Calculo diferencial e integral tomo 1

Nikolai Piskunov

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1

Funciones

1.1. Las funciones y sus gráficas

Definición 1.1 *Una función f de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento $x \in D$ un solo o único elemento $f(x) \in Y$*

Definición 1.2 *Cuando definimos una función $y = f(x)$ mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales x para los cuales la fórmula proporciona valores reales para y , el llamado* ***dominio natural****.*

Cuando el rango de una función es un subconjunto de números reales, se dice que la función tiene ***valores reales (o que es real valuada)***

Definición 1.3 (Valor absoluto) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

Definición 1.4 *Sea una funcion definida en un intervalo I y sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos en I*

1. *Si $f(x_2) > f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es* ***creciente*** *en I.*

2. *Si $f(x_2) < f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es* ***decreciente*** *en I.*

Definición 1.5 *Una función $y = f(x)$ es una*

1. *Función par de x si $f(-x) = f(x)$.*

2. *Función impar de x si $f(-x) = -f(x)$.*

Para toda x en el dominio de la función.

(Los nombres par e impar provienen de las potencias de x).

Definición 1.6 *Dos variables x e y son* ***proporcionales*** *(una con respecto a la otra) si una siempre es un múltiplo constante de la otra; esto es, si $y = kx$ para alguna constante k distinta de 0.*

Si la variable y es proporcional al recíproco $1/x$, entonces algunas veces se dice que y es ***inversamente proporcional*** *a x (puesto que $1/x$ es el inverso multiplicativo de x).*

1.1. Ejercicios

1. $f(x) = 1 + x^2$

Respuesta.- Al evaluar $1 + x^2$ vemos que x se cumple para todos los reales, por lo tanto $f_D = \{x/; \forall\, x \in \mathbb{R}\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 1\}$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- El dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq 0\}$. Y el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \leq 1\}$.

3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$

Respuesta.- Sea $5x + 10 \geq 0$ ya que una raíz par no puede ser no negativo, entonces $x \geq 2$, por lo tanto el dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq -2\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio, evaluaremos $x^2 - 3x \geq 0$, de donde $x(x-3) \geq 0$, por lo tanto el dominio es $f_D = \{x/ \leq x \leq 0 \cup x \geq 3\}$. Luego el rango viene definido por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

5. $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$

Respuesta.- Sabemos que no se puede dividir un número por 0. Por lo tanto para hallar el dominio de la función debemos evaluar $3 - t = 0$, de donde $t = 3$, así $f_D = \{t/t \neq 3\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \neq 0\}$.

6. $G(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio evaluamos $t^2 - 16 = 0$, de donde $(t-4)(t+4) = 0$, por lo tanto el dominio de la función viene dado por $f_D = \{t/t \neq 4 \wedge t \neq -4\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/0 < y \leq -\dfrac{1}{8}\}$ ya que al despejar x nos queda $x = \sqrt{\dfrac{2}{y} + 16}$ de donde se debe evaluar por un lado $\dfrac{2}{y}$ y por otro $\dfrac{2}{y} - 16 \geq 0$.

En los ejercicios 7 y 8 ¿Cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de x? ¿Cuáles no representan a funciones de x? Dé razones que apoyen sus respuestas.

7. El inciso *a.* no es una función ya que no cumple con la prueba de la recta vertical ya una función sólo puede tener un valor $f(x)$ para cada x en su dominio. Y el inciso *b.* no representa la gráfica de una función.

8. Los incisos *a.* y *b.* no representan a funciones de x. El único que no representa una gráfica de una función es el inciso *b.*

Determinación de fórmulas para funciones.

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado x del triángulo.

Respuesta.- El área se representa por $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$ y el perímetro por $f(x) = 3x$

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del cuadrado. Exprese el área como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La longitud del lado de un cuadrado como función de longitud esta dado por $d = \sqrt{2a^2}$. El área es expresado por $A = \dfrac{d^2}{2}$

11. Exprese la longitud del lado de um cubo como una función de la longitud de la diagonal d del cubo. Exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta-. La expresión de la longitud del lado del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo es

$$L(d) = (\sqrt{2}/2) \cdot d$$

Las expresiones del área de la superficie y el volumen del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo son:

$$A(d) = 3 \cdot d\text{š} \quad y \quad V(d) = (\sqrt{2}/4) \cdot d\text{ş}$$

12. Un punto P en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente de la recta que une a P con el origen.

Respuesta.- Sea el punto en el origen $(0,0)$ y el punto P tenga las coordenadas $(z, z^{'})$. Sabemos que una recta viene definido por $f(x) = ax + b$ entonces formando un sistema de ecuaciones tenemos:

$$0 = 0x + b \quad y \quad z^{'} = az + b$$

Luego $z^{'} = az$ de donde $a = \dfrac{z^{'}}{z}$, y así nos queda la función

$$f(x) = \frac{z^{'}}{z} x$$

13. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de la recta $2x + 4y = 5$. Sea L la distancia del punto (x, y) al origen $(0,0)$. Escriba L como función de x.

Respuesta.- Dado $(x, y) \in 2x + 4y = 5; (0,0)$ entonces

$$x = \frac{5-4y}{2} \qquad \frac{5-2x}{4}$$

Luego $L = \sqrt{(y-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{y^2 + \left(\dfrac{5-4y}{2}\right)} = \sqrt{y^2 + \dfrac{25+40y+16y^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{4y^2}{4} + \dfrac{25-40y+16y^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{20y^2 + 40y + 25}$

14. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de $y = \sqrt{x-3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4,0)$. Escriba L como función de y.

Respuesta.- $y = \sqrt{x-3}, (x, y) \in y = \sqrt{x-3}$ entonces calculamos la distancia entre $y = \sqrt{x-3}$ y $(4,0)$.

$$y^2 = x - 3 \Longrightarrow x = y^2 + 3 \quad y \quad y = \sqrt{x-3}$$

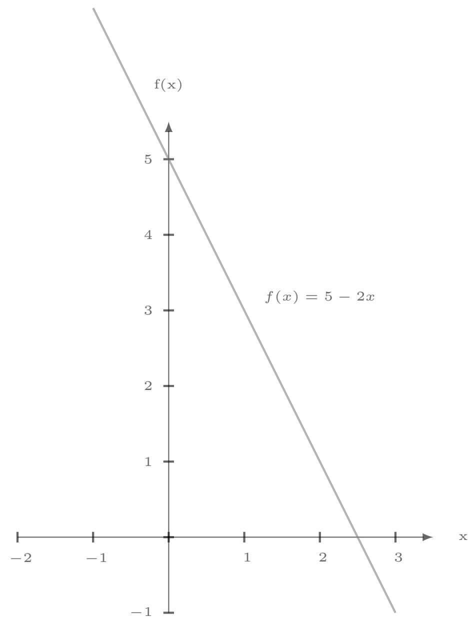
Así $L = \sqrt{(y-o)^2 + (x-y)^2} = \sqrt{y^2 + (y^2+3)^2} = \sqrt{y^2 + y^4 + 6y^2 + 9} = \sqrt{y^4 + 7y^2 + 9}$

Las funciones y sus gráficas.

En los ejercicios 15 al 20, determine el dominio y grafique las funciones

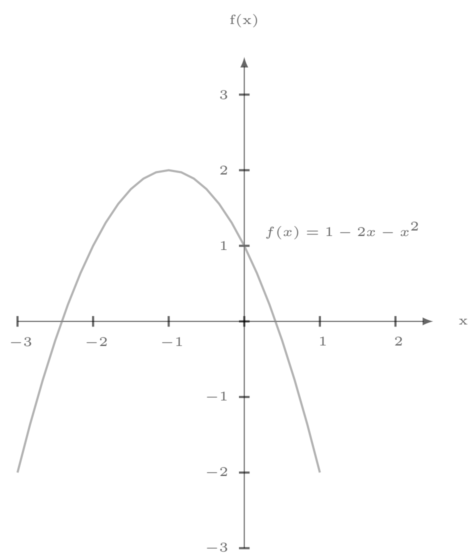
15. $f(x) = 5 - 2x$

Respuesta.- El dominio esta dado para todos los reales x.



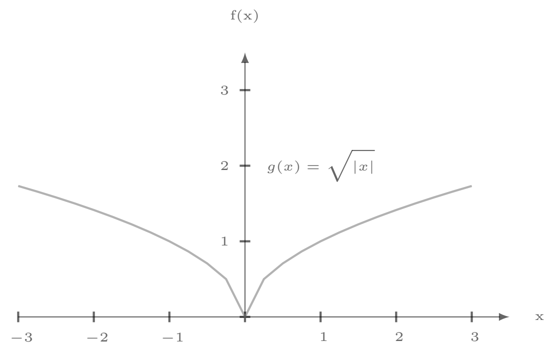
16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo real x positivo.



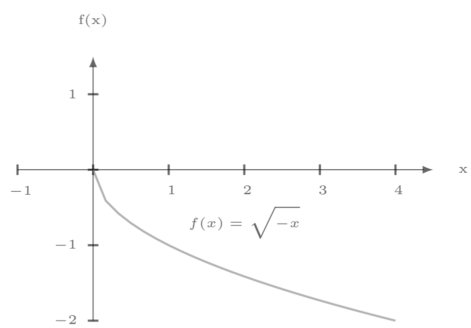
17. $g(x) = \sqrt{|x|}$

Respuesta.- El dominio de la función es para $x \in \mathbb{R}$



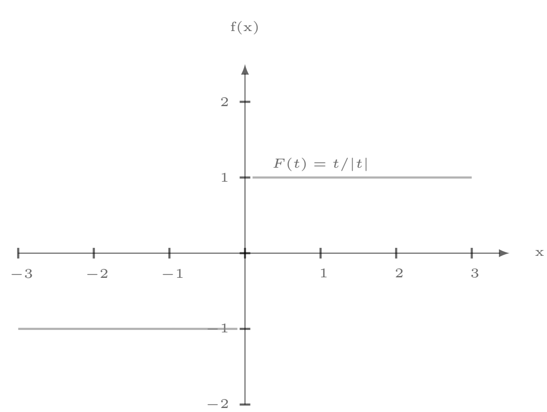
18. $g(x) = \sqrt{-x}$

Respuesta.- El dominio de la función se cumple para los números reales negativos.



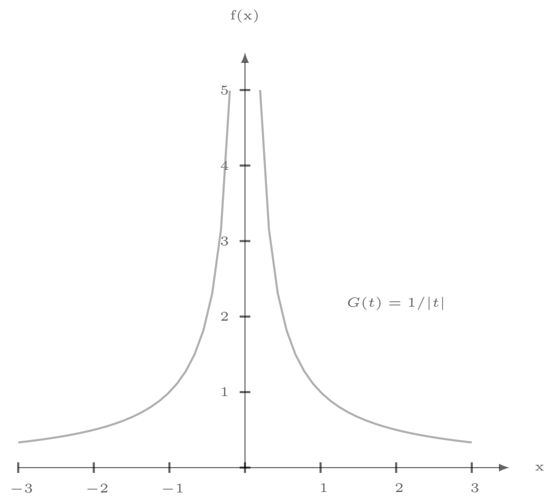
19. $F(t) = t/|t|$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo número real menos el 0.



20. $G(t) = 1/|t|$

Respuesta.- El dominio se cumple para todo número real menos el 0.



21. Determine el dominio de $y = \dfrac{x+3}{4-\sqrt{x^2-9}}$

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el dominio esta dado por $D_f = \{x/x \geq 3 \wedge x \neq 4\}$

22. Determine el rango de $y = 2 + \dfrac{x^2}{x^2+4}$.

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el rango viene dado para todo $y = f(x)$ tal que $y \geq 2$

23. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a. $|y| = x$

Respuesta.- No es una función de x ya que $\sqrt{y^2} = x \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow \pm y = \pm x$

b. $y^2 = x^2$

Respuesta.- Por el anterior problema $23a$.

24. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x

a. $|x| + |y| = 1$

Respuesta.- Ya que $|y| = 1 - |x| \Longrightarrow \sqrt{y^2} = 1 - |x| \Longrightarrow y^2 = (1-|x|)^2 \Longrightarrow \pm y = |1 - |x||$

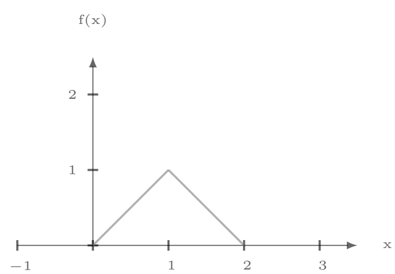
b. $|x+y|=1$

Respuesta.- Ya que $\sqrt{(x+y)^2}=1 \Longrightarrow (x+y)^2=1 \Longrightarrow x^2+2xy+y^2=1 \Longrightarrow y^2=1-2xy-x^2 \Longrightarrow$ $\pm y=\sqrt{1-2xy-x^2}$

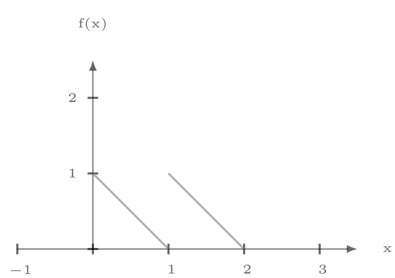
Funciones definidas por partes

En los ejercicios 25 a 28, grafique las funciones:

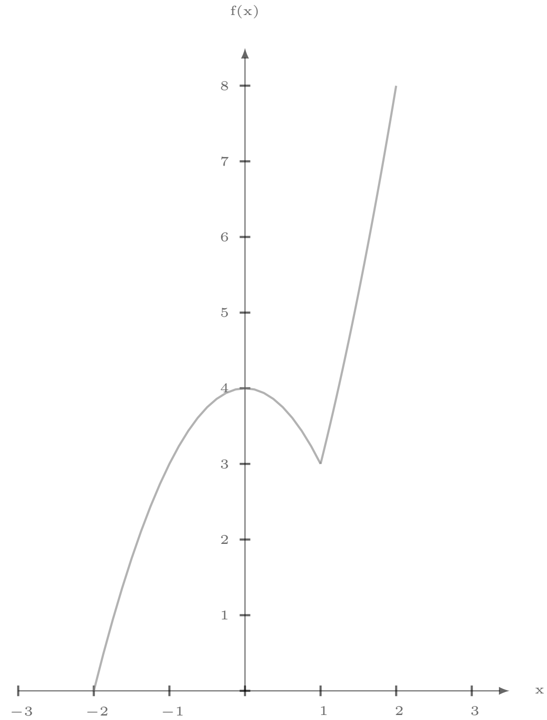
25. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x, & 1<x\leq 2 \end{cases}$



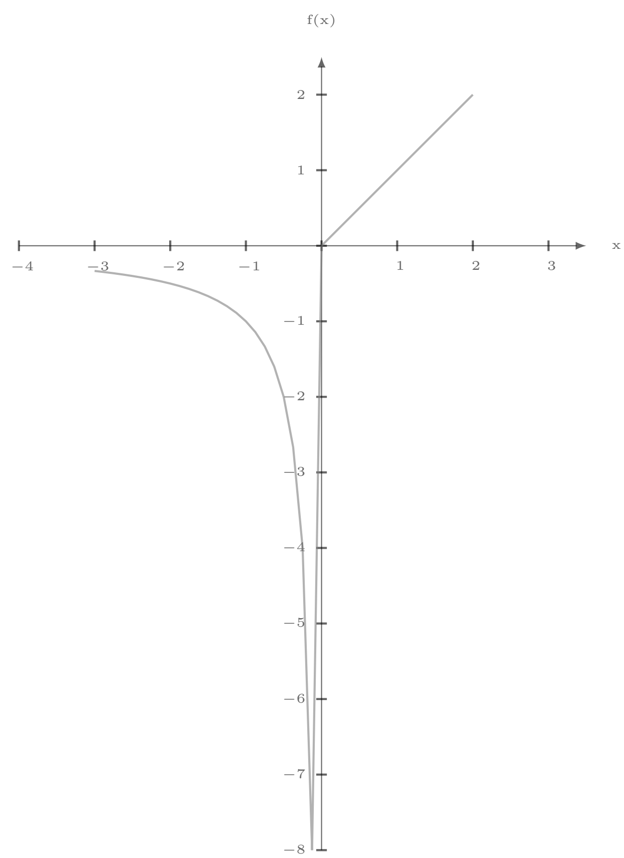
26. $g(x)=\begin{cases} 1-x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x, & 1<x\leq 2 \end{cases}$



27. $F(x)=\begin{cases} 4-x^2, & \leq 1 \\ x^2+2x, & x>1 \end{cases}$



28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$



Determine una fórmula para cada función graficada en los ejercicios 29 a 32

29. **a.** Sea $f(x) = ax+b$ entonces $0 = b$ y $1 = a+b$ luego $a = 1$ por lo tanto $f(x) = x$. Por otro lado $1 = a+b$ y $0 = 2a + 2 \Longrightarrow a = -1$ de donde se tiene $f(x^{'}) = -x + 2$ así nos queda la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ x+2 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b. Está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 \leq x < 1 \ y \ 2 \leq x < 3 \\ \\ 0 & si \quad 1 \leq x < 2 \ y \ 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

30. **a.** Similar al ejercicio anterior se tiene que la formula

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \\ 1/2x + 5/7 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b. Se tiene

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \\ -2x + 3 & si \end{cases}$$

31. **a.**

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad -1 \leq x < 0 \\ \\ 1 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ -2x+2 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

b. Sea (a, b) y (c, d) por lo tanto por capitulo 4 de spivak $f(x) = \dfrac{d-b}{c-a}(x-a) + b$ entonces $(-2, -1)$ y $(0, 0)$ así $f(x) = \dfrac{0-1}{0+2}(x+2) + 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 2$

Luego $f(x) = -2x + 2$ y finalmente $f(x) = -1$ de donde,

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x - 2 & si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \\ 2x+2 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ -1 & si \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

32. **a.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{T}{2} \\ \\ \dfrac{2x}{T} - 1 \quad si \quad \dfrac{T}{2} < x \leq T \end{cases}$$

b.

$$f(x) = \begin{cases} A \quad si \quad \dfrac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad T \leq x < \dfrac{3T}{2} \\ \\ -A \quad si \quad \dfrac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad \dfrac{3T}{2} \leq x \leq 2T \end{cases}$$

Las funciones mayor entero y menor entero.

33. Para qué valores de x es

a. $[x] = 0$

respuesta.- Para $0 \leq x < 1$

b. $[x] = 0$

Respuesta.- Para $-1 < x \leq 0$

34. ¿Cuáles valores x de números reales satisfacen la ecuación $[x] = [x]$?

Respuesta.- Sólo el 0.

35. ¿Es cierto que $[-x] = -[x]$ para todo número real x? Justifique su respuesta.

Respuesta.- Es cierto siempre y cuando sea x un entero. Ya que si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x = n$ para algunos $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $[x] = n$ y $-x = -n \Longrightarrow [-x] = n \Longrightarrow [-x] = -[x]$. Por otro lado sea $x \notin \mathbb{Z}$ y $[x] = n$ entonces $n \leq x < n+1 \Longrightarrow -n-1 < -x < -n \Longrightarrow [-x] = -n-1 = -[x] - 1$

36. Grafique la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}[x], & x\leq 0\\ x, & x<0\end{array}\right.$$

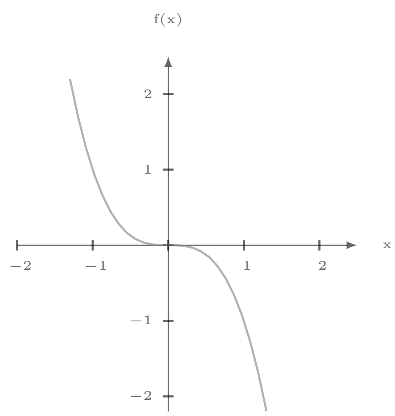
¿Por qué $f(x)$ se donomina parte entera de x?

Respuesta.- Se denomia porque hace corresponder el número inmediato anterior.

Funciones crecientes y funciones decrecientes.

Grafique las funciones en los ejercicios 37 a 46. Si tiene simetrías, ¿Qué tipo de simetría tienen? Especifique los intervalos en os que la función es creciente y los intervalos donde la función es decreciente.

37. $y=-x^3$



Respuesta.- Tiene simetría impar y el intervalo donde decrece esta dado por $(-\infty,\infty)$

38. $y=-\dfrac{1}{x^2}$

Respuesta.- Tiene simetría par y esta dado por lo el intervalo decreciente de $-\infty<x<0$ y por el intervalo creciente $0<x<\infty$

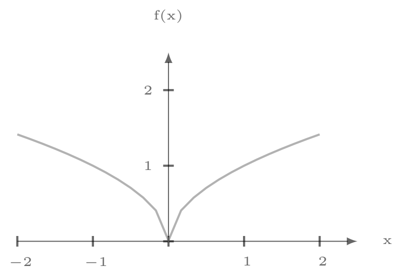
39. $y=-\dfrac{1}{x}$

Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por los intervalos crecientes $-\infty<x<0$ y $0<x<\infty$

40. $y=\dfrac{1}{|x|}$

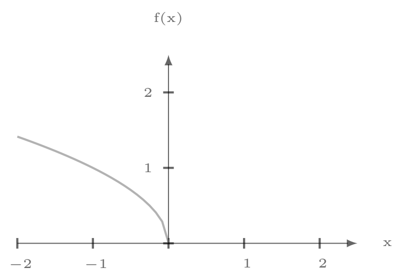
Respuesta.- Tiene simetría par y viene dado por el intervalo creciente $-\infty<x<0$ y el intervalo decreciente $0<x<\infty$

41. $y=\sqrt{|x|}$



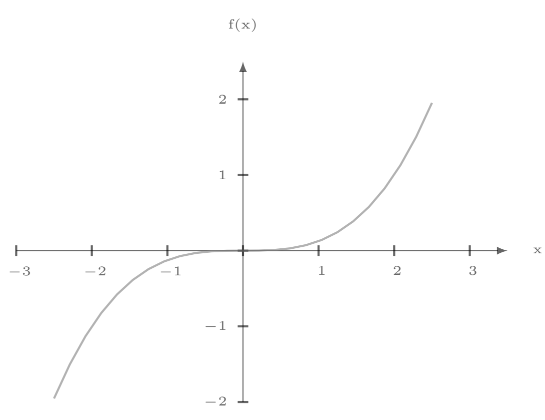
Respuesta.- Tiene simetría par y esta dado por el intervalo decreciente $-\infty < x \leq 0$ y el intervalo creciente $0 \leq x < \infty$

42. $y = \sqrt{-x}$



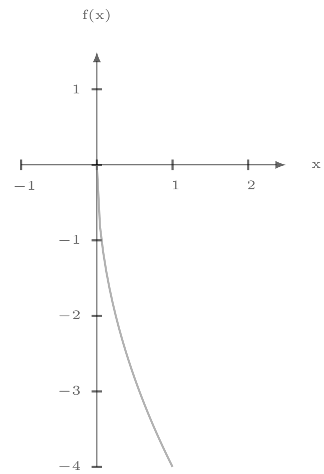
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo decreciente $-\infty < x \leq 0$

43. $y = x^3/8$



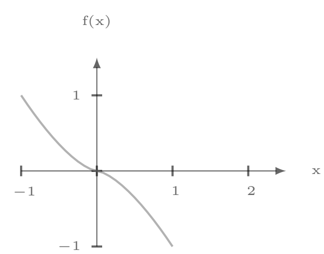
Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < \infty$

44. $y = -4\sqrt{x}$



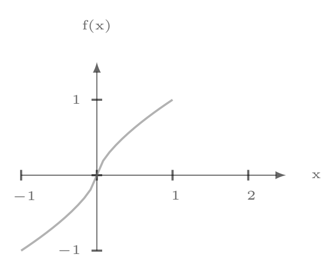
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo $0 \leq x < \infty$

45. $y = -x^{3/2}$



Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo decreciente $-\infty < x < \infty$

46. $y = (-x)^{2/3}$



Respuesta.- La simetría es impar y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < \infty$

Funciones pares y funciones impares

En los ejercicios 47 a 58, indique si la función es par, impar o de ninguno de estos tipos. Justifique su respuesta.

47. $f(x) = 3$

Respuesta.- Sea $f(-x) = 3 = f(x)$ entonces decimos que la función es par.

48. $f(x) = x^{-5}$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^{-5} = -\left(x^{-5}\right) = -f(x)$, por lo tanto la función es impar.

49. $f(x) = x^2 + 1$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, de donde se tiene que la función es par.

50. $f(x) = x^2 + x$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ de donde la función no es par ni impar.

51. $g(x) = x^3 + x$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$ por lo tanto la función es impar.

52. $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

Respuesta.- Sea $g(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 - 1 = g(x)$ por lo tanto la función es par.

53. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea $g(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 1} = g(x)$ por lo tanto la función es par.

54. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea $g(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1} = -g(x)$ de donde la función es impar.

55. $h(t) = \dfrac{1}{t-1}$

Respuesta.- Sea $h(-t) = \dfrac{1}{-t-1}$ entonces la función no es par ni impar.

56. $h(t) = |t^3|$

Respuesta.- Sea $h(-t) = |(-t)^3| = |t^3| = h(t)$ por lo tanto la función es par.

57. $h(t) = 2t + 1$

Respuesta.- Sea $h(-t) = 2(-t) + 1$ entonces la función no es ni par ni impar.

58. $h(t) = 2|t| + 1$

Respuesta.- Sea $h(-t) = 2| - t| + 1 = 2t + 1 = h(t)$ entonces la función es par.

Teoría y ejemplos

59. La variable s es proporcional a t, y $s = 25$ cuando $t = 75$. Determine t cuando $s = 60$.

Respuesta.- Sea $\dfrac{s}{r}$ entonces $\dfrac{25}{75} = \dfrac{60}{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{3} = \dfrac{60}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 180$

60. Energía cinética. La energía cinética K de una masa es proprocional al cuadrado de su velocidad v. Si $K = 12,960$ joules, cuando $v = 18$ m/s, ¿Cuál es el valor de K cuando $v = 10$ m/s?.

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene $\dfrac{K}{v^2} = \dfrac{12,960}{18^2} = \dfrac{K}{10^2}$ entonces $K = 4000$.

61. Las variables r y s son inversamente proporcional, mientras que $r = 6$ cuando $s = 4$. Determine s cuando $r = 10$.

Respuesta.- Tenemos que $6 \cdot 4 = s \cdot 10$ entonces queda que $s = 2{,}4$.

62. Ley de Boyle. La ley de Boyle establece que el volumen V de un gas, a temperatura constante, aumenta cuando la presión P disminuye, de manera que V y P son inversamente proporcionales. Si $P = 14{,}7lb/in^2$ cuando $V = 1000in^3$, entonces ¿cuál es el valor de V cuando $P = 23{,}4lbs/in^2$?.

Respuesta.- Sea $V \cdot P = V' \cdot P'$ entonces $14{,}7 \cdot 1000 = V \cdot 23{,}4$ y por lo tanto $V = 628{,}2in^3$.

63. Una caja sin tapa se construye a partir de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 14 por 22 pulgadas (in). A la pieza de cartón se le cortan cuadrados de lado x en cada esquina y luego se doblan hacia arriba los lados, como en la figura. Exprese el volumen V de la caja como una función de x.

Respuesta.- El volumen es dado por $V = L \cdot a \cdot h$ luego $h = x$, $\quad a = 14 - 2x$, $\quad L = 22 - 2x$ por lo tanto

$$V(x) = (22 - 2x)(14 - 2x) \cdot x \quad \Longrightarrow \quad V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 308x$$

64. La siguiente figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa tiene una longitud de dos unidades.

a. Exprese la coordenada de P en términos de x. (Podría iniciar escribiendo una ecuación para la recta AB).

Respuesta.- Sea $y = mx + b$ luego en el punto B, se tiene la intersección de ambas rectas que forman un ángulo de $90^{ř}$, así que, el ángulo que tiene que tener el punto A es de $45^{ř}$ o bien $m = -1$ por lo tanto $y = -x + b$ o bien m=-1 ya que la recta va hacia abajo.

b. Exprese el área del rectángulo en términos de x.

Respuesta.- El área de un rectángulo es $b \cdot a$ de donde $area = 2x \cdot y = 2x(b - x)$.

En los ejercicios 65 y 66 relacione cada ecuación con su gráfica. No utilice un dispositivo para graficar y dé razones que justifiquen su respuesta.

65. **a.** $y = x^4 \quad \Rightarrow \quad h$

b. $y = x^7 \quad \Rightarrow \quad f$

c. $y = x^10 \quad \Rightarrow \quad g$

66. **a.** $y = 5x \quad \Rightarrow \quad f.$

b. $y = 5x \quad \Rightarrow \quad f.$

c. $y = x^5 \quad \Rightarrow \quad h.$

67.