# 1

# Cálculo diferencial

## 1.1 Aplicación del teorema del valor medio a propiedades geométricas de las funciones

**Teorema 1.1.** Sea $f$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y que admite derivada en cada punto de un intervalo abierto $(a, b)$. Tenemos entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para todo $x$ de $(a, b)$, $f$ es estrictamente creciente en $[a, b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ para todo $x$ de $(a, b)$, $f$ es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

c) Si $f'(x) = 0$ para algún $x$ de $(a, b)$, entonces $f$ es constante en $[a, b]$.

Demostración.- Para probar a) tenemos que demostrar que $f(x) < f(y)$ siempre que $a \leq x < y \leq b$. Por consiguiente, supongamos $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio al intervalo cerrado $[x, y]$. Obtenemos

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x), \quad \text{donde} \quad x < c < y.$$

Puesto que $f'(c)$ e $y - x$ son positivos, lo mismo le ocurre a $f(y) - f(x)$, y esto significa $f(x) < f(y)$, como se afirmó. La demostración de b) es parecida. Para demostrar c), utilizamos la igualdad dada haciendo $x = a$. Ya que $f'(c) = 0$, tenemos $f(y) = f(a)$ para todo $y$ en $[a, b]$, con lo que $f$ es constante en $[a, b]$.

Este teorema podemos emplearlo para demostrar que se presenta un extremo siempre que la derivada cambia de signo.

**Teorema 1.2.** Supongamos $f$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que existe la derivada $f'$ en todo punto del intervalo abierto $(a, b)$, excepto posiblemente en un punto $c$.

a) Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y negativa para todo $x > c$, $f$ tiene un máximo relativo en $c$.

b) Si, por otra parte, $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$, y positiva para todo $x > c$, $f$ tiene un mínimo relativo en $c$.

Demostración.- En el caso a), el teorema 4.7 nos dice que $f$ es estrictamente creciente en $[a, c]$ y estrictamente decreciente en $[c, b]$. Luego $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ en $(a, b)$, con lo que $f$ tiene un máximo relativo en $c$. Esto demuestra a) y la demostración de b) es completamente análoga.

### 1.2 Criterio de la derivada segunda para los extremos

Si una función $f$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, el teorema de los valores extremos nos dice que tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en algún punto de $[a, b]$. Si $f$ tiene derivada en cada punto interior, entonces los únicos puntos en los que pueden presentarse los extremos son:

1) En los extremos del intervalo a y b;

2) en aquellos puntos interiores x en los que $f'(x) = O$.

Los puntos del tipo 2) se llaman con frecuencia puntos críticos de $f$. Para decidir si en un punto crítico $c$ existe un máximo o un mínimo (o ni uno ni otro), necesitamos más información acerca de la función $f$. Ordinariamente el comportamiento de $f$ en un punto crítico puede determinarse a partir del signo algebraico de la derivada en las proximidades de $c$. El teorema que sigue hace ver que un estudio del signo de la derivada segunda en las cercanías de e puede también sernos de utilidad.

**Teorema 1.3** (Criterio de la derivada segunda para extremos en un punto crítico)**.** Sea $c$ un punto crítico de $f$ en un intervalo abierto $(a, b)$; esto es, supongamos $a < c < b$ y que $f'(c) = 0$. Supongamos también que exista la derivada segunda $f''$ en $(a, b)$. Tenemos entonces:

a) Si $f''$ es negativa en $(a, b)$, $f$ tiene un máximo relativo en $c$.

b) Si $f''$ es positiva en $(a, b)$, $f$ tiene un mínimo relativo en $c$.

Demostración.- Consideremos el caso $a)$, $f'' < 0$ en $(a, b)$. Según el teorema 4.7 Tom Apostol (aplicado a $f'$), la función $f'$ es estrictamente decreciente en $(a, b)$. Pero $f'(c) = 0$, con lo que $f'$ cambia su signo de positivo a negativo en $c$. Luego, según el teorema 4.8 Tom Apostol, $f$ tiene un máximo relativo en $c$. La demostración en el caso b) es completamente análoga.

El signo de la derivada segunda también está relacionado con la concavidad o la convexidad de $f$. El siguiente teorema demuestra que la función es convexa en los intervalos en los que $f''$ es positiva, $f$ es cóncava ya que $f''$ es negativa. Basta discutir tan sólo el caso de la convexidad, ya que si $f$ es convexa, $-f$ es cóncava.

**Teorema 1.4** (Criterio de la derivada para la convexidad)**.** Supongamos $f$ continua en $[a, b]$ y que tenga derivada en el intervalo abierto $(a, b)$. Si $f'$ es creciente en $(a, b)$ entonces $f$ es convexa en $[a, b]$. En particular, $f$ es convexa si $f''$ existe y es no negativa en $(a, b)$.

Demostración.- Consideremos $x < y$ en $[a, b]$ y pongamos $z = \alpha y + (1-\alpha)x$, donde $0 < \alpha < 1$. Queremos demostrar que $f(z) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$. Puesto que $f(z) = \alpha f(z) + (1-\alpha)f(z)$, esto es lo mismo que demostrar que
$$(1-\alpha)[f(z) - f(x)] \leq \alpha[f(y) - f(z)].$$
Según el teorema del valor medio (aplicando dos veces), existen puntos $c$ y $d$ que satisfacen $x < c < z$ y $z < d < y$ tales que
$$f(z) - f(x) = f'(c)(z-x), \quad \text{y} \quad f(y) - f(z) = f'(d)(y-z).$$
Puesto que $f'$ es creciente, tenemos $f'(c) \leq f'(d)$. Así mismo, tenemos $(1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$, de modo que podemos escribir
$$(1-\alpha)[f(z) - f(x)] = (1-\alpha)f'(c)(z-x) \leq \alpha f'(d)(y-z) = \alpha[f(y) - f(z)],$$
lo que demuestra la desigualdad exigida por la convexidad.

## 1.19 Ejercicios

En los siguientes Ejercicios, a) hallar todos los puntos x tales que $f'(x) = 0$; b) examinar el signo de $f'$ y determinar aquellos intervalos en los que $f$ es monótona; c) examinar el signo de $f''$ y determinar aquellos intervalos en los que $f'$ es monótona; d) construir un boceto de la gráfica de $f$. En cada caso, la función está definida para todos los $x$ para los cuales tiene sentido $f(x)$.

**1.** $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Respuesta.-

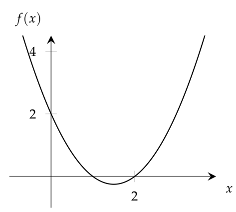
(a) Derivando $f(x)$, tenemos $f'(x) = 2x - 3$. Luego igualando a 0,

$$2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que $f'$ es creciente si $x > \dfrac{3}{2}$ y decreciente si $x < \dfrac{3}{2}$.

(c) Sea $f''(x) = 2$. Ya que $2 > 0$, entonces por el mismo criterio del teorema 4.7 (tom Apostol, capítulo 4) $f'$ es creciente para todo $x$.

(d)




**2.** $f(x) = x^3 - 4x$.

Respuesta.-

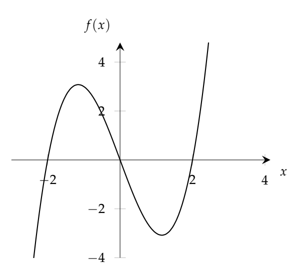
(a) Derivando $f(x)$, tenemos $f'(x) = 3x^2 - 4$. Luego igualando a 0,

$$3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que $f'$ es creciente si $|x| > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y decreciente si $|x| < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(c) Sea $f''(x) = 6x$. Por lo tanto, $f'$ es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$.

(d)



**3.** $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

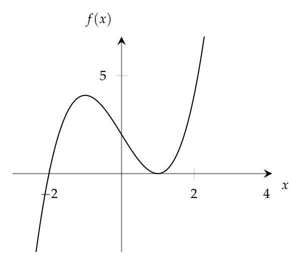
Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = 3(x^2-1)$$
Luego igualando a 0,
$$3(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que $f'$ es creciente si $|x| > 1$ y decreciente si $|x| < -1$.

(c) Sea $f''(x) = 6x$. Por lo tanto, $f'$ es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$.

(d)




**4.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

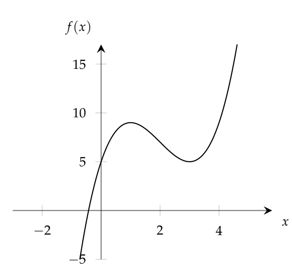
Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$
Luego igualando a 0,
$$3(x^2-4x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:
$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x < 1 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & 1 < x < 3 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > 3 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = 2x - 4$. Entonces,
$$2x - 4 > 0 \;\Rightarrow\; x > 2 \qquad \text{y} \qquad 2x - 4 < 0 \;\Rightarrow\; x < 2.$$
Por lo tanto por el mismo criterio del teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), se tiene que $f'$ es creciente si $x > 2$ y decreciente si $x < 2$.

(d)




**5.**