

Algunas distribuciones discretas de probabilidad

1.2. La distribución binomial

Llámesese éxito a la ocurrencia del evento y fracaso a su no ocurrencia.

Las dos suposiciones claves para la distribución binomial son:

- I. La probabilidad de éxito p permanece constante para cada ensayo.
- II. Los n ensayos son independientes entre sí.

Para obtener la función de probabilidad de la distribución binomial, primero se determina la probabilidad de tener, en n ensayos, x éxitos consecutivos seguidos de $n-x$ fracasos consecutivos. Dado que, por hipótesis, los n ensayos son independientes de la definición 2.15, se tiene:

$$p \cdot p \cdots p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p) = p^x (1-p)^{n-x}$$

Definición 1.1 (Distribución binomial con función de probabilidad) Sea X una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n ensayos y p la probabilidad de éxito con cualquiera de éstos. Se dice entonces que X tiene una distribución binomial con función de probabilidad.

$$p(x; n, p) \begin{cases} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n. \\ 0 \text{ para cualquier otro valor.} & 0 \leq p \leq 1. \text{ para } n \text{ entero.} \end{cases}$$

El nombre distribución binomial proviene del hecho de que los valores de $p(x; n, p)$ para $x = 1, 2, \dots, n$ son los términos sucesivos de la expansión binomial de $[(1-p) + p]^n$; esto es,

$$\begin{aligned} [(1-p) + p]^n &= (1-p)^n + n(1-p)^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}(1-p)^{n-2}p^2 + \cdots + p^n \\ &= \sum_{x=0}^n \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n p(x; n, p) \end{aligned}$$

Pero dado que $[(1-p) + p]^n = 1$ y $p(x; n, p) \geq 0$ para $x = 0, 1, 2, \dots, n$, este hecho también verifica que $p(x; n, p)$ es una función de probabilidad.

La probabilidad de que una variable aleatoria X sea menor o igual a un valor específico de x , se determina por la **función de distribución acumulativa**.

$$P(X \leq x) = F(x; n, p) = \sum_{i=0}^x \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Nótese que si $n = 1$, la función de probabilidad binomial se deduce a

$$p(x; n, p) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

Que es la **función de probabilidad de la distribución puntual o Bernoulli**.

Por definición 3.8, el primer momento alrededor del cero de la variable aleatoria binomial X es el valor esperado de X .

$$\begin{aligned} E(X) &= x \sum_{x=0}^n \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= x \sum_{x=1}^n \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n \frac{n!}{(n-x)!(x-1)!} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

en donde se ha escrito la suma desde uno hasta n , dado que cuando $x = 0$ el primer término es cero y se cancela la x del numerador con la x en $x!$. Factorizando n y p , se tiene:

$$E(X) = np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

Si $y = x - 1$ y $m = n - 1$, entonces:

$$E(X) = np \sum_{x=1}^n \frac{m!}{(m-y)!y!} p^y (1-p)^{n-y}$$

De donde se sabe que $p(y; m, p) = \frac{m!}{(m-y)!y!} p^y (1-p)^{n-y}$ es la función de probabilidad de una variable aleatoria binomial Y con parámetros $m = n - 1$ y p ; de ésta manera $\sum_{y=0}^m p(y; m, p) = 1$ y **la media de una variable aleatoria binomial es:**

$$E(X) = \mu = np.$$

Para obtener la varianza, se necesita el segundo momento alrededor de cero, μ_2' , o:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^n x^2 p(x; n, p)$$

pero, e el término $x^2/x!$ se cancelará una sola x en el numerador, y la que resta evitará que la suma se manipule de la misma forma en que se determinó la media. La alternativa es escribir x^2 como:

$$x^2 = x(x-1) + x;$$

de esta manera se tiene:

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X).$$

Dado que $E(X)$ ya se ha determinado, puede usarse el mismo procedimiento para evaluar $E(X(X-1))$:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^n x(x-1) \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^n x(x-1) \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^n \frac{n!}{(n-x)(x-2)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

Sea $y = x - 2$ y $m = n - 2$, entonces:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^m \frac{m!}{(m-y)!y!} p^y (1-p)^{m-y} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^m p(y; m, p) \\ &= n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

Así,

$$E(X^2) = \mu_2' = n(n-1)p^2 + np$$

De esta manera, la **varianza de una variable aleatoria binomial** es:

$$Var(X) = \mu_2' - \mu^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np[(n-1)p + 1 - np] = np(1-p).$$