Universidad:	**Mayor de San Ándres.**
Asignatura:	**Geometría II.**
Prática:	2.
Alumno:	**PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Ejercicio 1. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto con vector direccional $\vec{v}$, cuando

a) $\boldsymbol{P_0 = (5,3,-2);\ \vec{v} = (2,-3,3).}$

Respuesta.- La ecuación vectorial estará dada por,

$$X = (5,3,-2) + t(2,-3,3);\ t \in \mathbb{R}$$

Luego la ecuación cartesiana estará dada por,

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 5+2t \\ y & = & 3-3t \\ z & = & -2+3t \end{array}\right.$$

b) $P_0 = (-3,2,-1);\ \vec{v} = (-2,5,1).$

Respuesta.- La ecuación vectorial es,

$$X = (-1,3,4) + t(-2,5-1);\ t \in \mathbb{R}$$

se sigue,

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -3-2t \\ y & = & 2+5t \\ z & = & -2-t \end{array}\right.$$

Ejercicio 2. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los pares de puntos dados y proporcionar sus ecuaciones paramétricas.

a) $\boldsymbol{(8,3,2)}$ **y** $\boldsymbol{(5,0,1).}$

Respuesta.- La ecuación de la recta viene dada por

$$\mathcal{L} = \{(8,3,2) + t(-3,-3,-1)/t \in \mathbb{R}\}$$

Luego las ecuaciones paramétricas son,

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 8-3t \\ y & = & 3-3t \\ z & = & 2-t \end{array}\right.$$

b) $\boldsymbol{(-3,2,-1)}$ **y** $\boldsymbol{(-2,7,-5)}$

Respuesta.- La ecuación de la recta será,

$$\mathcal{L} = \{(-3,2,-1) + t(1,5,-4)/t \in \mathbb{R}\}$$

Luego las ecuaciones paramétricas son,

$$\begin{cases} x &= -3+t \\ y &= 2+5t \\ z &= -1-4t \end{cases}$$

Ejercicio 3. ¿Son colineales los puntos dados?.

a) $\mathbf{(2,-3,2),(0,0,0),(3,-2,0)}$

Respuesta.- Sea $\vec{v} = (0,0,0)-(2,-3,2) = (-2,3,-2)$ y $\vec{u} = (3,-2,0)-(2,-3,2) = (1,1,-2)$ de donde nos faltará comprobar que $\vec{v} = r\vec{u}$ para $r \in \mathbb{R}$.

$$(-2,-3,-2) \neq r(1,1,-2)$$

por lo tanto los puntos dados no son colineales.

b) $\mathbf{(1,2,0),(5,-7,8),(4,3,-1)}$

Respuesta.- análogamente al anterior ejercicio $(4,-9,8) \neq r(3,1,-1)$ para $r \in \mathbb{R}$ y por lo tanto los puntos dados no son colineales.

Ejercicio 4. Calcular la distancia del punto $\boldsymbol{P_0}$ a la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{P_1}$ y $\boldsymbol{P_2}$. $\boldsymbol{P_0 = (5,-3,1);\ P_1 = (4,0,2);\ P_2 = (5,0,0)}$.

Respuesta.- Primero encontramos la recta asociada a los dos puntos dados de la siguiente forma,

$$\mathscr{L} = \{P_1 + (P_2 - P_1)t | t \in \mathbb{R}\} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L} = \{(4,0,2) + t(1,0,-2) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Luego,

$$(5,-3,1) = (4,0,2) + t(1,0,-2),$$

de donde,

$$\begin{cases} 5 &= 4+1t \\ -3 &= 0+0t \\ 1 &= 2-2t \end{cases}$$

Dado que no existe un t tal que $(5,-3,1) = (4,0,2)+t(1,0,-2)$, entonces P_0 no pertenece a $\mathscr{L}$. Por lo que podemos calcular la distancia del punto P_0 a la recta $\mathscr{L}$ como sigue,

$$\begin{aligned} d(P_0,\mathscr{L}) &= \left\| (P_0 - P_1) - \frac{(P_0 - P_1) \circ \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{a} \right\| \\ &= \left\| [(5,-3,1)-(4,0,2)] - \frac{[(5,-3,1)-(4,0,2)] \circ (1,0,-2)}{\|(1,0,-2)\|^2} \cdot (1,0,-2) \right\| \end{aligned}$$

de donde

$$d(P_0,\mathcal{L}) = \sqrt{\frac{230}{25}} = 3.0331$$

Ejercicio 5. **Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $(-1, 2, -4)$ y que es paralela a $3i - 4j + k$.**

Respuesta.- Sean, el punto $P(-1, 2, -4)$ y el vector $\vec{a} = 3i - 4j + k = (3, -4, 1)$. Podemos construir la recta de la siguiente manera,

$$\mathscr{L} = \{P - t\vec{a} | t \in \mathbb{R}\}$$

Luego, la a ecuación paramétrica paralela a $(3i - 4j + k)$ estará dada por,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & 3t \\ y & = & 2 & + & 4t \\ z & = & -4 & + & t \end{array} \right.$$

Ejercicio 6. **Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por $(-2, 0, 5)$ y que es paralela a la recta $x = 1 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = 6 + 2t$.**

Respuesta.- Sea,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 2t \\ y & = & 4 & - & t \\ z & = & 6 & + & 2t \end{array} \right.$$

De donde,

$$\mathscr{L}_1 = \{(1, 4, 6) + t(2, -1, 2) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Así, podemos construir otra recta paralela a $\mathscr{L}$, de la siguiente forma:

$$\mathscr{L}_2 = (-2, 0, 5) + r(2, -1, 2)/s \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 7. **¿Dónde interseca la recta $x = -1 + 2t, y = 3 + t, z = 4 - t$?**

a) **al plano xy.**

b) **al plano xz.**

c) **al plano yz.**

Respuesta.- Lo que debemos hallar son puntos que pasa por xy, xz ó yz.
Sean,

$$\mathscr{L} = \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -1 + 2t \\ y & = & 3 + t \\ z & = & 4 - t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

Y las ecuaciones cartesianas del plano xy, xz y yz, respectivamente:

$$\begin{array}{rcrcl} xy: & z & = & 0 \\ xz: & y & = & 0 \\ yz: & x & = & 0 \end{array}$$

Entonces, igualando $\mathscr{L}$ en cada una de las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{array}{rrcl} xy: & 4 - t_1 & = & 0 \\ xz: & 3 + t_2 & = & 0 \\ yz: & -1 + 2t_3 & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrcr} xy: & t_1 & = & 4 \\ xz: & t_2 & = & -3 \\ yz: & t_3 & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Reemplazando cada t_i en la ecuación de $\mathscr{L}$, obtenemos:

$$\begin{array}{rrcccc} xy: & x & = & -1+2\cdot 4 & = & 7 \\ & y & = & 3+4 & = & 7 \\ & z & = & 4-\cdot 4 & = & 0 \\ \\ xz: & x & = & -1+2\cdot(-3) & = & -7 \\ & y & = & 3-3 & = & 0 \\ & z & = & 4-(-3)=7 & & \\ \\ yz: & x & = & -1+2\cdot\frac{1}{2} & = & 0 \\ & y & = & 3+\frac{1}{2} & = & 3.5 \\ & z & = & 4-\frac{1}{2} & = & 3.5 \end{array}$$

Por lo tanto, la recta $\mathscr{L}$ interseca al plano xy en el punto $(7,7,0)$, al plano xz en el punto $(-7,0,7)$ y al plano yz en el punto $(0,3.5,3.5)$.

Ejercicio 8. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (x_1,y_1,z_1) y que es paralela a la recta $x=x_0+at, y=y_0+bt, z=z_0+ct$.

Respuesta.- Primero encontramos el vector director de la recta,

$$\vec{v}=(a,b,c).$$

luego, definimos el vector normal de la siguiente manera,

$$\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$$

De donde podemos calcular su producto escalar, doescalarnde nos indica que la normal del plano donde pasa el punto (x_1,y_2,z_1) es perpendicular a la recta dada.

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=0 \quad\Rightarrow\quad n_1x_1+n_2y_1+n_3z_1=0$$

Ahora, fijamos dos valores arbitrarios para

Ejercicio 9. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(-1,4-2)$ y que contiene a la recta de intersección de los planos.

$$\mathbf{4x-y+z-2=0 \qquad y \qquad 2x+y-2z-3=0.}$$

Respuesta.- La ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos: $4x-y+z-2=0$ y $2x+y-2z-3=0$ está dada por:

$$4x-y+z-2+\lambda(2x+y-2z-3)=0$$

Dado que el plano anterior pasa por el punto dado $(-1,4,2)$, satisfará la ecuación del plano $4x-y+z-2+\lambda(2x+y-2z-3)=0$ de la siguiente manera

$$4(-1)-4+2-2+\lambda(2(-1)+4-2\cdot 2-3)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=-\frac{8}{5}.$$

Luego sustituyendo λ en la ecuación del plano $4x-y+z-2+\lambda(2x+y-2z-3)=0$ se concluye que:

$$4x-y+z-2-\frac{8}{5}(2x+y-2z-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 4x-13y+21z+14=0.$$

Ejercicio 10. Demuestre que las rectas $x-1=\dfrac{y+1}{2}=z$ y $x-2=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{2}$ se intersecan. Determine una ecuación del (único) plano que las contiene.

Demostración.- Sean, $\mathscr{L}_1 : x-1=\dfrac{y+1}{2}=z$ y $\mathscr{L} : x-2=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{2}$. Convirtiendo es su forma parametrica se tiene:

$$\mathscr{L}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& -1+2t \\ z &=& t \end{array} \right. ; t \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \mathscr{L}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 2+\lambda \\ y &=& 2+3\lambda \\ z &=& 4+2\lambda \end{array} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Para el punto de interserccción, igualamos las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, como sigue:

$$\begin{array}{rcl} 1+t &=& 2+\lambda \\ -1+2t &=& 2+3\lambda \\ t &=& 4+2\lambda \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1+(4+2\lambda)=2+\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda=-3 \ \text{ y } \ t=-2$$

Luego, reemplazamos λ y t en la ecuación de $\mathscr{L}_1$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1+(-2) \\ y &=& -1+2(-2) \\ z &=& (-2) \end{array} \right.$$

Así el punto de intersección entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, estará dado por:

$$P_I(-1,-5,-2).$$

Ahora, hallemos las normales de cada recta. Para ello, primero tomamos los escalares que multiplican al vector de cada recta

$$\vec{v}_1=(1,2,1) \quad \text{y} \quad \vec{v}_2=(1,3,2).$$

Luego calculemos el producto vectorial de cada uno de los vectores anteriores:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right| = 1i+(-2)j+(-1)k=(1,-1,1)=\vec{n}$$

Así, la ecuación del plano estará dado por el vector normal y el punto de la recta $\mathscr{L}_1$.

$$\begin{array}{rl} (1,-1,1)\circ(x-1,y+1,z)=0 & \Rightarrow \quad x-1-y-1+z=0 \\ & \Rightarrow \quad x-y+z=2 \end{array}$$

Ejercicio 11. Demuestre que la recta de intersección de los planos $x+2y-z=2$ y $3x+2y+2z=7$ es paralela a la recta $x=1+6t$, $y=3-5t$, $z=2-4t$. Determine una ecuación del plano determinado por estas dos rectas.

Demostración.- Sean,

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \mathscr{P}_1 : & x+2y-z &=& 2 \\ \mathscr{P}_2 : & 3x+2y+2z &=& 7 \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad \mathscr{L}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1+6t \\ y &=& 3-5t \\ z &=& 2-4t \end{array} \right.$$

Primero, parametricemos las ecuaciones de los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$, poniendo a $x=\lambda$,

$$\begin{array}{rcr} \lambda+2y-z &=& 2 \\ 3\lambda+2y+2z &=& 7 \\ \hline -2\lambda+0-3z &=& -5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{5-2\lambda}{3}.$$

Luego reemplazos z en el plano de $\mathscr{P}_1$,

$$x + 2y - z = 2 \quad \Rightarrow \quad x + 2y - \frac{5 - 2\lambda}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{11}{6} - \frac{5}{6}\lambda.$$

De donde, la ecuación paramétrica de la recta $\mathscr{L}_1$ que se interseca en $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ estará dada por:

$$\mathscr{L}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ \\ y & = & \dfrac{11}{6} - \dfrac{5}{6}\lambda \\ \\ z & = & \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}\lambda \end{array} \right. \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para determinar la ecuación del plano que pase por las dos rectas, es suficiente un punto de cada recta $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

$$P_1(1,3,2) \quad \text{y} \quad P_2(0, \frac{11}{6}, \frac{5}{3})$$

Luego, hallemos su vector

$$P_1\vec{P}_2 = P_1 - P - 2 = \left(1, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}\right) = (6,7,2).$$

Dado que $\vec{v}$ de la recta $\mathscr{L}_1$ es $(6,-5,-4)$, entonces

$$\vec{n} = P_1\vec{P}_2 \times \vec{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 6 & 7 & 2 \\ 6 & -5 & -4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = (-3,4,-8)$$

Por lo tanto, la ecuación del plano que pasa por las dos rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ estará dada por:

$$\begin{array}{rl} \mathscr{P} : (-3,4,-8) \circ (x,y,z) = 0 & \Rightarrow \quad -3x + 3 + 4y - 12 - 8z + 16 = 0 \\ \\ & \Rightarrow \quad 3x - 4y + 8z = 7 \end{array}$$

Ejercicio 12. Demostrar que la distancia D entre los planos paralelos $ax + by + cz + d = d_1$ y $ax + by + cz + d = d_2$ está dada por:

$$\boldsymbol{D = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

Demostración.- Sabemos que para $\mathscr{P} : ax + by + cz = d$ con $P_0 = (x_0, y_0)$, la distancia está dada por:

$$d(P_0, \mathscr{P}) \frac{|ax_0, by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Primero, hallemos un punto P_0 del plano $ax + by + cz + d = d_1$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad z = \frac{d_1 - d}{c}.$$

Así $P_0 = \left(0, 0, \dfrac{d_1 - d}{c}\right)$ Por último, hallemos $D = d(P_0, ax + by + cz + d = d_2)$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} D &= \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c\left(\frac{d_1 - d}{c}\right) - d_2 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|d_1 - d - d_2 + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}|} \\ &= \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \end{aligned}$$