

# Espacios vectoriales

## 1.1 Espacios vectoriales

**Definición**  
1.1

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) consta de lo siguiente:

1. Un cuerpo  $F$  de escalares;
2. un conjunto  $V$  de objetos llamados vectores;
3. una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $V$  un vector  $\alpha + \beta$  de  $V$ , que se llama suma de  $\alpha$  y  $\beta$ , de tal modo que:
  - (a) La adición es conmutativa,  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;
  - (b) la adición es asociativa,  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ;
  - (c) existe un único vector  $0$  de  $V$ , llamado vector nulo tal que  $\alpha + 0 = \alpha$ , para todo  $\alpha$  de  $V$ ;
  - (d) para cada vector  $\alpha$  de  $V$  existe un vector  $-\alpha$  de  $V$ , tal que  $\alpha + (-\alpha) = 0$ ;
4. una regla (u operación) llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar  $c$  de  $F$  y cada vector  $\alpha$  de  $V$  a un vector  $c\alpha$  en  $V$ , llamado producto de  $c$  y  $\alpha$ , de tal modo que:
  - (a)  $1\alpha = \alpha$  para todo  $\alpha$  de  $V$ ;
  - (b)  $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$ ;
  - (c)  $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ ;
  - (d)  $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$ .

**Ejemplo** El **espacio de n-tuplas**,  $F_n$ . Sea  $F$  cualquier cuerpo y sea  $V$  el conjunto de todos los n-tuplas  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de escalares  $x_i$  de  $F$ . Si  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  con  $y_i$  de  $F$ , la suma de  $\alpha$  y  $\beta$  se define por

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (1.1)$$

El producto de un escalar  $c$  y el vector  $\alpha$  se define por

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n). \quad (1.2)$$

Que esta adición vectorial y multiplicación escalar cumplen las condiciones (3) y (4) es fácil de verificar, usando las propiedades semejantes de la adición y multiplicación de elementos de  $F$ . ■

**Ejemplo 1.2** El espacio de matrices  $m \times n$ ,  $F^{m \times n}$ . Sea  $F$  cualquier cuerpo y sean  $m$  y  $n$  enteros positivos. Sea  $F^{m \times n}$  el conjunto de todas las matrices  $m \times n$  sobre el cuerpo  $F$ . La suma de dos vectores  $A$  y  $B$  en  $F^{m \times n}$  se define por

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \quad (1.3)$$

El producto de un escalar  $c$  y de la matriz  $A$  se define por

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}. \quad (1.4)$$

Obsérvese que  $F^{i \times n} = F^n$ . ■

**Ejemplo 1.3** El espacio de funciones de un conjunto en un cuerpo. Sea  $F$  cualquier cuerpo y sea  $S$  cualquier conjunto no vacío. Sea  $V$  el conjunto de todas las funciones de  $S$  en  $F$ . La suma de dos vectores  $f$  y  $g$  de  $V$  es el vector  $f + g$ ; es decir, la función de  $S$  en  $F$  definida por

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s). \quad (1.5)$$

El producto del escalar  $c$  y la función  $f$  es la función  $cf$  definida por

$$(cf)(s) = cf(s). \quad (1.6)$$

Para este tercer ejemplo se indica cómo se puede verificar que las operaciones definidas satisfacen las condiciones (3) y (4). Para la adición vectorial:

(a) Como la adición en  $F$  es conmutativa,

$$f(s) + g(s) = g(s) + f(s)$$

para todo  $s$  de  $S$ , luego las funciones  $f + g$  y  $g + f$  son idénticas.

(b) Como la adición en  $F$  es asociativa,

$$f(s) + [g(s) + h(s)] = [f(s) + g(s)] + h(s)$$

para todo  $s$ , luego  $f + (g + h)$  es la misma función que  $(f + g) + h$ .

(c) El único vector nulo es la función cero, que asigna a cada elemento de  $S$  el escalar 0 de  $F$ .

(d) Para todo  $f$  de  $V$ ,  $(-f)$  es la función dada por

$$(-f) = -f(s).$$

El lector encontrará fácil verificar que la multiplicación escalar satisface las condiciones de (4), razonando como se hizo para la adición vectorial. ■

**Ejemplo 1.4** El espacio de las funciones polinomios sobre el cuerpo  $F$ . Sea  $F$  un cuerpo y sea  $V$  el conjunto de todas las funciones  $f$  de  $F$  en  $F$  definidas en la forma

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad (1.7)$$

donde  $c_0, c_1, \dots, c_n$  son escalares fijos de  $F$  (independiente de  $x$ ). Una función de este tipo se llama **función polinomio sobre  $F$** . Sean la adición y la multiplicación escalar definidas sobre en el ejemplo 3. Se debe observar que si  $f$  y  $g$  son funciones polinomios y  $c$  está en  $F$ , entonces  $f + g$  y  $cf$  son también funciones polinomios. ■

**Ejemplo 1.5** El cuerpo  $C$  de los números complejos puede considerarse como un espacio vectorial sobre el cuerpo  $R$  de los números reales. En forma más general, sea  $F$  el cuerpo de los números reales y sea  $V$  el conjunto de los  $n$ -tuples  $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$  donde  $x_1, \dots, x_n$  son números complejos. Se define la adición vectorial y la multiplicación escalar por (2.1) y (2-2), como en el ejemplo 1. De este modo se obtiene un espacio vectorial sobre el cuerpo  $R$  que es muy diferente del espacio  $C^n$  y del espacio  $R_n$ . ■

Hay unos pocos hechos simples que se desprenden, casi inmediatamente, de la definición de espacio vectorial, y procederemos a derivarlos. Si  $c$  es un escalar y  $0$  es el vector nulo, entonces por 3(c) y 4(c)

$$c0 = c(0 + 0) = c0 + c0.$$

Sumando  $-(c0)$  y por 3(d), se obtiene

$$c0 = 0. \quad (1.8)$$

Análogamente, para el escalar  $0$  y cualquier vector  $\alpha$  se tiene que

$$0\alpha = 0. \quad (1.9)$$

Si  $c$  es un escalar no nulo y  $\alpha$  un vector tal que  $c\alpha = 0$ , entonces por (2-8),  $c^{-1}(c\alpha) = 0$ . Pero

$$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1\alpha = \alpha$$

luego,  $\alpha = 0$ . Así se ve que si  $c$  es un escalar y  $\alpha$  un vector tal que  $c\alpha = 0$ , entonces  $c$  es el escalar cero o  $\alpha$  es el vector nulo.

Si  $\alpha$  es cualquier vector de  $V$ , entonces

$$0 = 0\alpha = (1 - 1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = \alpha + (-1)\alpha$$

de lo que se sigue que

$$(-1)\alpha = -\alpha. \quad (1.10)$$

Finalmente, las propiedades asociativa y conmutativa de la adición vectorial implican que la suma de varios vectores es independiente de cómo se combinen estos vectores y de cómo se asocien. Por ejemplo, si  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  son vectores de  $V$ , entonces

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)] + \alpha_4$$

y tal suma puede ser escrita, sin confusión,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

**Definición 1.2** Un vector  $\beta$  de  $V$  se dice **combinación lineal** de los vectores  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  en  $V$ , si existen escalares  $c_1, \dots, c_n$  de  $F$  tales que

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i.$$

Otras extensiones de la propiedad asociativa de la adición vectorial y las propiedades distributivas 4(c) y 4(d) de la multiplicación escalar se aplican a las combinaciones lineales:

$$\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^n d_i\alpha_i = \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)\alpha_i$$

$$c \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i = \sum_{i=1}^n (cc_i)\alpha_i.$$

**Ejercicios**

1. Si  $F$  es un cuerpo, verificar que  $F^n$  (como se definió en el Ejemplo 1) es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $F$ .

Respuesta.- Sean  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  y  $\gamma = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  elementos de  $F^n$ . Como también sean  $c, d, c_1, c_2 \in F$ . Entonces,

- (3) (a) Conmutatividad para la adición.

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= \beta + \alpha.\end{aligned}$$

- (b) Asociatividad para la adición.

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + z_1 + y_1, x_2 + z_2 + y_2, \dots, x_n + z_n + y_n) \\ &= (\alpha + \beta) + \gamma.\end{aligned}$$

- (c) Existencia del elemento nulo.

$$\begin{aligned}\alpha + 0 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

- (d) Existencia del inverso aditivo.

$$\begin{aligned}\alpha + (-\alpha) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + [-(x_1, x_2, \dots, x_n)] \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, 0, \dots, 0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

- (4) (a) Existencia del elemento neutro para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned}1\alpha &= 1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (1x_1, 1x_2, \dots, 1x_n) \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

- (b) Asociatividad para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned}(c_1 c_2)\alpha &= (c_1 c_2)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (c_1 c_2 x_1, c_1 c_2 x_2, \dots, c_1 c_2 x_n) \\ &= (c_1(c_2 x_1), c_1(c_2 x_2), \dots, c_1(c_2 x_n)) \\ &= (c_1 c_2 x_1, c_1 c_2 x_2, \dots, c_1 c_2 x_n) \\ &= c_1(c_2 \alpha).\end{aligned}$$

- (c) Distributividad para la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{aligned}c(\alpha + \beta) &= c((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\ &= c(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (cx_1 + cy_1, cx_2 + cy_2, \dots, cx_n + cy_n) \\ &= (c\alpha + c\beta).\end{aligned}$$

- (d) Distributividad para la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{aligned}(c + d)\alpha &= (c + d)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (cx_1 + dx_1, cx_2 + dx_2, \dots, cx_n + dx_n) \\ &= c\alpha + d\alpha.\end{aligned}$$

2. Si  $V$  es un espacio vectorial sobre un cuerpo  $F$ , verificar que

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4$$

para todo los vectores  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  de  $v$ .

Respuesta.- Se tiene,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) &= (\alpha_2 + \alpha_1) + (\alpha_3 + \alpha_4) \\ &= \alpha_2 + [\alpha_1 + (\alpha_3 + \alpha_4)] \\ &= \alpha_2 + [(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_4] \\ &= \alpha_2 + [(\alpha_3 + \alpha_1) + \alpha_4] \\ &= [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4. \end{aligned}$$

3. Si  $C$  es el cuerpo de los complejos, ¿qué vectores de  $C^3$  son combinaciones lineales de  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 1)$  y  $(1, 1, 1)$ ?

Respuesta.- Sea  $(x, y, z) \in C^3$  una combinación lineal de los vectores  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 1)$  y  $(1, 1, 1)$ . Entonces, existen escalares  $a, b$  y  $c \in C$  tal que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= a(1, 0, -1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 1) \\ &= (a + c, b + c, c - a). \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{cases} a + c = x \\ b + c = y \\ c - a = z. \end{cases}$$

Resolviendo se tiene,

$$\begin{cases} a = \frac{x - z}{2} \\ b = \frac{2z - x - y}{2} \\ c = \frac{x + z}{2}. \end{cases}$$

Por lo tanto, existen escalares  $a, b$  y  $c \in C$  tal que

$$(x, y, z) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 1).$$

Así, todos los vectores en  $C^3$  pueden ser expresados como una combinación lineal de los vectores  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 1)$  y  $(1, 1, 1)$ .

4. Sea  $V$  el conjunto de los pares  $(x, y)$  de números reales, y sea  $F$  el cuerpo de los números reales. Se define

$$\begin{aligned} (x, y) + (x_1, y_1) &= (x + x_1, y + y_1) \\ c(x, y) &= (cx, y). \end{aligned}$$

¿Es  $V$ , con estas operaciones, un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales?

Respuesta.- No es un espacio vectorial ya que,

$$(0, 2) = (0, 1) + (0, 1) = 2(0, 1) = (2 \cdot 0, 1) = (0, 1).$$

5. En  $\mathbb{R}^n$  se definen dos operaciones

$$\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$$

$$c \cdot \alpha = -c\alpha.$$

Las operaciones del segundo miembro son las usuales. ¿Qué axiomas de espacio vectorial se cumplen para  $\mathbb{R}^n, \oplus, \cdot$ ?

Respuesta.- Sean  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  y  $\gamma = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  elementos de  $F^n$ . Como también sean  $c, d, c_1, c_2 \in F$ . Entonces,

(3) (a) No es conmutativa para la adición.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= \alpha - \beta \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) - (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \\ &= (-y_1 + x_1, -y_2 + x_2, \dots, -y_n + x_n) \\ &= -\beta + \alpha. \\ &= -(\beta - \alpha) \\ &= -(\beta \oplus \alpha) \\ &\neq \beta \oplus \alpha. \end{aligned}$$

(b) No es asociativa para la adición.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) &= \alpha - (\beta - \gamma) \\ &= (\alpha - \beta) + \gamma \\ &= (\alpha \oplus \beta) + \gamma \\ &\neq \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma). \end{aligned}$$

(c) No existe el elemento nulo.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus 0 &= \alpha - 0 \\ &= \alpha - (0, 0, \dots, 0) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Pero, como  $\oplus$  no es conmutativa; es decir,  $\alpha \oplus \neq 0 \oplus \alpha$  decimos que no existe la identidad aditiva para  $\oplus$ .

(d) No existe el inverso aditivo.

$$\begin{aligned} \alpha \oplus (-\alpha) &= \alpha - (-\alpha) \\ &= \alpha + \alpha \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

(4) (a) No existe el elemento neutro para la multiplicación escalar.

El elemento 1 no satisface  $1 \cdot \alpha = \alpha$  para cualquier  $\alpha \neq 0$ , ya que de lo contrario tendríamos

$$1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sólo si  $x_i = 0$  para todo  $i$ .

(b) No es asociativa para la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned} c_1(c_2\alpha) &= c_1(-c_2\alpha) \\ &= -c_1(-c_2\alpha) \\ &= -(c_1c_2)\alpha \\ &\neq (c_1c_2)\alpha. \end{aligned}$$

(c) No es distributiva para la multiplicación escalar sobre la adición.

$$\begin{aligned} c(\alpha + \beta) &= -c(\alpha + \beta) \\ &= -c\alpha - c\beta \\ &= -(c\alpha + c\beta) \\ &\neq c\alpha + c\beta. \end{aligned}$$

(d) No es distributiva para la multiplicación sobre la adición de escalares

$$\begin{aligned} c\alpha + d\alpha &= -c\alpha - d\alpha \\ &= -(c + d)\alpha \\ &\neq (c + d)\alpha. \end{aligned}$$

6. Sea  $V$  el conjunto de todas las funciones que tiene valor complejo sobre el eje real, tales que (para todo  $t$  de  $\mathbb{R}$ )

$$f - (t) = \overline{f(t)}$$

. La barra indica conjugación compleja. Demostrar que  $V$ , con las operaciones

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$cf(t) = c f(t)$$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Dar un ejemplo de una función en  $V$  que no toma valores reales.

Demostración.- Sea  $f, g, h \in V$ . Entonces, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se tiene

(3) (a) Conmutatividad para la adición.

$$\begin{aligned} (f + g)(t) &= f(t) + g(t) \\ &= g(t) + f(t) \\ &= (g + f)(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f + g = g + f$  para todo  $f$  y  $g \in V$ .

(b) Asociatividad para la adición.

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](t) &= (f + g)(t) + h(t) \\ &= [f(t) + g(t)] + h(t) \\ &= f(t) + [g(t) + h(t)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(f + g) + h = f + (g + h)$  para todo  $f, g, h \in V$ .

(c) Existencia del elemento nulo.

Considere la función cero  $0(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces para todo  $f \in V$ , tenemos

$$(f + 0)(t) = f(t) + 0(t) = f(t) + 0 = f(t).$$

Ya que  $+$  es conmutativo, se tiene  $f = f + 0 = 0 + f$ .

(d) Existencia del inverso aditivo.

Para  $f \in V$ , consideremos  $g = (-f)$  como  $(-f)(t) = -f(t)$ . Claramente  $g = -f$  existe en  $V$ . Luego,

$$[f + (-f)](t) = f(t) + (-f)(t) = f(t) - f(t) = 0 = 0(t).$$

Ya que,  $+$  es conmutativo, tenemos  $f + (-f) = 0 = (-f) + f$  para todo  $f \in V$ . así, el inverso aditivo existe.

- (4) (a) Existencia del elemento neutro para la multiplicación escalar.

$$1 \cdot f = f.$$

Para  $f \in V$ , se tiene

$$(1 \cdot f)(t) = 1 \cdot f(t) = f(t).$$

Así,  $1 \cdot f = f$  para todo  $f \in V$ .

- (b) Asociatividad para la multiplicación escalar.

Sean  $a, b \in R$  y  $f \in V$ , entonces

$$\begin{aligned} (ab)f &= [(ab) \cdot f](t) \\ &= (ab)f(t) \\ &= a[bf(t)] \\ &= a(b \cdot f) \\ &= a(bf). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(ab) \cdot f = a(b \cdot f)$  para todo  $f \in V$  y  $a, b \in R$ .

- (c) Distributividad para la multiplicación escalar sobre la adición.

Sean  $a, b \in R$  y  $f, g \in V$ , entonces

$$\begin{aligned} [a(f + g)](t) &= a[(f + g)(t)] \\ &= a[f(t) + g(t)] \\ &= (af)(t) + (ag)(t) \end{aligned}$$

- (d) Distributividad para la multiplicación sobre la adición de escalares

Sean  $a, b \in R$  y  $f \in V$ , entonces

$$\begin{aligned} [(a + b)f](t) &= (a + b)(f(t)) \\ &= af(t) + bf(t) \\ &= (af)(t) + (bf)(t). \end{aligned}$$

De esta manera,  $V$  satisface todas las propiedades del espacio vectorial respecto a las operaciones de adición y multiplicación escalar.

7. Sea  $V$  el conjunto de pares  $(x, y)$  de números reales y sea  $F$  el cuerpo de los números reales. Se define

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, 0)$$

$$c(x, y) = (cx, 0).$$

¿Es  $V$ , con estas operaciones un espacio vectorial?

Respuesta.- No es un espacio vectorial. Sea  $u = (x_1, y_1)$  y  $0 \in R, 0 = (0, 0) \in V$ . Entonces,

$$\begin{aligned} u + 0 &= (x_1, y_1) + (0, 0) \\ &= (x_1 + 0, 0) \\ &= (x_1, 0) \\ &\neq u. \end{aligned}$$

Por lo tanto, no existe un inverso aditivo para  $V$ . Así  $V$  no es un espacio vectorial.



## 1.2 Subespacios

**Definición 1.3** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $F$ . Un **subespacio** de  $V$  es un subconjunto  $W$  de  $V$  que, con las operaciones de adición vectorial y multiplicación escalar sobre  $V$ , es el mismo un espacio vectorial sobre  $F$ .

Esta definición se puede simplificar aún más.

**Teorema 1.1** Un subconjunto no vacío  $W$  de  $V$  es un subespacio de  $V$  si, y sólo si, para todo par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $W$  y todo escalar  $c$  de  $F$ , el vector  $c\alpha + \beta$  está en  $W$ .

**Demostración.-** Supóngase que  $W$  sea un subconjunto no vacío de  $V$  tal que  $c\alpha + \beta$  pertenezca a  $W$  para todos los vectores  $\alpha, \beta$  de  $W$  y todos los escalares  $c$  de  $F$ . Como  $W$  no es vacío, existe un vector  $\rho$  en  $W$ , y por tanto,  $(-1)\rho + \rho = 0$  está en  $W$ . Ahora bien, si  $\alpha$  es cualquier vector de  $W$  y  $c$  cualquier escalar, el vector  $c\alpha = c\alpha + 0$  está en  $W$ . En particular,  $(-1)\alpha = -\alpha$  está en  $W$ . Finalmente, si  $\alpha + \beta$  están en  $W$ , entonces  $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta$  está en  $W$ . Así,  $W$  es un subespacio de  $V$ .

Recíprocamente, si  $W$  es un subespacio de  $V$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  están en  $W$  y  $c$  es un escalar, ciertamente  $c\alpha + \beta$  está en  $W$ . ■

**Ejemplo 1.7** El espacio solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.. Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  sobre  $F$ . Entonces el conjunto de todas las matrices (columna)  $n \times 1$ ,  $X$ , sobre  $F$  tal que  $AX = 0$  es un subespacio del espacio de todas las matrices  $n \times 1$  sobre  $F$ . Para demostrar esto se necesita probar que  $A(cX + Y) = 0$  si  $AX = 0$ ,  $AY = 0$  y  $c$  un escalar arbitrario de  $F$ . Esto se desprende inmediatamente del siguiente hecho general. ■

**Lema 1.1** Si  $A$  es una matriz  $m \times n$  sobre  $F$ , y  $B, C$  son matrices  $n \times p$  sobre  $F$ , entonces

$$A(dB + C) = d(AB) + AC \quad (1.11)$$

para todo escalar  $d$  de  $F$ .

**Demostración.-**

$$\begin{aligned} [A(dB + C)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(dB + C)_{kj} \\ &= \sum_k (dA_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}) \\ &= d \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} \\ &= d(AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\ &= [d(AB) + AC]_{ij}. \end{aligned}$$

■

En forma semejante se puede ver que  $(dB + C)A = d(BA) + CA$ , si la suma y el producto de las matrices están definidos.

**Teorema 1.2** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $F$ . La intersección de cualquier colección de subespacios de  $V$  es un subespacio de  $V$ .

*Demostración.-* Sea  $\{W_a\}$  una colección de subespacios de  $V$ , y sea  $W = \cap W_a$  su intersección. Recuerdese que  $W$  está definido como el conjunto de todos los elementos pertenecientes a cada  $W_a$ . Dado que todo  $W_a$  es un subespacio, cada uno contiene el vector nulo. Así que el vector nulo está en la intersección  $W$ , y  $W$  no es vacío. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  vectores de  $W$  y sea  $c$  un escalar. Por definición de  $W$  ambos  $\alpha$  y  $\beta$  pertenecen a cada  $W_a$ , y por ser cada  $W_a$  un subespacio el vector  $(c\alpha + \beta)$  está en cada  $W_a$ . Así  $(c\alpha + \beta)$  está también en  $W$ . Por el teorema 1,  $W$  es un subespacio de  $V$ . ■

De este teorema se deduce que si  $S$  es cualquier colección de vectores de  $V$ , entonces existe un subespacio mínimo de  $V$  que contiene a  $S$ ; esto es, un subespacio que contiene a  $S$  y que está contenido en cada uno de los otros subespacios que contienen a  $S$ .

**Definición 1.4** Sea  $S$  un conjunto de vectores de un espacio vectorial  $V$ . El **subespacio generado** por  $S$  se define como la intersección  $W$  de todos los subespacios de  $V$  que contienen a  $S$ . Cuando  $S$  es un conjunto finito de vectores,  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  se dice simplemente que  $W$  es el **subespacio generado por los vectores**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

**Teorema 1.3** El subespacio generado por un subconjunto  $S$  no vacío de un espacio vectorial  $V$  es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de  $S$ .

*Demostración.-* Sea  $W$  el subespacio generado por  $S$ . Entonces, toda combinación lineal

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m$$

de vectores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  de  $S$  pertenecen evidentemente a  $W$ . Así que  $W$  contiene el conjunto  $L$  de todas las combinaciones lineales de vectores de  $S$ . El conjunto  $L$ , entonces, por otra parte, contiene a  $S$  y no es, pues, vacío. Si  $\alpha$  y  $\beta$  pertenecen a  $L$ , entonces  $\alpha$  es una combinación lineal,

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m$$

de vectores  $\alpha_i$  de  $S$ , y  $\beta$  es una combinación lineal,

$$\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \dots + y_n\alpha_n$$

de vectores  $\beta_j$  de  $S$ . Para cada escalar  $c$ ,

$$c\alpha + \beta = \sum_{i=1}^n (cx_i)\alpha_i + \sum_{j=1}^n y_j\beta_j.$$

Luego,  $c\alpha + \beta$  pertenece a  $L$ . Con lo que  $L$  es un subespacio de  $V$ .

Se demostró que  $L$  es un subespacio de  $V$  que contiene a  $S$ , y también que todo subespacio que contiene a  $S$  contiene a  $L$ . Se sigue que  $L$  es la intersección de todos los subespacios que contienen a  $S$ ; es decir, que  $L$  es el subespacio generado por el conjunto  $S$ . ■

**Definición 1.5** Si  $S_1, S_2, \dots, S_k$  son subconjuntos de un espacio vectorial  $V$ , el conjunto de todas las sumas

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$$

de vectores  $\alpha_i$  de  $S_i$  se llama **suma** de los subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_k$  y se representa por

$$S_1 + S_2 + \dots + S_k$$

o por

$$\sum_{i=1}^k S_i.$$

Si  $W_1, W_2, \dots, W_k$  son subespacios de  $V$ , entonces la suma

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_k$$

como es fácil ver, es un subespacio de  $V$  que contiene cada uno de los subespacios  $W_i$ . De esto se sigue, como en la demostración del Teorema 3, que  $W$  es el subespacio generado por la unión de  $W_1, W_2, \dots, W_k$ .

### Ejercicios

1. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  son subespacios de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ )?

(a) todos los  $\alpha$  tal que  $a_1 \geq 0$ ;

Respuesta.- Sea  $A = \{\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \geq 0\}$ . De donde, podemos elegir un vector  $\alpha' = (1, 0, \dots, 0) \in A$  tal que  $a_1 \geq 0$ . Ahora notemos que

$$(-1)\alpha' = (-1)(1, 0, \dots, 0) = (-1, 0, \dots, 0) \notin A.$$

lo que contradice la condición  $a_1 \geq 0$ . Por lo tanto,  $A$  no es cerrado con respecto a la multiplicación escalar, por lo que no es un subespacio.

(b) todos los  $\alpha$  tal que  $a_1 + 3a_2 = a_3$ ;

Respuesta.- Sean  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$  y  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in A$ . Ahora, consideremos  $c\alpha + \beta$  de donde tenemos

$$\begin{aligned} c\alpha + \beta &= (ca_1, ca_2, \dots, ca_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (ca_1 + b_1, ca_2 + b_2, \dots, ca_n + b_n) \end{aligned}$$

Después, usando la condición  $a_1 + 3a_2 = a_3$  se tiene,

$$\begin{aligned} (ca_1 + b_1) + 3(ca_2 + b_2) &= c(a_1 + 3a_2) + (b_1 + 3b_2) \\ &= ca_3 + b_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $c\alpha + \beta$  está en el subconjunto, entonces es un subconjunto por el teorema 1.

(c) todos los  $\alpha$  tal que  $a_2 = a_1^2$ ;

Respuesta.- Tomemos los vectores  $\alpha = (-1, 1, 0, \dots, 0)$  y  $\beta = (1, 1, 0, \dots, 0)$ . Luego,

$$\alpha + \beta = (-1, 1, 0, \dots, 0) + (1, 1, 0, \dots) = (0, 2, 0, \dots, 0)$$

Claramente  $2 \neq 0^2$ , por lo que  $\alpha + \beta$  no pertenece al subconjunto dado. Por lo tanto, no es un subespacio.

(d) todos los  $\alpha$  tal que  $a_1 a_2 = 0$ ;

Respuesta.- Sea  $\alpha = (0, 1, 0, \dots, 0)$  y  $\beta = (1, 0, 0, \dots, 0)$ . Luego,

$$\alpha + \beta = (0, 1, 0, \dots, 0) + (1, 0, 0, \dots, 0) = (1, 1, 0, \dots, 0)$$

Donde, claramente  $1 \cdot 1 = 1 \neq 0$ . Por lo tanto,  $\alpha + \beta$  no pertenece al subconjunto dado. Así, no es un subespacio.

(e) todos los  $\alpha$  tal que  $a_2$  es racional.

Respuesta.- Sea el conjunto  $A = \{\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_2 \in \mathbb{Q}\}$ . Luego sea  $\beta = (0, 1, 0, \dots, 0)$ . Entonces para  $c = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$c\beta = \sqrt{2}(0, 1, 0, \dots, 0) = (0, \sqrt{2}, 0, \dots, 0)$$

Claramente  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , por lo que  $c\beta$  no pertenece al subconjunto dado. Por lo tanto, no es un subespacio.

2. Sea  $V$  el espacio vectorial (real) de todas las funciones  $f$  de  $R$  en  $R$ . ¿Cuál de los siguientes conjuntos de funciones son subespacios de  $V$ ?

(a) Todas las  $f$  tales que  $f(x^2) = f^2(x)$ ;

Respuesta.- Por el teorema 1, para que cada una de las funciones sea un subespacio, debe ser cerrado respecto a la suma y al multiplicación escalar en  $V$  definida como:  $f, g \in V$ , con  $c \in R$ , tal que

$$(cf + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Entonces, para este caso en particular. Sea  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^2$ , de donde ambos satisfacen la condición inicial; Es decir,

$$f(x^2) = x^2 = f^2(x) \quad \text{y} \quad g(x^2) = (x^2)^2 = g^2(x).$$

Pero para algún  $c \in R$ ,

$$(cf + g)(x^2) = cf(x) + g(x) = cx^2 + x^4$$

Y

$$(cf + g)^2(x) = [cf(x) + g(x)]^2 = (cx + x^2)^2 = x^4 + 2cx^3 + (cx)^2.$$

Dado que no se cumple la igualdad de la condición  $f(x^2) = f^2(x)$  para  $(f + g) = f(x) + g(x)$ . Entonces, el conjunto no es un subespacio de  $V$ .

- (b) Todas las
- $f$
- tales que
- $f(0) = f(1)$
- ;

Respuesta.- Sean  $f$  y  $g$  dos funciones en  $V$  que satisfacen la condición inicial. Entonces, para algún  $c \in R$ , se tiene

$$(cf + g)(0) = cf(0) + g(0) = cf(1) + g(1) = (cf + g)(1).$$

Por lo tanto, por el teorema 1, el conjunto dado es un subespacio de  $V$ .

- (c) Todas las
- $f$
- tales que
- $f(3) = 1 + f(-5)$
- ;

Respuesta.- Por hipótesis, sean  $f(3) = 1 + f(-5)$  y  $g(3) = 1 + g(-5)$  en  $V$ . Entonces, para  $c = 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} (cf + g)(3) &= 1 \cdot f(3) + g(3) \\ &= 1 + f(-5) + 1 + g(-5) \\ &= 2 + f(-5) + g(-5) \\ &= 2 + (f + g)(-5) \\ &\neq 1 + (f + g)(-5). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto dado no es un subespacio de  $V$ .

- (d) Todas las
- $f$
- tales que
- $f(-1) = 0$
- ;

Respuesta.- Sean,  $f$  y  $g$  dos funciones en  $V$  que satisfacen la condición inicial; Es decir,

$$f(-1) = 0 = g(-1).$$

Entonces, para algún  $c \in R$ , se tiene

$$\begin{aligned} (cf + g)(-1) &= cf(-1) + g(-1) \\ &= c \cdot 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto dado es un subespacio de  $V$ .

- (e) Todas las
- $f$
- que son continuas.

Respuesta.- Sea  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en  $V$ . Entonces, para algún  $c \in R$ ,  $cf$  es continua. Lo mismo pasa para  $f + c$ , ya que la suma de funciones continuas es también continua.

3. ¿Pertenece el vector  $(3, -1, 0, -1)$  al subespacio de  $R^5$  generado por los vectores  $(2, -1, 3, 2)$ ,  $(-1, 1, 1, -3)$  y  $(1, 1, 9, -5)$ ?

Respuesta.- Por el teorema 3, para que un vector pertenezca a un subespacio generado por un conjunto de vectores, debe ser una combinación lineal de los mismos. Entonces, para el vector  $(3, -1, 0, -1)$ , tenemos

$$\begin{aligned} (3, -1, 0, -1) &= x(2, -1, 3, 2) + y(-1, 1, 1, -3) + z(1, 1, 9, -5) \\ &= (2x, -x, 3x, 2x) + (-y, y, y, -3y) + (z, z, 9z, -5z) \\ &= (2x - y + z, -x + y + z, 3x + y + 9z, 2x - 3y - 5z). \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones mediante matrices, tenemos

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{array} \right] \quad \frac{R_1}{2} \rightarrow R_1 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{array} \right] \\
 & \begin{array}{l} R_2 + R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4 - 2R_1 \rightarrow R_4 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array} \right] \\
 & 2R_2 \rightarrow R_2 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array} \right] \\
 & \begin{array}{l} R_3 - \frac{5}{2}R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 + 2R_2 \rightarrow R_4 \\ R_1 + \frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_1 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Ya que  $0 \neq -7$  y  $0 \neq -2$ , el vector  $(3, -1, 0, -1)$  no pertenece al subespacio generado por los vectores  $(2, -1, 3, 2)$ ,  $(-1, 1, 1, -3)$  y  $(1, 1, 9, -5)$ .

4. Sea  $W$  el conjunto de todos los  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  de  $R^5$  que satisfacen

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 &= 0 \\
 x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 &= 0 \\
 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Encontrar un conjunto finito de vectores que genera  $W$ .

Respuesta.-