Calculo diferencial e integral tomo 1

Nikolai Piskunov

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1. Número, variable y función **3**

1.1. Números reales. Representación de número reales por medio de puntos en el eje numérico . . 3

1.2. Valor absoluto del número real 4

1

Número, variable y función

1.1. Números reales. Representación de número reales por medio de puntos en el eje numérico

Definición 1.1 *El número racional puede expresarse como la razón* $\dfrac{p}{q}$ *de dos números enteros* p *y* q*.*
El número entero p *se puede considerar como la razón de dos números enteros* $\dfrac{p}{1}$*.*

Definición 1.2 *Los números en forma de fracciones decimales indefinidas no periódicas, se denominan números irracionales.*

Definición 1.3 *Para cualquier par de números reales* x *e* y *existen una correlación, y sólo una, de las siguientes:*

$$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y$$

Teorema 1.1 *Todo número irracional* α *se puede expresar con cualquier grado de precisión por medio de números racionales.*

Demostración.- *En efecto, siendo el número irracional* $\alpha > 0$*, calculamos* α *con un error no mayor de* $\dfrac{1}{n}$ *(por ejemplo,, de* $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}$*, etc.)*
Cualquiera que sea el número α*, está comprendido entre dos números enteros consecutivos* N *y* $N+1$*. Dividamos el segmento comprendido entre* N *y* $N+1$ *en* n *partes, entonces el número* α *resulta comprendido entre los número racionales* $N + \dfrac{m}{n}$ *y* $N + \dfrac{m+1}{n}$*. Dado que la diferencia entre estos números es* $\dfrac{1}{n}$*, cada uno de ellos expresa* α *con un grado de precisión predeterminado: El primero por defecto y el segundo por exceso.*

1.2. Valor absoluto del número real

Definición 1.4 *Un número real no negativo, que satisface las condiciones:*

$$|x| = x, \ si \ x \geq 0;$$

$$|x| = -x, \ si \ x < 0$$

se llama valor absoluto (o módulo) de un número real x.

Propiedad 1.1 *El valor absoluto de la suma albegraica de varios números reales no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Demostración.- Sea $x + y \geq 0$, entonces:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

(ya que $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$).
Supongamos ahora que $x + y < 0$, entonces:

$$|x + y| = -/x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|,$$

como se trataba de demostrar.

Propiedad 1.2 *El valor absoluto de la diferencia de dos números no es mejor que la diferencia de los valores absolutos del minuendo y sustraendo:*

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

Demostración Supongamos que $x - y = x$. Entonces $x = y + z$, y según lo demostrado anteriormente, se tiene:

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |z| + |x - y|,$$

de donde

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

como se trataba de demostrar.

Propiedad 1.3 *El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores:*

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

Propiedad 1.4 *El valor absoluto del cociente es igual al cociente de dividir el valor absoluto del dividendo por el del divisor:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

1.3. Magnitudes variables y constantes