

# Los conceptos del Cálculo Integral

## 1.3. Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o funciones reales.

**Definición 1.1 (Par ordenado)** Dos pares ordenados  $(a, b)$  y  $(c, d)$  son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

**Definición 1.2 (Definición de función)** Una función  $f$  es un conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  ninguno de los cuales tiene el mismo primero elemento.

Debe cumplir las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

- (i)  $\forall x \in D_f, \exists y / (x, y) \in f \text{ ó } y = f(x)$
- (ii)  $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

**Definición 1.3 (Dominio y recorrido)** Si  $f$  es una función, el conjunto de todos los elementos  $x$  que aparecen como primeros elementos de pares  $(x, y)$  de  $f$  se llama el **dominio** de  $f$ . El conjunto de los segundos elementos  $y$  se denomina **recorrido** de  $f$ , o conjunto de valores de  $f$ .

**TEOREMA 1.1** Dos funciones  $f$  y  $g$  son iguales si y sólo si

- (a)  $f$  y  $g$  tienen el mismo dominio, y
- (b)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  del dominio de  $f$ .

*Demostración.-* Sea  $f$  función tal que  $x \in D_f, \exists y / y = f(x)$  es decir  $(x, f(x))$ ,  $g$  una función tal que  $\forall z \in D_g, \exists y / y = g(z)$  es decir  $(z, g(z))$ , entonces por definición de par ordenado tenemos que  $(x, f(x)) = (z, g(z))$  si y sólo si  $x = z$  y  $f(x) = g(z)$

**Definición 1.4 (Sumas, productos y cocientes de funciones)** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones reales que tienen el mismo dominio  $D$ . Se puede construir nuevas funciones a partir de  $f$  y  $g$  por adición, multiplicación o división de sus valores. La función  $u$  definida por,

$$u(x) = f(x) + g(x) \quad \text{si } x \in D$$

se denomina suma de  $f$  y  $g$ , se representa por  $f + g$ . Del mismo modo, el producto  $v = f \cdot g$  y el cociente  $w = f/g$  están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \quad \text{si } x \in D, \quad w(x) = f(x)/g(x) \quad \text{si } x \in D \text{ y } g(x) \neq 0$$

## 1.5. Ejercicios

1. Sea  $f(x) = x + 1$  para todo real  $x$ . Calcular:

$$\blacksquare f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\blacksquare f(-2) = -2 + 1 = -1$$

$$\blacksquare -f(2) = -(2 + 1) = -3$$

$$\blacksquare f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\blacksquare \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{3}$$

$$\blacksquare f(a + b) = a + b + 1$$

$$\blacksquare f(a) + f(b) = (a + 1) + (b + 1) = a + b + 2$$

$$\blacksquare f(a) \cdot f(b) = (a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$$

2. Sean  $f(x) = 1 + x$  y  $g(x) = 1 - x$  para todo real  $x$ . calcular:

$$\blacksquare f(2) + g(2) = (1 + 2) + (1 - 2) = 2$$

$$\blacksquare f(2) - g(2) = (1 + 2) - (1 - 2) = 4$$

$$\blacksquare f(2) \cdot g(2) = (1 + 2) \cdot (1 - 2) = 3 \cdot (-1) = -3$$

- $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$
- $f[g(2)] = f(1-2) = f(-1) = 1 + (-1) = 0$
- $g[f(2)] = f(1+2) = g(3) = 1-3 = -2$
- $f(a) + g(-a) = (1+a) + (1-a) = 2$
- $f(t) \cdot g(-t) = (1+t) \cdot (1+t) = 1+t+t+t^2 = t^2+2t+1 = (t+1)^2$

**3.** Sea  $f(x) = |x-3| + |x-1|$  para todo real  $x$ . Calcular:

- $f(0) = |0-3| + |0-1| = 3+1 = 4$
- $f(1) = |1-3| + |1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3| + |2-1| = -1+1 = 2$
- $f(3) = |3-3| + |3-1| = 2$
- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4+2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5+3 = 8$

Determinar todos los valores de  $t$  para los que  $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{aligned} |t+2-3| + |t+2-1| &= |t-3| + |t-1| \\ |t-1| + |t+1| &= |t-3| + |t-1| \\ |t+1| &= t-3 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $t = 1$

**4.** Sea  $f(x) = x^2$  para todo real  $x$ . Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números reales  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , etc., para los que la fórmula dada es válida.

(a)  $f(-x) = f(x)$

Demostración.- Se tiene  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

(b)  $f(y) - f(x) = (y-x)(y+x)$

Demostración.-  $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x), \forall x, y \in \mathbb{R}$

(c)  $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.-  $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2, \forall x \in \mathbb{R}$

(d)  $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.-  $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y), \forall y \in \mathbb{R}$

(e)  $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.-  $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

(f)  $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.-  $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

5. Sea  $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$  para  $|x| \leq 2$ . Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de  $x$ ,  $y$ ,  $s$  y  $t$  son válidas.

(a)  $g(-x) = g(x)$

Se tiene  $g(-x) = \sqrt{2 - (-x)^2} = \sqrt{2 - (x)^2} = g(x),$  para  $|x| \leq 2$

(b)  $g(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4 - (2y)^2} = \sqrt{4(1 - y^2)} = 2\sqrt{1 - y^2},$  para  $|y| \leq 1$  Se obtiene  $|y| \leq 1$  de  $\sqrt{1 - y^2}$  es decir  $1 - y^2 \geq 0$  entonces  $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$  y  $|y| \leq 1$

(c)  $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$

$g\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|},$  para  $|t| \geq \frac{1}{2}$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar  $\sqrt{4t^2 - 1}$ . Es decir

$$4t^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow 4t^2 \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq \frac{1}{2^2} \Rightarrow |t| \geq \frac{1}{2}$$

(d)  $g(a - 2) = \sqrt{4a - a^2}$

$g(a - 2) = \sqrt{4 - (a - 2)^2} = \sqrt{4a - a^2},$  para  $0 \leq a \leq 4$ . Basta probar  $4a - a^2 \geq 0$

(e)  $g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - s^2}$

$s\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16 - s^2}}{2},$  para  $|s| \leq 4$ . ya que solo basta comprobar que  $\sqrt{16 - s^2} \geq 0$

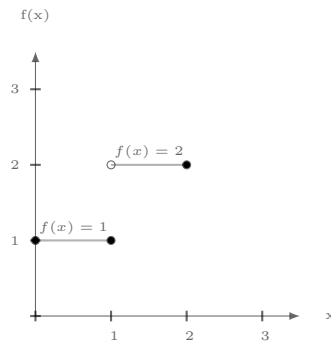
(f)  $\frac{1}{2 + g(x)} = \frac{2 - g(x)}{x^2}$

$$\frac{1}{2+g(x)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-g(x)}{x^2} \text{ para } |x| \leq 2 \text{ y } x \neq 0$$

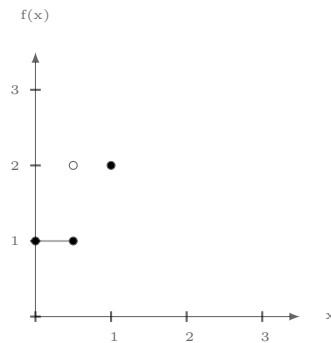
Evaluemos  $\sqrt{4-x^2}$ . Sea  $4-x^2 \geq 0$  entonces  $\sqrt{x^2} \leq 2$ . Por otro lado tenemos que la función no puede ser 0 por  $\frac{1}{x^2}$ , por lo tanto debe ser  $x^2 \neq 0$ .

6. Sea  $f$  la función definida como sigue:  $f(x) = 1$  para  $0 \leq x \leq 1$ ;  $f(x) = 2$  para  $1 < x \leq 2$ . La función no está definida si  $x < 0$  ó si  $x > 2$ .

(a) Trazar la gráfica de  $f$

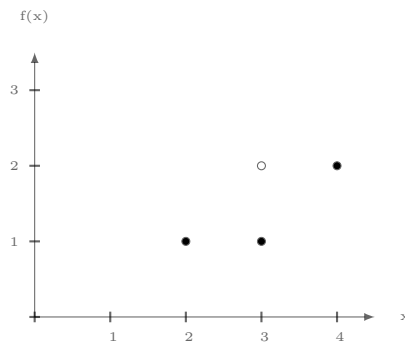


(b) Poner  $g(x) = f(2x)$ . Describir el dominio de  $g$  y dibujar su gráfica.



Debido a que  $1 \leq 2x \leq 1$  y  $1 < 2x \leq 2$  el dominio de  $g(x)$  es  $0 \leq x \leq 1$

(c) Poner  $h(x) = f(x-2)$ . Describir el dominio de  $h$  y dibujar su gráfica.

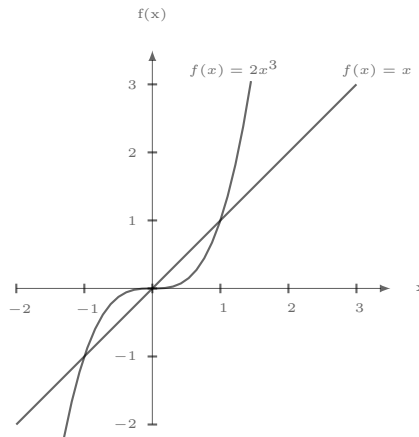


Debido a que  $1 \leq x-2 \leq 1$  y  $1 < x-2 \leq 2$  el dominio de  $h(x)$  es  $2 \leq x \leq 4$

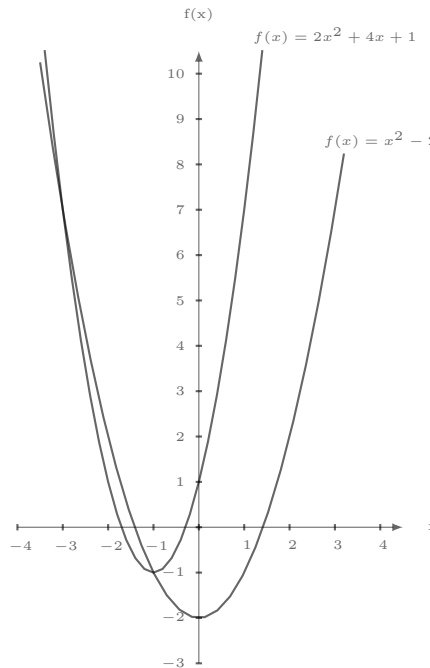
- (d) Poner  $k(x) = f(2x) + f(x-2)$ . Describir el dominio de  $k$  y dibujar su gráfica.

El dominio está vacío ya  $f(2x)$  que solo está definido para  $0 \leq x \leq 1$  y  $f(x-2)$  solo está definido para  $2 \leq x \leq 4$ . Por lo tanto no hay ninguno  $x$  que satisfaga ambas condiciones.

7. Las gráficas de los dos polinomios  $g(x) = x$  y  $f(x) = x^3$  se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.



8. Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos  $f(x) = x^2 - 2$  y  $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$  se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.



9. Este ejercicio desarrolla ciertas propiedades fundamentales de los polinomios. Sea  $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  un polinomio de grado  $n$ . Demostrar cada uno de los siguientes apartados:

- (a) Si  $n \geq 1$  y  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = xg(x)$ , siendo  $g$  un polinomio de grado  $n-1$ .

Para entender lo que nos quiere decir Apostol pongamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un polinomio donde  $f(x) = 2x^2 + 3x - x$  entonces notamos que  $f(x) = x(2x + 3 - 1)$  donde  $g(x) = 2x + 3 - 1$ , esto quiere decir que si  $0 = f(0) = c_0 \Rightarrow c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = x(c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1})$  Así que debemos demostrar que  $f(x)$  es un polinomio arbitrario de grado  $n \geq 1$  tal que  $f(0) = 0$ , entonces debe haber un polinomio de grado  $n - 1$ ,  $g(x)$ , tal que  $f(x) = xg(x)$

Demostración.- Sabemos que

$$f(0) = c_n \cdot 0^n + c_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \dots + c_1 \cdot 0 + c_0 = c_0,$$

como  $f(0) = 0$  se concluye que  $c_0 = 0$ . Así tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k.$$

Ahora crearemos una función  $g(x)$ . Dada la función  $f(x)$  como la anterior, definamos,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1}$$

Ahora crearé una función  $g(x)$ . Dada una función  $f(x)$  como la anterior, definamos

$$g(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1}$$

donde  $c_k$  son los mismos que los dados por la función  $f(x)$ . Primero notemos que el grado de  $g(x)$  es  $n - 1$ . Finalmente, tenemos que

$$xg(x) = x \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n c_k x^k = f(x).$$

(b) Para cada real  $a$ , la función  $p$  dada por  $p(x) = f(x + a)$  es un polinomio de grado  $n$ .

Demostración.- Usando el teorema del binomio,

$$\begin{aligned} f(x+a) &= \sum_{k=0}^n (x+a)^k c_k \\ &= c_0 + (x+a)c_1 + (x+a)^2 c_2 + \dots + (x+a)^n c_n \\ &= c_0 + c_1 \left( \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a^j x^{1-j} \right) + c_2 \left( \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} a^j x^{2-j} \right) + \dots + c_n \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j x^{n-j} \right) \\ &= (c_0 + ac_1 + a^2 c_2 + \dots + a^n c_n) + x(c_1 + 2ac_2 + \dots + na^{n-1} c_n) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( x^k \left( \sum_{j=k}^n \binom{j}{j-k} c_j a^{j-k} \right) \right) \end{aligned}$$

En la línea final reescribimos los coeficientes como sumas para verlos de manera más concisa. De cualquier manera, dado que todos los  $c_i$  son constantes, tenemos  $\sum_{j=k}^n \binom{j}{j-k} c_j a^{j-k}$  es alguna constante para cada  $k$ , de  $d_k$  y tenemos,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k$$

- (c) Si  $n \geq 1$  y  $f(a) = 0$  para un cierto valor real  $a$ , entonces  $f(x) = (x-a)h(x)$ , siendo  $h$  un polinomio de grado  $n-1$ . (considérese  $p(x) = f(x+a)$ .)

Demostración.- Por la parte b) se sabe que  $f(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , entonces  $p(x) = f(x+a)$  también es un polinomio del mismo grado. Ahora si  $f(a) = 0$  entonces por hipótesis  $p(0) = f(a) = 0$ . Luego por la parte a), tenemos

$$p(x) = x \cdot g(x)$$

donde  $g(x)$  es un polinomio de grado  $n-1$ . Así,

$$p(x-a) = f(x) = f(x) = (x-a) \cdot g(x-a)$$

ya que  $p(x) = f(x+a)$ . Pero, si  $g(x)$  es un polinomio de grado  $n-1$ , entonces por la parte b) nuevamente, también lo es  $h(x) = g(x+(-a)) = g(x-a)$ . Por lo tanto,

$$f(x) = (x-a) \cdot h(x)$$

para  $h$  un grado  $n-1$  polinomial, según lo solicitado.

- (d) Si  $f(x) = 0$  para  $n+1$  valores reales de  $x$  distintos, todos los coeficientes  $c_k$  son cero y  $f(x) = 0$  para todo real de  $x$

Demostración.- La prueba se realizara por inducción. Sea  $n = 1$ , entonces  $f(x) = c_0 + c_1x$ . Dado que la hipótesis es que existen  $n+1$  distintos  $x$  de tal manera que  $f(x) = 0$ , sabemos que existen  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(a_1) = f(a_2) = 0, \quad a_1 \neq a_2,$$

Así,

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 a_1 &= 0 &\Rightarrow c_1 a_1 - c_1 a_2 &= 0 \\ &&\Rightarrow c_1 (a_1 - a_2) &= 0 \\ &&\Rightarrow c_1 &= 0 \quad \text{ya que } a_1 \neq a_2 \\ &&\Rightarrow c_0 &= 0 \quad \text{ya que } c_0 + c_1 a_1 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera. Suponga que es cierto para algunos  $n = k \in \mathbb{Z}^+$ . Luego Sea  $f(x)$  un polinomio de grado  $k+1$  con  $k+2$  distintos de 0,  $a_1, \dots, a_{k+2}$ . ya que  $f(a_{k+2}) = 0$ , usando la parte c), tenemos,

$$f(x) = (x - a_{k+2})h(x)$$

donde  $h(x)$  es un polinomio de grado  $k$ . Sabemos que hay  $k+1$  valores distintos  $a_1, \dots, a_{k+1}$  tal que  $h(a_i) = 0$ . Dado que  $f(a_i) = 0$  para  $1 < i < k+2$  y  $(x - a_{k+2}) \neq 0$  para  $x = a_i$  con  $1 < i < k+1$  ya que todos los  $a_i$  son distintos), por lo tanto, según la hipótesis de inducción, cada coeficiente de  $h$  es 0 y  $h(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Así,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_{k+2})h(x) = (x - a_{k+2}) \cdot \sum_{j=0}^k c_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^k (x - a_{k+2})c_j x^j \\ &= c_k x^{k+1} + (c_{k-1} - a_{k+2}c_k)x^k + \dots + (c_1 - a_{k+2}c_0)x + a_{k+2}c_0 \end{aligned}$$

Pero dado que todos los coeficientes de  $h(x)$  son cero y  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, la afirmación es verdadera para el caso  $k+1$  y para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$



- (e) Sea  $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$  un polinomio de grado  $m$ , siendo  $m \geq n$ . Si  $g(x) = f(x)$ , para  $m+1$  valores reales de  $x$  distintos, entonces  $m = n$ ,  $b_k = c_k$  para cada valor de  $k$ , y  $g(x) = f(x)$  para todo real  $x$

Demostración.- Sea

$$p(x) = g(x) - f(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k - \sum_{k=0}^n c_k x^k = \sum_{k=0}^m (b_k - c_k) x^k$$

donde  $c_k = 0$  para  $n < k \leq m$ , cabe recordar que tenemos  $m \geq n$ .

Entonces, hay  $m+1$  distintos reales  $x$  para los cuales  $p(x) = 0$ . Dado que hay  $m+1$  valores reales distintos para lo cual  $g(x) = f(x)$ , así en cada uno de estos valores  $p(x) = g(x) - f(x) = 0$ . Por lo tanto, por la parte d),  $b_k - c_k = 0$  para  $k = 0, \dots, m$  y  $p(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Es decir

$$b_k - c_k = 0 \Rightarrow b_k = c_k \text{ para } k = 0, \dots, m$$

y

$$p(x) = 0 \Rightarrow g(x) - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Además desde  $b_k - c_k = 0$  para  $k = 0, \dots, m$  y por supuesto  $c_k = 0$  para  $k = n+1, \dots, m$ , tenemos  $b_k = 0$  para  $k = n+1, \dots, m$ . Pero entonces,

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + \sum_{k=n+1}^m 0 \cdot x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k$$

significa que  $g(x)$  es un polinomio de grado  $n$  también.

- 10.** En cada caso, hallar todos los polinomios  $p$  de grado  $\leq 2$  que satisfacen las condiciones dadas.

Sabemos que para un polinomio de grado  $\leq 2$  es:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- (a)  $p(x) = p(1-x)$

Sea  $f(x) = p(x) - 1$ , entonces  $f$  es de grado como máximo 2 por la parte d) del problema 9 tenemos que todos los coeficientes de  $f$  son 0 y  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , así,

$$p(x) - 1 = 0 \Rightarrow p(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- (b)  $p(x) = p(1+x)$

Tenemos  $p(0) = 1 \Rightarrow c = 1$  luego,  $p(1) = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$  y finalmente, con  $c = 1$  y  $b = -a$ , tenemos:  $p(2) = 2 \Rightarrow 4a - 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ . por lo tanto

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x(x-1) + 1$$

(c)  $p(x) = p(0) = p(1) = 1$

Una vez mas, desde  $p(0) = 1$  tenemos:  $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$  así,  $p(x) = ax^2 - ax + 1 = ax(x - 1) + 1$

(d)  $p(0) = p(1)$

Simplemente sustituyendo estos valores que tenemos,  $p(0) = p(1) \Rightarrow c = a + b + c \Rightarrow b = -a$  entonces,

$$p(x) = ax^2 - ax + c = ax(x - 1) + c$$

- 11.** En cada caso, hallar todos los polinomios  $p$  de grado  $\leq 2$  que para todo real  $x$  satisfacen las condiciones que se dan. Como  $p$  es un polinomio de grado por lo mucho 2, podemos escribir

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R}$$

(a)  $p(x) = p(1 - x)$

Sustituyendo se tiene  $p(x) = p(1 - x) = ax^2 + bx + c = a(1 - x)^2 + b(1 - x) + c \Rightarrow a - 2ax + ax^2 + b - bx + c$  por lo tanto

$$ax^2 + (-2a - b)x + (a + b + c)$$

Así para  $a = a$ ,  $b = -2a - b \Rightarrow a = -b$ ,  $c = a + b + c$  entonces

$$p(x) = -bx^2 + bx + c = bx(1 - x) + c$$

(b)  $p(x) = p(x) = p(1 + x)$

Una vez más sustituyendo,  $p(x) = p(1 + x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(1 + x)^2 + b(1 + x) + c = ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c)$ . Luego, igualando como potencias de  $x$ ,  $a = a$ ,  $b = 2a + b \Rightarrow a = 0$ ,  $c = a + b + c \Rightarrow b = 0$ . Por lo tanto  $p(x) = c$  donde  $c$  es una constante arbitraria.

(c)  $p(2x) = 2p(x)$

Sustituyendo,  $p(2x) = 2p(x) \Rightarrow 4ax^2 + 2bx + c = 2ax^2 + 2bx + 2c$ . Igualando a las potencias de  $x$ ,  $4a = 2a \Rightarrow a = 0$ ,  $2b = 2b \Rightarrow b$  arbitrario,  $c = 2c \Rightarrow c = 0$ .

Así

$$p(x) = bx, \quad b \text{ arbitrario}$$

(d)  $p(2x) = p(x + 3)$

Sustituyendo  $p(2x) = p(x + 3) \Rightarrow 9ax^2 + 3bx + c = ax^2 + (6a + b)x + (9a + 3b + c)$ . Igualando como potencias de  $x$ ,  $9a = a \Rightarrow a = 0$ ,  $3b = 6a + b \Rightarrow b = 0$ ,  $c = 9a + 3b + c = c \Rightarrow c$  arbitrario. Por lo tanto

$$p(x) = c \text{ para } c \text{ constante arbitrario.}$$

**Corolario 1.1** Probar que:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ para } x \neq 1$$

*Demostración.- Usando propiedades de suma,*

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n (x^k - x^{k+1}) = - \sum_{k=0}^n (x^{k+1} - x^k) = -(x^{n+1} - 1) = 1 - x^{n+1}$$

*En la penultima igualdad se deriva de la propiedad telescópica, por lo tanto nos queda,*

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

**Corolario 1.2** Probar la identidad

$$\prod_{k=1}^n (1+x^{2^{k-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}, \text{ para } x \neq 1$$

*Demostración.- Para  $n=1$  a la izquierda tenemos,*

$$\prod_{k=1}^n (1+x^{2^{k-1}}) = \prod_{k=0}^1 (1+x^{2^k} = 1+x^{2^0} = 1+x)$$

*Por otro lado a la derecha se tiene,*

$$\frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x$$

*Concluimos que la identidad se mantiene para  $n=1$ . Ahora supongamos que es válido para algunos  $n=m \in \mathbb{Z}^+$ ,*

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m+1} &= (1+x^{2^m}) \cdot \prod_{k=1}^m (1+x^{2^{k-1}}) \\ &= (1+x^{2^m}) \cdot \left( \frac{1-x^{2^m}}{1-x} \right) \\ &= \frac{(1+x^{2^m})(1-x^{2^m})}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x} \end{aligned}$$

*Por lo tanto, la afirmación es verdadera para  $m+1$ , y así para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$*

- 12.** Demostrar que las expresiones siguientes son polinomios poniéndolas en la forma  $\sum_{k=0}^m a_k x^k$  para un valor de  $m$  conveniente. En cada caso  $n$  es entero positivo.

(a)  $(1+x)^{2n}$

Demostración.- Usando el teorema binomial  $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$ , sea  $m = 2n$  entonces

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k, \text{ por lo tanto } \sum_{k=0}^m c_k x^k \text{ si } c_k = \binom{m}{k} \text{ para cada } k.$$

(b)  $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1$

Demostración.- Por el corolario anterior

$$\begin{aligned} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= \frac{(1-x)(1+x+\dots+x^n)}{1-x} \\ &= 1+x+\dots+x^n \\ &= \sum_{k=0}^n 1 \cdot x^k \end{aligned}$$

(c)  $\prod_{k=0}^n (1+x^{2^k})$

Demostración.- Por el corolario anterior,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n (1+x^{2^k}) &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})}{1-x} \\ &= \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \left( \frac{1-x^{2^n}}{1-x} \right) (1+x^{2^n}) \\ &= (1+x+\dots+x^{2^n-1})(1+x^{2^n}) \\ &= (1+x+\dots+x^{2^n-1})(x^{2^n}+x^{2^n+1}+\dots+x^{2^{n+1}-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} 1 \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^m 1 \cdot x^k \text{ si } m = 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$

**Axioma .1 (Definición axiomática de área)** Supongamos que existe una clase  $M$  de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto  $a$ , cuyo dominio es  $M$ , con las propiedades siguientes:

1. **Propiedad de no negatividad.** Para cada conjunto  $S$  de  $M$ , se tiene  $a(S) \geq 0$
2. **Propiedad aditiva.** Si  $S$  y  $T$  pertenecen a  $M$ , también pertenecen a  $M$ ,  $S \cup T$  y  $S \cap T$ , y se tiene

$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$$

3. **Propiedad de la diferencia.** Si  $S$  y  $T$  pertenecen a  $M$  siendo  $S \subseteq T$  entonces  $T - S$  está en  $M$ , y se tiene  $a(T - S) = a(T) - a(S)$
4. **Invariancia por congruencia.** Si un conjunto  $S$  pertenece a  $M$  y  $T$  es congruente a  $S$ , también  $T$  pertenece a  $M$  y tenemos  $a(S) = a(T)$
5. **Elección de escala** Todo rectángulo  $R$  pertenece a  $M$ . Si los lados de  $R$  tienen longitudes  $h$  y  $k$ , entonces  $a(R) = hk$
6. **Propiedad de exhaustión.** Sea  $Q$  un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones  $S$  y  $T$  de modo que

$$S \subseteq Q \subseteq T.$$

Si existe uno y sólo un número  $c$  que satisface las desigualdades

$$a(S) \leq c \leq a(T)$$

para todas la regiones escalonadas  $S$  y  $T$  que satisfacen  $S \subseteq Q \subseteq T$ , entonces  $Q$  es medible y  $a(Q) = c$

## 1.7. Ejercicios

1. Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es medible y tiene área nula:

- (a) Un conjunto que consta de un solo punto.

Demostración.- Un sólo punto se puede medir con un área 0, ya que un punto es un rectángulo con  $h = k = 0$

- (b) El conjunto de un número finito de puntos.

Demostración.- Demostraremos por inducción en  $n$ , el número de puntos. Para el caso de  $n = 1$  ya quedo demostrado en el anterior inciso. Supongamos que es cierto para algunos  $n = k \in \mathbf{Z}^+$ . Entonces, tenemos un conjunto  $S \in M$  de  $k$  puntos en el plano y  $a(S) = 0$ . Sea  $T$  un punto en el plano. Por (a)  $T \in M$  y  $a(T) = 0$ , por tanto por la propiedad aditiva,

$$S \cup T \in M \text{ y } a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$

pero  $S \cap T \subseteq S$ , entonces

$$a(S \cap T) \leq a(S) \Rightarrow a(S \cap T) \leq 0 \Rightarrow a(S \cap T) = 0.$$

El axioma 1 nos garantiza que  $a(S \cap T)$  no puede ser negativo. Por lo tanto,  $a(S \cup T) = 0$ . Por tanto, el enunciado es verdadero para  $k + 1$  puntos en un plano y, por tanto, para todo  $n \in \mathbf{Z}_{>0}$

- (c) La reunión de una colección finita de segmentos de recta en un plano.

Demostración.- Por inducción, sea  $n$  el número de segmentos en un plano. Para  $n = 1$ , dejamos  $S$  ser un conjunto con una línea en un plano. Dado que una línea es un rectángulo y todos los rectángulos son medibles, tenemos  $S \in M$  además,  $a(S) = 0$  ya que una línea es un rectángulo con  $h = 0$  ó  $k = 0$ , y así en cualquier caso  $hk = 0$ . Por lo tanto, el enunciado es verdadero para una sola línea en el plano, el caso  $n = 1$ .

Asuma entonces que es cierto para  $n = k \in \mathbf{Z}^+$ . Sea  $S$  un conjunto de rectas en el plano. Luego, por la hipótesis de inducción,  $S \in M$  y  $a(S) = 0$ . Sea  $T$  una sola línea en el plano. Por el caso  $n = 1$  en  $T \in M$  y  $a(T) = 0$ . Por lo tanto  $S \cup T \in M$  y  $a(S \cup T) = 0$  (ya que  $a(S) = a(T)a(S \cap T) = 0$ ). Por tanto, la afirmación es verdadera para  $k + 1$  líneas en un plano, y así para todos  $n \in \mathbf{Z}^+$

2. Toda región en forma de triángulo rectángulo es medible pues puede obtenerse como intersección de dos rectángulos. Demostrar que toda región triangular es medible y que su área es la mitad del producto de su base por su altura.

Demostración.- Dado que cada triángulo rectángulo es medible, por el axioma 2 del área su unión es medible, denotando los dos triángulos rectángulos  $A$  y  $B$ , y la región triangular  $T$ , tenemos

$$a(T) = a(A) + a(B)$$

ya que  $A$  y  $B$  son disjuntos  $a(A \cap B) = 0$ .

Dejando que la altitud de la región triangular se denote por  $h$ , y su base por  $b$ , tendremos,

$$a(A) = \frac{1}{2}(hb_1) \quad a(B) = \frac{1}{2}hb_2 \quad \text{con} \quad b_1 + b_2 = b,$$

entonces

$$a(T) = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2 = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}hb$$

3. Demostrar que todo trapezoide y todo paralelogramo es medible y deducir las fórmulas usuales para calcular su área.

Demostración.- Todo trapecio es medible ya que, la unión de un rectángulo y dos triángulos rectángulos (disjuntos por pares y cada uno de los cuales es medible ppor los axiomas y el ejercicio anterior.) Luego su área es la suma de las áreas de los triángulos rectángulos y el rectángulo (dado que están separados por pares, su intersección tiene un área cero). Para calcular esta área, especificamos las longitudes de los dos lados desiguales del trapezoide para que sean  $b_1$  y  $b_2$ . La altura está indicada por  $a$ . Entonces, el área del rectángulo es de 1. El área de los triángulos es  $\frac{1}{2}a \cdot b_3$  y  $\frac{1}{2}a \cdot b_4$  donde  $b_1 + b_3 + b_4 = b_2$ . Entonces, denotando el trapezoide por  $T$ , tenemos

$$a(T) = ab_1 + \frac{1}{2}ab_3 + \frac{1}{2}ab_4 = \frac{1}{2}ab_1 + \frac{1}{2}a(b_1 + b_3 + b_4) = \frac{1}{2}a(b_1 + b_2)$$

A continuación, un paralelogramo es solo un caso especial de un trapezoide, en el que  $b_1 = b_2$ ; por lo tanto, por la fórmula anterior, y denotando el paralelogramo por  $P$ ,

$$a(P) = \frac{1}{2}a(2b) = ab$$

4. Un punto  $(x, y)$  en el plano se dice que es un punto de una red, si ambas coordenadas  $x$  e  $y$  son enteras. Sea  $P$  un polígono cuyos vértices son puntos de una red. El área de  $P$  es  $I + \frac{1}{2}B - 1$  donde  $I$  es el número de puntos de la red interiores a  $P$ , y  $B$  el de los de la frontera.

- (a) Probar que esta fórmula es correcta para rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados.

Demostración.- Sea  $R$  un  $h \times k$  rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas. Entonces,  $R$  es medible (ya que es un rectángulo) y  $a(R) = hk$ . A continuación, dado que los vértices están en puntos de celosía,  $B = 2(h + 1) + 2(k + 1) - 4$  y  $I = (h - 1)(k - 1)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2}B - 1 &= (h - 1)(k - 1) + \frac{1}{2}[2(h + 1) + 2(k + 1) - 4] - 1 \\ &= hk - h - k + 1 + h + 1 + k + 1 - 2 - 1 \\ &= hk \end{aligned}$$

- (b) Probar que la fórmula es correcta para triángulos rectángulos y paralelogramos.

Demostración.- Sabemos que cualquier triángulo rectángulo puede encerrarse en un rectángulo con bordes cuyas longitudes sean iguales a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo. Además, este rectángulo está compuesto por dos triángulos rectángulos congruentes unidos a lo largo de su diagonal. Cada uno de estos triángulos rectángulos tiene un área la mitad de la del rectángulo y se cruzan a lo largo de la diagonal (que tiene un área cero (1.7, problema 1) ya que es una línea en el plano). Dado un triángulo rectángulo  $T$ ,  $R$  sea tal rectángulo, y  $S$  sea el triángulo rectángulo que forma la otra mitad de  $R$ , entonces  $S \cup T = R$ .

Dado que  $R$  es un rectángulo, sabemos por la parte (a) que

$$a(R) = I_R + \frac{1}{2}B_R - 1.$$

Además, cualquier punto interior  $R$  será un punto interior de cualquiera  $S$  o  $T$ , o se acuesta sobre su frontera compartida. Por lo tanto,

$$I_R = I_S + I_T + H_P$$

donde  $H_P$  denota los puntos en la hipotenusa (compartida) de los dos triángulos rectángulos. Entonces, también tenemos para los puntos límite,

$$B_R = B_S + B_T - 2 - 2H_P.$$

Finalmente, dado que  $S$  y  $T$  son congruentes, conocemos  $B_S = B_T$  y  $I_S = I_T$ . Entonces, poniendo todo esto junto, tenemos,

$$\begin{aligned} a(R) &= I_R + \frac{1}{2}B_R - 1 \\ &= 2I_S + H_P + \frac{1}{2}(2B_S - 2 - 2H_P) - 1 \\ &= 2(I_S + \frac{1}{2}B_S - 1) \end{aligned}$$

ó,

$$I_S + \frac{1}{2}B_S - 1 = \frac{1}{2}a(R).$$

Pero, sabemos que  $\frac{1}{2}a(R) = a(S)$ ; por lo tanto,

$$a(S) = I_S + \frac{1}{2}B_S - 1.$$

Esto prueba el resultado para triángulos rectángulos con vértices en puntos de una red.

- (c) Emplear la inducción sobre el número de lados para construir una demostración para polígonos en general.

Respuesta.- Ya tenemos esto de la parte (b) ya que podemos realizar cualquier polígono simple como la unión de un número finito de triángulos rectángulos (es decir, cada polígono simple es triangularizable)

**5.** Demostrar que un triángulo cuyos vértices son puntos de una red no puede ser equilátero.

Demostración.- Supongamos que existe tal triángulo equilátero  $T$ . Entonces,

$$T = A \cup B$$

Para dos triángulos rectángulos congruentes y disjuntos  $A, B$ . Dado que los vértices de  $T$  están en puntos de una red, sabemos que la altitud desde el vértice hasta la base debe pasar por  $h$  puntos de red (donde  $h$  es la altura de  $T$ ). Por lo tanto, al denotar los puntos de red en esta altitud por  $V_B = h + 1$ , tenemos

$$B_T = B_A + B_B - V_B + 2, \quad I_T = I_A + I_B + V_B - 2.$$

Dado que  $T$  es un polígono con vértices de puntos de red, sabemos por el ejercicio anterior que  $a(T) = I_T + \frac{1}{2}B_T - 1$ . Además, por el problema 2, sabemos que  $a(T) = \frac{1}{2}bh$ . Así que,

$$\begin{aligned} I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &= (I_A + I_B + V_B - 2) + \frac{1}{2}(B_A + B_B - V_B + 2) \\ \Rightarrow I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &= 2I_A + B_A - 2 + \frac{1}{2}V_B && (B_A = B_B, I_A = I_B) \\ \Rightarrow I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &= 2I_A + B_A - 2 + \frac{1}{2}(h + 1) && (V_B = h + 1) \\ \Rightarrow I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &= 2(a(A)) + \frac{1}{2}(h + 1) \end{aligned}$$

Pero,  $\frac{1}{2}a(T) = a(A) = a(B)$  así,

$$I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 = a(T) + \frac{1}{2}(h + 1) \quad \Rightarrow \quad a(T) = a(T) + \frac{1}{2}(h + 1)$$

Pero,  $h > 0$  entonces esto es una contradicción. Por lo tanto,  $T$  no puede tener sus vértices en puntos de red y ser equilátero.

**6.** Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $M$  la clase de todos los subconjuntos de  $A$ . (Son en número de 32 contando el mismo  $A$  y el conjunto vacío  $\emptyset$ .) Para cada conjunto  $S$  de  $M$ , representemos con  $n(S)$  el número de



elemento distintos de  $S$ . Si  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $T = \{3, 4, 5\}$ , calcular  $n(S \cup T)$ ,  $n(S \cap T)$ ,  $n(S - T)$  y  $n(T - S)$ . Demostrar que la función de conjunto  $n$  satisface los tres primeros axiomas del área.

Demostración.- Calculemos,

$$\begin{aligned} n(S \cup T) &= n(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 5 \\ n(S \cap T) &= n(\{3, 4\}) = 2 \\ &= n(\{1, 2\}) = 2 \\ &= n(\{5\}) = 1 \end{aligned}$$

Ahora demostremos que esto satisface los primeros tres axiomas de área.

**Axioma 1.** (Propiedad no negativa) Esto se satisface para cualquier conjunto,  $S$  ya que el número de elementos distintos en un conjunto no es negativo. Entonces,  $n(S) \geq 0$  para todos  $S$ .

**Axioma 2.** (Propiedad aditiva) Primero, si  $S, T \in \mathcal{M}$ , luego  $S \subseteq A$ ,  $T \subseteq A$  por definición de  $\mathcal{M}$ . Entonces, para cualquiera  $x \in S$  que tengamos  $x \in A$  y para cualquiera  $y \in T$ , tenemos  $y \in A$ .

Así, si  $x \in S \cup T$ , entonces  $x \in A$ ; por lo tanto  $S \cup T \subseteq A$ , entonces  $S \cup T \in \mathcal{M}$ .

Entonces,  $S \cap T \subseteq S$  implica  $S \cap T \subseteq A$  (desde  $S \subseteq A$ ). Por lo tanto,  $S \cap T \in \mathcal{M}$ .

Entonces, para cualquiera  $S, T \in \mathcal{M}$  que tengamos  $S \cup T \in \mathcal{M}$ ,  $S \cap T \in \mathcal{M}$ .

Luego, debemos mostrar  $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$ . Para cualquier  $x \in S \cup T$  tenemos  $x \in S$ ,  $x \in T$ , ó  $x \in S$  y  $T$ . Entonces, esto significa  $x \in (S - T)$ , ó  $x \in (T - S)$  ó  $x \in (S \cap T)$ . Por lo tanto,

$$n(S \cup T) = n(S - T) + n(T - S) + n(S \cap T)$$

Del mismo modo observamos,

$$\begin{aligned} n(S) &= (S - T) + n(S \cap T) \Rightarrow n(S - T) = n(S) - n(S \cap T) \\ n(T) &= (T - S) + n(T \cap S) \Rightarrow n(T - S) = n(T) - n(S \cap T) \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} n(S \cup T) &= n(S) - n(S \cap T) + n(T) - n(S \cap T) + n(S \cap T) \\ &= n(S) + n(T) - n(S \cap T) \end{aligned}$$

**Axioma 3** (Propiedades de la diferencia). Si  $S, T \in \mathcal{M}$  y  $S \subseteq T$ , entonces desde arriba tenemos

$$n(T - S) = n(T) - n(T \cap S)$$

Pero porque  $S \subseteq T$  sabemos  $T \cap S = S$ , entonces,

$$n(T - S) = n(T) - n(S)$$

## 1.8. Intervalos y conjuntos ordenados

**Definición 1.5 (Intervalo cerrado)** Si  $a < b$ , se indica por  $[a, b]$  el conjunto de todos los  $x$  que satisfacen las desigualdades  $a \leq x \leq b$ .

**Definición 1.6 (Intervalo abierto)** El intervalo abierto correspondiente, indicado por  $(a, b)$  es el conjunto de todos los  $x$  que satisfacen  $a < x < b$

El intervalo abierto  $(a, b)$  se denomina también el interior de  $[a, b]$

**Definición 1.7 (Intervalo semiabiertos)** Los intervalos semiabiertos  $(a, b]$  y  $[a, b)$  que incluyen sólo un extremo están definidos por las desigualdades  $a < x \leq b$  y  $a \leq x < b$ , respectivamente.

## 1.9. Particiones y funciones escalonadas

**Definición 1.8** Un conjunto de puntos que satisfaga

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

se denomina una partición  $P$  de  $[a, b]$ , y se utiliza el símbolo:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

para designar tal partición, la partición  $P$  determina  $n$  subintervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

**Definición 1.9 (Definición de función escalonada)** Una función  $s$  cuyo dominio es el intervalo cerrado  $[a, b]$  se dice que es una función escalonada, si existe una partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  tal que  $s$  es constante en cada subintervalo abierto de  $P$ . Es decir, para cada  $k = 1, 2, \dots, n$  existe un número real  $S_k$  tal que:

$$s(x) = S_k \quad \text{si} \quad x_{k-1} < x < x_k$$

A veces las funciones escalonadas se llaman funciones constantes a trozos.

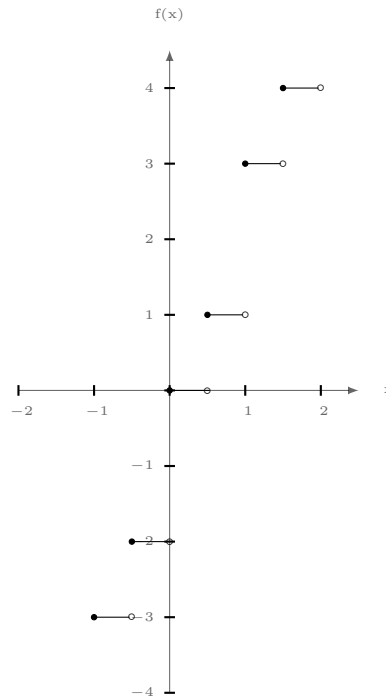
## 1.11. Ejercicios

En este conjunto de Ejercicios,  $[x]$  representa el mayor entero  $\leq x$  es decir, la parte entera de  $x$ .

1. Sean  $f(x) = [x]$  y  $g(x) = [2x]$  para todo real  $x$ . En cada caso, dibujar la gráfica de la función  $h$  definida en el intervalo  $[-1, 2]$  por la fórmula que se da.

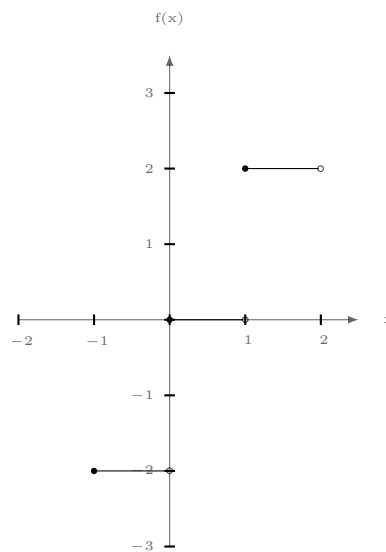
(a)  $h(x) = f(x) + g(x)$ .

Respuesta.-  $h(x) = [x] + [2x]$



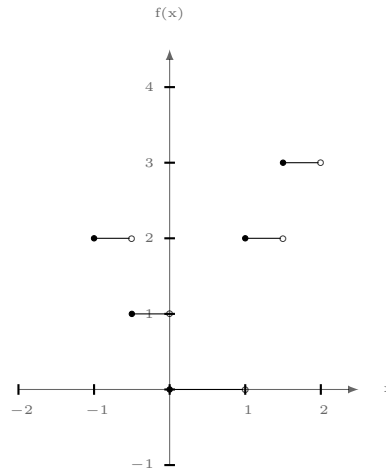
(b)  $h(x) = f(x) + g(x/2)$ .

Respuesta.-  $h(x) = [x] + [x] = 2[x]$



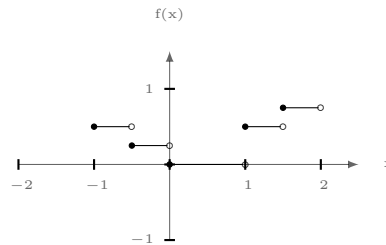
(c)  $h(x) = f(x)g(x)$ .

Respuesta.-  $h(x) = [x] \cdot [2x]$



(d)  $h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g(x/2)$ .

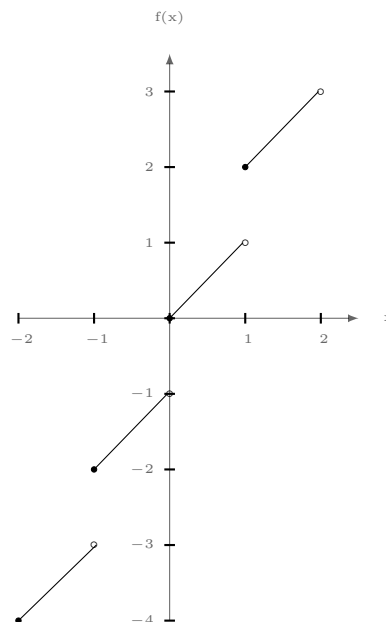
Respuesta.-  $\frac{1}{4}[x][2x]$



2. En cada uno de los casos,  $f$  representa una función definida en el intervalo  $[-2, 2]$  por la fórmula que se indica. Dibújense las gráficas correspondientes a cada una de las funciones  $f$ . Si  $f$  es una función escalonada, encontrar la partición  $P$  de  $[-2, 2]$  tal que  $f$  es constante en los subintervalos abierto de  $P$ .

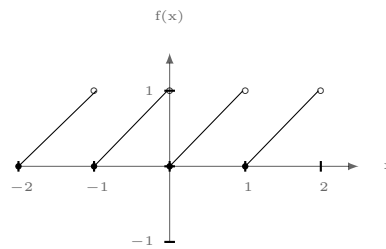
(a)  $f(x) = x + [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



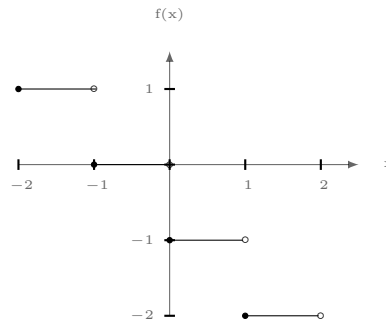
(b)  $f(x) = x - [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



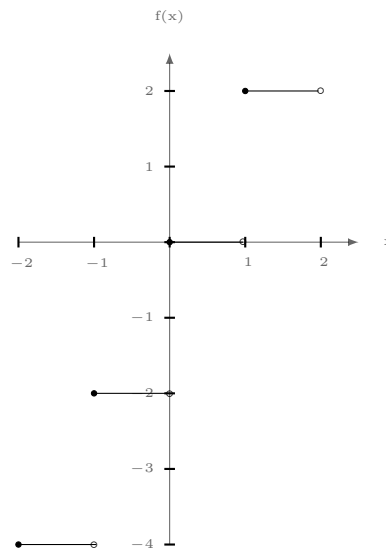
(c)  $f(x) = [-x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición,  $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .



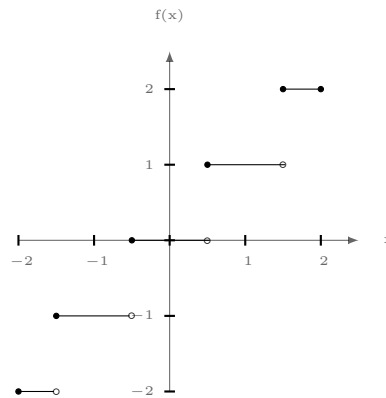
(d)  $f(x) = 2[x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición,  $P = \{-2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 2\}$ .



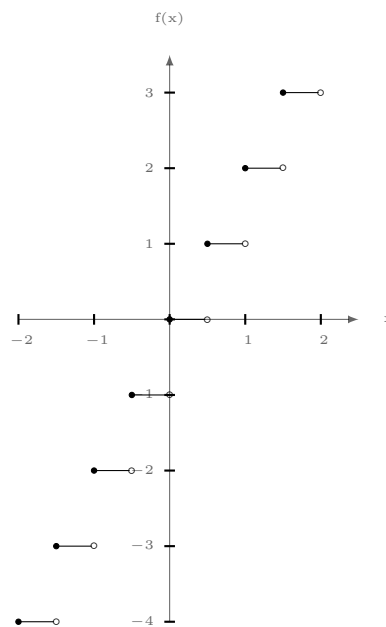
(e)  $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición,  $P = \{-2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 2\}$



(f)  $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

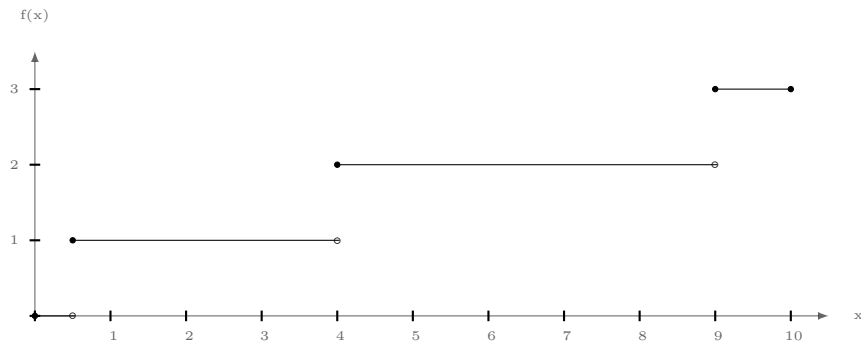
Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de los partición,  $P = \{-2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$



**3.** En cada caso, dibujar la gráfica de la función definida por la fórmula que se da.

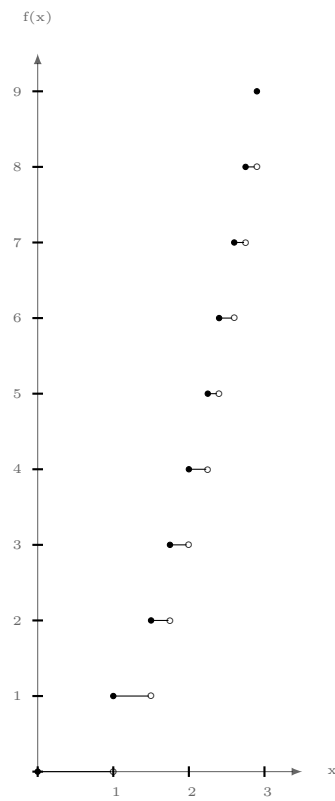
(a)  $f(x) = [\sqrt{x}]$  para  $0 \leq x \leq 10$

Respuesta.-



(b)  $f(x) = [x^2]$

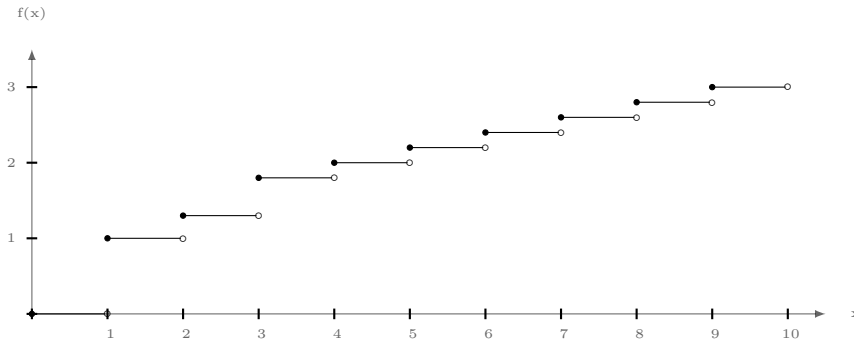
Respuesta.-



• ○

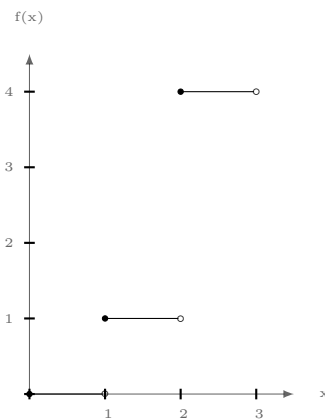
(c)  $f(x) = \sqrt{[x]}$  para  $0 \leq x \leq 10$ .

Respuesta.-



(d)  $f(x) = [x]^2$  para  $0 \leq x \leq 3$ .

Respuesta.-



4. demostrar que la función parte entera tiene las propiedades que se indican:

(a)  $[x + n] = [x] + n$  para cada entero  $n$ .

Demostración.- Por definición sea  $[x + n] = m$  para  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} m \leq x + n < m + 1 &\implies m - 1 \leq x < m - n + 1 \\ &\implies [x] = m - n \\ &\implies [x] + n = m \end{aligned}$$

(b)  $[-x] = \begin{cases} -[x] & \text{si } x \text{ es entero} \\ -[x] - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Demostración.- Si  $x \in \mathbb{Z}$ , entonces  $x = n$  para algunos  $n \in \mathbb{Z}$ . Por tanto,  $[x] = n$ , luego

$$-x = -n \implies [-x] = -n \implies [-x] = -[x]$$

Por otro lado, si  $x \notin \mathbb{Z}$ , entonces  $[x] = n$ . Luego

$$n \leq x < n + 1 \implies -n - 1 < -x < -n \text{ ya que } n \neq x \implies [-x] = -n - 1 = -[x] - 1$$



(c)  $[x + y] = [x] + [y]$  ó  $[x] + [y] + 1$

Demostración.- Sea  $[x] = m$  y  $[y] = n$ , luego,

$$m \leq x < m + 1 \quad y \quad n \leq y < n + 1$$

Entonces, sumando obtenemos

$$m + n \leq x + y < m + n + 2$$

por lo tanto

$$[x + y] = m + n = [x] + [y] \quad o \quad [x + y] = m + n + 1 = [x] + [y] + 1$$

Esto ya que si  $x + y$  está entre  $m + n$  y  $m + n + 1$  entonces  $[x + y] = [x] + [y]$  y cuando  $x + y$  está entre  $m + n + 1$  y  $m + n + 2$  entonces  $[x + y] = [x] + [y] + 1$ .

(d)  $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

Demostración.- Por la parte (c)

$$[2x] = [x + x] = [x] + [x] \quad ó \quad [x] + [x] + 1$$

Para  $[2x] = [x] + [x]$ , sea  $[x] = n$ , entonces

$$[2x] = 2n \implies 2n \leq 2x < 2n + 1$$

$$\implies n \leq x < n + \frac{1}{2}$$

$$\implies n \leq x + \frac{1}{2} < n + 1$$

$$\implies \left[ x + \frac{1}{2} \right] = n$$

de donde,  $[2x] = 2n = n + n = [x] + \left[ x + \frac{1}{2} \right]$

Por otro lado, para  $[2x] = [x] + [x] + 1$ , sea  $[x] = n$ , entonces:

$$[2x] = 2n + 1 \implies 2n + 1 \leq 2x < 2n + 2$$

$$\implies n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$$

$$\implies n + 1 \leq x + \frac{1}{2} < n + 2$$

$$\implies \left[ x + \frac{1}{2} \right] = n + 1$$

de donde  $[2x] = n + n + 1 = [x] + \left[ x + \frac{1}{2} \right]$

$$(e) \quad [3x] = [x] + [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{2}{3}]$$

Demostración.- Por la parte (c) tenemos

$$[3x] = [x+x+x] = [x+x] + [x] \quad \text{ó} \quad [x+x] + [x] + 1 \quad y \quad [x+x] = [x] + [x] \quad \text{ó} \quad [x] + [x] + 1$$

de donde al juntarlos obtenemos:

$$[3x] = [x] + [x] + [x] \quad \text{ó} \quad [x] + [x] + [x] + 1 \quad \text{ó} \quad [x] + [x] + [x] + 2$$

Para  $3x = [x] + [x] + [x]$  sea  $[x] = n$  entonces

$$3n \leq 3x < 3n + 1 \implies n \leq x < n + \frac{1}{3}$$

$$\implies n \leq x + \frac{1}{3} < n + 1 \quad y \quad n \leq x + \frac{2}{3} < n + 1$$

$$\implies [x] = \left[ x + \frac{1}{3} \right] = \left[ x + \frac{2}{3} \right] = n$$

Por lo tanto,  $[x] = 3n = [x] + \left[ x + \frac{1}{3} \right] + \left[ x + \frac{2}{3} \right]$

Luego para  $[3x] = [x] + [x] + [x] + 1$  sea  $[x] = n$  entonces,

$$3n + 1 \leq 3x < 3n + 2 \implies n + \frac{1}{3} \leq x < n + \frac{2}{3}$$

$$\implies n + \frac{1}{3} \leq x + \frac{1}{3} < n + 1 \implies \left[ x + \frac{1}{3} \right] = n$$

$$y \implies n + 1 \leq x + \frac{2}{3} < n + 2 \implies \left[ x + \frac{2}{3} \right] = n + 1$$

Por lo tanto  $[3x] = 3n + 1 \implies [3x] = [x] + \left[ x + \frac{1}{3} \right] + \left[ x + \frac{2}{3} \right]$

Finalmente, para  $[3x] = [x] + [x] + [x] + 2$  sea  $[x] = n$  entonces

$$3x + 2 \leq 3x < 3x + 3 \implies n + \frac{2}{3} \leq x < n + 1$$

$$\implies n + 1 \leq x + \frac{1}{3} < n + 2 \quad y \quad n + 1 \leq x + \frac{2}{3} < n + 2$$

Así que  $[3x] = 3n + 2 = [x] + \left[ x + \frac{1}{3} \right] + \left[ x + \frac{2}{3} \right]$

- 5.** Las fórmulas de los Ejercicios 4(d) y 4(c) sugieren una generalización para  $[nx]$ . Establecer y demostrar una generalización.

Demostración.- Se puede afirmar que:

$$[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ x + \frac{k}{n} \right],$$

luego sea  $[x] = m$ , entonces

$$m \leq x < m+1 \implies nm \leq nx < nm+n$$

Por lo tanto existen algunos  $j \in \mathbf{Z}$  con  $0 \leq j < n$  tales que

$$nm+j \leq nx < nm+j+1$$

ya que sabemos que para cualquier número  $nx$  está entre  $k$  y  $k+1$  para un entero. Pero como  $nm \leq nx$  es un número entero  $k$  donde está en algún lugar entre  $nm$  y  $nx$ , lo que significa que es  $nm+j$  para algún número entero  $j$ . Entonces tenemos que  $nx$  está entre  $nm+j$  y  $nm+j+1$ : Básicamente, solo decimos que conocemos  $k \leq nx < k+1$  para algún entero  $k$ . Pero es mas conveniente escribirlo como  $nm+j \leq nx < nm+j+1$ .

Luego,  $[nx] = nm+j$ . y por lo tanto,

$$m + \frac{j}{n} \leq x < m + \frac{j+1}{n}$$

para cada  $k \in \mathbf{Z}$  con  $0 \leq k < n-j$  tenemos

$$\begin{aligned} m + \frac{k+k}{n} &\leq x + \frac{k}{n} < m + \frac{j+k+1}{n} && \text{sumando } \frac{k}{n} \\ \implies m &\leq x + \frac{k}{n} < m+1 && \frac{j+k}{n} < 1 \text{ ya que } k < n-j \\ \implies \left[ x + \frac{k}{n} = m = [x] \right] &&& \text{para } 0 \leq k < n-j \end{aligned}$$

por otro lado  $n-j \leq k < n$ , entonces

$$\begin{aligned} m + \frac{k+k}{n} &\leq x + \frac{k}{n} < m + \frac{j+k+1}{n} \\ \implies m+1 &\leq x + \frac{k}{n} < m+2 && \frac{j+k}{n} \geq 1 \text{ ya que } n-j \leq k \\ \implies \left[ x + \frac{k}{n} = m+1 = [x] + 1 \right] &&& \text{para } n-j \leq k < n \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ x + \frac{k}{n} \right] &= \sum_{k=0}^{n-j-1} \left[ x + \frac{k}{n} \right] + \sum_{k=n-j}^{n-1} \left[ x + \frac{k}{n} \right] \\ &= (n-j)[x] + j([x] + 1) \\ &= n[x] + j \\ &= nm + j \\ &= [nx] \end{aligned}$$

- 6.** Recuérdesse que un punto de red  $(x, y)$  en el plano es aquel cuyas coordenadas son enteras. Sea  $f$  una función no negativa cuyo dominio es el intervalo  $[a, b]$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros,  $a < b$ . Sea  $S$  el conjunto

de puntos  $(x, y)$  que satisfacen  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq f(x)$ . Demostrar que el número de puntos de la red pertenecientes a  $S$  es igual a la suma

$$\sum_{n=a}^b [f(n)]$$

Demostración.- Sea  $n \in \mathbb{Z}$  con  $a \leq n < b$ : Sabemos que tal  $n$  existe desde  $a, b \in \mathbb{Z}$  con  $a < b$ . Entonces, el número de puntos de red  $S$  con el primer elemento  $n$  es el número de enteros  $y$  tales que  $0 < y \leq f(n)$ . Pero, por definición, esto es  $[f(n)]$ . Sumando todos los números enteros  $n$ .  $a \leq n \leq b$  tenemos,

$$S = \sum_{n=a}^b [f(n)]$$

**7.** Si  $a$  y  $b$  son enteros positivos primos entre sí, se tiene la fórmula

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{na}{b} \right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Se supone que para  $b = 1$  la suma del primer miembro es 0.

(a) Dedúzcase este resultado analíticamente contando los puntos de la red en un triángulo rectángulo.

Respuesta.- Sabemos por el ejercicio anterior que

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{na}{b} \right]$$

(puntos de red de un triángulo rectángulo con base  $b$  y altura  $a$ ). Además del ejercicio 1,7n4 sabemos que

$$a(T) = I_t + \frac{1}{2}B_T - 1$$

donde  $I_T$  es el número de puntos de red interior y  $B_T$  es el número de puntos de red límite. También sabemos por la fórmula del área de un triángulo rectángulo que

$$a(T) = \frac{1}{2}(ab)$$

por lo tanto tenemos

$$I = \sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{na}{b} \right] = \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}B_T + 1$$

Luego para calcular  $B_T$  notamos que no hay puntos límite en la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo ya que  $a$  y  $b$  no tienen un factor común. Esto se deduce ya que si no fuera tal punto a continuación,  $\frac{na}{b} \in \mathbb{Z}$  para algunos  $n < b$ , tendríamos que  $a$  divide a  $b$ , lo que contradice que no tienen ningún factor común. Por lo tanto  $B_T = a + b + 1$ , de donde,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{na}{b} \right] &= \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}(a + b + 1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(ab - a - b + 1) \\ &= \frac{1}{2}(a-1)(b-1) \end{aligned}$$

- (b) Dedúzcase este resultado analíticamente de la manera siguiente. Cambiando el índice de sumación, obsérvese que  $\sum_{a=1}^{b-1} [na/b] = \sum_{n=1}^{b-1} [a(b-n)/b]$ . Aplíquese luego los ejercicios 4(a) y (b) al corchete de la derecha.

Respuesta.- Sea

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{na}{b} \right] = \sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{a(b-n)}{b} \right]$$

entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{a(b-n)}{b} \right] &= \sum_{n=1}^{b-1} [a] - \sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{na}{b} \right] - \sum_{n=1}^{b-1} 1 \\ \Rightarrow 2 \sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{a(b-n)}{b} \right] &= \sum_{n=1}^{b-1} - \sum_{n=1}^{b-1} = (b-1)a - (b-1) \\ \sum_{n=1}^{b-1} \left[ \frac{na}{b} \right] &= \frac{1}{2}(a-1)(b-1) \end{aligned}$$

8. Sea  $S$  un conjunto de puntos en la recta real. La función característica de  $S$  es, por definición, la función  $Xs(x) = 1$  para todo  $x$  de  $S$  y  $Xs(x) = 0$  para aquellos puntos que no pertenecen a  $S$ . Sea  $f$  una función escalonada que toma el valor constante  $c_k$  en el  $k$ -simo subintervalo  $I_k$  de una cierta partición de un intervalo  $[a, b]$ . Demostrar que para cada  $x$  de la reunión  $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$  se tiene

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k X_{I_k}(x)$$

Esta propiedad se expresa diciendo que toda función escalonada es una combinación lineal de funciones características del intervalos.

Demostración.- Definimos una función característica,  $Xs$ , en un conjunto  $S$  de puntos en  $\mathbf{R}$  por

$$Xs(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Primero, observemos que los subintervalos abiertos de alguna partición de  $[a, b]$  son necesariamente disjuntos desde  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Por lo tanto si  $x \in I_1 \cup \dots \cup I_n$  entonces  $x \in I_j$  exactamente por uno  $j, 1 \leq j \leq n$ . Por lo tanto,

$$XI_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } xj = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

para todos  $1 \leq k \leq n$  y para cualquiera  $x$ . Además, por definición de  $f$ , sabemos  $f(x) = c_k$  si  $x \in I_k$ . Así que,

$$\sum_{k=1}^n c_k XI_k(x) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_k \cdot 1 + \dots + c_n \cdot 0 = c_k = f(x)$$

para cada  $x \in I_1 \cup \dots \cup I_n$

## 1.12. Definición de integral para funciones escalonadas

**Definición 1.10 (Definición de integral de funciones escalonadas)** La integral de  $s$  de  $a$  a  $b$ , que se designa por el símbolo  $\int_a^b s(x)dx$ , se define mediante la siguiente fórmula:

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^n s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Es decir, para obtener el valor de la integral, se multiplica cada valor  $s_k$  constante, por la longitud de intervalo  $k$  —simo correspondiente, formando el producto  $s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$  y se suman luego todos los productos obtenidos.

**Definición 1.11** Si  $s$  es constante en el intervalo abierto  $(a, b)$ , es decir,  $s(x) = c$  si  $a < x < b$ , se tiene entonces:

$$\int_a^b s(x)dx = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = c(b - a)$$

## 1.13. Propiedades de la integral de una función escalonada

**TEOREMA 1.2 (Propiedad aditiva)**  $\int_a^b [s(x) + t(x)]dx = \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)dx$

**TEOREMA 1.3 (Propiedad aditiva)**  $\int_a^b c \cdot s(x)dx = c \int_a^b s(x)dx$

**TEOREMA 1.4 (Propiedad de la linealidad)**  $\int_a^b [c_1 s(x) + c_2 t(x)]dx = c_1 \int_a^b s(x)dx + c_2 \int_a^b t(x)dx$

**TEOREMA 1.5 (Teorema de comparación)** Si  $s(x) < t(x)$  para todo  $x$  de  $[a, b]$ , entonces  $\int_a^b s(x)dx < \int_a^b t(x)dx$

**TEOREMA 1.6 (Aditividad respecto al intervalo de integración)**  $\int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx = \int_a^b s(x)dx$   
si  $a < c < b$

**TEOREMA 1.7 (Invariancia frente a una traslación)**  $\int_a^b s(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)dx$  para todo real  $c$

**TEOREMA 1.8 (Dilatación o contracción del intervalo de integración)**  $\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx$  para todo  $k > 0$

Es conveniente considerar integrales con el límite inferior mayor que el superior. Esto se logra definiendo:

$$\int_a^b s(x)dx = - \int_a^b s(x)dx \quad a < b$$

**TEOREMA 1.9 (Propiedad de reflexión de la integral)**  $\int_a^b s(x)dx = \int_{-b}^{-a} s(-x)dx$

## 1.15. Ejercicios

1. Calcular el valor de cada una de las siguientes integrales. Se pueden aplicar los teoremas dados en la Sección 1,13 siempre que convenga hacerlo. La notación  $[x]$  indica la parte entera de  $x$ .

(a)  $\int_{-1}^3 [x]dx.$

Respuesta.- Sea  $P = \{-1, 0, 1, 2\}$  ya que

$$[x] = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

entonces por definición  $\int_{-1}^3 [x]dx = -1 \cdot [0 - (-1)] + 0 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (2 - 1) + 2(3 - 2) = 2$

(b)  $\int_{-1}^3 \left[x + \frac{1}{2}\right] dx$

Respuesta.- La partición viene dada por  $P = \{-1, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2\}$  ya que

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x + 1/2 < 0 \implies -3/2 \leq x < -1/2 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x + 1/2 < 1 \implies -1/2 \leq x < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x + 1/2 < 2 \implies 1/2 \leq x < 3/2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x + 1/2 < 3 \implies 3/2 \leq x < 5/2 \\ 3 & \text{si } 3 \leq x + 1/2 < 4 \implies 5/2 \leq x < 7/2 \end{cases}$$

entonces por definición  $\int_{-1}^3 \left[x + \frac{1}{2}\right] dx = -1 \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + 0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) + 3 \left(3 - \frac{3}{2}\right) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 4$

(c)  $\int_{-1}^3 ([x] + [x + 1/2])$

Respuesta.- Por la propiedad aditiva se tiene  $\int_{-1}^3 [x]dx + \int_{-1}^3 \left[x + \frac{1}{2}\right] dx = 2 + 4 = 6$ .

(d)  $\int_{-1}^3 2[x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad homogénea se tiene  $2 \cdot \int_{-1}^3 [x]dx = 2 \cdot 2 = 4$

(e)  $\int_{-1}^3 [2x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad de parte entera donde  $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$  y (c) resulta que  $\int_{-1}^3 [2x]dx = 6$

(f)  $\int_{-1}^3 [-x]dx$

Respuesta.- Por propiedad de parte entera se tiene que  $[-x] = -[x] - 1$  ya que el valor de los subintervalos no es entero, luego

$$\int_{-1}^3 -[x] - 1 = \int_{-1}^3 -[x] + \int_{-1}^3 = - \int_{-1}^3 [x] - \int_{-1}^3 1 = -2 - \{1 \cdot [3 - (-1)]\}$$

- 2.** Dar un ejemplo de función escalonada  $s$  definida en el intervalo cerrado  $[0, 5]$ , que tenga las siguientes propiedades  $\int_0^2 s(x)dx = 5$ ,  $\int_0^5 s(x)dx = 2$

Respuesta.- Existen infinitas funciones escalonadas que deben cumplir lo siguiente:

$$\int_2^5 s(x)dx = \int_0^5 s(x)dx - \int_0^2 s(x)dx = -3$$

- 3.** Probar que  $\int_a^b [x] dx + \int_a^b [-x] dx = a - b$

Demostración.- Por propiedad de parte entera se tiene que  $[-x] = -[x] - 1$  si  $x$  no es entero. Entonces  $\int_a^b [x] dx + \int_a^b -[x] - 1 dx$  luego por la propiedad aditiva  $\int_a^b -1 dx$ , de donde por la propiedad dilatación  $\int_b^a 1 dx$  y por lo tanto  $a - b$ .

- 4. (a)** Si  $n$  es un entero positivo, demostrar que  $\int_0^n [t] dt = n(n-1)/2$ .



Demostración.- Según la definición de la función de número entero mayor,  $[t]$  es constante en los subintervalos abiertos, por lo que  $[t] = k - 1$  si  $k - 1 < t < k$  entonces

$$\int_0^n = \sum_{k=1}^n (k-1)(k-(k-1)) = \sum_{k=1}^n (k-1)$$

Luego sabemos que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$  por lo tanto  $\int_0^n = \frac{n(n-1)}{2}$ .