1

Diferenciación

Teorema 1.1. Si f es una función constante, $f(x) = c$, entonces

$$f'(a) = 0 \text{ para todo número } a.$$

Demostración.-

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(c+h) - c}{h} = 0.$$

Teorema 1.2. Si f es la función identidad, $f(x) = x$, entonces

$$f'(a) = 1 \text{ para todo número } a.$$

Demostración.-

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Teorema 1.3. Si f y g son diferencibles en a, entonces $f+g$ es también diferenciable en a, y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - [f(a) + g(a)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= f'(a) + g'(a).
\end{aligned}$$

Teorema 1.4. Si f y g son diferenciables en a, entonces $f \cdot g$ es también diferenciable en a, y

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h)\,(g(a+h) - g(a))}{h} + \frac{(f(a+h) - f(a))\,g(a)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} f(a+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(a) \\
&= f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a).
\end{aligned}$$

Observemos que hemos utilizado el hecho de que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Teorema 1.5. Si $f(x) = cf(x)$ y f es diferenciable en a, entonces g es diferenciable en a, y

$$g'(a) = c \cdot f'(a).$$

Demostración.- Si $h(x) = c$, de manera que $g = h \cdot f$, entonces,

$$\begin{aligned}
g'(a) &= (h \cdot f)'(a) \\
&= h(a) \cdot f'(a) + h'(a) \cdot f(a) \\
&= c \cdot f'(a) + 0 \cdot f(a) \\
&= c \cdot f'(a).
\end{aligned}$$

En particular, $(-f)'(a) = -f'(a)$, por tanto $(f-g)'(a) = (f + [-g])'(a) = f'(a) - g'(a)$.

Teorema 1.6. Si $f(x) = x^n$ para algún número natural n, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{ para todo número } a.$$

Demostración.- La demostración la haremos por inducción sobre n. Para $n = 1$ se aplica simplemente el teorema 2. Supongamos ahora que el teorema es cierto para n, de manera que si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(a) = na^{n-1} \text{ para todo } a.$$

Sea $g(x) = x^{n+1}$. Si $I(x) = x$, la ecuación $x^{n+1} = x^n \cdot x$ se puede escribir como

$$g(x) = f(x) \cdot I(x) \text{ para todo } x.$$

así, $g = f \cdot I$. A partir del teorema 4 deducimos que

$$\begin{aligned} g'(a) &= (f \cdot I)'(a) \\ &= f'(a) \cdot I(a) + f(a) \cdot I'(a) \\ &= na^{n-1} \cdot a + a^n \cdot 1 \\ &= na^n + a^n \\ &= (n+1)a^n, \text{ para todo } a. \end{aligned}$$

Este es precisamente el caso $n+1$ que queríamos demostrar.
Si $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ para algún número natural n, entonces

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1};$$

así es válido tanto para enteros positivos como negativos. Si interpretamos $f(x) = x^0$ como $f(x) = 1$ y $0 \cdot x^{-1}$ como $f'(x) = 0$, entonces se verifica también para $n = 0$.

Teorema 1.7. Si g es diferenciable en a y $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es diferenciable en a, y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Demostración.- Incluso antes de escribir

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h}$$

debemos asegurarnos que esta expresión tiene sentido; es necesario comprobar que $(1/g)(a+h)$ está definido para valores suficientemente pequeños de h. Para ello son necesarias solamente dos observaciones. Como g es, por hipótesis, diferenciable en a, se deduce del teorema 9-1 que g es continua en a. Como $g(a) \neq 0$, deducimos también, a partir del teorema 6-3, que existe un $\delta > 0$ tal que $g(a+h) \neq 0$ para $|h| < \delta$. Por tanto, $(1/g) = (a+h)$ tiene sentido para valores de h suficientemente pequeños, y así podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h\,[g(a) \cdot g(a+h)]} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(a) \cdot g(a+h)} \\ &= -g'(a) \cdot \frac{1}{[g(a)]^2}. \end{aligned}$$

Teorema 1.8. Si f y g son diferenciables en a y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en a, y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Demostración.- Como $f/g = f \cdot (1/g)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2} \\
&= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.9 (Regla de la cadena)**.** Si g es diferenciable en a y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a).$$

Demostración.- Definamos una función ϕ de la manera siguiente:

$$\phi(h) = \begin{cases} \dfrac{f[g(a+h)] - f[g(a)]}{g(a+h) - g(a)}, & \text{si } g(a+h) - g(a) \neq 0 \\ \\ f'[g(a)], & \text{si } g(a+h) - g(a) = 0. \end{cases}$$

Se intuye fácilmente que ϕ es continua en 0: cuando h es pequeño, $g(a+h) - g(a)$ también es pequeño, de manera que si $g(a+h) - g(a)$ no es 0, entonces $\phi(h)$ se aproximará a $f'[g(a)]$; y si es 0 entonces $\phi(h)$ es igual a $f'[g(a)]$, lo que es mejor todavía. Ya que la continuidad de ϕ es el punto crucial de toda la demostración, vamos a desarrollar rigurosamente este argumento intuitivo.
Sabemos que f es diferenciable en $g(a)$. Esto significa que

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} = f'(g(a)).$$

Así, si $\epsilon > 0$ existe algún número $\delta' > 0$ tal que, para todo k,

$$\text{si } 0 < |k| < \delta', \text{entonces } \left| \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} - f'(g(a)) \right| < \epsilon.$$

Pero g es diferenciable en a y por lo tanto continua en a, de manera que existe un $\delta > 0$ tal que para todo h,

$$\text{si } |h| < \delta, \text{entonces } |g(a+h) - g(a)| < \delta'$$

Consideremos ahora cualquier h con $|h| < \delta$. Si $k = g(a+h) - g(a) \neq 0$, entonces

$$\phi(h) = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k};$$

se deduce que $|k| < \delta'$, y por tanto deducimos que

$$|\phi(h) - f'(h(a))| < \epsilon.$$

Por otro lado, si $g(a+h) - g(a) = 0$, entonces $\phi(g) = f'(g(a))$, de manera que se verifica ciertamente que

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \epsilon.$$

Por tanto hemos demostrado que
$$\lim_{h\to 0}\phi(h) = f'(g(a)),$$
o sea que ϕ es continua en 0. El resto de la demostración es fácil. Si $h \neq 0$, entonces tenemos
$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \phi(h)\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$
incluso aunque $g(a+h) - g(a) = 0$ (ya que en este caso ambos miembros de la igualdad son iguales a 0). Por tanto
$$(f\circ g)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h}\lim_{h\to 0}\phi(h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = f'(g(a))\cdot g'(a).$$

1.1 Problemas

1. Como ejercicio de precalentamiento, halle $f'(x)$ para cada una de las siguientes f. (No se preocupe por el dominio de f o de f'; obtenga tan sólo una fórmula para $f'(x)$ que dé la respuesta correcta cuando tenga sentido.)

(i) $f(x) = \operatorname{sen}(x + x^2)$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos(x + x^2)\cdot(1 + 2x)$.

(ii) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x^2$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos x + \cos(x^2)\cdot 2x$.

(iii) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos(\cos x)\cdot(-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x\cos(\cos x)$.

(iv) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x)\cdot\cos x = \cos x\cos(\operatorname{sen} x)$.

(v) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\cos x}{x}\right)$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos\left(\frac{\cos x}{x}\right)\cdot\frac{-x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$.

(vi) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\cos x)}{x}$.

Respuesta.- $f'(x) = \frac{\cos(\cos x)\cdot(-\operatorname{sen} x)}{x^2} = -\frac{\operatorname{sen} x\cos(\cos x)}{x^2}$.

(vii) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos(x + \operatorname{sen} x) \cdot (1 + \cos x)$.

(viii) $f(x) = \operatorname{sen}[\cos(\operatorname{sen} x)]$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos[\cos(\operatorname{sen} x)]\,[-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x]$.

2. Halle $f(x)$ para cada una de las siguientes funciones f. (El autor tardó 20 minutos en calcular las derivadas para la sección de soluciones, y al lector no debería costarle mucho más tiempo calcularlas. Aunque la rapidez en los cálculos no es un objetivo de las matemáticas, si se desea tratar con aplomo las aplicaciones teóricas de la Regla de la Cadena, estas aplicaciones concretas deberían ser un juego de niños; a los matemáticos les gusta hacer ver que ni siquiera saben sumar, pero la mayoría pueden hacerlo cuando lo necesitan.)

(i) $f(x) = \operatorname{sen}\left[(x+1)^2(x+2)\right]$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left[(x+1)^2(x+2)\right] \cdot \left[2(x+1)(x+2) + (x+1)^2\right] \\ &= (x+1)(3x+5)\cos\left[(x+1)^2(x+2)\right]. \end{aligned}$$

(ii) $f(x) = \operatorname{sen}^3\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right)$.

Respuesta.- $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) \cdot \cos\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) \cdot (2x + \cos x)$.

(iii) $f(x) = \operatorname{sen}^2\left[(x + \operatorname{sen} x)^2\right]$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\operatorname{sen}\left[(x+\operatorname{sen} x)^2\right]\cos\left[(x+\operatorname{sen} x)^2\right] \cdot 2(x+\operatorname{sen} x)(1+\cos x) \\ &= 4(1+\cos x)(x+\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}\left[(x+\operatorname{sen} x)^2\right]\cos\left[(x+\operatorname{sen} x)^2\right] \end{aligned}$$

(iv) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{x^3}{\cos x^3}\right) \cdot \frac{3x^2\cos\left(x^3\right) - x^3\left[-\operatorname{sen}\left(x^3\right)\right]3x^2}{\cos^2\left(x^3\right)} \\ &= \cos\left(\frac{x^3}{\cos x^3}\right) \cdot \frac{3x^2\cos\left(x^3\right) + x^3\operatorname{sen}\left(x^3\right)3x^2}{\cos^2\left(x^3\right)} \end{aligned}$$

(v) $f(x) = \operatorname{sen}(x\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen} x^2\right)$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \cos(x \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x + x \cos x + \cos\left(\operatorname{sen} x^2\right) \cos\left(x^2\right) 2x.$$

(vi) $f(x) = f(x) = (\cos x)^{31^2}$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = -\left(31^2 - 1\right) (\cos x)^{31^2-1} \operatorname{sen} x.$$

(vii) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x^2$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen}\left(x^2\right) \operatorname{sen}^2\left(x^2\right) + \operatorname{sen}^2 x \left[\cos\left(x^2\right) 2x \operatorname{sen}^2\left(x^2\right)\right. \\ & + & \left.\operatorname{sen}\left(x^2\right) 2 \operatorname{sen}\left(x^2\right) \cos\left(x^2\right) 2x\right] \\ & = & 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen}\left(x^2\right) \operatorname{sen}^2\left(x^2\right) + 2x \operatorname{sen}^2 x \cos\left(x^2\right) \operatorname{sen}^2\left(x^2\right) \\ & + & 4x \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2\left(x^2\right) \cos\left(x^2\right). \end{array}$$

(viii) $f(x) = \operatorname{sen}^3\left[\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)\right]$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = 3 \operatorname{sen}^2\left[\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)\right] \cos\left[\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)\right] 2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cos(\operatorname{sen} x) \cos x.$$

(ix) $f(x) = \left(x + \operatorname{sen}^5 x\right)^6$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = 6\left(x + \operatorname{sen}^5 x\right)\left[1 + 5 \operatorname{sen}^4 x \cos x\right].$$

(x) $f(x) = \operatorname{sen}\left[\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))\right]$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \cos\left(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))\right) \cdot \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))) \cdot \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x.$$

(xi) $f(x) = \operatorname{sen}\left[(\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7\right]$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \cos\left[\left(\operatorname{sen}^7 x^7 + 1\right)^7\right] \cdot 7\left(\operatorname{sen}^7 x^7 + 1\right)^6 \cdot 7 \operatorname{sen}^6 x^7 \cdot \cos x^7 \cdot 7x^6.$$

(xii) $f(x) = \left\{ \left[(x^2+x)^3 + x \right]^4 + x \right\}^5.$

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = 5\left[\left(x^2+x\right)^3 + x\right]^4 \cdot \left\{1 + 4\left[\left(x^2+x\right)^3 + x\right]^3 \left[1 + 3\left(x^2+x\right)^2 (1+2x)\right]\right\}.$$

(xiii) $f(x) = \operatorname{sen}\left[x^2 + \operatorname{sen}\left(x^2 + \operatorname{sen}^2 x\right)\right].$

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \cos\left[x^2 + \operatorname{sen}\left(x^2 + \operatorname{sen} x^2\right)\right] \cdot \left[2x + \cos\left(x^2 + \operatorname{sen} x^2\right) \cdot \left(2x + 2x\cos x^2\right)\right].$$

(xiv) $f(x) = \operatorname{sen}\{6\cos[6\operatorname{sen}(6\cos 6x)]\}.$

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \cos\{6\cos[6\operatorname{sen}(6\cos 6x)]\} \cdot \{-6\operatorname{sen}[6\operatorname{sen}(6\operatorname{sen} 6x)]\} \cdot 6\cos(6\operatorname{sen} 6x) \cdot 6[-\operatorname{sen}(6x)] \cdot 6. \\ & = & 6^4\cos\{6\cos[6\operatorname{sen}(6\cos 6x)]\} \cdot \operatorname{sen}[6\operatorname{sen}(6\operatorname{sen} 6x)] \cdot \cos(6\operatorname{sen} 6x) \cdot [-\operatorname{sen}(6x)] \cdot . \end{array}$$

(xv) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}.$

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{\left[\operatorname{sen}\left(x^2\right) 2x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}\left(x^2\right) 2\operatorname{sen} x \cos x\right] \cdot (1 + \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}\left(x^2\right) \operatorname{sen}^2 x \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} \\ \\ & = & \dfrac{\left[2x\operatorname{sen}\left(x^2\right) \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}\left(x^2\right) \operatorname{sen} x \cos x\right] \cdot (1 + \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}\left(x^2\right) \operatorname{sen}^2 x \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} \end{array}$$

(xvi) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}}.$

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \frac{-\left[1 - \dfrac{-2(1+\cos x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2}\right]}{\left(x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}\right)^2}$$

(xvii) $f(x) = \operatorname{sen}\left[\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right].$

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \cos\left[\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right] \cdot \left[\frac{3x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right) - x^3 \cdot \cos\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right) \cdot \dfrac{3x^2 \cdot \operatorname{sen} x - x^3 \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right].$$

(xviii) $f(x) = \operatorname{sen}\left[\dfrac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right].$

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left[\frac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right] \cdot \\ &\quad \frac{\left[x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)\right] - x\left[1 - \cos\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right) \cdot \dfrac{(x - \operatorname{sen} x) - x(1 - \cos x)}{(x - \operatorname{sen} x)^2}\right]}{\left[x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)\right]^2} \end{aligned}$$

3. Halle las derivadas de las funciones tan, cotan, sec, cosec. (No es necesario memorizar estas fórmulas, aunque se necesitarán de vez en cuando; si se expresan las soluciones de manera correcta, resultan sencillas y algo simétricas.)

Respuesta.- Sea $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen}(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Sea $f(x) = \operatorname{cotan} x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Sea $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \cos^{-1} x$, entonces

$$f'(x) = -\cos^{-2} x \cdot (-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x.$$

Sea $f(x) = \operatorname{cosec} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen}^{-1} x$, entonces

$$f'(x) = -\operatorname{sen}^{-2} x \cdot \cos x = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x.$$

4. Para cada una de las siguientes funciones f, halle $f'(f(x))$ no $(f \circ f)(x)$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Respuesta.- Sea $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, entonces

$$f'\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^2} = -\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^2.$$

(ii) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Se tiene $f'(\operatorname{sen} x) = \cos(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$.

(iii) $f(x) = x^2$.

Respuesta.- Se tiene $f'\left(x^2\right) = 2x = 2x^2$.

(iv) $f(x) = 17$.

Respuesta.- Se tiene $f'(17) = 0$.

5. Para cada una de las siguientes funciones f, halle $f\left[f'(x)\right]$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Respuesta.- Sea $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, entonces $f\left[f'(x)\right] = f\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{x^2}} = -x^2$.

(ii) $f(x) = x^2$.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x$, entonces $f'\left(2x\right) = (2x)^2 = 4x^2$.

(iii) $f(x) = 17$.

Respuesta.- Sea $f'(17) = 0$, entonces $f'\left(17\right) = 17$

(iv) $f(x) = 17x$.

Respuesta.- Sea $f'(17x) = 17$, entonces $f'\left(17\right) = 17 \cdot 17 = 289$.

6. Halle f' en función de g' si

(i) $f(x) = g(x + g(a))$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'\left[x + g(a)\right] \cdot \left[x + g(a)\right]' = g'\left[x + g(a)\right].$$

(ii) $f(x) = g(x \cdot g(a))$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'\left[x \cdot g(a)\right] \cdot \left[x \cdot g(a)\right]' = g'\left[x \cdot g(a)\right] \cdot g(a).$$

(iii) $f(x) = g(x + g(x))$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'\left[x + g(x)\right]\left[x + g(x)\right]' = g'\left[x + g(x)\right]\left[1 - g'(x)\right].$$

(iv) $f(x) = g(x)(x - a)$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'(x)(x - a) + g'(x).$$

(v) $f(x) = g(a)(x - a)$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'(a)(x - a) + g(a)(x - a)' = g(a).$$

(vi) $f(x + 3) = g\left(x^2\right)$.

Respuesta.- Sea $z = x + 3 \;\Rightarrow\; x = z - 3$, entonces

$$f'(z) = g'\left[(z-3)^2\right] \cdot \left[(z-3)^2\right]' = g'\left[(z-3)^2\right](2(z-3) = 2g'\left[(z-3)^2\right](z-3).$$

7. (a) Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera no especificada, pero se sabe que cuando el radio es 6, la tasa de variación del mismo es 4. Halle la tasa de variación del área cuando el radio es 6. (Si $r(t)$ y $A(t)$ representan el radio y el área en el tiempo t, entonces las funciones r y A satisfacen $A = \pi r^2$; tan sólo es necesario aplicar directamente la Regla de la Cadena.)

Respuesta.- Encontrando la primera derivada con respecto de t para se tiene,

$$A'(t) = 2\pi r \cdot r'(t)$$

Dado que $r'(t) = 4$ cuando $r = 6$, entonces

$$A'(6) = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi.$$

(b) Suponga que el objeto circular que hemos estado observando es la sección transversal de un objeto esférico. Halle la tasa de variación del volumen cuando el radio es 6. (Es necesario conocer la fórmula del volumen de una esfera; en caso de que el lector la haya olvidado, el volumen es $\frac{4}{3}\pi$ veces el cubo del radio.)

Respuesta.- Encontrando la primera derivada con respecto de t para se tiene,

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot r'(t)$$

Dado que $r'(t) = 4$ cuando $r = 6$, entonces

$$V'(6) = 4\pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 576\pi.$$

(c) Suponga ahora que la tasa de variación del área de la sección transversal circular es 5 cuando el radio es 3. Halle la tasa de variación del volumen cuando el radio es 3. Este problema se puede resolver de dos maneras: primero, utilizando las fórmulas del área y el volumen en función del radio; y después expresando el volumen en función del área (para utilizar este método se necesita el Problema 9-3).

Respuesta.- Sabemos que

$$A'(t) = 2\pi r r'(t)$$

y $A' = 5$ cuando $r = 3$, entonces

$$5 = 2\pi 3 r'$$

Luego dividimos ambos lados por 6π, de donde

$$r' = \frac{5}{6\pi}.$$

Sustituyendo el valor de r y r' nos queda

$$V'8t) = 4\pi r^2 r'(t) \quad \Rightarrow \quad V' = 4\pi \cdot 3^2 \cdot \frac{5}{6\pi} = 30.$$

8. El área entre dos círculos concéntricos variables vale siempre $9\pi\ cm^2$. La tasa de cambio del área del círculo mayor es de $10\pi\ cm^2/seg$. ¿A qué velocidad varía la circunferencia del círculo pequeño cuando su área es de $16\pi cm^2$?.

Respuesta.- Sea r_1 y r_2 que representa el radio de de los círculos más pequeños y más grandes respectivamente. El área entre los dos círculos está dada por:

$$A = \pi \left[(r_2)^2 - (r_1)^2 \right]$$

Reemplacemos A con 9π, de donde

$$9\pi = \pi\left[(r_2)^2 - (r_1)^2\right] \quad \Rightarrow \quad (r_2)^2 - (r_1)^2 = 9$$

Derivando tenemos,

$$2r_2r'^2 - 2r_1r_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2' = \frac{r_1}{r_2}r_1' \qquad (1)$$

Por otro lado el área del circulo mayor es dado por,

$$A_2 = \pi(r_2)^2$$

Derivando se tiene,

$$A_2' = 2\pi r_2 r_2'$$

Dada que la tasa de cambio del área del circulo más grande es 10π, entonces

$$10\pi = 2\pi r_2 r_2' \quad \Rightarrow \quad r_2' = \frac{5}{r_2} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2),

$$\frac{5}{r_2} = \frac{r_1}{r_2}r_1' \quad \Rightarrow \quad r_1' = \frac{5}{r_1}.$$

El área del circulo pequeño es dada por,

$$A_1 = \pi(r_1)^2$$

reemplazando A_1 con 16π,

$$16\pi = \pi(r_1)^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 4$$

Por lo tanto

$$r_1' = \frac{5}{4}.$$

Así la circunferencia del circulo pequeño es,

$$C' = 2\pi r_1' \quad \Rightarrow \quad C' = 2\pi\frac{5}{4} = \frac{5}{2}\pi.$$

9. Una partícula A se desplaza a lo largo del eje horizontal positivo, y una partícula B a lo largo de la gráfica de $f(x) = -\sqrt{3}x,\ x \le 0$. En un momento dado, A se encuentra en el punto $(5,0)$ y se desplaza a una velocidad de 3 unidades del origen y se desplaza a una velocidad de 4 unidades/seg. ¿Cuál es la tasa de variación de la distancia entre A y B?.

Respuesta.- Sean x_1 la coordenada el eje x de A y x_2 representa el eje x de B en el momento t y el eje y de B en el momento t es $-\sqrt{3}x_2$.
La distancia d entre A y B puede ser calculado usando el teorema de Pitágoras como,

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (-\sqrt{3}x_2)^2$$

Derivando con respecto t es,

$$2d \cdot d' = 2(x_1 - x_2)(x_1' - x_2') + 2(-\sqrt{3}x_2)x_2' \quad \Rightarrow \quad d \cdot d' = (x_1 - x_2)(x_1' - x_2') + (-\sqrt{3}x_2)x_2' \qquad (1)$$

La distancia entre B y el origen es

$$s = \sqrt{x_2^2 + (-\sqrt{3}x_2)^2} = 2x_2$$

Derivando con respecto t es,

$$s' = 2x_2' \quad \Rightarrow \quad x_2' = \frac{1}{2}s'.$$

En el momento dado cuando B es 3 unidades desde el origen se tiene $3 = 2x_2$. Ya que $x_2 \leq 0$, entonces

$$x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Reemplazando $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_1' = 3$, $x_2' = \frac{1}{2}$, $s' = -2$ y $d = \sqrt{(5+\frac{3}{2})^2 + (-\sqrt{3}\frac{3}{2})^2} = 7$ en (1) se tiene,

$$7d' = \left(5 + \frac{3}{2}\right)(3+2) + \left(-\sqrt{3}\frac{-3}{2}\right)(-2) = 27.3 \quad \Rightarrow \quad d' = 3.9.$$

10. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Supongamos también que h y k son dos funciones tales que

$$h'(x) = \operatorname{sen}^2[\operatorname{sen}(x+1)] \qquad k'(x) = f(x+1)$$
$$h(0) = 3 \qquad k(0) = 0$$

Halle

(i) $(f \circ h)'(0)$.

Respuesta.- Se tiene,

$$\begin{aligned} (f \circ h)'(0) &= f'[h(0)]\,h'(0) = f'(3)h'(0) \\ &= \left[2 \cdot 3 \operatorname{sen}\frac{1}{3} + 3^2 \cos\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3^2}\right)\right] \cdot \operatorname{sen}^2[\operatorname{sen}(0+1)] \\ &= \left(6 \operatorname{sen}\frac{1}{3} - \cos\frac{1}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}^2[\operatorname{sen}(1)] \end{aligned}$$

(ii) $(k \circ f)'(0)$.

Respuesta.- Sea $f(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} (k \circ f)'(0) &= k'[f(0)] \cdot f'(0) \\ &= f(0+1) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(iii) $\alpha'\left(x^2\right)$, donde $\alpha(x) = h\left(x^2\right)$. Ir con mucho cuidado en la resolución de este apartado.

Respuesta.- Sea

$$\alpha'(x) = \left[h\left(x^2\right)\right]' = h'\left(x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' = \operatorname{sen}^2\left[\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)\right] \cdot 2x$$

Así, para $\alpha'\left(x^2\right)$ se tiene,

$$\alpha'\left(x^2\right) = 2x^2 \operatorname{sen}^2\left\{\operatorname{sen}\left[\left(x^2\right)^2+1\right]\right\} = 2x^2 \operatorname{sen}^2\left[\operatorname{sen}\left(x^4+1\right)\right].$$

11. Halle $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

y

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

Respuesta.- Por definición se tiene,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)\operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}\operatorname{sen}\frac{1}{h}.$$

Ya que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 0} g(x)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}\operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0 = f'(0).$$

12. Utilizando la derivada de $f(x) = 1/x$, tal como se ha hallado en el problema 9-1, calcule $(1/g)'(x)$ mediante la regla de la cadena.

Respuesta.- Sea $\dfrac{1}{g} = f[g] = f\circ g$, por la regla de la cadena se tiene,

$$(f\circ g)'(x) = f'[g(x)]\cdot g'(x) = \frac{-1}{[g(x)]^2}\cdot g'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

13. (a) Aplicando el problema 9-3, halle $f'(x)$ para $-1 < x < 1$, si $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Respuesta.- Sabiendo que $f(x) = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ y la regla de la cadena se tiene,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) Demuestre que la tangente a la gráfica de f en $\left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$ corta a la gráfica solamente en este punto (y así demuestre que la definición geométrica de tangente coincide con la nuestra).

Demostración.- La pendiente de la tangente a $\left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$ es,

$$f'(a) = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Después, la ecuación de la tangente viene dado por,

$$y = mx + c = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x + c$$

Luego ya que la tangente pasa a través de los puntos $\left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$, entonces

$$\sqrt{1-a^2} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}a + c \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{1-a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}},$$

de donde la tangente se convertirá en,

$$y = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

Por último sea $f(x) = \sqrt{1-a^2} = y$, entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(1-a^2)(1-x^2)} = -ax + 1 \\
&\Rightarrow \quad 1 - a^2 - x^2 + a^2x^2 = a^2x^2 - 2ax + 1 \\
&= \quad x^2 - 2ax + a^2 = 0 \\
&= \quad x = a.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la curva y la tangente se cortan en un sólo punto $\left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$

14. Demuestre análogamente que las tangentes a una elipse o a una hipérbola cortan a las gráficas correspondientes solamente una vez.

Demostración.- La ecuación general de la elipse es,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \Rightarrow \quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \qquad (1)$$

Tomando la derivada de la elipse se tiene,

$$y' = \frac{-\dfrac{b2x}{a^2}}{2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} = \frac{-bx}{a^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}$$

por lo que la pendiente de la tangente será con respecto de k estará dada por,

$$\frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}}$$

Por otro lado, la ecuación de la tangente es,

$$y = \frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}}x + c$$

Reemplazando x por k e y con $b\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}$,

$$b\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}} = \frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}}k + c,$$

de donde

$$c = b\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}} + \frac{bk^2}{a^2\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}} = \frac{a^2b\left(\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}\right)^2 - bk^2}{a^2\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}} = \frac{b}{\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}}$$

Por lo tanto la ecuación de la tangente viene dada por,

$$y = \frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}}x + \frac{b}{\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}} \qquad (2)$$

De (1) y (2), se tiene,

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}}x + \frac{b}{\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}} \quad \Rightarrow \quad x^2-2kx+k^2=0 \;\Rightarrow\; (x-k)^2=0 \;\Rightarrow\; x=k.$$

15. Si $f+g$ es diferenciable en a, ¿son f y g necesariamente diferenciables en a? Si $f\cdot g$ y f son diferenciables en a, ¿qué condiciones debe cumplir f para que g sea diferenciable en a?.

Respuesta.- Supongamos que f no es diferenciable en ninguna parte. Sea $g=-f$, entonces

$$(f+g)(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Esta función cero, es diferenciable en cualquier parte.

Por otro lado, supongamos que $f\cdot g$ y f son diferenciables en a. Por el teorema 8 (Si f y g son diferenciables en a y $f(a)\neq 0$, entonces f/g es diferenciable en a), la condición que debe cumplir f para que g sea diferenciable en a será,

$$g = \frac{f\cdot g}{f}.$$

16. (a) Demuestre que si f es diferenciable en a, entonces $|f|$ también es diferenciable en a, si $f(a)\neq 0$.

Demostración.- Al ser f derivable en a es continua en a. Luego al ser $f(a)\neq 0$, se sigue que $f(x)\neq 0$ para todos los x de un intervalo entorno de a. Así pues, $f=|f|$ o $-f=|f|$ en este intervalo, con lo que $|f|'(a)=f'(a)$ o $|f|'(a)=-f'(a)$. Se puede hacer uso también de la regla de la cadena y del hecho que si $f(x)=\sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Sea $|f|=\sqrt{f^2}$ con lo que

$$|f|'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)^2}}\cdot 2f(x)f'(x) = f'(x)\cdot\frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

(b) Dé un contraejemplo si $f(a) = 0$.

Respuesta.- Sea $f(x) = x$, entonces $f(0) = 0$ y $|f|(x) = |x|$. De donde sabemos que $|f|$ no es diferenciable en 0.

(c) Demuestre que si f y g son diferenciables en a, entonces las funciones $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son diferenciables en a, si $f(a) \neq g(a)$.

Demostración.- Sea $r > 0$ para cualquier $x \in (a-r, a+r)$ y sea $f(x) > g(x)$, dados por $f(x) = \max f, g(x) = f(x)$ y $\min f, g(x) = g(x)$. entonces por definición de diferncibilidad existen $f'(a)$ y $g'(a)$ tal que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Luego por definición de límites se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta_1 > 0$ de donde

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon \text{ siempre que} |h| < \delta_1$$

y sea $\epsilon > 0$ con $\delta_2 > 0$,

$$\left| \frac{g(a+h) - g(a)}{h} - g'(a) \right| < \epsilon \text{ siempre que} |h| < \delta_2$$

Pongamos a $\delta' = \dfrac{\min \delta_1, \delta_2, r}{2}$, entonces para cualquier $x \in (a - \delta', a + \delta')$, tenemos $\max f, g(x) = f(x)$ y $\min f - g(x) = g(x)$ de la siguiente forma,

$$\left| \frac{\max f, g(a+h) - \max f, g(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon \text{ siempre que } |h| < \delta'$$

y

$$\left| \frac{\min f, g(a+h) - \min f, g(a)}{h} - g'(a) \right| < \epsilon \text{ siempre que } |h| < \delta'.$$

Pero ya que $\max f, g(a+h) = f(a+h)$ y $\min f, g(a+h) = g(a+h)$ para $|h| < \delta'$, entonces $\max f, g$ y $\min f, g$ son diferenciables en a.

(d) Dé un contraejemplo si $f(a) = g(a)$.

Respuesta.- Sean $f(x) = x$ y $g(x) = 0$ de donde $f(0) = g(0)$, entonces

$$\max f, g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \min f, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Derivando la parte derecha $\max f, g(x) = x$ para 0 se tiene 1, la derivada $\max f, g(x) = 0$ para 0 es 0. Con respecto a la parte izquierda se tiene las derivada de $\min f, g(x) = 0$ y $\min f, g(x) = x$ cuando tiende a 0 como 0 y 1 respectivamente. Por lo que se demuestra que $\max f, g$ y $\min f, g$ no son diferenciales en $a = 0$.

17. De un ejemplo de funciones f y g tales que g toma todos los valores, y $f \circ g$ y g son diferenciables, pero f no es diferenciable. ((El problema es trivial si no se exige que g tome todos los valores; en este caso g podría ser una función constante, o una función que sólo tomara valores de un intervalo (a, b), en cuyo caso el comportamiento de f fuera de (a, b) sería irrelevante.).

Respuesta.- Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no diferenciable en $x = 0$. Y sea $g(x) = x^3$ diferenciable en $x = 0$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g)(x) = f\left(x^3\right) = \sqrt[3]{\left(x^3\right)^2} = \sqrt[3]{x^6} = x^2.$$

donde $(f \circ g)(x)$ es diferenciable en $x = 0$.

18. (a) Si $g = f^2$ halle una fórmula para g' (que incluya a f').

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$g' = 2f \cdot f'.$$

(b) Si $g = (f')^2$, halle una fórmula para g' (que incluya a f'').

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$g' = 2f' \cdot f''.$$

(c) Suponga que la función $f > 0$ verifica que

$$(f')^2 = f + \frac{1}{f^3}.$$

Halle una fórmula para f'' en función de f. (En este apartado, además de cálculos sencillos, es necesario tener cuidado.)

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena a los dos lados, tenemos

$$2f' \cdot f'' = f' + \frac{-3}{f^4} f' \quad \Rightarrow \quad f'' = \frac{1}{2} - \frac{3}{2f^4}.$$

19. Si f es tres veces diferenciable y $f'(x) \neq 0$, la **derivada de Schwarz** de f en x se define mediante

$$\mathscr{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

(a) Demuestre que $\mathscr{D}(f \circ g) = [\mathscr{D}f \circ g] \cdot g'^2 \mathscr{D}g$.

Demostración.- Primeramente calculemos $(f \cdot g)'$, $(f \cdot g)''$ y $(f \cdot g)'''$.

$$\begin{array}{rcl}
(f \circ g)'(x) & = & f'[g(x)] \cdot g'(x). \\
 & & \\
(f \circ g)''(x) & = & \{f'[g(x)] \cdot g'(x)\}' \\
 & = & f''[g(x)]\, g'(x)^2 + f'[g(x)]\, g''(x) \\
 & & \\
(f \circ g)'''(x) & = & \left\{f''[g(x)]\, g'(x)^2 + f'[g(x)]\, g''(x)\right\} \\
 & = & f'''[g(x)]\, g'(x)^3 + 2f''[g(x)]\, g''(x)g'(x) + f''[g(x)]\, g''(x)g'(x) + f'[g(x)]\, g'''(x) \\
 & = & f'''[g(x)]\, g'(x)^3 + 3f''[g(x)]\, g''(x)g'(x) + f'[g(x)]\, g'''(x).
\end{array}$$

Por último calculamos la derivada de Schwarz para $f \circ g$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}(f \circ g)(x) &= \frac{(f \circ g)'''(x)}{(f \circ g)'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)}\right]^2 \\
&= \frac{f'''\,[g(x)]\,g'(x)^3}{f'\,[g(x)]\cdot g'(x)} + \frac{2f''\,[g(x)]\,g''(x)g'(x)}{f'\,[g(x)]\cdot g'(x)} + \frac{f'\,[g(x)]\,g'''(x)}{f'\,[g(x)]\cdot g'(x)} \\
&- \frac{3}{2}\left\{\frac{f''\,[g(x)]\,g'(x)^2}{f'\,[g(x)]\cdot g'(x)} + \frac{f'\,[g(x)]\,g''(x)}{f'\,[g(x)]\cdot g'(x)}\right\}^2 \\
&= \frac{f'''\,[g(x)]\,g'(x)^2}{f'\,[g(x)]} + \frac{2f''\,[g(x)]\,g''(x)}{f'\,[g(x)]} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''\,[g(x)]\,g'(x)}{f'\,[g(x)]} + \frac{g''(x)}{g'(x)}\right]^2 \\
&= \frac{f'''\,[g(x)]\,g'(x)^2}{f'\,[g(x)]} + \frac{2f''\,[g(x)]\,g''(x)}{f'\,[g(x)]} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} \\
&- \frac{2}{3}\left\{\frac{f''\,[g(x)]\,g'(x)}{f'\,[g(x)]}\right\}^2 - 3\frac{f''\,[g(x)]\,g''(x)}{f'\,[g(x)]} - \frac{3}{2}\left[\frac{g''(x)}{g'(x)}\right]^2 \\
&= \left[\frac{f'''}{f'} \circ g(x) - \frac{3}{2}\frac{(f'' \circ g)(x)}{(f' \circ g)(x)}\right]\cdot g'(x)^2 + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\frac{g''(x)}{g'(x)} \\
&= [\mathscr{D}f \circ g(x)]\cdot g'(x)^2 + \mathscr{D}g(x).
\end{aligned}
$$

(b) Demuestre que si $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $ad - bc \neq 0$, entonces $\mathscr{D}f = 0$. Por consiguiente, $\mathscr{D}(f \circ g) = \mathscr{D}g$.

Demostración.- Usando la regla de la cadena de Leibniz se tiene,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} \\
f''(x) &= -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3} \\
f'''(x) &= \frac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}
\end{aligned}
$$

Luego utilizamos la definición de la derivada de Schwarz, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}f(x) &= \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2 = \frac{\dfrac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}}{\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}} - \frac{3}{2}\left[-\frac{\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx-d)^3}}{\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}}\right]^2 \\
&= \frac{6c^2}{(cx+d)^2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{2c}{cx+d}\right)^2 = \frac{6c^2}{(cx+d)^2} - \frac{6c^2}{(cx+d)^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Sea $[\mathscr{D}f \circ g(x)]\cdot g'(x)^2 + \mathscr{D}g(x)$, entonces $\mathscr{D}(f \circ g) = \mathscr{D}g$.

20. Suponga que existen $f^{(n)}(a)$ y $g^{(n)}(a)$. Demuestre la **fórmula de Leibniz**:

$$(f\cdot g)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\cdot g^{(n-k)}(a).$$

Demostración.- Demostraremos por inducción matemática. Sea $n=1$, entonces

$$(f\cdot g)'(a)=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}f^{(k)}(a)\cdot g^{(1-k)}(a)=\binom{1}{0}f(a)\cdot g'(a)+\binom{1}{1}f'(a)\cdot g(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

El cual se cumple para $n=1$. Luego la hipótesis de inducción estará dada por,

$$(f\cdot g)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\cdot g^{(n-k)}(a),$$

que es cierta para n y por no tanto $f^{(n+1)}(a)$ y $g^{(n+1)}(a)$ existen. Así,

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)^{(n+1)}(a) &= (f\cdot g)^{(n)}(a)(f\cdot g)'(a)\\
&= \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\cdot g^{(n-k)}(a)\right]\left[f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[f^{(k+1)}(a)g^{(n-k)}(a)+f^{(k)}g^{(n+1-k)}(a)\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a)
\end{aligned}$$

Ya que $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$. Entonces,

$$(f\cdot g)^{(n+1)}(a)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(a)g^{[(n+1)-k]}(a).$$

21. Demuestre que si $f^{(n)}\left[g(a)\right]$ y $g^{(n)}(a)$ existen ambas, entonces también existe $(f\circ g)^{(n)}(a)$. Con un poco de práctica el lector debería convencerse que no es sensato tratar de encontrar una fórmula para $(f\circ g)^{(n)}(a)$. Para demostrar que $(f\circ g)^{(n)}(a)$ existe, es necesario, por tanto, encontrar una proposición razonable acerca de $(f\circ g)^{(n)}(a)$ que pueda ser demostrada por inducción. Se puede intentar algo como: existe $(f\circ g)^{(n)}(a)$ y es una suma de términos, cada uno de los cuales es un producto de términos de la forma ....

Demostración.- La fórmulas,

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'(x) &= f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)\\
(f\circ g)''(x) &= f''\left[g(x)\right]\cdot g'(x)+f'\left[g(x)\right]\cdot g''(x)\\
(f\circ g)'''(x) &= f'''\left[g(x)\right]\cdot g'(x)^3+3f''\left[g(x)\right]\cdot g'(x)g''(x)+f'\left[g(x)\right]g'''(x),
\end{aligned}$$

Llevan a la siguiente conjetura: Si $f^{(n)}\left[g(a)\right]$ y $g^{(a)}(a)$ existen, entonces también existe $(f\circ g)^{(n)}(a)$ y es una suma de términos de la forma

$$c\cdot\left[g'(a)\right]^{m_1}\cdots\left[g^{(n)}(a)\right]^{m_n}\cdot f^{(k)}\left[g(a)\right],$$

para algún número c, enteros no negativos $m_1, \ldots, m_n$ y un número natural $k \leq n$. Para probar esta proposición utilizaremos el método de inducción, de donde notamos que es verdadero para $n = 1$ con $a = m_1 = k = 1$. Ahora supóngase que para un cierto n, es cierto para todo número a tal que $f^{(n)}[g(a)]$ y $g^{(n)}(a)$ existan. Supóngase también que $f^{(n+1)}[g(a)]$ y $g^{(n+1)}(a)$ existen. Entonces $g^{(k)}(x)$ podría existe para todo $k \leq n$ y todo x en algún intervalo alrededor de a, y $f^{(k)}(y)$ debe existe para todo $k \leq n$ y todo y en algún intervalo alrededor de $g(a)$. Ya que g es continua en a, esto implica que $f^{(k)}[g(x)]$ exista para todo x en algún intervalo alrededor de a. Así la proposición es verdadera para todo x, esto es, $(f \circ g)^{(n)}$ es una suma de términos de la forma:

$$c\left[g'(x)\right]^{m_1} \cdots \left[g^{(n)}(x)\right]^{m_n} \cdot f^{(k)}\left[g(a)\right], \quad m_1, \ldots, m_n \geq 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Como consecuencia, $(f \circ g)^{(n+1)}(a)$ es una suma de términos de la forma

$$c \cdot m_\alpha \left[g'(x)\right]^{m_1} \cdot \ldots \cdot \left[g^{(n)}(x)\right]^{m_\alpha - 1} \cdot \ldots \cdot \left[g^{(n)}(a)\right]^{m_n} \cdot f^{(k)}\left[g(a)\right] \qquad m_\alpha > 0$$

o de la forma

$$c\left[g'(x)\right]^{m_1+1} \cdot \ldots \cdot \left[g^{(n)}(x)\right]^{m_n} \cdot f^{(k+1)}\left[g(a)\right].$$

Para un número c.

22. (a) Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, halle una función g tal que $g' = f$. Encuentre otra.

Respuesta.- Sea

$$g(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x.$$

Derivando g tenemos,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{a_n}{n+1}(n+1)x^n + \frac{a_{n-1}}{n} \cdot nx^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{2}2x + a_0 \\ &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Otro g_1 tal que $g_1' = f$ sería,

$$g_1(x) = g(x) + c.$$

(b) Si

$$f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}$$

halle una función g que verifique $g' = f$.

Respuesta.- Sea

$$g(x) = -\left[\frac{b_2}{x} + \frac{b_3}{2x^2} + \ldots + \frac{b_m}{(m-1)x^{m-1}}\right].$$

Derivando g tenemos,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\left[-\frac{b_2}{x^2} - \frac{2b_3x}{2x^4} + \ldots + \frac{b_m(m-1)x^{m-2}}{(m-1)x^{2(m-1)}}\right] \\
&= \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots + \frac{b_m}{x^m} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

(c) ¿Existe una función

$$f(x) = a_nx^n + \ldots + a_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}$$

tal que $f'(x) = 1/x$?.

Respuesta.- No, ya que la derivada de f es

$$f'(x) = na_nx^{n-1} + \ldots + a_1 - \frac{b_1}{x^2} - \frac{2b_2}{x_3} - \ldots - \frac{mb_m}{x^{m+1}}.$$

23. Demuestre que existe una función polinómica f de grado n tal que

(a) $f'(x) = 0$ para exactamente $n-1$ números x.

Demostración.- Ya que para todo n existe una función polinómica de grado n. Es decir, existe g una función polinómica de grado $n-1$ con $n-1$ raíces. Entonces para $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, de grado n existe una función g tal que $g = f'$. Esto por el problema 7(b) capítulo 3 Spivak y por el problema 22 (a) capítulo 10, Spivak.

(b) $f'(x) = 0$ para ningún x, si n es impar.

Demostración.- Sea n impar que implica $n-1$ es par. Si g es una función polinómica de grado $n-1$ sin raíces (Capítulo 3, problema 7, Spivak). Entonces, existe un polinomio f de grado n tal que $f' = g$ (Capítulo 10, problema 22(a), Spivak). Por lo tanto g no tiene raíces, así $f'(0) = 0$ no tiene raíces.

(c) $f'(x) = 0$ para exactamente un x, si n es par.

Demostración.- Sea n par que implica $n-1$ par. Por el capítulo 3, problema 7, Spivak, existe un polinomio g de grado $n-1$ con exactamente una raíz. Luego por el capítulo 10, problema 22(a), spivak. Existe una función polinómica f de grado n tal que $f' = g$. Por lo tanto g tiene una sola raíz, así $f'(x) = 0$ tiene exactamente una raíz.

(d) $f'(x) = 0$ para exactamente k números x, si $n-k$ es impar.

Demostración.- Sea $n-k$ impar que implica $n-k-1$ es par. Por el capítulo 3, problema 7, Spivak, existe un polinomio g de grado $n-k-1$ con exactamente k raíces. Luego por el capítulo 10, problema 22(a), spivak, existe una función polinómica f de grado n tal que $f' = g$. Por lo tanto g tiene k raíces, así $f'(0) = 0$ para exactamente k números x.

24. (a) El número a se denomina una raíz doble de la función polinómica f si $f(x) = (x-a)^2 g(x)$ para alguna función polinómica g. Demuestre que a es una raíz doble de f si y sólo si a es una raíz de f y de f'.

Demostración.- Primero demostremos que $f = f' = 0$. Para f tenemos,

$$f(a) = (a-a)^2 g(x) = 0.$$

Luego por la regla de la cadena para f' obtenemos,

$$f'(a) = 2(a-a)g(a) + (a-a)^2 g'(a) = 0.$$

Por lo tanto a es una raíz doble de f.

Demostramos ahora que si $f(a) = f'(a) = 0$, entonces, a es una raíz doble de f si

$$f(x) = (x-a)^2 g(x)$$

para alguna función polinómica g. Ya que f es un polinomio y $f(a) = 0$, entonces por la división polinomial, existe una función polinómica g_1 tal que

$$f(x) = (x-a)g_1(x). \tag{1}$$

Luego calculamos la derivada de esta función,

$$f'(x) = g(x) + (x-a)g'(x),$$

Se sigue $f'(a) = 0$ implica que $g_1(a) = 0$. Luego, por el hecho de que g_1 es un polinomio, podemos utilizar la división polinomial para construir otro polinomio, como sigue:

$$g_1(x) = (x-a)g_2(x).$$

Luego reemplazamos en (1), de donde

$$f(x) = (x-a)^2 g_1(x) g_2(x).$$

Ya que g_1 y g_2 son polinomios, ponemos $g = g_1 \cdot g_2$, Por lo tanto

$$f(x)(x-a)^2 g(x).$$

(b) ¿Cuándo tiene $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ una raíz doble? ¿Cuál es la interpretación geométrica de esta condición?.

Respuesta.- Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función polinómica con $a \neq 0$ e y una raíz doble de f. Entonces por la parte (a) debemos encontrar $f(y) = f'(y) = 0$ como sigue:

$$f'(y) = 2ay + b = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{b}{2a}, \quad a \neq 0.$$

Por otro lado, ya que $f(y)$ también es cero, la condición que se requerirá será:

$$a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 4ac - b^2 = 0$$

Geométrica, significa que la gráfica de f toca al eje horizontal en el punto $-\dfrac{b}{2a}$.

25. Si f es diferenciable en a, sea $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Halle $d'(a)$.

Respuesta.- Podemos ver que

$$d'(a) = f'(a) - f'(a)(a-a) - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

26. Este problema es parecido al problema 3-6 (spivak). Sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ números dados.

(a) Si $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos, demuestre que existe una función polinómica f de grado $2n-1$, tal que $f\left(x_j\right) = f'\left(x_j\right) = 0$ para $j \neq i$, y $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$.

Demostración.- Notemos que f tiene la forma siguiente,

$$f(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j)^2 g(x)$$

para alguna función polinómica g (cada x_j, $j \neq i$ es una raíz doble según el problema 24, capítulo 10, Spivak). Ahora, ya que f es de grado $2n-1$ entonces g es de grado 1. Por lo tanto, g tiene que ser de la forma $g(x) = ax + b$ para algún $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo que se tiene

$$f(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j)^2 (ax+b) = h(x)(ax+b)$$

donde $h(x) = \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j)^2$. Luego, usando la regla de la cadena se tiene,

$$f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x).$$

se sigue que

$$f(x_i) = h(x_i)(ax_i + b) = a_i \quad \text{y} \quad f'(x_i) = h'(x_i)(ax_i+b) + h(x_i)a = b_i$$

de donde, se tiene

$$\begin{aligned} \left[h(x_i)x_i\right] a + h(x_i)b &= a_i \\ \left[h'(x_i)x_i + h(x_i)\right] a + h'(x_i)b &= b_i \end{aligned}$$

Será siempre posible resolver estas ecuaciones, ya que

$$\left[h(x_i)x_i\right] h'(x_i) - \left[h'(x_i)x_i + h(x_i)\right] h(x_i) = \left[-h(x_i)\right]^2 \neq 0.$$

Es decir, se mantiene la última desigualdad desde $h(x_i) = \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i} (x_i - x_j)^2 \neq 0$. Por lo tanto las ecuaciones lineales tienen solución, digamos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces existe tal g por lo que terminamos la prueba.

(b) Demuestre que existe una función polinómica f de grado $2n-1$ con $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$ para todo i.

Demostración.- Para $\leq i \leq n$ sea f_i una función polinomial como se construyo en la parte (a). Entonces para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$f_(x_i) \quad \text{y} \quad f_i'(x_i) = b_i$$

como también $f_j(x_i) = f_j(x_i) = 0$ para $j \neq i$. Ahora definamos la función polinomial

$$f = f_1 + \ldots f_n.$$

Dado que dos funciones polinómicas también es una función polinomial entonces

$$f(x_i) = f_1(x_i) + \ldots + f_n(x_i) = f_i(x_i) = a_i$$

Para $j \neq i$ donde se cumple la penúltima igualdad ya que $f_j(x_i) = 0$, tanto como

$$f(x_i) = f_1'(x_i) + \ldots + f_n'(x_i) = f_i'(x_i) = b_i,$$

también se cumple la penúltima igualdad ya que $f'(x_i) = 0$. Por lo que se completa la prueba.

27. Suponga que a y b son dos raíces consecutivas de una función polinómica f, pero que a y b no son raíces dobles, de manera que podemos escribir $f(x) = (x-a)(x-b)g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$.

Este teorema fue demostrado por el matemático francés Rolle, en relación con el problema de la aproximación de raíces de polinomios, pero el resultado no se definió en un principio en términos de derivadas. De hecho, Rolle fue uno de los matemáticos que nunca aceptó las nuevas ideas del cálculo infinitesimal. Su actitud no debe juzgarse como demasiado obstinada, ya que durante un período de cien años nadie fue capaz de definir los límites en otros términos que no fueran los que lindaban con la mística, pero en general la historia ha sido particularmente benévola con Rolle; su nombre se ha vinculado con un resultado mucho más general que aparecerá en el próximo capítulo y que constituye la base de los resultados teóricos más importantes del cálculo infinitesimal.

(a) Demuestre que $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo. (Recuerde que a y b son raíces consecutivas.)

Demostración.- Ya que $f(x)$ no tiene raíces en (a,b), por ende $g(x)$ no tiene raíces en (a,b) y por el hecho de que $g(a), g(b) \neq 0$, que implica que no tendrá raíces en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces $g(x)$ será positivo o negativa en $[a,b]$ y por lo tanto $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo.

(b) Demuestre que existe algún número x con $a < x < b$ y $f'(x) = 0$. (Dibuje un esquema para lustrar este hecho.)

Demostración.- Derivando f tenemos

$$f'(x) = (x-b)g(x) + (x-a)g(x) + (x-a)(x-b)g'(x),$$

con lo que

$$\begin{aligned} f'(a) &= (a-b)g(a), \\ f'(b) &= (b-a)g(b). \end{aligned}$$

Por el inciso a) sabemos que $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo, pero $f'(a)$ y $f'(b)$ tendrán signos distintos. Así pues, $f'(x) = 0$ para algún x de (a,b) ya que f' es una función continua.

(c) Demuestre ahora el mismo hecho, incluso si a y b son raíces múltiples. Indicación: Si $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$, considere la función polinómica $h(x) = f'(x)/(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}$.

Demostración.- Similar al inciso b) Puesto que,

$$f'(x) = m(x-a)^{m-1}(x-b)^n g(x) + (x-a)^m n(x-b)^{n-1} g(x) + (x-a)^m(x-b)^n g'(x).$$

De donde tenemos

$$h(a) = m(a-b)g(a),$$

$$h(b) = n(a-b)g(a),$$

con lo que $h(a)$ y $h(b)$ tienen signos distintos y por lo tanto $h(x) = 0$ para algún x de (a, b), lo cual implica que $f'(x) = 0$.

28. Supóngase que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0. Demuestre que f es diferenciable en 0, y halle $f'(0)$ en función de g.

Demostración.- Por la definición de diferenciabilidad de f en 0 se tiene,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)g(x+h) - xg(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)g(0+h) - 0g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} = \frac{hg(h)}{h} = g(0).$$

Luego debido a que g es continuo en 0. Demostramos que f es diferenciable en 0 tal que

$$f'(0) = g(0).$$

29. Supongase que f es diferenciable en 0 y que $f(0) = 0$. Demuestre que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0. Indicación: ¿Qué ocurre si intenta escribir $g(x) = f(x)/x$?.

Demostración.- Definamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ & \\ f'(0) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Notemos que g está bien definida. Luego g es continua en 0, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0).$$

donde se cumple la última igualdad ya que f es diferenciable en 0 y $f(0) = 0$, así pues por el hecho de que $g = (0) = f'(0)$ concluimos que g es continuo en 0.

30. Si $f(x) = x^{-n}$ para n en $\mathbb{N}$, demuestre que

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} x^{-n-k} = (-1)^k k! \binom{n+k-1}{k} x^{-n-k}, \quad \text{para } x \neq 0.$$

Demostración.- Primero sacamos la derivada de $f(x) = x^{-n}$,

$$f'(x) = -nx^{-n-1}.$$

Demostremos por inducción. Para $k = 1$ tenemos que

$$f(x) = (-1)\frac{(n+1-1)!}{(n-1)!} x^{-n-1} = (-1)\frac{n(n-1)!}{(n-1)!} x^{-n-1} = -nx^{-n-1}.$$

Definamos la hipótesis de inducción para $k \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$,

$$f^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} x^{-n-k}.$$

Entonces, derivando una vez más tenemos que:

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)} &= (-1)^k(-n-k)\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}x^{-n-k-1} \\
&= (-1)^k(-1)(n+k)\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}x^{-n-k-1} \\
&= (-1)^{k+1}(n+k)\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}x^{-n-k-1} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{(n+k)!}{(n-1)!}x^{-n-(k+1)} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(k+1)!}\frac{(n+k)!}{(n+1)!}x^{-n-(k+1)} \\
&= (-1)^{k+1}(k+1)!\frac{(n+k)!}{(k+1)!(n+1)!}x^{-n-(k+1)} \\
&= (-1)^{k+1}(k+1)!\binom{n+k}{k+1}x^{-n-(k+1)}, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}$$

31. Demuestre que es imposible expresar $x = f(x)g(x)$ donde f y g son diferenciables y $f(0) = g(0) = 0$. Indicación: Derive.

Demostración.- Derivando por la regla de la cadena se tiene,

$$1 = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ya que $f(0) = g(0) = 0$, entonces

$$1 = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 0.$$

Lo cual es absurdo. Por lo tanto es imposible escribir $x = f(x)g(x)$ para f y g diferenciables tal que $f(0) = g(0) = 0$.

32. ¿Qué es $f^{(k)}$ si

(a) $f(x) = 1/(x-a)^n$?.

Respuesta.- Observamos que f es diferenciable en todas sus derivadas de orden superior. Por lo que podemos utilizar la regla de la cadena. Sea $g(x) = (x-a)$, para $x \neq a$. Entonces g es una función diferenciable. Es más, $g'(x) = 1$ y $g^{(k)}(x) = 0$ para todo $k \geq 2$. Consideremos la función $h(x) = x^{-n}$ para $x \neq 0$. Por lo que vemos que $f(x) = h\left[g(x)\right]$ para $x \neq a$.
Se sigue que $(h \circ g)^{(n)}(a) = c \circ \left[g'(a)\right]^{m_1} \ldots \left[g^{(n)}(a)\right]^{m_n} \cdot h^{(k)}\left[g(a)\right]$ (Problema 21 Spivak, chapter 10, v 4), para algún c, enteros no negativos $m_1, \ldots, m_n$ para $k \leq n$. Ahora sabiendo que $g'(x) = 1$ y

$g^{(k)} = 0$ para todo $k \geq 2$ se tiene que $(h \circ g)^{(n)}(x)$ es suma de la forma $c \cdot h^{(k)}\left[g(x)\right]$ para $x \neq a$. Por último usamos el problema 30, Spivak , capitulo 10, v4. Se tiene:

$$f^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x-a)^{-n-k}.$$

(b) $f(x) = 1/(x^2-1)$?.

Respuesta.- Observemos que,

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Por lo que,

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left[g^{(k)}(x) - h^{(k)}(x)\right]$$

donde $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Usando la parte (a) se tiene,

$$g^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x-1)^{-n-k} \qquad \text{y} \qquad h^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x+1)^{-n-k}.$$

Así, tenemos que,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{1}{2}\left[(-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x-1)^{-n-k} - (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x+1)^{-n-k}\right] \\ &= \frac{1}{2}(-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\left[(x-1)^{-n-k} - (x+1)^{-n-k}\right]. \end{aligned}$$

33. Sea $f(x) = x^{2n} \operatorname{sen} 1/x$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Demuestre que existe $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ y que $f^{(n)}$ no es continua en 0. (Se encontrará la misma dificultad básica en el problema 21.)

Demostración.-

34. Sea $f(x) = x^{2n+1} \operatorname{sen} 1/x$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Demuestre que existe $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ es continua en 0, y que $f^{(n)}$ no es diferenciable en 0.

Demostración.-

35. Con la notación de Leibniz la Regla de la Cadena debería escribirse:

$$\frac{df\left[g(x)\right]}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}.$$

En vez de esto, se suele encontrar generalmente la siguiente proposición: Sea $y = g(x)$ y $z = f(y)$. Entonces

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Observe que z en dz/dx denota la función compuesta $f \circ g$, mientras que la z de dz/dy denota la función f; se sobreentiende también que dz/dy será una expresión que incluye y y de que en la solución final $g(x)$ debe sustituir por y. En cada de los siguientes casos halle dz/dx aplicando esta fórmula, después compare el resultado con el problema 1.

(i) $z = \operatorname{sen} y, \quad y = x + x^2.$

Respuesta.-

(ii) $z = \operatorname{sen} y, \quad y = \cos x.$

Respuesta.-

(iii) $z = \operatorname{sen} u, \quad u = \operatorname{sen} x.$

Respuesta.-

(iv) $z = \operatorname{sen} v, \quad v = \cos u, \quad u = \operatorname{sen} x.$

Respuesta.-