_2 - x_0) \\ &= \lambda a_1 + \lambda a_2 - \lambda x_0 - \mu x_0 \\ &= \lambda a_1 + \lambda a_2 - \lambda x_0 - \mu x_0 + x_0 - x_0 \\ &= \lambda a_1 + \lambda a_2 + (1 - \lambda - \mu)x_0 - x_0. \end{aligned}$$

Observemos que $\lambda a_1 + \lambda a_2 + (1 - \lambda - \mu)x_0$ está en A, dado a que $\lambda + \mu + (1 - \lambda - \mu) = 1$. Por lo tanto,

$$A - x_0 = E.$$

Es un subespacio vectorial.

Ahora, para demostrar que A es afín, probaré que cualquier combinación afín de elementos de A sigue estando en A (Teorema 1.1). Sean,

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k : \sum \lambda_i = 1.$$

De donde,

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k &= \lambda_1(e_1 - x_0) + \lambda_2(e_2 - x_0) + \cdots + \lambda_k(e_k - x_0) \\ &= \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) x_0 \end{aligned}$$

Observemos que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$ es una combinación lineal afín el cual existe en E y por definición, $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) = 1$. Por lo tanto,

$$E + x_0 = A.$$

■

Definición 1.4 **Envoltura Afín.**

La envolura afín de B, $\text{Aff}(B)$, es el menor conjunto afín que contiene a B. Esto implica que es el conjunto de las combinaciones afines de elementos de B o es la intersección de los conjuntos afines que contienen a B

Definición 1.5 Si A es Afín se llama "dimensión afín de A" a la dimensión de su espacio vectorial.

- Dimensión 0 un punto.
- Dimensión 1 una recta.
- Dimensión 2 una plano.

Ejemplo 1.2 Dado $C \in \mathbb{R}^n$ afín. Siempre existirán una matriz $A \in \mathcal{M}_{p\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}.$$

Solución.- El conjunto lineal asociado será el núcleo de la aplicación lineal. Es decir,

$$E = \{e \in \mathbb{R}^n : Ae = 0\},$$

cualquier solución de $x_0 \in C$ de modo que $Ax_0 = b$. Tomando un punto de C y otro de E, tenemos

$$A(x_0 + e) = Ax_0 + Ae = b + 0 = b.$$

Por lo tanto,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} = x_0 + E.$$

Así, el conjunto afín no es más que el traslado del espacio vectorial.

Definición 1.6 **Topología de $\mathbb{R}^n$.**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$:

- El concepto de punto interior será importante, ya que podremos acercarnos al punto a desde todas las direcciones.
- Si es un punto relativo interior nos acercaremos por todos los lados del conjunto.
- El punto de adherencia o clausura es un punto el cual me puedo acercar de alguna forma.

1) $a \in A$ está en el interior de A $\left(a \in \text{int}(A) \text{ o } a \in \mathring{A}\right)$, cuando existe $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subseteq A$.

$$B(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 \leq \delta.\}.$$

Por ejemplo en $\mathbb{R}^2$ será un circulo y $\mathbb{R}^3$ será una esfera.

2) A se dice abierto si $A = \text{int}(A) = \mathring{A}$. (Serán las bolas que estarán completamente dentro del conjunto). No tendrá puntos frontera.

3) Decimos que $c \in \mathbb{R}^n$ está en el cierre (o clausura) de A, cuando $\exists \{a_n\} \in A | a_n \to c$ (Será cualquier bola de c que corta al conjunto o serán los puntos que contienen a todo su frontera).

4) Decimos que A es cerrado cuando $A = \overline{A}$ donde

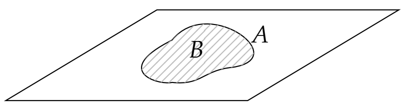
$$\{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ está en el cierre de A}\}.$$

(El cierre serán los puntos interior y los puntos frontera).

5) Se llama frontera de A, ∂A a la intersección $\overline{A} \cap \left(\overline{\mathbb{R}\backslash A}\right) = \overline{A} \backslash \operatorname{int}(A)$ (Cualquier bola estará una parte en el interior y otra en el exterior del conjunto).

6) $a \in \operatorname{relint}(A)$ si existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap Aff(A) \subseteq A$.
Lo que decimos es que la bola puede ser muy grande y vivir en $\mathbb{R}^3$ e intersecar en el plano, donde se corta transversalmente para proyectar la imagen como un circulo.

Ejemplo 1.3 Dibujemos un plano ($\mathbb{R}^3$)



- B es el interior con la frontera.
- A es la frontera.
- El objetivo será encontrar el punto optimo de un esfera que está proyectada en este plano.
- El conjunto tendrá que ser convexo.

Veamos algunas propiedades de este conjunto.

1) A es cerrado | Cualquier punto que ponga en B me puedo acercar por puntos de B.
2) B cerrado.
3) $\mathring{A} = \emptyset$ | Si yo ponga una bola $\mathbb{R}^3$, se saldrá del conjunto A.
4) $\mathring{B} = \emptyset$ | Ya que no existirá en el plano ninguna esfera.
5) $\operatorname{relint}(A) = \emptyset$; $\operatorname{relint}(B) = B \backslash A$.

Definición 1.7 **Combinación convexa.**

- La única diferencia entre combinación convexa y afín es que la combinación convexa es positiva.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Al vector

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$$

se le llama combinación convexa de los puntos $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

- En particular, las combinaciones convexas son los segmentos.

Observación 1.1 La definición para 2 puntos $\{x_1, x_2\}$ nos da las combinaciones convexas,

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \qquad \lambda \geq 0, (1-\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0,1].$$

Esto es el segmento,

$$\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : \lambda \in [0,1]\} = [x_1, x_2].$$

Nos quedamos con el segmento que los une, eso nos permitirá utilizar las propiedades de los números reales. Por lo que podremos realizar análisis.

- Decimos que C es cerrado para las combinaciones convexas. Es decir, no me salgo del conjunto.

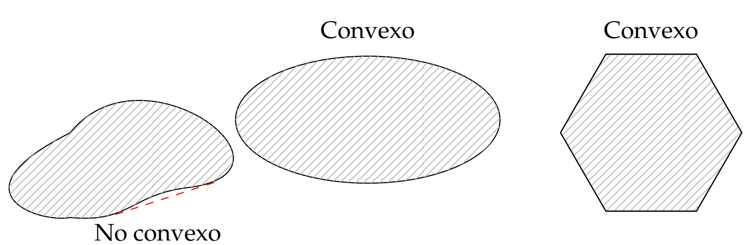
Definición 1.8 **Convexo.**

Un conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ se dice convexo cuando C contiene las combinaciones convexas de sus puntos, si y sólo si

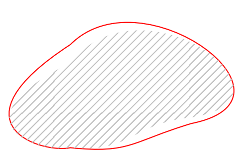
$$\forall x_1, x_2 \in C \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq C.$$

Un conjunto es convexo si dados dos puntos el segmento que los une se queda adentro.

Ejemplo 1.4



Del gráfico 1) ¿Cuál es el menor conjunto convexo que lo contiene?



Definición 1.9 se llama **envoltura convexa** de A al menor conjunto convexo que lo contiene o a la intersección de todos los convexos que contienen a A, denotado por $\text{co}(A)$. También es equivalente a decir que

$$\text{co}(A) = \{\text{Combinación convexa de puntos de A.}\}$$

Ejercicio 1.1 Demostrar que la intersección de conjuntos convexos es convexo.

Demostración.- Demostremos por contradicción. Sean C_1 y C_2 dos conjuntos convexos. Y sea

$$C = C_1 \cap C_2.$$

no convexo. Esto significa que existen x e y tales que

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in \mathbb{R}\} \nsubseteq C.$$

Supongamos ahora que x e y están en C. Cómo ambos C_1 y C_2 son convexos, el segmento definido debe estar en ambos conjuntos. Es decir,

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq C.$$

Lo que contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto, C es convexo.

■

Definición 1.10 **Cono.**

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama cono si y sólo si

$$\lambda x \in C \text{ si } x \in C,\ \lambda \geq 0.$$

Contiene los rayos que pasan por el cero e intersecan a un punto dado.

Propiedad .1 **Propiedades de los conos.**

a) Un cono siempre contiene al origen.

b) La envoltura cónica de un conjunto es $\text{con}(A) = \{\lambda : \lambda \geq 0, a \in A\}$. La intersección de todos los conos que contiene a A.

c) Un cono C es convexo si y sólo si

$$\lambda_1, \lambda_2 \in C \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

d) C es un cono convexo si

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in C$$

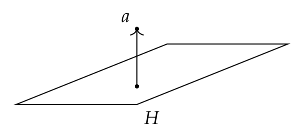
para $\lambda_i \geq 0$.

Definición 1.11 **Hiperplano.**

$H \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **hiperplano** si existe $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = a^T x = 0 \right\} = a^{\perp}.$$

- El hiperplano es un caso particular del estudio convexo.
- Hiperplano:



- En $\mathbb{R}$ los hiperplanos son rectas.
- En $\mathbb{R}^n$, los hiperplanos serán uno menos de dimensión.

Proposición 1.1 $H \subseteq \mathbb{R}^n$ es un hiperplano si y sólo si, H es un subespacio de dimensión $n-1$.

Demostración.- ■