Ejercicios Capitulo 7

Christian Limbert Paredes Aguilera

2022-11-21

Ejercicios capitulo 7

7.1

Una forma de mercadotecnia envía un cuestionario a 1000 residentes de cierto suburbio de una ciudad para determinar sus preferencias como compradores. De los 1000 residentes, 80 responden el cuestionario. ¿Lo anterior constituye una muestra aleatoria? Discutir los méritos de este procedimiento para obtener una muestra aleatoria.

7.2

En una planta de armado automotriz se seleccionarán 50 de los primeros 1000 automóviles de un nuevo modelo para ser inspeccionados por el departamento de control de calidad. El gerente de la planta decide inspeccionar un automóvil cada vez que terminan de armarse 20. ¿Este proceso dará como resultado una muestra aleatoria? Comente.

Respuesta.- Dado que el experimento se repite bajo las mismas condiciones, con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Podemos decir que este experimento podría ser sin sesgo.

7.3

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituye una muestra aleatoria, obtener las funciones de verosimilitud de las siguientes distribuciones:

a)

De Poisson, con parámetro λ;

Respuesta.- Sea $p(x,\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x}$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$, entonces la función de verosimilitud será

$$L(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!}, \; x = 1, 2, \ldots$$

b)

Hipergeométrica, con parámetro p;

Respuesta.- Si p = k/N, puede escribirse la función de probabilidad hipergeométrica como una función de probabilidad binomial y dado que el único parámetro es p entonces, $p(x,n,p) = \dfrac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, \ldots$

c)

Uniforme en el intervalo (a,b);

Respuesta.- Sea $\dfrac{1}{b-a}$ para $a \leq x \leq b$ una función de densidad de probabilidad uniforme. Entonces, la función de verosimilitud será:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}$$

d)

$N(\mu,\sigma)$

Respuesta.- Sea $f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, la función de densidad de probabilidad. Entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned}
L(x_1,x_2,\ldots x_n;\mu,\sigma) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum\left[\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}
\end{aligned}$$

7.4

Repetir el ejercicio 7.3 para las siguientes distribuciones:

a)

Gama con parámetro α y θ.

Respuesta.- Sea, $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}$ la distribución de densidad gama, entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned}
L(x_1,x_2,\ldots x_n;\alpha,\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x_i/\theta} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x_1/\theta}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x_2/\theta}\cdots\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x_n/\theta} \\
&= \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}\right)^n\cdot e^{\left(-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta}\right)}.
\end{aligned}$$

b)

Weibull con parámetro α y θ.

Respuesta.- Sea $f(x;\alpha,\theta) = \dfrac{\alpha}{\theta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\theta)^\alpha}$ la distribución de densidad de probabilidad Weibull, entonces la función de verosimilitud sera:

$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \dots x_n; \alpha, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_i^{\alpha-1} e^{-(x_i/\theta)^\alpha} \\
&= \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_1^{\alpha-1} e^{-(x_1/\theta)^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_2^{\alpha-1} e^{-(x_2/\theta)^\alpha} \cdots \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_n^{\alpha-1} e^{-(x_n/\theta)^\alpha} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\theta^\alpha}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} \cdot e^{\left[-\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\alpha\right]}.
\end{aligned}
$$

7.5

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población cuya distribución es normal con media μ y varianza σ^2. De las siguientes, ¿cuáles son estadísticas?

a)

$\sum X_i - \mu$.

Respuesta.- No es estadística ya que no está definida X_i ni se conoce el valor de μ.

b)

$\sigma X_1 + \sigma X_2$.

Respuesta.- No es estadística ya que no se conoce el valor de sigma.

c)

$X_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Respuesta.- Es estadística porque X_i está definida entre 1 y n.

d)

$X_1^2 + X_2^2 - e^{X_3}$.

Respuesta.- Es estadística.

e)

$\dfrac{X_i}{\sigma},\ i = 1, 2, \dots, n$.

Respuesta.- No es estadística porque no se conoce el valor de σ.

f)

$\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

Respuesta.- Es estadística porque es una función completa.

7.6

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente. Mediante el empleo de la función generadora de momentos, demostrar que la suma de estas variables también es una variable aleatoria de Poisson con parámetros $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Respuesta.- Sea,

$$m_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)}$$

la función generadora de momentos de la distribución Poisson, entonces por el teorema 7.1, con $a_i = 1$. La suma de las variables también es una variable aleatoria de Poisson. Es decir, sea

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

de donde,

$$\begin{aligned}
m_Y(t) &= m_{X_1}(t) m_{X_2}(t) \cdots m_{X_n}(t) \\
&= e^{\lambda_1\left(e^t-1\right)} e^{\lambda_2\left(e^t-1\right)} \ldots e^{\lambda_n\left(e^t-1\right)} \\
&= e^{\left[\lambda_1\left(e^t-1\right)+\lambda_2\left(e^t-1\right)+\ldots+\lambda_n\left(e^t-1\right)\right]} \\
&= e^{\left[\left(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n\right)\left(e^t-1\right)\right]}
\end{aligned}$$

7.7

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente. Demostrar que la diferencia entre X_1 y X_2 no es una variable aleatoria de Poisson.

Respuesta.- Sea,

$$Y = X_1 - X_2$$

Entonces por el teorema 7.1 con $a_i = 1$,

$$\begin{aligned}
m_Y(t) &= E\left\{e^{[t(X_1-X_2)]}\right\} \\
&= E\left\{\frac{e^{t(X_1)}}{e^{t(X_2)}}\right\} \\
&= \frac{E\left\{e^{t(X_1)}\right\}}{E\left\{e^{t(X_2)}\right\}} \\
&= \frac{m_{X_1}(t)}{m_{X_2}(t)} \\
&= \frac{e^{\lambda_1(e^x-1)}}{e^{\lambda_2(e^x-1)}}
\end{aligned}$$