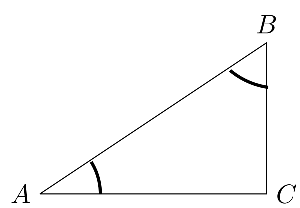
Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Geometría I.**
Práctica: IV.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Soluciones

1. En la figura, O es el punto de AD y $\widehat{B} = \widehat{C}$, O y C son colineales, concluya que los triángulos ABO y DOC son congruentes.

Demostración.- Por hipótesis $AO = OD$ y $\widehat{B} = \widehat{C}$, entonces demostraremos que $\triangle AOB = \triangle COD$, por proposición AB es paralelo a CD, de donde $\widehat{A} = \widehat{D}$ ya que son correspondientes, luego como $C\widehat{O}D = A\widehat{O}B$opuestos por le vértice, entonces por el caso ALA concluimos que $\triangle AOB = \triangle COD$.

2. Pruebe que la suma de las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90°



Demostración.- Por teorema 6.5 $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 180°$. Sea $\widehat{C} = 90°$ entonces $\widehat{A}+\widehat{B} = 180° - \widehat{C}$ que implica $\widehat{A}+\widehat{B} = 90°$.

3. Pruebe que cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°.

Demostración.- Sea ABC un triángulo equilátero entonces:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 180° \qquad (1)$$

Luego por ser isósceles $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{B}$ tenemos:

$$3 \cdot \widehat{B} = 180°$$

por lo tanto $\widehat{B} = 60°$ y esto implica que $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{B} = 60°$.

4. Pruebe que la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes a él.

Demostración.- Sea $\triangle ABC$ se sabe que $widehat A + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ y $\widehat{B} + \widehat{\alpha}$ por lo tanto $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = \widehat{B}+\widehat{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\alpha} = \widehat{A}+\widehat{B}$.

5. Un segmento que une dos puntos de un círculo y que pasa por su centro se llama diámetro. En la figura, O es el centro del círculo, AB es un diámetro y C es otro punto del círculo. Muestre que $\widehat{2} = 2\widehat{1}$.

Demostración.- Como el anterior ejercicio $\widehat{2} = \widehat{1} + \widehat{c}$. Para mostrar que $\widehat{2} = 2 \cdot \widehat{1}$ basta demostrar que $\widehat{c} = \widehat{1}$. Sabemos que $AD = r$ y $OC = r$ entonces $AO = OC$ de donde $\triangle AOC$ es isósceles de base AC y ángulos $\widehat{1} = \widehat{C}$.

6. Pruebe que si m y n son rectas equidistantes (esto es, rectas tales que todos los puntos de m están a la misma distancia de n) entonces m y n son paralelas o coincidentes.

Demostración.- Sean m y n dos rectas distintas que se cruzan en el punto P. Marque el punto A en la recta m a través del cual la recta n en el punto $A^{'}$ perpendicularmente. Como las rectas son equidistantes, entonces $AP = A^{'}P$ y $\triangle AA^{'}P$ son isósceles de base $AA^{'}$ lo cual es absurdo ya que la suma de sus ángulos internos sería mayor que $180°$, luego o m es paralelo a n o $m = n$, es decir, coincidentes.

7. Sea ABC un triángulo isósceles con base AB. Sean M y N los puntos medios de los lados CA y CB, respectivamente. Muestre que el reflejo del punto C relativo a la recta MN es exactamente el punto medio de AB.

Demostración.- Sea $\triangle ABC$, $CM = CN$, ya que el triángulo es isósceles, y M, N es el punto medio. Sea $F_{(MN)}(C) = C^{'}$ entonces $CC^{'}$ intercepta MN perpendicularmente. Así por el criterio de hipotenusa y cateto $\triangle CMF = \triangle NFN$ y por lo tanto $CC^{'}$ intercepta MN en su punto medio.

8. Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene to- dos sus ángulos rectos. Muestre que todo rectángulo es un paralelogramo.

Demostración.- Sabemos que AB es paralelo a DC luego marcamos una recta r. Los ángulos $B\widehat{A}C = A\widehat{C}D$ y como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados, entonces:

$$A\widehat{C}B = D\widehat{A}C$$

, luego por LAL

$$\triangle ADC = \triangle ABC$$

Así los segmentos $AD = BC$ ambos son perpendiculares a AB, DC entonces los cuatro lados son congruentes y paralelos.

9. Muestre que las diagonales de un rectángulo son congruentes.

Demostración.- Se sabe que si dos rectas son interceptadas por una tercera perpendicular a ellas entonces son paralelas, entonces dado el rectángulo $ABCD$ se tiene:

$$AB//DC\, y AD//BC$$

por tanto el rectángulo es un paralelogramo y $AB = DC$ y $AD = BC$. Dadas las rectas DB y AC, diagonal de $ABCD$, probamos que son congruentes.
Dados los puntos ABC tenemos $\triangle ABC$, y de manera análoga construimos $\triangle ADC$ ya que ambos son rectos y $AD = BC$, $AB = DC$ en el caso de que LAL sean congruentes y $DB = AC$.

10. Un rombo es un cuadrilátero que tiene todos sus lados congruentes, luego es un paralelogramo. Muestre que las diagonales de un rombo se cortan en un ángulo recto y son bisectrices de sus ángulos.

Demostración.- Sea AC y BD y sean diagonales del rombo $ABCD$ que se interseca en F, luego a través de los puntos AB y C construimos el triángulo ABC de manera análoga construimos el triángulo DAB. Como $BA = BC$ y $DA = AB$ entonces $\triangle ABC$ y $\triangle DAB$ son isósceles tales que:

$$\triangle ABC = \triangle ABF \cup \triangle BFC$$

$$\triangle DAB = \triangle DAF \cup \triangle FAB$$

y $\triangle ABF = \triangle BFC$, $\triangle DAF = \triangle FAB$ por el caso LLL. Por lo tanto BD intercepta AC en $90°$ y como se cruzan en sus puntos medios y las diagonales son la base del triángulo isósceles entonces son bisectrices.

11. Un cuadrado es un rectángulo que también es un rombo. Muestre que, si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se cortan en un punto que es punto medio de ambas, entonces el cuadrilátero es un rectángulo. Si además, las diagonales son perpendiculares una con otra, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.

Demostración.- Por el caso LLL se tiene $\triangle AOC = \triangle BOD$; $\triangle AOB = \triangle COD$. Como $AB = BC$ por hipótesis y O es el punto medio de ambos, de donde

$$BO = OD = OC = AO \qquad (1)$$

$$\triangle AOC = \triangle BOD; \triangle AOB; \triangle COD$$

Para el caso LLL. Así como los ángulos $A\widehat{O}B$ y $B\widehat{O}C$ están bajo el mismo semirecto y son complementarios, además de congruentes, nos queda

$$A\widehat{O}B = B\widehat{O}D = 90°$$

Análogamente para $A\widehat{O}C = C\widehat{O}D = 90°$. Luego por (1) los triángulos contenidos en $ABCD$ son isósceles entonces $O\widehat{B}D = O\widehat{D}B = O\widehat{B}A = B\widehat{A}D = D\widehat{A}C = A\widehat{C}D = O\widehat{D}C = 45°$, debido a que la suma e sus ángulos internos debe ser $180°$ uno de los ángulos es recto y dos de la base son congruentes, entonces los ángulos $A\widehat{B}D = B\widehat{A}C = C\widehat{D}B = A\widehat{B}D = 90°$ satisfaciendo la definición de rectángulo.

12. Un trapecio es un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos que son paralelos. Los lados paralelos de un trapecio son llamados bases y los otros dos son llamados laterales. Un trapecio se dice isósceles si sus laterales son congruentes. Sea $ABCD$ un trapecio donde AB es una base; si él es isósceles, muestre que $\widehat{A} = \widehat{B}$ y $\widehat{C} = \widehat{D}$.

Demostración.-

13. Muestre que las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes.

Demostración.- Dado $ABCD$ un trapezoide y $\overline{AD} = \overline{BC}$ entonces $\overline{AC} = \overline{BD}$. Dado $\overline{AD} = \overline{BC}$ entonces los ángulos de la base de un trapezoide isósceles son congruentes es decir $\angle ADC = \angle BCD$, de donde por la propiedad reflexiva $\overline{DC} = \overline{DC}$, luego $\triangle ADC = \triangle BCD$, por lo tanto $\overline{AC} = \overline{BD}$ ya que las partes correspondientes de triángulos congruentes son también congruentes.

14. Muestre que los casos de congruencia especiales para triángulos rectángulos, propuestos en el teorema 5,14 del capítulo 5, después del axioma de las paralelas, tiene demostración sencilla.

Demostración.-

15. Muestre que, si dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, en un triángulo, son iguales a las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Demostración.-