Geometría I (MAT 113)

M. Sc. Willy Condori Equice

Contenido:

1. Axiomas de incidencia y orden
2. Axiomas sobre medición de segmentos
3. Axiomas sobre medición de ángulos
4. Congruencia
5. Teorema del ángulo externo
6. Axioma de las paralelas
7. Semejanza de Triángulos
8. El círculo
9. Funciones Trigonométricas
10. Area y Volumen

Bibliografía

1.- Joao Lucas Marques Barbosa, Geometría Euclidiana Plana.

2.- Moise, Geometría Moderna

3.- Gibson, Elementary Euclidean Geometry

Evaluación:

		Contenido	Fecha
Parcial 1	20	1, 2, 3	16/03
Parcial 2	20	3, 4, 5	
Parcial 3	20	5, 6, 7	
Parcial 4	20	7, 8, 9, 10	
Prácticas	20	1 por capítulo	
	100		

* Examen Recuperatorio: Se vuelve a tomar un parcial al final del semestre

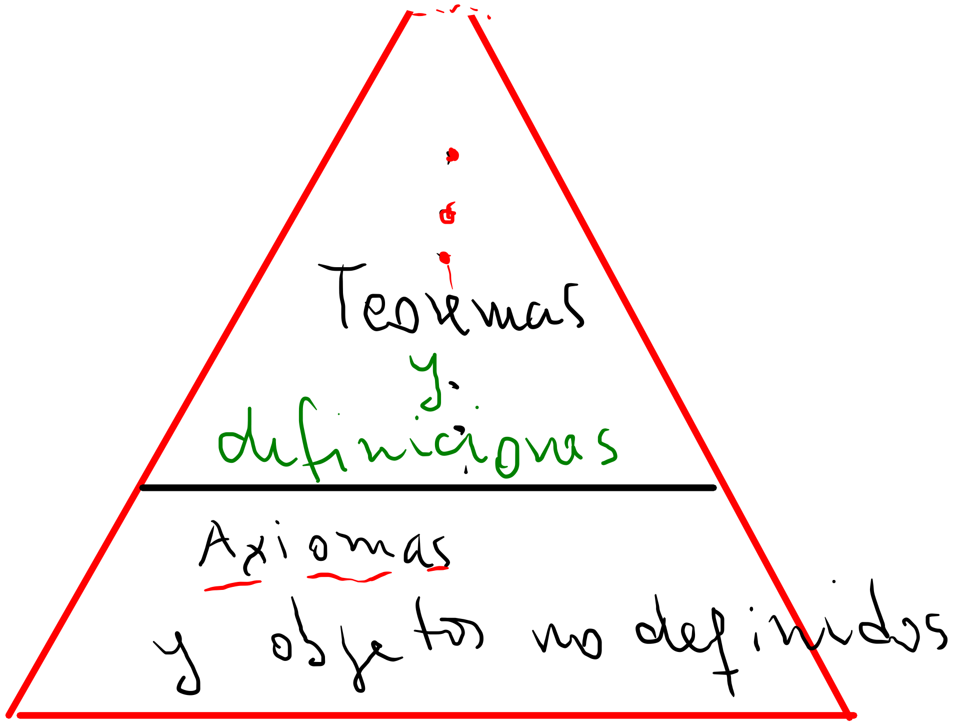
69760936 Celular del Docente

Teoría Matemática:

Teorema: Propiedad que admite demostración

Axioma: Propiedad cierta y aceptada sin demostración

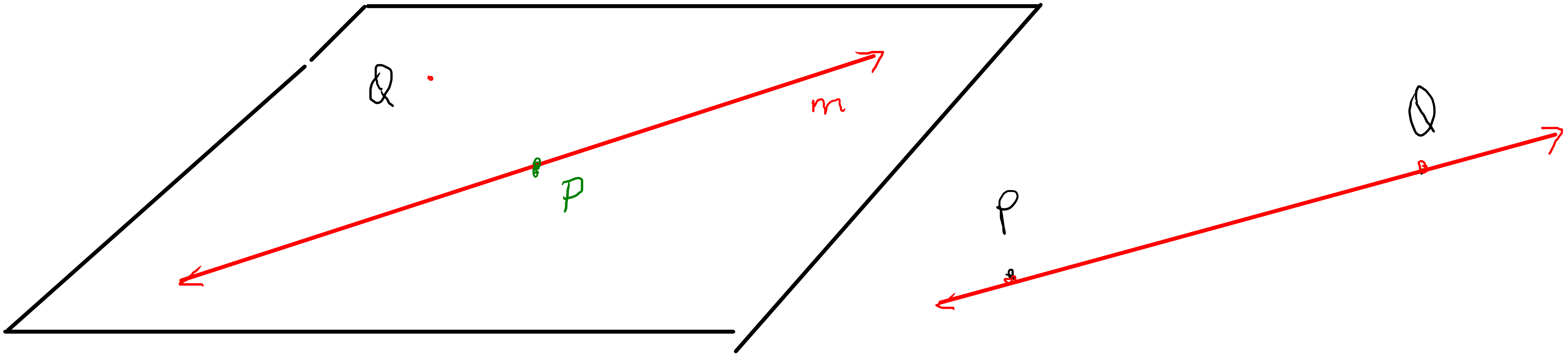
orden lógico



Cap. 1 Axiomas de incidencia y orden

Axioma I_1: Cualquiera que sea la recta existen puntos que pertenecen a la recta y puntos que no pertenecen a la recta

Axioma I_2 Dados dos puntos distintos existe una única recta que los contiene



Notación

Si P y Q son distintos

$\Rightarrow$ la recta PQ es la única recta que contiene a P y Q

o $\overleftrightarrow{PQ}$ o recta PQ

* Utilizamos letras mayúsculas para denotar puntos y minúsculas para denotar rectas.

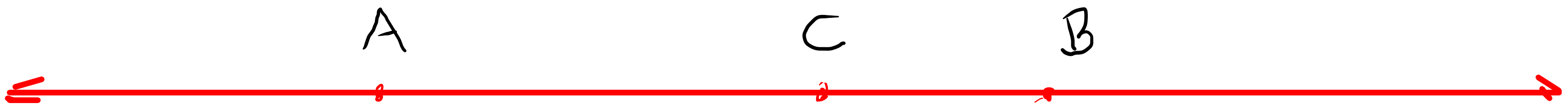
Proposición: Dos rectas distintas o no se intersectan o se intersectan en un único punto.

Dem

Sean m, n dos rectas distintas. Supongamos que m, n se intersectan. Si P, Q son puntos distintos donde m, n se intersectan entonces por I_2, existe una única recta que contiene a P y Q. Luego $m = n$. $\Rightarrow\Leftarrow$

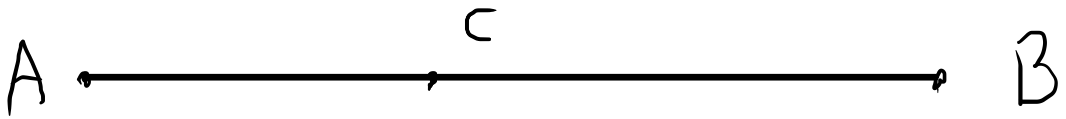
Por tanto, $P = Q$. $\square$

Axioma II, Dados tres puntos de una recta, uno y sólo uno de ellos se localiza entre los otros dos



Definición: (segmento AB) Dados los puntos A y B, el segmento AB es el conjunto de puntos que están entre A y B, y los puntos A y B. Los puntos A y B se dicen extremos del segmento

Notación segmento AB o $\overline{AB}$

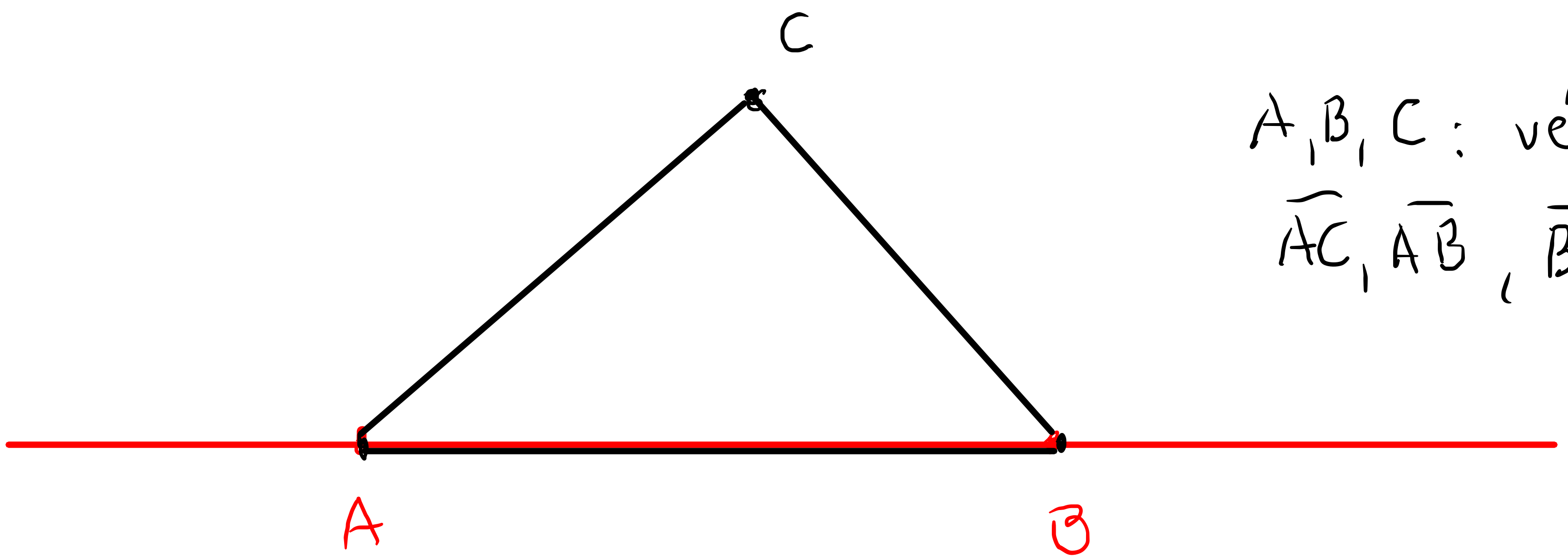


<u>OBS</u>: En segmento AB:

- A, B extremos, $A \in \overline{AB}$, $B \in \overline{AB}$
- Si C está entre A y $B \Rightarrow C \in \overline{AB}$

$$\overline{AB} = \underbrace{\{A, B\}}_{\text{extremos}} \cup \underbrace{\{C \,/\, C \text{ está entre } A \text{ y } B\}}_{\text{puntos interiores}}$$

Def: Dados tres puntos no colineales, La unión de los segmentos determinados por los tres puntos es un triángulo



A, B, C : vértices

$\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$: lados

A los puntos se les llama vértices del triángulo y a los segmentos lados del triángulo

Notación triángulo ABC o $\triangle ABC$

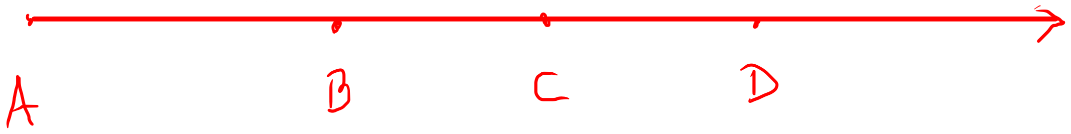
OBS: $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$

Def: Si A y B son puntos distintos, el conjunto formado por los puntos del segmento AB y por todos los puntos C tales que B está entre A y C, es la semirrecta de origen A, que contiene a B y la denotamos por S_{AB}.

OBS: $$S_{AB} = \overline{AB} \cup \{C \,/\, B \text{ está entre } A \text{ y } C\}$$

Notación: S_{AB} o $\overrightarrow{AB}$ o rayo AB

OBS: A: origen, B punto de referencia que determina una dirección



$$S_{AB} = S_{AD} = S_{AC}$$

Proposición:

a) $S_{AB} \cup S_{BA}$ es la recta AB $\left(S_{AB} \cup S_{BA} = \overleftrightarrow{AB} \right)$

b) $S_{AB} \cap S_{BA}$ = segmento AB

Dem: a) Sea m la recta AB. Es claro que

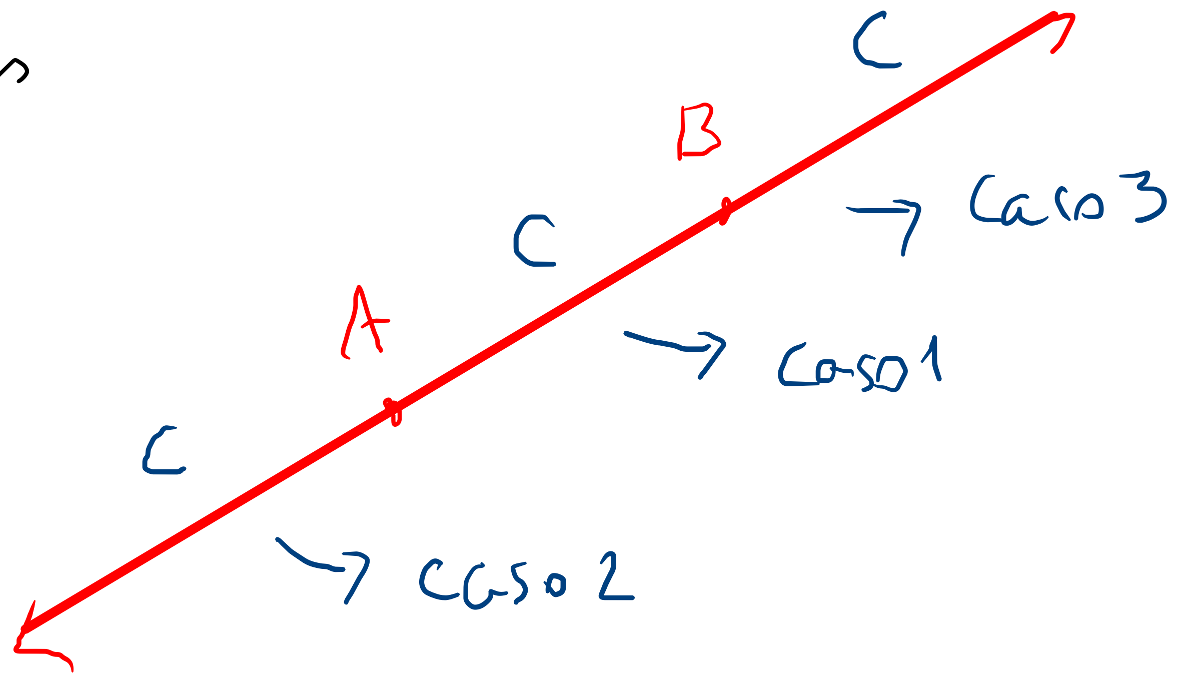
$$S_{AB} \subset m \;,\quad S_{BA} \subset m \;;$$

luego, $\underline{S_{AB} \cup S_{BA} \subset m}$. (1)

$\Big[$ $m \subset n \iff [A \in m \Rightarrow A \in n]$ para todo $A \in m$. $\quad \underline{m = n} \iff \underline{m \subset n}\,,\ \underline{n \subset m}$ $\Big]$

Por otro lado, si $C \in m$ entonces por I_1, existen 3 posibilidades:

1) C está entre A y B,
2) A está entre C y B,
3) B está entre A y C.



Si pasa 1 $\Rightarrow C \in \overline{AB} \Rightarrow C \in S_{AB} \Rightarrow C \in S_{AB} \cup S_{BA}$

Si pasa 2) $\Rightarrow C \in S_{BA} \Rightarrow C \in S_{AB} \cup S_{BA}$.

Si pasa 3) $\Rightarrow C \in S_{AB} \Rightarrow C \in S_{AB} \cup S_{BA}$.

(2)

Por tanto, $m \subset S_{AB} \cup S_{BA}$

En conclusión de 1) y 2), $\boxed{m = S_{AB} \cup S_{BA}.}$

b) Claramente, si $C \in \overline{AB} \Rightarrow C \in S_{AB}$, $C \in S_{BA}$

$\Rightarrow C \in S_{AB} \cap S_{BA}$ (1)

Por otra parte, si $C \in S_{AB} \cap S_{BA} \Rightarrow C \in S_{AB}$ y $C \in S_{BA}$.

Luego, $C \in \overline{AB}$ o B está entre A y C;

$C \in \overline{BA}$ o A está entre B y C.

[Si B está entre A y $C \Rightarrow$ no puede pasar

- $C \in \overline{AB}$
- A está entre $\cancel{B}$ y C $\Rightarrow\Leftarrow$ (pues $C \in S_{BA}$)]

Por tanto $C \in \overline{AB}$. (2)

En conclusión, $S_{AB} \cap S_{BA} = \overline{AB}$.

b) (Otra demostración) Pd. $S_{AB} \cap S_{BA} = \overline{AB}$

Claramente $\overline{AB} \subset S_{AB}$, $\overline{AB} \subset S_{BA}$; de donde

$$\overline{AB} \subset S_{AB} \cap S_{BA}. \quad (1)$$

Si $C \in S_{AB} \cap S_{BA}$ y suponemos que $C \notin \overline{AB}$, entonces

- B está entre A y C (pues $C \in S_{AB}$)
- A está entre B y C (pues $C \in S_{BA}$)

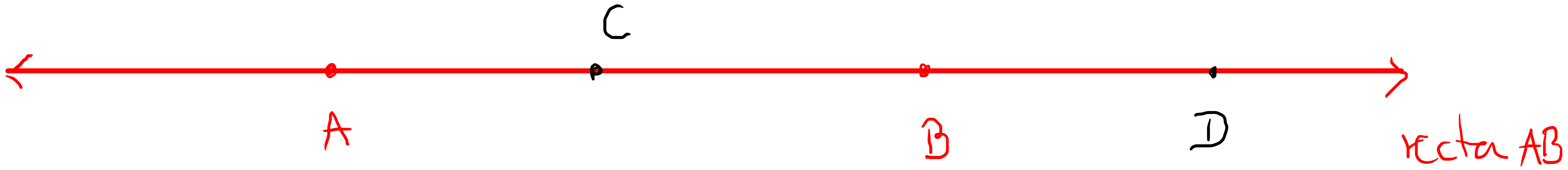
Axioma II_1 $\Rightarrow \Leftarrow$

Por tanto, $C \in \overline{AB}$, Luego, $S_{AB} \cap S_{BA} \subset \overline{AB}$ (2)

De 1) y 2), $S_{AB} \cap S_{BA} = \overline{AB}$. $\square$

Axioma II_2: Dados dos puntos A y B, siempre existen

- un punto C entre A y B
- un punto D tal que B está entre A y D.



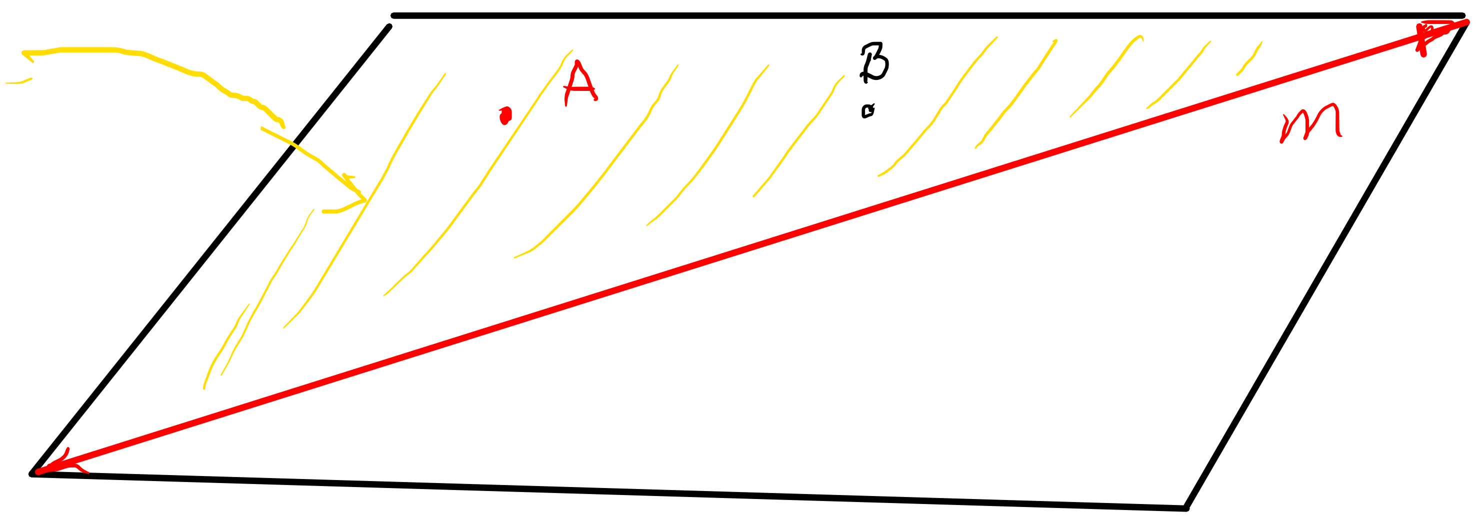
OBS El axioma dice:

$$S_{AD} = \overline{AB} \cup \{ D \,/\, B \text{ está entre } A \text{ y } D \}$$

de partes no vacías.

Def: Sea m una recta y A un punto t.q. $A \notin m$. El conjunto formado por los puntos de m y por todos los puntos B tales que A y B están en un mismo lado de la recta m es llamado semiplano determinado por m y conteniendo a A.

Notación: P_{mA}



OBS:

- A y B están del mismo lado de la recta m si $\overline{AB} \cap m = \emptyset$ $\quad (A, B \notin m)$
- $P_{mA} = m \cup \{B \,/\, \overline{AB} \cap m = \emptyset\}$.

Axioma II_3 Una recta m determina exactamente dos semiplanos distintos cuya intersección es la recta m.