1

Álgebra vectorial

1.2. El espacio vectorial de las n-plas de números reales

Definición 1.1 *Dos vectores A y B de V_n son iguales siempre que coinciden sus componentes. Esto es, si $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ..., b_3)$, la ecuación vectorial $A = B$ tiene exactamente el mismo significado que las n ecuaciones escalares*

$$a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2, \qquad a_n = b_n$$

La suma $A + B$ se define como el vector obtenido sumando los componentes correspondientes:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

La c es un escalar, definimos cA o Ac como el vector obtenido multiplicando cada componente de A por c:

$$cA = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$$

TEOREMA 1.1 ***a.*** *La adición de vectores es conmutativa.*

$$A + B = B + A$$

Demostración.- Sea V_n el espacio vectorial n-plas y $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ...b_n)$, por lo tanto por definición de adición y propiedad de números reales, tenemos

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, ..., b_n + a_n) = B + A$$

.

b. *y asociativa,*

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Demostración.- Sea V_n el espacio vectorial n-plas y $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ y $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ entonces

$$A + (B + C) = A + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, ..., b_n + c_n) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), ..., a_1 + (b_n + c_n)) =$$

$$((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, ..., (a_n + b_n) + c_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., b_n + c_n) + C = (A + B) + C$$

c. *La multiplicación por escalares es asociativa*

$$c(dA) = (cd)A$$

Demostración.- Sea $c, d \in \mathbb{R}$ *y* $A \in V_n$ *entonces*

$$\begin{array}{rcl} c(dA) & = & c(da_1, da_2, ..., da_n) \\ & = & ((cd)a_1, (cd)a_2, ..., (cd)a_3) \\ & = & (cd)A \end{array}$$

d. *y satisface las dos leyes distributivas*

$$c(A + B) = cA + cB, \quad y \quad (c + d)A = cA + dA$$

Demostración.- Las demostraciones son fáciles de realizar siempre y cuando se tomen en cuenta Las definiciones de 12.1.

e. *El vector con todos los componentes* 0 *se llama vector cero y se representa con* O*. Tiene la propiedad.*

Demostración.- Existencia. Sea $O = (o, o, ..., o)$ *de donde* $A + O = (a_1, a_2, ..., a_n) + (o, o, ..., o) = (a_1 + o, a_2 + o, ..., a_n + o) = (a_1, a_2, ..., a_n) = A$.
Unicidad. Supongamos que $O, O^{'} \in V_n; O \neq O$ *tal que*

$$\left\{ \begin{array}{lll} A + O = A & \text{tomando } A = O^{'} : & O^{'} + O = O^{'} \\ A + O^{'} = A & \text{tomando } A = O : & O + O^{'} = O \end{array} \right.$$

Por lo tanto $O = O^{'}$.

f. *El vector* $(-1)A$ *que también se representa con* $-A$ *se llama el apuesto a* A*. También escribimos* $A - B$ *en lugar de* $A + (-B)$ *y lo llamamos diferencia de* A *y* B*. La ecuación* $(A + B) - B = A$*. Demuestra que la sustracción es la operación inversa de la adición. Obsérvese que* $0A = O$ *y que* $1A = A$.

1.3. Interpretación geométrica para $n \leq 3$

Definición 1.2 *Dos vectores* A *y* B *de* V_n *tienen la misma dirección si* $B = cA$ *para un cierto escalar positivo* c*, y la dirección opuesta si* $B = cA$ *para un cierto* c *negativo. Se llaman paralelos si* $B = cA$ *para un cierto* c *no nulo.*

1.4. Ejercicios

1. Sean $A = (1, 3, 6)$, $B = (4, -3, 3)$ y $C = (2, 1, 5)$ tres vectores de V_3. Determinar los componentes de cada uno de los vectores:

a) $A + B = (1, 3, 6) + (4, -3, 3) = (1 + 4, 3 + (-3), 6 + 3) = (5, 0, 9)$

b) $A - B = (1,3,6) - (4,-3,3) = (1-4, 3-(-3), 6-3) = (-3,6,3)$

c) $A + B - C = (1,3,6) + (4,-3,3) - (2,1,5) = (1+4-2, 3-3-1, 6+3-5) = (3,-1,4)$

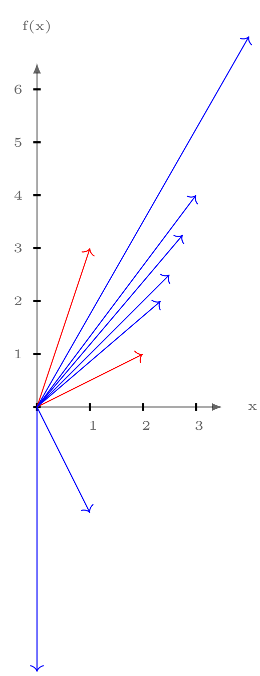
d) $7A - 2B - 3C = 7(1,3,6) - 2(4,-3,3) - 3(2,1,5) = (7,21,42) - (8,-6,6) - (6,3,15) =$
$= (7-8-6, 21-8-(-6)-3, 42-6-15) = (-7,24,21)$

e) $2A + B - 3C = 2(1,3,6) + (4,-3,3)3(2,1,5) = (2+4-6, 6-3-3, 12+3-15) = (0,0,0)$

2. Dibujar los vectores geométricos que unen el origen a los puntos $A = (2,1)$ y $B = (1,3)$. En la misma figura trazar el vector geométrico que une el origen al punto $C = A + t(B)$ para cada uno de los siguientes valores de t: $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{3}{4}$; $t = 1$; $t = 2$; $t = -1$; $t = -2$.

Respuesta.-

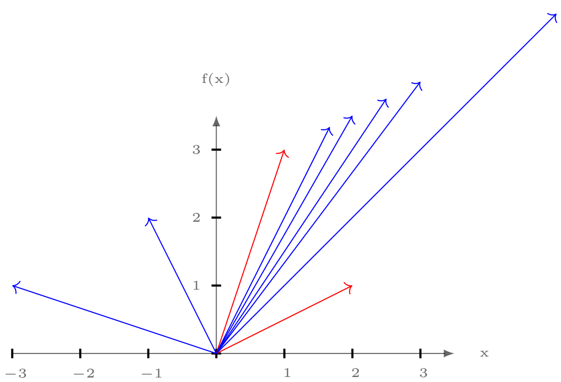
$$
\begin{array}{lll}
\text{Si} \quad t = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & C = (\frac{7}{3}, 2) \\[6pt]
\text{Si} \quad t = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & C = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) \\[6pt]
\text{Si} \quad t = 1 & \Longrightarrow & C = (\frac{11}{4}, \frac{13}{4}) \\[6pt]
\text{Si} \quad t = 2 & \Longrightarrow & C = (3,4) \\[6pt]
\text{Si} \quad t = -1 & \Longrightarrow & C = (4,7) \\[6pt]
\text{Si} \quad t = -2 & \Longrightarrow & C = (1,-2) \\[6pt]
\text{Si} \quad t = \frac{3}{4} & \Longrightarrow & C = (0,-5)
\end{array}
$$



3. resolver el ejercicio 2 si $C = tA + B$.

Respuesta.-

$$
\begin{array}{llll}
\text{Si} & t = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & C = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}) \\
\text{Si} & t = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & C = (2, \frac{7}{2}) \\
\text{Si} & t = 1 & \Longrightarrow & C = (\frac{5}{2}, \frac{15}{4}) \\
\text{Si} & t = 2 & \Longrightarrow & C = (3, 4) \\
\text{Si} & t = -1 & \Longrightarrow & C = (5, 5) \\
\text{Si} & t = -2 & \Longrightarrow & C = (-1, 2) \\
\text{Si} & t = \frac{3}{4} & \Longrightarrow & C = (-3, 1)
\end{array}
$$

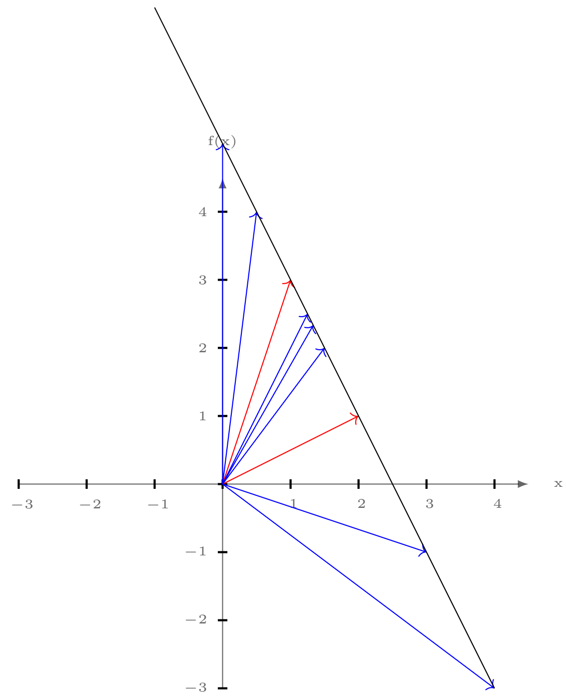


4. Sean $A = (2, 1)$, $B = (1, 3)$ y $C = xA + yB$, en donde x e y son escalares.

a) Trazar el vector que une el origen a C para cada uno de los siguientes pares de valores de x e y: $x = y = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{3}{4}$; $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}$; $x = 2,\ y = -1$; $x = 3,\ y = -2$; $x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2}$; $x = -1,\ y = 2$.

Respuesta.-

$$
\begin{array}{llll}
\text{Si} & x = y = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{3}{2}, 2\right) \\
\text{Si} & x = \frac{1}{4},\ y = \frac{3}{4} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right) \\
\text{Si} & x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) \\
\text{Si} & x = 2,\ y = -1 & \Longrightarrow & C = (3, -1) \\
\text{Si} & x = 3,\ y = -2 & \Longrightarrow & C = (4, -3) \\
\text{Si} & x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \\
\text{Si} & x = -1,\ y = 2 & \Longrightarrow & C = (0, 5)
\end{array}
$$

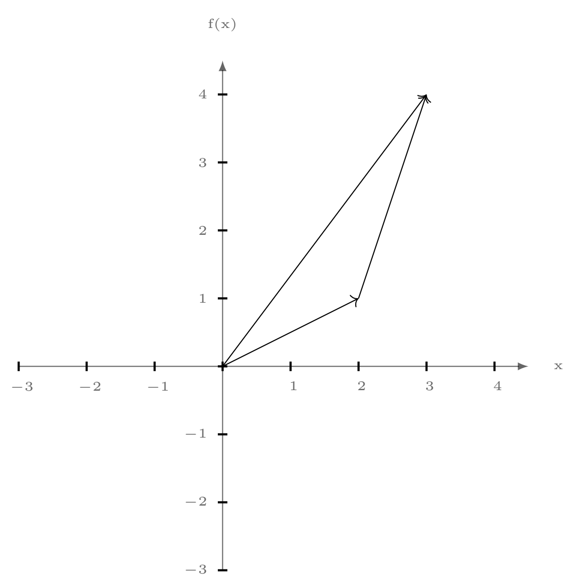


b) ¿Qué conjunto es el de los puntos C obtenidos cuando x e y toman todos los valores reales tales que $x+y=1$? (Hacer una conjetura y mostrar el lugar geométrico en la figura. No hacer la demostración).

Respuesta.- Sea $x=3,\ y=-2$ y $x=-2,\ y=3$ podemos graficar el conjunto de los puntos C tales que $x+y=1$.

c) Dar una idea del conjunto de todos los puntos C obtenidos al variar independientemente x e y en los intervalos $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$, y hacer una representación de ese conjunto.

Respuesta.-



d) ¿Qué conjunto es el de todos los puntos C obtenidos si x varía en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ e y recorre todos los números reales?.

Respuesta.- La banda horizontal obtenida sumando xA a la línea $y = \frac{1}{3}x$ para cada uno $0 \leq x \leq 1$.

e) ¿Qué conjunto resulta si x e y recorren ambos todos los números reales?.

Respuesta.- Todo R^2.

5. Sean $A = (2,1)$ y $B = (1,3)$. Demostrar que todo vector $C = (c_1, c_2)$ de V_2 puede expresarse en la forma $C = xA + yB$. Expresar x e y en función de c_1 y c_2.

Demostración.- Ya que
$$C = xA + yB = (2x + y, x + 3y) = (c_1, c_2)$$
se tiene $c_1 = 2x + y$ y $c_2 = x + 3y$ de donde
$$y = \frac{1}{5}(2c_2 - c_1)$$
$$x = \frac{1}{5}(3c_1 - c_2)$$
Esto demuestra que cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ se puede obtener como $xA + yB$ dado $C = (c_1, c_2)$ que calculamos.

6. Sea $A = (1,1,1)$, $B = (0,1,1)$ y $C = (1,1,0)$ tres vectores de V_3 y $D = xA + yB + zC$, donde x, y z son escalares.

a) Determinar los componentes de D.

Respuesta.- Tenemos que $D = x(1,1,1)+y(0,1,1)+z(1,1,0)$ de donde $D = (x,x,x)+(0,y,y)+(z,z,0)$ así,
$$D = (x + z, x + y + z, x + y)$$

b) Si $D = 0$ demostrar que $x = y = z = 0$.

Demostración.- Sea $D = 0 = (0,0,0)$ entonces
$$\begin{aligned} x + z = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = -z \\ x + y + z = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y = 0 \\ x + y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = -y \end{aligned}$$
de donde concluimos que $x = y = z = 0$.

c) Hallar x, y, z tales que $D = (1,2,3)$.

Respuesta.-
$$\begin{array}{rcll} x + z = 1 & \Longrightarrow & z = 1 - x & \Longrightarrow z = -1 \\ x + y + z = 2 & \Longrightarrow & x + y + 1 - x = 2 & \Longrightarrow y = 1 \\ x + y = 3 & \Longrightarrow & x + 1 = 3 & \Longrightarrow x = 2 \end{array}$$

7. Sean $A = (1,1,1)$, $B = (0,1,1)$ y $C = (2,1,1)$ tres vectores de V_3 y $D = xA + yB + zC$, en donde x, y, z son escalares.

a) Determinar los componentes de D.

Respuesta.- Sea $D = x(1,1,1) + y(0,1,1) + z(2,1,1)$ entonces $D = (x+2z, x+y+z, x+y+z)$.

b) Hallar x, y, z no todos nulos, tales que $D = 0$.

Respuesta.- Sea $x = 2$, $y = -1$ y $z = -1$, entonces

$$D = (x+2z, x+y+z, x+y+z) = (2-2, 2-1-1, 2-1-1) = (0,0,0) = O$$

c) Demostrar que ninguna elección de x, y, z hace $D = (1,2,3)$.

Demostración.- Sea

$$\begin{array}{rcll} x+2z=1 & \Longrightarrow & x = 1-2z & \\ x+y+z=2 & \Longrightarrow & 1-2z+y+z=2 & \Longrightarrow y = z+1 \\ x+y+z=3 & \Longrightarrow & 1-2z+z+1+z=3 & \Longrightarrow 2=3 \end{array}$$

de donde encontramos un absurdo al declarar que $2 = 3$, por lo tanto no existe ninguna elección que satisfaga a $D = (1,2,3)$.

8. Sean $A = (1,1,1,0)$, $B = (0,1,1,1)$, $C = (1,1,0,0)$ tres vectores de V_4 y $D = xA + yB + zC$ siendo x, y, z escalares.

a) Determinar los componentes de D.

Respuesta.- Se tiene $D = x(1,1,1,0) + y(0,1,1,1) + z(1,1,0,0)$ entonces $D = (x+z, x+y+z, x+y, y)$

b) Si $D = 0$, Demostrar que $x = y = z = 0$

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} x+z=0 & & \\ x+y+z=0 & \Longrightarrow & z=0 \\ x+y=0 & \Longrightarrow & x=0 \\ y=0 & & \end{array}$$

Por lo tanto $x = y = z = 0$.

c) Hallar x, y, z tales que $D = (1,5,3,4)$.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} x+z=1 & & \\ x+y+z=5 & \Longrightarrow & z=2 \\ x+y=3 & \Longrightarrow & x=-1 \\ y=4 & & \end{array}$$

Por lo tanto $x = -1$, $y = 4$ y $z = 2$.

d) Demostrar que ninguna elección de x, y, z hace $D = (1, 2, 3, 4)$.

Demostración.- La demostración es similar al problema 7c.

9. En V_n demostrar que dos vectores paralelos a un mismo vector son paralelos entre sí.

Demostración.- Por definición de vectores paralelos se tiene $c_1 A = C$ y $c_2 B = C$ de donde $c_1 A = c_2 B$, en vista de que $c_1 \cdot c_2 \neq 0$ entonces $B = c_1 c_2^{-1} A$, por lo tanto concluimos que A y B son paralelos entre sí.

10. Dados cuatro vectores no nulos A, B, C, D de V_n tales que $C = A + B$ y A paralelo a D. Demostrar que C es paralelo a D si y sólo si B es paralelo a D.

Demostración.

11. **a)** Demostrar, para los vectores V_n las propiedades de la adición y de la multiplicación oor escalares dadas en el teorema 12.1

Demostración.-

b) Mediante vectores geométricos en el plano, representar el significado geométrico de las dos leyes distributivas $(c + d)A = cA + dA$ y $c(A + B) = cA + cB$.

Respuesta.-

12. Si un cuadrilátero $OABC$ de V_2 es un paralelogramo que tiene A y C como vértices opuestos, demostrar que $A + \frac{1}{2}(C - A) = \frac{1}{2}B$. ¿Qué teorema relativo a los paralelogramos puede deducirse de esta igualdad?.

Demostración.-