

Cálculo una variable

George B. Thomas, Jr.

Resolución de problemas por:
FODE Christian Limbert Paredes Aguilera

Índice general

1. Funciones	3
1.1. Las funciones y sus gráficas	3
1.1. Ejercicios	4
1.2. Ejercicios	21
1.3. Funciones trigonométricas	47
1.3. Ejercicios	48

Funciones

1.1. Las funciones y sus gráficas

Definición 1.1 Una función f de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento $x \in D$ un solo o único elemento $f(x) \in Y$

Definición 1.2 Cuando definimos una función $y = f(x)$ mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales x para los cuales la fórmula proporciona valores reales para y , el llamado **dominio natural**.

Cuando el rango de una función es un subconjunto de números reales, se dice que la función tiene **valores reales** (o que es **real valuada**)

Definición 1.3 (Valor absoluto) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Definición 1.4 Sea una función definida en un intervalo I y sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos en I

1. Si $f(x_2) > f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es **creciente** en I .
2. Si $f(x_2) < f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es **decreciente** en I .

Definición 1.5 Una función $y = f(x)$ es una

1. Función par de x si $f(-x) = f(x)$.

2. Función impar de x si $f(-x) = -f(x)$.

Para toda x en el dominio de la función.

(Los nombres par e impar provienen de las potencias de x).

Definición 1.6 Dos variables x e y son **proporcionales** (una con respecto a la otra) si una siempre es un múltiplo constante de la otra; esto es, si $y = kx$ para alguna constante k distinta de 0.

Si la variable y es proporcional al recíproco $1/x$, entonces algunas veces se dice que y es **inversamente proporcional** a x (puesto que $1/x$ es el inverso multiplicativo de x).

1.1. Ejercicios

1. $f(x) = 1 + x^2$

Respuesta.- Al evaluar $1+x^2$ vemos que x se cumple para todos los reales, por lo tanto $f_D = \{x / \forall x \in \mathbb{R}\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 1\}$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- El dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq 0\}$. Y el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \leq 1\}$.

3. $F(x) = \sqrt{5x+10}$

Respuesta.- Sea $5x+10 \geq 0$ ya que una raíz par no puede ser no negativo, entonces $x \geq -2$, por lo tanto el dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq -2\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio, evaluaremos $x^2 - 3x \geq 0$, de donde $x(x-3) \geq 0$, por lo tanto el dominio es $f_D = \{x / x \leq 0 \cup x \geq 3\}$. Luego el rango viene definido por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

5. $f(t) = \frac{4}{3-t}$

Respuesta.- Sabemos que no se puede dividir un número por 0. Por lo tanto para hallar el dominio de la función debemos evaluar $3-t \neq 0$, de donde $t \neq 3$, así $f_D = \{t/t \neq 3\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \neq 0\}$.

6. $G(t) = \frac{2}{t^2 - 16}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio evaluamos $t^2 - 16 = 0$, de donde $(t - 4)(t + 4) = 0$, por lo tanto el dominio de la función viene dado por $f_D = \{t/t \neq 4 \wedge t \neq -4\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/0 < y \leq -\frac{1}{8}\}$ ya que al despejar x nos queda $x = \sqrt{\frac{2}{y} + 16}$ de donde se debe evaluar por un lado $\frac{2}{y}$ y por otro $\frac{2}{y} - 16 \geq 0$.

En los ejercicios 7 y 8 ¿Cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de x ? ¿Cuáles no representan a funciones de x ? Dé razones que apoyen sus respuestas.

7. El inciso a . no es una función ya que no cumple con la prueba de la recta vertical ya una función sólo puede tener un valor $f(x)$ para cada x en su dominio. Y el inciso b . no representa la gráfica de una función.
8. Los incisos a . y b . no representan a funciones de x . El único que no representa una gráfica de una función es el inciso b .

Determinación de fórmulas para funciones.

9. Expresa el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado x del triángulo.

Respuesta.- El área se representa por $f(x) = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ y el perímetro por $f(x) = 3x$

10. Expresa la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del cuadrado. Expresa el área como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La longitud del lado de un cuadrado como función de longitud esta dado por $d = \sqrt{2a^2}$. El área es expresado por $A = \frac{d^2}{2}$

11. Expresa la longitud del lado de un cubo como una función de la longitud de la diagonal d del cubo. Expresa el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La expresión de la longitud del lado del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo es

$$L(d) = (\sqrt{2}/2) \cdot d$$

Las expresiones del área de la superficie y el volumen del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo son:

$$A(d) = 3 \cdot d^2 \quad y \quad V(d) = (\sqrt{2}/4) \cdot d^3$$

- 12.** Un punto P en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente de la recta que une a P con el origen.

Respuesta.- Sea el punto en el origen $(0,0)$ y el punto P tenga las coordenadas (z, z') . Sabemos que una recta viene definido por $f(x) = ax + b$ entonces formando un sistema de ecuaciones tenemos:

$$0 = 0x + b \quad y \quad z' = az + b$$

Luego $z' = az$ de donde $a = \frac{z'}{z}$, y así nos queda la función

$$f(x) = \frac{z'}{z}x$$

- 13.** Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de la recta $2x + 4y = 5$. Sea L la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Escriba L como función de x .

Respuesta.- Dado $(x, y) \in 2x + 4y = 5; (0, 0)$ entonces

$$x = \frac{5 - 4y}{2} \quad \frac{5 - 2x}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } L &= \sqrt{(y-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{5-4y}{2}\right)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{25 + 40y + 16y^2}{4}} = \sqrt{\frac{4y^2}{4} + \frac{25 - 40y + 16y^2}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{20y^2 + 40y + 25} \end{aligned}$$

- 14.** Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de $y = \sqrt{x-3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4, 0)$. Escriba L como función de y .

Respuesta.- $y = \sqrt{x-3}, (x, y) \in y = \sqrt{x-3}$ entonces calculamos la distancia entre $y = \sqrt{x-3}$ y $(4, 0)$.

$$y^2 = x - 3 \implies x = y^2 + 3 \quad y \quad y = \sqrt{x-3}$$

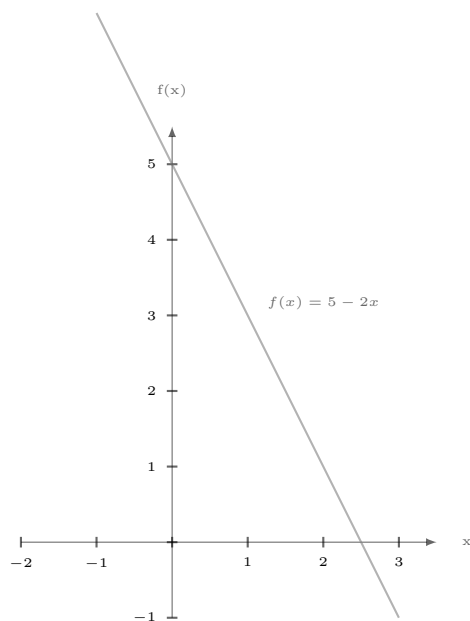
$$\text{Así } L = \sqrt{(y-0)^2 + (x-y)^2} = \sqrt{y^2 + (y^2+3)^2} = \sqrt{y^2 + y^4 + 6y^2 + 9} = \sqrt{y^4 + 7y^2 + 9}$$

Las funciones y sus gráficas.

En los ejercicios 15 al 20, determine el dominio y grafique las funciones

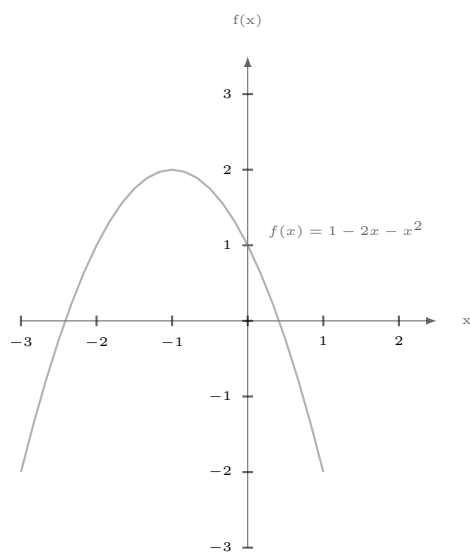
- 15.** $f(x) = 5 - 2x$

Respuesta.- El dominio esta dado para todos los reales x .



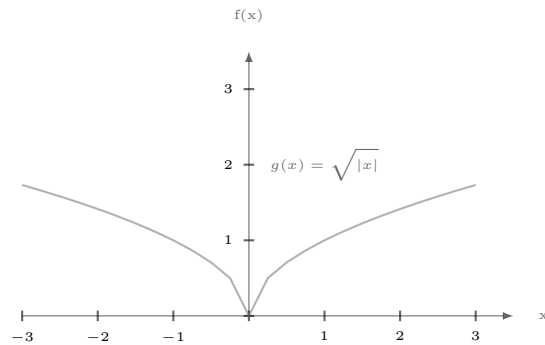
16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo real x positivo.



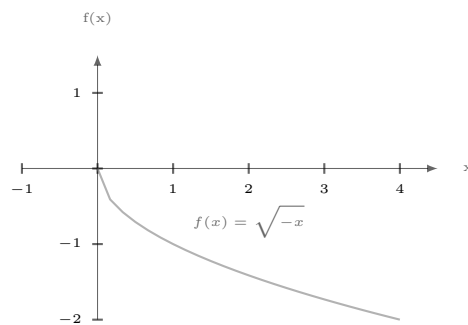
17. $g(x) = \sqrt{|x|}$

Respuesta.- El dominio de la función es para $x \in \mathbb{R}$



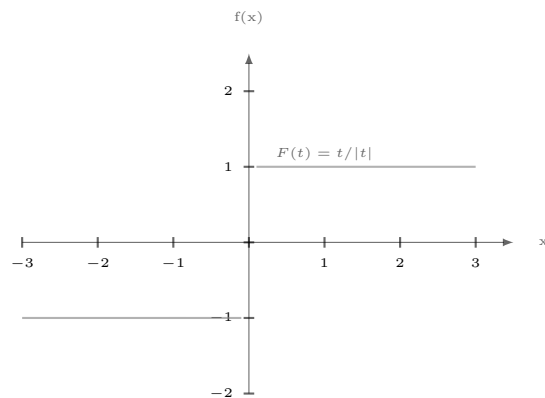
18. $g(x) = \sqrt{-x}$

Respuesta.- El dominio de la función se cumple para los números reales negativos.



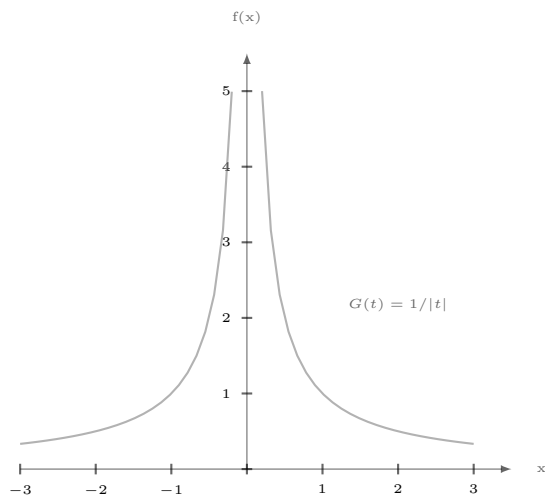
19. $F(t) = t/|t|$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo número real menos el 0.



20. $G(t) = 1/|t|$

Respuesta.- El dominio se cumple para todo número real menos el 0.



21. Determine el dominio de $y = \frac{x+3}{4-\sqrt{x^2-9}}$

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el dominio esta dado por $D_f = \{x/x \geq 3 \wedge x \neq 4\}$

22. Determine el rango de $y = 2 + \frac{x^2}{x^2+4}$.

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el rango viene dado para todo $y = f(x)$ tal que $y \geq 2$

23. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x .

a. $|y| = x$

Respuesta.- No es una función de x ya que $\sqrt{y^2} = x \implies y^2 = x^2 \implies \pm y = \pm x$

b. $y^2 = x^2$

Respuesta.- Por el anterior problema 23a.

24. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x

a. $|x| + |y| = 1$

Respuesta.- Ya que $|y| = 1 - |x| \implies \sqrt{y^2} = 1 - |x| \implies y^2 = (1 - |x|)^2 \implies \pm y = |1 - |x||$

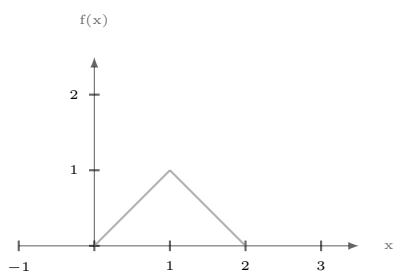
b. $|x + y| = 1$

Respuesta.- Ya que $\sqrt{(x + y)^2} = 1 \implies (x + y)^2 = 1 \implies x^2 + 2xy + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - 2xy - x^2 \implies \pm y = \sqrt{1 - 2xy - x^2}$

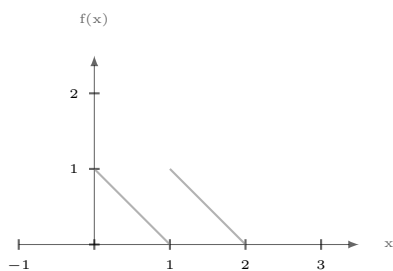
Funciones definidas por partes

En los ejercicios 25 a 28, grafique las funciones:

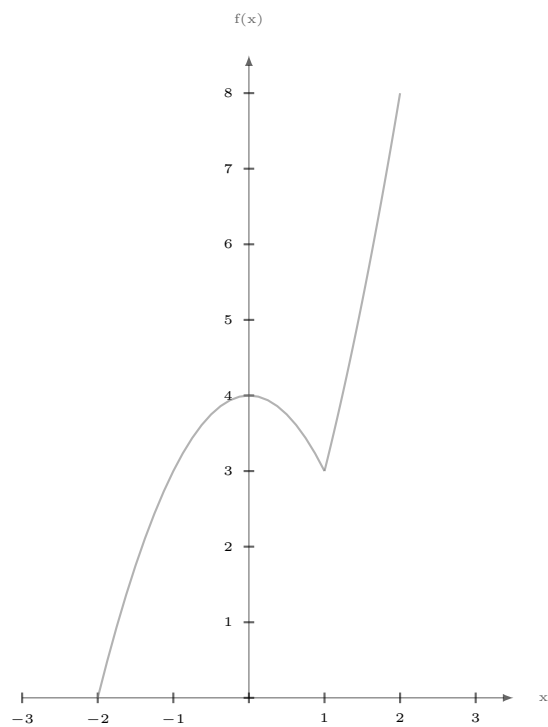
25. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



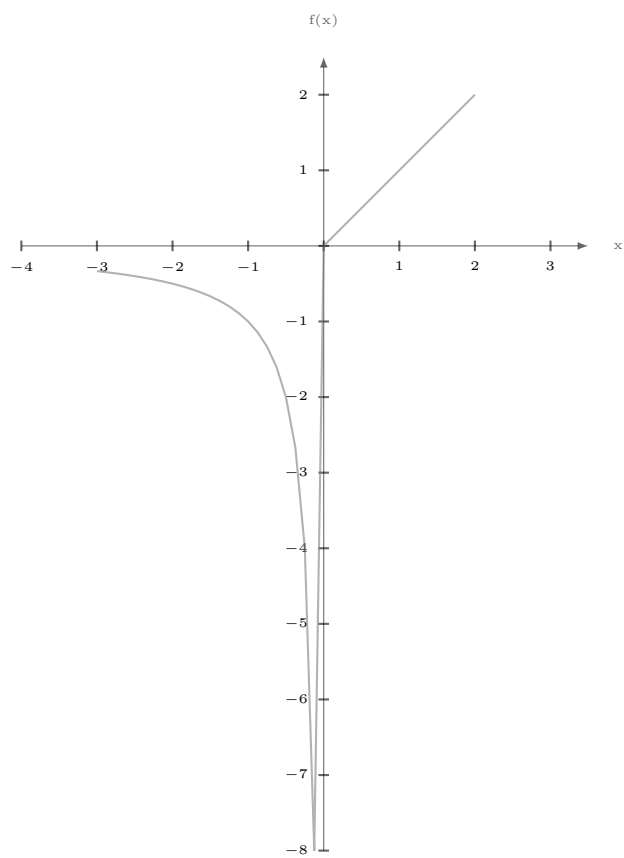
26. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



27. $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$



28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$



Determine una fórmula para cada función graficada en los ejercicios 29 a 32

- 29. a.** Sea $f(x) = ax + b$ entonces $0 = b$ y $1 = a + b$ luego $a = 1$ por lo tanto $f(x) = x$. Por otro lado $1 = a + b$ y $0 = 2a + 2 \implies a = -1$ de donde se tiene $f(x) = -x + 2$ así nos queda la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- b.** Está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ y } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ y } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- 30. a.** Similar al ejercicio anterior se tiene que la formula

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1/2x + 5/7 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- b.** Se tiene

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x + 3 & \text{si} \end{cases}$$

- 31. a.**

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -2x + 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- b.** Sea (a, b) y (c, d) por lo tanto por capitulo 4 de spivak $f(x) = \frac{d-b}{c-a}(x-a) + b$ entonces $(-2, -1)$ y $(0, 0)$ así $f(x) = \frac{0-1}{0+2}(x+2) + 0 \implies f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$

Luego $f(x) = -2x + 2$ y finalmente $f(x) = -1$ de donde,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 2x + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

32. a.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2x}{T} - 1 & \text{si } \frac{T}{2} < x \leq T \end{cases}$$

b.

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{si } \frac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad T \leq x < \frac{3T}{2} \\ -A & \text{si } \frac{T}{2} \leq x < T \quad y \quad \frac{3T}{2} \leq x \leq 2T \end{cases}$$

Las funciones mayor entero y menor entero.

33. Para qué valores de x es

a. $[x] = 0$

respuesta.- Para $0 \leq x < 1$

b. $[x] = 0$

Respuesta.- Para $-1 < x \leq 0$

34. ¿Cuáles valores x de números reales satisfacen la ecuación $[-x] = [x]$?

Respuesta.- Sólo el 0.

35. ¿Es cierto que $[-x] = -[x]$ para todo número real x ? Justifique su respuesta.

Respuesta.- Es cierto siempre y cuando sea x un entero. Ya que si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x = n$ para algunos $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $[x] = n$ y $-x = -n \implies [-x] = n \implies [-x] = -[x]$. Por otro lado sea $x \notin \mathbb{Z}$ y $[x] = n$ entonces $n \leq x < n+1 \implies -n-1 < -x < -n \implies [-x] = -n-1 = -[x]-1$

36. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} [x], & x \leq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

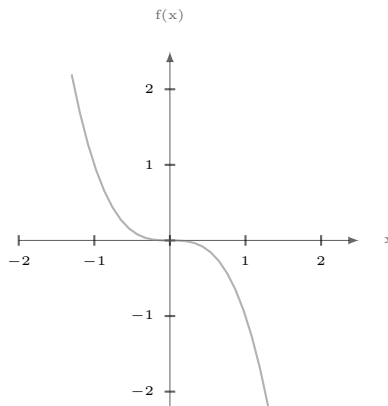
¿Por qué $f(x)$ se denomina parte entera de x ?

Respuesta.- Se denomina porque hace corresponder el número inmediato anterior.

Funciones crecientes y funciones decrecientes.

Grafique las funciones en los ejercicios 37 a 46. Si tiene simetrías, ¿Qué tipo de simetría tienen? Especifique los intervalos en los que la función es creciente y los intervalos donde la función es decreciente.

37. $y = -x^3$



Respuesta.- Tiene simetría impar y el intervalo donde decrece está dado por $(-\infty, \infty)$

38. $y = -\frac{1}{x^2}$

Respuesta.- Tiene simetría par y está dado por el intervalo decreciente de $-\infty < x < 0$ y por el intervalo creciente $0 < x < \infty$

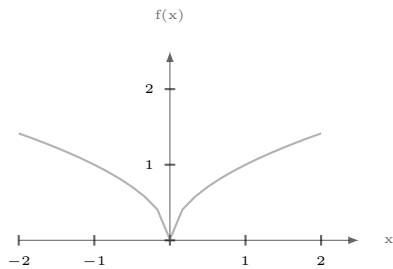
39. $y = -\frac{1}{x}$

Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por los intervalos crecientes $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$

40. $y = \frac{1}{|x|}$

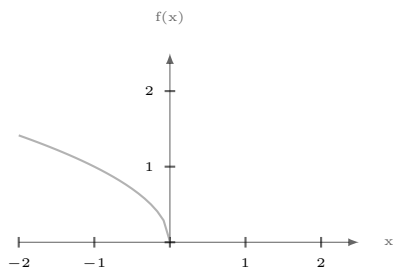
Respuesta.- Tiene simetría par y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < 0$ y el intervalo decreciente $0 < x < \infty$

41. $y = \sqrt{|x|}$



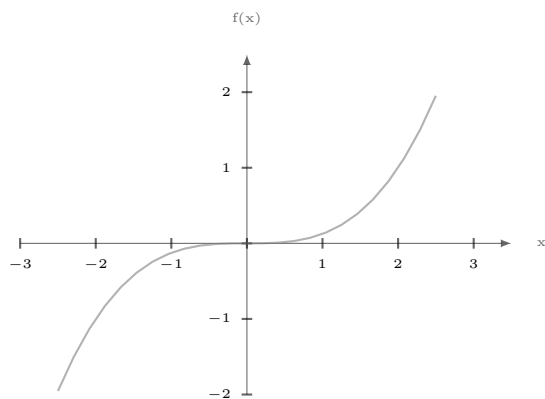
Respuesta.- Tiene simetría par y esta dado por el intervalo decreciente $-\infty < x \leq 0$ y el intervalo creciente $0 \leq x < \infty$

42. $y = \sqrt{-x}$



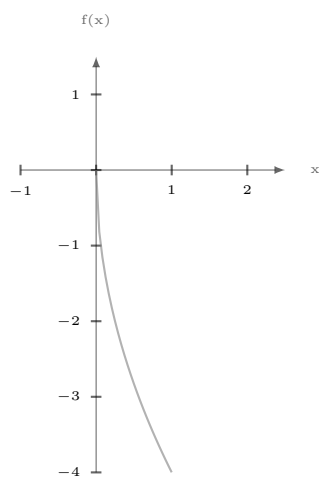
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo decreciente $-\infty < x \leq 0$

43. $y = x^3/8$



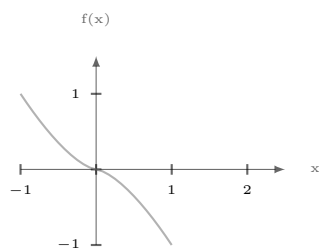
Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < \infty$

44. $y = -4\sqrt{x}$



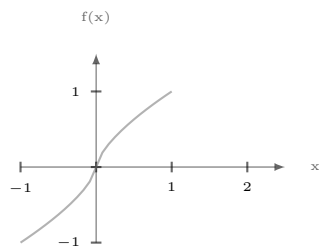
Respuesta.- No es ni par ni impar y viene dado por el intervalo $0 \leq x < \infty$

45. $y = -x^{3/2}$



Respuesta.- Tiene simetría impar y viene dado por el intervalo decreciente $-\infty < x < \infty$

46. $y = (-x)^{2/3}$



Respuesta.- La simetría es impar y viene dado por el intervalo creciente $-\infty < x < \infty$

Funciones pares y funciones impares

En los ejercicios 47 a 58, indique si la función es par, impar o de ninguno de estos tipos. Justifique su respuesta.

47. $f(x) = 3$

Respuesta.- Sea $f(-x) = 3 = f(x)$ entonces decimos que la función es par.

48. $f(x) = x^{-5}$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^{-5} = -(x^{-5}) = -f(x)$, por lo tanto la función es impar.

49. $f(x) = x^2 + 1$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, de donde se tiene que la función es par.

50. $f(x) = x^2 + x$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ de donde la función no es par ni impar.

51. $g(x) = x^3 + x$

Respuesta.- Sea $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$ por lo tanto la función es impar.

52. $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

Respuesta.- Sea $g(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 - 1 = g(x)$ por lo tanto la función es par.

53. $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea $g(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = g(x)$ por lo tanto la función es par.

54. $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Respuesta.- Sea $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -g(x)$ de donde la función es impar.

55. $h(t) = \frac{1}{t-1}$

Respuesta.- Sea $h(-t) = \frac{1}{-t-1}$ entonces la función no es par ni impar.

56. $h(t) = |t^3|$

Respuesta.- Sea $h(-t) = |(-t)^3| = |t^3| = h(t)$ por lo tanto la función es par.

57. $h(t) = 2t + 1$

Respuesta.- Sea $h(-t) = 2(-t) + 1$ entonces la función no es ni par ni impar.

58. $h(t) = 2|t| + 1$

Respuesta.- Sea $h(-t) = 2|-t| + 1 = 2t + 1 = h(t)$ entonces la función es par.

Teoría y ejemplos

59. La variable s es proporcional a t , y $s = 25$ cuando $t = 75$. Determine t cuando $s = 60$.

Respuesta.- Sea $\frac{s}{r}$ entonces $\frac{25}{75} = \frac{60}{x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 180$

60. Energía cinética. La energía cinética K de una masa es proporcional al cuadrado de su velocidad v . Si $K = 12,960$ joules, cuando $v = 18$ m/s, ¿Cuál es el valor de K cuando $v = 10$ m/s?.

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene $\frac{K}{v^2} = \frac{12,960}{18^2} = \frac{K}{10^2}$ entonces $K = 4000$.

61. Las variables r y s son inversamente proporcional, mientras que $r = 6$ cuando $s = 4$. Determine s cuando $r = 10$.

Respuesta.- Tenemos que $6 \cdot 4 = s \cdot 10$ entonces queda que $s = 2,4$.

62. Ley de Boyle. La ley de Boyle establece que el volumen V de un gas, a temperatura constante, aumenta cuando la presión P disminuye, de manera que V y P son inversamente proporcionales. Si $P = 14,7 \text{ lb/in}^2$ cuando $V = 1000 \text{ in}^3$, entonces ¿cuál es el valor de V cuando $P = 23,4 \text{ lbs/in}^2$?

Respuesta.- Sea $V \cdot P = V' \cdot P'$ entonces $14,7 \cdot 1000 = V \cdot 23,4$ y por lo tanto $V = 628,2 \text{ in}^3$.

63. Una caja sin tapa se construye a partir de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 14 por 22 pulgadas (in). A la pieza de cartón se le cortan cuadrados de lado x en cada esquina y luego se doblan

hacia arriba los lados, como en la figura. Expresar el volumen V de la caja como una función de x .

Respuesta.- El volumen es dado por $V = L \cdot a \cdot h$ luego $h = x$, $a = 14 - 2x$, $L = 22 - 2x$ por lo tanto

$$V(x) = (22 - 2x)(14 - 2x) \cdot x \implies V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 308x$$

64. La siguiente figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa tiene una longitud de dos unidades.

a. Expresar la coordenada de P en términos de x . (Podría iniciar escribiendo una ecuación para la recta AB).

Respuesta.- Sea $y = mx + b$ luego en el punto B , se tiene la intersección de ambas rectas que forman un ángulo de 90° , así que, el ángulo que tiene que tener el punto A es de 45° o bien $m = -1$ por lo tanto $y = -x + b$ o bien $m = -1$ ya que la recta va hacia abajo.

b. Expresar el área del rectángulo en términos de x .

Respuesta.- El área de un rectángulo es $b \cdot a$ de donde $area = 2x \cdot y = 2x(b - x)$.

En los ejercicios 65 y 66 relacione cada ecuación con su gráfica. No utilice un dispositivo para graficar y dé razones que justifiquen su respuesta.

65. a. $y = x^4 \implies h$

b. $y = x^7 \implies f$

c. $y = x^{10} \implies g$

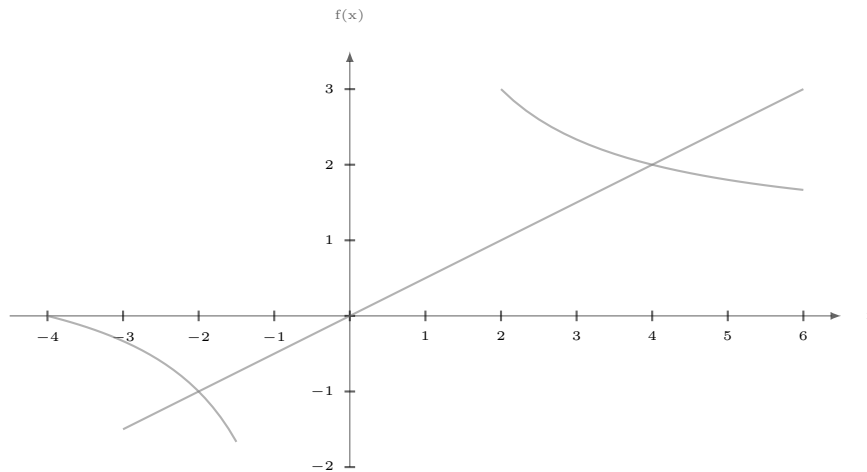
66. a. $y = 5x \implies f$.

b. $y = 5x \implies f$.

c. $y = x^5 \implies h$.

67. a. Grafique juntas las funciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = 1 + (4/x)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$$

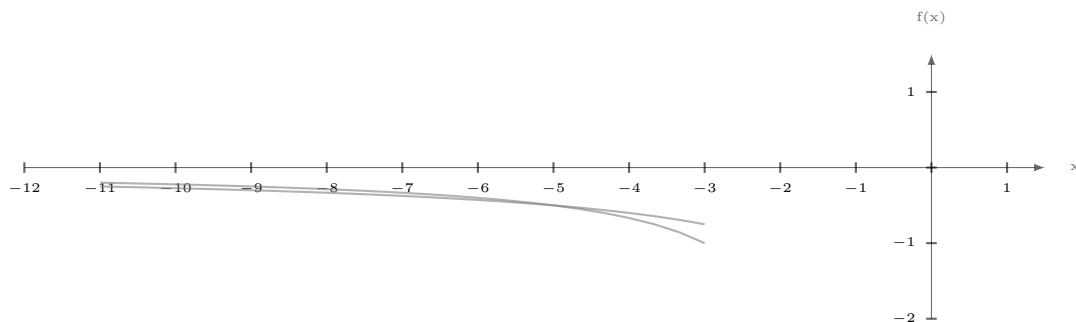


b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inciso a)

Respuesta.- Resolviendo la ecuación nos queda $x^2 - 2x - 8 > 0$ donde se cumple para $x > 4$ ó $x < -2$

68. a. Grafique juntas las funciones $f(x) = 3/(x-1)$ y $g(x) = 2/(x+1)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$



b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inicio a).

Respuesta.- Sea $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1} \Rightarrow x < -5$

69. Para que una curva sea simétrica con respecto al eje x , el punto (x, y) debe estar en la curva si y sólo si el punto $(x, -y)$ está en la curva. Explique por qué una curva que es simétrica con respecto al eje x no es la gráfica de una función a menos que la función sea $y = 0$.

Respuesta.- Esto se debe a que contradice a la definición de función. Es decir, a cada elemento x se asigna un solo o único elemento $f(x)$. Si $y = 0$ entonces $(x, y) = (x, -y)$ y por lo tanto se cumple la definición de función

- 70.** Trescientos libros se venden en \$40 cada uno, lo que da por resultado un ingreso de $300 \cdot \$40 = \$12,000$. Por cada aumento de \$5 en el precio, se venden 25 libros menos. Expresa el ingreso R como una función del número x de incrementos de \$5.

Respuesta.- Veamos algunos ejemplos particulares:

$$\begin{array}{rcl} 300 \cdot 40 & = & 12000 \\ (300 - 25)(40 + 5) & = & 12375 \\ (300 - 50)(40 + 10) & = & 12500 \\ (300 - 75)(40 + 15) & = & 12375 \\ (300 - 100)(40 + 20) & = & 12000 \end{array}$$

Por lo tanto $R(x) = (300 - 5x)(40 + x) = -125x^2 + 500x + 12000$

- 71.** Se va a construir un corral con la forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud de x pies (ft) e hipotenusa de longitud h ft. Si los costos de la cerca son de \$5/ft para los catetos y \$10/ft para la hipotenusa, escriba el costo total C de la construcción como una función de h .

Respuesta.- Sea $c^2 + c^2 = h^2 \Rightarrow h = c\sqrt{2} \Rightarrow c = h\sqrt{2}$, luego $C = 2 \cdot c \cdot 5 + h \cdot 10$ por lo tanto $C = 10 \cdot h \frac{1}{\sqrt{2}} + 10$

- 72.** Costos industriales: Una central eléctrica se encuentra cerca de un río, donde éste tiene un ancho de 800 ft. Tender un cable de la planta a un lugar en la ciudad, 2 millas (mi) río abajo en el lado opuesto, tiene un costo de 180 por ft que cruce el río y 100 por ft en tierra a lo largo de la orilla del río.

- a. Suponga que el cable va de la planta al punto Q , en el lado opuesto, lugar que se encuentra a x ft del punto P , directamente opuesto a la planta. Escriba una función $C(x)$ que indique el costo de tender el cable en términos de la distancia x .

Respuesta.- Por el teorema de Pitágoras podemos establecer la función $C(x)$ como sigue:

$$C(x) = \sqrt{x^2 + 800^2} \cdot 180 + (10560 - x) \cdot 100$$

- b. Genere una tabla de valores para determinar si la ubicación más barata para el punto Q es menor a 2000 ft o mayor a 2000 ft del punto P .

Respuesta.-

$$\begin{array}{rclcl} C(x) & = & \sqrt{1900^2 + 800^2} + (10560 - 1900) \cdot 100 & = & 1270599,7 \\ C(x) & = & \sqrt{2100^2 + 800^2} + (10560 - 2100) \cdot 100 & = & 1217079,5 \end{array}$$

Por lo tanto es mas barato ubicar el punto Q a una distancia mayor a 2000 ft.

1.2. Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, determine dominios y rangos de $f, g, f + g$ y $f \cdot g$

1. $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x-1}$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall f(x) \in \mathbb{R}$
g	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$
$f + g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 1$
$f \cdot g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$

2. $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \sqrt{x-1}$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$x \geq -1$	$f(x) \geq 0$
g	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$
$f + g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq \sqrt{2}$
$f \cdot g$	$x \geq 1$	$f(x) \geq 0$

En los ejercicios 3 y 4, determine dominios y rangos de $f, g, f/g, g/f$.

3. $f(x) = 2, g(x) = x^2 + 1$

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f(x) = 2$
g	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f(x) \geq 1$
f/g	$\forall x \in \mathbb{R}$	$0 < f(x) \leq 2$
g/f	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f(x) \geq 0,5$

4. $f(x) = 1, g(x) = 1 + \sqrt{x}$.

Respuesta.-

Función	Dominio	Rango
f	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f(x) = 1$
g	$x \geq 0$	$f(x) \geq 1$
f/g	$x \geq 0$	$0 < f(x) \leq 1$
g/f	$x \geq 0$	$f(x) \geq 1$

Composición de funciones.

5. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, determine lo siguiente:

a. $f(g(0)) = f(-3) = -3 + 5 = 2$

b. $g(f(0)) = g(5) = 5^2 - 3 = 22$

c. $f(g(x)) = f(x^2 - 3) = x^2 - 3 + 5 = x^2 + 2$ para $D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

d. $g(f(x)) = g(x + 5) = (x + 5)^2 - 3 = x^2 + 10x + 25 - 3 = x^2 + 10x + 22$ para $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

e. $f(f(-5)) = f(0) = 5$

f. $g(g(2)) = g(1) = 1 - 3 = -2$

g. $f(f(x)) = f(x + 5) = x + 5 + 5 = x + 10$

h. $g(g(x)) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 9 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$

6. Si $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 1/(x + 1)$, determine lo siguiente.

a. $f(g(1/2)) = f(2/3) = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

b. $g(f(0)) = g(-1) = \frac{1}{-1 + 1} = \text{indeterminado}$

c. $f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x + 1}\right) = \frac{1}{x + 1} - 1 = \frac{-x + 2}{x + 1}$ para $D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

d. $g(f(x)) = g(x - 1) = \frac{1}{x - 1 + 1} = \frac{1}{x}$ para $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

e. $f(f(-5)) = f(-6) = -6 - 1 = -7$

f. $g(g(2)) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{3}{4}$

g. $f(f(x)) = f(x - 1) = x - 2$

$$\text{h. } g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{x+1}{x+2} \quad x \neq -1, -2$$

En los ejercicios 7 a 10, escriba una fórmula para $f \circ g \circ h$

$$\text{7. } f(x) = x + 1, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = 4 - x$$

Respuesta.- Se tiene $f(g(h(x))) = f(g(4 - x)) = f(12 - 3x) = 12 - 3x + 1 = 13 - 3x$ para $D_{f \circ g \circ h} = \{x \in D_h / h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f\}$

$$\text{8. } f(x) = 3x + 4, \quad g(x) = 2x - 1, \quad h(x) = x^2$$

Respuesta.- Se tiene $f(g(h(x))) = f(g(x^2)) = f(2x^2 - 1) = 3(2x^2 - 1) + 4 = 6x^2 + 1$ para $D_{f \circ g \circ h} = \{x \in D_h / h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f\}$

$$\text{9. } f(x) = \sqrt{x+1}, \quad \frac{1}{x+4}, \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

Respuesta.- $f(g(h(x))) = f\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{x} + 4}\right) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x} + 4} + 1} = \sqrt{\frac{5x+1}{4x+1}}$ para $x \neq 0, -\frac{1}{4}$.

$$\text{10. } f(x) = \frac{x+2}{3-x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad h(x) = \sqrt{2-x}$$

Respuesta.- $f(g(\sqrt{2-x})) = f\left(\frac{|2-x|}{|2-x|+1}\right) = \frac{\frac{|2-x|}{|2-x|+1} + 2}{3 - \left(\frac{|2-x|}{|2-x|+1}\right)}$

Sean $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$ y $j(x) = 2x$. Exprese cada una de las funciones de los ejercicios 11 y 12 como una composición de funciones que incluyan a una o más de f, g, h y j .

$$\text{11. a. } y = \sqrt{x} - 3 \Rightarrow f(\sqrt{x}) \Rightarrow f(g(x))$$

$$\text{b. } y = 2\sqrt{x} \Rightarrow j(\sqrt{x}) \Rightarrow j(g(x))$$

$$\text{c. } y = x^{1/4} \Rightarrow g(\sqrt{x}) \Rightarrow g(g(x))$$

$$\text{d. } y = 4x \Rightarrow j(j(x))$$

e. $y = \sqrt{(x-3)^3} \Rightarrow g((x-3)^3) \Rightarrow g(h(x-3)) \Rightarrow g(h(f(x)))$

f. $y = (2x-6)^3 \Rightarrow h(2x-6) = h(j(x-3)) = h(j(f(x)))$.

12. a. $y = 2x - 3 \Rightarrow f(2x) \Rightarrow f(j(x))$

b. $y = x^{3/2} \Rightarrow g(x^3) \Rightarrow g(h(x))$

c. $y = x^9 \Rightarrow h(x^3) \Rightarrow h(h(x))$

d. $y = x - 6 \Rightarrow f(f(x))$

e. $y = 2\sqrt{x-3} \Rightarrow j(\sqrt{x-3}) \Rightarrow j(g(x-3)) \Rightarrow j(g(f(x)))$

f. $y = \sqrt{x^3-3} \Rightarrow g(x^3-3) \Rightarrow g(f(x^3)) \Rightarrow g(f(h(x)))$

13. Copie complete la siguiente tabla:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$x - 7$	\sqrt{x}	$\sqrt{x-7}$
b.	$x + 2$	$2x$	$3x + 6$
c.	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
d.	$\frac{x}{x-1}$	$\sqrt{xx} - 1$	$\frac{x}{(x-1)^2}$
e.	x^3	$1 + \frac{1}{x}$	$1 + \frac{1}{x^3}$
f.	$\frac{1}{x}$	\sqrt{x}	$\sqrt{\frac{1}{x}}$

14. Copie y complete la siguiente tabla.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
<hr/>			
a.	$\frac{1}{x-1}$	$ x $	$\left \frac{1}{x-1} \right $
b.	$x+2$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x+1}$
c.	x^2	\sqrt{x}	$ x $
d.	\sqrt{x}	x^2	$ x $

15. Evalúe cada expresión utilizando la siguiente tabla de valores.

a. $f(g(-1)) = f(0) = -2$

b. $g(f(0)) = g(-2) = 2$

c. $f(f(-1)) = f(0) = -2$

d. $g(g(2)) = g(0) = 0$

e. $g(f(-2)) = g(1) = -1$

f. $f(g(1)) = f(-1) = 0$

16. Evalúe cada expresión con el uso de las funciones.

$$f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a. $f(g(0)) = f(0 - 1) = 2 + 1 = 3$

b. $g(f(0)) = g(2) = 1$

c. $g(g(-1)) = g(1) = 0$

d. $f(f(2)) = f(0) = 2$

e. $g(f(0)) = g(2) = 1$

f. $f(g(1/2)) = f(-1/2) = 5/2$

En los ejercicios 17 y 18, (a) escriba fórmulas para $f \circ g$ y $g \circ f$, luego determine (b) el dominio y (c) el rango de cada una.

17. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Respuesta.- Para $f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$ de donde el dominio viene dado por $x > 0 \wedge x \leq -1$, y el rango viene dado por $f(x) \geq 0$. Luego para $g \circ f = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ de donde el dominio es $x > -1$ y el rango $\forall \mathbb{R}, x \neq 0$.

18. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- Para $f(1 - \sqrt{x}) = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + |x|$ el dominio viene dado por $x \geq 0$ y el rango por $f(g(x)) \geq 0$.
Luego para $g(x^2) = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$ el dominio viene dado por $x \geq 0$ y el rango $g(f(x)) \geq 1$.

19. Sea $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Determine una función $y = g(x)$ de modo que $(f \circ g)(x) = x$.

Respuesta.- Sea $f(g(x)) = x$ entonces $\frac{g(x)}{g(x)-2} = x$ ó $\frac{y}{y-2} = x$ por lo tanto $y = g(x) = \frac{-2x}{1-x}$.

20. Sea $f(x) = 2x^3 - 4$. Determine una función $y = g(x)$ de modo que $(f \circ g)(x) = x + 2$.

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio tenemos que $2y^3 - 4 = x + 2$ de donde nos queda

$$y = g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$$

Traslación de gráficas.

21. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = -x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Escriba las ecuaciones de las gráficas nuevas.

Respuesta.-

a) $y = -(x + 7)^2$

b) $y = -(x - 4)^2$

- 22.** La siguiente figura muestra la gráfica de $y = x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Escriba las ecuaciones de las gráficas nuevas.

Respuesta.-

a) $y = x^2 + 3$

b) $x^2 - 5$

- 23.** Relacione las ecuaciones listadas en los incisos a) a d) con las gráficas de la figura.

Respuesta.-

a) $y = (x - 1)^2 - 4 =$ Posición 4.

b) $y = (x - 2)^2 + 2 =$ Posición 1.

c) $y = (x + 2)^2 + 2 =$ Posición 2.

d) $y = (x + 3)^2 - 2 =$ Posición 3.

- 24.** La siguiente figura muestra la gráfica de $y = -x^2$ desplazada a cuatro posiciones nuevas. Escriba una ecuación para cada nueva gráfica.

Respuesta.-

a) $y = -(x - 1)^2 + 4$

b) $y = -(x + 2)^2 + 3$

c) $y = -(x + 4)^2 - 1$

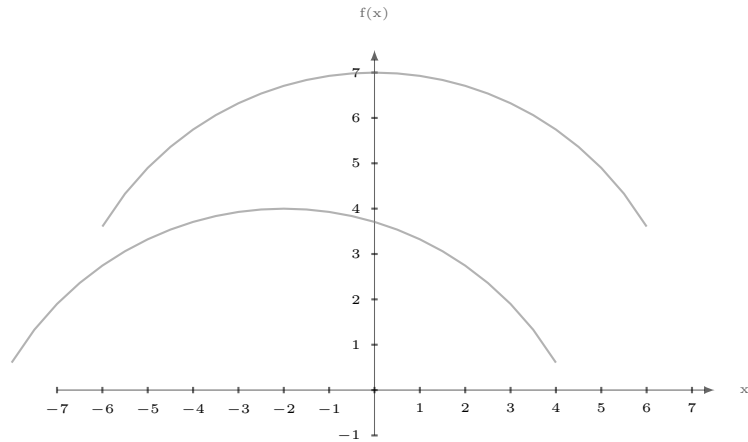
d) $y = -(x - 2)^2$

En los ejercicios 25 a 34 se establece cuántas unidades y en qué direcciones se trasladarán las gráficas de las ecuaciones dadas. Proporcione una ecuación para la gráfica desplazada: después, en el mismo plano cartesiano, trace la gráfica de la función original y la gráfica de la ecuación desplazada, anotando junto a cada gráfica la ecuación que le corresponda.

25. $x^2 + y^2 = 49$ abajo 3, izquierda 2.

Respuesta.-

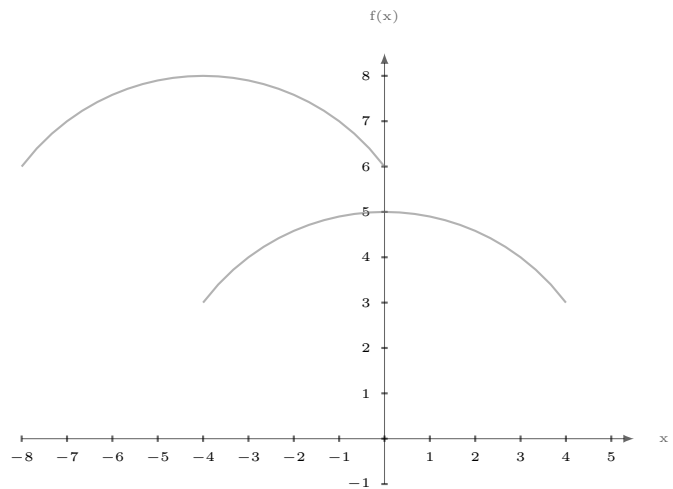
$$y = \sqrt{49 - (x + 2)^2} - 3 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$$



26. $x^2 + y^2 = 25$ Arriba 3, izquierda 4

Respuesta.-

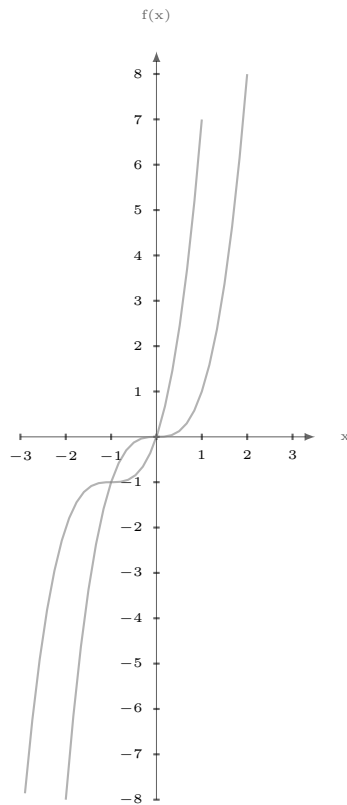
$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$$



27. $y = x^3$ Izquierda 1, abajo 1.

Respuesta.-

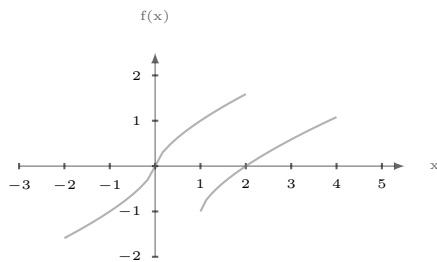
$$y = (x + 1)^3 - 1$$



28. $y = x^{2/3}$ Derecha 1, abajo 1

Respuesta.-

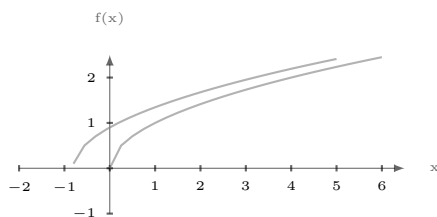
$$y = (x - 1)^{2/3} - 1$$



29. $y = \sqrt{x}$ Izquierda 0.81

Respuesta.-

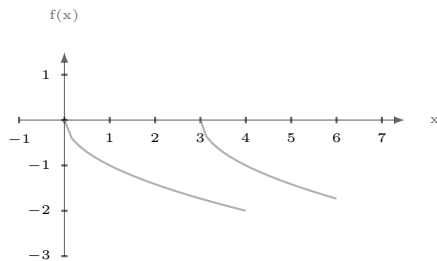
$$\sqrt{x + 0,81}$$



30. $y = -\sqrt{x}$ Derecha 3

Respuesta.-

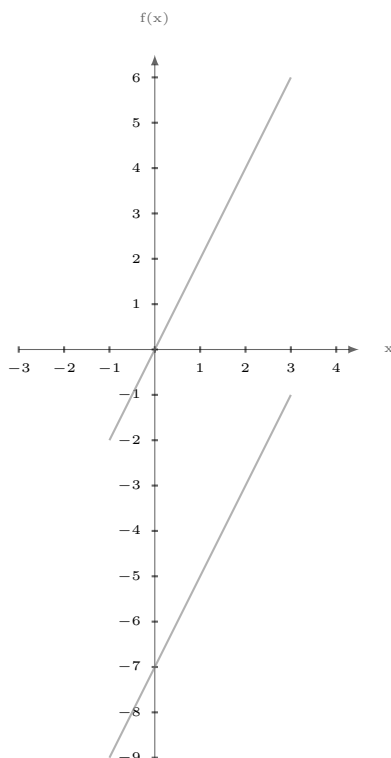
$$y = -\sqrt{x-3}$$



31. $y = 2x - 7$ Arriba 7

Respuesta.-

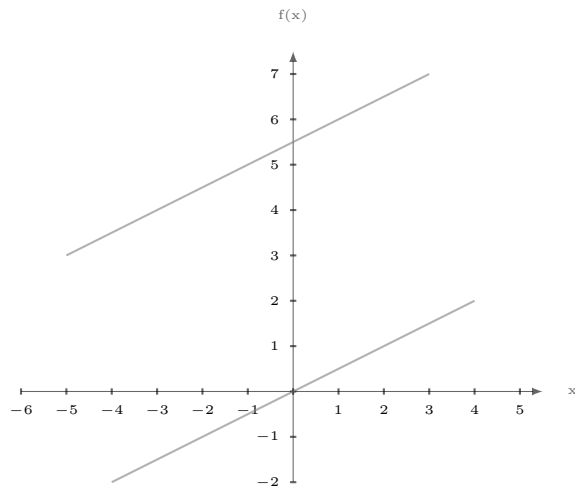
$$y = 2x$$



32. $y = \frac{1}{2}(x+1) + 5$ Abajo 5, derecha 1

Respuesta.-

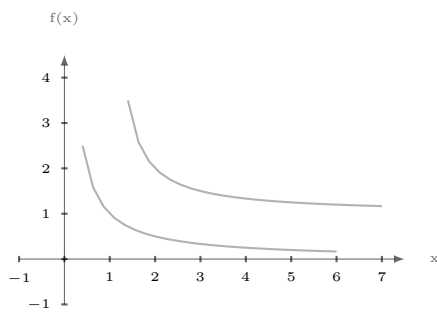
$$y = \frac{1}{2}x$$



33. $y = \frac{1}{x}$ Arriba 1, derecha 1

Respuesta.-

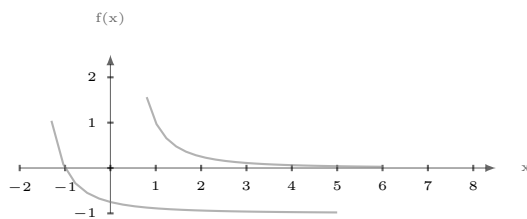
$$y = \frac{1}{x-1} + 1$$



34. $y = \frac{1}{x^2}$ Izquierda 2, abajo 1

Respuesta.-

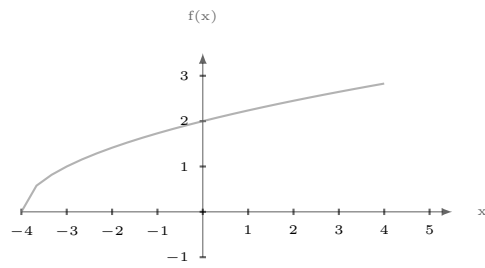
$$y = \frac{1}{(x+2)^2} - 1$$



Grafique las funciones de los ejercicios 35 a 54

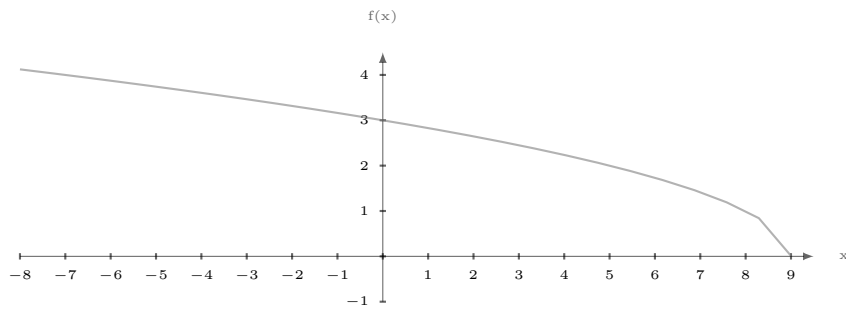
35. $y = \sqrt{x+4}$

Respuesta.-



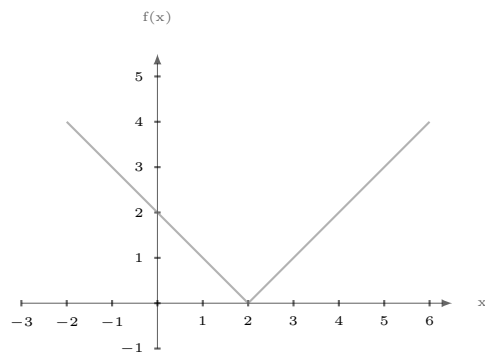
36. $y = \sqrt{9-x}$

Respuesta.-



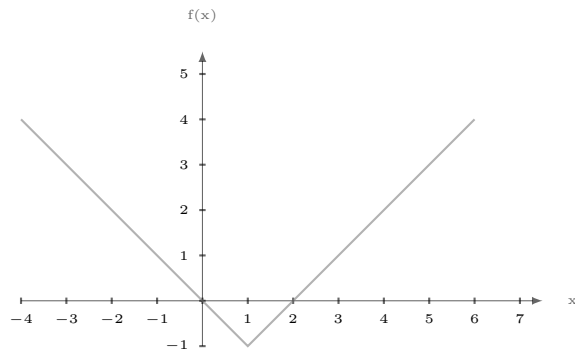
37. $y = |x-2|$

Respuesta.-



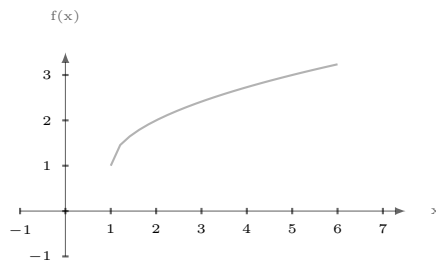
38. $y = |1-x| - 1$

Respuesta.-



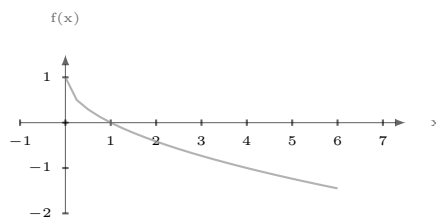
39. $y = 1 + \sqrt{x-1}$

Respuesta.-



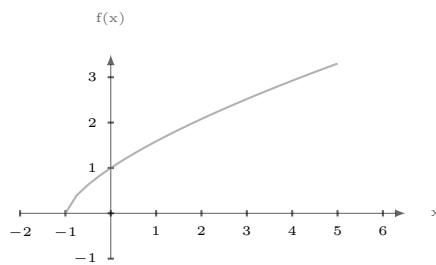
40. $y = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.-



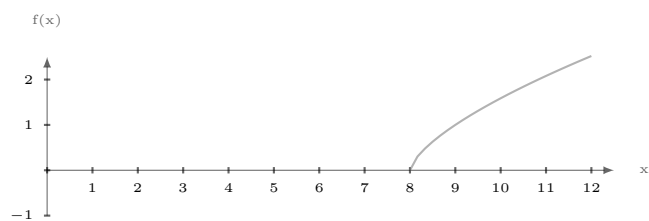
41. $y = (x+1)^{2/3}$

Respuesta.-



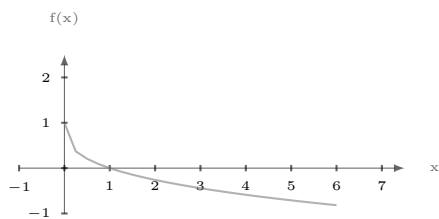
42. $y = (x - 8)^{2/3}$

Respuesta.-



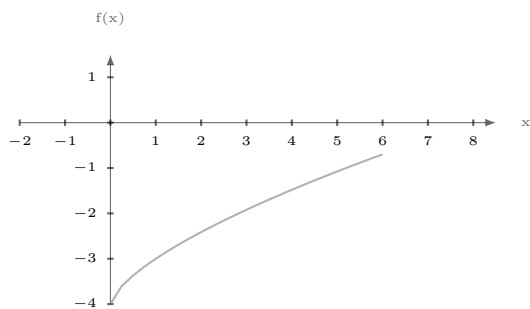
43. $y = 1 - x^{2/3}$

Respuesta.-



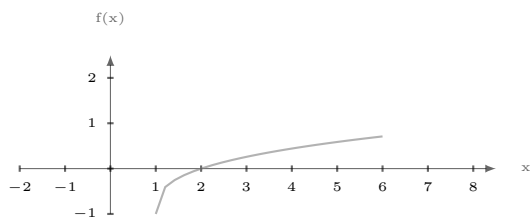
44. $y + 4 = x^{2/3}$

Respuesta.-



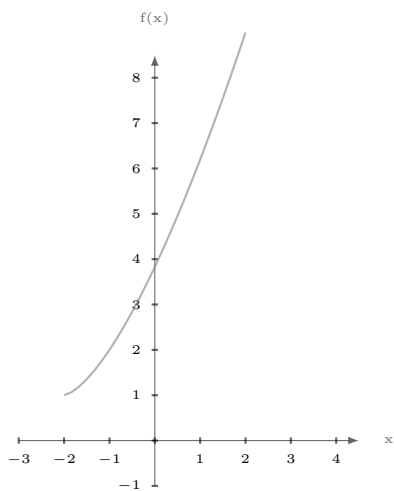
45. $y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$

Respuesta.-



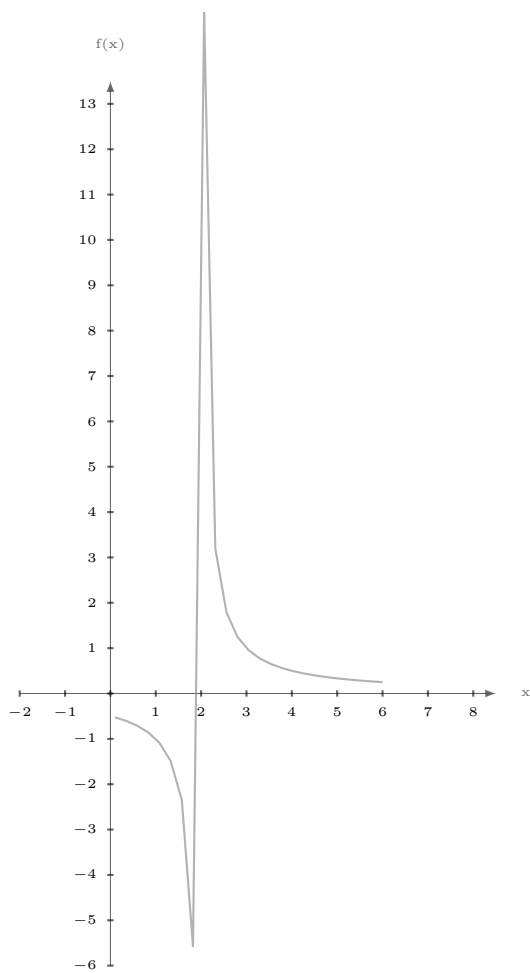
46. $y = (x + 2)^{3/2} + 1$

Respuesta.-



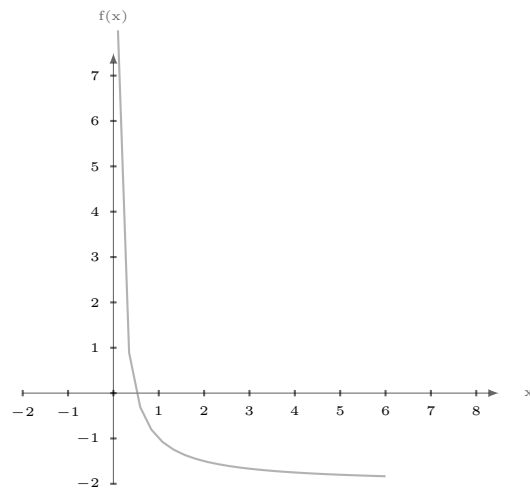
47. $y = \frac{1}{x - 2}$

Respuesta.-



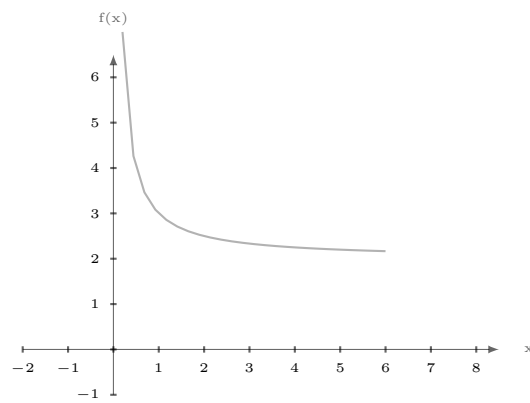
48. $y = \frac{1}{x} - 2$

Respuesta.-



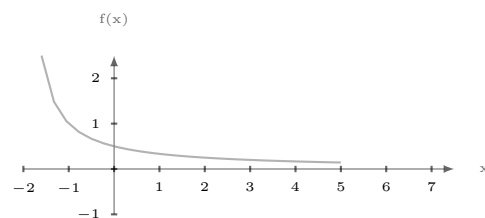
49. $y = \frac{1}{x} + 2$

Respuesta.-



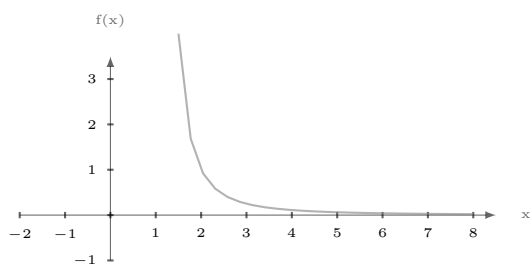
50. $y = \frac{1}{x+2}$

Respuesta.-



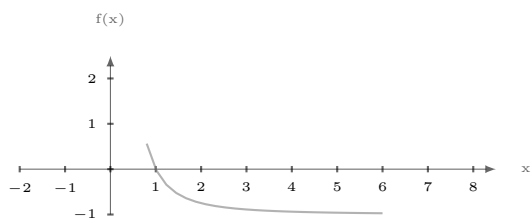
51. $y = \frac{1}{(x-1)^2}$

Respuesta.-



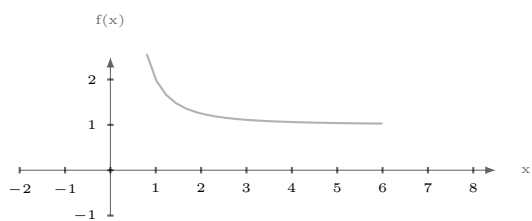
52. $y = \frac{1}{x^2} - 1$

Respuesta.-



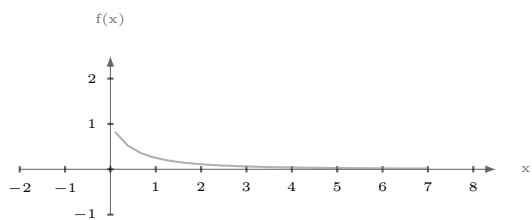
53. $y = \frac{1}{x^2} + 1$

Respuesta.-



54. $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

Respuesta.-



55. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ con dominio $[0, 2]$ y rango $[0, 1]$. Determine los dominios y los rangos de las siguientes funciones, y trace sus gráficas.

a) $f(x) + 2$

Respuesta.- El dominio viene dado por $[0, 2]$ y el rango por $[2, 3]$

b) $f(x) - 1$

Respuesta.- El dominio es $[0, 2]$ y el rango $[-1, 0]$.

c) $2f(x)$

Respuesta.- El dominio es $[0, 2]$ y el rango $[0, 2]$.

d) $-f(x)$

Respuesta.- El dominio es $[0, 2]$ y el rango $[-1, 0]$.

e) $f(x + 2)$

Respuesta.- El dominio es $[-2, 0]$ y el rango $[0, 1]$.

f) $f(x - 1)$

Respuesta.- El dominio es $[1, 3]$ y el rango $[0, 1]$.

g) $f(-x)$

Respuesta.- El dominio es $[-2, 0]$ y el rango $[0, 1]$.

h) $-f(x + 1) + 1$

Respuesta.- El dominio es $[-1, 1]$ y el rango $[0, 1]$.

56. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $g(t)$ con dominio $[-4, 0]$ y rango $[-3, 0]$. Determine los dominios y los rangos de las siguientes funciones, y trace sus gráficas.

a) $g(-t)$

Respuesta.- $D : [0, 4]$; $R : [-3, 0]$

b) $-g(t)$

Respuesta.- $D : [-4, 0]$; $R : [0, 3]$

c) $g(t) + 3$

Respuesta.- $D : [-4, 0]$; $R : [0, 3]$

d) $1 - g(t)$

Respuesta.- $D : [-4, 0]$; $R : [1, 4]$

e) $g(-t + 2)$

Respuesta.- $D : [-2, 2]$; $R : [-3, 0]$

f) $g(t - 2)$

Respuesta.- $D : [-2, 2]$; $R : [-3, 0]$

g) $g(1 - t)$

Respuesta.- $D : [-1, 3]$; $R : [-3, 0]$

h) $-g(t - 4)$

Respuesta.- $D : [0, 4]$; $R : [0, 3]$

Cambio de escala vertical y horizontal

En los ejercicios 57 a 66 se indica por qué factor y en qué dirección se estirarán o comprimirán las gráficas de las funciones dadas. Proporcione una ecuación para cada gráfica estirada o comprimida.

57. $y = x^2 - 1$ estirada verticalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = 3(x^2 - 1)$

58. $y = x^2 - 1$, comprimida horizontalmente por un factor de 2

Respuesta.- $y = \frac{x^2 - 1}{2}$

59. $y = 1 + \frac{1}{x^2}$, comprimida verticalmente por un factor de 2

Respuesta.- $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$

60. $y = 1 + \frac{1}{x^2}$, estirada horizontalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = 1 + \frac{3}{x^2}$

61. $y = \sqrt{x+1}$, comprimida horizontalmente por un factor de 4

Respuesta.- $y = \sqrt{\frac{x}{4} + 1}$

62. $y = \sqrt{x+1}$, estirada verticalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = 3\sqrt{x+1}$

63. $y = \sqrt{4-x^2}$, estirada horizontalmente por un factor de 2

Respuesta.- $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{2}}$

64. $y = \sqrt{4-x^2}$, comprimida verticalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = \frac{1}{3}\sqrt{4-x^2}$

65. $y = 1 - x^3$, comprimida horizontalmente por un factor de 3

Respuesta.- $y = 1 - 2x^3$

66. $y = 1 - x^3$, estirada horizontalmente por un factor de 2

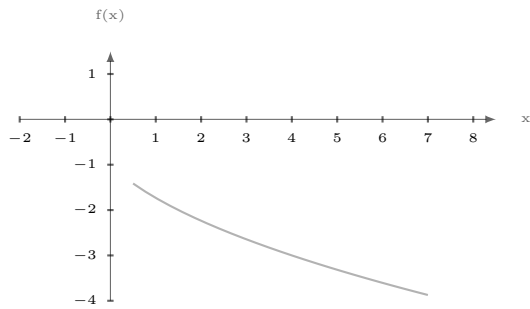
Respuesta.- $y = 2 - 2x^3$

Graficación

En los ejercicios 67 a 74, trace la gráfica de cada función, pero sin localizar puntos; esto es, utilice la gráfica de una de las funciones estándar presentadas en las figuras 1,14 a 1,17 y aplique la transformación adecuada.

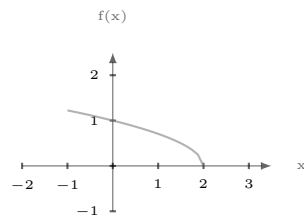
67. $y = -\sqrt{2x+1}$

Respuesta.-



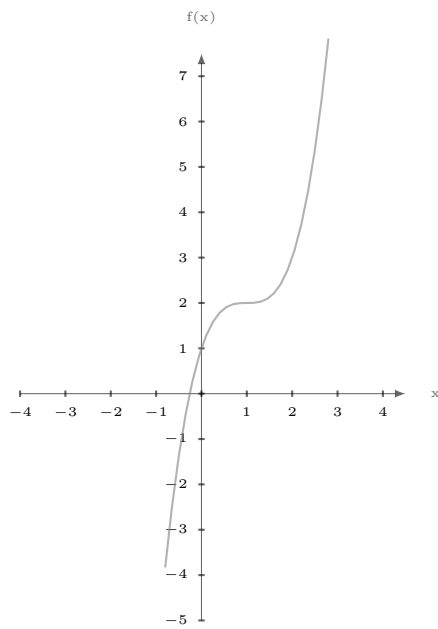
68. $y = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$

Respuesta.-



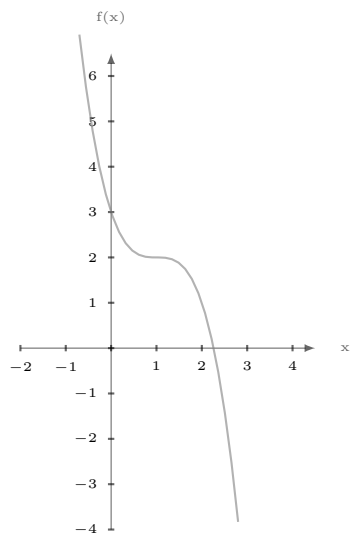
69. $y = (x - 1)^3 + 2$

Respuesta.-



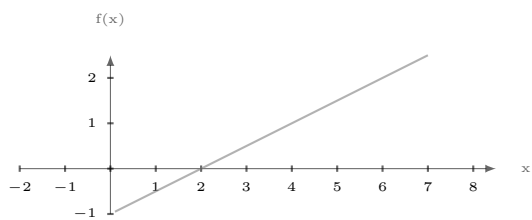
70. $y = (1 - x)^3 + 2$

Respuesta.-



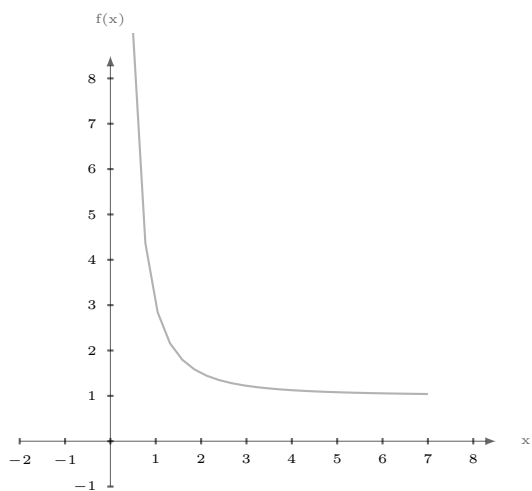
71. $y = \frac{1}{2x} - 1$

Respuesta.-



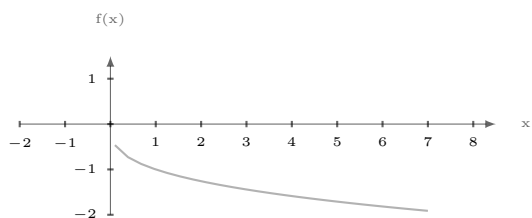
72. $y = \frac{2}{x^2} + 1$

Respuesta.-



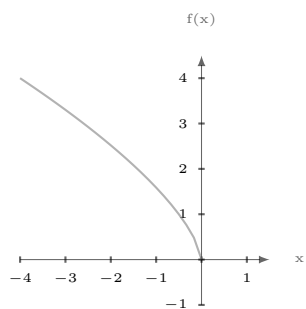
73. $y = -\sqrt[3]{x}$

Respuesta.-



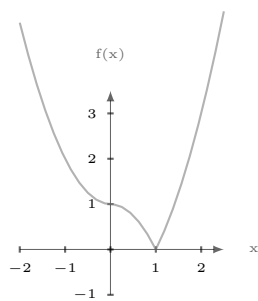
74. $y = (-2x)^{2/3}$

Respuesta.-



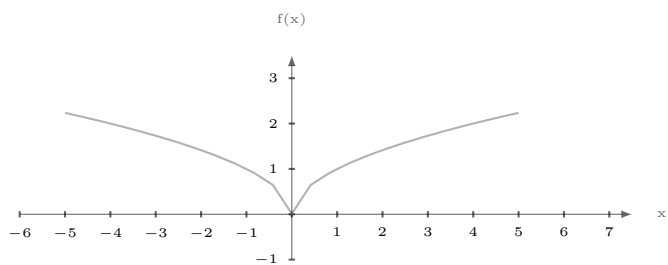
75. $y = |x^2 - 1|$

Respuesta.-



76. $y = \sqrt{|x|}$

Respuesta.-



Combinación de funciones

77. Suponga que f es una función par, g es una función impar y ambas, f y g , están definidas en toda la recta real $(-\infty, \infty)$. ¿Cuáles de las siguientes funciones (donde están definidas) son pares? ¿Cuáles son impares?.

a) fg , es impar.

b) f/g , es impar.

c) g/f , es impar.

d) $f^2 = ff$, es par.

e) $g^2 = gg$, es par.

f) $f \circ g$, es par.

g) $g \circ f$, es par.

h) $f \circ f$, es par.

i) $g \circ g$, es impar.

Esto por Michael Spivak, Calculus I.

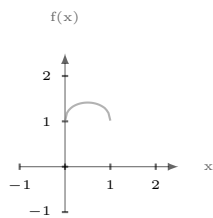
78. ¿Una función puede ser par e impar al mismo tiempo? Justifique su respuesta.

Respuesta.- Se define como función par a $f(x) = f(-x)$ y función impar como $f(-x) = -f(x)$ de donde $f(x) \neq -f(x)$ el cual nos indica que no puede ser par e impar al mismo tiempo ya que son contrarias y no compatibles.

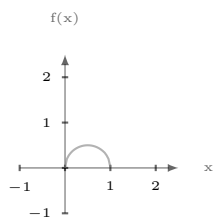
79. (Continuación del ejemplo 1). Trace las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$ junto con a) su suma, b) su producto, c) sus dos restas, d) sus dos cocientes.

Respuesta.-

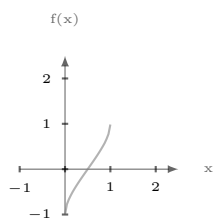
■ $\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$



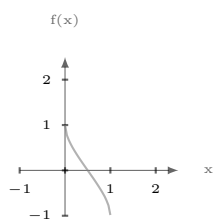
■ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}$



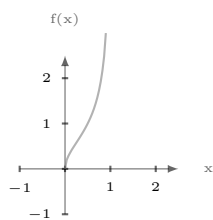
■ $\sqrt{x} - \sqrt{1-x}$



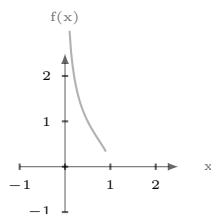
■ $\sqrt{1-x} - \sqrt{x}$



■ $\sqrt{x} / \sqrt{1-x}$

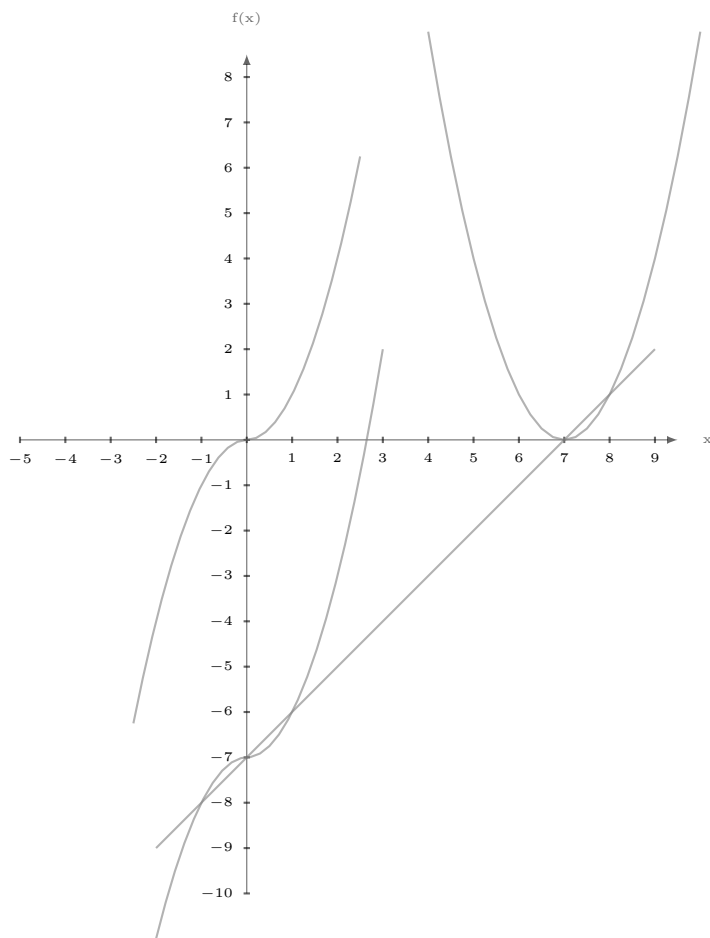


■ $\sqrt{1-x} / \sqrt{x}$



80. Sean $f(x) = x - 7$ y $g(x) = x^2$. Trace las gráficas de f y g junto con $f \circ g$ y $g \circ f$

Respuesta.-



1.3. Funciones trigonométricas

Definición 1.7

$$s = r \cdot \theta$$

s es el arco subtendido por el ángulo central.

r es el radio de la circunferencia.

θ es el ángulo en radianes.

Definición 1.8 Una función $f(x)$ es periódica si existe un número positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo valor de x . El menor de los valores posibles de p es el periodo de f .

Propiedad 1.1

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta = 1$$

Propiedad 1.2 (Suma de ángulos)

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Propiedad 1.3 (Doble de un ángulo)

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Propiedad 1.4 (Mitad de un ángulo)

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Propiedad 1.5 (Ley de cosenos)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Propiedad 1.6 (Desigualdades especiales)

$$-|\theta| \leq \sin \theta \leq |\theta| \quad y \quad -|\theta| \leq 1 - \cos \theta \leq |\theta|$$

1.3. Ejercicios

Radianes y grados

1. En una circunferencia con radio de 10 m, ¿Cuál es la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de a) $4\pi/5$ radianes y b) 110° ?

Respuesta.- Para a) se tiene $s = 10 \cdot 4\pi/5 = 8\pi$, luego para b) se tiene $s = 10 \cdot 110^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{55}{9}\pi$

2. Un ángulo central en una circunferencia de radio 8 está subtendido por un arco cuya longitud es de 10π . Determine la medida del ángulo en radianes y en grados.

Respuesta.- Sea $s = r \cdot \theta$ entonces $\theta = \frac{s}{r}$ de donde $\theta = \frac{10\pi}{8} = \frac{5\pi}{4}$ radianes, luego $\frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ$

- 3.** Se desea construir un ángulo de 80° formando un arco en el perímetro de un disco de 12 pulgadas de diámetro, y dibujando rectas de los extremos del arco al centro del disco. ¿De qué longitud debe ser el arco, redondeando a décimos de pulgada?.

Respuesta.- Sea $r = 6 \text{ pulg}$ y $\theta = 80^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{4}{9}\pi$ entonces

$$s = 6 \cdot \frac{4}{9}\pi = \frac{8}{3}\pi = 8,4 \text{ pulg}$$

- 4.** Si una rueda de 1 m de diámetro se hace rodar hacia adelante 30 cm sobre el suelo, ¿qué ángulo girará? Dé su respuesta en radianes (redondeando al décimo más cercano) y en grados (redondeando al grado más cercano).

Respuesta.- Sea $r = 50\text{cm}$ y $s = 30\text{cm}$ entonces

$$\theta = \frac{30 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = \frac{3}{5} \text{ rad.}$$

Luego convertimos a grado de la siguiente manera

$$\theta = \frac{3}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 34^\circ 37'$$

Evaluación de funciones trigonométricas

- 5.** . Complete la siguiente tabla con los valores de la función. Si la función no está definida en el ángulo dado, indíquelo con la leyenda “IND”. No use calculadora ni tablas.

θ	$-\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$
$\text{sen } \theta$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{cos } \theta$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\text{tan } \theta$	0	$\sqrt{3}$	0	IND	-1
$\text{cot } \theta$	IND	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	IND	0	-1
$\text{sec } \theta$	-1	-2	1	IND	$-\sqrt{2}$
$\text{csc } \theta$	IND	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	IND	1	$\sqrt{2}$

6. . Complete la siguiente tabla con los valores de la función. Si la función no está definida en el ángulo dado, indíquelo con la leyenda “IND”. No use calculadora ni tablas.

θ	$-3\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	$\pi/4$	$4\pi/6$
$\text{sen } \theta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{cos } \theta$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\text{tan } \theta$	0	$\sqrt{3}$	0	IND	-1
$\text{cot } \theta$	IND	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	IND	0	-1
$\text{sec } \theta$	-1	-2	1	IND	$-\sqrt{2}$
$\text{csc } \theta$	IND	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	IND	1	$\sqrt{2}$

En los ejercicios 7 a 12, uno de los valores $\text{sen } x$, $\text{cos } x$ y $\text{tan } x$ está dado. Determine los otros dos si x se encuentra en el intervalo indicado.

7. $\text{sen } x = \frac{3}{5}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Respuesta.- Por le teorema de Pitágoras $r^2 = x^2 + y^2 \implies x^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = \sqrt{16} = 4$ luego $\text{cos } x = -\frac{4}{5}$, $\text{tan } x = -\frac{3}{4}$

8. $\text{tan } x = 2$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Respuesta.- $\text{sen } x = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\text{cos } x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

9. $\text{cos } x = \frac{1}{3}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Respuesta.- $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$; $\text{tan } x = -\sqrt{8}$

10. $\text{cos } x = -\frac{5}{13}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Respuesta.- $y^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \implies y = 12$ por lo tanto $\text{sen } x = \frac{12}{13}$, $\text{tan } x = -\frac{12}{5}$

11. $\text{tan } x = \frac{1}{2}$, $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Respuesta.- $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

12. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}, x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Respuesta.- $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \frac{1}{\sqrt{3}}$

Gráfica de funciones trigonométricas.

Grafique las funciones de los ejercicios 13 a 22. ¿Cuál es el periodo de cada función?.

13. $\operatorname{sen} 2x$

La gráfica se tiene en el apartado python.

14. $\operatorname{sen}(x/2)$

La gráfica se tiene en el apartado python.

15. $\cos \pi x$

La gráfica se tiene en el apartado python.

16. $\cos \frac{\pi x}{2}$

La gráfica se tiene en el apartado python.

17. $-\operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}$

La gráfica se tiene en el apartado python.

18. $-\cos 2\pi x$

La gráfica se tiene en el apartado python.

19. $\cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

La gráfica se tiene en el apartado python.

20. $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

La gráfica se tiene en el apartado python.

21. $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

La gráfica se tiene en el apartado python.

22. $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$

La gráfica se tiene en el apartado python.