

Universidad: **Mayor de San Andrés.**
 Asignatura: **Cálculo diferencial e integral II.**
 Práctica: 1.
 Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Problema 1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y \neq 0$. Si $\|x\| = \|y\|$, entonces hallar la medida del ángulo entre $\frac{1}{2}(x+y)$ e $y-x$.

Respuesta.- Ya que $x, y \neq 0$ y por el teorema de los cosenos se tiene,

$$\left\langle \frac{1}{2}(x+y), y-x \right\rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad (1)$$

Por definición de producto interno y la parte izquierda de (1),

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2}(x_i + y_i) \cdot (y_i - x_i) \right] = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = -\frac{1}{2} (\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle).$$

Así (1) quedará de la siguiente manera,

$$\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = -2\|x\| \|y\| \cos \theta.$$

Ya que $\|x\| = \|y\|$ y el teorema de cosenos. Entonces,

$$\|x\| \|x\| \cos \theta + \|y\| \|y\| \cos \theta = -2\|x\| \|x\| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta (3\|x\| \|x\| + \|y\| \|y\|) = 0$$

Por lo tanto,

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \arccos(0) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 2. Demuestre que si $x+y$ y $x-y$ son ortogonales, entonces los vectores x e y deben tener la misma longitud.

Demostración.- Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$. Por definición de ortogonalidad, se tiene

$$\langle x+y, x-y \rangle = 0.$$

Luego por definición de producto interno,

$$\sum_{i=1}^n [(x_i + y_i)(x_i - y_i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$$

$$\langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle = 0$$

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\|x\| = \|y\|$$

Ya que la norma mide el tamaño del vector entonces x e y tienen la misma longitud.

Problema 3. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si, y solamente si, x e y son ortogonales.

Demostración.- Sea $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$. Como $\langle x, y \rangle = 0$, entonces

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Problema 4. Demuestre, y dé una interpretación geométrica de, la ley del paralelogramo: Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demostración.- Ya que $x, y \in \mathbb{R}^3$ y por definición de norma, entonces

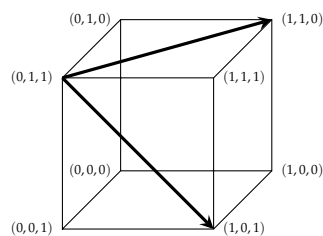
$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \left(\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \right)^2 + \left(\sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 [(x_i + y_i)(x_i + y_i)] + \sum_{i=1}^3 [(x_i - y_i)(x_i - y_i)] \\ &= \sum_{i=1}^3 (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) + \sum_{i=1}^3 (x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 + \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right) = 2(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle) \\ &= 2 \left[\left(\sqrt{\langle x, x \rangle} \right)^2 + \left(\sqrt{\langle y, y \rangle} \right)^2 \right] \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Otra manera de demostrar sería:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Problema 5. Calcule el ángulo formado por los diagonales de dos caras consecutivas de un cubo de arista igual a a .

Demostración.- Ya que se tiene un cubo. Entonces,



Luego se tiene al vector $x = (1, 0, 1) - (0, 1, 1) = (1, -1, 0)$ y $y = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) = (1, 0, -1)$, por lo tanto el ángulo será:

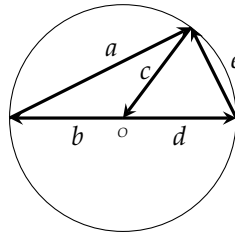
$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle (1, -1, 0), (1, 0, -1) \rangle}{\|(1, -1, 0)\| \|(1, 0, -1)\|} \\ &= \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Problema 6. Demuestre que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Demostración.- Representamos la idea con la siguiente gráfica.



Donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^n$ y O el centro de la circunferencia, por lo tanto los vectores b, d, c son iguales e inscritos en una semicircunferencia. Debemos demostrar que $\langle a, e \rangle = 0$.

Sean

$$a = c + b, \quad e = c + d \quad \text{y} \quad \|b\| = \|c\| = \|d\|$$

Entonces por las propiedades de producto interno tenemos,

$$\langle a, e \rangle = \langle c + b, c + d \rangle = \langle c + b, c \rangle + \langle c + b, d \rangle = \langle c, c \rangle + \langle c, b \rangle + \langle c, d \rangle + \langle b, d \rangle.$$

Ya que $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ y $b = -d$, nos queda:

$$\langle a, e \rangle = \|c\|^2 - \langle c, d \rangle + \langle c, d \rangle - \|d\|^2 = 0.$$

Problema 7. Demuestre que uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo.

Demostración.-

Problema 8. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices.

Demostración.-

Problema 9. Demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Demostración.-

Problema 10. Pruebe la ley de senos utilizando vectores.

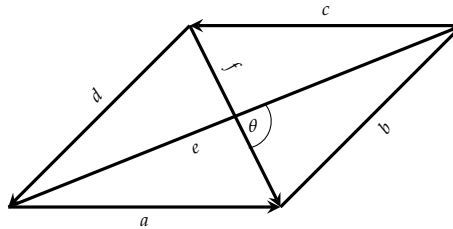
Demostración.-

Problema 11. Muestre que las medianas de un triángulo se cortan en un punto a un tercio de cada mediana.

Demostración.-

Problema 12. Demuestre que las diagonales de un rombo son ortogonales entre si.

Demostración.- Sea $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^n$, se tiene:



De donde,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle e, f \rangle}{\|e\| \|f\|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle a + b, d + a \rangle}{\|e\| \|f\|} \right).$$

Luego, ya que a, b, c, d es un rombo. Es decir, un paralelogramo de lados iguales, entonces $d = -b$ y $\|a\| = \|b\|$ así:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle a + b, -b + a \rangle}{\|e\| \|f\|} \right).$$

Por las propiedades de producto interno,

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle a, -b \rangle + \langle b, -b \rangle + \langle a, a \rangle + \langle b, a \rangle}{\|e\| \|f\|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{-\langle a, b \rangle - \langle b, b \rangle + \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle}{\|e\| \|f\|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle}{\|e\| \|f\|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\|a\|^2 - \|b\|^2}{\|e\| \|f\|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{0}{\|e\| \|f\|} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e \perp f.$$

Problema 13. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:

$$x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z.$$

Demostración.- La demos

Problema 14. Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ con $x, y \neq 0$. Si $\frac{\|x \times y\|}{\|x\|^3} = 3$, entonces hallar $\frac{\|\langle x, x \rangle y - \langle x, y \rangle x\|}{\|x\|^4}$.

Demostración.-

Problema 15. Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

Demostración.-

Problema 16. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$

Demostración.- Por el problema 13, sabemos que $x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$. Por lo tanto,

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z + \langle y, x \rangle z - \langle y, z \rangle x + \langle z, y \rangle x - \langle z, x \rangle y.$$

Luego, por la propiedad de conmutatividad concluimos que:

$$\langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z + \langle x, y \rangle z - \langle y, z \rangle x + \langle y, z \rangle x - \langle x, z \rangle y = 0.$$