Cálculo una variable

George B. Thomas, Jr.

Resolución de problemas por:

FODE Christian Limbert Paredes Aguilera

Índice general

1

Funciones

1.1. Las funciones y sus gráficas

Definición 1.1 *Una función f de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento $x \in D$ un solo o único elemento $f(x) \in Y$*

Definición 1.2 *Cuando definimos una función $y = f(x)$ mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales x para los cuales la fórmula proporciona valores reales para y , el llamado* ***dominio natural****.*

Cuando el rango de una función es un subconjunto de números reales, se dice que la función tiene ***valores reales (o que es real valuada)***

Definición 1.3 (Valor absoluto) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

Definición 1.4 *Sea una funcion definida en un intervalo I y sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos en I*

1. *Si $f(x_2) > f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es* ***creciente*** *en I.*

2. *Si $f(x_2) < f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es* ***decreciente*** *en I.*

Definición 1.5 *Una función $y = f(x)$ es una*

1. *Función par de x si $f(-x) = f(x)$.*

2. *Función impar de x si $f(-x) = -f(x)$.*

Para toda x en el dominio de la función.

(Los nombres par e impar provienen de las potencias de x).

Definición 1.6 *Dos variables x e y son* ***proporcionales*** *(una con respecto a la otra) si una siempre es un múltiplo constante de la otra; esto es, si $y = kx$ para alguna constante k distinta de 0.*

Si la variable y es proporcional al recíproco $1/x$, entonces algunas veces se dice que y es ***inversamente proporcional*** *a x (puesto que $1/x$ es el inverso multiplicativo de x).*

1.1. Ejercicios

1. $f(x) = 1 + x^2$

Respuesta.- Al evaluar $1+x^2$ vemos que x se cumple para todos los reales, por lo tanto $f_D = \{x/\ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 1\}$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- El dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq 0\}$. Y el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \leq 1\}$.

3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$

Respuesta.- Sea $5x + 10 \geq 0$ ya que una raíz par no puede ser no negativo, entonces $x \geq 2$, por lo tanto el dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq -2\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio, evaluaremos $x^2 - 3x \geq 0$, de donde $x(x-3) \geq 0$, por lo tanto el dominio es $f_D = \{x/ \leq x \leq 0 \cup x \geq 3\}$. Luego el rango viene definido por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

5. $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$

Respuesta.- Sabemos que no se puede dividir un número por 0. Por lo tanto para hallar el dominio de la función debemos evaluar $3 - t = 0$, de donde $t = 3$, así $f_D = \{t/t \neq 3\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \neq 0\}$.

6. $G(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio evaluamos $t^2 - 16 = 0$, de donde $(t-4)(t+4) = 0$, por lo tanto el dominio de la función viene dado por $f_D = \{t/t \neq 4 \wedge t \neq -4\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/0 < y \leq -\dfrac{1}{8}\}$ ya que al despejar x nos queda $x = \sqrt{\dfrac{2}{y} + 16}$ de donde se debe evaluar por un lado $\dfrac{2}{y}$ y por otro $\dfrac{2}{y} - 16 \geq 0$.

En los ejercicios 7 y 8 ¿Cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de x? ¿Cuáles no representan a funciones de x? Dé razones que apoyen sus respuestas.

7. El inciso a. no es una función ya que no cumple con la prueba de la recta vertical ya una función sólo puede tener un valor $f(x)$ para cada x en su dominio. Y el inciso b. no representa la gráfica de una función.

8. Los incisos a. y b. no representan a funciones de x. El único que no representa una gráfica de una función es el inciso b.

Determinación de fórmulas para funciones.

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado x del triángulo.

Respuesta.- El área se representa por $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$ y el perímetro por $f(x) = 3x$

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del cuadrado. Exprese el área como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La longitud del lado de un cuadrado como función de longitud esta dado por $d = \sqrt{2a^2}$. El área es expresado por $A = \dfrac{d^2}{2}$

11. Exprese la longitud del lado de um cubo como una función de la longitud de la diagonal d del cubo. Exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta-. La expresión de la longitud del lado del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo es

$$L(d) = (\sqrt{2}/2) \cdot d$$

Las expresiones del área de la superficie y el volumen del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo son:

$$A(d) = 3 \cdot d^2 \quad y \quad V(d) = (\sqrt{2}/4) \cdot d^3$$

12. Un punto P en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente de la recta que une a P con el origen.

Respuesta.- Sea el punto en el origen $(0,0)$ y el punto P tenga las coordenadas $(z, z^{'})$. Sabemos que una recta viene definido por $f(x) = ax + b$ entonces formando un sistema de ecuaciones tenemos:

$$0 = 0x + b \quad y \quad z^{'} = az + b$$

Luego $z^{'} = az$ de donde $a = \dfrac{z^{'}}{z}$, y así nos queda la función

$$f(x) = \frac{z^{'}}{z} x$$

13. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de la recta $2x + 4y = 5$. Sea L la distancia del punto (x, y) al origen $(0,0)$. Escriba L como función de x.

Respuesta.- Dado $(x, y) \in 2x + 4y = 5; (0,0)$ entonces

$$x = \frac{5 - 4y}{2} \qquad \frac{5 - 2x}{4}$$

Luego $L = \sqrt{(y-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{y^2 + \left(\dfrac{5-4y}{2}\right)} = \sqrt{y^2 + \dfrac{25 + 40y + 16y^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{4y^2}{4} + \dfrac{25 - 40y + 16y^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{20y^2 + 40y + 25}$

14. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de $y = \sqrt{x-3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4,0)$. Escriba L como función de y.

Respuesta.- $y = \sqrt{x-3}, (x, y) \in y = \sqrt{x-3}$ entonces calculamos la distancia entre $y = \sqrt{x-3}$ y $(4,0)$.

$$y^2 = x - 3 \Longrightarrow x = y^2 + 3 \quad y \quad y = \sqrt{x-3}$$

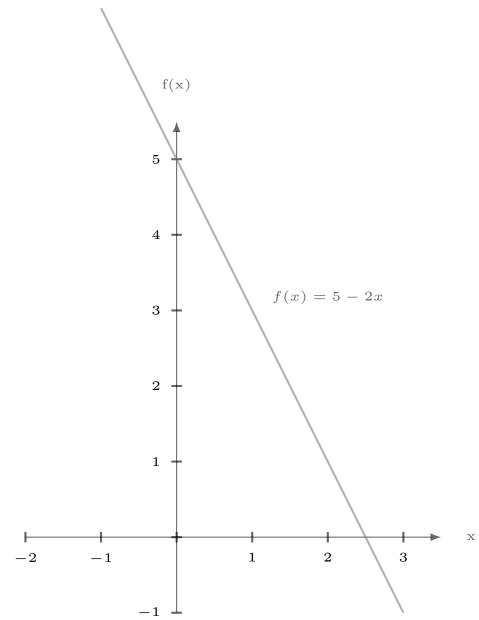
Así $L = \sqrt{(y-o)^2 + (x-y)^2} = \sqrt{y^2 + (y^2+3)^2} = \sqrt{y^2 + y^4 + 6y^2 + 9} = \sqrt{y^4 + 7y^2 + 9}$

Las funciones y sus gráficas.

En los ejercicios 15 al 20, determine el dominio y grafique las funciones

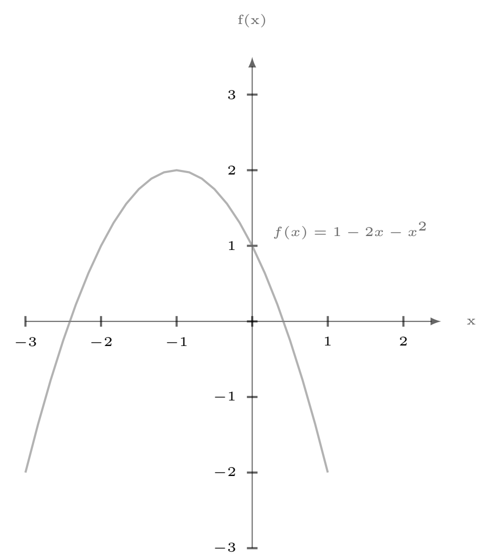
15. $f(x) = 5 - 2x$

Respuesta.- El dominio esta dado para todos los reales x.



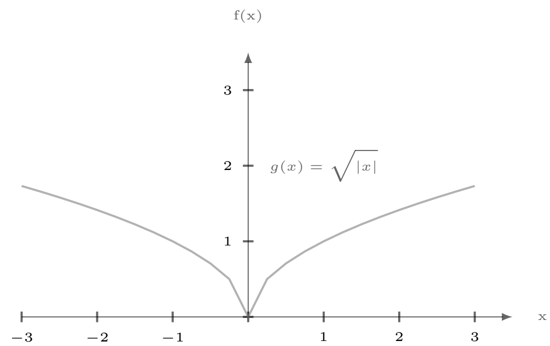
16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo real x positivo.



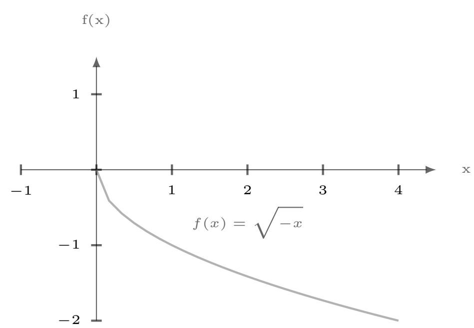
17. $g(x) = \sqrt{|x|}$

Respuesta.- El dominio de la función es para $x \in \mathbb{R}$



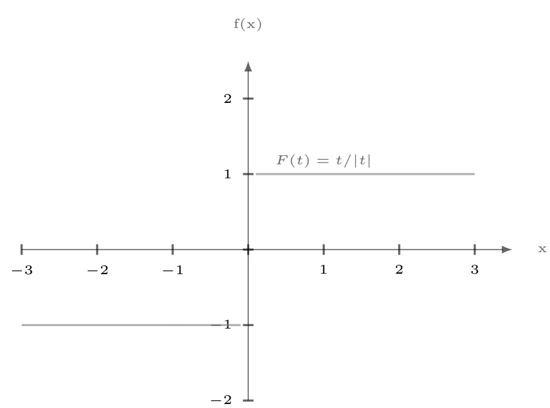
18. $g(x) = \sqrt{-x}$

Respuesta.- El dominio de la función se cumple para los números reales negativos.



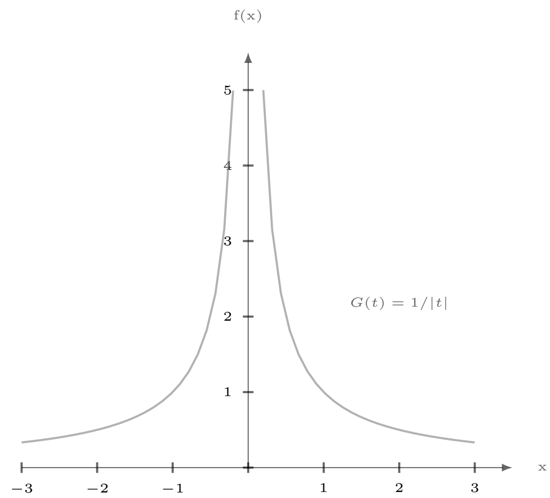
19. $F(t) = t/|t|$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo número real menos el 0.



20. $G(t) = 1/|t|$

Respuesta.- El dominio se cumple para todo número real menos el 0.



21. Determine el dominio de $y = \dfrac{x+3}{4-\sqrt{x^2-9}}$

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el dominio esta dado por $D_f = \{x/x \geq 3 \wedge x \neq 4\}$

22. Determine el rango de $y = 2 + \dfrac{x^2}{x^2+4}$.

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el rango viene dado para todo $y = f(x)$ tal que $y \geq 2$

23. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a. $|y| = x$

Respuesta.- No es una función de x ya que $\sqrt{y^2} = x \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow \pm y = \pm x$

b. $y^2 = x^2$

Respuesta.- Por el anterior problema $23a$.

24. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x

a. $|x| + |y| = 1$

Respuesta.- Ya que $|y| = 1 - |x| \Longrightarrow \sqrt{y^2} = 1 - |x| \Longrightarrow y^2 = (1-|x|)^2 \Longrightarrow \pm y = |1 - |x||$

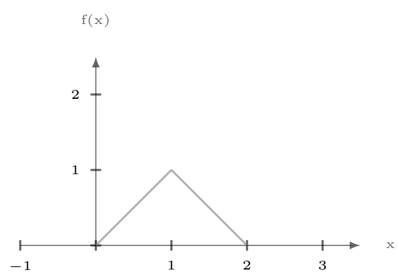
b. $|x+y|=1$

Respuesta.- Ya que $\sqrt{(x+y)^2}=1 \Longrightarrow (x+y)^2=1 \Longrightarrow x^2+2xy+y^2=1 \Longrightarrow y^2=1-2xy-x^2 \Longrightarrow$ $\pm y=\sqrt{1-2xy-x^2}$

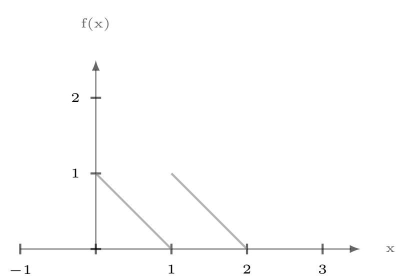
Funciones definidas por partes

En los ejercicios 25 a 28, grafique las funciones:

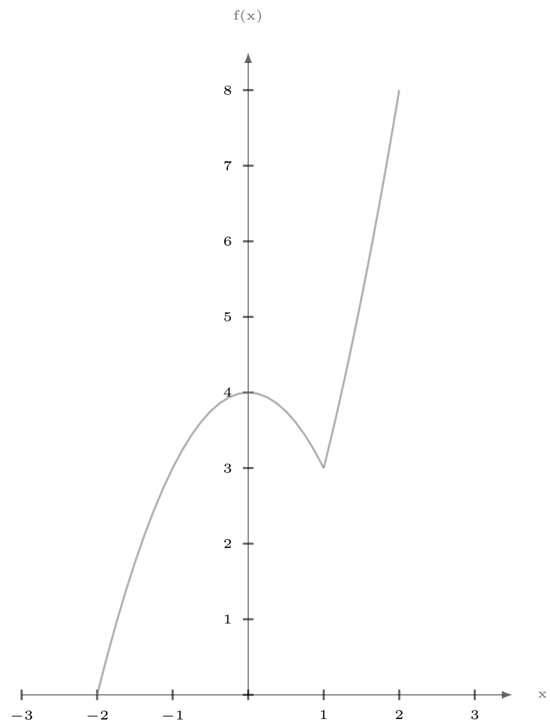
25. $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



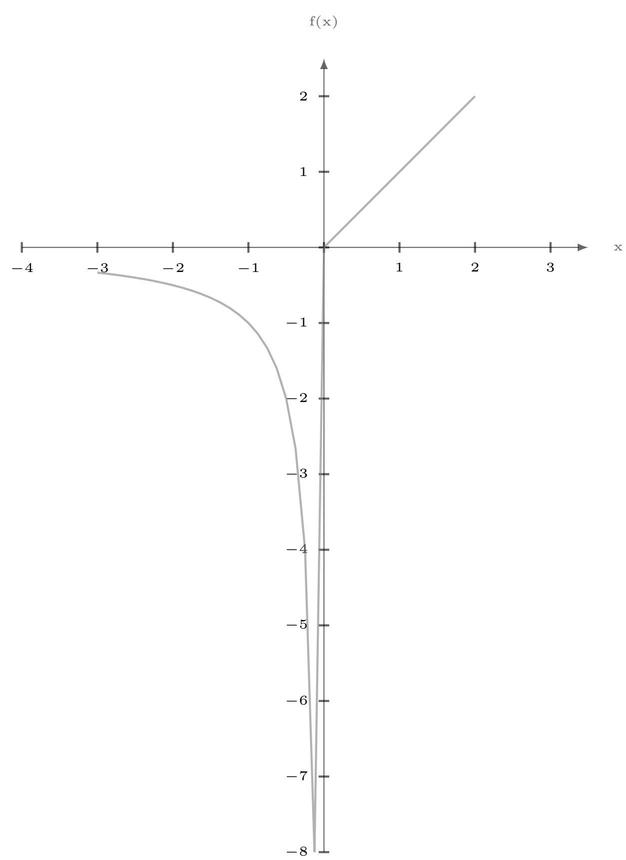
26. $g(x)=\begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



27. $F(x)=\begin{cases} 4-x^2, & \leq 1 \\ x^2+2x, & x > 1 \end{cases}$



28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$



Determine una fórmula para cada función graficada en los ejercicios 29 a 32

29. **a.** Sea $f(x) = ax+b$ entonces $0 = b$ y $1 = a+b$ luego $a = 1$ por lo tanto $f(x) = x$. Por otro lado $1 = a+b$ y $0 = 2a+2 \Longrightarrow a = -1$ de donde se tiene $f(x^{'}) = -x+2$ así nos queda la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ x+2 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b. Está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 \leq x < 1 \; y \; 2 \leq x < 3 \\ \\ 0 & si \quad 1 \leq x < 2 \; y \; 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

30. **a.** Similar al ejercicio anterior se tiene que la formula

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \\ 1/2x + 5/7 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b. Se tiene

$$f(x) = \begin{cases} -3x-3 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \\ -2x+3 & si \end{cases}$$

31. **a.**

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad -1 \leq x < 0 \\ \\ 1 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ -2x+2 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

b. Sea (a, b) y (c, d) por lo tanto por capitulo 4 de spivak $f(x) = \dfrac{d-b}{c-a}(x-a)+b$ entonces $(-2, -1)$ y $(0, 0)$ así $f(x) = \dfrac{0-1}{0+2}(x+2)+0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 2$

Luego $f(x) = -2x+2$ y finalmente $f(x) = -1$ de donde,

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x - 2 & si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \\ 2x+2 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ -1 & si \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

32. **a.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{T}{2} \\ \\ \dfrac{2x}{T} - 1 \quad si \quad \dfrac{T}{2} < x \leq T \end{cases}$$

b.

$$f(x) = \begin{cases} A \quad si \quad \dfrac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad T \leq x < \dfrac{3T}{2} \\ \\ -A \quad si \quad \dfrac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad \dfrac{3T}{2} \leq x \leq 2T \end{cases}$$

Las funciones mayor entero y menor entero.

33. Para qué valores de x es

a. $[x] = 0$

respuesta.- Para $0 \leq x < 1$

b. $[x] = 0$

Respuesta.- Para $-1 < x \leq 0$

34. ¿Cuáles valores x de números reales satisfacen la ecuación $[x] = [x]$?

Respuesta.- Sólo el 0.

35. ¿Es cierto que $[-x] = -[x]$ para todo número real x? Justifique su respuesta.

Respuesta.- Es cierto siempre y cuando sea x un entero. Ya que si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x = n$ para algunos $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $[x] = n$ y $-x = -n \Longrightarrow [-x] = n \Longrightarrow [-x] = -[x]$. Por otro lado sea $x \notin \mathbb{Z}$ y $[x] = n$ entonces $n \leq x < n+1 \Longrightarrow -n-1 < -x < -n \Longrightarrow [-x] = -n-1 = -[x] - 1$

36. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} [x], & x \leq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

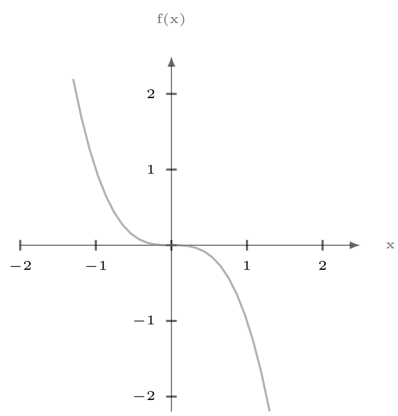
¿Por qué $f(x)$ se donomina parte entera de x?

Respuesta.- Se denomia porque hace corresponder el número inmediato anterior.

Funciones crecientes y funciones decrecientes.

Grafique las funciones en los ejercicios 37 a 46. Si tiene simetrías, ¿Qué tipo de simetría tienen? Especifique los intervalos en os que la función es creciente y los intervalos donde la función es decreciente.

37. $y = -x^3$



Respuesta.- Tiene simetría impar y el intervalo donde decrece esta dado por $(-\infty, \infty)$

38. $y = -\dfrac{1}{x^2}$

Respuesta.- Tiene simetría par y esta dado por lo el intervalo decreciente de $-\infty < x < 0$ y por el intervalo creciente $0 < x < \infty$

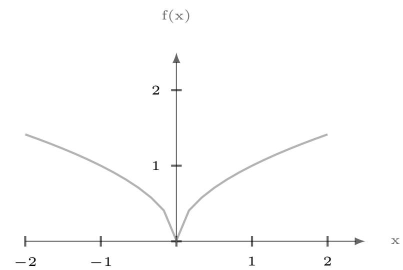
39. $y = -\dfrac{1}{x}$

Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por los intervalos crecientes $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$

40. $y = \dfrac{1}{|x|}$

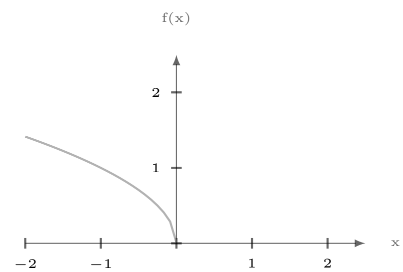
Respuesta.- Tiene simetría par y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < 0$ y el intervalo decreciente $0 < x < \infty$

41. $y = \sqrt{|x|}$



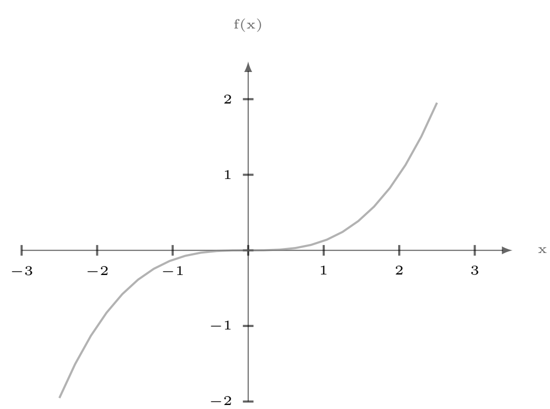
Respuesta.- Tiene simetría par y esta dado por el intervalo decreciente $-\infty < x \leq 0$ y el intervalo creciente $0 \leq x < \infty$

42. $y = \sqrt{-x}$



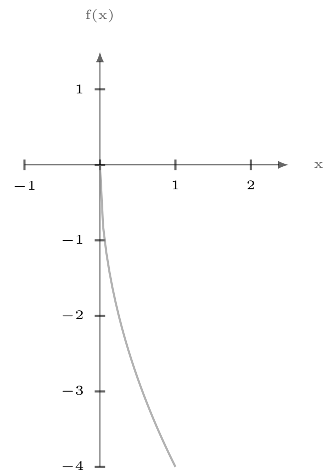
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo decreciente $-\infty < x \leq 0$

43. $y = x^3/8$



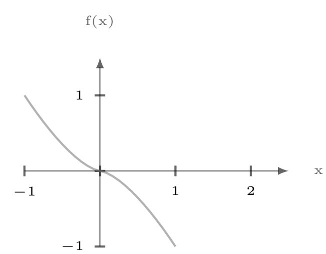
Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < \infty$

44. $y = -4\sqrt{x}$



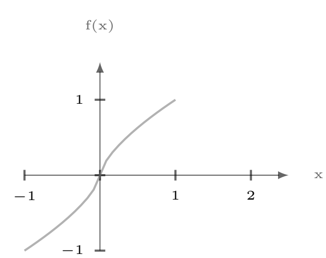
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo $0 \leq x < \infty$

45. $y = -x^{3/2}$



Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo decreciente $-\infty < x < \infty$

46. $y = (-x)^{2/3}$



Respuesta.- La simetría es impar y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < \infty$

Funciones pares y funciones impares

En los ejercicios 47 a 58, indique si la función es par, impar o de ninguno de estos tipos. Justifique su respuesta.

47. $f(x) = 3$

Respuesta.- Sea $f(-x) = 3 = f(x)$ entonces decimos que la función es par.

48. $f(x) = x^{-5}$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^{-5} = -\left(x^{-5}\right) = -f(x)$, por lo tanto la función es impar.

49. $f(x) = x^2 + 1$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, de donde se tiene que la función es par.

50. $f(x) = x^2 + x$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ de donde la función no es par ni impar.

51. $g(x) = x^3 + x$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$ por lo tanto la función es impar.

52. $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

Respuesta.- Sea $g(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 - 1 = g(x)$ por lo tanto la función es par.

53. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea $g(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 1} = g(x)$ por lo tanto la función es par.

54. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea $g(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1} = -g(x)$ de donde la función es impar.

55. $h(t) = \dfrac{1}{t-1}$

Respuesta.- Sea $h(-t) = \dfrac{1}{-t-1}$ entonces la función no es par ni impar.

56. $h(t) = |t^3|$

Respuesta.- Sea $h(-t) = |(-t)^3| = |t^3| = h(t)$ por lo tanto la función es par.

57. $h(t) = 2t + 1$

Respuesta.- Sea $h(-t) = 2(-t) + 1$ entonces la función no es ni par ni impar.

58. $h(t) = 2|t| + 1$

Respuesta.- Sea $h(-t) = 2| - t| + 1 = 2t + 1 = h(t)$ entonces la función es par.

Teoría y ejemplos

59. La variable s es proporcional a t, y $s = 25$ cuando $t = 75$. Determine t cuando $s = 60$.

Respuesta.- Sea $\dfrac{s}{r}$ entonces $\dfrac{25}{75} = \dfrac{60}{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{3} = \dfrac{60}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 180$

60. Energía cinética. La energía cinética K de una masa es proprocional al cuadrado de su velocidad v. Si $K = 12,960$ joules, cuando $v = 18$ m/s, ¿Cuál es el valor de K cuando $v = 10$ m/s?.

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene $\dfrac{K}{v^2} = \dfrac{12,960}{18^2} = \dfrac{K}{10^2}$ entonces $K = 4000$.

61. Las variables r y s son inversamente proporcional, mientras que $r = 6$ cuando $s = 4$. Determine s cuando $r = 10$.

Respuesta.- Tenemos que $6 \cdot 4 = s \cdot 10$ entonces queda que $s = 2{,}4$.

62. Ley de Boyle. La ley de Boyle establece que el volumen V de un gas, a temperatura constante, aumenta cuando la presión P disminuye, de manera que V y P son inversamente proporcionales. Si $P = 14{,}7lb/in^2$ cuando $V = 1000in^3$, entonces ¿cuál es el valor de V cuando $P = 23{,}4lbs/in^2$?.

Respuesta.- Sea $V \cdot P = V' \cdot P'$ entonces $14{,}7 \cdot 1000 = V \cdot 23{,}4$ y por lo tanto $V = 628{,}2in^3$.

63. Una caja sin tapa se construye a partir de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 14 por 22 pulgadas (in). A la pieza de cartón se le cortan cuadrados de lado x en cada esquina y luego se doblan hacia arriba los lados, como en la figura. Exprese el volumen V de la caja como una función de x.

Respuesta.- El volumen es dado por $V = L \cdot a \cdot h$ luego $h = x, \quad a = 14 - 2x, \quad L = 22 - 2x$ por lo tanto

$$V(x) = (22 - 2x)(14 - 2x) \cdot x \quad \Longrightarrow \quad V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 308x$$

64. La siguiente figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa tiene una longitud de dos unidades.

a. Exprese la coordenada de P en términos de x. (Podría iniciar escribiendo una ecuación para la recta AB).

Respuesta.- Sea $y = mx + b$ luego en el punto B, se tiene la intersección de ambas rectas que forman un ángulo de $90°$, así que, el ángulo que tiene que tener el punto A es de $45°$ o bien $m = -1$ por lo tanto $y = -x + b$ o bien m=-1 ya que la recta va hacia abajo.

b. Exprese el área del rectángulo en términos de x.

Respuesta.- El área de un rectángulo es $b \cdot a$ de donde $area = 2x \cdot y = 2x(b - x)$.

En los ejercicios 65 y 66 relacione cada ecuación con su gráfica. No utilice un dispositivo para graficar y dé razones que justifiquen su respuesta.

65. **a.** $y = x^4 \quad \Rightarrow \quad h$

b. $y = x^7 \quad \Rightarrow \quad f$

c. $y = x^10 \quad \Rightarrow \quad g$

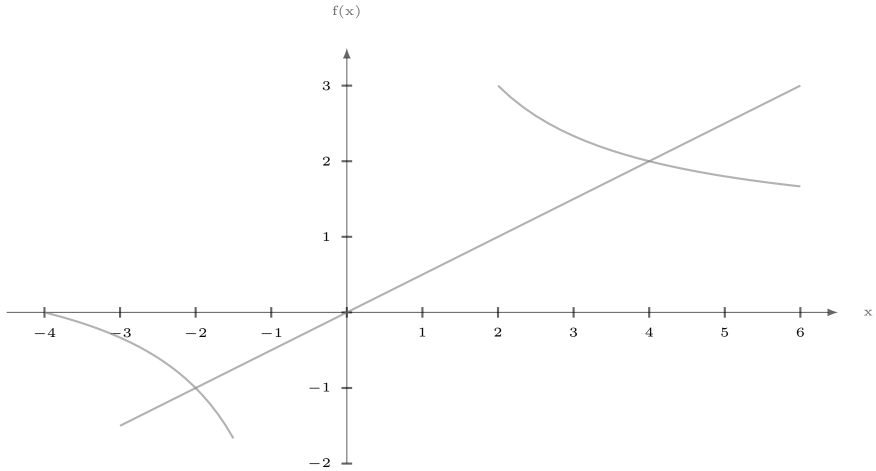
66. **a.** $y = 5x \quad \Rightarrow \quad f.$

b. $y = 5x \quad \Rightarrow \quad f.$

c. $y = x^5 \quad \Rightarrow \quad h.$

67. **a.** Grafique juntas las funciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = 1 + (4/x)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$$

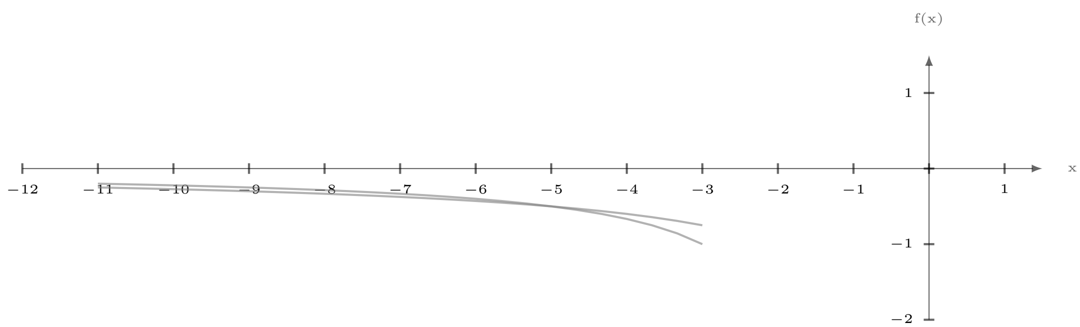


b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inciso a)

Respuesta.- Resolviendo la ecuación nos queda $x^2 - 2x - 8 > 0$ donde se cumple para $x > 4$ ó $x < -2$

68. **a.** Grafique juntas las funciones $f(x) = 3/(x-1)$ y $g(x) = 2/(x+1)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$



b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inicio a).

Respuesta.- Sea $\dfrac{3}{x-1} < \dfrac{2}{x+1} \quad \Rightarrow \quad x < -5$

69. Para que una curva sea simétrica con respecto al eje x, el punto (x, y) debe estar en la curva si y sólo si el punto $(x, -y)$ está en la curva. Explique por qué una curva que es simétrica con respecto al eje x no es la gráfica de una función a menos que la función sea $y = 0$.

Respuesta.- Esto se debe a que contradice a la definición de función. Es decir, a cada elemento x se asigna un solo o único elemento $f(x)$. Si $y = 0$ entonces $(x, y) = (x, -y)$ y por lo tanto se cumple la definición de función

70. Trescientos libros se venden en \$40 cada uno, lo que da por resultado un ingreso de $300 \cdot \$40 = \$12,000$. Por cada aumento de \$5 en el precio, se venden 25 libros menos. Exprese el ingreso R como una función del número x de incrementos de \$5.

Respuesta.- Veamos algunos ejemplos particulares:

$$\begin{array}{rcl} 300 \cdot 40 & = & 12000 \\ (300-25)(40+5) & = & 12375 \\ (300-50)(40+10) & = & 12500 \\ (300-75)(40+15) & = & 12375 \\ (300-100)(40+20) & = & 12000 \end{array}$$

Por lo tanto $R(x) = (300-5x)(40+x) = -125x^2 + 500x + 12000$

71. Se va a construir un corral con la forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud de x pies (ft) e hipotenusa de longitud h ft. Si los costos de la cerca son de $\$5/ft$ para los catetos y $\$lO/ft$ para la hipotenusa, escriba el costo total C de la construcción como una función de h.

Respuesta.- Sea $c^2 + c^2 = h^2 \quad \Rightarrow \quad h = c\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad c = h\sqrt{2}$, luego $C = 2 \cdot c \cdot 5 + h \cdot 10$ por lo tanto $C = 10 \cdot h\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1$

72. Costos industriales: Una central eléctrica se encuentra cerca de un río, donde éste tiene un ancho de 800 ft. Tender un cable de la planta a un lugar en la ciudad, 2 millas (mi) río abajo en el lado opuesto, tiene un costo de $180 por ft que cruce el río y 100$ por ft en tierra a lo largo de la orilla del río.

a. Suponga que el cable va de la planta al punto Q, en el lado opuesto, lugar que se encuentra a x ft del punto P, directamente opuesto a la planta. Escriba una función $C(x)$ que indique el costo de tender el cable en términos de la distancia x.

Respuesta.- Por el teorema de Pitágoras podemos establecer la función $C(x)$ como sigue:

$$C(x) = \sqrt{x^2 + 800^2} \cdot 180 + (10560 - x) \cdot 100$$

b. Genere una tabla de valores para determinar si la ubicación más barata para el punto Q es menor a 2000 ft o mayor a 2000 ft del punto P.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcccl} C(x) & = & \sqrt{1900^2 + 800^2} + (10560 - 1900) \cdot 100 & = & 1270599{,}7 \\ C(x) & = & \sqrt{2100^2 + 800^2} + (10560 - 2100) \cdot 100 & = & 1217079{,}5 \end{array}$$

Por lo tanto es mas barato ubicar el punto Q a una distancia mayor a 2000 ft.

1.2. Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, determine dominios y rangos de $f, g, f+g$ y $f \cdot g$

1. $f(x) = x,\ g(x) = \sqrt{x-1}$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall f(x) \in \mathbb{R}$
g	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$
$f+g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 1$
$f \cdot g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$

2. $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = \sqrt{x-1}$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$x \geq -1$	$f(x) \geq 0$
g	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$
$f+g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq \sqrt{2}$
$f \cdot g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$

En los ejercicios 3 y 4, determine dominios y rangos de $f, g, f/g, g/f$.

3. $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) = 2$
g	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) \geq 1$
f/g	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$0 < f(x) \leq 2$
g/f	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) \geq 0{,}5$

4. $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$.

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) = 1$
g	$x \geq 0$	$f(x) \geq 1$
f/g	$x \geq 0$	$0 < f(x) \leq 1$
g/f	$x \geq 0$	$f(x) \geq 1$

Composición de funciones.

5. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, determine lo siguiente:

a. $f(g(0)) = f(-3) = -3 + 5 = 2$

b. $g(f(0)) = g(5) = 5^2 - 3 = 22$

c. $f(g(x)) = f(x^2 - 3) = x^2 - 3 + 5 = x^2 + 2$ para $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f\}$

d. $g(f(x)) = g(x + 5) = (x + 5)^2 - 3 = x^2 + 10x + 25 - 3 = x^2 + 10x + 22$ para $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

e. $f(f(-5)) = f(0) = 5$

f. $g(g(2)) = g(1) = 1 - 3 = -2$

g. $f(f(x)) = f(x + 5) = x + 5 + 5 = x + 10$

h. $g(g(x)) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 9 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$

6. Si $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 1/(x + 1)$, determine lo siguiente.

a. $f(g(1/2)) = f(2/3) = \dfrac{2}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$

b. $g(f(0)) = g(-1) = \dfrac{1}{-1 + 1} = indeterminado$

c. $f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x + 1}\right) = \dfrac{1}{x + 1} - 1 = \dfrac{-x + 2}{x + 1}$ para $D_{f \circ g} = \{\forall x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

d. $g(f(x)) = g(x - 1) = \dfrac{1}{x - 1 + 1} = \dfrac{1}{x}$ para $D_{g \circ f} = \{\forall \ x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

e. $f(f(-5)) = f(-6) = -6 - 1 = -7$

f. $g(g(2)) = g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3} + 1} = \dfrac{3}{4}$

g. $f(f(x)) = f(x - 1) = x - 2$

h. $g(g(x)) = g\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x+1}+1} = \dfrac{x+1}{x+2} \quad x \neq -1, -2$

En los ejercicios 7 a 10, escriba una fórmula para $f \circ g \circ h$

7. $f(x) = x+1, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = 4-x$

Respuesta.- Se tiene $f(g(h(x))) = f(g(4-x)) = f(12-3x) = 12-3x+1 = 13-3x$ para $D_{f\circ g\circ h} = \{\forall\, x \in D_h / h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f\}$

8. $f(x) = 3x+4, \quad g(x) = 2x-1, \quad h(x) = x^2$

Respuesta.- Se tiene $f(g(h(x))) = f(g(x^2)) = f(2x^2-1) = 3(2x^2-1)+4 = 6x^2+1$ para $D_{f\circ g\circ h} = \{\forall x \in D_h / h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f\}$

9. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad \dfrac{1}{x+4}, \quad h(x) = \dfrac{1}{x}$

Respuesta.- $f(g(h(x))) = f\left(g\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = f\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+4}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+4}+1} = \sqrt{\dfrac{5x+1}{4x+1}}$ para $x \neq 0, -\dfrac{1}{4}$.

10. $f(x) = \dfrac{x+2}{3-x}, \quad g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}, \quad h(x) = \sqrt{2-x}$

Respuesta.- $f\left(g\left(\sqrt{2-x}\right)\right) = f\left(\dfrac{|2-x|}{|2-x|+1}\right) = \dfrac{\dfrac{|2-x|}{|2-x|+1}+2}{3-\left(\dfrac{|2-x|}{|2-x|+1}\right)}$

Sean $f(x) = x-3, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = x^3$ y $j(x) = 2x$. Exprese cada una de las funciones de los ejercicios 11 y 12 como una composición de funciones que incluyan a una o más de f, g, h y j.

11. **a.** $y = \sqrt{x} - 3 \Rightarrow f(\sqrt{x}) \Rightarrow f(g(x))$

b. $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow j(\sqrt{x}) \Rightarrow j(g(x))$

c. $y = x^{1/4} \Rightarrow g(\sqrt{x}) \Rightarrow g(g(x))$

d. $y = 4x \Rightarrow j(j(x))$

e. $y = \sqrt{(x-3)^3} \Rightarrow g((x-3)^3) \Rightarrow g(h(x-3)) \Rightarrow g(h(f(x)))$

f. $y = (2x-6)^3 \Rightarrow h(2x-6) = h(j(x-3)) = h(j(f(x)).$

12. **a.** $y = 2x - 3 \Rightarrow f(2x) \Rightarrow f(j(x))$

b. $y = x^{3/2} \Rightarrow g(x^3) \Rightarrow g(h(x))$

c. $y = x^9 \Rightarrow h(x^3) \Rightarrow h(h(x))$

d. $y = x - 6 \Rightarrow f(f(x))$

e. $y = 2\sqrt{x-3} \Rightarrow j(\sqrt{x-3}) \Rightarrow j(g(x-3)) \Rightarrow j(g(f(x)))$

f. $y = \sqrt{x^3-3} \Rightarrow g(x^3-3) \Rightarrow g(f(x^3)) \Rightarrow g(f(h(x)))$

13. Copie complete la siguiente tabla:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$x-7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
b.	$x+2$	$2x$	$3x+6$
c.	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
d.	$\dfrac{x}{x-1}$	$\sqrt{x}x-1$	$\dfrac{x}{(x-1)^2}$
e.	x^3	$1+\dfrac{1}{x}$	$1+\dfrac{1}{x^3}$
f.	$\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

14. Copie y complete la siguiente tabla.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$\dfrac{1}{x-1}$	$\lvert x \rvert$	$\left\lvert \dfrac{1}{x-1} \right\rvert$
b.	$x+2$	$\dfrac{x-1}{x}$	$\dfrac{x}{x+1}$
c.	x^2	$\sqrt{x}$	$\lvert x \rvert$
d.	$\sqrt{x}$	x^2	$\lvert x \rvert$

15. Evalúe cada expresión utilizando la siguiente tabla de valores.

a. $f(g(-1)) = f(0) = -2$

b. $g(f(0)) = g(-2) = 2$

c. $f(f(-1)) = f(0) = -2$

d. $g(g(2)) = g(0) = 0$

e. $g(f(-2)) = g(1) = -1$

f. $f(g(1)) = f(-1) = 0$

16. Evalúe cada expresión con el uso de las funciones.

$$f(x) = 2 - x, \qquad g(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a. $f(g(0)) = f(0-1) = 2 + 1 = 3$

b. $g(f(0)) = g(2) = 1$

c. $g(g(-1)) = g(1) = 0$

d. $f(f(2)) = f(0) = 2$

e. $g(f(0)) = g(2) = 1$

f. $f(g(1/2)) = f(-1/2) = 5/2$

En los ejercicios 17 y 18, (a) escriba fórmulas para $f \circ g$ y $g \circ f$, luego determine (b) el dominio y (c) el rango de cada una.

17. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

Respuesta.- Para $f \circ g = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$ de donde el dominio viene dado por $x > 0 \wedge x \leq -1$, y el rango viene dado por $f(x) \geq 0$. Luego para $g \circ f = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ de donde el dominio es $x > -1$ y el rango $\forall \, \mathbb{R}, x \neq 0$.

18. $f(x) = x^2, \quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- Para $f(1-\sqrt{x}) = (1-\sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + |x|$ el dominio viene dado por $x \geq 0$ y el rango por $f(g(x)) \geq 0$.
Luego para $g(x^2) = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$ el dominio viene dado por $x \geq 0$ y el rango $g(f(x)) \geq 1$.

19. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$. Determine una función $y = g(x)$ de modo que $(f \circ g)(x) = x$.

Respuesta.- Sea $f(g(x)) = x$ entonces $\dfrac{g(x)}{g(x)-2} = x$ ó $\dfrac{y}{y-2} = x$ por lo tanto $y = g(x) = \dfrac{-2x}{1-x}$.

20. Sea $f(x) = 2x^3 - 4$. Determine una función $y = g(x)$ de modo que $(f \circ g)(x) = x + 2$.

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio tenemos que $2y^3 - 4 = x + 2$ de donde nos queda

$$y = g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$$

Traslación de gráficas.

21. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = -x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Escriba las ecuaciones de las gráficas nuevas.

Respuesta.-

a) $y = -(x+7)^2$

b) $y = -(x-4)^2$

22. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Escriba las ecuaciones de las gráficas nuevas.

Respuesta.-

a) $y = x^2 + 3$

b) $x^2 - 5$

23. Relacione las ecuaciones listadas en los incisos *a*) a *d*) con las gráficas de la figura.

Respuesta.-

a) $y = (x-1)^2 - 4 =$ Posición 4.

b) $y = (x-2)^2 + 2 =$ Posición 1.

c) $y = (x+2)^2 + 2 =$ Posición 2.

d) $y = (x+3)^2 - 2 =$ Posición 3.

24. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = -x^2$ desplazada a cuatro posiciones nuevas. Escriba una ecuación para cada nueva gráfica.

Respuesta.-

a) $y = -(x-1)^2 + 4$

b) $y = -(x+2)^2 + 3$

c) $y = -(x+4)^2 - 1$

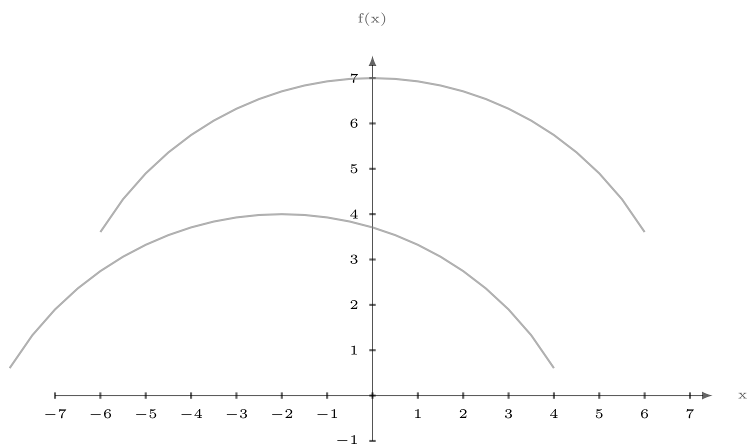
d) $y = -(x-2)^2$

En los ejercicios 25 a 34 se establece cuántas unidades y en qué direcciones se trasladarán las gráficas de las ecuaciones dadas. Proporcione una ecuación para la gráfica desplazada: después, en el mismo plano cartesiano, trace la gráfica de la función original y la gráfica de la ecuación desplazada, anotando junto a cada gráfica la ecuación que le corresponda.

25. $x^2 + y^2 = 49$ abajo 3, izquierda 2.

Respuesta.-

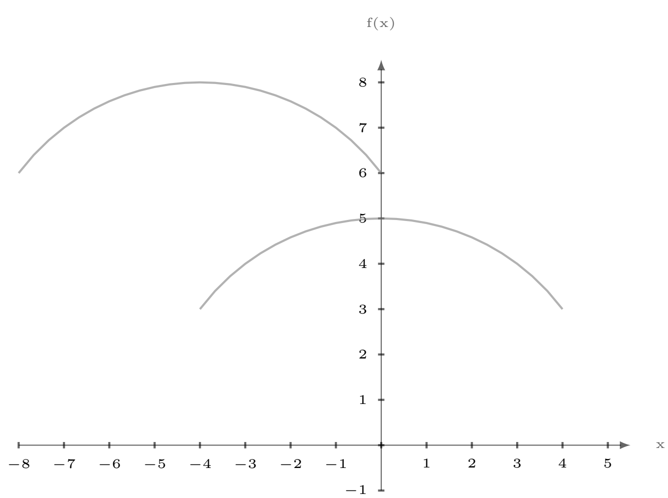
$$y = \sqrt{49 - (x+2)^2} - 3 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2 + (y+3)^2 = 49$$



26. $x^2 + y^2 = 25$ Arriba 3, izquierda 4

Respuesta.-

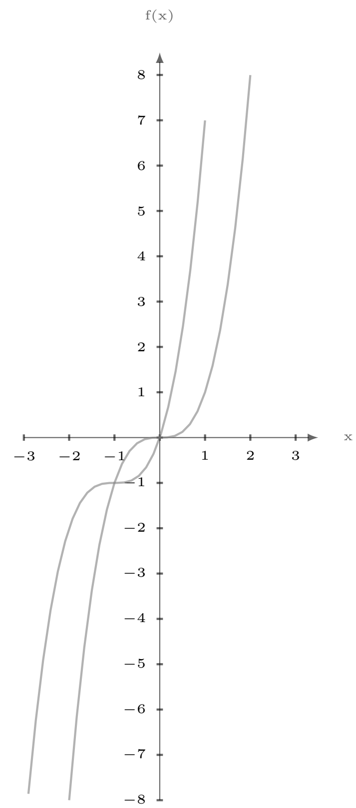
$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$



27. $y = x^3$ Izquierda 1, abajo 1.

Respuesta.-

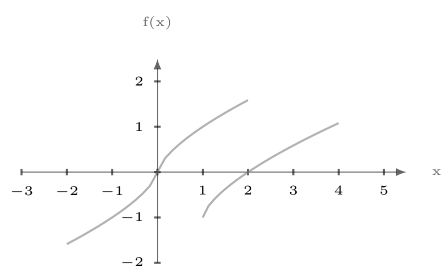
$$y = (x+1)^3 - 1$$



28. $y = x^{2/3}$ Derecha 1, abajo 1

Respuesta.-

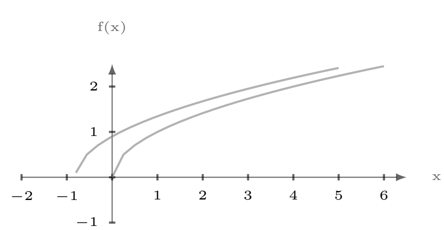
$$y = (x-1)^{2/3} - 1$$



29. $y = \sqrt{x}$ Izquierda 0.81

Respuesta.-

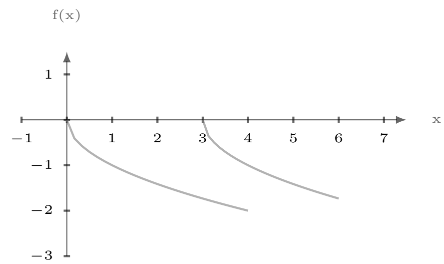
$$\sqrt{x + 0{,}81}$$



30. $y = -\sqrt{x}$ Derecha 3

Respuesta.-

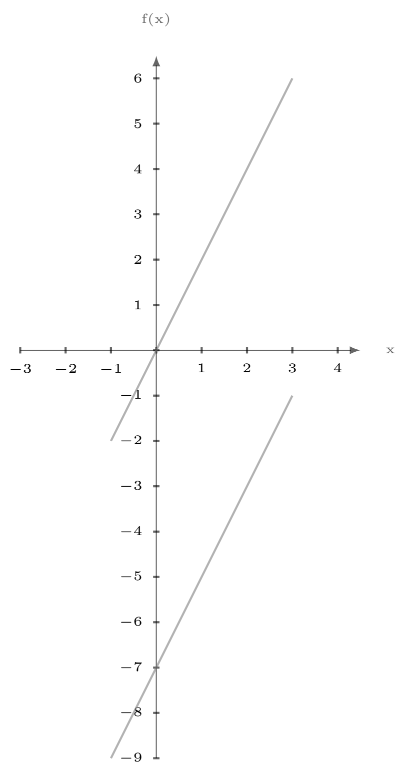
$$y = -\sqrt{x-3}$$



31. $y = 2x - 7$ Arriba 7

Respuesta.-

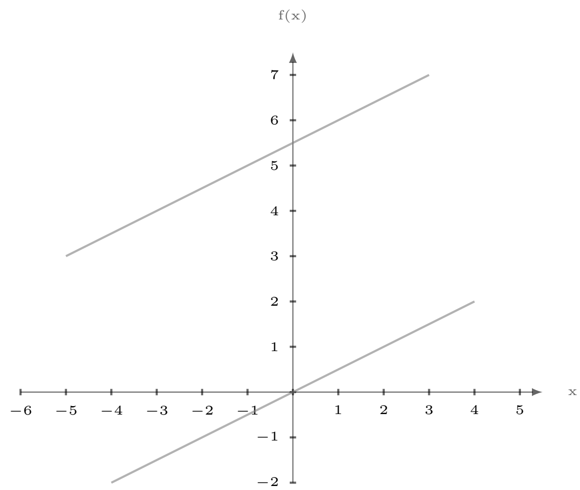
$$y = 2x$$



32. $y = \dfrac{1}{2}(x+1) + 5$ Abajo 5, derecha 1

Respuesta.-

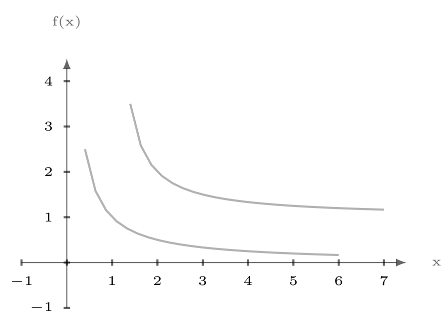
$$y = \frac{1}{2}x$$



33. $y = \dfrac{1}{x}$ Arriba 1, derecha 1

Respuesta.-

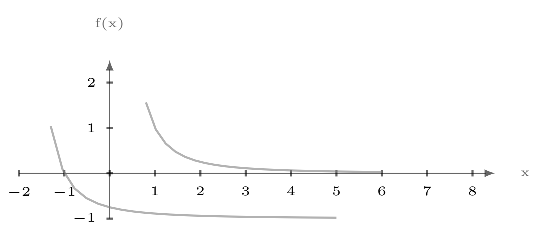
$$y = \frac{1}{x-1} + 1$$



34. $y = \dfrac{1}{x^2}$ Izquierda 2, abajo 1

Respuesta.-

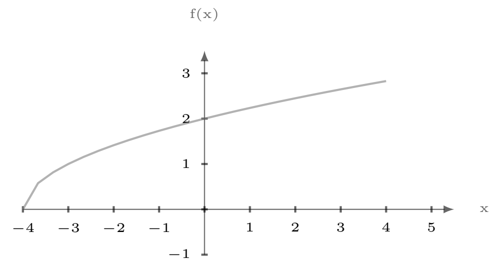
$$y = \frac{1}{(x+2)^2} - 1$$



Grafique las funciones de los ejercicios 35 a 54

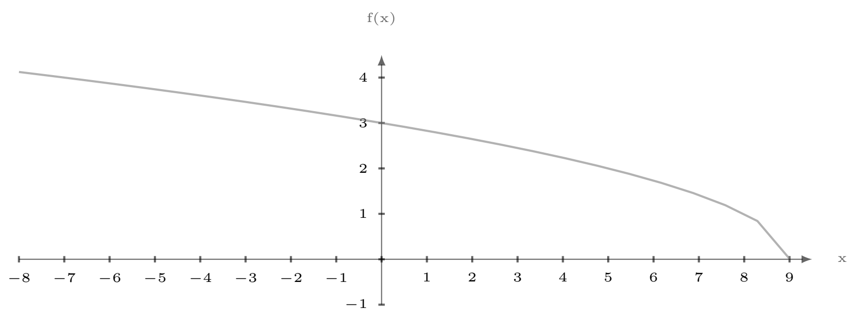
35. $y = \sqrt{x+4}$

Respuesta.-



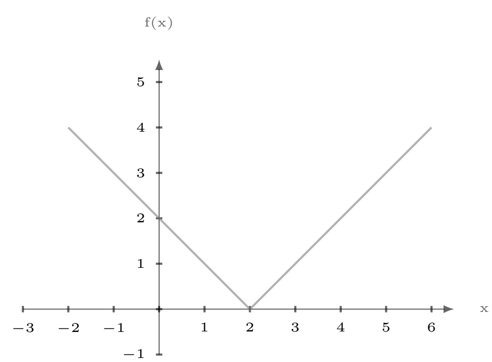
36. $y = \sqrt{9-x}$

Respuesta.-



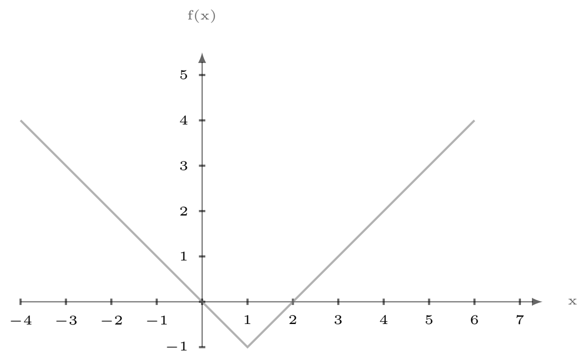
37. $y = |x-2|$

Respuesta.-



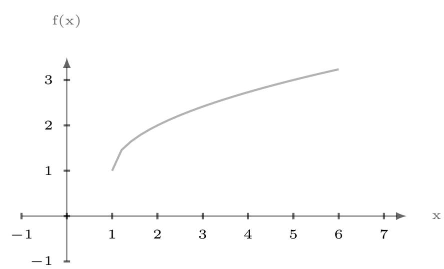
38. $y = |1-x| - 1$

Respuesta.-



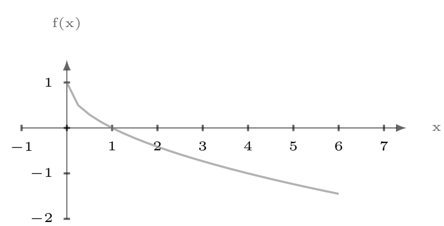
39. $y = 1 + \sqrt{x-1}$

Respuesta.-



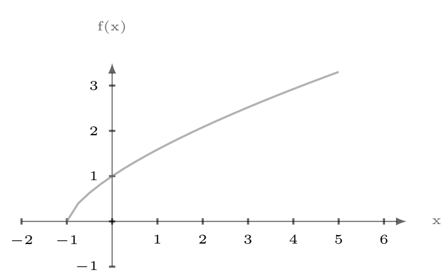
40. $y = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.-



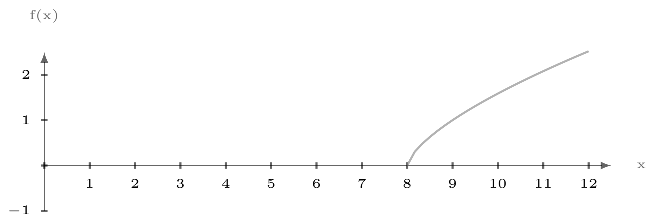
41. $y = (x+1)^{2/3}$

Respuesta.-



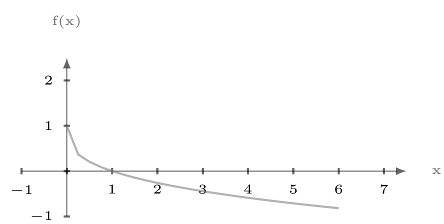
42. $y = (x-8)^{2/3}$

Respuesta.-



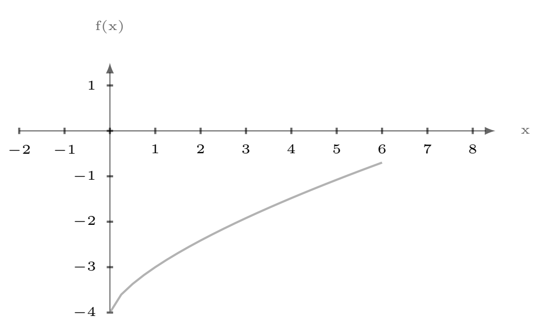
43. $y = 1 - x^{2/3}$

Respuesta.-



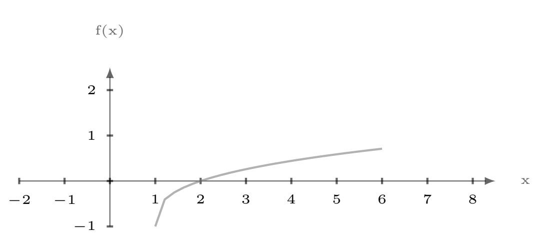
44. $y + 4 = x^{2/3}$

Respuesta.-



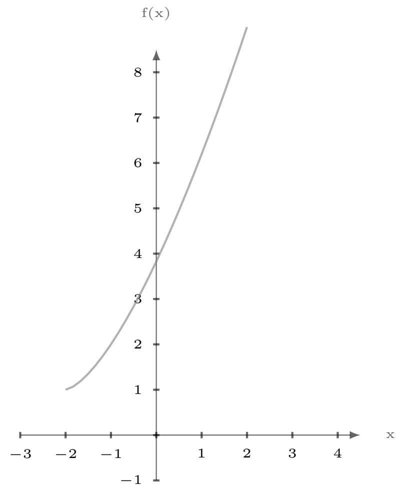
45. $y = \sqrt[3]{x-1} - 1$

Respuesta.-



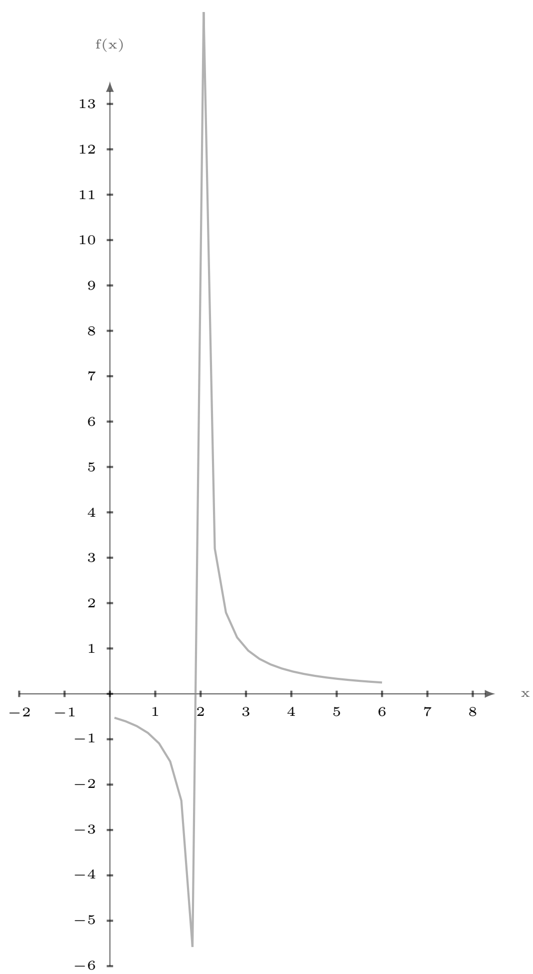
46. $y = (x+2)^{3/2} + 1$

Respuesta.-



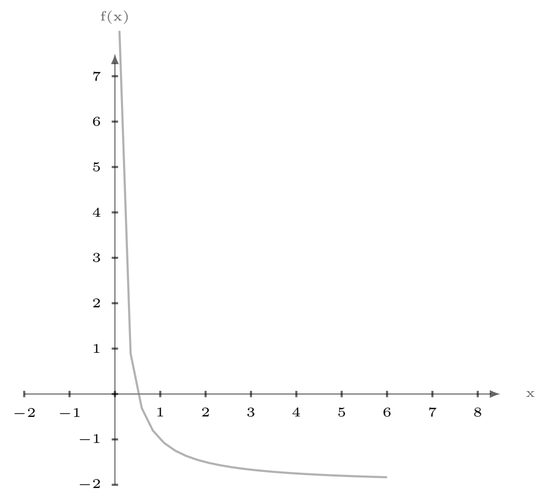
47. $y = \dfrac{1}{x-2}$

Respuesta.-



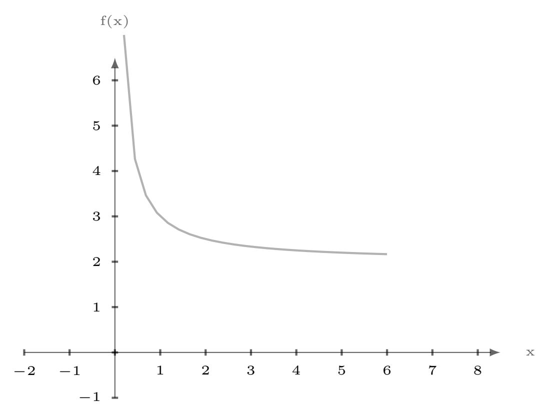
48. $y = \dfrac{1}{x} - 2$

Respuesta.-



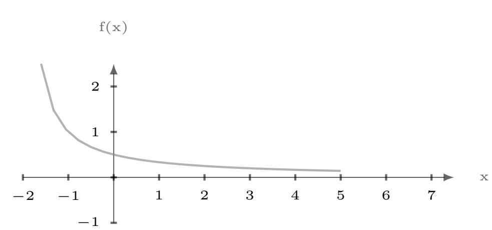
49. $y = \dfrac{1}{x} + 2$

Respuesta.-



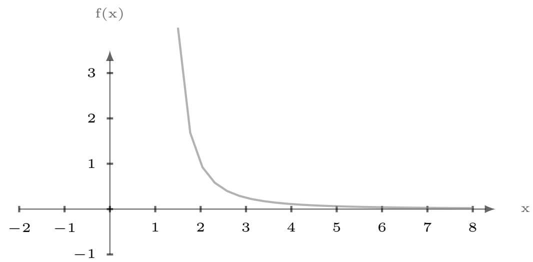
50. $y = \dfrac{1}{x+2}$

Respuesta.-



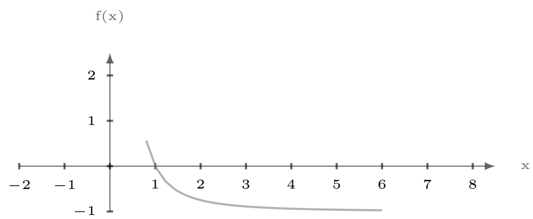
51. $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

Respuesta.-



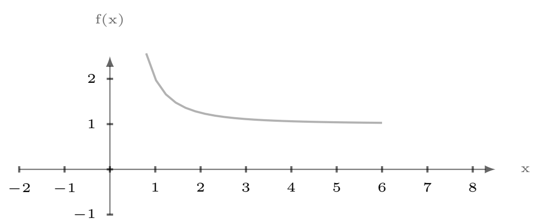
52. $y = \dfrac{1}{x^2} - 1$

Respuesta.-



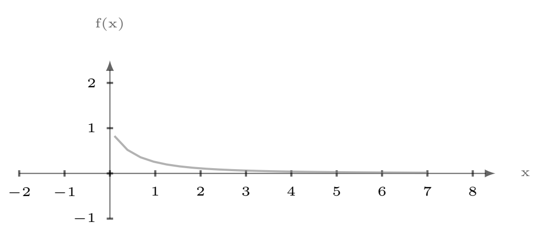
53. $y = \dfrac{1}{x^2} + 1$

Respuesta.-



54. $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Respuesta.-



55. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ con dominio $[0,2]$ y rango $[0,1]$. Determine los dominios y los rangos de las siguientes funciones, y trace sus gráficas.

a) $f(x)+2$

Respuesta.- El dominio viene dado por $[0,2]$ y el rango por $[2,3]$

b) $f(x)-1$

Respuesta.- El dominio es $[0,2]$ y el rango $[-1,0]$.

c) $2f(x)$

Respuesta.- El dominio es $[0,2]$ y el rango $[0,2]$.

d) $-f(x)$

Respuesta.- El dominio es $[0,2]$ y el rango $[-1,0]$.

e) $f(x+2)$

Respuesta.- El dominio es $[-2,0]$ y el rango $[0,1]$.

f) $f(x-1)$

Respuesta.- El dominio es $[1,3]$ y el rango $[0,1]$.

g) $f(-x)$

Respuesta.- El dominio es $[-2,0]$ y el rango $[0,1]$.

h) $-f(x+1)+1$

Respuesta.- El dominio es $[-1,1]$ y el rango $[0,1]$.

56. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $g(t)$ con dominio $[-4,0]$ y rango $[-3,0]$. Determine los dominios y los rangos de las siguientes funciones, y trace sus gráficas.

a) $g(-t)$

Respuesta.- $D:[0,4]$; $R:[-3,0]$

b) $-g(t)$

Respuesta.- $D: [-4, 0]$; $R: [0, 3]$

c) $g(t) + 3$

Respuesta.- $D: [-4, 0]$; $R: [0, 3]$

d) $1 - g(t)$

Respuesta.- $D: [-4, 0]$; $R: [1, 4]$

e) $g(-t + 2)$

Respuesta.- $D: [-2, 2]$; $R: [-3, 0]$

f) $g(t - 2)$

Respuesta.- $D: [-2, 2]$; $R: [-3, 0]$

g) $g(1 - t)$

Respuesta.- $D: [-1, 3]$; $R: [-3, 0]$

h) $-g(t - 4)$

Respuesta.- $D: [0, 4]$; $R: [0, 3]$

Cambio de escala vertical y horizontal

En los ejercicios 57 a 66 se indica por qué factor y en qué dirección se estirarán o comprimirán las gráficas de las funciones dadas. Proporcione una ecuación para cada gráfica estirada o comprimida.

57. $y = x^2 - 1$ estirada verticalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = 3(x^2 - 1)$

58. $y = x^2 - 1$, comprimida horizontalmente por un factor de 2

Respuesta.- $y = \dfrac{x^2 - 1}{2}$

59. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, comprimida verticalmente por un factor de 2

Respuesta.- $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2}$

60. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, estirada horizontalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = 1 + \dfrac{3}{x^2}$

61. $y = \sqrt{x+1}$, comprimida horizontalmente por un factor de 4

Respuesta.- $y = \sqrt{\dfrac{x}{4} + 1}$

62. $y = \sqrt{x+1}$, estirada verticalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = 3\sqrt{x+1}$

63. $y = \sqrt{4 - x^2}$, estirada horizontalmente por un factor de 2

Respuesta.- $y = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{2}}$

64. $y = \sqrt{4 - x^2}$, comprimida verticalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{4 - x^2}$

65. $y = 1 - x^3$, comprimida horizontalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = 1 - 2x^3$

66. $y = 1 - x^3$, estirada horizontalmente por un factor de 2

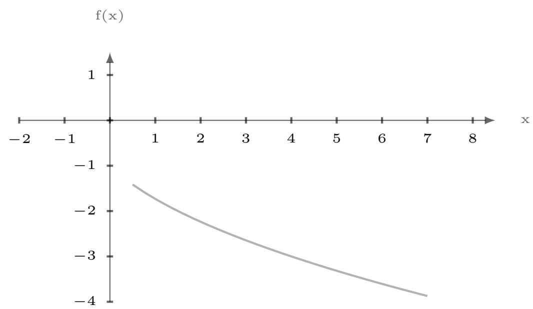
Respuesta.- $y = 2 - 2x^3$

Graficación

En los ejercicios 67 a 74, trace la gráfica de cada función, pero sin localizar puntos; esto es, utilice la gráfica de una de las funciones estándar presentadas en las figuras 1,14 a 1,17 y aplique la transformación adecuada.

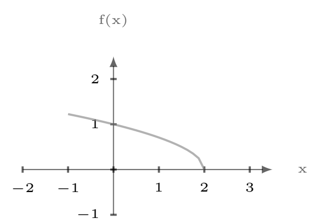
67. $y = -\sqrt{2x+1}$

Respuesta.-



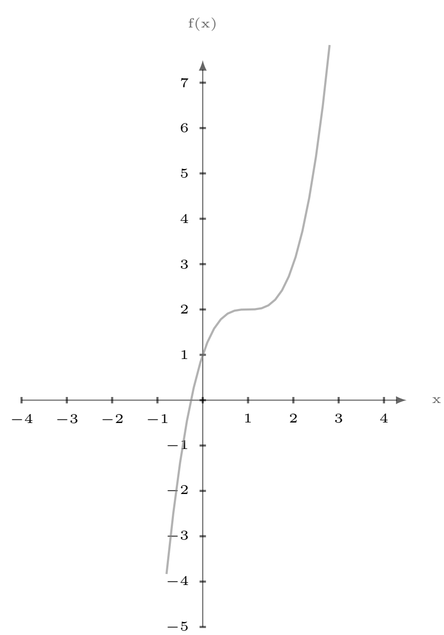
68. $y = \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}$

Respuesta.-



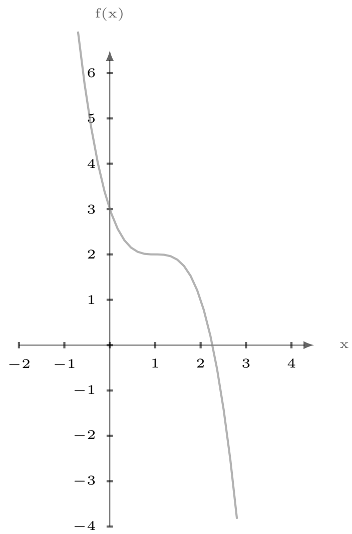
69. $y = (x-1)^3 + 2$

Respuesta.-



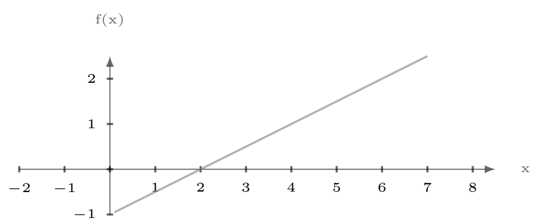
70. $y = (1-x)^3 + 2$

Respuesta.-



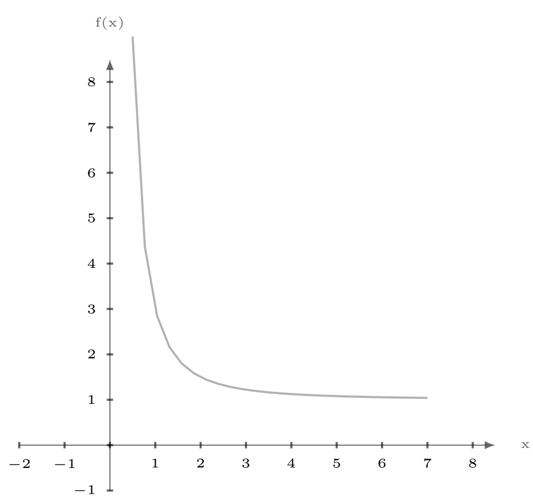
71. $y = \dfrac{1}{2x} - 1$

Respuesta.-



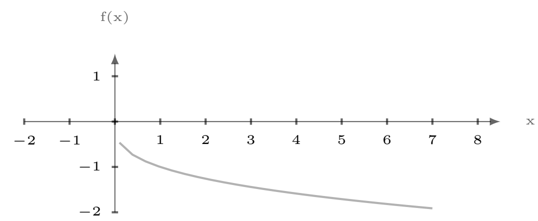
72. $y = \dfrac{2}{x^2} + 1$

Respuesta.-



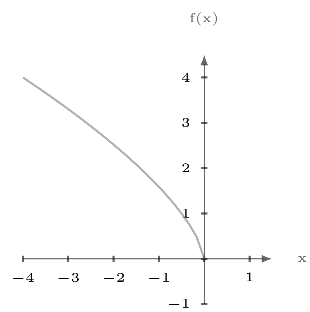
73. $y = -\sqrt[3]{x}$

Respuesta.-



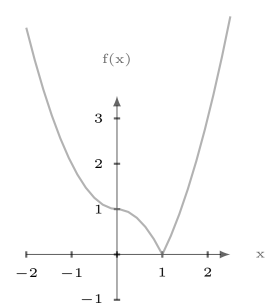
74. $y = (-2x)^{2/3}$

Respuesta.-



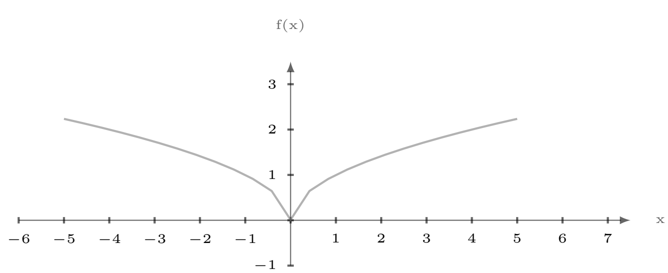
75. $y = |x^2 - 1|$

Respuesta.-



76. $y = \sqrt{|x|}$

Respuesta.-



Combinación de funciones

77. Suponga que f es una función par, g es una función impar y ambas, f y g, están definidas en toda la recta real $(-\infty, \infty)$. ¿Cuáles de las siguientes funciones (donde están definidas) son pares? ¿Cuáles son impares?.

a) fg, es impar.

b) f/g, es impar.

c) g/f, es impar.

d) $f^2 = ff$, es par.

e) $g^2 = gg$, es par.

f) $f \circ g$, es par.

g) $g \circ f$, es par.

h) $f \circ f$, es par.

i) $g \circ g$, es impar.

Esto por Michael Spivak, Calculus I.

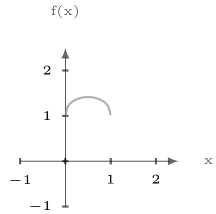
78. ¿Una función puede ser par e impar al mismo tiempo? Justifique su respuesta.

Respuesta.- Se define como función par a $f(x) = f(-x)$ y función impar como $f(-x) = -f(x)$ de donde $f(x) \neq -f(x)$ el cual nos indica que no puede ser par e impar al mismo tiempo ya que son contrarias y no compatibles.

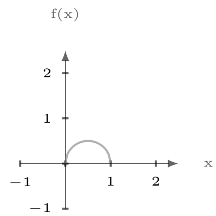
79. (Continuación del ejemplo 1). Trace las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$ junto con a) su suma, b) su producto, c) sus dos restas, d) sus dos cocientes.

Respuesta.-

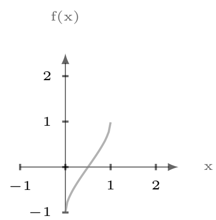
- $\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$



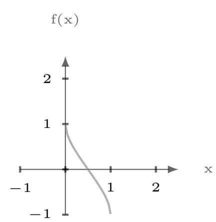
- $\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}$



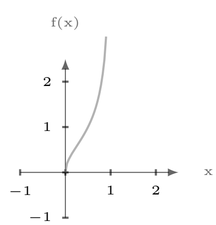
- $\sqrt{x} - \sqrt{1-x}$



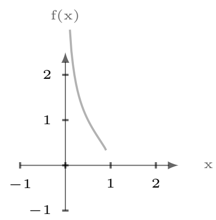
- $\sqrt{1-x} - \sqrt{x}$



- $\sqrt{x}/\sqrt{1-x}$

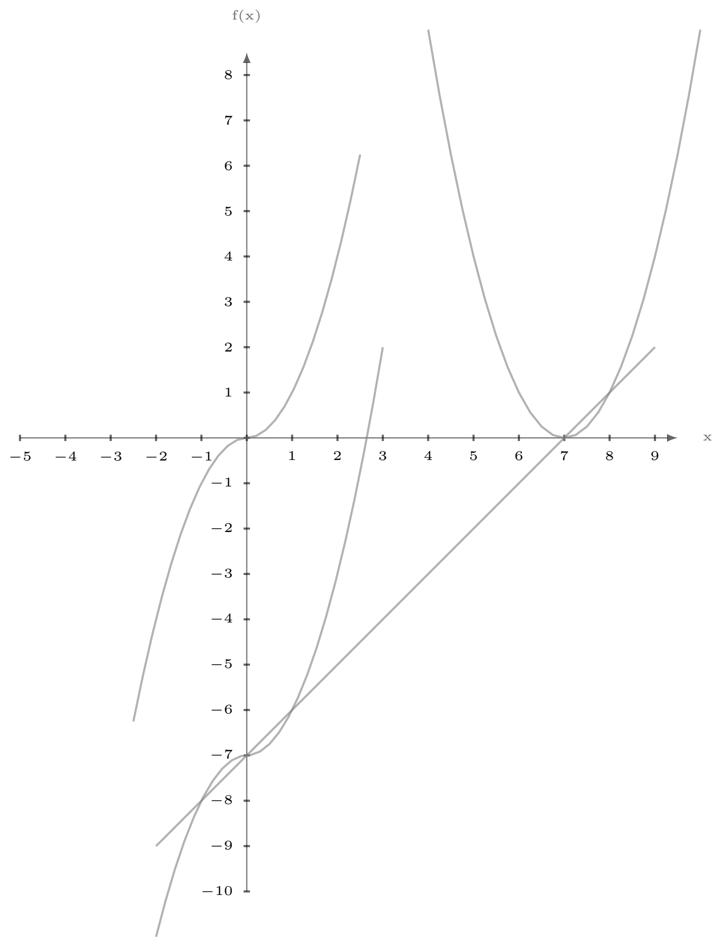


- $\sqrt{1-x}/\sqrt{x}$



80. Sean $f(x) = x - 7$ y $g(x) = x^2$. Trace las gráficas de f y g junto con $f \circ g$ y $g \circ f$

Respuesta.-



1.3. Funciones trigonométricas

Definición 1.7

$$s = r \cdot \theta$$

s es el arco subtendido por el ángulo central.
r es el radio de la circunferencia.
θ es el ángulo en radianes.

Definición 1.8 *Una función $f(x)$ es periódica si existe un número positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo valor de x. El menor de los valores posibles de p es el periodo de f.*

Propiedad 1.1

$$\cos^2\theta \sin^2\theta = 1$$

Propiedad 1.2 (Suma de ángulos)

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Propiedad 1.3 (Doble de un ángulo)

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Propiedad 1.4 (Mitad de un ángulo)

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

Propiedad 1.5 (Ley de cosenos)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Propiedad 1.6 (Desigualdades especiales)

$$-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta| \quad y \quad -|\theta| \leq 1-\cos\theta \leq |\theta|$$

1.3. Ejercicios

Radianes y grados

1. En una circunferencia con radio de 10 m, ¿Cuál es la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de a) $4\pi/5$ radianes y b) $110°$?

Respuesta.- Para a) se tiene $s = 10 \cdot 4\pi/5 = 8\pi$, luego para b) se tiene $s = 10 \cdot 110° \cdot \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{55}{9}\pi$

2. Un ángulo central en una circunferencia de radio 8 está subtendido por un arco cuya longitud es de 10π. Determine la medida del ángulo en radianes y en grados.

Respuesta.- Sea $s = r \cdot \theta$ entonces $\theta = \dfrac{s}{r}$ de donde $\theta = \dfrac{10\pi}{8} = \dfrac{5\pi}{4}$ radianes, luego $\dfrac{5\pi}{4} \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 225°$

3. Se desea construir un ángulo de 80° formando un arco en el perímetro de un disco de 12 pulgadas de diámetro, y dibujando rectas de los extremos del arco al centro del disco. ¿De qué longitud debe ser el arco, redondeando a décimos de pulgada?.

Respuesta.- Sea $r = 6\ pulg$ y $\theta = 80° \cdot = \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{4}{9}\pi$ entonces

$$s = 6 \cdot \frac{4}{9}\pi = \frac{8}{3}\pi = 8{,}4\ pulg$$

4. Si una rueda de 1 m de diámetro se hace rodar hacia adelante 30 cm sobre el suelo, ¿qué ángulo girará? Dé su respuesta en radianes (redondeando al décimo más cercano) y en grados (redondeando al grado más cercano).

Respuesta.- Sea $r = 50cm$ y $s = 30cm$ entonces

$$\theta = \frac{30\ cm}{50\ cm} = \frac{3}{5}\ rad.$$

Luego convertimos a grado de la siguiente manera

$$\theta = \frac{3}{5} \cdot \frac{180°}{\pi} = 34°37'$$

Evaluación de funciones trigonométricas

5. . Complete la siguiente tabla con los valores de la función. Si la función no está definida en el ángulo dado, indíquelo con la leyenda “IND”. No use calculadora ni tablas.

θ	$-\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\theta$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}$	0	IND	-1
$\cot\theta$	IND	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	IND	0	-1
$sec\,\theta$	-1	-2	1	IND	$-\sqrt{2}$
$csc\,\theta$	IND	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	IND	1	$\sqrt{2}$

6. . Complete la siguiente tabla con los valores de la función. Si la función no está definida en el ángulo dado, indíquelo con la leyenda "IND". No use calculadora ni tablas.

θ	$-3\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	$\pi/4$	$4\pi/6$
$\operatorname{sen}\theta$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\theta$	-1	$-\dfrac{1}{2}$	1	0	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}$	0	IND	-1
$\cot\theta$	IND	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	IND	0	-1
$sec\,\theta$	-1	-2	1	IND	$-\sqrt{2}$
$csc\,\theta$	IND	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	IND	1	$\sqrt{2}$

En los ejercicios 7 a 12, uno de los valores $\operatorname{sen}x$, $\cos x$ y $\tan x$ está dado. Determine los otros dos si x se encuentra en el intervalo indicado.

7. $\operatorname{sen}x = \dfrac{3}{5},\ x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

Respuesta.- Por le teorema de Pitágoras $r^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow x^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = \sqrt{16} = 4$ luego $\cos x = -\dfrac{4}{5},\ \tan x = -\dfrac{3}{4}$

8. $\tan x = 2,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Respuesta.- $\operatorname{sen}x = 2\ ;\ \cos x = 1$

9. $\cos x = \dfrac{1}{3},\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$

Respuesta.- $\operatorname{sen}x = -\dfrac{\sqrt{8}}{3}\ ;\ \tan x = -\sqrt{8}$

10. $\cos x = -\dfrac{5}{13},\ x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

Respuesta.- $y^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Longrightarrow y = 12$ por lo tanto $\operatorname{sen}x = \dfrac{12}{5},\ \tan x = \dfrac{12}{13}$

11. $\tan x = \dfrac{1}{2},\ x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Respuesta.- $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \cos x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

12. $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2},\ x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Respuesta.- $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \tan \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Gráfica de funciones trigonométricas.

Grafíque las funciones de los ejercicios 13 a 22. ¿Cuál es el periodo de cada función?.

13. $\operatorname{sen} 2x$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo viene dado por π

14. $\operatorname{sen}(x/2)$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo es 4π

15. $\cos \pi x$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo es 2

16. $\cos \dfrac{\pi x}{2}$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo es 4

17. $-\operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{3}$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo es 6

18. $-\cos 2\pi x$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo es 1

19. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo es 2π

20. $\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo es π

21. $\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo es 2π

22. $\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)-2$

Respuesta.- La gráfica se tiene en el apartado python. Su periodo es 2π

Grafique las funciones de los ejercicios 23 a 26 en el plano ts (t es el eje horizontal, y s, el eje vertical). ¿Cuál es el periodo de cada función? ¿Qué tipo de simetría tienen las gráficas?

23. $s = cot\ 2t$

Respuesta.- Periodo de $\pi/2$ y la simetría respecto al origen.

24. $s = -\tan \pi t$

Respuesta.- Periodo de 1 y la simetría respecto al origen.

25. $s = sec\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

Respuesta.- Periodo es 4 y la simetría respecto al eje y.

26. $s = csc\left(\dfrac{t}{2}\right)$

Respuesta.- Periodo de 4π y la simetría respecto al eje y.

27. **a)** Grafique $y = \cos x$ e $y = sec\ x$ en el mismo plano cartesiano para $-3\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. Comente el comportamiento de $sec\, x$ en relación con los signos y valores de $\cos x$.

b) Grafique $y = \operatorname{sen} x$ e $y = csc\ x$ en el mismo plano cartesiano para $\pi \leq x \leq 2\pi$. Comente el comportamiento de $csc\ x$ en relación con los signos y valores de $\operatorname{sen} x$.

28. Grafique $y = \tan x$ e $y = cot\ x$ en el mismo plano cartesiano para $-7 \leq x \leq 7$. Comente el comportamiento de $cot\ x$ en relación con los signos y valores de $\tan x$.

29. Grafique $y = \operatorname{sen} x$ e $y = [\operatorname{sen} x]$ en el mismo plano cartesiano. ¿Cuál es su dominio y rango de $[\operatorname{sen} x]$?

30. Grafique $y = \operatorname{sen} x$ e $y = [\operatorname{sen} x]$ en el mismo plano cartesiano. ¿Cuáles son el dominio y rango de $[\operatorname{sen} x]$?

Uso de fórmulas de suma

Use las fórmulas de ángulos para deducir las identidades de los ejercicios 31 a 36

31. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

Respuesta.- $\cos\left(x - \frac{\pi}{x}\right) = \cos x \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} x \cdot (-1) = \operatorname{sen} x$

32. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

Respuesta.- Análogamente al anterior ejercicio se tiene $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

33. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

Respuesta.- $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$

34. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

Respuesta.- Se puede resolver análogamente al ejercicio anterior poniendo a $\operatorname{sen}\left[x + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

35. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

Respuesta.- Deducimos que $\cos(-B) = \cos B$ y $\operatorname{sen}(-B) = -\operatorname{sen} B$, por lo tanto:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos(-B) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

36. $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$

Respuesta.- Análogamente al anterior ejercicio se tiene el resultado deseado.

37. ¿Qué pasa si tomamos $B = A$ en la identidad $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$? ¿El resultado concuerda con algo que ya conoce?

Respuesta.- Obtenemos $\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$ el cual es la formula para el doble de un ángulo.

38. ¿Qué pasa si tomamos $B = 2\pi$ en las fórmulas de suma? ¿El resultado concuerda con algo que ya conocemos?

Respuesta.- Si tomamos $\cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} A$.
Ahora tomamos $\operatorname{sen}\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} A \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos A$, No encuentro algo que concuerde con el resultado, esto por por los apuntes del libro base.

En los ejercicios 39 a 42, exprese la cantidad dad en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

39. $\cos(\pi + x) = \cos\pi \cos x - \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} B = -\cos x$

40. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos x + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$

41. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos x - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x = -\cos x$

42. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos x - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$

43. Evalúe $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$ como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

Respuesta.- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

44. Evalúe $\cos\frac{11\pi}{12}$ como $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$

Respuesta.- Tenemos que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

45. Evalúe $\cos\frac{\pi}{12}$

Respuesta.- Sea $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ entonces se tiene $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ por lo tanto

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

46. Evalúe $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}$

Respuesta.- Sea $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ entonces se tiene $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de donde

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{-1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Uso de las fórmulas para medio ángulo

Determine los valores de la función en los ejercicios 47 a 50

47. $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$

Respuesta.- Aplicando las fórmulas para la mitad de un ángulo se tiene $\dfrac{1+\cos 2\cdot\dfrac{\pi}{8}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

48. $\cos^2\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{1+\cos\dfrac{5\pi}{6}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

49. $\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

50. $\operatorname{sen}^2\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\dfrac{3\pi}{4}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

Solución de ecuaciones trigonométricas

Resuelva los ejercicios 51 a 54 para el ángulo θ, donde $0\le\theta\le 2\pi$.

51. $\operatorname{sen}^2\theta=\dfrac{3}{4}$

Respuesta.- Sea $\operatorname{sen}^2\theta=\dfrac{3}{4}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{sen}\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ entonces, se cumple para $\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}$

52. $\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta$

Respuesta.- Viene dado por $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$

53. $\operatorname{sen} 2\theta - \cos\theta = 0$

Respuesta.- $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$

54. $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

Respuesta.- $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5\pi}{3}$

Teoría y ejemplos

55. Fórmula de la tangente de una suma. La fórmula estándar para la tangente de la suma de dos ángulos es

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

Deduzca la fórmula.

Respuesta.- Sabemos que $\tan(A+B) = \dfrac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos(A+B)}$, entonces por la fórmula de suma de ángulos se tiene $\dfrac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$, luego multiplicamos por $\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}$ y nos queda $\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \dfrac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}}$ de donde nos queda

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

56. Deduzca la fórmula para $\tan(A-B)$

Respuesta.- Análogamente al ejercicio anterior tenemos

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

57. Aplique la ley de los cosenos en el triángulo de la siguiente figura para deducir la fórmula de $\cos(A-B)$.

Respuesta.- Sea $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ entonces $c^2 = 2 - 2\cos(A-B)$. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $c^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B)^2$ de donde nos que $c^2 = 2 - 2(\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)$. Por lo tanto

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

58. **a)** Aplique la fórmula de $\cos(A-B)$ a la identidad $\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$, para obtener la fórmula de suma de $\operatorname{sen}(A+B)$

Respuesta.- Aplicando tenemos $\operatorname{sen}\theta = \cos\dfrac{\pi}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$.

b) Deduzca la fórmula de $\cos(A+B)$ sustituyendo B por $-B$ en la fórmula de $\cos(A-B)$ del ejercicio 35.

Respuesta.- Sabemos que el $\cos(-B) = \cos(B)$ por lo tanto $\cos[A-(-B)] = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A(\operatorname{sen} B)$

59. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$, y el ángulo $C = 60°$. Determine la longitud del lado c.

Respuesta.- Por el teorema de cosenos tenemos $c^2 = 4 + 9 - 12\cos\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{13 - 12\cos\dfrac{\pi}{3}} = \sqrt{7}$

60. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$, y el ángulo $C = 40°$. Determine la longitud del lado c.

Respuesta.- $c = \sqrt{13 - 12\cos\dfrac{2\pi}{9}} = 1{,}95$

61. Ley de los senos. La ley de los senos afirma que si a, b y c son los lados opuestos a los ángulos A, B y C en un triángulo, entonces,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Use las siguientes figuras y si lo requiere, la identidad $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, para deducir la ley.

Respuesta.- De la figura en el texto vemos que $\operatorname{sen} B = \dfrac{h}{c}$. Si C es un ángulo agudo, entonces $\operatorname{sen} C = \dfrac{h}{b}$. Por otro lado, si C es obtuso, entonces $C = \operatorname{sen}(\pi - C) = \dfrac{h}{b}$, por lo tanto en cualquier caso, $h = b\operatorname{sen} C = c\operatorname{sen} B \longrightarrow ah = ab\operatorname{sen} C = ac\operatorname{sen} B$.
Luego por la ley de cosenos, $C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ y $B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, Además, dado que la suma de los ángulos interiores de un triangulo es π, tenemos

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}[\pi-(B+C)] = \operatorname{sen}(B+C) = \operatorname{sen} B\cos C + \cos B\cos C = \frac{h}{bc}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{h}{b} = \frac{ah}{bc}$$

entonces

$$ah = bc\operatorname{sen} A$$

Por último combinando los resultados $ah = ab\operatorname{sen} C$, $ah = ac\operatorname{sen} B$ y $ah = bc\operatorname{sen} A$ y dividiendo por abc tenemos

$$\frac{h}{bc} = \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

62. Un triangulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$ y el ángulo $C = 60°$. Obtenga el seno del ángulo B utilizando la ley de los senos.

Respuesta.- Sea $\dfrac{\operatorname{sen} B}{3} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{c}$ pero sabemos que $c = \sqrt{7}$ entonces $\operatorname{sen} B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

63. Un triángulo tiene un lado $c = 2$ y ángulos $A = \pi/4$ y $B = \pi/3$. Determine la longitud a del lado opuesto a A.

Respuesta.- Sea $b^2 = a^2 + 4 - 4a\cos\dfrac{\pi}{3} = a^2 - 2a + 4$ luego por la ley de senos $\dfrac{\sqrt{2}/2}{a} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{b} \implies b = \sqrt{\dfrac{3}{2}}a$, así $a^2 + 4a - 8 = 0$. Por la fórmula cuadrática y el hecho que $a > 0$, tenemos

$$a = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4(1)(-8)}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 4}{2}$$

64. La aproximación $\operatorname{sen} x \approx x$ Siempre es útil saber que cuando x se mide en radianes, $\operatorname{sen} x \approx x$ para valores numéricamente pequeños de x. En la sección 3,11 veremos por qué es válida esta aproximación. El error de aproximación es menor que 1 en 5000 si $|x| < 0{,}1$.

a) Con su calculadora graficadora en modo de radianes, trace las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x$, juntas en una ventana, alrededor del origen. ¿Qué observa conforme x se aproxima al origen?

Respuesta.- Vemos que las dos funciones coinciden.

b) Con su calculadora graficadora en modo de grados, trace las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x$, juntas en una ventana, alrededor del origen. ¿Qué tan diferente es la figura obtenida en modo de radianes?

Respuesta.- Las curvas parecen líneas rectas que se cruzan cerca del origen cuando la calculadora está en modo de grados.

Curvas senoidales generales.

Para

$$f(x) = A\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

Identifique A, B, C y D para las funciones seno de los ejercicios 65 a 68 y trace sus gráficas.

65. $y = 2\operatorname{sen}(x + \pi) - 1$

Respuesta.- $A = 2,\ B = 1\ C = -\pi,\ D = -1$

66. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi x - \pi) + \dfrac{1}{2}$

Respuesta.- $A = 1/2,\ B = 2,\ C = 1,\ D = 1/2$

67. $y = -\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) + \dfrac{1}{\pi}$

Respuesta.- $A = -2/\pi,\ B = 4,\ C = 0,\ D = 1/\pi$

68. $y = \dfrac{L}{2\pi}\operatorname{sen}\dfrac{2\pi t}{L},\ L > 0$

Respuesta.- $A = L/2\pi,\ B = L,\ C = 0,\ D = 0$

Exploración con Computadora

En los ejercicios 69 a 72, investigará qué ocurre gráficamente con la función general seno

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

a medida que se modifican los valores de las constantes A, B, C y D. Use un software matemático para ejecutar los pasos de los siguientes ejercicios

69. El periodo B. Considere las constantes $A = 3$, $C = D = 0$.

a) Grafique $f(x)$ para los valores $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ en el intervalo $-4\pi \leq x \leq 4\pi$. Describa qué le sucede a la gráfica de la función general seno conforme aumenta el periodo.

Respuesta.- La gráfica se alarga conforme aumenta el periodo.

b) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores negativos de B? Inténtelo con $B = -3$ y $B = -2\pi$

Respuesta.- De igual forma al inciso a) la gráfica se expande.

70. El desplazamiento horizontal C Considere las constantes $A = 3, B = 6$ y $D = 0$.

a) Grafique $f(x)$ para los valores $C = 0$, 1 y 2 sobre el intervalo $-4\pi \leq x \leq 4\pi$. Describa qué le sucede a la gráfica de la función general seno, conforme C aumenta otorgándole valores positivos.

Respuesta.- La gráfica se desplaza C unidades hacia la derecha.

b) ¿Qué le sucede a la gráfica para valores negativos de C?

Respuesta.- El gráfico se desplaza hacia la izquierda C unidades.

c) ¿Cuál es el menor valor positivo que debemos asignar a C, de manera que la gráfica no se desplace horizontalmente? Confirme su respuesta trazando una gráfica.

Respuesta.- $|C| = 6$

71. El desplazamiento vertical D Considere las constantes $A = 3, B = 6, C = 0$.

a) Grafique $f(x)$ para los valores $D = 0, 1$ y 3 sobre el intervalo $-4\pi \leq x \leq 4\pi$. Describa qué le sucede a la gráfica de la función general seno, conforme D aumenta otorgándole valores positivos.

Respuesta.- La gráfica se desplaza horizontalmente hacia arriba.

b) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores negativos de D?

Respuesta.- Lo contrario al inciso a).

72. La amplitud A Considere las constantes $B = 6, C = D = 0$.

a) Describa qué le sucede a la gráfica de la función general seno, conforme A aumenta otorgándole valores positivos. Confirme su respuesta graficando $f(x)$ para los valores $A = 1, 5$ y 9.

Respuesta.- A medida que A crece la amplitud también lo hace.

b) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores negativos de A?

Respuesta.- A medida que A disminuye entonces la amplitud crece negativamente.

1.4. Ejercicios

Se aplicará el software python, que se encuentra en el apartado Python.

1.5. Ejercicios de práctica

1. Exprese el área y el perímetro de un círculo como funciones de su radio. Luego, exprese el área del círculo como una función de su perímetro.

Respuesta.- $P = 2\pi r$ y $A = \pi r^2$ luego $A = \pi \left(\dfrac{P}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{P^2}{4\pi}$

2. Exprese el radio de una esfera como una función de su área superficial. Luego, exprese el área superficial de la esfera como una función de su volumen.

Respuesta.- $A_s = 4\pi r^2$ de donde $r = \sqrt{\dfrac{A_s}{4\pi}}$. Luego sea $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ de donde $A_s = 4\pi \left(\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}\right)^2$

3. . Un punto P en el primer cuadrante está sobre la parábola $y = x^2$. Exprese las coordenadas de P como funciones del ángulo de inclinación de la recta que une P con el origen.

Respuesta.-