

Funciones Continuas

Definición 1.1 La función f es continua en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x , si $0 < |x - a| < \delta$.
Pero en este caso, en que el límite es $f(a)$, la frase

$$0 < |x - a| < \delta$$

puede cambiarse por la condición más sencilla

$$|x - a| < \delta$$

puesto que si $x = a$ se cumple ciertamente que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

TEOREMA 1.1 Si f y g son continuas en a , entonces

- (1) $f + g$ es continua en a .
- (2) $f \cdot g$ es continua en a .
- Además, si $g(a) \neq 0$, entonces (3) $1/g$ es continua en a

Demostración.- Puesto que f y g son continuas en a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que $f + g$ es continua en a .
Para $f \cdot g$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$$

Por último para $1/g$ tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} 1/g = 1/g(a), \quad \text{para } g(a) \neq 0$$

TEOREMA 1.2 Si g es continua en a , y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a .

Demostración.- Sea $\epsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \epsilon, \text{ es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de f para estimar cómo de cerca tiene que estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que f es continua en $g(a)$, existe un $\delta' > 0$ tal que para todo y ,

$$\text{Si } |y - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(y) - f(g(a))| < \epsilon. \quad (1)$$

En particular, esto significa que

$$\text{Si } |g(x) - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon. \quad (2)$$

Aplicamos ahora la continuidad de g para estimar cómo de cerca tiene que estar x de a para que se cumpla la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta'$. El número δ' es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar δ' como el epsilon de la definición de continuidad de g en a . Deducimos que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \delta', \quad (3)$$

combinando (2) y (3) vemos que para todo x ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

Definición 1.2 Si f es continua en x para todo x en (a, b) , entonces se dice que f es continua en (a, b) si

$$f \text{ es continua en } x \text{ para todo } x \text{ de } (a, b), \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b). \quad (2)$$

TEOREMA 1.3 Supóngase que f es continua en a , y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$.

Demostración.- Considérese el caso $f(a) > 0$ puesto que f es continua en a , si $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Puesto que $f(a) > 0$ podemos tomar a $f(a)$ como el epsilon. Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo x ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a)$$

Y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.

Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\epsilon = -f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$.

1.1. Problemas

1. ¿para cuáles de las siguientes funciones f existe una función F de dominio R tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f ?

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Respuesta.- Sabiendo que el límite cuando x tiende a 2 existe, entonces existe una función F de dominio R tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f .

(ii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Respuesta.- No existe F , ya que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

(iii) $f(x) = 0$, x irracional.

Respuesta.- Existe F de dominio R tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f .

(iv) $f(x) = 1/q$, $x = p/q$ racional en fracción irreducible. Respuesta.- No existe F , ya que $F(a)$ tendría que ser 0 para los a irracionales, y entonces F no podría ser continua en a si a es racional.

2. ¿En qué puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?

Respuesta.- Problema 4-17.

Para (i), (ii) y (iii) son continuas para todos los puntos menos para los enteros. Para (iv) es continua en todos los puntos. Para (v) es entera para todos los puntos excepto para 0 y $1/n$ para n en los enteros.

Problema 4-19.

(i) todos los puntos que no sean de la forma $n + k/10$ para todos los enteros k y n . El (ii) para todo los puntos que no sea de la forma $n + k/100$ para todos los enteros k y n . (iii) y (iv) para ningún punto. (v) para todos los puntos que el decimal no termine en 7999... Y (vi) para todos los puntos que el decimal contenga al menos un 1.

3. (a) Supóngase que f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo x . Demostrar que f es continua en 0. [Observe que $f(0)$ debe ser igual a 0.]

Demostración.- Supongamos que $|f(x)| \leq |x|$. afirmamos que, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. De hecho dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \epsilon$. Si $|x| < \delta$ entonces $|f(x)| \leq |x| < \delta = \epsilon$. Esto prueba que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Para concluir que f es constante en 0, tenga en cuenta que, como se señala en la pregunta, aplicar $|f(x)| \leq |x|$ para todo x , en $x = 0$ se da $|f(0)| \leq 0$ y en consecuencia $f(0) = 0$. Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ implica que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, así f es constante en 0.

- (b) Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún $a \neq 0$.

Respuesta.- Sea $f(x) = 0$ para x irracional, y $f(x) = x$ para x racional.

- (c) Supóngase que g es continua en 0, $g(0) = 0$, y $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demostrar que f es continua en 0.

Demostración.- La condición $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x y $g(0) = 0$ implica que $ff(0) = 0$, así que sólo tenemos que demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$, luego ya que g es continua en 0, existe un $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta$ entonces $|g(x) - g(0)| = |g(x)| < \epsilon$. Usando $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x , vemos que $|x| < \delta$ implica $|f(x)| \leq |g(x)| < \epsilon$. Por lo tanto esto demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

4. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

Respuesta.- Sea $f(x) = 1$ para x racional, y $f(x) = -1$ para x irracional.

5. Para todo número a , hallar la función que sea continua en a , pero no lo sea en ningún otro punto.

Respuesta.- Sea $f(x) = a$ para x irracional, y $f(x) = x$ para x racional.

6. (a) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, pero continua en todos los demás puntos.

Respuesta.- Define f como sigue,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

- (b) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, y en 0, pero sea continua en ningún otro punto.

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

7. Supóngase que f satisface $(x + y) = f(x) + f(y)$, y que f es continua en 0. Demostrar que f es continua en a para todo a .

Demostración.- Sea $f(x+0) = f(x) + f(0)$, por lo tanto $f(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + f(h) - f(a) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(h) - f(0) = 0\end{aligned}$$

8. Supóngase que f es continua en a y $f(a) = 0$. Demostrar que si $\alpha \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinta de 0 en algún intervalo abierto que contiene a a .

Demostración.- Sabiendo que $(f + \alpha)(a) \neq 0$, entonces por el teorema 3, $f + \alpha$ es distinto de cero en algún intervalo que contiene a a .

9. (a) Supóngase que f no es continua en a . Demostrar que para algún $\epsilon > 0$ existen números x tan próximos como se quiere de a con $|f(x) - f(a)| > \epsilon$.

Demostración.- Lógicamente equivalente a la definición de continuidad se tiene

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x |x - a| < \delta \text{ y } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

Existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| > \epsilon$. Luego sea $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$, entonces tenemos $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon > \epsilon'$.

- (b) Dedúzcase que para algún $\epsilon > 0$, o bien existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) < f(a) - \epsilon$ o bien existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) > f(a) + \epsilon$.

Demostración.- La demostración es directa aplicando la reciproca de la definicion de continuidad. Como se vio en el inciso a.

10. (a) Demostrar que si f es continua en a , entonces también lo es $|f|$.

Demostración.- Ya que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l|$ como se vio en el problema 5-16, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |f(a)| = |f|(a).$$

- (b) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = E + O$, donde E es par y continua y O es impar y continua.

Demostración.- Por el problema 13 del capítulo 3 (funciones) mostramos que E y O son continuas si f lo es.

- (c) Demostrar que si f y g son continuas, también lo son $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$.

Demostración.- Por la parte a) y sabiendo que

$$\begin{aligned}\max(f, g) &= \frac{f + g + |f - g|}{2} \\ \min(f, g) &= \frac{f + g - |f - g|}{2}\end{aligned}$$

- (d) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = g - h$, donde g y h son no negativas y continuas.

Demostración.- Por el problema 15 del capítulo 3 (funciones) podemos comprobar que $f = g - h$ siempre que f sea continua.

- 11.** Demostrar el teorema 1(3) aplicando el teorema 2 y la continuidad de la función $f(x) = 1/x$.

Demostración.- Sea $f \circ g = \frac{1}{g}$ y f es continua en $g(a)$ para $g(a) \neq 0$, entonces por el teorema 2, se tiene que $\frac{1}{g}$ es continua en a para $g(a) \neq 0$.

- 12. (a)** Demostrar que si f es continua en l , y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(l)$.

Demostración.- Sea

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

entonces G es continua en a , ya que $G(a) = l = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} G(x)$. Así $f \circ G$ es continua en a esto por el teorema 2. Luego

$$f(l) = f(G(a)) = (f \circ G)(a) = \lim_{x \rightarrow a} = \lim_{x \rightarrow a} (f \circ G)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)).$$

- (b) Demostrar que si no se supone la continuidad de f en l , entonces no se cumple, por lo general, que $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$.

Demostración.-