Axiomas, teoremas, corolarios y definiciones

Joao Lucas Marquez Barbosa

por FODE

Índice general

1

El eje de la incidencia y el orden

Axioma .1 *Cualquiera que sea la recta, hay puntos que pertenecen a la recta y puntos que no pertenecen a la recta.*

Axioma .2 *Dados dos puntos distintos, hay una sola recta que contiene estos puntos.*

Proposición 1.1 *Dos líneas distintas no se cruzan o se cruzan en un solo punto.*

Axioma II.3 *Dados tres puntos de una recta, uno y solo uno de ellos se ubica entre los otros dos.*

Definición 1.1 *El conjunto que consta de dos puntos A y B y todos los puntos entre A y B se llama segmento AB. Los puntos A y B se denominan extremos o extremos del segmento.*

Definición 1.2 *Si A y B son puntos distintos, el conjunto que consta de los puntos del segmento AB y todos los puntos C tales que B está entre A y C, se denomina semi-recta de origen A que contiene el punto B y está representado por S_{AB}. El punto A se llama entonces el origen del S_{AB} semi-recto.*

Proposición 1.2 *.*

a) *$S_{AB} \cup S_{BA}$ y la recta determinada por A y B.*

b) *$S_{AB} \cap S_{BA} = \overline{AB}$.*

Axioma II.4 *Dados dos puntos A y B siempre existe un punto C entre A y B y un punto D tal que B está entre A y D.*

Definición 1.3 *Sea m una recta y A un punto que no pertenece a m. El conjunto que consta de los puntos de m y todos los puntos B tales que A y B están en el mismo lado de la recta m es llamado semiplano determinado por m que contiene a A, y estará representado por P_mA.*

Axioma II.5 *Una recta m determina exactamente dos semiplanos distintos cuya intersección es la recta m.*

2

Axiomas sobre medición de segmentos

Axioma II.6 *Cada par de puntos en el plano corresponde a un número mayor o igual a cero. Este número es cero si y solo si los puntos coinciden.*

Axioma II.7 *Los puntos de una línea siempre se pueden colocar en correspondencia bidireccional con los números reales, de modo que la diferencia entre estos números mida la distancia entre los puntos correspondientes.*

Axioma II.8 *Si el punto C está entre A y B, entonces:*

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

Proposición 2.1 *Si en una semirecta S_{AB} consideramos un segmento un segmento AC con $\overline{AB} < \overline{AC}$, entonces el punto C estará entre A y B.*

Teorema 2.1 *Sean A, B y C puntos en la misma línea cuyas coordenadas son, respectivamente, a, b y c. El punto C está entre A y B si y solo si el número c está entre a y b.*

Definición 2.1 *Llamamos al punto medio del segmento AB un punto C de este segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.*

Teorema 2.2 *Un segmento tiene exactamente un punto medio.*

Definición 2.2 *Sea A un punto en el plano y r un número positivo real. El círculo del centro A y el radio r es el conjunto que consta de todos los puntos B del plano tales que $AB = r$.*

3

Axiomas sobre la medición de ángulos

Definición 3.1 *Llamamos figura ángulo a la figura formada por dos semi-rectas con el mismo origen.*

Axioma II.9 *Cada ángulo tiene una medida mayor o igual a cero. La medida del ángulo es cero si y sólo si consta de dos líneas coincidentes.*

Definición 3.2 *Diremos que una semi-recta divide un semi-plano si está contenido en el semi-plano y su origen es un punto de la recta que lo determina.*

Axioma II.10 *Es posible colocar, en correspondencia bidireccional, los números reales entre cero y 180 y las semi-rectas de un mismo origen que dividen un semi-plano dado, de modo que la diferencia entre este número sea la medida del ángulo formado por el correspondientes semi-rectas.*

Definición 3.3 *Sea S_{OA}, S_{OB} y S_{OC} semi-rectas del mismo origen. Si el segmento AB intercepta S_{OC} diremos que S_{OC} divide al ángulo $A\widehat{O}B$.*

Axioma II.11 *Una semi-recta S_{OC} divide un ángulo $A\widehat{O}B$, entonces*

$$A\widehat{O}B = A\widehat{O}C + C\widehat{O}B$$

4

El axioma de los paralelos

Axioma II.12 *Para un punto fuera de la recta m, se puede trazar una sola recta paralela a la recta m.*

Proposición 4.1 *Si la recta m es paralela a las rectas n_1 y n_2, entonces n_1 y n_2 son paralelas o coincidentes*

Corolario 4.1 *Si una recta corta uno de dos paralelos, también corta otro.*

Proposición 4.2 *Sean m, n, $\widehat{1}$ y $\widehat{2}$ como en la figura (6,1). Si $\widehat{1} = \widehat{2}$, entonces las rectas m y n son paralelas.*

Proposición 4.3 *Si, al cortar dos rectas con una transversal, obtenemos $\widehat{3} + \widehat{2} = 180°$ entonces las rectas son paralelas.*

Proposición 4.4 *Si, cuando cortamos dos rectas con una transversal, los ángulos correspondientes son iguales, entonces las rectas son paralelas.*

Proposición 4.5 *Si dos rectas paralelas están cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son iguales.*

Teorema 4.1 *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Corolario 4.2 ***a)*** *La suma de las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90^{circ}.*

b) *Cada ángulo de un triángulo equilátero mide $60°$.*

c) *a medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos que no son adyacentes a él.*

d) *La suma de los ángulos internos de una cuadrilátero es $360°$.*

Teorema 4.2 *Si m y n son rectas paralelas, entonces todos los puntos de m están a la misma distancia de la recta n.*

Proposición 4.6 *En un paralelogramo, los lados y ángulos opuestos son congruentes.*

Definición 4.1 *Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.*

Proposición 4.7 *En un paralelogramo, los lados y ángulos opuestos son congruentes.*

Proposición 4.8 *Las diagonales de un paralelogramo se cruzan en un punto que es el punto medio de las dos diagonales.*

Proposición 4.9 *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.*

Teorema 4.3 *El segmento que conecta los puntos medios en dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.*

Proposición 4.10 *Suponga que tres rectas paralelas, a, b y c cortan las rectas m y n en los puntos A, B y C y en los puntos $A^{'}, B^{'}$ y $C^{'}$ respectivamente. Si el punto B está entre A y C, entonces el punto $B^{'}$ también está entre $A^{'}$ y $C^{'}$. Si $AB = BC$, entonces también hay $A^{'}B^{'} = B^{'}C^{'}$*

Corolario 4.3 *Suponga que k rectas paralelas $a_1, a_2, ..., a_k$ cortan dos rectas m y n en los puntos $A_1, A_2, ..., A_k$ y en los puntos $A_1^{'}, A_2^{'}, ..., A_k^{'}$, respectivamente. Si $A_1A_2, ..., A_2A_3 = A_{k-1}A_k$ entonces $A_1^{'}A_2^{'} = A_2^{'}A_3^{'} = A_{k-1}^{'}A_k^{'}$*

Teorema 4.4 *Si una recta, paralela a un lado de un triángulo, corta los otros dos lados, entonces se divide en la misma proporción.*

5

Semejanza de triángulos

Definición 5.1 *Los triángulos ABC y DEF son semejantes si se establece una correspondencia donde los lados correspondientes son proporcionales y en la misma proporción, y los ángulos correspondientes congruentes. Es decir, si $ABC \Longleftrightarrow DEF$ es tal que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} =$$

Teorema 5.1 (AA) *Dados los triángulos ABC y EFG, tal que $\widehat{A} = \widehat{E}$ y $\widehat{B} = \widehat{F}$. Entonces los triángulos son semejantes.*

Teorema 5.2 *Si en dos triángulos ABC y EFG tenemos $\widehat{A} = \widehat{E}$ y $(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG})$, entonces los triángulos son semejantes.*

Teorema 5.3 *Si en dos triángulos ABC y EFG se tiene que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

entonces los dos triángulos son similares.

Proposición 5.1 *En todo triángulo rectángulo, la altura del vértice del ángulo recto es la media proporcional entre las proyecciones de los catetos en la hipotenusa.*

Teorema 5.4 (Pitágoras) *En cada triángulo un rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*
En términos de la notación establecida anteriormente, el teorema de Pitágoras establece que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Proposición 5.2 *Un triángulo tiene lados que miden a, b y c. Si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces el triángulo es un rectángulo y su hipotenusa es el lado que mide a.*

6

El círculo

Definición 6.1 *Dados* 0 *y* $r > 0$. *El círculo de centro* 0 *y radio* r *es*

$$C = \{P/\overline{OP} = r\}$$

Además:

1) *Al segmento* OP *también se le llama radio de* C.

2) *Dados* $A, B \in C$. *El segmento* AB *se llama cuerda de* C. *Si la cuerda* CD *pasa por* 0 *se llama diametro. También llamamos diámetro al valor* $2r$.

Proposición 6.1 *Un radio es perpendicular a una cuerda (que no es un diámetro) si y sólo si lo divide en dos segmentos congruentes.*

$$OP \perp AB \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{CB}$$

donde $C \in AB \cap OP$

Definición 6.2 *Sea* C *un círculo de centro* 0 *y radio* r. *Si la recta* l *corta a* C *en un sólo punto, decimos que* l *es tangente a* C.

Proposición 6.2 *Si una recta es tangente a un círculo, entonces es perpendicular al radio que conecta el centro con el punto de tangencia.*
ó
Sea C *un círculo de centro* 0. *Si* l *es tangente a* C *y* T *es punto de tangencia, entonces*

$$OT \perp l$$

Proposición 6.3 *Si una recta es perpendicular a un radio en su extremo (que no es el centro), entonces la recta es tangente al círculo.*

$$\text{Si } OT \perp l \Rightarrow \text{ es tangente a } C \text{ (en } T)$$

Definición 6.3 *Sea* C *un círculo de centro* 0 *y radio* r. *Sean* A, B *dos puntos en* C *tal que* AB *no es un diámetro. La recta* AB *separa al plano en dos semi-planos.*
Los puntos de C *que están en* P_{OL} *forman el arco mayor* AB. *Los puntos de* C *que están en* P_{CL} *forman el arco menor* AB. *Si* AB *es un diámetro, la recta* AB *determina dos semi-planos* S_1, S_2.
Los conjuntos $C \cap S_1$, $C \cap S_2$ *se llaman semi-círculos.*
El ángulo $A\widehat{O}B$, *se llama ángulo central. La medida en grados del arco menor* AB *la medida del ángulo* AB