1

Derivadas

Definición 1.1 La función f es **diferenciable en a** si existe el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En este caso, dicho límite se presenta mediante $f'(a)$ y se denomina la derivada de f en a. (Diremos también que f es diferenciable si f es diferenciable en a para todo a del dominio de f.)

La derivada f' son representados a menudo mediante

$$\frac{df(x)}{dx}, \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

Recordemos que la diferenciabilidad se supone que es una mejora respecto a la simple continuidad. Esto lo demuestran los numerosos ejemplos de funciones que son continuas, pero no diferenciables; sin embargo, hay que destacar un punto importante:

Teorema 1.1 Si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en a.

Demostración.-

$$\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right] = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

La ecuación $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = 0$ es equivalente a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; así, f es continua en a.

■

Es muy importante recordar el Teorema 1, e igualmente importante recordar que el recíproco no es cierto. Una función diferenciable es continua, pero una función continua no necesariamente es diferenciable.

Las distintas funciones $f^{((k)}$, para $k \leq 2$ se denominan generalmente derivadas de orden superior de f. Y en la notación se tiene

$$\frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx} \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

1.1 Problemas

1 (a) Demuestre, aplicando directamente la definición, que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$ para $a \neq 0$.

Demostración.- Por definición se tiene

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h \to a} \frac{-h}{a(a+h)h} = -\frac{1}{a^2}, \quad \text{siempre que } x \neq 0.$$

(b) Demuestre que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, 1/a)$ sólo corta a la gráfica de f en este punto.

Demostración.- La pendiente de la tangente cuando $x = a$ es $-\dfrac{1}{a^2}$, de donde la ecuación de la recta tangente es,

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) \quad \Rightarrow \quad a^2y - a = -x + a \quad \Rightarrow \quad a^2y + x = 2a.$$

Luego $y = \dfrac{1}{x}$ ya que necesitamos encontrar el punto de intersección, y en consecuencia,

$$a^2\frac{1}{x} + x = 2a \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a$$

Por lo tanto, el único punto de intersección será $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$.

2 (a) Demuestre que si $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(a) = -2/a_3$ para $a \neq 0$.

Demostración.- Por definición tenemos,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a^2-(a+h)^2}{a^2(a+h)^2}}{h} = \lim_{h \to a} \frac{-h(2a+h)}{ha^2(a+h)^2} = -\frac{2}{a^3}, \quad \text{siempre que } x \neq 0.$$

(b) Demuestre que la recta tangente a f en el punto $(a, 1/a^2)$ corta a f en otro punto, que se encuentra en el lado opuesto del eje vertical.

Demostración.- Ya que $f'(a) = -\dfrac{2}{a^3}$ que representa la pendiente de la tangente entonces la ecuación de la tangente estará dada para $(a, 1/a^2)$ por,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{a^3}(x-a) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}$$

luego resolviendo para x e y sabiendo que $y = \dfrac{1}{x^2}$ tenemos,

$$x_1 = a, \quad x_2 = -\frac{a}{2} \qquad \text{e} \qquad y_1 = \frac{1}{a^2}, \quad y_2 = \frac{4}{a^2}.$$

Por lo que la tangente intersecta a la f en $(a, 1/a^2)$ y en $(-a/2, 4/a^2)$. Así estos puntos son apuestos al eje vertical.

3 Demuestre que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = 1/\left(2\sqrt{a}\right)$, para $a > 0$.

Demostración.- Por definición,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}} = \lim_{a \to 0} \frac{a+h-a}{h\sqrt{a+h}\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

para $a > 0$.

4 Para cada número natural n, sea $S_n(x) = x^n$. Recordando que $S_1'(x) = 1, S_2'(x) = 2x$, y que $S_3'(x) = 3x^2$, encuentre una fórmula para $X_n'(x)$. Demuestre que la fórmula es correcta.

Demostración.- Usando el teorema del binomio se tiene,

$$\begin{aligned}
S_n'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(x^{n-j}h^j\right) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h\left[\displaystyle\sum_{h \to 0} \binom{n}{j} x^{n-j}h^{j-1}\right]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1}h^{1-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h^{2-1} + \ldots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1}\right] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} x^{n-2}h^{2-1} + \ldots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1}\right] \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

5 Halle f' si $f(x) = [x]$.

Respuesta.- Sea x un número no entero, entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[x+h] - [x]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Luego si x es un número entero, entonces por el límite por la izquierda se tiene,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{[x+h] - [h]}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{h} = \infty$$

por último si x es un número entero, entonces por el límite por la derecha se tiene,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{[x+h] - [x]}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0}{h} = 0.$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0,\ \forall x \notin \mathbb{Z}$ y $f'(x) =$ no existe, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

6 Demuestre, aplicando la definición:

(a) si $g(x) = f(x) + c$, entonces $g'(x) = f'(x)$.

Demostración.- Por definición se tiene,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + c - [f(x) - c]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

(b) si $g(x) = cf(x)$, entonces $g'(x) = cf'(x)$.

Demostración.- Por definición,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = cf'(x).$$

7 Suponga que $f(x) = x^3$.

(a) ¿Cuál es el valor de $f'(9), f'(25), f'(36)$?.

Respuesta.- Se sabe que $f'(x) = x^n = nx^{n-1}$ por lo que

$$f'(x) = 3x^2$$

Así,

$$\begin{array}{rcccl} f'(9) & = & 3\cdot 9^2 & = & 243. \\ f'(25) & = & 3\cdot 25^2 & = & 1875. \\ f'(36) & = & 3\cdot 36^2 & = & 3888. \end{array}$$

(b) ¿Y el valor de $f'\left(3^2\right), f'\left(5^2\right), f'\left(6^2\right)$?.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 3x^2$, entonces

$$\begin{array}{rcccl} f'\left(3^2\right) & = & 3\cdot\left(3^2\right)^2 & = & 243. \\ f'\left(5^2\right) & = & 3\cdot\left(5^2\right)^2 & = & 1875. \\ f'\left(6^2\right) & = & 3\cdot\left(6^2\right)^2 & = & 3888. \end{array}$$

(c) Calcule $f'\left(a^2\right), f'\left(x^2\right)$. Si no encuentra este problema trivial es que no tiene en cuenta una cuestión muy importante: $f'(x^2)$ significa la derivada de f en el punto que denominamos x^2; no es la derivada en el punto x de la función $g(x) = f\left(x^2\right)$.

Respuesta.- Ya que $f'(x) = 3x^2$, entonces

$$\begin{array}{rcccl} f'\left(a^2\right) & = & 3\left(a^2\right)^2 & = & 3a^4 \\ f'\left(x^2\right) & = & 3\left(x^2\right)^2 & = & 3x^4 \end{array}$$

(d) Para aclarar la cuestión anterior. Si $f(x) = x^3$, compare $f'\left(x^2\right)$ y $g'(x)$ donde $g(x) = f\left(x^2\right)$.

Respuesta.- Es $f'\left(x^2\right) = 3\left(x^2\right)^2 = 3x^4$, pero

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)^2 - f\left(x^2\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x-h)^2\right]^3 - \left(x^2\right)^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(6x^5 + 15x^5h + 20x^3h^2 + 15x^2h^3 + 6xh^4 + h^5\right)}{h} \\
&= 6x^5.
\end{aligned}$$

8 (a) Suponga que $g(x) = f(x+c)$. Demuestre (partiendo de la definición) que $g'(x) = f'(x+c)$. Dibuje un esquema para ilustrarlo. Para resolver el problema debe escribir las definiciones de $g'(x)$ y $f'(x+c)$ correctamente. El objetivo del Problema 7 era convencerle de que aunque este problema es fácil no se trata de una trivialidad, y que hay algo que debe demostrarse: no se puede simplemente poner primas en la ecuación $g(x) = f(x+c)$.

Demostración.- Por el hecho de que $g(x) = f(x+c)$ y por definición de diferencia tenemos,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left[(x+c)+h\right] - f(x-c)}{h} = f'(x+c).$$

(b) Con el objeto de enfatizar el anterior punto. Demuestre que si $g(x) = f(cx)$, entonces $g(x) = c \cdot f'(cx)$. Intente también visualizar gráficamente por qué esta igualdad es cierta.

Demostración.- Por el hecho de que $g(x) = f(cx)$ y por definición de diferencia se tiene,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(cx+ch) - f(cx)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c\left[f(cx+ch) - f(cx)\right]}{ch}
\end{aligned}$$

Sea $ch = k$ de donde

$$c \lim_{k\to 0} \frac{f(cx+k) - f(cx)}{k} \quad \Rightarrow \quad cf'(cx).$$

(c) Suponga que f es diferenciable y periódica, con periodo a (por ejemplo, $f(x+a) = f(x)$) para todo x). Demuestre que f' es también periódica.

Demostración.- Por hipótesis tenemos,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left[(x+a)+h\right] - f(x-a)}{h} = f'(x+a).$$

9 Halle $f'(x)$ y también $f'(x+3)$ en los siguientes casos. Hay que ser muy metódico para no cometer un error en algún paso.

(a) $f(x) = (x+3)^5$.

Respuesta.- si $g(x) = x^5$, entonces $g'(x) = 5x^4$. Ahora, $f(x) = g(x+3)$ por tanto

$$f'(x) = g'(x+3) = 5(x+3)^4 \quad \text{y} \quad f'(x+3) = 5[(x+3)+3]^4 = 5(x+6)^4.$$

(b) $f(x+3) = x^5$.

Respuesta.- Sea $t = x+3 \;\Rightarrow\; x = t-3$, entonces

$$f(t) = (t-3)^5.$$

De donde, $f(x) = (x-3)^5$.

Si $g(x) = x^5$, entonces $g'(x) = 5x^4$. Ahora, $f(x) = g(x-3)$, por tanto

$$f'(x) = 5(x-3)^4 \qquad \text{y} \qquad f'(x+3) = 5[(x+3)-3]^4 = 5x^4.$$

(c) $f(x+3) = (x+5)^7$.

Respuesta.- Sea $t = x+3$, de donde $x = t-3$, entonces

$$f(t) = [(t-3)+5]^7 = (t+2)^7.$$

Podemos reescribir esta última función como, $f(x) = (x+2)^7$.

Sea $g(x) = x^7$ que implica $g'(x) = 7x^6$, por lo que,

$$f'(x) = g'(x+2) = 7(x+2)^6 \qquad \text{y} \qquad f'(x+3) = g'(x+3+2) = 7(x+5)^6.$$

10 Halle $f'(x)$ si $f(x) = g(t+x)$, y si $f(t) = g(t+x)$. Las respuestas no son idénticas.

Respuesta.- Por definición e hipótesis,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+x+h)-g(t+x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g\left[(t+x)+h\right]-g(t+x)}{h} = g'(t+x).$$

Por otro lado,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h+x)-f(x+x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(2x+h)-f(2x)}{h} = g'(2x).$$

11 (a) Demuestre que Galileo se equivocó: si un cuerpo cae una distancia $s(t)$ en t segundos, y s' es proporcional a s, entonces s no puede ser una función de la forma $s(t) = ct^2$.

Demostración.- Si x es una función de la forma $s(t) = ct^2$ entonces $s'(t) = 2ct$. Luego sustituyendo el valor $t = \sqrt{\dfrac{s}{c}}$, se tiene

$$s'(t) = 2c\sqrt{\frac{s}{c}} = 2\sqrt{cs}.$$

Dado que $s'(t)$ es directamente proporcional a $\sqrt{s(t)}$ entonces contradice la afirmación obtenida.

(b) Demuestre que las siguientes afirmaciones sobre s son ciertas, si $s(t) = (a/2)t^2$ (la primera afirmación demostrará por qué hemos hecho el cambio de c a $a/2$):

(i) $s''(t) = a$ (la aceleración es constante).

Demostración.- Sea $s(t) = \dfrac{a}{2}t^2$, entonces

$$s'(t) = \frac{a}{2}\lim_{g\to 0}\frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{a}{2}(2t) = at.$$

Así,

$$s''(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s'(t+h) - s'(t)}{h} = a\lim_{h\to 0}\frac{(t+h) - t}{h} = a.$$

Donde vemos que la aceleración es constante.

(ii) $[s'(t)]^2 = 2as(t)$.

Demostración.- Sea $t^2 = \dfrac{2s(t)}{a}$, entonces

$$\left[s'(t)\right]^2 = a^2t^2 = a^2\left[\frac{2s(t)}{a}\right] = 2as(t).$$

(c) Si s mide en pies, el valor de a es 32. ¿Cuántos segundos tendrá que permanecer fuera de la trayectoria de una lámpara que cae del techo, desde una altura de 400 pues?. Si no se aparta, ¿cuál será la velocidad de la lámpara cuando le golpee? ¿A qué altura encontraba la lámpara cuando se desplazaba a la mitad de dicha velocidad?.

Respuesta.- Ya que $a = 32$, entonces

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 \;\Rightarrow\; 400 = \frac{32}{2}t^2 \;\Rightarrow\; t = 5 \text{ s}.$$

Luego,

$$s'(t) = (2\cdot 32\cdot 400)^{1/2} = 160 \text{ m/s}.$$

Por último para $s'(t) = 80$, tenemos

$$(80)^2 = 2\cdot 32\cdot s(t) \;\Rightarrow\; s(t) = 100 \text{ pies desde arriba}.$$

12 Suponga que en una carretera el límite de velocidad se especifica en cada punto. En otras palabras, existe una cierta función L tal que la velocidad límite a x millas desde el inicio de la carretera es $L(x)$. Dos automóviles, A y B, se desplazan por dicha carretera; la posición del automóvil A en el tiempo t es $a(t)$, y la del automóvil B es $b(t)$.

(a) ¿Qué ecuación expresa el hecho de que el automóvil A siempre se desplaza a la velocidad límite? (La respuesta no es $a'(t) = L(t)$.)

Respuesta.- La ecuación estará dada por,

$$a'(t) = L(x) = L\left[a(t)\right].$$

(b) Suponga que A siempre se desplaza a la velocidad límite, y que la posición de B en el tiempo t es la posición de A en el tiempo $t-1$. Demuestre que B también se desplaza en todo momento a la velocidad límite.

Demostración.- Sea $b(t) = a(t-1)$ y $L(x) = L\left[a(t)\right]$, entonces para B se tiene

$$b'(t) = L\left[b(t)\right] \quad \Rightarrow \quad a'(t-1) = L\left[a(t-1)\right].$$

Así, si $t-1$ es reemplazado por t, tenemos $a'(t) = L(t)$ el cual es cierto. Por lo que B se desplaza a la velocidad límite.

(c) Suponga, por el contrario, que B siempre se mantiene a una distancia constante por detrás de A. ¿En qué condiciones B se desplazará todavía en todo momento a la velocidad límite?.

Respuesta.- Sea $b(t) = a(t) - d$ para alguna constante $d > 0$, entonces dado $a'(t) = L\left[a(t)\right]$, se tiene

$$b'(t) = L\left[b(t)\right] \Rightarrow b'(t) = L\left[a(t) - d\right] = L\left[a(t)\right] = L\left[b(t) + d\right]$$

Esto es, B se desplaza a la velocidad límite, si L es una función periódica con periodo d.

13 Suponga que $f(a) = g(a)$ y que la derivada por la izquierda de f en a es igual a la derivada por la derecha de g en a. Defina $h(x) = f(x)$ para $x \leq a$, y $h(x) = g(x)$ para $x \geq a$. Demuestre que h es diferenciable en a.

Demostración.- Sea

$$\lim_{t \to 0+} \frac{h(a+t) - h(a)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{g(a+t) - g(a)}{t}$$

y

$$\lim_{t \to 0-} \frac{h(a+t) - h(a)}{t} = \lim_{t \to 0-} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}.$$

Y por el hecho de la existencia del límite por la derecha y por la izquierda entonces existe el límite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(a+t) - h(a)}{t}.$$

14 Sea $f(x) = x^2$ si x es racional, y $f(x) = 0$ si x es irracional. Demuestre que f es diferencial en 0.

Demostración.- Por definición,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 0}{h} = 0.$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0^+}\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

Entonces, f es diferencial en 0.

15 (a) Sea f una función tal que $|f(x)|\leq x^2$ para todo x. Demuestre que f es diferenciable en el punto 0.

Demostración.- Tenemos que

$$|f(x)|\leq x^2 \quad\Rightarrow\quad |f(0)|=0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=0.$$

Ahora, vemos que

$$\left|\frac{f(h)}{h}\right|\leq\frac{h^2}{|h|} \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{f(h)}{h}\right|\leq |h|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} &\leq \lim_{h\to 0}|h|\\
\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} &= 0\\
\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h} &= 0\\
\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{0} &= 0\\
f'(0) &= 0
\end{aligned}$$

Así, ya que $f'(0)$ existe entonces f es diferencial en 0.

(b) Este resultado se puede generalizar si x^2 se sustituye por $|g(x)|$, en el caso de que g cumpla una determina propiedad. ¿Cuál?.

Respuesta.- Reemplacemos $x^2=|g(x)|$ por lo que nos queda

$$|f(x)|\leq|g(x)|.$$

Al ser f diferenciable en 0 entonces $f'(0)$ debe existir, por lo tanto

$$|g(x)|\geq|f(x)| \quad\Rightarrow\quad |g(0)|\geq|f(0)| \quad\Rightarrow\quad |g(0)|\geq 0.$$

Luego para g tan pequeño como se quiera,

$$|g(0)|=0 \quad\Rightarrow\quad g(0)=0.$$

Además podemos observar,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(h)}{h}\right| &\leq \left|\frac{g(h)}{h}\right| \\
\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right| &\leq \lim_{h\to 0}\left|\frac{g(h)}{h}\right| \\
\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| &\leq \lim_{h\to 0}\left|\frac{g(h)-f(0)}{h}\right| \\
|f'(0)| &\leq |g'(0)| \\
0 &\leq |g'(0)| \\
|g'(0)| &\geq 0
\end{aligned}$$

Luego ya que $g'(0)$ podría ser lo más pequeño que se quiera, entonces

$$|g'(0)| = 0 \quad \Rightarrow \quad g'(0) = 0.$$

Por lo tanto f es diferenciable en 0 si se tiene,

$$g(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad g'(0).$$

16 Sea $\alpha > 1$. Si f satisface $|f(x)| \leq |x|^\alpha$, demuestre que f es diferenciable en 0.

Demostración.- Sea $|f(x)| \leq |x|^\alpha \;\Rightarrow\; -x^\alpha \leq f(x) \leq x^\alpha$ y $f(0) = 0$ entonces,

$$-h^{\alpha-1} \leq \frac{f(h)-f(0)}{h} \leq h^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad -h^\alpha \leq f(h) \leq h^\alpha.$$

Por lo que concluimos que f es diferencial en 0 y $f'(0) = 0$.

17 Sea $0 < \beta < 1$. Demuestre que si f satisface $|f(x)| \geq |x|^\beta$ y $f(0) = a$, entonces f no es diferenciable en 0.

Demostración.- Sea $|f(x)| \geq |x|^\beta \;\Rightarrow\; -x^\beta \leq f(x) \leq x^\beta$ y $f(0) = 0$ entonces,

$$-h^{\beta-1} \leq \frac{f(h)-f(0)}{h} \leq h^{\beta-1}.$$

Ya que $0 < \beta < 1$,, h^β será $\dfrac{1}{h^{1-\beta}}$, el cual tiende a ∞. Por lo tanto f no es diferenciable en 0.

18 Sea $f(x) = 0$ si x es irracional, y $1/q$ si $x = p/q$, fracción irreducible. Demuestre que f no es diferenciable en a para cualquier a.

Demostración.- Si a es racional, al no ser f continua en a será f derivable en a. Si $a = 0a_1a_2a_3\ldots$ es irracional y h es racional, entonces $a+h$ es irracional, co lo que $f(a+h) - f(a) = 0$. Pero si $h = -0.00\ldots 0a_{n+1}a_{n+2}\ldots$, entonces $a + h = 0a_1a_2\ldots a_n000\ldots$, con lo que $f(a+h) \geq 10^{-n}$, mientras que $|h| < 10^{-n}$, la cual hace que $|[f(a+h) - f(a)]/h| \geq 1$. Así pues, $[f(a+h) - f(a)/h]$ es 0 para valores de h tan pequeños como se quiera y tiene valores absolutos mayores que 1 también con h tan pequeño como se quiera, lo cual dice que $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ no existe.

19 (a) Suponga que $f(a) = g(a) = h(a)$, que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo x, y que $f'(a) = h'(a)$. Demuestre que g es diferenciable en a, y que $f'(a) = g'(a) = h'(a)$.

Demostración.- Ya que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ y $f(a) = g(a) = h(a)$, entonces

$$\begin{array}{rcccl} f(x) & \le & g(x) & \le & h(x) \\ f(a+t) & \le & g(a+t) & \le & h(a+t) \\ \dfrac{f(a+t)-f(a)}{t} & \le & \dfrac{g(a+t)-g(a)}{t} & \le & \dfrac{h(a+t)-h(a)}{t} \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+t)f(a)}{t} & \le & \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(a+t)-g(a)}{t} & \le & \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(a+t)-h(a)}{t} \\ f'(a) & \le & g'(a) & \le & h'(a) \end{array}$$

Luego sabemos que $f'(a) = h'(a)$ lo que implica $g'(a)$ existe y $f'(a) = g'(a) = h'(a)$. Por lo tanto g es diferenciable en a.

(b) Demuestre que la conclusión no es cierta si se omite la hipótesis $f(a) = g(a) = h(a)$.

Demostración.- Se dará un contraejemplo sin la condición $f(a) = g(a) = h(a)$.
Sea $f(x) = -1$, $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ y $h(x) = 2$. Entonces

$$f(a) = -1, \quad g(a) = \frac{1}{1+e^{-a}}, \quad h(a) = 2.$$

Por lo que la conclusión no es cierta.

20 Sea f una función polinómica; veremos en el próximo capítulo que f es diferenciable. La recta tangente a f en $(a, f(a))$ es la gráfica $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$. Por tanto, $f(x) - g(x)$ es la función polinómica $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Ya hemos visto que si $f(x) = x^2$, entonces $d(x) = (x-a)^2$, y si $f(x) = x^3$, entonces $d(x) = (x-a)^2(x-2a)$.

(a) Halle $d(x)$ cuando $f(x) = x^4$, y demuestre que es divisible por $(x-a)^2$.

Demostración.- Se tiene,

$$\begin{array}{rcl} d(x) & = & f(x) - f(a)(x-a) - f(a) = x^4 - 4a^3(x-a) - a^4 \\ & = & x^4 - 4a^3x + 3a^4 \\ & = & (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x - 3a^3) \end{array}$$

Por lo que $d(x)$ es divisible por $(x-a)^2$.

(b) Parece, ciertamente que $d(x)$ siempre sea divisible por $(x-a)^2$. En general, las rectas paralelas a la tangente cortan la gráfica de la función en dos puntos; la recta tangente corta a la gráfica sólo una vez cerca del punto, de manera que la intersección debería ser una doble intersección. Para dar una demostración riguroso, observe en primer lugar que

$$\frac{d(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Ahora responda las siguientes cuestiones. ¿Por qué $f(x)-f(a)$ es divisible por $(x-a)$? ¿Por qué existe una función polinómica h tal que $h(x) = d(x)/(x-a)$ para $x \neq a$? ¿Por qué el $\lim_{x\to a} h(x) = 0$? ¿Por qué $h(a) = 0$? ¿Por qué esto resuelve el problema?.

Repuesta.- Tenemos $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$, entonces

$$d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$

También sabemos que

$$d(x) = [f(x)-f(a)] - f'(a)(x-a)$$

de donde $d(x)$ es divisible por $(x-a)^2$ lo que implica que $f(x)-f(a)$ es divisible por $(x-a)$. Así,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

es una función polinómica. Y por lo tanto la función h es un polinomio, como sigue

$$h(x) = \frac{d(x)}{x-a} \quad \Rightarrow \quad h(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$

para $x \neq a$. Ahora tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} h(x) &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right] \\
\lim_{x\to a} h(x) &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] - f'(a) \\
\lim_{x\to a} h(x) &= f'(a) - f'(a) \\
\lim_{x\to a} h(x) &= 0 \\
h(a) &= 0
\end{aligned}$$

Significa que h tiene a a como una raíz. Esto indica que $\dfrac{d(x)}{x-a}$ es divisible por $x-a$. Y así, $d(x)$ es divisible por $(x-a)^2$.

21 (a) Demuestre que $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Demostración.- Sean $h = x-a$, el hecho de que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$ y por un cambio infinitesimal $a \to a+h$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a+h}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
&= f'(a)
\end{aligned}$$

(b) Demuestre que las derivadas son una propiedad local: si $f(x)=g(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a, entonces $f'(a)=g'(a)$. (Esto significa que al calcular $f'(a)$, puede ignorarse a $f(x)$ para un determinado $x \neq a$. Evidentemente, ¡no! se puede ignorar a $f(x)$ para todos estos x simultáneamente.)

Demostración.- Se da f y g son iguales en un intervalo abierto que contiene a, entonces en el intervalo tenemos una pequeña cantidad $h\to 0$ como,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(a+h) &= \lim_{h\to 0} g(a+h)\\
\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] &= \lim_{h\to 0}[g(a+h)-g(a)]\\
\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]\\
f'(a) &= g'(a)
\end{aligned}$$

22 (a) Suponga que f es diferenciable en x. Demuestre que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

Demostración.- Sea $h=-h$ entonces

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot\frac{-1}{-1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

A continuación, sumamos la igualdad de la izquierda y de la derecha, como sigue

$$\begin{aligned}
f'(x)+f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right]\\
2f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right]\\
2f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\right]\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right]
\end{aligned}$$

(b) Demuestre, más generalmente, que

$$f'(x) = \lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}.$$

Aunque hasta ahora no habíamos encontrado expresiones como $\lim\limits_{h,k\to 0}$, su significado debería ser claro para el lector, y por tanto debería ser capaz de formular la definición $\epsilon - \delta$ adecuada. Lo importante en este caso es que $\lim\limits_{h,k\to 0}$, de manera que estamos considerando únicamente valores de h y k positivos.

Demostración.- Sea h suficientemente pequeño, entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right].$$

Similarmente, sea $k = -k$ sufientemente pequeño, entonces

$$f'(x) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x-k) - f(x)}{-k} \cdot \frac{-1}{-1} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x) - f(x-k)}{k}.$$

Ahora, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $0 < h < \delta$ y $0 < k < \delta$, entonces

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\epsilon < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) < \epsilon$$

$$\left|\frac{f(x) - f(x-k)}{k} - f(x)\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\epsilon < \frac{f(x) - f(x-k)}{k} - f(x) < \epsilon$$

Luego multiplicamos ambas desigualdades por $\dfrac{h}{h+k}$ y $\dfrac{k}{h+k}$. Aquí h y k son ambos positivos, ya que si no lo fuesen $\dfrac{h}{h+k}$ y $\dfrac{k}{h+k}$ podrían ser muy grandes, esto eligiendo $k \approx -h$.

$$-\epsilon \cdot \frac{h}{h+k} < \frac{h}{h+k}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{h+k} \cdot f'(x) < \epsilon \cdot \frac{h}{h+k}$$
$$-\epsilon \cdot \frac{k}{h+k} < \frac{k}{h+k}\frac{f(x) - f(x-k)}{k} - \frac{k}{h+k} \cdot f'(x) < \epsilon \cdot \frac{k}{h+k}$$

Sumando las desigualdades, obtenemos

$$-\epsilon < \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k} - f'(x) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x+h) - f(x-k)}{k+h} - f'(x)\right| < \epsilon$$

Por lo tanto

$$f'(x) = \lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}.$$

23 Demuestre que si f es par, entonces $f'(x) = -f'(-x)$. (Para evitar al máximo la confusión, sea $g(x) = f(-x)$; hállese $g'(x)$ y luego recuerde que otra cosa es g.)

Demostración.- Sea $g(x) = f(-x)$. Por el hecho de que $g(x) = f(cx) \;\Rightarrow\; g'(x) = cf'(cx)$, se sigue

$$g(x) = f(-x) \;\Rightarrow\; g'(x) = -f'(-x)$$

Luego ya que f es par entonces $g(x) = f(-x) = f(x)$ que implica $g'(x) = f'(x)$. Por lo tanto

$$f'(x) = -f'(-x).$$

24 Demuestre que si f es impar, entonces $f'(x) = f'(-x)$.

Demostración.- Si $g(x) = f(-x)$, entonces $g'(x) = -f'(-x)$; esto ya que $g(x) = f(cx) \Rightarrow g'(x) = cf'(cx)$. Luego sabemos que f es impar, es decir, $g(x) = -f(-x) = -f(x)$ lo que implica que $g'(x) = -f'(x)$. Por lo tanto,

$$-f'(x) = -f'(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f'(-x).$$

25 En los problemas 23 y 24 se afirma que f' es par si f es impar e f' es impar si f es par. Por tanto, ¿qué puedo afirmar de $f^{(k)}$?.

Respuesta.- $f^{(k)}$ es par si f es impar y k también es impar. $f^{(k)}$ es par si f es impar y k es par y $f^{(k)}$ es par si f es par y k es impar.

26 Halle $f''(x)$ si

(i) $f(x) = x^3$.

Respuesta.- $f'(x) = 3x^2 \quad$ y $\quad f''(x) = 6x$.

(ii) $f(x) = x^5$.

Respuesta.- $f'(x) = 5x^4 \quad$ y $\quad f''(x) = 20x^3$.

(iii) $f'(x) = x^4$.

Respuesta.- $f''(x) = 4x^3$.

(iv) $f(x+3) = x^5$.

Respuesta.- $f'(x+3) = 5(x+3)^4, \quad$ y $\quad f''(x+3) = 20(x+3)^3$.

27 Si $S_n = x^n$ y $0 \leq k \leq n$, demuestre que

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = k!\binom{n}{k}x^{n-k}.$$

Demostración.- La prueba la realizaremos por inducción. Para comprender mejor verificaremos si se cumple la ecuación para $k = 0$, $k = 2$ y $k = 2$,

$$\begin{aligned}
S_n^{(0)}(x) &= \frac{n!}{(n-0)!}x^{n-0} &= x^n \\
S_n^{(1)}(x) &= \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} &= nx^{n-1} \\
S_n^{(2)}(x) &= \frac{n!}{(n-2)!}x^{n-2} &= n(n-1)x^{n-2}
\end{aligned}$$

En otras palabras podemos suponer que la fórmula dada puede encontrar la función sin derivar, la primera y segunda derivada.

Ahora, establecemos la hipótesis, para k

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

si derivamos una vez más, entonces para $k+1$ se tiene

$$\begin{aligned}
S_n^{(k+1)}(x) &= \frac{n!(n-k)}{(n-k)!}x^{n-k-1} \\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!}x^{n-(k+1)} \\
&= \frac{n!}{[n-(k+1)]!}x^{n-(k+1)}.
\end{aligned}$$

El cual se cumple para $k+1$, por lo tanto

$$S_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

28 (a) Halle $f'(x)$ si $f(x) = |x|^3$. Halle $f''(x)$. ¿Existe $f'''(x)$ para todo x?.

Respuesta.- Dada la función $f(x) = |x|^3$ tenemos,

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0 \\ -6x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, & x > 0 \\ -6, & x < 0 \end{cases}$$

Además, $f'(0) = f''(0) = 0$. Pero $f'''(0)$ no existe. Por tanto $f'''(x)$ no existe para todo x.

(b) Analice f de manera similar si $f(x) = x^4$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -x^4$ para $x \leq 0$.

Respuesta.- Dada la función $f(x) = |x|^4$ tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \left\{ \begin{array}{rl} x^4, & x \geq 0 \\ -x^4, & x \leq 0 \end{array} \right. \\ \\ f'(x) & = & \left\{ \begin{array}{rl} 4x^3, & x \geq 0 \\ -4x^3, & x \leq 0 \end{array} \right. \\ \\ f''(x) & = & \left\{ \begin{array}{rl} 12x^2, & x \geq 0 \\ -12x^2, & x \leq 0 \end{array} \right. \\ \\ f'''(x) & = & \left\{ \begin{array}{rl} 24x, & x \geq 0 \\ -24x, & x \leq 0 \end{array} \right. \\ \\ f''''(x) & = & \left\{ \begin{array}{rl} 24, & x \geq 0 \\ -24, & x \leq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Y Además $f'(0) = f''(0) = 0$. Pero $f'''(0)$ no existe. Por tanto $f'''(x)$ no existe para todo x.

29 Sea $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$ y sea $f(x) = 0$ para $x \leq 0$. Demuestre que f^{n-1} existe (y encuentre una fórmula que la describa), pero que $f^{(n)}$ no existe.

Demostración.- La función esta dada como,

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & x^n & \text{para } x \geq 0 \\ f(x) & = & 0 & \text{para } x \leq 0 \end{array}$$

Luego para $0 \leq k \leq n-1$ se tiene,

$$\begin{array}{rcll} f^{(k)}(x) & = & \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{para } x \geq 0 \\ f^{(k)}(x) & = & 0 & \text{para } x < 0 \end{array}$$

de donde para $n-1$ obtenemos,

$$\begin{array}{rcll} f^{(n-1)}(x) & = & n!x & \text{para } x \geq 0 \\ f^{(n-1)}(x) & = & 0 & \text{para } x < 0 \end{array}$$

pero para $f^n(0)$

$$\begin{array}{rcll} f^{(n)}(0) & = & n! & \text{para } x \geq 0 \\ f^{(n)}(0) & = & 0 & \text{para } x < 0 \end{array}$$

no existe. Ya que $\lim\limits_{h \to 0^+} n! \cdot \dfrac{h}{h} = n!$, mientras que $\lim\limits_{h \to 0^-} 0 \cdot \dfrac{h}{h} = 0$.

30 Interprete las siguientes expresiones en las que se utiliza la notación de Leibniz; cada una de ellas es una nueva definición de un hecho ya considerado en un problema previo.

(i) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$f'(a) = na^{n-1}, \text{ si } f(x) = x^n.$$

(ii) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ si $z = \dfrac{1}{y}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}, \text{ si } f(y) = \frac{1}{y}.$$

(iii) $\dfrac{d[f(x)+c]}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(a) = f'(a), \text{ si } g(x) = f(x) + c.$$

(iv) $\dfrac{d[cf(x)]}{dx} = c\dfrac{df(x)}{dx}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(a) = cf'(a), \text{ si } g(x) = cf(x).$$

(v) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$ si $z = y + c$.

Respuesta.- La expresión significa que, si $\dfrac{d(y+c)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$, entonces

$$g'(a) = f'(a), \text{ si } g(x) = f(x) + c.$$

(vi) $\left.\dfrac{dx^3}{dx}\right|_{x=a^2} = 3a^4$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$f'(a) = 3a^4, \text{ si } f(x) = x^3.$$

(vii) $\left.\dfrac{df(x+a)}{dx}\right|_{x=b} = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=b+a}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(b) = f'(b+a), \text{ si } g(x) = f(x+a).$$

(viii) $\left.\dfrac{df(cx)}{dx}\right|_{x=b} = c\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=cb}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(b) = cf'(cb), \text{ si } g(x) = f(cx).$$

(ix) $\dfrac{df(cx)}{dx} = c\dfrac{df(y)}{dy}\Big|_{y=cx}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(ab) = cf'(cb), \text{ si } g(x) = f(cx).$$

(x) $\dfrac{d^k x^n}{dx^k} = k!\dbinom{n}{k}x^{n-k}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$f^{(k)}(a) = k!\binom{n}{n}a^{n-k}, \text{ si } f(x) = x^n.$$