

---

## CONVEXIDAD Y OPTIMIZACIÓN

### ENTREGA A

Christian Limbert Paredes Aguilera

Latex Source: <https://github.com/soyfode/matematicas/blob/master/investmat/src/convexOpt/tareas/entrega1.tex>

---

## CAPÍTULO 2

**Ejercicio 1.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones convexas cuyo dominio es  $\mathbb{R}^n$ . Se define su convolución ínfima (infimal convolution) como

$$h(x) = (f \diamond g)(x) := \inf \{f(y) + g(z) : y + z = x\}.$$

**Demuestra que el epígrafo de  $h$  es un conjunto convexo.**

**Demostración.-** Para demostrar que el epígrafo de  $h$  es un conjunto convexo, necesitamos mostrar que para cualquier par de puntos en el epígrafo de  $h$ , la línea que los conecta también está en el epígrafo de  $h$ .

Dado que  $f$  y  $g$  son funciones convexas, sus epígrafos son conjuntos convexas<sup>1</sup>. Esto significa que para cualquier par de puntos en el epígrafo de  $f$  o  $g$ , la línea que los conecta también está en el epígrafo de  $f$  o  $g$ .

Comenzamos considerando dos puntos arbitrarios  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$  en el epígrafo<sup>2</sup> de  $h$ . Entonces, si  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$  están en el epígrafo de  $h$ , esto significa que  $t_1$  y  $t_2$  son mayores o iguales que el valor de  $h$  en  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente. Es decir,

$$t_1 \geq h(x_1) = \inf \{f(y) + g(z) : y + z = x_1\}.$$

$$t_2 \geq h(x_2) = \inf \{f(y) + g(z) : y + z = x_2\}.$$

Además,  $h$  se define como la convolución ínfima de  $f$  y  $g$ , es decir,

$$h(x) = (f \diamond g)(x) := \inf \{f(y) + g(z) : y + z = x\}.$$

Esto significa que para cada punto  $x$ , buscamos el valor mínimo de

$$f(y) + g(z) \text{ donde } y + z = x.$$

---

<sup>1</sup>Teorema:  $f$  es convexa sii  $\text{Epi}(f)$  es convexo.

<sup>2</sup>Recordemos que el epígrafo de una función es el conjunto de puntos que están por encima del gráfico de la función.

Entonces, si  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$  están en el epígrafo de  $h$ , esto significa que existen  $y_1, z_1, y_2, z_2$  tal que

$$y_1 + z_1 = x_1, \quad y_2 + z_2 = x_2, \quad f(y_1) + g(z_1) \leq t_1 \quad y \quad f(y_2) + g(z_2) \leq t_2.$$

En otras palabras, podemos encontrar puntos  $y_1, z_1, y_2, z_2$  tal que la suma de sus imágenes bajo  $f$  y  $g$ , respectivamente, es menor o igual que  $t_1$  y  $t_2$ . (Este paso será crucial para la demostración porque nos permite relacionar los puntos en el epígrafo de  $h$  con los puntos en los epígrafos de  $f$  y  $g$ , lo cual es necesario para demostrar que el epígrafo de  $h$  es un conjunto convexo).

Ahora consideremos un punto  $(x, t)$  en la línea que conecta  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$ . Podemos escribir  $(x, t)$  como una combinación convexa de  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$ . Es decir,

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \quad y \quad t = \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2$$

para algún  $\lambda \in [0, 1]$ .

Dado que los epígrafos de  $f$  y  $g$  son conjuntos convexos, existen  $y$  y  $z$  tal que

$$y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \quad f(y) \leq \lambda f(y_1) + (1 - \lambda)f(y_2).$$

$$z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2, \quad g(z) \leq \lambda g(z_1) + (1 - \lambda)g(z_2).$$

Entonces, tenemos que

$$y + z = x \quad y \quad f(y) + g(z) \leq t.$$

Por lo tanto,  $(x, t)$  está en el epígrafo de  $h$ . Así, el epígrafo de  $h$  es un conjunto convexo. ■

**Ejercicio 2.** Un punto extremal de un conjunto convexo  $C$  es aquel punto  $x \in C$  que cumple que si existen  $y, z$  en  $C$  tales que  $x = (y + z)/2$  entonces  $y = z$ . Demuestra que si  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo, cerrado y acotado. Entonces,  $C$  es la envoltura convexa del conjunto  $E(C)$  de sus puntos extremales. [Indicación: Si tienes problemas para hacer la demostración, puedes asumir que  $E(C)$  es no vacío].

**Demostración.-** Supongamos que existe un punto  $x \in C$  que no está en  $\text{co}(E(C))$ <sup>3</sup>. En otras palabras, si  $x$  no está en  $\text{co}(E(C))$  estos dos conjuntos son disjuntos. Así, por el teorema de separación de Hiperplanos<sup>4</sup>, podemos encontrar un hiperplano, que separe a  $x$  de  $\text{co}(E(C))$ .

Como  $C$  es cerrado (contiene todos sus puntos límite)<sup>5</sup>, y como  $C$  es acotado (tiene un tamaño finito). Estas dos propiedades garantizan que  $C$  debe tener al menos un punto extremal, es decir,  $E(C)$  no es vacío.

Dado que  $E(C)$  no es vacío y  $C$  es cerrado<sup>5</sup> y acotado, debe existir al menos un punto extremal en  $C$  que esté en el mismo lado del hiperplano que  $x$ . Llamamos a este punto  $y$ .

Según la definición de un punto extremal, no puede existir un hiperplano que separe  $C$  e  $y$ . Sin embargo, encontramos un hiperplano que separe  $x$  e  $y$ . Puesto que,  $x$  está en  $C$ ,

<sup>3</sup>Se llama **envoltura convexa** de  $S$  al menor conjunto convexo que contienen a  $S$ , denotado por  $\text{co}(S)$ . También es equivalente a decir que:  $\text{co}(S) = \{\text{Combinación convexa de puntos de } S\}$ .

<sup>4</sup>El **teorema de separación de hiperplanos** establece que si tenemos dos conjuntos convexos disjuntos, entonces existe un hiperplano que los separa. Es decir, sean  $A$  y  $B$  conjuntos convexos con  $A \cap B = \emptyset$  y  $A^i \neq \emptyset$ . Entonces, existe  $f \in E^*$  lineal, tal que  $f(a^i) < \inf \{f(b), b \in B\}$ .

<sup>5</sup>Decimos que  $A$  es **cerrado** cuando  $A = \overline{A}$  donde  $\{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ está en el cierre de } A\}$ .

esto significa que hemos encontrado un hiperplano que separa  $C$  e  $y$ , lo cual contradice la definición de un punto extremal. Por lo tanto, nuestra suposición inicial de que existe un punto  $x$  en  $C$  que no está en  $\text{co}(E(C))$  debe ser falsa.

Esto implica que todos los puntos en  $C$  deben estar en  $\text{co}(E(C))$ , y por lo tanto,  $C$  es igual a  $\text{co}(E(C))$ . Lo que completa la demostración.

**Ejercicio 4. Prueba que si  $A$  es un conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , con interior no vacío, y tiene un hiperplano soporte en cada punto de su frontera, entonces  $A$  es convexo.**

**Demostración.-** Sea  $A$  es un conjunto cerrado con interior no vacío y tiene un hiperplano soporte en cada punto de su frontera <sup>6</sup>. Esta función  $f$  representa un hiperplano soporte en el punto  $x_0$ .

Ahora, sea  $A$  no es convexo. De donde, supondremos dos puntos  $x, y \in A$  tal que el segmento de línea que los une no está completamente en  $A$ . Es decir, existe un  $t \in [0, 1]$  tal que

$$tx + (1 - t)y \notin A.$$

(Observemos que este punto  $tx + (1 - t)y$  está en la línea entre  $x$  e  $y$ , pero no está en  $A$ , lo cual es una contradicción a la convexidad).

Luego, dado que  $tx + (1 - t)y \notin A$ , debe existir un hiperplano soporte<sup>6</sup> en  $tx + (1 - t)y$ . Este hiperplano divide  $\mathbb{R}^n$  en dos semiespacios cerrados, uno de los cuales contiene a  $A$ . Este hiperplano está representado por una función  $f \in E^\#$  tal que

$$f(tx + (1 - t)y) = \sup \{f(a) : a \in A\} \geq f(a), \forall a \in \bar{A}.$$

Sin embargo, tanto  $x$  como  $y$  están en  $A$ , por lo que deben estar en el mismo semiespacio que  $A$ . Esto se debe a que la función  $f$  que representa el hiperplano soporte satisface

$$f(x) \geq f(a) \quad \text{y} \quad f(y) \geq f(a)$$

para todo  $a \in \bar{A}$ . Pero, todos los puntos en el segmento de línea que une  $x$  e  $y$  también deben estar en el mismo semiespacio que  $A$ , ya que el segmento de línea es un subconjunto del hiperplano.

Esto contradice nuestra suposición de que

$$tx + (1 - t)y \notin A.$$

Por lo tanto, nuestra suposición inicial de que  $A$  no es convexo debe ser incorrecta. Así, si  $A$  es un conjunto cerrado con interior no vacío y tiene un hiperplano soporte en cada punto de su frontera, entonces  $A$  debe ser convexo. Esta demostración es válida independientemente de si  $x$  y  $y$  están en el interior o en la frontera de  $A$ . ■

---

<sup>6</sup>**Hiperplano soporte** significa que para cada  $x_0 \in \partial A$ , existe una función  $f \in E^\#$  tal que  $f(x_0) = \sup \{f(a) : a \in A\} \geq f(a), \forall a \in A$ .

---

## CAPÍTULO 3

**Ejercicio 1.** Sea  $f$  convexa y  $x_0$  en el interior del dominio de  $f$ . Demuestra que:

- (a) El subdiferencial  $\partial f(x_0)$  es distinto del vacío, convexo y cerrado.

**Demostración.-**

- **No vacío:** Por definición, si  $f$  es convexa y  $x_0$  está en el interior del dominio de  $f$ , entonces existe al menos un subgradiente<sup>7</sup> en  $x_0$ . Esto significa que el conjunto subdiferencial<sup>8</sup>  $\partial f(x_0)$  no puede ser vacío.
- **Convexo:** Supongamos que  $g, h \in \partial f(x_0)$  y  $\theta \in [0, 1]$ . Demostraremos que

$$\theta g + (1 - \theta)h \in \partial f(x_0).$$

Por la definición de subgradiente<sup>7</sup>, tenemos que:

$$f(x) \geq f(x_0) + g^T(x - x_0)$$

y

$$f(x) \geq f(x_0) + h^T(x - x_0)$$

Multiplicando la primera desigualdad por  $\theta$  y la segunda por  $(1 - \theta)$  y sumándolas, obtenemos:

$$f(x) \geq f(x_0) + (\theta g + (1 - \theta)h)^T(x - x_0)$$

Esto demuestra que  $\theta g + (1 - \theta)h$  es un subgradiente de  $f$  en  $x_0$ , por lo que  $\partial f(x_0)$  es convexo.

- **Cerrado:** Para demostrar que  $\partial f(x_0)$  es cerrado, necesitamos demostrar que el límite de cualquier secuencia convergente de subgradienes también pertenece a  $\partial f(x_0)$ . Supongamos que tenemos una secuencia  $\{g_k\}$  de subgradienes tal que  $g_k \rightarrow g$  cuando  $k \rightarrow \infty$ <sup>9</sup>. Por la definición de subgradiente<sup>7</sup>, para cada  $k$  tenemos que:

$$f(x) \geq f(x_0) + g_k^T(x - x_0)$$

Tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos:

$$f(x) \geq f(x_0) + g^T(x - x_0).$$

Lo que estamos diciendo es que si  $g_k$  se acerca a  $g$  cuando  $k$  tiende a infinito, entonces la desigualdad también debe mantenerse en el límite cuando  $k$  tiende a infinito.

Esto demuestra que  $g$  es un subgradiente de  $f$  en  $x_0$ , por lo que  $\partial f(x_0)$  es cerrado. ■

---

<sup>7</sup>Si  $f$  es convexa y  $x_0$  en  $\text{int}(\text{dom}(f))$ , encontramos el subestimador afín del resultado anterior. Al vector que define unívocamente este subestimador, se le llama **subgradiente** de  $f$  en el punto. Esto significa que  $g$  satisface la desigualdad  $f(x) \geq f(x_0) + g^T(x - x_0)$ , para todo  $x$  en el dominio de  $f$ . Esta desigualdad dice que la función  $f$  está por encima de la línea que pasa por el punto  $(x_0, f(x_0))$  con pendiente  $g$ , lo que significa que esta línea subestima a  $f$  en  $x_0$ . Por lo tanto,  $g$  se llama un subgradiente de  $f$  en  $x_0$ .

<sup>8</sup>Se llama **subdiferencial** de  $f$  en  $x_0$  al conjunto de todos los subgradienes de  $f$  en  $x_0$ :  $\partial f(x_0)$ .

<sup>9</sup>Esto significa que para cada número positivo  $\epsilon$ , existe un número entero  $N$  tal que para todo  $k > N$ , la distancia entre  $g_k$  y  $g$  es menor que  $\epsilon$ . En otras palabras, a medida que  $k$  se hace más y más grande,  $g_k$  se acerca cada vez más a  $g$ .

- (b) El subdiferencial  $\partial f(x_0)$  es un conjunto unipuntual si y sólo si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ . En dicho caso  $\partial f(x_0) = \nabla f(x_0)$ .

**Demostración.**  $\Leftarrow$ ] Si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces existe un único vector, el gradiente de  $f$  en  $x_0$ , que satisface la definición de subgradiente. Esto se debe a que la función tangente lineal a  $f$  en  $x_0$  proporciona el mejor subestimador afín de  $f$  en  $x_0$ . Por lo tanto, el subdiferencial  $\partial f(x_0)$  es un conjunto unipuntual, y  $\partial f(x_0) = \nabla f(x_0)$ .

Para demostrar esto de manera algebraica, consideremos la definición de subgradiente. Un vector  $g$  es un subgradiente de  $f$  en  $x_0$  si satisface la desigualdad

$$f(x) \geq f(x_0) + g^T(x - x_0).$$

para todo  $x$  en el dominio de  $f$ . Si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces su gradiente

$$\nabla f(x_0)$$

satisface esta desigualdad, porque la función tangente lineal

$$f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0)$$

es la mejor aproximación lineal <sup>10</sup> a  $f$  en  $x_0$ . Por lo tanto,  $\nabla f(x_0)$  es el único subgradiente, y  $\partial f(x_0) = \nabla f(x_0)$ .

$\Rightarrow$ ] Si el subdiferencial  $\partial f(x_0)$  es un conjunto unipuntual, entonces existe un único subgradiente en  $x_0$ . Esto implica que la función tangente lineal a  $f$  en  $x_0$  es única, lo cual es posible sólo si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ .

Para demostrar esto de manera algebraica, supongamos que  $\partial f(x_0)$  es un conjunto unipuntual, es decir,

$$\partial f(x_0) = \{g\}$$

para algún vector  $g$ . Por la definición de subgradiente, sabemos que

$$f(x) \geq f(x_0) + g^T(x - x_0)$$

para todo  $x$  en el dominio de  $f$ . Ahora, si  $f$  no fuera diferenciable en  $x_0$ , entonces existiría otro vector  $h$  tal que

$$f(x) \geq f(x_0) + h^T(x - x_0)$$

para todo  $x$  en el dominio de  $f$ . Pero esto contradiría nuestra suposición de que  $\partial f(x_0)$  es un conjunto unipuntual. Por lo tanto,  $f$  debe ser diferenciable en  $x_0$ , y su gradiente en  $x_0$  es el único subgradiente, es decir,  $\nabla f(x_0) = g$ .

Así, demostramos que  $f$  es diferenciable en  $x_0$  si y sólo si el subdiferencial  $\partial f(x_0)$  es un conjunto unipuntual. En dicho caso,  $\partial f(x_0) = \nabla f(x_0)$ . Espero que esto aclare tu duda. Si tienes más preguntas, no dudes en hacerlas. ■

---

<sup>10</sup>Cuando decimos que una función  $f$  es diferenciable en un punto  $x_0$ , esto significa que la función tiene una derivada en ese punto. En términos geométricos, esto significa que existe una línea tangente a la gráfica de la función en el punto  $(x_0, f(x_0))$ . Esta línea tangente es la mejor aproximación lineal a la función cerca del punto  $x_0$ , en el sentido de que la distancia entre la función y la línea tangente es mínima en comparación con cualquier otra línea que pase por el punto  $(x_0, f(x_0))$ .

La ecuación de esta línea tangente es  $f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0)$ , donde  $\nabla f(x_0)$  es el gradiente de  $f$  en  $x_0$ . Esta ecuación nos da el valor de la línea tangente para cualquier valor de  $x$  cerca de  $x_0$ .

Por lo tanto, si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces tiene una única mejor aproximación lineal en  $x_0$ , que es la función tangente lineal. Esto es lo que nos permite definir el subgradiente y el subdiferencial de  $f$  en  $x_0$ .

- (c) Si  $f$  y  $g$  son dos funciones convexas, demuestra que  $\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$ . ¿Se tiene la igualdad en todos los puntos del dominio? ¿sólo en los puntos del interior del dominio? ¿Es esencial la hipótesis de que las funciones sean convexas?

**Demostración.-** Supongamos que  $h = f + g$  y que  $x$  está en el interior del dominio de  $h$ . Entonces, por la definición de subdiferencial, para cualquier  $v \in \partial h(x)$ , tenemos que

$$h(y) \geq h(x) + v^T(y - x)$$

para todo  $y$  en el dominio de  $h$ . Ahora, podemos descomponer  $h$  en  $f$  y  $g$ . Esto nos da

$$f(y) + g(y) \geq f(x) + g(x) + v^T(y - x)$$

para todo  $y$  en el dominio de  $h$ . Luego, supongamos que

$$u \in \partial f(x) \quad y \quad w \in \partial g(x).$$

Entonces, por la definición de subdiferencial, tenemos que

$$f(y) \geq f(x) + u^T(y - x) \quad y \quad g(y) \geq g(x) + w^T(y - x) \quad (1)$$

para todo  $y$  en el dominio de  $h$ . Sumando estas dos desigualdades nos da

$$f(y) + g(y) \geq f(x) + g(x) + (u + w)^T(y - x)$$

para todo  $y$  en el dominio de  $h$ . Por último, comparando esta desigualdad con (1), vemos que si elegimos  $v = u + w$ , entonces la desigualdad se mantiene. Por lo tanto,

$$u + w \in \partial h(x).$$

Es decir,

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subseteq \partial(f+g)(x).$$

Ahora demostremos la inclusión; es decir,  $\partial(f+g)(x) \subseteq \partial f(x) + \partial g(x)$ . Supongamos que

$$v \in \partial(f+g)(x).$$

Por la definición de subgradiente, esto significa que para todo  $y$  en el dominio de  $f+g$ , tenemos que

$$(f+g)(y) \geq (f+g)(x) + v^T(y - x).$$

Descomponiendo  $(f+g)(y)$  y  $(f+g)(x)$  en  $f$  y  $g$ , nos da

$$f(y) + g(y) \geq f(x) + g(x) + v^T(y - x) \quad (2)$$

para todo  $y$  en el dominio de  $f+g$ . Ahora, supongamos que existen

$$u \in \partial f(x) \quad y \quad w \in \partial g(x).$$

Entonces, por la definición de subgradiente, tenemos que

$$f(y) \geq f(x) + u^T(y - x) \quad y \quad g(y) \geq g(x) + w^T(y - x)$$

para todo  $y$  en el dominio de  $f+g$ . Sumamos estas dos desigualdades. Esto nos da

$$f(y) + g(y) \geq f(x) + g(x) + (u + w)^T(y - x)$$

---

para todo  $y$  en el dominio de  $f + g$ . Comparamos esta desigualdad con (2). Y Vemos que si elegimos

$$v = u + w,$$

entonces la desigualdad se mantiene. Por lo tanto,

$$v \in \partial f(x) + \partial g(x);$$

es decir,  $\partial(f + g)(x) \subseteq \partial f(x) + \partial g(x)$ .

De esta manera, demostramos que  $\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$ . ■

En cuanto a la primera pregunta, no necesariamente se tiene la igualdad en todos los puntos del dominio. La igualdad se mantiene en los puntos del interior del dominio donde ambas funciones son diferenciables. En los puntos de la frontera del dominio o en los puntos donde las funciones no son diferenciables, la igualdad puede no mantenerse.

En cuanto a la segunda pregunta, sí es esencial la hipótesis de que las funciones sean convexas. La convexidad de las funciones garantiza la existencia de subgradiientes en cada punto del interior de su dominio. Si las funciones no son convexas, entonces pueden no existir subgradiientes en algunos puntos, y la igualdad

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$$

puede no mantenerse.

**Ejercicio 2.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y  $K$  un compacto contenido en el interior del dominio de  $f$ . Demuestra que  $f$  es Lipschitz en  $K$ , es decir, que existe una constante  $L > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|,$$

para todo  $x, y \in K$ .

**Demostración.-**

Primero, recordemos que una función  $f$  es convexa si para todo  $x, y$  en su dominio y para todo  $t \in [0, 1]$ , se cumple que

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Ahora, dado que  $K$  es compacto, sabemos que es cerrado y acotado. Por lo tanto, existe un  $M > 0$  tal que  $\|x\| \leq M$  para todo  $x \in K$ .

Consideremos dos puntos arbitrarios  $x, y \in K$ . Podemos aplicar la definición de función convexa para obtener

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x).$$

Esto implica que

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T(y - x).$$

Tomando el valor absoluto de ambos lados, obtenemos

$$|f(y) - f(x)| \geq |\nabla f(x)^T(y - x)|.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz <sup>11</sup>, tenemos que

$$|\nabla f(x)^T(y - x)| \leq \|\nabla f(x)\| \|y - x\|.$$

Por lo tanto,

$$|f(y) - f(x)| \geq \|\nabla f(x)\| \|y - x\|.$$

Luego, necesitamos demostrar que  $\|\nabla f(x)\|$  es acotado en  $K$ . Dado que  $f$  es convexa, su gradiente satisface la condición de monotonía del gradiente. Además, dado que  $K$  es compacto, el gradiente de  $f$  debe ser acotado en  $K$ . Por lo tanto, existe una constante  $L > 0$  tal que  $\|\nabla f(x)\| \leq L$  para todo  $x \in K$ .

Finalmente, combinando estas dos desigualdades, obtenemos

$$|f(y) - f(x)| \leq L \|y - x\|.$$

Así, la función  $f$  es Lipschitz en  $K$  con constante de Lipschitz  $L$ . ■

**Ejercicio 3.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones convexas cuyo dominio es  $\mathbb{R}^n$ . Se define su convolución infima (*infimal convolution*) como

$$h(x) = (f \diamond g)(x) := \inf \{f(y) + g(z) : y + z = x\}.$$

**Demuestra que  $h(y)$ . ¿Es suficiente esta identidad para demostrar que si  $f$  y  $g$  son convexas, entonces  $h$  es convexa?**

**Demostración.-** Necesitaremos demostrar que para cualquier par de puntos  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y cualquier  $t \in [0, 1]$ , se cumple que

$$h(tx + (1 - t)y) \leq th(x) + (1 - t)h(y).$$

Dado que

$$h(x) = (f \diamond g)(x) = \inf \{f(u) + g(v) : u + v = x\},$$

podemos elegir  $(u_1, v_1)$  y  $(u_2, v_2)$  tal que

$$u_1 + v_1 = x, \quad h(x) = f(u_1) + g(v_1)$$

$$u_2 + v_2 = y, \quad h(y) = f(u_2) + g(v_2).$$

Ahora, consideremos

$$z = tx + (1 - t)y = tu_1 + (1 - t)u_2 + tv_1 + (1 - t)v_2.$$

Donde, notamos que

$$tu_1 + (1 - t)u_2 \quad y \quad tv_1 + (1 - t)v_2$$

son combinaciones convexas de  $u_1, u_2$  y  $v_1, v_2$  respectivamente. Como  $f$  y  $g$  son convexas, tenemos que

$$f(tu_1 + (1 - t)u_2) \leq tf(u_1) + (1 - t)f(u_2),$$

$$g(tv_1 + (1 - t)v_2) \leq tg(v_1) + (1 - t)g(v_2).$$

<sup>11</sup>La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** establece que para cualquier espacio vectorial complejo con un producto escalar, y para cualquier par de vectores  $x$  y  $y$  en ese espacio, se cumple la siguiente desigualdad:  $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ , donde  $x \cdot y$  denota el producto escalar de  $x$  y  $y$ , y  $\|x\|$  y  $\|y\|$  son las normas (o longitudes) de los vectores  $x$  y  $y$ , respectivamente. La igualdad se cumple si y solo si los vectores  $x$  y  $y$  son linealmente dependientes. Esto significa que uno de los vectores puede ser escrito como un múltiplo escalar del otro.



---

Sumando estas dos desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned} f(tu_1 + (1-t)u_2) + g(tv_1 + (1-t)v_2) &\leq tf(u_1) + (1-t)f(u_2) + tg(v_1) + (1-t)g(v_2) \\ &= th(x) + (1-t)h(y). \end{aligned}$$

Dado que el lado izquierdo de esta desigualdad es una cota superior para  $h(z)$ , tenemos que

$$h(z) = h(tx + (1-t)y) \leq th(x) + (1-t)h(y),$$

lo que demuestra que  $h$  es convexa. Por lo tanto, si  $f$  y  $g$  son convexas, entonces su convolución ínfima  $h$  también es convexa. Esta identidad es suficiente para demostrar la convexidad de  $h$ . Ya que, si  $f$  es convexa, entonces para cualquier  $x, y$  en el dominio de  $f$  y cualquier  $t$  en el intervalo  $[0, 1]$ , se cumple que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

En la demostración dada, mostramos que para cualquier par de puntos  $x, y$  en el dominio de  $h$  y cualquier  $t$  en el intervalo  $[0, 1]$ , se cumple que

$$h(tx + (1-t)y) \leq th(x) + (1-t)h(y).$$

Por lo tanto, hemos demostrado que  $h$  satisface la definición de una función convexa, lo cual es suficiente para demostrar que  $h$  es convexa. En otras palabras, hemos demostrado que si  $f$  y  $g$  son convexas, entonces su convolución ínfima  $h$  también es convexa. ■