Tom M. Apostol

CALCULUS

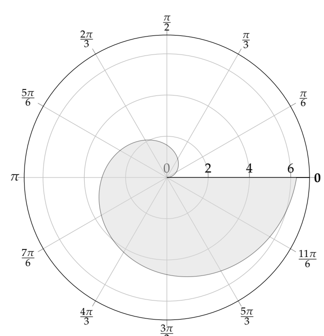
Volumen 1

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Y APUNTES

POR

FODE

CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA



LIBRO EN SU SEGUNDA EDICIÓN (Ingles)

Título de la obra original:
CALCULUS, One -Variable Calculus,
with an introduction to Linear Algebra
Edición original en lengua inglesa publicada por:
Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts

Sin ninguna revisión de esta obra.

Propiedad de esta obra:
CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA
E-mail: soyfode@gmail.com

2020

Índice general

Introducción

1.3. El método de exhaución para el área de un segmento de parábola

El método consiste simplemente en lo siguiente: se divide la figura en un cierto número de bandas y se obtienen dos aproximaciones de la región, una por defecto y otra por exceso, utilizando dos conjuntos de rectángulos.
Se subdivide la base en n partes iguales, cada una de longitud b/n. Los puntos de subdivisión corresponden a los siguientes valores de x:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, ..., \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b$$

La expresión general de un punto de la subdivisión es $x = \frac{kb}{n}$, donde k toma los valores sucesivos $k = 0, 01, 2, 3, ..., n$. En cada punto $\frac{kb}{n}$ se construye el rectángulo exterior de altura $(kb/n)^2$. El área de este rectángulo es el producto de la base por la altura y es igual a:

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{3}k^3$$

Si se designa por S_n la suma de las áreas de todos os rectángulos exteriores, puesto que el área del rectángulo k-simo es $(b^3/n^3)k^3$ se tiene la formula.

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) \qquad (1)$$

De forma análoga se obtiene la fórmula para la suma s_n de todos los rectángulos interiores:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2] \qquad (2)$$

Luego se tiene la identidad

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{6}{n} \qquad (3)$$

Como también

$$1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 = \frac{n^2}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \qquad (4)$$

Las expresiones exactas dadas no son necesarias para el objeto que aquí se persigue, pero sirven para deducir fácilmente las dos desigualdades que interesan

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + ... + n^2$$

que son válidas para todo entero $n \geq 1$. Multiplicando ambas desigualdades por b^3/n^3 y haciendo uso de (1) y (2) se tiene:

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n$$

Probemos que $b^3/3$ es el único número que goza de esta propiedad, es decir, que si A es un número que verifica las desigualdades

$$s_n < A < S_n \qquad (7)$$

para cada entero positivo n, ha de ser necesariamente $A = b^3/3$. Por esta razón dedujo Arquímedes que el área del segmento parabólico es $b^3/3$.
Para probar que $A = b^3/3$ se utilizan una vez más las desigualdades (5). Sumando n^2 a los dos miembros de la desigualdad de la izquierda en (5) se obtiene

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + n^2$$

Multiplicando por $b^3/3$ y utilizando (1) se tiene

$$S_n < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \qquad (8)$$

Análogamente, restando n^2 de los dos miembros de la desigualdad de la derecha en (5) y multiplicando por b^3/n^3 se llega a la desigualdad:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n \qquad (9)$$

Por tanto,cada número A que satisfaga (7) ha de satisfacer también:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \qquad (10)$$

para cada entero $n \geq 1$. Ahora también, hay sólo tres posibilidad:

$$A > \frac{b^3}{3}, \quad A < \frac{b^3}{3} \quad A = \frac{b^3}{3}$$

Si se prueba que las dos primeras conducen a una contradicción habrá de ser $A = \frac{b^3}{3}$
Supongamos que la desigualdad $A > b^3/3$ fuera cierta. De la segunda desigualdad en (10) se obtiene

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n} \qquad (11)$$

para cada entero $n \geq 1$. Puesto que $A - b^3/3$ es positivo, se puede dividir ambos miembros de (11) por $A - b^3/3$ y multiplicando después por n se obtiene la desigualdad

$$n < \frac{b^3}{A - b^3/3}$$

para cada n. Pero esta desigualdad es evidentemente para $n > b^3/(A - b^3/3)$. Por tanto la desigualdad es una contradicción. De forma análoga se demuestra para $A < b^3/3$ de donde concluimos que $A = b^3/3$.

3.2. Axiomas de cuerpo

Axioma .1 (Propiedad conmutativa)**.** $x + y = y + x,\ xy = yx$

Axioma .2 (Propiedad asociativa)**.** $x + (y + z) = (x + y) + z,\ x(yz) = (xy)z$

Axioma .3 (Propiedad distributiva)**.** $x(y + z) = xy + xz$

Axioma .4 (Existencia de elementos neutros)**.** Existen dos números reales distintos que se indican por 0 y 1 tales que para cada número real x se tiene: $0 + x = x + 0 = x$ y $1 \cdot x = x \cdot 1 = 1$

Axioma .5 (Existencia de negativos)**.** Para cada número real x existe un número real y tal que $x + y = y + x = 0$

Axioma .6 (Existena del recíproco)**.** Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real y tal que $xy = yx = 1$

Teorema 3.1 (Ley de simplificación para la suma)**.** Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$ (En particular esto prueba que el número 0 del axioma 4 es único)

Demostración.- Dado a+b=a+c. En virtud de la existencia de negativos, se puede elegir y de manera que $y + a = 0$, con lo cual $y + (a + b) = y + (a + c)$ y aplicando la propiedad asociativa tenemos $(y + a) + b = (y + a) + c$ entonces, $0 + b = 0 + c$. En virtud de la existencia de elementos neutros, se tiene $b = c$.
por otro lado este teorema demuestra que existe un solo número real que tiene la propiedad del 0 en el axioma 4. En efecto, si 0 y $0^{'}$ tuvieran ambos esta propiedad, entonces $0 + 0^{'} = 0$ y $0 + 0 = 0$; por lo tanto, $0 + 0^{'} = 0 + 0$ y por la ley de simplificación para la suma $0 = 0^{'}$

Teorema 3.2 (Posibilidad de la sustracción)**.** Dado a y b existe uno y sólo un x tal que $a + x = b$. Este x se designa por $b - a$. En particular $0 - a$ se escribe simplemente $-a$ y se denomina el negativo de a

Demostración.- Dados a y b por el axioma 5 se tiene y de manera que $a + y = 0$ ó $y = -a$, por hipótesis y teorema tenemos que $x = b - a$ sustituyendo y tenemos $x = b + y$ y propiedad conmutativa $x = y + b$, entonces $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$ esto por sustitución, propiedad asociativa y propiedad de neutro, Por lo tanto hay por lo menos un x tal que $a + x = b$. Pero en virtud del teorema 1.1, hay a lo sumo una. Luego hay una y sólo una x en estas condiciones.

Teorema 3.3. $b - a = b + (-a)$

Demostración.- Sea $x = b - a$ y sea $y = b + (-a)$. Se probará que $x = y$. por definición de $b - a$, $x + a = b$ y $y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b$, por lo tanto, $x + a = y + a$ y en virtud de teorema 1.1 $x = y$

Teorema 3.4. $-(-a) = a$

Demostración.- Se tiene $a + (-a) = 0$ por definición de $-a$ incluido en el teorema 1.1. Pero esta igualdad dice que a es el opuesto de $-a$, es decir, que si $a + (-a) = 0$ entonces $a = 0 - (-a) = a = -(-a)$

3.3. Ejercicios

1. Demostrar los teoremas del 1.5 al 1.15, utilizando los axiomas 1 al 6 y los teoremas I.1 al I.4

Teorema 3.5. $a(b-c) = ab - ac$

Demostración.- Sea $a(b-c)$ por teorema tenemos que $a\left[b + (-c)\right]$ y por la propiedad distributiva $[ab + a(-c)]$, y en virtud de anteriores teoremas nos queda $ab - ac$

Teorema 3.6. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

Demostración.- Sea $0 \cdot a$ por la propiedad conmutativa $a \cdot 0$, $a \cdot 0 + 0$ y $a \cdot 0 + [a + (-a)]$ y en virtud la propiedad asociativa y distributiva $a(0+1) + (-a)$ después $1(a) + (-a)$, luego por elemento neutro y existencia de negativos tenemos 0, Así queda demostrado que cualquier número multiplicado por cero es cero.

Teorema 3.7 (Ley de simplificación para la multiplicación)**.** Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$. (En particular esto demuestra que el número 1 del axioma 4 es único)

Demostración.- Sea b, $a \neq 0$, y por el existencia del recíproco tenemos $a \cdot a^{'} = 1$ luego, $b = b \cdot 1 = b\left[a(a^{'})\right] = (ab)(a^{'}) = (ac)(a^{'}) = c(a \cdot a^{'}) = c \cdot 1 = c$ por lo tanto queda demostrado la ley de simplificación.

Teorema 3.8 (Posibilidad de la división)**.** Dados a y b con $a \neq 0$, existe uno y sólo un x tal que $ax = b$. La x se designa por b/a ó $\dfrac{b}{a}$ y se denomina cociente de b y a. En particular $1/a$ se escribe también a^{-1} y se designa recíproco de a

Demostración .- Sea a y b por axióma 6 se tiene un y de manera que $a \cdot y = 1$ ó $y = a^{-1}$. Por hipótesis y teorema se tiene $x = b \cdot a^{-1}$, sustituyendo tenemos $x = y \cdot b$ entonces $ax = a(y \cdot b) = (a \cdot y)b = 1 \cdot b = b$ por lo tanto hay por lo menos un x tal que $ax = b$ pero en virtud del teorema 1.7 hay por lo mucho uno, luego hay una y sólo una x en estas condiciones.

Teorema 3.9. Si $a \neq 0$, entonces $b/a = b \cdot a^{-1}$

Demostración.- Sea $x = b/a$ y sea $y = b \cdot a^{-1}$ se probará que $x = y$, por definición de b/a, $ax = b$ y $ya = (b \cdot a^{-1})a = b(a^{-1}a) = b \cdot 1 = 1$, entonces $ya = xa$ y por la ley de simplificación para la multiplicación $y = x$

Teorema 3.10. Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$

Demostración.- Si $a \neq 0$ entonces $(a^{-1})^{-1} = 1 \cdot (a^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{a^{-1}} = a$ esto por axioma de neutro, definición de a^{-1} y teorema 1.9, así concluimos que $(a^{-1})^{-1} = a$

Teorema 3.11. Si $ab = 0$, entonces ó $a = 0$ ó $b = 0$

Demostración.- Veamos dos casos, cuando $x \neq 0$ y cuando $x = 0$
Si $x \neq 0$ y $ab = 0$ entonces $b = b \cdot 1 = b(a \cdot a^{-1}) = (ab)a^{-1} = 0a^{-1} = 0$, ahora si $a = 0$ y virtud del teorema 1.6 nos queda demostrado que la multiplicación de dos números cualesquiera es igual a cero si $a = 0$ ó $b = 0$

Teorema 3.12. $(-a)b = -(ab)$ *y* $(-a)(-b) = ab$

Demostración.- Empecemos demostrando la primera proposición, Por la ley de simplificación para la suma podemos escribir como $(-a)b + ab = 0$ entonces por la propiedad distributiva $b\left[(-a) + a\right]$ por lo tanto $b \cdot 0$, luego por el teorema 1.6 queda demostrado la primera proposición.
Para demostrar la segunda proposición acudimos a la primera proposición, $(-a)(-b) = -\left[a(-b)\right]$ y luego,
$-\left[a(-b) + b + (-b)\right] = -\left[(-b)(a+1) + b\right] = -\left[(-b)(a+1) - 1(-b)\right] = -\left[(-b)(a+1-1)\right] = -\left[(-b)a\right] = -\left[-(ab)\right]$ y en virtud del el teorema 1.4 $(-a)(-b) = ab$ así queda demostrado la proposición.

Teorema 3.13. $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)\ /\ (bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

Demostración.- Si $(a/b) + (c/d)$ entonces por definición de a/b, $a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1 = (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1 = (a \cdot b^{-1}) \cdot dd^{-1} + (c \cdot d^{-1}) \cdot bb^{-1}$ por las propiedades asociativa conmutativa y distributiva, $(b^{-1}d^{-1})(ad) + (b^{-1}d^{-1})(cb) = (b^{-1}d^{-1})(ad + cb)$, por lo tanto $(ad + bc)/bd$ esto por definición.

Teorema 3.14. $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Demostración.- Por definición, $(ab^{-1})(cd^{-1})$, propiedades conmutativa y asociativa $(ac)(b^{-1}d^{-1})$, y por definición queda demostrado la proposición.

Corolario 3.1. Si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $(cd^{-1}) = c^{-1}d$

Demostración.- Por definición de a^{-1} tenemos que $(cd^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{cd^{-1}}$, por el teorema de posibilidad de la división $1 = (c^{-1}d)(cd^{-1})$ y en virtud de los axiomas de conmutatividad y asociatividad $1 = (c^{1}c)(dd^{-1})$, luego $1 = 1$. quedando demostrado el corolario.

Teorema 3.15. $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ si $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$

Demostración.- Sea $(a/b)/(c/d)$ entonces por definición $(ab^{-1})(cd^{-1})^{-1}$, en virtud del corolario 1 se tiene que $(ab^{-1})(c^{-1}d)$, y luego por axioma conmutativa y asociativa $(ad)(c^{-1}b^{-1})$, así por definición concluimos que $(ad)/(cd)$

2. $-0 = 0$

Demostración.- Sabemos que por el axioma 5 $a + (-a) = 0$, $-[a + (-a)] = 0$ y $-a + -(-a) = 0$ en virtud de teorema 1.12 y propiedad conmutativa $a + (-a) = 0$, por lo tanto $0 = 0$.

3. $1^{-1} = 1$

Demostración.- Por la existencia de elementos nuestros tenemos $1^{-1} \cdot 1$ y por axioma de existencia de reciproco $1 = 1$

4. El cero no tiene reciproco

Demostración.- Supongamos que el cero tiene reciproco es decir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ pero por el teorema 1.6 se tiene que $0 \cdot 0^{-1} = 0$ y $0 = 1$ esto no es verdad, por lo tanto el cero no tiene reciproco.

5. $-(a + b) = -a - b$

Demostración.- Por existencia de reciproco $-[1(a + b)]$ y teorema 1.12 $(-1)(a + b)$ luego por la propiedad distributiva $[(-1)b] + [(-1)b]$, una vez mas por el teorema 1.12 $-(1a) + [-(1b)]$, en virtud del axioma 4 $-a + (-b)$, y teorema 1.3, $-a - b$

6. $-(-a - b) = a + b$

Demostración

Si $-(-a - b)$ entonces por axioma $-[1(-a - b)]$, luego $(-1)(-a - b) = (-1)(-a) - [(-1)b]) = (1 \cdot a) - [-(1 \cdot b)]$ y por axioma $a - [-(b)]$, así por teorema $a + b$.

7. $(a - b) + (b - c) = a - c$

Demostración.- Por definición tenemos $[a + (-b)] + [b + (-c)]$, y axiomas de asociatividad y conmutatividad $[a + (-c)] + [b + (-b)]$, luego por existencia de negativos $[a + (-c)] + 0$,, así $a + (-c)$ y $a - c$.

8. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Demostración.- Por hipótesis $\frac{1}{a}\frac{1}{b}$ luego $\frac{1}{ab}$ por lo tanto $(ab)^{-1}$

9. $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ si $b \neq 0$

Demostración.- Primero demostremos que $-(a/b) = (-a/b)$, Sea $b \neq 0$, en virtud de definición de la división y teorema 1.12 no queda que $-(a/b) = (-a) \cdot b^{-1} = -a/b$.

Ahora demostramos que $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$, sea $b \neq 0$, luego $-(b^{-1} \cdot a) = [-(b^{-1})] \cdot a = a/-b$.

10. $(a/b) - (c/d) = (ad - bc)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Demostración.- Sea $b \neq 0$ y $d \neq 0$ y por definición $ab^{-1} - cd^{-1}$, luego por axiomas $(ab^{-1})(d \cdot d^{-1}) - (cd^{-1})(b \cdot b^{-1})$, y en virtud del teorema 1.5 y propiedad asociativa $b^{-1} \cdot d^{-1}(ad - bc)$ y $(ad - bc)/bd$

3.4. Axiomas de orden

Axioma .7. Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, lo mismo ocurre a $x + y$ y xy

Axioma .8. Para todo real $x \neq 0$, ó $x \in \mathbb{R}^+$ ó $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos.

Axioma .9. $0 \not\subset \mathbb{R}^+$

Definición 3.1. $x < y$ significa que $y - x$ es positivo.

Definición 3.2. $y > x$ significa que $x < y$

Definición 3.3. $x \geq y$ significa que ó $x < y$ ó $x = y$

Definición 3.4. $y \leq x$ significa que $x \leq y$

3.5. Ejercicios

1. Demostrar los teoremas 1.22 al 1.25 utilizando los teoremas anteriores y los axiomas del 1 al 9

Teorema 3.16 (Propiedad de Tricotomía)**.** Para a y b números reales cualesquiera se verifica se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$

demostración.- Sea $x = b - a$. Si $x = 0$, entonces $x = a - b = b - a$, por axioma 9, $0 \notin \mathbb{R}^+$ es decir:

$$a < b, \;\; b - a \in \mathbb{R}^+$$

$$b < a, \;\; a - b \in \mathbb{R}^+$$

pero como $a - b = b - a = 0$ entonces no ser $a < b$ ni $b < a$
Si $x0 \neq 0$, el axioma 8 afirma que ó $x > 0$ ó $x < 0$, pero no ambos, por consiguiente, ó es $a < b$ ó es $b < a$, pero no ambos. Pro tanto se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a = b$, $a < b$, $b < a$.

Teorema 3.17 (Propiedad Transitiva)**.** Si $a < b$ y $b < c$, es $a < c$

Demostración.- Si $a < b$ y $b < c$, entonces por definición $b - a > 0$ y $c - b > 0$. En virtud de axioma $(b - a) + (c - b) > 0$, es decir, $c - a > 0$, y por lo tanto $a < c$.

Teorema 3.18. Si $a < b$ es $a + c < b + c$

Demostración.- Sea $x = a + c$

Teorema 3.19. Si $a < b$ y $c > 0$ es $ac < bc$

Demostración.- Si $a < b$ por definición $b - a > 0$, dado que $c > 0$ y por el axioma $(b - a)c > 0$ y $bc - ac > 0$, por lo tanto $ac < bc$

Teorema 3.20. Si $a \neq 0$ es $a^2 > 0$

Demostremos por casos..- Si $a > 0$, entonces por axioma $a \cdot a > 0$ y $a^2 > 0$. Si $a < 0$, entonces por axioma $(-a)(-a) > 0$ y $a^2 > 0$

Teorema 3.21. 1>0

Demostración.- Por el anterior teorema, si $1 > 0$ ó $1 < 0$ entonces $1^2 > 0$, y $1^2 = 1$, por lo tanto que $1 > 0$

Teorema 3.22. Si $a < b$ y $c < 0$, es $ac > bc$

Demostración.- Si $c < 0$, por definición $-c > 0$, en virtud del axioma $-c(b - a) > 0$, y $ac - cb > 0$, por lo tanto $ab < ac = ac > bc$

Teorema 3.23. Si $a < b$, es $-a > -b$. En particular si $a < 0$, es $-a > 0$

Demostración.- Si $1 > 0$, por la existencia de negativos $-1 < 0$ y por teorema tenemos que $-1a > -1b$ por lo tanto $-a > -b$

Teorema 3.24. Si $ab > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos

Demostración.- Sea $a > 0$ y $b > 0$, por axioma $ab > 0$, y sea $a < 0$ y $b < 0$, por definición $-a > 0$ y $-b > 0$, por lo tanto $(-a)(-b) > 0$ y por teorema 1.12 $ab > 0$.

Teorema 3.25. Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$

Demostración.- Si $a < c$ y $b < d$ por definición $c - a > 0$ y $d - b > 0$, en virtud del axioma 6:

$$(c-a)+(d-b) > 0 \Rightarrow c - a + d - b > 0 \Rightarrow (c+d) - (a+b) > 0$$

por lo tanto $a + b < c + d$.

2. No existe ningún número real tal que $x^2 + 1 = 0$

Demostración.- Sea $Y = x^2 + 1 = 0$ de acuerdo con la propiedad de tricotomía:

- Si $x > 0$ entonces por teorema 2.5 $x^2 > 0$ y por axioma 7 $x^2 + 1 > 0$ esto es $Y > 0$ y no satisface $Y = 0$ para $x > 0$.
- Si $x = 0$ entonces $x^2 = 0$ y $x^2 + 1 = 1$ esto es $Y = 1$ pero no satisface a $Y = 1$ para $x = 0$.
- Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y $x^2 + 1 > 0$, esto es $Y = 0$ pero tampoco satisface a $y = 0$ para $x < 0$.

3. La suma de dos números negativos es un número negativo.

Demostración.- Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $-a > 0$ y $-b > 0$ por axioma 7 $(-a) + (-b) > 0$ y en virtud del teorema 1.19 $-(a+b) > 0$ es decir $a + b < 0$

4. Si $a > 0$, también $1/a > 0$; Si $a < 0$ entonces $1/a < 0$

Demostración.-

- Si $a > 0$ entonces $(2a)^{-1} \cdot a > 0 \cdot (2a)^{-1}$ por lo tanto $1/a > 0$
- Si $a < 0$ entonces $-a > 0$ y $(-2a)^{-1} \cdot (-a) > 0 \cdot (-2a)^{-1}$ por lo tanto $1/a > 0$ y $-1/a < 0$

5. Si $0 < a < b$, entonces, $0 < b^{-1} < a^{-1}$

Demostración.- Si $b > 0$ entonces por el teorema anterior $b^{-1} > 0$ ó $0 < b^{-1}$.
Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$, dado que $a < b$ y por teorema $a \cdot a^{-1} < a^{-1}b$ así $1 < a^{-1}b$, luego $b{-}1 < a^{-1} \cdot bb^{-1}$, por lo tanto $b^{-1} < a^{-1}$. Y por la propiedad transitiva queda demostrado que $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

6. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ es $a \leq c$

Demostración.- Si $a < b$ ó $a = b$ y $b < c$ ó $b = c$ demostremos por casos: Si $a < b$ y $b < c$ por la propiedad transitiva $a < c$, después si $a < b$ y $b = c$ entonces $a < c$, luego si $a = b$ y $b < c$ entonces $a < c$, por último si $a = b$ y $b = c$ entonce $a = c$, por lo tanto $a \leq c$

Corolario 3.2. Si $c \leq b$ y $b \leq c$ entonces $c = b$

Demostración .- Si $b - c > 0$ y $c - b > 0$ entonces $(b-c) + (c-b) > 0$ y $0 < 0$ es Falso, entonces queda que $c = b$ (Usted puede comprobar para cada uno de los casos que se suscita parecido al teorema anterior.)

7. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ y $a = c$ entonces $b = c$

Demostración.- Si $a \leq b$ y $a = c$ entonces $c \leq b$. Sea $c \leq b$ y $b \leq c$ y por corolario anterior $b = c$.

8. Para números reales a y b cualquiera, se tiene $a^2 + b^2 \leq 0$. Si $ab \geq 0$, entonces es $a^2 + b^2 > 0$.

Demostración.- Si $ab > 0$ por teorema ($a > 0$ y $b > 0$) ó ($a < 0$ y $b < 0$) luego por teorema $a^2 > 0$ y $b^2 > 0$ por lo tanto por axioma 7 y ley de tricotomía $a^2 + b^2 > 0$.

9. No existe ningún número real a tal que $x \leq a$ para todo real x

Demostración.- Supongamos que existe un número real "a" tal que $y \leq a$. Sea $n \in \mathbb{R}$ y $x = y + n$ entonces por teorema 1.18 $y + n \leq a + n$ y $x \leq a + n$ esto contradice que existe un número real a tal que $y \leq a$, por lo tanto no existe ningún número real tal que para todo x, $x \leq a$.

10. Si x tiene la propiedad que $0 \leq x < h$ para cada número real positivo h, entonces $x = 0$

Demostración .- Por el teorema anterior ni $0 < x$ ni $x < h$ satisfacen la proposición por lo tanto queda $x = 0$

Lema 3.1. Para $b \geq 0$ $a^2 > b \Rightarrow a > \sqrt{b}$ ó $a < -\sqrt{b}$

Demostración.- Por hipótesis $a^2 > b$ y $a^2 - b > 0$, luego $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) > 0$, y por teorema $a - \sqrt{b} > 0$ y $a + \sqrt{b} < 0$ ó $a - \sqrt{b} < 0$ y $a + \sqrt{b} < 0$, por lo tanto $a - \sqrt{b} < 0$ ó $a < -\sqrt{b}$

3.6. Números enteros y racionales

Definición 3.5 (Defincíón de conjunto inductivo)**.** Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las propiedades siguientes:

a) El número 1 pertenece al conjunto.

b) Para todo x en el conjunto, el número $x + 1$ pertenece también al conjunto.

Definición 3.6 (Definición de enteros positivos)**.** Un número real se llama entero positivo si pertenece a todo conjunto inductivo.

3.8. Cota superior de un conjunto, elemento máximo, extremo superior

Definición 3.7 (definición de extremo superior)**.** Un número B se denomina extremo superior de un conjunto no vacío S si B tiene las dos propiedades siguientes:

a) B es una cota superior de S.

b) Ningún número menor que B es cota superior para S.

Teorema 3.26. Dos números distintos no pueden ser extremos superiores para el mismo conjunto.

Demostración.- Sean B y C dos extremos superiores para un conjunto S. La propiedad $b)$ de la definición 3.1 implica que $C \geq B$ puesto que B es extremo superior; análogamente, $B \geq C$ ya que C es extremo superior. Luego $B = C$

3.9. Axioma del extremo superior (axioma de completitud)

Axioma .10. Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que $B = supS$

Definición 3.8 (Definición de extremo inferior (Ínfimo))**.** Un número L se llama extremo inferior (o ínfimo) de S si:

a) L es una cota inferior para S,
$$L \leq x, \ \forall x \in S$$

b) Ningún número mayor que L es cota inferior para S.

$$Si \ t \leq x, \ \forall x \in S, \ entonces \, t \leq L$$

El extremo inferior de S, cuando existe, es único y se designa por $infS$. Si S posee mínimo, entonces $minS = infS$

Teorema 3.27. Todo conjunto no vacío S acotado inferiormente posee extremo inferior o ínfimo; esto es, existe un número real L tal que $L = infS$.

Demostración.- Sea $-S$ el conjunto de los números opuestos de los de S. Entonces $-S$ es no vacío y acotado superiormente. El axioma 10 nos dice que existe un número B que es extremo superior de $-S$. Es fácil ver que $-B = infS$.

3.10. La propiedad Arquimediana del sistema de los números reales

Teorema 3.28. El conjunto P de los enteros positivos 1,2,3,... no está acotado superiormente.

Demostración.- Supóngase P acotado superiormente. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. Puesto que P no es vacío, el axioma 10 nos dice que P tiene supremo, sea este b. El número $b-1$, siendo menor que b, no puede ser cota superior de P. Por b) de la definición 3.1 existe $n > b-1$ es decir $b-1 \in P,\ b-1 < b\ \ \exists n \in P:\ b-1 < n$. Para este n tenemos $n+1 > b$. Puesto que $n+1$ pertenece a P, esto contradice el que b sea una cota superior para P.

Teorema 3.29. Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$

Demostración.- Si no fuera así, x sería una cota superior de P, en contradicción con el teorema 3.3.

Teorema 3.30. Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$

Demostración.- Aplicar teorema 3.4 cambiando x por y/x.

Teorema 3.31. Si tres números reales a, x, e y satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq a + \dfrac{y}{n}$ para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$

Demostración.- Si $x > a$, el teorema 3.5 nos menciona que existe un entero positivo que satisface $n(x-a) > y$, en contradicción de la hipótesis, luego $x > a$ no satisface para todo número real x y a, con lo que deberá ser $x = a$.

Propiedades fundamentales del extremo superior ó supremo

Teorema 3.32. Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales.

a) Si S tiene extremo superior o supremo, para un cierto x de S se tiene

$$x > supS - h$$

Demostración.- Si es $x \leq supS - h$ para todo x de S, entonces $supS - h$ sería una cota superior de S menor que su supremo. Por consiguiente debe ser $x > supS - h$ por lo menos para un x de S.

b) Si S tiene extremo inferior o ínfimo, para un cierto x de S se tiene

$$x < infS + h$$

Demostración.- Si es $x \geq supS + h$ para todo x de S, entonces $supS + h$ sería una cota inferior de S mayor que su ínfimo. Por consiguiente debe ser $x < supS + h$ por lo menos para un x de S.

Teorema 3.33 (Propiedad aditiva)**.** Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, sea C el conjunto

$$C = \{a + b/a \in A,\ b \in B\}$$

a) Si A y B poseen supremo, entonces C tiene supremo, y

$$supC = supA + supB$$

Demostración.- Supongamos que A y B tengan supremo. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c \leq supA + supB$; de modo que $supA + supB$ es una cota superior de C. esto demuestra por el axioma 10 que C tiene supremo y que

$$supC \leq supA + supB$$

Sea ahora n un entero positivo cualquiera. Según el teorema 3.7 $(con\ h = 1/n)$ existen un a en A y un b en B tales que:

$$a > supA - \frac{1}{n}\ y\ b > supB - \frac{1}{n}$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$a + b > supA + supB - \frac{2}{n}, \quad supA + supB < a + b + \frac{2}{n} \leq supC + \frac{2}{n}$$

puesto que $a + b \leq supC$. Por consiguiente hemos demostrado que

$$supC \leq supA + supB < supC + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. En virtud del teorema 3.6, debe ser $supC = supA + supB$. Esto demuestra $a)$

b) Si A y B tienen ínfimo, entonces C tiene ínfimo, e

$$infC = infA + infB$$

Demostración.- Supongamos que A y B tengan ínfimo. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c \geq infA + infB$; de modo que $infA + infB$ es una cota inferior de C. esto demuestra por el axioma 10 que C tiene ínfimo y que

$$infC \geq infA + infB$$

Sea ahora n un entero positivo cualquiera. Según el teorema 3.7 $(con\ h = 1/n)$ existen un a en A y un b en B tales que:

$$a < infA + \frac{1}{n}\ \ y\ \ b < infB + \frac{1}{n}$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$a + b < infA + infB + \frac{2}{n}, \quad infA + infB \leq infC \leq a + b < infA + infB + \frac{2}{n}$$

puesto que $a + b \geq infC$ Por consiguiente hemos demostrado que

$$infA + infB \leq infC < infA + infB + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. En virtud del teorema 3.6, debe ser $supA + supB = infC$. Esto demuestra $b)$

Teorema 3.34. Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de $\mathbb{R}$ tales que

$$s \leq t$$

para todo s en S y todo t en T. Entonces S tiene supremo, T ínfimo, y se verifica

$$supS \leq infT$$

Demostración.- Cada t de T es corta superior para S. Por consiguiente S tiene supremo que satisface la desigualdad $supS \leq T$ para todo t de S. Luego $supS$ es una cota inferior de T, con lo cual T tiene ínfimo que no puede ser menor que $supS$. Dicho de otro modo, se tiene $supS \leq infT$, como se afirmó.

3.12. Ejercicios

1. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número real z tal que $x < z < y$

Demostración.- Sea S un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$, por axioma 10 se tiene un supremo llamemosle z, por definición $x \leq z$ para todo $x \in S$, ahora si $y \in \mathbb{R}$ que cumple $x \leq y$, para todo $x \in S$, entonces $z \leq y$, por lo tanto $x \leq z \leq y$ esto nos muestra que existe por lo menos un número real que cumple la condición $x < z < y$.

2. Si x es un número real arbitrario, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$

Demostración.- Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ en virtud del axioma 5 se verifica $n + m = 0$, donde m es el opuesto de n, esto nos dice que $m < n$ y por teorema anterior se tiene $m < x < n$.

3. Si $x > 0$, demuestre que existe un entero positivo n tal que $1/n < x$

Demostración.- Sea $y = 1$ entonces por teorema 3.5 $nx > 1$, por lo tanto $1/n < x$

4. Si x es un número real arbitrario, demostrar que existe un entero n único que verifica las desigualdades $n \leq x < n+1$. Este n se denomina la parte entera de x, se delega por $[x]$. Por ejemplo, $[5] = 5$, $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $\left[-\frac{8}{2}\right] = -3$

Demostración.- Primero probemos la existencia de n,

- Sea $1 \leq a$ y $S = \{m \in \mathbb{N} / \ m \leq a\}$
  Vemos que S es no vacío pues contiene a 1, y a es un cota superior de S, luego por axioma del supremo, existe un número $s = supS$, entonces por teorema 3.7 con $h = 1$ resulta:

  $$n > s - 1 \quad s < n + 1, \ \ para \ algnn \ de \ S \quad (1)$$

  Como $z \in S$, se cumple $z \leq a$ y solo falta probar que $a < z + 1$. En efecto, si fuese $z + 1 \leq a$, entonces $n + 1 \in S$ y por la propiedad a), se tendría $n + 1 \leq s$, en contradicción con (1).
  Por tanto, el número entero positivo n cumple con $n \leq a < n + 1$
- $0 \leq a < 1$
  En este caso, el entero $n = 0$ cumple con la propiedad requerida.
- $a < 0$ Entonces $-a > 0$ y por los dos casos anteriores, existe un entero u tal que $u \leq a < u + 1$ de donde $-u - 1 < a \leq -u$.
  Definiendo n por

  $$n = \left\{ \begin{array}{lll} -u-1 & si & a < -u \\ \text{si} & x \leq 5 & a = -u \end{array} \right. \tag{3.1}$$

se prueba fácilmente que $z \leq a < z+1$

Luego demostramos la unicidad. Sea w y z dos números enteros tal que, $w \leq a < w+1$ y $z \leq a < z+1$ debemos probar que $w = z$. Si fuesen distintos, podemos suponer que $z < w$. Entonces $w - z \geq 1$, esto es $z+1 \leq w$, y de $a < z+1 \leq w \leq a$ resulta una contradicción ya que $a < a$ luego se cumple que $w = z$.

5. Si x es un número real arbitrario, $x < y$, probar que existe un entero único n que satisface la desigualdad $n \geq x < n+1$

Demostración.- sabemos que para $x \in \mathbb{R}$ hay exactamente un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \neq x < n+1$
Si $n = x$ entonces $x \neq n < x+1$.. Por otro lado si $n \neq x$, entonces tenemos $n < x$, así $n+1 < x+1$. Pero sabemos que $x < n+1$, por lo tanto,

$$x < n+1 < x+1 \to x \leq n+1 < x+1$$

6. Si a y b son números reales arbitrarios, $a < b$, probar que existe por lo menos un número racional r tal que $a < r < b$ y deducir de ello que existen infinitos. Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto de los números racionales es denso en el sistema de los números reales.

Demostración.- Por la propiedad arquimediana, para el número $\dfrac{1}{b-a}$ existe un número natural d tal que $\dfrac{1}{b-a}$, de donde

$$db - da > 1 \quad da + 1 < da \ \ (1)$$

y también si z=parte entera de da

$$z \leq da < z+1 \ \ (2)$$

Sea $q = \dfrac{n}{d}$, con $n = z+1$. Entonces q es un número racional y cumple $x < q < y$ pues:

$$a = d\frac{a}{d} < \frac{z+1}{d} < q = \frac{z+1}{d} \leq \frac{da+1}{d} < d\frac{b}{d} = b$$

. y por ser $\dfrac{z+1}{d}$ deducimos que existen infinitos números racionales entre a e b

7. Si x es racional, $x \neq 0$, e y es irracional, demostrar que $x+y$, $x-y$, xy, x/y, son todos irracionales.

- $x+y, \ \ x-y$
  Supongamos que la suma nos da un racional, es decir $\dfrac{q}{p} + y = \dfrac{s}{t}$ *para* $s,t \neq 0$, por lo tanto $y = \dfrac{qt+sp}{tp}$, así llegamos a una contradicción, en virtud del axioma 7 (la suma y multiplicación de dos racionales nos da otros racionales).
  $x - y$ Se puede comprobar de similar manera a la anterior demostración.

- $xy, \ \ x/y, \ \ y/x$
  Supongamos que el producto nos da un número racional, por lo tanto $\frac{p}{q} \cdot y = \dfrac{t}{s}$ para $q,s \neq 0$ y $y = \dfrac{sq}{pt}$ en contradicción con la hipótesis. De igual manera se comprueba que x/y es irracional.

8. ¿La suma o el producto de dos números irracionales es siempre irracional?

Demostración.- No siempre se cumple la proposición, veamos dos contra ejemplos.
Sea a un número irracional entonces por teorema anterior $1 - a$ es irracional, así $a + (1 - a) = 1$, sabiendo que $1 \in \mathbb{R}$. Por otro lado sabemos que $\dfrac{1}{a}$ es irracional, por lo tanto $1 \in \mathbb{R}$.

9. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número irracional z tal que $x < z < y$ y deducir que existen infinitos

Demostración.- Sea $0 < x < y$ e i un número irracional, por propiedad arquimediana $y - x > \dfrac{i}{n}$ ó $x + \dfrac{i}{n} < y$.

por teorema 3.15 se tiene que $\dfrac{i}{n}$ es irracional llamemosle z por lo tanto $x + z > x$, luego existe $x < z < y$.
Y de $\dfrac{i}{n}$ deducimos que existen infinitos números irracionales que cumplen la condición.

10. Un entero n se llama par si $n = 2m$ para un cierto entero m, e impar si $n + 1$ es par demostrar las afirmaciones siguientes:

a) Un entero no puede ser a la vez par e impar.

Demostración.- Sean $2k$ y $2i + 1$ dos enteros par e impar a la vez entonces $2k = 2i + 1$ ó $(k - i) = \dfrac{1}{2}$ lo cual no es cierto, ya que la resta de dos números pares siempre da par, por lo tanto es par o es impar pero no los dos al mismo tiempo.

b) Todo entero es par o es impar.

Demostración.- Por inciso a) $2k \neq 2k - 1$ para $k \in \mathbb{Z}$, por la tricotomía ó $2k < 2k - 1$ ó $2k > 2k - 1$ lo cual se cumple pero no ambos a la vez.

c) La suma o el producto de dos enteros pares es par. ¿ Qué se puede decir acerca de la suma o del producto de dos enteros impares ?

Demostración.- Sea $k \in \mathbb{R}$ entonces $2k + 2k = 4k = 2(2k)$. Luego para el producto $2k \cdot 2k = 4k^2 = 2(2k^2)$
Por otra parte $(2k - 1) + (2k - 1) = 4k - 2 = 2(2k - 1)$. No pasa lo mismo para el producto ya que $(2k - 1)(2k - 1) = 2k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$

d) Si n^2 es par, también lo es n. Si $a^2 = 2b^2$, siendo a y b enteros, entonces a y b son ambos pares.

Demostración.- Si n es impar entonces n^2 es impar, reciprocamente hablando, entonces sea $n^2 = (2k - 1)^2$ para $k \in \mathbb{R}$, por lo tanto $2(2k^2 + 4k) - 1$ es impar.
Por otro lado, sea $a = 2k$, $b = 2k - 1$ '; y $k \in \mathbb{Z}$ entonces $(2k)^2 = 2(2k - 1)^2$, por lo tanto $k = \dfrac{1}{2}$, esto contradice $k \in \mathbb{Z}$.

e) Todo número racional puede expresarse en la forma a/b, donde a y b enteros, uno de los cuales por lo menos es impar.

demostración.- Sea r un número racional con $r = \dfrac{a}{b}$. Si a y b son ambos pares, entonces tenemos

$$a = 2c \text{ y } b = 2d \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d},$$

con $c < a$ y $d < b$. ahora, si c y d ambos son pares, repita el proceso. Esto dará una secuencia estrictamente decreciente de enteros positivos, por lo que el proceso debe terminar por el principio de buen orden. Por lo tanto debemos tener algunos enteros r y s, no ambos con $n = \dfrac{a}{b} = \dfrac{r}{s}$.

11. Demostrar que no existe número racional cuyo cuadrado sea 2.

Demostración.- Utilizaremos el método de reducción al absurdo. Supongamos que n es impar, es decir, $n = 2k + 1$ $k \in \mathbb{Z}$, ahora operando:

$$n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Sabemos que $2k^2 + 2k$ es un número entero cualquiera, por lo tanto podemos realizar un cambio de variable, $2k^2 + 2k = k^{'}$, entonces:

$$n^2 = 2k^{'} + 1$$

Se tiene una contradicción ya por teorema anterior se de dijo que n^2 es par, por lo tanto queda demostrado la proposición. Ahora si estamos con la facultad de demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.
Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, existen números enteros tales que:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Supongamos también que p y q no tienen divisor común mas que el 1. Se tiene:

$$p^2 = 2q^2$$

Esto nos muestra que p^2 es par y por la previa demostración tenemos que p es par. En otras palabras $p = 2k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

Esto demuestra que q^2 es par y en consecuencia que q es par. Así pues, son pares tanto p como q en contradicción con el hecho de que p y q no tienen divisores comunes. Esta contradicción completa la demostración.

12. La propiedad arquimediana del sistema de números reales se dedujo como consecuencia del axioma del supremo. Demostrar que el conjunto de los números racionales satisface la propiedad arquimediana pero no la del supremo. Esto demuestra que la propiedad arquimediana no implica el axioma del supremo.

Demostración.- Está claro que que el conjunto de los racionales satisface la propiedad arquimediana ya que si $x = \dfrac{p}{q}$ e $y = \dfrac{s}{t}$ para $q,\ t \neq 0$ entonces $\dfrac{p}{q} \cdot n > \dfrac{s}{t}$.
Por otra parte sea S el conjunto de todos los racionales y supongase que esta acotado superiormente, por axioma 10 se tiene supremo, llamemosle B, entonces $x \leq B$, $x \in S$, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $B \leq t$, así por teorema 3.14 $B < x < t$, esto contradice que B sea supremo.

3.13. Existencia de raíces cuadradas de los números reales no negativos

Nota Los números negativos no pueden tener raíces cuadradas, pues si $x^2 = a$, al ser a un cuadrado ha de ser no negativo (en virtud del teorema 2.5). Además, si $a = 0$, $x = 0$ es la única raíz cuadrada (por el teorema 1.11). Supóngase, pues $a > 0$. Si $x^2 = a$ entonces $x \leq 0$ y $(-x)^2 = a$, por lo tanto, x y su opuesto son ambos raíces cuadradas. Pero a lo sumo tiene dos, porque si $x^2 = a$ e $y^2 = a$, entonces $x^2 = y^2$ y $(x+y)(x-y) = 0$, en virtud del teorema 1.11, ó $x = y$ ó $x = -y$. Por lo tanto, si a tiene raíces cuadradas, tiene exactamente dos.

Definición 3.9. Si $a \geq 0$, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a^{1/2}$ o por $\sqrt{a}$. Si $a > 0$, la raíz cuadrada negativa es $-a^{1/2}$ ó $-\sqrt{a}$

Teorema 3.35. Cada número real no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única.

Demostración.- Si $a = 0$, entonces 0 es la única raíz cuadrada. Supóngase pues que $a > 0$. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos x tales que $x^2 \leq a$. Puesto que $(1+a)^2 > a$, el número $(a+1)$ es una cota superior de S. Pero, S es no vacío, pues $a/(1+a)$ pertenece a S; en efecto $a^2 \leq a(1+a)^2$ y por lo tanto $a^2/(1+a)^2 \leq a$. En virtud del axioma 10, S tiene un supremo que se designa por b. Nótese que $b \geq a/(1+a)$ y por lo tanto $b > 0$. Existen sólo tres posibilidades: $b^2 > a$, $b^2 < a$, $b^2 = a$.
Supóngase $b^2 > a$ y sea $c = b - (b^2-a)/(2b)/(2b) = \dfrac{1}{2}(b + a/b)$. Entonces $a < c < b$ y $c^2 = b^2 - (b^2-a) + (b^2-a)^2/4b^2 = a + (b^2-a)^2/(4b^2) > a$. Por lo tanto, $c^2 > x^2$ para todo $x \in S$, es decir, $c > x$ para cada $x \in S$; luego c es una cota superior de S, y puesto que $c < b$ se tiene una contradicción con el hecho de ser b el extremo superior de S. Por tanto, la desigualdad $b^2 > a$ es imposible.
Supóngase $b^2 < a$. Puesto que $b > 0$ se puede elegir un número positivo c tal que $c < b$ y tal que $c < (a-b^2)7(3b). Setieneentonecs$

$$(b+c)^2 = b^2 + c(2b+c) < b^2 + 3bc < b^2 + (a-b^2) = a$$

es decir, $b+c$ pertenece a S. Como $b+c > b$, esta desigualdad está en contradicción con que b sea una cota superior de S. Por lo tanto, la desigualdad $b^2 < a$ es imposible y sólo queda como posible $b^2 = a$

3.14. Raíces de orden superior. Potencias racionales

El axioma del extremo superior se puede utilizar también para probar la existencia de raíces de orden superior. Por ejemplo, si n es un entero positivo impar, para cada real x existe un número real y, y uno sólo tal que $x^n = x$. Esta y se denomina raíz n-sima de x y se indica por:

Definición 3.10.
$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad y = \sqrt[n]{x}$$

Si n es par, la situación es un poco distinta. En este caso, si x es negativo, no existe un número real y tal que $y^n = x$, puesto que $y^n \geq 0$ para cada número real y. Sin embargo, si x es positivo, se puede probar que existe un número positivo y sólo uno tal que $y^n = x$. Este y se denomina la raíz n-sima positiva de x y se indica por los símbolos anteriormente mencionados. Puesto que n es par, $(-y)^n = y^n$ y, por tanto, cada $x > 0$ tiene dos raíces n-simas reales, y e $-y$. Sin embargo, los símbolos $x^{\frac{1}{n}}$ y $\sqrt[n]{x}$; se reservan para la raíz n-sima positiva.

Definición 3.11. Si r es un número racional positivo, sea $r = m/n$, donde m y n son enteros positivos, se define como:

$$x^r = x^{m/n} = (x^m)^{\frac{1}{n}},$$

es decir como raíz n-sima de x^m, siempre que ésta exista.

Definición 3.12. Si $x \neq 0$, se define

$$x^{-r} = \frac{1}{x^r},$$

con tal que x^r esté definida.

Partiendo de esas definiciones, es fácil comprobar que las leyes usuales de los exponentes son válidas para exponentes racionales:

Propiedad .1. Propiedades de potencia.

1. $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$

2. $(x^r)^s = x^{rs}$

3. $(xy)^r = x^r \cdot y^r$

4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$

4.3. El principio de la inducción matemática

Método de demostración por inducción Sea $A(n)$ una afirmación que contiene el entero n. Se puede concluir que $A(n)$ es verdadero para cada $n \geq n_1$ si es posible:

a) Probar que $A(n_1)$ es cierta.

b) Probar, que supuesta $A(k)$ verdadera, siendo k un entero arbitrario pero fijado $\geq n_1$, que $A(k+1)$ es verdadera.

En la práctica, n_1 es generalmente igual a 1.

Teorema 4.36 (Principio de inducción matemática)**.** Sea S un conjunto de enteros positivos que tienen las dos propiedades siguientes:

a) El número 1 pertenece al conjunto S.

b) Si un entero k pertenece al conjunto S, también $k+1$ pertenece a S.

Entonces todo entero positivo pertenece al conjunto S.

Demostración.- Las propiedades $a)$ y $b)$ nos dicen que S es un conjunto inductivo. Por consiguiente S tiene cualquier entero positivo.

Teorema 4.37 (principio de buena ordenación)**.** Todo conjunto no vacío de enteros positivos contiene uno que es el menor

Demostración.- Sea T una colección no vacía de enteros positivos. Queremos demostrar que t_0 tiene un número que es el menor, esto es, que hay en T un entero positivo t.; tal que $t_0 \leq t$ para todo t de T.
Supongamos que no fuera así. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. El entero 1 no puede pertenecer a T (de otro modo él sería el menor número de T). Designemos con S la colección de todos los enteros positivos n tales que $n < t$ para todo t de T. Por tanto 1 pertenece a S porque $1 < t$ para todo t de T. Seguidamente, sea k un entero positivo de S. Entonces $k < t$ para todo t de T. Demostraremos que $k+1$ también es de S. Si no fuera así, entonces para un cierto t, de T tendríamos $t_1 \leq k+1$. Puesto que T no posee número mínimo, hay un entero t_2 en T tal que $t_2 < t_1$ Y por tanto $t_2 < k+1$. Pero esto significa que $t_2 \leq k$, en contradicción con el hecho de que $k < t$ para todo t de T. Por tanto $k+1$ pertenece a S. Según el principio de inducción, S contiene todos los enteros positivos. Puesto que T es no vacío, existe un entero positivo t en T. Pero este t debe ser también de S (ya que S contiene todos los enteros positivos). De la definición de S resulta que $t < t$, lo cual es absurdo. Por consiguiente, la hipótesis de que T no posee un número mínimo nos lleva a una contradicción. Resulta pues que T debe tener un número mínimo, y a su vez esto prueba que el principio de buena ordenación es una consecuencia del de inducción.

4.4. Ejercicios

1. Demostrar por inducción las fórmulas siguientes:

(a) $1+2+3+...+n = n(b+1)/2$

Demostración.- Sea $n = k$ entonces $1+2+3+...+k = k(k+1)/2$.
Para $k=1$ se tiene $1 = 1(1+1)/2$.
Por ultimo si $k = k+1$ nos queda probar que $1+2+3+...+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, luego $\dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$. Así $\dfrac{k^2+3k+2}{2}$ y $\dfrac{(x+1)(x+2)}{2}$

(b) $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

Demostración.- Sea $n = k$ entonces $1+3+5+...+(2k-1) = k^2$.
Para $k=1$ se tiene $[2(1)-1] = 1^2$, así $1 = 1$
Luego, si $k = k+1$ entonces $1+3+5+...+[2(k+1)-1] = (k+1)^2$. Por lo tanto $k^2+2k+1 = (k+1)^2$.

(c) $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = (1+2+3+...+n)^2$

Demostración.- Sea $n = k$ entonces,

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3 = (1+2+3+...+k)^2$$

Para $k=1$

$$1 = 1,$$

Luego $k = k+1$,

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 = (1+2+3+...+k)^2,$$

Así,

$$
\begin{array}{rcl}
\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = & = & \left(\dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right)^2 \\
\dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 & = & \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + k(k+1)^2 + (k+1)^2 \\
\dfrac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} & = & \dfrac{k^2(k+1)^2 + 4k(k+1)^2 + 4(k+1)^2}{4} \\
\dfrac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} & = & \dfrac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}
\end{array}
$$

(d) $1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 < n^4/4 < 1^3 + 2^3 + ... + n^3$

Demostración.- Sea $n = k$ entonces

$$1^3 + 2^3 + ... + (k-1)^3 < k^4/4 \quad (1)$$

Para $k = 1$, $0 < 1/4$ se observa que se cumple.
Después, para $k = k+1$,

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 < (k+1)^4/4,$$

sumando k^3 a (1),

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 < k^4/4 + k^3$$

y para deducir como consecuencia de $k+1$, basta demostrar,

$$k^4/4 + k^3 < (k+1)^4/4$$

, Pero esto es consecuencia inmediata de la igualdad

$$(k+1)^4/4 = (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)/4 = k^4/4 + k^3 + (3k^2)/2 + k + 1$$

Por tanto se demostró que $k+1$ es consecuencia de k

2. Obsérvese que:

$$
\begin{array}{rcl}
1 & = & 1 \\
1-4 & = & -(1+2) \\
1-4+9 & = & 1+2+3 \\
1-4+9-16 & = & -(1+2+3+4)
\end{array}
$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por inducción

Demostración.- Verificando tenemos que la ley general es $1 - 4 + 9 - 16 + ... + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + 3 + ... + n)$.
Ahora pasemos a demostrarlo. Sea $n = k$ entonces,

$$1 - 4 + 9 - 16 + ... + (-1)^{k+1} \cdot k^2 = (-1)^{k+1}(1 + 2 + 3 + ... + k)$$

Si $k = 1$, se sigue, $(-1)^2 \cdot 1^2 = (-1)^2 \cdot 1$, vemos que satisface para $k = 1$. Luego $k = k+1$,

$$1 - 4 + 9 - 16 + ... + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 = (-1)^{k+2}\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]$$

.
Sumando $(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2$ a la segunda igualdad dada, se tiene,

$$1-4+9-16+...+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2=(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2$$

Por lo tanto, basta demostrar que $(-1)^{k+1}\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2=(-1)^{k+2}\left[\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right]$

$$\begin{aligned}(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2 &= (-1)^{k+2}\left\{\frac{[(-1)(k+1)k]+2(k^2+2k+1)}{2}\right\}\\ &= (-1)^{k+2}\left(\frac{-k^2-k+2k^2+4k+2}{2}\right)\\ &= (-1)^{k+2}\left(\frac{k^2+3k+2}{2}\right)\\ &= (-1)^{k+2}\left[\frac{(x+1)(x+2)}{2}\right]\end{aligned}$$

3. Obsérvese que:

$$\begin{aligned}1+\tfrac{1}{2} &= 2-\tfrac{1}{2}\\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4} &= 2-\tfrac{1}{4}\\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8} &= 2-\tfrac{1}{8}\end{aligned}$$

Demostración.- Se verifica que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2^n}=2-\dfrac{1}{2^n}$.

Para $n=k$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^k}=2-\frac{1}{2^k}$$

$k=1$

$$1+\frac{1}{2^1}=2-\frac{1}{2^1}$$

Luego $k=k+1$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^{k+1}}$$

Así solo falta demostrar que,

$$2-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\begin{aligned}2-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} &= 2+\frac{-2+1}{2^{k+1}}\\ &= 2-\frac{1}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

4. Obsérvese que:

$$\begin{aligned} 1-\tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2} \\ (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3} \\ (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4}) &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por inducción.

Demostración.- Se induce que $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}$ para todo $n>1$.
Sea $n=k$, entonces $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{1}{k}$. Después para $k=2$, $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Si $k=k+1$ tenemos $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{1}{k+1}$. Luego es fácil comprobar que $\dfrac{1}{k}\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{1}{k+1}$.

5. Hallar la ley general que simplifica al producto

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)..\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

y demuéstrese por inducción.

Demostración.- Inducimos que $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)..\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$,para todo $n>1$. Después $n=k=1$,

$$1-\frac{1}{2^2}=\frac{2+1}{2\dot{2}}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

Luego $k+1$,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)..\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

Así,

$$\begin{aligned} \left(\frac{k+1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} \\ \left(\frac{k+1}{2k}-\frac{1}{2k(k+1)}\right) &= \frac{k+2}{2k+2} \\ \frac{(k+1)^2-1}{2k(k+1)} &= \frac{k+2}{2k+2} \\ \frac{k+2}{2k+2} &= \frac{k+2}{2k+2} \end{aligned}$$

6. Sea $A(n)$ la proporción: $1+2+...+n=\dfrac{1}{8}(2n+1)^2$.

a) Probar que si $A(k)$, $A(k+1)$ también es cierta.

Demostración.- Para $A(k+1)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1) &= \frac{1}{8}\left[2(k+1)+1\right]^2 \\ \frac{4k^2+12k+9}{8} &= \frac{4k^2+12k+9}{8} \end{aligned}$$

b) Critíquese la proposición "de la inducción se sigue que $A(n)$ es cierta para todo n ".

Se ve que no se cumple para ningún entero $A(n)$ pero si para $A(n+1)$.

c) Transfórmese $A(n)$ cambiando la igualdad por una desigualdad que es cierta para todo entero positivo n

Primero comprobemos para $A(1)$, $1<\frac{9}{8}$.
Luego para $A(k)$,

$$1+2+...+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+1)^2$$

Después para $A(k+1)$

$$1+2+...+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+1)^2$$

Remplazando $(k+1)$ a $A(k)$

$$1+2+...+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1)$$

por último solo nos queda demostrar

$$\frac{1}{8}(2k+1)^2<\frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1)$$

Así $\frac{4k^2+12k+9}{8}<\frac{4k^2+12k+9}{8}+(k+1)$, vemos que la inecuación se cumple para cualquier número natural.

7. Sea n_1 el menor entero positivo n para el que la desigualdad $(1+x)^n>1+nx+nx^2$ es cierta para todo $x>0$. Calcular n_1, y demostrar que la desigualdad es cierta para todos los enteros $n\geq n_1$

Demostración.- vemos que la proposición es validad para $n_1=3$,

$$(1+x)^3>1+3x+3x^2,$$

y no así para $n=1$ y $n=2$ entonces $A(n)=A(k)\geq 3$, $(1+x)^k>1+kx+kx^2$. Después para un $A(k+1)$, $(1+x)^{k+1}>1+(k+1)x+(k+1)x^2$, así $(1+kx+kx^2)(1+k)>1+(k+1)x+(k+1)x^2$, luego se cumple la desigualdad $x(kx^2)+x^2+kx+x+1+x^2>kx^2+x^2+kx+x+1$.

8. Dados números reales positivos $a_1,a_2,a_3,...$, tales que $a_n\leq ca_{a-1}$ para todo $n\geq 2$. Donde c es un número positivo fijo, aplíquese el método de inducción para demostrar que $a_n\leq a_1c^{n-1}$ para cada $n\geq 1$

Demostración.- Primero, para el caso $n=1$, tenemos $a_1c^0=a_1$, por lo tanto la desigualdad es validad. Ahora supongamos que la desigualdad es válida para algún número entero k: $a_k\leq a_1c^{k-1}$, luego multiplicamos por c, $ca_k\leq a_1c^k$, pero dado que se asume por hipótesis $a_{k+1}\leq ca_k$, entonces $a_{k+1}\leq a_1c^k$, por lo tanto, la declaración es válida para todo n.

9. Demuéstrese por inducción la proposición siguiente: Dado un segmento de longitud unidad, el segmento de longitud $\sqrt{n}$ se puede construir con regla y compás para cada entero positivo n.

Demostración.- Dada una línea de longitud 1, podemos construir una línea de longitud $\sqrt{2}$ tomando la hipotenusa del triángulo rectángulo con patas de longitud 1.
Ahora, supongamos que tenemos una línea de longitud 1 y una línea de longitud $\sqrt{k}$ para algún número entero k. Luego podemos formar un triángulo rectángulo con patas de longitud 1 y longitud $\sqrt{k}$. La hipotenusa de este triángulo es $\sqrt{k+1}$. Por lo tanto, si podemos construir una línea de longitud $\sqrt{k}$, entonces podemos construir una línea de longitud $\sqrt{k+1}$. Como podemos construir una línea de longitud $\sqrt{2}$ en el caso base, podemos construir una línea de longitud $\sqrt{n}$ para todos los enteros n.

10. Sea b un entero positivo. Demostrar por inducción la proposición siguiente: Para cada entero $n \geq 0$ existen enteros no negativos q y r tales que:

$$n = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

Demostración.- Sea b ser un entero positivo fijo. Si $n = 0$, luego $q = r = 0$, la afirmación es verdadera (ya que $0 = 0b + 0$).
Ahora suponga que la afirmación es cierta para algunos $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis de inducción sabemos que existen enteros no negativos q y r tales que

$$k = qb + r, \quad 0 \leq r < b,$$

Por lo tanto, sumando 1 a ambos lados tenemos,

$$k + 1 = qb + (r + 1).$$

Pues $0 \leq r < b$ entonces sabemos que $0 \leq r \leq (b-1)$. Si $0 \leq r < b-1$, entonces $0 \leq r+1 < b$, y la declaración aún se mantiene con la misma elección q y $r+1$ en lugar de r.
Por otro lado, si $r = b-1$, entonces $r+1 = b$ y tenemos,

$$k + 1 = qb + b = (q+1)b + 0$$

Por lo tanto, la declaración se mantiene de nuevo, pero con $q+1$ en lugar de q y con $r = 0$ (que es válido ya que si $r = 0$ tenemos $a \leq r < b$). Por ende, si el algoritmo de división es válido para k, entonces también es válido para $k+1$. Entonces, es válido para todos $n \in \mathbb{N}$.

11. Sea n y d enteros. Se dice que d es un divisor de n si $n = cd$ para algún entero c. Un entero n se denomina primo si $n > 1$ y los únicos divisores de n son 1 y n. Demostrar por inducción que cada entero $n > 1$ es o primo o producto de primos.

Demostración.- LA prueba se hará por inducción. Si $n = 2$ ó $n = 3$ entonces n es primo, entonces la proposición es verdadera.
Ahora supongamos que la afirmación es verdadera para todos los enteros desde 2 hasta k. Se debe demostrar que esto implica $k+1$ es primo o un producto de primos. Si $k+1$ es primo, entonces no hay nada que demostrar. Por otro lado, si $k+1$ no es primo, entonces sabemos que hay enteros c y d tal que $1 < c, d < k+1$ en otras palabras decimos que n es divisible por números disntintos de 1 y de sí mismo.
Por hipótesis de inducción, sabemos que $2 \leq c, d \leq k$ entonces c y d son primos o son producto de primos.
Por lo tanto, si la declaración es verdadera para todos los enteros mayores que 1 hasta k entonces, también es verdadera para $k+1$, así es cierto para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

12. Explíquese el error en la siguiente demostración por inducción.
Proposición.- Dado un conjunto de n niñas rubias, si por 10 menos una de las niñas tiene ojos azules, entonces las n niñas tienen ojos azules.
Demostración.- La proposición es evidentemente cierta si $n = 1$. El paso de k a $k+1$ se puede ilustrar pasando de $n = 3$ a $n = 4$. Supóngase para ello que la proposición es cierta para $n = 3$ Y sean G_1, G_2, G_3, G_4 cuatro niñas rubias tales que una de ellas, por lo menos, tenga ojos azules, por ejemplo, la G_1, Tomando G_1, G_2, G_3, conjuntamente y haciendo uso de la proposición cierta para $n = 3$, resulta que también G_2 y G_3 tienen ojos azules. Repitiendo el proceso con G_1, G_2 y G_4, se encuentra igualmente que G_4 tiene ojos azules. Es decir, las cuatro tienen ojos azules. Un razonamiento análogo permite el paso de k a $k+1$ en general.
Corolario. Todas las niñas rubias tienen ojos azules.
Demostración.- Puesto que efectivamente existe una niña rubia con ojos azules, se puede aplicar el resultado precedente al conjunto formado por todas las niñas rubias.

Esta prueba supone que la afirmación es cierta n = 3, es decir, supone que si hay tres chicas rubias, una de las cuales tiene ojos azules, entonces todas tienen ojos azules. Claramente, esta es una suposición falsa.

4.7. Ejercicios

1. Hallar los valores numéricos de las sumas siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k = 1+2+3+4 = 10$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$

c) $\displaystyle\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1} = 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 2+8+32+128 = 170$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} n^n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 = 1+4+27+256 = 288$

e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} (2i+1) = 1+3+5+7+9+11 = 36$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = 0,83333.....$

2. Establecer las siguientes propiedades del símbolo sumatorio.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propiedad aditiva)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n)\\ &= (a_1+a_2+...+a_n)+(b_1+b_2+...+b_n) \quad \text{Asociatividad y conmutatividad}\\ &= \sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

b) $\sum_{k=1}^{n}(ca_k)=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (Prpiedad homogénea)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(ca_k) &= ca_1+ca_2+...+ca_n\\ &= c(a_1+a_2+...+a_n) \quad \text{distributividad}\\ &= c\sum_{k=1}^{n}a\end{aligned}$$

c) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$ (Propiedad telescópica)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1}) &= (a_1-a_0)+(a_2-a_1)+...+(a_n-a_{n-1})\\ &= (a_1+a_2+...+a_{n-1})-(a_0+a_1+...+a_{n-1})+a_n\\ &= a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_k-\sum_{k=0}^{n-1}a_k \qquad \text{Reindexando la 2da suma}\\ &= a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_k-a_0-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\\ &= a_n-a_0\end{aligned}$$

3. $\sum_{k=1}^{n}1=n$ (El sentido de esta suma es $\sum_{k=1}^{n}a_k$, cuando $a_k=1$)

Demostración.- Probemos por inducción, Si $n=1$, entonces la proposición es verdadera ya que $\sum_{k=1}^{1}1=1$. Ahora supongamos que el enunciado es verdadero para $n=m\in\mathbb{Z}^+$. Luego,

$$\sum_{k=1}^{m}1=m\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{m}1=m\right)+1=m+1\Rightarrow\sum_{k=1}^{m+1}1=m+1$$

4. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ $[Indicacin,\ 2k-1=k^2-(k-1)^2]$

Demostración.- Sea $2k-1=k^2-(k^2-2k+1)=k^2-(k-1)^2$ entonces por la propiedad telescópica se tiene $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2)=n^2+0=n^2$

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$ [indicación. Úsese el ejercicio 3 y el 4.]

Demostración.- Por aditividad y homogeneidad se tiene $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} k - \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n^2$ entonces $2\sum\limits_{k=1}^{n} k - n = n^2$ ya que $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$, luego $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$

6. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}$ $[Indicacin.\ k^3-(k-1)^3 = 3k^2-2k+1]$

Demostración.- Por la propiedad telescópica se tiene $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3-(k-1)^3 = n^3$, luego

$$\begin{array}{rll} n^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} 3k^2-3k+1 & \Rightarrow\ n^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum\limits_{k=1}^{n} k + \sum\limits_{k=1}^{n} 1 & \text{propiedad aditiva} \\ & \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n^3}{3} + \sum\limits_{k=1}^{n} k - \dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n} 1 & \\ & \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{3} & \text{por los anteriores ejercicios} \\ & \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6} & \end{array}$$

7. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{4}$

Demostración.- Sea $k^4-(k-1)^4 = 4k^3-6k^2+4k-1$ entonces

$$\begin{array}{rl} n^4 = 4\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 - 6\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n} k - \sum\limits_{k=1}^{n} 1 & \Rightarrow\ n^4 = 4\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 - 6\left(\dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}\right) + 4\left(\dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}\right) - n \\ & \Rightarrow\ 4\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 - 2n^2 \\ & \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{4} \end{array}$$

8. a) $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$. Nota: Por definición $x^0 = 1$ [Indicación. Aplíquese el ejercicio 2 a $(1-x)\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.]

Demostración.- Por propiedades aditiva y telescópica,

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = -\sum_{k=0}^{n}(x^{k+1}-x^k) = -(x^{n+1}-1) = 1 - x^{n+1}$$

pro lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

b) ¿Cuál es la suma cuando $x = 1$?

Respuesta.- Si $x = 1$ por la parte 3 y el hecho de que $1^k = 1$ para $k = 0, ..., n$ tenemos

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

9. Demostrar por inducción, que la suma $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k(2k+1)$ es proporcional a n, y hallar la constante de proporcionalidad.

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{2} (-1)^k(2k+1) = 2$. Así vemos que es valida para este caso. Observemos que $2n = 2$, lo mismo pasa para $n = 2$ donde $2n = 4$. Luego supongamos que la fórmula es válida para $n = m \in \mathbb{Z}^+$, es decir

$$\sum_{k=0}^{2} m(-1)^k(2k+1) = 2m,$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=1}^{2(m+1)} (-1)^k(2k+1) & = & (-1)(2k+1) \\ & = & 2m - [2(2m+1)+1] + [2(2m+2)+1] \\ & = & 2m - 4m - 3 + 4m + 5 \\ & = & 2(m+1) \end{array}$$

10. **a)** Dar una definición razonable del símbolo $\sum\limits_{k=m}^{m+n} a_k$

$$\sum_{k=m}^{m+n} a_k = a_m + a_{m+1} + ... + a_{m+n}$$

b) Demostrar por inducción que para $n \geq 1$ se tiene

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1} 2n \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

Demostración.- Sea $n = 1$ se tiene,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

luego,

$$\sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \sum_{m=1}^{2} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ahora supongamos que se cumple para $n = j \in \mathbb{Z}^+$ entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \quad & \Rightarrow \quad \left(\sum_{k=j+1}^{2j} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2} = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m} \right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2} \\
& \Rightarrow \quad \left(\sum_{k=j+1}^{2(j+1)} \frac{1}{k} \right) = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m} \right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2} \\
& \Rightarrow \quad \frac{1}{j+1} + \left(\sum_{k=j+2}^{2(j+1)} \frac{1}{k} \right) = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m} \right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2} \\
& \Rightarrow \quad \sum_{k=j+2}^{2(j+1)} \frac{1}{k} = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m} \right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2} - \frac{1}{j+1} \\
& \Rightarrow \quad \sum_{k=j+2}^{2(j+1)} \frac{1}{k} = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m} \right) - \frac{1}{2(j+1)} \\
& \Rightarrow \quad \sum_{k=j+2}^{2(j+1)} \frac{1}{k} = \left(\sum_{m=1}^{2(j+1)} \frac{(1)^{m+1}}{m} \right)
\end{aligned}$$

11. Determinar si cada una de las igualdades siguientes es cierta o falsa. En cada caso razonar la decisión.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4$

Razonamiento.- Dado que se se evalúa para $n = 0$ entonces se tiene que $0^4 = 0$ entonces la desigualdad es cierta.

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{100} 2 = 200$

Razonamiento.- En vista que de si se evalúa para $n = 0$ el resultado es 2 entonces para $n = 100$ será 202, por lo tanto la igualdad es falsa

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k$

Razonamiento.- La igualdad es falsa debido a que el lado derecho de la igualdad se añade el 2 solo una vez, a diferencia de la igualdad de la izquierda que se añade a cada iteración de la suma.

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$

Razonamiento.- La igualdad es falsa ya que al cuadrado de la serie de la izquierda se añade en 1 a cada iteración, contemplando que $n = 100$

(e) $\sum_{k=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} k^2\right)$

Razonamiento.- La igualdad es falsa, ya que anteriormente se dijo que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

mientras que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

(f) $\sum_{k=0}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{100} k\right)^3$

Razonamiento.- Similar a la parte (e) se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

mientras que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^3 = \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)^3$$

12. Inducir y demostrar una regla general que simplifique la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Demostración.- Esta claro ver que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ ya que si sumamos para $n = 2$ el resultado es $\frac{2}{3}$, para $n = 3$ $\frac{3}{4}$ y así sucesivamente.
Luego efectivamente se cumple para $n = 1$, $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Así asumimos que se cumple para un entero fijo $n = m$,

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Ahora supongamos que se cumple para $m+1$ por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Por último solo falta demostrar que $\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$.

$$\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

13. Demostrar que $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ si $n \geq 1$. Utilizar luego este resultado para demostrar que

$$2\sqrt{m}-2 < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m}-1$$

si $m \geq 2$. En particular, cuando $m = 10^6$, la suma está comprendida entre 1998 y 1999.

Demostración.- Sea $0 < 1$ entonces

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & 1 \\ 4n^2+4n & < & 4n^2+4n+1 \\ 4n(n+1) & < & 4n^2+4n+1 \\ 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} & < & 2n+1 \\ 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} & < & \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) & < & \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Análogamente se puede demostrar para $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

Ahora demostramos la segunda parte del enunciado. Consideremos la desigualdad de la izquierda. Para $m = 2$ tenemos,

$$2\sqrt{2}-2; \;\; 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{rcll} 2\sqrt{2}-2 & < & 2\sqrt{2}-\sqrt{2} & \text{ya que } 2 > \sqrt{2} \\ & = & \sqrt{2} & \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{ya que } \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ & < & 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \end{array}$$

donde la inecuación se cumple. Luego asumimos que la inecuación se cumple para algún $k \in \mathbb{Z}$ para $k \geq 2$, entonces sea

$$\begin{array}{rll} 2\sqrt{2}-2 < \sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{1}{n} & \Rightarrow & 2\sqrt{2}-2+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{n} \\ & \Rightarrow & 2\sqrt{2}-2+2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) < \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{por la parte 1 y } \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{n} < \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ & \Rightarrow & 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+1}+2\sqrt{k}-2) < \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{usando la parte 1} \\ & \Rightarrow & 2\sqrt{k+1}-2 < \sum_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Por lo tanto la inecuación es verdadera para todo $m \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$.
Ahora veamos la inecuación de la derecha. Para el caso de $m = 2$ tenemos,

$$+1\frac{1}{\sqrt{2}};\;\; 2\sqrt{2}-1$$

luego como $\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} < \dfrac{3}{2}$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} < \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad 2\sqrt{2} < 3 \\
&\Rightarrow \quad 2\sqrt{2}+1 < 4 \\
&\Rightarrow \quad 2+\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \\
&\Rightarrow \quad 1+\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}-1
\end{aligned}$$

por lo tanto la desigualdad es cierta. Asumamos entonces que es cierto para algunos $m = k \in \mathbb{Z},\ k \geq 2$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{k}-1 \quad &\Rightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{2}-1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{k}-1+2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \qquad \text{parte 1} \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{k+1}-1 \qquad \text{parte 1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la desigualdad correcta se aplica a todo $m \in \mathbb{Z} k \geq 2$. **Cabe recalcar que el libro menciona que** $m \geq 2$ pero este último solo se cumple para los extremos de la desigualdad y no así para $\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2}}$

4.8. Valor absoluto y desigualdad triangular

Definición 4.13.

$$|x| = \begin{cases} \text{si} & x, \quad x \geq 0 \\ \text{si} & -x, \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Teorema 4.38. Si $a \geq 0$, es $\;|x| \leq a\;$ si y sólo si $\;-a \leq x \leq a$

Demostración.- Debemos probar dos cuestiones: primero, que la desiguadad $|x| \leq a$ implica las dos desigualdades $-a \leq x \leq a$ y recíprocamente, que $-a \leq x \leq a$ implica $|x| \leq a$.
Ya supuesto $|x| \leq a$ se tiene también $-a \leq -|x|$. Pero ó $\;x = |x|\;$ ó $\;x = -|x|$ y, por lo tanto, $x \leq a\;$ y $-a \leq x$, lo cual prueba la primera parte del teorema.
Para probar el recíproco, supóngase $-a \leq x \leq a$. Si $x \leq 0$ se tiene $|x| = x \leq a$; si por el contrario es $x \leq 0$, entonces $|x| = -x \leq a$. En ambos casos se tiene $|x| \leq a$, lo que demuestra el teorema.

Teorema 4.39 (Desigualdad triangular)**.** Para x e y números reales cualesquiera se tiene

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Demostración.- Puesto que $x = |x|$ ó $x = -|x|$, se tiene $-|x| \leq x \leq |x|$. Análogamente $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas desigualdades se tiene:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

y por tanto en virtud del teorema anterior se concluye que: $|x+y| \leq |x| + |y|$

Teorema 4.40. Si $a_1, a_2, ..., a_n$ son números reales cualesquiera

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Demostración.- Para $n = 1$ la desigualdad es trivial y para $n = 2$ es la desigualdad triangular. Supuesta cierta para n números reales, para $n+1$ números reales $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ se tiene:

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} +a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

Por tanto, el teorema es cierto para $n+1$ números si lo es para n; luego, en virtud deñ principio de inducción, es cierto para todo número positivo n.

Teorema 4.41 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** Si $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ son números reales cualesquiera, se tiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$

El signo de igualdad es válido si y sólo si hay un npumero real x tal que $a_k x + b_k = 0$ ára cada vañpr de $k = 1, 2, ..., n$

Demostración.- Para $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$. Esto se puede poner en la forma

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0,$$

donde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Queremos demostrar que $B^2 \leq AC$. Si $A = 0$ cada $a_k = 0$, con lo que $B = 0$ y el resultado es trivial. Si $A \neq 0$, podemos completar el cuadrado y escribir

$$Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

El segundo miembro alcanza su valor mínimo cuando $x = -\dfrac{B}{A}$. Poniendo $x = -\dfrac{B}{A}$ en la primera ecuación, obtenemos $B^2 \leq AC$. Esto demuestra la desigualdad dada.

4.9. Ejercicios

1. Probar cada una de las siguientes propiedades del valor absoluto.

(a) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$

Demostración.- Si $|x| = 0$, por definición $x = 0$. Luego, si $x = 0$, entonces por teorema $\sqrt{x^2} = \sqrt{0^2} = 0$

(b) $|-x| = |x|$

Demostración.- Por definición $|-x| = -(-x)$ si $x \leq 0$ y $|-x| = x$ si $x \geq 0$ por lo tanto $|-x| = x$

(c) $|x - y| = |y - x|$

Demostración.- Por teorema $|x-y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{y^2 - 2yx + x^2} = \sqrt{(y-x)^2} = |y - x|$

(d) $|x|^2 = x^2$

Demostración.- Si $|x|^2$, por teorema $\left(\sqrt{x^2}\right)^2$, por propiedad de potencia x^2

(e) $|x| = \sqrt{x^2}$

Demostración.- Sea $x^2 \geq 0$ entonces por teorema $\sqrt{x^2}$, luego $(x^2)^{\frac{1}{2}}$, por lo tanto por definición de valor absoluto $x = |x|$.

(f) $|xy| = |x||y|$

Demostración.- Por el teorema anterior $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$

(g) $|x/y| = |x|/|y|$ si $y \neq 0$

Demostración.- Similar al anterior problema se tiene $|x/y| = \sqrt{(x/y)^2}$, luego por propiedades de potencia y raíces $\sqrt{x^2}/\sqrt{y^2}$, así nos queda $|x|/|y|$ si $y \neq 0$

(h) $|x - y| \leq |x| + |y|$

Demostración.- Por la desigualdad triangular y la parte (b) se tiene $|x - y| = |x + (-y)| = |x| + |-y| = |x| + |y|$

(i) $|x| - |y| \leq |x - y|$

Demostración.- Por la desigualdad triangular tenemos que $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$

entonces $|x| - |y| \leq |x - y|$

(j) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Demostración.- Parecido al anterior ejercicio se tiene $|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x|$ entonces $|y| - |x| \leq |x - y|$ y por lo tanto $|x| - |y| \geq |x - y|$. Luego por el inciso (i) y teorema $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$

2. Cada desigualdad (a_i), de las escritas a continuación, equivale exactamente a una desigualdad (b_j). Por ejemplo, $|x| < 3$ si y sólo si $-3 < x < 3$ y por tanto (a_1) es equivalente a (b_2). Determinar todos los pares equivalentes.

$$|x| < 3 \longrightarrow -3 < x < 3$$

$$|x - 1| < 3 \longrightarrow -2 < x < 4$$

$$|3 - 2x| < 1 \longrightarrow 1 < x < 2$$

$$|1 + 2x| \leq 1 \longrightarrow -1 \leq x \leq 0$$

$$|x - 1| > 2 \longrightarrow x > 4 \ \vee \ x < -1$$

$$|x + 2| \geq 5 \longrightarrow x \geq 3 \ \vee \ x \leq -7$$

$$|5 - x^{-1}| < 1 \longrightarrow 4 < x < 6$$

$$|x - 5| < |x + 1| \longrightarrow x > 2$$

$$|x^2 - 2| \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq -1 \ \ 1 \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$x < x^2 - 12 < 4x \longrightarrow \frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$$

3. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa. En cada caso razonar la decisión.

(a) $x < 5$ implica $|x| < 5$

Es falso ya que $|-6| < 5$ entonces $6 > 5$.

(b) $|x - 5| < 2$ implica $3 < x < 7$

Es verdad ya que por teorema $-2 < x - 5 < 2$ entonces $3 < x < 7$.

(c) $|1 + 3x| \leq 1$ implica $x > -\dfrac{2}{3}$

es verdad ya que $-1 \leq 1 + 3x \leq 1$ entonces $-\dfrac{2}{3} \leq x \leq 0$.

(d) No existe número real x para el que $|x-1| = |x-2|$

Es falso ya que se cumple para $\frac{3}{2}$.

(e) Para todo $x > 0$ existe un $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$

Es falso ya que si tomas $x = 3$ será $y < 0$

4. Demostrar que el signo de igualdad es válido en la desigualdad de Cauchy-Schwarz si y sólo si existe un número real tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo $k = 1, 2, ..., n$

Demostración.- $(\Rightarrow)$ Si $a_k = 0$ para todo k entonces la igualdad es verdadera así asumimos que $a_k \neq 0$ para al menos un k,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

, Luego, sea $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$, entonces

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k, \quad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

, así se tiene

$$Ax^2 + 2b^x + C \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

pero sabemos por suposición que $B^2 = AC$, donde $x = -\frac{B}{A}$ el cual esta en $\mathbb{R}$ ya que $A \neq 0$ y por lo tanto $a_k \neq 0$ para algún k y a_k^2 es no negativo. asís que la suma es estrictamente positivo como se vio en la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada $k = 1, ..., n$. Luego $a_k x + b_k = 0 \Rightarrow b_k = (-x)a_k$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) &= \left[-x\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\right]^2 \\
&= x^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x^2 a_k^2\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (-x a_k)^2\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)
\end{aligned}$$

4.10. Ejercicios varios referentes al método de inducción

Definición 4.14 (Coeficiente factorial y binomial)**.** El símbolo $n!$ (que se lee n factorial) se puede definir por inducción como sigue: $0! = 1,\ n! = (n-1!n$ si $n \geq 1$
Obsérvese que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.
Si $0 \leq k \leq n$ el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ se define por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Calcúlese los valores de los siguientes coeficientes binomiales:

(a) $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{4 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 10$

(b) $\binom{7}{0} = \dfrac{7!}{0!(7-0)!} = \dfrac{7!}{7!} = 1$

(c) $\binom{7}{1} = \dfrac{7!}{1!(7-1)!} = \dfrac{7!}{6!} = 7$

(d) $\binom{7}{2} = \dfrac{7!}{2!(7-2)!} = \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21$

(e) $\binom{17}{14} = \dfrac{17!}{14!(17-14)!} = \dfrac{15 \cdot 16 \cdot 17}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 680$

(f) $\binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = 1$

2. (a) Demostrar que: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Demostración.- Sea $\dfrac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!}$ entonces $\dfrac{n!}{(n-k)!k}$ por lo tanto $\binom{n}{k}$

(b) Sabiendo que $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$ calcular n

Respuesta.- Usando la parte (a) sabemos que $k = 10$ y $n - k = 7$ por lo tanto $n = 17$

(c) Sabiendo que $\binom{14}{k} = \binom{14}{k-4}$ calcular k

Respuesta.- Similar a la parte (b) $k = 14 - (k-4) \Rightarrow 2k = 18 \Rightarrow k = 9$

(d) ¿Existe un k tal que $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$

Respuesta.- No existe ya que $k = 12 - (k-3) \Rightarrow 2k = 15$ no es un entero.

3. Demostrar que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. Esta propiedad se denomina fórmula aditiva de los coeficientes combinatorios o ley del triángulo de Pascal y proporciona un método rápido para calcular sucesivamente los coeficientes binomiales. A continuación se da el triángulo de Pascal para $n \leq 6$.

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
n= & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n!)k + (n!)(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n!)(k+n-k+1)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n!(n+1))}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k![(n+1)-k]!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

4. Demuéstrese por inducción la fórmula de la potencia del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Y utilícese el teorema para deducir las fórmulas:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \;\; y \;\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \;\; si \;\; n > 0$$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces

$$(a+n)^1 = a + b = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^0 b + ab^0 = b + a = a + b$$

Por lo tanto la formula es cierta para $n = 1$

Luego supongamos que la formula es cierta para algún $n = m \in \mathbb{Z}^+$ entonces,

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

Luego suponemos que se cumple para $m + 1$

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k}\right](a+b)\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m+1-k}\\
&= a^{m+1}+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m+1-k}\\
&= a^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}a^k b^{m+1-k}+\sum_{k=0}^{m}a^k b^{m+1-k}\\
&= a^{m+1}+b^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}a^k b^{m+1-k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m+1-k}\\
&= a^{m+1}+b^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\left\{\left[\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right]\left(a^k b^{m+1-k}\right)\right\}\\
&= a^{m+1}+b^{m+1}+\textstyle\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}a^k b^{m+1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^k b^{m+1-k}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si la fórmula es verdadera para el caso m entonces es verdadera para el caso $m+1$.

Luego aplicando el teorema del binomio con $a=1,\ b=1$, entonces,

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}\Rightarrow(1+1)^n=2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Para la segunda fórmula aplicamos una vez mas pero con $a=-1$ y $b=1$, entonces,

$$(a+b)^n=(-1+1)^n=0^n=0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

Definición 4.15 (Símbolo producto.)**.** El producto de n números reales $a_i, a_2, ..., a_n$ se indica por el símbolo $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, que se puede definir por inducción. El símbolo $a_1 a_2 \cdots a_n$ es otra forma de escribir este producto. Obsérvese que:

$$n!=\prod_{k=1}^{n}k$$

5. Dar una definición por inducción del producto $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$

Definición.-

$$\prod_{k=1}^{0}a_k=1;\ \prod_{k=1}^{n+1}a_k=a_{n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_k$$

Demostrar por inducción las siguientes propiedades de los productos:

6. $\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ (Propiedad multiplicativa)

Un caso importante es la relación: $\prod_{k=1}^{n}(ca_k) = c_n \prod_{k=1}^{n} a_k$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces $a_1 b_1 = a_1 b_1$. Supongamos que se cumple para $n = m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\prod_{k=1}^{m}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{m} b_k\right)$$

Luego sea $m+1$, por lo tanto

$$\prod_{k=1}^{m+1}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{m+1} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{m+1} b_k\right)$$

Así,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{m+1}(a_k b_k) &= \left(\prod_{k=1}^{m} a_k\right)\cdot a_{m+1}\left(\prod_{k=1}^{m} b_k\right)\cdot b_{m+1} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{m+1} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{m+1} b_k\right)
\end{aligned}$$

El caso $m+1$ es cierto por lo tanto la propiedad es válida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

7. $\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}$ si cada $a_k \neq 0$ (propiedad telescópica)

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces $\prod_{k=1}^{1}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0} \Rightarrow \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_1}{a_0}$ si $a_k \neq 0$. De ésta manera se cumple para $n = 1$.

Luego supongamos que se cumple para $n = m \in \mathbb{Z}^+$ así nos queda,

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_m}{a_0}$$

Ahora supongamos que es cierto para $m+1$, luego

$$\prod_{k=1}^{m+1}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{m+1}}{a_0}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{m+1}\frac{a_k}{a_{k-1}} &= \frac{a_{m+1}}{a_m}\cdot\prod_{k=1}^{m}\frac{a_k}{a_{k-1}} \\
&= \frac{a_{m+1}}{a_m}\cdot\frac{a_m}{a_0} \\
&= \frac{a_{m+1}}{a_0}
\end{aligned}$$

Vimos que el caso $m+1$ es cierto, por lo tanto la propiedad es válida para $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

8. Si $x \neq 1$, demostrar que: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x^{2^{k-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$
¿Cuál es el valor del producto cuando $x=1$?

Demostración.- Se cumple la condición para $n=1$ ya que $\prod_{k=1}^{1}(1+x^{2^{k-1}}) = \dfrac{1-x^{2^n}}{1-x} \Rightarrow 1+x = \dfrac{1-x^2}{1-x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x$.
Supongamos que se cumple para $n = m \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$\prod_{k=1}^{m}(1+x^{2^{k-1}}) = \frac{1-x^{2^m}}{1-x}$$

, luego se cumple para $m+1$,

$$\prod_{k=1}^{m+1}(1+x^{2^{k-1}}) = \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x}$$

, por lo tanto nos queda,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{m+1}(1+x^{2^{k-1}}) &= (1+x^{2^m})\cdot\prod_{k=1}^{m}(1+x^{2^{k-1}}) \\
&= (1+x^{2^m})\cdot\frac{1-x^{2^m}}{1-x} \\
&= \frac{(1+x^{2^m})(1-x^{2^m})}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple para $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

9. Si $a_k < b_k$ para cada valor de $k = 1, 2, ..., n$, es fácil demostrar por inducción $\sum_{k=1}^{n} < \sum_{k=1}^{n} b_k$.
Discutir la desigualdad correspondiente para productos:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} b_k$$

Demostración.- Es fácil ver que es la afirmación es cierta para $n=1$. Supongamos que es cierto para $n = m \in \mathbb{Z}^+$, luego por hipótesis sabemos que $b_{m+1} > a_{m+1} \geq 0$ de donde,

$$\prod_{k=1}^{m+1} a_k = a_{m+1}\cdot\prod_{k=1}^{m} a_k < a_{m+1}\cdot\prod_{k=1}^{m} b_k < b_{m+1}\cdot\prod_{k=1}^{m} b_k = \prod_{k=1}^{m+1} b_k$$

Algunas desigualdades notables

10. Si $x > 1$, demostrar por inducción que $x^n > x$ para cada $n \geq 2$. Si $0 < x < 1$, demostrar que $x^n < x$ para cada $x \geq 2$.

Demostración.- Es fácil probar que la afirmación se cumple para $n = 2$. Supongamos que se cumple para alguna $n = m \geq 2$, así

$$x^m \geq x,$$

de donde $m+1$ se cumple para

$$x^{m+1} \geq x,$$

así solo nos queda probar que

$$x \cdot x \geq x,$$

el cuál se cumple a simple vista.

Por otra parte sea $n = 2$ por lo tanto $x^2 < x$, como $0 < x < 1$ vemos se cumple la desigualdad. Supongamos que se cumple para $n = m \geq 2$, entonces,

$$\begin{array}{rcl} x^m < x & \Rightarrow & x^m < x \cot x \\ & \Rightarrow & x^{m+1} < x^2 \\ & \Rightarrow & x^{m+1} < x^2 < x \\ & \Rightarrow & x^{m+1} < x \end{array}$$

Así la desigualdad es válida para $m+1 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$

11. Determínense tofos los enteros positivos n para los cuales $2^n < n!$

Demostración.- Podemos observar que no se cumple para $n = 1, 2, 3$. Luego observemos que la afirmación es válida para $n = 4$,

$$2^4 < 4! \Rightarrow 16 < 24.$$

Ahora demostremos que la afirmación es válida para $n = m+1$ suponiendo que se cumple para algún $n = m \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$, entonces,

$$2^m < m! \Longrightarrow 2^m(m+1) < m!(m+1)! \Longrightarrow 2^{m+1} < (m+1)!$$

Ya que $m \geq 4 > 2$ entonces $2^m(m+1) > 2^m \cdot 2 = 2^{m+1}$. Así la inecuación es verdadera para $m+1 \; \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$

12. **(a)** Con el teorema del binomio demostrar que para n entero positivo se tiene

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right) \right]$$

Demostración.- Sea $a = \dfrac{1}{n}$ y $b = 1$ tenemos,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n}+1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[\frac{\prod\limits_{r=1}^{n} r}{\prod\limits_{r=1}^{n-k} r}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\right] \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{r=n-k+1}^{n} r\right)\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[\prod_{r=0}^{k-1}(n-r)\right]\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{1}{n}\right) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

(b) Si $n > 1$, aplíquese la parte (a) y el Ejercicio 11 para deducir las desigualdades

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 3$$

Demostración.- Si $n > 1$ y $n \geq 2$ por el teorema bonomial tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k > 2$$

Donde la desigualdad es estricta ya que $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$ para $n \geq 2$.
Luego por la parte (a) sabemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right)\right] < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

ya que si $n > 1$ entonce $\left(1-\frac{r}{n}\right) < 1$, para todo $r = 0,...,n-1$ por lo tanto $\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right) <$ $\prod r = 0^{k-1}1 = 1$ y en consecuencia $\frac{1}{k!}\left[\prod[r = 0^{k-1}\right)\left(1-\frac{r}{n}\right) < \frac{1}{k!}$
Por último demostraremos que $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 3$,

$$
\begin{array}{rcll}
1+\sum k=1^n \dfrac{1}{k!} & = & 1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\sum\limits_{k=4}^{n}\dfrac{1}{k!} & \\
 & < & \dfrac{8}{3}+\sum\limits_{k=4}^{n}\dfrac{1}{2^k} & \text{por el problema 11} \\
 & = & \dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{16}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-4}\dfrac{1}{2^k}\right) & \\
 & = & \dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{16}\left(2-\dfrac{1}{2^{n-4}}\right) & \text{por el problema 8} \\
 & = & \dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2^n} & \\
 & < & 3 &
\end{array}
$$

13. (a) Sea p un entero positivo. Demostrar que:

$$b^p-a^p=(b-a)(b^{p-1}+b^{p-2}a+b^{p-3}a^2+...+ba^{p-2}+a^{p-1})$$

Demostración.- Sea $(b-a)(b^{p-1}+b^{p-2}a+b^{p-3}a^2+...+ba^{p-2}+a^{p-1})$ entonces,

$$
\begin{array}{rl}
= & (b-a)\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} b^{p-k-1}a^k\right) \\
= & b\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} b^{p-k-1}a^k\right)-a\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} b^{p-k-1}a^k\right) \\
= & \sum\limits_{k=0}^{p-1} b^{p-k}a^k-\sum\limits_{k=0}^{p-1} b^{p-k}a^{k-1} \\
= & b^p+\sum\limits_{k=1}^{p-1} b^{p-k}a^k-a^p-\sum\limits_{k=1}^{p-1} b^{p-k}a^k \\
= & b^p-a^p
\end{array}
$$

(b) Si p y n son enteros positivos, demostrar que

$$n^p<\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}<(n+1)^p$$

Demostración.- Por el teorema binomial se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1} &= \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[\left(\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}n^k\right)-n^{p+1}\right]\\
&= \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[n^{p+1}+(p+1)n^p+\left(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+1}{k}n^k\right)-n^{p+1}\right]\\
&= n^p+\left(\frac{1}{p+1}\right)\left(\binom{p+1}{k}n^k\right)\\
&> n^p
\end{aligned}
$$

Luego para la desigualdad de la derecha usaremos la parte (a), de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1} &= \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[(n+1)^p+n(n+1)^{p-1}+...+n^{p-1}(n+1)+n^p\right]\\
&< \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[(n+1)^p+(p+1)^p+...+(n+1)^p+(n+1)^p\right]\\
&= \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[(p+1)(n+1)^p\right]\\
&= (n+1)^p
\end{aligned}
$$

(c) Demuéstrese por inducción que:

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^p<\frac{n^{p+1}}{p+1}<\sum_{k=1}^{n}k^p$$

Demostración.- Sea $n=1$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{0}k^p=0<\dfrac{1^{p+1}}{p+1}<\sum\limits_{k=1}^{1}k^p=1$ por lo tanto la inecuación se cumple. Luego asumimos que es verdad para algún $n=m\in\mathbb{Z}^{>0}$. Así para la inecuación de la izquierda se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m+1}k^p<\frac{m^{p+1}}{p+1}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}k^p &< \frac{m^{p+1}}{p+1}+m^p\\
&< \frac{m^{p+1}}{p+1}+\frac{(m+1)^{p+1}-m^{p+1}}{p+1}\\
&= \frac{(m+1)^{p+1}}{p+1}
\end{aligned}
$$

Ahora veamos para la inecuación de la derecha. Asumiendo que es verdad para algún $n=m\in\mathbb{Z}_{>0}$, tenemos:

$$\frac{m^{p+1}}{p+1}<\sum_{k=1}^{m}k^p$$

, entonces

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{m^{p+1}}{p+1}+(m+1)^p & < & \sum\limits_{k=1}^{m+1} k^p \\ \dfrac{m^{p+1}+(m+1)^{p+1}-m^{p+1}}{p+1} & < & \sum\limits_{k=1}^{m+1} k^p \\ \dfrac{(m+1)^{p+1}}{p+1} & < & \sum\limits_{k=1}^{m+1} k^p \end{array}$$

Así vemos que se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}^{>0}$

14. Sean $a_1, ..., a_n$ n números reales, todos del mismo signo y todos mayores que -1. Aplicar el método de inducción para demostrar que:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+...+a_n$$

en particular, cuando $a_1 = a_2 = ... = a_n = x$, donde $x > -1$, se transforma en:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ \ \text{(desigualdad de Bernoulli)}$$

Probar que si $n > 1$ el signo de igualdad se presenta en (1.25) sólo para $x = 0$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces $1 + a_1 \geq 1 + a_1$ por lo que la desigualdad es válida. Ahora supongamos que la desigualdad es válida para algún $n = k \in \mathbb{Z}_{>0}$. así,

$$(1+a_1)...(1+a_k) \geq 1+a_1+...+a_k$$

de donde,

$$\begin{array}{rcl} (1+a_1)...(1+a_k)(1+a_{k+1}) & \geq & (1+a_1+..+a_k)(1+a_{k+1}) \\ & \geq & (1+a_1+...+a_{k+1})+a_{k+1}(a_1+...+a_k) \end{array}$$

dado que a_i deben ser del mismo signo por lo tanto a_{k+1} y $(a_1 + ... + a_k)$ debe ser positivo. Así,

$$(1+a_1)\cdots(1+a_{k+1}) \geq 1+a_1+...+a_{k+1}$$

que cumple la desigualdad para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$
Vemos ahora la desigualdad de bernoulli. Si $x = 0$ entonces $(1+0)^n = 1 = 1 + n \cdot 0$, por lo tanto se cumple la igualdad si sólo si $x = 0$
Para el caso de $n = 2$ tenemos $(1+x)^2 01 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ entonces la desigualdad se cumple para $n = 2$. Supongamos ahora que la desigualdad es estricta para algún $n = k \in \mathbb{Z}_{>1}$ por lo tanto

$$(1+x)^k > 1+kx$$

así,

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^k(1+x) & > & (1+kx)(1+x) \\ (1+x)^{k+1} & > & (k+1)x+kx^2 \\ (1+x)^{k+1} & > & 1+(k+1)x \end{array}$$

Ya que $k > 0$ y $x > 0$ implica que $kx^2 > 0$ por lo tanto la desigualdad es estricta para todo $n > 1$ si $x \neq 0$. Por lo tanto, la igualdad es válida si y sólo si $x = 0$

15. Si $n \geq 2$, demostrar que $n!/n^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$, siendo k la parte entera de $n/2$.

Demostración.- Demostremos por inducción. Sea $n = 2$ entonces

$$\frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

ya que $n/2 = 2/2 = 1 = k$ siendo k la parte entera de $n/2$. Supongamos que la desigualdad se cumple para algún $n = m \in \mathbb{Z} \geq 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{m!}{m^m} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad & \Rightarrow \quad \left(\frac{m!}{m^m}\right)\left[\frac{(m+1)m^m}{(m+1)^{m+1}}\right] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \left[\frac{(m+1)m^m}{(m+1)^{m+1}}\right] \\ & \Rightarrow \quad \frac{(m+1)!}{(m+1)^{m+1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \end{aligned}$$

Luego por el problema 13 se tiene

$$m^p < \frac{(m+1)^{p+1} - m^{p+1}}{p+1} \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}^+$$

Supongamos que $p = m - 1$ entonces,

$$\begin{array}{lll} (p+1)m^p & \Rightarrow & (m+1)^{p+1} - m^{p+1} \\ & \Rightarrow & m^{p+1} + (p+1)m^p < (m+1)^{p+1} \\ & \Rightarrow & m^m + m^m < (m+1)^m \qquad\qquad \text{ya que } p = m-1 \\ & \Rightarrow & 2m^m < (m+1)^m \\ & \Rightarrow & \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^m < \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Así nos queda que

$$\frac{(m+1)!}{(m+1)^{m+1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

Por último recordemos que k es la parte entera de $m/2$, para completar la demostración debemos demostrar que si la desigualdad se cumple para m entonces e cumplirá para $m+1$, en efecto si m es par, entonces $k = m/2$ y $k+1 = (m+1)/2$, por otro lado si m es impar entonces $k = (m+1)/2$. En cualquier caso $k+1 \geq (m+1)/2$ entonces

$$\frac{(m+1)!}{(m+1)^{m+1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+1}{2}}$$

Por lo tanto la desigualdad es válida para el caso $m+1$ y en consecuencia es cierta para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$

16. Los números $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$ tales que cada uno después del segundo es la suma de los dos anteriores, se denomina números de Fibonacci. Se pueden definir por inducción como sigue:

$$a_1 = 1, \;\; a_2 = 2, \;\; a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \;\; si\ n \geq 2.$$

Demostrar que

$$a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para cada $n \geq 1$.

Demostración.- Para el caso de $n = 1$ tenemos

$$1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ya que $\sqrt{5} > 2$ se cumple la desigualdad para $n = 1$. Ahora supongamos que es verdad para algún $n = k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, luego

$$\begin{array}{rrcl} & a_k + a_{k-1} & < & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \\ \Rightarrow & a_{k+1} & < & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) \\ & & = & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ & & = & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \qquad \text{ya que } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ & & = & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \end{array}$$

Por lo tanto la desigualdad es válida para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

Definición 4.16 (Desigualdades que relacionan distintos tipos de promedios)**.** Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ n números reales positivos. Si p es un entero no nulo, la media de potencias p-énesimas M_p se define como sigue.

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + ... + x_n^p}{n}\right)^{1/p}$$

El número M_1 se denomina media aritmética, M_2 media cuadrática y M_{-1} media armónica.

17. Si $p > 0$ demostrar que $M_p < M_{2p}$ cuando $x_1, x_2, ..., x_n$ no son todos iguales.

Demostración.- Sea $a_k = x_k^p$ y $b_k = 1$ entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \cdot 1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^{2p}\right)\left(\sum_{k=1}^n 1^2\right)$$

luego, vemos que la desigualdad es estricta ya que si se sostuviera la igualdad existiría alguna $y \in \mathbb{R}$ tal que $x_k^p \cdot y + 1 = 0,\ \forall k$, pero esto implicaría que $x_k = \left(-\frac{1}{y}\right)^{1/p}$, $\forall k$, contradiciendo nuestro supuesto de que x_k no todos son iguales. Luego sabemos que $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$ entonces

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p & < & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{2p}\right)^{1/2} \cdot n^{1/2} & \\
\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} & < & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{2p}\right)^{1/2p} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/2p} & \text{elevado por } 1^{1/p} \\
\left(\dfrac{1}{p}\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} & < & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{2p}\right)^{1/2p} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/2p} & \text{por } \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/2} \\
\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}{n}\right)^{1/p} & < & \left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{2p} x_k^{2p}}{n}\right)^{1/2p} &
\end{array}$$

18. Aplíquese el resultado del Ejercicio 17 para demostrar que

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{64}{3}$$

si $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ y $a,\ b,\ c > 0$.

Demostración.- Sea $a + b + c \in \mathbb{R}$ distintos entre si, aplicamos el problema 17 con $p = 2$,

$$\begin{array}{rl}
\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{1/2} < \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{1/4} & \Rightarrow \quad \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 < \dfrac{a^4+b^4+c^4}{3} \\
& \Rightarrow \quad a^4+b^4+c^4 > \dfrac{64}{3}
\end{array}$$

Luego si $a = b = c$, entonces

$$\begin{array}{rcl}
a^2+b^2+c^2 & \Rightarrow & 3a^2 = 8 \\
& \Rightarrow & a^2 = b^2 = c^2 = \dfrac{8}{3} \\
& \Rightarrow & a^4 = b^4 = c^4 = \dfrac{64}{9} \\
& \Rightarrow & a^4 + b^4 + c^4 = \dfrac{64}{3}
\end{array}$$

Por lo tanto la desigualdad se cumple para cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$

19. Sean $a_1, ..., a_n$ n números reales positivos cuyo producto es igual a 1. Demostrar que $a_1 + ... + a_n \geq n$ y que el signo de igualdad se presenta sólo cuando cada $a_k = 1$

Demostración.- Consideremos dos casos:

C1 Si $a_1 = ... = a_n = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \geq \prod_{k=1}^{n} a_n = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1$$

Por lo tanto la desigualdad se cumple.

C2 Sea $a_k \neq 1$ y $n = 2$ por inducción vemos que no se cumple la desigualdad

$$a_1 \cdot a_2 \neq 1$$

. Si uno de ellos no es uno tampoco lo es el siguiente es decir,

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{a_1} \\ &\Rightarrow \quad a_1 + a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \\ &\Rightarrow \quad a_1 + a_2 = \frac{a_1^2 + 1}{a_1} \\ &\Rightarrow \quad a_1 + a_2 = \frac{a_1^2 - 2a_1 + 1 + 2a_1}{a_1} \\ &\Rightarrow \quad a_1 + a_2 = \frac{(a_1 - 1)^2}{a_1} + 2 \\ &\Rightarrow \quad a_1 + a_2 > 2 \end{aligned}$$

Donde la desigualdad final sigue desde $\dfrac{(a_1 - 1)^2}{a_1}$ para $a_1 > 0$, por lo tanto la desigualdad es válida para el caso $n = 2$

Supongamos que la desigualdad se cumple para $n = k \in \mathbb{Z}^+$. Luego $a_1, ..., a_{k+1} \in \mathbb{R}^+$ con $a_i \neq 1$ para al menos un $i = 1, ..., k+1$. Si $a_i < 1$, entonces debe haber algún $j \neq i$ tal que $a_j > 0$ porque de lo contrario si $a_j \leq 1$ para todo $j \neq i$, entonces $a_1 \cdots a_{k+1} < 1$. De manera similar, si $a_i > 1$, entonces hay algún $j \neq i$ tal que $a_j < 1$. Por lo tanto tenemos un par $a_i,\ a_j$ con un miembro del par mayor que 1 y el otro menor que 1. Sea este par a_1 y a_{k+1} entonces definamos $a_1 \cdot a_{k+1}$, entonces,

$$b \cdot a_2 \cdots a_k = 1 \Rightarrow b_1 + a_2 + ... - a_k \geq k$$

Además, dado que $(1 - a_i)(1 - a_{k+1}) < 0$ (dado que uno de a_1, a_{k+1} es mayor que 1 y el otro es menor que 1, uno de $(1 - a_1), (1 - a_{k+1})$ es positivo y el otro es negativo, luego

$$1 - a_1 - a_{k+1} + a_1 a_{k+1} < 0 \Rightarrow b < a_1 + a_{k+1} - 1,$$

Así

$$b + a_2 + ... + a_k \geq k \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} \geq k + 1$$

Por lo tanto, la desigualdad es válida para $k+1$ y en consecuencia es verdadera para $n \in \mathbb{Z}^+$

Definición 4.17. La media geométrica G de n números reales positivos $x_1, ..., x_n$ está definida por la fórmula $G = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$

20. (a) Desígnese con M_p la media de potencias p-ésimas. Demostrar que $G \leq M_1$ y que $G = M_1$ solo cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demostración.- Si $x_1, ..., x_n$ no todos iguales, entonces

$$G_n = \left[(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \right]^n = x_1 \cdots x_n,$$

así,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{G_n}\right)(x_1\cdots x_n) &= 1\\
\left(\frac{x_1}{G}\right)\left(\frac{x_2}{G}\right)\cdots\left(\frac{x_n}{G}\right) &= 1\\
\frac{x_1}{G}+\frac{x_2}{G}+...+\frac{x_n}{G} &> n \qquad \text{por problema anterior}\\
x_1+x_2+...+x_n &> n\cdot G\\
M_1 &> G
\end{aligned}
$$

luego si $x_1, ...x_n$ son todos iguales , entonces,

$$G = (x_1\cdots x_n)^{1/n} = (x_1^n)^{1/n} = x_1 = \frac{nx_1}{n} = \frac{x_1+...+x_n}{n} = M_1$$

(b) Sean p y q enteros, $q < 0 < p$. A partir de (a) deducir que $M_q < G < M_p$ si $x_1, x_2, ..., x_n$ no son todos iguales.

Demostración.- Probemos primero que $G < M_p$. Para ello primero veamos que si $x_1, ..., x_n$ son números reales positivos, no todos iguales entonces $x_P, ..., x_n^P$ también son números reales positivos también no todos iguales. A partir de la definición de M_p y dejando $M_p(x_1^p, ..., x_n^p)$ denotar la p-enésima potencia media de los números $x_i^p, ..., x_n^p$ tenemos,

$$
\begin{aligned}
M_1(x_1^p, ..., x_n^p) &= \frac{x_1^p+...+x_n^p}{n}\\
&= \left[\left(\frac{x_1^p+...+x_n^p}{n}\right)^{1/p}\right]^p\\
&= [M_p(x_1, ..., x_n)]^p
\end{aligned}
$$

así se observa que $[M_p(x_1, ..., x_n)]^p = M_1(x_i^p, ..., x_n^p)$ luego por la parte (a),

$$
\begin{aligned}
G(x_1, ..., x_n) &= (x_1\cdots x_n)^{p/n}\\
&= (x_i^p\cdots x_n^p)^{1/n}\\
&= G(x_1^p, ..., x_n^p)\\
&< M_1(x_1^p, ..., x-n^p)\\
&= [M_p(x_1, ..., x_n)]^p
\end{aligned}
$$

Por lo tanto implica que $G < M_p$
ahora debemos $M_q < G$ para $q < 0$, visto de otra forma $-q > 0$ entonces $G < M_{-q}$ y por la desigualadad que demostramos se tiene,

$$G^{-q} < (M_{-q})^{-q} \Rightarrow G^q > M_q^q \Rightarrow G > M_q$$

21. Aplíquese los resultados del Ejercicio 20 para probar la siguiente proposición: Si a, b y c son números reales y positivos tales que $abc = 8$, entonces $a+b+c \geq 6$ y $ab+ac+bc \geq 12$.

Demostración.- Sea $a, b \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$
\begin{aligned}
(a\cdot b\cdot c)^{1/3} &\leq \frac{a+b+c}{3}\\
8 &\leq \frac{(a+b+c)^3}{3^3}\\
2^3\cdot 3^3 &\leq (a+b+c)^3\\
a+b+c &\geq 6
\end{aligned}
$$

Luego para la segunda desigualdad utilizamos la parte (b) del anterior problema,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}{3}\right)^{-1} &\leq (a\cdot b\cdot c)^{1/3}\\
\left[\frac{3^3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3}\right]^3 &\leq 2^3\\
\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3 &\geq \frac{3^3}{2^3}\\
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &\geq \frac{3}{2}\\
\frac{bc+ac+ab}{abc} &\geq \frac{3}{2}\\
\frac{bc+ac+ab}{8} &\geq \frac{3}{2}\\
ab+ac+bc &\geq 12
\end{aligned}
$$

22. Si $x_1,...,x_n$ son números positivos y si $y_k = 1/x_k$, demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \geq n^2.$$

Demostración.- Sea $\sqrt{x_k}\sqrt{y_k} = 1$ ya que $y_k = \dfrac{1}{x_k}$ entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos,

$$\begin{array}{rcl}
\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 & \leq & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)\\
\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\sqrt{y_k}\right)^2 & \leq & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{y_k}^2\right)\\
\left(\sum\limits_{k=1}^{n} 1\right)^2 & \leq & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)\\
\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right) & \geq & n^2
\end{array}$$

23. Si a, b y c son números positivos y si $a + b + c = 1$, demostrar que $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 8abc$

Demostración.- Sea $M_{-1}(a, b, c) \leq M_1(a, b, c)$ entonces

$$\left(\frac{a_{-1} + b_{-1} + c_{-1}}{3}\right)^{-1} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}} & \leq & \dfrac{1}{3}\\
9 & \leq & \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\\
9abc & \leq & bc + ac + ab\\
8abc & \leq & bc + ac + ab - abc\\
8abc & \leq & 1 - (a + b + c) + ab + ac + bc - abc
\end{array}$$

ya que $1 = a + b + c$, luego $1 - (a + b + c) + ab + ac + bc - abc = (1 - a)(1 - b)(1 - c)$ así nos queda

$$8abc \leq (1 - a)(1 - b)(1 - c)$$

1

Los conceptos del Cálculo Integral

1.3. Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o funciones reales.

Definición 1.1 (Par ordenado)**.** Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \; y \; b = d$$

Definición 1.2 (Definición de función)**.** Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primero elemento.

Debe cumplir las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

(I) $\forall x \in D_f, \exists y / (x, y) \in f(x) \;\; y = f(x)$

(II) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

Definición 1.3 (Dominio y recorrido)**.** Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el **dominio** de f. El conjunto de los segundos elementos y se denomina **recorrido** de f, o conjunto de valores de f.

Teorema 1.1. Dos funciones f y g son iguales si y sólo si

(a) f y g tienen el mismo dominio, y

(b) $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de f.

Demostración.- Sea f función tal que $x \in D_f, \exists y \; / \; y = f(x)$ es decir $(x, f(x))$, g una función talque $\forall z \in D_g, \exists y \; / \; y = g(z)$ es decir $(z, g(z))$, entonces por definición de par ordenado tenemos que $(x, f(x)) = (z, g(z))$ si y sólo si $x = z$ y $f(x) = g(z)$

Definición 1.4 (Sumas, productos y cocientes de funciones)**.** Sean f y g dos funciones reales que tienen el mismo dominio D. Se puede construir nuevas funciones a partir de f y g por adición, multiplicación o división de sus valores. La función u definida por,

$$u(x) = f(x) + g(x) \ \ si \ x \in D$$

se denomina suma de f y g, se representa por $f + g$. Del mismo modo, el producto $v = fcdotg$ y el cociente $w = f/g$ están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \ \ si \ x \in D, \quad w(x) = f(x)/g(x) \ \ si \, x \ \in D \ y \ g(x) \neq 0$$

1.5. Ejercicios

1. Sea $f(x) = x + 1$ para todo real x. Calcular:

- $f(2) = 2 + 1 = 3$
- $f(-2) = -2 + 1 = -1$
- $-f(2) = -(2 + 1) = -3$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
- $\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{3}$
- $f(a + b) = a + b + 1$
- $f(a) + f(b) = (a + 1) + (b + 1) = a + b + 2$
- $f(a) \cdot f(b) = (a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$

2. Sean $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = 1 - x$ para todo real x. calcular:

- $f(2) + g(2) = (1 + 2) + (1 - 2) = 2$
- $f(2) - g(2) = (1 + 2) - (1 - 2) = 4$

- $f(2) \cdot g(2) = (1+2) \cdot (1-2) = 3 \cdot (-1) = -3$

- $\dfrac{f(2)}{g(2)} = \dfrac{1+2}{1-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$

- $f[g(2)] = f(1-2) = f(-1) = 1 + (-1) = 0$

- $g[f(2)] = f(1+2) = g(3) = 1 - 3 = -2$

- $f(a) + g(-a) = (1+a) + (1-a) = 2$

- $f(t) \cdot g(-t) = (1+t) \cdot (1+t) = 1 + t + t + t^2 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$

3. Sea $f(x) = |x-3| + |x-1|$ para todo real x. Calcular:

- $f(0) = |0-3| + |0-1| = 3 + 1 = 4$
- $f(1) = |1-3| + |1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3| + |2-1| = -1 + 1 = 2$
- $f(3) = |3-3| + |3-1| = 2$
- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4 + 2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5 + 3 = 8$

Determinar todos los valores de t para los que $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{array}{rcl} |t+2-3| + |t+2-1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t-1| + |t+1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t+1| & = & t-3 \end{array}$$

Por lo tanto $t = 1$

4. Sea $f(x) = x^2$ para todo real x. Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números erales $x,\ y\ t$, etc., para los que la fórmula dada es válida.

(a) $f(-x) = f(x)$

Demostración.- Se tiene $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $f(y) - f(x) = (y-x)(y+x)$

Demostración.- $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (x-y)(x+y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

(c) $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.- $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.- $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$

(e) $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.- $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

(f) $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.- $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

5. Sea $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de $x,\ y, s$ y t son válidas.

(a) $g(-x) = g(x)$

Se tiene $g(-x) = \sqrt{2 - (-x)^2} = \sqrt{2 - (x)^2} = g(x),\ \ \textit{para } |x| \leq 2$

(b) $g(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4 - (2y)^2} = \sqrt{4(1 - y^2)} = 2\sqrt{1 - y^2},\ \ \textit{para } |y| \leq 1$ Se obtiene $|y| \leq 1$ de $\sqrt{1 - y^2}$ es decir $1 - y^2 \geq 0$ entonces $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$ y $|y| \leq 1$

(c) $g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|},\ \ \textit{para } |t| \geq \frac{1}{2}$$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar $\sqrt{4t^2 - 1}$. Es decir

$$4t^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow 4t^2 \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq \frac{1}{2^2} \Rightarrow |t| \geq \frac{1}{2}$$

(d) $g(a - 2) = \sqrt{4a - a^2}$

$g(a-2) = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - (a-2)^2} = \sqrt{4a - a^2},\ \ \textit{para } 0 \leq a \leq 4$. Basta probar $4a - a^2 \geq 0$

(e) $g\left(\dfrac{s}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{16 - s^2}$

$$s\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt{4-\left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16-s^2}}{2}, \quad para\ |s| \leq 4.\ \text{ya que solo basta comprobar que } \sqrt{16-s^2} \geq 0$$

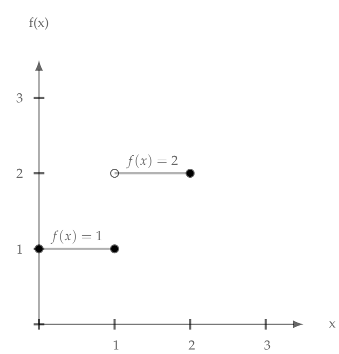
(f) $\dfrac{1}{2+g(x)} = \dfrac{2-g(x)}{x^2}$

$$\frac{1}{2+g(x)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-g(x)}{x^2}\ para\ \ |x| \leq 2\ y\ x \neq 0$$

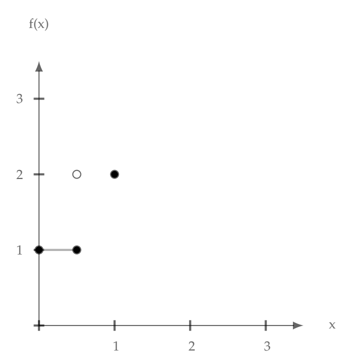
Evaluemos $\sqrt{4-x^2}$. Sea $4-x^2 \geq 0$ entonce $\sqrt{x^2} \leq 2$. Por otro lado tenemos que la función no puede ser 0 por $\dfrac{1}{x^2}$, por lo tanto debe ser $x^2 \neq 0$.

6. Sea f la función definida como sigue: $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ para $1 < x \leq 2$. La función no está definida si $x < 0$ ó si $x > 2$.

(a) Trazar la gráfica de f

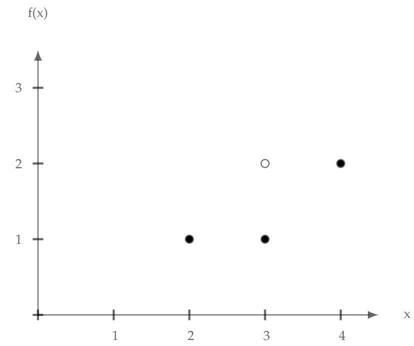


(b) Poner $g(x) = f(2x)$. Describir el dominio de g y dibujar su gráfica.



Debido a que $1 \leq 2x \leq 1$ y $1 < 2x \leq 2$ el dominio de $g(x)$ es $0 \leq x \leq 1$

(c) Poner $h(x) = f(x-2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

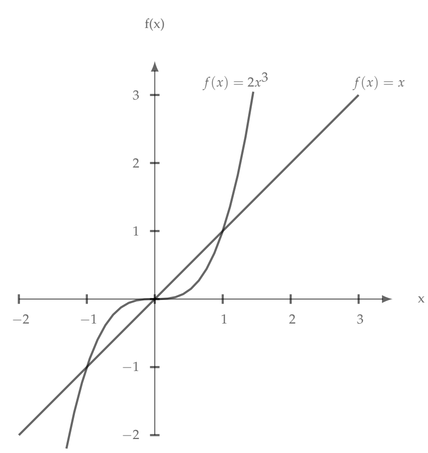


Debido a que $1 \leq x - 2 \leq 1$ y $1 < x - 2 \leq 2$ el dominio de $h(x)$ es $2 \leq x \leq 4$

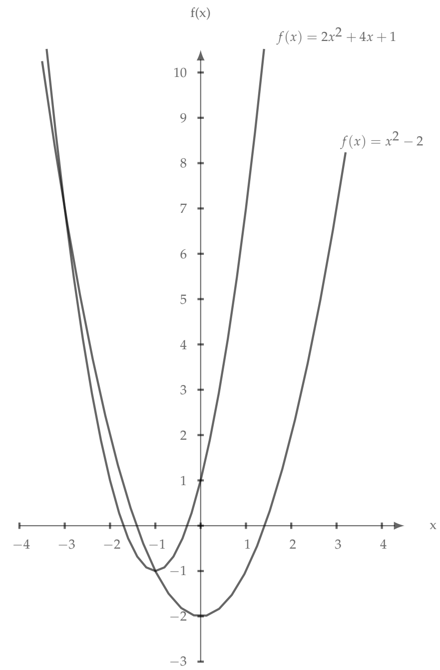
(d) Poner $k(x) = f(2x) + f(x-2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

El dominio está vacío ya $f(2x)$ que solo está definido para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x-2)$ solo está definido para $2 \leq x \leq 4$. Por lo tanto no hay ninguno x que satisfaga ambas condiciones.

7. Las gráficas de los dos polinomios $g(x) = x$ y $f(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.



8. Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.



9. Este ejercicio desarrolla ciertas propiedades fundamentales de los polinomios. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio de grado n. Demostrar cada uno de los siguientes apartados:

(a) Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, $f(x) = xg(x)$, siendo g un polinomio de grado $n-1$.

Para entender lo que nos quiere decir Apostol pongamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un polinomio donde $f(x) = 2x^2 + 3x - x$ entonces notamos que $f(x) = x(2x + 3 - 1)$ donde $g(x) = 2x + 3 - 1$, esto quiere decir que si $0 = f(0) = c_0 \Rightarrow c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n = x(c_1 + c_2 x + ... + c_n x^{n-1})$ Así que debemos demostrar que $f(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $n \geq 1$ tal que $f(0) = 0$, entonces debe haber un polinomio de grado $n-1$, $g(x)$, tal que $f(x) = xg(x)$

Demostración.- Sabemos que

$$f(0) = c_n \cdot 0^n + c_{n-1} \cdot 0^{n-1} + ... + c_1 \cdot 0 + c_0 = c_0,$$

como $f(0) = 0$ se concluye que $c_0 = 0$. Así tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k.$$

Ahora crearemos una función $g(x)$. Dada la función $f(x)$ como la anterior, definamos,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

Ahora crearé una función $g(x)$. Dada una función $f(x)$ como la anterior, definamos

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

donde c_k son los mismos que los dados por la función $f(x)$. Primero notemos que el grado de $g(x)$ es $n-1$. Finalmente, tenemos que

$$xg(x) = x \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k = f(x).$$

(b) Para cada real a, la función p dada por $p(x) = f(x+a)$ es un polinomio de grado n.

Demostración.- Usando el teorema del binomio,

$$\begin{aligned}
f(x+a) &= \sum_{k=0}^{n}(x+a)^k c_k \\
&= c_o + (x+a)c_1 + (x+a)^2 c_2 + ... + (x+a)^n c_n \\
&= c_o + c_1\left(\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}a^j x^{1-j}\right) + c_2\left(\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}a^j x^{2-j}\right) + ... + c_n\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j x^{n-j}\right) \\
&= (c_o + ac_1 + a^2c_2 + ... + a^n c_n) + x(c_1 + 2ac_2 + ... + na^{n-1}c_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(x^k\left(\sum_{j=k}\binom{j}{j-k}c_j aj - k\right)\right)
\end{aligned}$$

En la linea final reescribimos los coeficientes como sumas para verlos de manera más concisa. De cualquier manera, dado que todos los c_i son constantes, tenemos $\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{j-k}c_j a^{j-k}$ es alguna constante para cada k, de d_k y tenemos,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k x^k$$

(c) Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para un cierto valor real a, entonces $f(x) = (x-a)\,h(x)$, siendo h un polinomio de grado $n-1$. (considérese $p(x) = f(x+a)$.)

Demostración.- Por la parte b) se sabe que $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $p(x) = f(x+a)$ también es un polinomio del mismo grado. Ahora si $f(a) = 0$ entonces por hipótesis $p(0) = f(a) = 0$. Luego por la parte a), tenemos

$$p(x) = x \cdot g(x)$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. Así,

$$p(x-a) = f(x) = f(x) = (x-a)\cdot g(x-a)$$

ya que $p(x) = f(x+a)$. Pero, si $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, entonces por la parte b) nuevamente, también lo es $h(x) = g(x+(-a)) = g(x-a)$. Por lo tanto,

$$f(x) = (x-a)\cdot h(x)$$

para h un grado $n-1$ polinomial, según lo solicitado.

(d) Si $f(x) = 0$ para $n+1$ valores reales de x distintos, todos los coeficientes c_k son cero y $f(x) = 0$ para todo real de x

Demostración.- La prueba se realizara por inducción. Sea $n = 1$, entonces $f(x) = c_o + c_1 x$. Dado que la hipótesis es que existen $n+1$ distintos x de tal manera que $f(x)=0$, sabemos que existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a_1)=f(a_2)=0, \quad a_1 \neq a_2,$$

Así,

$$\begin{array}{rclrcll} c_0 + c_1 a_1 & = & 0 & \Rightarrow \quad c_1 a_1 - c_1 a_2 & = & 0 & \\ & & & \Rightarrow \quad c_1(a_1 - a_2) & = & 0 & \\ & & & \Rightarrow \quad c_1 & = & 0 & \text{ya que } a_1 \neq a_2 \\ & & & \Rightarrow \quad c_0 & = & 0 & \text{ya que } c_0 + c_1 a_1 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera. Suponga que es cierto para algunos $n = k \in \mathbb{Z}^+$. Luego Sea $f(x)$ un polinomio de grado $k+1$ con $k+2$ distintos de 0, $a_1, ..., a_{k+2}$. ya que $f(a_{k+2}) = 0$, usando la parte c), tenemos,

$$f(x) = (x - a_{k+2})h(x)$$

donde $h(x)$ es un polinomio de grado k. Sabemos que hay $k+1$ valores distintos $a_1, ...a_{k+1}$ tal que $h(a_i) = 0$. Dado que $f(a_i) = 0$ para $1 < i < k + 2y$ y $(x - a_{k+2}) \neq 0$ para $x = a_i$ con $1 < i < k+1$ ya que todos los a_1 son distintos), por lo tanto, según la hipótesis de inducción, cada coeficiente de h es 0 y $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x - a_{k+2})h(x) \quad = \quad (x - a_{k+2}) \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{k} c_j x^j \\ & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (x - a_{k+2}) c_j x^j \\ & = & c_k x^{k+1} + (c_{k-1} - a_k + 2c_k)x^k + ... + (c_1 - a_{k+2}c_0)x + a_{k+2}c_0 \end{array}$$

Pero dado que todos los coeficientes de $h(x)$ son cero y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la afirmación es verdadera para el caso $k+1$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

(e) Sea $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ un polinomio de grado m, siendo $m \geq n$. Si $g(x) = f(x)$, para $m+1$ valores reales de x distintos, entonces $m = n$, $b_k = c_k$ para cada valor de k, y $g(x) = f(x)$ para todo real x

Demostración.- Sea

$$p(x) = g(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{m} (b_k - c_k) x^k$$

donde $c_k = 0$ para $n < k \leq m$, cabe recordar que tenemos $m \geq n$.
Entonces, hay $m+1$ distintos reales x para los cuales $p(x) = 0$. Dado que hay $m+1$ valores reales distintos para lo cuál $g(x) = f(x)$, así en cada uno de estos valores $p(x) = g(x) - f(x) = 0$. Por lo tanto, por la parte d), $b_k - c_k = 0$ para $k = 0, ..., m$ y $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir

$$b_k - c_k = 0 \quad \Rightarrow \quad b_k = c_k \quad para\ k = 0, ..., m$$

y

$$p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ademas desde $b_k - c_k = 0$ para $k = 0, ..., m$ y por supuesto $c_k = 0$ para $k = n+1, ..., m$, tenemos $b_k = 0$ para $k = n+1, ..., m$. Pero entonces,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=n+1}^{m} 0 \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} b^k x^k$$

significa que $g(x)$ es un polinomio de grado n también.

10. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que satisfacen las condiciones dadas.

Sabemos que para un polinomio de grado ≤ 2 es:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $p(x) = p(1-x)$

Sea $f(x) = p(x) - 1$, entonces f es de grado como máximo 2 por la parte $d)$ del problema 9 tenemos que todos los coeficientes de f son 0 y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así,

$$p(x) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) $p(x) = p(1+x)$

Tenemos $p(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ luego, $p(1) = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ y finalmente, con $c = 1$ y $b = -a$, tenemos: $p(2) = 2 \Rightarrow 4a - 2a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$. por lo tanto

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x(x-1) + 1$$

(c) $p(x) = p(0) = p(1) = 1$

Una vez mas, desde $p(0) = 1$ tenemos: $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ así, $p(x) = ax^2 - ax + 1 = ax(x-1) + 1$

(d) $p(0) = p(1)$

Simplemente sustituyendo estos valores que tenemos, $p(0) = p(1) \Rightarrow c = a + b + c \Rightarrow b = -a$ entonces,

$$p(x) = ax^2 - ax + c = ax(x-1) + c$$

11. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que para todo real x satisfacen las condiciones que se dan. Como p es un polinomio de grado por lo mucho 2, podemos escribir

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad para\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

(a) $p(x) = p(1-x)$

Sustituyendo se tiene $p(x) = p(1-x) = ax^2 + bx + c = a(1-x)^2 + b(1-x) + c \Rightarrow a - 2ax + ax^2 + b - bx + c$ por lo tanto

$$ax^2 + (-2a - b)x + (a + b + c)$$

Así para $a = a$, $b = -2a - b \Rightarrow a = -b$, $c = a + b + c$ entonces

$$p(x) = -bx^2 + bx + c = bx(1 - x) + c$$

(b) $p(x) = p(x) = p(1 + x)$

Una vez más sustituyendo, $p(x) = p(1+x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(1+x)^2 + b(1+x) + c = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)$. Luego, igualando como potencias de x, $a = a$, $b = 2a + b \Rightarrow a = 0$, $c = a + b + c \Rightarrow b = 0$. Por lo tanto $p(x) = c$ donde c es una constante arbitraria.

(c) $p(2x) = 2p(x)$

Sustituyendo, $p(2x) = 2p(x) \Rightarrow 4ax^2 + 2bx + c = 2ax^2 + 2bx + 2c$.. Igualando a las potencias de x, $4a = 2a \Rightarrow a = 0$, $2b = 2b \Rightarrow b$ *arbitrario*, $c = 2c \Rightarrow c = 0$.
Así

$$p(x)bx, \ b \ arbitrario$$

(d) $p(2x) = p(x + 3)$

Sustituyendo $p(3x) = p(x+3) \Rightarrow 9ax^2 + 3bx + c = ax^2 + (6a+b)x + (9a + 3b + c)$. Igualando como potencias de x, $9a = a \Rightarrow a = 0$, $3b = 6a + b \Rightarrow b = 0$, $c = 9a + 3b + c = c \Rightarrow c$ *arbitrario*. Por lo tanto

$$p(x) = c \text{para c constante arbitrario.}$$

Corolario 1.1. Probar que:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad parax \neq 1$$

Demostración.- Usando propiedades de suma,

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = -\sum_{k=0}^{n}(x^{k+1} - x^k) = -(x^{n+1} - 1 = 1 - xn + 1)$$

En la penultima igualdad se deriva de la propiedad telescópica, por lo tanto nos queda,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Corolario 1.2. Probar la identidad

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + x^{2^{k-1}}\right) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}, \quad para \ x \neq 1$$

Demostración.- Para $n = 1$ a la izquierda tenemos,

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + x^{2^{k-1}}\right) = \prod_{k=0}^{1} \left(1 + x^{2^{k-1}} = 1 + x^{2^0} = 1 + x\right)$$

Por otro lado a la derecha se tiene,

$$\frac{1 - x^{2^n}}{1 - x} = \frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = 1 + x$$

Concluimos que la identidad se mantiene para $n = 1$. Ahora supongamos que es válido para algunos $n = m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{m+1} &= \left(+x^{2^m}\right) \cdot \prod_{k=1}^{m} \left(1 + x^{2^{k+1}}\right) \\
&= \left(1 + x^{2^m}\right) \cdot \left(\frac{1 - x^{2^m}}{1 - x}\right) \\
&= \frac{(1 + x^{2^m})(1 - x^{2^m})}{1 - x} \\
&= \frac{1 - x^{2^{m+1}}}{1 - x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera para $m + 1$, y así para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

12. Demostrar que las expresiones siguientes son polinomios poniéndolas en la forma $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$ para un valor de m conveniente. En cada caso n es entero positivo.

(a) $(1 + x)^{2n}$

Demostración.- Usando el teorema binomial $(1 + x)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2} n \binom{2n}{k} x^k$, sea $m = 2n$ entonces $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{n} x^k$, por lo tanto $\sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^k$ si $c_k = \binom{m}{k}$ para cada k.

(b) $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $x \neq 1$

Demostración.- Por el corolario anterior

$$\begin{aligned}
\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} &= \frac{(1 - x)(1 + x + ... + x^n)}{1 - x} \\
&= 1 + x + ... + x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot x^k
\end{aligned}$$

(c) $\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k})$

Demostración.- Por le corolario anterior,

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})}{1-x}\\
&= \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}\\
&= \left(\frac{1-x^{2^n}}{1-x}\right)(1+x^{2^n})\\
&= (1+x+...+x^{2^n+1})(1+x^{2^n})\\
&= (1+x+...+x^{2^n+1})(x^{2^n}+x^{2^n+1}+...+x^{2^{n+1}-1})\\
&= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} 1\cdot x^k\\
&= \sum_{k=0}^{m} 1\cdot x^k \text{ si } m=2^{n+1}-1
\end{aligned}
$$

Axioma .11 (Definición axiomática de área)**.** Supongamos que existe una clase M de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto a, cuyo dominio es M, con las propiedades siguientes:

1. **Propiedad de no negatividad**. Para cada conjunto S de M, se tiene $a(S)\geq 0$
2. **Propiedad aditiva**. Si S y T pertenecen a M, también pertenecen a M, $S\cup T$ y $S\cap T$, y se tiene
$$a(S\cup T)=a(S)+a(T)-a(S\cap T)$$
3. **Propiedad de la diferencia**. Si S y T pertenecen a M siendo $S\subseteq T$ entonces $T-S$ está en M, y se tiene $a(T-S)=a(T)-a(S)$
4. **Invariancia por congruencia**. Si un conjunto S pertenece a M y T es congruente a S, también T pertenece a M y tenemos $a(S)=a(T)$
5. **Elección de escala** Todo rectángulo R pertenece a M. Si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces $a(R)=hk$
6. **Propiedad de exhaución**. Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T de modo que
$$S\subseteq Q\subseteq T.$$
Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades
$$a(S)\leq c\leq a(T)$$
para todas la regiones escalonadas S y T que satisfacen $S\subseteq Q\subseteq T$, entonces Q es medible y $a(Q)=c$

1.7. Ejercicios

1. Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es medible y tiene área nula:

(a) Un conjunto que consta de un solo punto.

Demostración.- Un sólo punto se puede medir con un área 0, ya que un punto es un rectángulo con $h = k = 0$

(b) El conjunto de un número finito de puntos.

Demostración.- Demostraremos por inducción en n, el número de puntos. Para el caso de $n = 1$ ya quedo demostrado en el anterior inciso. Supongamos que es cierto para algunos $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Entonces, tenemos un conjunto $S \in M$ de k puntos en el plano y $a(S) = 0$. Sea T un punto en el plano. Por (a) $T \in M$ y $a(T) = 0$, por tanto por la propiedad aditiva,

$$S \cup T \in M \;\; y \;\; a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$

pero $S \cap T \subseteq S$, entonces

$$a(S \cap T) \leq a(S) \Rightarrow a(S \cap T) \leq 0 \Rightarrow a(S \cap T) = 0.$$

El axioma 1 nos garantiza que $a(S \cap T)$ no puede ser negativo. Por lo tanto, $a(S \Cup T) = 0$, Por tanto, el enunciado es verdadero para $k + 1$ puntos en un plano y, por tanto, para todo $n \in Z_{>0}$

(c) La reunión de una colección finita de segmentos de recta en un plano.

Demostración.- Por inducción, sea n el número de segmentos en un plano. Para $n = 1$, dejamos S ser un conjunto con una línea en un plano. Dado que una línea es un rectángulo y todos los rectángulos son medibles, tenemos $S \in M$ ademas, $a(S) = 0$ ya que una línea es un rectángulo con $h = 0$ ó $k = 0$, y así en cualquier caso $hk = 0$. Por lo tanto, el enunciado es verdadero para una sola línea en el plano, el caso $n = 1$.
Asuma entonces que es cierto para $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Sea S un conjunto de rectas en el plano. Luego, por la hipótesis de inducción, $S \in M$ y $a(S) = 0$. Sea T una sola línea en el plano. Por el caso $n = 1$ en $T \in M$ y $a(T) = 0$. Por lo tanto $S \cup T \in M$ y $a(S \cup T) = 0$ (ya que $a(S) = a(T)a(S \cap T) = 0$). Por tanto, la afirmación es verdadera para $k + 1$ líneas en un plano, y así para todos $n \in \mathbf{Z}^+$

2. Toda región en forma de triángulo rectángulo es medible pues puede obtenerse como intersección de dos rectángulos. Demostrar que toda región triangular es medible y que su área es la mitad del producto de su base por su altura.

Demostración.- Dado que cada triángulo rectángulo es medible, por el axioma 2 del área su unión es medible, denotando los dos triángulos rectángulos A y B, y la región triangular T, tenemos

$$a(T) = a(A) + a(B)$$

ya que A y B son disjuntos $a(A \cap B) = 0$.
Dejando que la altitud de la región triangular se denote por h, y su base por b, tendremos,

$$a(A) = \frac{1}{2}(hb_1) \quad a(B) = \frac{1}{2}hb_2 \quad con \quad b_1 + b_2 = b,$$

entonces

$$a(T) = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2 = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}hb$$

3. Demostrar que todo trapezoide y todo paralelogramo es medible y deducir las fórmulas usuales para calcular su área.

Demostración.- Todo trapecio es medible ya que, la unión de un rectángulo y dos triángulos rectángulos (disjuntos por pares y cada uno de los cuales es medible ppor los axiomas y el ejercicio anterior.) Luego su área es la suma de las áreas de los triángulos rectángulos y el rectángulo (dado que están separados por pares, su intersección tiene un área cero). Para calcular esta área, especificamos las longitudes de los dos lados desiguales del trapezoide para que sean b_1 y b_2. La altura está indicada por a. Entonces, el área del rectángulo es de 1. El área de los triángulos es $\dfrac{1}{2}a \cdot b_3$ y $\frac{1}{2}a \cdot b_4$ dónde $b_1 + b_3 + b_4 = b_2$. Entonces, denotando el trapezoide por T, tenemos

$$a(T) = ab_1 + \frac{1}{2}ab_3 + \frac{1}{2}ab_4 = \frac{1}{2}ab_1 + \frac{1}{2}a(b_1 + b_3 + b_3) = \frac{1}{2}a(b_1 + b_2)$$

A continuación, un paralelogramo es solo un caso especial de un trapezoide, en el que $b_1 = b_2$; por lo tanto, por la fórmula anterior, y denotando el paralelogramo por P,

$$a(P) = \frac{1}{2}a(2b) = ab$$

4. Un punto (x, y) en el plano se dice que es un punto de una red, si ambas coordenadas x e y son enteras. Sea P un polígono cuyos vértices son puntos de una red. El área de P es $I + \dfrac{1}{2}B - 1$ donde I es el número de puntos de la red interiores a P, y B el de los de la frontera.

(a) Probar que esta fórmula es correcta para rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados.

Demostración.- Sea R un $h \times k$ rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas. Entonces, R es medible (ya que es un rectángulo) y $a(R) = hk$. A continuación, dado que los vértices están en puntos de celosía, $B = 2(h+1) + 2(k+1) - 4$ y $I = (h-1)(k-1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2}B - 1 &= (h-1)(k-1) + \frac{1}{2}\left[2(h+1) + 2(k+1) - 4\right] - 1 \\ &= hk - h - k + 1 + h + 1 + k + 1 - 2 - 1 \\ &= hk \end{aligned}$$

(b) Probar que la fórmula es correcta para triángulos rectángulos y paralelogramos.

Demostración.- Sabemos que cualquier triángulo rectángulo puede encerrarse en un rectángulo con bordes cuyas longitudes sean iguales a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo. Además, este rectángulo está compuesto por dos triángulos rectángulos congruentes unidos a lo largo de su diagonal. Cada uno de estos triángulos rectángulos tiene un área la mitad de la del rectángulo y se cruzan a lo largo de la diagonal (que tiene un área cero (1.7, problema 1) ya que es una línea en el plano). Dado un triángulo rectángulo T, R sea tal rectángulo, y S sea el triángulo rectángulo que forma la otra mitad de R, entonces $S \cup T = R$.

Dado que R es un rectángulo, sabemos por la parte (a) que

$$a(R) = I_R + \frac{1}{2}B_R - 1.$$

Además, cualquier punto interior R será un punto interior de cualquiera S o T, o se acuesta sobre su frontera compartida. Por lo tanto,

$$I_R = I_S + I_T + H_P$$

donde H_P denota los puntos en la hipotenusa (compartida) de los dos triángulos rectángulos. Entonces, también tenemos para los puntos límite,

$$B_R = B_S + B_T - 2 - 2H_P.$$

Finalmente, dado que S y T son congruentes, conocemos $B_S = B_T$ y $I_S = I_T$. Entonces, poniendo todo esto junto, tenemos,

$$\begin{array}{rcl} a(R) & = & I_R + \frac{1}{2}B_R - 1 \\ & = & 2I_S + H_P + \frac{1}{2}(2B_S - 2 - 2H_P) - 1 \\ & = & 2(I_S + \frac{1}{2}B_S - 1) \end{array}$$

ó,

$$I_S + \frac{1}{2}B_S - 1 = \frac{1}{2}a(R).$$

Pero, sabemos que $\frac{1}{2}a(R) = a(S)$; por lo tanto,

$$a(S) = I_S + \frac{1}{2}B_S - 1.$$

Esto prueba el resultado para triángulos rectángulos con vértices en puntos de una red.

(c) Emplear la inducción sobre el número de lados para construir una demostración para polígonos en general.

Respuesta.- Ya tenemos esto de la parte (b) ya que podemos realizar cualquier polígono simple como la unión de un número finito de triángulos rectángulos (es decir, cada polígono simple es triangularizable)

5. Demostrar que un triángulo cuyos vértices son puntos de una red no puede ser equilátero.

Demostración.- Supongamos que existe tal triángulo equilátero T. Entonces,

$$T = A\ cupB$$

Para dos triángulos rectángulos congruentes y disjuntos A, B. Dado que los vértices de T están en puntos de una red, sabemos que la altitud desde el vértice hasta la base debe pasar por h puntos de red (donde h es la altura de T). Por lo tanto, al denotar los puntos de red en esta altitud por $V_B = h + 1$, tenemos

$$B_T = B_A + B_B - V_B + 2, \qquad I_T = I_A + I_B + V_B - 2.$$

Dado que T es un polígono con vértices de puntos de red, sabemos por el ejercicio anterior que $a(T) = I_T + \frac{1}{2}B_T - 1$. Además, por el problema 2, sabemos que $a(T) = \frac{1}{2}bh$. Así que,

$$\begin{array}{rrcll}
 & I_T + \dfrac{1}{frm{-}e}B_T - 1 & = & (I_A + I_B + V_B - 2) + \dfrac{1}{2}(B_A + B_B - V_B + 2) & \\
\Rightarrow & I_T + \dfrac{1}{2}B_T - 1 & = & 2I_A + B_A - 2 + \dfrac{1}{2}V_B & (B_A = B_B,\ I_A = I_B) \\
\Rightarrow & I_T + \dfrac{1}{2}B_T - 1 & = & 2I_A + B_A - 2 + \dfrac{1}{2}(h+1) & (V_B = h+1) \\
\Rightarrow & I_T + \dfrac{1}{2}B_T - 1 & = & 2(a(A)) + \dfrac{1}{2}(h+1) &
\end{array}$$

Pero, $\frac{1}{2}a(T) = a(A) = a(B)$ así,

$$I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 = a(T) + \frac{1}{2}(h+1) \qquad \Rightarrow \qquad a(T) = a(T) + \frac{1}{2}(h+1)$$

Pero, $h > 0$ entonces esto es una contradicción. Por lo tanto,T no puede tener sus vértices en puntos de red y ser equilátero.

6. Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$ y M la clase de todos los subconjuntos de A. (Son en número de 32 contando el mismo A y el conjunto vacio $\emptyset$.) Para cada conjunto S de M, representemos con $n(S)$ el número de elemento distintos de S. Si $S = \{1,2,3,4\}$ y $T = \{3,4,5\}$, calcular $n(S \cup T)$, $n(S \cup T)$, $n(S - T)$ y $n(T_S)$. Demostrar que la función de conjunto n satisface los tres primeros axiomas del área.

Demostración.- Calculemos,

$$\begin{array}{rcrcl}
n(S \cup T) & = & n\left(\{1,2,3,4,5\}\right) & = & 5 \\
n(S \cap T) & = & n\left(\{3,4\}\right) & = & 2 \\
 & = & n\left(\{1,2\}\right) & = & 2 \\
 & = & n\left(\{5\}\right) & = & 1
\end{array}$$

Ahora demostremos que esto satisface los primeros tres axiomas de área.
Axioma 1. (Propiedad no negativa) Esto se satisface para cualquier conjunto, S ya que el número de elementos distintos en un conjunto no es negativo. Entonces, $n(S) \geq 0$ para todos S.
Axioma 2. (Propiedad aditiva) Primero, si $S, T \in\ mathcal M$, luego $S \subseteq A$, $T \subseteq A$ por definición de $\mathcal{M}$.
Entonces, para cualquiera $x \in S$ que tengamos $x \in A$ y para cualquiera $y \in T$, tenemos $y \in A$.
Así, si $x \in S \cup T$, entonces $x \in A$; por lo tanto $S \cup T \subseteq A$, entonces $S \cup T \in \mathcal{M}$.
Entonces, $S \cap T \subseteq S$ implica $S \cap T \subseteq A$ (desde $S \subseteq A$). Por lo tanto, $S \cap T \in \mathcal{M}$.
Entonces, para cualquiera $S, T \in \mathcal{M}$ que tengamos $S \cup T \in \mathcal{M}$, $S \cap T \in \mathcal{M}$.
Luego, debemos mostrar $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$. Para cualquier $x \in S \cup T$ tenemos $x \in S$, $x \in T$, ó $x \in S$ y T. Entonces, esto significa $x \in (S - T)$, ó $x \in (T - S)$ ó $x \in (S \cap T)$. Por lo tanto,

$$n(S \cup T) = n(S - T) + n(T - S) + n(S \cap T)$$

Del mismo modo observamos,

$$\begin{array}{rcl}
n(S) = (S - T) + n(S \cap T) & \Rightarrow & n(S - T) = n(S) - s(S \cap T) \\
n(T) = n(T - S) + n(T \cap S) & \Rightarrow & n(T - S) = n(T) - n(S \cap T)
\end{array}$$

Así que,

$$\begin{array}{rcl}
n(S \cup T) & = & n(S) - n(S \cap T) + n(T) - n(S \cap T) + n(S \cap T) \\
 & = & n(S) + n(T) - n(S \cap T)
\end{array}$$

Axioma 3 (Propiedades de la diferencia). Si $S, T \in \mathcal{M}$ y $S \subseteq T$, entonces desde arriba tenemos

$$n(T - S) = n(T) - n(T \cap S)$$

Pero porque $S \subseteq T$ sabemos $T \cap S = S$, entonces,

$$n(T - S) = n(T) - n(S)$$

1.8. Intervalos y conjuntos ordenados

Definición 1.5 (Intervalo cerrado). Si $a < b$, se indica por $[a, b]$ el conjunto de todos los x que satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq b$.

Definición 1.6 (Intervalo abierto). El intervalo abierto correspondiente, indicado por (a, b) es el conjunto de todos los x que satisfacen $a < x < b$

El intervalo abierto (a, b) se denomina también el interior de $[a, b]$

Definición 1.7 (Intervalo semiabiertos). Los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ que incluyen sólo un extremo están definidos por las desigualdades $a < x \leq b$ y $a \leq x < b$, respectivamente.

1.9. Particiones y funciones escalonadas

Definición 1.8. Un conjunto de puntos que satisfaga

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$$

se denomina una partición P de $[a, b]$, y se utiliza el símbolo:

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

para designar tal partición, la partición P determina n subinterválos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

Definición 1.9 (Definición de función escalonada)**.** Una función s cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a,b]$ se dice que es una función escalonada, si existe una partición $P = \{x_o, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$ tal que s es constante en cada subintervalo abierto de P. Es decir, para cada $k = 1, 2, ..., n$ existe un número real S_k tal que:

$$s(x) = s_K \qquad si \qquad x_{k-1} < x < x_k$$

A veces las funciones escalonadas se llaman funciones constantes a trozos.

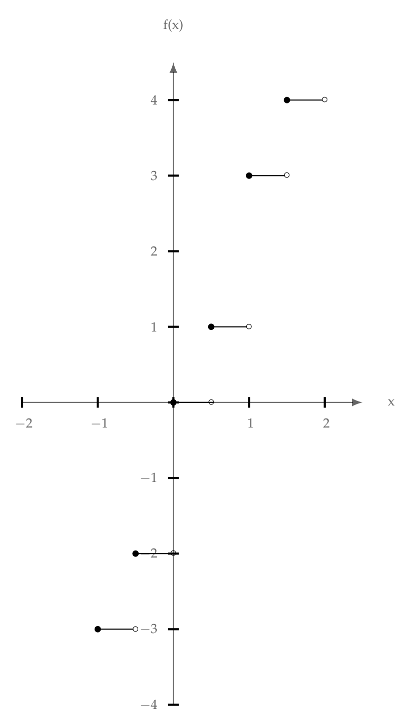
1.11. Ejercicios

En este conjunto de Ejercicios, $[x]$ representa el mayor entero $\leq x_i$ es decir, la parte entera de x.

1. Sean $f(x) = [x]$ y $g(x) = [2x]$ para todo real x. En cada caso, dibujar la gráfica de la función h definida en el intervalo $[-1, 2]$ por la fórmula que se da.

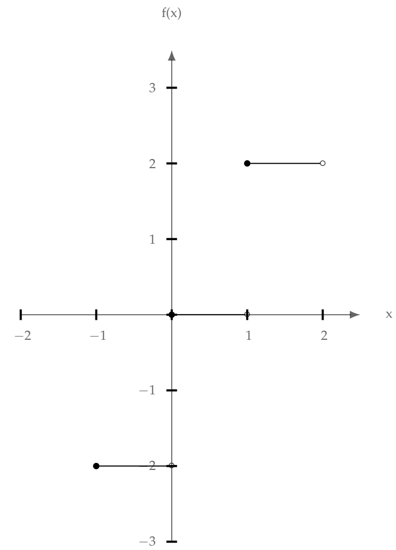
(a) $h(x) = f(x) + g(x)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] + [2x]$



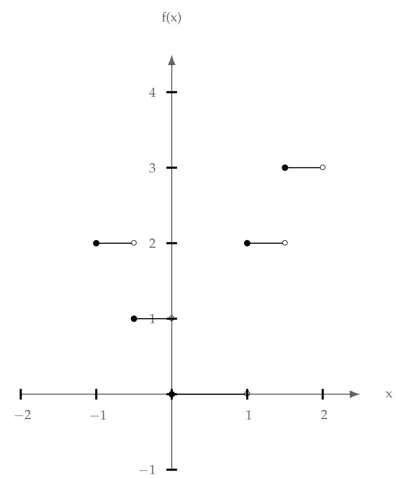
(b) $h(x) = f(x) + g(x/2)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] + [x] = 2[x]$



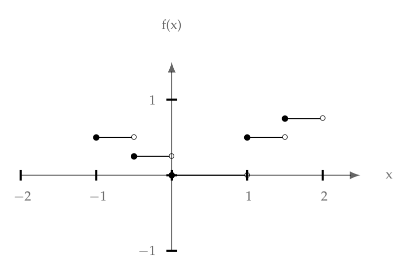
(c) $h(x) = f(x)g(x)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] \cdot [2x]$



(d) $h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g(x/2)$.

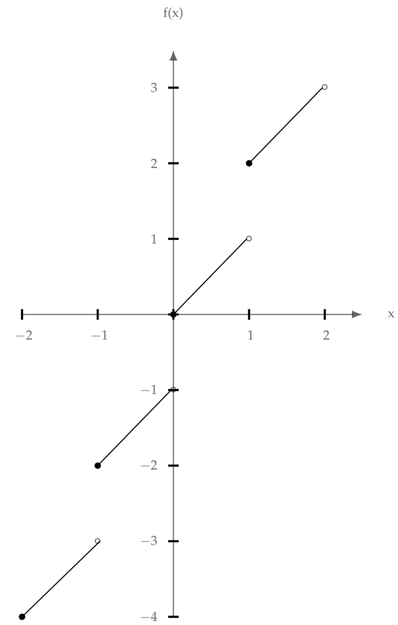
Respuesta.- $\frac{1}{4}[x][2x]$



2. En cada uno de los casos, f representa una función definida en el intervalo $[-2, 2]$ por la fórmula que se indica. Dibújense las gráficas correspondientes a cada una de las funciones f. Si f es una función escalonada, encontrar la partición P de $[-2, 2]$ tal que f es constante en los subintervalos abierto de P.

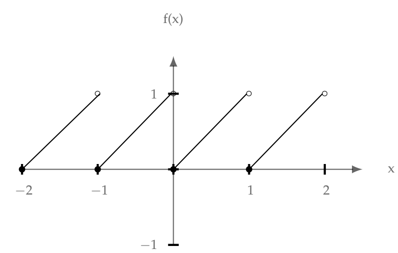
(a) $f(x) = x + [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



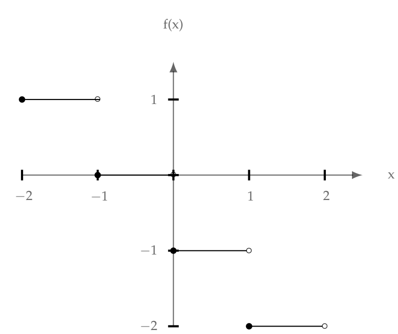
(b) $f(x) = x - [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



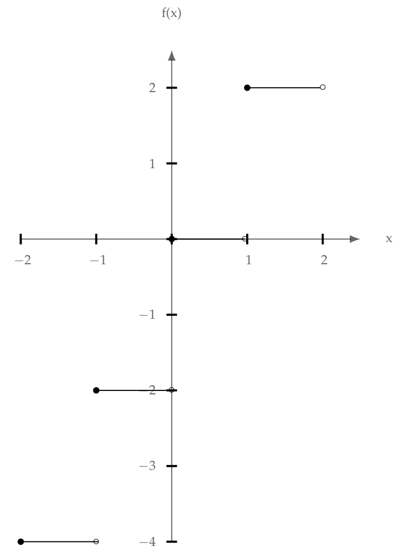
(c) $f(x) = [-x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



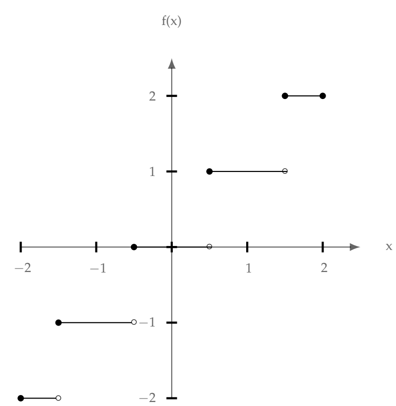
(d) $f(x) = 2[x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



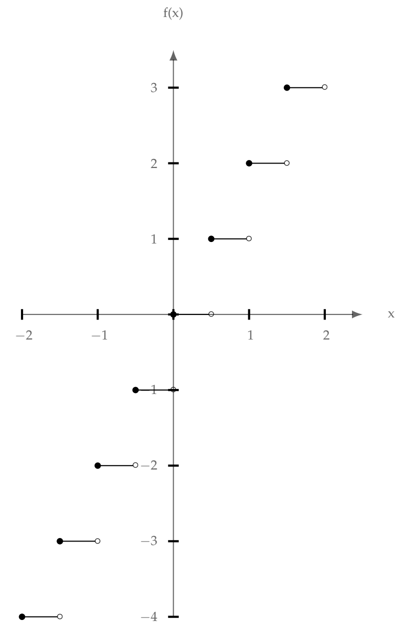
(e) $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 2\}$



(f) $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

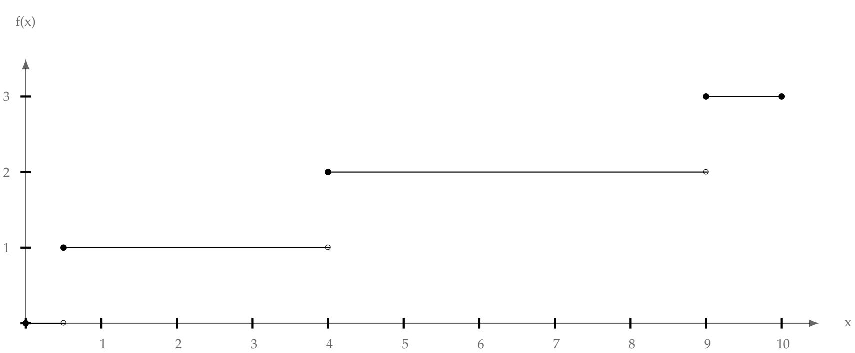
Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de los partición, $P = \{-2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$



3. En cada caso, dibujar la gráfica de la función definida por la fórmula que se da.

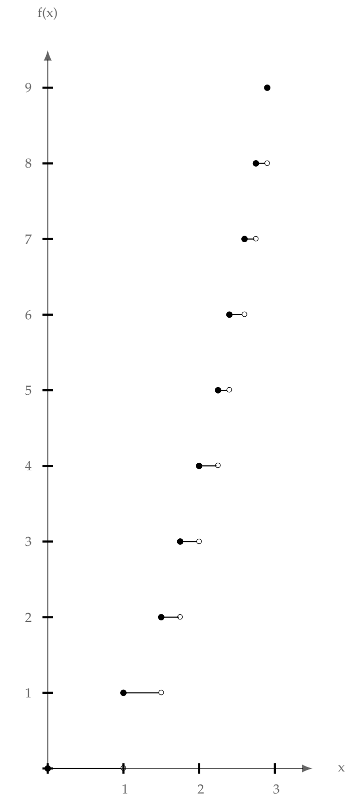
(a) $f(x) = [\sqrt{x}]$ para $0 \leq x \leq 10$

Respuesta.-



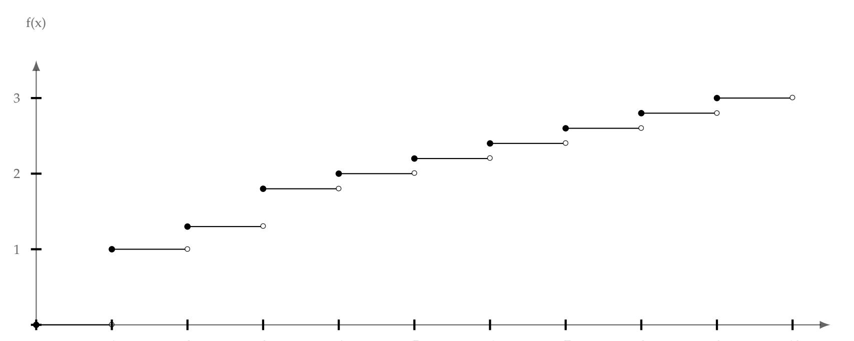
(b) $f(x) = [x^2]$

Respuesta.-



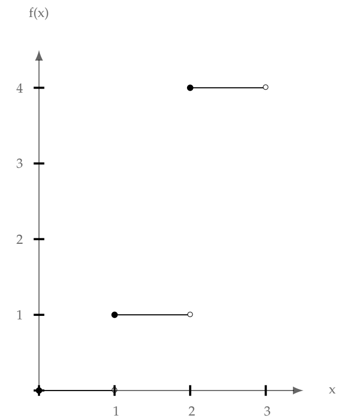
(c) $f(x) = \sqrt{[x]}$ para $0 \leq x \leq 10$.

Respuesta.-



(d) $f(x) = [x]^2$ para $0 \leq x \leq 3$.

Respuesta.-



4. demostrar que la función parte entera tiene las propiedades que se indican:

(a) $[x+n]=[x]+n$ para cada entero n.

Demostración.- Por definición sea $[x+n]=m$ para $m\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rcl} m\leq x+n<m+1 & \Longrightarrow & m-1\leq x<m-n+1 \\ & \Longrightarrow & [x]=m-n \\ & \Longrightarrow & [x]+n=m \end{array}$$

(b) $[-x]=\left\{\begin{array}{ll} -[x] & si\ x\ es\ entero \\ -[x]-1 & en\ otro\ caso \end{array}\right.$

Demostración.- Si $x\in\mathbb{Z}$, entonces $x=n$ para algunos $n\in\mathbb{Z}$. Por tanto, $[x]=n$, luego

$$-x=-n\Longrightarrow[-x]=-n\Longrightarrow[-x]=-[x]$$

Por otro lado, si $x\neq\mathbb{Z}$, entonces $[x]=n$. Luego

$$n\leq x<n+1\Longrightarrow -n-1<-x<n \text{ ya que } n\neq x\Longrightarrow[-x]=-n-1=-[x]-1$$

(c) $[x+y]=[x]+[y]$ ó $[x]+[y]+1$

Demostración.- Sea $[x]=m$ y $[y]=n$, luego,

$$m\leq x<m+1 \qquad y \qquad n\leq y<n+1$$

Entonces, sumando obtenemos

$$m+n\leq x+y<m+n+2$$

por lo tanto

$$[x+y]=m+n=[x]+[y] \qquad o \qquad [x+y]=m+n+1=[x]+[y]+1$$

Esto ya que si $x+y$ está entre $m+n$ y $m+n+1$ entonces $[x+y]=[x]+[y]+1$ y cuando $x+y$ está entre $m+n+1$ y $m+n+2$ entonces $[x+y]=[x]+[y]+1$.

(d) $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}$

Demostración.- Por la parte (c)

$$[2x] = [x+x] = [x] + [x] \qquad [x] + [x] + 1$$

Para $[2x] = [x] + [x]$, sea $[x] = n$, entonces

$$\begin{aligned} [2x] = 2n \quad &\Longrightarrow \quad 2n \leq 2x \leq 2n+1 \\ &\Longrightarrow \quad n \leq x < n + \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \quad n \leq x + \frac{1}{2} < n+1 \\ &\Longrightarrow \quad \left[x + \frac{1}{2}\right] = n \end{aligned}$$

de donde, $[2x] = 2n = n + n = [x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$

Por otro lado, para $[2x] = [x] + [x] + 1$, sea $[x] = n$, entonces:

$$\begin{aligned} [2x] = 2n+1 \quad &\Longrightarrow \quad 2n+1 \leq 2n+2 \\ &\Longrightarrow \quad n + \frac{1}{2} \leq x < n+1 \\ &\Longrightarrow \quad n+1 \leq x + \frac{1}{2} < n+2 \\ &\Longrightarrow \quad \left[x + \frac{1}{2}\right] = \text{n+1} \end{aligned}$$

de donde $[2x] = n + n + 1 = [x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$

(e) $[3x] = [x] + [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{2}{3}]$

Demostración.- Por la parte (c) tenemos

$[3x] = [x+x+x] = [x+x] + [x] \qquad [x+x] + [x] + 1 \qquad y \qquad [x+x] = [x] + [x] \qquad [x] + [x] + 1$

de donde al juntarlos obtenemos:

$$[3x] = [x] + [x] + [x] \qquad [x] + [x] + [X] + 1 \qquad [x] + [x] + [x] + 2$$

Para $3x = [x] + [x] + [x]$ sea $[x] = n$ entonces

$$\begin{aligned} 3n \leq 3x < 3x + 1 \quad &\Longrightarrow \quad n \leq x < n + \frac{1}{3} \\ &\Longrightarrow \quad n \leq x + \frac{1}{3} < n+1 \qquad y \qquad n \leq x + \frac{2}{3} < n+1 \\ &\Longrightarrow \quad [x] = \left[x + \frac{1}{3}\right] = \left[x + \frac{2}{3}\right] = n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[x] = 3n = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$

Luego para $[3x] = [x] + [x] + [x] + 1$ sea $[x] = n$ entonces,

$$
\begin{aligned}
3n + 1 \leq 3x < 3n + 1 \quad &\Longrightarrow \quad n + \frac{1}{3} \leq x < n + \frac{2}{3} \\
&\Longrightarrow \quad n + \frac{1}{3} \leq x + \frac{1}{3} < n + 1 \quad \Rightarrow \quad \left[x + \frac{1}{3}\right] = n \\
\text{y} \quad &\Longrightarrow \quad n + 1 \leq x + \frac{2}{3} < n + 2 \quad \Rightarrow \quad \left[x + \frac{2}{3}\quad\right] = n + 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $[3x] = 3n + 1 \quad \Longrightarrow \quad [3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$

Finalmente, para $[3x] = [x] + [x] + [x] + 2$ sea $[x] = n$ entonces

$$
\begin{aligned}
3x + 2 \leq 3x < 3x + 3 \quad &\Longrightarrow \quad n + \frac{2}{3} \leq x < n + 1 \\
&\Longrightarrow \quad n + 1 \leq x + \frac{1}{3} < n + 2 \qquad y \qquad n + 1 \leq x + \frac{2}{3} < n + 2
\end{aligned}
$$

Así que $[3x] = 3n + 2 = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$

5. Las fórmulas de los Ejercicios $4(d)$ y $4(c)$ sugieren una generalización para $[nx]$. Establecer y demostrar una generalización.

Demostración.- Se puede afirmar que:

$$[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right],$$

luego sea $[x] = m$, entonces

$$m \leq x < m + 1 \quad \Longrightarrow \quad nm \leq nx < nm + n$$

Por lo tanto existen algunos $j \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq j < n$ tales que

$$nm + j \leq nx < nm + j + 1$$

ya que sabemos que para cualquier número nx está entre k y $k+1$ para un entero. Pero como $nm \leq nx$ es un número entero k donde está en algún lugar entre nm y nx, lo que significa que es $nm + j$ para algún número entero j. Entonces tenemos que nx está entre $nm + j$ y $nm + j + 1$: Básicamente, solo decimos que conocemos $k \leq nx < k + 1$ para algún entero k. Pero es mas conveniente escribirlo como $nm + j \leq nx > nm + j + 1$.

Luego, $[nx] = nm + j$. y por lo tanto,

$$m + \frac{j}{n} \leq x < m + \frac{j+1}{n}$$

para cada $k \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq k < n - j$ tenemos

$$\begin{array}{llll} & m+\dfrac{k+k}{n} \leq x+\dfrac{k}{n} < m+\dfrac{j+k+1}{n} & & \text{sumando } \dfrac{k}{n} \\ \Longrightarrow & m \leq x+\dfrac{k}{n} < m+1 & & \dfrac{j+k}{n} < 1 \text{ ya que } k < n-j \\ \Longrightarrow & \left[x+\dfrac{k}{n} = m = [x]\right] & & \text{para } 0 \leq k < n-j \end{array}$$

por otro lado $n-j \leq k < n$, entonces

$$\begin{array}{llll} & m+\dfrac{k+k}{n} \leq x+\dfrac{k}{n} < m+\dfrac{j+k+1}{n} & & \\ \Longrightarrow & m+1 \leq x+\dfrac{k}{n} < m+2 & & \dfrac{j+k}{n} \geq 1 \text{ ya que } n-j \leq k \\ \Longrightarrow & \left[x+\dfrac{k}{n} = m+1 = [x]+1\right] & & \text{para } n-j \leq k < n \end{array}$$

Así que

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[x+\dfrac{k}{n}\right] & = & \sum\limits_{k=0}^{n-j-1}\left[x+\dfrac{k}{n}\right]+\sum\limits_{k=n-j}^{n-1}\left[x+\dfrac{k}{n}\right] \\ & = & (n-j)[x]+j([x]+1) \\ & = & n[x]+j \\ & = & nm+j \\ & = & [nx] \end{array}$$

6. Recuérdese que un punto de red (x,y) en el plano es aquel cuyas coordenadas son enteras. Sea f una función no negativa cuyo dominio es el intervalo $[a,b]$, donde a y b son enteros, $a<b$. Sea S el conjunto de puntos (x,y) que satisfacen $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq f(x)$. Demostrar que el número de puntos de la red pertenecientes a S es igual a la suma

$$\sum_{n=a}^{b}[f(n)]$$

Demostración.- Sea $n \in \mathbb{Z}$ con $a \leq n < b$: Sabemos que tal n existe desde $a,b \in \mathbb{Z}$ con $a<b$. Entonces, el número de puntos de red S con el primer elemento n es el número de enteros y tales que $0 < y \leq f(n)$. Pero, por definición, esto es $[f(n)]$ Sumando todos los números enteros n. $a \leq n \leq b$ tenemos,

$$S=\sum_{n=a}^{b}[f(n)]$$

7. Si a y b son enteros positivos primos entre sí, se tiene la fórmula

$$\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Se supone que para $b = 1$ la suma del primer miembro es 0.

(a) Dedúzcase este resultado analíticamente contando los puntos de la red en un triángulo rectángulo.

Respuesta.- Sabemos por el ejercicio anterior que

$$\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right]$$

(puntos de red de un triángulo rectángulo con base b y altura a). Ademas del ejercicio $1.7n4$ sabemos que

$$a(T) = I_t + \frac{1}{2}B_T - 1$$

donde I_T es el número de puntos de red interior y B_T es el número de puntos de red límite. También sabemos por la fórmula del área de un triángulo rectángulo que

$$a(T) = \frac{1}{2}(ab)$$

por lo tanto tenemos

$$I = \sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right] = \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}B_T + 1$$

Luego para calcular B_T notamos que no hay puntos límite en la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo ya que a y b no tienen un factor común. Esto se deduce ya que si no fuera tal punto a continuación, $\dfrac{na}{b} \in \mathbb{Z}$ para algunos $n < b$, tendríamos que a divide a b, lo que contradice que no tienen ningún factor común. Por lo tanto $B_T = a + b + 1$, de donde,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right] &= \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}(a+b+1) + 1 \\
&= \frac{1}{2}(ab - a - b + 1) \\
&= \frac{1}{2}(a-1)(b-1)
\end{aligned}$$

(b) Dedúzcase este resultado analíticamente de la manera siguiente. Cambiando el índice de sumación, obsérvese que $\sum_{a=1}^{b-1}[na/b] = \sum_{n=1}^{b-1}[a(b-n)/b]$. Aplíquese luego los ejercicios $4(a)$ y (b) al corchete de la derecha.

Respuesta.- Sea

$$\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right] = \sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{a(b-n}{b}\right]$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{a(b-n)}{b}\right] &= \sum_{n=1}^{b-1}[a] - \sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right] - \sum_{n=1}^{b-1} 1 \\
\Longrightarrow \quad 2\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{a(b-n}{b}\right] &= \sum_{n=1}^{b-1} - \sum_{n=1}^{b-1} = (b-1)a - (b-1) \\
\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right] &= \frac{1}{2}(a-1)(b-1)
\end{aligned}$$

8. Sea S un conjunto de puntos en la recta real. La función característica de S es, por definición, la función $Xs(x) = 1$ para todo x de S y $Xs(x) = 0$ para aquellos puntos que o pertenecen a S. Sea f una función escalonada que toma el valor constante c_k en el k-simo subintervalo I_k de una cierta partición de un intervalo $[a, b]$. Demostrar que para cada x de la reunión $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ se tiene

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_{I_k}(x)$$

Esta propiedad se expresa diciendo que toda función escalonada es una combinación lineal de funciones características del intervalos.

Demostración.- Definimos una función característica, Xs, en un conjunto S de puntos en $\mathbf{R}$ por

$$Xs(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in S \\ \\ 0 & si \quad x \notin S \end{cases}$$

Primero, observemos que los subintervalos abiertos de alguna partición de $[a, b]$ son necesariamente disjuntos desde $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \quad \Longrightarrow \quad x_0 < x_1 < ... < x_n$. Por lo tanto si $x \in I_1 \cup ... \cup I_n$ entonces $x \in I_j$ exactamente por uno $j, 1 \leq j \leq n$. Por lo tanto,

$$XIs(x) = \begin{cases} 1 & si \quad xj = k \\ \\ 0 & si \quad j \neq k \end{cases}$$

para todos $1 \leq k \leq n$ y para cualquiera x. Además, por definición de f, sabemos $f(x) = c_k$ si $x \in I_k$,. Así que,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k XI_k(x) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + ... + c_k \cdot 1 + ... + c_n \cdot 0 = c_k = f(x)$$

para cada $x \in I_i \cup ... \cup I_n$

1.12. Definición de integral para funciones escalonadas

Definición 1.10 (Definición de integral de funciones escalonadas)**.** La integral de s de a a b, que se designa por el símbolo $\int_a^b s(x)dx$, se define mediante la siguiente fórmula:

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Es decir, para obtener el valor de la integra, se multiplica cada valor s_k constante, por la longitud de intervalo $k - simo$ correspondiente, formando el producto $s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ y se suman luego todos los productos obtenidos.

Definición 1.11. Si x es constante en el intervalo abierto (a, b), es decir, $s(x) = c$ si $a < x < b$, se tiene entonces:

$$\int_a^b s(x)dx = c \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = c(b - a)$$

1.13. Propiedades de la integral de una función escalonada

Teorema 1.2 (Propiedad aditiva). $\int_a^b [s(x) + t(x)]dx = \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)dx$

Teorema 1.3 (Propiedad Homogénea). $\int_a^b c \cdot s(x)dx = c \int_a^b s(x)dx$

Demostración.- Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que s es constante en los subintervalos abiertos de P. Sea $s(x) = s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ para $k = 1, 2, ..., n$. Entonces, $c \cdot s(x) = c \cdot s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$, y por tanto en virtud de la definición de integral se tiene

$$\int_a^b c \cdot s(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} c \cdot s_k(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{n} s_k(x_k - x_{k-1}) = c \cdot \int_a^b s(x)\ dx$$

Teorema 1.4 (Propiedad de la linealidad). $\int_a^b [c_1 x(x) + c_2 t(x)]dx = c_1 \int_a^b s(x)dx + c_2 \int_a^b dx$

Teorema 1.5 (Teorema de comparación). Si $s(x) < t(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces $\int_a^b s(x)dx = \int_a^b t(x)dx$

Teorema 1.6 (Aditividad respecto al intervalo de integración). $\int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx = \int_a^b s(x)dx$ si $a < c < b$

Teorema 1.7 (Invariancia frente a una traslación). $\int_a^b s(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x - c)dx$ para todo real c

Teorema 1.8 (Dilatación o contracción del intervalo de integración). $\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx$ para todo $k > 0$

Es conveniente considerar integrales con el límite inferior mayor que el superior. Esto se logra definiendo:

$$\int_a^b s(x)dx = -\int_a^b s(x)dx \qquad a < b$$

Demostración.- Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ tal que s es constante en los subintervalos abiertos de P. Supóngase que $s(x) = s_i$ si $x_{i-1} < x < x_i$. Sea $t(x) = s(x/k)$ si $ka < x < kb$. Entonces $t(x) = s_i$ si x pertenece al intervalo abierto (kx_{i-1}, kx_i);, por tanto $P' = \{kx_0, kx_1, ..., kx_n\}$ es una partición de $[ka, kb]$ y t es constante en los subintervalos abiertos de $P^{'}$. Por tanto t es una función escalonada cuya integral es:

$$\int_{ka}^{kb} t(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} s_i \cdot (kx_1 - kx_{i-1}) k \sum_{k=1}^{n} s_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = k \int_a^b s(x)\ dx$$

Propiedad de reflexión de la integral $\int_a^b s(x)dx = \int_{-b}^{-a} s(-x)dx$

1.15. Ejercicios

1. Calcular el valor de cada una de las siguientes integrales. Se pueden aplicar los teoremas dados en la Sección 1.13 siempre que convenga hacerlo. La notación $[x]$ indica la parte entera de x.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} [x]dx.$

Respuesta.- Sea $P = \{-1, 0, 1, 2\}$ ya que

$$[x] = \begin{cases} -1 & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & si \quad 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

entonces por definición $\displaystyle\int_{-1}^{3} [x]dx = -1 \cdot [0 - (-1)] + 0 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (2 - 1) + 2(3 - 2) = 2$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left[x + \frac{1}{2}\right] dx$

Respuesta.- La partición viene dada por $P = \{-1, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2\}$ ya que

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \begin{cases} -1 & si \quad -1 \leq x + 1/2 < 0 & \Longrightarrow & -3/2 \leq x < -1/2 \\ 0 & si \quad 0 \leq x + 1/2 < 1 & \Longrightarrow & -1/2 \leq x < 1/2 \\ 1 & si \quad 1 \leq x + 1/2 < 2 & \Longrightarrow & 1/2 \leq x < 3/2 \\ 2 & si \quad 2 \leq x + 1/2 < 3 & \Longrightarrow & 3/2 \leq x < 5/2 \\ 3 & si \quad 3 \leq x + 1/2 < 4 & \Longrightarrow & 5/2 \leq x < 7/2 \end{cases}$$

entonces por definición $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left[x + \frac{1}{2}\right] dx = -1\left(-\frac{1}{2} + 1\right) + 0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) +$ $\displaystyle 3\left(3 - \frac{5}{2}\right) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 4$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} ([x] + [x + 1/2])$

Respuesta.- Por la propiedad aditiva se tiene $\displaystyle\int_{-1}^{3} [x]dx + \int_{-1}^{3} \left[x + \frac{1}{2}\right] dx = 2 + 4 = 6.$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2[x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad homogénea se tiene $\displaystyle 2 \cdot \int_{-1}^{3} [x]dx = 2 \cdot 2 = 4$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{3} [2x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad de parte entera donde $[2x] = [x] + [x + frac12]$ y (c) resulta que

$$\int_{-1}^{3} [2x]dx = 6$$

(f) $\int_{-1}^{3} [-x]dx$

Respuesta.- Por propiedad de parte entera se tiene que $[-x] = -[x] - 1$ ya que el valor de los subintervalos no es entero, luego

$$\int_{-1}^{3} -[x] - 1 = \int_{-1}^{3} -[x] + \int_{-1}^{3} = -\int_{-1}^{3} [x] - \int_{-1}^{3} 1 = -2 - \{1 \cdot [3 - (-1)]\}$$

2. Dar un ejemplo de función escalonada s definida en el intervalo cerrado $[0, 5]$, que tenga las siguientes propiedades $\int_0^2 s(x)dx = 5$, $\int_0^5 s(x)dx = 2$

Respuesta.- Existen infinitas funciones escalonadas que deben cumplir lo siguiente:

$$\int_2^5 s(x)dx = \int_0^5 s(x)dx - \int_0^2 s(x)dx = -3$$

3. Probar que $\int_a^b [x]\ dx + \int_a^b [-x]\ dx = a - b$

Demostración.- Por propiedad de parte entera se tiene que $[-x] = -[x] - 1$ si x no es entero. Entonces $\int_a^b [x]\ dx + \int_a^b -[x] - 1\ dx$ luego por la propiedad aditiva $\int_a^b -1\ dx$, de donde por la propiedad dilatación $\int_b^a 1\ dx$ y por lo tanto $a - b$.

4. **(a)** Si n es un entero positivo, demostrar que $\int_0^n [t]\ dt = n(n-1)/2$.

Demostración.- Según la definición de la función de número entero mayor, $[t]$ es constante en los subintervalos abiertos, por lo que $[t] = k - 1$ si $k - 1 < t < k$ entonces

$$\int_0^n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)(k-(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)$$

Luego sabemos que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ por lo tanto $\int_0^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

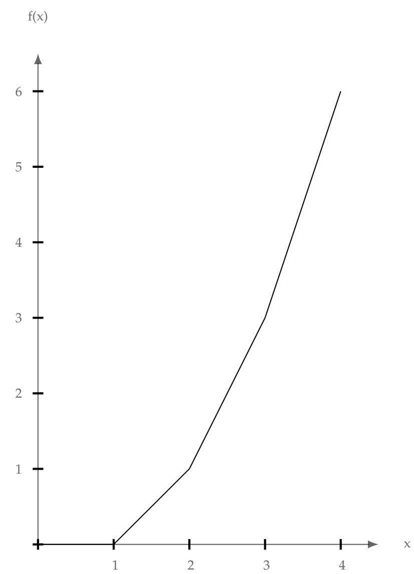
También se podría demostrar de la siguiente manera.

$$\int_0^n [t]\ dt = 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (2-1) + ... + (n-1) \cdot (n-(n-1)) = 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(b) Si $f(x) = \int_0^x [t]\ dt$ para $x \geq 0$, dibujar la gráfica de f sobre el intervalo $[0, 4]$.

Respuesta.- Ya que $x \in \mathbf{R}^+$ la gráfica será continua, pero por motivos prácticos dibujemos puntos en los números enteros del intervalo $[0, 4]$

- $f(0) = \int_0^0 [t]\, dt = 0(0-0) = 0$
- $f(1) = \int_0^1 [t]\, dt = 0(1-0) = 0$
- $f(2) = \int_0^2 [t]\, dt = 0(1-0) + 1(2-1) = 1$
- $f(3) = \int_0^3 [t]\, dt = 0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) = 3$
- $f(4) = \int_0^4 [t]\, dt = 0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) + 3(4-3) = 6$



5. **(a)** Demostrar que $\int_0^2 [t^2]\, dt = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Demostración.-

$$\left[t^2\right] = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le t^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & si \quad 1 \le t^2 < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \le t < \sqrt{2} \\ 2 & si \quad 2 \le t^2 < 3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \le t < \sqrt{3} \\ 3 & si \quad 3 \le t^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} \le t < 2 \end{cases}$$

Vemos que la partición esta dada por $P = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$ y por lo tanto:

$$\int_0^2 \left[t^2\right]\, dt = \sum_{k=1}^{5} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0(1-0) + 1(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 3(2-\sqrt{3}) = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

(b) Calcular $\int_{-3}^{3} \left[t^2\right]\, dt$

Respuesta.- Sea $\int_{-3}^{3}[t^2]\ dx = \int_{0}^{3}[t^2]\ dx + \int_{-3}^{0}[t^2]\ dx = \int_{0}^{3}[t^2]\ dx + \int_{0}^{3}[(-t)^2]\ dx = 2\int_{0}^{3}[t^2]\ dx$ entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3}\left[t^2\right]\ dt &= 2\cdot\int_{0}^{3}\left[t^2\right]\ dt \\
&= 2\cdot\left(\int_{0}^{2}\left[t^2\right]\ dt + \int_{2}^{3}\left[t^2\right]\ dt\right) \\
&= 2\cdot\left(5-\sqrt{2}-\sqrt{3}+4(\sqrt{5}-2)+5(\sqrt{6}-\sqrt{5})+6(\sqrt{7}-\sqrt{6})+7(\sqrt{8}-\sqrt{7})+8(3-\sqrt{8})\right) \\
&= 2\left(21-3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)
\end{aligned}$$

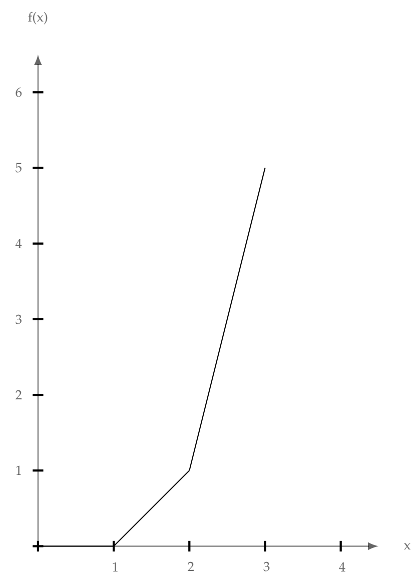
6. (a) Si n es un entero positivo demostrar que $\int_{0}^{n}[t]^2/;dt = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

Demostración.- Sea $P = \{0,1,...,n\}$. Entonces P es una partición de $[0,n]$ y $[t]^2$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Ademas, $[t]^2 = (k-1)^2$ para $k-1 < t < k$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{n}[t]^2\ dt &= \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\cdot(k-(k-1)) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \\
&= \sum_{n-1}^{k=0}k^2 \\
&= \frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}
\end{aligned}$$

(b) Si $f(x) = \int_{0}^{x}[t]^2\ dt$ para $x \geq 0$, dibujar la gráfica de f en el intervalo $[0,3]$.

Respuesta.-



(c) Hallar todos los valores de $x > 0$ para los que $\int_0^x [t]^2\, dt = 2(x-1)$

Respuesta.- Los valores son $x = 1, \frac{5}{2}$ ya que son los que se intersectan con $2(x-1)$.

7. (a) Calcular $\int_0^9 [\sqrt{t}]\, dt$.

Respuesta.-

$$[\sqrt{t}] = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq \sqrt{t} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq \sqrt{t} < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq t < 4 \\ 2 & si \quad 2 \leq \sqrt{t} < 3 \quad \Rightarrow \quad 4 \leq t < 9 \end{cases}$$

$$\int_0^9 \left[\sqrt{t}\right]\, dt = 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (4-1) + 2(9-4) = 13$$

(b) Si n es un entero positivo, demostrar que $\int_0^{n^2} \left[\sqrt{t}\right]\, dt = \dfrac{n(n-1)(4n+1)}{6}$

Demostración.- Sea $P = \{0, 1, 3, 9, ..., n^2\}$. Entonces P es una partición de $[0, n^2]$ y $\left[\sqrt{t}\right]$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Además, porque $(k-1)^2 < t < k^2$ tenemos $\left[\sqrt{t}\right] = (k-1)$. Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{n^2} \left[\sqrt{t}\right] \, dt &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)(k^2-(k-1)^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1)(2k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (2k^2-3k+1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{2n^3}{3} + n^2 + \frac{n}{3} - \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} + n \\
&= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}
\end{aligned}$$

8. Pruébese que la propiedad de traslación (teorema 1.7) se puede expresar en la forma siguiente.

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(x+c)\,dx$$

Demostración.- Sea $d = a+c$ y $e = b+c$ entonces por el teorema de invariancia frente a una traslación

$$\int_d^e f(x)\,dx = \int_{e+(-c)}^{d+(-c)} f(x-(-c))\,dx$$

para $-c \in \mathbb{R}$. Luego, $a = d-c$ y $b = c-e$ por lo tanto

$$\int_{b+c}^{a+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(x+c)\,dx$$

9. Probar que la propiedad siguiente es equivalente al teorema 1.8

$$\int_{ka}^{kb} f(x)\,dx = k\int_a^b f(kx)\,dx$$

Demostración.- Sea $\displaystyle\int_a^b f\left(\frac{x}{j}\right)\,dx$, por el teorema tenemos que para cualquier $j>0$ se tiene

$$\int_{b/j}^{a/j} f\left(j\frac{x}{j}\right)\,dx = \frac{1}{j}\int_a^b f\left(\frac{x}{j}\right)\,dx \quad \Rightarrow \quad j\int_{a/j}^{b/j} f(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{x}{j}\right)\,dx$$

Luego, si $j \in \mathbb{R}^+$ entonces $\dfrac{1}{j} \in \mathbb{R}^+$, de donde podemos aplicar el teorema como $k = \dfrac{1}{j}$:

$$\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)\,dx = \int_a^b \quad \Rightarrow \quad k\int_a^b f(kx)\,dx = \int_{ka}^{kb} f(x)\,dx$$

10. Dado un entero positivo p. Una función escalonada s está definida en el intervalo $[0,p]$ como sigue $s(x) = (-1)^n n$ si x está en el intervalo $n \leq x < n+1$ siendo $n = 0,1,2,...,p-1$; $s(p) = 0$. Póngase $f(p) = \int_0^p s(x)\, dx$.

(a) Calcular $f(3), f(4)$ y $f(f(3))$.

Respuesta.- Sea

$$s(x) = \begin{cases} (-1)^n n & si \quad n \leq x < n+1,\ n = 0,1,...p-1 \\ \\ 0 & si \quad x = p \end{cases}$$

Entonces calculamos para $f(x) = \int_0^p s(x)\, dx$:

$$\begin{array}{rcccccc} f(3) & = & \int_0^3 s(x)\, dx & = & (-1)^0 0(1-0) + (-1)\cdot 1\cdot(2-1) + (-1)^2 2(3-2) & = & 1 \\ f(4) & = & \int_0^4 s(x)\, dx & = & \int_0^3 s(x)\, dx + \int_3^4 s(x)\, dx = 1 + (-1)^3 3(4-3) & = & -2 \\ f(f(3)) & = & f(1) & = & \int_0^1 s(x)\, dx = (-1)^0 0(1-0) & = & 0 \end{array}$$

(b) ¿Para qué valor o valores de p es $|f(p)| = 7$?

Respuesta.- Luego de completarlo por un bucle llegamos a la conclusión de que los números que cumplen la condición dada son $14, 15$.

11. Si en lugar de definir la integral de una función escalonada utilizando la fórmula (1.3) se tomara como definición:

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} s_k^3 \cdot (x_k - x^{k-1})$$

se tendría una nueva teoría de la integración distinta de la dada. ¿Cuáles de las siguientes propiedades seguirán siendo válidas en la nueva teoría?

(a) $\int_a^b s + \int_b^c s = \int_a^c s.$

Respuesta.- Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_m\}$ una partición de $[a,b]$ y $P_2 = \{y_0, ..., y_n\}$ sea una partición de $[b,c]$ tal que $s(x)$ sea constante en los intervalos abiertos de P_1 y P_2, entonces, $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, ..., x_m, x_{m+1}, ..., xm+n\}$ de donde $x_m = y_0,\ x_{m+1} = y_1,\ x_{m+n} = y_n$, así P es una partición de $[a,c]$ y $s(x)$ es constante en los intervalos abiertos de P. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_a^c \, dx + \int_c^b s(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{m} s_k^3(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} s_k^3(y_k - y_{k-1}) \qquad def \ de \int_a^b s \\
&= \sum_{k=1}^{m} s_k^3(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{n+m} s_k^3(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m+n} s_k^3(x_k - x_{k-1}) \\
&= \int_a^c s(x)\, dx
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$

Respuesta.- Sea $\displaystyle\int_0^1 \,(s(x)+t(x))\, \, dx = 2^3(1-0) = 8$, por otro lado

$$\int_0^1 s(x)\, dx = \int_0^1 t(x)\, dx = 1(1-1) + 1(1-1) = 2$$

por lo tanto no se cumple la definición para esta propiedad.

(c) $\displaystyle\int_a^b c \cdot s = c \int_a^b s$

Respuesta.- Sea $s(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ y $c = 2$ entonces

$$n_0^1 s(x)\, dx = 2^3 = 2$$

, por otro lado

$$c \cdot \int_0^1 s(x)\, dx = 2 \cdot 1 = 2$$

por lo tanto es falso para esta propiedad.

(d) $\displaystyle\int_{a+c}^{b+c} s(x)\, dx = \int_a^b s(x+c)\, dx$

Respuesta.- Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $s(x))s_k$ en el que k es el subintervalo abierto de P. Luego,

$$P = \{x_o + c.x_1 + c, ..., x_n + c\}$$

es una partición de $[a+c, b+c]$ y $s(x-c) = x_k$ sobre $x_{k-1} + c < x < s_k + c$ entonces:

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} s_k^3(x_k - x_{k-1}) \qquad y \qquad \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\, dx = \sum_{k=1}^{n} s_k^3(x_k - x_{k-1})$$

por lo tanto

$$\int_a^b s(x)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\, dx$$

(e) Si $s(x) < t(x)$ para cada x en $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b s < \int_a^b t$.

Respuesta.- Como $s(x) < t(x)$ entonces $s(x)^3 < t(x)^3$ de donde el resultado se sigue inmediatamente.

12. Resolver el ejercicio 11 utilizando la definición

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k^2 - x_{k-1}^2)$$

(a) $\displaystyle\int_a^b s + \int_b^c s = \int_a^c s.$

Respuesta.- Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_m\}$ una partición de $[a,b]$ y $P_2 = \{y_0, ..., y_n\}$ sea una partición de $[b,c]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P_1 y P_2. Entonces $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+n}\}$ donde $x_m = y_0, x_{m+1} = y_1, x_{m+n} = y_n$, así P es un partición de $[a,c]$ y $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Luego,

$$\begin{array}{rcl}
\int_a^b s(x)\,dx + \int_b^a s(x)\,dx & = & \sum\limits_{k=1}^{m} s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) + \sum\limits_{k=1}^{n} s_k(y_k^2 - y_{k-1}^2) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{m} s_k(s_k^2 - x_{k-1}^2) + \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} x_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{m+n} x_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
& = & \displaystyle\int_a^c s(x)\,dx
\end{array}$$

(b) $\displaystyle\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$

Respuesta.- Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ partición del intervalo $[a,b]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Supongamos que $s(x) + t(x) = s_k + t_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ para $k = 1, 2, ...n$. Luego,

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_a^b s(x) + t(x)\,dx & = & \sum\limits_{k=1}^{n} (s_k + t_k)(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) + t_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) + \sum\limits_{k=1}^{n} t_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
& = & \displaystyle\int_a^b s(x)\,dx + \int_a^b t(x)\,dx
\end{array}$$

(c) $\displaystyle\int_a^b c \cdot s = c\int_a^b s$

Respuesta.- Sea $P = \{x_0, ...x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Suponga que $s(x) = s_k$ si $x_{k-1} < x < s_k$ para $k = 1, 2, ...n$, entonces $c \cdot s(x) = c \cdot s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ de donde

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} c\cdot s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2)\\
&= c\cdot\sum_{k=1}^{n} s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2)\\
&= c\cdot\int_a^b s(x)\,dx
\end{aligned}$$

(d) $\int_a^b c\cdot s = c\int_a^b s$

Respuesta.- En particular se da un contraejemplo dejando $s(x) = 1$ para todo $x \in [1,2]$ y $c = 1$ Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{0+1}^{1+1} x(x)\,dx &= 1\cdot(2^2 - 1^2) = 3\\
\int_0^1 (s+1)\,dx &= 1\cdot(1^2 - 0^2) = 1
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que es falso para dicha propiedad.

(e) Si $s(x) < t(x)$ para cada x en $[a,b]$, entonces $\int_a^b s < \int_a^b t$.

Respuesta.- Se da un contraejemplo considerando $s(x) = 0$ y $t(x) = 1$ en el intervalo $[-1,0]$. Luego $s < t$ en el intervalo, pero

$$\int_{-1}^{0} s(x)\,dx = 0 \not< \int_{-1}^{0} t(x)\,dx = 1\cdot(0^2 - (-1)^2) = -1$$

13. Demostrar el teorema 1.2 (Propiedad aditiva).

Demostración.- Sea $P = \{x_o, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$, tal que $s(x) + t(x)$ es constante en los intervalos abiertos de P. Sea $s(x) + (x) = s_k + t_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ para $k = 1, 2, ..., n$, luego

$$\begin{aligned}
\int_a^b [s(x) + t(x)]\,dx &= \sum_{k=1}^{n} (s_k + t_k)(x_{k-1} - x_k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} s_k(s_k + t_k) + t_k(s_k + t_k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} s_k(s_k + t_k) + \sum_{K=1}^{n} t_k(s_k + t_k)\\
&= \int_a^b s(x)\,dx + \int_a^b t(x)\,dx
\end{aligned}$$

14. Demostrar el teorema 1.4(Propiedad lineal).

Demostración.- Por el teorema 1.2 y 1.3 se tiene

$$\int_a^b [c_1 s(x) + c_2 t(x)]\ dx = \int_a^b c_1 s(x)\ dx + \int_a^b c_2 t(x)\ dx = c_1 \int_a^b s(x)\ dx + c_2 \int_a^b t(x)\ dx$$

15. Demostrar el teorema 1.5 (teorema de comparación).

Demostración.- Sea $P\{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $s(x)$ y $t(x)$ sean constantes en los subintervalos abiertos de P. Suponga que $s(x) = s_k$ y $t(x) = t_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ de donde por definición de función escalonada de integrales tenemos:

$$\int_a^b s(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} s_k(x_{k-1} - x_k) \qquad y \qquad \int_a^b t(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} t_k(x_{k-1} - x_k)$$

Luego $s_k < t_k$ para cada $x \in [a, b]$, lo que implica:

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(x_{k-1} - x_k) < \sum_{k=1}^{n} t_k(x_{k-1} - x_k) \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b s(x)\ dx < \int_a^b t(x)\ dx$$

16. Demostrar el teorema 1.6 aditividad con respecto al intervalo.

Demostración.- Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_m\}$ una partición de $[a, b]$ y $P_2 = \{y_o, ..., y_n\}$ sea una partición de $[c, b]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P_1 y P_2 luego $P = P_1 \cup P_2$ una partición de $[a, b]$ siendo $y_0 = x_m$, $y_1 = x_{m+1}, ..., y_n = x_{m+n}$ y $s(x)$ constante en los subintervalos abiertos de P, así

$$\begin{aligned}
\int_a^c s(x)\ dx \int_c^b s(x)\ dx &= \sum_{k=1}^{m} s_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} s_k(k_y - y_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} s_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{m+n} s_k(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} s_k(s_k - x_{k-1}) \\
&= \int_a^b s(x)\ dx
\end{aligned}$$

17. Demostrar el teorema 1.7 invariancia frente a una traslación.

Demostración.- Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición $[a, b]$ tal que $s(x) = s_k$ constante en el subintervalo abierto de la partición. Por otro lado sea $P = \{x_0 + c, x_1 + c, ..., x_n + c\}$ en una partición de $[a + c, b + c]$ y $s(x - c) = s_k$ para $x_{k-1} + c < x < x_k + c$ Entonces,

$$\int_a^b s(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} s_k(x_k - x_{k-1}) = \int_{a+c}^{b+c} s(x - c)\ dx$$

1.16. La integral de funciones más generales

Definición 1.12 (Definición de integral de una función acotada)**.** Sea f una función definida y acotada en $[a,b]$. Sean s y t funciones escalonadas arbitrarias definidas en $[a,b]$ tales que

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x)$$

para cada x en $[a,b]$. Si existe un número I, y sólo uno, tal que

$$\int_a^b s(x)\ dx \leq I \leq \int : a^b t(x)\ dx$$

Para cada par de funciones escalonadas s y t que verifiquen $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$, entonces este número I se denomina la integral de f desde a hasta b y se indica por el símbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$. Cuando I existe se dice que f es integrable en $[a,b]$.

Si $a < b$ se define $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$ supuesta integrable f en $[a,b]$.

También se define $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$. Si f es integrable en $[a,b]$, se dice que la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dxx$ existe.

La función f se denomina integrando, los número a y b los límites de integración, y el intervalo $[a,b]$ el intervalo de integración.

1.17. Integral superior e inferior

Definición 1.13. Supongamos la función f acotada en $[a,b]$. Si s y t son funciones escalonadas que satisfacen $s(x) < f(x) < t(x)$ se dice que s es inferior a f y que t es superior a f

Teorema 1.9. Toda función f acotada en $[a,b]$ tiene una integral inferior $\underline{\mathrm{I}}(f)$ y una integral superior $\bar{I}(f)$ que satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\ dx \leq \underline{\mathrm{I}}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t(x)\ dx$$

para todas las funciones s y t tales que $s \leq f \leq t$. La función f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si sus integrables superior e inferior son iguales, en cuyo caso se tiene

$$\int_a^b f(x)\ dx = \underline{\mathrm{I}}(f) = \bar{I}(f)$$

Demostración.- Sea S el conjunto de todos los números $\int_a^b s(x)\ dx$ obtenidos al tomar como s todas las funciones escalonadas inferiores a f, y sea T el conjunto de todos los números $\int_a^b t(x)\ dx$ al tomar como t todas las funciones escalonadas superiores a f. Esto es

$$S = \left\{ \int_a^b s(x)\ dx | s \leq f \right\}, \qquad T = \left\{ \int_a^b t(x)\ dx | f \leq t \right\}$$

Los dos conjuntos S y T son no vacíos puesto que f es acotada. Asimismo, $\int_a^b s(x)\ dx \leq \int_a^b t(x)\ dx$ si $s \leq f \leq t$, de modo que todo número de S es menor que cualquiera de T. Por consiguiente según el teorema I.34, S tiene extremo superior, y T tiene extremo inferior, que satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\ dx \leq \sup S \leq \text{ínf}\, T \leq \int_a^b y(x)\ dx$$

para todas las s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$. Esto demuestra que tanto $\sup S$ como el $\text{ínf}\, T$ satisfacen $\int_a^b s(x)\ dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\ dx$. Por lo tanto f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si $\sup S = \text{ínf}\, T$, en cuyo caso se tiene

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sup S = \text{ínf}\, T.$$

El número $\sup S$ se llama integral inferior de f y se presenta por $\underline{I}(f)$. El número $\text{ínf}\, T$ se llama integral superior de f y se presenta por $\bar{I}(f)$. Así que tenemos

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^b s(x)\ dx \mid s \leq f\right\}, \qquad \bar{I}(f) = \text{ínf}\left\{\int_a^b t(x)\ dx \mid f \leq t\right\}$$

1.18. El área de un conjunto de ordenadas expresada como una integral

Teorema 1.10. Sea f una función no negativa, integrable en un intervalo $[a,b]$, y sea Q el conjunto de ordenadas de f sobre $[a,b]$. Entonces Q es medible y su área es igual a la integral $\int_a^b f(x)\ dx$

Demostración.- Sea S y T dos regiones escalonadas que satisfacen $S \subseteq Q \subseteq T$.. Existen dos funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$ en $[a,b]$, tales que

$$a(S) = \int_a^b s(x)\ dx \quad y \quad a(T) = \int_a^b t(x)\ dx$$

Puesto que f es integrable en $[a,b]$ el número $I = \int_a^b f(x)\ dx$ es el único que satisface las desigualdades

$$\int_a^b s(x) \leq I \leq \int_a^b t(x)\ dx$$

para todas las funciones escalonadas s y t que cumplen $s \leq f \leq t$. Por consiguiente ése es también el único número que satisface $a(S) \leq I \leq a(T)$ para todas las regiones escalonadas S y T tales que $S \subseteq Q \subseteq T$. Según la propiedad de exhaución, esto demuestra que Q es medible y que $a(Q) = I$

Teorema 1.11. Sea f una función no negativa, integrable en un intervalo $[a,b]$. La gráfica de f, esto es el conjunto

$$\{(x,y)/a \leq x \leq b, y = f(x)\}$$

es medible y tiene área igual a 0.

Demostración.- Sean Q el conjunto de ordenadas del teorema 1.11 y $Q^{'}$ el conjunto que queda si se quitan de Q los puntos de la gráfica de f. Esto es,

$$Q^{'} = \{(x,y)/a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

El razonamiento utilizado para demostrar el teorema 1.11 también demuestra que $Q^{'}$ es medible y que $a(Q^{'}) = a(Q)$. Por consiguiente, según la propiedad de la diferencia relativa al área, el conjunto $Q - Q^{'}$ es medible y

$$a(Q - Q^{'}) = a(Q) - a(Q^{'}) = 0$$

.

1.20. Funciones monótomas y monótonas a trozos. Definiciones y ejemplos

Definición 1.14 (Funciónes crecientes y decreciente)**.** Una función f se dice que es creciente en un conjunto S si $f(x) \leq f(y)$ para cada par de puntos x e y de S con $x < y$. Si se verifica la desigualdad estricta $f(x) < f(y)$ par todo $x < y$ en S se dice que la función es creciente en sentido estricto en S.

Una función se dice decreciente en S si $f(x) \geq f(y)$ para todo $x < y$ en S. Si $f(x) > f(y)$ para todo $x < y$ en S la función se denomina decreciente en sentido estricto en S.

Definición 1.15 (Función monótona)**.** Una función se denomina monótona en S si es creciente en S o decreciente en S. Monótona en sentido estricto significa que f o es estrictamente creciente en S o estrictamente decreciente en S. En general el conjunto S es un intervalo abierto o cerrado.

Definición 1.16 (Función monótona a trozos)**.** Una función f se dice que es monótona a trozos en un intervalo si su gráfica está formada por un número finito de trozos monótonos. Es decir, f es monótona a trozos en $[a, b]$ si existe una partición P de $[a, b]$ tal que f es monótona en cada uno de los subintervalos abiertos de P.

1.21. Integrabilidad de funciones monótonas acotadas

Teorema 1.12. Si f es monótona en un intervalo cerrado $[a, b]$, f es integrable en $[a, b]$

Demostración.- Demostraremos el teorema para funciones decrecientes. El razonamiento es análogo para funciones decrecientes. Supongamos pues f decreciente y sean $\underline{I}(f)$ e $\overline{I}(f)$ sus integrales inferior y superior. Demostraremos que $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.
Sea n un número entero positivo y construyamos dos funciones escalonadas de aproximación s_n y t_n del modo siguiente: $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ en n subintervalos iguales, esto es, subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ tales que $x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$ para cada valor de k. Definamos ahora s_n y t_n por las fórmulas

$$s_n(x) = f(x_{k-1}), \quad t_n(x) = f(x_k) \quad si \quad x_{k-1} < x < x_k$$

en los puntos de división, se definen s_n y t_n de modo que se mantengan las relaciones $s(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$ en todo $[a, b]$. Con esta elección de funciones escalonadas, tenemos

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] =$$

$$= \frac{(b-a)\,[f(b) - f(a)]}{n}$$

siendo la última igualdad una consecuencia de la propiedad telescópica de las sumas finitas. Esta última relación tiene una interpretación geométrica muy sencilla. La diferencia $\int_a^n t_n - \int_a^b s_n$ es igual a la suma de las áreas de los rectángulos. Deslizando esos rectángulos hacia la derecha, vemos que completan un rectángulo de base $(b-a)/n$ y altura $f(b)-f(a)$; la suma de las áreas es por tanto, C/n, siendo $C = (b-a)\,[f(b)-f(a)]$.
Volvamos a escribir la relación anterior en la forma

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \frac{C}{n} \qquad (1)$$

Las integrales superior e inferior de f satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s_n \leq \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n \quad y \quad \int_a^b s_n \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n$$

Multiplicando las primeras igualdades por (-1) y sumando el resultado a las segundas,es decir:

$$-\underline{I}(f) \leq -\int_a^b s_n \;\wedge\; \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n \quad \vee \quad -\bar{I}(f) \leq -\int_a^b s_n \;\wedge\; \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n$$

obtenemos

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n$$

Utilizando (1) y la relación $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$ obtenemos

$$0 \leq \bar{I}(f) - \bar{I}(f) \leq \frac{C}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. Por consiguiente, según el teorema I.31 se tiene

$$\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \underline{I}(f) + \frac{C}{n}$$

por lo tanto $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. Esto demuestra que f es integrable en $[a,b]$.

1.22. Cálculo de la integral de una función monótona acotada

Teorema 1.13. Supongamos f creciente en un intervalo cerrado $[a,b]$. Sea $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, ..., n$. Si I es un número cualquiera que satisface las desigualdades

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad (2)$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $I = \int_a^b f(x)\,dx$

Demostración.- Sean s_n y t_n las funciones escalonadas de aproximación especial obtenidas por subdivisión del intervalo $[a,b]$ en n partes iguales, como se hizo en la demostración del teorema 1.13. Entonces, las desigualdades (1.9) establecen que

$$\int_a^b s_n \leq I \leq \int_a^b t_n$$

para $n \geq 1$. Pero la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ satisface las mismas desigualdades que I. Utilizando la igualdad (1) tenemos $I \leq \int_a^b t_n$ como también $\int_a^b s_n \leq \int_a^b f(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad -\int_a^b f(x)\,dx \leq -\int_a^b s_n$ entonces

$$I - \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n$$

Similarmente usando las inecuaciones $\int_a^b s_n \leq I$ y $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b t_n$ resulta que

$$\int_a^b f(x)\,dx - I \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n \quad \Longrightarrow \quad I - \int_a^b f(x)\,dx \geq -\left(\int_a^b t_n - \int_a^b s_n\right)$$

Donde se concluye que

$$0 \leq \left| I - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \frac{C}{n}$$

par todo $n \geq 1$. Por consiguiente, según el teorema I.31, tenemos $I = \int_a^b f(x)\,dx$

Teorema 1.14. Supongamos f decreciente en $[a,b]$. Sea $x_k = c + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, ..., n$. Si I es un número cualquiera que satisface las desigualdades

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $I = \int_a^b f(x)\,dx$

1.23. Cálculo de la integral $\int_0^b x^p\,dx$ siendo p entero positivo

Teorema 1.15. Si p es un entero positivo y $b > 0$, tenemos

$$\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

Demostración.- Comencemos con las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

válidas para todo entero $n \geq 1$ y todo entero $p \geq 1$. Estas desigualdades se demostraron anteriormente. La multiplicación de esas desigualdades por b^{p+1}/n^{p+1} nos da

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^p < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^p$$

Si ponemos, las desigualdades (2) del teorema 1.14 se satisfacen poniendo $f(x) = x^p$, $a = 0$, entonces $I = \dfrac{b^{p+1}}{p+1}$. Resulta pues que

$$\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

1.24. Propiedades fundamentales de la integral

Teorema 1.16 (Linealidad respecto al integrando)**.** Si f y g son ambas integrables en $[a, b]$ también lo es $c_1 f + c_2 g$ para cada par de constantes c_1 y c_2. Además, se tiene

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\ dx = c_1 \int_a^b f(x)\ dx + c_2 \int_a^b g(x)\ dx$$

Nota.- Aplicando el método de inducción, la propiedad de linealidad se puede generalizar como sigue: Si $f_1, ..., f_n$ son integrables en $[a.b]$ también lo es $c_1 f_1 + ... + c_n f_n$ para $c_1, ..., c_n$ reales cualesquiera y se tiene

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k(x)\ dx = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k(x)\ dx$$

Demostración.- Descompongamos esa propiedad en dos partes:

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad (A)$$

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f \qquad (B)$$

Para demostrar (A), pongamos $I(f) = \int_a^b f$ e $I(g) = \int_a^b g$. Demostraremos que $\underline{I}(f + g) = \bar{I}(f + g) = I(f) + I(g)$. Sean s_1 y s_2 funciones escalonadas cualesquiera inferiores a f y g, respectivamente. Puesto que f y g son integrables, se tiene

$$I(f) = \sup \left\{ \int_a^b s_1 | s_1 \leq f \right\}, \quad I(g) = \sup \left\{ \int_a^b s_2 | s_2 \leq g \right\}$$

Por el teorema I.33 aditiva del extremo superior, también se tiene

$$I(f) + I(g) = \sup \left\{ \int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 | s_1 \leq f, s_2 \leq g \right\} \qquad (1.11)$$

Pero si $s_1 \leq f$ y $s_2 \leq g$, entonces la suma $s = s_1 + s_2$ es una función escalonada inferior a $f + g$, y tenemos

$$\int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 = \int_a^b s \leq \underline{I}(f + g)$$

Por lo tanto, el número $\underline{I}(f + g)$ es una cota superior para el conjunto que aparece en el segundo miembro de (1.11). Esta cota superior no puede ser menor que el extremo superior del conjunto de manera que

$$I(f) + I(g) \leq \underline{I}(f + g) \qquad (1.12)$$

Del mismo modo, si hacemos uso de las relaciones

$$I(f) = \text{ínf} \left\{ \int_a^b t_1 | f \leq t_1 \right\}, \qquad I(g) = \text{ínf} \left\{ \int_a^b t_2 | g \leq t_2 \right\}$$

donde t_1 y t_2 representan funciones escalonadas arbitrarias superiores a f y g, respectivamente, obtenemos la desiguald

$$\bar{I}(f + g) \leq I(f) + I(g).$$

Las desigualdades (1.12) y (1.13) juntas demuestran que $\underline{I}(f + g) = \bar{I}(f + g) = I(f) + I(g)$. Por consiguiente $f + g$ es integrable y la relación (A) es cierta.

La relación (B) es trivial si $c = 0$. Si $c > 0$, observemos que toda función escalonada $s_1 = cf$ es de la forma $s_1 = cs$, siendo s una función escalonada inferior a f. Análogamente, cualquier función escalonada t_1 superior a cf es de la forma $t_1 = ct$, siendo t una función escalonada superior a f. Por hipótesis se tenemos,

$$\bar{I}(cf) = \sup \left\{ \int_a^b s_1 | s_1 \leq cf \right\} = \sup \left\{ c \int_a^b s | s \leq f \right\} = cI(f)$$

y

$$\underline{I}(cf) = \text{ínf}\left\{\int_a^b t_1 | cf \le t_1\right\} = \text{ínf}\left\{c\int_a^b t | f \le t\right\} = cI(f)$$

Luego $\underline{I}(cf) = \bar{I}(cf) = cI(f)$. Aquí hemos utilizado las propiedades siguientes del extremo superior y del extremo inferior:

$$\sup\{cx | x \in A\} = c\sup\{x | x \in A\}, \qquad \text{ínf}\{cx | x \in A\} = c\,\text{ínf}\{x | x \in A\} \qquad (1.14)$$

que son válidas si $c > 0$. Esto demuestra (B) si $c > 0$.
Si $c < 0$, la demostración de (B) es básicamente la misma, excepto que toda función escalonada s_1 inferior a cf es de la forma $s_1 = ct$, siendo t una función escalonada superior a f y toda función escalonada t_1 superior a cf es de la forma $t_1 = cs$, siendo s una función escalonada inferior a f. Asimismo, en lugar de (1.14) utilizamos las relaciones

$$\sup cx | x \in A = c\,\text{ínf}\, x | x \in A, \quad \text{ínf}\, cx | x \in A = c\sup x | x \in A,$$

que son ciertas si $c < 0$. Tenemos pues

$$\underline{I}(cf) = \sup\left\{\int_a^b s_1 | s_1 \le cf\right\} = \sup\left\{c\int_a^b t | f \le t\right\} = \text{ínf}\left\{\int_a^b t | f \le t\right\} = cI(f).$$

Análogamente, encontramos $\bar{I}(f) = cI(f)$. Por consiguiente (B) es cierta para cualquier valor real de c.

Teorema 1.17 (Aditividad respecto al intervalo de integración)**.** Si existen dos de las tres integrales siguientes, también existe la tercera y se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Nota.- En particular, si f es monótona en $[a,b]$ y también en $[b,c]$, existen las dos integrales $\int_a^b f$ e $\int_b^c f$, con lo que también existe $\int_a^c f$ y es igual a la suma de aquellas.

Demostración.- Supongamos que $a < b < c$, y que las dos integrales $\in_a^b f$ e $\int_b^c f$ existen. Designemos con $\underline{I}(f)$ e $\bar{I}(f)$ las integrales superior e inferior de f en el intervalo $[a,c]$. Demostraremos que

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f. \qquad (1.15)$$

Si s es una función escalonada cualquiera inferior a f en $[a,c]$, se tiene

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c s.$$

Recíprocamente, si s_1 y s_2 son funciones escalonadas inferiores a f en $[a,b]$ y $[b,c]$ respectivamente, la función s que coincide con s_1 en $[a,b]$ y con s_2 en $[b,c]$ es una función escalonada inferior a f para lo que

$$\int_a^c = \int_a^b s_1 + \int_b^c s_2.$$

Por consiguiente, en virtud de la propiedad aditiva del extremo superior, tenemos

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^c s | s \le f\right\} = \sup\left\{\int_a^b s_1 | s_1 \le f\right\} + \sup\left\{\int_b^c s_2 | s_2 \le f\right\} = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Análogamente, encontramos

$$\bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

lo que demuestra (1.15) cuando $a < b < c$. La demostración es parecida para cualquier otra disposición de los puntos a, b, c.

Teorema 1.18 (Invariancia frente a una traslación)**.** Si f es integrable en $[a,b]$, para cada número real c se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

Demostración.- Sea g la función definida en el intervalo $[a+c, b+c]$ por la ecuación $g(x) = f(x-c)$. Designemos por $\underline{I}(g)$ e $\bar{g}$ las integrales superior e inferior de g en el intervalo $[a+c, b+c]$. Demostraremos que

$$\underline{I}(g) = \bar{I}(g) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Sea s cualquier función escalonada inferior a g en el intervalo $[a+c, b+c]$. Entonces la función s_1 definida en $[a,b]$ por la ecuación $s_1(x) = s(x+c)$ es una función escalonada inferior a f en $[a,b]$. Además, toda función escalonada s_1 inferior a f en $[a,b]$ tiene esta forma para un cierta s inferior a g. También, por la propiedad de traslación para las integrales de las funciones escalonadas, tenemos

$$\int_{a+c}^{b+c} dx = \int_a^b s(x+c)\,dx = \int_a^b s_1(x)\,dx. \qquad (1.16)$$

Por consiguiente se tiene

$$\underline{I}(g) = \sup\left\{\int_{a+c}^{b+c} s | s \le g\right\} = \sup\left\{\int_a^b s_1 | s_1 \le f\right\} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Análogamente, encontramos $\underline{I} = \int_a^b f(x)\,dx$, que prueba (1.16).

Teorema 1.19 (Dilatación o contracción del intervalo de integración)**.** Si f es integrable en $[a,b]$ para cada número real $k \neq 0$ se tiene:

$$\int_a^b f(x) = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx$$

Nota.- En los dos teoremas 1.19 y 1.20 la existencia de una de las integrables implica la existencia de la otra. Cuando $k = -1$, el teorema 1.19 se llama propiedad de reflexión.

Demostración.- Supongamos $k > 0$ y definamos g en el intervalo $[ka, kb]$ para la igualdad $g(x) = f(x/k)$. Designemos por $\underline{I}(g)$ e $\bar{I}(g)$ las integrales inferiores y superiores de g en $[ka, kb]$. Demostraremos que

$$\underline{I}(g) = \bar{I}(g) = k\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1.17)$$

Sea s cualquier función escalonada inferior a g en $[ka, kb]$. Entonces la función definida en $[a,b]$ por la igualdad $s_1(x) = (kx)$ es una función escalonada inferior a f en $[a,b]$. Además, toda función escalonada s_1 a f en $[a,b]$ tiene esta forma. También, en virtud de la propiedad de dilatación para las integrales de funciones escalonadas, tenemos

$$\int_{ka}^{kb} s(x)\,dx = k\int_a^b s(kx)\,dx = k\int_a^b s_1(x)\,dx.$$

Por consiguiente

$$\underline{I}(g) = \sup\left\{\int_{ka}^{kb} s | s \le g\right\} = \sup\left\{k\int_a^b s_1 | s_1 \le f\right\} = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Análogamente, encontramos $\underline{I}(g) = k\int_a^b f(x)\,dx$, que demuestra (1.17) si $k > 0$. El mismo tipo de demostración puede utilizarse si $k < 0$.

Teorema 1.20 (teorema de comparación)**.** Si f y g son ambas integrables en $[a,b]$ y si $g(x) \leq f(x)$ para cada x en $[a,b]$ se tiene:

$$\int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx$$

Demostración.- Supongamos $g \leq f$ en el intervalo $[a,b]$. Sea s cualquier función escalonada inferior a g, y sea t cualquier función escalonada superior a f. Se tiene entonces $\int_a^b s \leq \int_a^b t$, y por tanto el teorema I.34 nos da

$$\int_a^b = \sup\left\{\int_a^b s | s \leq g\right\} \leq \text{ínf}\left\{\int_a^b t | f \leq t\right\} = \int_a^b f.$$

Esto demuestra que $\int_a^b g \leq \int_a^b f$, como deseábamos.

1.25. Integración de polinomios

Podemos usar el teorema 1.20 para demostrar que (1.11) también es válida para b negativo. Tomemos $k = -1$ en el teorema 1.20 y se obtiene

$$\int_0^{-b} = -\int_0^b (-x)^p\ dx = (-1)^{p+1}\int_0^b x^p\ dx = \frac{(-b)^{p+1}}{p+1}$$

lo cual prueba la validez de (1.11) para b negativo. La propiedad aditiva $\int_a^b x^p\ dx = \int_0^b x^p\ dx - \int_0^a x^p\ dx$ nos conduce a la formula general:

$$\int_a^b x^p\ dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

válida para todos los valores reales de a y b, y todo entero $p \geq 0$.
Algunas veces el símbolo

$$P(x)\ |_a^b$$

se emplea para designar la diferencia $P(b) - P(a)$. De este modo la fórmula anterior puede escribirse así:

$$\int_a^b x^p\ dx = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_a^b = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

Esta fórmula y la propiedad de linealidad, nos permiten integrar cualquier polinomio.
Con mayor generalidad, para calcular la integral de cualquier polinomio integramos término a término:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^n c_k x^k\ dx = \sum_{k=0}^n c_k \int_a^b x^k\ dx = \int_{k=0}^n c_k \frac{b^{k+1} - a^{a+1}}{k+1}$$

1.26. Ejercicios

Calcular cada una de las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int_0^3 x^2\,dx = \frac{3^3}{3} = 9$

2. $\displaystyle\int_{-3}^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-3}^{3} = \frac{3^3-(-3)^3}{3} = \frac{54}{3} = 18$

3. $\displaystyle\int_0^2 4x^3\,dx = 4\frac{2^4}{4} = 16.$

4. $\displaystyle\int_{-2}^2 4x^3\,dx = 4\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-2}^{2} = 4\frac{2^4-(-2)^4}{4} = 0$

5. $\displaystyle\int_0^1 5t^4\,dt = 5\frac{1^5}{5} = 1$

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 5t^4\,dt = 5\left.\frac{t^5}{5}\right|_{-1}^{1} = 5\frac{1^5-(-1)^5}{5} = 5$

7. $\displaystyle\int_0^1 (5x^4-4x^3)\,dx = 5\frac{1^5}{5} - 4\frac{1^4}{4} = 0$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 (5x^4-4x^3)\,dx = 5\int_{-1}^1 x^4\,dx - 4\int_{-1}^1 x^3\,dx = 5\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1} - 4\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 5\cdot\frac{1^5-(-1)^5}{5} - 4\cdot\frac{1^4-(-1)^4}{4} =$
2

9. $\displaystyle\int_{-1}^2 (t^2+1)\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{2} + \left.t\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3-(-1)^3}{3} + 2-(-1) = 6$

10. $\displaystyle\int_2^3 (3x^2-4x+2)\,dx = 3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 - 4\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3 + 2\cdot\left.t\right|_2^3 = 3\frac{3^3-2^3}{3} - 4\frac{3^2-2^2}{2} + 2(3-2) = 11$

11. $\displaystyle\int_0^{1/2} (8t^3+6t^2-2t+5)\,dt = 8\cdot\frac{(1/2)^4}{4} + 6\cdot\frac{(1/2)^3}{3} - 2\cdot\frac{(1/2)^2}{2} + 5\cdot(1/2) = \frac{21}{8}$

12. $\displaystyle\int_{-2}^4 (u-1)(u-2)\,du \quad\Longrightarrow\quad \int_{-1}^4 u^2-3u+2\,dx = \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-2}^{4} - 3\cdot\left.\frac{u^2}{2}\right|_{-2}^{4} + \left.2u\right|_{-2}^{4} =$

$$= \frac{4^3-(-2)^3}{3} - 3\frac{4^2-(-2)^2}{2} + 2[4-(-2)] = \frac{73}{3} - 18 + 12 = 18$$

13. $\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx \Longrightarrow \int_{-1+1}^{0+1}(x-1+1)^2\,dx \ \ (traslacin) \Longrightarrow \int_{1}^{0}x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^2-0^2}{3} = \frac{1}{3}$

14. $\int_{0}^{-1}(x+1)^2\,dx$

Respuesta.- Por ser $-1<0$ entonces por el teorema de dilatación o contracción del intervalo de integración se tiene que

$$\int_0^{-1}(x+1)^2\,dx = -\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx = -\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0} + 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.x\right|_{-1}^{0}\right) = -\left[\frac{1}{3}+1+(-1)\right] = -\frac{1}{3}$$

15. $\int_0^2 (x-1)(3x-1)\,dx = 3\cdot\frac{2^3}{3} - 4\cdot\frac{2^2}{2} + 2 = 2$

16. $\int_0^2 |(x-1)(3x-1)|\,dx$

Respuesta.- Se evaluará en intervalos en los que sea siempre sea positiva o siempre negativa, como también evaluar por separado. Examinando el polinomio se tiene ceros en $x=1, \frac{1}{3}$, donde la expresión va a cambiar de signo en estos puntos, entonces:

$$\begin{array}{rcccl} x<\frac{1}{3} & \Longrightarrow & (x-1)(3x-1)>0 & \Longrightarrow & |(x-1)(3x-1)| = (x-1)(3x-1) \\ \frac{1}{3}<x<1 & \Longrightarrow & (x-1)(3x-1)<0 & \Longrightarrow & |(x-1)(3x-1)| = -(x-1)(3x-1) \\ x>1 & \Longrightarrow & (x-1)(3x-1)>0 & \Longrightarrow & |(x-1)(3x-1)| = (x-1)(3x-1) \end{array}$$

Luego por el teorema aditivo de integración

$$\int_0^2 (x-1)(3x-1)\,dx = \int_0^{1/3}(x-1)(3x-1)\,dx + \int_{1/3}^{1} -(x-1)(3x-1)\,dx + \int_1^2 (x-1)(3x-1)\,dx$$

Así, nos queda

$$\int_0^2 3x^2-4x+1\,dx = \int_0^{1/3} 3x^2-4x+1\,dx + \int_{1/3}^{1} -(3x^2-4x+1)\,dx + \int_1^2 3x^2-4x+1\,dx$$

por lo tanto

$$\left.\left(3\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x\right)\right|_0^{1/3} - \left.\left(3\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x\right)\right|_{1/3}^{1} + \left.\left(3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x\right)\right|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right) - 0 - \left[(1-2+1) - \left(\frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + 2 = \frac{62}{27}$$

17. $\int_0^3 (2x-5)^3\,dx$

Respuesta.- Por el teorema de invariancia frente a una traslación se tiene

$$\int_0^3 (2x-5)^3\,dx \int_{-5/2}^{1/2}\left[2\left(x+\frac{5}{2}\right)-5\right]^3\,dx = \int_{-5/2}^{1/2}(2x)^3\,dx = 80\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-5/2}^{1/2}\,dx = \frac{1}{8} - \frac{625}{8} = -78$$

18. $\displaystyle\int_{-3}^{3}(x^2-3)^3\,dx = \int_{-3}^{3} x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27\,dx = \left(\frac{x^7}{7} - 9\frac{x^5}{5} + 27\frac{x^3}{3} - 27x\right)\Big|_{-3}^{3} =$

$$= \left(\frac{2187}{7} - \frac{2187}{5} + 243 - 81\right) - \left(-\frac{2187}{7} + \frac{2187}{5} - 243 + 81\right) = \frac{2592}{35}$$

19. $\displaystyle\int_{0}^{5}(x-5)^4\;dx = \int_{0}^{5} x^4 - 20x^3\cdot +150x^2\cdot + - 500x + 625\;dx = \left(\frac{5^5}{5} - 3125 + 6250 - 6250 + 3125\right) =$ 625

20. $\displaystyle\int_{-2}^{-4}(x+4)^{10}\,dx$

Respuesta.- Por la invariancia de la integral se tiene

$$\int_{-2}^{-4}(x+4)^{10}\,dx = \int_{2}^{0} x^{10}\,dx = -\int_{0}^{2} x^{10}\,dx = -\frac{2^{11}}{11}$$

21. Hallar todos los valores de c para los que

(a) $\displaystyle\int_{0}^{c} x(1-x)\,dx = 0$

Respuesta.- Al integrar tenemos que $\displaystyle\int_{0}^{c} x - x^2\;dx = \frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{3}$ igualando el resultado a 0 se tiene $3c^2 - 2c^3 = 0$ de donde

$$c = 0 \quad y \quad c = \frac{3}{2}$$

.

(b) $\displaystyle\int_{0}^{c} |x(1-x)|\,dx$

Respuesta.- Dado que $|x(1-x)| \geq 0$ para todo x, podemos usar el teorema de comparación para ver si $|x(1-x)| > 0$ para cualquier x, de donde

$$\int_{0}^{c} |x(1-x)|\,dx > \int_{0}^{c} 0 = 0$$

Así, para que la ecuación se mantenga debemos tener $|x(1-x)| = 0$ para todo $0 \leq x \leq c$ Dado que la expresión será distinta de cero para cualquier $0 < x \leq c$, debemos tener $c = 0$

22. Calcular cada una de las integrales siguientes. Dibújese la gráfica f en cada caso.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\;dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ Respuesta.- Por el teorema de aditividad respecto al intervalo de integración se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx \\
&= \frac{1^3}{3} + 2x\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + (2\cdot 2 - 2\cdot 1) - \frac{2^2-1^2}{2} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x \le c \\ c\dfrac{1-x}{1-c} & si \quad c \le x \le 1 \end{cases}$ c es un número real fijado, $0 < c < 1$.

Respuesta.- dividimos la integral en $\displaystyle\int_0^c x\,dx + \int_c^1 \left(\frac{c}{1-c}\right)(1-x)\,dx$ de donde

$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^c + \frac{c}{1-c}\left(x\Big|_c^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_c^1\right) = \frac{c^2}{2} + \frac{c}{1-c}(1-c) - \frac{c}{1-c}\left(\frac{1^2-c^2}{2}\right) = \frac{c}{2}$$

23. Hallar un polinomio cuadrático P para el cual $P(0) = P(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx = 1$.

Respuesta.- Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ entonces para $P(0) = 0$ nos queda $c = 0$ y para $P(1)$ nos da

$$a + b + c = 0 \implies a = -b$$

De donde

$$\int_0^1 P(x)\,dx = 1 \implies \int_0^1 (ax^2 - ax)\,dx \implies a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 \implies a = -6$$

Por lo tanto se tiene

$$P(x) = 6x - 6x^2$$

24. Hallar un polinomio cúbico P para el cual $P(0) = P(-2) = 0,\ P(1) = 15$ y $\displaystyle\int_{-2}^0 P(x)\,dx = 4$

Respuesta.- Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d$ si $P(0)$ entonces $d = 0$. Luego para $P(-2) = 0$ se tiene

$$a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) = 0 \implies -8a + 4b - 2c = 0 \implies c = 2b - 4a \qquad (1)$$

Después si $P(1) = 15$ entonces $a + b + 2b - 4a = 15 \implies b = a + 5 \qquad (2)$

Remplazando en la ecuación cuadrática e integrando se tiene

$$\int_{-2}^0 \left[ax^3 + (5+a)x^2 + (10-2a)x\right]\,dx = 4$$

de donde

$$a\frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^{0}+(5+a)\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{0}+(10-2a)\frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^{0}=4 \implies a\left(\frac{-(-2)^4}{4}\right)+(5+a)\left(\frac{-(-2)^3}{3}\right)+(10-2a)\left(\frac{-(-2)^2}{2}\right)=4$$

Así nos queda

$$-4a+\frac{40}{3}+\frac{8}{3}a-20+4a=4 \implies a=4$$

Por lo tanto

$$4x^3+9x^2+2x$$

25. Sea f una función cuyo dominio contiene $-x$ siempre que contiene x. Se dice que f es una función par si $f(-x)=f(x)$ y una función impar si $f(-x)=-f(x)$ para todo x en el dominio de f. Si f es integrable en $[0,b]$ demostrar que:

(a) $\displaystyle\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$ si f es par.

Demostración.- Por el teorema de adición de una integral tenemos

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=\int_{-b}^{0} f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx$$

De la primera integral y por el teorema de dilatación o contracción del intervalo de integración, con $k=-1$, tenemos,

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx=-\int_b^0 f(-x)\,dx$$

Siendo la función par, y el hecho de que $-\int_b^0=\int_0^b$ entonces

$$-\int_b^0 f(-x)\,dx=\int_0^b f(x)\,dx$$

Así, nos queda

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=\int_0^b f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx=2\int_0^b f(x)\,dx$$

(b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=0$ si f es impar.

Demostración.- Sabemos que f es impar por lo tanto $\displaystyle\int_0^b f(-x)\,dx=-\int_0^b f(x)\,dx$. Luego Similar a la parte (a) nos queda

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=\int_{-b}^{0} f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx=\int_0^b f(-x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx=0$$

26. Por medio de los teoremas 1.18 y 1.19 deducir la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\,dx$$

Demostración.- Por los teoremas mencionados en la hipótesis se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^{b-a} f[x-(-a)]\,dx=(b-a)\int_0^1 f[x(b-a)+a]\,dx=\int_0^1 f[a+(b-a)x]\,dx$$

27. Los teoremas 1.18 y 1.19 sugieren una generalización de la integral $\int_a^b f(Ax+B)\ dx$. Obtener esa fórmula y demostrarla con el auxilio de los citados teoremas. Discutir también el caso $A = 0$.

Demostración.- Sea

$$\int_a^b f(Ax+B)\ dx = \begin{cases} \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_{Ab+B}^{Aa+B} & si \quad A \neq 0 \\ (b-a)f(B) & si \quad A = 0 \end{cases}$$

Para el caso $A = 0$, tenemos

$$\int_a^b f(Ax+B)\ dx = \int_a^b f(B)\ dx = f(B)\int_a^b\ dx = (b-a)f(B)$$

. Luego para el caso $A \neq 0$ usamos el teorema de expansión o contracción del intervalo de integración, para obtener,

$$\int_a^b f(Ax+B)\ dx = \frac{1}{A}\int_{Ab} Aaf(x+B)\ dx$$

así por la invariancia de la integral concluimos que

$$\frac{1}{A}\int_{Aa}^{Ab} f(x+B)\ dx = \frac{1}{A}\int_{Aa+b}^{Ab+B} f(x)\ dx$$

28. Mediante los teoremas 1.18 y 1.19 demostrar la fórmula

$$\int_a^b f(c-x)\ dx = \int_{c-a}^{c-b} f(x)\ dx$$

Demostración.- Por el teorema de expansión o contracción con $k = -1$ y el teorema de invariancia frente a la traslación,

$$\int_a^b f(c-x)\ dx = -\int_{-a} -bf(x+c)\ dx = \int_{-b}^{-a} f(x+c)\ dx = \int_{c-b}^{c-a} f(x)\ dx$$

2

Algunas aplicaciones de la integración

2.2. El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

Teorema 2.1. Supongamos que f y g son integrables y que satisfacen $f \leq q$ en $[a,b]$. La región S entre sus gráficas es medible y su área $a(S)$ viene dada por la integral

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Demostración.- Demostración.- Supongamos primero que f y g son no negativas,. Sean F y G los siguientes conjuntos:

$$F = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x), \quad G = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x).$$

Esto es, G es el conjunto de ordenadas de g, y F el de f, menos la gráfica de f. La región S es la diferencia $G - F$. Según los teoremas 1.10 y 1.11, F y G son ambos medibles. Puesto que $F \subseteq G$ la diferencia $S = G - F$ es también medible, y se tiene

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Consideremos ahora el caso general cuando $f \leq q$ en $[a,b]$, pero no son necesariamente no negativas. Este caso lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada encima del eje x. Esto es, elegimos un número positivo c suficientemente grande que asegure que $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$ para todo x en $[a,b]$. Por lo ya demostrado la nueva región T entre las gráficas de $f + c$ y $g + c$ es medible, y su parea viene dad por la integral

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)] = \int_{[} g(x) - f(x)]\, dx$$

Pero siendo T congruente a S, ésta es también medible y tenemos

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Esto completa la demostración.

Nota 2.1. En los intervalos $[a,b]$ puede descomponerse en un número de subintervalos en cada uno de los cuales $f \leq g$ o $g \leq f$ la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$$

Lema 2.1 (Área de un disco circular)**.** Demostrar que $A(r) = r^2 A(1)$. Esto es, el área de un disco de radio r es igual al producto del área de un disco unidad (disco de radio 1) por r^2.

Demostración.- Ya que $g(x) - f(x) = 2g(x)$, el teorema 2.1 nos da

$$A(r) = \int_{-r}^{r} g(x)\,dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

En particular, cuando $r = 1$, se tiene la fórmula

$$A(1) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Cambiando la escala en el eje x, y utilizando el teorema 1.19 con $k = 1/r$, se obtiene

$$A(r) = 2\int_{-r}^{r} g(x)\,dx = 2r\int_{-1}^{1} g(rx)\,dx = 2r\int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - (rx)^2}\,dx = 2r^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = r^2 A(1)$$

Esto demuestra que $A(r) = r^2 A(1)$, como se afirmó.

Definición 2.1. Se define el número π como el área de un disco unidad.

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

La formula que se acaba de demostrar establece que $A(r) = \pi r^2$

Generalizando el anterior lema se tiene

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x)\,dx = k\int_{ka}^{kb} f(x/k)\,dx = k^2\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Teorema 2.2. Para $a > 0$, $b > 0$ y n entero positivo, se tiene

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\,dx = \frac{b^{1-1/n} - a^{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Demostración.- Sea $\int_0^a x^{\frac{1}{n}}$. El rectángulo de base a y altura $a^{\frac{1}{n}}$ consta de dos componentes: el conjuntos de ordenadas de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ a a y el conjuntos de ordenadas $g(y) = y^n$ a $a^{\frac{1}{n}}$. Por lo tanto,

$$a \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}} = \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\,dx + \int_0^{a^{\frac{1}{n}}} y^n\,dy \implies \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\,dx = a^{1+\frac{1}{n}} - \left.\frac{y^{n+1}}{n+1}\right|_0^{a^{\frac{1}{n}}} = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Análogamente se tiene

$$\int_0^b x^{\frac{1}{n}}\,dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Luego notemos que

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\,dx = \int_0^b x^{\frac{1}{n}}\,dx - \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\,dx$$

por lo tanto

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\,dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}} - b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

2.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, calcular el área de la región S entre las gráficas de f y g para el intervalo $[a, b]$ que en cada caso se especifica. Hacer un dibujo de las dos gráficas y sombrear S.

1. $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 0, \quad a = -2, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [4 - x^2 - 0] \, dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 4(2 - (-2)) - \left(\frac{2^3 - (-2)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

2. $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 8 - 2x^2, \quad a = -2, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [8 - 2x^2 - (4 - x^2)] \, dx = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx = \frac{32}{3} \text{ (}\textit{por ejercicio } 1\text{)}$$

3. $f(x) = x^3 + x^2, \quad g(x) = x^3 + 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^{1} x^3 + 1 - (x^3 + x^2) \, dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{1 - (-1)}{3} = \frac{4}{3}$$

4. $f(x) = x - x^2, \quad g(x) = -x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_{0}^{2} x - x^2 - (-x) \, dx = \int_{0}^{2} 2x - x^2 = 2\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} = 2\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{2}$$

5. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 1$

Respuesta.-

$$\int_{0}^{1} x^{1/3} - x^{1/2} \, dx = \frac{x^{1+1/3}}{1 + 1/3}\Big|_{0}^{1} - \frac{x^{1+1/2}}{1 + 1/2}\Big|_{0}^{1} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

6. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 1, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_{1}^{2} x^{1/2} - x^{1/3} \, dx = \frac{x^{1/2+1}}{1 + 1/2}\Big|_{1}^{2} - \frac{x^{1/3} + 1}{1 + 1/3}\Big|_{1}^{2} = \frac{2^{1/2+1} - 1}{1 + 1/2} - \frac{2^{1/3+1}}{1 + 1/3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12}$$

7. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Sea

$$\int_0^1 |x^{1/3} - x^{1/2}|\, dx + \int_1^2 |x^{1/3} - x^{1/2}|\, dx$$

por los problemas 5 y 6 se tiene

$$\frac{1}{12} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{6}$$

8. $f(x) = x^{1/2}, \quad g(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{1/2} - x^2\, dx + \int_1^2 x^2 - x^{1/2}\, dx &= \left(\left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \right) + \left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_1^2 \right) \\
&= \left(\frac{1}{1+1/2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2^3-1}{3} - \frac{2^{1+1/2}-1}{1+1/2} \right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \\
&= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

9. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x+1, \quad a = -1, \quad b = (1+\sqrt{5})/2$

Respuesta.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - (x+1)\, dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} (x+1) - x^2\, dx- = \\
&= \int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - x - 1\, dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} x + 1 - x^2\, dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right) \Bigg|_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} + \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{6} \\
&= \frac{5\sqrt{5}-3}{4}
\end{aligned}$$

10. $f(x) = x(x^2-1), \quad g(x) = x, \quad a = -1, \quad b = \sqrt{2}$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^0 x(x^2-1) - x\, dx + \int_0^{\sqrt{2}} x - [x(x^2-1)]\, dx = \int_{-1}^0 x^3 - 2x\, dx + \int_0^{\sqrt{2}} -x^3 + 2x\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} + 1 + (-1+2) = \frac{7}{4}$$

11. $f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad a = -1, \quad b = 1$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x \in [-1, 0) \\ x & si \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx &= \int_{-1}^{0} -x - x^2 + 1\, dx + \int_{0}^{1} x - x^2 + 1\, dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

12. $f(x) = |x+1|, \quad g(x) = x^2 - 2x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Definamos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} -(x+1) & si \quad x \in [0, 1) \\ x+1 & si \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2} f(x) - g(x)\, dx &= \int_{0}^{1} -(x-1) - x^2 + 2x\, dx + \int_{1}^{2} x - 1 - x^2 + 2x\, dx \\
&= \int_{0}^{1} -x^2 + x + 1\, dx + \int_{1}^{2} -x^2 + 3x - 1\, dx \\
&= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{0}^{1} + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{1}^{2} \\
&= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) + \left(-\frac{8}{3} + 6 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1\right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

13. $f(x) = 2|x|, \quad g(x) = 1 - 3x^3, \quad a = -\sqrt{3}/3, \quad b = \dfrac{1}{3}$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x \in [-\sqrt{3}/3, 0) \\ x & si \quad x \in [0, 1/3] \end{cases}$$

de donde se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)-f(x)\,dx &= \int_{-\frac{-\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)\,dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} 1-3x^3\,dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0} -2x\,dx - \int_{0}^{\frac{1}{3}} 2x\,dx \\
&= \left(x-\frac{3}{4}x^4\right)\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} + x^2\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0} - x^2\Big|_{0}^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{108}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{12}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9} \\
&= \frac{9\sqrt{3}-1}{27}
\end{aligned}$$

14. $f(x)=|x|+|x-1|, \quad g(x)=0, \quad a=-1, \quad b=2$

Respuesta.- En este problema $f(x)\geq g(x)$ en el intervalo $[-1,2]$, por lo tanto

$$\int_{-1}^{2} f(x)-g(x)\,dx = \int_{-1}^{2} |x|+|x+1|\,dx = \int_{-1}^{2} |x|\,dx + \int_{-1}^{2} |x-1|\,dx$$

Definimos cada función por separado,

$$|x| = \begin{cases} -x & si \quad x\in[-1,0) \\ x & si \quad x\in[0,2] \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1) & si \quad x\in[-1,1) \\ x-1 & si \quad x\in[1,2] \end{cases}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} |x|\,dx + \int_{-1}^{2} |x-1|\,dx &= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx + \int_{-1}^{1} -(x-1)\,dx + \int_{1}^{2} x-1\,dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2} + \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} + (x)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} + (-x)\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+2-\frac{1}{2}-2+1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

15. Las gráficas de $f(x)=x^2$ y $g(x)=cx^3$, siendo $c>0$, se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(1/c,1/c^2)$. Determinar c de modo que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo $[0,1/c]$ tengan área $\frac{2}{3}$.

Respuesta.- Tenemos que $f\geq g$ en el intervalo $[0,1/c]$ de donde,

$$\int_{0}^{1/c} x^2-cx^3\,dx = \int_{0}^{1/c} x^2\,dx - c\int_{0}^{1/c} x^3\,dx = \frac{1}{12c^3}$$

luego $\dfrac{1}{12c^3}=\dfrac{2}{3}$ por lo tanto $c=\dfrac{1}{2}$.

16. Sea $f(x) = x - x^2$, $g(x) = ax$. Determinar a para que la región situada por encima de la gráfica de g y por debajo de f tenga área $frac92$.

Respuesta.- Tomaremos los casos cuando $a = 0, a > 0$ y $a < 0$.
Veamos primero que si $g(x) \leq f(x)$ entonces

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Longrightarrow x - x^2 - ax \geq 0 \Longrightarrow (1-a)x \geq x^2$$

de donde si $x = 0$ se tiene una igualdad. Luego si $x \neq 0$ entonces $x \leq (1-a)$. Ahora sea $a < 0$ por suposición se tendrá $1 - a > 0$, que nos muestra que el intervalo estará dado por $[0, 1-a]$. Análogamente se tiene el intervalo $[1-a, 0]$ para $a > 0$.

C 1. Si $a = 0$, esto no es posible ya que si $a = 0$ entonces $g(x) = ax = 0$ y entonces el área arriba del gráfico de g y debajo del gráfico de f es igual a

$$\int_0^1 x - x^2\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \neq \frac{9}{2}$$

C 2. Si $a < 0$, $f(x) \geq g(x)$ para $[0, 1-a]$, por lo que tenemos la zona, $a(S)$ de la región entre las dos gráficas dadas por

$$\begin{aligned} \int_0^{1-a} x - x^2 - ax\, dx &= (1-a)\int_0^{1-a} x\, dx - \int_0^{1-a} x^2\, dx \\ &= (1-a)\left(\frac{(1-a)^2}{2} \right) - \frac{(1-a)^3}{3} \\ &= -\frac{(1-a)^3}{6} \end{aligned}$$

así nos queda que

$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \Longrightarrow (1-a)^3 = -27 \Longrightarrow a = a$$

C 3. Sea $a > 0$ y $f(x) \geq g(x)$ entonces $[1-a, 0]$ lo que

$$\begin{aligned} \int_{1-a}^0 x - x^2 - ax\, dx &= (1-a)\int_{1-a}^0 x\, dx - \int_{1-a}^0 x^2\, dx \\ &= (1-a)\left(-\frac{(1-a)^2}{2} - \frac{(1-a)^3}{2} \right) \\ &= -\frac{(1-a)^3}{6} \end{aligned}$$

Así igualando por $\frac{9}{2}$ tenemos

$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \Longrightarrow (1-a)^3 = -27 \Longrightarrow a = 4$$

Por lo tanto los valores posibles para a son -2 y 4.

17. Hemos definido π como el área de un disco circular unidad. En el ejemplo 3 de la Sección 2.3, se ha demostrado que $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Hacer uso de las propiedades de la integral para calcular la siguiente en función de π.

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx.$

Respuesta.- Por el teorema 19 de dilatación, $\dfrac{1}{\frac{1}{3}}\displaystyle\int_{-3\frac{1}{3}}^{3\frac{1}{3}}\sqrt{9-\left(\frac{x}{\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx$, de donde nos queda $9\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$, por lo tanto y en función de π se tiene $\dfrac{9}{2}\pi$.

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx.$

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene

$$\int_0^2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx = 2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-3)\sqrt{4-x^2}\,dx.$

Respuesta.- Comencemos usando la linealidad respecto al integrando de donde tenemos $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx - 3\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$. Luego por el problema 25 de la sección 1.26, $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx = 0$, de donde

$$-6\int_{-1}^{1}\sqrt{4-4x^2}\,dx = -12\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = -6\pi$$

18. Calcular las áreas de los dodecágonos regulares inscrito y circunscrito en un disco circular unidad y deducir del resultado las desigualdades $3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$.

Respuesta.- Como estos son dodecágonos, el ángulo en el origen del círculo de cada sector triangular es $2\pi/12 = \pi/6$, y el ángulo de los triángulos rectángulos formado al dividir cada uno de estos sectores por la mitad es entonces $\pi/12$. Luego usamos el hecho de que,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{2}, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Ahora, para el dodecágono circunscrito tenemos el área del triángulo rectángulo T con base 1 dado por,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-\sqrt{3}) = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro, tenemos el área del dodecaedro circunscrito D_c dada por

$$a(D_c) = 24\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 12(2-\sqrt{3})$$

Por otro lado para el dodecágono inscrito, consideramos el triángulo rectángulo T con hipotenusa 1 en el diagrama. La longitud de uno de los catetos viene dada por sen $\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ y la otra por cos $\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Entonces el área del triángulo es,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Dado que hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro inscrito, D_i tenemos,

$$a(D_i) = 24 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

Por lo tanto, en vista de que el área del círculo unitario es, por definición π y se encuentra entre estos dos dodecaedros, tenemos,

$$3 < \pi < 12(2 - \sqrt{3})$$

19. Sea C la circunferencia unidad, cuya ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 = 1$. Sea E el conjunto de puntos obtenido multiplicando la coordenada x de cada punto (x, y) de C por un factor constante $a > 0$ y la coordenada y por un factor constante $b > 0$. El conjunto E se denomina elipse. (Cuando $a = b$, la elipse es otra circunferencia.).

a) Demostrar que cada punto (x, y) de E satisface la ecuación cartesiana $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Demostración.- Sea $E = \{(ax, by)/(x, y) \in C, a > 0, b > 0\}$. Si (x, y) es un punto en E entonces $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ es un punto es C, ya que todos los puntos de E se obtienen tomando un punto de C y multiplicando la coordenada x por a y la coordenada y por b. Por definición de C, se tiene

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

b) Utilizar las propiedades de la integral para demostrar que la región limitada por esa elipse es medible y que su área es πab.

Demostración.- De la parte (a) sabemos que E es el conjunto de puntos (x, y) tales que $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Esto implica,

$$g(x) = b\sqrt{1 - ()^2}, \quad o \quad f(x) = -b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}^2$$

Por lo tanto, el área de E es el área cerrada de $-a$, a.
Para demostrar que esta región es medible y tiene área πab, comenzamos por mencionar

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\pi b &= 2\int_{-1}^{1} b\sqrt{1-x^2}\,dx \\
\pi ab &= 2a\int_{-1}^{1} b\sqrt{1-x^2}\,dx \\
\pi ab &= 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}\,dx \\
\pi ab &= \int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x}{a}} - \left(-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)\,dx
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, sabemos que la integral de $-a$, a de $g(x)-f(x)$ existe y tiene valor πab, concluyendo que E es medible y $a(E)=\pi ab$.

20. El ejercicio 19 es una generalización del ejemplo 3 de la sección 2.3. Establecer y demostrar una generalización correspondiente al ejemplo 4 de la sección 2.3.

Demostración.- Para generalizar esto, procedemos de la siguiente manera. Sea f una función integrable no negativa en $[a,b]$, y S sea el conjunto de ordenadas de f. Si aplicamos una transformación bajo la cual multiplicamos la coordinada x de cada punto (x,y) en la gráfica de f por una constante $k>0$ y cada coordinada y por una constante $j>0$, entonces obtenemos una nueva función g donde un punto (x,y) está en g si y sólo si $\left(\frac{x}{k},\frac{y}{j}\right)$ está en f. Luego,

$$\frac{y}{j}=f\left(\frac{x}{k}\right)\Longrightarrow y=j\cdot f\left(\frac{x}{k}\right)\Longrightarrow g(x)=j\cdot j\left(\frac{x}{k}\right)$$

Sea jkS y denotamos el conjunto ordenado de g.

$$a(S)=\int_a^b f(x)\,dx$$

entonces

$$
\begin{aligned}
a(jsS) &= \int_{ka}^{kb} g(x)\,dx \\
&= j\cdot\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx \\
&= jk\cdot\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \int_{ka}^{kb} jk\cdot a(S)\,dx
\end{aligned}
$$

21. Con un razonamiento parecido al del ejemplo 5 de la sección 2.3 demostrar el teorema 2.2.

Demostración.- Esta demostración ya fue dada junto a la definición del teorema 2.2.

2.5. Las funciones trigonométricas

Propiedad .2.

1. Dominio de definición. Las funciones seno y coseno están definidas en toda la recta real.

2. Valores especiales. Tenemos $\cos 0 = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1, \cos \pi = -1$.

3. Coseno de una diferencia. Para x e y cualesquiera, tenemos

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$

4. Desigualdades fundamentales. Para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, tenemos

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

Teorema 2.3. Si dos funciones sen y cos satisfacen las propiedades 1 a 4, satisfacen también las siguientes:

(a) La identidad pitagórica, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo x.

Demostración.- La parte (a) se deduce inmediatamente si tomamos $x = y$ en

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$$

y usamos la relación $\cos 0 = 1$.

(b) Valores especiales, $\operatorname{sen} 0 = \cos \frac{1}{2}\pi = \operatorname{sen} \pi = 0$.

Demostración.- Resulta de (a) tomando $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \pi$ y utilizando la relación $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$.

(c) El coseno es función par y el seno es función impar. Esto es, para todo x tenemos

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

Demostración.- Que el coseno es par resulta también de

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$$

haciendo $y = 0$. A continuación deducimos la fórmula

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \operatorname{sen} x,$$

haciendo $y = \frac{1}{2}\pi$ en $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$. Partiendo de esto, encontramos que el seno es impar, puesto que

$$\operatorname{sen}(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$$

(d) Co-relaciones. Para todo x, se tiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{sen} x$$

Demostración.- Para demostrarlo utilizaremos $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \operatorname{sen} x$ reemplazando primero x por $\frac{1}{2}\pi + x$ y luego x por $-x$.

(e) Periodicidad. Para todo x se tiene $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x,\ \cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Demostración.- El uso reiterado de (d) nos da entonces las relaciones de periodicidad (e).

(f) Fórmulas de adición. Para x e y cualesquiera, se tiene

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} y$$

Demostración.- Para demostrar basta reemplazar x por $-x$ en $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$ y tener en cuenta la paridad o imparidad. Luego utilizando la parte (d) y la fórmula de adición para el coseno se obtiene

$$\operatorname{sen}(x+y) = -\cos\left(x + y + \frac{\pi}{2}\right) == -\cos x \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y$$

(g) Fórmulas de diferencias. Para todo los valores a y b, se tiene

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} = \cos\frac{a+b}{2},$$
$$\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}.$$

Demostración.- Reemplazaremos primero y por $-y$ en la fórmula de adición para $\operatorname{sen}(x+y)$ obteniendo

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

Restando ésta de la fórmula para $\operatorname{sen}(x + y)$ y haciendo lo mismo para función coseno, llegamos a

$$\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2\operatorname{sen} y \cos x,$$
$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$

Haciendo $x = (a + b)/2$, $y = (a - b)/2$ encontramos que esas se convierten en las fórmulas de diferencia (g).

(h) Monotonía. En el intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi]$, el seno es estrictamente creciente y el coseno estrictamente decreciente.

Demostración.- La propiedad 4 se usa para demostrar (h). Las desigualdades $0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$ prueban que $cosx$ y $\operatorname{sen} x$ son positivas si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Después de esto, si $0 < b < a < \frac{1}{2}\pi$, los números $(a + b)/2$ y $(a - b)/2$ están en el intrevalo $(0, \frac{1}{2}\pi)$, y las fórmulas de diferencias (g) prueban que $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$ y $\cos a < \cos b$. Esto completa la demostración.

2.6. Fórmulas de integración para el seno y el coseno

Teorema 2.4. Si $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$, y $n \geq 1$, tenemos

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{ka}{n} \qquad (2.6).$$

Demostración.- Las desigualdades anterior serán deducidas de la identidad

$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x, \qquad (2.7)$$

válida para $n \geq 1$ y todo real x. Para demostrar, utilizaremos las fórmulas de diferencias (g) del teorema 2.3 para poner

$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos kx = \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$

Haciendo $k = 1, 2, ..., n$ y sumando esas igualdades, encontramos que en la suma del segundo miembro se reduce unos términos con otros obteniéndose (2.7).
Si $\frac{1}{2}x$ no es un múltiplo entero de π podemos dividir ambos miembros de (2.7) por $2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x$ resultando

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2}x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$$

Reemplazando n por $n-1$ y sumando 1 a ambos miembros también obtenemos. (Ya que $\cos 0 = 1$).

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos kx = \frac{\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)x + \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$$

Esas dos fórmulas son válidas si $x \neq 2m\pi$, siendo m entero. Tomando $x = a/n$, donde $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ encontramos que el par de desigualdades (2.6) es equivalente al siguiente

$$\frac{a}{n}\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\frac{\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{b} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}$$

Este par, a su vez es equivalente al par

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) < \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{\left(\frac{a}{2n}\right)}\operatorname{sen} a < \operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) \qquad (2.8)$$

Por consiguiente demostrar (2.6) equivale a demostrar (2.8). Demostraremos que se tiene

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta - \operatorname{sen}\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < \operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta \qquad (2.9)$$

para $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. Cuando $\theta = a/(2n)$ (2.9) se reduce a (2.8).
Para demostrar la desigualdad de la parte izquierda de (2.9), usamos la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta = \operatorname{sen}2n\theta\cos\theta + \cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta < \operatorname{sen}2n\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} + \operatorname{sen}\theta,$$

habiendo usado también las desigualdades

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}, \quad 0z < \cos 2n\theta \leq 1, \quad \operatorname{sen}\theta > 0, \qquad (2.10)$$

siendo todas válidas ya que $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. La desigualdad (2.10) equivale a la parte izquierda de (2.9). Para demostrar la parte derecha de (2.9), utilizamos nuevamente la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta = \operatorname{sen} 2n\theta \cos\theta - \cos 2n\theta \operatorname{sen}\theta$$

Sumando $\operatorname{sen}\theta$ ambos miembros, obtenemos

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 2n\theta \left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta}\right) \qquad (2.11)$$

Pero ya que tenemos

$$\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta} = \frac{2\operatorname{sen}^2 n\theta}{2\operatorname{sen} n\theta \cos n\theta} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}$$

el segundo miembro de (2.11) es igual a

$$\operatorname{sen} 2n\theta \left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}\right) = \operatorname{sen} 2n\theta \frac{\cos\theta\cos n\theta + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta} = \operatorname{sen} 2n\theta \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}$$

Por consiguiente, para completar la demostración de (2.9), necesitamos tan sólo demostrar que

$$\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \qquad (2.12)$$

Pero tenemos

$$\cos n\theta = \cos(n-1)\cos theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta \operatorname{sen}\theta < \cos(n-1)\theta\cos\theta < \cos(n-1)\theta \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

en donde otra vez hemos utilizado la desigualdad fundamental $\cos\theta < \theta/sen\theta$. ya que $\left(\cos x < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$, esta último relación implica (2.12), con lo que se completa la demostración del teorema 2.4.

Teorema 2.5. Si dos funciones sen y cos satisfacen las propiedades fundamentales de la 1 a la 4, para todo a real se tiene

$$\int_0^a \cos x\, dx = \operatorname{sen} a, \qquad (2.13)$$

$$\int_0^a x\, dx = 1 - \cos a. \qquad (2.14)$$

Demostración.- Primero se demuestra (2.13), y luego usamos (2.13) para deducir (2.14). Supongamos que $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$. Ya que el coseno es decreciente en $[0, a]$ podemos aplicar el teorema 1.14 y las desigualdades del teorema 2.4 obteniendo (2.13). La fórmula es valida también para $a = 0$, ya que ambos miembros son cero. Pueden ahora utilizarse las propiedades de la integral para ampliar su validez todos los valores reales a.

Por ejemplo, si $-\frac{1}{2}\pi \leq a \leq 0$, entonces $0 \leq -a \leq \frac{1}{2}\pi$, y la propiedad de reflexión nos da

$$\int_0^a \cos x\, dx = -\int_0^{-a} \cos(-x)\, dx = -\int_0^{-a} \cos x\, dx = -\operatorname{sen}(-a) = \operatorname{sen} a.$$

Así, pues, (2.13) es válida en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$. Supongamos ahora que $\frac{1}{2}\pi \leq a \leq \frac{3}{2}\pi$. Entonces $-\frac{1}{2}\pi \leq a - \pi \leq \frac{1}{2}\pi$, de modo que

$$\int_0^a \cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^a \cos x\, dx = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi + \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos(x+\pi)\, dx = 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos x\, dx =$$

$$= 1 - \operatorname{sen}(a-\pi) + \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \operatorname{sen} a$$

Con ellos resulta que (2.13) es válida para todo a en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Pero este intervalo tiene longitud 2π, con lo que la fórmula (2.13) es válida para todo a puesto que ambos miembros son periódicos respecto a a con período 2π
Seguidamente usamos (2.13) para deducir (2.14). Ante todo demostramos que (2.14) es válida cuando $a = \pi/2$. Aplicando sucesivamente, la propiedad de traslación, la co-relación $\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$, y la propiedad de reflexión, encontramos

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = \int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \, dx = \int_{-\pi/2}^{0} \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos(-x) \, dx$$

Haciendo uso de la relación $\cos(-x) = \cos x$ y la igualdad (2.13), se obtiene

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = 1$$

Por consiguiente, para cualquier a real, podemos escribir

$$\int_0^{a} \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\pi/2}^{a} \operatorname{sen} x \, dx = 1 + \int_0^{a-\pi/2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \, dx =$$

$$= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \cos x \, dx = 1 + \operatorname{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos a$$

Esto demuestra que la igualdad (2.13) implica (2.14).

Nota 2.2. Usando (2.13) y (2.14) junto con la propiedad aditiva

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_0^b f(x) \, dx - \int_0^a f(x) \, dx$$

llegamos a las fórmulas de integración más generales

$$\int_a^b \cos x \, dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = (1 - \cos b) - (1 - \cos a) = -(\cos b - \cos a).$$

Si nuevamente utilizamos el símbolo especial $f(x)\Big|_a^b$ para indicar la diferencia $f(b) - f(a)$, podemos escribir esas fórmulas de integración en la forma

$$\int_a^b \cos x \, dx = \operatorname{sen} x\Big|_a^b \qquad y \qquad \int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x\Big|_a^b$$

Nota 2.3. Con los resultados del ejemplo 1 y la propiedad de dilatación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x/c)\,dx,$$

obtenemos las fórmulas siguientes, válidas para $c \neq 0$;

$$\int_a^b \cos cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \cos x\,dx = \frac{1}{c}(\operatorname{sen} cb - \operatorname{sen} ca)$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{c}(\cos cb - \cos ca).$$

Nota 2.4. La identidad $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ implica $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ con lo que, a partir del ejemplo 2, obtenemos

$$\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (1-\cos 2x)\,dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a$$

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, encontramos también

$$\int_0^a \cos^2 x\,dx = \int_0^a (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx = a - \int_0^a \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a$$

2.8. Ejercicios

En este conjunto de ejercicios, se pueden emplear las propiedades del seno y del coseno citadas en las Secciones de la 2.5 a la 2.7.

1. (a)

Demostrar que $\operatorname{sen} n\pi = 0$ para todo entero n y que esos son los únicos valores de x para los que $\operatorname{sen} x = 0$.

Demostración.- Primero, ya que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$ implica que si $\operatorname{sen} x = 0$ entonces $\operatorname{sen}(-x) = 0$,, lo que es suficiente mostrar que la declaración es válida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Sabemos que $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \pi = 0$. Por lo tanto, es válida para el caso de $n = 0$ y $n = 1$. Ahora utilizaremos la inducción dos veces, primero para los enteros pares y luego para los impares.
Supongamos que la declaración es válida para algunos pares $m \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, $\operatorname{sen}(m\pi) = 0$. Luego usando la periocidad de la función seno,

$$0 = \operatorname{sen}(m\pi) = \operatorname{sen}(m\pi + 2\pi) = \operatorname{sen}\left[(m+2)\pi\right].$$

Por lo tanto se cumple para todo par $n \in \mathbb{Z}^+$.
Luego supongamos que es verdad para algunos impares $m \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$0 = \operatorname{sen} m\pi = \operatorname{sen}(m\pi + 2\pi) = \operatorname{sen}\left[(m+2)\pi\right]$$

de donde es verdad para todo impar $n \in \mathbb{Z}^+$. Se sigue que es verdad para todo entero no negativo n, y por lo tanto para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado debemos demostrar que estos son únicos valores reales el cual el seno es 0. Por la periocidad del seno, es suficiente mostrar que se cumple para cualquier intervalo 2π. Escogeremos el intervalo $(.\pi, \pi)$ y demostraremos que $\operatorname{sen} x = 0 \iff x = 0$ para todo $x \in (-\pi, \pi)$. Por la primera parte conocemos que $\operatorname{sen} 0 = 0$. Entonces por la propiedad fundamental del seno y el coseno, tenemos las inecuaciones

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x} \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

de donde ambos $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son positivos en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pero, de la identidad de correlación, tenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

así, para $x \in\in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ $\operatorname{sen} x \neq 0$. Pero también sabemos que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ y porque $x \in (0, \pi)$ tenemos $\operatorname{sen} x \neq 0$. Dado que seno es una función impar,

$$\operatorname{sen}(-x) = x \operatorname{sen} x \implies \operatorname{sen}(-x) \neq 0 \quad \text{para } x \in (0, \pi)$$

en consecuencia, $\operatorname{sen} x \neq 0$ para $x \in (-\pi, 0)$. así,

$$\operatorname{sen} x = 0 \implies x = 0 \quad \text{para } x \in (-\pi, \pi)$$

b) Hallar todos los valores reales x tales que $\cos x = 0$.

Respuesta.- Se tiene que $\cos x = 0$ si y sólo si $x = \frac{pi}{2} + n\pi$. Probando esta proposición se tiene que $x = 0 \implies \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = 0$, aplicando la parte (a) concluimos que

$$x + \frac{\pi}{2} = n\pi \quad \implies \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

.

2. Hallar todos los reales x tales que

a) $\operatorname{sen} x = 1$

Respuesta.- x está dado por $\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. Para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $\cos x = 1$

Respuesta.- x es igual a $2n\pi$. Para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) $\operatorname{sen} x = -1$

Respuesta.- $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$. Para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) $\cos x = -1$

Respuesta.- Está dado por $x = (2n+1)\pi$. Para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Demostrar que $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(x+\pi) = -\cos x$ para todo x.

Demostración.- Por las fórmulas de adición se tiene

$$\operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen} x \cos\pi + \cos x \operatorname{sen}\pi = -\operatorname{sen} x$$

Por otro lado se tiene

$$\cos(x+\pi) = \cos x\cos\pi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\pi = -\cos x$$

4. Demostrar que $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$ y $\cos 3x = \cos x - 4\operatorname{sen}^2 x \cos x$ para todo real x. Demostrar también que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Demostración.- Por la fórmula de adición y la identidad Pitagórica se tiene,

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{sen} 3x & = & \operatorname{sen}(2x+x)\\
& = & \operatorname{sen} 2x\cos x + \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x\\
& = & (\operatorname{sen} x\cos x + \cos x \operatorname{sen} x)\cos x + \operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen}^2 x)\\
& = & 2\operatorname{sen} x\cos^2 x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x\\
& = & 2\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x\\
& = & 2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x\\
& = & 3\operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen}^3 x
\end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcll}
\cos 3x & = & \cos 2x\cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x & \\
& = & (1-2\operatorname{sen}^2 x)\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x\cos x & \\
& = & \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x & \\
& = & \cos x - 4\operatorname{sen}^2 x\cos x & \text{Se demuestra la segunda proposición}\\
& = & \cos x - 4(1-\cos^2 x)\cos x & \\
& = & \cos x - 4\cos x + 4\cos^3 x & \\
& = & 4\cos x - 3\cos x & \text{Se demuestra la tercera proposición}
\end{array}$$

5. **(a)** Demostrar que $\operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Demostración.- Por el anterior problema se tiene

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - 4\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{6}$$

luego ya que $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$ se tiene,

$$3\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - 4\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{6} = 1 \implies \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

se sigue,

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6} = 4\cos^3\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

por lo tanto

$$4\cos^3\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{6} = 0 \implies \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Demostrar que $\frac{1}{3}\pi = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}, \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$.

Demostración.- Se usa la parte (a) y la correlación del teorema 2.3, parte d,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{sen} x \implies \cos\frac{\pi}{6} = -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \implies \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

similarmente,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x \implies \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \implies \cos\pi 3 = \frac{1}{2}.$$

(c) Demostrar que $\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Demostración.- Primeramente se tiene

$$1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}.$$

Luego

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4}.$$

se sigue

$$1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = 0 \implies \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \implies \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

entonces,

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 1 \implies \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1 \implies \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

por lo tanto

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Demostrar que $\tan(x-y) = (\tan x - \tan y)/(1+\tan x\tan y)$ para todo par de valores x, y tales que $\tan x\tan y \neq -1$. Obtener las correspondientes fórmulas para $\tan(x+y)$ y $\cot(x+y)$.

Demostración.- Por definición de tangente primeramente se tiene que,

$$\begin{aligned}
\tan(x-y) = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x-y)} &= \frac{\operatorname{sen} x\cos y - \operatorname{sen} x\cos y}{\cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x\cos y - \operatorname{sen} y\cos x}{\cos x\cos y(1+\tan x\tan y)} \\
&= \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x}
\end{aligned}$$

Luego probemos $\tan(x+y)$ para encontrar una fórmula de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} &= \frac{\operatorname{sen} x\cos y + \operatorname{sen} x\cos y}{\cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x\cos y + \operatorname{sen} y\cos x}{\cos x\cos y(1-\tan x\tan y)} \\
&= \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x}
\end{aligned}$$

Por último probemos para la fórmula cotagente,

$$\begin{aligned}
\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y)} &= \frac{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} x \cos y} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y (\cot x \cot -1)}{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x)} \\
&= \frac{\cot x + \cot y - 1}{\cot x + \cot y}
\end{aligned}$$

7. Hallar dos números A y B tales que $3\operatorname{sen}(x+\frac{1}{3}\pi) = A\operatorname{sen} x + B\cos x$ para todo x.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
3\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) &= 3\Big(\operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x\Big) \\
&= 3\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \\
&= \frac{3}{2}\operatorname{sen} x + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A = \frac{3}{2}, \qquad B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

8. Demostrar que si C y α son números reales dados, existen dos números reales A y B tal es que $C \operatorname{sen}(x-\alpha) = A\operatorname{sen} x + b\cos x$ para todo x.

Respuesta.- Para C y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\begin{aligned}
C\operatorname{sen}(x+\alpha) &= C(\operatorname{sen} x\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos x) \\
&= (C\cos\alpha)\operatorname{sen} x + (C\operatorname{sen}\alpha)\cos x
\end{aligned}$$

Ya que sen y cos está definida para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos $C\cos\alpha\ C\operatorname{sen}\alpha \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, los números que requerimos serán:

$$A = C\cos\alpha, \qquad B = C\operatorname{sen}\alpha$$

9. Demostrar que si A y B son números reales dados, existen dos números C y α siendo $C \geq 0$ tales que la fórmula del ejercicio 8 es válida.

Respuesta.- Sea

$$C = \sqrt{A^2+B^2}$$

de donde es verdad que

$$|A| \leq \left|\sqrt{A^2+B^2}\right|$$

y por lo tanto

$$\left|\frac{A}{C} \leq 1\right|$$

así sabemos que existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\cos\alpha = \frac{A}{C}.$$

Pero si $\cos\alpha = \dfrac{A}{C}$ entonces,

$$\begin{array}{rclcl} \cos^2\alpha = \dfrac{A^2}{C^2} & \Longrightarrow & 1 - \operatorname{sen}^2\alpha & = & \dfrac{A^2}{A^2+B^2} \\ & \Longrightarrow & \operatorname{sen}^2\alpha & = & 1 - \dfrac{A^2}{A^2+B^2} = \dfrac{B^2}{A^2+B^2} \\ & \Longrightarrow & \operatorname{sen}\alpha & = & \dfrac{B}{C} \end{array}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} C\operatorname{sen}(x+\alpha) = C\operatorname{sen}x\cos\alpha + C\operatorname{sen}\alpha\cos x &= (A^2+B^2)^{1/2}\frac{A}{(A^2+B^2)^{1/2}}\operatorname{sen}x + (A^2+B^2)^{1/2}\frac{B}{(A^2+B^2)^{1/2}}\cos x \\ &= A\operatorname{sen}x + B\cos x \end{aligned}$$

10. Determinar C y α, siendo $C > 0$, tales que $C\operatorname{sen}(x+\alpha) = -2\operatorname{sen}x - 2\cos x$ para todo x.

Respuesta.- Por el anterior ejercicio tenemos que

$$A\operatorname{sen}x + B\cos x = C\operatorname{sen}(x+\alpha)$$

para

$$C = \sqrt{A^2+B^2}, \text{ y } \operatorname{sen}\alpha = \frac{A}{(A^2+B^2)^{1/2}}, \quad \cos\alpha = \frac{B}{(A^2+B^2)^{1/2}}$$

Luego ya que tenemos $A = B = -2$, entonces

$$C = \left[(-2)^2 + (-2)^2\right]^{1/2} = 2\sqrt{2}$$

y,

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha = \frac{5\pi}{4}.$$

11. Demostrar que si A y B son números reales dados, existen dos números C y α siendo $C \geq 0$ tales que $C\cos(x+\alpha) = A\operatorname{sen}x + B\cos x$. Determinar C y α si $A = B = 1$.

Demostración.- Por el problema 9, sabemos que para $A, B \in \mathbb{R}$, existe $D, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
D\operatorname{sen}(x+\beta) &= A\operatorname{sen}x + B\cos x\\
D\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}+x+\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right] &= A\operatorname{sen}x + B\cos x\\
D\cos\left[x+\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right] &= A\operatorname{sen}x + B\cos x
\end{aligned}$$

entonces,

$$C = D, \quad \alpha = \beta - \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto, C y α existe si $C\cos(x+\alpha) = A\operatorname{sen}x + B\cos x$. Luego, si $A = B = 1$, entonces $C = \sqrt{2}$ y $\alpha = \beta - \dfrac{\pi}{2}$ donde $\operatorname{sen}\beta = \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \beta = \dfrac{\pi}{4}$. Así,

$$C = \sqrt{2}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

12. Hallar todos los números reales x tales que $\operatorname{sen}x = \cos x$.

Respuesta.- Sea $\operatorname{sen}x = \cos x$ entonces

$$\begin{aligned}
\cos x - \operatorname{sen}x &= 0\\
\cos^2 x - 2\operatorname{sen}x\cos x &= 0\\
\operatorname{sen}2x &= \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\\
\operatorname{sen}2x &= 1\\
2x &= \frac{\pi}{2} + 2n\pi\\
x &= \frac{\pi}{4} + n\pi \quad \textit{para } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

13. Hallar todos los números reales tales que $\operatorname{sen}x - \cos x = 1$.

Respuesta.- Por el ejercicio 9 sabemos que existe C, α tal que

$$A\operatorname{sen}x + B\cos x = C\operatorname{sen}(x+\alpha),$$

para cualquier $A, B \in \mathbb{R}$. También sabemos que,

$$C = (A^2+B^2)^{1/2}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{A}{(A^2+B^2)^{1/2}} \qquad \frac{B}{(A^2+B^2)^{1/2}}$$

Así, en este caso tenemos $A = 1$, $B = 1$ y calculando,

$$C = \sqrt{2}, \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

luego sabiendo que $\operatorname{sen}x - \cos x = 1$ entonces,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= 1\\
\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\
x-\frac{\pi}{4} &= x-\frac{\pi}{4}+2n\pi \text{ o } x-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}+2n\pi\\
x &= \frac{\pi}{2}+2n\pi \text{ o } x=\pi+2n\pi
\end{aligned}$$

14. Demostrar que las identidades siguientes son válidas para todos los pares x e y:

(a) $2\operatorname{sen} x\cos y=\cos(x-y)+\cos(x+y)$.

Demostración.- Usando la fórmula para el coseno de una suma y de una diferencia, se sigue,

$$\begin{aligned}
2\cos x\cos y &= \cos x\cos y+\cos x\cos y\\
&= \cos x\cos y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y+\cos x\cos y-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\\
&= \cos(x-y)+\cos(x+y)
\end{aligned}$$

(b) $2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$.

Demostración.- Similar al anterior ejercicios tenemos,

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y &= \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\\
&= \cos x\cos y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y-(\cos x\cos y-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y)\\
&= \cos(x-y)-\cos(x+y)
\end{aligned}$$

(c) $2\operatorname{sen} x\cos y=\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)$.

Demostración.- Usando la fórmula del seno de una suma y diferencia:

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen} x\cos y &= \operatorname{sen} x\cos y+\operatorname{sen} x\cos y\\
&= \operatorname{sen} x\cos y-\operatorname{sen} y\cos x+\operatorname{sen} x\cos y+\operatorname{sen} y\cos x\\
&= \operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)
\end{aligned}$$

15. Si $h\neq 0$, demostrar que las identidades siguientes son válidas para todo x:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

Estas fórmulas se utilizan en cálculo diferencial.

Demostración.- Usando el seno y coseno para la suma y diferencia, se sigue,

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})+\operatorname{sen}(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2})-\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})+\operatorname{sen}(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2})}{h}\\
&= \frac{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h/2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \frac{\cos(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-\cos(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}\\
&= \frac{\cos(x+\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})-\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})-\cos(x+\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})-\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}\\
&= \frac{2\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}\\
&= -\frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h/2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)
\end{aligned}$$

16. Demostrar si son o no ciertas las siguientes afirmaciones.

(a) Para todo $x \neq 0$ se tiene $\operatorname{sen} 2x \neq 2\operatorname{sen} x$.

Demostración.- Sea $x = \pi$, entonces $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 2\pi = 0$, y $2\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\pi = 0$. Luego por hipótesis $x \neq 0$, pero $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x$, por lo tanto este proposición es falsa.

(b) Para cualquier x, existe un y tal que $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$.

Demostración.- Sea $x = 0$, entonces $\cos(x+y) = \cos y$, pero $\cos x + \cos y = 1 + \cos y$. Por lo tanto la proposición es falsa.

(c) Existe un x tal que $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ para todo y.

Demostración.- Sea $x = 0$, entonces $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} y$, para todo y, y $x + \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} y$ para todo y. Y por lo tanto la proposición es verdadera.

(d) Existe un $y \neq 0$ tal que $\int_0^y \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} y$.

Demostración.- Sea $y = \dfrac{\pi}{2}$, entonces $\displaystyle\int_0^p i2\operatorname{sen} x\ dx = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$ y $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$. Por lo tanto la proposición es verdadera.

17. Calcular la integral $\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx$ para cada uno de los siguientes valores de a y b. En cada caso interpretar el resultado geométricamente en función del área.

(a) $a = 0, \; b = \pi/6.$

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \cos(\pi/6) = 1 - \sqrt{3}/2.$

(b) $a = 0, b = \pi/4.$

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \cos(\pi/4) = 1 - \sqrt{2}/2.$

(c) $a = 0, b = \pi/3.$

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \cos(\pi/3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

(d) $a = 0, b = \pi/2.$

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \cos(\pi/2) = 1.$

(e) $a = 0, b = \pi.$

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2.$

(f) $a = 0, b = 2\pi.$

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \cos(2\pi) = 1 - 1 = 0.$

(g) $a = -1, b = 1$

Respuesta.- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} x \, dx = -[\cos(1) - \cos(-1)] = 0.$

(h) $a = -\pi/6, b = \pi/4.$

Respuesta.- $\displaystyle\int_{\pi/4}^{-\pi/6} \operatorname{sen} x \, dx = -[\cos(\pi/4) - \cos(-\pi/6)] = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}.$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi} (x + \operatorname{sen} x) \, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} + 1 - (\cos \pi) = \frac{\pi^2}{2} + 1 - (-1) = \frac{\pi^2}{2} + 2.$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x^2 + \cos x) \, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi/2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3} + 1 = \frac{\pi^3}{24} + 1.$

20. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\; dx = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - 1 = 0.$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos x|\; dx$

Respuesta.- Ya que $\cos x - \operatorname{sen} x \geq 0$ esta definida por $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y $\cos x - \operatorname{sen} x < 0$ esta dado por $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos x|\; dx &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\; dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\; dx \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}$$

22. $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\; dt = \left.\frac{t}{2}\right|_0^{\pi} + \operatorname{sen} \pi = \frac{\pi}{2}.$

23. $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{1}{2} + \cos t\right|\; dx.$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \left|\frac{1}{2} + \cos t\right|\; dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\; dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\; dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}\; dt + \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos(t)\; dt - \int_{\frac{2\pi}{3}} \pi \frac{1}{2}\; dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos(t)\; dt \\
&= \left.\frac{t}{2}\right|_0^{\frac{2\pi}{3}} + \left.\operatorname{sen}(t)\right|_0^{\frac{2\pi}{3}} - \left.\frac{t}{2}\right|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}\; dt - \left.\operatorname{sen}(t)\right|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{6}\right) - \left[\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

24. $\displaystyle\int_{-\pi}^{x} \left|\frac{1}{2} + \cos t\right|\; dx \text{ si } 0 \leq x \leq \pi.$

Respuesta.- Primero queremos determinar $\frac{1}{2} + \cos t$ para t positivo y en otro caso negativo, por lo tanto,

$$\left|\frac{1}{2} + \cos t\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \cos t & si \quad -\pi \leq x \leq -\dfrac{2\pi}{3} \; o \; \dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi \\ -\left(\dfrac{1}{2} + \cos t\right) & si \quad -\dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Ahora consideremos dos casos. Si $0 \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x} \left|\frac{1}{2} + \cos t\right| dt &= -\int_{-ß}^{-\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\, dt + \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{x} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\, dt \\
&= -\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) - \left[\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}(-\pi)\right] + \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \left[\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} + \frac{x}{2} + \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

En otro caso, si $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$, entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x} \left|\frac{1}{2} + \cos t\right| &= -\int_{-\pi}^{-\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\, dt + \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\, dx - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{x} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\, dx \\
&= \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{5\pi}{6} + 2\sqrt{3} - \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

25. $\displaystyle\int_{x}^{x^2} (t^2 + \operatorname{sen} t)\, dx = \frac{x^6 - x^3}{3} - \cos(x^2) + \cos x.$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_{0\cdot 2}^{\frac{\pi}{2}\cdot 2} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = 1.$

27. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \cos\frac{x}{2}\, dx = 2\int_{0\cdot\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}} \cos x\, dx = 2(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} 0) = 1.$

28. Demostrar las siguientes fórmulas de integración, válidas para $b \neq 0$.

$$\int_{0}^{x} cos(a + bt)\, dt = \frac{1}{b}\left[\operatorname{sen}(a + bx) + \operatorname{sen} a\right],$$

$$\int_{0}^{x} \operatorname{sen}(a + bt)\, dt = -\frac{1}{b}\left[\cos(a + bx) - \cos a\right].$$

Demostración.- Usando la formula de adición tenemos,

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \cos(a+bt)\,dt &= \int_0^x [\operatorname{sen} a\cos(bt)+\operatorname{sen}(bt)\cos a]\,dt\\
&= \frac{\cos a}{b}\int_0^{bx}\cos t\,dt-\frac{\operatorname{sen} a}{b}\int_0^{bx}\operatorname{sen} t\,dt \qquad b\neq 0\\
&= \frac{1}{b}\left[\cos a\operatorname{sen}(bx)-\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} a\cos(bx)\right]\\
&= \frac{1}{b}\left[\operatorname{sen}(a+bx)-\operatorname{sen} a\right]
\end{aligned}
$$

Similar a la anterior demostración tenemos,

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \operatorname{sen}(a+bt)\,dt &= \int_0^x [\operatorname{sen} a\cos(bt)+\operatorname{sen}(bt)\cos a]\,dt\\
&= \frac{\operatorname{sen} a}{b}\int_0^{bx}\cos t\,dt-\frac{\cos a}{b}\int_0^{bx}\operatorname{sen} t\,dt \qquad b\neq 0\\
&= \frac{\operatorname{sen} a}{b}\operatorname{sen}(bx)+\frac{\cos a}{b}(1-\cos(bx))\\
&= \frac{1}{b}\left[\operatorname{sen} a\operatorname{sen}(bx)+\cos a-\cos a\cos(bx)\right]\\
&= -\frac{1}{b}\left[\cos(a+bx)-\cos a\right]
\end{aligned}
$$

29. **(a)** Hacer uso de la identidad $\operatorname{sen} 3t = 3\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen}^3 t$ para deducir la fórmula de integración

$$\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\,dt = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}(2\operatorname{sen}^2 x)\cos x.$$

Respuesta.- $\operatorname{sen}^3 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}\operatorname{sen} t - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(3t)$

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\,dx &= \int_0^x \left[\frac{3}{4}\operatorname{sen} t-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(3t)\right]\,dt\\
&= \frac{3}{4}(1-\cos x)-\frac{1}{12}\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt\\
&= \frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos x-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cos 3x\\
&= \frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\left(\cos x-4\operatorname{sen}^2 x\cos x\right)\\
&= \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cos x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\cos x\\
&= \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(2+\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x
\end{aligned}
$$

(b) Deducir la identidad $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ y utilizándola para demostrar que

$$\int_0^x \cos^3 t\ dt = \frac{1}{3}(2+\cos^2 x)\operatorname{sen} x$$

Respuesta.- $\cos 3x = 4\cos^2 - 3\cos x$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos^3 t\ dt &= \int_0^x [\cos(3t) + 3\cos t]\ dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^x \cos(3t)\ dt + \int_0^x \cos t\ dt \\
&= \frac{1}{12}\int_0^3 x\cos t\ dt + \frac{3}{4}\int_0^x \cos t\ dt \\
&= \frac{1}{12}\operatorname{sen}(3t)\ dt + \frac{3}{4}\operatorname{sen} x \\
&= \frac{1}{12}(3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x) + \frac{3}{4}\operatorname{sen} x \\
&= \operatorname{sen} x \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x \\
&= \operatorname{sen} x \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \\
&= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \\
&= \left[1 - \frac{1}{3}\left(1-\cos^2 x\right)\right]\operatorname{sen} x \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos^2 x\right)\operatorname{sen} x \\
&= \frac{1}{3}\left(2+\cos^2 x\right)\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

30. Si una función f es periódica $p > 0$ e integrable en $[0,p]$, demostrar que $\int_0^{2p} f(x)\ dx = \int_a^{a+p} f(x)\ dx$ para todo a.

Demostración.- Sabemos que existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n \le \frac{a}{p} < n+1 \quad \Longrightarrow \quad np \le a < np + p \le a + p \quad \Longrightarrow \quad np \le a < (n+1)p \le a+p$$

Entonces, empezamos dividiendo la integral en dos partes

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+p} f(x)\,dx &= \int_a^{(n+1)p} f(x)\,dx + \int_{(n+1)p}^{a+p} f(x)\,dx \\
&= \int_{a-np}^{(n+1)p-np} f(x+np)\,dx + \int_{(n+1)p-(n+1)p}^{a+p-(n+1)p} f(x+(n+1)p)\,dx \\
&= \int_{a-np}^{p} f(x)\,dx + \int_0^{a-np} f(x)\,dx && \textit{periodicidad de } p \\
&= \int_0^p f(x)\,dx && \textit{ya que } 0 \leq a-np < p
\end{aligned}$$

31. **(a)** Demostrar que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = 0$ para todos los enteros $n \neq 0$.

Demostración.-

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\,dx &= \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx \\
\int_0^{2\pi\cdot n} \operatorname{sen} x\,dx &= \int_0^{2\pi\cdot n} \cos x\,dx \\
-\frac{1}{n}\left[\cos(2\pi\cdot n) - \cos 0\right] &= \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}(2\pi\cdot n) - \operatorname{sen} 0\right] \\
-\frac{1}{n}(0-0) &= \frac{1}{n}(1-1) \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

(b) Usando la parte (a) y las fórmulas de adición para seno y coseno, establecer las siguientes fórmulas, válidas para los enteros m y n, tales que $m^2 \neq n^2$;

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\,dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \qquad \textit{si } n \neq 0$$

Estas fórmulas son las relaciones de ortogonalidad para el seno y el coseno.

Demostración.-

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen}(n+m)x - \operatorname{sen}(n-m)x\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2(n+m)}\int_0^{2\pi(n+m)} \operatorname{sen} x\,dx - \frac{1}{2(n-m)}\int_0^{2\pi(n-m)} \operatorname{sen} x\,dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

32. A partir de la identidad

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx = \operatorname{sen}(2k+1)\frac{x}{2} - \operatorname{sen}(2k-1)\frac{x}{2}$$

y de las propiedades telescópicas de las sumas finitas demostrar que si $x \neq 2m$ (m entero) se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}(n+1)x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}$$

Demostración.- Haciendo $k = 1, 2, \ldots, n$ y sumando esas igualdades, se obtiene que

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname{sen}(2k+1)\frac{x}{2} - \operatorname{sen}(2k-1)\frac{x}{2} \right]$$

Luego por la propiedad telescopica de las sumas finitas, se tiene,

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \operatorname{sen} \left[(2n+1)\frac{x}{2} \right] - \operatorname{sen}(0+1)\frac{x}{2}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos kx &= \frac{\operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right] - \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{2} \cos \frac{(2n+1)\frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

33. Si $x \neq 2m\pi$ (m un entero), probar que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}nx \operatorname{sen} \frac{1}{2}(n+1)x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}$$

Demostración.- Recordemos que

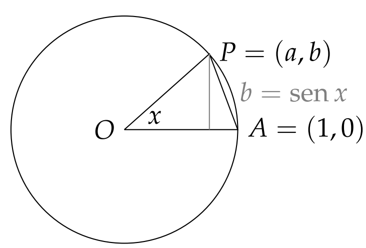
$$\begin{aligned}
-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen}(kx) &= \cos\left(\frac{x}{2} + kx\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - kx\right) \\
&= \cos\left[(2k+1)\frac{x}{2}\right] - \cos\left[(1-2k)\frac{x}{2}\right] \\
&= \cos\left[(2k+1)\frac{x}{2}\right] - \cos\left[(2k-1)\frac{x}{2}\right]
\end{aligned}$$

Luego, aplicando la propiedad telescópica de las sumas finitas, y la primera parte del teorema 4 se tiene,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx &= \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\right] - \cos\frac{x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\cos(nx)\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{x}{2}(\cos(nx)-1) - \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{-2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{nx}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{ns}{2}\cos\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{nx}{2} + \cos\frac{nx}{2}\operatorname{sen} x2\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

34. Se hace referencia a la figura 2.7. Por comparación del área del triángulo OAP con la del sector circular OAP, demostrar que $\operatorname{sen} x < x$ si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Usando entonces el hecho de que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, demostrar que $|\operatorname{sen} x| < |x|$ si $0 < |x| < \frac{1}{2}\pi$.

Demostración.- Considere la siguiente figura



Asumiendo que el radio es $r = 1$. Para $0 < x < \frac{x}{2}$ tenemos el triangulo OAP_t de tamaño de base $a = 1$ y altura $b = \operatorname{sen} x$, es decir,

$$Area(OAP_t) = \frac{1}{2}ab = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

Luego el área del sector circular OAP_s es

$$Area(OAP_s) = \frac{x}{2\pi}\pi r^2 = \frac{x}{2}$$

Ya que el área del triángulo OAP_t es menor al área del sector OAP_t tenemos,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x < x$$

dado que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces

$$\operatorname{sen} x < x \quad \Longrightarrow \quad -\operatorname{sen} x > -x \quad \Longrightarrow \quad |\operatorname{sen} x| < |x|$$

para $0 < |x| < \frac{x}{2}$.

2.10. la integral para el área en coordenadas polares

Teorema 2.6. Sea R el conjunto radial de una función no negativa f en un intervalo $[a,b]$, donde $0 \leq b-a \leq 2\pi$, y se asume que R es medible. Si f^2 es integrable en $[a,b]$ el área de R esta dado por la integral

$$a(R) = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\; d\theta$$

Demostración.- Elegimos dos funciones escalonadas s y t que satisface

$$0 \leq s(\theta) \leq f(\theta) \leq t(\theta)$$

Para todo θ en $[a,b]$, y denotamos S y T sus conjuntos radiales, respectivamente. Ya que $s \leq f \leq t$ en $[a,b]$, los conjuntos radiales satisfacen la relación de inclusión $S \subseteq R \subseteq T$. Por lo tanto, por la propiedad monótona del área, tenemos $a(S) \leq a(R) \leq a(T)$. Pero S y T son conjuntos radiales de la función escalonada, así $a(S) = \frac{1}{2}\int_a^b s^2(\theta)\; d\theta$ y $a(T) = \frac{1}{2}\int_a^b t^2(\theta)\; d\theta$. Entonces tenemos la inecuación

$$\int_a^b s^2(\theta)\; d\theta \leq 2a(R) \leq \int_a^b t^2(\theta)\; d\theta$$

para todo función escalonada s y t que satisface $s \leq f \leq t$ en $[a,b]$. Donde s^2 y t^2 son funciones escalonadas arbitrarias que satisfacen $s^2 \leq f^2 \leq t^2$ en $[a,b]$, se sigue f^2 es integrable, y tenemos $2a(R) = \int_a^b f^2(\theta)\; d\theta$. Esto prueba el teorema.

2.11. Ejercicios

En cada uno de los ejercicios 1 al 4, demostrar que el conjunto de puntos cuyas coordenadas rectangulares (x,y) satisfacen la ecuación cartesiana dada, es igual al conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas polares (r,θ) satisfacen la correspondiente ecuación polar.

1. $(x-1)^2 + y^2 = 1; \quad r = 2\cos\theta,\; cos\theta.$

Respuesta.- Sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ entonces

$$\begin{array}{rcr} (x-1)^2 + y^2 = 1 & \Longrightarrow & (r\cos\theta - 1)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ & \Longrightarrow & r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ & \Longrightarrow & r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2r\cos\theta = 0 \\ & \Longrightarrow & r = 2\cos\theta \end{array}$$

Donde $\cos\theta > 0$ entonces $r > 0$.

2. $x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2+y^2}; \quad r = 1 + \cos\theta.$

Respuesta.- Sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ entonces

$$\begin{array}{rcrcl} x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2+y^2} & \Longrightarrow & r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta & = & \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} \\ & \Longrightarrow & r^2 - r\cos\theta & = & r \\ & \Longrightarrow & 1 + \cos\theta & = & r. \end{array}$$

3. $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2,\ y^2 \leq x^2; \quad r = \sqrt{\cos 2\theta},\ \cos 2\theta \geq 0$

Respuesta.- Sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ entonces

$$\begin{array}{rcrcl} (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2 & \Longrightarrow & (r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^2 & = & r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta \\ & \Longrightarrow & r^4 & = & r^2\cos(2\theta) \\ & \Longrightarrow & r^2 & = & r^2\cos(2\theta) \\ & \Longrightarrow & r & = & \sqrt{\cos(2\theta)} \end{array}$$

Ya que $cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta$.

4. $(x^2+y^2) = |x^2-y^2|; \quad r = \sqrt{|\cos 2\theta|}$

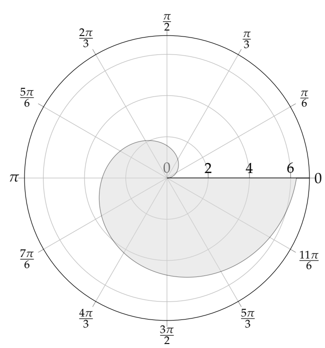
Respuesta.- Sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ entonces

$$\begin{array}{rcrcl} (x^2+y^2) = |x^2-y^2| & \Longrightarrow & (r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^2 & = & |r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta| \\ & \Longrightarrow & r^4 & = & r^2|\cos(2\theta)| \\ & \Longrightarrow & r^2 & = & |\cos(2\theta)| \\ & \Longrightarrow & & = & \sqrt{|\cos(2\theta)|}. \end{array}$$

En cada uno de los ejercicios del 5 al 15, trazar la gráfica de f en coordenadas polares y calcular el área del conjunto radial de f sobre el intervalo especificado. Se supondrá que cada conjunto es medible.

5. Espiral de Arquimedes: $f(\theta) = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

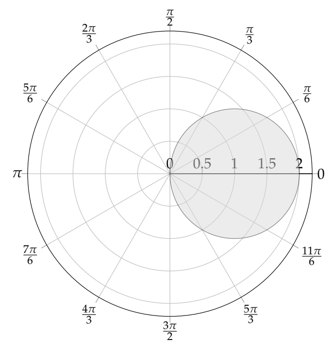
Respuesta.-



$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2\, d\theta = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\theta^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{4\pi^3}{3}$$

6. Circunferencia tangente al eje y: $f(\theta) = 2\cos\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2.$

Respuesta.-

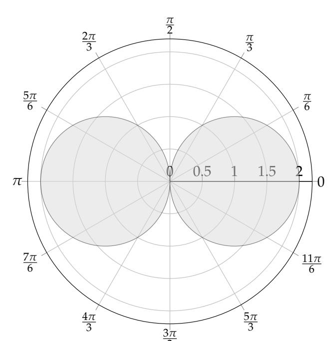


$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2\theta\; d\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2\theta)\; d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\; d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-2\operatorname{sen}^2\theta - 1)\; d\theta \\
&= 2\pi + \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\theta\; d\theta\right) - \pi \\
&= \pi + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\theta\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) + \pi \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

7. Dos circunferencias tangentes al eje y: $f(\theta) = 2|\cos\theta|$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

Respuesta.-

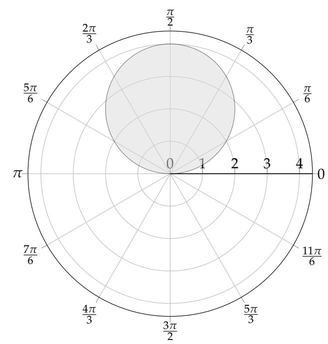
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\cos^2\theta\; d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\, d\theta = 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\; d\theta + 2\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\; d\theta = 2\pi + 0 = 2\pi$$



8. Circunferencia tangente al eje x: $f(\theta) = 4\operatorname{sen}\theta$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$.

Respuesta.-

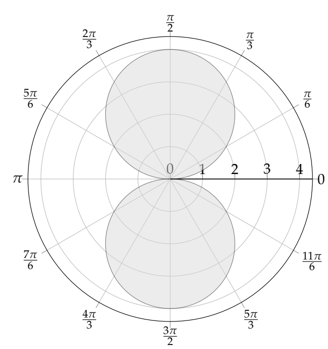
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} 16\operatorname{sen}^2\theta\; d\theta = 8\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\theta\; d\theta = 8\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\pi\right) = 4\pi$$



9. Dos circunferencias tangentes al eje x: $f(\theta) = 4|\operatorname{sen}\theta|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

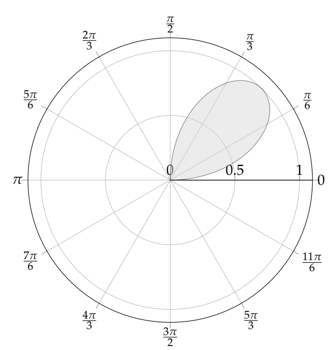
Respuesta.-

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} 16\operatorname{sen}^2\theta\; d\theta = 8\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\theta\; d\theta = 8\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\pi\right) = 8\pi$$



10. Pétalo de rosa: $f(\theta) = \operatorname{sen}2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Respuesta.-

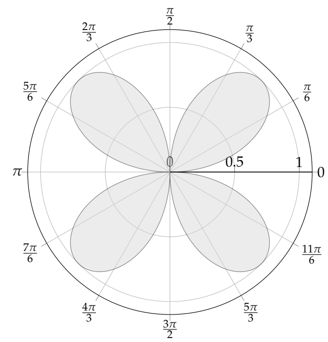


$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2(2\theta)\; d\theta = \frac{1}{2\cdot 2}\int_{0\cdot 2}^{2\cdot\pi/2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\theta}{2}\right)\; d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\pi)\right] = \frac{\pi}{8}$$

Se aplico el teorema 1.19 (dilatación o contracción del intervalo de integración) y la nota 2.4 respectivamente.

11. Rosa de cuatro hojas: $f(\theta) = |\operatorname{sen} 2\theta|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

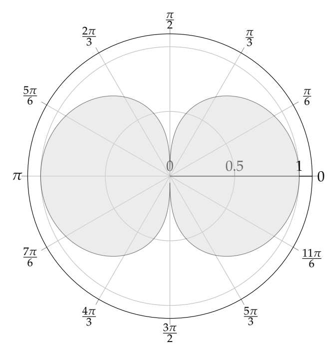
Respuesta.-



$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\cdot 2}\int_{2\cdot 0}^{2\cdot 2\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\theta}{2}\right)\, d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{4\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\cdot 4\pi)\right] = \frac{\pi}{2}$$

12. Ocho aplastado: $f(\theta) = \sqrt{|\cos\theta|}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

Respuesta.-



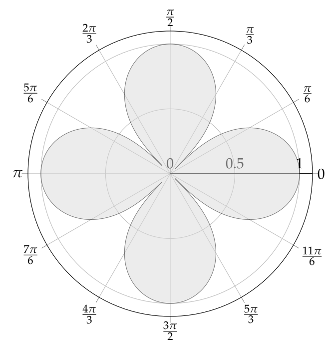
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{|\cos\theta|}\right)^2 d\theta &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} 2\pi - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right]\\
&= \frac{1}{2}(1+1+1+0+1)\\
&= 2
\end{aligned}$$

Esto por la nota 2.2. y por hecho de que

$$|\cos\theta| = \begin{cases} + & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] - & si \quad \dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{3\pi}{2} \\[2ex] + & si \quad \dfrac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$$

13. Trébol de cuatro hojas: $f(\theta)=\sqrt{|\cos 2\theta|}, \quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$

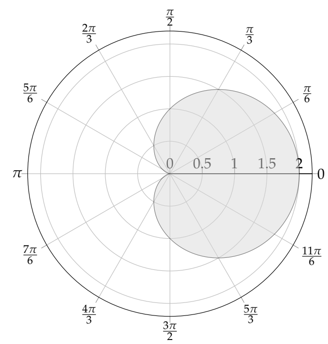
Respuesta.-



$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{|\cos(2\theta)|}\right)^2\,d\theta &= \frac{1}{2\cdot 2}\int_{0\cdot 2}^{2\pi\cdot 2}\left|\cos\frac{2\theta}{2}\right|\,d\theta\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{4\pi}|\cos\theta|\,d\theta\\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right.\\
&+ \left.\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta-\int_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta+\int_{\frac{7\pi}{2}}^{4\pi}\cos\theta\,d\theta\right)\\
&= \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}2\pi-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right.\\
&+ \left.\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}-\operatorname{sen}2\pi-\left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}4\pi-\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}\right]\\
&= \frac{1}{4}(1+1+1+0+1+1+1+1+0+1)\\
&= 2
\end{aligned}$$

14. Cardioide: $f(\theta)=1+\cos\theta, \quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$

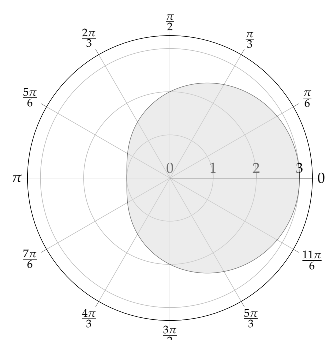
Respuesta.-



$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi+2\operatorname{sen}2\pi+\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}4\pi\right) \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

15. Caracol: $f(\theta)=2+\cos\theta, \quad 0\le\theta\le 2\pi.$

Respuesta.-



$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\theta)^2\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4+4\cos\theta+\cos^2\theta\right)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(8\pi+4\operatorname{sen}2\pi+\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}4\pi\right) \\
&= \frac{9\pi}{2}
\end{aligned}$$

2.12. Aplicación de la integración al cálculo de volúmenes

1. **Propiedad de no negatividad.** Para cada conjunto S de $\mathscr{A}$ se tiene $v(S) \geq 0$.
2. **Aditividad.** Si S y T pertenecen a $\mathscr{A}$, $S \cup T$ y $S \cap T$ también pertenecen a $\mathscr{A}$, y se tiene $v(S \cup T) = v(S) + v(T) - v(S \cap T.)$
3. **Propiedad de la diferencia.** Si S y T pertenecen a $\mathscr{A}$, siendo $S \subseteq T$, $T - S$ pertenece a $\mathscr{A}$ y se tiene $v(T - S) = v(T) - v(S)$.

   Ya que $v(T - S) \geq 0$, implica también la siguiente propiedad monónota:
   $$v(S) \leq v(T), \quad \text{para los conjuntos S y T en } \mathscr{A} \; con \; S \subseteq T.$$
4. **Principio de Cavalieri.** Si S y T son dos sólidos de Cavalieri pertenecientes a $\mathscr{A}$ tales que $a(S \cap F) \leq a(T \cap F)$ para todo plano F perpendicular a una recta dada, entonces $v(S) \leq v(T)$.
5. **Elección de escala.** Toda caja B pertenece a $\mathscr{A}$. Si los lados o aristas de B tienen longitudes a, b y c, se tiene que $v(B) = abc$.
6. Todo conjunto convexo pertenece a $\mathscr{A}$.

Teorema 2.7. Sea R un sólido de Cavalieri de $\mathscr{A}$ cuya función área seccional a_R, sea integrable en un intervalo $[a, b]$ y nula fuera del mismo. En tales condiciones el volumen de R es igual a la integral del área seccional:
$$v(R) = \int_a^b a_R(u)\, du$$

Demostración.- Elijamos funciones escalonadas s y t tales que $s \leq a_R \leq t$ en $[a, b]$ y definamos s y t como nulas fuera de $[a, b]$. Para cada subintervalo de $[a, b]$ en el que s sea constante, podemos imaginar un sólido cilíndrico construido de modo que su área seccional en este subintervalo tenga el mismo valor constante que s. La reunión de esos cilindros sobre los intervalos en los que s es constante es un sólido S cuyo volumen $v(S)$ es, por la aditividad, igual a la integral $\int_a^b s(u)\, du$. Del mismo modo, existe un sólido T, una reunión de cilindros, cuyo volumen $v(T) = \int_a^b t(u)\, du$. Pero $a_S(u) = s(u) \leq t(u) = a_r(u)$ para todo u de $[a, b]$, de modo que el principio de Cavalieri implica que $v(S) \leq v(R) \leq v(T)$. En otras palabras, $v(R)$ satisface las desigualdades,
$$\int_a^b s(u)\, du \leq v(R) \leq \int_a^b t(u)\, du.$$
para todas las funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \leq a_S \leq t$ en $[a, b]$. Puesto que a_S es integrable en $[a, b]$, resulta que $v(R) = \int_a^b a_S(u)\, du$.

2.13. Ejercicios

1. Usa la integración para calculular el volumen de un cono circular recto engendrado haciendo girar alrededor del eje x la gráfica de la función f dada por $f(x) = xc$ en el intervalo $0 \leq x \leq b$. Demostrar que el resultado es el producto de un tercio del área de la base por la altura del cono.

   Demostración.- Primero podemos ver que el área de un sección transversal de este sólido de revolución es $\pi c^2 x^2$. Así, usando la ecuación del volumen de un sólido de Cavalieri tenemos,
   $$v(R) = \int_0^b \pi c^2 x^2\, dx = \pi c^2 \frac{x^3}{3}\bigg|_0^b = \pi c^2 \frac{b^3}{3}$$

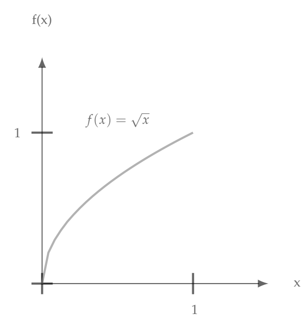
Dado que el área de la base es $\pi(cb)^2$, y en vista de que cb es el alto de $f(x) = cx$ a $x = b$ para luego girar alrededor del eje x, entonces tenemos

$$V = \frac{1}{3}a(B)h = \pi c^2 \frac{b^3}{3}$$

En cada uno de los ejercicios del 2 al 7, calcular el volumen del sólido engendrado al girar el conjunto de ordenadas de la función f sobre el intervalo indicado. Dibujar cada uno de los conjuntos de ordenadas.

2. $f(x) = \sqrt{x} \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

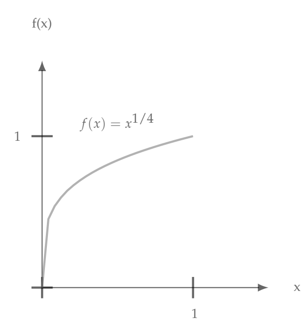


Entonces calculando el volumen del sólido se tiene,

$$V = \int_0^1 \pi\sqrt{x}^2\, dx = \int_0^1 \pi x\, dx = \pi\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

3. $f(x) = x^{1/4}, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

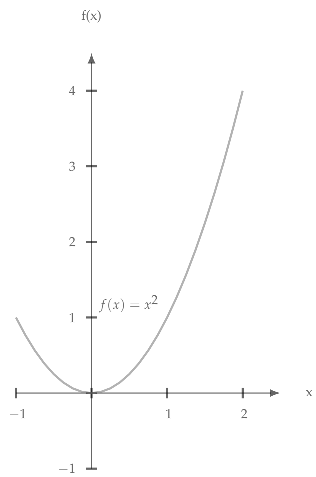


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$V = \int_0^1 \pi(x^{1/4})^2 = \int_0^1 \pi x^{1/2} = \pi\frac{2x^{3/2}}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

4. $f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2.$

Respuesta.-

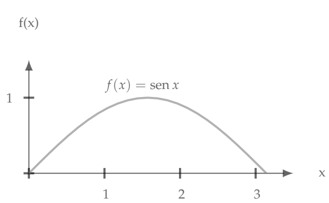


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$V = \int_{-1}^{2} \pi {x^2}^2 \, dx = \int_{-1}^{2} \pi x^2 \, dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{2} = \frac{33\pi}{5}.$$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq pi.$

Respuesta.-

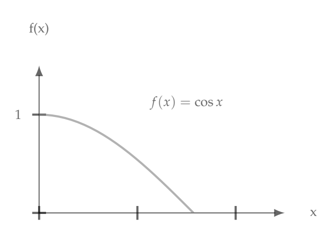


Calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$V = \int_{0}^{\pi} \pi \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} [1 - \cos(2x)] \, dx = \frac{\pi}{2}\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

6. $f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

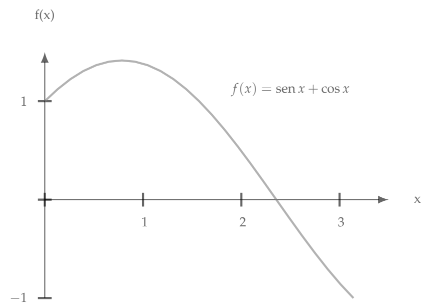


Calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$V = \int_0^{\pi/2} = \pi \cos^2 x\ dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} [1 - \cos(2x)]\ dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

Respuesta.-



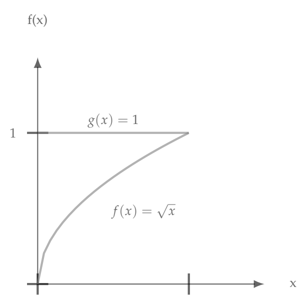
Calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$V = \int_0^{\pi} \pi(\operatorname{sen} x + \cos x)^2\ dx = \pi \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\ dx + \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} x \cos x + \int_0^{\pi} \cos^2 x\ dx \right) = \pi \left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} \right) = \pi^2.$$

En cada uno de los ejercicios 8 al 11, dibujar la región entre las gráficas de f y g y calcular el volumen del sólido obtenido al girar dicha región alrededor del eje x.

8. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

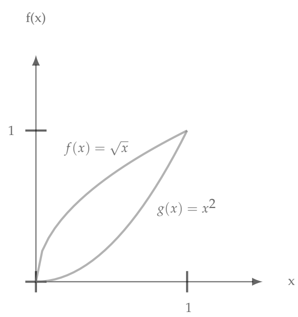


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^1 (1^2 - \sqrt{x}^2)\ dx = \pi \int_0^1 (1 - x)\ dx = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

9. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

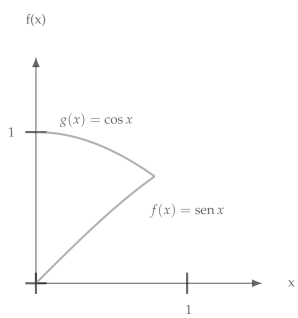


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^{2^2})\, dx = \pi \int_0^1 (x - x^4)\, dx = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}.$$

10. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/4.$

Respuesta.-

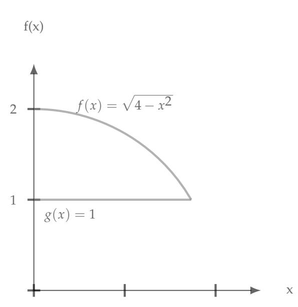


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

11. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{3}.$

Respuesta.-



Luego calculamos el volumen del sólido de revolución de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (4 - x^2 - 1)\ dx = 3\pi \int_0^{\sqrt{3}}\ dx - \pi \int_0^{\sqrt{3}} x^2\ dx = 3\pi\sqrt{3} - \pi\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3}.$$

12. Dibujar el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x/2$ sobre el intervalo $[0, 2]$. Encuentre un número t, $1 < t < 2$, de modo que la región entre los gráficos de f y g sobre el intervalo $[0, t]$ gira alrededor del eje x, engendra un sólido de revolución cuyo volumen es igual a $\pi t^3/3$.

Respuesta.- El volumen del sólido de revolución generado por la región entre los gráficos f y g en el intervalo $[0, t]$ es,

$$V = \pi \int_0^t \left(x - \frac{x^2}{4}\right)\ dx$$

Así,

$$\frac{\pi t^2}{3} = \int_0^t \left(x - \frac{x^2}{4}\right)\ dx \implies \frac{t^3}{3} = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^t - \left.\frac{x^3}{12}\right|_0^t \implies \frac{t^3}{3} = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{12} \implies 4t^3 = 6t^2 - t^3 \implies t = \frac{6}{5}.$$

13. ¿Qué volumen de material se quita de una esfera de radio $2r$ cuando se atraviesa con un taladro, formando un agujero centrado de radio r?.

Respuesta.- Primero, el volumen de una esfera de radio $2r$ es dado por,

$$V_S = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{32}{3}\pi r^3$$

entonces, el volumen de una esfera con un agujero centrado es el volumen del sólido de revolución generado por la región entre

$$f(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = r \quad \text{para} \quad -\sqrt{3}r \text{ hasta } \sqrt{3}r.$$

Denotemos en volumen por V_T de donde tenemos,

$$\begin{aligned} V_T &= \pi \left[\int_{-\sqrt{3}r}^{\sqrt{3}r} (4r^2 - x^2 - r^2)\ dx\right] \\ &= \pi \left[\int_{-\sqrt{3}r}^{\sqrt{3}r} (3r^2 - x^2)\ dx\right] \\ &= 4\sqrt{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen de material que se quita de una esfera cuando se atraviesa con un taladro es,

$$V_S - V_T = \frac{32}{3}\pi r^2.$$

14. Un servilletero se obtiene practicando un agujero cilíndrico en una esfera de modo que el eje de aquél pase por el centro de ésta. Si la longitud del agujero es $2h$, demostrar que el volumen del servilletero es $\pi a h^3$, siendo a un número racional.

Demostración.- Sea r_s el radio de la esfera y r_c el radio del agujero cilíndrico. Entonces el volumen del anillo es el volumen del sólido de revolución formado al rotación el área entre las funciones

$$f(x) = \sqrt{r_s^2 - x^2}, \quad g(x) = r_c, \quad -h \leq x \leq h$$

sobre el eje x. Dado que la longitud del agujero es $2h$, sabemos que $f(h) = g(h)$; por lo tanto $r_s^2 - h^2 = r_c^2 \implies r_s^2 - r_c^2 = h^2$. Así se tiene,

$$V = \pi \int_{-h}^{h} \left[\left(\sqrt{r_s^2 - x^2} \right)^2 - r_c^2 \right] \, dx = \pi \int_{-h}^{h} (r_s^2 - r_c^2 - x^2) \, dx = \pi h^2 (2h) - \pi \frac{x^3}{3} \bigg|_{-h}^{h} = \frac{4}{3} \pi h^3 = \pi a h^3$$

.

15. Un sólido tiene una base circular de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.

Demostración.- Podemos describir la mitad superior de la base circular del sólido mediante la ecuación

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

de donde, la longitud de la base de cualquier sección transversal triangular equilátera es,

$$2\sqrt{4 - x^2} \quad -2 \leq x \leq 2$$

Como estos son triángulos equiláteros, con lado de longitud $2\sqrt{4 - x^2}$, el área es dada por

$$a(x) = \sqrt{3}(4 - x^2)$$

Por lo tanto, calculando el volumen se tiene,

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{3}(4 - x^2) \, dx \\ &= 3\sqrt{3}(4) - \sqrt{3} \left(\frac{x^3}{3} \bigg|_{-2}^{2} \right) \\ &= 16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\sqrt{3} \\ &= \frac{32\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

16. las secciones transversales de un sólido son cuadrados perpendiculares al eje x con sus centros en el eje. Si el cuadrado cortado en x tiene arista $2x^2$, encuentra el volumen del sólido entre $x = 0$ y $x = a$. Haz un dibujo. El área de las secciones transversales son dados por,

$$A(x) = (2x^2)^2 = 4x^4$$

Así, el volumen del sólido para $0 \leq x \leq a$ será,

$$V = \int_0^a 4x^4 \, dx = \frac{4}{5} a^5.$$

17. Hallar el volumen de un sólido cuya sección transversal, por un plano perpendicular al eje x tiene de área $ax^2 + bx + c$ para x del intervalo $0 \leq x \leq h$. Expresar el volumen en términos de áreas B_1, M y B_2 de la sección transversal correspondiente a $x = 0$, $x = h/2$ y $x = h$, respectivamente.. La fórmula que resulta se conoce como fórmula del prismatoide.

Respuesta.- Ya que el área de la sección transversal en x está dada por $ax^2 + bx + c$, tenemos,

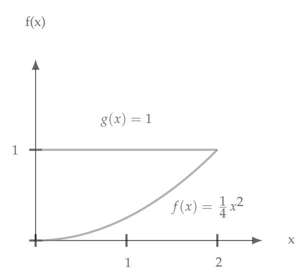
$$\begin{aligned} B_i &= c \\ M &= \frac{ah^2}{4} + \frac{bh}{2} + c \\ B_2 &= ah^2 + bh + c \end{aligned}$$

entonces, calculamos el volumen de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx \\ &= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch \\ &= \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c) \\ &= \frac{h}{6}(B_1 + 4M + B_2) \end{aligned}$$

18. Dibujar un esquema de la región en el plano xy formada por todos los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades simultaneas $0 \leq x \leq 2$, $\frac{1}{4}x^2 \leq y \leq 1$. Calcular el volumen del solido obtenido haciendo girar esta región: a) alrededor del eje x; b) alrededor del eje y c) alrededor de la vertical que pasa por $(2, 0)$; de la horizontal que pasa por $(0, 1)$.

Respuesta.-



Para el inciso $a)$, calculamos el volumen al girar sobre el eje de la siguiente manera

$$V = \pi \int_0^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right] dx = 2\pi - \frac{\pi}{16}\int_0^2 x^4\,dx = \frac{8\pi}{5}$$

Para el inciso $b)$ encontraremos una ecuación para $\frac{1}{4}x^2$ en términos de x, como sigue

$$y = \frac{1}{4}\,dx, \quad \Longrightarrow \quad |x| = 2\sqrt{y}$$

entonces calculamos el volumen de la siguiente manera al girar alrededor del eje de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^1 (2\sqrt{y})^2 \, dy = 2\pi$$

Para el inciso $c)$, calculamos el volumen de la siguiente manera al girar alrededor de la línea vertical de la $x = 2$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 4 \, dy \\ &= 4\pi - \pi \int_0^1 (4 - 8\sqrt{y} + 4y) \, dx \\ &= \frac{p\pi}{3} \end{aligned}$$

Y por último para el inciso d) calculamos el volumen de la siguiente manera al girar alrededor de la linea horizontal de la $y = 1$ de la siguiente manera.

$$V = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right)^2 \, dx = \frac{16\pi}{15}.$$

2.14. Aplicación de la integración al concepto del trabajo

Propiedad .3 (Propiedades fundamentales del trabajo)**.** Designemos con $W_a(f)$ el trabajo realizado por una función fuerza f al mover una partícula desde a hasta b. Entonces el trabajo tiene las siguientes propiedades:

1. Propiedad aditiva. Si $a < c < b$. Entonces $W_a^c(f) + W_c^b(f)$.

2. Propiedad monótona. Si $f \leq g$ en $[a,b]$, entonces $W_a^b(f) \leq W_a^b(g)$. Esto es una mayor fuerza realiza un mayor trabajo.

3. Fórmula elemental. Si f es constante, $f(x) = c$ para todo x in el intervalo abierto (a,b), entones $W_a^b(f) = c \cdot (b-a)$.

La propiedad aditiva puede extenderse por inducción para cualquier número infinito del intervalo. Esto es, si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, tenemos,

$$W_a^b(f) = \sum_{k=1}^{n} W_k$$

Donde W_k es el trabajo realizado por f desde x_{k-1} a x_k. En particular, si la fuerza es una función escalonada s que toma un valor constante s_k en el intervalo abierto $(x_{k-1} - x_k)$ la propiedad 3 establece que $W_k = s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$, con lo que

$$W_a^b(s) = \sum_{k=0} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b s(x)\, dx$$

Así pues, para funciones escalonadas, el trabajo se expresa como una integral. Es fácil demostrar que esto es cierto en casos más generales.

Teorema 2.8. Supóngase que el trabajo fue definido para una clase de funciones fuerza f de modo que satisface las propiedades 1, 2, 3. Entonces el trabajo efectuado por una función fuerza integrable f al mover una partícula desde a hasta b es igual a la integral de f.

$$W_a^b(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Demostración.- Sean s y t dos funciones escalonadas que satisfacen $s \leq f \leq t$ en $[a,b]$. La propiedad del trabajo establece que $W_a^b(s) \leq W_a^b(f) \leq W_a^b(t)$. Pero $W_a^b(s) = \int_a^b s(x)$ y $W_a^b(t) = \int_a^b t(x)\, dx$ de modo que el número $W_a^b(f)$ satisface las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\, dx \leq W_a^b(f) \leq \int_a^b t(x)\, dx$$

para todas las funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$ en $[a,b]$. Puesto que f es integrable en $[a,b]$, resulta que $W_a^b(f) = \int_a^b f(x)\, dx$.

2.15. Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2 se supone que la fuerza que actúa sobre el resorte obedece la ley de Hooke.

1. Si una fuerza de 10 libras alarga un muelle elástico 1 pulgada, ¿qué trabajo se realiza al alargar el muelle 1 pie?.

Respuesta.- Sea 1 pulgada = $\dfrac{1}{12}$ pie, entonces $f\left(\dfrac{1}{12}\right) = 10$ por lo tanto $c = 120$, luego

$$W = \int_0^1 120x\,dx = \Big|_0^1 = 60\ pies - libra$$

2. Un muelle tiene normalmente la longitud de 1 metro. Una fuerza de 100 newtons la comprime hasta 0.9 m. ¿Cuántos joules de trabajo se precisan para comprimirlo hasta la mitad de su longitud normal? ¿Cuál es la longitud del muelle cuando ya se han realizado 20 joules de trabajo?.

Respuesta.- Sea $f(100) = 100c = 0.1\ Longrightarrow\ c = 1000$ Luego calculamos cuanto trabajo es requerido para comprimir el muelle 0.5 metros,

$$W = \int_0^5 1000x\,dx = 1000\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^5\right) = 125 joules.$$

Como nos dan una cantidad de trabajo (20 loules) de donde resolveremos par un distacia a. Para la fórmula de trabajo tenemos,

$$\int_0^a 1000x\,dx \implies a = 0.2\ m$$

Dado que su longitud inicial es 1 m, tenemos que la longitud del resorte cuando se comprime es igual a $1m - 0.2m = 0.8m$.

3. Una partícula se mueve a lo largo del eje x mediante una fuerza impulsora $f(x) = 3x^2 + 4x$ newtons. Calcular cuántos joules de trabajo se realizan con esa fuera para trasladar la particular a) desde $x = 0$ hasta $x = 7$; b) desde $x = 2m$ hasta $x = 7m$.

Respuesta.- a) Usando la fórmula de trabajo entonces,

$$W = \int_0^7 (3x^2 + 4x)\,dx = x^3\Big|_0^7 + 2x^2\Big|_0^7 == 343 + 98 = 441\ joules.$$

b) Usando la fórmula de trabajo entonces,

$$W = \int_2^7 (3x^2 + 4x)\,dx = (x^3 + 2x^2)\Big|_2^7 == 441 - 16 = 425\ joules.$$

4. Una partícula se mueve a lo largo del eje x mediante una fuerza impulsadora dada por $f(x) = ax^2 + bx$ dinas. Calcular a y b de modo que se precisen 900 ergs de trabajo para desplazar la partícula $10cm$ a partir del origen, si la fuerza es de 65 dinas cuando $x = 4cm$.

Respuesta.- Dado $f(5) = 65$, entonces,

$$f(5) = 25a + 5b = 65 \implies b = 13 - 5a$$

luego, ya que 900 ergs de trabajo son requeridos para mover una partícula de $10cm$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\int_0^{10} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{ax^3}{3}\Big|0^{10} + \frac{bx^2}{2}\Big|_0^{10} = 900\\ &\Longrightarrow \quad \left(\frac{1000}{3}\right)a + 50b = 900\\ &\Longrightarrow \quad \left(\frac{1000}{3}\right)a + 650 - 150a = 900\\ &\Longrightarrow \quad a = 3, \qquad b = -2\end{aligned}$$

5. Un cable de 50 pies de longitud y 4 libras de peso por pie pende de un torno. Calcular el trabajo realizado al enrollar 25 pies de cable. No considerar más fuerzas que la gravedad.

Respuesta.- La función fuerza es $f(x) = 200 - 4x$, es decir, el peso total del cable menos 4 libras por pie, cuando enrollaos el cable. Se sigue que,

$$W = \int_0^{25} (200 - 4x)\,dx = 200 \cdot 25 - 2 \cdot 625 = 3750\ libras - pie.$$

6. Resolver el ejercicio 5 si se cuelga un peso de 50 libras en el extremo del cable.

Respuesta.- Dado que se tiene un peso de 50 libras en el extremo del cable, la función de fuerza ahora está dada por $f(x) = 250 - 4x$. Entonces, el trabajo requerido es,

$$W = \int_0^{25} (250 - 4x)\,dx = 6250 - 1250 = 5000\ libras - pie.$$

7. Un peso de 150 libras se fija en un extremo de una cadena cuyo peso es de 2 libras por pie. Inicialmente el peso se suspende con 10 pies de cadena sobre el borde de un edificio de 100 pies de altura. Considerando sólo la fuerza de gravedad, calcular el trabajo realizado cuando el peso se baja hasta una posición de 10 pies sobre el suelo.

Respuesta.- Dado que el edificio mide 100 pies y el extremo cuelga inicialmente 10 pies sobre el borde del edificio, comienza en una posición de 90 pies sobre el suelo. Se baja a 10 pies sobre el suelo. La fuerza de gravedad que actúa sobre la cadena es $f(x) = 150 + 2x$, por lo que el trabajo realizado es

$$W = \int_{10}^{90} (150 + 2x)\,dx0150 \cdot 80 + 90^2 - 10^2 = 2000\ libras - pies.$$

8. En el ejercicio 7, suponer que la cadena sólo tiene 60 pies de longitud y que el peso y la cadena se dejan caer al suelo, partiendo de la misma posición inicial que antes. Calcular el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad cuando el peso alcanza el suelo.

Respuesta.- Ahora tenemos una función de fuerza definida por partes: una parte mientras parte de la cadena aún está sobre el borde, y la otra parte una vez que toda la cadena está sobre el borde. Esta función es

$$f(x) = \begin{cases} 170 + 2x & para \quad 0 \le x \le 50 \\ 270 & para \quad 50 \le x \le 90 \end{cases}$$

Así, el trabajo realizado es,

$$W = \int_0^{50} (170 + 2x)\ dx + \int_{50}^{90} 270\ dx = 170 \cdot 50 + 50^2 + 270 \cdot (90 - 50) = 21800\ libras - pie.$$

9. Sea $V(q)$ el voltaje necesario para situar una carga q en las placas de un condensador. El trabajo necesario para cargar un condensador desde $q = a$ hasta $q = b$ se define mediante la integral $\int_a^b V(q)\ dx$. Si el voltaje es proporcional a la carga, demostrar que el trabajo realizado para situar una carga Q es un condensador descargado $\frac{1}{2}QV(Q)$.

Demostración.- Ya que asumimos que el voltaje es proporcional a la carga, tenemos $V(q) = cq$ para alguna constante c, entonces,

$$\begin{array}{rcl} W & = & \int_a^b V(q)\ dq \\ & = & \int_a^b cq\ dq \\ & = & c\frac{q^2}{2}\Big|_a^b \\ & = & \frac{1}{2}\left[cv(b) - cv(a)\right] \\ & = & \frac{1}{2}QV(Q) \end{array}$$

2.16. Valor medio de una función

Definición 2.2 (Definición del valor medio de una función en un intervarlo)**.** Si f es integrable en un intervalo $[a, b]$, definimos $A(f)$, el valor medio de f en $[a, b]$, por la siguiente fórmula

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

Podemos ahora demostrar que ésta la fórmula es en realidad una extensión del concepto de media aritmética. Sea f una función escalonada que es constante en cada uno de los subintervalos de $[a, b]$, obtenidos al dividirlo en n partes iguales. En particular, sea $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y supongamos que $f(x) = f(x_k)$, si $x_{x-1} < x < x_k$. Entonces será $x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$, con lo que se tiene

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Así pues, para funciones escalonadas, el promedio $A(f)$ coincide con la media aritmética de los valores $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ tomados en los intervalos en los que la función es constante.

Definición 2.3 (Definición del valor medio de una función en un intervarlo)**.**

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

Definición 2.4 (Primer momento al rededor de 0)**.**

$$\overline{x} = \frac{\int_0^b xp(x)\,dx}{\int_0^a p(x)\,dx} \text{ para } p \text{ llamada densidad de masa.}$$

Definición 2.5 (Segundo momento al rededor de 0 o momento de inercia)**.**

$$r^2 = \frac{\int_0^b x^2p(x)\,dx}{\int_0^a p(x)\,dx} \text{ para } p \text{ llamada densidad de masa.}$$

2.17. Ejercicios

1. $f(x) = x^2, \quad a \leq x \leq b.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+2ba+a^2}{3}.$$

2. $f(x) = x^2+x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (x^2+x^3)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

3. $f(x) = x^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{4-0}\int_0^4 x^{1/2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right|_0^4 = \frac{4}{3}.$$

4. $f(x) = x^{1/3}, \quad 1 \leq x \leq 8.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{8-1}\int_1^8 x^{1/3}\,dx = \frac{1}{7}\cdot\left.\frac{3x^{4/3}}{4}\right|_1^8 = \frac{48-3}{7} = \frac{45}{28}.$$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{\pi}\cdot(1-\cos\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

6. $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2+\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{1}{\pi}\cdot(\operatorname{sen}\pi/2+\operatorname{sen}\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{2}{2\pi}\int_{0\cdot 2}^{\frac{\pi}{2}\cdot 2} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{\pi}(1-\cos\pi) = \frac{2}{\pi}$$

.

8. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

9. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\pi = \frac{1}{2}.$$

10. $f(x) = \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq pi.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) = \frac{1}{2}.$$

11. (a) Si $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq a$, hallar un número c que satisfaga $0 < x < a$ y tal que $f(c)$ sea igual al promedio de f en $[0,a]$.

Respuesta.-

$$\frac{1}{a}\int_0^a x^2\, dx = c^2 \Longrightarrow \frac{1}{a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = c^2 \Longrightarrow c = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

(b) Resolver la parte (a) si $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo cualquiera.

Respuesta.- Generalizando el anterior ejercicio tenemos,

$$c^n = \frac{1}{a}\int_0^a x^n\,dx \Longrightarrow c = \frac{a}{(n+1)^{1/n}}.$$

12. Sea $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$. El valor medio de f en $[0,1]$ es $\frac{1}{3}$- Hallar una función peso no negativa w tal que la media ponderada de f en $[0,1]$, definida en 2.19 sea:

Respuesta.- Sabiendo que,

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

entonces

(a) $\dfrac{1}{2}$.

Será $w(x) = x$ para que $A(f) = \dfrac{1}{2}$. Como se verá a continuación.

$$A(f) = \frac{\int_a^b x \cdot x^2\,dx}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\dfrac{3}{5}$.

Sea $w(x) = x^2$, entonces

$$A(f) = \frac{\int_a^b x^2 \cdot x^2}{\int_0^1 x^2\,dx} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}.$$

(c) $\dfrac{2}{3}$.

Sea $w(x) = x^3$, entonces

$$A(f) = \frac{\int_a^b x^3 \cdot x^2}{\int_0^1 x^3\,dx} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

13. Sea $A(f)$ el promedio de f en $[a,b]$. Demuestre que el promedio tiene las siguientes propiedades:

(a) **Propiedad aditiva:** $A(f+g) = A(f) + A(g)$.

Demostración.- Sea

$$A(f+g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) + g(x)\,dx$$

entonces por la el teorema 1.17 (aditividad respecto al intervalo de integración) se tiene,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx = A(f) + A(g)$$

así queda demostrado la propiedad aditiva del valor medio de una función.

(b) Propiedad homogénea: $A(cf) = cA(f)$ si c es algún número real.

Demostración.- Sea
$$A(cf) = \frac{1}{b-a}\int_a^b c[f(x)]\,dx$$
entonces por el teorema 1.16 (linealidad respecto al integrando) se tiene,
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b c[f(x)]\,dx = c\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right] = cA(f).$$

(c) Propiedad monótona: $A(f) \leq A(g)$ si $f \leq g$ en $[a,b]$.

Demostración.- dado que $f(x) \leq g(x)$ entonces por el teorema de comparación (teorema 1.20) obtenemos que,
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \implies \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx \implies A(f) \leq A(g).$$

14. ¿Cuáles de la propiedades del problema 13 son validas para las medias ponderadas definidas en 2.19?.

Respuesta.- Para $A(f+g)$ tenemos,
$$\begin{aligned}
A(f+g) &= \frac{\int_a^b w(x)\,[f(x)+g(x)]\;dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\\
&= \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx + \int_a^b w(x)g(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\\
&= \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} + \frac{\int_a^b w(x)g(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\\
&= A(f) + A(g)
\end{aligned}$$

Para $A(cf)$ tenemos,
$$\begin{aligned}
A(cf) &= \frac{\int_a^b cf(x)w(x)\,dx}{int_a^b w(x)\,dx}\\
&= c\cdot\frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\\
&= cA(f)
\end{aligned}$$

Por último sea $f \leq q$ en $[a,b]$, entonces ya que w es no negativo tenemos, $w(x)f(x) \leq w(x)g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Se sigue por la propiedad monótona de la integral que,
$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx \leq \int_a^b w(x)g(x)\,dx$$

ya que w es no negativo, $\int_a^b w(x)\,dx$ también es no negativo y por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\int_a^b w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} & \leq & \dfrac{\int_a^b w(x)g(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \\ A(f) & \leq & A(g) \end{array}$$

15. Designamos por $A_a^b(f)$ el promedio de f en el intervalo $[a,b]$.

(a) Si $a < c < b$, demostrar que existe un número t que satisface $0 < t < 1$ tal que $A_a^b(f) = tA_a^c(f) + (1-t)A_c^b(f)$. Así pues, $A_a^b(f)$ es una media aritmética ponderada de $A_a^c(f)$ y $A_c^b(f)$.

Demostración.- Sea

$$\frac{c-a}{b-a}$$

entonces, ya que $a < c < b$, tenemos $0 < t < 1$, de donde,

$$1 - t = 1 - \frac{a-c}{a-b} = \frac{c-b}{a-b}$$

así,

$$\begin{array}{rl} = & \dfrac{c-a}{b-a} \cdot \dfrac{1}{c-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \dfrac{c-b}{a-b} \cdot \dfrac{1}{b-c} \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx \\ = & \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^c f(x)\,dx - \dfrac{1}{a-b} \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx \\ = & \dfrac{1}{b-a} \left[\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx \right] \\ = & \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \\ = & A_a^b(f) \end{array}$$

(b) Demostrar que el resultado de la parte (a) también es válido para medias ponderadas como las definidas por 2.19.

Demostración.- Sea

$$t = \frac{\int_a^c w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

entonces,

$$1 - t = \frac{\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^c w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} = \frac{\int_c^b w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

por lo tanto, $0 < t < 1$ ya que $a < c < b$ y w es no negativo. Luego,

$$
\begin{aligned}
t \cdot A_a^c(f) + (1+t) \cdot A_c^b(f) &= \frac{\int_a^c w(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \cdot \frac{\int_a^c w(x)f(x)\, dx}{\int_a^c w(x)\, dx} + \frac{\int_c^b w(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \cdot \frac{\int_c^b w(x)f(x)\, dx}{\int_c^b w(x)\, dx} \\
&= \frac{\int_a^c w(x)f(x)\, dx + \int_c^b w(x)f(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\
&= \frac{\int_a^b w(x)\, dx f(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\
&= A_a^b(f)
\end{aligned}
$$

En cada uno de los ejercicios del 16 al 21 se hace referencia a una varilla de longitud L situada en el eje x con un extremo en el origen. Con la densidad de masa ρ que se cita en cada caso, calcular (a) el centro de masa de la varilla, (b) el momentos de inercia en torno al origen, y (c) el radio de giro.

16. $\rho(x) = 1$ para $0 \neq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\overline{x} = \frac{\int_0^L x\rho(x)\, dx}{\int_0^L \rho(x)\, dx} = \frac{\int_0^L x\, dx}{\int_0^L\, dx} = \frac{\frac{L^2}{2}}{L} = \frac{L}{2}.$$

El momento de inercia es,

$$\int_0^L x^2\rho(x)\, dx = \int_0^L x^2\, dx = \frac{L^3}{3}.$$

El radio de giro es,

$$r^2 = \frac{\int_0^L x^2\, dx}{\int_0^L \rho(x)\, dx} = \frac{\frac{L^3}{3}}{L} = \frac{L^2}{3}$$

$$r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

17. $\rho(x) = 1$ para $0 \leq x \leq \dfrac{L}{2}$, $\rho(x) = 2$ para $\dfrac{L}{2} < x \leq < L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\, dx}{\int_0^L \rho(x)\, dx} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} + \int_{\frac{L}{2}}^L 2x\, dx}{\int_0^{\frac{L}{2}}\, dx + \int_{\frac{L}{2}}^L 2\, dx} \\
&= \frac{\frac{L^2}{8}}{\frac{3L^2}{4}} \frac{L}{2} + L \\
&= \frac{7L}{12}.
\end{aligned}
$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned}\int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L 2x^2\,dx\\ &= \frac{L^3}{24} + \frac{2L^3}{3} - \frac{L^3}{12}\\ &= \frac{5L^3}{8}.\end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned}r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx}\\ &= \frac{\frac{5L^3}{8}}{\frac{3L}{2}}\\ &= \frac{5L^2}{12}\\ &= \frac{\sqrt{5}L}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

18. $\rho(x) = x$ para $0 \leq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx}\\ &= \frac{\int_0^L x^2\,dx}{\int_0^L x\,dx}\\ &= \frac{\frac{L^3}{3}}{\frac{2L}{3}}.\\ &= \frac{2L}{3}.\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned}\int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^L x^3\,dx\\ &= \frac{L^4}{4}.\end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^2}{2}} \\
&= \frac{L^2}{2}
\end{aligned}
$$

19. $\rho(x) = x$ para $0 \leq x \leq \dfrac{L}{2}$, $\rho(x) = \dfrac{L}{2}$ para $\dfrac{L}{2} \leq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L}{2}x\,dx}{\int_0^{\frac{L}{2}} x\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L}{2}\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{4} - \frac{L^3}{16}}{\frac{L^2}{8} + \frac{L^2}{4}} \\
&= \frac{11L}{18}.
\end{aligned}
$$

El momento de inercia es,

$$
\begin{aligned}
\int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^{\frac{L}{2}} x^3\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L x^2\,dx \\
&= \frac{L^3}{64} + \frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{48} \\
&= \frac{31L^4}{192}
\end{aligned}
$$

El radio de giro es,

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\frac{31L^4}{192}}{\frac{3L^2}{8}} \\
&= \frac{31L^2}{72}.
\end{aligned}
$$

20. $\rho(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\ &= \frac{\int_0^L x^3\,dx}{\int_0^L x^2\,dx} \\ &= \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^3}{3}} \\ &= \frac{3L}{4} \end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\int_0^L x^2\rho(x)\,dx = \int_0^L x^4\,dx = \frac{L^5}{5}.$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\ &= \frac{\frac{L^5}{5}}{\frac{L^3}{3}} \\ &= \frac{3L^3}{5} \end{aligned}$$

21. $\rho(x) = 0x^2$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $\rho(x) = \dfrac{L^2}{4}$ para $\dfrac{L}{2} \leq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} x^3\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L x\frac{L^2}{4}\,dx}{\int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L^2}{4}\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^4}{64} + \frac{L^4}{32}}{\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{8}} \\
&= \frac{\frac{7L^4}{64}}{\frac{L^3}{6}} \\
&= \frac{21L}{32}
\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned}
\int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^{\frac{L}{2}} x^4\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L x^2\frac{L^2}{4}\,dx \\
&= \frac{L^5}{160} + \frac{7L^5}{96} \\
&= \frac{16L^5}{240}
\end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\frac{19L^5}{240}}{\frac{L^3}{6}} \\
&= \frac{19L^2}{40}
\end{aligned}$$

22. Determine la densidad de masa ρ para que el centro de masa de una barra de longitud L esté a una distancia L/4 de un extremo de la varilla.

Respuesta.- Sea

$$\rho(x) = x^2\ mboxpara\ 0 \leq x \leq L$$

entonces calculamos el centro de masa de la barra,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^L x^3\,dx}{\int_0^L x^2\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^3}{4}} \\
&= \frac{3L}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masa está a una distancia $L/4$ de un extremo de la barra.

23. En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ en el tiempo t está dado por la fórmula $e(t) = 3\operatorname{sen} 2t$. Calcular: (a) el voltage medio sobre el intervalo de tiempo $[0, \pi/2]$; (b) la raíz cuadrada media del voltaje; esto es, la raíz cuadrada de la media de la función e^2 en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Respuesta.- Notemos que la media de $e(t)$ como $A(e)$,

$$\begin{aligned}
A(e) &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2t\,dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ dt} \\
&= \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} 2t\,dt} \\
&= \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt \\
&= \frac{3}{\pi}(1-\cos\pi) \\
&= \frac{6}{\pi}
\end{aligned}$$

La raíz cuadrada media viene dada por la raíz cuadrada de la función e^2 sobre el intervalo $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, así,

$$\begin{aligned}
R^2 &= \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\operatorname{sen}^2 2t\,dt\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{9}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\frac{9}{2}} \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Donde usamos la fórmula de la solución del ejemplo 3 página 101, para calcular la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$.

24. En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ y la corriente $i(t)$ en el tiempo t son dados por las fórmulas $e(t) = 160 \operatorname{sen} t$, $i(t) = 2\operatorname{sen}(t - \pi/6)$. La potencia media se define como

$$\frac{1}{T}\int_0^T e(t)i(t)\, dx$$

donde T es el periodo del voltaje y la corriente. Determine T y calcule la potencia media.

Respuesta.- Primero, ya que el voltaje está dado por $e(t) = 160 \operatorname{sen} t$ sabemos que tiene periodo 2π, así $T = 2\pi$. Entonces podemos calcular la potencia promedio como sigue,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 320 \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\, dt \\
&= \frac{160}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \left(\operatorname{sen} t \cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos t\right)\, dt \\
&= \frac{160}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\cos t\, dt\right) \\
&= \frac{160}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2t)\, dt - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2t\, dt\right) \\
&= \frac{80\sqrt{3}}{2\pi}(2\pi - 0) - \frac{40}{\pi}\cdot 0 \\
&= 80\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

2.18. La integral como función de límite superior. Integrales indefinidas

Si f es no negativa en $[a, b]$, la integral indefinida A es creciente, puesto que se tiene

$$A(y) - A(x) = \int_a^y f(t)\, dx - \int_a^x f(t)\, dx = \int_x^y f(t)\, dx \geq 0$$

siempre que $a \leq x \leq b$.

Definición 2.6 (Definición de función convexa)**.** Una función g se llama convexa en un intervalo $[a, b]$ si, para todo x e y en $[a, b]$ y para cada α tal que $0 < \alpha < 1$, tenemos

$$g(z) \leq \alpha g(y) + (1-\alpha)g(x), \text{ donde } <= \alpha y + (1-\alpha)x$$

Decimos que g es cóncava en $[a, b]$ si es válida la desigualdad invertida,

$$g(z) \geq \alpha g(y) + (1-\alpha)g(x), \text{ donde } <= \alpha y + (1-\alpha)x$$

Teorema 2.9. Sea $A(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Entonces, A es convexa en cada intervalo donde f es creciente , y cóncavo en cada intervalo donde f es decreciente.

Demostración.- Supongamos que f es creciente en $[a,b]$, elijamos $x < y$, y sea $z = \alpha y + (1-\alpha)x$. Tenemos que demostrar que $A(z) \leq \alpha A(y) + (1-\alpha)A(x)$.

2.19. Ejercicios

Calcular las integrales de los ejercicios 1 al 16.

1. $\displaystyle\int_0^x (1+t+t^2)\ dt = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$

2. $\displaystyle\int_0^{2y} (1+t+t^2)\ dt = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{2y} = 2y + 2y^2 + \frac{8y^2}{3}.$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{2x} (1+t+t^2)\ dx = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2x} = 2x + 1 + \frac{4x^2-1}{2} + \frac{8x^3+1}{3} = \frac{16x^3+12x^2+12x+5}{6}.$

4. $\displaystyle\int_1^{1-x} (1-2t+3t^2)\ dx = \left(t+t^2+t^3\right)\Big|_1^{1-x} = 1-x-1+(1-x)^2+1+(1-x)^3-1 = (1-x)^3+(1-x)^2+(1-x)-1 = -x^3+2x^2-2x$

5. $\displaystyle\int_{-2}^x t^2(t^2+1)\ dt = \int_{-2}^x (t^4+t^2)\ dt = \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-2}^x = \left(\frac{x^5}{5}\right) - \left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{136}{15}.$

6. $\displaystyle\int_x^{x^2} (t^2+1)^2\ dt.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_x^{x^2} (t^2+1)^2\ dt &= \int_x^{x^2} (t^4+2t^2+1)\ dt \\
&= \left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t\right)\Big|_x^{x^2} \\
&= \left(\frac{x^10}{5} + \frac{2x^5}{3} + x^2\right) - \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{5} + x\right) \\
&= \frac{x^{10}}{5} + \frac{2x^6}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x
\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int_1^x (t^{1/2}+1)\ dt, \quad x > 0.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \int_1^x (t^{1/2}+1)\,dt &= \left(\frac{2t^{2/3}}{3}+t\right)\Big|_1^x \\ &= \left(\frac{2x^{2/3}}{3}+x\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2x^{2/3}}{3}+x-\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

8. $\displaystyle\int_x^{x^2} (t^{1/2}+t^{1/4})\,dt, \quad x>0.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} (t^{1/2}+t^{1/4})\,dt &= \left(\frac{2t^{2/3}}{3}+\frac{4t^{5/4}}{5}\right)\Big|_x^{x^2} \\ &= \left(\frac{2x^3}{3}-\frac{4x^{5/2}}{5}\right)-\left(\frac{2x^{2/3}}{3}+\frac{4x^{5/4}}{5}\right) \\ &= \frac{2}{3}(x^3-x^{3/2})+\frac{4}{5}(x^{5/2}-x^{5/4}) \end{aligned}$$

9. $\displaystyle\int_{-\pi}^{x} cost\;dt = \operatorname{sen} t\Big|_{-\pi}^{x} = \operatorname{sen} x.$

10. $\displaystyle\int_0^{x^2} (\frac{1}{2}+\cos t)\,dt = \left(\frac{t}{2}+\operatorname{sen} t\right)\Big|_0^{x^2} = \frac{x^2}{2}+\operatorname{sen} x^2.$

11. $\displaystyle\int_x^{x^2} (\frac{1}{2}-\operatorname{sen} t)\,dt = \frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\cos x+\cos x^2.$

12. $\displaystyle\int_0^{x} (u^2+\operatorname{sen} 3u)\,du = \int_0^x u^2\,du+\frac{1}{3}\int_0^{3x}\operatorname{sen} u\,du0\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}(-\cos u)\Big|_0^{3x} = \frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos 3x.$

13. $\displaystyle\int_x^{x^2} (v^2+\operatorname{sen} 3v)\;\;dt \;=\; \int_x^{x^2} v^2\;\;dv+\int_x^{x^2}\operatorname{sen} 3v\;\;dv \;=\; \left(\frac{x^6}{3}-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{3}\int_{3x}^{3x^2}\operatorname{sen} v\;\;dv \;=\; \frac{1}{3}(x^6-x^3+$ $\cos 3x-\cos^2 3x).$

14. $\displaystyle\int_0^{y} (\operatorname{sen}^2 x+x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^y (1-\cos 2x)\,dx+\int_0^y x\,dx = \frac{y}{2}-\frac{1}{4}\int_0^y \cos x\,dx+\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{4}\operatorname{sen} y+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}.$

15. $\displaystyle\int_0^{x} \left(\operatorname{sen} 2w+\cos\frac{w}{2}\right)\,dw.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\operatorname{sen} 2w + \cos\frac{w}{2}\right)\, dw &= \frac{1}{2}\int_0^{2x} \operatorname{sen} w\, dw + 2\int_0^{\frac{x}{2}} \cos w\, dw \\
&= \frac{1}{2}(-\cos w)\Big|_0^{2x} + 2(\operatorname{sen} w)\Big|_0^{\frac{x}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

16. $\displaystyle\int_{-\pi}^{x} (\frac{1}{2} + \cos t)^2\, dt.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x} (\frac{1}{2} + \cos t)^2\, dt &= \int_{-\pi}^{x} \left(\frac{1}{4} + \cos t + \cos^2 t\right)\, dt \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{x} t\, dt + \int_{-\pi}^{x} \cos t\, dt + \int_{-\pi}^{x} \cos^2 t\, dt \\
&= \frac{1}{4}(x+\pi) + [\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(-\pi)] + \int \int_{-\pi}^{x} \frac{1}{2}[1 + \cos(2t)]\, dt \\
&= \frac{1}{4}(x+\pi) + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}(x+\pi) + \frac{1}{4}\int_{-2\pi}^{2x} \cos t\, dt \\
&= \frac{3}{4}(x+\pi) + \operatorname{sen} x + \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} x\Big|_{-2\pi}^{2x}\right) \\
&= \frac{3}{4}(x+\pi) + \operatorname{sen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.
\end{aligned}$$

17. Encuentre todos los valores reales de x tal que

$$\int_0^x (t^3 - t)\, dt = \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{x} (t - t^3)\, dt.$$

Dibuja una figura adecuada e interpreta la ecuación geométricamente.

Respuesta.- Primeramente evaluamos la integral de la izquierda.

$$\int_0^x (t^3 - t)\, dt = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}.$$

luego evaluamos la integral de la derecha.

$$\frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{x} (t - t^3)\, dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)$$

así, igualando los dos resultados nos que da

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)$$

Se ve claramente que una solución es $x = 0$. Si $x \neq 0$ entonces podemos dividir por x^2 y obtenemos,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right) \implies \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3} \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}.$$

de donde concluimos que las soluciones vienen dadas por $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

18. Sea $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ si x no es un entero, y sea $f(x) = 0$ si x es un entero. (Se denota $[x]$ como el entero mayor $\leq x$). Definir una nueva función P como sigue:

$$P(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{para cada real } x$$

(a) Graficar f sobre el intervalo $[-3, 3]$ y demostrar que f es periódico con periodo 1; $f(x+1) = f(x)$ para todo x.

Demostración.- Tenemos

$$\begin{array}{rcl} f(x-1) & = & (x+1) - [x+1] - \frac{1}{2} \\ & = & (x+1) - ([x]+1) - \frac{1}{2} \\ & = & x + 1 - [x] - 1 - \frac{1}{2} \\ & = & x - [x] - \frac{1}{2} \\ & = & f(x) \end{array}$$

Por lo que queda demostrada la proposición.

(b) Demostrar que $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$, si $0 \leq x \leq 1$ y que P es periódico con periodo 1.

Demostración.- Primero estableceremos la fórmula requerida,

$$\begin{array}{rcl} P(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & = & \displaystyle\int_0^x \left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)\,dt \\ & = & \displaystyle\int_0^x t\,dt - \int_0^x [t]\,dt - \int_0^x \frac{1}{2}\,dt \\ & = & \displaystyle\int_0^x t\,dt - 0 - \int_0^x \frac{1}{2}\,dt \\ & = & \displaystyle\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x - \left.\frac{t}{2}\right|_0^x \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}(x^2 - x) \end{array}$$

Notemos $\int_0^x [t]\,dt = 0$.
Ahora probemos que $P(x)$ es periodico con periodo 1.

$$\begin{array}{rcl} P(x+1) & = & \displaystyle\int_0^{x+1} f(t)\,dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt + \int_x^{x+1} f(t)\,dt \\ & = & \displaystyle P(1) + \int_x^{x+1} f(t)\,dt \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} &= P(1) + \int_0^x f(t+1)\ dt \\ &= P(1) + \int_0^x f(t)\ dt \end{aligned}$$

Vemos que f es periódica. Por último podemos resolver para $P(1)$, donde

$$P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x) \implies P(1) = \frac{1}{2}(1^2 - 1) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &= P(1) + \int_0^x f(t)\ dt \\ &= 0 + \int_0^x f(t)\ dt \\ &= \int_0^x f(t)';dt \\ &= P(x) \end{aligned}$$

(c) Expresar $P(x)$ in términos de $[x]$.

Demostración.- Para expresar $P(x)$ en términos de $[x]$ calculamos como sigue:

$$\begin{aligned} P(x) = \int_0^x f(t)\ dt &= \int_0^1 f(t)\ dt + \int_1^2 f(t)\ dt + \ldots + \int_{[x]}^x f(t)\ dt \\ &= 0 + 0 + \ldots + \int_{[x]}^x f(t)\ dt \end{aligned}$$

donde $f(t + [x]) = f(t)$ ya que $[x]$ es un entero y f tiene periodo 1.

Así $f(t + n) = f(t)$ para cualquier entero n. Luego,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{x-[x]} \left(t - [t] - \frac{1}{2} \right)\ dt \\ &= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{x-[x]} - \left. \frac{t}{2} \right|_0^{x-[x]} \end{aligned}$$

Aquí, sabemos que $[t]$ en la integral es cero ya que $[t] = 0$ para todo $t \in [0, [x]]$. Por último ya que $x - [x] < 1$ entonces,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2}\left[(x - [x])^2 - x + [x] \right] \\ &= \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) \end{aligned}$$

Esta es la expresión que se obtiene.

(d) Determinar una constante c tal que $\int_0^1 [P(t)+c]\ dt = 0$.

Respuesta.- Usando la fórmula de $P(x)$ de la parte (c) resolvemos el problema dado.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (P(t)+c)\,dt \quad &\Longrightarrow \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(t-[t])^2 - \frac{1}{2}(t+[t]) + c\right)\,dt = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,dt + \int_0^1 c\,dt = 0 \\
&\Longrightarrow \quad c = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

(e) Para la constante c de la parte (d), sea $Q(x) = \int_0^x [P(t)+c]\ dt$. Demostrar que Q es periódico con periodo 1 y que

$$Q(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \quad \text{si } 0 \le x \le 1.$$

Demostración.- Primero probaremos que Q es periódico con periodo 1.

$$\begin{aligned}
Q(x+1) &= \int_0^{x+1} \left(P(t) + \frac{1}{12}\right)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(P(t)+\frac{1}{12}\right) + \int_t^{x+1} \left(P(t)+\frac{1}{12}\right)\,dt \\
&= 0 + \int_0^x \left(P(t+q)\frac{1}{12}\right)\,dt \\
&= \int_0^x \left(P(t)+\frac{1}{12}\right)\,dt \\
&= Q(x)
\end{aligned}$$

Luego, si $0 \le x \le 1$ entonces,

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \int_0^x \left(P(t)+\frac{1}{12}\right)\,dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{2}(t-[t])^2 - \frac{1}{2}(t-[t]) + \frac{1}{12}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x t\,dt + \frac{1}{12}\int_0^x\,dt
\end{aligned}$$

donde todos los $[t]$ son 0 para $0 \le t \le 1$, así,

$$\begin{aligned}
&= \left.\frac{t^3}{6}\right|_0^x - \left.\frac{t^2}{4}\right|_0^x + \left.\frac{t}{12}\right|_0^x \\
&= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}
\end{aligned}$$

como queriamos encontrar.

19. Dado una función función f, definida en todas partes, periódica con periodo 2, e integrable en todo intervalo. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

(a) Demostrar que $g(2n) = 0$ para cada entero n.

Demostración.- Podemos establecer esto por un calculo directo.

$$\begin{aligned} g(2n) &= \int_0^2 nf(t)\,dt \\ &= \int_{-2n}^0 f(t+2n)\,dt \\ &= \int_{-2n}^0 f(t)\,dt \\ &= -\int_0^{-2n} f(t)\,dt \\ &= \int_0^{2n} f(-t)\,dt \\ &= -\int_0^{2n} f(t)\,dt \end{aligned}$$

Pero entonces tenemos,

$$\int_0^{2n} f(t)\,dt = -\int_0^{2n} f(t)\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{2n} f(t)\,dt = 0$$

Ya que $f(2n) = \int_0^{2n} f(t)\,dt$ entonces tenemos el resultado es,

$$g(2n) = \int_0^{2n} f(t)\,dt = 0.$$

(b) Demostra que g es par y periodico de periodo 2.

Demostración.- Para demostrar que f es par necesitamos mostrar $g(-x) = g(x)$ para todo x. Utilizaremos el hecho que f es impar como también la propiedad de expación-contración de la integral. (teorema 1.19 con $k = -1$).

$$\begin{aligned} g(-x) &= \int_0^{-x} f(t)\,dt \\ &= -\int_0^x f(-t)\,dt \\ &= \int_0^x f(t)\,dt \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Luego, mostraremos que g es periódica con periodo 2, es decir, debemos demostrar que $g(x+2) =$

$g(x)$ para todo x.

$$\begin{aligned}
g(x+2) &= \int_0^{x+2} f(t)\,dt \\
&= \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^{x+2} f(t)\,dt \\
&= 0 + \int_0^x f(t+2)\,dt \\
&= \int_0^2 f(t)\,dt \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

20. Dado una función par f, definida en todas partes, periódica con periodo 2, e integrable en todo intervalo. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ y sea $A = g(1)$.

(a) Demostrar que g es impar y que $g(x+2) - g(x) = g(2)$.

Demostración.- Usaremos la expanción-contracción del intervalo de intregración,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{t}{k}\right)\,dt$$

donde en este caso $k = -1$. De donde,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{-x} f(t)\,dt \\
&= \int_0^x f(-t)\,dt \\
&= \int_0^x f(t)\,dt \\
&= -g(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, g es impar.

Por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned}
g(x+2) - g(x) &= \int_0^{x+2} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\
&= \int_0^x f(t)\,dt + \int_2^{x+2} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\
&= g(2) + \int_0^x f(t+2)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\
&= g(2) + \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\
&= g(2)
\end{aligned}$$

(b) Calcular $g(2)$ y $g(5)$ e terminos de A.

Respuesta.- Primeramente encontraremos $f(2)$. Sea $x = 1$, donde,

$$g(x+2) - g(x) = g(2) \implies g(3) - g(1) = g(2)$$

así,

$$\begin{aligned}
g(2) &= g(3) - g(1) \\
&= \int_0^3 f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \\
&= \int_0^3 f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \\
&= \int_1^3 f(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^1 f(t+2)\,dt \\
&= \int_{-1}^1 f(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^0 f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt \\
&= -\int_1^0 f(-t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt \\
&= \int_1^0 f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt \\
&= 2\int_0^1 f(t)\,dt \\
&= 2 \cdot g(1) \\
&= 2A
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$g(2) = g(3) - g(1) \implies 2A = g(3) - A \implies g(3) = 2A + A = 3A$$

Y finalmente para encontrar $g(5)$ suponemos que $x = 3$,

$$g(x+2) - g(x) = g(2) \implies g(5) - g(3) = g(2) \implies g(5) = 2A + 3A = 5A$$

(c) Para que valor de A será g periodica con periodo 2?

Respuesta.- g es periódica con periodo 2 por lo tanto,

$$\begin{aligned}
g(x+2) = g(x) \quad \implies \quad g(x+2) - g(x) &= 0 \\
g(0+2) - g(0) &= 0 \\
g(2) - 0 &= 0 \\
2A &= 0 \\
A &= 0
\end{aligned}$$

21. Dadas dos funciones f y g, integrables en todo intervalo y teniendo las siguientes propiedades: f es par, g es impar, $f(5) = 7$, $f(0) = 0$, $g(x) = f(x+5)$, $f(x) = \int_0^x g(t)\ dt$ para todo x. Demostrar que (a) $f(x-5) = -g(x)$ para todo x; (b) $\int_0^5 f(t)\ dt$; (c) $\int_0^x f(t)\ dt = g(0) - g(x)$.

Demostración.- para la (a) calculemos usando las propiedades dadas:

$$f(x+5) = g(x) \implies g(-x) = f(-x+5) \implies -g(x) = f(x-5)$$

donde g es impar y f es par.

Para la parte (b) una vez más calculamos usando las propiedades para f y g:

$$\int_0^5 f(t)\ dt = \int_0^5 g(t-5)\ dt = \int_{-5}^0 g(t)\ dt = -\int_5^0 g(-t)\ dt = \int_0^5 g(t)\ dt = f(5) = 7$$

Finalmente para (c):

$$\int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x g(t-5)\ dt = \int_{-5}^{x-5} = \int_{-5}^0 g(t)\ dt + \int_0^{x-5} g(t)\ dt = f(5) + f(x-5) = g(0) - g(x).$$

3

Funciones continuas

3.3. Definición de límite de una función

La continuidad existe si existe continuidad por la izquierda y por la derecha.

Definición 3.1 (Definición de entorno de un punto)**.** Cualquier intervalo abierto que contenga un punto p como su punto medio se denomina entorno de p.

Notación.- Designemos los entornos con $N(p), N_1(p), N_2(p)$, etc. Puesto que un entorno $N(p)$ es un intervalo abierto simétrico respecto a p, consta de todos los números reales x que satisfagan $p - r < x < p + r$ para un cierto $r > 0$. El número positivo r se llama radio del entorno. En lugar de $N(p)$ ponemos $N(p;r)$ si deseamos especificar su radio. Las desigualdades $p - r < x < p + r$ son equivalentes a $-r < x - p < r$, y a $|x - p| < r$. Así pues, $N(p;r)$ consta de todos los puntos x , cuya distancia a p es menor que r.
En la definición que sigue suponemos que A es un número real y que f es una función definida en un cierto entorno de un punto p (excepción hecha acaso del mismo p). La función puede estar definida en p pero esto no interviene en la definición.

Definición 3.2 (Definición de límite de una función)**.** El simbolismo

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \qquad [\text{o } f(x) \to A \quad x \to p]$$

significa que para todo entorno $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x \neq p$$

El entorno $N_1(A)$ se cita en primer lugar, e indica cuán próximo queremos que sea $f(x)$ a su límite A. El segundo entorno, $N_2(p)$, nos indica lo próximo que debe estar x de p para que $f(x)$ sea interior al primer entorno $N_1(p)$. El entorno $N_2(p)$ dependerá del $N_1(A)$ elegido. Un entorno $N_2(p)$ que sirva para un $N_1(A)$ determinado servirá también, naturalmente, para cualquier $N_1(A)$ mayor, pero puede no ser útil para todo $N_1(A)$ más pequeño.
Decir que $f(x) \in N_1(A)$ es equivalente a la desigualdad $|f(x) - A| < \epsilon$ y poner que $x \in N_2(p),\ x \neq p$ es lo mismo que escribir $0 < |x - p| < \delta$. Por lo tanto, la definición de límite puede también expresarse así:

El símbolo $\lim_{x \to p} f(x) = A$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta.$$

Observamos que las tres desigualdades,

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \lim_{x\to p}(f(x) - A) = 0, \lim_{x\to p}[f(x) - A] = 0$$

Son equivalentes. También son equivalentes las desigualdades,

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \lim_{h\to 0} f(p+h) = A.$$

Todas estas se derivan de la definición de límite.

Definición 3.3 (Límites laterales)**.** Los límites laterales pueden definirse en forma parecida. Por ejemplo, si $f(x) \to A$ cuando $x \to p$ con valores mayores que p, decimos que A es el límite por la derecha de f en p, indicamos esto poniendo

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = A.$$

En la terminología de los entornos esto significa que para todo entorno $N_1(A)$, existe algún entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \quad \text{y} \quad x > p.$$

Los límites a la izquierda, que indican poniendo $x \to p^-$, se definen del mismo modo restringiendo x a valores menores que p.

3.4. Definición de continuidad de una función

Definición 3.4 (Definición de continuidad de una función en un punto)**.** Se dice que una función f es continua en un punto p si

a) f está definida en p, y

b) $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Esta definición también puede formularse con entornos. Una función f es continua en p si para todo entorno $N_1[f(p)]$ existe un entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \in N_2(p).$$

Puesto que $f(p)$ pertenece siempre a $N_1[f(p)]$, no se precisa la condición $x \neq p$.

Especificando los radios de los entornos, la definición de continuidad puede darse como sigue:

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \text{ siempre que } |x - p| < \delta.$$

3.5. Teoremas fundamentales sobre límites. Otros ejemplos de funciones continuas.

4

Álgebra vectorial

4.2. El espacio vectorial de las n-plas de números reales

Definición 4.1. Dos vectores A y B de V_n son iguales siempre que coinciden sus componentes. Esto es, si $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ..., b_3)$, la ecuación vectorial $A = B$ tiene exactamente el mismo significado que las n ecuaciones escalares

$$a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2, \qquad a_n = b_n$$

La suma $A + B$ se define como el vector obtenido sumando los componentes correspondientes:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

La c es un escalar, definimos cA o Ac como el vector obtenido multiplicando cada componente de A por c:

$$cA = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$$

Teorema 4.1. **a.** La adición de vectores es conmutativa.

$$A + B = B + A$$

Demostración.- Sea V_n el espacio vectorial n-plas y $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ...b_n)$, por lo tanto por definición de adición y propiedad de números reales, tenemos

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, ..., b_n + a_n) = B + A$$

.

b. y asociativa,

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Demostración.- Sea V_n el espacio vectorial n-plas y $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ y $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ entonces

$$A + (B + C) = A + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, ..., b_n + c_n) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), ..., a_1 + (b_n + c_n)) =$$

$$((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, ..., (a_n + b_n) + c_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., b_n + c_n) + C = (A + B) + C$$

c. La multiplicación por escalares es asociativa

$$c(dA) = (cd)A$$

Demostración.- Sea $c, d \in \mathbb{R}$ y $A \in V_n$ entonces

$$\begin{array}{rcl} c(dA) & = & c(da_1, da_2, ..., da_n) \\ & = & ((cd)a_1, (cd)a_2, ..., (cd)a_3) \\ & = & (cd)A \end{array}$$

d. y satisface las dos leyes distributivas

$$c(A+B) = cA + cB, \quad y \quad (c+d)A = cA + dA$$

Demostración.- Las demostraciones son fáciles de realizar siempre y cuando se tomen en cuenta Las definiciones de 12.1.

e. El vector con todos los componentes 0 se llama vector cero y se representa con O. Tiene la propiedad.

Demostración.- Existencia. Sea $O = (o, o, ..., o)$ de donde $A + O = (a_1, a_2, ..., a_n) + (o, o, ..., o) = (a_1 + o, a_2 + o, ..., a_n + o) = (a_1, a_2, ..., a_n) = A$.
Unicidad. Supongamos que $O, O' \in V_n; O \neq O$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} A + O = A & tomando\ A = O': \quad O' + O = O' \\ A + O' = A & tomando\ A = O: \quad O + O' = O \end{array} \right.$$

Por lo tanto $O = O'$.

f. El vector $(-1)A$ que también se representa con $-A$ se llama el apuesto a A. También escribimos $A - B$ en lugar de $A + (-B)$ y lo llamamos diferencia de A y B. La ecuación $(A + B) - B = A$. Demuestra que la sustracción es la operación inversa de la adición. Obsérvese que $0A = O$ y que $1A = A$.

4.3. Interpretación geométrica para $n \leq 3$

Definición 4.2. Dos vectores A y B de V_n tienen la misma dirección si $B = cA$ para un cierto escalar positivo c, y la dirección opuesta si $B = cA$ para un cierto c negativo. Se llaman paralelos si $B = cA$ para un cierto c no nulo.

4.4. Ejercicios

1. Sean $A = (1, 3, 6)$, $B = (4, -3, 3)$ y $C = (2, 1, 5)$ tres vectores de V_3. Determinar los componentes de cada uno de los vectores:

a) $A + B = (1,3,6) + (4,-3,3) = (1+4, 3+(-3), 6+3) = (5,0,9)$

b) $A - B = (1,3,6) - (4,-3,3) = (1-4, 3-(-3), 6-3) = (-3,6,3)$

c) $A + B - C = (1,3,6) + (4,-3,3) - (2,1,5) = (1+4-2, 3-3-1, 6+3-5) = (3,-1,4)$

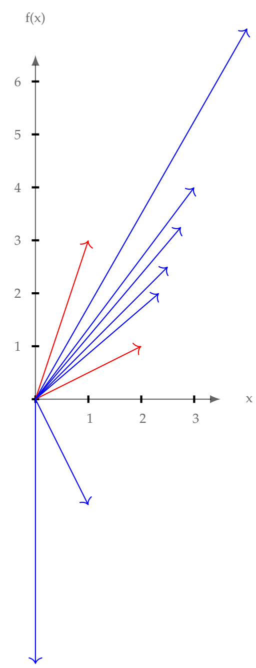
d) $7A - 2B - 3C = 7(1,3,6) - 2(4,-3,3) - 3(2,1,5) = (7,21,42) - (8,-6,6) - (6,3,15) =$
$= (7-8-6, 21-8-(-6)-3, 42-6-15) = (-7,24,21)$

e) $2A + B - 3C = 2(1,3,6) + (4,-3,3)3(2,1,5) = (2+4-6, 6-3-3, 12+3-15) = (0,0,0)$

2. Dibujar los vectores geométricos que unen el origen a los puntos $A = (2,1)$ y $B = (1,3)$. En la misma figura trazar el vector geométrico que une el origen al punto $C = A + t(B)$ para cada uno de los siguientes valores de t: $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{3}{4}$; $t = 1$; $t = 2$; $t = -1$; $t = -2$.

Respuesta.-

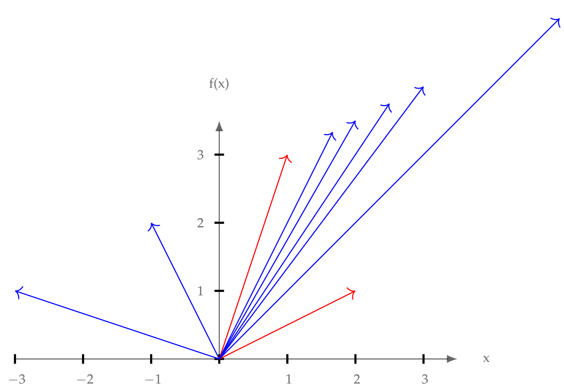
$$
\begin{array}{lll}
\text{Si} \quad t = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & C = (\frac{7}{3}, 2) \\
\text{Si} \quad t = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & C = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) \\
\text{Si} \quad t = 1 & \Longrightarrow & C = (\frac{11}{4}, \frac{13}{4}) \\
\text{Si} \quad t = 2 & \Longrightarrow & C = (3,4) \\
\text{Si} \quad t = -1 & \Longrightarrow & C = (4,7) \\
\text{Si} \quad t = -2 & \Longrightarrow & C = (1,-2) \\
\text{Si} \quad t = \frac{3}{4} & \Longrightarrow & C = (0,-5)
\end{array}
$$



3. resolver el ejercicio 2 si $C = tA + B$.

Respuesta.-

$$\begin{array}{lll} \text{Si} \quad t = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & C = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}) \\ \text{Si} \quad t = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & C = (2, \frac{7}{2}) \\ \text{Si} \quad t = 1 & \Longrightarrow & C = (\frac{5}{2}, \frac{15}{4}) \\ \text{Si} \quad t = 2 & \Longrightarrow & C = (3, 4) \\ \text{Si} \quad t = -1 & \Longrightarrow & C = (5, 5) \\ \text{Si} \quad t = -2 & \Longrightarrow & C = (-1, 2) \\ \text{Si} \quad t = \frac{3}{4} & \Longrightarrow & C = (-3, 1) \end{array}$$

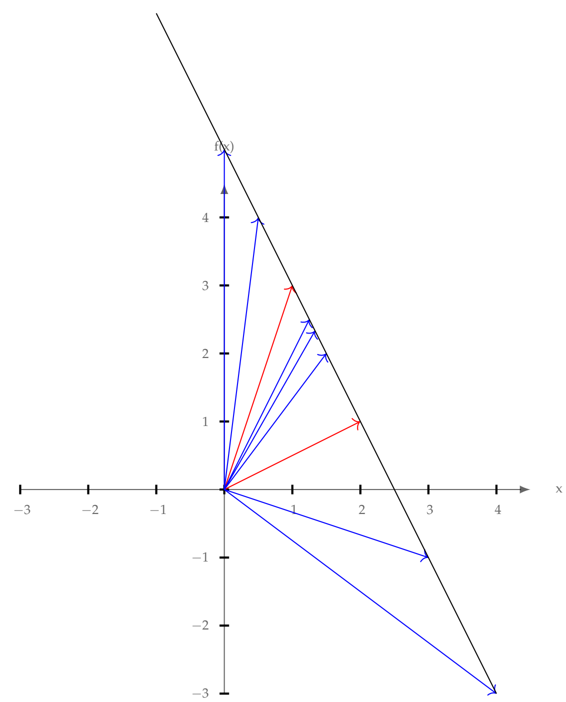


4. Sean $A = (2, 1)$, $B = (1, 3)$ y $C = xA + yB$, en donde x e y son escalares.

a) Trazar el vector que une el origen a C para cada uno de los siguientes pares de valores de x e y: $x = y = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{3}{4}$; $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}$; $x = 2,\ y = -1$; $x = 3,\ y = -2$; $x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2}$; $x = -1,\ y = 2$.

Respuesta.-

$$
\begin{array}{llll}
\text{Si} & x = y = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{3}{2}, 2\right) \\
\text{Si} & x = \frac{1}{4},\ y = \frac{3}{4} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right) \\
\text{Si} & x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) \\
\text{Si} & x = 2,\ y = -1 & \Longrightarrow & C = (3, -1) \\
\text{Si} & x = 3,\ y = -2 & \Longrightarrow & C = (4, -3) \\
\text{Si} & x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \\
\text{Si} & x = -1,\ y = 2 & \Longrightarrow & C = (0, 5)
\end{array}
$$

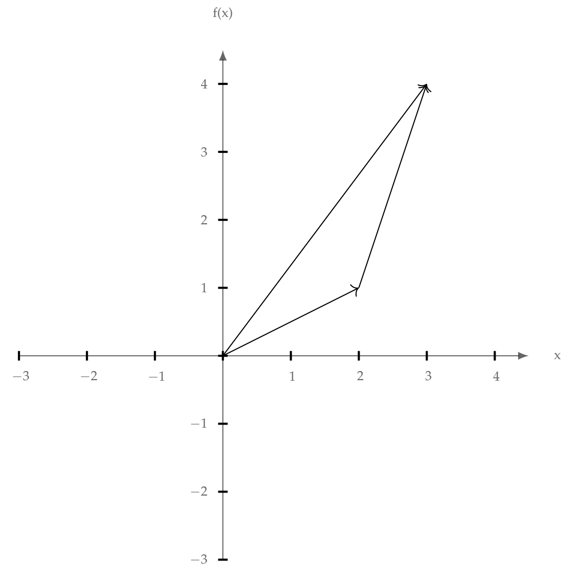


b) ¿Qué conjunto es el de los puntos C obtenidos cuando x e y toman todos los valores reales tales que $x + y = 1$? (Hacer una conjetura y mostrar el lugar geométrico en la figura. No hacer la demostración).

Respuesta.- Sea $x = 3,\ y = -2$ y $x = -2,\ y = 3$ podemos graficar el conjunto de los puntos C tales que $x + y = 1$.

c) Dar una idea del conjunto de todos los puntos C obtenidos al variar independientemente x e y en los intervalos $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$, y hacer una representación de ese conjunto.

Respuesta.-



d) ¿Qué conjunto es el de todos los puntos C obtenidos si x varía en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ e y recorre todos los números reales?.

Respuesta.- La banda horizontal obtenida sumando xA a la línea $y = \frac{1}{3}x$ para cada uno $0 \leq x \leq 1$.

e) ¿Qué conjunto resulta si x e y recorren ambos todos los números reales?.

Respuesta.- Todo R^2.

5. Sean $A = (2,1)$ y $B = (1,3)$. Demostrar que todo vector $C = (c_1, c_2)$ de V_2 puede expresarse en la forma $C = xA + yB$. Expresar x e y en función de c_1 y c_2.

Demostración.- Ya que
$$C = xA + yB = (2x + y, x + 3y) = (c_1, c_2)$$
se tiene $c_1 = 2x + y$ y $c_2 = x + 3y$ de donde
$$y = \frac{1}{5}(2c_2 - c_1)$$
$$x = \frac{1}{5}(3c_1 - c_2)$$
Esto demuestra que cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ se puede obtener como $xA + yB$ dado $C = (c_1, c_2)$ que calculamos.

6. Sea $A = (1,1,1)$, $B = (0,1,1)$ y $C = (1,1,0)$ tres vectores de V_3 y $D = xA + yB + zC$, donde x, y z son escalares.

a) Determinar los componentes de D.

Respuesta.- Tenemos que $D = x(1,1,1) + y(0,1,1) + z(1,1,0)$ de donde $D = (x,x,x) + (0,y,y) + (z,z,0)$ así,
$$D = (x + z, x + y + z, x + y)$$

b) Si $D = 0$ demostrar que $x = y = z = 0$.

Demostración.- Sea $D = 0 = (0, 0, 0)$ entonces

$$\begin{array}{rcl} x + z = 0 & \Longrightarrow & x = -z \\ x + y + z = 0 & \Longrightarrow & y = 0 \\ x + y = 0 & \Longrightarrow & x = -y \end{array}$$

de donde concluimos que $x = y = z = 0$.

c) Hallar x, y, z tales que $D = (1, 2, 3)$.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcll} x + z = 1 & \Longrightarrow & z = 1 - x & \Longrightarrow z = -1 \\ x + y + z = 2 & \Longrightarrow & x + y + 1 - x = 2 & \Longrightarrow y = 1 \\ x + y = 3 & \Longrightarrow & x + 1 = 3 & \Longrightarrow x = 2 \end{array}$$

7. Sean $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ y $C = (2, 1, 1)$ tres vectores de V_3 y $D = xA + yB + zC$, en donde x, y, z son escalares.

a) Determinar los componentes de D.

Respuesta.- Sea $D = x(1, 1, 1) + y(0, 1, 1) + z(2, 1, 1)$ entonces $D = (x + 2z, x + y + z, x + y + z)$.

b) Hallar x, y, z no todos nulos, tales que $D = 0$.

Respuesta.- Sea $x = 2$, $y = -1$ y $z = -1$, entonces

$$D = (x + 2z, x + y + z, x + y + z) = (2 - 2, 2 - 1 - 1, 2 - 1 - 1) = (0, 0, 0) = O$$

c) Demostrar que ninguna elección de x, y, z hace $D = (1, 2, 3)$.

Demostración.- Sea

$$\begin{array}{rcll} x + 2z = 1 & \Longrightarrow & x = 1 - 2z & \\ x + y + z = 2 & \Longrightarrow & 1 - 2z + y + z = 2 & \Longrightarrow y = z + 1 \\ x + y + z = 3 & \Longrightarrow & 1 - 2z + z + 1 + z = 3 & \Longrightarrow 2 = 3 \end{array}$$

de donde encontramos un absurdo al declarar que $2 = 3$, por lo tanto no existe ninguna elección que satisfaga a $D = (1, 2, 3)$.

8. Sean $A = (1, 1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1, 1)$, $C = (1, 1, 0, 0)$ tres vectores de V_4 y $D = xA + yB + zC$ siendo x, y, z escalares.

a) Determinar los componentes de D.

Respuesta.- Se tiene $D = x(1, 1, 1, 0) + y(0, 1, 1, 1) + z(1, 1, 0, 0)$ entonces $D = (x + z, x + y + z, x + y, y)$

b) Si $D = 0$, Demostrar que $x = y = z = 0$

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} x+z=0 & & \\ x+y+z=0 & \Longrightarrow & z=0 \\ x+y=0 & \Longrightarrow & x=0 \\ y=0 & & \end{array}$$

Por lo tanto $x = y = z = 0$.

c) Hallar x, y, z tales que $D = (1,5,3,4)$.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} x+z=1 & & \\ x+y+z=5 & \Longrightarrow & z=2 \\ x+y=3 & \Longrightarrow & x=-1 \\ y=4 & & \end{array}$$

Por lo tanto $x = -1$, $y = 4$ y $z = 2$.

d) Demostrar que ninguna elección de x, y, z hace $D = (1,2,3,4)$.

Demostración.- La demostración es similar al problema 7c.

9. En V_n demostrar que dos vectores paralelos a un mismo vector son paralelos entre sí.

Demostración.- Por definición de vectores paralelos se tiene $c_1A = C$ y $c_2B = C$ de donde $c_1A = c_2B$, en vista de que $c_1 \cdot c_2 \neq 0$ entonces $B = c_1c_2^{-1}A$, por lo tanto concluimos que A y B son paralelos entre sí.

10. Dados cuatro vectores no nulos A, B, C, D de V_n tales que $C = A + B$ y A paralelo a D. Demostrar que C es paralelo a D si y sólo si B es paralelo a D.

Demostración. Sea $B = A - C$ de donde $B = cD - c_1D$ así, $B = (c - c_1)D$, (sabemos que $c - c_1 \neq 0$, ya que B es distinto de 0).
Por el contrario supongamos que B es paralelo a D. Dado que ambos A y B son paralelos entre sí, esto por el problema anterior. Entonces, tenemos $A = xB$ siendo x un escalar distinto de 0. Esto implica

$$C = C = xB + B \Longrightarrow C = (1 - x)B.$$

Por lo tanto si C es paralelo a B y B paralelo a D entonces C es paralelo a D.

11. **a)** Demostrar, para los vectores V_n las propiedades de la adición y de la multiplicación por escalares dadas en el teorema 12.1

Demostración.- Sea $A, B \in V_n$ donde $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ entonces para la conmutatividad de adición tenemos

$$A + B = (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_1, ..., b_n + a_n) = B + A$$

Para la asociatividad de adición se tiene,

$$\begin{array}{rcl} A+(B+C) & = & (a_1,a_2,...,a_n)+[(b_1,b_2,...,b_n)+(c_1,c_2,...,c_n)] \\ & = & [a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+b_3),...,a_n+(b_n+c_n)] \\ & = & [(a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_3,...,(a_n+b_n)+c_n] \\ & = & (A+B)+C \end{array}$$

Luego para la asociatividad de la multiplicación escalar tenemos,

$$\begin{array}{rcl} c(dA) & = & c\,[d(a_1,a_2,...,a_n)] \\ & = & c(da_1,da_2,...,da_n) \\ & = & [(cd)a_1,(cd)a_2,...,(cd)a_n] \\ & = & (cd)(a_1,a_2,...,a_n) \\ & = & (cd)A \end{array}$$

Para la primera ley distributiva se tiene,

$$\begin{array}{rcl} c(A+B) & = & c\,[(a_1,a_2,...,a_n)+(b_1,b_2,...,b_n)] \\ & = & [c(a_1+b_1),c(a_2+b_2),...,c(a_n+b_n)] \\ & = & (ca_1+c_b1,ca_2+cb_2,...,ca_n+cb_n) \\ & = & (c_1,ca_2,...,ca_n)+(cb_1,cb_2,...,cb_n) \\ & = & c(a_1,a_2,...,a_n)+c(b_1,b_2,...,b_n) \\ & = & cA+cB \end{array}$$

Para la segunda ley distributiva obtenemos,

$$\begin{array}{rcl} (c+d)A & = & (c+d)(a_1,a_2,...,a_n) \\ & = & (ca_1+cb_1,ca_2+cb_2,...,ca_n+da_n) \\ & = & (c_1,ca_2,...,ca_n)+(cb_1,cb_2,...,cb_n) \\ & = & c(a_1,a_2,...,a_n)+d(a_1,a_2,...,a_n) \\ & = & cA+dA \end{array}$$

b) Mediante vectores geométricos en el plano, representar el significado geométrico de las dos leyes distributivas $(c+d)A = cA+dA$ y $c(A+B) = cA+cB$.

Respuesta.- La ley distributiva $(c+d)A = cA+dA$ significa que el vector $(c+d)$ Ase obtiene sumando la flecha dA al final de la flecha cA.
La ley distributiva $c(A+B) = cA+cB$ significa que el vector $c(A+B)$ es el vértice del paralelogramo formado por cA y cB.

12. Si un cuadrilátero $OABC$ de V_2 es un paralelogramo que tiene A y C como vértices opuestos, demostrar que $A+\frac{1}{2}(C-A) = \frac{1}{2}B$. ¿Qué teorema relativo a los paralelogramos puede deducirse de esta igualdad?.

Demostración.- Dado que este es un paralelogramo, tenemos $B = A+C$. Y por tanto,

$$B = A+C \implies \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A+C) \implies \frac{1}{2}B = A+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}A \implies \frac{1}{2}B = A+\frac{1}{2}(C-A)$$

4.5. Producto escalar

Definición 4.3 (Producto escalar ó interior de dos vectores)**.** Si $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ son dos vectores de V_n su producto escalar se representa con $A \cdot B$ y se define con la igualdad

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$$

Teorema 4.2. Para todos los vectores A, B, C de V_n y todos los escalares c se tienen las propiedades siguientes:

(a)	$A \cdot B = B \cdot A$	(ley conmutativa).
(b)	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	(ley distributiva)
(c)	$c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$	(homogeneidad)
(d)	$A \cdot A > 0$ si $A \neq O$	(positivadad)
(e)	$A \cdot A = 0$ si $A = O$	

Demostración.- Comencemos demostrando el inciso (a) que es un consecuencia de la definición.

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) + ... + (a_n \cdot b_n) = (b_n + a_n) + (b_2 + a_n) + ... + (b_n + a_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k = B \cdot A$$

Las demostraciones (b) y (c) se demuestran con la definición de producto escalar, la definición de vectores y el teorema 12.1.
Para demostrar las dos últimas, usamos la relación $A \cdot A = \sum a_k^2$. Puesto que cada térmi es no negativo, la suma es es no negativa. Además, la suma es cero si y sólo si cada término de la suma es cero y esto tan sólo puede ocurrir si $A = O$.

Teorema 4.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** Si A y B son vectores de V_n, tenemos

$$(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B) \qquad 12.2$$

. Además, el signo de desigualdad es el válido si y sólo si uno de los vectores es el producto de otro por un escalar.

Demostración.- Expresando cada uno de los miembros de (12.2) en función de los componentes, obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$

que es la desigualdad ya demostrada en el teorema I.41.

Presentaremos otra demostración de 12.2 que no utiliza los componentes.
Tal demostración es interesante porque hace ver que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es una consecuencia de las cinco propiedades del producto escalar que se citan en el teorema 12.2 y no depende de la definicón que se utilizó para deducir esas propiedades.
Para llevar a acabo esta demostración, observemos primero que 12.2 es trivial si A ó B es el vector cero. Por tanto, podemos suponer que A y B son ambos no nulos. Sea C el vector

$$C = xA - yB, \quad \text{donde } x = B \cdot B \quad \text{y} \quad y = A \cdot B$$

Las propiedades d) y e) implican que $C \cdot C \geq 0$. Cuando expresamos esto en función de x e y, resulta 12.2.
Para expresar $C \cdot C$ en función de x e y, utilizamos las propiedades a), b) y c) obteniendo

$$C \cdot C = (xA - yB) \cdot (xA - yB) = x^2(A \cdot A) - 2xy(A \cdot B) + y^2(B \cdot B).$$

Utilizando las definiciones de x e y como también la desigualdad $C \cdot C \leq 0$, se llega a

$$(B \cdot B)^2 \cdot (A \cdot A) - 2(A \cdot B)^2(B \cdot B) + (A \cdot B)^2(B \cdot B) \geq 0$$

La propiedad d) implica que $B \cdot B \geq 0$ puesto que $B \neq 0$, con lo que podemos dividir por $(B \cdot B)$ obteniendo

$$(B \cdot B)(A \cdot A) - (A \cdot B)^2 \geq 0$$

que coincide con 12.2. Esto también demuestra que el signo igual es válido en 12.2 si y sólo si $C = 0$. Pero $C = 0$ si y sólo si $xA = yB$. A su vez, esta igualdad se verifica si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar.

4.6. Longitud o norma de un vector

Definición 4.4. si A es un vector en V_n su longitud o norma se designa con $\|A\|$ y se define mediante la igualdad

$$\|A\| = (A \cdot A)^{1/2}$$

Teorema 4.4. Si A es un vector de V_n y c un escalar, tenemos las siguientes propiedades.

a) $\|A\| > 0$ si $A \neq 0$ (Positividad)
b) $\|A\| = 0$ si $A = 0$
c) $\|cA\| = |c|\,\|A\|$ (homogeneidad)

Demostración.- Las propiedades a) y b) son consecuencia inmediata de las propiedades d) y e) del teorema 12.2. Para demostrar c) utilizamos la propiedad de homogeneidad del producto escalar obteniendo

$$\|cA\| = (cA \cdot cA)^{1/2} = (c^2 A \cdot A)^{1/2})(c^2)^{1/2}(A \cdot A)^{1/2} = |c|\|A\|.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz también se puede expresar en función de la norma. Ella establece que

$$(A \cdot B)^2 \leq \|A\|^2\|B\|^2 \qquad 12.3$$

$$o$$

$$|A \cdot B| = \|A\|\|B\| \qquad 12.4$$

Teorema 4.5 (Desigualdad triangular)**.** . Si A y B son vectores de V_n, tenemos

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Demostración.- para evitar las raíces cuadradas, escribimos la desigualdad triangular en la forma equivalente

$$\|A \cdot B\|^2 = (\|A\| + \|B\|)^2 \qquad 12.5$$

El primer miembro de 12.5 es

$$\|A + B\|^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B = \|A\|^2 + 2A \cdot B + B \cdot B = \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2$$

mientras que el segundo miembro es

$$(\|A\| + \|B\|)^2 = \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2$$

Comparando esas dos fórmulas, vemos que 12.5 es válida si y sólo si se tiene

$$A \cdot B \leq \|A\|\|B\| \qquad 12.6$$

Pero $A \cdot B \leq A \cdot B$ con lo que 12.6 resulta de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, en la forma 12.4. Esto prueba que la desigualdad triangular es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
La proposición reciproca también es cierta. Esto es, si la desigualdad triangular es cierta también lo es 12.6 para A y para $-A$, de lo que obtenemos 12.3. Así pues, la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz son lógicamente equivalentes. Además, el signo de igualdad vale en una si y sólo si vale en la otra. Con lo que se complementa la demostración del teorema 12.5.

4.7. Ortogonalidad de vectores

Definición 4.5. Dos vectores A y B de V_n son perpendiculares u ortogonales si $A \cdot B = 0$.

4.8. Ejercicios

1. Sean $A = (1,2,3,4)$, $B = (-1,2,-3,0)$ y $C = (0,1,0,1)$ tres vectores de V_4. Calcular cada uno de los siguientes productos.

(a) $A \cdot B = \sum_{k=1}^{4} a_k b_k = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 = -1 + 4 - 9 + 0 = -6.$

(b) $B \cdot C = (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 2.$

(c) $A \cdot C = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 6.$

(d) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = (-6) + 6 = 0.$

(e) $(A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C = 6 - 2 = 4.$

2. Dados tres vectores $A = (2,4,-7)$, $B = (2,6,3)$ y $C = (3,4,-5)$. En cada una de las expresiones siguientes se pueden introducir paréntesis de una sola manera para obtener una expresión que tenga sentido. Introducir paréntesis y efectuar las operaciones.

(a) $(A \cdot B)C = [2 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + (-7) \cdot 3]\, C = 7(3,4,-5) = (21,28,-35).$

(b) $A \cdot (B + C) = (2, 4, -7) \cdot (5, 10, -2) = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + (-7) \cdot (-2) = 64.$

(c) $(A + B) \cdot C = (4, 10, -4) \cdot (3, 4, -5) = 4 \cdot 3 + 10 \cdot 4, (-4) \cdot (-5) = 72.$

(d) $A(B \cdot C) = A\,[2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot (-5)] = (2, 4, -7)15 = (30, 60, -105).$

(e) $A/(B \cdot C) = A/\,[2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot (-5)] = (2, 4, -7)/15 = \left(\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{7}{15}\right).$

3. Demostrar si es o no cierta la proposición siguiente referentes a vectores en V_n: Si $A \cdot B = A \cdot C$ y $A \neq 0$, es $B = C$.

Demostración.- Esta proposición es falsa ya que si $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 0)$ y $C = (0, -1, 1)$ entonces

$$A \cdot B = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0, \qquad A \cdot C = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

de donde $B \neq C$.

4. Demostrar si es o no cierta la proposición siguiente que se refiere a vectores V_n: Si $A \cdot B = 0$ para cada $B \in V_n$, es $A = 0$

Demostración.- Sea $A, B \in V_n$. Si $A \cdot B = 0$ para todo B, debemos tener en particular $A \cdot A = 0$. Pero sabemos que $A \cdot A = 0$ si y sólo si $A = 0$, por lo tanto $A = 0$.

5. Si $A = (2, 1, -5)$ y $B = (1, -1, 2)$, hallar un vector no nulo C de V_3 tal que $A \cdot C = B \cdot C = 0$.

Respuesta.- Sea $C = (c_1, c_2, c_3)$ entonces

$$A \cdot C = 2c_1 + c_2 - c_3 = 0$$

$$B \cdot C = c_1 - c_2 + 2c_3 = 0$$

de donde

$$c_1 = \frac{c_3 - c_2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{5c_3 - 3c}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = \frac{5c_3}{3}$$

Si $c_3 = 3$ entonces tenemos $c_2 = 5$ y $c_1 = -1$ de donde $C = (-1, 5, 3)$.

6. Si $A = (1, -2, 3)$, $B = (3, 1, 2)$, hallar los escalares x e y tales que $C = xA + yB$ es un vector no nulo y que $C \cdot B = 0$.

Respuesta.- Se tiene

$$C = x(1, -2, 3) + y(3, 1, 2 = (x + 3y, -2x + y, 3x + 2y),$$

por lo tanto

$$C \cdot B = (x + 3x, -2x + y, 3x + 2y) \cdot (3, 1, 2) = 3(x + 3y) + (-2x + y) + 2(3x + 2y) = 0$$

$$\Downarrow$$
$$x = -2y$$

Sea $y = 1$ entonces $x = -2$ es la solución.

7. Si $A = (2, -1, 2)$ y $B = (1, 2, -2)$, hallar dos vectores C y D de V_3 que satisfagan todas las condiciones siguientes: $A = C + D$, $B \cdot D = 0$, C paralelo a B.

Respuesta.- Sea $C = (c_1, c_2, c_3)$ y $D = (d_1, d_2, d_3)$, entonces

$$A = C + D \implies c_1 + d_1 = 2, \quad c_2 + d_2 = -1, \quad c_3 + d_3 = 2.$$

Luego,

$$B \cdot D = 0 \implies d_1 + 2d_2 - 2d_3 = 0$$

Finalmente, sabemos que C es paralelo a B implica que existe x distinto de 0 tal que

$$C = xB \implies c_1 = x, \quad c_2 = 2x, \quad c_3 = -2x$$

Poniendo todo junto tenemos

$$\begin{array}{rcl} d_1 & = & 2 - x \\ d_2 & = & -1 - 2x \\ d_3 & = & 2 + 2x \end{array}$$

de donde podemos encontrar x de la siguiente manera,

$$(2 - x) + 2(-1 - 2x) - 2(2 + 2x) = 0 \implies x = -\frac{4}{9}$$

por lo tanto,

$$C = \left(-\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{8}{9}\right) \implies C = \frac{4}{9}(-1, -2, 2)$$

$$D = \left(\frac{22}{9}, \frac{1}{9}, \frac{10}{9}\right) \implies D = \frac{1}{9}(22, -1, 10)$$

8. Si $A = (1, 2, 3, 4, 5)$, $B = (1.\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$, hallar dos vectores C y D de V_5 que satisfagan todas las condiciones siguientes: $B = C + 2D$, $D \cdot A = 0$, C paralelo a A.

Respuesta.- Sea $C = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ y $D = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ de donde para $B = C + 2D$ se tiene,

$$c_1 + 2d_1 = 1, \quad c_2 + 2d_2 = 2, \quad c_3 + 2d_3 = 3, \quad c_4 + 2d_4 = 4, \quad c_5 + 2d_5 = 5.$$

Luego por definición de paralelismo de vectores se tiene $C = xA$ obtenemos,

$$c_1 = x, \quad c_2 = 2x, \quad c_3 = 3x, \quad c_4 = 4x, \quad c_5 = 5x$$

se sigue,

$$d_1 = \frac{1}{2}(1 - x), \quad d_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 2x\right), \quad d_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 3x\right), \quad d_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 4x\right), \quad d_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - 5x\right).$$

Así, por el hecho de que $C = xA$, entonces $d_1, 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 = 0$ implica,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-x)+\left(\frac{1}{2}-2x\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-3x\right)+2\left(\frac{1}{4}-4x\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{5}-5x\right) &= 0 \\
55x &= 0 \\
x &= \frac{1}{11}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$C=\frac{1}{11}(1,2,3,4,5), \qquad D=\left(\frac{5}{11},\frac{7}{44},\frac{1}{33},\frac{-5}{88},\frac{-7}{55}\right)$$

9.