

Algunas distribuciones continuas de probabilidad

1.1. La distribución normal

Definición 1.1. se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \end{matrix}$$

Si se obtienen las dos primeras derivadas de $f(x; \mu, \sigma)$ con respecto a x y se igualan a cero, se tiene que el valor máximo de $f(x; \mu, \sigma)$ ocurre cuando $x = \mu$, y los valores $x = \mu \pm \sigma$ son las abscisas de los dos puntos de inflexión de la curva.

Demostrar que la definición 5.1 es una función de densidad de probabilidad.

Demostración.- El que la función sea no negativa se satisface, ya que $f(x; \mu, \sigma) > 0$ para $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$. Para demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x; \mu, \sigma) dx = 1.$$

Sea

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

el valor de la integral y aplíquese la transformación lineal $y = (x - \mu)/\sigma$ de manera tal que $x = \sigma y + \mu$ y $dx = \sigma dy$. Esto da como resultado:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

Si puede demostrarse que $I^2 = 1$, puede deducirse que $I = 1$ puesto que $f(x; \mu, \sigma)$ tiene un valor positivo. De acuerdo con lo anterior:

$$I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y^2+z^2)}{2}} dydz,$$

en donde se ha escrito el producto de las dos integrales como una doble integral ya que las funciones de z son contantes con respecto a y como también de manera viceversa. Al cambiar de coordenadas rectangulares representadas por x e y , a coordenadas polares r y θ , en donde $y = r \cos \theta$ y $z = r \sin \theta$. Esto

es:

$$y^2 + z^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

y el elemento de área $dydz$, en coordenadas rectangulares se reemplaza por $rdrd\theta$ en coordenadas polares. Dado que los límites $(-\infty, \infty)$ tanto para y como para z generan el plano completo yz , el plano correspondiente a r y a θ se genera mediante el empleo de los límites $(0, 2\pi)$ para θ y $(0, \infty)$ para r . De esta forma se tiene:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr = \frac{\theta}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} \cdot [-e^{-r^2/2}] \Big|_0^\infty = 1.$$

La media de una variable aleatoria distribuida normalmente se encuentra definida por:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Se pretende demostrar que $E(X) = \mu$. Supóngase que a $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ se suma y se resta

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

La identidad se mantiene, pero después de reacomodar términos se tiene

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^\infty (x - \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x (x - \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu \end{aligned}$$

dado que el valor de la segunda integral es uno. Al afectar un cambio de variable de integración de manera tal que $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$, $x = \sigma y + \mu$ y $dx = \sigma dy$, se tiene:

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty y e^{-y^2/2} dy + \mu = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \Big|_{-\infty}^\infty + \mu = \mu.$$

El lector recordará de sus cursos de cálculo que la última integral es cero porque el integrando es una función impar y la integración se lleva a cabo sobre un intervalo simétrico alrededor de cero.

Si el valor máximo de la función de densidad de probabilidad normal ocurre cuando $x = \mu$ este es la media, la mediana y la moda de cualquier variable aleatoria distribuida aleatoriamente.

Para encontrar los demás momentos, se determinará la función generadora de momentos. Por definición:

$$m_{X-\mu}(t) = E[e^{t(X-\mu)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{t(x-\mu)} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu)]} dx.$$

de donde se completa el cuadrado en el interior del paréntesis rectangular y se tiene:

$$(x - \mu)^2 - 2\sigma^2 t(x - \mu) = (x - \mu)^2 - 2\sigma^2 t(x - \mu) + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2 = (x - \mu - \sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2.$$

Por lo que,

$$m_{X-\mu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{-\frac{(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

dado que el integrando junto con el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ es una función de densidad de probabilidad normal con parámetros $\mu + \sigma^2 t$ y σ .

Al desarrollar $e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ en serie de potencias se tiene:

$$m_{X-\mu}(t) = 1 + \frac{(\sigma t)^2}{2} + \frac{(\sigma t)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{(\sigma t)^6}{8 \cdot 3!} + \frac{(\sigma t)^8}{16 \cdot 4!} + \dots$$

Cuando las potencias impares de t no se encuentran presentes, todos los momentos centrales de X de orden impar son cero, de esta forma se asegura la simetría de la curva.

La segunda derivada de $m_{X-\mu}(t)$ evaluada en $t = 0$ es **la varianza** y está dada por:

$$Var(X) = \left. \frac{d^2 m_{X-\mu}(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \sigma^2 + \frac{12t^2\sigma^4}{4 \cdot 2!} + \frac{30t^4\sigma^6}{8 \cdot 3!} + \dots \Big|_{t=0} = \sigma^2;$$

De esta manera **la desviación estándar es σ** . De manera similar, la cuarta derivada de $m_{X-\mu}(t)$ evaluada en $t = 0$ es el cuarto momento central, el cual es:

$$\mu_4 = \left. \frac{d^4 m_{X-\mu}(t)}{dt^4} \right|_{t=0} = 3\sigma^4 + \frac{360t^2\sigma^6}{8 \cdot 3!} + \dots \Big|_{t=0} = 3\sigma^4$$

De acuerdo con lo anterior, para cualquier distribución normal el coeficiente de asimetría es $\alpha_3(X) = 0$, mientras que la curtosis relativa es $\alpha_4(X) = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$. Para momentos alrededor del cero, puede determinarse la función generadora de momentos centrales o viceversa. Dado que

$$m_{X-\mu}(t) = E \left[e^{t(X-\mu)} \right] = e^{-\mu t} E \left[e^{tX} \right] = e^{-\mu t} m_X(t),$$

para una distribución normal

$$e^{-\mu t} m_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

y

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

La probabilidad de que una variable aleatoria normalmente distribuida X sea menor o igual a un valor específico, x está dada por **función de distribución acumulativa**

$$P(X \leq x) = F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Sea Z una variable aleatoria definida por la siguiente relación:

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

en donde μ y σ son la media y la desviación estándar de X , respectivamente. De acuerdo con lo anterior, Z es una variable aleatoria estandarizada con media cero y desviación estándar uno. Así,

$$P(X \leq x) = P[X \leq (x - \mu)/\sigma] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

El integrando junto con el factor $1/\sqrt{2\pi}$ es la **función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria normal estandarizada Z**. De donde

$$F_X(x; \mu, \sigma) = F_Z(z; 0, 1)$$

Para cualquier valor específico de z , el correspondiente valor en la tabla es la probabilidad de que la variable aleatoria normal estándar Z sea menor o igual a z ; esto es

$$P(Z \leq z) = F_Z(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

La notación $X \sim N(\mu, \sigma)$ denotará que la variable X se encuentra distribuida normalmente con media μ y desviación estándar σ .

Determinaremos la probabilidad de que un valor de X se encuentre entre a y b , si $X \sim N(\mu, \sigma)$. Por definición:

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

pero, mediante el empleo de $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x (x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu$ se tiene:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}; 0, 1\right) - F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}; 0, 1\right)$$

Teorema 1.1. Sea X una variable aleatoria binomial con media np y desviación estándar $\sqrt{np(1-p)}$. La distribución de la variable aleatoria tiende a la normal

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

estándar conforme el número de ensayos independientes $n \rightarrow \infty$.

Demostración.- La demostración que aquí se presenta se basa en el hecho de que una función generadora de momentos define, de manera única, a una distribución. Se demostrará que la función generadora de momentos de Y tiende a una distribución normal conforme $n \rightarrow \infty$. X es una variable aleatoria binomial:

$$m_X(t) = [(1-p) + pe^t]^n$$

Entonces:

$$m_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left[e^{\frac{t(X-np)}{\sqrt{np(1-p)}}}\right] = e^{\frac{np t}{\sqrt{np(1-p)}}} \cdot E\left[e^{\frac{tX}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]$$

donde $E\left[e^{\frac{tX}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]$ es la función generadora de momentos de X con argumento $\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}$. De esta forma se tiene:

$$m_Y(t) = e^{\frac{-np t}{\sqrt{np(1-p)}}} \left[(1-p) + pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]^n;$$

pero:

$$e^{-\frac{np t}{\sqrt{np(1-p)}}} = \left(e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^n$$

y:

$$m_Y(t) = \left[(1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}} - \frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]^n = \left[(1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{\frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]^n.$$

En la última expresión, al expandir ambas funciones exponenciales en una serie de potencias, se tiene:

$$\begin{aligned}(1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} &= (1-p) - \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)p^2t^2}{2np(1-p)} + \text{términos en } (-1)^k \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, k=3,4,\dots \\ &= (1-p) - \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{pt^2}{2n} + \text{términos en } (-1)^k \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, k=3,4,\dots\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}pe^{-\frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}}} &= p + \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)pt^2}{2np(1-p)} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, k=3,4,\dots \\ &= p + \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)t^2}{2n} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, k=3,4,\dots\end{aligned}$$

Al sustituir los resultados anteriores en $m_Y(t)$ y agrupar términos,

$$m_Y(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2} \right]^n, k=3,4,\dots$$

Dado que todos los términos que contiene a $(1/n)^{k/2}$, $k=3,4,\dots$, tienen exponentes mayores que uno, puede factorizarse el término $1/n$. De esta forma se tiene que:

$$m_Y(t) = \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{t^2}{2} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{(k-2)/2} \right) \right]^n, k=3,4,\dots$$

Por definición:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u}{n} \right)^n = e^u$$

entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, la última expresión para $m_Y(t)$ es idéntica a esta forma, con u representando a todo lo que se encuentra entre paréntesis de esta expresión. Pero conforme $n \rightarrow \infty$, todos los términos de u , excepto el primero, tienen un valor de cero, dado que todos tienen potencias positivas de n en sus denominadores. De acuerdo con lo anterior.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_Y(t) = e^{t^2/2},$$

que es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar.

La aproximación del teorema anterior es adecuada tanto como $np > 5$ cuando $p \leq 1/2$, o cuando $n(1-p) > 5$ para $p > 1/2$. Esto es

$$P(a \leq X_B \leq b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_N \leq \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

en donde Z_N es $N(0, 1)$. Como también

$$P(X_B = x) \approx P\left(\frac{x - np - 1/2}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_N \leq \frac{x - np + 1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

por lo que se puede modificar la expresión de desigualdad de la siguiente manera:

$$P(a \leq X_B \leq b) = P\left(\frac{a - np - 0.5}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_N \leq \frac{b - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

1.2. La distribución uniforme

Definición 1.2. Se dice que una variable aleatoria X está distribuida uniformemente sobre el intervalo (a, b) si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

La función de distribución acumulativa se determina de manera fácil y está dada por

$$P(X \leq x) = F_{x;a,b} = \frac{1}{b-a} \int_a^x dt = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

Se sigue entonces que para cualquier subintervalo (a_1, b_1) interior a (a, b) :

$$P(a_1 \leq X \leq b_1) = F(b_1; a, b) - F(a_1; a, b) = \frac{b_1 - a_1}{b - a}.$$

Este resultado ilustra que la probabilidad de que X tome valores del subintervalo (a_1, b_1) , es $\frac{1}{b-a}$ por la longitud del subintervalo y de esta forma, igual a la probabilidad de que X tome un valor en cualquier otro subintervalo de la misma longitud.

El **valor esperado** de una variable aleatoria distribuida de manera uniforme es

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \frac{a+b}{2}.$$

Para obtener los momentos superiores de X , es más fácil trabajar con la variable aleatoria $Y = X - \frac{a+b}{2}$, que desplaza la media a cero, dado que $E(Y) = E(X) - \frac{a+b}{2}$. De esta forma:

$$f(y; \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad -\frac{\theta}{2} \leq y \leq \frac{\theta}{2},$$

en donde $\theta = b - a$. De acuerdo con lo anterior, el r -ésimo momento central de Y es igual al r -ésimo momento central alrededor del cero, esto es:

$$\mu_r(Y) = \mu'_r(Y) = \theta^{-1} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} y^r \, dy = \left(\frac{1}{\theta} \right) \frac{y^{r+1}}{r+1} \Big|_{-\theta/2}^{\theta/2} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es impar} \\ \theta^r / [(r+1)2^r] & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$$

Dado que ni la varianza ni los factores de forma se ven afectados por el cambio de localización, la varianza, el coeficiente de asimetría y la curtosis relativa de la variable aleatoria distribuida uniformemente se encuentran a partir de $\begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es impar} \\ \theta^r / [(r+1)2^r] & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$ y están determinadas por:

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\alpha_3(X) = 0$$

$$\alpha_4(X) = \frac{\frac{(b-a)^4}{80}}{\left[\frac{(b-a)^2}{12}\right]^2} = \frac{9}{5}.$$

Puede emplearse $f(y; \theta) = \frac{1}{\theta}$, $-\frac{\theta}{2} \leq y \leq \frac{\theta}{2}$, para determinar la **desviación media** de la siguiente manera:

$$E|Y| = \theta^{-1} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} y dy = 2\theta^{-1} \int_0^{\theta/2} y dy = \frac{\theta}{4} = \frac{b-a}{4}.$$

No tiene moda y su **mediana** es igual a la media. Los valores cuantiles x_q , correspondientes a la proporción acumulativa q , son de manera tal que:

$$F(x_q, a, b) = q$$

Los que por $\begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$ son:

$$x_q = a + (b-a)q.$$

1.3. La distribución beta

Definición 1.3. Se dice que una variable aleatoria X posee una distribución beta si su función de densidad está dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1, \quad \alpha, \beta > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Recordemos que $\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du$, $n > 0$.

Si tanto α como β son menores que uno, la distribución beta tiene un perfil en forma de U . Si $\alpha < 1$ y $\beta \geq 1$, la distribución tiene un perfil de J transpuesta, y si $\beta < 1$ y $\alpha \geq 1$, el perfil es una J . Finalmente cuando $\alpha = \beta$ la distribución es simétrica. Nótese que si en la definición se reemplaza por $x-1$, se obtiene la siguiente relación de simetría:

$$f(1-x; \beta, \alpha) = f(x; \alpha, \beta)$$

El nombre de esta distribución proviene de su asociación con la función beta que se encuentra definida por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Puede demostrarse que las funciones beta y gama se encuentran relacionadas por la expresión

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Mediante el empleo de estas últimas fórmulas, es obvio que la definición es una función de densidad de probabilidad. Esto es:

$$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) = 1,$$

y puesto que $f(x; \alpha, \beta)$ es no negativa, entonces la definición es una función de densidad de probabilidad.

La **función de distribución acumulativa** se encuentra definida por:

Definición 1.4.

$$F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt & 0 < x < 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

La integral que aparece es la función beta incompleta:

$$B_x(\alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt.$$

De esta forma, la función de distribución beta puede expresarse como un cociente de funciones beta incompletas,

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{B_x(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt}{\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx} = I_x(\alpha, \beta), \quad 0 < x < 1,$$

Con el fin de encontrar los valores cuantiles correspondientes a puntos de alto porcentaje, considérese lo siguiente:

$$P(X \leq x) = P(1 - X \geq 1 - x) = 1 - P(1 - X \leq 1 - x);$$

entonces, por la relación de simetría $f(1 - x; \beta, \alpha) = f(x; \alpha, \beta)$:

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - F(1 - x; \beta, \alpha)$$

o

$$I_x(\alpha, \beta) = 1 - I_{1-x}(\beta, \alpha).$$

Obtenemos los momentos de la variable aleatoria beta como sigue.

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+r-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha + r, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + r)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + r)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + r)} \end{aligned}$$

Como resultado,

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Y

$$Var(x) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Al seguir este procedimiento y después de efectuar el álgebra necesaria, el **el coeficiente de asimetría** y la **curtosis relativa** para la distribución beta están dadas por:

$$\alpha_3(X) = \frac{2(\beta + \alpha)\sqrt{\alpha + \beta + 1}}{\sqrt{\alpha\beta}(\alpha + \beta + 2)}$$

Y

$$\alpha_4(X) = \frac{3(\alpha + \beta + 1) [2(\alpha + \beta)^2\alpha\beta(\alpha + \beta - 6)]}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)}$$

Puede demostrarse que si la suma de los parámetros que determinan el perfil de la distribución beta es, de manera relativa, grande, la función de distribución acumulativa beta se puede aproximar de manera adecuada por la diferencia de dos funciones de distribución normal estándar. Esto es:

$$F(x; \alpha, \beta) \approx F_N(z_u; 0, 1) - F_N(z_l; 0, 1),$$

En donde:

$$z_u = \frac{[\beta] - 0.5 - (\alpha + \beta - 1)(1 - x)}{[x(\alpha + \beta - 1)(1 - x)]^{1/2}},$$

$$z_l = -\frac{(\alpha + \beta - 1)(1 - x) + 0.5}{[x(\alpha + \beta - 1)(1 - x)]^{1/2}},$$

donde $[\beta]$ denota el entero más grande que no excede a β .

1.4. La distribución gama

Supóngase que una pieza metálica se encuentra sometida a cierta fuerza, de manera que se romperá después de aplicar un número específico de ciclos de fuerza. Si los ciclos ocurren de manera independiente y a una frecuencia promedio, entonces el tiempo que debe transcurrir antes de que el material se rompa es una variable aleatoria que cumple con la distribución gama.

Definición 1.5. Se dice que la variable aleatoria X tiene una distribución gama si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} & x > 0, \alpha, \theta > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro resultado.} \end{cases}$$

en donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gama.

Demostraremos que la función dada es función de densidad de probabilidad. Para hacerlo, considere un cambio de variable de integración, tal que $u = x/\theta$, $x = \theta u$ y $dx = \theta du$; entonces:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^\infty (\theta u)^{\alpha-1} e^{-u} \theta du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du = 1.$$

Dado que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$.

Con este procedimiento similar se demuestra que el r -ésimo momento alrededor del cero es:

$$\mu'_r = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+r-1} e^{-x/\theta} dx = \frac{\theta^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^\infty u^{\alpha+r-1} e^{-u} du = \frac{\theta^r \Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$$

Se sigue, por tanto que:

$$E(X) = \alpha\theta.$$

$$Var(X) = \alpha\theta^2.$$

Ademas el **coeficiente de asimetría** es:

$$\alpha_3(X) = 2\sqrt{\alpha}.$$

Y la **curtosis relativa** está dada por:

$$\alpha_4(X) = 3 \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right).$$

Para valores grandes de α la distribución gama puede aproximarse, en algún grado, por una distribución normal. Esto es, la variable aleatoria

$$Z = \frac{X - \alpha\theta}{\theta\sqrt{\alpha}}$$

es, de manera aproximada, igual a la normal estándar para valores grandes de α .

La **función generadora de momentos** para la variable aleatoria gama X está dada por:

$$E[e^{tX}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\frac{1-\theta t}{\theta}x} dx.$$

Sea $u = \frac{(1-\theta t)x}{\theta}$, $x = \frac{u\theta}{1-\theta t}$ y $dx = \left[\frac{\theta}{1-\theta t} \right] du$, entonces:

$$\begin{aligned} E[e^{tX}] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}\theta^{\alpha-1}}{(1-\theta t)^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{\theta}{1-\theta t} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\theta t)^\alpha} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \\ &= (1-\theta t)^{-\alpha}, \quad 0 \leq t < \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

La **función de distribución acumulativa** se determina por la siguiente expresión:

$$F(x; \alpha, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\theta}} dt, \quad x > 0.$$

Si se efectúa el cambio de variable $u = \frac{t}{\theta}$ de manera tal que $t = \theta u$ y $dt = \theta du$, entonces la función de distribución acumulativa toma la siguiente forma:

$$F(x; \alpha, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^{x/\theta} (\theta u)^{\alpha-1} e^{-u} du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

La integral $\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1} e^{-u} du$ se conoce como la función gama incompleta y se denota generalmente por $\gamma(x/\theta; \alpha)$. De acuerdo con lo anterior la función gama de distribución acumulativa se escribe como:

$$P(X \leq x) = F(x; \alpha, \theta) = \frac{\gamma(x/\theta; \alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Cuando el parámetro de forma α es igual a 1, la distribución de Erlang (gama) se reduce a lo que se conoce como la distribución exponencial negativa.

También se tiene la equivalencia de

$$I(u, p) = F(x; \alpha, \theta)$$

donde $u = \frac{x}{\theta}$ y $p = \alpha - 1$. Debe notarse que si el parámetro de forma α es un entero positivo, $I(u, p) = F(x; \alpha, \theta)$ se puede expresar, en forma cerrada:

$$F(x; \alpha, \theta) = 1 - \left[1 + \frac{x}{\theta} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{\theta} \right)^2 + \dots + \frac{1}{(\alpha-1)!} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\alpha-1} \right] e^{-x/\theta}$$

Cuando α es entero positivo, la distribución gama también se conoce como **distribución de Erlang**. Existe una asociación entre los modelos de probabilidad de Poisson y Erlang. Esto es, la probabilidad de que ocurra a lo más $\alpha - 1$ eventos de Poisson en un tiempo x a una frecuencia constante $1/\theta$ se desprende de

$P(X \leq x) = F(x; \lambda) = \sum_{i=0}^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$ y está dada por:

$$F_P(\alpha - 1; x/\theta) = \left[1 + \frac{x}{\theta} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{\theta} \right)^2 + \dots + \frac{1}{(\alpha-1)!} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\alpha-1} \right] e^{-x/\theta}.$$

Por otro lado, si se supone que el tiempo de espera sigue el modelo de Erlang, la probabilidad de que el tiempo de espera hasta que ocurra el α -ésimo evento exceda un lapso x específico, está determinado por:

$$\begin{aligned}
P(X > x) &= 1 - F_P(x; \alpha, \theta) \\
&= 1 - \left\{ 1 - \left[1 + \frac{x}{\theta} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{\theta} \right)^2 + \dots + \frac{1}{(\alpha-1)!} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\alpha-1} \right] e^{-x/\theta} \right\} \\
&= \left[1 + \frac{x}{\theta} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{\theta} \right)^2 + \dots + \frac{1}{(\alpha-1)!} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\alpha-1} \right] e^{-x/\theta} \\
&= F_P(\alpha-1; x/\theta)
\end{aligned}$$

Cuando el parámetro de forma α es igual a uno, la distribución de Erlang (gama) se reduce a lo que se conoce como la **distribución exponencial negativa**. Esta distribución se emplea de manera extensa para representar lapsos aleatorios de tiempo. Nótese que la variable aleatoria de una distribución exponencial negativa puede pensarse como el lapso que transcurre hasta el primer evento de Poisson. De acuerdo con lo anterior, la variable de Erlang es la suma de variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente.

Otro caso especial del modelo de probabilidad gama es la distribución chi-cuadrado. Si se reemplazo en en

$$f(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} & x > 0, \alpha, \theta > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro resultado.} \end{cases}$$

el parámetro de forma α con $v/2$ y el parámetro de escala θ con 2, el resultado es la **función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria chi-cuadrado** y se determina por:

$$f(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(v/2)2^{v/2}} x^{v/2-1} e^{-x/2} & x > 0, \alpha, \theta > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro resultado.} \end{cases}$$

La distribución chi-cuadrado se encuentra caracterizada por un solo parámetro v , que recibe el nombre de grados de libertad. Su notación es:

$$X \sim \chi_v^2$$

La **función de distribución acumulativa** está dada por:

$$P(X \leq x) = \frac{1}{\Gamma(v/2)2^{v/2}} \int_0^x t^{v/2-1} e^{-t/2} dt, \quad x > 0.$$

Los **cuantiles** $x_{1-\alpha, v}$ es

$$P(X \leq x_{1-\alpha, v}) = \int_0^{x_{1-\alpha, v}} f(x; v) dx = 1 - \alpha.$$

Los momentos de distribución chi-cuadrado se obtienen a partir de $E(X) = \alpha\theta$, $Var(X) = \alpha\theta^2$, $\alpha_3(X) = 2/\sqrt{\alpha}$ y $\alpha_4(X) = 3(1 + 2/\alpha)$, dado por:

$$\begin{aligned}
E(X) &= v \\
Var(X) &= 2v \\
\alpha_3(X) &= \frac{4}{\sqrt{2v}} \\
\alpha_4(X) &= 3 \left(1 + \frac{4}{v} \right)
\end{aligned}$$

Análogamente y a partir de $E(e^{tX}) = (1 - \theta t)^{-\alpha}$ la **función generadora de momentos** para la distribución chi-cuadrado es:

$$m_X(t) = (1 - 2t)^{-v/2}, \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}.$$

Su varianza es dos veces el valor de su media. Presenta un sesgo positivo y un pico mayor que el de una distribución normal, pero el coeficiente de asimetría tiende a cero y a una curtosis relativa igual a tres conforme a v tiende al infinito.

1.5. La distribución de Weibull

El esfuerzo al que se someten los materiales pueden modelarse de manera adecuada mediante el empleo de esta distribución. En los últimos 25 años esta distribución se empleó como modelo para situaciones del tipo tiempo-falla y con el objetivo de lograr una amplia variedad de componentes mecánicos y eléctricos.

Definición 1.6. Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución de Weibull si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\theta)^\alpha} & x > 0, \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro resultado.} \end{cases}$$

Se puede introducir un parámetro adicional al reemplazar la variable aleatoria de Weibull X por $X - a$ en donde a es un parámetro de localización que representa un valor umbral o tiempo de garantía.

La **función de distribución acumulativa de Weibull** es:

$$F(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-(t/\theta)^\alpha} dt$$

puede obtenerse en forma cerrada mediante la evaluación directa de la integral anterior. Esto es:

$$F(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \left(-\frac{\theta^\alpha}{\alpha} \right) e^{-(t/\theta)^\alpha} \Big|_0^x = 1 - e^{-(x/\theta)^\alpha}, \quad x \geq 0.$$

De esta fórmula mencionada, el **valor cuantil** x_q es:

$$1 - e^{-(x_q/\theta)^\alpha} = q \quad \Rightarrow \quad x_q = -\theta[\ln(1 - q)]^{1/\alpha} = \theta \left[\ln \left(\frac{1}{1 - q} \right) \right]^{1/\alpha}$$

En particular, la **mediana de una variable aleatoria de Weibull** es:

$$x_{0.5}\theta[\ln(2)]^{1/\alpha}$$

Los momentos y los factores de una variable aleatoria de Weibull se encuentran primero al determinar el r -ésimo momento central alrededor de cero:

$$u'_r = E(X^r) = \int_0^\infty x^r f(x; \alpha, \theta) dx = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+r-1} e^{-(x/\theta)^\alpha} dx$$

Luego sea $u = (x/\theta)^\alpha$; entonces $x = \theta u^{1/\alpha}$ y $dx = (\theta/\alpha) u^{1/\alpha-1} du$. El resultado es:

$$u'_r = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \int_0^\infty (\theta u^{1/\alpha})^{\alpha+r-1} e^{-u} \frac{\theta}{\alpha} u^{1/\alpha-1} du = \theta^r \int_0^\infty u^{r/\alpha} e^{-u} du = \theta^r \Gamma \left(1 + \frac{r}{\alpha} \right)$$

Por lo que la **media** es:

$$E(X) = \theta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

Y la **varianza** es:

$$\text{Var}(X) = \theta^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]$$

La distribución Weibull puede aproximarse, de manera adecuada, por una distribución normal cada que el factor de forma α se encuentre en 3.6 y 5.83.

Cuando el parámetro de forma es igual a uno, la distribución de Weibull (al igual que la gama), se reduce a la distribución exponencial negativa. Cuando $\alpha = 2$ y el parámetro de escala θ se reemplaza por $\sqrt{2}\sigma$, la función de densidad de Weibull se reduce a

$$f(x; \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x > 0,$$

que es la función de densidad de probabilidad de lo que se conoce como **distribución de Rayleigh**.

1.6. La distribución exponencial negativa

Es un caso especial de la distribución de Gama (Erland). La variable exponencial es el tiempo que transcurre hasta que se da el primer evento de Poisson. Es decir, la distribución exponencial se puede modelar el lapso entre dos eventos consecutivos de Poisson que ocurren de manera independiente y a una frecuencia constante. Se emplea al modelar problemas del tipo tiempo-falla y como modelo para el intervalo en problemas de líneas de espera. Está distribución no tiene memoria. Es decir, la probabilidad de ocurrencia de eventos presentes o futuros no depende de lo que hayan ocurrido en el pasado. De esta forma, la probabilidad de que una unidad falle en un lapso específico depende nada más de la duración de este, no del tiempo en que la unidad ha estado en operación.

Definición 1.7. Si una variable aleatoria X tiene una distribución exponencial, su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & x > 0, \theta > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

La distribución exponencial se caracteriza por un parámetro θ , que representa el lapso promedio de tiempo entre dos eventos independientes de Poisson. En contexto de fiabilidad recibe el nombre de promedio entre fallas y $1/\theta$ es la frecuencia de falla.

La **función acumulativa** se obtiene directamente de los modelos de Weibull o de Erland,

$$P(X \leq x) = F(x; \theta) = 1 - e^{-x/\theta}$$

Las expresiones para los valores cuantiles, momentos y factores de forma, se obtienen de la distribución Weibull con $\alpha = 1$. Esto es:

$$\begin{aligned} E(X) &= \theta \\ \text{Var}(X) &= \theta^2 \\ \alpha_3(X) &= 2 \\ \alpha_4(X) &= 9. \end{aligned}$$

Definición 1.8. Sea T una variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un sistema y sea $f(t)$ la función de densidad de probabilidad de T . La función de confiabilidad del sistema a tiempo t , $R(t)$, es la probabilidad de que el lapso de duración del sistema sea mayor que un tiempo t dado. De acuerdo con lo anterior,

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t), \quad t > 0.$$

Otra cantidad muy útil para seleccionar una función de densidad de probabilidad para el lapso de vida medio de una unidad (o sistema) es la frecuencia de falla o función de riesgo, que se define de la siguiente forma:

Definición 1.9. Sean $f(t)$ y $R(t)$ las funciones de densidad de probabilidad y de confiabilidad, respectivamente, de una unidad en un tiempo dado t . La frecuencia de falla $h(t)$ se define como la proporción de unidades que fallan en el intervalo $(t, t + dt)$ con respecto a las que siguen funcionando a tiempo t , y está determinada por:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Si se conoce la frecuencia de falla, es posible determinar la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria. Dado que $R(t) = 1 - F(t)$, mediante diferenciación con respecto a t , se tiene que $R'(t) = -F'(t)$, pero $F(t) = f(t)$. Como resultado se tiene que la frecuencia de falla puede expresarse como:

$$h(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}.$$

Integrando ambos miembros desde 0 hasta t , se tiene:

$$\int_0^t h(x) dx = -\int_0^t [R'(x)R(x)] dx = -\ln[R(t)] + \ln[R(0)] = -\ln[R(t)],$$

donde x es una variable muda de integración. Dado que:

$$-\ln [R(t)] = \int_0^t h(x) dx,$$

se tiene

$$R(t) = e^{\left[-\int_0^t h(x) dx\right]}.$$

Mediante el empleo de $h(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)}$, la función de densidad de probabilidad es:

$$f(t) = h(t)e^{\left[-\int_0^t h(x) dx\right]}.$$

Si la frecuencia de falla $\frac{1}{\theta}$, es constante, la función de densidad de probabilidad del tiempo de vida medio es la exponencial negativa. Esto es, si $h(t) = \frac{1}{\theta}$, entonces de la anterior ecuación se tiene:

$$f(t) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\int_0^t \frac{1}{\theta} dx} = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}$$

Dado que la función de confiabilidad a tiempo t para un tiempo de vida medio distribuido exponencialmente es:

$$R(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad t > 0.$$

La frecuencia de falla está dada por:

$$h(t) = \frac{\frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}}{e^{-\frac{t}{\theta}}} = \frac{1}{\theta}, \quad t > 0$$

1.7. La distribución de una función de variable aleatoria

Se examinará una técnica para determinar la distribución de una función de variable aleatoria, considerando el caso de una variable aleatoria continua. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$, y sea $Y = g(X)$ una función definida de X . Supóngase que es posible resolver $y = g(x)$ para x obteniendo de esta forma la función inversa $x = g^{-1}(y)$. Si $g(x)$ y $g^{-1}(y)$ son funciones univalueadas de x e y , respectivamente, se dice que la transformación es uno a uno. Esto es, a cada punto en el espacio muestral de X le corresponde un punto único del espacio muestral de Y y viceversa. Si se supone la existencia de una transformación uno a uno y además que $y = g(x)$ es una creciente y diferenciable en x , se puede determinar la función de densidad de probabilidad de X en la siguiente forma:

Debido a la existencia de una transformación uno a uno:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[g(X) \leq y] = P[X \leq g^{-1}(y)].$$

Entonces:

$$F_Y(y) = F_X[g^{-1}(y)].$$

Al establecer la diferencia con respecto a y y mediante el empleo de la regla de la cadena se tiene:

$$f_Y(y) = \frac{dF_X[g^{-1}(y)]}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f_X[g^{-1}(y)] \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Si $g(x)$ es una función decreciente de x , el resultado que se obtiene es el mismo con excepción de que la derivada de una función decreciente es negativa. De esta manera se puede formular la siguiente proposición:

Teorema 1.2. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ y definase $Y = g(X)$. Si $y = g(x)$ y $x = g^{-1}(y)$ son funciones univaluadas, continuas y diferenciables y si $y = g(x)$ es una función creciente o decreciente de x , la función de densidad de probabilidad de Y está determinada por:

$$f_Y(y) = f_X \left[g^{-1}(y) \right] \left| \frac{dx}{dy} \right|,$$

en donde la cantidad $J = |dx/dy|$ recibe el nombre de Jacobiano de la transformación.