Coherencia wavelet, una herramienta para el análisis dinámico entre series temporales.

Christian Paredes Aguilera

En colaboración con:

Gabriel Rosario Roselló
Jorge Valero

XI Congreso InvestMat

10 Enero 2024

1. Introducción
2. Construcción
3. Resultados de datos empíricos
4. Conclusión
5. Bibliografía

Introducción

Existen diversas técnicas, para analizar completamente dos variables a lo largo del tiempo:

- Coeficiente de correlación de Pearson $\rightarrow$ **Correlación**.
- Series de Fourier $\rightarrow$ **Frecuencia**.
- Causalidad de Granger $\rightarrow$ **Causalidad**.

¿Existe otra técnica que sea capaz de análisis conjuntamente la Correlación, la Frecuencia, la Causalidad y más?

SI!!!

WAVELETS: Coherencia wavelet y diferencia de fase.

Ventajas de usar wavelets en series de tiempo:

- Resolución en tiempo y frecuencia.
- Análisis multiescala.
- Manejo de datos no estacionarios.

Cuando hablamos de coherencia wavelet, nos referimos a una relación dinámica.

Definición

La coherencia wavelet entre dos series de tiempo $x(t)$ e $y(t)$ es una función de tiempo y escala definida por:

$$R_{xy}^2(\tau, s) = \frac{\left| S\left(s^{-1} W_{xy;\psi(\tau,s)}\right) \right|^2}{S\left(s^{-1} \left|W_{x;\psi}(\tau, s)\right|^2\right) S\left(s^{-1} \left|W_{y;\psi}(\tau, s)\right|^2\right)} \tag{1}$$

Demos un ejemplo:

Café vs. πzzas

$$\frac{\left|S\left(s^{-1}W_{xy;\psi(\tau,s)}\right)\right|^2}{S\left(s^{-1}\left|W_{x;\psi}(\tau,s)\right|^2\right)S\left(s^{-1}\left|W_{y;\psi}(\tau,s)\right|^2\right)}$$

En pocas palabras la coherencia

wavelet es el grado con el que **correlacionan** dos series de temporales en función del **tiempo** y la **frecuencia**.

Objetivo

Ahora, para hablar de **causalidad**, necesitamos definir **diferencia de fase**. Que será el objetivo de esta presentación, seguido de detallar los **datos** analizados y presentar **resultados** empíricos.

La **transformada de wavelet cruzada** de dos series de tiempo $x(t)$ y $y(t)$ se define como:

Definición

$$W_{xy;\psi}(\tau, s) = W_{x;\psi}(\tau, s)W_{y;\psi^*}(\tau, s) \qquad (2)$$

La **diferencia de fase** entre $x(t)$ y $y(t)$ se define como:

Definición

$$\phi_{xy} = \tan^{-1}\left(\frac{\Im\left\{S\left(s^{-1}W_{xy;\psi}(\tau,s)\right)\right\}}{\Re\left\{S\left(s^{-1}W_{xy;\psi}(\tau,s)\right)\right\}}\right), \quad con \quad \varphi_{xy} \in [-\pi,\pi]. \qquad (3)$$

Donde $\Im$ y $\Re$ son las partes imaginarias y reales de la transformada de wavelet cruzada suavizada, respectivamente.

Podemos convertir la diferencia de fase en el **retraso de tiempo instantáneo** entre $x(t)$ y $y(t)$ de la siguiente manera:

$$(\Delta t)_{xy} = \frac{\phi_{xy}}{2\pi f}, \tag{4}$$

Donde $2\pi f$ es la frecuencia angular con respecto a la escala de tiempo s, y la frecuencia de Fourier usual f se da por:

$$f = \frac{\omega_\psi}{2\pi s}, \tag{5}$$

Por lo tanto, el retraso de tiempo $(\Delta t)_{xy}$ se da finalmente por:

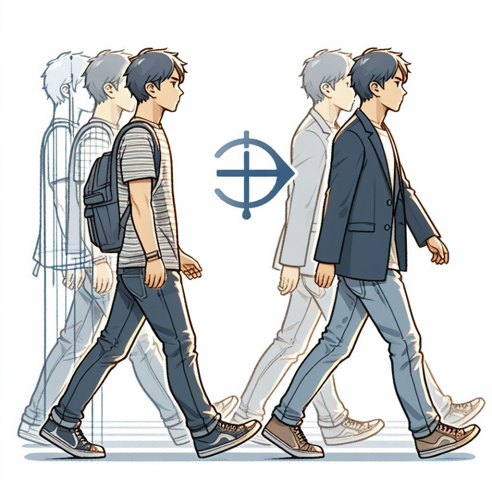
$$(\Delta t)_{xy} = \frac{\varphi_{xy} \cdot s}{2\pi}, \tag{6}$$

Las diferencias de fase se representan como flechas en los gráficos de coherencia de wavelet. La dirección de las flechas tiene los siguientes significados:

- **Flechas apuntando a la derecha:** $x(t)$ y $y(t)$ están en fase (o relacionadas positivamente).
- **Flechas apuntando a la izquierda:** $x(t)$ y $y(t)$ están fuera de fase (o relacionadas negativamente).
- **Flechas apuntando hacia arriba:** $x(t)$ adelanta a $y(t)$ en un cuarto de la escala correspondiente o se retrasa detrás de $y(t)$ en tres cuartos de la escala correspondiente.
- **Flechas apuntando en otras direcciones:** indican retrasos o adelantos entre $x(t)$ y $y(t)$.

Las diferencias de fase también pueden sugerir causalidad entre $x(t)$ y $y(t)$.

Construcción
Ejemplo



Resultados de datos empíricos

Descripción de datos

Utilizamos datos mensuales de la Unión Europea a partir de enero de 1997 hasta octubre de 2023. Extraídos del Banco Central de Europa, de las variables:

- **Crecimiento de dinero (HIPC)**.
- **Inflación (M1)**.

Resultados de datos empíricos

Gráficos de series de tiempo

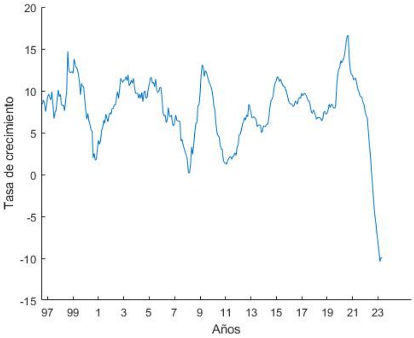


Figura: Señal relativa al agregado monetario M1. Elaboración propia.

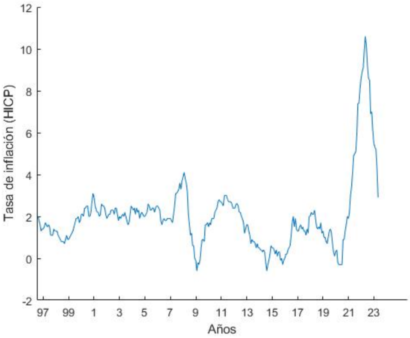


Figura: Señal relativa al HICP (Harmonised Index of Consumer Prices). Elaboración propia.

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Resultados de datos empíricos

Series de Fourier

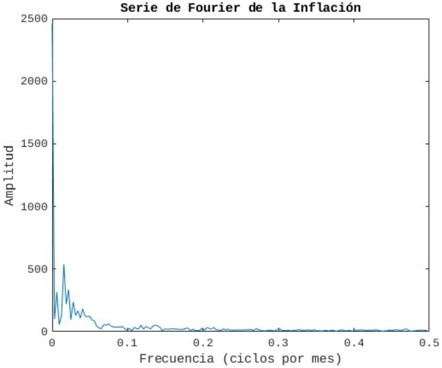


Figura: Transformada de Fourier de agregado monetario M1. Elaboración propia.

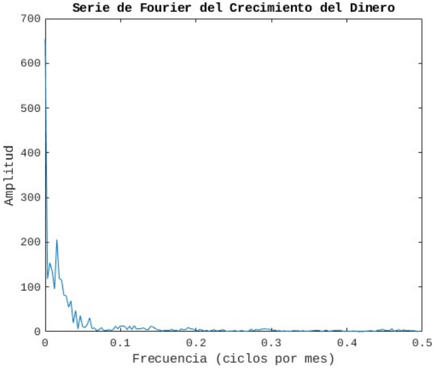


Figura: Transformada de Fourier de HICP (Harmonised Index of Consumer Prices). Elaboración propia.

H0	Decision	Distribution
Exclude lagged Y1 in Y2 equation	Cannot reject H0	Chi2(10)

Statistic	PValue
14.14	0.16671

CriticalValue
18.307

Cuadro: Resultados de la prueba de causalidad de Granger. Elaboración propia.

Resultados de datos empíricos

Coherencia Wavelet y diferencia de fase

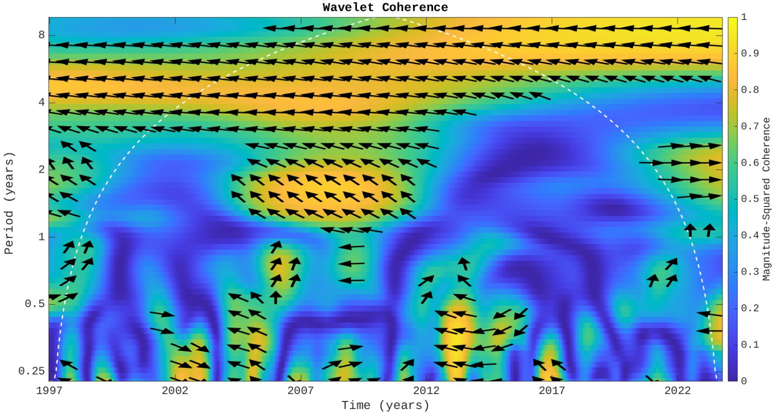


Figura: Transformada de Fourier de HICP (Harmonised Index of Consumer Prices). Elaboración propia.

Conclusión

La **Coherencia Wavelet** y su complemento la Diferencia de Fase son técnicas poderosas para el análisis de series de tiempo. Permiten analizar la correlación en tiempo y frecuencia, así como la relación causal entre dos variables. A diferencia de otras técnicas como la correlación de Pearson, la transformada de Fourier y la causalidad de Granger, estas proporcionan una visión más dinámica de las relaciones entre las series de tiempo. Son especialmente útiles para manejar datos no estacionarios y proporcionar una visión detallada de cómo las relaciones entre las variables cambian con el tiempo y a diferentes frecuencias.

Fin

¡Muchas gracias por vuestra atención!

Bibliografía

- Aguiar-Conraria, L., Azevedo, N. & Soares, M.J., *Using wavelets to decompose the time-frequency effects of monetary policy*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **387** (2008), pp., 2863-2878.
- Jiang, C., Chang, T., Li XL., *Money growth and inflation in China: New evidence from a wavelet analysis*, International Review of Economics & Finance **35**, (2015), pp. 249-261.
- Torrence C. & Compo, G., *A Practical Guide to wavelet analysis*, Bulletin of the American Meteorological Society **79** (1998), pp., 61-78.
- European Central Bank