

Algunas aplicaciones de la integración

1.1. La integral como función de límite superior. Integrales indefinidas

Si f es no negativa en $[a, b]$, la integral indefinida A es creciente, puesto que se tiene

$$A(y) - A(x) = \int_a^y f(t) dx - \int_a^x f(t) dx = \int_x^y f(t) dx \geq 0$$

siempre que $a \leq x \leq b$.

Definición 1.1 (Definición de función convexa) Una función g se llama convexa en un intervalo $[a, b]$ si, para todo x e y en $[a, b]$ y para cada α tal que $0 < \alpha < 1$, tenemos

$$g(z) \leq \alpha g(y) + (1 - \alpha)g(x), \text{ donde } z = \alpha y + (1 - \alpha)x$$

Decimos que g es cóncava en $[a, b]$ si es válida la desigualdad invertida,

$$g(z) \geq \alpha g(y) + (1 - \alpha)g(x), \text{ donde } z = \alpha y + (1 - \alpha)x$$

TEOREMA 1.1 Sea $A(x) = \int_a^x f(t) dt$. Entonces, A es convexa en cada intervalo donde f es creciente, y cóncavo en cada intervalo donde f es decreciente.

Demostración.- Supongamos que f es creciente en $[a, b]$, elijamos $x < y$, y sea $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$. Tenemos que demostrar que $A(z) \leq \alpha A(y) + (1 - \alpha)A(x)$.

1.2. Ejercicios

Calcular las integrales de los ejercicios 1 al 16.

$$1. \int_0^x (1 + t + t^2) dt = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

$$2. \int_0^{2y} (1+t+t^2) dt = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2y} = 2y + 2y^2 + \frac{8y^3}{3}.$$

$$3. \int_{-1}^{2x} (1+t+t^2) dx = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{2x} = 2x + 1 + \frac{4x^2 - 1}{2} + \frac{8x^3 + 1}{3} = \frac{16x^3 + 12x^2 + 12x + 5}{6}.$$

$$4. \int_1^{1-x} (1-2t+3t^2) dx = \left(t + t^2 + t^3 \right) \Big|_1^{1-x} = 1-x-1+(1-x)^2+1+(1-x)^3-1 = (1-x)^3 + (1-x)^2 + (1-x) - 1 = -x^3 + 2x^2 - 2x$$

$$5. \int_{-2}^x t^2(t^2+1) dt = \int_{-2}^x (t^4+t^2) dt = \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-2}^x = \left(\frac{x^5}{5} \right) - \left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{136}{15}.$$

$$6. \int_x^{x^2} (t^2+1)^2 dt.$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} (t^2+1)^2 dt &= \int_x^{x^2} (t^4+2t^2+1) dt \\ &= \left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t \right) \Big|_x^{x^2} \\ &= \left(\frac{x^{10}}{5} + \frac{2x^6}{3} + x^2 \right) - \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \\ &= \frac{x^{10}}{5} + \frac{2x^6}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x^2 - x \end{aligned}$$

$$7. \int_1^x (t^{1/2}+1) dt, \quad x > 0.$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \int_1^x (t^{1/2}+1) dt &= \left(\frac{2t^{3/2}}{3} + t \right) \Big|_1^x \\ &= \left(\frac{2x^{3/2}}{3} + x \right) - \left(1 + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{2x^{3/2}}{3} + x - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$8. \int_x^{x^2} (t^{1/2}+t^{1/4}) dt, \quad x > 0.$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
 \int_x^{x^2} (t^{1/2} + t^{1/4}) dt &= \left(\frac{2t^{2/3}}{3} + \frac{4t^{5/4}}{5} \right) \Big|_x^{x^2} \\
 &= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^{5/2}}{5} \right) - \left(\frac{2x^{2/3}}{3} + \frac{4x^{5/4}}{5} \right) \\
 &= \frac{2}{3}(x^3 - x^{3/2}) + \frac{4}{5}(x^{5/2} - x^{5/4})
 \end{aligned}$$

$$9. \int_{-\pi}^x \cos t \, dt = \left. \sin t \right|_{-\pi}^x = \sin x.$$

$$10. \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{2} + \cos t \right) dt = \left(\frac{t}{2} + \sin t \right) \Big|_0^{x^2} = \frac{x^2}{2} + \sin x^2.$$

$$11. \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{2} - \sin t \right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \cos x + \cos x^2.$$

$$12. \int_0^x (u^2 + \sin 3u) \, du = \int_0^x u^2 \, du + \frac{1}{3} \int_0^{3x} \sin u \, du \Big|_0^{3x} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos 3x.$$

$$13. \int_x^{x^2} (v^2 + \sin 3v) \, dv = \int_x^{x^2} v^2 \, dv + \int_x^{x^2} \sin 3v \, dv = \left(\frac{v^3}{3} - \frac{v^3}{3} \right) + \frac{1}{3} \int_{3x}^{3x^2} \sin v \, dv = \frac{1}{3}(x^6 - x^3 + \cos 3x - \cos^2 3x).$$

$$14. \int_0^y (\sin^2 x + x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^y (1 - \cos 2x) \, dx + \int_0^y x \, dx = \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \int_0^y \cos x \, dx + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{4} \sin y + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

$$15. \int_0^x \left(\sin 2w + \cos \frac{w}{2} \right) dw.$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \left(\sin 2w + \cos \frac{w}{2} \right) dw &= \frac{1}{2} \int_0^{2x} \sin w \, dw + 2 \int_0^{\frac{x}{2}} \cos w \, dw \\
 &= \frac{1}{2} (-\cos w) \Big|_0^{2x} + 2(\sin w) \Big|_0^{\frac{x}{2}} \\
 &= -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + 2 \sin \frac{x}{2}.
 \end{aligned}$$

$$16. \int_{-\pi}^x \left(\frac{1}{2} + \cos t \right)^2 dt.$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^x \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)^2 dt &= \int_{-\pi}^x \left(\frac{1}{4} + \cos t + \cos^2 t\right) dt \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^x t dt + \int_{-\pi}^x \cos t dt + \int_{-\pi}^x \cos^2 t dt \\
 &= \frac{1}{4}(x + \pi) + [\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(-\pi)] + \int \int_{-\pi}^x \frac{1}{2}[1 + \cos(2t)] dt \\
 &= \frac{1}{4}(x + \pi) + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}(x + \pi) + \frac{1}{4} \int_{-2\pi}^{2x} \cos t dt \\
 &= \frac{3}{4}(x + \pi) + \operatorname{sen} x + \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen} x \Big|_{-2\pi}^{2x}\right) \\
 &= \frac{3}{4}(x + \pi) + \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x.
 \end{aligned}$$

17.