

Distribuciones notables discretas

Christian Limbert Paredes Aguilera

23/12/2021

#library source("funciones.R")

Distribución Bernoulli

- Consideremos un experimento con dos resultados posibles éxito (E) y fracaso (F). El espacio de sucesos será $\Omega = \{E, F\}$
- Supongamos que la probabilidad de éxito es $P(E) = p$, y naturalmente $P(F) = 1 - p = q$ con $0 < p < 1$.
- Consideremos la aplicación

$$X : \Omega = \{E, F\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$E(X) = 1, \quad X(F) = 0$$

Su función de probabilidad es

$$P_X(x) = \begin{cases} 1 - p = q & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Su función de distribución es

$$P_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p = q & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

- Lo denotaremos por

$$X \equiv \text{Ber}(p) \quad \text{o} \quad X \equiv B(1, p)$$

- a este tipo de experimentos (éxito/fracaso) se les denomina experimentos Bernoulli.

Esperanza de una v.a. X Ber(p)

Su valor esperado es

$$E(X) = \sum_{x=0}^1 x \cdot P(X = x) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

Calculemos también $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^1 x^2 \cdot P(X = x) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$$

Varianza de una v.a. $X \sim \text{Ber}(p)$

Su varianza es

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p \cdot (1 - p) = p \cdot q$$

Su desviación típica es

$$\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{p \cdot (1 - p)}$$

```
#función de probabilidad  
dbinom(0, size = 1, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.75
```

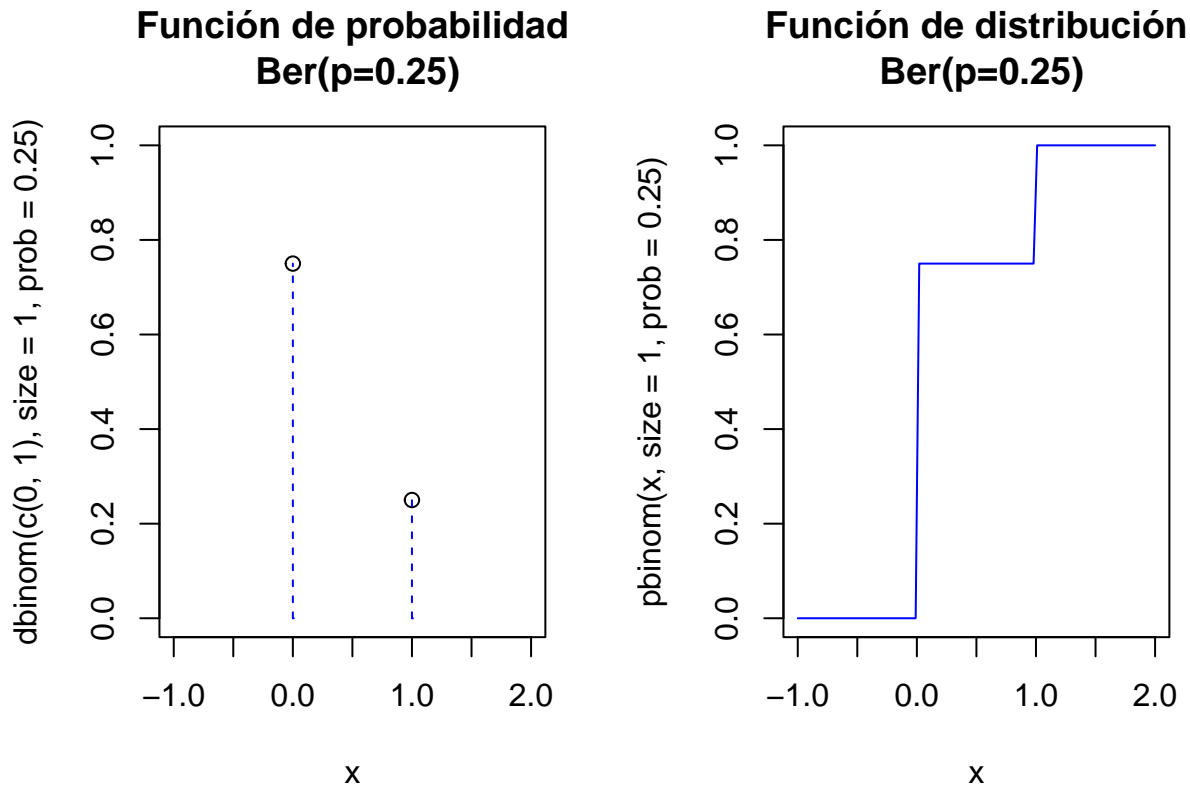
```
#función de probabilidad  
dbinom(1, size = 1, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.25
```

```
# muestra aleatoria simple de probabilidad Bernoulli  
rbinom(n = 20, size = 1, prob = 0.25)
```

```
## [1] 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0
```

```
# gráfico de la función de probabilidad y la de distribución de una Ber(p=0.25)  
{par(mfrow=c(1,2))  
plot(x=c(0,1),y=dbinom(c(0,1),size=1,prob=0.25),  
      ylim=c(0,1),xlim=c(-1,2),xlab="x",  
      main="Función de probabilidad\n Ber(p=0.25)")  
lines(x=c(0,0,1,1),y=c(0,0.75,0,0.25), type = "h", lty = 2,col="blue")  
curve(pbinom(x,size=1,prob=0.25),  
      xlim=c(-1,2),col="blue",  
      main="Función de distribución\n Ber(p=0.25)")  
par(mfrow=c(1,1))}
```



Distribución binomial

Si repetimos n veces de forma independiente un experimento Bernoulli de parámetro p . Se conoce a priori cuantas veces se tirará la moneda.

El espacio muestral Ω estará formado por cadenas E' s y F s de longitud n consideremos la v.a.

$$X(EFF \dots EEF) = \text{número de éxitos en la cadena}$$

Función de probabilidad de una binomial

$$P_X(x) \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{si en otro caso} \end{cases}$$

Función de distribución

Su función de distribución no tiene una fórmula cerrada. Hay que acumular la función de probabilidad:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^x P_X(i)$$

$$P_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } k < x < k+1 \\ \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} & \text{si } k \leq x < k+1 \\ 1 & \text{si } n \leq x \end{cases} \quad y \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Cuantas maneras distintas hay para elegir 5 jugadores en un conjunto de 6 jugadores. Todo el mundo dice `choose(6,5)`

```
## [1] 6
```

```
# con 10 jugadores el número de equipos de 5 distintos es bastante más grande
choose(10,5)
```

```
## [1] 252
```

```
# Y por ejemplo con un equipo de fútbol profesional que tiene en plantilla 22 jugadores (quitamos el portero)
choose(22,10)
```

```
## [1] 646646
```

Se denotará por

$$X \equiv B(n, p)$$

Obviamente se tiene que una bernoulli es una binomial con $n = 1$

$$B(1, p) \equiv Ber(p)$$

Esperanza de un X B(n,p)

Su esperanza es

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = n \cdot p$$

La esperanza de X^2 es

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = n \cdot p \cdot q + (n \cdot p)^2$$

Varianza de una X B(n,p)

Su varianza es

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Su desviación típica es

$$\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

La distribución Binomila en Python y R

Caáculos binomila con R

Veamos los cálculos con funciones de R para una v.a. X con distribución binomial B(n=10,p=0.25)

Si queremos calculo con R algún valor de la función de distribución como por ejemplo $F_X(0) = P(X \leq 0)$

```
pbinom(0, size = 10, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.05631351
```

si queremos por ejemplo $F_X(4) = P(X \leq 4)$

```
pbinom(4, size = 10, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.9218731
```

Sin embargo, si queremos calcular algún valor de la función de probabilidad como por ejemplo $P(X = 0)$

```
dbinom(0, size=10, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.05631351
```

o por ejemplo para $P(X = 4)$

```
dbinom(4, size=10, prob = 0.25)
```

```
## [1] 0.145998
```

Generación de muestras aleatorias con R

Generaremos una muestra aleatoria de 100 valores de una población $B(20, 0.5)$

```
# Repetir 100 veces el experimento lanzar una moneda 20 veces y contar el número de caras.
set.seed(2021)
rbinom(100, size = 20, prob = 0.5)
```

```
## [1] 10 12 11 9 11 11 11 9 12 15 6 12 11 10 12 8 10 12 14 10 8 14 9 9 10
## [26] 13 13 13 14 12 6 14 14 13 10 8 13 8 13 10 8 12 10 14 8 12 13 5 6 12
## [51] 10 11 7 10 9 8 10 9 12 12 6 10 7 9 12 7 7 11 9 6 6 11 7 13 7
## [76] 10 10 9 11 16 10 9 14 11 9 8 15 12 10 9 8 11 13 10 8 13 11 11 12 11
```

Ejemplo completo de distribución binomial

Tenemos una urna con 100 bolas de las cuales 40 son rojas y 60 blancas. Extraemos al azar una bola, anotamos su color y la devolvemos (la reponemos) a la urna. Supongamos que repetimos este proceso $n = 10$ reponiendo en cada ocasión la bola extraída. Consideremos la v.a. $X = \text{Número de bolas extraídas con reposición en } n = 10 \text{ repeticiones del mismo experimento Bernoulli}$. Bajo estas condiciones tenemos que repetimos $n = 10$ veces el mismo experimento Bernoulli con probabilidad de éxito (sacar bola roja) es

$$P(\text{Roja}) = P(\text{Exito}) = p = \frac{40}{100} = 0.4$$

Así que la variable $X = \text{número de bolas rojas extraídas de la urna con reposición en } n = 10 \text{ ocasiones}$ sigue una ley binomial $B(n = 10, p = 0.4)$

1. ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos exactamente 4 rojas?

Respuesta.- Utilizando la función de probabilidad tenemos que

$$P_X(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0.4^4 \cdot (1 - 0.4)^{10-4} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^6 = 0.2508227$$

```
dbinom(4, size = 10, prob = 0.4)
```

```
## [1] 0.2508227
```

2. ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos al menos 4 rojas?

Respuesta.- Al menos 4 rojas es $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$ es decir,

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \binom{10}{0} \cdot 0.4^0 \cdot (1 - 0.4)^{10-0} + \binom{10}{1} \cdot 0.4^1 \cdot (1 - 0.4)^{10-1} \\ &+ \binom{10}{2} \cdot 0.4^2 \cdot (1 - 0.4)^{10-2} + \binom{10}{3} \cdot 0.4^3 \cdot (1 - 0.4)^{10-3} \\ &= 0.3822806 \end{aligned}$$

```
pbinom(3,10,0.4)
```

```
## [1] 0.3822806
```

Así, $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.3822806 = 0.6177194$

```
1-pbinom(3,10,0.4)
```

```
## [1] 0.6177194
```

Aunque en estos casos el parámetro `lower.tail = FALSE` es sin duda nuestra mejor opción:

```
pbinom(3,10,0.4,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.6177194
```

3.- ¿Cuál es la probabilidad de que saquemos menos 3 rojas?

4.- ¿Cuál es el valor esperado del número de bolas rojas?

Respuesta.- Como X es una $B(10, 0.4)$ sabemos que

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0.4 = 4$$

5.- ¿Cuál es la desviación típica del número de bolas rojas? La varianza es

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 2.4$$

Y por lo tanto $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{2.4} = 1.5491933$

Distribución geométrica

- Repitamos un experimento Bernoulli de parámetro p , de forma independiente hasta obtener el primer éxito.
- Sea X la v.a. que cuenta el número de fracasos antes del primer éxito. Por ejemplo que hayamos tenido x fracasos será una cadena de x fracasos culminada con un éxito. Más concretamente

$$P(FFF, \dots FE) = P(F)^x \cdot P(E) = (1 - p)^x \cdot p = q^x \cdot p$$

Distribución geométrica

Su función de probabilidad es

$$PX(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1 - p)^x \cdot p & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La denotaremos por $Ge(p)$

Función de distribución

Calculemos $P(X \leq 3)$.

Por la propiedad de la probabilidad del suceso complementario tenemos que

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - P(X \geq 4)$$

Efectivamente, el evento tenemos que $X \leq 3$ es que hemos fracasado más de tres veces hasta conseguir el primer éxito; es decir hemos fracasado 4 o más veces, por lo tanto

$$X > 3 = X \geq 4 = FFFF$$

Ahora al ser los intentos sucesos independientes, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= P(FFFF) = P(F) \cdot P(F) \cdot P(F) \cdot P(F) \\ &= (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) = (1-p)^{3+1} \\ &= (1-p)^4 \end{aligned}$$

calculamos

$$F_X(3) = P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (1-p)^{3+1}$$

por lo que podemos generalizar a cualquier entero positivo $k = 0, 1, 2, \dots$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-p) & \text{si } k = 0 \leq x < 1 \\ 1 - (1-p)^2 & \text{si } k = 1 \leq x < 2 \\ 1 - (1-p)^3 & \text{si } k = 2 \leq x < 3 \\ 1 - (1-p)^{k+1} & \text{si } k \leq x < k+1 \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

notemos que si $k = 0, 1, 2, \dots$ el límite de la función de distribución es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_X(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - (1-p)^{k+1} = 1$$

ya que $0 < 1-p < 1$

La esperanza y la varianza de una distribución geométrica.

Esperanza de una v.a. $\text{Ge}(p)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (1-p)^x \cdot p \\ &= p \cdot (1-p) \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x-1} \\ &= p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{[1 - (1-p)]^2} \\ &= (1-p) \cdot \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

Valor $E(X^2)$ de una v.a. $Ge(p)$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot P_X(x) \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot (1-p)^x \cdot p \\
 &= \sum_{x=1}^{\infty} [x \cdot (x-1) + x] (1-p)^x \cdot p \\
 &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (x-1) \cdot (1-p)^x \cdot p + \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^x \cdot p \\
 &= (1-p)^2 \cdot p \cdot \sum_{x=2}^{\infty} x \cdot (x-1) \cdot (1-p)^{x-2} \\
 &\quad + (1-p) \cdot p \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x-1} \\
 &= p \cdot (1-p)^2 \frac{2}{[1-(1-p)]^3} + (1-p) \cdot p \frac{1}{[1-(1-p)]^2} \\
 &= p \cdot (1-p)^2 \frac{2}{p^3} + (1-p) \cdot p \frac{1}{p^2} \\
 &= \frac{2 \cdot (1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}
 \end{aligned}$$

Varianza de una v.a. $Ge(p)$

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
 &= \frac{2 \cdot (1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 \\
 &= \frac{2 \cdot (1-p)^2 + p \cdot (1-p) - (1-p)^2}{p^2} \\
 &= \frac{(1-p)^2 + p \cdot (1-p)}{p^2} \\
 &= \frac{1 - 2 \cdot p + p^2 + p - p^2}{p^2} \\
 &= \frac{1-p}{p^2}
 \end{aligned}$$

Propiedad de falta de memoria

Sea X una v.a. discreta con dominio $D_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ con $P(X=0) = p$ entonces X sigue una ley $Ge(p)$ si y sólo si

$$P(X > k+j \mid X \geq j) = P(X > k)$$

para todo $k, j = 0, 1, 2, 3, \dots$

Es decir, el número de veces que voy a fallar hasta el primer éxito no está condicionado por las veces que estamos probando. Por ejemplo es lo mismo lanzar 80 veces o lanzar 2 veces hasta el primer éxito.

Demostración.- Si es geométrica entonces el lado derecho de la igualdad es

$$P(X > k) = 1 - P(x \leq k) = 1 - (1 - (1 - p)^{k+1}) = (1 - p)^{k+1}$$

Luego

$$\begin{aligned} P(X > k + j | X \geq j) &= \frac{P(\{X > k + j\} \cap \{X \geq j\})}{P(X \geq j)} \\ &= \frac{P(X > k + j)}{P(X \geq j)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq k + j)}{1 - P(X \leq j - 1)} \\ &= \frac{1 - (1 - (1 - p)^{k+j+1})}{1 - (1 - (1 - p)^{j-1+1})} \\ &= \frac{(1 - p)^{k+j+1}}{(1 - p)^j} \\ &= (1 - p)^{k+1} \end{aligned}$$

Para demostrar el recíproco tomemos $j = 1$ y $k \geq 0$ entonces por la propiedad de la pérdida de memoria

$$P(X > k + 1 | X \geq 1) = P(X > k)$$

Como sabemos $P(X = 0) = p$ tenemos $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p$

Luego combinando las igualdades tenemos que

$$P(X < k + 1 | X \geq 1) = \frac{P(X > k + 1, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X > k + 1)}{P(X \geq 1)} = P(X > k)$$

Así podemos poner que

$$\begin{aligned} P(X > k + 1) &= P(X \geq 1) \cdot P(X > k) \\ &= (1 - p) \cdot P(X > k) \\ &= (1 - p) \cdot P(X > k) \end{aligned}$$

En general tenemos que

$$P(X > k + 1) = (1 - p) \cdot P(X > k)$$

del mismo modo para $j = 2$