

Límites y continuidad

Definición 1.1 (La razón promedio de cambio) de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ sabiendo que $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

1.1. Ejercicios

Razones promedio de cambio

En los ejercicios 1 a 6, determine la razón promedio de cambio de la función en el intervalo o intervalos dados.

1. $f(x) = x^3 + 1$

a) $[2, 3]$

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3^3 + 1) - (2^3 + 1)}{3 - 2} = 19$

b) $[-1, 1]$

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1^3 + 1) - ((-1)^3 + 1)}{1 - (-1)} = 1$

2. $g(x) = x^2 - 2x$

a) $[1, 3]$

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3^2 - 2 \cdot 3) - (1^2 - 2 \cdot 1)}{3 - 1} = 2$

b) $[-2, 4]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(4^2 - 2 \cdot 4) - ((-2)^2 - 2 \cdot (-2))}{4 - (-2)} = 0$$

3. $h(t) = \cot t$ (a) $[\pi/4, 3\pi/4]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(\pi/4) - \cot(3\pi/4)}{\pi/4 - 3\pi/4} = \frac{1 + 1}{\frac{\pi - 3\pi}{4}} = \frac{8}{-2\pi}$$

(b) $[\pi/6, \pi/2]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(\pi/6) - \cot(\pi/2)}{\pi/6 - \pi/2} = \frac{-3\sqrt{3}}{\pi}$$

4. $g(t) = 2 + \cos t$ (a) $[0, \pi]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{2 + \cos \pi - (2 + \cos 0)}{\pi - 0} = -\frac{2}{\pi}$$

(b) $[-\pi, \pi]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{2 + \cos \pi - (2 - \cos \pi)}{\pi + \pi} = \frac{3 - 3}{2\pi} = 0$$

5. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$; $[0, 2]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 1 - (\sqrt{4 \cdot 0 + 1} + 1)}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$$

6. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

$$\text{Respuesta.- } \frac{2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - (1^3 - 4^2 + 5)}{2 - 1} = 0$$

Pendiente de una curva en un punto

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar a) la pendiente de la curva en el punto P dado, y b) la ecuación de la recta tangente en P

7. $y = x^2 - 5$, $P(2, -1)$

- a) Iniciamos con una recta secante que pasa por el punto $(2, -1)$ y el punto cercano $(2 + h, (2 + h)^2 - 5)$, luego hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^2 - 5 - (2^2 - 5)}{2 + h - 2} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

Luego aproximamos h a 0 siendo la pendiente $m = 4$.

- b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y = mx + c$ de donde $y = 4x + c$, luego reemplazamos $(2, -1)$, quedándonos $-1 = 4 \cdot 2 + c \implies c = -9$. Por lo tanto

$$y = 4x - 9$$

8. $y = 7 - x^2$, $P(2, 3)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2, 3)$ y el punto cercano $Q[2 + h, 7 - (2 + h)^2]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - (2 + h)^2 - (7 - 2^2)}{2 + h - 2} = \frac{7 - (2 + h)^2 - 3}{h} = \frac{h(-h - 4)}{h} = -h - 4$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $-h - 4$ se aproxima a -4 . Tomamos -4 como la pendiente de la parábola en P .

- b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y = mx + c$ de donde $y = -4x + c$, luego reemplazamos $(2, 3)$, así $3 = -4(2) + c \implies c = 11$. Por lo tanto

$$y = -4x + 11$$

9. $y = x^2 - 2x - 3$, $P(2, -3)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2, -3)$ y el punto cercano $Q[2 + h, (2 + h)^2 - 2(2 + h) - 3]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^2 - 2(2 + h) - 3 - (-3)}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h + 2$ se aproxima a 2. Tomamos 2 como la pendiente de la parábola en P .

- b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y = mx + c$ de donde $y = 2x + c$, luego reemplazamos $(2, -3)$, así $-3 = 2(2) + c \implies c = -7$. Por lo tanto

$$y = 2x - 7$$

10. $y = x^2 - 4x$, $P(1, -3)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(1, -3)$ y el punto cercano $Q [1 + h, (1 + h)^2 - 4(1 + h)]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + h)^2 - 4(1 + h) - (-3)}{1 + h - 1} = \frac{h^2 - 2h}{h} = h - 2$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h - 2$ se aproxima a -2 . Tomamos -2 como la pendiente de la parábola en P .

- b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y - y_1 = m(x - x_1) \implies y = -2(x - 1) + (-3) \implies y = -2x + 2 - 3$$

por lo tanto

$$y = -2x - 1$$

11. $y = x^3$, $P(2, 8)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2, 8)$ y el punto cercano $Q [2 + h, (2 + h)^3]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^3 - 8}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h} = h^2 + 6h + 12$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 6h + 12$ se aproxima a 12. Tomamos 12 como la pendiente de la parábola en P .

- b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 12(x - 2) + 8 \implies y = 12x - 24 + 8$$

por lo tanto

$$y = 12x - 16$$

12. $y = 2 - x^3$, $P(1, 1)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(1, 1)$ y el punto cercano $Q [1 + h, 2 - (1 + h)^3]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (1 + h)^3 - 1}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = h^2 + 3h + 3$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h + 3$ se aproxima a 3. Tomamos 3 como la pendiente de la parábola en P .

b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 3(x - 1) + 1 \implies y = 3x - 3 + 1$$

por lo tanto

$$y = 3x - 2$$

13. $y = x^3 - 12x$, $P(1, -11)$

a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(1, -11)$ y el punto cercano $Q[1 + h, (1 + h)^3 - 12(1 + h)]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + h)^3 - 12(1 + h) + 11}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 - 9h}{h} = h^2 + 3h - 9$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h - 9$ se aproxima a -9 . Tomamos -9 como la pendiente de la parábola en P .

b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = -9(x - 1) - 11 \implies y = -9x + 9 - 11$$

por lo tanto

$$y = -9x - 2$$

14. $y = x^3 - 3x^2 + 4$, $P(2, 0)$

a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2, 0)$ y el punto cercano $Q[2 + h, (2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4 - 0}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 3h^2}{h} = h^2 + 3h$$

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h$ se aproxima a 0. Tomamos 0 como la pendiente de la parábola en P .

b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 0(x - 2) - 0$$

por lo tanto

$$y = 0$$

Razones instantáneas de cambio

- 15.** Rapidez de un automóvil. La siguiente figura muestra la gráfica tiempo-distancia de un automóvil deportivo que acelera desde el reposo.

- a) Determine las pendientes de la secante PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4 , ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(10, 220)$	$\frac{650 - 220}{20 - 10} = 43$
$Q_2(14, 380)$	$\frac{650 - 380}{20 - 14} = 45$
$Q_3(17, 480)$	$\frac{650 - 480}{20 - 16} = 43$
$Q_4(17, 550)$	$\frac{650 - 550}{20 - 18} = 50$

Los resultados anteriores son redondeados.

- b) Después estime la rapidez del automóvil para el tiempo $t = 20s$.

Respuesta.- Tomamos el punto mas cercano a P , en este caso Q_4 de donde la velocidad vendrá dado aproximadamente por $50m/s$.

- 16.** La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia de caída libre contra el tiempo para un objeto que cae desde un módulo espacial que se encuentra a una distancia de 80 m de la superficie de la Luna.

- a) Estime las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4 , ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(5, 20)$	$\frac{80 - 20}{10 - 5} = 12$
$Q_2(7, 38)$	$\frac{80 - 38}{10 - 7} = 14$
$Q_3(8,5, 56)$	$\frac{80 - 56}{10 - 8,5} = 16$
$Q_4(9,5, 71)$	$\frac{80 - 71}{10 - 9,5} = 18$

- b) ¿Cuál será la rapidez aproximada del objeto cuando choca con la superficie de la Luna?

Respuesta.- Será de $18m/s$.

- 17.** En la siguiente tabla se registran las utilidades de una pequeña empresa en cada uno de sus primeros cinco años de operación:

a) Trace los puntos que representan las utilidades como una función del año, y únalos mediante una curva suave.

b) ¿Cuál es la razón promedio de incremento de las utilidades entre 2012 y 2014?

Respuesta.- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{175 - 63}{2014 - 2012} = 56$

c) Use su gráfica para estimar la razón a la que cambiaron las utilidades en 2012.

Respuesta.- Sea $\frac{63 - 26}{2012 - 2011} = 37$ y $\frac{112 - 63}{2013 - 2012} = 49$ entonces $\frac{37 + 49}{2} = 43$.

- 18.** Elabore una tabla de valores para la función $F(x) = (x+2) \cdot (x-2)$ en los puntos $x = 1, 2, x = 11/10, x = 101/100, x = 1001/1000, x = 10001/10000$ y $x = 1$

a) Determine la razón promedio de cambio de $F(x)$ en los intervalos $[1, x]$ para cada $x \in \mathbb{Z}$ de su tabla.

Respuesta.-

b) Si es necesario, amplíe su tabla para intentar determinar la razón de cambio de $F(x)$ en $x = 1$.

Respuesta.-