

Espacios vectoriales de dimensión finita

1.A Span e independencia lineal

1.2 Notación Lista of vectores.

Por lo general, escribiremos listas de vectores sin paréntesis alrededor.

Combinaciones lineales y generadores

1.3 Definición Combinación lineal.

Una **combinación lineal** de una lista v_1, \dots, v_m de vectores en V es un vector de la forma

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m,$$

donde $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$.

1.5 Definición Span o generador.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de una lista de vectores v_1, \dots, v_m en V se denomina **generador** de v_1, \dots, v_m , denotado por $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$. En otras palabras,

$$\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{a_1v_1 + \dots + a_mv_m : a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}\}.$$

El span de la lista vacía $()$ es definida por $\{0\}$.

1.7 Teorema Span es el subespacio más pequeño que lo contiene.

El **span** de una lista de vectores en V es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los vectores de la lista.

Demostración.- Suponga que v_1, \dots, v_m es una lista de vectores en V . Primero demostraremos que $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ es un subespacio de V . El 0 está en $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$, porque

$$0 = 0v_1 + \dots + 0v_m.$$

También, $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ es cerrado bajo la suma, ya que

$$(a_1v_1 + \dots + a_mv_m) + (c_1v_1 + \dots + c_mv_m) = (a_1 + c_1)v_1 + \dots + (a_m + c_m)v_m.$$

Además, $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, dado que

$$\lambda(a_1v_1 + \dots + a_mv_m) = \lambda a_1v_1 + \dots + \lambda a_mv_m.$$

Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ es un subespacio de V . Esto por 1.34.

Cada v_j es una combinación lineal de v_1, \dots, v_m (para mostrar esto, establezca $a_j = 1$ y que las otras a_i 's en la definición de combinación lineal sean iguales a 0). Así, el $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ contiene a cada v_j . Por otra parte, debido a que los subespacios están cerrados bajo la multiplicación de escalares y la suma, cada subespacio de V que contiene a cada v_j contiene a $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$. Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los demás vectores v_1, \dots, v_m . ■

1.8 Definición Spans.

Si $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ es igual a V , decimos que v_1, \dots, v_m genera V .

1.10 Definición Espacio vectorial de dimensión finita.

Un espacio vectorial se llama finito-dimensional si alguna lista de vectores en él genera el espacio.

Es decir, si hay una lista de vectores en un espacio vectorial finito-dimensional que puede abarcar todo el espacio, entonces podemos decir que el espacio vectorial es finito-dimensional.

1.11 Definición Polinomio, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$

- Una función $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ es llamado polinomio con coeficientes en \mathbf{F} si existe $a_0, \dots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m$$

para todo $z \in \mathbf{F}$.

- $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en \mathbf{F} .

Con las operaciones usuales de adición y multiplicación escalar, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un espacio vectorial sobre \mathbf{F} . En otras palabras, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un subespacio de $\mathbf{F}^{\mathbf{F}}$, el espacio vectorial de funciones de \mathbf{F} en \mathbf{F} .

Los coeficientes de un polinomio están determinados únicamente por el polinomio. Así, la siguiente definición define de manera única el grado de un polinomio.

1.12 Definición Grado de un polinomio, $\deg p$.

- Un polinomio $p \in \mathcal{P}(F)$ se dice que tiene **grado** m si existen escalares $a_0, a_1, \dots, a_m \in F$ con $a_m \neq 0$ tal que

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$$

para todo $z \in F$. Si p tiene grado m , escribimos $\deg p = m$.

- El polinomio que es idénticamente 0 se dice que tiene **grado** $-\infty$.

1.13 Definición $\mathcal{P}_m(F)$

Para m un entero no negativo, $\mathcal{P}_m(F)$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficiente en F y grado no mayor a m .

Verifiquemos el siguiente ejemplo, tenga en cuenta que $\mathcal{P}_m(F) = \text{span}(1, z, \dots, z^m)$; aquí estamos abusando ligeramente de la notación al permitir que z^k denote una función.

1.15 Definición Espacio vectorial de dimensión infinita.

Un espacio vectorial se llama **infinitamente-dimensional** si no es de dimensión finita.

1.16 Ejemplo Demuestre que $\mathcal{P}(F)$ es infinitamente-dimensional.

Demostración.- Considere cualquier lista de elementos de $\mathcal{P}(F)$. Sea m el grado más alto de los polinomios en esta lista. Entonces, cada polinomio en el generador (span) de esta lista tiene grado máximo m . Por lo tanto, z^{m+1} no está en el span de nuestra lista. Así, ninguna lista genera $\mathcal{P}(F)$. Concluimos que $\mathcal{P}(F)$ es de dimensión infinita. ■

Independencia lineal

Suponga $v_1, \dots, v_m \in V$ y $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$. Por la definición de span, existe $a_1, \dots, a_m \in F$ tal que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

Considere la cuestión de si la elección de escalares en la ecuación anterior es única. Sea c_1, \dots, c_m otro conjunto de escalares tal que

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m.$$

Sustrayendo estas últimas ecuaciones, se tiene

$$0 = (a_1 - c_1)v_1 + \dots + (a_m - c_m)v_m.$$

Así, tenemos que escribir 0 como una combinación lineal de (v_1, \dots, v_m) . Si la única forma de hacer esto es la forma obvia (usando 0 para todos los escalares), entonces cada $a_j - c_j$ es igual a 0, lo que significa que cada a_j es igual a c_j (y por lo tanto la elección de los escalares fue realmente única). Esta situación es tan importante que le damos un nombre especial, independencia lineal, que ahora definiremos.

1.17 Definición Linealmente independiente.

- Una lista v_1, \dots, v_m de vectores en V se llama linealmente independiente si la única posibilidad de que $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que $a_1v_1 + \dots + a_mv_m$ sea igual a 0 es $a_1 = \dots = a_m = 0$.
- La lista vacía $()$ también se declara linealmente independiente.

El razonamiento anterior muestra que v_1, \dots, v_m es linealmente independiente si y sólo si cada vector en el $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ tiene sólo una representación lineal en forma de combinación lineal de v_1, \dots, v_m .

1.19 Definición Linealmente dependiente.

- Una lista v_1, \dots, v_m de vectores en V se llama linealmente dependiente si no es linealmente independiente.
- En otras palabras, una lista v_1, \dots, v_m de vectores en V es linealmente dependiente si existe $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que $a_1v_1 + \dots + a_mv_m = 0$.

1.21 Lema Suponga v_1, \dots, v_m es una lista linealmente dependiente en V . Entonces, existen $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que se cumple lo siguiente:

- $v_j \in \text{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$;
- Si el j -ésimo término se elimina de v_1, \dots, v_m , el generador de la lista restante es igual a $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$.

Demostración.- Ya que la lista v_1, \dots, v_m es linealmente dependiente, existe números $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m = 0.$$

Sea j el elemento más grande de $\{1, \dots, m\}$ tal que $a_j \neq 0$. Entonces,

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \dots - \frac{a_{j-1}}{a_j}v_{j-1} \quad (1).$$

Lo que prueba (a).

Para probar (b), suponga $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$. Entonces, existe números $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = c_1v_1 + \dots + c_mv_m.$$

En la ecuación de arriba, podemos reemplazar v_j con el lado derecho de (1). Es decir,

$$u = c_1v_1 + \dots + a_jv_j + \dots + c_mv_m.$$

lo que muestra que u está en el span de la lista obtenida al eliminar el j -ésimo término de v_1, \dots, v_m . Así (b) se cumple. ■

Eligir $j = 1$ en el lema de dependencia lineal anterior, significa que $v_1 = 0$, porque si $j = 1$ entonces la condición (a) anterior se interpreta como que $v_1 \in \text{span}()$. Recuerde que $\text{span}() = \{0\}$. Tenga en cuenta también que la demostración del inciso (b) debe modificarse de manera obvia si $v_i = 0$ y $j = 1$.

Ahora llegamos a un resultado importante. Dice que ninguna lista linealmente independiente en V es más extensa que una lista generadora en V .

1.23 Teorema La longitud de una lista linealmente independiente es \leq a la longitud de la lista generadora.

En un espacio vectorial de dimensión finita, la longitud de cada lista linealmente independiente de vectores es menor o igual que la longitud de cada lista generadora de vectores (longitud= n de vectores).

Demostración.- Suponga u_1, \dots, u_m es linealmente independiente en V . Suponga también que w_1, \dots, w_n generan V . Necesitamos probar que $m \leq n$. Lo hacemos a través del proceso de pasos que se describe a continuación; tenga en cuenta que en cada paso agregamos una de las u 's y eliminamos una de las w 's.

Paso 1. Sea B la lista w_1, \dots, w_n , que genera V . Por lo tanto, añadir cualquier vector en V a esta lista produce una lista linealmente dependiente (porque el nuevo vector añadido se puede escribir como una combinación lineal de los otros vectores, $u_1 = \frac{a_1}{c_1}w_1 + \dots + \frac{a_n}{c_1}w_n$). En particular, la lista

$$u_1, w_1, \dots, w_n$$

es linealmente dependiente. Así, por el lema (2.21), podemos eliminar un de las w para que la nueva lista B (de longitud n) que consta de u_1 y las w 's restantes generen V .

Paso j. La lista B (de longitud n) del paso $j - 1$ genera V . Así, añadir cualquier vector a esta lista produce una lista linealmente dependiente. En particular, la lista de longitud $(n + 1)$ obtenida al unir u_j a B , colocándola justo después de u_1, \dots, u_{j-1} , es linealmente dependiente. Por el lema de dependencia lineal (2.21), uno de los vectores de esta lista está en el generador de los anteriores, y ya que u_1, \dots, u_j es linealmente independientes, este vector es uno de los w 's, no uno de los u 's. Podemos eliminar esa w para la nueva lista B (de longitud n) que consta de u_1, \dots, u_j y las w 's restantes generan V .

Después del paso m , hemos agregado todas las u y el proceso se detiene. En cada paso, a medida que agregamos un u a B , el lema de dependencia lineal implica que hay algo de w que eliminar. Por lo tanto, hay al menos tantas w como u . ■

Aclaremos esto con dos ejemplos.

1.24 Ejemplo Demuestre que la lista $(1, 2, 3), (4, 5, 8), (9, 6, 7), (-3, 2, 8)$ no es linealmente independiente en \mathbf{R}^3 .

Demostración.- La lista $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ genera \mathbf{R}^3 . Por lo tanto, ninguna lista de longitud superior a 3 es linealmente independiente en \mathbf{R}^3 . ■

1.25 Ejemplo Demostrar que la lista $(1, 2, 3, -5), (4, 5, 8, 3), (9, 6, 7, -1)$ no genera \mathbf{R}^4 .

Demostración.- La lista $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ es linealmente independiente en \mathbf{R}^4 . Por lo tanto, ninguna lista de longitud inferior a 4 genera \mathbf{R}^4 . ■

1.26 Teorema Subespacio de dimensión finita.

Todo subespacio de un vector de dimensión finita es de dimensión finita.

Demostración.- Suponga que V es de dimensión finita y U es un subespacio de V . Necesitamos demostrar que U es de dimensión finita. Hacemos esto a través de la siguiente construcción de pasos.

Paso 1. Si $u = \{0\}$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \{0\}$, entonces elegimos un vector no nulo $v_1 \in U$

Paso 2. Si $U = \text{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \text{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$, entonces elegimos un vector $v_j \in U$ tal que

$$v_j \in \text{span}(v_1, \dots, v_{j-1}).$$

Después de cada paso, mientras continúa el proceso, hemos construido una lista de vectores tal que ningún vector en esta lista está en el generador de los vectores anteriores. Así, después de cada paso hemos construido una lista linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Esta lista linealmente independiente no puede ser más grande que cualquier lista de expansión de V (por 2.23). Por lo tanto, el proceso eventualmente termina, lo que significa que U es de dimensión finita. ■

1.A Ejercicios

1. Suponga v_1, v_2, v_3, v_4 se extiende por V . Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

también se extiende por V .

Demostración.- Sea $v \in V$, entonces existe a_1, a_2, a_3, a_4 tal que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4.$$

Que implica,

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 - a_1v_2 + a_1v_2 - a_1v_3 + a_1v_3 - a_2v_3 + a_2v_3 - a_1v_4 + a_1v_4 \\ &- a_2v_4 + a_2v_4 - a_3v_4 + a_3v_4 \end{aligned}$$

De donde,

$$v = a_1(v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(v_3 - v_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)v_4.$$

Por lo tanto, cualquier vector en V puede ser expresado por una combinación lineal de

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4.$$

Así, esta lista se extiende por V .

2. Verifique las afirmaciones del Ejemplo 2.18.

(a) Una lista v de un vector $v \in V$ es linealmente independiente si y sólo si $v \neq 0$.

Demostración.- Demostremos que si v es linealmente independiente, entonces $v \neq 0$. Supongamos que $v = 0$. Sea un escalar $a \neq 0$. De donde, $av = 0$ incluso cuando $a \neq 0$. Esto contradice la definición de independencia lineal. Por lo tanto, v debe ser linealmente dependiente. Esto es, $v = 0$ implica que v es un vector linealmente dependiente. Por lo que, si v es linealmente independiente, entonces v es un vector distinto de cero.

Por otro lado, debemos demostrar que $v \neq 0$ implica que v es linealmente independiente. Sea un escalar a tal que $av = 0$. Si $a \neq 0$, entonces av no puede ser 0. Por eso a debe ser 0. Por lo tanto, $v \neq 0$ y $av = 0$ implica que $a = 0$. Así, v es linealmente independiente.

- (b) Una lista de dos vectores en V es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

Demostración.- El enunciado siguiente es equivalente. Dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar de otro. Supongamos que v_1, v_2 son dos vectores linealmente dependientes. Por lo que, existe escalares a_1, a_2 tal que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

y no ambos escalares a_1, a_2 son cero. Sea $a_1 \neq 0$, entonces la ecuación se podría reescribir como

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$$

el cual prueba que v_1 es un múltiplo escalar de v_2 . Por otro lado, si $a_2 \neq 0$, entonces $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$ de aquí podemos afirmar que v_2 es un múltiplo escalar de v_1 .

Ahora supongamos que uno de los v_1 o v_2 es un múltiplo escalar del otro. Podemos decir, sin pérdida de generalidad, que v_1 es un múltiplo escalar de v_2 . Esto es, $v_1 = c v_2$ para algún escalar c . Por lo tanto, la ecuación $v_1 - c v_2 = 0$ se cumple, ya que el multiplicador de v_1 es distintos de cero. Esto es precisamente lo que requerimos para la definición de dependencia lineal. Así, v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

- (c) $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ es linealmente independiente en \mathbf{F}^4 .

Demostración.- Utilizaremos la definición de independencia lineal. Sean a, b, c escalares en \mathbf{F} tal que

$$a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$$

Entonces,

$$(a, b, c, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Lo que implica,

$$a, b, c = 0.$$

Esto demuestra que los tres vectores son linealmente independientes.

- (d) La lista $1, z, \dots, z^m$ es linealmente independiente en $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ para cada entero no negativo m .

Demostración.- Demostremos por contradicción. Supongamos que $1, z, \dots, z^m$ es linealmente dependiente. Por lo que, existe un escalar a_0, a_1, \dots, a_m tal que

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m = 0.$$

Sea k el índice más grande tal que $a_k \neq 0$. Esto significa que los escalares desde a_{k+1} hasta a_m son cero. Entonces, se deduce que

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k = 0.$$

Reescribiendo se tiene

$$z^k = -\frac{a_0}{a_k} - \frac{a_1}{a_k} z - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_k} z^{k-1}.$$

Aquí, expresamos z^k como un polinomio de grado $k-1$ el cual es absurdo. Por lo que $1, z, z^2, \dots, z^m$ es un conjunto linealmente independiente.

3. Encuentre un número t tal que

$$(3, 1, 4), (2, -3, 5), (5, 9, t)$$

no es linealmente independiente en \mathbf{R}^3 .

Respuesta.- Sea,

$$a(3, 1, 4) + b(2, -3, 5) + c(5, 9, t) = 0.$$

Si $c = 0$. Entonces,

$$a(3, 1, 4) + b(2, -3, 5) = 0.$$

Lo que implica

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= 0 \\ a - 3b &= 0 \\ 4a + 5b &= 0 \end{aligned}$$

De donde, resolviendo para a y b se tiene

$$a = 0 \quad y \quad b = 0.$$

Pero, no queremos que a, b, c sean cero. Así que debemos forzar que $c \neq 0$, como sigue:

$$a(3, 1, 4) + b(2, -3, 5) + c(5, 9, t) = 0 \Rightarrow (5, 9, t) = -\frac{a}{c}(3, 1, 4) - \frac{b}{c}(2, -3, 5).$$

Es decir, estamos expresando $(5, 9, t)$ como una combinación lineal de los vectores restantes. Así, sea $-\frac{a}{c} = x$, $-\frac{b}{c} = y$ por lo que,

$$(5, 9, t) = x(3, 1, 4) + y(2, -3, 5).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x - 3y &= 9 \\ 4x + 5y &= t \end{aligned}$$

Resolviendo para x e y se tiene

$$x = 3 \quad y = -2.$$

Por lo tanto,

$$t = 2.$$

4. Verifique la afirmación en el segundo punto del Ejemplo 2.20. Es decir, la lista $(2, 3, 1), (1, -1, 2), (7, 3, c)$ es linealmente dependientes en \mathbf{F}^3 si y sólo si $c = 8$, como debes verificar.

Respuesta.- Sea los escalares a, b, c no todos cero tal que

$$r(2, 3, 1) + s(1, -1, 2) + t(7, 3, c) = (0, 0, 0)$$

De donde, podemos escribir como ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2r + s + 7t &= 0 \\ 3r - s + 3t &= 0 \\ r + 2s + ct &= 0 \end{aligned}$$

De la ecuación 1 y 2 se tiene

$$5r + 10t = 0 \Rightarrow r = -2t.$$

Luego sustrayendo la ecuación 1 y 3,

$$2r + (c - 4)t = 0.$$

Así, tenemos que

$$2(-2t) + (c - 4)t = 0 \Rightarrow (c - 8)t = 0$$

Por lo que,

$$r = 0 \quad \text{o} \quad c - 8 = 0.$$

Si $t = 0$. Entonces, $r = -2t = 0$, y $s = 0$. Contradiciendo el hecho de que no todos los escalares son cero. Por lo tanto, los tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si $c = 8$.

5. (a) Demuestre que si pensamos en \mathbf{C} como un espacio vectorial sobre \mathbf{R} , entonces la lista $(1 + i, 1 - i)$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a, b \in \mathbf{R}$, tal que

$$a(1 + i) + b(1 - i) = 0 \Rightarrow (a + b) + (a - b)i = 0.$$

Entonces,

$$a + b = 0 \quad \text{y} \quad a - b = 0.$$

Iguando estas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} a + b &= a - b &\Rightarrow 2b &= 0 \\ &&\Rightarrow b &= 0. \end{aligned}$$

Reemplazando en $a + b = 0$,

$$a = 0.$$

Por lo tanto, $(1 + i, 1 - i)$ es linealmente independiente sobre \mathbf{R} .

- (b) Demuestre que si pensamos en \mathbf{C} como un espacio vectorial sobre \mathbf{C} , entonces la lista $(1 + i, 1 - i)$ es linealmente dependiente.

Demostración.- Sean los escalares $i, 1 \in \mathbf{C}$, tal que

$$i(1 + i) + 1(1 - i) = i + i^2 + 1 - i = 0 \Rightarrow (i - 1) + (1 - i) = (i - 1) - (i - 1) = 0.$$

Donde concluimos que $(1 + i, 1 - i)$ es linealmente dependiente sobre \mathbf{C} .

6. Supongamos que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente en V . Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

es también linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a, b, c, d \in F$ tal que

$$a(v_1 - v_2) + b(v_2 - v_3) + c(v_3 - v_4) + d(v_4) = 0.$$

De donde,

$$av_1 - av_2 + bv_2 - bv_3 + cv_3 - cv_4 + dv_4 = 0.$$

Por lo que,

$$av_1 + (b - a)v_2 + (c - b)v_3 + (d - c)v_4 = 0$$

Ya que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente, entonces

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b - a &= 0 \\ c - b &= 0 \\ d - c &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para a, b, c, d se tiene

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

Esto implica que

$$0(v_1 - v_2) + 0(v_2 - v_3) + 0(v_3 - v_4) + 0(v_4) = 0.$$

Por lo tanto, la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

es linealmente independiente.

7. Demostrar o dar un contraejemplo: Si v_1, v_2, \dots, v_m es una lista linealmente independiente de vectores en V , Entonces

$$5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \dots, v_m$$

es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1(5v_1 - 4v_2) + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_mv_m = 0$$

De donde,

$$5a_1v_1 + (a_2 - 4a_1)v_2 + a_3v_3 + \dots + a_mv_m = 0$$

Sabemos que la independencia lineal obliga a todos los escalares de v_i a ser cero. En particular, $5a_1 = 0$ entonces $a_1 = 0$ y $a_2 - 4a_1 = 0$, implica $a_2 = 0$. Por lo tanto,

$$0 \cdot v_1 + (0 - 0)v_2 + a_3v_3 + \dots + a_mv_m = 0$$

Dado que todos a_i son cero, entonces $5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \dots, v_m$ es linealmente independiente.

8. Demostrar o dar un contraejemplo: Si v_1, v_2, \dots, v_m es una lista linealmente independiente de vectores en V y $\gamma \in \mathbf{F}$ con $\gamma \neq 0$, Entonces $\gamma v_1, \gamma v_2, \dots, \gamma v_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \dots + a_m\gamma v_m = 0.$$

De donde,

$$\gamma(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m) = 0.$$

Lo que,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = 0.$$

Ya que, v_1, v_2, \dots, v_m es linealmente independiente. Entonces, todos los a_i 's deben ser cero. Por lo tanto, $a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \dots + a_m\gamma v_m = 0$. es linealmente independiente.

9. Demostrar o dar un contraejemplo: Si v_1, v_2, \dots, v_m y w_1, w_2, \dots, w_m son listas linealmente independientes de vectores en V , entonces $v_1 + w_1, \dots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a_i, b_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0 \quad \text{y} \quad b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m = 0.$$

Entonces,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m = 0.$$

De donde,

$$(a_1 - b_1)(v_1 + w_1) + (a_2 - b_2)(v_2 + w_2) + \dots + (a_m - b_m)(v_m + w_m) = 0.$$

Supongamos $c_i = a_i + b_i \in \mathbf{F}$. Luego,

$$c_1(v_1 + w_1) + c_2(v_2 + w_2) + \dots + c_m(v_m + w_m) = 0.$$

Dado que $a_i = b_i = 0$, ya que v_1, v_2, \dots, v_m y w_1, w_2, \dots, w_m son linealmente independientes. Concluimos que, $v_1 + w_1, \dots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

10. Suponga v_1, \dots, v_m es linealmente independiente en V y $w \in V$. Demostrar que si $v_1 + w, \dots, v_m + w$ es linealmente dependiente, entonces $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$.

Demostración.- Por definición de dependencia lineal. Existen $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que

$$a_1(v_1 + w) + a_2(v_2 + w) + \dots + a_m(v_m + w) = 0.$$

De donde,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = -(a_1 + a_2 + \dots + a_m)w. \quad (1)$$

Dado que v_1, \dots, v_m es linealmente independiente, entonces existen escalares $t_1, \dots, t_m \in \mathbf{F}$, $\forall t_i = 0$, de modo que

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_m v_m = 0$$

Es único. Así pues notemos, para $a_i \neq 0$ que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m \neq 0$$

En consecuencia por (1)

$$-(a_1 + a_2 + \dots + a_m)w \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$w = -\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_m}(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m) \in \text{span}(v_1, \dots, v_m).$$

11. Suponga v_1, \dots, v_m es linealmente independiente en V y $w \in V$. Demostrar que v_1, \dots, v_m, w es linealmente independiente si y sólo si

$$w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_m).$$

Demostración.- Supongamos que $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$. Entonces,

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

De donde,

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m - w = 0 \Rightarrow a_1v_1 + \dots + a_mv_m + (-1)w = 0.$$

Por lo tanto, v_1, \dots, v_m, w es linealmente dependiente.

Por otro lado: v_1, \dots, v_m, w es linealmente independiente, entonces existe $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbf{F}$, $\forall a_i = 0$, tal que

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m + bw = 0.$$

Dado que $b = 0$, no se puede escribir w como combinación lineal de v_1, \dots, v_m . Es decir,

$$w = \frac{1}{0}(a_1v_1 + \dots + a_mv_m),$$

lo que es imposible. De esta manera

$$w \neq \text{span}(v_1, \dots, v_m).$$

12. Explique por qué no existe una lista de seis polinomios que sea linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Notemos que $1, z, z^2, z^3, z^4$ genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Pero por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], la longitud de la lista linealmente independiente es menor o igual que la longitud de la lista que genera. Es decir, cualquier lista linealmente independiente no tiene más de 5 polinomios.

13. Explique por qué ninguna lista de cuatro polinomios genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si m vectores genera V y si tenemos un conjunto de n vectores linealmente independientes, entonces $n \leq m$. Es decir, el número de vectores en un conjunto linealmente independiente de V , no puede ser mayor que el número de vectores en un conjunto generador de V .

Por ejemplo, si cuatro polinomios podrían generar $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Entonces, por la definición de arriba, cualquier conjunto de polinomios linealmente independientes en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ podría tener como máximo cuatro vectores. Sin embargo, el conjunto $1, z, z^2, z^3, z^4$ tiene cinco polinomios linealmente independientes en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Por lo tanto, es imposible que cualquier conjunto de cuatro polinomios genere $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

14. Demuestre que V es de dimensión infinita, si y sólo si existe una secuencia v_1, v_2, \dots , de vectores en V tal que v_1, \dots, v_m es linealmente independiente para cada entero positivo m .

Demostración.- Supongamos que V es de dimensión infinita. Queremos producir una secuencia de vectores v_1, v_2, \dots , tal que v_1, v_2, \dots, v_m es linealmente independiente para cada m . Necesitamos mostrar que para cualquier $k \in \mathbf{N}$ y un conjunto de vectores linealmente independientes v_1, v_2, \dots podemos definir un vector v_{k+1} tal que v_1, v_2, \dots, v_{k+1} es linealmente independiente. Si podemos probar esto, entonces significará que podemos continuar sumando vectores indefinidamente a conjuntos linealmente independientes de modo que los conjuntos resultantes también sean linealmente independientes. Esto nos dará una secuencia de vectores v_1, v_2, \dots , cuyo subconjunto finito es linealmente independiente.

Sea v_1, v_2, \dots, v_k un conjunto linealmente independiente en V . Ya que V es de dimensión finita, no puede ser generado por un conjunto finito de vectores. Por lo tanto, $V \neq \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$. Sea v_{k+1} tal que $v_{k+1} \notin \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$. Entonces, por el ejercicio 11 [Axler, Linear Algebra, que nos

dice: Si v_1, \dots, v_m es linealmente independiente en V y $w \in V$, el conjunto v_1, \dots, v_m, w es linealmente independiente si y sólo si $w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_m)$. El conjunto v_1, v_2, \dots, v_{k+1} es linealmente independiente.

Por otro lado, sea v_1, v_2, \dots, v_n un conjunto generador de V . Entonces, por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], cualquier conjunto de vectores linealmente independiente en V pueden tener por lo más n vectores. De esto modo, cualquier conjunto que tenga $n + 1$ o más vectores es linealmente dependiente. Así, si V es de dimensión finita, entonces no podemos tener una secuencia de vectores v_1, v_2, \dots tal que, para cada m , el subconjunto v_1, v_2, \dots, v_m es linealmente independiente. Tomando su recíproca, podemos decir que si existe una secuencia de vectores v_1, v_2, \dots tal que el conjunto v_1, v_2, \dots, v_m es linealmente independiente para cada m . Entonces, V es de dimensión infinita. Lo que completa de demostración.

15. Demostrar que \mathbb{F}^∞ es de dimensión infinita.

Demostración.- Sea un elemento $e_m \in \mathbb{F}^\infty$ como el elemento que tiene la coordenada m -ésima igual a 1 los demás elementos iguala a 0. Es decir,

$$(0, 1, 0, \dots, 0)$$

Ahora, si varía m sobre el conjunto de los números naturales, entonces tenemos una secuencia e_1, e_2, \dots en \mathbb{F}^∞ , si y sólo si podemos probar que e_1, e_2, \dots, e_m es linealmente independiente para cada m . Con este fin, sea

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m = 0$$

De donde,

$$(a_1 - 1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0)$$

Inmediatamente implica que $a_i = 0$ y por lo tanto, e_i 's son linealmente independiente.

16. Demostrar que el espacio vectorial real para todas las funciones de valor real continuas en el intervalo $[0, 1]$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Por el ejercicio 14 (Axler, Linear Algebra, 2A), tenemos que encontrar una secuencia linealmente independiente de funciones continuas en $[0, 1]$. Observe que los monomiales $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ son funciones continuas en $[0, 1]$. Ahora, debemos demostrar que $1, x, x^2, \dots, x^m$ es linealmente independiente en cada m . Para ello, sea $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m = 0$, donde 0 es el cero polinomial. Lo que significa que $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m = 0$ toma el valor cero en todo el intervalo $[0, 1]$. Esto implica que cada punto en $[0, 1]$ es una raíz del polinomio. Pero, ya que cada polinomio no trivial tiene como máximo un número finito de raíces, esto es imposible a menos que todos los a_i 's sean cero. Lo que muestra que $1, x, x^2, \dots, x^m$ es linealmente independiente para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, el conjunto de funciones continuas en $[0, 1]$ es de dimensión infinita.

17. Suponga p_0, p_1, \dots, p_m son polinomios en $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ tal que $p_j(2) = 0$ para cada j . Demostrar que p_0, p_1, \dots, p_m no es linealmente independiente en $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$.

Demostración.- Supondremos que p_0, p_1, \dots, p_m es linealmente independiente. Demostraremos que esto implica que p_0, p_1, \dots, p_m genera $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$. Y que esto a su vez conducirá a una contradicción al construir explícitamente un polinomio que no está en este generador. Notemos que la lista $1, z, \dots, z^{m+1}$ genera $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ y tiene longitud $m + 1$. Por lo tanto, cada lista linealmente independiente debe tener una longitud $m + 1$ o menos (2.23). Si $\text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m) \neq \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$, existe algún

$p \notin \text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m)$, de donde la lista p_0, p_1, \dots, p_m, p es linealmente independiente de longitud $m + 2$, lo que es una contradicción. Por lo que $\text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m) = \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$. Ahora definamos el polinomio $q = 1$. Entonces $q \in \text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m)$, de donde existe $a_0, \dots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$q = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \dots + a_m p_m,$$

lo que implica

$$q(2) = a_0 p_0(2) + a_1 p_1(2) + \dots + a_m p_m(2).$$

Pero esto es absurdo, ya que $1 = 0$. Por lo tanto, p_0, p_1, \dots, p_m no puede ser linealmente independiente.

1.B Bases

1.27 Definición Base.

Una base de V es una lista de vectores en V que es linealmente independiente y genera V .

1.28 Teorema Criterio de base.

Una lista v_1, \dots, v_n de vectores en V es una base de V si y sólo si cada $v \in V$ puede escribirse unívocamente de la forma

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{F}$.

Demostración.- Primero suponga que v_1, \dots, v_n es una base de V . Ya que, v_1, \dots, v_n genera V , existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

se cumple. Para mostrar que esta representación es única, sean c_1, \dots, c_n escalares tales que, también tenemos

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

Sustrayendo la primera ecuación de la segunda, tenemos

$$0 = (a_1 - c_1)v_1 + \dots + (a_n - c_n)v_n.$$

Esto implica que cada $a_j - c_j$ es igual a cero. (Ya que, v_1, \dots, v_n es linealmente independiente). Por lo tanto $a_1 = c_1, \dots, a_n = c_n$. Así, tenemos la unicidad deseada.

Por otro lado, suponga que cada $v \in V$ puede ser escrita de manera única como la forma $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Claramente esto implica que v_1, \dots, v_n genera V . Para demostrar que v_1, \dots, v_n es linealmente independiente, suponga que $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{F}$ son tales que

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

La unicidad de la representación de $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ (tomando $v = 0$) implica que $a_1 = \dots = a_n = 0$. Así, v_1, \dots, v_n es linealmente independiente y por tanto es una base de V . ■

Una lista generadora en un espacio vectorial puede no ser una base, ya que no es linealmente independiente. Nuestro próximo resultado dice que dada cualquier lista generadora, algunos (posiblemente ninguno) de los vectores en ella pueden descartarse para que la lista restante sea linealmente independiente y aún genere el espacio vectorial.

1.31 Teorema La lista generadora contiene un base.

Cada lista generadora en un espacio vectorial se puede reducir a una base del espacio vectorial.

Demostración.- Suponga que v_1, \dots, v_n genera V . Queremos eliminar algunos de los vectores de v_1, \dots, v_n para que los vectores restantes formen una base de V . Sea $B = v_1, \dots, v_n$, de donde realizamos un bucle con las siguientes condiciones:

Paso 1. Si $v_1 = 0$, eliminamos v_1 de B . Si $v_1 \neq 0$ entonces no cambiamos B .

Paso J. Si v_j está en $\text{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$, eliminamos v_j de B . Si v_j no está en $\text{span}(v_1, \dots, v_j)$, entonces no cambiamos B (lema 2.21).

Paramos el proceso después del paso n , obteniendo una lista B . Esta lista B genera V , ya que nuestra lista original generó V y hemos descartado solo los vectores que ya estaban en el generador de los vectores anteriores. El proceso garantiza que ningún vector de B está en el generador de los anteriores. Así pues, B es linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Por tanto, B es una base de V . ■

Nuestro siguiente resultado, un corolario fácil del resultado anterior, nos dice que todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

1.32 Corolario Base del espacio vectorial de dimensión finita.

Cada espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

Demostración.- Por definición, un espacio vectorial de dimensión finita tiene una lista generadora. El resultado anterior nos dice que cada lista generadora puede ser reducida a una base. ■

Nuestro siguiente resultado es en cierto sentido un derivado de 2.31, que decía que toda puede reducirse a una base. Ahora mostramos que dada cualquier lista linealmente independiente, podemos unir algunos vectores adicionales (esto incluye la posibilidad de no unir ningún vector adicional) de modo que la lista ampliada siga siendo linealmente independiente pero que también genere el espacio.

1.33 Teorema Una lista linealmente independiente se extiende a una base.

Cada lista linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial se puede extender a una base del espacio vectorial.

Demostración.- Suponga u_1, \dots, u_m es linealmente independiente en un espacio vectorial V de dimensión finita. Sea w_1, \dots, w_n una base de V . Por lo que la lista

$$u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$$

genera V . Aplicando el procedimiento de la prueba de 2.31 para reducir esta lista a una base de V se obtiene una base formada por los vectores u_1, \dots, u_m (ninguna de las u 's se elimina en este procedimiento porque u_1, \dots, u_m es linealmente independiente) y algunos de los w 's. ■

Como aplicación del resultado anterior, mostramos ahora que cada subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita puede emparejarse con otro subespacio para formar una suma directa de todo el espacio.

1.34 Teorema Cada subespacio de V forma parte de una suma directa igual a V .

Suponga V es de dimensión finita y U es un subespacio de V . Entonces, existe un subespacio W de V tal que $U \oplus W = V$.

Demostración.- Ya que V es de dimensión finita, también lo es U por 2.26. Por lo que, existe una base u_1, \dots, u_m de U esto por 2.32. Por su puesto u_1, \dots, u_m es una lista linealmente independiente de vectores en V . Por lo tanto, esta lista puede extenderse a una base u_1, \dots, u_n de V esto por 2.33. Sea $W = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$. Para probar que $V = U \oplus W$, por 1.45, solo necesitamos demostrar que

$$V = U + W \quad \text{y} \quad U \cap W = \{0\}.$$

Para probar la primera ecuación, suponga $v \in V$. Entonces, ya que la lista $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ genera V , existe $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n.$$

En otras palabras, tenemos $v = u + w$, donde $u \in U$ y $w \in W$ fueron definidas anteriormente. Así, $v \in U + W$, completando la prueba de $V = U + W$.

Para demostrar que $U \cap W = \{0\}$, suponga $v \in U \cap W$. Entonces, existe escalares $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n.$$

Por lo tanto,

$$a_1 u_1 + \dots + a_m u_m - b_1 w_1 - \dots - b_n w_n = 0.$$

Esto, ya que $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ son linealmente independientes, esto implica que $a_1 = \dots = a_m = b_1 = \dots = b_n = 0$. Así, $v = 0$, de donde $U \cap W = \{0\}$. ■

1.B Ejercicios

1. Halle todos los espacios vectoriales que tienen exactamente una base.

Respuesta.- Afirmamos que solo el espacio vectorial trivial tiene exactamente una base. Para ello demostraremos que para espacios vectorial de dimensión finita e infinita se tiene más de una base. Consideremos un espacio vectorial de dimensión finita. Sea V un espacio vectorial no trivial con base v_1, \dots, v_n . Decimos que para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista cv_1, \dots, cv_n es también una base. Es decir, la lista es aún linealmente independiente, y es aún generador de V . Luego, sea $u \in V$ ya que v_1, \dots, v_n genera V , existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c}(cv_1) + \dots + \frac{a_n}{c}(cv_n)$$

y así cv_1, \dots, cv_n genera también V . Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión finita.

Por otro lado. Sea W un espacio vectorial de dimensión infinita con base w_1, w_2, \dots . Para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista cw_1, cw_2, \dots es también una base. Claramente la lista es linealmente independiente, y también genera V . Luego, sea $u \in V$, ya que w_1, w_2, \dots genera W , existe $a_1, a_2, \dots \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c}cw_1 + \frac{a_2}{c}cw_2 + \dots$$

y así cw_1, cw_2, \dots genera también W . Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión infinita.

2. Verifique todas las afirmaciones del ejemplo 2.28.

- (a) La lista $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ es una base de \mathbf{F}^n , llamado la base estándar de \mathbf{F}^n .

Respuesta.- Primero demostraremos que la lista genera \mathbf{F}^n . Sea, los escalares x_1, x_2, \dots, x_n en \mathbf{F} . Podemos escribir

$$x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Donde, (x_1, x_2, \dots, x_n) es un vector cualquier en \mathbf{F}^n . Esta expresión es una combinación lineal de los n vectores. Por definición, esta lista genera \mathbf{F}^n .

Ahora, demostraremos que la lista es linealmente independiente. Para ello, aplicaremos la definición. Sea $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + a_n(0, \dots, 0, 1) = 0.$$

Esto implica que

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

Por lo que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Así, la lista es linealmente independiente.

- (b) La lista $(1, 2), (2, 5)$ es una base de \mathbf{F}^2 .

Respuesta.- Sea $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$. Buscaremos escalares c_1, c_2 tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 = (x_1, x_2).$$

que implica,

$$c_1(1, 2) + c_2(2, 5) = (x_1, x_2) \Rightarrow (c_1 + 2c_2, 2c_1 + 5c_2) = (x_1, x_2)$$

De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= x_1 \\ 2c_1 + 5c_2 &= x_2 \end{aligned}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$c_2 = 2x_1 - x_2$$

Luego, reemplazándola a la primera ecuación, se tiene

$$c_1 = -5x_1 + 3x_2.$$

Por lo tanto, para cada vector $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$ podemos encontrar c_1, c_2 en función de x_1 y x_2 tal que $c_1v_1 + c_2v_2$ es una combinación lineal el cual genera \mathbf{F}^2 .

Después, sólo nos haría falta reemplazar en

$$c_2 = 2x_1 - x_2 \quad \text{y} \quad c_1 = -5x_1 + 3x_2$$

$(x_1, x_1) = (0, 0)$. De donde,

$$c_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0.$$

Esto implica que $(1, 2)$ y $(2, 5)$ es linealmente independiente Por lo que concluimos que la lista dada es una base de \mathbf{F}^2 .

- (c) La lista $(1, 2, -4), (7, -5, 6)$ es linealmente independiente en \mathbf{F}^3 pero no es una base en \mathbf{F}^3 , ya que no genera \mathbf{F}^3 .

Respuesta.- Sean los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1(1, 2, -4) + c_2(7, -5, 6) = 0 \Rightarrow (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (0, 0, 0)$$

Por lo que, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + 7c_2 &= 0 \\ 2c_1 - 5c_2 &= 0 \\ -4c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación y sumando la tercera tenemos

$$c_2 = 0$$

Luego, sustituyendo en la primera ecuación,

$$c_1 = 0$$

Esto implica que los vectores dados son linealmente independientes.

Ahora, demostraremos que la lista no genera \mathbf{F}^3 , con un contraejemplo. Supongamos que $(1, 2, -4), (7, -5, 6)$ puede generar $(1, 0, 0)$ el cual está en \mathbf{F}^3 . Sea los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$, entonces

$$c_1(1, 2, -4) + c_2(7, -5, 6) = (1, 0, 0) \Rightarrow (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (1, 0, 0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{aligned} c_1 + 7c_2 &= 1 \\ 2c_1 - 5c_2 &= 0 \\ -4c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}$$

De las ecuaciones 2 y 3 se tiene que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Reemplazando en la primera ecuación,

$$0 + 0 = 1 \Rightarrow 0 = 1.$$

Lo que es un absurdo, por lo tanto $(1, 2, -4), (7, -5, 6)$ no genera \mathbf{F}^3 .

- (d) La lista $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ genera \mathbf{F}^2 pero no es una base de \mathbf{F}^2 , ya que no es linealmente independiente.

Respuesta.- Demostremos que la lista no es linealmente independiente. Sea $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1, 2) + a_2(3, 5) + a_3(4, 13) = 0 \Rightarrow (a_1 + 3a_2 + 4a_3, 2a_1 + 5a_2 + 13a_3) = (0, 0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{aligned} a_1 + 3a_2 + 4a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 5a_2 + 13a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$a_2 = 5a_3.$$

Remplazando en la primera ecuación,

$$a_1 = -19a_3.$$

Sea, $a_3 = 1$, entonces

$$a_1 = -19 \quad \text{y} \quad a_2 = 5.$$

Por lo tanto, $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ no es linealmente independiente.

Ahora, demostraremos que la lista $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ genera \mathbf{F}^2 . Sean $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1(1, 2) + a_2(3, 5) + a_3(4, 13) = 0$$

Sabiendo que esta lista es linealmente dependiente, podemos reescribimos la ecuación de modo que $(1, 2), (3, 5)$ genera $(4, 13)$:

$$(4, 13) = \frac{a_1}{a_3}(1, 2) - \frac{a_2}{a_3}(3, 5)$$

Por el lema 2.21 (Axler, Linear Algebra), vemos que el generador de $(1, 2), (3, 5)$ es igual al generador de $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$. Sólo nos faltaría demostrar que $(1, 2), (3, 5)$ genera \mathbf{F}^2 . Para ello, sea $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$, de modo que

$$a_1(1, 2) + a_2(3, 5) = (x_1, x_2)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a_1 + 3a_2 &= x_1 \\ 2a_1 + 5a_2 &= x_2 \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación por dos y restando la primera, tenemos

$$a_1 = 2x_1 - x_2.$$

Remplazando en la primera ecuación,

$$a_2 = -(5x_1 + 3x_2).$$

Por lo tanto, podemos hallar a_1 y a_2 en términos de x_1 y x_2 tal que $a_1(1, 2) + a_2(3, 5) = (x_1, x_2)$ es una combinación lineal que genera \mathbf{F}^2 .

Siendo más prácticos podemos usar el teorema 2.23. Para saber que $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ no es linealmente independiente pero genera \mathbf{F}^2 .

(e) La lista $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ es una base de $\{(x, x, y) \in \mathbf{F}^3 : x, y \in \mathbf{F}\}$.

Respuesta.- Está claro que la lista es linealmente independiente. Ya que, la única forma de que se cumpla

$$c_1(1, 1, 0) + c_2(0, 0, 1) = 0$$

es que c_1, c_2 sean igual a cero.

Ahora demostraremos que la lista dada genera $\{(x, x, y) \in \mathbf{F}^3 : x, y \in \mathbf{F}\}$. Sea $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1(1, 1, 0) + c_2(0, 0, 1) = (x, x, y).$$

De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones como sigue:

$$\begin{aligned} c_1 + 0 &= x \\ c_1 + 0 &= x \\ 0 + c_2 &= y \end{aligned}$$

Por lo que, cualquier \mathbf{F}^3 puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ y por lo tanto generan \mathbf{F}^3 .

(f) La lista $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$ es una base de

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{F}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Respuesta.- Si $x + y + z = 0$ para $x, y, z \in \mathbf{F}$, entonces podemos escribir

$$x = -y - z.$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (-y - z, y, z) \\ &= (-y, y - 0) + (-z, 0z) \\ &= -y(1, -1, 0) - z(1, 0, -1). \end{aligned}$$

Debido a que y, z son escalares, implica que podemos expresar cualquier $(x, y, z) \in \mathbf{F}^3$ como una combinación lineal de los vectores $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$.

Es fácil ver que que la lista $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$ es linealmente independiente. Dado que, si $c_1, c_2 \in \mathbf{F}^n$, entonces

$$\begin{aligned} c_1(1, -1, 0) + c_2(1, 0, -1) &= 0 \\ (c_1 + c_2, -c_1, -c_2) &= 0. \end{aligned}$$

De donde,

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Así, la lista $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$ es linealmente independiente. Por lo tanto, $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$ es una base de \mathbf{F}^3

(g) La lista $1, z, \dots, z^m$ es una base de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Respuesta.- El elemento general de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ es una combinación lineal de $1, z, z^2, \dots, z^m$ de la forma:

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m$$

donde $a_i \in \mathbf{F}$ para $1 \leq i \leq m$. Lo que demuestra que genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Para demostrar que la lista es linealmente independiente, suponemos que la combinación lineal de estos elementos es igual a cero; es decir,

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m = 0.$$

Donde el 0 es un polinomio. Esto implica que el polinomio del lado izquierdo toma valor cero para todo los valore de z . Esto es posible sólo cuando todos los a_i 's son cero, ya que cualquier polinomio no trivial tiene un número finito de raíces. Por lo tanto la lista $1, z, z^2, \dots, z^m$ es base de $\mathcal{F}_m(\mathbf{F})$.

3. a). Sea U el subespacio de \mathbf{R}^5 definido por

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{F}^5 : x_1 = 3x_2 \text{ y } x_3 = 7x_4\}.$$

Encuentre una base de U .

Respuesta.- Dado que se tiene la condición $x_1 = 3x_2$ y $x_3 = 7x_4$. Podemos escribir el vector general, como sigue

$$\begin{aligned} (3x_2, x_2, 7x_4, x_4, x_5) &= (3x_2, x_2, 0, 0, 0) + (0, 0, 7x_4, x_4, 0) + (0, 0, 0, 0, x_5) \\ &= x_2(3, 1, 0, 0, 0) + x_4(0, 0, 7, 1, 0) + x_5(0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Por lo que $(3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 7, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ forma una base de U . Podemos demostrar fácilmente que estos vectores generan U , ya que U puede expresarse como una combinación lineal de estos tres vectores. Ahora, demostremos que son linealmente independiente. Sea $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$c_1(3, 1, 0, 0, 0) + c_2(0, 0, 7, 1, 0) + c_3(0, 0, 0, 0, 1) = 0$$

De donde,

$$(3c_1, c_1, 7c_2, c_2, c_3) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Igualando cada componente, tenemos que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Así se demuestra que estos tres vectores son linealmente independientes. Por lo tanto, $(3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 7, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ es una base de U .

b). Extienda la base de la parte (a) a una base de \mathbf{R}^5 .

Respuesta.- Sean $v_1 = (3, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 7, 1, 0)$, $v_3 = c_3(0, 0, 0, 0, 1)$. Por el ejercicio 11 del apartado 2A (Axler, Linear Algebra), se sabe que si tenemos $v_4 \notin \text{span}(v_1, v_2, v_3)$ entonces v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente independientes. Nos preguntamos, ¿qué clase de vectores no pueden ser generados por v_1, v_2, v_3 ? Observemos que las primeras dos coordenadas de v_2 y v_3 son cero. Por lo que no pueden aportar a otras dos primeras coordenadas de cualquier combinación lineal que consideremos. De hecho, estas coordenadas deben provenir de v_1 .

Si $av_1 + bv_2 + cv_3$ es una combinación lineal, entonces las dos primeras coordenadas son $3a$ y a . Luego, si escogemos un vector donde sus primeras dos coordenadas no son de la forma $3a$ y a para cualquier escalar a , entonces no será generados por v_1, v_2, v_3 . Por ejemplo podemos escoger el vector

$$v_4 = (0, 1, 0, 0, 0)$$

Ahora, encontremos un v_5 tal que $v_5 \notin \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Observemos que las coordenadas cuatro y cinco de los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 son cero. Por lo que ambas coordenadas deben provenir de v_2 .

Si $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$ es una combinación lineal, entonces las coordenadas cuatro y cinco son de la forma $7b$ y b , para cualquier escalar b . Por ejemplo podemos escoger el vector,

$$v_5 = (0, 0, 0, 1, 0).$$

Por último, demostremos que esta lista es base de \mathbf{F}^5 . Por el teorema 2.23 sabemos que, si m vectores generan un espacio vectorial, entonces cualquier lista linealmente independiente en V no puede tener más de m vectores. Así, queda demostrada la independencia lineal de v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 .

Por otro lado, demostremos que esta lista genera \mathbf{F}^5 . Nuestro objetivo será hallar una combinación lineal que incluya a v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 para $a, b, c, d, e \in \mathbf{F}$ tales que

$$a(1, 0, 0, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 0, 0, 1) + d(0, 1, 0, 0, 0) + e(0, 0, 0, 1, 0) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Para ello, notemos que ya se tiene $v_3 = (0, 0, 0, 0, 5)$, $v_4 = (0, 1, 0, 0, 0)$ y $v_5 = (0, 0, 0, 1, 0)$. Ahora, generemos los restantes $(1, 0, 0, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, 0, 0)$, de la siguiente manera

$$\frac{1}{3}(v_1 - v_4) = (1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\frac{1}{7}(v_2 - v_5) = (0, 0, 1, 0, 0).$$

Dado que se incluye a v_1 y v_2 en combinación lineal con v_4 y v_5 , entonces

$$\begin{aligned} a &= x_1 \\ b &= x_2 \\ c &= x_3 \\ d &= x_4 \\ e &= x_5. \end{aligned}$$

Encontrando los respectivos escalares a, b, c, d, e en términos de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Decimos que la lista v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 genera \mathbf{F}^5 . Por lo tanto es una base de \mathbf{F}^5 .

c). Encuentre un subespacio W de \mathbf{F}^5 tal que $\mathbf{R}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.- Por 1.45 (Axler, Lineal Algebra), demostraremos que $\mathbf{R}^5 = U + W$ y que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in \mathbf{R}^5$, ya que v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 es una base de \mathbf{F}^5 , por el criterio de base (2.28, Axler, Lineal algebra) podemos escribir

$$\begin{aligned} v &= c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + c_5v_5 \\ &= (c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) + (c_4v_4 + c_5v_5). \end{aligned}$$

Luego, sean $u = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ y $w = c_4v_4 + c_5v_5$. Entonces, $u \in U$ y $w \in W$. Está claro que u y w generan U y W respectivamente. De este modo, cada vector en \mathbf{R}^5 puede ser expresado como una suma de vectores en U y W . Esto prueba que $\mathbf{R}^5 = U + W$.

Ahora demostraremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U \cap W$, ya que $v \in U$ entonces para algunos escalares $a, b, c \in \mathbf{F}$ se tiene

$$v = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Lo mismo pasa con $v \in W$, para algunos escalares $d, e \in \mathbf{F}$; es decir,

$$v = dv_4 + ev_5.$$

Dado que queremos encontrar $U \cap W$, se tiene

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = dv_4 + ev_5 \quad \Rightarrow \quad av_1 + bv_2 + cv_3 - dv_4 - ev_5 = 0$$

Por el hecho de que U y W son linealmente independiente, lo que implica $a = b = c = d = e = 0$, entonces $v = 0$, así $U \cap W = \{0\}$. Concluimos que

$$\mathbf{R}^5 = U \oplus W.$$

4. (a) Sea U el subespacio de \mathbf{C}^5 definida por

$$U = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbf{C}^5 : 6z_1 = z_2 \text{ y } z_3 + 2z_4 + 3z_5 = 0 \right\}.$$

Encuentre una base de U .

Respuesta.- De las condiciones dadas, podemos escribir el conjunto U como

$$U = \{ (6z_1, z_2, -2z_4 - 3z_5, z_4, z_5) : z_2, z_4, z_5 \in \mathbf{C} \}$$

Sea $z \in U$, que implica

$$\begin{aligned} z &= (6z_1, z_2, -2z_4 - 3z_5, z_4, z_5) \\ &= z_2(6, 1, 0, 0, 0) + z_4(0, 0, -2, 1, 0) + z_5(0, 0, -3, 0, 1). \end{aligned}$$

Entonces, $z_2(6, 1, 0, 0, 0)$, $z_4(0, 0, -2, 1, 0)$ y $z_5(0, 0, -3, 0, 1)$ genera U . Ahora veamos si esta lista es linealmente independiente. Sean $a, b, c \in \mathbf{F}$ tal que

$$(6a, a, -2b - 3c, b, c) = 0.$$

De donde,

$$\begin{array}{rcl} 6a & = & 0 \\ a & = & 0 \\ -2b - 3c & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0. \end{array}$$

Por lo tanto, la lista es linealmente independiente. Así, concluimos que U es generado por $z_2(6, 1, 0, 0, 0)$, $z_4(0, 0, -2, 1, 0)$ y $z_5(0, 0, -3, 0, 1)$.

(b) Extienda la base en la parte (a) para una base de \mathbf{C}^5 .

Respuesta.-

(c) Encuentre un subespacio W de \mathbf{C}^5 tal que $\mathbf{C}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.-

5. Demostrar o refutar: existe una base p_0, p_1, p_2, p_3 de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$ tal que ninguno de los polinomios p_0, p_1, p_2, p_3 tiene grado 2.

Demostración.- Consideremos la lista,

$$\begin{array}{rcl} p_0 & = & 1, \\ p_1 & = & X, \\ p_2 & = & X^3 + X^2, \\ p_3 & = & X^3. \end{array}$$

El cual no tiene ningún polinomio de grado 2. Demostraremos que esta lista es una base. Primero veamos que $\text{span}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Sea $q \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Entonces existe $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$ alguno cero, tal que

$$q = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} a_0p_0 + a_1p_1 + a_2(p_2 - p_3) + a_3p_3 &= a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 - a_2p_3 \\ &= a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + (a_3 - a_2)p_3 \\ &= a_0 + a_1X + a_2(X^3 + X^2) + (a_3 - a_2)X^3 \\ &= a_0 + a_1X + a_2X^3 + a_2X^2 + a_3X^3 - a_2X^3 \\ &= a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \\ &= p. \end{aligned}$$

Por lo que p_0, p_1, p_2, p_3 genera $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Ahora, demostraremos que la lista es linealmente independiente. Sean $b_0, \dots, b_3 \in \mathbf{F}$ tales que

$$b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = 0.$$

Se sigue que,

$$b_0 + b_1X + b_2(X^2 + X^3) + b_3X^3 = 0$$

$$b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_2X^3 + b_3X^3 = 0$$

$$b_0 + b_1X + b_2X^2 + (b_2 + b_3)X^3 = 0.$$

donde 0 es el cero polinomial. La lista $(1, X, X^2, X^3)$ es linealmente independiente, ya que es una base en $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Por lo que

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ b_1 &= 0, \\ b_2 &= 0, \\ b_2 + b_3 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una base p_0, p_1, p_2, p_3 de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$ tal que ninguno de los polinomios tiene grado 2.

6. Suponga v_1, v_2, v_3, v_4 es una base de V . Demostrar que

$$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$$

es también una base de V .

Demostración.- Demostremos la independencia lineal. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{F}$ tales que

$$a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_2 + v_3) + a_3(v_3 + v_4) + a_4v_4 = 0$$

$$a_1v_1 + a_1v_2 + a_2v_2 + a_2v_3 + a_3v_3 + a_3v_4 + a_4v_4 = 0$$

$$a_1v_1 + (a_1 + a_2)v_2 + (a_2 + a_3)v_3 + (a_3 + a_4)v_4 = 0$$

Ya que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente, entonces $a_1 = a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = 0$. Por lo que $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$ es linealmente independiente.

Luego, demostremos que $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$ es una base de V . Por definición de generador (span), podemos expresar v_1, v_2, v_3, v_4 como combinaciones lineales de $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4 + v_4$, de la siguiente manera

$$v_3 = (v_3 + v_4) - v_4$$

$$v_2 = (v_2 + v_3) - (v_3 + v_4) + v_4$$

$$v_1 = (v_1 + v_2) - (v_2 + v_3) + (v_3 + v_4) - v_4$$

Por tanto, todos los vectores que pueden expresarse como combinaciones lineales de v_1, v_2, v_3, v_4 también se pueden expresar linealmente por $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$; es decir, $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$ genera V .

7. Demostrar o dar un contraejemplo: Si v_1, v_2, v_3, v_4 es una base de V y U es un subespacio de V tal que $v_1, v_2 \in U$ y $v_3 \notin U$ y $v_4 \notin U$, entonces v_1, v_2 es una base de U .

Demostración.- Sean,

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0) \\ v_3 &= (0, 0, 1, 0) \\ v_4 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Luego, definimos

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_3 = x_4\}$$

Notemos que $v_1, v_2 \in U$ y $v_3, v_4 \notin U$. Pero ninguna combinación lineal de v_1, v_2 produce $(0, 0, 1, 1)$. Entonces, v_1, v_2 no genera U . Por lo tanto no puede formar una base.

8. Suponga que U y W son subespacio de V tal que $V = U \oplus W$. Suponga también que u_1, \dots, u_m es una base de U y w_1, \dots, w_n es una base de W . Demostrar que

$$u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$$

es una base de V .

Demostración.- Demostremos la independencia lineal. Sean $a_i \in \mathbf{F}$ y $c_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n = 0$$

Que implica,

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m = -(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n).$$

Suponga que,

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m = -(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n).$$

De donde, $v \in U$ y $v \in W$; esto es $v \in U \cap W$. Dado que $V = U \oplus W$, debemos tener $U \cap W = \{0\}$. Sea $v = 0$, por lo que

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m = 0$$

$$-(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n) = 0.$$

Ya que, u_1, u_2, \dots, u_m y w_1, w_2, \dots, w_n es base de U y W , respectivamente. Entonces, ambos son linealmente independiente. Es decir, $a_i = c_i = 0$. Por lo tanto, $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ es linealmente independiente.

Ahora, demostremos que $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ genera V . Sea $v \in V$, ya que $V = U \oplus W$ podemos escribir $v = u + w$ para algún $u \in U$ y $w \in W$. Luego, por el hecho de que u_1, u_2, \dots, u_m es base de U y w_1, w_2, \dots, w_n es base de W , entonces

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$$

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n,$$

respectivamente. Por lo tanto, $v = u + w = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n$. Así, $u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n$ genera V . Concluimos que $u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n$ es base de V .

1.C Dimensión

1.35 Teorema La longitud de la base no depende de la base.

Dos bases cualquier de un espacio vectorial de dimensión finita tiene la misma longitud.

Demostración.- Suponga V es de dimensión finita. Sean B_1 y B_2 dos bases de V . Entonces B_1 es

linealmente independiente en V y B_2 genera V . Así la longitud de la lista de B_1 es como máximo la longitud de la lista de B_2 (por 2.23). Intercambiando los roles de B_1 y B_2 , tenemos también que la longitud de la lista de B_2 es como máximo la longitud de la lista de B_1 . Por lo tanto la longitud de B_1 es igual a la longitud de B_2 , como se desea. ■

Ahora que sabemos que dos bases cualesquiera de un espacio vectorial de dimensión finita tienen la misma longitud, podemos definir formalmente la dimensión de tales espacios.

1.36 Definición Dimensión, $\dim V$.

- La **dimensión** de un espacio vectorial de dimensión finita es la longitud de cualquier base del espacio vectorial.
- La dimensión de V (si V es de dimensión finita) se denota por $\dim V$.

1.38 Teorema Dimensión de un subespacio.

Si V es de dimensión finita y U es un subespacio de V , entonces $\dim U \leq \dim V$.

Demostración.- Suponga V de dimensión finita y U es un subespacio de V . Piense en una base de U como una lista linealmente independiente en V , y piense en una base de V como una lista generadora en V . Ahora use 2.23 para concluir que $\dim U \leq \dim V$. ■

Para comprobar que una lista de vectores en V es una base de V , debemos, según la definición, demostrar dos propiedades: debe ser linealmente independiente y debe generar V . Los siguientes dos resultados muestran que si la lista en cuestión tiene la longitud correcta, entonces solo necesitamos verificar que satisface una de las dos propiedades requeridas. Primero probamos que toda lista linealmente independiente con la longitud correcta es una base.

1.39 Teorema La lista linealmente independiente de la longitud correcta es una base.

Suponga que V es de dimensión finita. Entonces, toda lista linealmente independiente de vectores en V con longitud $\dim V$ es una base de V .

Demostración.- Suponga $\dim V = n$ y v_1, \dots, v_n es linealmente independiente en V . La lista v_1, \dots, v_n puede ser extendida a una base de V (por 2.33). Sin embargo, toda base de V tiene una longitud n , por lo que en este caso la extensión es trivial, lo que significa que ningún elemento está unido a v_1, \dots, v_n . En otras palabras, v_1, \dots, v_n es una base de V , como deseamos. ■

1.40 Ejemplo Demostrar que la lista $(5, 7), (4, 3)$ es una base de \mathbf{F}^2 .

Demostración.- Esta lista de dos vectores en \mathbf{F}^2 es obviamente linealmente independiente (porque ningún vector es un múltiplo escalar del otro). Notemos que \mathbf{F}^2 tiene dimensión 2. Así, 1.39 implica que la lista linealmente independiente $(5, 7), (4, 3)$ de longitud 2 es una base de \mathbf{F}^2 (no necesitamos comprobar que genera \mathbf{F}^2). ■

1.41 Ejemplo Demostrar que $1, (x-5)^2, (x-5)^3$ es una base del subespacio U de $\mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ defina por

$$U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbf{R}) : p'(5) = 0\}.$$

Solución.- Claramente cada los polinomios $1, (x-5)^2$ y $(x-5)^3$ es en U . Suponga $a, b, c \in \mathbf{R}$ y

$$a + b(x-5)^2 + c(x-5)^3 = 0$$

para cada $x \in \mathbf{R}$. Vemos que el lado izquierdo de la ecuación anterior tiene un término cx^3 . Como el lado derecho no tiene un término x^3 , esto implica que $c = 0$. Como $c = 0$, vemos que el lado izquierdo tiene un término bx^2 , lo que implica que $b = 0$. Como $b = c = 0$, podemos también concluir que $a = 0$. Así, la ecuación implica que $a = b = c = 0$. Por lo que la lista dada es linealmente independiente en U .

Observemos que $\dim U \geq 3$, ya que U es un subespacio de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$, sabemos que $\dim U \leq \dim \mathcal{P}_3(\mathbf{F}) = 4$ (por 2.38). Sin embargo, $\dim U$ no puede ser igual a 4, de lo contrario, cuando extendemos una base de U a una base de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$ obtendríamos una lista con una longitud mayor que 4. Por lo tanto, $\dim U = 3$. De esto modo, 2.39 implica que la lista linealmente independiente $1, (x-5)^2, (x-5)^3$ es una base de U . ■

Ahora probaremos que una lista generadora con longitud correcta es una base.

1.42 Teorema Lista generadora de la longitud correcta es una base.

Suponga que V es de dimensión finita. Entonces, cada lista generadora de vectores en V con longitud $\dim V$ es una base de V .

Demostración.- Suponga $\dim V = n$ y v_1, \dots, v_n genera V . La lista v_1, \dots, v_n puede ser reducido a una base de V (por 2.31). Sin embargo, cada base de V tiene longitud n . En este caso la reducción es trivial, lo que significa que no se eliminan elementos de v_1, \dots, v_n . En otras palabras, v_1, \dots, v_n es una base de V , como deseamos. ■

El siguiente resultado da una fórmula para la dimensión de la suma de dos subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita.

1.43 Teorema Dimensión de una suma.

Si U_1 y U_2 son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Demostración.- Sea u_1, \dots, u_m una base de $U_1 \cap U_2$; por lo que $(U_1 \cap U_2) = m$. Ya que, u_1, \dots, u_m es una base de $U_1 \cap U_2$, es linealmente independiente en U_1 . En consecuencia esta lista puede ser extendida a una base $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j$ de U_1 (por 2.33). Así, $\dim U_1 = m + j$. También extendamos u_1, \dots, u_m a una base $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k$ de U_2 ; de donde $\dim U_2 = m + k$.

Tendremos que demostrar

$$u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k$$

es una base de $U_1 + U_2$. Claramente $\text{span}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k)$ contiene a U_1 y U_2 , por lo que es igual a $U_1 + U_2$. Entonces, para mostrar que la lista es una base de $U_1 + U_2$, necesitamos demostrar que es linealmente independiente. Suponga

$$a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 v_1 + \dots + b_j v_j + c_1 w_1 + \dots + c_k w_k = 0,$$

donde todos los a 's, b 's y c 's son escalares. Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$c_1 w_1 + \dots + c_k w_k = -a_1 u_1 - \dots - a_m u_m - b_1 v_1 - \dots - b_j v_j$$

el cual demuestra que $c_1 w_1 + \dots + c_k w_k \in U_1$. Luego, todos los w 's son en U_2 , esto implica que $c_1 w_1 + \dots + c_k w_k \in U_1 \cap U_2$. Ya que, u_1, \dots, u_m es una base de $U_1 \cap U_2$, podemos escribir lo siguiente

$$c_1 w_1 + \dots + c_k w_k = d_1 u_1 + \dots + d_m u_m$$

para algunos escalares d_1, \dots, d_m . Pero $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k$ es linealmente independiente, así la última ecuación implica que todos los c 's (y d 's) son igual a cero.

Por lo tanto, nuestra ecuación original que involucra las a 's, b 's y c 's se convierten en

$$a_1u_1 + \dots + a_mu_m + b_1v_1 + \dots + b_jv_j = 0.$$

Porque la lista $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j$ es linealmente independiente, esta ecuación implica que todas las a 's y b 's son 0. Ahora sabemos que todas las a 's, b 's y c 's son iguales a 0, como deseamos. ■

1.C Ejercicios

1. Suponga que V es de dimensión finita y U es un subespacio de V tal que $\dim U = \dim V$. Demuestre que $U = V$.

Demostración.- Debemos demostrar que $U \subseteq V$ y $V \subseteq U$. Es fácil ver que $U \subseteq V$, ya que U es un subespacio de V .

Por otro lado, sean $v \in V$ y u_1, u_2, \dots, u_n base de U . Entonces, este conjunto es linealmente independiente en U , y por lo tanto también en V , esto porque U es un subespacio de V . Que sea base de U significa que $\dim U = n$. Sin embargo, $\dim U = \dim V$ implica que $\dim V = n$. Así, u_1, u_2, \dots, u_n es un conjunto linealmente independiente en V con longitud igual a $\dim V$. Es decir, por 2.39 (Axler, Linear Algebra) u_1, u_2, \dots, u_n es una base de V , por lo que genera V . Esto es, por 1.28 (Criterio de base) existe escalares $c_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n.$$

Notemos que $c_1u_1 + \dots + c_nu_n$ es un vector en U . Por lo tanto, $v \in U$. Que $V \subseteq U$ y $U \subseteq V$ implica que $U = V$, como queríamos demostrar.

2. Demostrar que los subespacios de \mathbf{R}^2 son precisamente: $\{0\}$, \mathbf{R}^2 , y todas las rectas en \mathbf{R}^2 que pasan por el origen.

Demostración.- Claramente $\{0\}$ es un subespacio de \mathbf{R}^2 , porque contiene el vector cero, que está cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. En particular, cualquier combinación lineal del vector cero sigue siendo el vector cero.

Ahora, supongamos que U es un subespacio de \mathbf{R}^2 con $\dim U = 1$. En otras palabras, la base de U contiene solo un vector distinto de cero. Esto significa, que la lista contiene un vector distinto de cero que genera U . Esto implica que cada vector en U es un múltiplo escalar (combinación lineal) del único vector de la base. Luego, el conjunto de todos estos vectores en U describe una recta en \mathbf{R}^2 ; esto es, U es una recta en \mathbf{R}^2 . Además, como U es un subespacio, en particular contiene la identidad aditiva $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$. Por tanto, U debe ser una recta en \mathbf{R}^2 que pase por el origen.

Por último, sea U un subespacio de \mathbf{R}^2 de dimensión 2. Entonces, por definición U tiene una base de dos vectores, digamos u_1 y u_2 . Estas bases son linealmente independientes en U y por lo tanto linealmente independiente en \mathbf{R}^2 . Sabiendo que $\dim U = \dim \mathbf{R}^2 = 2$, por 2.39 (Axler, Linear Algebra) u_1, u_2 es también una base de \mathbf{R}^2 . Que U y \mathbf{R}^2 tengan la misma base, por la unicidad del criterio de base 2.28 (Axler, Linear Algebra) significa que $U = \mathbf{R}^2$.

3. Demuestre que los subespacios de \mathbf{R}^3 son precisamente $\{0\}$, \mathbf{R}^3 , todas las líneas en \mathbf{R}^3 , y todas las planos en \mathbf{R}^3 que pasan por el origen.

Demostración.- Suponga El conjunto $\{0\}$ es un subespacio de \mathbf{R}^3 , ya que está cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. Es decir, para cualquier vector u y v en $\{0\}$ y cualquier escalar c , tenemos $u + v = 0 + 0 = 0$ y $cu = c(0) = 0$, ambos también están en $\{0\}$.

Suponga U un subespacio de \mathbf{R}^2 de $\dim U = 1$. Entonces la longitud de la base de U es 1; en otras palabras, la base de U contiene solo un vector no nulo. En particular, la lista contiene un vector no nulo que genera U ; es decir, cada vector en U es un múltiplo escalar (combinación lineal) del único vector de la base. Luego, el conjunto de todos estos vectores en U describe una recta en \mathbf{R}^3 . Esto es, U es una recta en \mathbf{R}^3 . Además, como U es un subespacio, podemos asegurar que contiene la identidad aditiva $(0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$. Por lo tanto, U debe ser una recta en \mathbf{R}^3 que pasa por el origen.

Suponga U un subespacio de \mathbf{R}^3 de $\dim U = 2$. Entonces la longitud de la base de U es 2. En particular, la base de U contiene dos vectores no nulos. En particular, la lista contiene dos vectores no nulos que genera U . Es decir, cada vector en U es una combinación lineal de los dos vectores de la base. Luego, el conjunto de todos estos vectores en U describe un plano en \mathbf{R}^3 . Esto es, U es un plano en \mathbf{R}^3 . Además, como U es un subespacio, podemos asegurar que contiene la identidad aditiva $(0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$. Por lo tanto, U debe ser un plano en \mathbf{R}^3 que pasa por el origen.

Después, sea U un subespacio de \mathbf{R}^3 de dimensión 3. Entonces, por definición U tiene una base de dos vectores, digamos u_1 u_2 y u_3 . Estas bases son linealmente independientes en U y por lo tanto linealmente independiente en \mathbf{R}^3 . Sabiendo que $\dim U = \dim \mathbf{R}^3 = 3$, por 2.39 (Axler, Linear Algebra) u_1, u_2, u_3 es también una base de \mathbf{R}^3 . Que U y \mathbf{R}^3 tengan la misma base, por la unicidad del criterio de base 2.28 (Axler, Linear Algebra) significa que $U = \mathbf{R}^3$.

4. (a) Sea $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) : p(6) = 0\}$. Encuentre una base de U .

Respuesta.- Sea $q(x)$ de grado $n - 1$. Si $p(x)$ es un polinomio y $p(c) = 0$, entonces c se dice que es una raíz de $p(x)$ y $p(x) = (x - c)q(x)$, ya que

$$p(6) = (6 - 6)q(6) = 0.$$

En particular, $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $p(6) = 0$. Que podemos reescribirlo como $p(x) = (x - 6)q(x)$, donde $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Además, que $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$, implica que $(x - 6)q(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ y 6 como raíz de $(x - 6)q(x)$. Así,

$$\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \mid p(6) = 0\} = \{(x - 6)q(x) \mid q \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})\}.$$

Por el problema 2(g) del apartado 2.B (Axler, Linear Algebra), se sabe que $q(x) = 1, x, x^2, x^3$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. De donde, demostremos que

$$(x - 6), (x - 6)x, (x - 6)x^2, (x - 6)x^3$$

forma una base de U . Si $q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ para $a, b, c, d \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$\begin{aligned} (x - 6)q(x) &= (x - 6)(a + bx + cx^2 + dx^3) \\ &= a(x - 6) + b(x - 6)x + c(x - 6)x^2 + d(x - 6)x^3. \end{aligned}$$

Esto implica que $(x - 6), (x - 6)x, (x - 6)x^2, (x - 6)x^3$ genera U . Por último, debemos probar que $(x - 6), (x - 6)x, (x - 6)x^2, (x - 6)x^3$ es linealmente independiente. Existe $a, b, c, d \in \mathbf{F}$ tal que

$$a(x - 6) + b(x - 6)x + c(x - 6)x^2 + d(x - 6)x^3 = 0.$$

Entonces,

$$-6a + (a - 6b)x + (b - 6c)x^2 + (c - 7d)x^3 + dx^4 = 0.$$

Para que la lista sea linealmente independiente, cada coeficiente debe ser cero. En consecuencia,

$$\begin{aligned} -6a &= 0 \\ a - 6b &= 0 \\ b - 6c &= 0 \\ c - 7d &= 0 \\ d &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0. \end{aligned}$$

Así, la lista es linealmente independiente. Por lo tanto, concluimos que

$$(x - 6), (x - 6)x, (x - 6)x^2, (x - 6)x^3$$

es una base de U .

(b) Extienda la base de U en (a) a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- La condición del inciso (a) hace que 4 polinomios generen U . Ahora, por el problema 13 de la sección 2B (Axler, Linear Algebra); observamos que tenemos que tener 5 polinomios para que genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Para ello debemos extender U del inciso (a). Notemos que U tiene todos sus polinomios múltiplos de $(x - 6)$, por lo que cualquier combinación lineal de U producirá otro polinomio múltiplo de $(x - 6)$. Por el contrario un polinomio el cual no es múltiplo de $(x - 6)$ no podrá pertenecer al generador de U ; así que podemos agregar 1 a U . Está claro por el inciso (a) que los elementos de U son linealmente independientes y por lo dicho anteriormente, ninguna combinación lineal de los elementos de U pueden generar 1 (definición de independencia). Por lo tanto,

$$\{1\} \cup U = \{1, (x - 6), (x - 6)x, (x - 6)x^2, (x - 6)x^3\}$$

es linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Observemos que esta lista contiene longitud igual a $\dim \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$: Entonces por 2.39 (Axler, Linear Algebra), concluimos que

$$\{1, (x - 6), (x - 6)x, (x - 6)x^2, (x - 6)x^3\}$$

es una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

Respuesta.- Supongamos $W = \{1\}$. Debemos probar que $U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ y que $U \cap W = \{0\}$. Ya que, $U \cup W$ contiene todos los polinomios base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, el espacio vectorial $U + W$ contiene a $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Esto es,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \subseteq U + W.$$

Por otro lado, puesto que $U, W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, entonces

$$U + W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Así,

$$U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Ahora, demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U \cap W$. Como $v \in U$, entonces existe $c_i \in \mathbf{F}$ tal que,

$$v = c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4.$$

De la misma forma, ya que $v \in W$ entonces existe $c_0 \in \mathbf{F}$ tal que,

$$v = c_0.$$

Luego,

$$c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 = c_0.$$

Esto implica que

$$-c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 = 0.$$

Para que la lista linealmente independiente, cada coeficiente debe ser cero. En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} -c_0 & = & 0 \\ c_1(x-6) & = & 0 \\ c_2(x-6) & = & 0 \\ c_3(x-6) & = & 0 \\ c_4(x-6) & = & 0. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} c_0 & = & 0 \\ c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & 0 \\ c_3 & = & 0 \\ c_4 & = & 0. \end{array}$$

Así, $v = 0$. Por lo tanto, $U \cap W = \{0\}$. Otra manera de demostrar que la lista dada es linealmente independiente sería, suponer que

$$-c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 \neq 0$$

para todo x . Pero esto es absurdo, ya que si $x = 6$, entonces

$$-c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 = 0.$$

Concluimos que $W = \{1\}$ es un subespacio de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

5. (a) Sea $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) : p''(6)\}$. Encuentre una base de U .

Respuesta.- Sabemos que si $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, entonces $p''(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})$. De ahí,

$$\{p''(x) \mid p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})\} = \mathcal{P}_2(\mathbf{F}).$$

Además, si $p''(6) = 0$, entonces $p''(x) = (x-6)q(x)$, como se vio en el ejercicio anterior se cumple $p''(6) = (6-6)q(6) = 0$, donde $q(x)$ tiene un grado menos que $p''(x)$. Esto es $q(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbf{F})$.

Queremos encontrar elementos que generen $\mathcal{P}_2(\mathbf{F})$. Analicemos un subespacio S de $\mathcal{P}_2(\mathbf{F})$ tal que

$$S = \{u(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F}) \mid (x-6)q(x), q(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbf{F})\}.$$

Existe $a, b \in \mathbf{F}$ tal que $q(x) = a + bx \in \mathcal{P}_1(\mathbf{F})$, por lo que

$$\begin{aligned} (x-6)q(x) &= (x-6)(a+bx) \\ &= a(x-6) + bx(x-6) \\ &= a(x-6) + b(x-6+6)(x-6) \\ &= a(x-6) + b(x-6)^2 + 6b(x-6) \\ &= (a+6b)(x-6) + b(x-6)^2. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que $(x-6), (x-6)^2$ genera S . Sea $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$, tal que

$$c_1(x-6) + c_2(x-6)^2 = 0.$$

De donde,

$$6(4c_2 - 6c_1) + (c_1 - 12c_2)x + c_2x^2 = 0.$$

Para que la lista sea linealmente independiente, cada coeficiente debe ser cero. En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} 6(4c_2 - 6c_1) & = & 0 \\ (c_1 - 12c_2) & = & 0 \\ c_2 & = & 0. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & 0. \end{array}$$

Así, $(x-6), (x-6)^2$ es linealmente independiente. Por lo tanto,

$$\{(x-6), (x-6)^2\}$$

es una base de U .

Ahora, encontraremos una base de $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $p''(x) \in S$. Ya que $(x-6), (x-6)^2$ genera S ; existe $a, b \in \mathbf{F}$, tal que

$$p''(x) = a(x-6)^2 + b(x-6).$$

Integando $p''(x)$ dos veces obtenemos

$$\begin{aligned} p(x) &= \int \left[\int a(x-6)^2 + b(x-6) dx \right] dx \\ &= \int \left[a \frac{(x-6)^3}{3} + b \frac{(x-6)^2}{2} + c \right] dx \\ &= a \frac{(x-6)^4}{12} + b \frac{(x-6)^3}{6} + cx + d \\ &= a \frac{(x-6)^4}{12} + b \frac{(x-6)^3}{6} + c(x-6) + (6c+d) \end{aligned}$$

Sean los escalares $s_1 = a/12, s_2 = b/6, s_3 = c$ y $s_4 = 6c + d$. Entonces,

$$p(x) = s_1(x-6)^4 + s_2(x-6)^3 + s_3(x-6) + s_4.$$

Este polinomio cumple con las condiciones iniciales. Es decir, $p''(x) = 12s_1(x-6)^2 + 6s_2(x-6)$ con $p''(6) = 0$. En otras palabras, $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $p''(6) = 0$ siempre que $p(x)$ puede ser expresado como $s_1(x-6)^4 + s_2(x-6)^3 + s_3(x-6) + s_4$ para algunos escalares s_1, s_2, s_3, s_4 . Así,

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \mid p''(6) = 0\} = \{s_1(x-6)^4 + s_2(x-6)^3 + s_3(x-6) + s_4 \mid s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbf{F}\}.$$

Observe que este conjunto es un espacio vectorial generado por $\{1, (x-6), (x-6)^3, (x-6)^4\}$, el cual genera U . Luego, sea

$$s_1(x-6)^4 + s_2(x-6)^3 + s_3(x-6) + s_4 = 0$$

\Downarrow

$$s_1x^4 + (s_2 - 24s_1)x^3 + (216s_1 - 18s_2)x^2 + (108s_2 - 864s_1 + s_3)x + (129s_1 - 216s_2 - 6s_3 + s_4) = 0$$

de donde,

$$\begin{array}{rclcl} s_1 & = & 0 & & s_1 & = & 0 \\ s_2 - 24s_1 & = & 0 & & s_2 & = & 0 \\ 216s_1 - 18s_2 & = & 0 & \Rightarrow & s_3 & = & 0 \\ 108s_2 - 864s_1 + s_3 & = & 0 & & s_4 & = & 0. \\ 129s_1 - 216s_2 - 6s_3 + s_4 & = & 0. & & & & \end{array}$$

Así, $\{1, (x-6), (x-6)^3, (x-6)^4\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto,

$$\{1, (x-6), (x-6)^3, (x-6)^4\}$$

es una base de U .

(b) Extienda la base en (a) a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- La base de U es $\{1, (x-6), (x-6)^3, (x-6)^4\}$. Ya que, esta base es de longitud 4, debemos extender a longitud 5 para que sea base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Si podemos encontrar un polinomio $p(x)$ que no puede ser generado por los elementos de U , entonces implicará que $U \cup p(x)$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces tendremos un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ que tiene tantos vectores como la dimensión de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Así, tendríamos una base para $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Supongamos que este vector es $(x-6)^2$ y que

$$(x-6)^2 = a + b(x-6) + c(x-6) + c(x-6)^3 + d(x-6)^4$$

para $a, b, c, d \in \mathbf{F}$. De donde

$$(x-6)^2 = a + b(x-6) + (x-6)^2 [c(x-6) + d(x-6)^2]$$

$$(x-6)^2 [1 - c(x-6) - d(x-6)^2] = a + b(x-6).$$

Claramente $\{1, (x-6)\}$ no es múltiplo de $(x-6)^2$; sin embargo, lo será si y sólo si es igual a cero. Por lo tanto,

$$a, b = 0.$$

Substituyendo tendremos

$$(x-6)^2 = c(x-6)^3 + d(x-6)^4$$

$$(x-6)^2 = (x-6)^3 [c + d(x-6)].$$

Esta ecuación no es cierta, ya que el lado derecho de la ecuación no es múltiplo del lado izquierdo. Así, $(x-6)^2$ con un poco de manipulación de la ecuación podemos concluir que $(x-6)^2$ no será generado por los polinomios de U . Concluimos que $U \cup \{(x-6)^2\}$ es una base para $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

Respuesta.- Sea $W = \{(x-6)^2\}$. Ya que $U \cap W$ contiene a todos los polinomios base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, entonces el espacio vectorial $U + W$ contiene a $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Esto es,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \subseteq U + W.$$

Está claro que

$$U, W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$$

Así,

$$U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Ahora, demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U$; es decir, existen $c_0, c_1, c_3, c_4 \in \mathbf{F}$ tales que

$$v = c_0 + c_1(x-6) + c_3(x-6)^3 + c_4(x-6)^4.$$

Luego, ya que $v \in W$, entonces existe $c_2 \in \mathbf{F}$ siempre que

$$v = c_2(x-6)^2.$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones, tenemos

$$c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)^2 + c_3(x-6)^3 + c_4(x-6)^4 = c_2(x-6)^2,$$

Esto implica que

$$c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)^2 + c_3(x-6)^3 + c_4(x-6)^4 = 0,$$

si resolvemos esta ecuación con respecto a c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 , e igualamos a cero, tendremos que

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= 0 \\ c_4 &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera

$$v = 0$$

Por lo tanto, $U \cap W = \{0\}$. Concluimos que W es el subespacio de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W.$$

6. (a) Sea $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) : p(2) = p(5)\}$. Encontrar una base de U .

Respuesta.- Sea

$$p(2) = \alpha = p(5).$$

Definamos $q(x) = p(x) - \alpha$, de donde $q(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$; ya que si sustraemos $p(x) - p(2)$, por ejemplo, está seguirá estando en $q(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Luego,

$$\begin{aligned} q(2) &= p(2) - \alpha = p(2) - p(2) = 0 \\ q(5) &= p(5) - \alpha = p(2) - p(2) = 0. \end{aligned}$$

Esto nos dice que, 2 y 5 son raíces de $q(x)$. Por lo tanto,

$$q(x) = (x-2)(x-5)r(x),$$

donde $r(x)$ tiene grado dos, menor que $q(x)$. Esto es, $r(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})$. Dicho de otra manera, si $r(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})$, entonces $(x-2)(x-5)r(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ ó

$$V = \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \{q \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \mid q(2) = q(5) = 0\} = \{(x-2)(x-5)r(x) : r(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})\}.$$

Dicho esto, buscaremos una base de $\{(x-2)(x-5)r(x) : r(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})\}$. Ya que (Por el apartado 2.B problema 2(g): Axler, Linear Algebra) $1, x, x^2$ es una base de $\{\mathcal{P}_2(\mathbf{F})\}$, verificaremos que

$$(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$$

forma una base de V .

Si $r(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})$ para algún $a, b, c \in \mathbf{F}$, entonces

$$\begin{aligned}(x-2)(x-5)r(x) &= (x-2)(x-5)(a+bx+cx^2) \\ &= a(x-2)(x-5) + b(x-2)(x-5)x + c(x-2)(x-5)x^2.\end{aligned}$$

Lo que nos muestra que $(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ genera V . Ahora, demostremos que $(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ es linealmente independiente. Con las condiciones dadas anteriormente, tenemos que verificar:

$$a(x-2)(x-5) + b(x-2)(x-5)x + c(x-2)(x-5)x^2 = (x-2)(x-5)(a+bx+cx^2) = 0.$$

Centremonos en $(a+bx+cx^2) = 0$. Ya que, $1, x, x^2$ es linealmente independiente. Entonces, los escalares a, b, c son ceros. Por lo tanto, la lista es linealmente independiente, (ya que $(x-2)(x-5)(0+0 \cdot x+0 \cdot x^2) = 0$). Así,

$$\{(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2\}$$

es una base de V .

Por otro lado, observemos que $p(x) \in U$, si y sólo si $q(x) = p(x) - p(2) \in V$. Por lo tanto, cualquier $p \in U$ puede ser expresado como

$$a + q(x)$$

donde $a = p(2)$ es un escalar y $q(x) \in V$. Por el hecho de que, $(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ genera V , entonces existe $b, c, d \in \mathbf{F}$, tal que

$$q(x) = b(x-2)(x-5) + c(x-2)(x-5)x + d(x-2)(x-5)x^2.$$

Ya que, $p(x) \in U$ tiene la forma

$$p(x) = a + q(x) = a + b(x-2)(x-5) + c(x-2)(x-5)x + d(x-2)(x-5)x^2.$$

Entonces, $1, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ genera U .

Por último, demostremos que $1, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ es linealmente independiente. Sabemos que $(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ es linealmente independiente y vemos que todos los polinomios en esta lista son múltiplos de $(x-2)(x-5)$. Por lo que no pueden generar el polinomio 1. Es decir,

$$1 \notin \text{span} \left[(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2 \right].$$

Esto significa que la lista

$$1, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$$

es linealmente independiente. Por lo tanto, esta lista es base de U .

(b) Extienda la base en (a) a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Queremos extender la base $\{1, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2\}$ a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ de dimensión cinco.

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

Respuesta.-