CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por:

FODE (Christian Limbert Paredes Aguilera)

Índice general

1

Limites

Definición 1.1 *La función f tiende hacia el límite l en a* $\left(\lim_{x \to a} f(x) = l\right)$ *significa: para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.*

Existe algún $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x para el cual es $0 < |x-a| < \delta$, pero no $|f(x) - l| < \epsilon$.

TEOREMA 1.1 *Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otros términos si f tiende hacia l en a, y f tiende hacia m en a, entonces $l = m$.*

Demostración.- Puesto que f tiende hacia l en a, sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.
Sabemos también, puesto que f tiende hacia m en a, que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - m| < \epsilon$.
Hemos empleado dos números $delta_1$ y δ_2, ya que no podemos asegurar que el δ que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2), \textit{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon \textit{ y } |f(x) - m| < \epsilon$$

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un $\epsilon > 0$ particular para el cual las dos condiciones $|f(x) - l| < \epsilon$ y $|f(x) - m| < \epsilon$ no puedan cumplirse a la vez si $l \neq m$
Si $l \neq m$, de modo que $|m - l| > 0$ podemos tomar como ϵ a $|l - m|/2$. Se sigue que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta, \textit{ entonces } |f(x) - l| < \frac{|l-m|}{2} \textit{ y } |f(x) - m| < \frac{|l-m|}{2}$$

Esto implica que para $0 < |x-a| < \delta$ tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{|l-m|}{2} + \frac{|l-m|}{2} = |l - m|$$

El cual es una contradicción.

LEMA 1.1 *Si x está cerca de x_0 e y está cerca de y_0, entonces $x+y$ estará cerca de x_0+y_0, xy estará cerca de x_0y_0 y $1/y$ estará cerca de $1/y_0$.*

(1) *Si* $|x-x_0| < \dfrac{\epsilon}{2}$ *y* $|y-y_0| < \dfrac{\epsilon}{2}$ *entonces* $|(x+y)-(x_0+y_0)| < \epsilon$.

Demostración.-

$$|(x+y)-(x_0+y_0)| = |(x-x_0)+(y-y_0)| \leq |x-x_0| + |y-y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(2) *Si* $|x-x_0| < \text{mín}\left(1, \dfrac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}\right)$ *y* $|y-y_0| < \dfrac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}$ *entonces* $|xy-x_0y_0| < \epsilon$.

Demostración.- Puesto que $|x-x_0|<1$ se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x-x_0| < 1,$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

así pues

$$\begin{aligned}
|xy - x_0y_0| &= |x(y-y_0) + y_0(x-x_0)| \\
&\leq |x| \cdot |y-y_0| + |y_0| \cdot |x-x_0| \\
&< (1+|x_0|) \cdot \frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)} + |y_0| \cdot \frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Notemos que $\dfrac{|y_0|}{|y_0|-1} < 1$, *por lo tanto* $\dfrac{|y_0|}{|y_0|-1} \cdot \dfrac{\epsilon}{2} < \dfrac{\epsilon}{2}$.

(3) *Si* $y_0 \neq 0$ *y* $|y-y_0| < \text{mín}\left(\dfrac{|y_0|}{2}, \dfrac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right)$ *entonces* $y \neq 0$ *y* $\left|\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y_0}\right| < \epsilon$.

Demostración.- Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y-y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

de modo que $-|y| < -\dfrac{|y_0|}{2} \Longrightarrow |y| > |y_0|/2$. *En particular.* $y \neq 0$, *y*

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0-y|}{|y| \cdot |y_0|} = \frac{1}{|y|} \cdot \frac{|y_0-y|}{|y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\epsilon|y_0|^2}{2} = \epsilon$$

TEOREMA 1.2 *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$, *entonces*

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = l+m$

(2) $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l\cdot m$

Además, si $m \neq 0$, *entonces*

(3) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{m}$

Demostración.- La hipótesis significa que para todo $\epsilon > 0$ *existen* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que, para todo* x,

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \textit{ entonces } |f(x)-l| < \epsilon$$

$$\textit{y} \quad \textit{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \textit{ entonces } |g(x)-m < \epsilon|$$

Esto significa (ya que después de todo, $\epsilon/2$ *es también un número positivo) que existen* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que, para todo* x,

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \textit{ entonces } |f(x)-l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\textit{y} \quad \textit{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \textit{ entonces } |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea ahora $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. *Si* $0 < |x-a| < \delta$, *entonces* $0 < |x-a < \delta_1$ *y* $0 < |x-a| < \delta_2$ *se cumplen las dos, de modo que es a la vez*

$$|f(x)-l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \textit{y} \quad |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}$$

pero según la parte (1) *del lema anterior esto implica que* $|(f+g)(x)-(l+m)| < \epsilon$.

Para demostrar (2) *procedemos de la misma manera, después de consultar la parte* (2) *del lema. Si* $\epsilon > 0$ *existen* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que, para todo* x

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \textit{ entonces } |f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m|+1)}\right),$$

$$\textit{y} \quad \textit{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \textit{ entonces } |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2(|l|)+1}$$

Pongamos de nuevo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. *Si* $0 < |x-a| < \delta$, *entonces*

$$|f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m|+1)}\right) \qquad \textit{y} \qquad |g(x)-m| < \frac{\delta}{2(|l|+1)}$$

Así pues, según el lema, $|(f\cdot g)(x) - l\cdot m| < \epsilon$, *y esto demuestra* (2).

Finalmente, si $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x,

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta, \textit{ entonces } |g(x)-m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\epsilon|m|^2}{2}\right)$$

Pero según la parte (3) *del lema, esto significa, en primer lugar que* $g(x) \neq 0$, *de modo que* $(1/g)(x)$ *tiene sentido, y en segundo lugar que*

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \epsilon$$

Esto demuestra (3).

Definición 1.2 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

La condición $0 < x - a < \delta$ *es equivalente a* $0 < |x - a| < \delta$ *y* $x > a$

Definición 1.3 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

Definición 1.4 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = l$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un número* N *grande, que, para todo* x,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

1.1. Problemas

1. Hallar los siguientes limites (Estos limites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{1^2-1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = 2^2+4+4 = 12$

(iii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \dfrac{3^3-8}{3-2} = 19$

(iv) $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{x^n-y^n}{x-y} = \dfrac{(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})}{x-y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1} =$

$$= ny^{n-1}$$

(v) $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1} = nx^{n-1}$

(vi) $\lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \dfrac{(\sqrt{a+h})^2-(\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2. Hallar los límites siguientes:

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} \cdot \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1^2-(\sqrt{x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \cdot \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2}$

3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un δ tal que, $|f(x)-l| < \epsilon$ para todo x que satisface $0 < |x-a| < \delta$

(i) $f(x) = x^4;\ l = a^4$

Respuesta.- Por la parte (2) del lema anterior se tiene

$$|x^2-a^2| < \text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2+1)}\right).$$

Si aplicamos una vez mas la parte (2) del lema obtenemos

$$|x-a| < \text{mín}\left(1, \frac{\text{mín}\left(1, \dfrac{\epsilon}{2(|a|^2+1)}\right)}{2(|a|+1)}\right) = \text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{4(|a|^2+1)(|a|+1)}\right) = \delta$$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x};\ a = 1,\ l = 1$

Respuesta.- Por la parte (3) del lema se tiene $\left|\dfrac{1}{x} - 1\right| < \epsilon$ por lo tanto $|y-1| < \text{mín}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\epsilon}{2}\right)$

(iii) $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x};\ a = 1,\ l = 2$

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene $\left|\left(x^4 + \dfrac{1}{x}\right) - (1+1)\right| < \epsilon$ de donde

$$|x^4 - 1| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \left|\frac{1}{x} - 1\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego por el inciso (i) y (ii)

$$|x-1| < \text{mín}\left(\frac{1}{2}, \frac{\frac{\epsilon}{2}}{2}\right) \quad y \quad |x-1| < \text{mín}\left(1, \frac{1, \text{mín}\left(\dfrac{\frac{\epsilon}{2}}{2(1+1)}\right)}{2(1+1)}\right) \implies |x-1| < \text{mín}\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{4}, 1, \frac{\epsilon}{32}\right)$$

y por lo tanto

$$|x-1| < \text{mín}\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{32}\right) = \delta$$

(iv) $f(x) = \dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x};\ a = 0,\ l = 0$

Respuesta.- Sea $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| < \epsilon \quad y \quad |x| < \delta$ pero $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| \leq |x|$ por lo tanto $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| \leq |x| < \delta = \epsilon$

(v) $f(x) = \sqrt{|x|};\ a = 0,\ l = 0$

Respuesta.- Sea $\left|\sqrt{|x|}\right| < \epsilon$ entonces $\left|(|x|)^{1/2}\right| = \left(\sqrt{x^2}\right)^{1/2} = \left[(x^2)^{1/2}\right]^{1/2} = \sqrt{x} < \epsilon$, luego sabemos que la raíz cuadrada de x debe ser siempre mayor o igual a 0 por lo tanto $|x| < \epsilon^2$, de donde concluimos que $\delta = \epsilon^2$

(vi) $f(x) = \sqrt{x};\ a = 1,\ l = 1$

Respuesta.- Si $\epsilon > 1$, póngase $\delta = 1$. Entonces $|x-1| < \delta$ implica que $0 < x < 2$ con lo que $0 < \sqrt{x} < 2$ y $|\sqrt{x} - 1| < 1$. Si $\epsilon < 1$, entonces $(1-\epsilon)^2 < x < (1+\epsilon)^2$ implica que $|\sqrt{x} - 1| < \epsilon$, de modo que podemos elegir un δ tal que $(1-\epsilon)^2 \leq 1 - \delta$ y $1 + \delta \leq (1-\epsilon)^2$. Podemos elegir, pues $\delta = 2\epsilon - \epsilon^2$

4.