Calculo diferencial e integral tomo 1

Nikolai Piskunov

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1

Número, variable y función

1.1. Números reales. Representación de número reales por medio de puntos en el eje numérico

Definición 1.1 *El número racional puede expresarse como la razón* $\dfrac{p}{q}$ *de dos números enteros* p *y* q*.*
El número entero p *se puede considerar como la razón de dos números enteros* $\dfrac{p}{1}$*.*

Definición 1.2 *Los números en forma de fracciones decimales indefinidas no periódicas, se denominan números irracionales.*

Definición 1.3 *Para cualquier par de números reales* x *e* y *existen una correlación, y sólo una, de las siguientes:*

$$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y$$

Teorema 1.1 *Todo número irracional* α *se puede expresar con cualquier grado de precisión por medio de números racionales.*

Demostración.- *En efecto, siendo el número irracional* $\alpha > 0$*, calculamos* α *con un error no mayor de* $\dfrac{1}{n}$ *(por ejemplo,, de* $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}$*, etc.)*
Cualquiera que sea el número α*, está comprendido entre dos números enteros consecutivos* N *y* $N+1$*. Dividamos el segmento comprendido entre* N *y* $N+1$ *en* n *partes, entonces el número* α *resulta comprendido entre los número racionales* $N + \dfrac{m}{n}$ *y* $N + \dfrac{m+1}{n}$*. Dado que la diferencia entre estos números es* $\dfrac{1}{n}$*, cada uno de ellos expresa* α *con un grado de precisión predeterminado: El primero por defecto y el segundo por exceso.*

1.2. Valor absoluto del número real

Definición 1.4 *Un número real no negativo, que satisfface las condiciones:*

$$|x| = x, \ si \ x \geq 0;$$

$$|x| = -x, \ si \ x < 0$$

se llama valor absoluto (o módulo) de un número real x.

Propiedad 1.1 *El valor absoluto de la suma albegraica de varios números reales no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Demostración.- Sea $x + y \geq 0$, entonces:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

(ya que $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$).
Supongamos ahora que $x + y < 0$, entonces:

$$|x + y| = -/x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|,$$

como se trataba de demostrar.

Propiedad 1.2 *El valor absoluto de la diferencia de dos números no es mejor que la diferencia de los valores absolutos del minuendo y sustraendo:*

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

Demostración Supongamos que $x - y = x$. Entonces $x = y + z$, y según lo demostrado anteriormente, se tiene:

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |z| + |x - y|,$$

de donde

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

como se trataba de demostrar.

Propiedad 1.3 *El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores:*

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

Propiedad 1.4 *El valor absoluto del cociente es igual al cociente de dividir el valor absoluto del dividendo por el del divisor:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

1.4. Campo de variación de la magnitud variable

Definición 1.5 *El conjunto de todos los valores numéricos de la masgnitud variable se denomina campo de variación de la variable.*

1.5. Variable ordenada. Variable crecientes y decrecientes , variable acotada

Definición 1.6 *La variable se denomina creciente, si cada valor posterior es mayor que el anterior. Por el contrario, si cada valor posterior es menor que el anterior, la variable se denomina decreciente.*

Definición 1.7 *La variable x se denomina magnitud acotada, si existe un número constante $M > 0$ tal que, a partir de cierto valor, todos los posteriores satisfagan la condición.*

$$-M \leq x \leq M, \quad \textit{es decir}, \quad |x| \leq M$$

1.6. Función

Definición 1.8 *Si a cada valor de la variable x, perteneciente a cierto campo, le corresponde un sólo valor determinado de otra variable y, entonces ésta será función de x, y podemos escribir simbólicamente:*

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad \textit{etc.}$$

La dependencia que existe entre las variables x e y se llaman funcional.

Definición 1.9 *El conjunto de los valores de x para los cuales se terminan los valores de la función y, en virtud de la ley $f(x)$, se llama* ***dominio de definición de la función***

Definición 1.10 *La función $y = f(x)$ se llama creciente, cuando a un mayor valor del argumento x corresponde un mayor valor de la función. De modo análogo se define la función decreciente.*

1.8. Funciones elementales fundamentales

Definición 1.11 *La función $y = f(x)$ se denomina periódica, si existe un número constante C tal que, al sumario (o restario) al argumento x, el valor de la función no se altere, $f(x + C) = f(x)$. El valor mínimo de este número constante se denomina periodo de la función.*

Definición 1.12 *La función que puede ser dada por la fórmula de la forma $y = f(x)$, donde el segundo miembro de la igualdad está compuesto de funciones elementales fundamentales y constantes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y función de función, se llama* ***función elemental****.*

La función que no es algebraica se llama transcendentes: $y = \cos x \quad y = 10^x$

1.9. Ejercicios para el capítulo 1

1. Dada la función $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Comprobar que $f(1) = 3$, $f(3) = 23$.

Repuesta.-

- $f(1) = 1^2 + 6 \cdot 1 - 4 = 3.$
- $f(3) = 3^2 + 6 \cdot 3 - 4 = 9 + 18 - 4 = 23.$

2. $f(x) = x^2 + 1$. Calcular los valores.

a) $f(4) = 16 + 1 = 17$

b) $f(\sqrt{2} = \sqrt{2}^2 + 1$

c) $f(a + 1) = (a + 1)^2 + 1 = a^2 + 2a + 1 + 1 = a^2 + 2a + 2$

d) $f(a) + 1 = a^2 + 1 + 1 = a^2 + 2$

e) $f(a^2) = a^4 + 1$

f) $f[f(a)]^2 = (a^2+1)^2 = a^4 + 2a^2 + 1$

g) $f(2a) = (2a)^2 + 1 = 4a^2 + 1$

3. $p(x) = \dfrac{x-1}{3x+5}$. Escribir las expresiones $p\left(\dfrac{1}{x}\right)$ y $\dfrac{1}{p(x)}$

Repuesta.-

- $p\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{3\dfrac{1}{x}+5} = \dfrac{1-x}{5x+3}$
- $\dfrac{1}{p(x)} = \dfrac{1}{\dfrac{x-1}{3x+5}} = \dfrac{3x+5}{x+1}$

4. $f(x) = \sqrt{x^2+4}$. Escríbanse las expresiones $f(2x)$ y $f(0)$.

Repuesta.-

- $f(2x) = \sqrt{4x^2+4} = 2\sqrt{x^2+1}$.
- $f(0) = \sqrt{4} = 2$.

5. $f(\theta) = \text{tg}(\theta)$. Comprobar la igualdad $f(2\theta) = \dfrac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.

Repuesta.- $f(2\theta) = \text{tg}(2\theta) = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\cdot\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} =$

$$\frac{2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta}$$

6. $f(x) = \log\dfrac{1-x}{1+x}$. Comprobar la igualdad $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$

Repuesta.-

$$f(a) = \log\frac{1-a}{1+a} \qquad f(b) = \frac{1-b}{1+b}$$

$$f(a) + f(b) = \log\frac{1-a}{1+a} + \log\frac{1-b}{1+b} = \log\frac{(1-a)(a-b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = \log\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}} = \frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b} = \log\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$$

7. $f(x) = \log x$; $g(x) = x^3$. Escribir las expresiones:

a) $f[g(2)] = f(2^3) = 3\log 2$ por propiedades de log

b) $f[g(a)] = f(a^3) = 3\log a$

c) $g[f(x)] = g(\log x) = (\log x)^3$

8. Hallar el dominio natural de definición de la función $y = 2x^2 + 1$.

Repuesta.- El dominio se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$

9. Hallar los dominios naturales de definición de las funciones:

a) $\sqrt{1-x^2}$

Repuesta.- El dominio viene dado por $1 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow |x| \leq 1$ por lo tanto $D_f = \{x/ -1 \leq x \leq 1\}$

b) $\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$

Respuesta.- Sea $3 + x \geq 0$ y $7 - x \geq 0$ entonces $-3 \leq x \leq 7$

c) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[5]{x-b}$

Respuesta.- Dado que la raíz de un número impar viene dado para todo x entonces $D_f\{x/\forall x \in \mathbb{R}\}$

d) $\dfrac{a+x}{a-x}$

Respuesta.- El dominio viene dado por $x \in \mathbb{R}, x \neq a$

e) $arcsen^2 x$

Respuesta.- Ya que $\sin x$ toma los valores de $-1, 1$ entonces $D_f\{x/ -1 \leq x \leq 1\}$

f) $y = \log x$

Respuesta.- La función logarítmica solo esta dado para todo $x > 0$

g) $y = a^x$

Respuesta.- Es fácil observar que la función se cumple para todo numero real x.

10.