1

Funciones continuas

1.3. Definición de límite de una función

La continuidad existe si existe continuidad por la izquierda y por la derecha.

Definición 1.1 (Definición de entorno de un punoto) *Cualquier intervalo abierto que contenga un punto p como su punto medio se denomina entorno de p.*

Notación.- Designemos los entornos con $N(p), N_1(p), N_2(p)$, etc. Puesto que un entorno $N(p)$ es un intervalo abierto simétrico respecto a p, consta de todos los números reales x que satisfagan $p-r<x<p+r$ para un cierto $r>0$. El número positivo r se llama radio del entorno. En lugar de $N(p)$ ponemos $N(p;r)$ si deseamos especificar su radio. Las desigualdades $p-r<x<p+r$ son equivalentes a $-r<x-p<r$, y a $|x-p|<r$. Así pues, $N(p;r)$ consta de todos los puntos x , cuya distancia a p es menor que r.
En la definición que sigue suponemos que A es un número real y que f es una función definida en un cierto entorno de un punto p (excepción hecha acaso del mismo p). La función puede estar definida en p pero esto no interviene en la definición.

Definición 1.2 (Definición de límite de una función) *El simbolismo*

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \qquad [o\ f(x) \to A \quad x \to p]$$

significa que para todo entorno $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x \neq p$$

El entorno $N_1(A)$ se cita en primer lugar, e indica cuán próximo queremos que sea $f(x)$ a su límite A. El segundo entorno, $N_2(p)$, nos indica lo próximo que debe estar x de p para que $f(x)$ sea interior al primer entorno $N_1(p)$. El entorno $N_2(p)$ dependerá del $N_1(A)$ elegido. Un entorno $N_2(p)$ que sirva para un $N_1(A)$ determinado servirá también, naturalmente, para cualquier $N_1(A)$ mayor, pero puede no ser útil para todo $N_1(A)$ más pequeño.
Decir que $f(x) \in N_1(A)$ es equivalente a la desigualdad $|f(x)-A|<\epsilon$ y poner que $x \in N_2(p)$, $x \neq p$ es lo mismo que escribir $0<|x-p|<\delta$. Por lo tanto, la definición de límite puede también expresarse así:

El símbolo $\lim_{x \to p} f(x) = A$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x-p| < \delta.$$

Observamos que las tres desigualdades,

$$\lim_{x\to p} f(x) = A,\ \lim_{x\to p}(f(x) - A) = 0,\ \lim_{x\to p}[f(x) - A] = 0$$

Son equivalentes. También son equivalentes las desigualdades,

$$\lim_{x\to p} f(x) = A,\ \lim_{h\to 0} f(p+h) = A.$$

Todas estas se derivan de la definición de límite.

Definición 1.3 (Límites laterales) *Los límites laterales pueden definirse en forma parecida. Por ejemplo, si $f(x) \to A$ cuando $x \to p$ con valores mayores que p, decimos que A es el límite por la derecha de f en p, indicamos esto poniendo*

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = A.$$

En la terminología de los entornos esto significa que para todo entorno $N_1(A)$, existe algún entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \quad \text{y} \quad x > p.$$

Los límites a la izquierda, que indican poniendo $x \to p^-$, se definen del mismo modo restringiendo x a valores menores que p.

1.4. Definición de continuidad de una función

Definición 1.4 (Definición de continuidad de una función en un punto) *Se dice que una función f es continua en un punto p si*

a) *f está definida en p, y*

b) $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Esta definición también puede formularse con entornos. Una función f es continua en p si para todo entorno $N_1[f(p)]$ existe un entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \in N_2(p).$$

Puesto que $f(p)$ pertenece siempre a $N_1[f(p)]$, no se precisa la condición $x \neq p$.

Especificando los radios de los entornos, la definición de continuidad puede darse como sigue:

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \text{ siempre que } |x - p| < \delta.$$

1.5. Teoremas fundamentales sobre límites. Otros ejemplos de funciones continuas.