Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Geometría II.**
Tarea: 1.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

---

1) $\forall\ \vec{u},\vec{v} \in V_n :\ \vec{u}+\vec{v} \in V_n.$

Demostración.- Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in V_n$ para $u_i, v_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3, ..., n$ entonces,

$$\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n)$$

de donde por axioma de cerradura de los números reales se tiene $u_i + v_i \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $\vec{u}+\vec{v} \in V_n$.

2) $\forall\ \vec{u},\vec{v} \in V_n\ :\ \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}.$

Demostración.- Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in V_n$, entonces

$$\begin{aligned}
\vec{u}+\vec{v} &= (u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n) \\
&= (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n) \\
&= (v_1+u_1, v_2+v_2, \ldots, v_n+u_n) \\
&= (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (u_1, u_2, \ldots, u_n) \\
&= \vec{v}+\vec{u}.
\end{aligned}$$

3) $\forall\ \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V_n :\ \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}.$

Demostración.- Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ entonces,

$$\begin{aligned}
\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) &= (u_1, u_2, ..., u_n) + [(v_1, v_2, ..., v_n) + (w_1, w_2, ..., w_n)] \\
&= [u_1+(v_1+w_1), u_2+(v_2+w_2), ..., u_n+(v_n+w_n)] \quad \text{D2} \\
&= [(u_1+v_1)+w_1, (u_2+v_2)+w_2, ..., (u_n+v_n)+w_n] \quad \text{axioma asociativa en } \mathbb{R} \\
&= (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}
\end{aligned}$$

5) $\forall\ \vec{u} \in V_n,\ \exists!\ (-\vec{u}) \in V_n :\ \vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{o}$

Demostración.-

Existencia. Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ entonces,

$$\begin{aligned}
\vec{u}+(-\vec{u}) &= (u_1-u_1, u_2-u_2, ..., u_n-u_n) \quad \text{D2 y definición de sustracción } (-1)\vec{u} \\
&= (0, 0, ..., 0) \\
&= \vec{o}
\end{aligned}$$

Unicidad. Supongamos que $\vec{u}, \vec{u}' \in V_n$ tal que $\vec{u} \neq \vec{u}'$ entonces $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{o}$ y $\vec{u}+(-\vec{u}') = \vec{o}$ de donde

$$-\vec{u} = -\vec{u}+\vec{o} \ \text{ y } \ -\vec{u}' = -\vec{u}+\vec{o},$$

luego por 4 tenemos

$$-\vec{u} = -\vec{u} \ \text{ y } \ -\vec{u} = -\vec{u}'$$

por lo tanto se comprueba la unicidad de $-\vec{u}$.