
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**
C.I.: **6788578 L.P.**
Universidad: **Mayor de San Andrés.**
Carrera: **Matemáticas.**
Asignatura: **Computación Científica II.**
Tarea: **11 b**
Fecha **8-12-2021**

1. APLICACIÓN DE INTEGRALES

a) Tom Apostol, Calculus I, Capítulo 2, Problema 32

A partir de la identidad

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sin(2k+1)\frac{x}{2} - \sin(2k-1)\frac{x}{2}$$

y de las propiedades telescópicas de las sumas finitas demostrar que si $x \neq 2m$ (m entero) se tiene

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}$$

Demostración.- Haciendo $k = 1, 2, \dots, n$ y sumando esas igualdades, se obtiene que

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \cos kx = \sum_{k=1}^n \left[\sin(2k+1)\frac{x}{2} - \sin(2k-1)\frac{x}{2} \right]$$

Luego por la propiedad telescópica de las sumas finitas, se tiene,

$$2 \sin \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \cos kx = \sin \left[(2n+1)\frac{x}{2} \right] - \sin(0+1)\frac{x}{2}$$

luego,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos kx &= \frac{\sin \left[(2n+1)\frac{x}{2} \right] - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{(2n+1)\frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{2} \cos \frac{(2n+1)\frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

b) Código fuente.

```
import numpy as np

f = lambda x, n : (np.sin(n*x)/2*np.cos((n+1)*x/2)) / (np.sin(x/2))

x = float(input("ingrese x: "))
n = float(input("ingrese n: "))

print(f(x,n))
```

c) Prueba de la ejecución del programa.

```
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py32.py
ingrese x: 3
ingrese n: 4
-0.09323110715872544
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py32.py
ingrese x: 32
ingrese n: 3
-0.6693670192391985
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py32.py
ingrese x: 4
ingrese n: 24
0.5219022579326213
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py32.py
ingrese x: 2
ingrese n: 42
0.24184060209263564
```

2. APLICACIÓN DE INTEGRALES

a) Tom Apostol, Calculus I, Capítulo 2, Problema 20

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - 1 = 0.$$

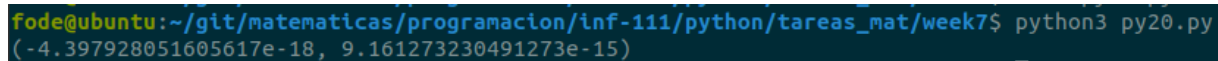
b) Código fuente.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad

f = lambda x: np.sin(x) - np.cos(x)
area = quad(f, 0, np.pi/2)

print(area)
```

c) Prueba de la ejecución del programa.



```
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py20.py
(-4.397928051605617e-18, 9.161273230491273e-15)
```

3. APLICACIÓN DE INTEGRALES

a) Tom Apostol, Calculus I, Capítulo 2, Problema 33

Si $x \neq 2m\pi$ (m un entero), probar que

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \sin \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}$$

Demostración.- Recordemos que

$$\begin{aligned} -2 \sin \frac{x}{2} \sin(kx) &= \cos\left(\frac{x}{2} + kx\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - kx\right) \\ &= \cos\left[(2k+1)\frac{x}{2}\right] - \cos\left[(1-2k)\frac{x}{2}\right] \\ &= \cos\left[(2k+1)\frac{x}{2}\right] - \cos\left[(2k-1)\frac{x}{2}\right] \end{aligned}$$

Luego, aplicando la propiedad telescópica de las sumas finitas, y la primera parte del teorema 4 se tiene,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin kx &= \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\frac{x}{2}\right] - \cos \frac{x}{2}}{-2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\cos(nx) \cos \frac{x}{2} - \sin(nx) \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}}{-2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{x}{2} (\cos(nx) - 1) - \sin(nx) \sin \frac{x}{2}}{-2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{-2 \cos \frac{x}{2} \sin^2 \frac{nx}{2} - 2 \sin \frac{nx}{2} \cos \frac{nx}{2} \sin \frac{x}{2}}{-2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} (\cos \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} + \cos \frac{nx}{2} \sin x)}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

b) Código fuente.

```
import numpy as np

f = lambda x, n : (np.sin(n*x/2)*np.sin(((n+1)*x)/2))/(2*np.sin(x/2))

x = float(input("ingrese x: "))
n = float(input("ingrese n: "))

print(f(x,n))
```

c) Prueba de la ejecución del programa.

```
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py33.py
ingrese x: 3
ingrese n: 2
-0.06914774506952931
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py33.py
ingrese x: 4
ingrese n: 1
-0.3784012476539641
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py33.py
ingrese x: 453
ingrese n: 323
1.5677983687712995
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py33.py
ingrese x: 4242
ingrese n: 24221
1.0609152671906619
```

4. APLICACIÓN DE INTEGRALES

a) Tom Apostol, Calculus I, Capítulo 2, Problema 18

$$\int_0^{\pi} (x + \sin x) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\pi} + 1 - (\cos \pi) = \frac{\pi^2}{2} + 1 - (-1) = \frac{\pi^2}{2} + 2.$$

b) Código fuente.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad

f = lambda x: x + np.sin(x)
area = quad(f, 0, np.pi)

print(area)
```

c) Prueba de la ejecución del programa.

```
fode@ubuntu:~/git/maticas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py18.py
(6.934802200544679, 7.699177074265904e-14)
```

5. APLICACIÓN DE INTEGRALES

a) Tom Apostol, Calculus I, Capítulo 2, Problema 19

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 + \cos x) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3} + 1 = \frac{\pi^3}{24} + 1.$$

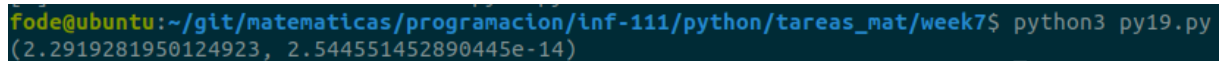
b) Código fuente.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad

f = lambda x: x**2 + np.cos(x)
area = quad(f, 0, np.pi/2)

print(area)
```

c) Prueba de la ejecución del programa.

A terminal window with a dark background. The prompt is 'fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7\$'. The command 'python3 py19.py' has been executed, and the output is '(2.2919281950124923, 2.544551452890445e-14)'.

```
fode@ubuntu:~/git/matematicas/programacion/inf-111/python/tareas_mat/week7$ python3 py19.py
(2.2919281950124923, 2.544551452890445e-14)
```