Problemas resueltos: Probabilidad y estadística aplicaciones y métodos George Canavos

Por: Christian Paredes Aguilera (Fode)

12/2/2022

```
#librerias
library(ggplot2)
source("funciones_chapter4.R")
```

Ejercicios Capítulo 3

3.1

Sea X una variable aleatoria que representa el número de llamadas que recibe un conmutador en un intervalo de cinco minutos y cuta función de probabilidad está dada por $p(x) = e^{-3}(3)^x/x!, x = 0, 1, 2, \ldots$.

a)

Determinar las probabilidades de que X sea igual a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7.

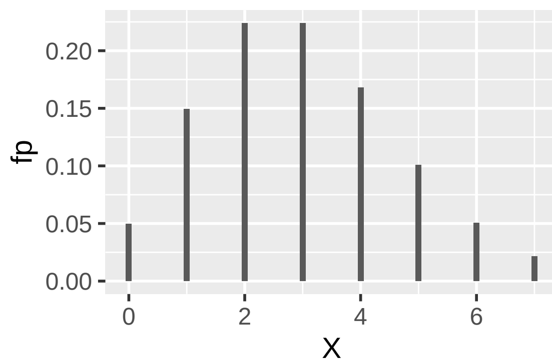
```
X <- c(0,1,2,3,4,5,6,7)
fp <- c()
for (x in 0:7) {
  fp <- c(fp, exp(-3)*3^x / factorial(x))
}
df <- data.frame(X,fp)
df
```

```
##   X         fp
## 1 0 0.04978707
## 2 1 0.14936121
## 3 2 0.22404181
## 4 3 0.22404181
## 5 4 0.16803136
## 6 5 0.10081881
## 7 6 0.05040941
## 8 7 0.02160403
```

b)

Graficar la función de probabilidad para estos valores de X

```
ggplot(data = df, mapping = aes(X,fp)) +
  geom_col(width = 0.1)
```



c)

Determinar la función de distribución acumulativa para estos valores de X

```
fda <- c()
sum <- 0
for (x in 0:7) {
  sum <- sum + (exp(-3)*3^x / factorial(x))
  fda <- c(fda,sum)
}
df <- data.frame(X,fp,fda)
print(fda)
```

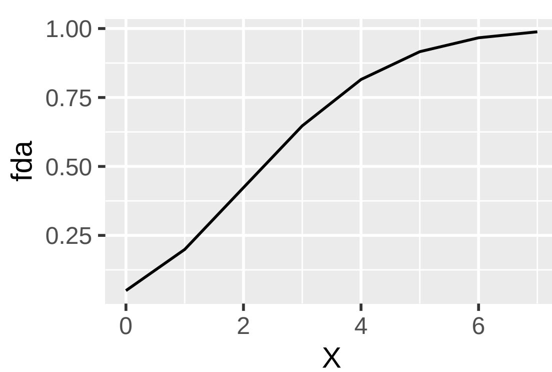
```
## [1] 0.04978707 0.19914827 0.42319008 0.64723189 0.81526324 0.91608206 0.96649146
## [8] 0.98809550
```

d)

Graficar la función de distribución acumulativa.

```
ggplot(data = df, mapping = aes(X,fda)) +
  geom_line(width = 2)
```

```
## Warning in geom_line(width = 2): Ignoring unknown parameters: `width`
```



3.2.

Sea X una variable aleatoria discreta. Determinar el valor de k para que la función $p(x) = k/x, x = 1, 2, 3, 4,$ sea la función de probabilidad de X. Determinar $P(1 \leq X \leq 3)$

Respuesta.- Por definición 3.4, sea

$$k + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{12}{25}$$

entonces la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X estará dada por:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{25} & si \quad x = 1 \\ \dfrac{6}{25} & si \quad x = 2 \\ \dfrac{4}{25} & si \quad x = 3 \\ \dfrac{3}{25} & si \quad x = 4 \end{cases}$$

Así, la probabilidad de $P(1 \leq X \leq 3)$ será,

$$P(1 \leq X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25} = 1.88$$

3.3.

Sea X una variable aleatoria continua.

a)

Determinar el valor de k, de manera tal que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X.

Respuesta.- Según la definición 3.6 se tiene,

$$\int_{-x}^{x} kx^2 \, dx = \int_{-1}^{1} kx^2 \, dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

```
integrate(function(x) 3/2*x^2, lower = -1, upper = 1)
```

```
## 1 with absolute error < 1.1e-14
```

b)

Determinar la función de distribución acumulativa de X y graficar $F(x)$.

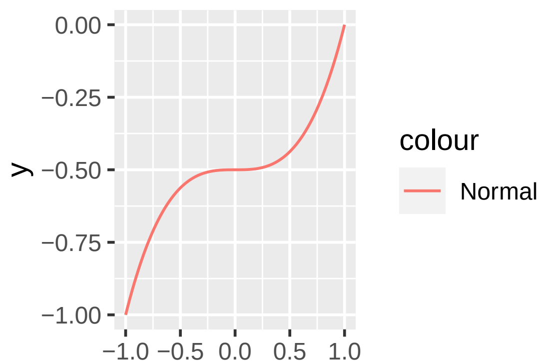
Respuesta.-

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^{x} \frac{3}{2} t^2 \, dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3 + 1}{3} = \frac{x^3 + 1}{2}$$

```r
funcdist <- function(x) (x^3+1)/2
```

$$P(X \leq x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{2} & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & si \quad \text{Para cualquier otro valor} \end{cases}$$

```r
ggplot() +
   xlim(-1, 1) +
   geom_function(
     aes(color = "Normal"),
     fun =~ (.x^3-1)/2
     )
```



c)

Calcular $P(X \geq 1/2)$ y $P(-1/2 \leq X \leq 1/2)$.

Respuesta.-

$$P(X \geq 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - \frac{x^3+1}{2} = 1 - \frac{(1/2)^3+1}{2} = 1 - \frac{9/8}{2} = \frac{7}{16}$$

```r
1-funcdist(1/2)
```

```
## [1] 0.4375
```

$$P(-1/2 \leq X \leq 1/2) = P(X \leq 1/2) - P(X \leq -1/2) = \frac{(1/2)^3}{2} - \frac{(-1/2)^3}{2} = \frac{1}{8}$$

```r
# primera manera
funcdist(1/2) - funcdist(-1/2)
```

```
## [1] 0.125
```

```r
# segunda manera
integrate(function(x) 3/2*x^2, lower = -1/2, upper = 1/2)
```

```
## 0.125 with absolute error < 1.4e-15
```

3.4.

Sea X una variable aleatoria continua.

a)

Determinar el valor de k para que la función

Respuesta.-

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/5} & x > 0 \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X

Respuesta.- Por la definición 3.6 se tiene y sabiendo que $x \leq 0$ es cero.

$$\int_{-\infty}^{\infty} k \cdot e^{-x/5}\, dx = \int_{0}^{\infty} k \cdot e^{-x/5}\, dx$$

Luego igualando a uno,

$$\int_{0}^{\infty} k \cdot e^{-x/5}\, dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{5}$$

```
integrate(function(x) 1/5 * exp(-x/5), lower = 0, upper = Inf)
```

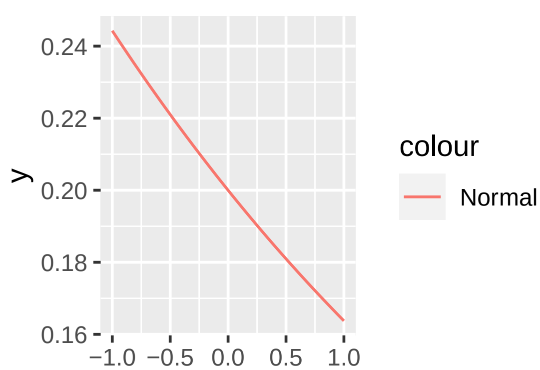
```
## 1 with absolute error < 2e-07
```

b)

Graficar $f(x)$

Respuesta.-

```
ggplot() +
   xlim(-1, 1) +
   geom_function(
     aes(color = "Normal"),
     fun =~ 1/5 * exp(-.x/5)
     )
```



c)

Calcular $P(X \leq 5)$ y $P(0 \leq X \leq 8)$.

Respuesta.-

$$P(X \leq 5) = \int_{0}^{5} \frac{1}{5} e^{-x/5}\, dx = 1 - \frac{1}{e}$$

```r
integrate(function(x) 1/5 * exp(-x/5), lower = 0, upper = 5)
```

```
## 0.6321206 with absolute error < 7e-15
```

$$P(0 \leq X \leq 8) = \int_0^8 \frac{1}{5} e^{-x/5}\, dx = 1 - \frac{1}{e^{8/5}}$$

```r
integrate(function(x) 1/5 * exp(-x/5), lower = 0, upper = 8)
```

```
## 0.7981035 with absolute error < 8.9e-15
```

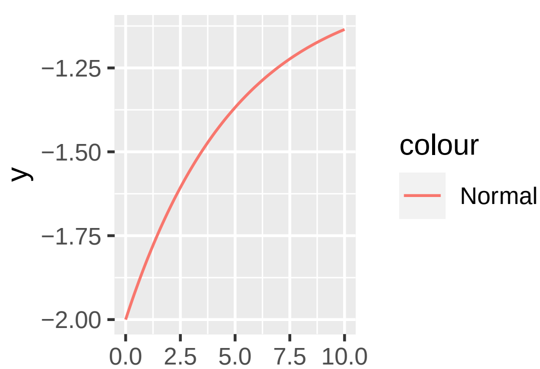
d)

Determinar $F(x)$ y graficarla.

Respuesta.- La función de distribución acumulativa esta dado por

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \frac{1}{5}\int_0^x e^{-t/5}\, dt = -e^{-x/5} - 1$$

```r
ggplot() +
   xlim(0, 10) +
   geom_function(
     aes(color = "Normal"),
     fun =~ -exp(-.x/5) - 1
     )
```



3.5

La duración en horas de un componente electrónico, es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulativa es $F(x) = 1 - e^{-x/100}, x > 0$

a)

Determinar la función de probabilidad de X.

Respuesta.-

$$F^{'}(x) = 1 - e^{-x/100} = \frac{1}{100} e^{-x/100}$$

b)

Determinar la probabilidad de que el componente trabaje más de 200 horas.

Respuesta.-

$$1 - (1 - exp(-200/100)) = 0.13533$$

```
1-(1-exp(-200/100))
```

```
## [1] 0.1353353
```

```
integrate(function(x) 1/100 * exp(-x/100), lower = 0, upper = 200)
```

```
## 0.8646647 with absolute error < 9.6e-15
```

3.6

La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria está dada por

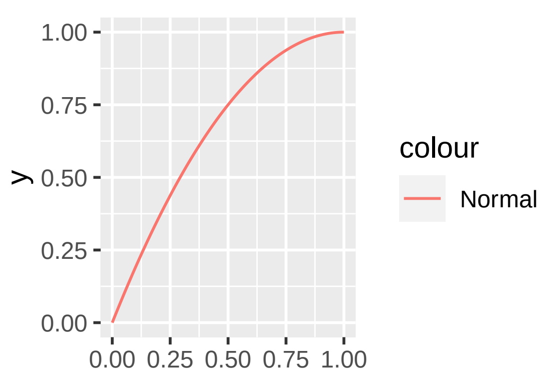
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

a)

Graficar $F(x)$.

Respuesta.-

```
# gráfico de F(x)
ggplot() +
  xlim(0, 1) +
  geom_function(
    aes(color = "Normal"),
    fun =~ 2*.x - .x^2,
    )
```



b)

Obtener $P(X < 1/2)$ y $P(X > 3/4)$.

Respuesta.-

$P(X < 1/2) = 2 \cdot 1/2 - (1/2)^2 = 3/4 = 0.75$

```r
func <- function(x) 2*x - x^2
func(0.5)
```

```
## [1] 0.75
```

$1-P(X>3/4)=1-(2\cdot 3/4-(3/4)^2)=1-(-3/4)1-(15/16)=1/16=0.0625$

```r
1-func(3/4)
```

```
## [1] 0.0625
```

c)

Determinar $f(x)$.

Respuesta.-

$F^{'}(x)=2x-2^2=2-x$

3.7

Sea X una variable aleatoria que representa el número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora. Dada la siguiente información

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	0.05	0.10	0.10	0.10	0.20	0.25	0.10	0.05	0.05

encontrar $E(x)$ y $Var(X)$

Respuesta.-

```r
x <- c(0,1,2,3,4,5,6,7,8)
px <- c(0.05,0.1,0.1,0.1,0.2,0.25,0.1,0.05,0.05)
```

$E(X)=\sum_{x=1}^{n} x\cdot p(x)=0\cdot 0.05+1\cdot 0.1+\ldots+8\cdot 0.05=4$

```r
sum <- 0
for (i in 1:length(x)){
 sum <- sum + x[i]*px[i]
}
sum
```

```
## [1] 4
```

$E(X^2)=\sum_{x=1}^{n} x^2p(x)=0^2\cdot 0.05+1^2\cdot 0.1+\ldots+8^2\cdot 0.05=20.1$

```r
sum2 <- 0
for (i in 1:length(x)){
 sum2 <- sum2 + x[i]^2 * px[i]
}
sum2
```

```
## [1] 20.1
```

$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=20.1-4^2=4.1$

```r
sum2 - sum^2
```

```
## [1] 4.1
```

3.8

Una compañía de seguros debe determinar la cuota anual a cobrarse por un seguro de 50 mil dolares para hombres cuya edad se encuentra entre los 30 y 35 años. Con base en las tablas actuariales el número de fallecimientos al año, para este grupo, es de 5 por cada mil. Si X es la variable aleatoria que representa la ganancia de la compañía de seguros, determinar el monto de la cuota anual para que la compañía no pierda, a pesar de tener un número grande de tales seguros.

Respuesta.- Calculamos el valor para un ganancia nula

$$E[X] = 0 = \frac{C \cdot 995}{1000} - \frac{50000 \cdot 5}{100} \Longrightarrow 995C = 250000 \Longrightarrow C = 251.26$$

3.9

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$$

Determinar:

a)

$E(X)$

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)\, dx = \int_0^1 2x - 2x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

```
func <- function(x) x*2*(1-x)
integrate(func, lower = 0, upper = 1)
```

```
## 0.3333333 with absolute error < 3.7e-15
```

b)

$Var(X)$

Respuesta.-

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x)\, dx = \int_0^1 2x^2 - 2x^3\, dx = \frac{1}{6}$$

```
func <- function(x) x^2*2*(1-x)
integrate(func, lower = 0, upper = 1)
```

```
## 0.1666667 with absolute error < 1.9e-15
```

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

```
# varianza
1/6 - (1/3)^2
```

```
## [1] 0.05555556
```

3.10

Sea X una variable aleatoria que representa la magnitud de la desviación, a partir de una valor prescrito, del peso neto de ciertos recipientes, los que se llenan mediante una máquina. Función de densidad de una v.a. de X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a)

$E(X)$.

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{1}{10} x \cdot \, dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} x \, dx = 5$$

```r
func <- function(x) 1/10 * x
integrate(func, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 5 with absolute error < 5.6e-14
```

b)

$Var(X)$.

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{1}{10} x^2 \cdot \, dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} x^2 \, dx = \frac{100}{3}$$

```r
func <- function(x) 1/10 * x^2
integrate(func, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 33.33333 with absolute error < 3.7e-13
```

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3} = 8.33333$$

```r
# varianza
100/3 - 5^2
```

```
## [1] 8.333333
```

c)

$\alpha_3(X)$.

Respuesta.-

α_3 también llamado coeficiente de asimetría estará dado por

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

de donde μ_3 será:

$$\mu_3 = E(X-5)^3 = \int_0^{10} \frac{1}{10} \cdot (x-5)^3 \, dx = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} (x^3 - 15x^2 + 75x - 125) \, dx = 0$$

para μ_2 tenemos

$$Var(X) = E(X-5)^2 = \int_0^{10} \frac{1}{10} \cdot (x-5)^2 \, dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} (x^2 - 10x + 25) \, dx = \frac{25}{3}$$

Entonces

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{0}{\left(\frac{25}{3}\right)^{3/2}} = 0$$

```r
func <- function(x) 1/10 * (x-5)^3
func2 <- function(x) 1/10 * (x-5)^2
integrate(func, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 1.204593e-15 with absolute error < 3.5e-13
```

```r
integrate(func2, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 8.333333 with absolute error < 9.3e-14
```

Donde nos menciona que se tiene un coeficiente de asimetría simétrica.

d)

$\alpha_4(X)$.

Respuesta.-

Para α_4 como medida relativa de la curtosis tenemos

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

de donde tenemos μ_4 de la siguiente manera

$$\mu_4 = E(X-5)^4 = \int_0^{10} \frac{1}{10} \cdot (x-5)^4 \, dx = 125$$

```r
func4 <- function(x) 1/10 * (x-5)^4
integrate(func4, lower = 0, upper = 10)
```

```
## 125 with absolute error < 1.4e-12
```

para luego:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{125}{\frac{25^2}{3^3}} = 5.4$$

Donde nos dice que la distribución presenta un pico relativamente alto

3.11

Supóngase que la duración en minutos de una llamada de negocios, es una variable aleatoria cuyo función de densidad de probabilidad está determinada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4} & x > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar:

a)

$E(X)$.

Respuesta.-

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{4} e^{-x/4} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^\infty x \cdot e^{-x/4} \, dx = 4$$

```
func <- function(x) 1/4*x*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 4 with absolute error < 1.2e-05
```

b)

$Var(X)$.

Respuesta.-

$$Var(X) = E(X-4)^2 = \int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-x/4} \cdot (x-4)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-x/4} \cdot (x-4)^2 \, dx = 16$$

```
func <- function(x) 1/4*(x-4)^2*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 16 with absolute error < 0.00051
```

c)

$\alpha_3(x)$.

Respuesta.-

$$\mu_3 = E(X-4)^3 = \frac{1}{4} \int_0^\infty (x-4)^3 \cdot e^{-x/4} \, dx = 128$$

```
func <- function(x) 1/4*(x-4)^3*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 128 with absolute error < 0.00029
```

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{128}{16^{3/2}} = 2$$

```
128/(16^(3/2))
```

```
## [1] 2
```

De donde podemos mencionar que se tiene una asimetría positiva.

d)

$\alpha_4(X)$.

Respuesta.-

$$\mu_4 = E(X-4)^4 = \frac{1}{4} \int_0^\infty (x-4)^4 \cdot e^{-x/4} \, dx = 2304$$

```
func <- function(x) 1/4*(x-4)^4*exp(-x/4)
integrate(func, lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 2304 with absolute error < 0.0025
```

así,

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{2304}{16^2} = 9$$

```
2304/16^2
```

```
## [1] 9
```

e)

Defiérase al ejercicio 3.10. Basandose en sus respuestas a, a d del problema 3.11, compare las dos distribuciones de probabilidades. ¿Cuál muestra la mayor dispersión relativa?.

Respuesta.-

Del ejercico 3.10

$$V_X = \frac{E(X)}{Var(X)} = \frac{5}{8.33333}$$

```
5/8.33333
```

```
## [1] 0.6000002
```

Del ejercio 3.11

$$V_Y = \frac{E(X)}{Var(X)} = \frac{4}{16}$$

```
4/16
```

```
## [1] 0.25
```

De donde V_Y muestra mayor dispersión relativa con respecto a la media que la distribución correspondiente a X

3.12

La calificación promedio en una prueba de estadística fue de 62.5 con una desviación estándar de 10. El profesor sospecha que el examen fue difícil. De acuerdo con lo anterior, desea ajustar las calificaciones de manera que el promedio sea de 70 y la desviación estándar de 8. ¿Qué ajuste del tipo $aX + b$, debe utilizar?.

Respuesta.- Sea

$$E(X) = 62.5, \qquad y \qquad \sqrt{Var(X)} = 10 \;\Rightarrow\; Var(X) = 100$$

y

$$E(aX + b) = 70 \qquad y \qquad Var(aX + b) = 80$$

entonces

$$a^2 Var(X) = 80 \implies a = 2\sqrt{\frac{1}{5}}$$

y

$$aE(X) + b = 70 \implies b = 14.098$$

Entonces la respuesta estará dada por

$$aX + b = 2\sqrt{\frac{1}{5}}X + \left(70 - 125\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

```
EX <- function(x) 2*(1/5)^(1/2)*x + 70-125*(1/5)^(1/2)
EX(62.5)
```

```
## [1] 70
```

```
VarX <- function(varx) (2*(1/5)^(1/2))^2 * varx
VarX(100)
```

```
## [1] 80
```

3.13

Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2.

a)

Evaluar $E(X-c)^2$ en términos de μ y σ^2 en donde c es una constante.

Respuesta.- Sea $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$ entonces,

$$E(X-c)^2 = E(X^2 - 2cX + c^2) = E(X^2) - 2cE(X) + c^2 = E(X^2) - E^2(X) + E(X)\cdot E(X) - 2cE(X) + c^2 =$$

$$Var(X) + (E(X) - c)^2 = \sigma^2 + (\mu - c)^2$$

b)

¿Para qué valor de c es $E(X-c)^2$ mínimo?.

Respuesta.- Cuando $c = \mu$

3.14

Con respecto al ejercicio 3.11, demostrar que la variable aleatoria $Y = (X-4)/4$ tiene media cero y desviación estándar uno. Demostrar que los factores de forma, primero y segundo, de la distribución de Y son los mismos de la distribución de X.

Respuesta.-

$$E(Y) = E\left(\frac{X-4}{4}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{x-4}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{-x/4}\,dx = \frac{1}{16}\int_0^\infty (x-4)\cdot e^{-x/4}\,dx = 0$$

```
fx = function(x) ((x-4)/4) * 1/4 * exp( -x/4 )
integrate(fx,lower = 0, upper = Inf)
```

```
## -5.632717e-13 with absolute error < 3e-06
```

$$Var(Y) = Var\left(\frac{X-4}{4}\right)^2 = \int_0^\infty \left(\frac{x-4}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{-x/4}\ dx = \frac{1}{64}\int_0^\infty (x-4)^2 \cdot e^{-x/4}\ dx = 1$$

```
fx = function(x) 1/64 * (x-4)^2 * exp(-x/4)
integrate(fx,lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 1 with absolute error < 3.2e-05
```

3.15

Considérese la función de densidad de probabilidad de X dada en el ejercicio 3.9. Determinar la desviación media de X y compararla con su desviación estándar.

Respuesta.-

$$E\left|X-\frac{1}{3}\right| = \int_0^1 \left|x-\frac{1}{3}\right| \cdot 2(1-x)\ \ dx = \int_0^{1/3}\left(\frac{1}{3}-x\right) * 2(1-x)\ dx + \int_{1/3}^1 \left(x-\frac{1}{3}\right) * 2(1-x)\ dx = 0.1975309$$

```
f <- function(x) abs(x-1/3)*2*(1-x)
integrate(f,lower = 0,upper = 1)
```

```
## 0.1975309 with absolute error < 5e-06
```

La desviación estandar del ejercicio 3.9 viene dada por $\sqrt{\dfrac{1}{18}} = 0.2357$

Luego comparando con la desviación media vemos que se tiene poca diferencia.

3.16

Considérese la función de densidad de probabilidad de X dada en el ejercicio 3.10. Determinar la desviación media de X y compararla con su desviación estándar.

Respuesta.-

$$E|X-\mu| = \int_0^{10} |x-5| \cdot \frac{1}{10}\ dx = \frac{1}{10}\left[\int_0^5 (5-x)\ dx + \int_5^{10}(x-5)\ dx\right] = \frac{1}{10}\left(5x\Big|_0^5 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 + \frac{x^2}{2}\Big|_5^{10} - 5x\Big|_5^{10}\right) =$$

$$\frac{1}{10}\left(25 - \frac{25}{2} + \frac{75}{2} - 25\right) = \frac{5}{2}$$

```
f <- function(x) abs(x-5)*1/10
integrate(f,lower = 0,upper = 10)
```

```
## 2.5 with absolute error < 2.8e-14
```

```
# desviación típica del ejercicio 10
(25/3)^(1/2)
```

```
## [1] 2.886751
```

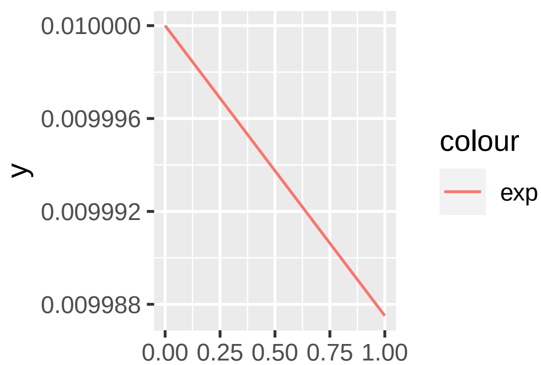
De lo que concluimos que entre la desviación media de X y la desviación estándar de ejercicio 10 se tiene una diferencia de 0.33.

3.17

Supóngase que el ingreso semanal de un asesor profesional es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está determinada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{800} e^{-x/800} & x > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

```
ggplot() +
  xlim(0, 1) +
  geom_function(
    aes(color = "exp"),
    fun =~ 1/100*exp(-.x/800)
    )
```



a)

Determinar los ingresos medios y medianos

Respuesta.- La media es:

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{800} \cdot e^{-x/800}\, dx = \frac{1}{800} \int_0^\infty x \cdot e^{-x/800} = 800$$

```
integrate(function(x) 1/800*x*exp(-x/800), lower = 0, upper = Inf)
```

```
## 800 with absolute error < 0.034
```

La mediana es:

$$F(x_{0.5}) = P(X \leq x_{0.5}) = \frac{1}{800} \int_0^{x_{0.5}} e^{(-x/800)}\, dx = 0.5 \implies -e^{-x_{0.5}/800} + 1 = 0.5 \Longrightarrow x_{0.5} = 554.5177$$

```
-800*log(0.5)
```

```
## [1] 554.5177
```

b)

Determinar el recorrido intercuartil.

Respuesta.- Recorrido intercuartil

$$F(x_{0.25}) = P(X \leq x_{0.25}) = \frac{1}{800}\int_0^{x_{0.25}} e^{(-x/800)}\,dx = 0.25 \implies -e^{-x_{0.25}/800} + 1 = 0.25 \implies x_{0.25}$$

$$\implies x_{0.25} = -800 \cdot ln(0.25) = 1109.03548$$

$$F(x_{0.75}) = -800 \cdot ln(0.75) = 230.14565$$

por lo que

$$x_{0.75} - x_{0.25} = |230.14565 - 1109.03548| = 878.8898$$

c)

Determinar el recorrido interdecil.

Respuesta.- Recorrido interdecil

$$F(x_{0.1}) = P(X \leq x_{0.1}) = \frac{1}{800}\int_0^{x_{0.1}} e^{(-x/800)}\,dx = 0.1 \implies -e^{-x_{0.1}/800} + 1 = 0.1$$

$$\implies x_{0.1} \implies x_{0.1} = -800 \cdot ln(0.1) = 1842.068$$

$$F(x_{0.9}) = -800 \cdot ln(0.9) = 84.2884$$

$$x_{0.9} - x_{0.1} = |84.2884 - 1842.068| = 1757.78$$

d)

Determinar la probabilidad de que el ingreso semanal exceda al ingreso promedio.

Respuesta.-

$$P(X \geq 800) = 1 - P(X \leq 800) = 1 - \frac{1}{800}\int_0^{800} e^{-x/800}\,dx = 1 - 0.3678794 = 0.3679$$

```
integrate(function(x) 1/800*exp(-x/800), lower = 0, upper = 800)
```

```
## 0.6321206 with absolute error < 7e-15
```

```
1 - 0.6321206
```

```
## [1] 0.3678794
```

3.18

Comprobar que la función generadora de momentos central de una variable aleatoria X, genera todos los momentos centrales de X.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^r m_{X-\mu}(t)}{dt^r}\right|_{t=\mu} &= \left.\frac{d^r}{dt^r}E[e^{t(X-\mu)}]\right|_{t=0} \\
&= E\left\{\frac{d^r}{dt^r}\left[e^{t(X-\mu)}\right]\right\} \\
&= \left.E\left[(X-\mu)^r e^{t(X-\mu)}\right]\right|_{t=0} \\
&= E[X-\mu]^r \\
&= u_r
\end{aligned}$$

3.19

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está determinada:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{16}xe^{-x/4} & x > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a)

Determinar la función generadora de momentos de X.

Respuesta.-

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{16} \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{4}}\ dx = \frac{1}{16}\int_0^{\infty} x \cdot e^{\frac{x(4t-1)}{4}}\ dx = (1-4t)^{-2}$$

b)

Utilizar la función generadora de momentos para encontrar la media y la varianza de X.

Respuesta.-

$$\left.\frac{dm_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\cdot(1-4t)^{-2}\right|_{t=0} = \left.\frac{8}{(1-4x)^3}\right|_{t=0} = 8 = E(X)$$

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}(1-4x)^{-2} = \left.\frac{d}{dt}\frac{8}{(1-4x)^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{96}{(-4x+1)^4}\right|_{t=0} = 96 = E(X^2)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 96 - 8^2 = 32$$

3.20

Considérese la función de densidad de probabilidad dada en el ejercicio 3.11. Encontrar la función generadora de momentos y utilizaría para comprobar los valores de la media y la varianza, determinados en el ejercicio 3.11.

Respuesta.-

$$m_X(t) = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{tx}\cdot e^{-\frac{x}{4}}\ dx$$

3.21

Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(x) = 0, 1, 2, \ldots, n$, y sean a, b y c constantes. Demostrar que $E(c) = c$, $E(aX + b) = aE(X) + b$, y $E[g(X) + h(X)] = E[g(X) + E[g(X)]]$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones de X.

Respuesta.- $E(c) = \sum_x c \cdot p(x) = c \sum_x p(x) = c$

$E(cX + b) = \sum_x (cx + b)p(x) = c \sum_x x \cdot p(x) + b \sum_x p(x) = cE(x) + b$

$E[g(X) + h(X)] = \sum_x [g(x) + h(x)]p(x) + \sum_x g(x)p(x) + \sum_x h(x)p(x) = E[g(X)] + E[h(X)]$

3.22

Para la variable aleatoria discreta del ejercicio anterior, utilizar las definiciones 3.8 y 3.9 para demostrar que $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Respuesta.-

$$Var(X) = (X - \mu)^2 = \sum_x (x - \mu)^2 p(x) = \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x xp(x) + \mu^2 \sum_x p(x) =$$
$$E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Ejercicios capítulo 4.

4.1.

Sea X una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros n y p. Mediante la función de probabilidad binomial, verificar que $p(n-x;n,1-p) = p(x;n,p)$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
p(n-x;n,1-p) &= \frac{n!}{[n-(n-x)]!(n-x)!}(1-p)^{n-x}\left[1-(1-p)\right]^{n-(n-x)} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!}(1-p)^{n-x}p^x \text{ para } x = 0,1,2,\ldots n \\
&= p(x;n,p)
\end{aligned}$$

4.2.

En una distribución binomial, sea X el número de éxistos obtenidos en diez ensayos donde la probabilidad de éxito en cada uno es de 0.8. Con el resultado del problema anterior, demostrar que la probabilidad de lograr de manera exacta seis éxitos es igual a la probabilidad de tener cuatro fracasos.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
0.08808038 &= \frac{10!}{[10-(10-4)]!(10-4)!}(1-0.8)^{10-6}\left[1-(1-0.8)\right]^{10-(10-6)} \\
&= \frac{10!}{6!(10-6)!}(1-0.8)^{10-6}0.8^6 = 0.08808038
\end{aligned}$$

```
dbinom(4,10,0.2)
```

```
## [1] 0.08808038
```

```
dbinom(6,10,0.8)
```

```
## [1] 0.08808038
```

4.3

Mediante el empleo de la función de probabilidad binomial, verificar la siguiente fórmula de recursión:

$$p(x+1;n,p) = \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)}p(x;n,p)$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
p(x+1,n,p) = \frac{n!}{[n-(x+1)]!(x+1)!}p^{x+1}(1-p)^{n-(x+1)} &= \frac{n!}{\frac{(n-x!)}{(n-x)}x!(x+1)}p^x p(1-p)^{n-x}(1-p)^{-1} \\
&= \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)}p(x;n,p)
\end{aligned}$$

4.4.

sea X una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros $n = 8$ y $p = 0.4$. Emplear la fórmula de recursión del problema anterior para obtener las probabilidades puntuales de los valores de X.

Respuesta.-

$$p(x+1; 8, 0.4) = \frac{(8-x)0.4}{(x+1)(1-0.4)} p(x; 8, 0.4)$$

4.5

Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con $n = 10$ y $p = 0.5$

a)

Determinar las probabilidades de que X se encuentre dentro de una desviación estándar de la media y a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Para una desviación estándar

Sabemos que $\mu = E(X) = np = 10 \cdot 0.5 = 5$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 1.581139$, luego si queremos hallar la desviación estándar de la media tenemos que calcular la desviación hacia la derecha y hacia la izquierda, es decir, $5 \pm 1.581139 = 6.581139$ y 3.418861. Si restamos y sumamos a 6.581139 y 3.418861, 0.581139 respectivamente tenemos por un lado 6 y por otro $2.837722 \approx 3$. Así tenemos que,

$$P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = F(6; 10, 0.5) - F(3; 10, 0.5) = \sum_{i=0}^{6} \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} - \sum_{i=0}^{3} \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i}$$
$$= 0.65625$$

```
pbinom(6,10,0.5) - pbinom(3,10,0.5)
```

```
## [1] 0.65625
```

Para dos desviaciones estándar, tenemos que $\sigma = 2\sqrt{np(1-p)} = 2\sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 3.162278$, de donde $5 \pm 3.162278 = 8.162278$ y 1.837722. Podemos construir directamente la probabilidad requerida como sigue,

$$P(X \leq 8) - P(X \leq 2) = F(8; 10, 0.5) - F(2; 10, 0.5) = \sum_{i=0}^{8} \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i} - \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} 0.5^i (1-0.5)^{10-i}$$
$$= 0.9345703$$

```
pbinom(8,10,0.5)-pbinom(2,10,0.5)
```

```
## [1] 0.9345703
```

b)

¿Cómo cambiarían las respuestas de a) si $n = 15$ y $p = 0.4$?

Respuesta.- Para una desviación estándar,

Similar a la parte a) tenemos que $\mu = E(X) = np = 15 \cdot 0.4 = 6$ de donde se tiene $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.4 \cdot (1-0.4)} = 1.897367$ de donde $6 \pm 1.897367 = 7.897367$ y 4.102633, por lo tanto,

$$P(X \leq 7) - P(X \leq 2) = F(7; 15, 0.4) - F(2; 15, 0.4) = \sum_{i=0}^{7} \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} - \sum_{i=0}^{2} \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i}$$
$$= 0.5696191$$

```r
pbinom(7,15,0.4)-pbinom(4,15,0.4)
```

```
## [1] 0.5696191
```

Para dos desviaciones estándar,

tenemos que $\sigma = 2\sqrt{np(1-p)} = 2\sqrt{15 \cdot 0.4 \cdot (1-0.4)} = 3.794733$, de donde $6 \pm 3.794733 = 9.794733$ y 2.205267. se sigue,

$$P(X \leq 9) - P(X \leq 2) = F(9; 15, 0.4) - F(2; 15, 0.4) = \sum_{i=0}^{9} \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i} - \sum_{i=0}^{2} \binom{15}{i} 0.4^i (1-0.4)^{15-i}$$
$$= 0.9345703$$

```r
pbinom(9,15,0.4)-pbinom(2,15,0.4)
```

```
## [1] 0.9390527
```

4.6

Supóngase que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamble es de 0.05. Si el número de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes

a)

¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades dos se encuentren defectuosas?

Respuesta.-

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0.05^2 \cdot (1-0.05)^{20-2} = 0.1886768$$

```r
# opción 1
choose(20,2)*0.05^2*(1-0.05)^(20-2)
```

```
## [1] 0.1886768
```

```r
# opción 2
dbinom(2,20,0.05)
```

```
## [1] 0.1886768
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades, dos como límite se encuentren defectuosas?

Respuesta.-

$$P(X \leq 2) = F(2; 20, 0.05) = \sum_{i=0}^{2} \binom{20}{i} \cdot 0.05^i \cdot (1-0.05)^{20-i} = 0.9245163$$

```r
pbinom(2,20,0.05)
```

```
## [1] 0.9245163
```

c)

¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

Respuesta.-

$$1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1; 20, 0.05) = 1 - \sum_{i=0}^{1} \binom{20}{i} \cdot 0.05^i \cdot (1-0.05)^{20-i} = 0.2641605$$

```r
pbinom(1,20,0.05,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.2641605
```

4.7

En una fábrica de circuitos electrónicos, se afirma que la proporción de unidades defectuosas de cierto componente que ésta produce, es del 5%. Un buen comprador de estos componentes revisa 15 unidades seleccionadas al azar y encuentra cuatro defectuosas. Si la compañia se encuentra en lo correcto y prevalecen las suposiciones para que la distribución binomial sea el modelo de probabilidad adecuado para esta situación, ¿Cuál es la probabilidad de este hecho?. Con base en el resultado anterior ¿puede concluir que la compañia está equivocada?

Respuesta.-

$$P(X = 4) = \binom{15}{4} \cdot 0.05^4 \cdot (1-0.05)^{15-4} = 0.004852576$$

```r
dbinom(4,15,0.05)
```

```
## [1] 0.004852576
```

```r
choose(15,4)*0.05^4*(1-0.05)^(15-4)
```

```
## [1] 0.004852576
```

```r
func_binom(4,15,0.05)
```

```
## [1] 0.004852576
```

Ahora veamos que tan probable es que existe más de 4 circuitos defectuosos.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - F(3; 20, 0.05) = 1 - \sum_{i=0}^{3} 0.05^i \cdot (1-0.05)^{15-i} = 0.005467259$$

```r
pbinom(3,15,0.05, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.005467259
```

```r
1-acum_binom(3,15,0.05)
```

```
## [1] 0.005467259
```

Por lo que se dice de la afirmación es incorrecta.

4.8

La probabilidad de que un satélite, después de colocarlo en la órbita, funcione de manera adecuada es de 0.9. Supóngase que cinco de éstos se colocan en órbita y operan de manera independiente.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que, por lo menos, el 80% funcione adecuadamente?

Respuesta.- Ya que el 80% de 5 es 4 por lo que

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3; 5, 0.9) = 1 - \sum_{i=0}^{3} 0.9^i \cdot (1 - 0.9)^{5-i} = 0.91854$$

```r
pbinom(3,5,.9,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.91854
```

```r
1-acum_binom(3,5,0.9)
```

```
## [1] 0.91854
```

b)

Responder a a) si $n = 10$

Respuesta.-

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 9) = 1 - F(9; 10, 0.9) = 1 - \sum_{i=0}^{9} 0.9^i \cdot (1 - 0.9)^{10-i} = 0.7360989$$

```r
pbinom(8,10,.9,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.7360989
```

```r
1-acum_binom(8,10,0.9)
```

```
## [1] 0.7360989
```

c)

Responder a a) si $n = 20$

Respuesta.-

$$P(X \geq 16) = 1 - P(X < 15) = 1 - F(15; 20, 0.9) = 1 - \sum_{i=0}^{15} 0.9^i \cdot (1 - 0.9)^{5-i} = 0.8670467$$

```r
pbinom(16,20,.9,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.8670467
```

```r
1-acum_binom(16,20,0.9)
```

```
## [1] 0.8670467
```

d)

¿Son inesperados estos resultados? ¿Por qué?

Respuesta.- Son inesperados ya que no se puede ver una tendencia clara cuando n es más grande.

4.9.

Con base en encuestas al consumidor se sabe que la preferencia de éste con respecto a dos marcas, A y B, de un producto dado, se encuentra muy pareja. Si la opción de compra entre estas marcas es independiente, ¿cuál es la probabilidad de que entre 25 personas seleccionadas al azar, no más de diez tengan preferencia por la marca A?

Respuesta.- Ya que A y B se encuentran parejas entonces la probabilidad es de 0.5, luego:

$$P(X \leq 10) = F(10; 25, 0.5) = \sum_{i=0}^{10} 0.5^i \cdot (1 - 0.5)^{25-i} = 0.2121781$$

```r
pbinom(10,25,0.5)
```

```
## [1] 0.2121781
```

```r
acum_binom(10,25,0.5)
```

```
## [1] 0.2121781
```

4.10

Supóngase que un examen contiene 15 preguntas del tipo falso o verdadero. El examen se aprueba contestando correctamente por lo menos nueve preguntas. Si se lanza una moneda para decidir el valor de verdad de cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

Respuesta.- Ya que al lanzar una moneda se tiene sólo dos opciones entonces la probabilidad es de 0.5, luego:

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \geq 8) = 1 - F(8; 15, 0.5) = 1 - \sum_{i=0}^{8} 0.5^i \cdot (1 - 05)^{15-i} = 0.1508789$$

```r
pbinom(9,15,0.5,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1508789
```

```r
1-acum_binom(9,15,0.5)
```

```
## [1] 0.1508789
```

4.11

Un vendedor de seguros sabe que la oportunidad de vender una póliza es mayor mientras más contactos realice con clientes potenciales. Si la probabilidad de que una persona compre una póliza de seguro después de la visita, es constante e igual a 0.25, y si el conjunto de visitas constituye independiente de ensayos, ¿cuántos compradores potenciales debe visitar el vendedor para que la probabilidad de vender por lo menos una póliza sea de 0.80?

Respuesta.-

$$P(X \geq 1) = 0.25 \;\Rightarrow\; 1 - P(X < 0) = 1 - [0.25^0 \cdot (1 - 0.25)^{n-0}] = 1 - 0.75^n = 0.8 \;\Rightarrow\; n\ln(0.75) = \ln(0.2)$$

$$n = \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.75)} = 5.59450194 \approx 6$$

```
log(0.20)/log(0.75)
```

```
## [1] 5.594502
```

Por lo que debe existir 6 o más compradores.

4.12.

El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservación sabe, por experiencia, que el 15% de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 25 reservaciones pero sólo dispone de 20 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que a todas las personas que asistan al restaurante se les asigne una mesa?.

Respuesta.- Existe la probabilidad de que el 85% asista al restaurante. Por lo que,

$$P(X \leq 20) = F(20; 25, 0.85) = \sum_{i=0}^{20} 0.85^i \cdot (1 - 0.85)^{25-i} = 0.317893$$

```
pbinom(20,25,0.85)
```

```
## [1] 0.317893
```

4.13

Mediante la probabilidad de Poisson, demostrar la siguiente fórmula de recursión:

$$p(x+1; \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} p(x; \lambda)$$

Demostración.- Por definición de de función de probabilidad de Poisson se tiene que,

$$p(x+1; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x+1}}{(x+1)!}, \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, \ \lambda > 0$$

que también podemos reescribirlo de la siguinete manera,

$$\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x+1}}{(x+1)!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \lambda^x}{x! \cdot (x+1)}$$

y por lo tanto

$$p(x+1; \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{\lambda}{x+1} p(x; \lambda)$$

4.14

Sea X una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Emplear la fórmula del problema anterior para determinar las probabilidades puntuales de $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y hágase una gráfica de la función de probabilidad.

Respuesta.-

- Para $X = 0$

$$p(0+1; 2) = \frac{\lambda}{x+1} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{2}{0+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{0+1}}{(0+1)!} = 0.2707$$

- Para $X = 1$

$$p(1+1;2) = \frac{2}{1+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{1+1}}{(1+1)!} = 0.2707$$

- Para $X = 2$

$$p(2+1;2) = \frac{2}{2+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{2+1}}{(2+1)!} = 0.1804$$

- Para $X = 3$

$$p(3+1;2) = \frac{2}{3+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{3+1}}{(3+1)!} = 0.0902$$

- Para $X = 4$

$$p(4+1;2) = \frac{2}{4+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{4+1}}{(4+1)!} = 0.036$$

- Para $X = 5$

$$p(5+1;2) = \frac{2}{5+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{5+1}}{(5+1)!} = 0.012$$

- Para $X = 6$

$$p(6+1;2) = \frac{2}{6+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{6+1}}{(6+1)!} = 0.0034$$

- Para $X = 7$

$$p(7+1;2) = \frac{2}{7+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{7+1}}{(7+1)!} = 0.0008$$

- Para $X = 8$

$$p(8+1;2) = \frac{2}{8+1} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^{8+1}}{(8+1)!} = 0.0001$$

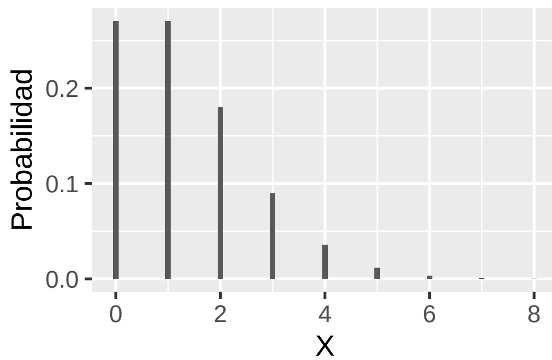
```r
lambda = 2

x = 0
while (x<9){
  print(paste0(x," = ", (exp(-lambda)*lambda^(x+1))/fact((x+1))))
  x = x+1
}
```

```
## [1] "0 = 0.270670566473225"
## [1] "1 = 0.270670566473225"
## [1] "2 = 0.180447044315484"
## [1] "3 = 0.0902235221577418"
## [1] "4 = 0.0360894088630967"
## [1] "5 = 0.0120298029543656"
## [1] "6 = 0.00343708655839016"
## [1] "7 = 0.000859271639597541"
## [1] "8 = 0.000190949253243898"
```

```r
x = 0
X = c()
Probabilidad = c()
while (x<9) {
  X = c(X,x)
  Probabilidad = c(Probabilidad, dpois(x+1,lambda))
  x=x+1
}

ggplot(mapping = aes(X,Probabilidad)) +
  geom_col(width = 0.1)
```



4.15

Para un volumen fijo, el número de células sanguíneas rojas es una variable aleatoria que se presenta con una frecuencia constante. Si el número promedio para un volumen dado es de nueve células para personas normales, determinar la probabilidad de que el número de células rojas para una persona se encuentre dentro de una desviación estándar del valor promedio y a dos desviaciones estándar del promedio.

Respuesta.- Sea la desviación estándar de una variable aleatoria Poisson igual a,

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{9} = 3$$

Entonces una desviación estándar del valor promedio estará dada por:

$$9 \pm 3 = 6 \text{ y } 12$$

Acá debemos tener cuidado ya que estamos trabajando con distribuciones discretas , por lo que tenemos $P(X \leq 6) = P(X < 7)$ es decir cuando restamos $P(X \leq 12) - P(X \leq 6) = P(X \leq 12) - P(X < 7)$, por lo tanto lo correcto será restar

$$P(X \leq 12) - P(X \leq 5) = P(X \leq 12) - P(X < 6)$$

Luego,

$$P(X \leq 12) - P(X \leq 5) = F(12,9) - F(5,9) = \sum_{i=0}^{12} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} - \sum_{i=0}^{5} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} = 0.7600829$$

```r
ppois(12,9)-ppois(5,9)
```

```
## [1] 0.7600829
```

```r
acum_poisson(12,9)-acum_poisson(5,9)
```

```
## [1] 0.7600829
```

Por otro lado para dos desviaciones estándar se tiene,

$$P(X \leq 15) - P(X \leq 2) = F(15,9) - F(2,9) = \sum_{i=0}^{15} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} - \sum_{i=0}^{2} \frac{e^{-9} \cdot 9^i}{i!} = 0.9717321.$$

```r
ppois(15,9)-ppois(2,9)
```

```
## [1] 0.9717321
```

```r
acum_poisson(15,9)-acum_poisson(2,9)
```

```
## [1] 0.9717321
```

4.16

El número total de clientes que llega a un banco es una variable aleatoria Poisson. Si el número promedio es de 120 por hora, ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen por lo menos tres clientes? ¿Puede esperarse que la frecuencia de llegada de los clientes al banco sea contante en un día cualquier?

Respuesta.- Sabiendo que en un minuto el promedio de llegada es 120/60 y que por lo menos se espera que lleguen 3 cliente, entonces

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{e^{-\frac{120}{60}} \cdot \left(\frac{120}{60}\right)^i}{i!} = 0.3233236$$

```r
ppois(120/60,2,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3233236
```

```r
1-acum_poisson(120/60,2)
```

```
## [1] 0.3233236
```

Luego, puede esperarse que la frecuencia de los clientes al banco sea constante en un día cualquiera, ya que λ es grande.

4.17

Supóngase que en un cruce transitado ocurren de manera aleatoria e independiente dos accidentes por semana. Determinar la probabilidad de que ocurra un accidente en una semana y de que ocurra tres, en la siguiente semana.

Respuesta.-

$$P(X = 1) \cdot P(X = 3) = p(1;2) \cdot p(3;2) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!} = 0.0488417$$

```r
dpois(1,2)*dpois(3,2)
```

```
## [1] 0.0488417
```

```
func_poisson(1,2)*func_poisson(3,2)
```

```
## [1] 0.0488417
```

4.18

Sea X una variable aleatoria binomial. Para $n = 20$ calcular las probabilidades puntales binomiales y compararlas con las correspondientes probabilidades de Poisson para $p = 0.5,\ 0.2,\ 0.1$ y 0.01.

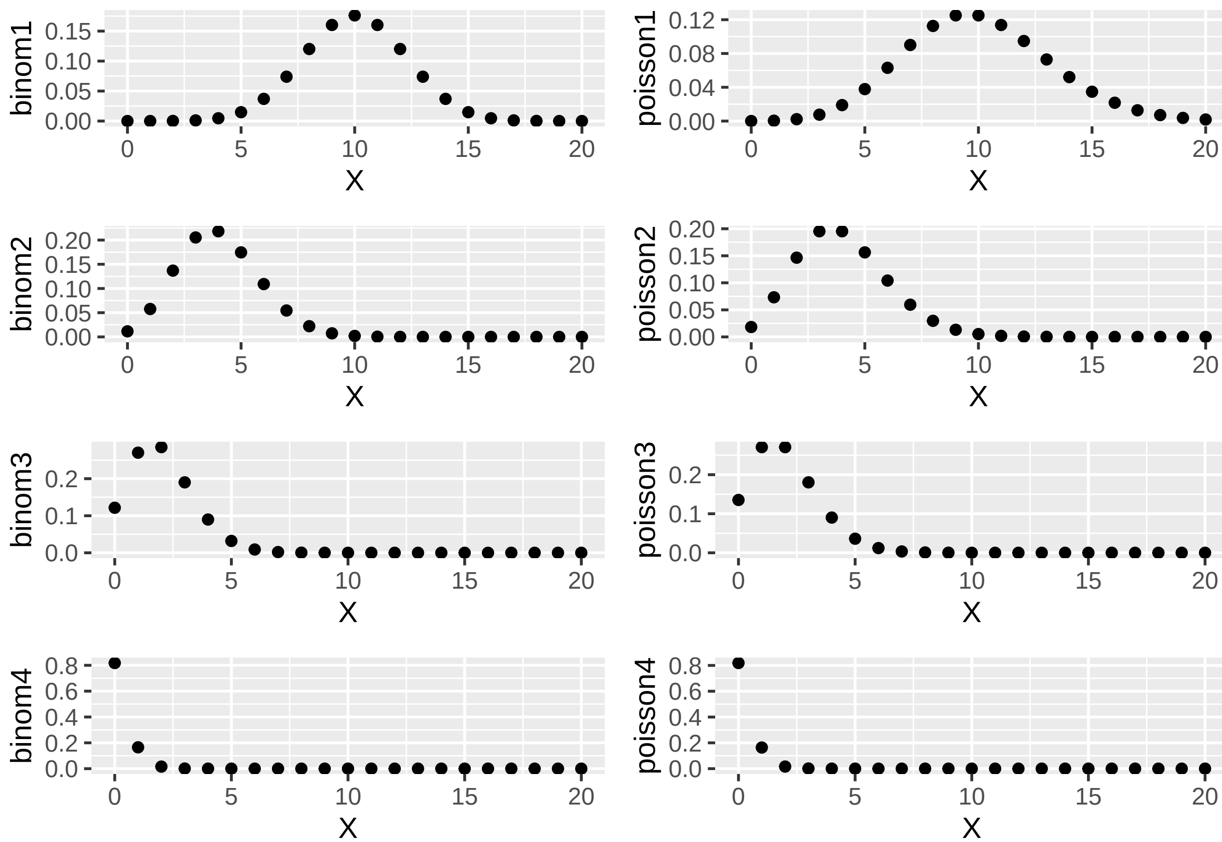
Respuesta.- Sea $\lambda = n \cdot p$ entonces,

```
prob = data.frame(X=0:20,
           binom1=dbinom(0:20,20,0.5),
           poisson1 = dpois(0:20,0.5*20),
           binom2=dbinom(0:20,20,0.2),
           poisson2 = dpois(0:20,0.2*20),
           binom3=dbinom(0:20,20,0.1),
           poisson3 = dpois(0:20,0.1*20),
           binom4=dbinom(0:20,20,0.01),
           poisson4 = dpois(0:20,0.01*20))

p1 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom1))+
  geom_point()
p2 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom2))+
  geom_point()
p3 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom3))+
  geom_point()
p4 = ggplot(prob, aes(x=X,y=binom4))+
  geom_point()
p5 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson1))+
  geom_point()
p6 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson2))+
  geom_point()
p7 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson3))+
  geom_point()
p8 = ggplot(prob, aes(x=X,y=poisson4))+
  geom_point()

multiplot(p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,cols=2)
```

```
## Loading required package: grid
```



4.19

Una compañia compra cantidades muy grandes de componentes electrónicos. La decisión para aceptar o rechazar un lote de componentes se toma con base en una muestra aleatoria de 100 unidades. Si el lote se rechaza al encontrar tres o más unidades defectuosas en la muestra, ¿Cuál es la probabilidad de rechazar un lote que contenga un 8% de unidades defectuosas?

Respuesta.- Ya que $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$ y $\lambda = 1/100$ Entonces,

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{e^{\frac{1}{100}} \cdot \left(\dfrac{1}{100}\right)^i}{i!} = 0.0803014$$

```
ppois(2,1,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0803014
```

```
1- acum_poisson(2,1)
```

```
## [1] 0.0803014
```

Análogamente pasa para $\lambda = 8/100$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{e^{\frac{8}{100}} \cdot \left(\dfrac{8}{100}\right)^i}{i!} = 0.0803014$$

```r
ppois(2,8,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.986246
```

```r
1- acum_poisson(2,8)
```

```
## [1] 0.986246
```

4.20

El número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de operación es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de éstas es ocho:

a)

¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

Respuesta.- Primero realizamos la regla de tres par determinar λ

$$\lambda_{25} = \frac{25 \cdot 8}{100} = 2$$

Luego,

$$P(X = 1) = p(1; 2) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} = 0.2706706$$

```r
dpois(1,2)
```

```
## [1] 0.2706706
```

```r
func_poisson(1,2)
```

```
## [1] 0.2706706
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?

Respuesta.- Sea $\lambda = 4$ y $P(X \leq 2)$, entonces

$$P(X \leq 2) = p(1; 4) = \sum_{i=0}^{4} \frac{e^{-4} \cdot 4^i}{i!} = 0.2381033$$

```r
ppois(2,4)
```

```
## [1] 0.2381033
```

```r
acum_poisson(2,4)
```

```
## [1] 0.2381033
```

c)

¿Cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

Respuesta.- $\lambda = 10$ y $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - p(9;10) = \sum_{i=0}^{9} \frac{e^{-10} \cdot 10^i}{i!} = 0.5420703$$

```
ppois(9,10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.5420703
```

```
1 - acum_poisson(9,10)
```

```
## [1] 0.5420703
```

4.21

Mediante estudios recientes se ha determinado que la probabilidad de morir por causa de cierta vacuna contra gripe es de 0.00002. Si se administra la vacuna a 100 mil personas y se supone que éstas constituyen un conjunto independiente de ensayos, ¿cuál es la probabilidad de que mueran no más de dos personas a causa de la vacuna?

Respuesta.- Sea $\lambda = 100000 \cdot 0.00004 = 2$ y

$$P(X \leq 2) = F(2;2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{e^{-2} \cdot 2^i}{i!} = 0.6766764$$

```
ppois(2,2)
```

```
## [1] 0.6766764
```

```
acum_poisson(2,2)
```

```
## [1] 0.6766764
```

4.22

Un fabricante asegura a una compañía que el porcentaje de unidades defectuosas es de sólo dos. La compañía revisa 50 unidades seleccionadas aleatoriamente y encuentra cinco defectuosas. ¿Qué tan probable es este resultado si el porcentaje de unidades defectuosas es el que el fabricante asegura?

Respuesta.- Ya que $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$ entonces,

$$P(X \leq 5) - [1 - P(X \leq 1)] = \sum_{i=0}^{5} \frac{e^{-2} \cdot 2^i}{i!} - 1 - \sum_{i=0}^{1} \frac{e^{-2} \cdot 2^i}{i!} = 0.3894422$$

```
ppois(5,2) - ppois(1,2,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3894422
```

```
acum_poisson(5,2)-(1-ppois(1,2))
```

```
## [1] 0.3894422
```

4.23

El número de accidentes graves en una planta industrial es de diez por año, de manera tal que el gerente instituye un plan que considera efectivo para reducir el número de accidentes en la planta. Un año después de ponerlo en marcha, sólo han ocurrido cuatro accidentes. ¿Qué probabilidad hay de cuatro o menos accidentes por año, si la frecuencia promedio aún es diez? Después de lo anterior ¿puede concluirse que, luego de un año, el número de accidentes promedio ha disminuido?

Respuesta.- Ya que cada experimentos es independiente entonces

$$P(X \leq 4) = F(4;10) = \sum_{i=0}^{4} \frac{e^{-10} \cdot 10^i}{i!} = 0.02925269$$

```
ppois(4,10)
```

```
## [1] 0.02925269
```

```
acum_poisson(4,10)
```

```
## [1] 0.02925269
```

Concluimos que si disminuyo los accidentes.

4.24

El departamento de protección del Ambiente ha adquirido 40 instrumentos de precisión para medir la contaminación del aire en distintas localidades. Se seleccionan aleatoriamente ocho instrumentos y se someten a una prueba para encontrar defectos. Si cuatro de los 40 instrumentos se encuentran defectuosos ¿cuál es la probabilidad de que la muestra contenga no más de un instrumento defectuoso?

Respuesta.- Sea $N = 40$ los instrumentos de precisión adquiridos de donde se estableció que $k = 4$ son defectuosos, para ello se selecciono $n = 8$ instrumentos y se quiere saber $P(X < 1) = P(X \leq 0)$ (ya que la función es discreta), entonces:

$$P(X \leq 0) = p(x; N, n, k) = p(0; 40, 8, 4) = \frac{\binom{4}{0}\binom{40-4}{8-0}}{\binom{40}{8}} = 0.3934785$$

```
choose(4,0)*choose(40-4,8-0)/choose(40,8)
```

```
## [1] 0.3934785
```

```
func_hiper(0,40,8,4)
```

```
## [1] 0.3934785
```

```
dhyper(0,4,40-4,8)
```

```
## [1] 0.3934785
```

4.25

Se sospecha que por causa de un error humano se han incluido en un embarque de 50 unidades, dos (o más) defectuosas. El fabricante admite el error y envía al cliente sólo 48 unidades. Antes de recibir el embarque, el cliente selecciona aleatoriamente cinco unidades y encuentra una defectuosa ¿Debe reclamar una indemnización al fabricante?

Respuesta.- Vemos que se mando $N = 50$ unidades de manera que $k = 2$ unidades son defectuosos, luego se selecciona una muestra de $n = 5$ unidades de donde $x = 1$ es defectuoso, entonces:

$$P(X = 1) = p(x; N, n, k) = p(1, 50, 5, 2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{50-2}{5-1}}{\binom{50}{5}} = 0.1836735$$

```
choose(2,1)*choose(50-2,5-1)/choose(50,5)
```

```
## [1] 0.1836735
```

```
func_hiper(1,50,5,2)
```

```
## [1] 0.1836735
```

```
dhyper(1,2,50-2,5)
```

```
## [1] 0.1836735
```

Por lo que el cliente no debe reclamar una indemnización al fabricante.

4.26

Los jurados para una corte federal de distrito se seleccionan de manera aleatoria entre la lista de votantes del distrito. En un determinado mes se selecciona una lista de 25 candidatos. Ésta contiene los nombres de 20 hombres y cinco mujeres.

$$N = 25, \quad k = 20$$

a)

Si la lista de votantes se encuentra igualmente dividida por sexo. ¿cuál es la probabilidad de tener una lista que contenga a 20 hombres y cinco mujeres?

Respuesta.-

$$N = 25, \quad k = 15, \qquad n = 25, \quad x = 20$$

```
dhyper(20,15,25-15,25)*dhyper(5,15,25-15,25)
```

```
## [1] 0
```

```
dhyper(5,5,25-5,25)
```

```
## [1] 1
```

```
dhyper(20,20,25-20,25)
```

```
## [1] 1
```

b)

Supóngase que de esta lista se elige un jurado de doce personas, de las cuales sólo una es mujer. ¿Cuál es la probabilidad de este hecho, si los miembros del jurado se seleccionan de manera aleatoria?

Respuesta.-

c)

Si el lector fuera el abogado de la defensa, ¿que podría argumentar mediante el empleo de las respuesta de la parte a y b?

Respuesta.-

4.27

Una compañia recibe un lote de 1000 unidades. Para aceptarlo se seleccionan diez unidades de manera aleatoria, y se inspeccionan. Si ninguna se encuentra defectuosa, el lote se acepta; de otro modo, se rechaza. Si el lote contiene un 5% de unidades defectuosas:

a)

Determinar la probabilidad de aceptarlo mediante el empleo de la distribución hipergeométrica.

Respuesta.- Sea $N = 1000$ $n = 10$ $P(X \leq 0)$ $k = 1000 * 0.05 = 50$, entonces

$$P(X \leq 0) = p(0, 1000, 10, 50) = \frac{\binom{50}{0}\binom{1000-50}{10-0}}{\binom{1000}{10}} = 0.5973113$$

```
choose(50,0)*choose(1000-50,10-0)/choose(1000,10)
```

```
## [1] 0.5973113
```

```
phyper(0,50,1000-50,10)
```

```
## [1] 0.5973113
```

b)

Aproximar la respuesta de la parte a mediante el empleo de la distribución binomial.

Respuesta.- Ya que $N \to \infty$ entonces,

$$P(X \leq 0) = p(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{10}{0} 0.05^0 \cdot (1-0.05)^{10-0} = 0.5987369$$

```
choose(10,0)*0.05^0*(1-0.05)^10
```

```
## [1] 0.5987369
```

```
dbinom(0,10,0.05)
```

```
## [1] 0.5987369
```

```
func_binom(0,10,0.05)
```

```
## [1] 0.5987369
```

c)

Aproximar la respuesta de la parte b mediante el empleo de la distribución de Poisson.

Respuesta.- Sea $\lambda = n \cdot p = 10 * 0.05 = 0.5$, entonces

$$P(X \leq 0) = p(0, 0.5) = \frac{e^{-0.5} \cdot 0.5^0}{0!} = 0.6065307$$

```
exp(-0.5)*0.05^0/factorial(0)
```

```
## [1] 0.6065307
```

```
dpois(0,0.5)
```

```
## [1] 0.6065307
```

4.28

En el ejercicio anterior, ¿cómo cambiarían las respuestas de la parte a, b y c si el tamaño del lote fuera de 40 unidades?

a)

Determinar la probabilidad de aceptarlo mediante el empleo de la distribución hipergeométrica.

Respuesta.- Sea $N = 40$ $n = 10$ $P(X \leq 0)$ $k = 40 * 0.05 = 2$, entonces

$$P(X \leq 0) = p(0, 40, 10, 2) = \frac{\binom{2}{0}\binom{40-2}{10-0}}{\binom{40}{10}} = 0.5576923$$

```
choose(2,0)*choose(40-2,10-0)/choose(40,10)
```

```
## [1] 0.5576923
```

```
phyper(0,2,40-2,10)
```

```
## [1] 0.5576923
```

b)

Aproximar la respuesta de la parte a mediante el empleo de la distribución binomial.

Respuesta.- Ya que $N = 40$ entonces,

$$P(X \leq 0) = p(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{10}{0} 0.05^0 \cdot (1 - 0.05)^{10-0} =$$

```
choose(10,0)*0.05^0*(1-0.05)^10
```

```
## [1] 0.5987369
```

```
dbinom(0,10,0.05)
```

```
## [1] 0.5987369
```

```
func_binom(0,10,0.05)
```

```
## [1] 0.5987369
```

c)

Aproximar la respuesta de la parte b mediante el empleo de la distribución de Poisson.

Respuesta.- Sea $\lambda = n \cdot p = 10 * 0.05 = 0.5$, entonces

$$P(X \leq 0) = p(0, 0.5) = \frac{e^{-0.5} \cdot 0.5^0}{0!} = 0.6065307$$

```
exp(-0.5)*0.05^0/factorial(0)
```

```
## [1] 0.6065307
```

```
dpois(0,0.5)
```

```
## [1] 0.6065307
```

4.29.

Considere las funciones de probabilidad binomial y binomial negativa dadas por las expresiones 4.1 y 4.34, respectivamente. Demostrar que:

$$p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p).$$

Demostración.- Sea

$$\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \qquad \text{y} \qquad \binom{k+x-1}{k-1}p^k(1-p)^x$$

$$\begin{aligned}
p_{NB}(x;k,p) &= \binom{k+x-1}{k-1}p^k(1-p)^x \\
&= \frac{(k+x-1)!}{(k+x-1-k+1)!(k-1)!}p^k(1-p)^x \\
&= \frac{(x+k-1)!}{x!(k-1)!}p^k(1-p)^{x+k-k} \\
&= \frac{k}{x+k}\frac{(x+k+1-1)!}{x!(k-1+1)!}p^k(1-p)^{x+k-k} \\
&= \frac{k}{x+k}\cdot\frac{(x+k)!}{[(x+k)-k]!k!}p^k(1-p)^{x+k-k} \\
&= \frac{k}{x+k}p_B(k;x+k,p)
\end{aligned}$$

4.30.

Sea X una variable aleatoria binomial negativa con parámetros $k=3$ y $p=0.4$. Emplee el resultado del problema anterior para calcular las probabilidades puntuales para las siguientes valores de $X: 0,1,2,3$ y 5.

Respuesta.- Sea $k=3$ y $p=0.4$, entonces

- Para P(X=0)

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= p(0,3,0.4) \\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k}p_B(k;x+k,p) = p(3;0+3,0.4) \\
&= \frac{3}{0+3}\cdot\frac{(0+3)!}{(0+3-3)!3!}0.4^3(1-0.4)^{0+3-3} \\
&= 0.064
\end{aligned}$$

```
dnbinom(0,3,0.4)
```

```
## [1] 0.064
```

```
3/(0+3)*(factorial(0+3))/((factorial(0+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(0+3-3)
```

```
## [1] 0.064
```

```r
3/(0+3)*dbinom(3,0+3,0.4)
```

```
## [1] 0.064
```

- Para P(X=1)

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= p(1,3,0.4) \\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p) = p(3;1+3,0.4) \\
&= \frac{3}{1+3} \cdot \frac{(1+3)!}{(1+3-3)!3!} 0.4^3 (1-0.4)^{1+3-3} \\
&= 0.1152
\end{aligned}
$$

```r
dnbinom(1,3,0.4)
```

```
## [1] 0.1152
```

```r
3/(1+3)*(factorial(1+3))/((factorial(1+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(1+3-3)
```

```
## [1] 0.1152
```

```r
3/(1+3)*dbinom(3,1+3,0.4)
```

```
## [1] 0.1152
```

- Para P(X=2)

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= p(2,3,0.4) \\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p) = p(3;2+3,0.4) \\
&= \frac{3}{2+3} \cdot \frac{(2+3)!}{(2+3-3)!3!} 0.4^3 (1-0.4)^{2+3-3} \\
&= 0.13824
\end{aligned}
$$

```r
dnbinom(2,3,0.4)
```

```
## [1] 0.13824
```

```r
3/(2+3)*(factorial(2+3))/((factorial(2+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(2+3-3)
```

```
## [1] 0.13824
```

```r
3/(2+3)*dbinom(3,2+3,0.4)
```

```
## [1] 0.13824
```

- Para P(X=3)

$$\begin{aligned}
P(X=3) &= p(3,3,0.4) \\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p) = p(3;3+3,0.4) \\
&= \frac{3}{3+3} \cdot \frac{(3+3)!}{(3+3-3)!3!} 0.4^3 (1-0.4)^{3+3-3} \\
&= 0.13824
\end{aligned}$$

```
dnbinom(3,3,0.4)
```

```
## [1] 0.13824
```

```
3/(3+3)*(factorial(3+3))/((factorial(3+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(3+3-3)
```

```
## [1] 0.13824
```

```
3/(3+3)*dbinom(3,3+3,0.4)
```

```
## [1] 0.13824
```

- Para P(X=5)

$$\begin{aligned}
P(X=5) &= p(5,3,0.4) \\
&= p_{NB}(x;k,p) = \frac{k}{x+k} p_B(k;x+k,p) = p(3;5+3,0.4) \\
&= \frac{3}{5+3} \cdot \frac{(5+3)!}{(5+3-3)!3!} 0.4^3 (1-0.4)^{5+3-3} \\
&= 0.1045094
\end{aligned}$$

```
dnbinom(5,3,0.4)
```

```
## [1] 0.1045094
```

```
3/(5+3)*(factorial(5+3))/((factorial(5+3-3))*factorial(3))*0.4^3*(1-0.4)^(5+3-3)
```

```
## [1] 0.1045094
```

```
3/(5+3)*dbinom(3,5+3,0.4)
```

```
## [1] 0.1045094
```

4.31

Greenwood y Yule dieron a conocer el número de accidentes ocurrido entre 414 operadores de maquinaria, en un periodo de tres meses consecutivos. En la tabla la primera columna indica el número de accidentes sufridos por un mismo operador, y la segunda indica la frecuencia relativa para aquellos que habían sufrido la cantidad de accidentes indicada en el lapso de tres meses.

Con el procedimiento del ejemplo 4.10, comparar las frecuencias relativas observadas con las correspondientes probabilidades si el número de accidentes es una variable aleatoria binomial negativa.

Respuesta.- Sea $x=0$, $E(X)=0.08333333$, $Var(X)=0.007143697$ entonces,

$$p = \frac{E(X)}{Var(X)} = \frac{0.08333333}{0.007143697} = 0.4889976$$

$$y$$

$$k = \frac{E(X)^2}{Var(X) - E(X)} = \frac{0.08333333^2}{0.007143697 - 0.08333333} = 0.4593301$$

sea $\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du, \;\; n > 0$, y dado que k no es entero entonces,

$$p(x;k,p) = \frac{\Gamma(k+x)}{x!\Gamma(k)}p^k(1-p)^x = \frac{\Gamma(0.4593301 - 0)}{0!\Gamma(0.4593301)}0.4889976^{0.4593301}(1 - 0.4889976)^0 = 0.7199282179$$

El mismo procedimiento para las demás x.

```
x = c(0,1,2,3,4,5,6,7,8)
fr = c(0.715,0.179,0.063,0.019,0.010,0.010,0.002,0.000,0.002)
EX = function(x,fr){
  e = 0
  for(i in 1:length(x)){
    e = e + x[i]*fr[i]
  }
  return(e)
}
EX2 = function(x,fr){
  e = 0
  for(i in 1:length(x)){
    e = e + x[i]^2*fr[i]
  }
  return(e)
}
m = EX(x,fr)
v = EX2(x,fr)-EX(x,fr)^2
p = m/v
k = m^2/(v-m)
teo = c()
for(i in 0:8){
  teo = c(teo,(gamma(k+i)/(factorial(i)*gamma(k))) * p^k * (1-p)^i)
}
t = data.frame(x,fr,teo)
colnames(t) = c("x","Freq relativa","Prob teórica")
t
```

```
##   x Freq relativa Prob teórica
## 1 0         0.715 0.7199282179
## 2 1         0.179 0.1689807064
## 3 2         0.063 0.0630062536
## 4 3         0.019 0.0263938177
## 5 4         0.010 0.0116642605
## 6 5         0.010 0.0053159368
## 7 6         0.002 0.0024716723
## 8 7         0.000 0.0011654760
## 9 8         0.002 0.0005553108
```

4.32

Un contador recientemente graduado pretende realizar el examen CPA. Si el número de veces que se hace el examen constituye un conjunto de eventos independientes con una probabilidad de aprobar a 0.6, ¿cuál es la probabilidad de que no se necesiten más de cuatro intentos para aprobar el examen? ¿Son válidas las suposiciones de independencia y probabilidad constante?

Respuesta.- Ya que $K = 1$ surge un caso especial de la distribución binomial negativa, que se conoce con el nombre de distribución geométrica y cuya función de probabilidad está dada por

$$p(x; p) = p(1-p)^x$$

Sabiendo que esta variable geométrica representa el número de fallas que ocurren antes de que se presente el primer éxito, y que nosotros tenemos que calcular la probabilidad hasta el primer éxito entonces la función acumulada estará dada por

$$P(X \leq 4) = F(x; p) = 1 - (1-p)^x = 1 - (1-0.6)^4 = 0.9744$$

```
pgeom(4-1,0.6)
```

```
## [1] 0.9744
```

```
1-(1-0.6)^4
```

```
## [1] 0.9744
```

Efectivamente son válidas las suposiciones de independencia y probabilidad constante, debido a que éstas distribuciones se derivan de la distribución binomial.

4.33

En un departamento de control de calidad se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una linea de ensamble. Se piensa que la proposición de unidades defectuosas es de 0.05.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentre defectuosa?

Respuesta.- Sean $P(X = 20)$, $k = 2$ y $p = 0.05$ por la función binomial negativa tenemos,

$$P(X = 20) = p(x; k, p) = \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x = p(20; 2, 0.05) = \binom{2+20-1}{2-1} 0.05^2 (1-0.05)^{20} = 0.01882$$

```
dnbinom(20,2,0.05)
```

```
## [1] 0.01882051
```

b)

Supóngase que la décimo quinta unidad inspeccionada es la segunda que se encuentra defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de este hecho bajo condiciones determinadas?

Respuesta.- Similar al inciso a)

$$P(X = 15) = p(x; k, p) = \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x = p(20; 2, 0.05) = \binom{2+15-1}{2-1} 0.05^2 (1-0.05)^{15} = 0.01853165$$

```r
dnbinom(15,2,0.05)
```

```
## [1] 0.01853165
```

4.33

De las distribuciones binomial, Poisson, hipergeometrica y binomial negativa, ¿cuáles no consideraría si alguien le dijera, de una distribución en particular que:

a)

¿La media es igual a la varianza?

Respuesta.- No consideraría a las distribuciones binomial, hipergeométrica y binomial negativa.

b)

¿La media es más grande que la varianza?

Respuesta.- no consideraría a la distribución de Poisson.

c)

¿La media es menor a la varianza?

Respuesta.- Todas son consideradas.

d)

El tercer momento, alrededor de la media, ¿es negativo?

Respuesta.- no consideraría a las distribuciones binomial, Poisson y binomial negativa.

e)

¿El fenómeno aleatorio de interés constituye un grupo de ensayos independientes?

Respuesta.- no consideraría a las distribuciones binomial, Poisson y binomial negativa.

f)

¿El muestreo se lleva a cabo con reemplazo?

Respuesta.- no consideraría a las distribuciones hipergeométrica y Poisson.

g)

¿El muestreo se lleva a cabo sin reemplazo?

Respuesta.- No se consideraría a las distribuciones binomial, binomial negativa y Poisson

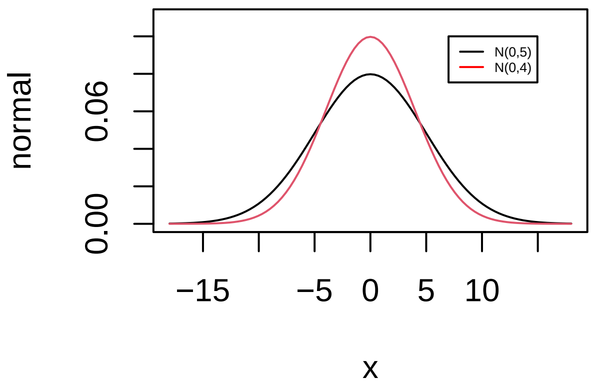
Ejercicios Capítulo 5

5.1.

En la misma gráfica, dibujar las distribuciones normales $N(0,5)$ y $N(0,4)$

Respuesta.-

```
curve(dnorm(x, mean=0, sd=5), ylim =c(0,.11) ,from = -18, to = 18, ylab = "normal")
curve(dnorm(x, mean=0, sd=4),  add = TRUE, col = 2)
legend(7, .1, legend=c("N(0,5)", "N(0,4)"),
       col=c("black", "red"), lty=1:1, cex=0.4)
```



5.2.

Sea $X \sim N(50,10)$. Determinar las siguientes probabilidades

a)

$P(X < 40)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z < (40-50)/10] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{40-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = 0.1586553.$$

```
pnorm(40,50,10)
```

```
## [1] 0.1586553
```

```
integrate(function(x) (1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2),-Inf,(40-50)/10)
```

```
## 0.1586553 with absolute error < 4.8e-07
```

```
1/(sqrt(2*pi))*(-exp(-((-1)^2/2)) + exp(-(-Inf)^2/2))
```

```
## [1] -0.2419707
```

b)

$P(X < 65)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z < (65-50)/10] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{65-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.9331928$$

```r
pnorm(65,50,10)
```

```
## [1] 0.9331928
```

```r
integrate(function(x) (1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2),-Inf,(65-50)/10)
```

```
## 0.9331928 with absolute error < 1.1e-07
```

c)

$P(X > 55)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z > (55-50)/10] = 1 - P[Z \leq (55-50)/10] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{55-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.3085375$$

```r
pnorm(55,50,10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3085375
```

d)

$P(X > 35)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z > (35-50)/10] = 1 - P[Z \leq (35-50)/10] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{35-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.93319285$$

```r
pnorm(35,50,10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.9331928
```

e)

$P(40 < X < 45)$

Respuesta.-

$$P(40 < X < 45) = P\left(\frac{40-50}{10} < Z < \frac{45-50}{10}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{45-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{40-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = 0.1498823.$$

```r
pnorm(45,50,10) - pnorm(40,50,10)
```

```
## [1] 0.1498823
```

f)

$P(38 < X < 62)$

Respuesta.-

$$P(38 < X < 62) = P\left(\frac{38-50}{10} < Z < \frac{62-50}{10}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{62-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{38-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 0.7698607.$$

```
pnorm(62,50,10) - pnorm(38,50,10)
```

```
## [1] 0.7698607
```

5.3.

Sea $X \sim N(200, 20)$. Determinar las siguientes probabilidades:

a)

P(185<X<210)

Respuesta.-

$$P\left(\frac{185-200}{20} < Z < \frac{210-200}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{210-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{185-210}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 0.4648351.$$

```
pnorm(210,200,20)-pnorm(185,200,20)
```

```
## [1] 0.4648351
```

b)

P(215<X<250)

Respuesta.-

$$P\left(\frac{215-200}{20} < Z < \frac{250-200}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{250-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{215-210}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 0.2204177.$$

```
pnorm(250,200,20)-pnorm(215,200,20)
```

```
## [1] 0.2204177
```

c)

P(X>240)

Respuesta.-

$$P\left(Z > \frac{240-200}{20}\right) = P1 - \left(Z \leq \frac{240-200}{20}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{240-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 0.02275013.$$

```
pnorm(240,200,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02275013
```

d)

P(X>178)

Respuesta.-

$$P\left(Z > \frac{178-200}{20}\right) = P1 - \left(Z \leq \frac{178-200}{20}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{178-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = 0.8643339.$$

```
pnorm(178,200,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.8643339
```

5.4.

Sea $X \sim N(-25, 10)$. Encontrar los valores de x que corresponden a las siguientes probabilidades:

a)

$P(X < x) = 0.1251$. Respuesta.- Viendo la tabla z tenemos

$$z = \frac{x+25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = -1.15 \cdot 10 - 25 = -35.5$$

```
qnorm(0.1251)*10-25
```

```
## [1] -36.49864
```

b)

$P(X < x) = 0.9382$ Respuesta.-

$$z = \frac{x+25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 1.54 \cdot 10 - 25 = -9.6$$

```
qnorm(0.9382)*10-25
```

```
## [1] -9.601626
```

c)

$P(X > x)00.3859$ Respuesta.-

$$z = \frac{x+25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = -0.29 \cdot 10 - 25 = -27.9$$

```
qnorm(0.3859)*10-25
```

```
## [1] -27.90021
```

d)

$P(X > x)00.8340$ Respuesta.-

$$z = \frac{x+25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 0.97 \cdot 10 - 25 = .15.3$$

```r
qnorm(0.8340)*10-25
```

```
## [1] -15.29907
```

5.5.

Sea $X \sim N(10, 5)$. Encontrar los valores de x que corresponden a las siguientes probabilidades:

a)

$P(X < x) = 0.05$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -1.645 \cdot 5 + 10 = 1.775$$

```r
qnorm(0.05)*5+10
```

```
## [1] 1.775732
```

b)

$P(X < x) = 0.95$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 1.645 \cdot 5 + 10 = 18.225$$

```r
qnorm(0.95)*5+10
```

```
## [1] 18.22427
```

c)

$P(X < x) = 0.99$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 2.33 \cdot 5 + 10 = 21.65$$

```r
qnorm(0.99)*5+10
```

```
## [1] 21.63174
```

d)

$P(X < x) = 0.01$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -2.33 \cdot 5 + 10 = -1.65$$

```r
qnorm(0.01)*5+10
```

```
## [1] -1.631739
```

e)

$P(X < x) = 0.025$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -1.96 \cdot 5 + 10 = 0.2$$

```r
qnorm(0.025)*5+10
```

```
## [1] 0.2001801
```

f)

$P(X < x) = 0.975$

Respuesta.-

$$z = \frac{x-10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 1.96 \cdot 5 + 10 = 19.8$$

```r
qnorm(0.975)*5+10
```

```
## [1] 19.79982
```

5.6.

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$. Determinar la media y la varianza de X si los cuantiles son $x_{0.4} = 50$ y $x_{0.8} = 100$.

Respuesta.- Sea $z_1 = \dfrac{x_{0.4} - \mu}{\sigma} \qquad z_2 = \dfrac{z_{0.8} - \mu}{\sigma}$, entonces

$$\frac{50-\mu}{z_1} = \frac{100-\mu}{z_2}$$

Así,

$$\mu = \frac{100z_1 - 50z_2}{z_1 - z_2} = \frac{100 \cdot (-0.225) - 50 \cdot 0.845}{-0.225 - 0.845} = 60.51402$$

Luego reemplazamos μ en z_1 para hallar σ,

$$\sigma = \frac{x_{0.4} - \mu}{z_1} = \frac{50 - 60.51402}{-0.225} = 46.72898$$

```r
mu = (100*qnorm(0.4)-50*qnorm(0.8))/(qnorm(0.4)-qnorm(0.8))
mu
```

```
## [1] 61.5687
```

```r
(50-mu)/qnorm(0.4)
```

```
## [1] 45.66342
```

5.7.

Una universidad espera recibir, para el siguiente año escolar, 16000 solicitudes de ingreso el primer año de licenciatura. Se supone que las calificaciones obtenidas por los aspirantes en la prueba SAT se pueden calcular, de manera adecuada, por una distribución normal con media 950 y desviación estándar 100. Si la universidad decide admitir al 25% de todos los aspirantes que obtengan las calificaciones más altas en la prueba SAT, ¿cuál es la mínima calificación que es necesario obtener en esta prueba, para ser admitido por la universidad?

Respuesta.- Sea $P(X > x_{0.25})$ entonces $P(X < x_{0.75}) = -1.96$ así

$$x_{0.75} = 0.675 * 100 + 950 = 1017.5 \simeq 1018$$

```r
qnorm(0.75)*100+950
```

```
## [1] 1017.449
```

5.8.

Una fábrica produce pistones cuyos diámetros se encuentran adecuadamente clasificados por una distribución normal con un diámetro promedio de 5 cm y una desviación estándar igual a 0.001 cm. Para que un pistón sirva, su diámetro debe encontrarse entre 4.998 y 5.002 cm. Si el diámetro del pistón es menor que 4.998 se desecha; si es mayor que 5.002 el pistón puede reprocesarse. ¿Qué porcentaje de pistones servirá? ¿Qué porcentaje será desechado? ¿Qué porcentaje será reprocesado?.

Respuesta.- Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ de donde, el porcentaje que servirá vendrá dado por

$$P\left(\frac{4.998-5}{0.001} \leq Z \leq \frac{5.002-5}{0.001}\right)$$

entonces,

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = F_Z(2,0,1) - F_Z(-2,0,1) = 0.9772 - 0.0228 = 0.9544.$$

```
pnorm((5.002-5)/0.001)-pnorm((4.998-5)/0.001)
```

```
## [1] 0.9544997
```

El porcentaje que será desechado viene dado por:

$$P(Z \leq -2) = F_Z(-2;0,1) = 0.0228.$$

```
pnorm((4.998-5)/0.001)
```

```
## [1] 0.02275013
```

El porcentaje que será reprocesado está dado por:

$$P(Z \geq 2) = 1 - F_Z(2;0,1) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

```
pnorm((5.002-5)/0.001, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02275013
```

5.9.

La demanda mensual de cierto producto A tiene una distribución normal con una media de 200 unidades y desviación estándar igual a 40 unidades. La demanda de otro producto B también tiene una distribución normal con media de 500 unidades y desviación estándar igual a 80 unidades. Un comerciante que vende estos productos tiene en su almacén 280 unidades de A y 650 de B al comienzo de un mes, ¿cuál es la probabilidad de que, en el mes, se vendan todas las unidades de ambos productos? Puede suponerse independencia entre ambos eventos.

Respuesta.- Sea $z_A = \dfrac{280-200}{40} = 2$ y $z_B = \dfrac{650-500}{80} = 1.875$, entonces para hallar la probabilidad de que se vendan ambos productos estará dado por

$$P(Z_A \geq 2) \cdot P(Z_B \geq 1.875) = [1 - F_{Z_A}(2;0,1)] \cdot [1 - F_{Z_B}(1.875;0,1)] = (1-0.9772)(1-0.9696) = 0.00069312$$

```
pnorm((280-200)/40,lower.tail = FALSE)*pnorm((650-500)/80,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0006915212
```

5.10.

El peso de cereal que contiene una caja se aproxima a una distribución normal con una media de 600 gramos. El proceso de llenado de las cajas está diseñado para que de entre 100 cajas, el peso de una se encuentre fuera del intervalo 590-610 gramos. ¿Cuál es el valor máximo de la desviación estándar para alcanzar este requerimiento?

Respuesta.- Si una caja de entre 100 (1/100) queda fuera del intervalo $590-610$ entonces lo que queda dentro estará dado por $(99/100) = 0.99$. Sabemos que la distribución Normal estandarizada es simétrica respecto al 0, por lo que,

$$P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right)$$

Luego, ya que

$$P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right)$$

entonces,

$$P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.99 \quad \Rightarrow \quad P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.495$$

Pero $P(Z \geq 0) = -F_Z(Z \leq 0) = -0.5$ de donde

$$P\left(Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) - 0.5 \geq 0.495 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.995$$

Así,

$$z \geq 2.58 \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{\sigma} \geq 2.58 \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq 3.876.$$

Por lo que el valor máximo de σ para alcanzar el requerimiento estará dado por 3.876.

5.11

En una tienda de descuento la demanda diaria de acumuladores para automóvil se calcula mediante una distribución normal con una media de 50 acumuladores que tienen una desviación estándar de 10. En dos días consecutivos se venden 80 y 75 acumuladores respectivamente. Si estos días son típicos, ¿qué tan probable es, bajo las suposiciones dadas, vender 80 o más y 75 o más acumuladores?

Respuesta.- Sea $X \sim N(50, 10)$ entonces

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 80) \cdot P(X_2 \geq 75) &= \left(Z_1 \geq \frac{80-50}{10}\right) \cdot P\left(Z_2 \geq \frac{75-50}{10}\right) \\ &= [1 - F_{Z_1}(3; 0, 1)] \cdot [1 - F_{Z_2}(2.5; 0, 1)] \\ &= (1 - 0.9987) \cdot (1 - 0.9938) \\ &= 0.00000806. \end{aligned}$$

```
pnorm((80-50)/10,lower.tail = FALSE) * pnorm((75-50)/10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 8.382415e-06
```

5.12.

Un fabricante de aviones desea obtener remaches para montar los propulsores de sus aviones. El esfuerzo a la tensión mínimo necesario de cada remache es de 25000 lb. Se pide a tres fabricantes de remaches (A,B y C) que proporcionen toda la información pertinente con respecto a los remaches que producen. Los tres fabricantes aseguran que la resistencia a la tensión de sus remaches se encuentran distribuida, de manera aproximada, normalmente con un valor medio de $28000, 30000$ y 29000 lb, respectivamente.

a)

¿Tiene el fabricante la suficiente información para hacer una selección?

Respuesta.- No, ya qua no se definio la desviación estándar.

b)

Supóngase que las desviaciones estándar para A, B y C son $1000, 1800$ y 1200, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que un remache producido ya sea por A, B o C no reúna los requisitos mínimos?

Respuesta.- Para $X_A \sim N(28000, 1000)$ se tiene

$$P(X_A \leq 25000) = P\left(Z_A \leq \frac{25000 - 28000}{1000}\right) = F_{Z_A}(-3; 0, 1) = 0.0013.$$

```
pnorm((25000-28000)/1000)
```

```
## [1] 0.001349898
```

Para $X_B \sim N(30000, 1800)$ se tiene

$$P(X_B \leq 25000) = P\left(Z_B \leq \frac{25000 - 30000}{1800}\right) = F_{Z_B}(-2.78; 0, 1) = 0.0027$$

```
pnorm((25000-30000)/1800)
```

```
## [1] 0.002736602
```

Para $X_C \sim N(29000, 1200)$ se tiene

$$P(X_C \leq 25000) = P\left(Z_C \leq \frac{25000 - 29000}{1200}\right) = F_{Z_C}(-3.33; 0, 1) = 0.0004$$

```
pnorm((25000-29000)/1200)
```

```
## [1] 0.0004290603
```

c)

Si usted fuera el fabricante de aviones, ¿podría elegir entre A, B y C, con base a sus respuesta al inciso b)? ¿Por qué?.

Respuesta.- Escogería a C ya que tiene la probabilidad más baja de que se rompa un remache.

5.13.

Un fabricante de escapes para automóviles desea garantizar su producto durante un periodo igual al de la duración del vehículo. El fabricante supone que el tiempo de duración de su producto es una variable aleatoria con una distribución normal, con una vida promedio de tres años y una desviación estándar de seis meses. Si el costo de reemplazo por unidad es de \$10, ¿cuál puede ser el costo total de reemplazo para los primeros dos años, si se instalan 1000000 unidades?

Respuesta.- Sea $\mu = 3$ y $\sigma = 0.5$, entonces

$$P(X \leq 2) = P(Z \leq \frac{2-3}{0.5}) = P(Z \leq -2) = F_Z(-2; 0, 1) = 0.0228.$$

Ahora ya que el costo de reemplazo es de %10, de donde sólo el 2.28% de 1000000 será cambiado entonces el costo total de reemplazo estará dado por:

$$1000000 * 0.0228 * 10 = 228000.$$

```
pnorm((2-3)/0.5)*1000000*10
```

```
## [1] 227501.3
```

5.14.

El tiempo necesario para armar cierta unidad es una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 30 minutos y desviación estándar igual a dos minutos. Determinar el tiempo de armado de manera tal que la probabilidad de exceder este sea de 0.02.

Respuesta.- Sea $\mu = 30$ y $\sigma = 2$, entonces

$$P\left(Z \geq \frac{T-30}{2}\right) = 0.02 \;\Rightarrow\; 1 - F_Z(T) = 0.02 \;\Rightarrow\; F_Z(T) = 0.98 \;\Rightarrow\; \frac{T-30}{2} = 2.06 \;\Rightarrow\; T = 34.12.$$

```
2*qnorm(0.02,lower.tail = FALSE)+30
```

```
## [1] 34.1075
```

5.15.

Un periódico llevó a cabo una encuesta entre 400 personas seleccionadas aleatoriamente, en un estado, sobre el control de armas. De las 400 personas, 220 se pronunciaron en favor de un estricto control.

a)

¿Qué tan probable resulta el hecho de tener 220 o más personas a favor del control de armas, si la población en este estado se encuentra dividida en opinión de igual manera?.

Respuesta.- Sea, $p = 0.5$, $\mu = np = 400 \cdot 0.5 = 200$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 10$, entonces

$$P\left(Z \geq \frac{220-200}{10}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - F_Z(2; 0, 1) = 0.0228.$$

```
pnorm((220-200)/10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02275013
```

b)

Supóngase que se encuesta a 2000 personas teniendo la misma proporción de estas a favor del control de armas, que la del inciso anterior. ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso a)?.

Respuesta.- Sea, $p = 0.5$, $\mu = np = 2000 \cdot 0.5 = 1000$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2000 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \sqrt{500}$, entonces dado que la proporción es de $220/400 = 0.55$

$$P(X \geq 1100) = P\left(Z \geq \frac{1100 - 1000}{\sqrt{500}}\right) = P(Z \geq 4.47) = 1 - F_Z(4.47; 0, 1) = 0$$

```
pnorm((1100-1000)/sqrt(500),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 3.872108e-06
```

c)

Si el número de personas encuestadas es de 10000, ¿cuál es la probabilidad de tener una ocurrencia diferente al del inciso b)?.

Respuesta.- Sea, $p = 0.5$, $\mu = np = 10000 \cdot 0.5 = 5000$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10000 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 50$, entonces dado que la proporción es de $220/400 = 0.55$

$$P(X \geq 5500) = P\left(Z \geq \frac{5500 - 5000}{50}\right) = P(Z \geq 10) = 1 - F_Z(10; 0, 1) = 0$$

```
pnorm((5500-5000)/50,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 7.619853e-24
```

5.16.

Una prueba de opción múltiple contiene 25 preguntas y cada una de estas cinco opciones. ¿Cuál es la probabilidad de que, al contestar de manera aleatoria cada pregunta, más de la mitad de las respuetas sea incorrecta?

Respuesta.- Sea $p = 4/5$ la probabilidad de contestar una pregunta mal y dado que $\mu = np = 25 \cdot \dfrac{4}{5} = 20$ y $\sigma = \sqrt{25 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{5}} = 2$, entonces

$$P(X \geq 13) = P\left(Z \geq \frac{13 - 20}{2}\right) = 1 - F_Z(-3.5) = 1 - 0.0002 = 0.9998$$

```
pnorm((13-20)/2,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.9997674
```

5.17.

Una organización llevó a cabo una encuesta entre 1600 personas, seleccionadas de manera aleatoria de toda la población del país, para conocer su opinión con respecto a la seguridad en las plantas de energía nuclear. De este grupo, el 60% opinó que las plantas de energía nuclear tienen muy poca seguridad. Con base en estos resultados ¿existe alguna razón para dudar que la población en general tiene una opinión neutral con respecto a este asunto?.

Respuesta.- Sea $\mu = 1600 \cdot 0.6 = 960$ y $\sigma = \sqrt{1600 * 0.4 * (1 - 0.4)} = \sqrt{384}$, entonces

$$P(X \leq 800) = P\left(Z \leq \frac{800-960}{\sqrt{384}}\right) = P(-160/\sqrt{384}; 0, 1) = 0.$$

```
pnorm((800-1600*0.6)/sqrt(1600*0.4*(1-0.4)))
```

```
## [1] 1.607631e-16
```

Si existe ya que la probabilidad es prácticamente 0.

5.18.

Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente.

a)

Para $n = 15,\ p = 0.25$ y $n = 15$ y $p = 0.5$, calcular las siguientes probabilidades:

Respuesta.-

P(X=8)

$$P(X = 8) = p(8; 15, 0.25) = \binom{15}{8} \cdot 0.25^8 \cdot (1-0.25)^{15-8} = 0.01310682$$

```
choose(15,8)*0.25^(8)*(1-0.25)^(15-8)
```

```
## [1] 0.01310682
```

```
dbinom(8,15,0.25)
```

```
## [1] 0.01310682
```

$$P(X = 8) = p(8; 15, 0.5) = \binom{15}{8} \cdot 0.5^8 \cdot (1-0.5)^{15-8} = 0.1963806$$

```
choose(15,8)*0.5^(8)*(1-0.5)^(15-8)
```

```
## [1] 0.1963806
```

```
dbinom(8,15,0.5)
```

```
## [1] 0.1963806
```

P(X<=3)

$$P(X \leq 3) = F(3; 15, 0.25) = \sum_{i=0}^{3} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0.4612869$$

```
pbinom(3,15,0.25)
```

```
## [1] 0.4612869
```

$$P(X \leq 3) = F(3; 15, 0.5) = \sum_{i=0}^{3} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.01757813$$

```
pbinom(3,15,0.5)
```

```
## [1] 0.01757813
```

P(X<=7)

$$P(X \leq 7) = F(7; 15, 0.25) = \sum_{i=0}^{7} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0.9827002$$

```
pbinom(7,15,0.25)
```

```
## [1] 0.9827002
```

$$P(X \leq 7) = F(8; 15, 0.5) = \sum_{i=0}^{7} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.5$$

```
pbinom(7,15,0.5)
```

```
## [1] 0.5
```

P(X>=9)

$$P(X \geq 9) = 1-P(X < 9) = 1-P(X \leq 8) = 1-F(8; 15, 0.25) = 1-\sum_{i=0}^{8} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0.004193014$$

```
pbinom(8,15,0.25,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.004193014
```

$$P(X \geq 9) = F(9; 15, 0.5) = 1-P(X < 9) = 1-P(X \leq 8) = 1-\sum_{i=0}^{8} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.3036194$$

```
pbinom(8,15,0.5,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3036194
```

P(X>=12)

$$P(X \geq 12) = 1-P(X < 12) = 1-P(X \leq 11) = 1-F(11; 15, 0.25) = 1-\sum_{i=0}^{11} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0$$

```
pbinom(12,15,0.25,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 9.229407e-07
```

$$P(X \geq 12) = F(12; 15, 0.5) = 1-P(X < 12) = 1-P(X \leq 11) = 1-\sum_{i=0}^{11} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.01757813$$

```
pbinom(11,15,0.5,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.01757813
```

b)

Aproxímense los valores de las probabilidades anteriores mediante el empleo de la distribución normal.

P(X=8)

$$P(X=8)=P\left(Z=\frac{8-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot(1-0.25)}}\right)=p(2.53;0,1)=0$$

```
dnorm((8-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))))
```

```
## [1] 0.01608208
```

$$P(X=8)=P\left(Z=\frac{8-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot(1-0.5)}}\right)=p(2.25;0,1)=0$$

P(X<=3)

$$P(X\leq 3)=P\left(Z\leq\frac{3-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot(1-0.25)}}\right)=p(-0.447;0,1)=0.328$$

```
pnorm((3-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))))
```

```
## [1] 0.3273604
```

$$P(X\leq 3)=P\left(Z\leq\frac{3-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot(1-0.5)}}\right)=p(-2.32;0,1)=0.0102$$

```
pnorm((3-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))))
```

```
## [1] 0.01006838
```

P(X<=7)

$$P(X\leq 7)=P\left(Z\leq\frac{7-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot(1-0.25)}}\right)=p(1.937;0,1)=0.9735$$

```
pnorm((7-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))))
```

```
## [1] 0.9736838
```

$$P(X\leq 7)=P\left(Z\leq\frac{7-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot(1-0.5)}}\right)=p(-0.258;0,1)=0.397$$

```
pnorm((7-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))))
```

```
## [1] 0.3981267
```

P(X>=9)

$$P(X\geq 9)=1-P\left(Z\leq\frac{9-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot(1-0.25)}}\right)=1-p(3.13;0,1)=0$$

```
pnorm((9-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0008725593
```

$$P(X\leq 9)=1-P\left(Z\leq\frac{9-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot(1-0.5)}}\right)=1-p(0.77;0,1)=1-0.7794=0.2206$$

```r
pnorm((9-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.219289
```

P(X>=12)

$$P(X \geq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9 - 15 \cdot 0.25}{\sqrt{15 \cdot 0.25 \cdot (1 - 0.25)}}\right) = 1 - p(4.91; 0, 1) = 0$$

```r
pnorm((12-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 4.341614e-07
```

$$P(X \leq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9 - 15 \cdot 0.5}{\sqrt{15 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = 1 - p(2.32; 0, 1) = 1 - 0.9898 = 0.0102$$

```r
pnorm((12-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.01006838
```

5.19.

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (a, b)

a)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre a una desviación estándar de la media?

Respuesta.- Sea $\sigma = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$ la desviación estándar de una distribución uniforme. Cabe mencionar que σ es la longitud de del subintervalo que queremos calcular. Dado que existe σ a la derecha y a la izquierda se tiene,

$$P(\sigma^- \leq X \leq \sigma^+) = 2 \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773503$$

```r
punif(1/(sqrt(3)))
```

```
## [1] 0.5773503
```

b)

¿Puede tomar X un valor que se encuentre a dos desviaciones estándar de la media?

Repuesta.- No puedo, dado que tendríamos que multiplicar $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ por 4 el cual es mayor a 1.

5.20

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (a, b). ¿Cuál es la máxima distancia, en términos de la desviación estándar, a la que puede encontrarse un valor X a partir de la media?

Respuesta.- Sea x la máxima distnacia en terminos de la desviación estándar, entonces como se vio en el anterior ejercicio se tiene,

$$x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{3}$$

donde la distnacia máxima estará dada por $2\sqrt{3}$.

5.21

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intrevalo (a,b). Si $E(X) = 10$ y $Var(X) = 12$, encontrar los valores de a y de b.

Respuesta.- Sean $E(X) = \dfrac{a+b}{2} = 10$ y $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, entonces

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{a+b}{2} & = & 10 \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} & = & 12 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 20 \\ b-a & = & 12 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad a = 4, \quad b = 16.$$

5.22

Supóngase que la concentración de cierto contaminante se encuentra distribuida de manera uniforme en el intervalo de 4 a 20 ppm (partes por millón). Si se considera como tóxica una concentración de 15 ppm o más ¿Cuál es la probabilidad de que al tomarse una muestra la concentración de ésta sea tóxica?

Respuesta.- Sea $a = 4$ y $b = 20$ entonces,

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - F(15; 3, 20) = 1 - \frac{15-4}{20-4} = 0.3125$$

```
punif(15,4,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3125
```

5.23

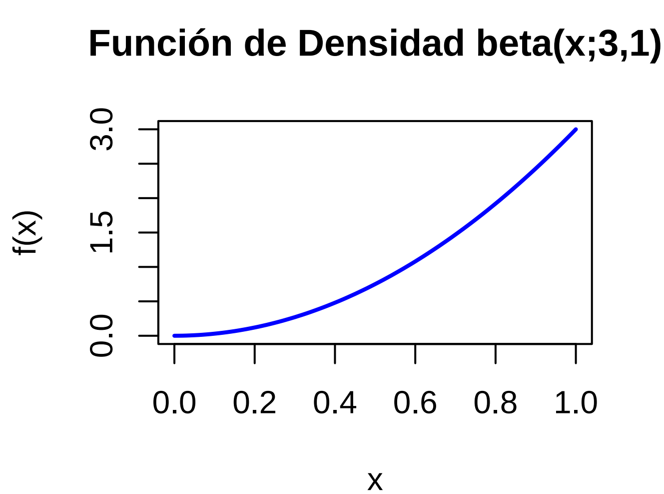
Sea X una variable aleatoria con distribución beta y parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 1$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad.

Respuesta.-

```
curve(dbeta(x,3,1),xlim=c(0,1),col="blue",lwd=2,
      xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad beta(x;3,1)")
```



b)

Obtener la media, la varianza, la desviación media, el coeficiente de asimetría y a curtosis relativa.

Respuesta.- La media de la distribución beta viene dada por

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+1} = 0.75$$

La varianza viene dada por

$$Var(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{3\cdot 1}{(3+1)^2(3+1+1)} = 0.0375$$

```
alpha=3
beta = 1
alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1))
```

```
## [1] 0.0375
```

Coeficiente de asimetría.

$$\alpha_3(X) = \frac{2(\beta-\alpha)\sqrt{\alpha+\beta+1}}{\sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta+2)} = \frac{2(1-3)\sqrt{3+1+1}}{\sqrt{3\cdot 1}(3+1+2)} = -0.860663.$$

```
alpha=3
beta = 1
(2*(beta-alpha)*sqrt(alpha+beta+1))/(sqrt(alpha*beta)*(alpha+beta+2))
```

```
## [1] -0.860663
```

Curtosis relativa

$$\alpha_3(X) = \frac{3(\alpha+\beta+1)\left[2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta(\alpha+\beta-6)\right]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} = \frac{3(3+1+1)\left[2(3+1)^2+3\cdot 1(3+1-6)\right]}{3\cdot 1(3+1+2)(3+1+3)} = 3.095238.$$

```
alpha=3
beta = 1
(3*(alpha+beta+1)*(2*(alpha+beta)^2+alpha*beta*(alpha+beta-6)))/
  (alpha*beta*(alpha+beta+2)*(alpha+beta+3))
```

```
## [1] 3.095238
```

c)

¿Cual es la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre dentro de una desviación estándar a partir de la media? ¿A dos desviaciónes estándar?

Respuesta.- Sean $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\sqrt{Var(x)} = \sqrt{\dfrac{3\cdot 1}{(3+1)^2(3+1+1)}} = \sqrt{0.0375}$ y $= E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \dfrac{3}{3+1} = 0.75$, entonces

$$
\begin{aligned}
P\left(0.75-\sqrt{0.0375} \le X \le 0.75+\sqrt{0.0375}\right) &= F\left(0.75+\sqrt{0.0375};3,1\right) - F\left(0.75-\sqrt{0.0375};3,1\right) \\
&= \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} \int_0^{0.75+\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\,dt \\
&- \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} \int_0^{0.75-\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\,dt \\
&= 0.6680896
\end{aligned}
$$

```
pbeta(sqrt(0.0375)+0.75,3,1) - pbeta(0.75-sqrt(0.0375),3,1)
```

```
## [1] 0.6680896
```

$$
\begin{aligned}
P\left(0.75-2\sqrt{0.0375} \le X \le 0.75+2\sqrt{0.0375}\right) &= F\left(0.75+2\sqrt{0.0375};3,1\right) - F\left(0.75-2\sqrt{0.0375};3,1\right) \\
&= \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} \int_0^{0.75+2\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\,dt \\
&- \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} \int_0^{0.75-2\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\,dt \\
&= 0.9522857.
\end{aligned}
$$

```
pbeta(2*sqrt(0.0375)+0.75,3,1) - pbeta(0.75-2*sqrt(0.0375),3,1)
```

```
## [1] 0.9522857
```

5.24.

Si los parámetros de la distribución beta son enteros, puede demostrarse que la función de distribución acumulativa beta se encuentra relacionada con la distribución binomial en la siguiente forma:

$$P(X < p) = I_p(\alpha,\beta) = \sum_{y=\alpha}^{n} \frac{n!}{(n-y)!y!} p^y (1-p)^{n-y},$$

en donde $n = \alpha + \beta - 1$ y $0 < p < 1$. Si X es una variable aleatoria con una distribución beta con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, emplear la relación anterior para obtener $P(X < 0.1)$, $P(X < 0.25)$ y $P(X < 0.5)$.

Respuesta.- Sea $n = 2 + 3 - 1 = 4$ entonces

Para P(X<0.1)

$$P(X < 0.1) = I_{0.1}(\alpha,\beta) = \sum_{y=2}^{4} \frac{4!}{(4-2)2!} 0.1^2 (1-0.1)^{n-2} = 0.0523.$$

```
a=2
b=3
n=a+b-1
p = 0.1
```

```r
sum=0
for(y in a:n){
  sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
sum
```

```
## [1] 0.0523
```

```r
pbeta(p,a,b)
```

```
## [1] 0.0523
```

Para P(X<0.25)

$$P(X<0.1)=I_{0.25}(\alpha,\beta)=\sum_{y=2}^{4}\frac{n!}{(n-2)2!}0.25^2(1-0.25)^{n-2}=0.267188.$$

```r
a=2
b=3
n=a+b-1
p = 0.25
sum=0
for(y in a:n){
  sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
sum
```

```
## [1] 0.2617188
```

```r
pbeta(p,a,b)
```

```
## [1] 0.2617188
```

Para P(X<0.5)

$$P(X<0.1)=I_{0.5}(\alpha,\beta)=\sum_{y=2}^{4}\frac{n!}{(n-2)2!}0.5^2(1-0.5)^{n-2}=0.6875.$$

```r
a=2
b=3
n=a+b-1
p = 0.5
sum=0
for(y in a:n){
  sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
sum
```

```
## [1] 0.6875
```

```r
pbeta(p,a,b)
```

```
## [1] 0.6875
```

5.25.

Tomando como referencia el ejercicio anterior, determinar la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre dentro de un intervalo igual a una desviación estándar de la media y posteriormente, de un intervalo igual a dos desviaciones estándar.

Respuesta.- Sean $n = 3 + 2 - 1 = 4$ y

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+2} = 0.6$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{3\cdot 2}{(3+2)^2(3+2+1)} = 0.04, \qquad \sqrt{Var(X)} = 0.2$$

```
alpha = 3
beta = 2
sqrt(alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1)))
```

```
## [1] 0.2
```

$$\begin{aligned} P(0.6-0.2 < X < 0.6+0.2) &= I_{0.8}(3,2) - I_{0.4}(3,2) \\ &= \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.8^2(1-0.8)^{n-2} - \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.4^2(1-0.4)^{n-2} \\ &= 0.64. \end{aligned}$$

```
beta=function(p,a,b){
  sum=0
  n=a+b-1
  for(y in a:n){
    sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
  return(sum)
}
beta(0.8,3,2)-beta(0.4,3,2)
```

```
## [1] 0.64
```

```
pbeta(0.8,3,2)-pbeta(0.4,3,2)
```

```
## [1] 0.64
```

Y para dos desviaciones estándar se tiene,

$$\begin{aligned} P(0.6-2\cdot 0.2 < X < 0.6+2\cdot 0.2) &= I_{1}(3,2) - I_{0.2}(3,2) \\ &= \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 1^2(1-1)^{n-2} - \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.2^2(1-0.2)^{n-2} \\ &= 0.9728. \end{aligned}$$

```
beta=function(p,a,b){
  sum=0
  n=a+b-1
  for(y in a:n){
    sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
  return(sum)
}
beta(1,3,2)-beta(0.2,3,2)
```

```
## [1] 0.9728
```

```
pbeta(1,3,2)-pbeta(0.2,3,2)
```

```
## [1] 0.9728
```

5.26.

La proporción de unidades defectuosas en un proceso de fabricación es una variable aleatoria que se encuentra aproximada por una distribución beta con $\alpha = 1$ y $\beta = 20$.

a)

¿Cuál es el valor de la media y de la desviación estándar?

Respuesta.-

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{1+20} = 0.04761905$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1\cdot 20}{(1+20)^2(1+20+1)} = 0.002061431, \qquad \sqrt{Var(X)} = 0.04540298$$

```
alpha = 1
beta = 20
sqrt(alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1)))
```

```
## [1] 0.04540298
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos sea mayor que un 10%? ¿Mayor que un 15?.

Respuesta.-

Mayor que un 10%

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 0.1) &= 1 - F(x;\alpha,\beta) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt} \\
&= 1 - F(0.1;1,20) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^{0.1} t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt} = 0.1215767.
\end{aligned}
$$

```
bx = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,0.1)
b = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,1)
1-bx$value/b$value
```

```
## [1] 0.1215767
```

```
pbeta(0.1,1,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1215767
```

Mayor a 15%

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 0.1) &= 1 - F(x;\alpha,\beta) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt} \\
&= 1 - F(0.15;1,20) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^{0.15} t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt} = 0.03875953.
\end{aligned}
$$

```
bx = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,0.15)
b = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,1)
1-bx$value/b$value
```

```
## [1] 0.03875953
```

```
pbeta(0.15,1,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.03875953
```

5.27.

Aproxime su respuesta al inciso b) del ejercicio anterior mediante el empleo de la aproximación normal dada por la expresión

$$F(x;\alpha,\beta) = F_N(x_u,0,1) - F_N(z_t;0,1)$$

tal que

$$z_u = \frac{[\beta] - 0.5 - (\alpha+\beta-1)(1-x)}{[x(\alpha+\beta-1)(1-x)]^{1/2}},$$

$$z_t = -\frac{(\alpha+\beta-1)(1-x)+0.5}{[x(\alpha+\beta-1)(1-x)]^{1/2}},$$

y $[\beta]$ denota el entero más grande que no excesa a β.

Respuesta.- Sean $p = 0.1$,

$$z_u = \frac{[20]-0.5-(1+20-1)(1-0.1)}{[0.1(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} = 1.118034$$

y

$$z_t = -\frac{(1+20-1)(1-0.1)+0.5}{[0.1(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} - 13.78909$$

$$\begin{array}{rcl} P(X \geq 1) & = & 1 - F(x;1,20) \\ & = & 1 - F_N(1.118034;0,1) - F_N(-13.78909,0,1) \\ & = & 0.1317762 \end{array}$$

```
a = 1
b = 20
x = 0.1
zu = (floor(b)-0.5-(a+b-1)*(1-x)) / ((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
zt = -((a+b-1)*(1-x)+0.5)/((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
1-(pnorm(zu)-pnorm(zt))
```

```
## [1] 0.1317762
```

Sean $p = 0.15$,

$$z_u = \frac{[20]-0.5-(1+20-1)(1-0.15)}{[0.15(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} = 1.565561$$

y

$$z_t = -\frac{(1+20-1)(1-0.1)+0.5}{[0.1(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} = -10.95893$$

$$\begin{array}{rcl} P(X \geq 1) & = & 1 - F(x;1,20) \\ & = & 1 - F_N(1.565561;0,1) - F_N(-10.95893,0,1) \\ & = & 0.05872575. \end{array}$$

```
a = 1
b = 20
x = 0.15
zu = (floor(b)-0.5-(a+b-1)*(1-x)) / ((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
zt = -((a+b-1)*(1-x)+0.5)/((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
1-(pnorm(zu)-pnorm(zt))
```

```
## [1] 0.05872575
```

5.28.

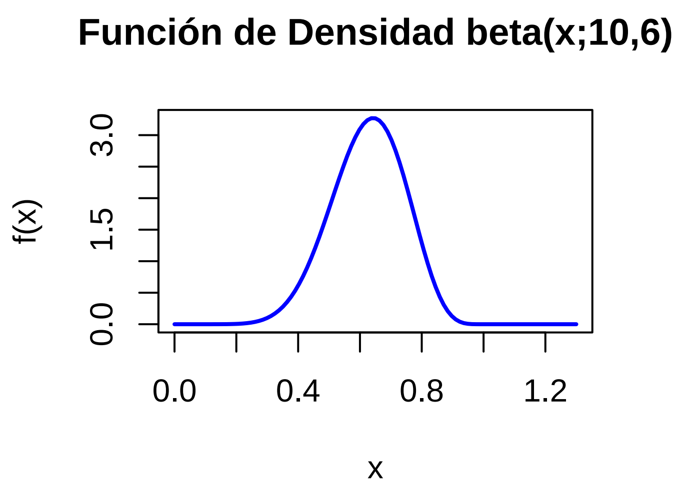
La comptencia en el mercado de una compañia de computadoras varía de manera aleatoria de acuerdo con una distribución beta con $\alpha = 10$ y $\beta = 6$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad

Respuesta.-

```
curve(dbeta(x,10,6),xlim=c(0,1.3),col="blue",lwd=2,
xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad beta(x;10,6)")
```



b)

Encontrar la media y la desviación estándar.

Respuesta.-

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{10}{10+6} = 0.625$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{10\cdot 6}{(10+6)^2(10+6+1)} = 0.01378676, \qquad \sqrt{Var(X)} = 0.1174171.$$

```
alpha = 10
beta = 6
sqrt(alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1)))
```

```
## [1] 0.1174171
```

c)

Obtener la probabilidad de que la competencia en el mercado sea menor que la media.

Respuesta.-

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 0.625) &= F(x;\alpha,\beta) = \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt} \\
&= F(0.625;10,6) = \frac{\displaystyle\int_0^{0.625} t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt} = 0.4826844.
\end{aligned}
$$

```
bx = integrate(function(x) x^{10-1}*(1-x)^{6-1},0,0.625)
b = integrate(function(x) x^{10-1}*(1-x)^{6-1},0,1)
bx$value/b$value
```

```
## [1] 0.4826844
```

```
pbeta(0.625,10,6)
```

```
## [1] 0.4826844
```

d)

Encontrar la probabilidad de que la competencia en el mercado se encuentre dentro de una desviación estándar de la media, y posteriormente de un intervalo igual a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Para una desviación estándar se tiene, $\sqrt{Var(X)} = 0.1174171$ entonces

$$
\begin{aligned}
P(0.625 - 0.1174171 \leq X \leq 0.625 + 0.1174171) &= F(X \leq 0.7424171;10,6) - F(X \leq 0.5075829;10,6) \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{0.7424171} t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt} \\
&+ \frac{\displaystyle\int_0^{0.5075829} t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt} \\
&= 0.6692339.
\end{aligned}
$$

```
pbeta(0.7424171,10,6) - pbeta(0.5075829,10,6)
```

```
## [1] 0.6692339
```

5.29.

Sea X una variable aleatoria con distribución gama con $\alpha = 2$ y $\beta = 50$

a)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor menor al valor de la media?

Respuesta.- La media viene dada por $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 50 = 100$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P(X \leq E(X)) = P(X \leq 50 * 2) &= F(x;\alpha,\theta) = F(100,2,50) \\
&= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma(100/50;2)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du} = \frac{\displaystyle\int_0^{2} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.5939942.
\end{aligned}
$$

```r
alpha=2
theta=50
x = 100
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.5939942
```

```r
pgamma(100,2,scale = 50)
```

```
## [1] 0.5939942
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor mayor de dos desviaciones estándar con respecto a la media?

Respuesta.- Sean $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 50 = 100$ y $2\sqrt{Var(X)} = 2\sqrt{\alpha\theta^2} = 2 \cdot 50\sqrt{2} = 100\sqrt{2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
P(X \geq E(X) + 2\sqrt{Var(X)}) &= P(X \geq 100 + 100\sqrt{2}) \\
&= F(x;\alpha,\theta) \\
&= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma\left(\frac{100+100\sqrt{2}}{50};2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{100+100\sqrt{2}}{50}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.04662213.
\end{aligned}
$$

```r
alpha=2
theta=50
```

```r
x = 100+2*sqrt(2)*50
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
1-gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.04662213
```

```r
pgamma(100+2*sqrt(2)*50,2,scale = 50,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.04662213
```

c)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor menor al de su moda?

Respuesta.- La moda viene dado por $(\alpha-1)\theta = (2-1)50 = 50$, de donde

$$\begin{aligned} P(X \le Moda) = P(X \le 50) &= F(x;\alpha,\theta) = F(50,2,50) \\ &= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma(50/50;2)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du} = \frac{\displaystyle\int_0^{1} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\ &= 0.2642411. \end{aligned}$$

```r
alpha=2
theta=50
x = (alpha-1)*theta
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.2642411
```

```r
pgamma((2-1)*50,2,scale=50)
```

```
## [1] 0.2642411
```

5.30.

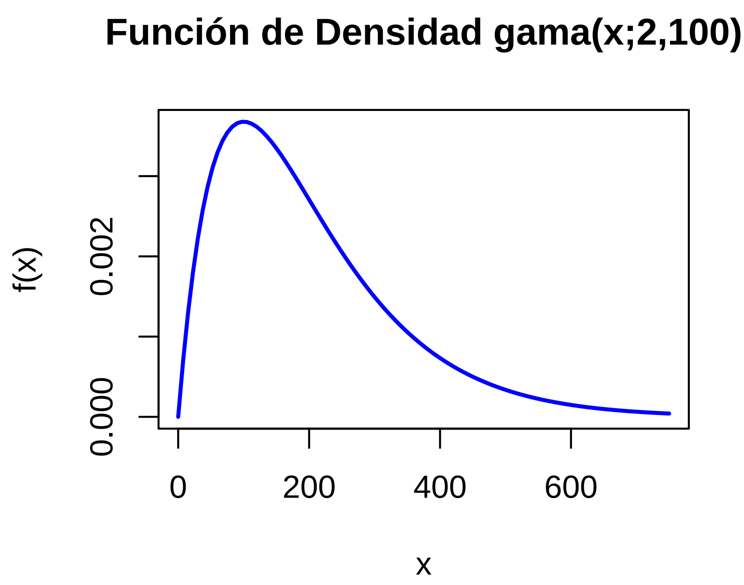
Sea X una variable aleatoria con distribución gama y $\alpha = 2$ y $\theta = 100$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad.

Respuesta.-

```r
curve(dgamma(x,2,scale = 100),xlim=c(0,750),col="blue",lwd=2,
xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad gama(x;2,100)")
```



b)

Encontrar la probabilidad de que, primero, X tome un valor dentro de un intervalo igual a una desviación estándar de la media y, posteriormente, de un intervalo igual a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Sean $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 100 = 200$ y $\sqrt{Var(X)} = \theta\sqrt{\alpha} = 100\sqrt{2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
P\left(200 - 100\sqrt{2} \leq X \leq 200 + 100\sqrt{2}\right) &= F\left(200 + 100\sqrt{2}; 2, 100\right) - F\left(200 - 100\sqrt{2}; 2, 100\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{200+100\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{200-100\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200+100\sqrt{2}}{100}} u^{2-1} e^{-u}\, du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1} e^{-u}\, du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200-100\sqrt{2}}{100}} u^{2-1} e^{-u}\, du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1} e^{-u}\, du} \\
&= 0.7375188.
\end{aligned}
$$

```
pgamma(2*100+100*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*100-100*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.7375188
```

Por otro lado sea $2\sqrt{Var(X)} = 200\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(200 - 200\sqrt{2} \leq X \leq 200 + 200\sqrt{2}\right) &= F\left(200 + 200\sqrt{2}; 2, 100\right) - F\left(200 - 200\sqrt{2}, 2, 100\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{200+200\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{200-200\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200+200\sqrt{2}}{100}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200-200\sqrt{2}}{100}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.9533779.
\end{aligned}$$

```
pgamma(2*100+200*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*100-200*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.9533779
```

c)

¿Cómo cambiarian sus respuestas a la parte b) si $\theta = 200$?

Respuesta.- Sean $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 200 = 400$ y $\sqrt{Var(X)} = \theta\sqrt{\alpha} = 200\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(400 - 200\sqrt{2} \leq X \leq 400 + 200\sqrt{2}\right) &= F\left(400 + 200\sqrt{2}; 2, 200\right) - F\left(400 - 200\sqrt{2}; 2, 200\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{400+200\sqrt{2}}{200}; 2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{400-200\sqrt{2}}{200}; 2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400+200\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400-200\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.6644504.
\end{aligned}$$

```
pgamma(2*200+200*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*200-200*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.6644504
```

Por otro lado sea $2\sqrt{Var(X)} = 400\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(400-400\sqrt{2} \leq X \leq 400+400\sqrt{2}\right) &= F\left(400+400\sqrt{2};2,200\right) - F\left(400-400\sqrt{2};2,200\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{400+400\sqrt{2}}{200};2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{400-400\sqrt{2}}{200};2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400+400\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400-400\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.9993181.
\end{aligned}$$

```
pgamma(2*200+400*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*200-400*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.9993181
```

5.31.

La edad a la que un hombre contrae matrimonio por primera vez es una variable aletoria con distribución gama. Si la edad promedio es de 30 años y lo más común es que el hombre se case a los 22 años, encontrar los valores de los parámetros α y θ, apra esta distribución.

Respuesta.- Sea $E(X) = \alpha\theta = 30$ y $moda = (\alpha-1)\theta$, entonces

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha\beta &=& 30 \\ (\alpha-1)\beta &=& 22 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{30}{8}, \qquad \beta = 8$$

3.32.

La información que a continuación se presenta es una tabulación parcial de la función gama incompleta tal como se encuentra definida por $I(u,p) = F(x;\alpha,\theta)$ para $\alpha = 16$

u	$I(u,15)$
2.0	0.0082
2.5	0.0487
3.0	0.1556
3.5	0.3306
4.0	0.5333
4.5	0.7133
5.0	0.8435
5.5	0.9231
6.0	0.9656
6.5	0.9858
7.0	0.9946

Para $\theta = 10$, comparar estas probabilidades con las que se proporcionaron al emplear una aproximación normal.

Respuestas.- Sean $\mu = E(X) = 16 \cdot 10 = 160$, $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{16 \cdot 10^2} = 40$ y $u = \dfrac{x}{\theta\sqrt{\alpha}} \;\Rightarrow\; x = u \cdot \theta\sqrt{\alpha}$, entonces

```r
u = c(2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5,6,6.5,7)
for(i in u){
  x=i*10*sqrt(16)
  print(pnorm(x,160,40))
}
```

```
## [1] 0.02275013
## [1] 0.0668072
## [1] 0.1586553
## [1] 0.3085375
## [1] 0.5
## [1] 0.6914625
## [1] 0.8413447
## [1] 0.9331928
## [1] 0.9772499
## [1] 0.9937903
## [1] 0.9986501
```

u	$I(u, 15)$	$F(x; \mu, \sigma)$
2.0	0.0082	0.02275013
2.5	0.0487	0.0668072
3.0	0.1556	0.1586553
3.5	0.3306	0.3085375
4.0	0.5333	0.5
4.5	0.7133	0.6914625
5.0	0.8435	0.8413447
5.5	0.9231	0.9331928
6.0	0.9656	0.9772499
6.5	0.9858	0.9937903
7.0	0.9946	0.9986501

5.33.

Mediante el empleo de la función generadora de momentos de la distribución gama, encontrar expresiones para la media y la varianza.

Respuesta.-; La función generadora de momentos para la variable aleatoria gama X está dada por:

$$E[e^{tX}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-\frac{1-\theta t}{\theta}} \, dx.$$

Sea $u = \frac{(1-\theta t)x}{\theta}$, $x = \dfrac{u\theta}{1-\theta t}$ y $dx = \left[\dfrac{\theta}{1-\theta t}\right] du$, entonces:

$$\begin{aligned}
E\left[e^{tX}\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\theta}} \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha-1}\theta^{\alpha-1}}{(1-\theta t)^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{\theta}{1-\theta t} \, du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\theta t)^{\alpha}} \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-y} \, du \\
&= (1-\theta t)^{-\alpha}, \quad 0 \leq t < \frac{1}{\theta}.
\end{aligned}$$

Sacando la primera y segunda derivada tenemos

$$\left.\frac{dE[e^{tX}]}{dt}\right|_{t=0} = -\alpha(1-\theta t)^{-\alpha-1}\cdot(-\theta)\Big|_{t=0} = \alpha\theta = E[X].$$

$$\left.\frac{d^2E[e^{tX}]}{dt^2}\right|_{t=0} = -\alpha(-\alpha-1)(1-\theta t)^{-\alpha-2}(-\theta)(-\theta)\Big|_{t=0} = \alpha^2\theta^2+\alpha\theta^2 = E[X^2]$$

Por lo tanto ya que $\sigma = Var(X) = E[X^2]-E[X]^2$, entonces

$$Var(X) = \alpha^2\theta^2+\alpha\theta^2-(\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2.$$

5.34.

La duración de cierto componente es una variable aleatoria con distribución gama y parámetro $\alpha = 2$.

a)

Obtener la función de confiabilidad.

Respuesta.- La función es está dada por

$$R(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\lambda^2}{\Gamma(2)}\int_t^\infty t^{2-1}e^{-\lambda t}\,dt$$

b)

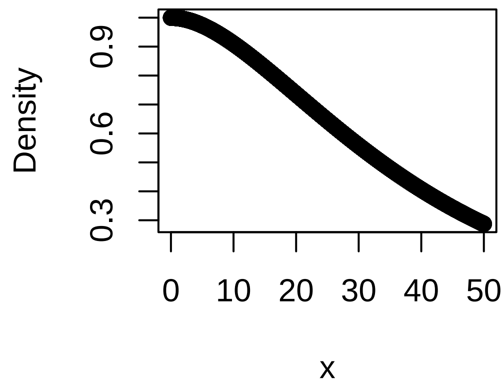
Para $\theta = 20$, obtener la frecuencia de falla y graficarla como una función de t.

Respuesta.- Sea $\lambda = \dfrac{1}{\theta} = \dfrac{1}{20}$, entonces

$$R(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\frac{1}{20^2}}{\Gamma(2)}\int_t^\infty t^{2-1}e^{-\frac{1}{20}t}\,dt = \frac{1}{20^2\Gamma(2)}\int_t^\infty t^{2-1}e^{-\frac{1}{20}t}\,dt$$

```
F <- function(a) {
        return((1/(20^2*integrate(function(x) (x)^{alpha-1}*exp(-x),
                                lower = 0,
                                upper = Inf)$value))*integrate(function (x) x^(2-1)*exp(-1/20*x),a,In
               }
x<-c()
for (i in seq(0,50,.01)) {
  x<-c(x,F(i))
}

plot(seq(0,50,.01),x,xlab = "x", ylab="Density")
```



c)

Si $\theta = 20$. ¿Cuál es la confianza del componente en $t = 80$?

Respuesta.-

$$R(t) = \frac{\frac{1}{20^2}}{\Gamma(2)} \int_{20}^{\infty} 20^{2-1} e^{-\frac{1}{20}t}\, dt$$

5.35 Para armar un artículo se necesita cuatro etapas. Si el tiempo total necesario para armar un artículo en horas, es una variable aleatoria con distribución gama y parámetro de escala $\theta = 2$. ¿Cuál es la probabilidad de armar un artículo en menos de 15 horas?

Respuesta.- Sea $\alpha = 4$, entonces

$$\begin{aligned}
P(X \leq 15) &= \quad = F(15, 4, 2) \\
&= \frac{\gamma(x/\theta; \alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma(15/2; 4)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1} e^{-u}\, du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u}\, du} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{15}{2}} u^{4-1} e^{-u}\, du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{4-1} e^{-u}\, du} \\
&= 0.2642411.
\end{aligned}$$

```
alpha=4
theta=2
x = 15
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.9408545
```

```r
pgamma(15,4,scale=2)
```

```
## [1] 0.9408545
```

5.36.

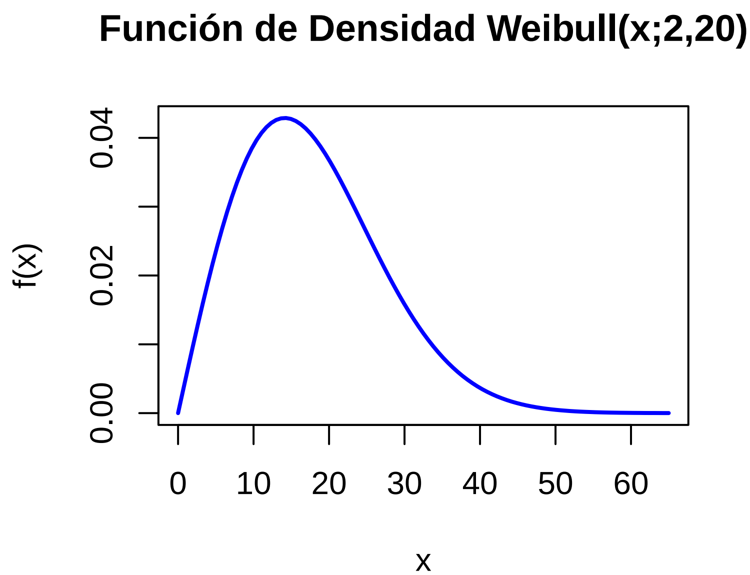
Sea X una variable aleatoria con distribución de Weibull y parámetros $\alpha = 2$ y $\theta = 20$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad.

Respuesta.-

```r
curve(dweibull(x,2,scale = 20),xlim=c(0,65),col="blue",lwd=2,
xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad Weibull(x;2,20)")
```



b)

Obtener la probabilidad de que X tome un valor mayor que la media.

Respuesta.- Sea la media

$$E(X) = \theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 20\int_0^{\infty} u^{1/2}e^{-u}\,du = 17.72453$$

```r
int = integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
20*int$value
```

```
## [1] 17.72453
```

Entonces,

$$P(X \geq E(X)) = 1 - P(X \leq E(X)) = 1 - F(E(X);\alpha,\theta) = 1 - \left[1 - e^{-(E(X)/\theta)^{\alpha}}\right] = e^{-(E(X)/\theta)^{\alpha}}$$

$$P(X \geq 17.72453) = e^{-(17.72453/20)^2} = 0.4559385.$$

```
int = integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
EX=20*int$value
exp(-(EX/20)^2)
```

```
## [1] 0.4559385
```

```
pweibull(EX,2,scale = 20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.4559385
```

c)

Obtener la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre en un intervalo igual a una desviación estándar y después en un intervalo a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Sea la la desviación estándar como se detalla a continuación

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{20^2\left[\int_0^\infty u^{2/2}e^{-u}\,du - \int_0^\infty u^{1/2}e^{-u}\,du\right]} = 9.265045.$$

```
int = integrate(function(u) u^(2/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
int1 = integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
sqrt(20^2*(int$value-(int1$value)^2))
```

```
## [1] 9.265045
```

Entonces,

$$P(X \leq 9.265045) = F(9.265045; 2, 20) = 1 - e^{-(9.265045/20)^2} = 0.193138.$$

```
1-exp(-(9.265045/20)^2)
```

```
## [1] 0.193138
```

Luego sean $E(X) = 17.72453$ y $2\sqrt{Var(X)} = 2 * 0.193138 = 0.386276$, entonces

$$\begin{aligned} P(17.72453 - 0.386276 \leq X \leq 17.72453 + 0.386276) &= F(17.63158; 2, 20) - F(16.85902; 2, 20) \\ &= 1 - e^{-(17.63158/20)^2} - \left[1 - e^{(16.85902/20)^2}\right] \\ &= 0.03166598. \end{aligned}$$

```
1-exp(-(17.63158/20)^2)-(1-exp(-(16.85902/20)^2))
```

```
## [1] 0.03166598
```

```
pweibull(17.63158,2,scale=20) - pweibull(16.85902,2,scale=20)
```

```
## [1] 0.03166598
```

5.37.

El tiempo de duración de un sistema se encuentra aproximado por una distribución Wiebull con $\alpha = 2$ y $\theta = 50$.

a)

Obtener la media y los deciles de esta distribución.

Respuesta.- Sea $E(X) = \theta\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)$, entonces

$$E(X) = 50\int_0^\infty u^{1+\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,du = 50\int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}}e^{-u}\,du = 44.31132.$$

```
50*integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u), lower = 0, upper = Inf)$value
```

```
## [1] 44.31132
```

Los deciles estan dados por $x_q = \theta\left[\ln\left(\dfrac{1}{1-q}\right)\right]^{1-\alpha}$, entonces

$$x_{0.1} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.1}\right)\right]^{1/2} = 16.22964.$$

```
50*((log(1/(1-0.1))))^(1/2)
```

```
## [1] 16.22964
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.2}\right)\right]^{1/2} = 23.61904.$$

```
50*((log(1/(1-0.2))))^(1/2)
```

```
## [1] 23.61904
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.3}\right)\right]^{1/2} = 29.86113.$$

```
50*((log(1/(1-0.3))))^(1/2)
```

```
## [1] 29.86113
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.4}\right)\right]^{1/2} = 35.73603.$$

```
50*((log(1/(1-0.4))))^(1/2)
```

```
## [1] 35.73603
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.5}\right)\right]^{1/2} = 41.62773.$$

```
50*((log(1/(1-0.5))))^(1/2)
```

```
## [1] 41.62773
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.6}\right)\right]^{1/2} = 47.86154.$$

```r
50*((log(1/(1-0.6))))^(1/2)
```

```
## [1] 47.86154
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.7}\right)\right]^{1/2} = 54.86285.$$

```r
50*((log(1/(1-0.7))))^(1/2)
```

```
## [1] 54.86285
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.8}\right)\right]^{1/2} = 63.43181.$$

```r
50*((log(1/(1-0.8))))^(1/2)
```

```
## [1] 63.43181
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.9}\right)\right]^{1/2} = 75.87136.$$

```r
50*((log(1/(1-0.9))))^(1/2)
```

```
## [1] 75.87136
```

b)

Obtener la confiabilidad de este sistema en $t = 75$.

Respuesta.-

$$P(X \geq 75) = 1 - (1 - e^{-(x/\theta)^{\alpha}}) = 1 - (1 - e^{-(75/50)^2}) = 0.1053992.$$

```r
exp(-(75/50)^2)
```

```
## [1] 0.1053992
```

```r
pweibull(75,2,scale=50,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1053992
```

5.38.

Un sistema está formado por dos componentes independientes A y B. El sistema permanecerá operando mientras uno o ambos componentes funcionen. Si el tiempo de vida de la componente A es una variable aleatoria de Weibull con $\alpha = 1/2$ y $\theta = 10$, y si el tiempo de vida de B es también una variable de Weibull con $\alpha = 2$ y $\theta = 12$. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema trabaje más de 20 horas?.

Respuesta.- Sabiendo que A y B son independientes entonces,

$$P_A(X \geq 20) + P_B(X \geq 20) = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{20}{10}\right)^{1/2}}\right] + 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{20}{12}\right)^{2}}\right] = e^{-\left(\frac{20}{10}\right)^{1/2}} + e^{-\left(\frac{20}{12}\right)^{2}} = 0.3052933.$$

```r
exp(-(20/10)^(1/2))+exp(-(20/12)^2)
```

```
## [1] 0.3052933
```

```r
pweibull(20,1/2,scale=10,lower.tail=FALSE) + pweibull(20,2,scale=12,lower.tail=FALSE)
```

```
## [1] 0.3052933
```

5.39.

Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor mayor que la media?

Respuesta.- La media viene dado por $E(X)=\theta$, de donde la probabilidad de que X tome un valor mayor a la media vendrá dado por,

$$P(X \geq E(X)) = F(\theta;\theta) = 1-\left(1-e^{-\theta/\theta}\right) = e^{-1} = 0.3678794.$$

```r
exp(-1)
```

```
## [1] 0.3678794
```

b)

¿Cuáles son las probabilidades de que X tome un valor que se encuentre en un intervalo igual a una desviación estándar, primero y en un intervalo igual a dos desviación estándar de la media?

Respuesta.- Sea $E(X)=\theta$ y $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\theta^2}=\theta$, entonces

$$P(\theta-\theta \leq X \leq \theta+\theta) = F(2;X)-F(0;X) = 1-e^{-2\theta/\theta}-\left(1-e^{-0/\theta}\right) = -e^{-2}+e^{-1} = 0.2325442.$$

```r
exp(-1)-exp(-2)
```

```
## [1] 0.2325442
```

5.40.

Si la frecuencia con que falla un componente es constante y la confiabilidad de este tiene un valor en $t=55$ de 0.4,

a)

Obtener la función de densidad de probabilidad

Respuesta.- Sean la función de confiabilidad $R(55)=0.4$ y la frecuencia de falla $h(t)=\dfrac{1}{\theta}$, entonces la función de densidad será,

$$f(55) = \frac{1}{\theta}\cdot 0.4 = \frac{0.4}{\theta}.$$

b)

Obtener la confiabilidad del componente para $t=100$.

Respuesta.- Sea $R(t)=e^{-t/\theta}=0.4$ y sea $t=55$, entonces

$$\theta = \frac{-55}{\ln(0.4)} = 60.02.$$

De donde la confiabilidad vendrá dada por

$$P(T > 100) = 1 - F(100) = 1 - \left(1 - e^{-100/60.02}\right) = 0.1889805.$$

```r
exp(-100/60.02)
```

```
## [1] 0.1889805
```

5.41.

Un dispositivo tiene una frecuencia de falla constante $h(t) = 10^{-2}$ por hora.

a)

¿Cuál es la confiabilidad del dispositivo para $t = 200$ horas?

Respuesta.- Sea $h(t) = \dfrac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \dfrac{1}{10^{-2}} = 100$, entonces la función de densidad de probabilidad viene dada por,

$$f(t) = \frac{1}{100} e^{-200/100} = 0.001353353.$$

Así la confiabilidad del dispositivo será,

$$R(t) = f(t)/h(t) = 0.001353353/10^{-2} = 0.1353353.$$

b)

Si 500 de estos dispositivos fallan de manera independiente, ¿cuál es el número esperado de fallas entre estos, después de 200 horas?

Respuesta.-; Estará dado por: $500(1 - 0.1353353) = 432.3324 = 433.$

5.42.

El compresor de una unidad de aire acondicionado tiene una frecuencia de falla $h(t) = 2 \cdot 10^{-8} t$ por hora.

a)

¿Cuál es la función de confiabilidad del compresor?

Respuesta.- Sea la función de confiabilidad $R(t) = f(t)/h(t)$, de donde

$$f(t) = h(t) e^{-\int_0^t h(t)\,dt} = 2 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8} t\,dx}$$

entonces,

$$R(t) = \frac{2 \cdot 10^{-8} e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8} t\,dx}}{2 \cdot 10^{-8}} = e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8} t\,dx}.$$

b)

¿Cuál es la confiabilidad del compresor para $t = 15000$ horas?

Respuesta.-

$$R(t) = e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8} t\, dx} = e^{-\int_0^{15000} 2\cdot 10^{-8} 15000\, dx} = e^{-6\cdot 10^{-4}} = 0.9994002.$$

c)

¿Cuál es la vida media del compresor?

Respuesta.- Sea la frecuencia de falla $h(x) = \dfrac{1}{\theta}$, y sabiendo que $E(X) = \theta$, entonces

$$E(X) = \theta = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{2\cdot 10^{-8}} = 5\cdot 10^7.$$

d)

¿Cuál es la mediana de su duración?

Respuesta.- La mediana viene dada por el valor cuantil con $\alpha = 1$,

$$x_{0.5} = \theta\left[\ln\left(\frac{1}{1-q}\right)\right]^{1/\alpha} = 5\cdot 10^7\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.5}\right)\right]^1 = 34657359.$$

```
5*10^7 * (log(1/(1-0.5)))
```

```
## [1] 34657359
```

5.43.

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Demostrar que la variable aleatoria $Y = -2\ln(X)$ tiene distribución chi-cuadrado con dos grados de libertad.

Respuesta.- Notemos que $y = -2\ln(x)$ es una función decreciente en el intrevalo $[0,1]$. Luego la relación inversa es,

$$x = e^{-y/2}$$

De donde el Jacobiano estará dado por

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|-\frac{1}{2}e^{-y/2}\right| = \frac{1}{\Gamma(2/2)\cdot 2^{\frac{2}{2}}} y^{\frac{2}{2}-1} e^{-y/2}$$

Así,

$$f_Y(y;a,b) = f_X\left(e^{-y/2}, b, a\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{1-0}\cdot\frac{1}{\Gamma(2/2)\cdot 2^{2/2}} y^{2/2-1}e^{-y/2} = \frac{1}{\Gamma(2/2)\cdot 2^{2/2}} y^{2/2-1}e^{-y/2}$$

5.44.

Si X es una variable aleatoria con una distribución exponencial y parámetros θ, obtener la distribución de $Y = \dfrac{X-\theta}{\theta}$.

Respuesta.- Sea $f(x;\theta)=\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$ una distribución exponencial. De donde

$$f_Y\left(y;\theta\right)=f_X\left[g^{-1}(y);\theta\right]\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Por hipotesis

$$y=\frac{x-\theta}{\theta} \quad \Rightarrow \quad x=\theta y+\theta.$$

y

$$\left|\frac{dx}{dy}\right|=\theta$$

Por lo tanto

$$f_Y(y;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{\theta y+\theta}{\theta}}\cdot\theta=e^{-\frac{\theta y+\theta}{\theta}}.$$

5.45.

Si X es una variable aleatoria con una distribución de Weibull y parámetros α y θ obtener la distribución de $Y=X^{\alpha}$.

Respuesta.- Sea $\dfrac{\alpha}{\theta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-(x/\theta)^{\alpha}}$ la distribución de Weibull. De donde

$$f_Y\left(y;\alpha,\theta\right)=f_X\left[g^{-1}(y);\alpha,\theta\right]\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Por hipótesis,

$$y=x^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad x=y^{1/2}$$

y

$$\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{2}y^{-1/2}$$

Por lo tanto,

$$f_Y(y;\alpha,\theta)=\frac{\alpha}{\theta}y^{(1/2)^{\alpha-1}}e^{-\left[\left(y^{1/2}\right)/\theta\right]^{\alpha}}\cdot\frac{1}{2}y^{-1/2}$$

5.46.

Seleccione una distribución de probabilidad discreta y una continua de la sección 5.9 y generar dos muestras aleatorias de 50 números aleatorios cada una. Para cada caso agrupe los datos y obtenga las frecuencias relativas. Calcule la media y la desviación estándar de cada una de las muestras y compare los resultados con los que se obtienen de manera teórica.

Respuesta.- La función de densidad de probabilidad de una distribución Weibull es:

$$f(x;\alpha,\theta)=\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-(x/\theta)^{\alpha}}, \qquad x>0.$$

Para generar números aleatorios de Weibull $x>0$, se resuelve la ecuación

$$\frac{\alpha}{\theta^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-(t/\theta)^\alpha}\,dt = u \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\alpha}{\theta^\alpha}\right)\left(-\frac{\theta^\alpha}{\alpha}\right)e^{-(x/\theta)^\alpha} = u$$

$$o \qquad 1-e^{-(x/\theta)^\alpha} = u, \qquad y \qquad x=\theta\left[\ln\left(\frac{1}{1-u}\right)\right]^{1/\alpha}.$$

Dado que para $\alpha=1$, la distribución de Weibull se reduce a la exponencial, donde pueden generarse números aleatorios para una distribución.

$$E(X)=\theta$$
$$Var(X)=\theta^2$$

```
u=runif(50,min=0,max=1)
theta=4
alpha=1
x = c()
for (i in u){
  x=c(x,theta*(log(1/(1-i)))^(1/alpha))
}
freq = transform(table(cut(x, breaks = 7)))
freq["Frec_rel"] = freq$Freq/length(x)
freq
```

```
##              Var1 Freq Frec_rel
## 1 (0.00903,2.44]   17     0.34
## 2    (2.44,4.85]   15     0.30
## 3    (4.85,7.26]    6     0.12
## 4    (7.26,9.67]    4     0.08
## 5    (9.67,12.1]    3     0.06
## 6    (12.1,14.5]    3     0.06
## 7    (14.5,16.9]    2     0.04
```

```
mean(x)
```

```
## [1] 4.831768
```

```
sd(x)
```

```
## [1] 4.356862
```

Esto también es válido para la distribución Poisson.

Ejercicios Capítulo 6

6.1.

Se seleccionaron, aleatoriamente, 60 personas y se le preguntó su preferencia con respecto a tres marcas, A, B y C. Estas fueron de $27, 18$ y 15 respectivamente. ¿Qué tan probable es este resultado si no existen otras marcas en el mercado y la preferencia se comparte por igual entre las tres?.

Respuesta.- Ya que las preferencias son iguales entonces, se utilizará la función de distribución multinomial, comos se verá a continuación:

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1};n,p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}$$

De donde

$$p(27,18,15;60,1/3,1/3,1/3) = \frac{60!}{27!18!15!}\left(\frac{1}{3}\right)^{27}\left(\frac{1}{3}\right)^{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{15} = 0.002153159.$$

```
factorial(60)/(factorial(27)*factorial(18)*factorial(15))*(1/3)^(27)*(1/3)^(18)*(1/3)^(15)
```

```
## [1] 0.002153159
```

```
dmultinom(c(27,18,15),60,c(1/3,1/3,1/3))
```

```
## [1] 0.002153159
```

6.2.

Supóngase que de un proceso de producción se seleccionan, de manera aleatoria, 25 artículos. Este proceso de producción por lo general produce un 90% de artículos listos para venderse y un 7% reprocesables. ¿Cuál es la probabilidad de que 22 de los 25 artículos estén listos para venderse y que dos sean reprocesables?.

Respuesta.- Sea la función de distribución trinomial

$$p(x,y;n,p_i,p_2) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}p_1^x p_2^y(1-p_1-p_2)^{n-x-y}.$$

Entonces,

$$p(22,2;25,0.9,0.07) = \frac{25!}{22!2!(25-22-2)!}0.9^{22}0.07^2(1-0.9-0.07)^{25-22-2} = 0.09988531.$$

```
(factorial(25)/(factorial(22)*factorial(2)*factorial(25-22-2))*
   0.9^(22)*0.07^(2)*(1-0.9-0.07)^(25-22-2))
```

```
## [1] 0.09988531
```

6.3.

Sean X y Y dos variables aleatoria continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x-y}{5} & 1<x<2, \quad 1<y<3, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Obtener la función de distribución conjunta acumulativa.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u-v}{5}\right)\, dvdu = \int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u}{5} - \frac{v}{5}\right)\, dvdu \\
&= \int_1^x \left(\frac{3u}{5}v - \frac{v^2}{10}\right)\Big|_1^y du = \int_1^x \frac{3uy}{5} - \frac{3u}{5} - \frac{y^2}{10} + \frac{1}{10}\, du \\
&= \left(\frac{3u^2y}{10} - \frac{3u^2}{10} - \frac{y^2u}{10} - \frac{u}{10}\right)\Big|_1^x \\
&= \frac{3x^2y}{10} - \frac{3y}{10} - \left(\frac{3x^2}{10} - \frac{3}{10}\right) - \left(\frac{y^2x}{10} - \frac{y^2}{10}\right) + \frac{x}{10} - \frac{1}{10} \\
&= \frac{3x^2y - xy^2 - 3x^2 + x - 3y + y^2 + 2}{10}
\end{aligned}$$

b)

¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $X < 3/2$ e $Y < 2$?.

Respuesta.- Ya que $\int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u-v}{5}\right)\, dvdu = \frac{3x^2y - xy^2 - 3x^2 + x - 3y + y^2 + 2}{10}$, entonces

$$\begin{aligned}
P(X < 3/2, Y < 2) &= \int_1^{3/2} \int_1^2 \left(\frac{3u-v}{5}\right)\, dvdu \\
&= \frac{3\cdot(3/2)^2\cdot 2 - (3/2)\cdot 2^2 - 3(3/2)^2 + 3/2 - 3\cdot 2 + 2^2 + 2}{10} \\
&= 0.225.
\end{aligned}$$

```
x=3/2
y=2
(3*x^2*y-3*y-3*x^2+x-3*y+y^2+2)/10
```

```
## [1] 0.225
```

c)

Mediante el empleo de sus respuesta a la parte a, obtener las distribuciones acumulativas marginales de X e Y.

Respuesta.- Dado que 2 y 3 son los límite superior para x e y respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) &= F_X(x) = F(x,3) \\
&= \frac{3x^2\cdot 3 - x\cdot 3^2 - 3x^2 + x - 3\cdot 3 + 3^2 + 2}{10} \\
&= \frac{9x^2 - 9x - 3x^2 + x - 9 + 9 + 2}{10} \\
&= \frac{3x^2 - 4x + 1}{5}, \quad 1 < x < 2.
\end{aligned}$$

Y

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= F_Y(y) = F(2, y) \\
&= \frac{3 \cdot 2^2 y - 2 \cdot y^2 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 3y + y^2 + 2}{10} \\
&= \frac{12y - 2y^2 - 12 + 2 - 3y + y^2 + 2}{10} \\
&= \frac{9y - y^2 - 8}{10}, \qquad 1 < y < 3.
\end{aligned}
$$

d)

Obtener las funciones de densidad marginales de X y de Y.

Respuesta.- Sea $F(x, 3) = P(X \leq x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{5}$, entonces

$$f_X(x) = \frac{\partial F(x, 3)}{\partial x} = \frac{(6x - 4)5}{5^2} = \frac{6x - 4}{5}.$$

Y para $F(2, y) = P(Y \leq y) = \dfrac{9y - y^2 - 8}{10}$, se tiene

$$f_Y(y) = \frac{\partial F(2, y)}{\partial y} = \frac{(9 - 2y)10}{10^2} = \frac{9 - 2y}{10}.$$

6.4.

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x, y > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Demostrar que $f(x, y)$ es una función de densidad conjunta de probabilidad.

Respuesta.-; Ya que $x, y > 0$ entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xe^{-xy-x}\, dy\, dx &= \int_0^{\infty} xe^{-x}\int_0^{\infty} e^{-xy}\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\infty} xe^{-x}\int_0^{\infty} e^{-xy}\left(\frac{-x}{-x}\right)\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\infty} -e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-xy}(-x)\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\infty} -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)\Big|_0^{\infty}\, dx \\
&= \int_0^{\infty} -e^{-x}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)\, dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-x}\Big|_0^{\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

```
integrate(function(y) {
  sapply(y, function(y) {
    integrate(function(x) x*exp(-x*(y+1)), 0, Inf)$value
   })
 }, 0, Inf)$value
```

```
## [1] 0.9999956
```

b) ¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $X < 2$ e $Y < 1$?.

Respuesta.-

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2}\int_0^{1} xe^{-xy-x}\, dy\, dx &= \int_0^{2} xe^{-x}\int_0^{1} e^{-xy}\, dy\, dx \\
&= \int_0^{2} -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)\Big|_0^{1}\, dx \\
&= \int_0^{2} -e^{-x}\left(e^{-x}-e^{0}\right)\, dx \\
&= \int_0^{2} e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3}\int_0^{2} e^{-3x}(-3)\, dx \\
&= -\frac{1}{3}\left(e^{-3x}\right)\Big|_0^{2} = -\frac{1}{3}\left(e^{-6}-1\right) \\
&= 0.3738225
\end{aligned}
$$

```
integrate(function(y) {
  sapply(y, function(y) {
    integrate(function(x) x*exp(-x*(y+1)), 0, 2)$value
```

```
  })
}, 0, 1)$value
```

```
## [1] 0.3738225
```

c)

Obtener las funciones de densidad marginal de X y de Y.

Respuesta.- La densidad marginal para x está dada por:

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} xe^{-xy-x}\ dy = xe^{-x}\int_0^{\infty} e^{-xy}\ dy = -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)\Big|_0^{\infty} = e^{-x}$$

La densidad marginal para y está dada por:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{\infty} xe^{-xy-x}\ dx \\
&= \left(\frac{x}{-y-1}e^{-xy-x} - \frac{1}{-y-1}\int_0^{\infty} e^{-xy-x}\ dx\right)\Bigg|_0^{\infty} \\
&= 0 - \frac{1}{(-y-1)^2}e^{xy-x}\Big|_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{(-y-1)^2}\left(e^{\infty} - e^{0}\right) \\
&= -\frac{1}{(-y-1)^2}(0-1) \\
&= \frac{1}{(-y-1)^2}.
\end{aligned}$$

d)

¿Son X e Y estadísticamente independientes?.

Respuesta.- por el hecho de que,

$$xe^{-x(y-1)} \neq e^{-x}\frac{1}{(-y-1)^2} = \frac{e^{-x}}{(-y-1)^2}$$

Diremos que X e Y no son estadísticamente independientes.

6.5.

Sean X e Y dos variables aleatorias discretas en donde los posibles valores que estas pueden tomar son -1, 0 y 1. En la siguiente tabla se dan las probabilidades conjuntas para todos los posibles valores de X e Y.

		X		
		-1	0	1
	-1	$1/16$	$3/16$	$1/16$
Y	0	$3/16$	0	$3/16$
	1	$1/16$	$3/16$	$1/16$

a)

Obtener las funciones de probabilidad marginal $p_X(X)$ y $P_Y(y)$.

Respuesta.- Para $p_X(x)$ se tiene al sumar las tres columnas de la tabla. Lo propio con $p_Y(y)$.

$$p_X(x) = p_Y(y) = \frac{5}{16}, \frac{6}{16}, \frac{5}{16}, \; x = y = -1, 0, 1.$$

b)

¿Las variables aleatorias X e Y son estadísticamente independientes?

Respuesta.- No, ya que $p_{XY}(x,y) \neq p_X(x)p_X(y)$.

c)

Obtener $Cov(X,Y)$

Respuesta.-

```
(-1*-1*1/16+-1*1*1/16+1*-1*1/16+1/16)-(5/16*-1+6/16*0+5/16*1)*2
```

```
## [1] 0
```

6.6.

Para las funciones de densidad conjuntas de probabilidad del ejercicio 6.3., obtener $Cov(X,Y)$ y $\rho(X,Y)$.

Respuesta.- Para poder hallar la covarianza y el coeficiente de correlación tenemos que hallar $E(X), E(Y), E\left(X^2\right), E\left(Y^2\right)$ y $E(XY)$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_1^2 \int_1^3 x\left(\frac{3x-y}{5}\right)\, dy\, dx = \int_1^2 \frac{x}{5}\left(3xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 dx \\ &= \frac{1}{5}\int_1^2 6x^2 - 4x\; dx = \frac{1}{5}\left(\frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \frac{1}{5}(16 - 2 - 8 + 2) = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

```
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) x*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 1.6
```

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_1^2 \int_1^3 y\left(\frac{3x-y}{5}\right)\, dy\, dx = \frac{1}{5}\int_1^2 \int_1^3 3xy - y^2\, dy\, dx \\
&= \frac{1}{5}\int_1^2 \left(\frac{3xy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_1^3\, dx = \frac{1}{5}\int_1^2 12x - \frac{26}{3}\, dx \\
&= \frac{1}{5}\left(6x^2 - \frac{26x}{3}\right)\bigg|_1^2 = \frac{28}{15}.
\end{aligned}
$$

```r
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) y*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 1.866667
```

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \int_1^2 \int_1^3 x^2\left(\frac{3x-y}{5}\right)\, dy\, dx = \frac{1}{5}\int_1^2 x^2\left(3xy - \frac{y^2}{2}\right)\bigg|_1^3 \\
&= \frac{1}{5}\int_1^2 6x^3 - 8x^2\, dx = \frac{1}{5}\left(\frac{3x^4}{2} - \frac{8x^3}{3}\right)\bigg|_1^2 \\
&= \frac{79}{30}.
\end{aligned}
$$

```r
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) x^2*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 2.633333
```

$$
\begin{aligned}
E\left(Y^2\right) &= \int_1^2 \int_1^3 y^2\left(\frac{3x-y}{5}\right)\, dy\, dx = \frac{1}{5}\int_1^2 \left(xy^3 - \frac{y^4}{4}\right)\bigg|_1^3\, dx \\
&= \frac{1}{5}\int_1^2 26x - 20\, dx = \frac{1}{5}\left(13x^2 - 20x\right)\bigg|_1^2 \\
&= \frac{19}{5}.
\end{aligned}
$$

```r
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) y^2*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 3.8
```

$$
\begin{aligned}
E\left(XY\right) &= \int_1^2\int_1^3 xy\left(\frac{3x-y}{5}\right)\,dy\,dx = \frac{1}{5}\int_1^2 x\left(\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 dx\\
&= \frac{1}{5}\int_1^2 12x^2-\frac{26x}{3}\,dx = \frac{1}{5}\left(4x^3-\frac{13x^2}{3}\right)\Bigg|_1^2\\
&= 3.
\end{aligned}
$$

```
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) x*y*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 3
```

La covarianza viene dado por:

$$
Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - \frac{8}{5}\cdot\frac{28}{15} = \frac{1}{75} = 0.01333333.
$$

Dado que:

$$
Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{79}{30} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{11}{150}.
$$

y

$$
Var(Y) = E\left(Y^2\right) - E^2(Y) = \frac{19}{5} - \left(\frac{28}{15}\right)^2 = \frac{71}{225}.
$$

El coeficiente de correlación es:

$$
\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\frac{1}{75}}{\sqrt{\frac{11}{150}\cdot\frac{71}{225}}} = 0.08764963.
$$

```
cov = 3-(8/5)*(28/15)
cov
```

```
## [1] 0.01333333
```

```
varX = 79/30-(8/5)^2
varY = 19/5 - (28/15)^2
cov/(sqrt(varX*varY))
```

```
## [1] 0.08764963
```

6.7.

Un función de su prioridad, un programa para computadora espera en la fila de entrada cierto tiempo, después del cual lo ejecuta el procesador central en un lapso dado. La función de densidad conjunta para los tiempos de espera y ejecución se determina por

$$
f(t_1,t_2) = \begin{cases} 2e^{-\left(\frac{t_1}{5}+10t^2\right)} & t_1,t_2>0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}
$$

Dada la distribución conjunta acumulativa:

$$
F(t_1,t_2) = \begin{cases} \left[1-e^{\left(\frac{-t_1}{5}\right)}\right]\left[1-e^{-10t^2}\right] & t_1,t_2>0 \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}
$$

a)

Obtener la probabilidad conjunta de que el tiempo de espera no sea mayor de ocho minutos y el de ejecución no sea mayor de 12 segundos.

Respuesta.-

$$
\begin{aligned}
P(X\leq 8, Y\leq 0.2) = \int_0^8\int_0^{0.2} 2e^{-\left(\frac{t_1}{5}+10t_2\right)}\,dt_2\,dt_1 &= 2\int_0^8 \left[\frac{e^{-\left(\frac{t_1}{5}+10t_2\right)}}{-10}\right]\Bigg|_0^{0.2} dt_1 \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^8 e^{-\left(\frac{t_1}{5}+2\right)} - e^{-\frac{t_1}{5}}\,dt_1 \\
&= -\frac{1}{5}\left[\frac{e^{-\left(\frac{t_1}{5}+2\right)}}{-\frac{1}{5}}\right]\Bigg|_0^8 + \frac{1}{5}\left(\frac{e^{-\frac{t_1}{5}}}{-\frac{1}{5}}\right)\Bigg|_0^8 \\
&= e^{-\left(\frac{t_1}{5}+2\right)}\Big|_0^8 - e^{-\frac{t_1}{5}}\Big|_0^8 \\
&= e^{-\frac{18}{5}} - e^{-2} - e^{-\frac{8}{5}} + e^0 \\
&= 0.6900919.
\end{aligned}
$$

```
integrate(function(t1) {
  sapply(t1, function(t1) {
    integrate(function(t2) 2*exp(-(t1/5+10*t2)), 0, 0.2)$value
   })
 }, 0, 8)$value
```

```
## [1] 0.6900919
```

Podemos encontrar el resultado mediante la distribución conjunta acumulativa:

$$
F(8,0.2) = \left[1-e^{-\frac{8}{5}}\right]\left[1-e^{-10\cdot 0.2}\right] = 0.6900919.
$$

```
t1=8
t2=0.2
(1-exp(-t1/5))*(1-exp(-10*t2))
```

```
## [1] 0.6900919
```

b)

Obtener las funciones de densidad marginal y deducir que estos lapsos son variables aleatorias independientes.

Respuesta.- Sea $F(x,y) = \left[1 - e^{\left(\frac{-t_1}{5}\right)}\right]\left[1 - e^{-10t^2}\right]$, entonces

$$F(t_1,\infty) = \left[1 - e^{\left(\frac{-t_1}{5}\right)}\right]\left[1 - e^{-10\cdot\infty}\right] = 1 - e^{\left(\frac{-t_1}{5}\right)}. \quad \Rightarrow \quad f_{T_1}(t_2) = \frac{\partial F(\infty,t_2)}{\partial y} = -\left(-\frac{1}{5}\right)e^{\frac{-t_1}{5}} = \frac{1}{5}e^{\frac{-t_1}{5}}$$

$$F(\infty,t_2) = \left[1 - e^{\left(\frac{-\infty}{5}\right)}\right]\left[1 - e^{-10t_2}\right] = 1 - e^{-10t_2} \quad \Rightarrow \quad f_{T_2}(t_1) = \frac{\partial F(t_1,\infty)}{\partial x} = 10e^{-10t_2}.$$

Por último, comprobemos la independencia. Sea $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, entonces en lo particular:

$$f(t_1,t_2) = f_{T_1}(t_1)\cdot f_{T_2}(t_2) \quad \Rightarrow \quad 2e^{-\left(\frac{t_1}{5}+10t^2\right)} = \frac{1}{5}e^{\frac{-t_1}{5}}\cdot 10e^{-10t_2}.$$

Por lo tanto, se comprueba que estos lapsos son variables aleatorias independientes.

6.8.

Las variables aleatorias X e Y representan las proporciones de los mercados correspondientes a dos productos distintos fabricados por la misma compañia y cuya función de densidad conjunta de probabilidad está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \leq x,y \leq 1, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Obtener las funciones de densidad marginal de X e Y.

Respuesta.- Sólo hará falta integrar la función de densidad para cada variable aleatoria. No está de más observar que si x o y no tienen una cota superior, entonces tomamos la cota superior de la otra variable .

$$f_X(x) = \int_0^1 x+y\,dy = \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = x + \frac{1}{2}.$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 x+y\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + y.$$

b)

¿Las variables aleatorias X e Y son estadísticamente independientes?.

Respuesta.- Para tal efecto necesitaremos asber si se cumple la igualdad $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

$$x + y = \left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + y\right)$$

Por lo tanto podemos deducir que las variables aleatorias X e Y no son estadísticamente significativas.

c)

Si $X = 0.2$, obtener la función de densidad de probabilidad condicional de Y.

Respuesta.- Se define como:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Por lo tanto,

$$f(y|X=0.2) = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5}+y}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} = \frac{10(1+y)}{7}.$$

6.9.

Las variables aleatorias X e Y representan el largo y ancho (en cm) de una hoja de acero. Si X e Y son independientes con funciones de densidad de probabilidad dadas por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 99 < x < 100, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 49 < y < 50, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

Usesé la definición de varianza para obtener la varianza del área de la hoja de acero XY.

Respuesta.- Ya que son variables aleatorias independientes. Es decir, $E(XY) = E(X)E(Y)$, entonces

$$Var(XY) = E(X^2Y^2) - E^2(EX)$$

Luego por las funciones de densidad de probabilidad dada, se tiene

$$E(XY) = \int_{99}^{100}\int_{49}^{50} xy\ dydx = \int_{99}^{100} x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{49}^{50} dx = \frac{99}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{99}^{100} = \frac{19701}{4}$$

$$E(X^2Y^2) = \int_{99}^{100}\int_{49}^{50} x^2y^2\ dydx = \int_{99}^{100} x^2\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{49}^{50} dx = \frac{7351}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{99}^{100} = \frac{218332051}{9}$$

Por lo tanto,

$$Var(XY) = \frac{218332051}{9} - \left(\frac{19701}{4}\right)^2 = 1029.215.$$

6.10.

Sea X una variable aleatoria continua e Y discreta.

a)

Si $f(x,y) = \dfrac{x^y e^{-2x}}{y!} > 0$, $y = 0,1,2,\ldots$ obtener la función de probabilidad marginal de Y.

Respuesta.- Sea $\dfrac{1}{y!}\displaystyle\int_0^{\infty} x^y e^{-2x}\ dx$, entonces

b)

Obtener la función de probabilidad condicional de X para $Y = 2$.

Respuesta.-

c)

Obtener $E(X|2)$ y $Var(X|2)$.

Respuesta.-

6.11.

Sean X e Y dos variables aleatorias. Demostrar que $Var(aX - bY) = a^2Var(x) + b^2Var(Y) - 2abCov(X,Y)$, en donde a y b son constantes.

Respuesta.- La demostración es análoga a la que se da en el libro de Canavos página 195 (6.16).

$$
\begin{aligned}
Var(aX - bY) &= E(aX - bY)^2 - E^2(aX - bY) \\
&= E\left(a^2X^2 - 2abXY + b^2Y^2\right) - \left[aE(X) - bE(Y)\right]^2 \\
&= a^2E(X^2) - 2abE(XY) + b^2E(Y^2) - a^2E^2(X) + 2abE(X)E(Y) - b^2E^2(Y) \\
&= a^2\left[E(X^2) - E^2(X)\right] + b^2\left[E(Y^2) - E^2(Y)\right] - 2ab\left[E(XY) - E(X)E(Y)\right] \\
&= a^2Var(X) + b^2Var(Y) - 2abCov(X,Y).
\end{aligned}
$$

6.12.

Sean X e Y dos variables aleatorias. Demostrar que $Cov(aX, bY) = abCov(X,Y)$, en donde a y b son constantes.

Respuesta.-

$$
\begin{aligned}
Cov(aX, bY) &= E(aXbY) - E(aX)E(bY) \\
&= abE(XY) - aE(X)bE(Y) \\
&= ab\left[E(XY) - E(X)E(Y)\right] \\
&= abCov(X,Y).
\end{aligned}
$$

6.13.

Si X e Y son dos variables aleatorias independientes $Var(X + Y) = Var(X - Y) = Var(x) + Var(Y)$. Comparar este resultado con $Var(X + Y)$ cuando $Var(X + Y)Cov(X,Y) > 0$ o $Cov(X,Y) < 0$. ¿Qué puede concluir?.

Respuesta.- Si $Cov(X,Y) > 0$, $Var(X + Y) > Var(X) + Var(Y)$ y $Var(X - Y) < Var(X) + Var(Y)$.

Si $Cov(X,Y) < 0$, $Var(X + Y) < Var(X) + Var(Y)$, y $Var(X - Y) > Var(X) + Var(Y)$.

6.14.

Supóngase que la frecuencia Λ a la que ocurren accidentes automovilísticos en un lapso fijo es una variable aleatoria con una distribución gama y parámetros de forma y escala igual a dos. Si para cada valor λ de Λ la distribución condicional del número de accidentes es una distribución de Poisson, obtener la función de probabilidad marginal de X y calcular las probabilidades para $X = 0, 1, 2, \ldots, 10$. ¿Cómo son estas probabilidades al compararlas con las que se obtienen bajo la suposición de una frecuencia constante $\lambda = 4$?.

Respuesta.- Dado que $\Gamma(2) = \int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-2}\,du = 1$. La distribución gama viene dada por:

$$f(x,2,2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(2)2^2}x^{2-1}e^{-\frac{x}{2}} & x > 0, \\ \\ 0 & \text{otro valor.} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x,2,2) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} & x > 0, \\ \\ 0 & \text{otro valor.} \end{cases}$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$$

6.15.

Supóngase que la incidencia de cáncer pulmunar para un determinado número de personas adultas, sin importar sus hábitos de fumador, su edad, etc., es una variable aleatoria con distribución gama con parámetros de forma y escala iguales a dos. Para un grupo específico de personas, el número que presentará cáncer pulmonar es una variable aleatoria de Poisson en donde el valor del parámetro de ésta depende de la incidencia de cáncer en este grupo. Obtener la probabilidad no condicional de que no más de dos personas desarrollen cáncer en este grupo.

Respuesta.-

6.16.

6.17.

Supóngase que el gerente de una planta descubre

6.18

6.19

La función de densidad conjunta de probabilidad para la demanda mensual de dos productos es una distribución normal bivariada dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{100\pi\sqrt{3}}e^{\left\{-\frac{2}{3}\left[\left(\frac{x-50}{10}\right)^2 - \left(\frac{x-50}{10}\right)\left(\frac{y-25}{10}\right) + \left(\frac{y-25}{10}\right)^2\right]\right\}}$$

a) ¿Cuál es el coeficiente de correlación entre X e Y?.

Respuesta.-

b) ¿Cuál es la covarianza entre X e Y?.

Respuesta.-

c) Obtener la función de densidad de probabilidad condicional f(x|y).

Respuesta.-

d) Supóngase que la demanda de Y es 30. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que X sea mejor que 65?

Respuesta.-

6.20.

Supóngase que el $CI(X)$ y la calificación promedio de estudiantes no gruadados de licenciatura Y son variables aleatorias que se encuentran distribuidas de manera conjunta como una distribución normal bivariada $\mu_X = 100,\ \sigma_X = 10,\ \mu_Y = 3,\ \sigma_Y = 0.3$ y $Cov(X,Y) = 2.25$.

a)

Si algún estudiante posee un CI de 120 ¿cuáles son los valores de la media y la desviación estándar condicionales para Y?.

Respuesta.-

b)

Dado que el CI es 120, obtener la probabilidad de que Y sea mayor de 3.5.

Respuesta.-

c)

Supóngase que la calificación promedio de un estudiante es 2.8. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona tenga un CI mayor de 115?.

Respuesta.-

Ejercicios capitulo 7

7.1

Una forma de mercadotecnia envía un cuestionario a 1000 residentes de cierto suburbio de una ciudad para determinar sus preferencias como compradores. De los 1000 residentes, 80 responden el cuestionario. ¿Lo anterior constituye una muestra aleatoria? Discutir los méritos de este procedimiento para obtener una muestra aleatoria.

7.2

En una planta de armado automotriz se seleccionarán 50 de los primeros 1000 automóviles de un nuevo modelo para ser inspeccionados por el departamento de control de calidad. El gerente de la planta decide inspeccionar un automóvil cada vez que terminan de armarse 20. ¿Este proceso dará como resultado una muestra aleatoria? Comente.

Respuesta.- Dado que el experimento se repite bajo las mismas condiciones, con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Podemos decir que este experimento podría ser sin sesgo.

7.3

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituye una muestra aleatoria, obtener las funciones de verosimilitud de las siguientes distribuciones:

a)

De Poisson, con parámetro λ;

Respuesta.- Sea $p(x,\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x}$ para $x = 0,1,2,\ldots$, entonces la función de verosimilitud será

$$L(x_1,x_2,\ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!}\cdots\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!},\ x = 1,2,\ldots$$

b)

Hipergeométrica, con parámetro p;

Respuesta.- Si p = k/N, puede escribirse la función de probabilidad hipergeométrica como una función de probabilidad binomial y dado que el único parámetro es p entonces, $p(x,n,p) = \dfrac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x},\ x = 0,1,2,\ldots$

c)

Uniforme en el intervalo (a,b);

Respuesta.- Sea $\dfrac{1}{b-a}$ para $a \leq x \leq b$ una función de densidad de probabilidad uniforme. Entonces, la función de verosimilitud será:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}$$

d)

$N(\mu,\sigma)$

Respuesta.- Sea $f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, la función de densidad de probabilidad. Entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned} L(x_1,x_2,\ldots x_n;\mu,\sigma) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum\left[\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \end{aligned}$$

7.4

Repetir el ejercicio 7.3 para las siguientes distribuciones:

a)

Gama con parámetro α y θ.

Respuesta.- Sea, $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}$ la distribución de densidad gama, entonces la función de verosimilitud será:

$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \ldots x_n; \alpha, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x_i/\theta} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x_1/\theta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x_2/\theta} \cdots \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x_n/\theta} \\
&= \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} \right)^n \cdot e^{\left(-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta} \right)}.
\end{aligned}
$$

b)

Weibull con parámetro α y θ.

Respuesta.- Sea $f(x; \alpha, \theta) = \dfrac{\alpha}{\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-(x/\theta)^{\alpha}}$ la distribución de densidad de probabilidad Weibull, entonces la función de verosimilitud sera:

$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \ldots x_n; \alpha, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} x_i^{\alpha-1} e^{-(x_i/\theta)^{\alpha}} \\
&= \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} x_1^{\alpha-1} e^{-(x_1/\theta)^{\alpha}} \cdot \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} x_2^{\alpha-1} e^{-(x_2/\theta)^{\alpha}} \cdots \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} x_n^{\alpha-1} e^{-(x_n/\theta)^{\alpha}} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} \cdot e^{\left[-\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^{\alpha} \right]}.
\end{aligned}
$$

7.5

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población cuya distribución es normal con media μ y varianza σ^2. De las siguientes, ¿cuáles son estadísticas?

a)

$\sum X_i - \mu$.

Respuesta.- No es estadística ya que no está definida X_i ni se conoce el valor de μ.

b)

$\sigma X_1 + \sigma X_2$.

Respuesta.- No es estadística ya que no se conoce el valor de sigma.

c)

$X_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Respuesta.- Es estadística porque X_i está definida entre 1 y n.

d)

$X_1^2 + X_2^2 - e^{X_3}$.

Respuesta.- Es estadística.

e)

$\dfrac{X_i}{\sigma},\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Respuesta.- No es estadística porque no se conoce el valor de σ.

f)

$\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2.$

Respuesta.- Es estadística porque es una función completa.

7.6

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectivamente. Mediante el empleo de la función generadora de momentos, demostrar que la suma de estas variables también es una variable aleatoria de Poisson con parámetros $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Respuesta.- Sea,

$$m_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t-1)}$$

la función generadora de momentos de la distribución Poisson, entonces por el teorema 7.1, con $a_i = 1$. La suma de las variables también es una variable aleatoria de Poisson. Es decir, sea

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

de donde,

$$\begin{array}{rcl} m_Y(t) & = & m_{X_1}(t)m_{X_2}(t)\cdots m_{X_n}(t) \\ \\ & = & e^{\lambda_1\left(e^t-1\right)}e^{\lambda_2\left(e^t-1\right)}\cdots e^{\lambda_n(e^t-1)} \\ \\ & = & e^{\left[\lambda_1\left(e^t-1\right)+\lambda_2\left(e^t-1\right)+\ldots+\lambda_n\left(e^t-1\right)\right]} \\ \\ & = & e^{\left[(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)\left(e^t-1\right)\right]} \end{array}$$

7.7

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente. Demostrar que la diferencia entre X_1 y X_2 no es una variable aleatoria de Poisson.

Respuesta.- Sea,

$$Y = X_1 - X_2$$

Entonces por el teorema 7.1 con $a_i = 1$,

$$\begin{array}{rcl} m_Y(t) & = & E\left\{e^{t[X_1+(-X_2)]}\right\} \\ \\ & = & E\left[e^{tX_1}\cdot e^{(-t)X_2}\right] \\ \\ & = & E\left[e^{tX_1}\right]E\left[e^{(-1)X_2}\right] \\ \\ & = & m_{X_1}(t)m_{X_2}(-t) \\ \\ & = & e^{\lambda_1(t-1)}e^{\lambda_2(-t-1)} \end{array}$$

Por lo que no es una variable aleatoria Poisson.

7.8

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes binomial con parámetros n_1 y p, y n_2 y p, respectivamente. Demostrar que la suma de X_1 y X_2 es una variable aleatoria binomial con parámetros $n_1 + n_2$ y p.

Respuesta.- Sea la función generadora de momentos:

$$m_X(t) = \left[(1-p) + e^t p\right]^n$$

Entonces, por el teorema 7.1, con a_i=1. La suma de las variables también es una variable aleatoria binomial. Es decir; sea,

$$Y = X_1 + X_2$$

por lo que

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t) \\ &= \left[(1-p)+e^t p\right]^{n_1}\left[(1-p)+e^t p\right]^{n_2} \\ &= \left[(1-p)+e^t p\right]^{n_1+n_2} \end{aligned}$$

7.9

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con el mismo parámetro θ. Demostrar que la suma de X_1 y X_2 es una variable aleatoria gama con parámetros de forma 2 y parámetro de escala θ.

Respuesta.- Sea la función generadora de momentos dado por:

$$m_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$$

Entonces, sea

$$Y = X_1 + X_2$$

de donde,

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t) \\ &= \frac{\theta}{\theta-t}\cdot\frac{\theta}{\theta-t} \\ &= \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^2. \end{aligned}$$

Así, tenemos una variable aleatoria gama con parámetros de forma 2 y parámetro de escala θ.

7.10

Para un determinado nivel de ingresos, el Departamento de Hacienda sabe que las cantidades declaradas por concepto de deducciones médicas (X_1), contribuciones caritativas (X_2) y gastos varios (X_3), son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con media $\$400, \$800$ y $\$100$ y desviaciones estándar $\&100, \$250$ y $\$40$, respectivamente.

a)

¿Cuàl es la probabilidad de que la cantidad total declarada por concepto de estas tres deducciones, no sea mayor de \$1600?

Respuesta.- Sean,

$$\begin{array}{rclcrcl} E(X_1) & = & 400 & ; & sd(X_1) & = & 100 \\ E(X_2) & = & 800 & ; & sd(X_2) & = & 800 \\ E(X_3) & = & 100 & ; & sd(X_3) & = & 100 \end{array}$$

Por el teorema 7.2, con $a_i = 1$, tenemos

$$\begin{array}{rclclcr} E(Y) & = & E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) & = & 400 + 800 + 100 & = & 1300 \\ \sqrt{sd(Y)} & = & \sqrt{sd^2(X_1) + sd^2(X_2) + sd^2(X_3)} & = & \sqrt{100^2 + 250^2 + 40^2} & = & \sqrt{74100} \end{array}$$

Lo que implica que,

$$Y \sim N\left(1300, \sqrt{74100}\right)$$

Entonces, la probabilidad de que la cantidad total declarada por concepto de las deducciones dadas no se mayor a \$1600 será:

$$P(Y \leq 1600) = 0.864786$$

```
pnorm(1600,1300,sqrt(74100))
```

```
## [1] 0.864786
```

b)

Si una persona con este nivel de ingresos declara por concepto de estas deducciones un total de \$2100, ¿qué tan probable es tener una cantidad igual o mayor a este monto bajo las condiciones dadas?

Respuesta.- Sea $Y \sim N(1300, \sqrt{74100})$. Entonces,

$$P(Y \geq 2100) = 0.001647038$$

```
pnorm(2100,1300,sqrt(74100),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.001647038
```

7.11

Una tienda de artículos eléctronicos para el hogar vende tres diferentes marcas de refrigeradores. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias las cuales representan el volumen de ventas mensuales para cada una de las tres marcas de refrigeradores. Si X_1, X_2 y X_3 son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con medias \$8000, \$15000 y \$12000, y desviación estándar \$2000 \$5000 y \$3000, respectivamente, obtener la probabilidad de que, para un mes en particular, el volumen de venta total para los tres refrigeradores sea mayor de \$50000.

Respuesta.- Sean,

$$
\begin{array}{rclcl}
E(Y) & = & E(X_1)+E(X_2)+E(X_3) & = & 8000+15000+12000 & = & 35000 \\
\sqrt{sd(Y)} & = & \sqrt{sd^2(X_1)+sd^2(X_2)+sd^2(X_3)} & = & \sqrt{2000^2+5000^2+3000^2} & = & 6164.414
\end{array}
$$

Lo que implica que,

$$Y \sim N(35000, 6164.414)$$

Entonces,

$$P(Y \geq 5000) = 0.007480509.$$

```
EY = 8000+15000+12000
sdY = sqrt(2000^2+5000^2+3000^2)
pnorm(50000,EY,sdY,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.007480509
```

7.12

En una tienda de servicio el tiempo total del sistema consta de dos componentes (el lapso de tiempo que debe esperar para que el servicio de comienzo (X_1) y el lapso de tiempo que este dura (X_2)). Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes exponencialemente distribuidas con un tiempo medio de 4 minutos cada una, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo total que tarda el sistema en proporcionar el servicio no sea mayor de 15 minutos? (Sugerencia: consulte el ejercicio 7.9.)

Respuesta.- Por el ejercicio 7.9, tenemos

$$m_Y(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^2$$

.

tal que $Y = X_1 + X_2$

7.13

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población que tiene una distribución gama con parámetros α y θ. Mediante el uso de la función generadora de momentos, demostrar que la distribución dela media muestral $\overline{X}$ también es de tipo gama, con parámetros de escala y de forma iguales a $n\alpha$ y θ/n respectivamente.

7.14

Mediante el empleo de los resultados de la sección 5.9, generar números aleatorios para las distribuciones binomial y exponencial y usarlos para demostrar el teorema central del límite. De manera específica, para $n = 10$ y $n = 40$, generar 50 muestras de una distribución binomial con $p = 0.4$. Repetir el procedimiento anterior generando 50 muestras de una distribución exponencial con parámetro $\theta = 100$. ¿Se ha demostrado el teorema central del límite en un grado razonable?.

Respuesta.- Sea,

$$Y = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & 0 \leq u \leq p \\ 0 & si & p < u \leq 1. \end{array} \right.$$

cómo obtenemos números aleatorios binomiales. Entonces,

```
binomr = function(n,p){
  set.seed(1)
  v = runif(n)
  x=c()
  for (u in v) {
    if(0<=u & u<=p) {
      x=append(x,1)
    } else if(p<u & u<=1) {
      x=append(x,0)
    }
  }
  return(x)
}
```

```
n10=10
n40=40
p = 0.4
```

```
binom10 = replicate(50,binomr(n10,p))
mean(binom10)
```

```
## [1] 0.4
```

```
binom40 = replicate(50,binomr(n40,p))
mean(binom10)
```

```
## [1] 0.4
```

Por otro lado sea,

$$x = \theta \cdot \ln\left(\frac{1}{1-u}\right)$$

un genedador de números aleatorios para la distribución exponencial, con $\theta = 100$. Entonces,

```
theta=100
exponr=function(n,theta){
  set.seed(1)
  v = runif(n)
  x=c()
  for (u in v) {
    x = append(x,theta*log(1/(1-u)))
  }
  return(x)
}
```

```
exponr10=replicate(50,exponr(n10,theta))
mean(exponr10)
```

```
## [1] 115.5604
```

```
exponr40=replicate(50,exponr(n40,theta))
mean(exponr40)
```

```
## [1] 101.4558
```

Por lo que se demuestra de manera razonable el teorema central del límite.

7.15

Para cierta prueba de aptitud se sabe con base a la experiencia que el número de aciertos es 1000 con una desviación estándar de 126. Si se aplica la prueba a 100 personas seleccionadas al azar, aproximar las siguientes probabilidades que involucran a la media muestra $\overline{X}$.

a)

$P\left(985 < \overline{X} < 1015\right)$

Respuesta.- Sea, $Z = \dfrac{\overline{X} - \theta}{\theta/\sqrt{n}}$, $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(985 < \overline{X} < 1015) &= P\left(985 - \mu < \overline{X} - \mu < 1015 - \mu\right) \\
&= P\left(\frac{985 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{1015 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\frac{985 - 1000}{126/\sqrt{100}} < Z < \frac{1015 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) \\
&= 0.7661407.
\end{aligned}
$$

```
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(1015,mu,sd/sqrt(n)) - pnorm(985,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.7661407
```

b)

$P\left(960 < \overline{X} < 1040\right)$

Respuesta.- Sean $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$P\left(\frac{960 - 1000}{126/\sqrt{100}} < Z < \frac{1040 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) = 0.9984996.$$

```
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(1040,mu,sd/sqrt(n)) - pnorm(960,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.9984996
```

c)

$P\left(\overline{X} > 1020\right)$

Respuesta.- Sean $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$P\left(Z > \frac{1020 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) = 0.05622218.$$

```r
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(1020,mu,sd/sqrt(n),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.05622218
```

d)

$P\left(\overline{X} < 975\right)$

Respuesta.- Sean $\mu = 1000$, $n = 100$ y $\sigma = 126$. Entonces,

$$P\left(Z < \frac{975 - 1000}{126/\sqrt{100}}\right) = 0.02362084.$$

```r
mu = 1000
sd = 126
n = 100
pnorm(975,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.02362084
```

7.16

Una contratista piensa comprar una gran cantidad de lámparas de alta intensidad a cierto fabricante. Este asegura al contratista que la duración promedio de las lámparas es de 1000 horas con una desviación estándar igual a 80 horas: El contratista decide comprar las lámparas sólo si una muestra aleatoria de 64 de estas da como resultado una vida promedio de por lo menos 1000 horas. ¿Cuàl es la probabilidad de que el contratista adquiera las lámparas?

Respuesta.- Sean, $\mu = 1000$, $n = 64$ y $\sigma = 80$. Entonces,

$$P\left(Z > \frac{1000 - 1000}{80/\sqrt{64}}\right) = 0.5.$$

```r
mu = 1000
sd = 80
n = 64
pnorm(1000,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 0.5
```

7.17

Un inspector federal de pesos y medidas visita una planta de empacado para verificar que el peso neto de las cajas sea el indicado en estas. El gerente de la planta asegura al inspector que el peso promedio de cada caja es de 750 gr. con una desviación estándar de 5 gr. El inspector selecciona, al azar, 100 cajas y encuentra que el peso promedio es de 748 gr. Bajo estas condiciones, ¿qué tan probable es tener un peso de 748 o menos? ¿Qué actitud debe tomar el inspector?

Respuesta.- Sean, $\mu = 750$, $n = 100$ y $\sigma = 5$. Entonces,

$$P\left(Z < \frac{748 - 750}{5/\sqrt{100}}\right) = 0.000031671245.$$

```
mu = 750
sd = 5
n = 100
pnorm(748,mu,sd/sqrt(n))
```

```
## [1] 3.167124e-05
```

El inspector confirma que el peso es el que se dio cómo hipótesis.

7.18

En la fabricación de cojinetes para motores, se sabe que el diámetro es de 5 cm. con una desviación estándar igual a 0.005 cm. El proceso es vigilado en forma periódica mediante la selección aleatoria de 64 cojinetes, midiendo sus correspondientes diámetros. El proceso no se detiene mientras la probabilidad de que la media muestral se encuentre entre dos límites especificados sea de 0.95. Determinar el valor de estos límites.

Respuesta.- Sean $\mu = 5$, $\sigma = 0.005$, $n = 64$ y $Z_{0.95} = 1.6448$. Entonces

$$P\left(\frac{\theta_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z < \frac{\theta_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.95.$$

Sea $Z_{0.95} = 1.644854$. Igualando $Z = \dfrac{\theta - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.644854$, entonces despejando θ, tenemos

$$\theta = \mu \pm Z \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

Pero dado, que Z se encuentra entre un límite superior e inferior entonces dividimos Z por 2. Es decir,

$$\theta = \mu \pm Z/2 \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcccl} \theta_1 & = & 5 + 1.6448/2 \cdot 0.005/\sqrt{64} & = & 5.000514. \\ \theta_2 & = & 5 - 1.6448/2 \cdot 0.005/\sqrt{64} & = & 4.999486. \end{array}$$

```
Z = qnorm(0.95)
mu = 5
sigma = 0.005
n = 64
mu+Z/2*sigma/sqrt(n)
```

```
## [1] 5.000514
```

```
mu-Z/2*sigma/sqrt(n)
```

```
## [1] 4.999486
```

7.19

En la producción de cierto material para soldar se sabe que la desviación estándar de a tensión de ruptura de este material es de 25 libras. ¿Cuál debe ser la tensión de ruptura promedio del proceso si, con base en una muestra aleatoria de 50 especímenes, la probabilidad de que la media muestral tenga un valor mayor que 250 libras es de 0.95?

Respuesta.- Sean $\sigma = 25$, $n = 50$, $\theta = 250$ y $Z_{0.95} = 1.6448$. Entonces,

$$Z = \frac{\theta - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Despejando μ, tenemos

$$\mu = \theta - Z \cdot \sigma/\sqrt{n} = 250 - 1.6448 \cdot 25/\sqrt{50} = 255.8154.$$

```
Z = qnorm(0.05)
sigma=25
n=50
theta=250
theta-Z*sigma/sqrt(n)
```

```
## [1] 255.8154
```

7.20

Genere 50 muestras, cada una de tamaño 25 a partir de una distribución normal con media 60 y desviación estándar 10. Calcule la varianza de cada muestra mediante el empleo de (7.14).

```
set.seed(4)
samples = replicate(50,rnorm(25,60,10))
samples[,49]
```

```
##  [1] 60.33491 45.41503 80.58233 58.98587 70.60089 54.96761 56.57966 54.17480
##  [9] 58.85776 65.05026 40.76087 55.71235 70.13737 70.82118 63.36703 58.00770
## [17] 58.54438 45.96297 76.76807 57.47351 52.66591 78.11288 58.88064 72.62201
## [25] 68.69157
```

Si se muestra una distribución normal con media μ y varianza σ^2, la varianza muestral se define por:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1}.$$

```
muestra = 50

normalr= function(m){
  i=1
  varm = c()
  while(i<=m){
    x0=samples[,i]
    media = mean(x0)
    sum = 0
    for (s in x0) {
      sum = sum+((s-media)^2/(length(x0)-1))
    }
    varm = c(varm,sum)
    i=i+1
  }
  return(varm)
}

normal = normalr(muestra)
```

a)

Obtener la media y la varianza de S^2 mediante el empleo de los 50 valores calculados. ¿Cómo son estos valores al compararlos con los proporcionados por las extensiones (7.17) y (7.18)?.

Respuesta.-

```
mean(normal)
```

```
## [1] 95.47969
```

```
sqrt(mean(normal))
```

```
## [1] 9.771371
```

```
var(normal)
```

```
## [1] 524.5867
```

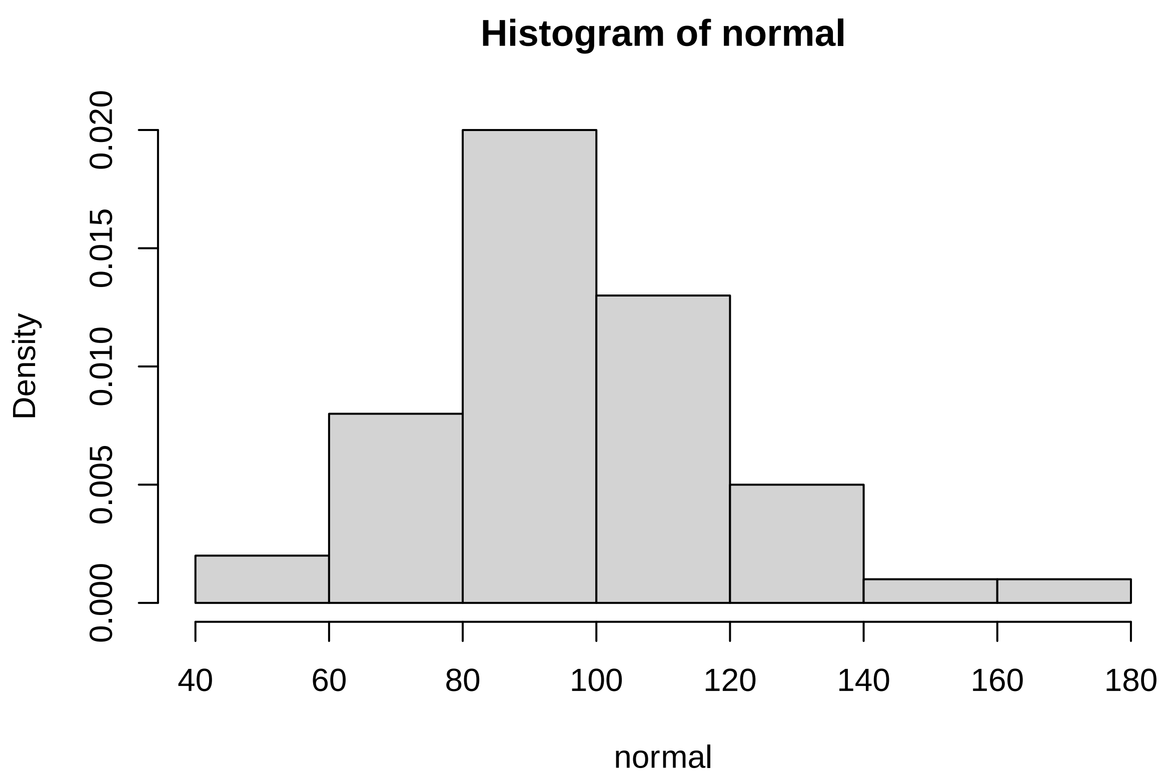
Esto valores son similares a las de las extensiones (7.17) y (7.18).

b)

Agrupar los 50 valores calculados de S^2 y graficar las frecuencias relativas. Coméntese sobre los resultados.

Respuesta.-

```
hist(normal,freq=FALSE)
```



7.21

Repetir el ejercicio 7.20 pero generando los valores a partir de una distribución exponencial con parámetro de escala $\theta = 30$. Haga un comentario sobre sus resultados

```
exponr=function(n,theta){
  v = runif(n)
  x=c()
  for (u in v) {
    x = append(x,theta*log(1/(1-u)))
  }
  return(x)
}

samples=replicate(50,exponr(25,30))

muestra = 50
exponr= function(m){
  i=1
  varm = c()
  while(i<=m){
    x0=samples[,i]
    media = mean(x0)
    sum = 0
    for (s in x0) {
      sum = sum+((s-media)^2/(length(x0)-1))
    }
    varm = c(varm,sum)
    i=i+1
  }
  return(varm)
}

expr = exponr(muestra)
```

a)

Obtener la media y la varianza de S^2 mediante el empleo de los 50 valores calculados. ¿Cómo son estos valores al compararlos con los proporcionados por las extensiones (7.17) y (7.18)?.

Respuesta.-

```
mean(expr)
```

```
## [1] 884.1506
```

```
sqrt(mean(expr))
```

```
## [1] 29.73467
```

```
var(expr)
```

```
## [1] 181319.8
```

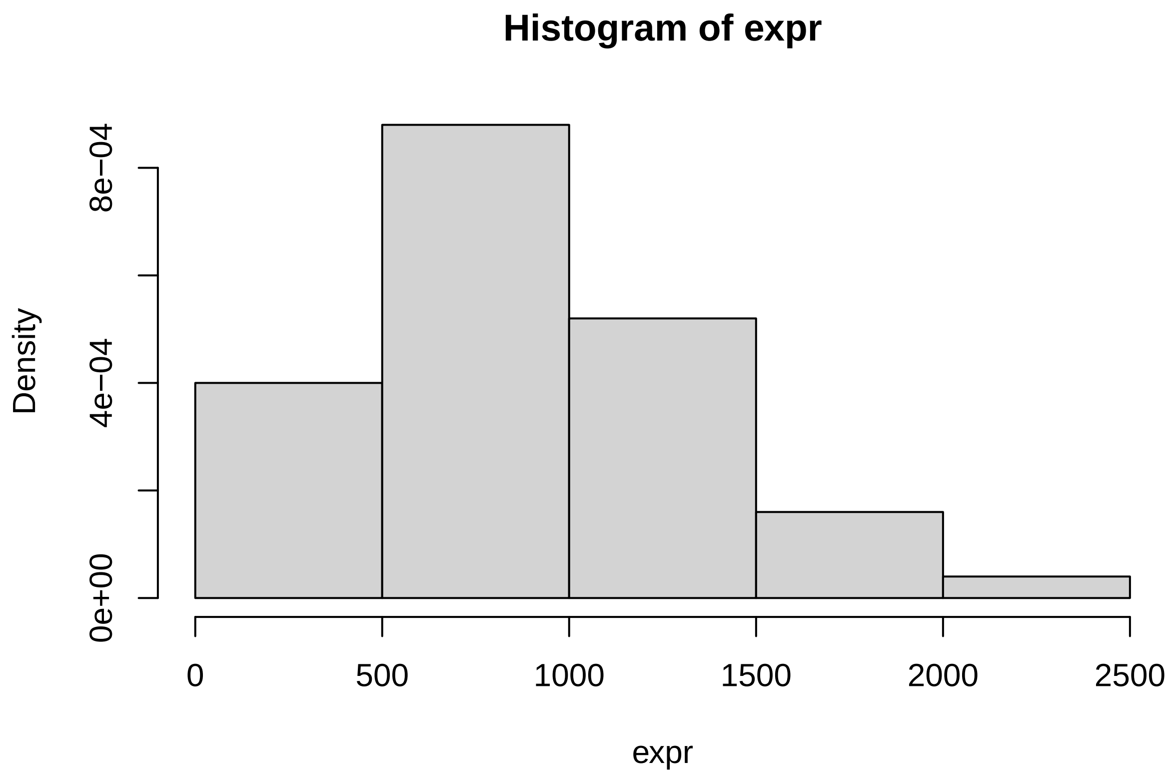
Esto valores son similares a las de las extensiones (7.17) y (7.18).

b)

Agrupar los 50 valores calculados de S^2 y graficar las frecuencias relativas. Coméntese sobre los resultados.

Respuesta.-

```
hist(expr,freq = FALSE)
```



7.22

Para un gerente de planta es muy importante controlar la variación en el espesor de un material plástico. Se sabe que la distribución del espesor del material es normal con una desviación estándar de 0.01 cm. Una muestra aleatoria de 25 piezas de este material da como resultado una desviación estándar muestral de 0.015 cm. Si la varianza de la población es $(0.01)^2 cm^2$. ¿cuál es la probabilidad de que la varianza muestral sea igual o mayor que $(0.015)^2 cm^2$? Por lo tanto, ¿qué puede usted concluir con respecto a la variación de este proceso?.

Respuesta.- Sean, $\sigma = 0.01$ la desviación estándar y$S = 0.015$. Si la varianza de la población es $\sigma^2 = 0.01^2$. Entonces la probabilidad de $S^2 \geq 0.015^2$, cuando el muestreo se lleva a cabo sobre $N(0, 0.01)$ con $n = 25$ es igual a la de

$$
\begin{aligned}
P\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}=Y\geq S^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{n}\right] &= P\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\sigma^2 Y\geq nS^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]\\
&= P\left(Y\geq\frac{nS^2}{\sigma^2}\right)\\
&= P\left(Y\geq\frac{25\cdot 0.015^2}{0.01^2}\right)\\
&= P(Y\geq 56.25) \qquad (\text{Por el teorema } 7.5, Y\sim X^2_{25})\\
&= 0.0003365632.
\end{aligned}
$$

```
pchisq(56.25,df=25,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0003365632
```

Llegamos a la conclusión que la varianza muestral no es probable que sea igual o mayor que $0.015^2\ cm^2$

7.23

Si se obtiene una muestra aleatoria de $n=16$ de una distribución normal con media y varianza desconocidas, obtener $P(S^2/\sigma^2\leq 2.041)$

Respuesta.- La varianza muestral cuando media μ y varianza σ^2 son desconocidas vienen dadas por:

$$S^2=\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{n-1}.$$

Y por el teorema 7.5 la distribución de la variable aleatoria

$$Y=\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$

es del tipo chi-cuadrada con n grados de libertad. De donde,

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{S^2}{\sigma^2}\leq 2.041\right) &= P\left(\frac{\sum\dfrac{(x_i-\mu)^2}{n-1}}{\sum\dfrac{(x_i-\mu)^2}{Y}}\leq 2.041\right)\\
&= P\left(\frac{Y}{n-1}\leq 2.041\right)\\
&= P\left[Y\leq 2.041(n-1)\right]\\
&= P\left[Y\leq 2.041(16-1)\right]\\
&= P(Y\leq 30.615)\\
&= 0.9901128.
\end{aligned}
$$

```
pchisq((16-1)*2.041,df=16-1)
```

```
## [1] 0.9901128
```

7.24

Si se obtiene una muestra aleatoria de tamaño $n = 21$ de una distribución normal con media y varianza desconocidas, obtener $P(S^2/\sigma^2 \leq 1.421)$.

Respuesta.- Similar al ejercicio 7.23 se tiene,

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 1.421\right) &= P\left(\frac{\sum \dfrac{(x_i-\mu)^2}{n-1}}{\sum \dfrac{(x_i-\mu)^2}{Y}} \leq 1.421\right) \\
&= P\left(\frac{Y}{n-1} \leq 1.421\right) \\
&= P\left[Y \leq 1.421(n-1)\right] \\
&= P\left[Y \leq 1.421(21-1)\right] \\
&= 0.9001761.
\end{aligned}
$$

```
pchisq((21-1)*1.421,df=21-1)
```

```
## [1] 0.9001761
```

7.25

Un fabricante de cigarrillos asegura que el contenido promedio de nicotina, en una de sus marcas, es de 0.6 mg por cigarrillo. Una organización independientes mide el contenido de nicotica de 16 cigarrillos de esta marca y encuentra que el promedio y la desviación estándar muestral es de 0.75 y 0.175 mg, respectivamente, de nicotina. Si se supone que la cantidad de nicotina en estos cigarrillos es una variable aleatoria normal, ¿qué tan probable es el resultado muestral dado el dato proporcionado por el fabricante?.

Respuesta.- Por el teorema 7.7, se tiene que

$$
T = \frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}},
$$

tiene una distribución chi-cuadrada con $n-1$ grado de libertad.

Es decir, la función acumulada chi cuadrada vendrá dada por

$$
\begin{aligned}
1-P(T \leq t_{1-\alpha,v}) &= 1-\int_{-\infty}^{t_{1-\alpha,v}} f(t;v)\,dt \\
&= 1-\int_{-\infty}^{t_{1-\alpha,v}} \frac{\Gamma\left[\dfrac{(v+1)}{2}\right]}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\dfrac{v}{2}\right)} \left[1+\left(\frac{t^2}{v}\right)\right]^{-\frac{v+1}{2}} dt.
\end{aligned}
$$

En nuestro caso particular. Sean $\mu = 0.6$, $\overline{x} = 0.75$, $s = 0.175$ y $n = 16$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
1-P\left(\frac{0.75-0.6}{175/\sqrt{16}}\right) &= 1-P(T \leq 3.428571) \\
&= 1-\int_{-\infty}^{3.428571} \frac{\Gamma\left[\dfrac{(15+1)}{2}\right]}{\sqrt{\pi 15}\,\Gamma\left(\dfrac{15}{2}\right)} \left[1+\left(\frac{3.428571^2}{15}\right)\right]^{-\frac{15+1}{2}} dt. \\
&= 0.001866207.
\end{aligned}
$$

```
mu=0.6
mean = 0.75
s=0.175
n=16
t=(mean-mu)/(s/sqrt(n))
t
```

```
## [1] 3.428571
```

```
pt(t,n-1,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.001866207
```

Por lo que concluimos que es muy poco probable el resultado de la organización.

7.26

Durante los 12 meses pasados el volumen de ventas de un restaurante fue de \$2000. El gerente piensa que los pròximos 25 dias serán típicos con respecto al volumen de ventas normal. Al finalizar los 25 días, el volumen de ventas y su desviación estándar promedio fueron de \$1800 y \$200, respectivamente. Supóngase que el volumen de ventas diaria es una variable aleatoria normal. Si usted fuese el gerente, ¿tendría alguna razón para creer, con base en este resultado, que hubo una disminución en el volumen de ventas promedio diario?.

Respuesta.- Sean $\mu = 2000$, $\overline{x} = 1800$, $s = 200$ y $n = 25$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
1-P\left(\frac{1800-2000}{200/\sqrt{25}}\right) &= 1-P(T \leq -5) \\
&= 1-\int_{-\infty}^{-5} \frac{\Gamma\left[\dfrac{(24+1)}{2}\right]}{\sqrt{\pi 24}\,\Gamma\left(\dfrac{24}{2}\right)} \left[1+\left(\frac{-5^2}{24}\right)\right]^{-\frac{24+1}{2}} dt. \\
&= 0.00002.
\end{aligned}
$$

```r
mu=2000
mean = 1800
s=200
n=25
t=(mean-mu)/(s/sqrt(n))
pt(t,n-1)
```

```
## [1] 2.078428e-05
```

No se tiene razón para creer que hubo una disminución en el volumen de ventas promedio diario.

7.27

El gerente de una refinería piensa modificar el proceso para producir gasolina a partir de petróleo crudo. El gerente hará la modificación sólo si la gasolina promedio que se obtiene por este nuevo proceso (expresada como un porcentaje del crudo) aumenta su valor con respecto al proceso en uso. Con base en un experimento de laboratorio y mediante el empleo de dos muestras aleatorias de tamaño 12, una para cada proceso, la cantidad de gasolina promedio del proceso en uso es de 24.6 con una desviación estándar de 2.3, y para el proceso propuesto fue de 28.2 con una desviación estándar de 2.7. El gerente piensa que los resultados proporcionados por los dos procesos son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con varianza iguales. Con base en esta evidencia, ¿debe adoptarse el nuevo proceso?.

Respuesta.- Dado que $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, si $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$ en el teorema 7.2, la distribución de $\overline{X} - \overline{Y}$ también es normal con media $\mu_X = 0 - 0 = \mu_Y$. Luego, dado que son dos varianzas iguales pero desconocidas, por el teorema 7.6, la distribución de

$$W = \frac{(n_X - 1)S_X^2}{\sigma^2} + \frac{(n_Y - 1)S_Y^2}{\sigma^2}$$

es chi-cuadrada con $n_X + n_Y - 2$ grados de libertad. De donde,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{Z}{\sqrt{X/v}} \\
&= \frac{\dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma} \sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{\sigma^2}}{n_X + n_Y - 2}}} \\
&= \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}\left(\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}\right)}} \\
&= \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}}
\end{aligned}$$

para

$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

Tiene una distribución t de Student con $n_x + n_Y - 2$ grados de libertad. Sabemos que $s_X = 2.3$ y $s_Y = 2.7$ con $n_X = n_Y = 12$ y $\overline{X} = 24.6$ y $\overline{Y} = 28.2$. Por lo tanto,

$$S_p = \sqrt{\frac{(12-1)(2.3)^2 + (12-1)(2.7)^2}{12+12-2}} = 2.507987.$$

Y

$$T = \frac{2.3 - 2.7 - (0-0)}{2.507987\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = -3.516032.$$

Así,

$$P(T < -3.516032) = 0.002787616.$$

```r
meanX=24.6
meanY=28.2
deX2 = 2.3^2
deY2 = 2.7^2
n=12
s = sqrt(((n-1)*deX2+(n-1)*deY2)/(n+n-2))
T = (meanX-meanY)/(s*sqrt(1/12+1/12))
pt(T,df=12-2)
```

```
## [1] 0.002787616
```

Por lo tanto, debe adaptarse el nuevo proceso.

7.28

Una organización independiente está intersada en probar la distancia de frenado a una velocidad de 50 mph para dos marcas distintas de automóviles. Para la primera marca se selecionaron nueve automóviles y se probaron en un medio contralado. La media muestral y la desviación estándar fueron de 145 pies y 8 pies, respectivamente. Para la segunda marca se seleccionaron 12 automóviles y la distancia promedio resultó ser de 132 pies y una desviación estándar de 10 pies. Con base en esta evidencia, ¿existe alguna razón para creer que la distancia de frenado para ambas marcas, es la misma?. Supóngase que las distancias de frenado son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con varianzas iguales.

Respuesta.- Sean $n_X = 9$, $\overline{X} = 145$, $de_X = 8$ y $n_Y = 12$, $\overline{Y} = 132$, $de_Y = 10$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} \\ &= \frac{(9-1)\cdot 8^2 + (12-1)\cdot 10^2}{9+12-2} \\ &= 9.210977. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}} \\
&= \frac{145 - 132 - (0 - 0)}{9.210977\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12}}} \\
&= 3.200662.
\end{aligned}
$$

Así,

$$P(T < 3.200662) = 0.9952595.$$

```
meanX=145
meanY=132
deX2 = 8^2
deY2 = 10^2
nX=9
nY=12
s = sqrt(((nX-1)*deX2+(nY-1)*deY2)/(nX+nY-2))
s
```

```
## [1] 9.210977
```

```
T = (meanX-meanY)/(s*sqrt(1/nX+1/nY))
T
```

```
## [1] 3.200662
```

```
pt(T,df=12-2)
```

```
## [1] 0.9952595
```

Por lo que no existe razón para creer que la distancia de frenado para ambas marcas es la misma.

7.29

La variación en el número de unidades diarias de cierto producto, el cual manejan dos operadores A y B debe ser la misma. Con base en muestras de tamaño $n_A = 16$ días y $n_B = 21$ días, el valor calculado de las desviaciones estándar muestrales es de $s_A = 8.2$ unidades y $s_B = 5.8$ unidades. Si el número de estas, manejadas por los dos operadores, por día, son dos variables aleatorias independientes que se encuentran aproximadas, en forma adecuada, por distribuciones normales, ¿existe alguna razón para creer que las varianzas son iguales?.

Respuesta.- Sean $n_A = 16$, $n_B = 21$, $s_A = 8.2$ y $s_B = 5.8$. Entonces, por el teorema 7.8 la variable aleatoria

$$F = \frac{\dfrac{\dfrac{(n_X - 1)S_X^2}{\sigma_Y^2}}{n_X - 1}}{\dfrac{\dfrac{(n_Y - 1)S_y^2}{\sigma_Y^2}}{(n_Y - 1)}} = \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$$

tiene una distribución F con $n_X - 1$ y $n_Y - 1$ grados de libertad. Si, suponemos que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, se tiene

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{8.2^2}{5.8^2} = 1.998811.$$

```
nA=16
nB=21
sA=8.2
sB=5.8
f=sA^2/sB^2
pf(f,nA-1,nB-1,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.07411467
```

Dado que $P(F_{15,20} > 1.998811) < 0.10$. Entonces, la razón para creer que las varianzas son iguales es dudosa.

7.30

Con base en la información proporcionada en el ejercicio 7.27, ¿existe alguna razón para creer que las varianzas de los dos procesos son iguales?

Respuesta.- Sabemos que $s_X = 2.3$ y $s_Y = 2.7$ con $n_X = n_Y = 12$ y $\overline{X} = 24.6$ y $\overline{Y} = 28.2$. Supongamos que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Entonces,

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{2.3^2}{2.7^2} = 0.7256516.$$

Así,

$$P(F \geq 0.7256516) = 0.6980434.$$

```
nX=12
nY=12
sX=2.3
sY=2.7
f=sX^2/sY^2
pf(f,nX-1,nY-1,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.6980434
```

Dado que la probabilidad de observar un valor de F distinto, es grande, entonces las dos varianzas podrían ser diferentes.