1

Algunas aplicaciones de la integración

1.2. El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

TEOREMA 1.1 *Supongamos que f y g son integrables y que satisfacen $f \leq q$ en $[a,b]$. La región S entre sus gráficas es medible y su área $a(S)$ viene dada por la integral*

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Demostración.- Demostración.- Supongamos primero que f y g son no negativas,. Sean F y G los siguientes conjuntos:

$$F = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x), \quad G = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x).$$

Esto es, G es el conjunto de ordenadas de g, y F el de f, menos la gráfica de f. La región S es la diferencia $G - F$. Según los teoremas 1.10 y 1.11, F y G son ambos medibles. Puesto que $F \subseteq G$ la diferencia $S = G - F$ es también medible, y se tiene

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Consideremos ahora el caso general cuando $f \leq q$ en $[a,b]$, pero no son necesariamente no negativas. Este caso lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada encima del eje x. Esto es, elegimos un número positivo c suficientemente grande que asegure que $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$ para todo x en $[a,b]$. Por lo ya demostrado la nueva región T entre las gráficas de $f + c$ y $g + c$ es medible, y su parea viene dad por la integral

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)] = \int_[g(x) - f(x)]\, dx$$

Pero siendo T congruente a S, ésta es también medible y tenemos

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Esto completa la demostración.

Nota 1.1 *En los intervalos $[a,b]$ puede descomponerse en un número de subintervalos en cada uno de los cuales $f \leq g$ o $g \leq f$ la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma*

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$$

LEMA 1.1 (Área de un disco circular) *Demostrar que $A(r) = r^2 A(1)$. Esto es, el área de un disco de radio r es igual al producto del área de un disco unidad (disco de radio 1) por r^2.*

Demostración.- *Ya que $g(x) - f(x) = 2g(x)$, el teorema 2.1 nos da*

$$A(r) = \int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

En particular, cuando $r = 1$, se tiene la fórmula

$$A(1) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Cambiando la escala en el eje x, y utilizando el teorema 1.19 con $k = 1/r$, se obtiene

$$A(r) = 2\int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} g(rx)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - (rx)^2}\, dx = 2r^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = r^2 A(1)$$

Esto demuestra que $A(r) = r^2 A(1)$, como se afirmó.

Definición 1.1 *Se define el número π como el área de un disco unidad.*

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

La formula que se acaba de demostrar establece que $A(r) = \pi r^2$

Generalizando el anterior lema se tiene

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x)\, dx = k\int_{ka}^{kb} f(x/k)\, dx = k^2\int_a^b f(x)\, dx$$

TEOREMA 1.2 *Para $a > 0$, $b > 0$ y n entero positivo, se tiene*

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{b^{1-1/n} - a^{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Demostración.- *Sea $\int_0^a x^{\frac{1}{n}}$. El rectángulo de base a y altura $a^{\frac{1}{n}}$ consta de dos componentes: el conjuntos de ordenadas de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ a a y el conjuntos de ordenadas $g(y) = y^n$ a $a^{\frac{1}{n}}$. Por lo tanto,*

$$a \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}} = \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\, dx + \int_0^{a^{\frac{1}{n}}} y^n\, dy \implies \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\, dx = a^{1+\frac{1}{n}} - \left.\frac{y^{n+1}}{n+1}\right|_0^{a^{\frac{1}{n}}} = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Análogamente se tiene

$$\int_0^b x^{\frac{1}{n}}\ dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Luego notemos que

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\ dx = \int_0^b x^{\frac{1}{n}}\ dx - \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\ dx$$

por lo tanto

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\ dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}} - b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

1.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, calcular el área de la región S entre las gráficas de f y g para el intervalo $[a,b]$ que en cada caso se especifica. Hacer un dibujo de las dos gráficas y sombrear S.

1. $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 0, \quad a = -2, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [4 - x^2 - 0]\ dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) - \left(\frac{2^3 - (-2)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

2. $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 8 - 2x^2, \quad a = -2, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [8 - 2x^2 - (4 - x^2)]\ dx = \int_{-2}^{2} 4 - x^2\ dx = \frac{32}{3}\ (por\, ejercicio\ 1)$$

3. $f(x) = x^3 + x^2, \quad g(x) = x^3 + 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^{1} x^3 + 1 - (x^3 + x^2)\ dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\ dx = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{1-(-1)}{3} = \frac{4}{3}$$

4. $f(x) = x - x^2, \quad g(x) = -x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_0^2 x - x^2 - (-x)\ dx = \int_0^2 2x - x^2 = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{2}$$

5. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 1$

Respuesta.-

$$\int_0^1 x^{1/3} - x^{1/2}\; dx = \left.\frac{x^{1+1/3}}{1+1/3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

6. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 1, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_1^2 x^{1/2} - x^{1/3}\; dx = \left.\frac{x^{1/2+1}}{1+1/2}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{1/3}+1}{1+1/3}\right|_1^2 = \frac{2^{1/2+1}-1}{1+1/2} - \frac{2^{1/3+1}}{1+1/3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12}$$

7. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Sea

$$\int_0^1 |x^{1/3} - x^{1/2}|\; dx + \int_1^2 |x^{1/3} - x^{1/2}|\; dx$$

por los problemas 5 y 6 se tiene

$$\frac{1}{12} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{6}$$

8. $f(x) = x^{1/2}, \quad g(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{1/2} - x^2\; dx + \int_1^2 x^2 - x^{1/2}\; dx &= \left(\left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\right) + \left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_1^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+1/2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2^3-1}{3} - \frac{2^{1+1/2}-1}{1+1/2}\right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \\
&= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

9. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1, \quad a = -1, \quad b = (1+\sqrt{5})/2$

Respuesta.

$$\int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - (x+1)\; dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} (x+1) - x^2\; dx- \; =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - x - 1 \, dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} x + 1 - x^2 \, dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right) \Bigg|_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} + \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{6} \\
&= \frac{5\sqrt{5} - 3}{4}
\end{aligned}
$$

10. $f(x) = x(x^2 - 1), \quad g(x) = x, \quad a = -1, \quad b = \sqrt{2}$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^{0} x(x^2-1) - x \, dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} x - [x(x^2-1)] \, dx = \int_{-1}^{0} x^3 - 2x \, dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} -x^3 + 2x \, dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) \Bigg|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Bigg|_{0}^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} + 1 + (-1 + 2) = \frac{7}{4}$$

11. $f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad a = -1, \quad b = 1$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x \in [-1, 0) \\ x & si \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x) - g(x) \, dx &= \int_{-1}^{0} -x - x^2 + 1 \, dx + \int_{0}^{1} x - x^2 + 1 \, dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_{0}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

12. $f(x) = |x + 1|, \quad g(x) = x^2 - 2x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Definamos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} -(x+1) & si \quad x \in [0, 1) \\ x + 1 & si \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)-g(x)\,dx &= \int_0^1 -(x-1)-x^2+2x\,dx+\int_1^2 x-1-x^2+2x\,dx\\
&= \int_0^1 -x^2+x+1\,dx+\int_1^2 -x^2+3x-1\,dx\\
&= \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^2\\
&= \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{8}{3}+6-2+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1\right)\\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

13. $f(x)=2|x|,\quad g(x)=1-3x^3,\quad a=-\sqrt{3}/3,\quad b=\dfrac{1}{3}$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x & si \quad x\in[-\sqrt{3}/3,0)\\ x & si \quad x\in[0,1/3]\end{cases}$$

de donde se tiene,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)-f(x)\,dx &= \int_{-\frac{-\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)\,dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx\\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} 1-3x^3\,dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0} -2x\,dx-\int_0^{\frac{1}{3}} 2x\,dx\\
&= \left(x-\frac{3}{4}x^4\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}}+x^2\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0}-x^2\Big|_0^{\frac{1}{3}}\\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{108}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{12}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}\\
&= \frac{9\sqrt{3}-1}{27}
\end{aligned}
$$

14. $f(x)=|x|+|x-1|,\quad g(x)=0,\quad a=-1,\quad b=2$

Respuesta.- En este problema $f(x)\geq g(x)$ en el intervalo $[-1,2]$, por lo tanto

$$\int_{-1}^2 f(x)-g(x)\,dx=\int_{-1}^2 |x|+|x+1|\,dx=\int_{-1}^2 |x|\,dx+\int_{-1}^2 |x-1|\,dx$$

Definimos cada función por separado,

$$|x|=\begin{cases} -x & si \quad x\in[-1,0)\\ x & si \quad x\in[0,2]\end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases} -(x-1) & si \quad x\in[-1,1)\\ x-1 & si \quad x\in[1,2]\end{cases}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}|x|\,dx+\int_{-1}^{2}|x-1|\,dx &= \int_{-1}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{2}x\,dx+\int_{-1}^{1}-(x-1)\,dx+\int_{1}^{2}x-1\,dx\\
&= \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}+\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}+(x)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}+(-x)\Big|_{1}^{2}\\
&= \frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+2-\frac{1}{2}-2+1\\
&= 5
\end{aligned}$$

15. Las gráficas de $f(x)=x^2$ y $g(x)=cx^3$, siendo $c>0$, se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(1/c,1/c^2)$. Determinar c de modo que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo $[0,1/c]$ tengan área $\frac{2}{3}$.

Respuesta.- Tenemos que $f\geq g$ en el intervalo $[0,1/c]$ de donde,

$$\int_0^{1/c}x^2-cx^3\,dx=\int_0^{1/c}x^2\,dx-c\int_0^{1/c}x^3\,dx=\frac{1}{12c^3}$$

luego $\dfrac{1}{12c^3}=\dfrac{2}{3}$ por lo tanto $c=\dfrac{1}{2}$.

16. Sea $f(x)=x-x^2$, $g(x)=ax$. Determinar a para que la región situada por encima de la gráfica de g y por debajo de f tenga área $frac92$.

Respuesta.- Tomaremos los casos cuando $a=0, a>0$ y $a<0$.
Veamos primero que si $g(x)\leq f(x)$ entonces

$$f(x)-g(x)\geq 0\Longrightarrow x-x^2-ax\geq 0\Longrightarrow (1-a)x\geq x^2$$

de donde si $x=0$ se tiene una igualdad. Luego si $x\neq 0$ entonces $x\leq(1-a)$. Ahora sea $a<0$ por suposición se tendrá $1-a>0$, que nos muestra que el intervalo estará dado por $[0,1-a]$. Análogamente se tiene el intervalo $[1-a,0]$ para $a>0$.

C 1. Si $a=0$, esto no es posible ya que si $a=0$ entonces $g(x)=ax=0$ y entonces el área arriba del gráfico de g y debajo del gráfico de f es igual a

$$\int_0^1 x-x^2\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}\neq\frac{9}{2}$$

C 2. Si $a<0$, $f(x)\geq g(x)$ para $[0,1-a]$, por lo que tenemos la zona, $a(S)$ de la región entre las dos gráficas dadas por

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-a}x-x^2-ax\,dx &= (1-a)\int_0^{1-a}x\,dx-\int_0^{1-a}x^2\,dx\\
&= (1-a)\left(\frac{(1-a)^2}{2}\right)-\frac{(1-a)^3}{3}\\
&= -\frac{(1-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

así nos queda que
$$-\frac{(1-a)^3}{6}=\frac{9}{2}\Longrightarrow(1-a)^3=-27\Longrightarrow a=a$$

C 3. Sea $a>0$ y $f(x)\geq g(x)$ entonces $[1-a,0]$ lo que
$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_{1-a}^{0}x-x^2-ax\,dx & = & \displaystyle(1-a)\int_{1-a}^{0}x\,dx-\int_{1-a}^{0}x^2\,dx\\ & = & \displaystyle(1-a)\left(-\frac{(1-a)^2}{2}-\frac{(1-a)^3}{2}\right)\\ & = & \displaystyle-\frac{(1-a)^3}{6}\end{array}$$

Así igualando por $\frac{9}{2}$ tenemos
$$-\frac{(1-a)^3}{6}=\frac{9}{2}\Longrightarrow(1-a)^3=-27\Longrightarrow a=4$$

Por lo tanto los valores posibles para a son -2 y 4.

17. Hemos definido π como el área de un disco circular unidad. En el ejemplo 3 de la Sección 2.3, se ha demostrado que $\pi=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\;dx$. Hacer uso de las propiedades de la integral para calcular la siguiente en función de π.

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Respuesta.- Por el teorema 19 de dilatación, $\displaystyle\frac{1}{\frac{1}{3}}\int_{-3\frac{1}{3}}^{3\frac{1}{3}}\sqrt{9-\left(\frac{x}{\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx$, de donde nos queda $\displaystyle 9\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$, por lo tanto y en función de π se tiene $\displaystyle\frac{9}{2}\pi$.

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx$.

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene
$$\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx=2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-3)\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Respuesta.- Comencemos usando la linealidad respecto al integrando de donde tenemos $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx-3\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$. Luego por el problema 25 de la sección 1.26, $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx=0$, de donde
$$-6\int_{-1}^{1}\sqrt{4-4x^2}\,dx=-12\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=-6\pi$$

18. Calcular las áreas de los dodecágonos regulares inscrito y circunscrito en un disco circular unidad y deducir del resultado las desigualdades $3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$.

Respuesta.- Como estos son dodecágonos, el ángulo en el origen del círculo de cada sector triangular es $2\pi/12 = \pi/6$, y el ángulo de los triángulos rectángulos formado al dividir cada uno de estos sectores por la mitad es entonces $\pi/12$. Luego usamos el hecho de que,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{2}, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Ahora, para el dodecágono circunscrito tenemos el área del triángulo rectángulo T con base 1 dado por,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-\sqrt{3}) = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro, tenemos el área del dodecaedro circunscrito D_c dada por

$$a(D_c) = 24\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 12(2-\sqrt{3})$$

Por otro lado para el dodecágono inscrito, consideramos el triángulo rectángulo T con hipotenusa 1 en el diagrama. La longitud de uno de los catetos viene dada por sen $\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ y la otra por cos $\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Entonces el área del triángulo es,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Dado que hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro inscrito, D_i tenemos,

$$a(D_i) = 24\cdot\frac{1}{8} = 3$$

Por lo tanto, en vista de que el área del círculo unitario es, por definición π y se encuentra entre estos dos dodecaedros, tenemos,

$$3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$$

19. Sea C la circunferencia unidad, cuya ecuación cartesiana es $x^2+y^2=1$. Sea E el conjunto de puntos obtenido multiplicando la coordenada x de cada punto (x,y) de C por un factor constante $a>0$ y la coordenada y por un factor constante $b>0$. El conjunto E se denomina elipse. (Cuando $a=b$, la elipse es otra circunferencia.).

a) Demostrar que cada punto (x,y) de E satisface la ecuación cartesiana $(x/a)^2+(y/b)^2=1$.

Demostración.- Sea $E = \{(ax,by)/(x,y)\in C, a>0, b>0\}$. Si (x,y) es un punto en E entonces $\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$ es un punto es C, ya que todos los puntos de E se obtienen tomando un punto de C y multiplicando la coordenada x por a y la coordenada y por b. Por definición de C, se tiene

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

b) Utilizar las propiedades de la integral para demostrar que la región limitada por esa elipse es medible y que su área es πab.

Demostración.- De la parte (a) sabemos que E es el conjunto de puntos (x,y) tales que $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$. Esto implica,

$$g(x)=b\sqrt{1-()^2}, \quad o \quad f(x)=-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}^2$$

Por lo tanto, el área de E es el área cerrada de $-a$, a.
Para demostrar que esta región es medible y tiene área πab, comenzamos por mencionar

$$\pi=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\pi b &= 2\int_{-1}^{1} b\sqrt{1-x^2}\,dx\\
\pi ab &= 2a\int_{-1}^{1} b\sqrt{1-x^2}\,dx\\
\pi ab &= 2\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}\,dx\\
\pi ab &= \int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x}{a}}-\left(-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)\,dx
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sabemos que la integral de $-a$, a de $g(x)-f(x)$ existe y tiene valor πab, concluyendo que E es medible y $a(E)=\pi ab$.

20. El ejercicio 19 es una generalización del ejemplo 3 de la sección 2.3. Establecer y demostrar una generalización correspondiente al ejemplo 4 de la sección 2.3.

Demostración.- Para generalizar esto, procedemos de la siguiente manera. Sea f una función integrable no negativa en $[a,b]$, y S sea el conjunto de ordenadas de f. Si aplicamos una transformación bajo la cual multiplicamos la coordinada x de cada punto (x,y) en la gráfica de f por una constante $k>0$ y cada coordinada y por una constante $j>0$, entonces obtenemos una nueva función g donde un punto (x,y) está en g si y sólo si $\left(\frac{x}{k},\frac{y}{j}\right)$ está en f. Luego,

$$\frac{y}{j}=f\left(\frac{x}{k}\right)\Longrightarrow y=j\cdot f\left(\frac{x}{k}\right)\Longrightarrow g(x)=j\cdot j\left(\frac{x}{k}\right)$$

Sea jkS y denotamos el conjunto ordenado de g.

$$a(S)=\int_a^b f(x)\,dx$$

entonces

$$\begin{aligned} a(jsS) &= \int_{ka}^{kb} g(x)\,dx \\ &= j\cdot\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx \\ &= jk\cdot\int_{a}^{b} f(x)\,dx \\ &= \int_{ka}^{kb} jk\cdot a(S)\,dx \end{aligned}$$

21. Con un razonamiento parecido al del ejemplo 5 de la sección 2.3 demostrar el teorema 2.2.

Demostración.- Esta demostración ya fue dada junto a la definición del teorema 2.2.

1.5. Las funciones trigonométricas

Propiedad .1

1. *Dominio de definición. Las funciones seno y coseno están definidas en toda la recta real.*

2. *Valores especiales. Tenemos* $\cos 0 = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi = 1, \cos\pi = -1$.

3. *Coseno de una diferencia. Para* x *e* y *cualesquiera, tenemos*

$$\cos(y-x) = \cos y\cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$

4. *Desigualdades fundamentales. Para* $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, *tenemos*

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

TEOREMA 1.3 *Si dos funciones* sen *y* cos *satisfacen las propiedades 1 a 4, satisfacen también las siguientes:*

(a) *La identidad pitagórica,* $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, *para todo* x.

Demostración.- La parte (a) se deduce inmediatamente si tomamos $x = y$ *en*

$$\cos(y-x) = \cos y\cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$$

y usamos la relación $\cos 0 = 1$.

(b) *Valores especiales,* $\operatorname{sen} 0 = \cos\frac{1}{2}\pi = \operatorname{sen}\pi = 0$.

Demostración.- Resulta de (a) tomando $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \pi$ *y utilizando la relación* $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi = 1$.

(c) *El coseno es función par y el seno es función impar. Esto es, para todo x tenemos*

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

Demostración.- Que el coseno es par resulta también de

$$\cos(y-x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$$

haciendo $y = 0$. A continuación deducimos la fórmula

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \operatorname{sen} x,$$

haciendo $y = \frac{1}{2}\pi$ en $\cos(y-x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$. Partiendo de esto, encontramos que el seno es impar, puesto que

$$\operatorname{sen}(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\pi\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$$

(d) *Co-relaciones. Para todo x, se tiene*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{sen} x$$

Demostración.- Para demostrarlo utilizaremos $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \operatorname{sen} x$ reemplazando primero x por $\frac{1}{2}\pi + x$ y luego x por $-x$.

(e) *Periodicidad. Para todo x se tiene $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.*

Demostración.- El uso reiterado de (d) nos da entonces las relaciones de periodicidad (e).

(f) *Fórmulas de adición. Para x e y cualesquiera, se tiene*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} y$$

Demostración.- Para demostrar basta reemplazar x por $-x$ en $\cos(y-x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$ y tener en cuenta la paridad o imparidad. Luego utilizando la parte (d) y la fórmula de adición para el coseno se obtiene

$$\operatorname{sen}(x+y) = -\cos\left(x + y + \frac{\pi}{2}\right) == -\cos x \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y$$

(g) *Fórmulas de diferencias. Para todo los valores a y b, se tiene*

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} = \cos\frac{a+b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}.$$

Demostración.- Reemplazaremos primero y por $-y$ en la fórmula de adición para $\operatorname{sen}(x+y)$ *obteniendo*

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

Restando ésta de la fórmula para $\operatorname{sen}(x+y)$ *y haciendo lo mismo para función coseno, llegamos a*

$$\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2 \operatorname{sen} y \cos x,$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$

Haciendo $x = (a+b)/2$, $y = (a-b)/2$ *encontramos que esas se convierten en las fórmulas de diferencia (g).*

(h) *Monotonía. En el intervalo* $[0, \frac{1}{2}\pi]$, *el seno es estrictamente creciente y el coseno estrictamente decreciente.*

Demostración.- La propiedad 4 se usa para demostrar (h). Las desigualdades $0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$ *prueban que* $cosx$ *y* $\operatorname{sen} x$ *son positivas si* $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. *Después de esto, si* $0 < b < a < \frac{1}{2}\pi$, *los números* $(a+b)/2$ *y* $(a-b)/2$ *están en el intrevalo* $(0, \frac{1}{2}\pi)$, *y las fórmulas de diferencias (g) prueban que* $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$ *y* $\cos a < \cos b$. *Esto completa la demostración.*

1.6. Fórmulas de integración para el seno y el coseno

TEOREMA 1.4 *Si* $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$, *y* $n \geq 1$, *tenemos*

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{ka}{n} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{ka}{n} \qquad (2.6).$$

Demostración.- Las desigualdades anterior serán deducidas de la identidad

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x, \qquad (2.7)$$

válida para $n \geq 1$ *y todo real* x. *Para demostrar, utilizaremos las fórmulas de diferencias (g) del teorema 2.3 para poner*

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos kx = \operatorname{sen}\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\left(k - \frac{1}{2}\right)x$$

Haciendo $k = 1, 2, ..., n$ *y sumando esas igualdades, encontramos que en la suma del segundo miembro se reduce unos términos con otros obteniéndose (2.7).*
Si $\frac{1}{2}x$ *no es un múltiplo entero de* π *podemos dividir ambos miembros de (2.7) por* $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ *resultando*

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2}x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x)}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$$

Reemplazando n *por* $n-1$ *y sumando* 1 *a ambos miembros también obtenemos. (Ya que* $\cos 0 = 1$*).*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2}\right)x + \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$$

Esas dos fórmulas son válidas si $x \neq 2m\pi$, *siendo* m *entero. Tomando* $x = a/n$, *donde* $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ *encontramos que el par de desigualdades (2.6) es equivalente al siguiente*

$$\frac{a}{n}\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\frac{\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{b} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}$$

Este par, a su vez es equivalente al par

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) < \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{\left(\frac{a}{2n}\right)}\operatorname{sen} a < \operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) \qquad (2.8)$$

Por consiguiente demostrar (2.6) equivale a demostrar (2.8). Demostraremos que se tiene

$$\operatorname{sen}(2n+1)\,\theta - \operatorname{sen}\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < \operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta \qquad (2.9)$$

para $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. *Cuando* $\theta = a/(2n)$ *(2.9) se reduce a (2.8).*
Para demostrar la desigualdad de la parte izquierda de (2.9), usamos la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\cos\theta + \cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta < \operatorname{sen} 2n\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} + \operatorname{sen}\theta,$$

habiendo usado también las desigualdades

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}, \quad 0z < \cos 2n\theta \leq 1, \quad \operatorname{sen}\theta > 0, \qquad (2.10)$$

siendo todas válidas ya que $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. *La desigualdad (2.10) equivale a la parte izquierda de (2.9).*
Para demostrar la parte derecha de (2.9), utilizamos nuevamente la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\cos\theta - \cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta$$

Sumando $\operatorname{sen}\theta$ *ambos miembros, obtenemos*

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta}\right) \qquad (2.11)$$

Pero ya que tenemos

$$\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta} = \frac{2\operatorname{sen}^2 n\theta}{2\operatorname{sen} n\theta\cos n\theta} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}$$

el segundo miembro de (2.11) es igual a

$$\operatorname{sen} 2n\theta\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}\right) = \operatorname{sen} 2n\theta\frac{\cos\theta\cos n\theta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta} = \operatorname{sen} 2n\theta\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}$$

Por consiguiente, para completar la demostración de (2.9), necesitamos tan sólo demostrar que

$$\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \qquad (2.12)$$

Pero tenemos

$$\cos n\theta = \cos(n-1)\cos theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta\operatorname{sen}\theta < \cos(n-1)\theta\cos\theta < \cos(n-1)\theta\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

en donde otra vez hemos utilizado la desigualdad fundamental $\cos\theta < \theta/sen\theta$. *ya que* $\left(\cos x < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$, *esta último relación implica (2.12), con lo que se completa la demostración del teorema 2.4.*

TEOREMA 1.5 *Si dos funciones* sen *y* cos *satisfacen las propiedades fundamentales de la 1 a la 4, para todo a real se tiene*

$$\int_0^a \cos x\, dx = \operatorname{sen} a, \qquad (2.13)$$

$$\int_0^a x\, dx = 1 - \cos a. \qquad (2.14)$$

Demostración.- Primero se demuestra (2.13), y luego usamos (2.13) para deducir (2.14). Supongamos que $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$. *Ya que el coseno es decreciente en* $[0, a]$ *podemos aplicar el teorema 1.14 y las desigualdades del teorema 2.4 obteniendo (2.13). La fórmula es valida también para* $a = 0$, *ya que ambos miembros son cero. Pueden ahora utilizarse las propiedades de la integral para ampliar su validez todos los valores reales* a.
Por ejemplo, si $-\frac{1}{2}\pi \leq a \leq 0$, *entonces* $0 \leq -a \leq \frac{1}{2}\pi$, *y la propiedad de reflexión nos da*

$$\int_0^a \cos x\, dx = -\int_0^{-a} \cos(-x)\, dx = -\int_0^{-a} \cos x\, dx = -\operatorname{sen}(-a) = \operatorname{sen} a.$$

Así, pues, (2.13) es válida en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$. *Supongamos ahora que* $\frac{1}{2}\pi \leq a \leq \frac{3}{2}\pi$. *Entonces* $-\frac{1}{2}\pi \leq a - \pi \leq \frac{1}{2}\pi$, *de modo que*

$$\int_0^a \cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^a \cos x\, dx = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi + \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos(x + \pi)\, dx = 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos x\, dx =$$

$$= 1 - \operatorname{sen}(a - \pi) + \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \operatorname{sen} a$$

Con ellos resulta que (2.13) es válida para todo a en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. *Pero este intervalo tiene longitud* 2π, *con lo que la fórmula (2.13) es válida para todo a puesto que ambos miembros son periódicos respecto a a con período* 2π
Seguidamente usamos (2.13) para deducir (2.14). Ante todo demostramos que (2.14) es válida cuando $a = \pi/2$. *Aplicando sucesivamente, la propiedad de traslación, la co-relación* $\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$, *y la propiedad de reflexión, encontramos*

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \int_{-\pi/2}^0 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\, dx = \int_{-\pi/2}^0 \cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos(-x)\, dx$$

Haciendo uso de la relación $\cos(-x) = \cos x$ *y la igualdad (2.13), se obtiene*

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1$$

Por consiguiente, para cualquier a real, podemos escribir

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi/2}^a \operatorname{sen} x\, dx = 1 + \int_0^{a-\pi/2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\, dx =$$

$$= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \cos x\, dx = 1 + \operatorname{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos a$$

Esto demuestra que la igualdad (2.13) implica (2.14).

Nota 1.2 *Usando (2.13) y (2.14) junto con la propiedad aditiva*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$$

llegamos a las fórmulas de integración más generales

$$\int_a^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx = (1-\cos b) - (1-\cos a) = -(\cos b - \cos a).$$

Si nuevamente utilizamos el símbolo especial $f(x)\,\big|_a^b$ *para indicar la diferencia* $f(b)-f(a)$, *podemos escribir esas fórmulas de integración en la forma*

$$\int_a^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_a^b \qquad y \qquad \int_a^b \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_a^b$$

Nota 1.3 *Con los resultados del ejemplo 1 y la propiedad de dilatación*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x/c)\,dx,$$

obtenemos las fórmulas siguientes, válidas para $c \neq 0$*;*

$$\int_a^b \cos cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \cos x\,dx = \frac{1}{c}(\operatorname{sen} cb - \operatorname{sen} ca)$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{c}(\cos cb - \cos ca).$$

Nota 1.4 *La identidad* $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ *implica* $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ *con lo que, a partir del ejemplo 2, obtenemos*

$$\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (1-\cos 2x)\,dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a$$

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, *encontramos también*

$$\int_0^a \cos^2 x\,dx = \int_0^a (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx = a - \int_0^a \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a$$

1.7. Descripción geométrica de las funciones seno y coseno