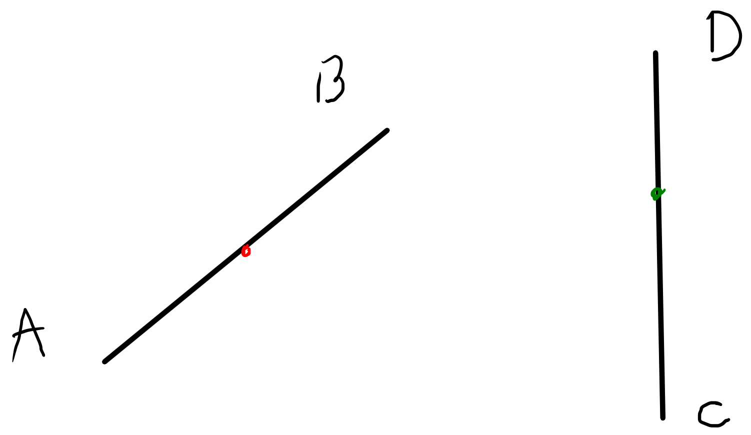
Cap 4. Congruencia

Idea: Dos conjuntos de puntos del plano son congruentes si tienen la misma forma y tamaño.

Def:

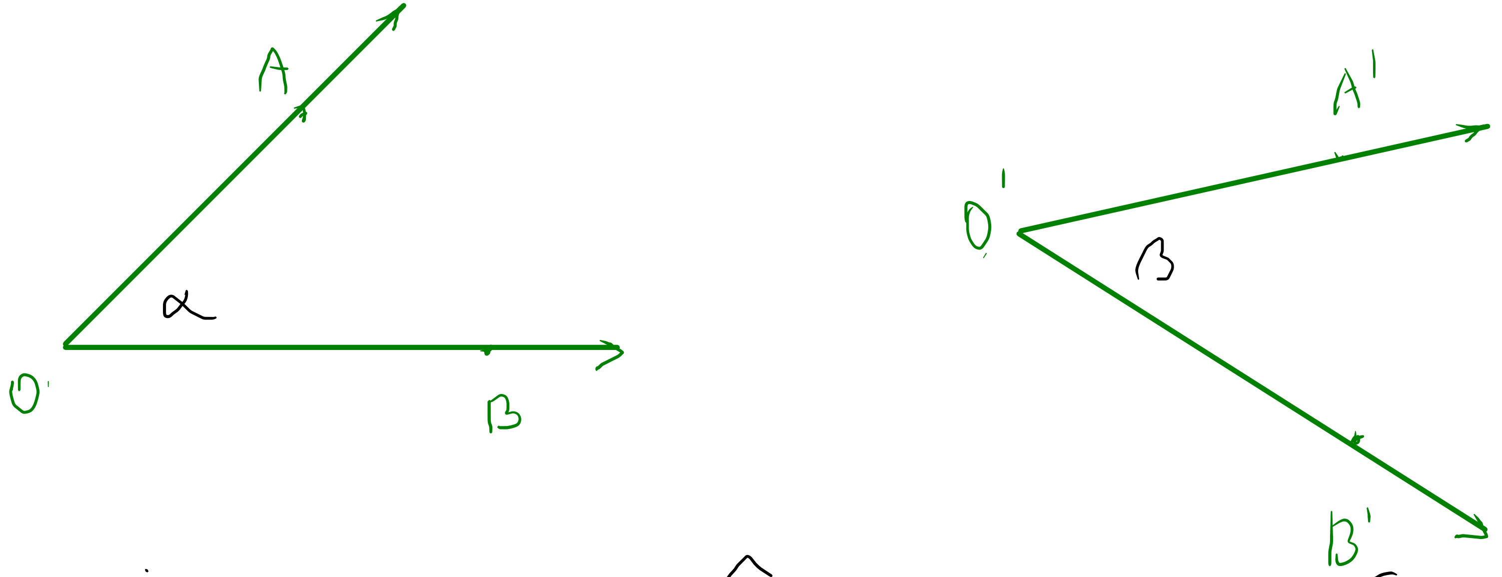
* Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.
* Dos ángulos son congruentes si tienen igual medida.



Note que como conjuntos $AB \neq CD$.

Como $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\Rightarrow$ AB es congruente con CD



Si $\alpha = \beta \Rightarrow \hat{AOB}$ es congruente con $A'\hat{O'}B'$

Como conjuntos de puntos pueden no ser iguales.

Notación: Moise: $AB \cong CD$ (segmentos congruentes)

$\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ (ángulos congruentes)

Barbosa: $\boxed{\begin{array}{l} AB = CD \\ \hat{AOB} = A'\hat{O'}B' \end{array}}$ (objetos congruentes)

Correspondencia (biunívoca) entre conjuntos finitos:

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. "A cada punto A_i le corresponde un único punto B_j y a cada punto B_j le corresponde un único punto A_i"; describe una correspondencia (biunívoca) entre estos conjuntos. Denotamos:

$$A_i \longleftrightarrow B_j$$

Ejemplo: $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \leftrightarrow B_1 \\ A_2 \leftrightarrow B_2 \end{array}\right\} \text{correspondencia 1} \qquad \left.\begin{array}{l} A_1 \leftrightarrow B_2 \\ A_2 \leftrightarrow B_1 \end{array}\right\} \text{correspondencia 2}$$

Ejemplos $\{A, B, C\}$, $\{D, E, F\}$

$A \leftrightarrow D$ | $A \leftrightarrow E$ | $A \leftrightarrow F$
$B \leftrightarrow E$ | $B \leftrightarrow D$ | $B \leftrightarrow D$
$C \leftrightarrow F$ | $C \leftrightarrow F$ | $C \leftrightarrow E$

$A \leftrightarrow D$ | $A \leftrightarrow E$ | $A \leftrightarrow F$
$B \leftrightarrow F$ | $B \leftrightarrow F$ | $B \leftrightarrow E$
$C \leftrightarrow E$ | $C \leftrightarrow D$ | $C \leftrightarrow D$

Existen 6 posibles correspondencias

* Si tenemos dos conjuntos de 4 elementos se pueden establecer $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ correspondencias.

Def: Dos triángulos son congruentes si fuese posible establecer una correspondencia biunívoca entre sus vértices tal que los lados y ángulos correspondientes sean congruentes.

OBS: Sean los triángulos ABC y DEF.

Si

$A \leftrightarrow D$

$B \leftrightarrow E$

$C \leftrightarrow F$

o

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

se establece $\Rightarrow$

$AB \leftrightarrow DE$

$BC \leftrightarrow EF$

$AC \leftrightarrow DF$

(correspondencia entre lados) ✓

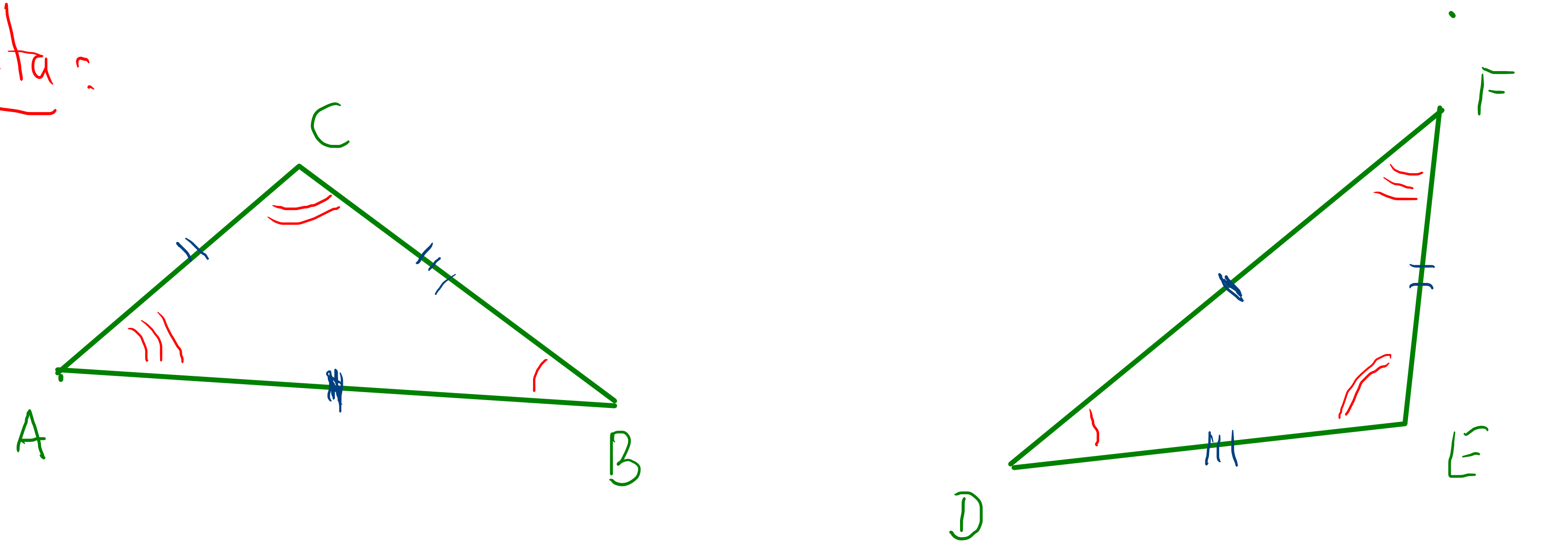
$\hat{A} \leftrightarrow \hat{D}$

$\hat{B} \leftrightarrow \hat{E}$

$\hat{C} \leftrightarrow \hat{F}$

✓ (correspondencia entre ángulos)

Nota:



$$\left[\, ABC \longleftrightarrow FDE \,\right] \quad y \quad \underbrace{\left[\begin{array}{l} AB = FD \\ BC = DE \\ AC = FE \end{array}\right]} \; \underbrace{\left[\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{F} \\ \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{C} = \hat{E} \end{array}\right]}$$

ABC es congruente con FDE

$ABC \cong FDE$ (notación)

$\triangle ABC \cong \triangle FDE$

Axioma IV Dados los triángulos ABC y EFG,

$$\text{si } \begin{cases} AB = EF \\ AC = EG \\ \hat{A} = \hat{E} \end{cases} \Rightarrow ABC = EFG$$

(criterio Lado ángulo lado (LAL))

OBS: Se establece $ABC \leftrightarrow EFG$

o $BAC \leftrightarrow FEG$

donde 1) $\left.\begin{matrix} AB = EF \\ AC = EG \end{matrix}\right\}$ * (Par de lados correspondientes congruentes)

2) $\hat{A} = \hat{E}$ $\left(B\widehat{A}C = F\widehat{E}G \right)$

(ángulos entre los lados correspondientes (*) congruentes)

OBS: Del axioma IV:

Si $ABC \leftrightarrow DEF$

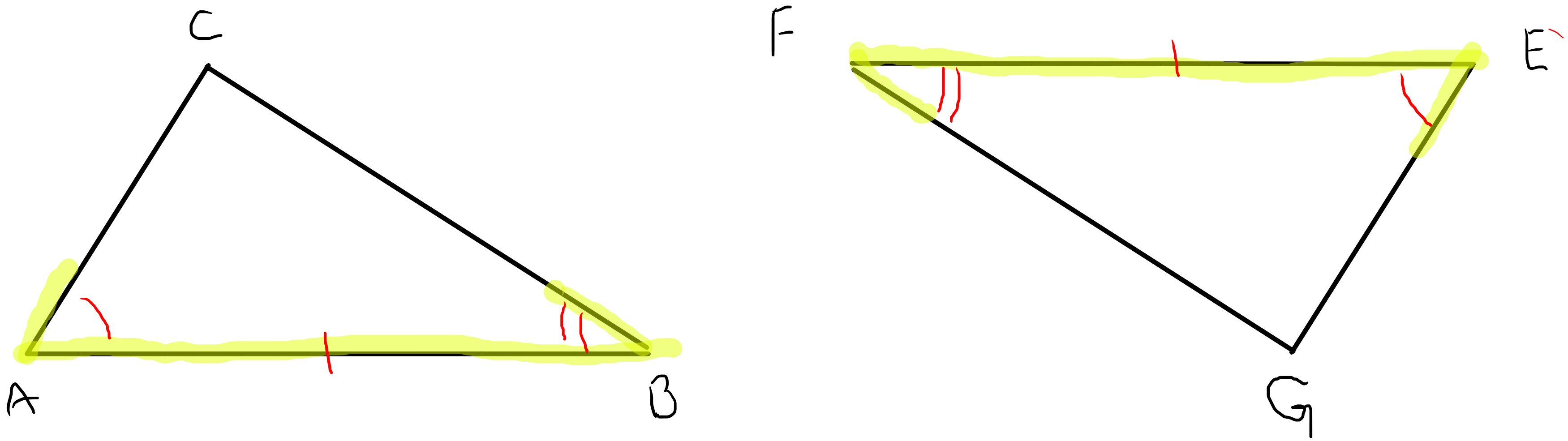
$$\left[\begin{array}{l} AB = DE \\ BC = EF \\ A\hat{B}C = D\hat{E}F \end{array}\right] \Rightarrow (ABC = DEF) \xrightarrow{\text{por def}} \left\{\begin{array}{l} AB = DE \\ BC = EF \\ AC = DF \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{C} = \hat{F} \end{array}\right.$$

Teorema: (Ángulo Lado Ángulo (ALA)) Dados ABC y EFG

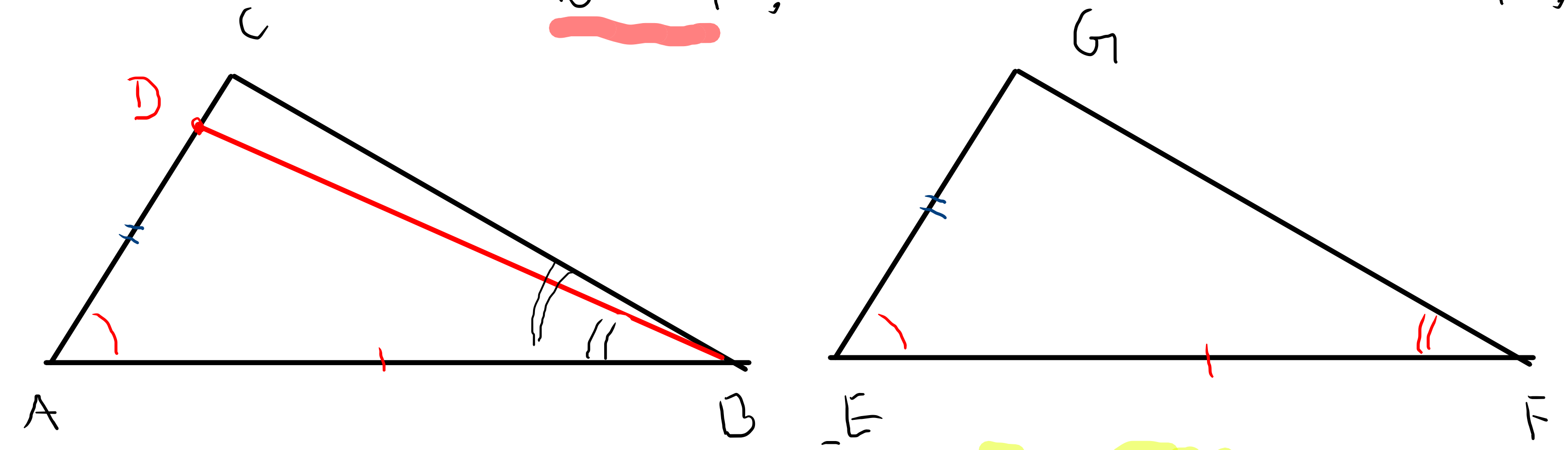
Si $AB = EF$

$\hat{A} = \hat{E}$

$\hat{B} = \hat{F}$ $\Rightarrow$ $ABC = DEF$ (ABC es congruente con DEF)



Demostración: Sean ABC y EFG t.q. $AB = EF$, $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$.



Sea D en S_{AC} t.q. $AD = EG$.

Luego, por el axioma IV, $DAB = GEF$. Así, $A\hat{B}D = \hat{F}$, de donde $A\hat{B}D = A\hat{B}C$.

En el semiplano determinado por la recta AB y el punto C, las semirectas S_{BD} y S_{BC}, están en correspondencia con la medida de $A\hat{B}D$; de donde $S_{BD} = S_{BC}$.

Además, $C = D$ pues existe un único punto de intersección entre las rectas AC y BD (igual a la recta BD).

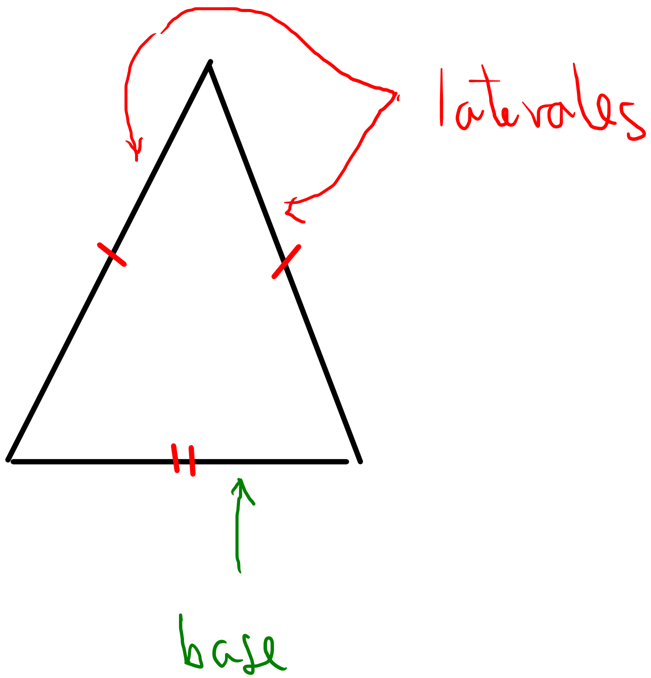
Por tanto,

$$ABC = ABD = GEF.$$

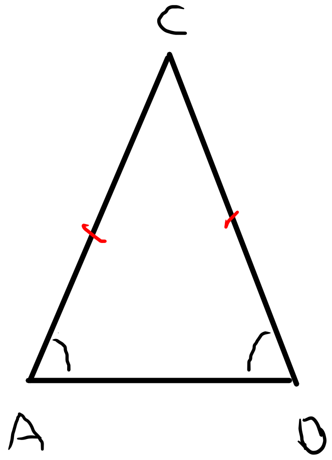
Def: Un triángulo se dice isósceles si tiene dos lados congruentes.

- lados congruentes : laterales
- al tercer lado : base

} del triángulo isósceles

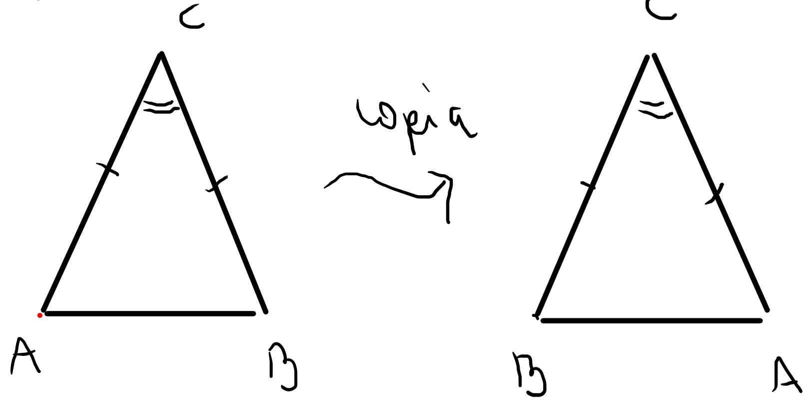


Proposición En un triángulo isósceles los ángulos de la base son congruentes.



$AC = BC \Rightarrow C\hat{A}B = C\hat{B}A$.

Dem:



Sobre el mismo triángulo tomemos

$$ABC \longleftrightarrow BAC \qquad (*)$$

Claramente, $CA = CB$,

$$CB = CA \qquad (**)$$

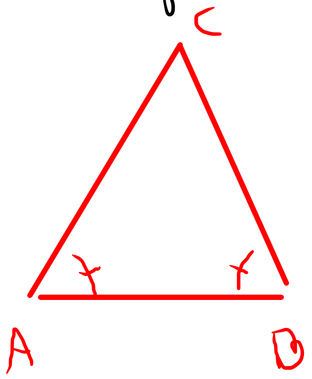
y $A\hat{C}B = B\hat{C}A$.

Por el Axioma IV (criterio LAL), se tiene $ABC = BAC$.

(*) (**)

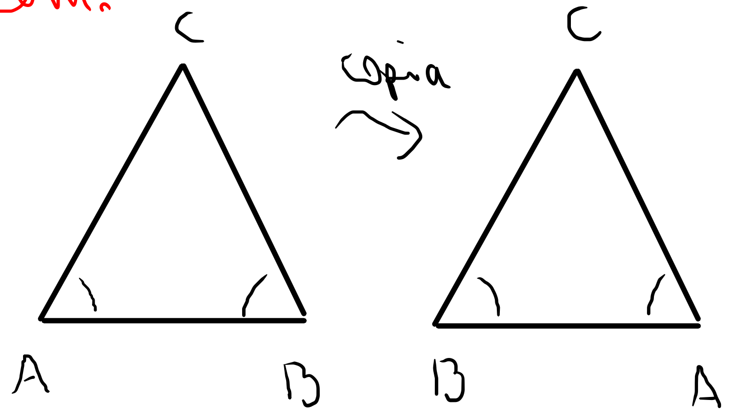
Por tanto, $C\hat{A}B = C\hat{B}A$. $\square$

Proposición Si en un triángulo ABC, se tienen dos ángulos congruentes, entonces el triángulo es isósceles.



Si $\hat{A} = \hat{B} \Rightarrow AC = BC$ (ABC isósceles)

Dem:



Tenemos

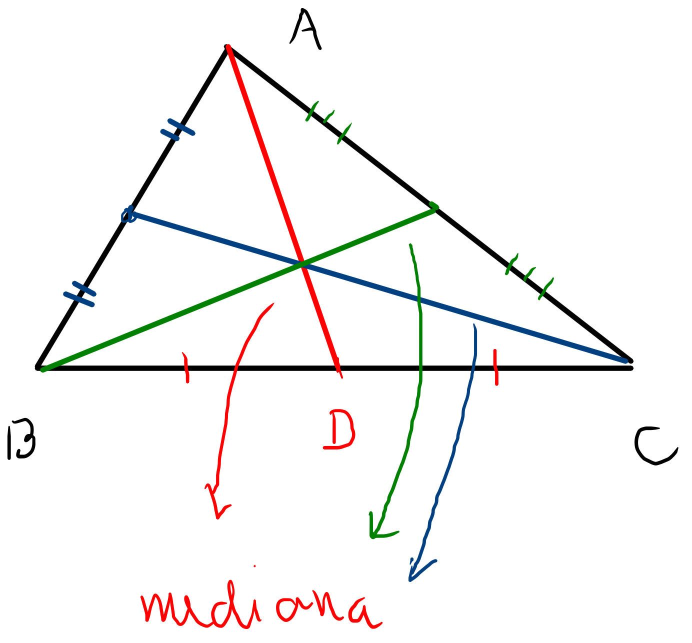
$$AB = BA,$$
$$\hat{A} = \hat{B},$$
$$\hat{B} = \hat{A}.$$

Así, $ABC \leftrightarrow BAC$, satisface las condiciones de la proposición (ALA). Por tanto, $ABC \cong BAC$.

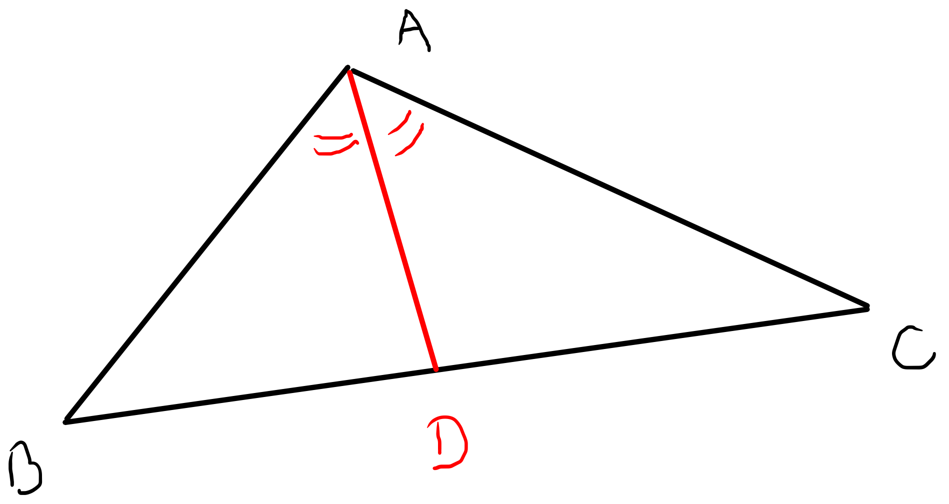
Así, $AC = BC$. □

Def: Sea ABC un triángulo y D un punto en la recta BC.

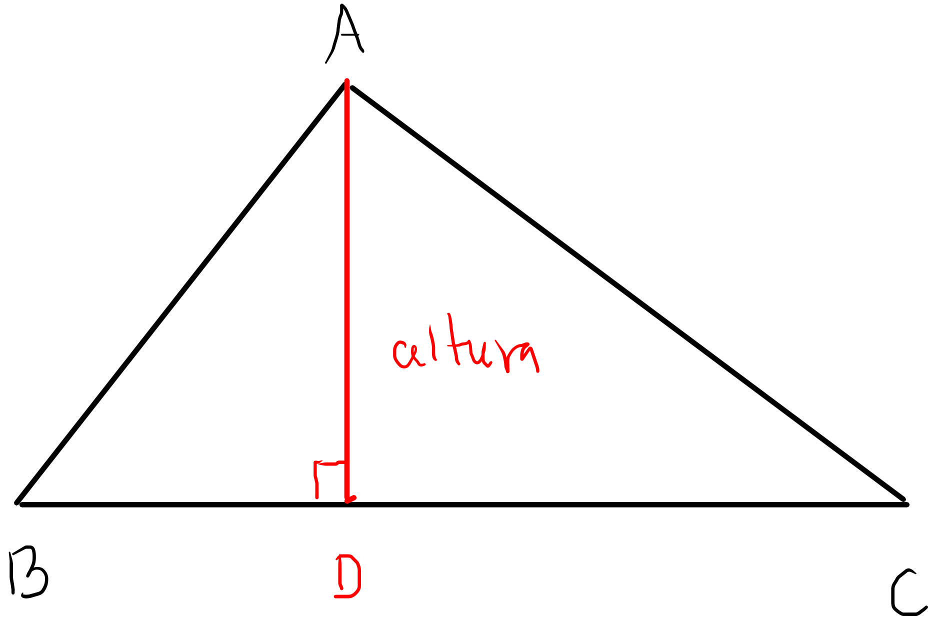
1) La mediana del triángulo relativa al vértice A y lado BC (va de A hasta BC) es el segmento que une A con D el punto medio de BC.

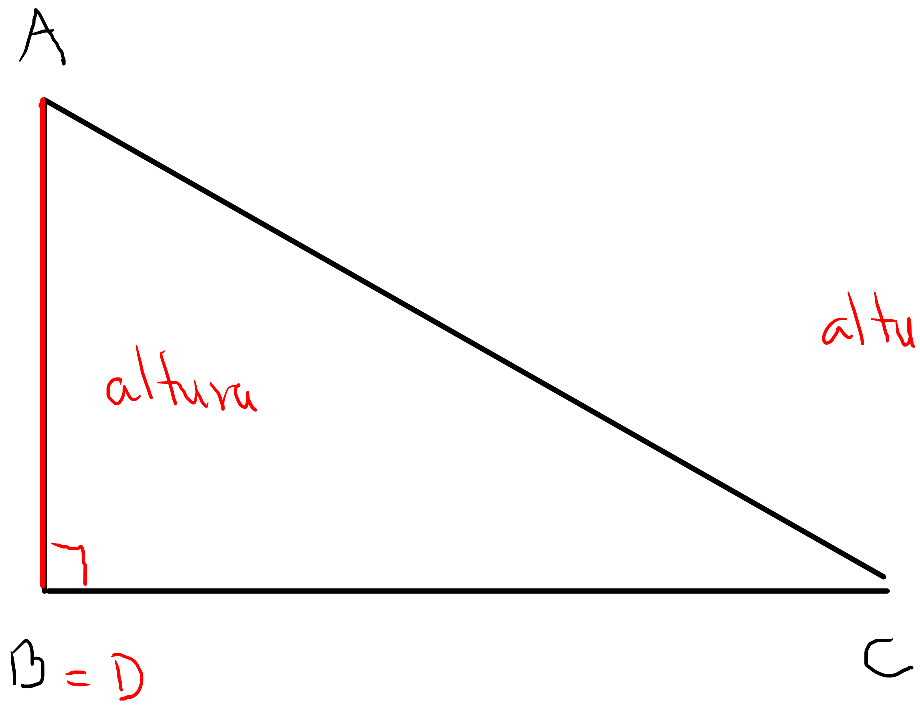


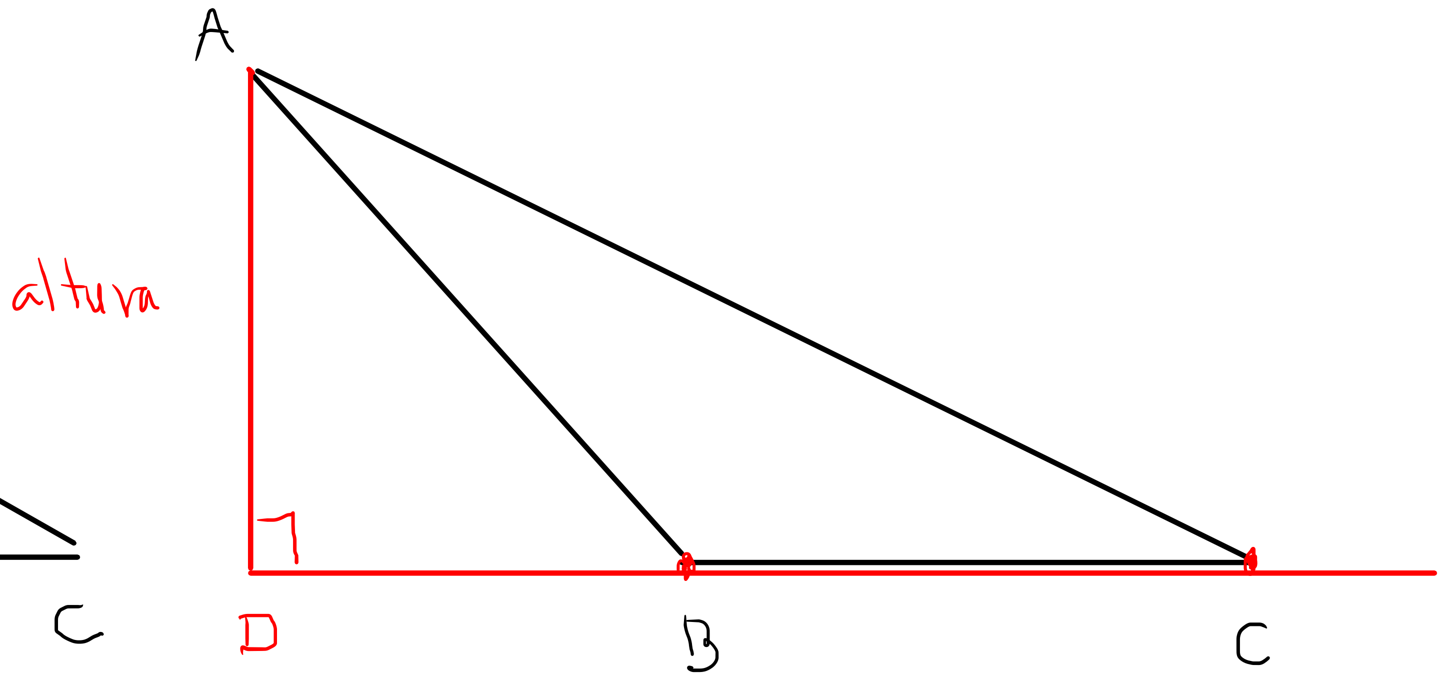
2) El segmento AD se llama bisectriz del $\hat{A}$ si S_{AD} divide al ángulo en $\hat{A}$ en dos ángulos congruentes.



3) El segmento AD se llama altura del triángulo relativa al vértice A y lado BC si AD es perpendicular a la recta BC.

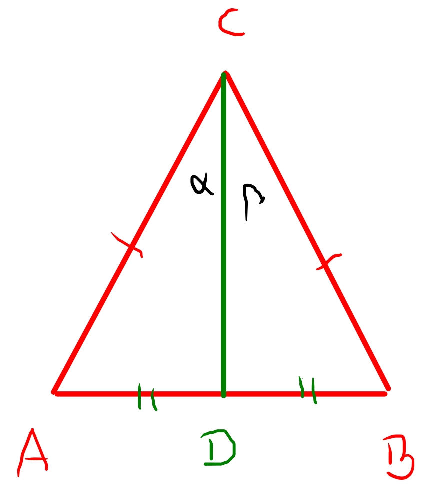






OBS: Si AD es altura $\Rightarrow$ BC se dice base.

Proposición: En un triángulo isósceles la mediana relativa a la base es también bisectriz y altura



Triángulo isósceles

OBS: Si CD es mediana $(AD = DB)$

$\Rightarrow$ $\alpha = \beta$ $(A\hat{C}D = B\hat{C}D)$, $\underbrace{CD \perp AB}_{A\hat{D}C = B\hat{D}C}$ (perpendiculares)

Dem: Sea ABC isósceles de base AB. Sea CD la mediana relativa a la base. Luego, $AD = DB$ y $CA = CB$.
Además, $\hat{A} = \hat{B}$.
Así, $CAD \leftrightarrow CBD$ es una correspondencia LAL, luego $CAD \cong CBD$.
Por tanto, $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ y $A\hat{D}C = B\hat{D}C$. Note que,

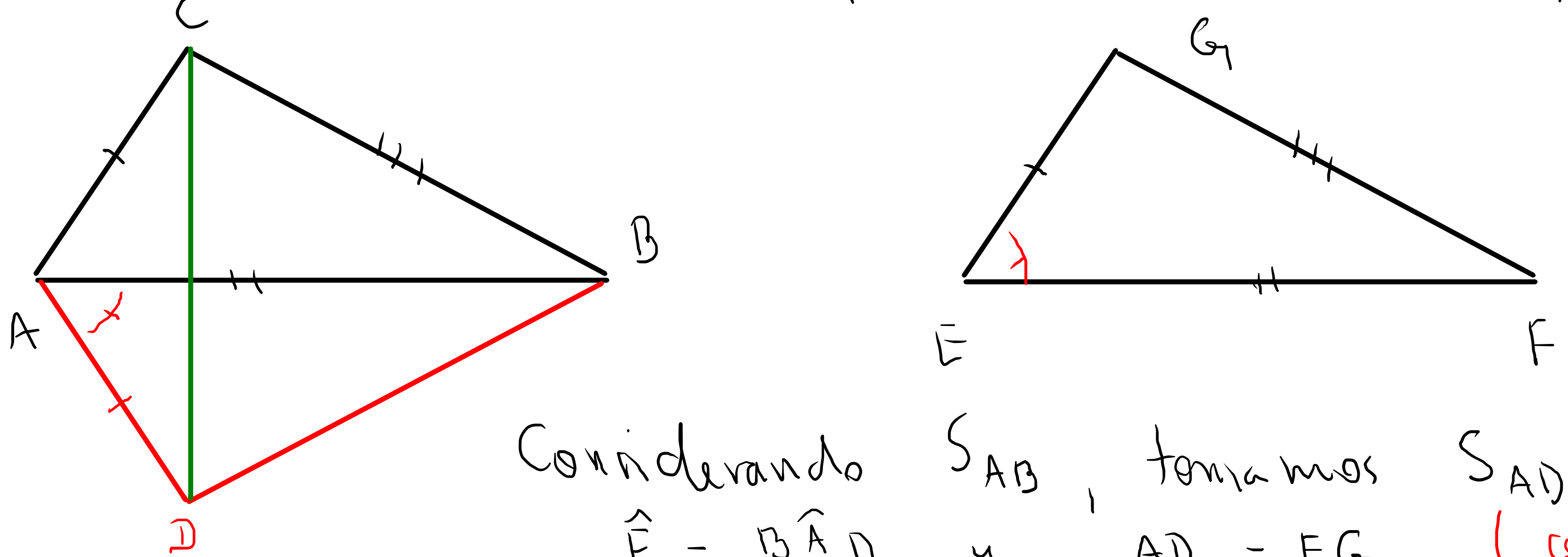
$A\hat{D}C + B\hat{D}C = 180 \Rightarrow 2\,A\hat{D}C = 180 \Rightarrow A\hat{D}C = 90.$ $\square$

Teorema: (Criterio (LLL) de congruencia)

Si dos triángulos tienen tres lados correspondientes congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

OBS: Si $\begin{cases} ABC \leftrightarrow EFG \\ AB = EF \\ BC = FG \\ AC = EG \end{cases} \Rightarrow ABC = EFG$

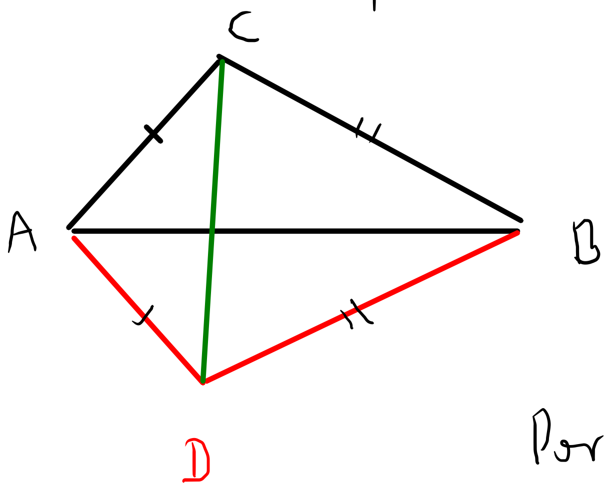
Dem: Sea $ABC \leftrightarrow EFG$ t.q. $AB = EF$, $BC = FG$, $AC = EG$.



Considerando S_{AB}, tomamos S_{AD} t.q. $\hat{E} = B\hat{A}D$ y $AD = EG$. (construcción auxiliar)

Luego, (por axioma LAL) $ABD \cong EFG$. $(*)$

De donde, $BD \cong FG$ y $AD \cong EG$. Así,



$$AC \cong EG \cong AD,$$
$$BC \cong FG \cong BD.$$

Note que, CAD y CDB son isósceles.

Por tanto,

$$\widehat{ACD} \cong \widehat{ADC}, \quad \widehat{BCD} \cong \widehat{BDC}.$$

Luego,

$$\widehat{ACB} \cong \widehat{ACD} + \widehat{DCB}$$
$$\cong \widehat{ADC} + \widehat{BDC} \cong \widehat{ADB}.$$

Así, (por axioma LAL) $ABC \cong ABD$. $(**)$

En conclusión, $ABC \cong ABD \cong EFG$. (Ver $(*)$ y $(**)$)

$$\therefore ABC \cong EFG.$$

$\boxed{7}$

OBS: Si $ABC = EFG$, $EFG = XYZ$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = EF \\ BC = FG \\ \hat{B} = \hat{F} \end{cases} , \begin{cases} EF = XY \\ FG = YZ \\ \hat{F} = \hat{Y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} AB = XY \\ BC = YZ \\ \hat{B} = \hat{Y} \end{array} \underset{(LAL)}{\Longrightarrow} ABC = XYZ //$$

(La congruencia de triángulos es una propiedad transitiva)