1

Funciones Continuas

Definición 1.1 *La función f es continua en a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$.
Pero en este caso, en que el límite es $f(a)$, la frase

$$0 < |x - a| < \delta$$

puede cambiarse por la condición más sencilla

$$|x - a| < \delta$$

puesto que si $x = a$ se cumple ciertamente que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

TEOREMA 1.1 *Si f y g son continuas en a, entonces*

(1) *$f + g$ es continua en a.*
(2) *$f \cdot g$ es continua en a.*
Además, si $g(a) \neq 0$, entonces (3) *$1/g$ es continua en a*

Demostración.- Puesto que f y g son continuas en a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que $f + g$ es continua en a.
Para $f \cdot g$ se tiene que

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = f(a) \cdot fg(a) = (f \cdot g)(a)$$

Por último para $1/g$ tenemos que

$$\lim_{x \to a} 1/g = 1/g(a), \qquad para\ g(a) \neq 0$$

TEOREMA 1.2