

# CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por:  
FODE (Christian Limbert Paredes Aguilera)

---

# Índice general

<b>1. Límites</b>	<b>3</b>
1.1. Problemas . . . . .	6

# Limites

**Definición 1.1** La función  $f$  tiende hacia el límite  $l$  en  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ) significa: para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Existe algún  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe algún  $x$  para el cual es  $0 < |x - a| < \delta$ , pero no  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

**TEOREMA 1.1** Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en  $a$ . En otros términos si  $f$  tiende hacia  $l$  en  $a$ , y  $f$  tiende hacia  $m$  en  $a$ , entonces  $l = m$ .

*Demostración.-* Puesto que  $f$  tiende hacia  $l$  en  $a$ , sabemos que para todo  $\epsilon > 0$  existe algún número  $\delta_1 > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta_1$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Sabemos también, puesto que  $f$  tiende hacia  $m$  en  $a$ , que existe algún  $\delta_2 > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta_2$ , entonces  $|f(x) - m| < \epsilon$ .

Hemos empleado dos números  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , ya que no podemos asegurar que el  $\delta$  que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon \text{ y } |f(x) - m| < \epsilon$$

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un  $\epsilon > 0$  particular para el cual las dos condiciones  $|f(x) - l| < \epsilon$  y  $|f(x) - m| < \epsilon$  no puedan cumplirse a la vez si  $l \neq m$

Si  $l \neq m$ , de modo que  $|l - m| > 0$  podemos tomar como  $\epsilon$  a  $|l - m|/2$ . Se sigue que existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{|l - m|}{2} \text{ y } |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2}$$

Esto implica que para  $0 < |x - a| < \delta$  tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2} + \frac{|l - m|}{2} = |l - m|$$

El cual es una contradicción.

**LEMA 1.1** Si  $x$  está cerca de  $x_0$  e  $y$  está cerca de  $y_0$ , entonces  $x+y$  estará cerca de  $x_0+y_0$ ,  $xy$  estará cerca de  $x_0y_0$  y  $1/y$  estará cerca de  $1/y_0$ .

(1) Si  $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$  y  $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$  entonces  $|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \epsilon$ .

*Demostración.-*

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(2) Si  $|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}\right)$  y  $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)}$  entonces  $|xy - x_0y_0| < \epsilon$ .

*Demostración.-* Puesto que  $|x - x_0| < 1$  se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1,$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

así pues

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |x(y - y_0) + y_0(x - x_0)| \\ &\leq |x| \cdot |y - y_0| + |y_0| \cdot |x - x_0| \\ &< (1 + |x_0|) \cdot \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)} + |y_0| \cdot \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Notemos que  $\frac{|y_0|}{|y_0| - 1} < 1$ , por lo tanto  $\frac{|y_0|}{|y_0| - 1} \cdot \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$ .

(3) Si  $y_0 \neq 0$  y  $|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right)$  entonces  $y \neq 0$  y  $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \epsilon$ .

*Demostración.-* Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

de modo que  $-|y| < -\frac{|y_0|}{2} \implies |y| > |y_0|/2$ . En particular.  $y \neq 0$ , y

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} = \frac{1}{|y|} \cdot \frac{|y_0 - y|}{|y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\epsilon|y_0|^2}{2} = \epsilon$$

**TEOREMA 1.2** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ , entonces

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + m$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = l \cdot m$$

Además, si  $m \neq 0$ , entonces

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}$$

*Demostración.- La hipótesis significa que para todo  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$ ,*

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \epsilon$$

*Esto significa (ya que después de todo,  $\epsilon/2$  es también un número positivo) que existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$ ,*

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

*Sea ahora  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $0 < |x - a| < \delta_1$  y  $0 < |x - a| < \delta_2$  se cumplen las dos, de modo que es a la vez*

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

*pero según la parte (1) del lema anterior esto implica que  $|(f + g)(x) - (l + m)| < \epsilon$ .*

*Para demostrar (2) procedemos de la misma manera, después de consultar la parte (2) del lema. Si  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$*

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m| + 1)}\right),$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2(|l| + 1)}$$

*Pongamos de nuevo  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces*

$$|f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m| + 1)}\right) \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\delta}{2(|l| + 1)}$$

*Así pues, según el lema,  $|(f \cdot g)(x) - l \cdot m| < \epsilon$ , y esto demuestra (2).*

*Finalmente, si  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,*

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\epsilon|m|^2}{2}\right)$$

*Pero según la parte (3) del lema, esto significa, en primer lugar que  $g(x) \neq 0$ , de modo que  $(1/g)(x)$  tiene sentido, y en segundo lugar que*

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \epsilon$$

*Esto demuestra (3).*

**Definición 1.2**  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

La condición  $0 < x - a < \delta$  es equivalente a  $0 < |x - a| < \delta$  y  $x > a$

**Definición 1.3**  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

**Definición 1.4**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un número  $N$  grande, que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

## 1.1. Problemas

1. Hallar los siguientes limites (Estos limites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 2^2 + 4 + 4 = 12$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{3^3 - 8}{3 - 2} = 19$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow y} \frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = \\ = ny^{n-1}$$

$$(v) \lim_{y \rightarrow x} \frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = nx^{n-1}$$

$$(vi) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a+h})^2 - (\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

**2.** Hallar los límites siguientes:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1^2 - (\sqrt{x})^2}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = 0$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}$$

**3.** En cada uno de los siguientes casos, encontrar un  $\delta$  tal que,  $|f(x) - l| < \epsilon$  para todo  $x$  que satisface  $0 < |x - a| < \delta$

$$(i) f(x) = x^4; l = a^4$$

Respuesta.- Por la parte (2) del lema anterior se tiene

$$|x^2 - a^2| < \min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2 + 1)} \right).$$

Si aplicamos una vez mas la parte (2) del lema obtenemos

$$|x - a| < \min \left( 1, \frac{\min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2 + 1)} \right)}{2(|a| + 1)} \right) = \min \left( 1, \frac{\epsilon}{4(|a|^2 + 1)(|a| + 1)} \right) = \delta$$

$$(ii) f(x) = \frac{1}{x}; a = 1, l = 1$$

Respuesta.- Por la parte (3) del lema se tiene  $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \epsilon$  por lo tanto  $|y - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right)$

$$(iii) f(x) = x^4 + \frac{1}{x}; a = 1, l = 2$$

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene  $\left| \left( x^4 + \frac{1}{x} \right) - (1 + 1) \right| < \epsilon$  de donde

$$|x^4 - 1| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego por el inciso (i) y (ii)

$$|x - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right) \quad y \quad |x - 1| < \min \left( 1, \frac{\min \left( \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2(1+1)} \right)}{2(1+1)} \right) \implies |x - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{4}, 1, \frac{\epsilon}{32} \right)$$

y por lo tanto

$$|x - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{32} \right) = \delta$$

(iv)  $f(x) = \frac{x}{1 + \sin^2 x}$ ;  $a = 0$ ,  $l = 0$

Respuesta.-

(v)  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ;  $a = 0$ ,  $l = 0$

Respuesta.-

(vi)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $a = 1$ ,  $l = 1$

Respuesta.-