1

Algunas aplicaciones de la integración

1.1. Valor medio de una función

Definición 1.1 (Definición del valor medio de una función en un intervarlo) *Si f es integrable en un intervalo $[a, b]$, definimos $A(f)$, el valor medio de f en $[a, b]$, por la siguiente fórmula*

$$A(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Podemos ahora demostrar que ésta la fórmula es en realidad una extensión del concepto de media aritmética. Sea f una función escalonada que es constante en cada uno de los subintervalos de $[a, b]$, obtenidos al dividirlo en n partes iguales. En particular, sea $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y supongamos que $f(x) = f(x_k)$, si $x_{x-1} < x < x_k$. Entonces será $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$, con lo que se tiene

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Así pues, para funciones escalonadas, el promedio $A(f)$ coincide con la media aritmética de los valores $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ tomados en los intervalos en los que la función es constante.

Definición 1.2 (Definición del valor medio de una función en un intervarlo)

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x) f(x)\, dx}{f_a^b w(x)\, dx}$$

Definición 1.3 (Primer momento al rededor de 0)

$$\overline{x} = \frac{\int_0^b x p(x)\, dx}{\int_0^a p(x)\, dx} \text{ para } p \text{ llamada densidad de masa.}$$

Definición 1.4 (Segundo momento al rededor de 0 o momento de inercia)

$$r^2 = \frac{\int_0^b x^2 p(x)\, dx}{\int_0^a p(x)\, dx} \text{ para } p \text{ llamada densidad de masa.}$$

1.2. Ejercicios

1. $f(x) = x^2, \quad a \le x \le b.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+2ba+a^2}{3}.$$

2. $f(x) = x^2 + x^3, \quad 0 \le x \le 1.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (x^2+x^3)\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

3. $f(x) = x^{1/2}, \quad 0 \le x \le 4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{4-0}\int_0^4 x^{1/2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x^{3/2}}{3}\bigg|_0^4 = \frac{4}{3}.$$

4. $f(x) = x^{1/3}, \quad 1 \le x \le 8.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{8-1}\int_1^8 x^{1/3}\,dx = \frac{1}{7}\cdot\frac{3x^{4/3}}{4}\bigg|_1^8 = \frac{48-3}{7} = \frac{45}{28}.$$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot(1-\cos\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

6. $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2+\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot(\operatorname{sen}\pi/2+\operatorname{sen}\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \le x \le \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{0\cdot 2}^{\frac{\pi}{2}\cdot 2} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{\pi}(1-\cos\pi) = \frac{2}{\pi}$$

.

8. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x \; dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(2x) \; dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \; dx = \frac{1}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

9. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \le x \le \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \; dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) \; dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\pi = \frac{1}{2}.$$

10. $f(x) = \cos^2 x, \quad 0 \le x \le pi.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x \; dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \; dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) = \frac{1}{2}.$$

11. **(a)** Si $f(x) = x^2$ para $0 \le x \le a$, hallar un número c que satisfaga $0 < x < a$ y tal que $f(c)$ sea igual al promedio de f en $[0, a]$.

Respuesta.-

$$\frac{1}{a}\int_0^a x^2 \; dx = c^2 \Longrightarrow \frac{1}{a} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = c^2 \Longrightarrow c = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

(b) Resolver la parte (a) si $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo cualquiera.

Respuesta.- Generalizando el anterior ejercicio tenemos,

$$c^n = \frac{1}{a}\int_0^a x^n \; dx \Longrightarrow c = \frac{a}{(n+1)^{1/n}}.$$

12. Sea $f(x) = x^2$ para $0 \le x \le 1$. El valor medio de f en $[0, 1]$ es $\frac{1}{3}$- Hallar una función peso no negativa w tal que la media ponderada de f en $[0, 1]$, definida en 2.19 sea:

Respuesta.- Sabiendo que,

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x) f(x) \; dx}{\int_a^b w(x) \; dx}$$

entonces

(a) $\dfrac{1}{2}.$

Será $w(x) = x$ para que $A(f) = \dfrac{1}{2}$. Como se verá a continuación.

$$A(f) = \frac{\int_a^b x \cdot x^2 \; dx}{\int_0^1 x \; dx} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\dfrac{3}{5}$.

Sea $w(x) = x^2$, entonces

$$A(f) = \frac{\int_a^b x^2 \cdot x^2}{\int_0^1 x^2\, dx} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}.$$

(c) $\dfrac{2}{3}$.

Sea $w(x) = x^3$, entonces

$$A(f) = \frac{\int_a^b x^3 \cdot x^2}{\int_0^1 x^3\, dx} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

13. Sea $A(f)$ el promedio de f en $[a, b]$. Demuestre que el promedio tiene las siguientes propiedades:

(a) Propiedad aditiva: $A(f + g) = A(f) + A(g)$.

Demostración.- Sea

$$A(f+g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) + g(x)\, dx$$

entonces por la el teorema 1.17 (aditividad respecto al intervalo de integración) se tiene,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\, dx = A(f) + A(g)$$

así queda demostrado la propiedad aditiva del valor medio de una función.

(b) Propiedad homogénea: $A(cf) = cA(f)$ si c es algún número real.

Demostración.- Sea

$$A(cf) = \frac{1}{b-a}\int_a^b c[f(x)]\, dx$$

entonces por el teorema 1.16 (linealidad respecto al integrando) se tiene,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b c[f(x)]\, dx = c\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right] = cA(f).$$

(c) Propiedad monótona: $A(f) \leq A(g)$ si $f \leq g$ en $[a, b]$.

Demostración.- dado que $f(x) \leq g(x)$ entonces por el teorema de comparación (teorema 1.20) obtenemos que,

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx \implies \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\, dx \implies A(f) \leq A(g).$$

14. ¿Cuáles de la propiedades del problema 13 son validas para las medias ponderadas definidas en 2.19?.

Respuesta.- Para $A(f+g)$ tenemos,

$$\begin{aligned} A(f+g) &= \frac{\int_a^b w(x)\left[f(x)+g(x)\right]\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ &= \frac{\int_a^b w(x)f(x)\, dx + \int_a^b w(x)g(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ &= \frac{\int_a^b w(x)f(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} + \frac{\int_a^b w(x)g(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ &= A(f)+A(g) \end{aligned}$$

Para $A(cf)$ tenemos,

$$\begin{aligned} A(cf) &= \frac{\int_a^b cf(x)w(x)\, dx}{int_a^b w(x)\, dx} \\ &= c\cdot\frac{\int_a^b w(x)f(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ &= cA(f) \end{aligned}$$

Por último sea $f \leq q$ en $[a,b]$, entonces ya que w es no negativo tenemos, $w(x)f(x) \leq w(x)g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Se sigue por la propiedad monótona de la integral que,

$$\int_a^b w(x)f(x)\, dx \leq \int_a^b w(x)g(x)\, dx$$

ya que w es no negativo, $\int_a^b w(x)\, dx$ también es no negativo y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\int_a^b w(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} &\leq \frac{\int_a^b w(x)g(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx} \\ A(f) &\leq A(g) \end{aligned}$$

15. Designamos por $A_a^b(f)$ el promedio de f en el intervalo $[a,b]$.

(a) Si $a < c < b$, demostrar que existe un número t que satisface $0 < t < 1$ tal que $A_a^b(f) = tA_a^c(f) + (1-t)A_c^b(f)$. Así pues, $A_a^b(f)$ es una media aritmética ponderada de $A_a^c(f)$ y $A_c^b(f)$.

Demostración.- Sea

$$\frac{c-a}{b-a}$$

entonces, ya que $a < c < b$, tenemos $0 < t < 1$, de donde,

$$1 - t = 1 - \frac{a-c}{a-b} = \frac{c-b}{a-b}$$

así,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c-a}{b-a}\cdot\frac{1}{c-a}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{1}{b-c}\int_c^b f(x)\,dx\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^c f(x)\,dx - \frac{1}{a-b}\int_c^b f(x)\,dx\\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\right]\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\\
&= A_a^b(f)
\end{aligned}
$$

(b) Demostrar que el resultado de la parte (a) también es válido para medias ponderadas como las definidas por 2.19.

Demostración.- Sea

$$t = \frac{\int_a^c w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

entonces,

$$1-t = \frac{\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^c w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} = \frac{\int_c^b w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

por lo tanto, $0 < t < 1$ ya que $a < c < b$ y w es no negativo. Luego,

$$
\begin{aligned}
t\cdot A_a^c(f) + (1+t)\cdot A_c^b(f) &= \frac{\int_a^c w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\cdot\frac{\int_a^c w(x)f(x)\,dx}{\int_a^c w(x)\,dx} + \frac{\int_c^b w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\cdot\frac{\int_c^b w(x)f(x)\,dx}{\int_c^b w(x)\,dx}\\
&= \frac{\int_a^c w(x)f(x)\,dx + \int_c^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\\
&= \frac{\int_a^b w(x)\,dx f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\\
&= A_a^b(f)
\end{aligned}
$$

En cada uno de los ejercicios del 16 al 21 se hace referencia a una varilla de longitud L situada en el eje x con un extremo en el origen. Con la densidad de masa ρ que se cita en cada caso, calcular (a) el centro de masa de la varilla, (b) el momentos de inercia en torno al origen, y (c) el radio de giro.

16. $\rho(x) = 1$ para $0 \neq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\overline{x} = \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} = \frac{\int_0^L x\,dx}{\int_0^L \,dx} = \frac{\frac{L^2}{2}}{L} = \frac{L}{2}.$$

El momento de inercia es,

$$\int_0^L x^2\rho(x)\;dx = \int_0^L x^2\;dx = \frac{L^3}{3}.$$

El radio de giro es,

$$r^2 = \frac{\int_0^L x^2\;dx}{\int_0^L \rho(x)\;dx} = \frac{\frac{L^3}{3}}{L} = \frac{L^2}{3}$$

$$r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

17. $\rho(x) = 1$ para $0 \leq x \leq \dfrac{L}{2}$, $\rho(x) = 2$ para $\dfrac{L}{2} < x \leq< L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\;dx}{\int_0^L \rho(x)\;dx} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2x\;dx}{\int_0^{\frac{L}{2}}\;dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2\;dx} \\
&= \frac{\frac{L^2}{8}}{\frac{3L^2}{4}}\,\frac{L}{2} + L \\
&= \frac{7L}{12}.
\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned}
\int_0^L x^2\rho(x)\;dx &= \int_0^{\frac{L}{2}} x^2\;dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2x^2\;dx \\
&= \frac{L^3}{24} + \frac{2L^3}{3} - \frac{L^3}{12} \\
&= \frac{5L^3}{8}.
\end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\;dx}{\int_0^L \rho(x)\;dx} \\
&= \frac{\frac{5L^3}{8}}{\frac{3L}{2}} \\
&= \frac{5L^2}{12} \\
&= \frac{\sqrt{5}L}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

18. $\rho(x) = x$ para $0 \leq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^L x^2\,dx}{\int_0^L x\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^3}{3}}{\frac{2L}{3}}. \\
&= \frac{2L}{3}.
\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned}
\int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^L x^3\,dx \\
&= \frac{L^4}{4}.
\end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^2}{2}} \\
&= \frac{L^2}{2}
\end{aligned}$$

19. $\rho(x) = x$ para $0 \leq x \leq \dfrac{L}{2}$, $\rho(x) = \dfrac{L}{2}$ para $\dfrac{L}{2} \leq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L}{2}x\,dx}{\int_0^{\frac{L}{2}} x\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L}{2}\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{4} - \frac{L^3}{16}}{\frac{L^2}{8} + \frac{L^2}{4}} \\
&= \frac{11L}{18}.
\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned}\int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^{\frac{L}{2}} x^3\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L x^2\,dx\\ &= \frac{L^3}{64}+\frac{L^4}{6}-\frac{L^4}{48}\\ &= \frac{31L^4}{192}\end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned}r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx}\\ &= \frac{\frac{31L^4}{192}}{\frac{3L^2}{8}}\\ &= \frac{31L^2}{72}.\end{aligned}$$

20. $\rho(x)=x^2$ para $0\le x\le L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx}\\ &= \frac{\int_0^L x^3\,dx}{\int_0^L x^2\,dx}\\ &= \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^3}{3}}\\ &= \frac{3L}{4}\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\int_0^L x^2\rho(x)\,dx = \int_0^L x^4\,dx = \frac{L^5}{5}.$$

El radio de giro es,

$$\begin{array}{rcl} & = & \dfrac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\ \\ & = & \dfrac{\frac{L^5}{5}}{\frac{L^3}{3}} \\ \\ & = & \dfrac{3L^3}{5} \end{array}$$

21. $\rho(x) = 0x^2$ para $0 \le x \le \frac{L}{2}$, $\rho(x) = \dfrac{L^2}{4}$ para $\dfrac{L}{2} \le x \le L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{array}{rcl} \overline{x} & = & \dfrac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\ \\ & = & \dfrac{\int_0^{\frac{L}{2}} x^3\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L x\frac{L^2}{4}\,dx}{\int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L^2}{4}\,dx} \\ \\ & = & \dfrac{\frac{L^4}{64} + \frac{L^4}{32}}{\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{8}} \\ \\ & = & \dfrac{\frac{7L^4}{64}}{\frac{L^3}{6}} \\ \\ & = & \dfrac{21L}{32} \end{array}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^L x^2\rho(x)\,dx & = & \displaystyle\int_0^{\frac{L}{2}} x^4\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L x^2\frac{L^2}{4}\,dx \\ \\ & = & \dfrac{L^5}{160} + \dfrac{7L^5}{96} \\ \\ & = & \dfrac{16L^5}{240} \end{array}$$

El radio de giro es,

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\ dx}{\int_0^L \rho(x)\ dx} \\
&= \frac{\int_0^L x\rho(x)\ dx}{\int_0^L \rho(x)\ dx} \\
&= \frac{\frac{19L^5}{240}}{\frac{L^3}{6}} \\
&= \frac{19L^2}{40}
\end{aligned}
$$

22. Determine la densidad de masa ρ para que el centro de masa de una barra de longitud L esté a una distancia L/4 de un extremo de la varilla.

Respuesta.- Sea

$$\rho(x) = x^2\ mboxpara\ 0 \leq x \leq L$$

entonces calculamos el centro de masa de la barra,

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\ dx}{\int_0^L \rho(x)\ dx} \\
&= \frac{\int_0^L x^3\ dx}{\int_0^L x^2\ dx} \\
&= \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^3}{4}} \\
&= \frac{3L}{4}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el centro de masa está a una distancia $L/4$ de un extremo de la barra.

23. En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ en el tiempo t está dado por la fórmula $e(t) = 3\,\text{sen}\,2t$. Calcular: (a) el voltage medio sobre el intervalo de tiempo $[0, \pi/2]$; (b) la raíz cuadrada media del voltaje; esto es, la raíz cuadrada de la media de la función e^2 en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Respuesta.- Notemos que la media de $e(t)$ como $A(e)$,

$$\begin{aligned} A(e) &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2t\ dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ dt} \\ &= \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} 2t\ dt} \\ &= \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\ dt \\ &= \frac{3}{\pi}(1-\cos\pi) \\ &= \frac{6}{\pi} \end{aligned}$$

La raíz cuadrada media viene dada por la raiz cuadrada de la función e^2 sobre el intervalo $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, así,

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\operatorname{sen}^2 2t\ dt\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{9}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t\ dt\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Donde usanmos la fórmula de la solución del ejemplo 3 pag 101, para calcular la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{\pi}{2}$.

24. En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ y la corriente $i(t)$ en el tiempo t son dados por las fórmulas $e(t) = 160 \operatorname{sen} t$, $i(t) = 2\operatorname{sen}(t - \pi/6)$. La potencia media se define como

$$\frac{1}{T}\int_0^{T} e(t)i(t)\ dx$$

donde T es el periodo del voltaje y la corriente. Determine T y calcule la potencia media.

Respuesta.- Primero, ya que el voltaje está dado por $e(t) = 160 \operatorname{sen} t$ sabemos que tiene periodo 2π, así $T = 2\pi$. Entonces podemos calcular la potencia promedio como sigue,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 320 \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\, dt \\
&= \frac{160}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \left(\operatorname{sen} t \cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos t\right)\, dt \\
&= \frac{160}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\; dt - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\; dt\right) \\
&= \frac{160}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\; dt - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2t\; dt\right) \\
&= \frac{80\sqrt{3}}{2\pi}(2\pi - 0) - \frac{40}{\pi}\cdot 0 \\
&= 80\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

1.3. La integral como función de límite superior. Integrales indefinidas