Guía 1

1. **Suponga que a, b son números reales no nulos simultáneamente. Hallar números reales c y d tales que,**

$$\boldsymbol{\frac{1}{a+bi} = c + di}$$

Respuesta.- Hallemos $c \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{a+bi} & = & c+di \\ \dfrac{1}{a+bi} - di & = & c + di - di \\ c & = & \dfrac{1}{a+bi} - di \end{array}$$

Ya que, $i^4 = i^3 i = (-i)i = -(i^2) = -(-1) = 1$ y

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i,$$

podemos hallamos $d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{a+bi} & = & c+di \\ di & = & \dfrac{1}{a+bi} - c \\ di \cdot i^3 & = & i^3 \left(\dfrac{1}{a+bi} - c \right) \\ d & = & \dfrac{-i}{a+bi} + ci \end{array}$$

Así, $c = \dfrac{1}{a+bi} - di$; $d = \dfrac{-i}{a+bi} + ci$.

2. **Hallar dos raíces cuadradas distintas de i.**

Respuesta.- $x^2 - 1 = 0$ y $x^2 - 4 = 0$.

3. **Probar que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.**

Demostración.- Sea $\alpha = a + bi$ y $\beta = c + di$, entonces por definición de números complejos para la adición, tenemos que,

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & (a+bi) + (c+di) \\ & = & (c+di) + (a+bi) \\ & = & \beta + \alpha \in \mathbb{C} \end{array}$$

De donde se demuestra la proposición dada.

4. **Probar que $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$, para todo $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$.**

Demostración.- Sea $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ y $\lambda = e + fi$ entonces,

$$\begin{array}{rcl} (\alpha + \beta) + \lambda & = & [(a+bi) + (c+di)] + (e+fi) \\ & = & (a+bi) + [(c+di) + (e+fi)] \\ & = & \beta + (\alpha + \lambda) \end{array}$$

Así, $(\alpha + \beta) + \lambda = \beta + (\alpha + \lambda)$.

5. **Probar que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, existe un único $b \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha + \beta = 0$.**

Demostración.-