

# Funciones continuas

## 1.2. Definición de límite de una función

La continuidad existe si existe continuidad por la izquierda y por la derecha.

**Definición 1.1** (Definición de entorno de un punto). Cualquier intervalo abierto que contenga un punto  $p$  como su punto medio se denomina entorno de  $p$ .

**Notación.-** Designemos los entornos con  $N(p)$ ,  $N_1(p)$ ,  $N_2(p)$ , etc. Puesto que un entorno  $N(p)$  es un intervalo abierto simétrico respecto a  $p$ , consta de todos los números reales  $x$  que satisfagan  $p - r < x < p + r$  para un cierto  $r > 0$ . El número positivo  $r$  se llama radio del entorno. En lugar de  $N(p)$  ponemos  $N(p; r)$  si deseamos especificar su radio. Las desigualdades  $p - r < x < p + r$  son equivalentes a  $-r < x - p < r$ , y a  $|x - p| < r$ . Así pues,  $N(p; r)$  consta de todos los puntos  $x$ , cuya distancia a  $p$  es menor que  $r$ . En la definición que sigue suponemos que  $A$  es un número real y que  $f$  es una función definida en un cierto entorno de un punto  $p$  (excepción hecha acaso del mismo  $p$ ). La función puede estar definida en  $p$  pero esto no interviene en la definición.

**Definición 1.2** (Definición de límite de una función). El simbolismo

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \quad [\text{o } f(x) \rightarrow A \quad x \rightarrow p]$$

significa que para todo entorno  $N_1(A)$  existe un cierto entorno  $N_2(p)$  tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x \neq p$$

El entorno  $N_1(A)$  se cita en primer lugar, e indica cuán próximo queremos que sea  $f(x)$  a su límite  $A$ . El segundo entorno,  $N_2(p)$ , nos indica lo próximo que debe estar  $x$  de  $p$  para que  $f(x)$  sea interior al primer entorno  $N_1(p)$ . El entorno  $N_2(p)$  dependerá del  $N_1(A)$  elegido. Un entorno  $N_2(p)$  que sirva para un  $N_1(A)$  determinado servirá también, naturalmente, para cualquier  $N_1(A)$  mayor, pero puede no ser útil para todo  $N_1(A)$  más pequeño.

Decir que  $f(x) \in N_1(A)$  es equivalente a la desigualdad  $|f(x) - A| < \epsilon$  y poner que  $x \in N_2(p)$ ,  $x \neq p$  es lo mismo que escribir  $0 < |x - p| < \delta$ . Por lo tanto, la definición de límite puede también expresarse así:

El símbolo  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta.$$

Observamos que las tres desigualdades,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow p} (f(x) - A) = 0, \lim_{x \rightarrow p} [f(x) - A] = 0$$

Son equivalentes. También son equivalentes las desigualdades,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A, \lim_{h \rightarrow 0} f(p + h) = A.$$

Todas estas se derivan de la definición de límite.

**Definición 1.3** (Límites laterales). Los límites laterales pueden definirse en forma parecida. Por ejemplo, si  $f(x) \rightarrow A$  cuando  $x \rightarrow p$  con valores mayores que  $p$ , decimos que  $A$  es el límite por la derecha de  $f$  en  $p$ , indicamos esto poniendo

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = A.$$

En la terminología de los entornos esto significa que para todo entorno  $N_1(A)$ , existe algún entorno  $N_2(p)$  tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x > p.$$

Los límites a la izquierda, que indican poniendo  $x \rightarrow p^-$ , se definen del mismo modo restringiendo  $x$  a valores menores que  $p$ .

### 1.3. Definición de continuidad de una función

**Definición 1.4** (Definición de continuidad de una función en un punto). Se dice que una función  $f$  es continua en un punto  $p$  si

a)  $f$  está definida en  $p$ , y

b)  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ .

Esta definición también puede formularse con entornos. Una función  $f$  es continua en  $p$  si para todo entorno  $N_1[f(p)]$  existe un entorno  $N_2(p)$  tal que

$$f(x) \in N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \in N_2(p).$$

Puesto que  $f(p)$  pertenece siempre a  $N_1[f(p)]$ , no se precisa la condición  $x \neq p$ .

Especificando los radios de los entornos, la definición de continuidad puede darse como sigue:

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \text{ siempre que } |x - p| < \delta.$$

**1.4. Teoremas fundamentales sobre límites. Otros ejemplos de funciones continuas.**

**Teorema 1.1.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones tales que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = B$$

Se tiene entonces

$$(I) \quad \lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)] = A + B,$$

$$(II) \quad \lim_{x \rightarrow p} [f(x) - g(x)] = A - B,$$

$$(III) \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B,$$

$$(IV) \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \text{si } B \neq 0.$$

Las demostraciones estarán dadas en la sección 3.5.

Observemos primero que las afirmaciones del teorema pueden escribirse en forma un poco distinta. Por ejemplo, (i) puede ponerse como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) + \lim_{x \rightarrow p} g(x).$$

Es costumbre indicar por  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  y  $f/g$  las funciones cuyos valores para cada  $x$  son:

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \text{y} \quad f(x)/g(x).$$

**Teorema 1.2.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en un punto  $p$ . La suma  $f + g$ , la diferencia  $f - g$ , el producto  $f \cdot g$  y  $g(p) \neq 0$  siempre que  $g(p) \neq 0$  son también continuas en  $p$ .

*Demostración.-* Puesto que  $f$  y  $g$  son continuas en  $p$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$  y  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = g(p)$ . Aplicando las propiedades para límites, dadas en el teorema 3.1, cuando  $A = f(p)$  y  $B = g(p)$ , se deduce el teorema 3.2.

El teorema que sigue demuestra que si una función  $g$  está intercalada entre otras dos funciones que tienen el mismo límite cuando  $x \rightarrow p$ ,  $g$  tiene también este límite cuando  $x \rightarrow p$ .

**Teorema 1.3** (Principio de intercalación). Supongamos que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para todo  $x \neq p$  en un cierto entorno  $N(p)$ . Supongamos también que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = a.$$

Se tiene entonces  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = a$ .

*Demostración.-* Sean  $G(x) = g(x) - f(x)$ , y  $H(x) = h(x) - f(x)$ . Las desigualdades  $f \leq g \leq h$  implican  $0 \leq g - f \leq h - f$  o

$$0 \leq G(x) \leq H(x)$$

para todo  $x \neq p$  en  $N(p)$ . Para demostrar el teorema, basta probar que  $G(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ , dado que  $H(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ .

Sea  $N_1(0)$  un entorno cualquier de 0. Puesto que  $H(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ , existe un entorno  $N_2(p)$  tal que

$$H(x) \in N_1(0) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x \neq p.$$

Podemos suponer que  $N_2(p) \subseteq N(p)$ . Entonces la desigualdad  $0 \leq G \leq H$  establece que  $G(x)$  no está más lejos de 0 si  $x$  está en  $N_2(p)$ ,  $x \neq p$ . Por consiguiente  $G(x) \in N_1(0)$  para tal valor  $x$  y por tanto  $G(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ . La misma demostración es válida si todos los límites son límites a un lado.

**Teorema 1.4** (Continuidad de las integrales indefinidas). Supongamos que  $f$  es integrable en  $[a, x]$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ , y sea

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Entonces la integral indefinida  $A$  es continua en cada punto de  $[a, b]$  (En los extremos del intervalo tenemos continuidad a un lado.)

Demostración.- Elijamos  $p$  en  $[a, b]$ . Hay que demostrar que  $A(x) \rightarrow A(p)$  cuando  $x \rightarrow p$ . Tenemos

$$A(x) - A(p) = \int_p^x f(t) dt$$

Puesto que  $f$  está acotada en  $[a, b]$ , existe una constante  $M > 0$  tal que  $-M \leq f(t) \leq M$  para  $t$  en  $[a, b]$ . Si  $x > p$ , integramos esas desigualdades en el intervalo  $[p, x]$  obteniendo

$$\int_p^x -M dt \leq \int_p^x f(t) dt \leq \int_p^x M dt \implies -M(x-p) \leq A(x) - A(p) \leq M(x-p).$$

Si  $x < p$ , obtenemos las mismas desigualdades con  $x - p$  sustituida por  $p - x$ . Por consiguiente, en uno u otro caso podemos hacer que  $x \rightarrow p$  y aplicar el principio de intercalación encontrando que  $A(x) \rightarrow A(p)$ . Esto prueba el teorema. Si  $p$  es un extremo de  $[a, b]$ , tenemos que hacer que  $x \rightarrow p$  desde el interior del intervalo, con lo que los límites son a un lado.

## 1.5. Demostraciones de los teoremas fundamentales sobre límites

Demostración de (i) y (ii). Puesto que las dos igualdades:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \text{ y } \lim_{x \rightarrow p} [f(x) - A] = 0$$

son completamente equivalentes, y como se tiene

$$f(x) + g(x) - (A + B) = [f(x) - A] + [g(x) - B],$$

basta demostrar las igualdades (i) y (ii) del teorema cuando los límites de  $A$  y  $B$  son ambos cero.

Supóngase pues, que  $f(x) \rightarrow 0$  y  $g(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ . Se demostrará en primer lugar que  $f(x) + g(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ . Para ello se tiene que probar que para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) + g(x)| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta.$$

Sea  $\epsilon$  dado. Puesto que  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ , exista un  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta_1.$$

Análogamente, puesto que  $g(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$  existe un  $\delta_2 > 0$  tal que:

$$|g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta_2.$$

Si se indica por  $\delta$  el menor de los dos números  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , entonces, ambas igualdades últimas son válidas si  $0 < |x - p| < \delta$ , y por tanto, en virtud de la desigualdad triangular, se tiene:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Esto demuestra la proposición dada que, a su vez, demuestra (i). La demostración de (ii) es completamente análoga, salvo que en el último paso se emplea la desigualdad  $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ .

Demostración de (iii). Supóngase que se ha demostrado (iii) en el caso particular en que uno de los límites es 0. Entonces el caso general resulta fácilmente de este caso particular, como se deduce de la siguiente igualdad:

$$f(x)g(x) - AB = f(x)[g(x) - B] + B[f(x) - A].$$

El caso particular implica que cada término del segundo miembro tienda a 0 cuando  $x \rightarrow p$  y en virtud de la propiedad (i) la suma de los dos términos tiende también a 0. Por tanto, basta sólo probar (iii) en el caso en que uno de los límites, por ejemplo  $B$ , sea 0.

Supóngase que  $f(x) \rightarrow A$  y  $g(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ . Se trata de probar que  $f(x) \cdot g(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ . Para ello se ha de ver que dado un número positivo  $\epsilon$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x)g(x)| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta.$$

Puesto que  $f(x) \rightarrow A$  cuando  $x \rightarrow p$ , existe un  $\delta_1$  tal que

$$|f(x) - A| < 1 \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta_1.$$

Para tal  $x$ , tenemos  $|f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$ , y por tanto

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < (1 + |A|)|g(x)|.$$

Ya que  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow p$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta_2$  tal que

$$|g(x)| < \frac{\epsilon}{1 + |A|} \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta_2.$$

Por consiguiente, si llamamos  $\delta$  al menor de los dos números  $\delta_1$  y  $\delta_2$  entonces las dos igualdades son válidas siempre que  $0 < |x - p| < \delta$  y para tal valor de  $x$  deducimos

$$|f(x)g(x)| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta.$$

Lo que completa la demostración.

Demostración de (iv). Puesto que el cociente  $f(x)/g(x)$  es el producto de  $f(x)/B$  por  $B/g(x)$  basta demostrar que  $B/g(x) \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow p$  y luego aplicar (iii). Sea  $h(x) = g(x)/B$ , por lo que  $h(x) \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow p$ , y se quiere demostrar que  $1/h(x)$  cuando  $x \rightarrow p$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , se trata de ver si existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{1}{h(x)} \right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta.$$

La diferencia se puede escribir como sigue:

$$\left| \frac{1}{h(x)} - 1 \right| = \frac{|h(x) - 1|}{|g(x)|}.$$

Puesto que  $g(x) \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow p$  se puede elegir un  $\delta > 0$  tal que ambas desigualdades:

$$|h(x) - 1| < \frac{\delta}{2} \quad \text{y} \quad |h(x) - 1| < \frac{1}{2}.$$

se satisfagan siempre que  $0 < |x - p| < \delta$ . La segunda de estas desigualdades implica  $h(x) > \frac{1}{2}$  y por tanto  $1/|h(x)| = 1/h(x) < 2$  para tales valores de  $x$ . Empleando este resultado en junto con la primera desigualdad, obtenemos

$$\left| \frac{1}{h(x)} - 1 \right| = \frac{|h(x) - 1|}{|g(x)|}.$$

Esto completa la demostración de (iv).

## 1.6. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 10, calcular los límites y explicar cuáles han sido los teoremas utilizados en cada caso.

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2}.$

Respuesta.-

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (iv) y por el hecho de que el límite de una constante es la misma constante.

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^3 + 2}{75x^7 - 2}$

Respuesta.-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^3 + 2}{75x^7 - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 25x^3 + \lim_{x \rightarrow 0} 2}{\lim_{x \rightarrow 0} 75x^7 - \lim_{x \rightarrow 0} 2} = \frac{0 + 2}{0 - 2} = -1.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$

Respuesta.-

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 4.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (1).

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}.$

Respuesta.-

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (1).

$$5. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}.$$

Respuesta.-

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2t + h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2t + \lim_{h \rightarrow 0} h = 2t.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (1).

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \quad a \neq 0.$$

Respuesta.-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-a}{x+a} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} a}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} a} = -1.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

$$7. \lim_{a \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \quad a \neq 0.$$

Respuesta.-

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{x-a}{x+a} = \frac{\lim_{a \rightarrow 0} x - \lim_{a \rightarrow 0} a}{\lim_{a \rightarrow 0} x + \lim_{a \rightarrow 0} a} = 1.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

$$8. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \quad a \neq 0.$$

Respuesta.-

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x+a} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} x - \lim_{x \rightarrow a} a}{\lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} a} = 0$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

$$9. \lim_{t \rightarrow 0} \tan t.$$

Respuesta.-

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tan t = 0.$$

10.  $\lim_{t \rightarrow 0} (\sin 2t + t^2 \cos 5t).$

Respuesta.-

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\sin 2t + t^2 \cos 5t) = \lim_{t \rightarrow 0} \sin 2t + \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos 5t = 0.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i) y (iii).

11.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}.$

Respuesta.- Ya que  $|x| = x$  para  $x > 0$ , por lo tanto tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}.$

Respuesta.- Ya que  $|x| = -x$  para  $x < 0$ , por lo tanto tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x}.$

Respuesta.- Para  $x > 0$  tenemos  $\sqrt{x^2} = |x| = x$  entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

14.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}.$

Respuesta.- Para  $x < 0$  tenemos  $\sqrt{x^2} = |x| = -x$  entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Utilizar la relación  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$  para establecer las igualdades de los Ejercicios del 15 al 20.

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$

Respuesta.-

16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} = 2.$

Respuesta.-



17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} = 5.$

Respuesta.-

18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} = 2.$

Respuesta.-

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a.$

Respuesta.-

20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Respuesta.-