1

Algunas aplicaciones de la integración

1.1. La integral como función de límite superior. Integrales indefinidas

Si f es no negativa en $[a, b]$, la integral indefinida A es creciente, puesto que se tiene

$$A(y) - A(x) = \int_a^y f(t)\,dx - \int_a^x f(t)\,dx = \int_x^y f(t)\,dx \geq 0$$

siempre que $a \leq x \leq b$.

Definición 1.1 (Definición de función convexa) *Una función g se llama convexa en un intervalo $[a, b]$ si, para todo x e y en $[a, b]$ y para cada α tal que $0 < \alpha < 1$, tenemos*

$$g(z) \leq \alpha g(y) + (1-\alpha)g(x), \text{ donde } <= \alpha y + (1-\alpha)x$$

Decimos que g es cóncava en $[a, b]$ si es válida la desigualdad invertida,

$$g(z) \geq \alpha g(y) + (1-\alpha)g(x), \text{ donde } <= \alpha y + (1-\alpha)x$$

TEOREMA 1.1 *Sea $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces, A es convexa en cada intervalo donde f es creciente , y cóncavo en cada intervalo donde f es decreciente.*

Demostración.- Supongamos que f es creciente en $[a, b]$, elijamos $x < y$, y sea $z = \alpha y + (1-\alpha)x$. Tenemos que demostrar que $A(z) \leq \alpha A(y) + (1-\alpha)A(x)$.

1.2. Ejercicios

Calcular las integrales de los ejercicios 1 al 16.

1. $\displaystyle\int_0^x (1+t+t^2)\,dt = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$

2. $\displaystyle\int_0^{2y}(1+t+t^2)\,dt = \left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{2y} = 2y+2y^2+\frac{8y^2}{3}.$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{2x}(1+t+t^2)\,dx = \left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2x} = 2x+1+\frac{4x^2-1}{2}+\frac{8x^3+1}{3} = \frac{16x^3+12x^2+12x+5}{6}.$

4. $\displaystyle\int_1^{1-x}(1-2t+3t^2)\,dx = \left(t+t^2+t^3\right)\Big|_1^{1-x} = 1-x-1+(1-x)^2+1+(1-x)^3-1 = (1-x)^3+(1-x)^2+(1-x)-1 = -x^3+2x^2-2x$

5. $\displaystyle\int_{-2}^{x}t^2(t^2+1)\,dt = \int_{-2}^{x}(t^4+t^2)\,dt = \left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{x} = \left(\frac{x^5}{5}\right)-\left(-\frac{32}{5}-\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{136}{15}.$

6. $\displaystyle\int_x^{x^2}(t^2+1)^2\,dt.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_x^{x^2}(t^2+1)^2\,dt &= \int_x^{x^2}(t^4+2t^2+1)\,dt\\
&= \left(\frac{t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}+t\right)\Big|_x^{x^2}\\
&= \left(\frac{x^10}{5}+\frac{2x^5}{3}+x^2\right)-\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{5}+x\right)\\
&= \frac{x^{10}}{5}+\frac{2x^6}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x^2-x
\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int_1^{x}(t^{1/2}+1)\,dt, \quad x>0.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_1^{x}(t^{1/2}+1)\,dt &= \left(\frac{2t^{2/3}}{3}+t\right)\Big|_1^{x}\\
&= \left(\frac{2x^{2/3}}{3}+x\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right)\\
&= \frac{2x^{2/3}}{3}+x-\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

8. $\displaystyle\int_x^{x^2}(t^{1/2}+t^{1/4})\,dt, \quad x>0.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}\int_x^{x^2}(t^{1/2}+t^{1/4})\,dt &= \left(\frac{2t^{2/3}}{3}+\frac{4t^{5/4}}{5}\right)\Bigg|_x^{x^2}\\ &= \left(\frac{2x^3}{3}-\frac{4x^{5/2}}{5}\right)-\left(\frac{2x^{2/3}}{3}+\frac{4x^{5/4}}{5}\right)\\ &= \frac{2}{3}(x^3-x^{3/2})+\frac{4}{5}(x^{5/2}-x^{5/4})\end{aligned}$$

9. $\displaystyle\int_{-\pi}^{x} cost\ dt = \operatorname{sen} t\Big|_{-\pi}^{x} = \operatorname{sen} x.$

10. $\displaystyle\int_0^{x^2}(\frac{1}{2}+\cos t)\ dt = \left(\frac{t}{2}+\operatorname{sen} t\right)\Bigg|_0^{x^2} = \frac{x^2}{2}+\operatorname{sen} x^2.$

11. $\displaystyle\int_x^{x^2}(\frac{1}{2}-\operatorname{sen} t)\ dt = \frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\cos x+\cos x^2.$

12. $\displaystyle\int_0^{x}(u^2+\operatorname{sen} 3u)\ du = \int_0^x u^2\ du+\frac{1}{3}\int_0^{3x}\operatorname{sen} u\ du0\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}(-\cos u)\Big|_0^{3x} = \frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos 3x.$

13. $\displaystyle\int_x^{x^2}(v^2+\operatorname{sen} 3v)\ dt = \int_x^{x^2} v^2\ dv+\int_x^{x^2}\operatorname{sen} 3v\ dv = \left(\frac{x^6}{3}-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{3}\int_{3x}^{3x^2}\operatorname{sen} v\ dv = \frac{1}{3}(x^6-x^3+\cos 3x-$ $\cos^2 3x).$

14. $\displaystyle\int_0^{y}(\operatorname{sen}^2 x+x)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^y(1-\cos 2x)\ dx+\int_0^y x\ dx = \frac{y}{2}-\frac{1}{4}\int_0^y\cos x\ dx+\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{4}\operatorname{sen} y+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}.$

15. $\displaystyle\int_0^{x}\left(\operatorname{sen} 2w+\cos\frac{w}{2}\right)\ dw.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}\int_0^x\left(\operatorname{sen} 2w+\cos\frac{w}{2}\right)\ dw &= \frac{1}{2}\int_0^{2x}\operatorname{sen} w\ dw+2\int_0^{\frac{x}{2}}\cos w\ dw\\ &= \frac{1}{2}(-\cos w)\Big|_0^{2x}+2(\operatorname{sen} w)\Big|_0^{\frac{x}{2}}\\ &= -\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

16. $\displaystyle\int_{-\pi}^{x}(\frac{1}{2}+\cos t)^2\ dt.$

Respuesta.-

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x} (\frac{1}{2} + \cos t)^2 \, dt &= \int_{-\pi}^{x} \left(\frac{1}{4} + \cos t + \cos^2 t \right) \, dt \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{x} t \, dt + \int_{-\pi}^{x} \cos t \, dt + \int_{-\pi}^{x} \cos^2 t \, dt \\
&= \frac{1}{4}(x+\pi) + [\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(-\pi)] + \int \int_{-\pi}^{x} \frac{1}{2}[1 + \cos(2t)] \, dt \\
&= \frac{1}{4}(x+\pi) + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}(x+\pi) + \frac{1}{4} \int_{-2\pi}^{2x} \cos t \, dt \\
&= \frac{3}{4}(x+\pi) + \operatorname{sen} x + \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen} x \Big|_{-2\pi}^{2x} \right) \\
&= \frac{3}{4}(x+\pi) + \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x.
\end{aligned}
$$

17. Encuentre todos los valores reales de x tal que

$$\int_{0}^{x} (t^3 - t) \, dt = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^{x} (t - t^3) \, dt.$$

Dibuja una figura adecuada e interpreta la ecuación geométricamente.

Respuesta.- Primeramente evaluamos la integral de la izquierda.

$$\int_{0}^{x} (t^3 - t) \, dt = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}.$$

luego evaluamos la integral de la derecha.

$$\frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^{x} (t - t^3) \, dt = -\frac{1}{3} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right)$$

así, igualando los dos resultados nos que da

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{3} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right)$$

Se ve claramente que una solución es $x = 0$. Si $x \neq 0$ entonces podemos dividir por x^2 y obtenemos,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \right) \implies \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3} \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}.$$

de donde concluimos que las soluciones vienen dadas por $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

18. Sea $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ si x no es un entero, y sea $f(x) = 0$ si x es un entero. (Se denota $[x]$ como el entero mayor $\leq x$). Definir una nueva función P como sigue:

$$P(x) = \int_{0}^{x} f(t) \, dt \quad \text{para cada real } x$$