Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Cálculo diferencial e integral II.**
Práctica: 1.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Problema 1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ **con** $x, y \neq 0$**. Si** $\|x\| = \|y\|$**, entonces hallar la medida del ángulo entre** $\frac{1}{2}(x+y)$ **e** $y - x$**.**

Respuesta.- Ya que $x, y \neq 0$ y por el teorema de los cosenos se tiene,

$$\left\langle \frac{1}{2}(x+y), y - x \right\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta \tag{1}$$

Por definición de producto interno y la parte izquierda de (1),

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(x_i + y_i)\cdot(y_i - x_i)\right] = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = -\frac{1}{2}\left(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle\right).$$

Así (1) quedará de la siguiente manera,

$$\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = -2\|x\|\|y\|\cos\theta.$$

Ya que $\|x\| = \|y\|$ y el teorema de cosenos. Entonces,

$$\|x\|\|x\|\cos\theta + \|y\|\|y|\cos\theta = -2\|x\|\|x\|\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta\left(3\|x\|\|x\| + \|y\|\|y|\right) = 0$$

Por lo tanto,

$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos(0) \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 2. **Demuestre que si** $x + y$ **y** $x - y$ **son ortogonales, entonces los vectores** x **e** y **deben tener la misma longitud.**

Demostración.- Sea $x.y \in \mathbb{R}^n$. Por definición de ortogonalidad, se tiene

$$\langle x + y, x - y\rangle = 0.$$

Luego por definición de producto interno,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i + y_i)(x_i - y_i)\right] &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 &= 0 \\
\langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle &= 0 \\
\sqrt{\langle x, x\rangle} &= \sqrt{\langle y, y\rangle} \\
\|x\| &= \|y\|
\end{aligned}$$

Ya que la norma mide el tamaño del vector entonces x e y tienen la misma longitud.

Problema 3. **Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si, y solamente si, x e y son ortogonales.**

Demostración.- Sea $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. Como $\langle x, y\rangle = 0$, entonces

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Problema 4. **Demuestre, y dé una interpretación geométrica de, la ley del paralelogramo: Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces:**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Demostración.- Ya que $x, y \in \mathbb{R}^3$ y por definición de norma, entonces

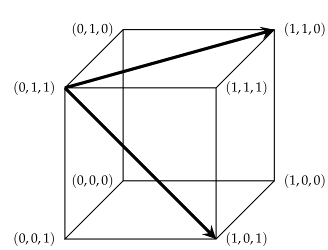
$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \left(\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i+y_i)(x_i+y_i)\right] + \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-y_i)(x_i-y_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2\right) \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{i=1}^{3} y_i^2\right) = 2\left(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle\right) \\
&= 2\left[\left(\sqrt{\langle x, x\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2\right] \\
&= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).
\end{aligned}$$

Otra manera de demostrar sería:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Problema 5. **Calcule el ángulo formado por los diagonales de dos caras consecutivas de un cubo de arista igual a a.**

Demostración.- Ya que se tiene un cubo. Entonces,



Luego se tiene los vectores

$$x = (1,0,1) - (0,1,1) = (1,-1,0) \quad \text{e} \quad y = (1,1,0) - (0,1,1) = (1,0,-1).$$

Así, el ángulo θ estará dado por,

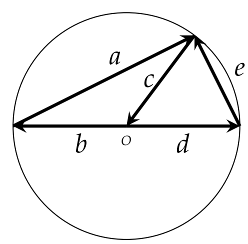
$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\langle (1,-1,0),(1,0,-1)\rangle}{\|(1,-1,0)\|\|(1,0,-1)\|} \\
&= \frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Problema 6. Demuestre que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Demostración.- Representamos la idea con la siguiente gráfica.



Donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^n$ y O el centro de la circunferencia, por lo tanto los vectores b, d, c son iguales e inscritos en una semicircunferencia. Debemos demostrar que $\langle a, e\rangle = 0$.

Sean

$$a = c + b, \quad e = c + d \quad \text{y} \quad \|b\| = \|c\| = \|d\|$$

Entonces por las propiedades de producto interno tenemos,

$$\langle a, e\rangle = \langle c+b, c+d\rangle = \langle c+b, c\rangle + \langle c+b, d\rangle = \langle c,c\rangle + \langle c,b\rangle + \langle c,d\rangle + \langle b,d\rangle.$$

Ya que $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ y $b = -d$, nos queda:

$$\langle a, e\rangle = \|c\|^2 - \langle c,d\rangle + \langle c,d\rangle - \|d\|^2 = 0.$$

Problema 7. Demuestre que uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo.

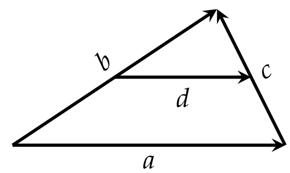
Demostración.-

Problema 8. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vertices.

Demostración.-

Problema 9. Demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Demostración.- Consideremos el siguiente gráfico. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$



de donde podemos deducir las siguientes ecuaciones:

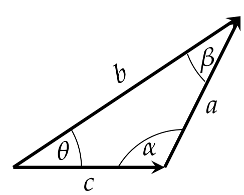
$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - d & = & 0 \\ \\ a + \frac{c}{2} - d - \frac{b}{2} & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \frac{c}{2} & = & \frac{b}{2} - a \\ \\ \frac{c}{2} & = & d + \frac{b}{2} - a \end{array}\right.$$

Entonces $a = 2d$ si y sólo si $a \parallel d$. Así tomando la norma nos queda:

$$\|a\| = \|2d\| \quad \Longrightarrow \quad \|d\| = \frac{1}{2}\|a\|.$$

Problema 10. Pruebe la ley de senos utilizando vectores.

Demostración.- Considere el siguiente triangulo.



Sea $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Notemos que $b = c + a$ por lo que utilizaremos la proposición

$$\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \operatorname{sen}(\theta)$$

de la siguiente manera. Sea $x \times x = 0$ entonces,

- $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{\|b \times c\|}{\|b\|\|c\|} = \dfrac{\|(c+a) \times c\|}{\|b\|\|c\|} = \dfrac{\|c \times c + a \times c\|}{\|b\|\|c\|} = \dfrac{\|a \times c\|}{\|b\|\|c\|}$. Entonces,

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\|a\|} = \frac{\|a \times c\|}{\|a\|\|b\|\|c\|}$$

- $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\|c \times a\|}{\|a\|\|c\|} = \dfrac{\|(b-a) \times a\|}{\|a\|\|c\|} = \dfrac{\|a \times b - a \times a\|}{\|a\|\|c\|} = \dfrac{\|a \times b\|}{\|a\|\|c\|}$. Entonces,

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\|b\|} = \frac{\|a \times c\|}{\|a\|\|b\|\|c\|}$$

- $\text{sen}(\beta) = \dfrac{\|b \times a\|}{\|a\|\|b\|} = \dfrac{\|(c+a) \times a\|}{\|a\|\|b\|} = \dfrac{\|c \times a - a \times a\|}{\|a\|\|b\|} = \dfrac{\|a \times c\|}{\|a\|\|b\|}$. Entonces,

$$\frac{\text{sen}(\beta)}{\|c\|} = \frac{\|a \times c\|}{\|a\|\|b\|\|c\|}$$

Por lo tanto,

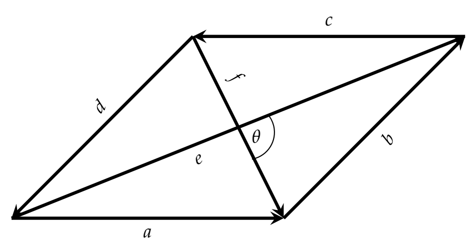
$$\frac{\text{sen}(\theta)}{\|a\|} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\|b\|} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\|c\|}.$$

Problema 11. Muestre que las medianas de un triángulo se cortan en un punto a un tercio de cada mediana.

Demostración.-

Problema 12. Demuestre que las diagonales de un rombo son ortogonales entre si.

Demostración.- Sea $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^n$., se tiene:



De donde,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle e, f \rangle}{\|e\|\|f\|} \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle a+b, d+a \rangle}{\|e\|\|f\|}\right).$$

Luego, ya que a, b, c, d es un rombo. Es decir, un paralelogramo de lados iguales, entonces $d = -b$ y $\|a\| = \|b\|$ así:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle a+b, -b+a \rangle}{\|e\|\|f\|}\right).$$

Por las propiedades de producto interno,

$$\begin{aligned}
\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\langle a, -b \rangle + \langle b, -b \rangle + \langle a, a \rangle + \langle b, a \rangle}{\|e\|\|f\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{-\langle a, b \rangle - \langle b, b \rangle + \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle}{\|e\|\|f\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle}{\|e\|\|f\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\|a\|^2 - \|b\|^2}{\|e\|\|f\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{0}{\|e\|\|f\|}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e \perp f.$$

Problema 13. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:

$$x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z.$$

Demostración.- Calculemos $y \times z$.

$$y \times z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1)$$

Luego, calculemos $x \times (y \times z)$

$$\begin{array}{rcl} x \times (y \times z) & = & \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_2z_3 - y_3z_2 & y_3z_1 - y_1z_3 & y_1z_2 - y_2z_1 \end{vmatrix} \\ & = & [x_2\,(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3\,(y_3z_1 - y_1z_3)\ ,\ x_3\,(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1\,(y_1z_2 - y_2z_1)\,, \\ & & x_1\,(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2\,(y_2z_3 - y_3z_2)] \\ & = & (x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1 + x_3y_1z_3\ ,\ x_3y_2z_3 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 \\ & & x_1y_3z_1 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3 + x_2y_3z_2)\,. \qquad (1) \end{array}$$

Por otro lado calculamos $\langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$.

$$\begin{array}{rl} & (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)(y_1, y_2, y_3) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1, z_2, z_3) \\ = & (x_1y_1z_1 + x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3\ ,\ x_1y_2z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_2z_3\ ,\ x_1y_3z_1 + x_2y_3z_2 + x_3y_3z_3) \\ - & (x_1y_1z_1 + x_2y_2z_1 + x_3y_3z_1\ ,\ x_1z_1z_2 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_2\ ,\ x_1y_1z_3 + x_2y_2z_3 + x_3y_3z_3) \\ = & (x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1\ ,\ x_1y_2z_2 + x_3y_2z_3 - x_1y_1z_2 - x_3y_3z_2, \\ = & x_1y_3z_1 + x_2y_3z_2 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3). \qquad (2) \end{array}$$

Igualando (1) y (2) concluimos que,

$$x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z.$$

Problema 14. Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ con $x, y \neq 0$. Si $\dfrac{\|x \times y\|}{\|x\|^3} = 3$, entonces hallar $\dfrac{\|\langle x, x \rangle y - \langle x, y \rangle x\|}{\|x\|^4}$.

Respuesta.-

Problema 15. Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

Demostración.- Dado que $\langle x, y \rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$, entonces

$$\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \cos^2\theta = \|x\|^2\|y\|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right).$$

Ya que $1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$, se sigue

$$\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = (\|x\|\,\|y\| \operatorname{sen}\theta)^2$$

Luego por el hecho de que $\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \operatorname{sen}\theta$, nos queda:

$$\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = \|x \times y\|^2.$$

Problema 16. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:

$$\boldsymbol{x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.}$$

Demostración.- Por el problema 13, sabemos que $x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$. Por lo tanto,

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z + \langle y, x\rangle z - \langle y, z\rangle x + \langle z, y\rangle x - \langle z, x\rangle y.$$

Luego, por la propiedad de conmutatividad concluimos que:

$$\langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z + \langle x, y\rangle z - \langle y, z\rangle x + \langle y, z\rangle x - \langle x, z\rangle y = 0.$$