1

Algunas distribuciones discretas de probabilidad

1.2. La distribución binomial

Llámese éxito a la ocurrencia del evento y fracaso a su no ocurrencia.

Las dos suposiciones claves para la distribución binomial son:

I. La probabilidad de éxito p permanece constante para cada ensayo.

II. Los n ensayos son independientes entre sí.

Para obtener la función de probabilidad de la distribución binomial, primero se determina la probabilidad de tener, en n ensayos, x éxitos consecutivos seguidos de n-x fracasos consecutivos. Dado que, por hipótesis, los n ensayos son independientes de la definición 2.15, se tiene:

$$p \cdot p \cdots p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p) = p^x (1-p)^{n-x}$$

Definición 1.1 (Distribución binomial con función de probabilidad) *Sea X una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n ensayos y p la probabilidad de éxito con cualquiera de éstos. Se dice entonces que X tiene una distribución binomial con función de probabilidad.*

$$p(x;n,p) \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\ldots,n. \\ \\ 0 \textit{ para cualquier otro valor.} & 0 \leq p \leq 1. \textit{ para } n \textit{ entero.} \end{cases}$$

El nombre distribución binomial proviene del hecho de que los valores de $p(x;n,p)$ para $x = 1,2,\ldots,n$ son los términos sucesivos de la expansión binomial de $[(1-p)+p]^n$; esto es,

$$\begin{aligned} [(1-p)+p]^n &= (1-p)^n + n(1-p)^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}(1-p)^{n-2}p^2 + \cdots + p^n \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(x-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} p(x;n,p) \end{aligned}$$

Pero dado que $[(1-p)+p]^n = 1$ y $p(x;n,p) \geq 0$ para $x = 0,1,2,\ldots n$, este hecho también verifica que $p(x;n,p)$ es una función de probabilidad.

La probabilidad de que una variable aleatoria X sea menor o igual a un valor específico de x, se determina por la **función de distribución acumulativa**.

$$P(X \leq x) = F(x;n,p) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Nótese que si $n = 1$, la función de probabilidad binomial se deduce a

$$p(x;n,p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x = 0,1 \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

Que es la **función de probabilidad de la distribución puntual o Bernoulli.**

Por definición 3.8, el primer momento alrededor del cero de la variable aleatoria binomial X es el valor esperado de X.

$$\begin{aligned} E(X) &= x\sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x(1-p)^{n-x} \\ &= x\sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x(1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(n-x)!(x-1)!} p^x(1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

en donde se ha escrito la suma desde uno hasta n, dado que cuando $x = 0$ el primer término es cero y se cancela la x del numerador con la x en $x!$. Factorizando n y p, se tiene:

$$E(X) = np\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

Si $y = x - 1$ y $m = n - 1$, entonces:

$$E(X) = np\sum_{x=1}^{n} \frac{m!}{(m-y)!y!} p^y(1-p)^{n-y}$$

De donde se sabe que $p(y;m,p) = \dfrac{m!}{(m-y)!y!} p^y(1-p)^{n-y}$ es la función de probabilidad de una variable aleatoria binomial Y con parámetros $m = n - 1$ y p; de ésta manera $\sum_{y=0}^{m} p(y;m,p) = 1$ y **la media de una variable aleatoria binomial es**:

$$E(X) = \mu = np.$$

Para obtener la varianza, se necesita el segundo momento alrededor de cero, $\mu_2^{'}$, o:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 p(x;n,p)$$

pero, e el término $x^2/x!$ se cancelará una sola x en el numerador, y la que resta evitará que la suma se manipule de la misma forma en que se determinó la media. La alternativa es escribir x^2 como:

$$x^2 = x(x-1) + x;$$

de esta manera se tiene:

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X).$$

Dado que $E(X)$ ya se ha determinado, puede usarse el mismo procedimiento para evaluar $E(X(X-1))$:

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(n-x)(x-2)!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!}p^{x-2}(1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Sea $y = x-2$ y $m = n-2$, entonces:

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{(m-y)y!}p^y(1-p)^{m-y} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} p(y;m,p) \\
&= n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

Así,

$$E(X^2) = \mu_2^{'} = n(n-1)p^2 + np$$

De esta manera, la **varianza de una variable aleatoria binomial** es:

$$\boxed{Var(X) = \mu_2^{'} - \mu^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np[(n-1)p + 1 - np] = np(1-p).}$$

Para obtener el tercer momento alrededor del cero, se determina $E[X(X-1)(X-2)]$ dado que:

$$E[X(X-1)(X-2)] = \mu_3^{'} - 3\mu_2^{'} + 2\mu$$

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)(X-2)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)(x-2)\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=3}^{n} \frac{n!}{(n-x)!(x-3)!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 \textstyle\sum_{x=3}^{n} \displaystyle\frac{(n-3)!}{(n-x)!(x-3)!}p^{x-3}(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 \textstyle\sum_{x=3}^{n} \displaystyle\frac{m!}{(m-y)!y!}p^y(1-p)^{m-y} \\
&= n(n-1)(n-2)p^3
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \mu_3^{'} - 3\mu_2^{'} + 2\mu &= n(n-1)(n-2)p^3 \\ \mu_3^{'} &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3[n(n-1)p^2 + np] - 2np \\ &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np \end{aligned}$$

El tercero momento central μ_3 puede ser determinado por $\mu_3 = \mu_3^{'} - 3\mu\mu_2^{'} + 2\mu^3$.

$$\mu_3 = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np - 3np[n(n-1)p^2 + np] + 2n^3p^3$$

Lo que se traduce como:

$$\mu_3 = np(1-p)(1-2p)$$

Por tanto de $\alpha_3 = \dfrac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$ el tercer momento estandarizado de la distribución binomial es:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{np(1-p)(1-2p)}{[np(1-p)]^{3/2}} \\ &= \frac{np(1-p)(1-2p)}{np(1-p)[np(1-p)]^{1/2}} \\ &= \frac{1-2p}{[np(1-p)]^{1/2}} \end{aligned}$$

De manera similar, para el cuarto momento alrededor del cero se evalúa $E[X(X-1)(X-2)(X-3)]$ dado que:

$$E[X(X-1)(X-2)(X-3)] = \mu_4^{'} - 6\mu_3^{'} + 11\mu_2^{'} - 6\mu.$$

es decir,

$$\begin{aligned} E[X(X-1)(X-2)(X-3)] &= \sum_{x=4}^{n} x(x-1)(x-2)(x-3) \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 \sum_{x=4}^{n} \frac{(n-4)!}{(n-x)!(x-4)!} p^{x-4} (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{(m-y)!y!} p^y (1-p)^{m-y} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 \end{aligned}$$

Sustituir en