

# Variables aleatorias y distribución de probabilidad

## 1.1. El concepto de variables aleatorias

**Definición 1.1** Sea  $S$  un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea  $X$  una función de valor real definida sobre  $S$ , de manera que transforme los resultados de  $S$  en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que  $X$  es un variable aleatoria.

**Definición 1.2** Se dice que una variable aleatoria  $X$  es discreta si el número de valores que puede tomar es contable (ya sea finito o infinito), y si éstos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con los enteros positivos.

**Definición 1.3** Se dice que una variable aleatoria  $X$  es continua si sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta de los reales.

## 1.2. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas

**Definición 1.4** Sea  $X$  una variable aleatoria discreta. Se llamará a  $p(x) = P(X = x)$  función de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ , si satisface las siguientes propiedades:

1.  $p(x) \geq 0$  para todos los valores  $x$  de  $X$ ;
2.  $\sum_x p(x) = 1$ .

**Definición 1.5** La función de distribución acumulativa de la variable aleatoria  $X$  es la probabilidad de que  $X$  sea menor o igual a un valor específico de  $x$  y está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

En general, la función de distribución acumulativa  $F(x)$  de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores de  $X$ , de tal manera que:

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$  para cualquier  $x$ ;

2.  $F(x_i) \geq F(x_j)$  si  $x_i \geq x_j$ ;
3.  $P(X > x) = 1 - F(x)$ .
4.  $P(X = x) = F(x) - F(x - 1)$ ;
5.  $P(x_i \geq X \geq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$

### 1.3. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas

**Definición 1.6** 1.  $f(x) \geq 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,

2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  y

3.  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Para la función de distribución acumulativa  $F(x)$  se tiene:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Dado que para cualquier variable aleatoria continua  $X$ ,

$$P(X = x) = \lim_{x \rightarrow x} f(t) dt = 0, \quad \implies \quad P(X \leq x) = P(X < x) = F(x)$$

La distribución acumulativa  $F(x)$  es una función lisa no decreciente de los valores de la v.a. con las siguientes propiedades:

1.  $F(-\infty) = 0$ ;
2.  $F(\infty) = 1$ ;
3.  $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
4.  $dF(x)/dx = f(x)$ .

## 1.4. Valor esperado de una variable aleatoria

**Definición 1.7** El valor esperado de una variable aleatoria  $X$  es el promedio o valor medio de  $X$  y está dado por:

$$E(X) = \sum_x xp(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

En donde  $p(x)$  y  $f(x)$  son las funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad, respectivamente.

En general, el valor esperado de una función  $g(x)$  de la variables aleatoria  $X$ , está dado por:

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)p(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

### 1.4.1. Propiedades

1. El valor esperado de una constante  $c$  es el valor de la constante.

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c$$

2. El valor esperado de la cantidad  $aX + b$ , en donde  $a$  y  $b$  son constantes, es el producto de  $a$  por el valor esperado de  $x$  más  $b$ .

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = aE(X) + b$$

3. El valor esperado de la suma de dos funciones  $g(X)$  y  $h(X)$  de  $X$  es la suma de los valores esperados de  $g(X)$  y  $h(X)$ .

$$E[g(X) + h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) + h(x)] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx = E[g(X)] + E[h(X)]$$

## 1.5. Momentos de una variable aleatoria

Los momentos de una variable aleatoria  $X$  son los valores esperados de ciertas funciones de  $X$ .

**Definición 1.8** Sea  $X$  una variable aleatoria. El  $r$ -ésimo momento de  $X$  alrededor de cero se define por:

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_x x^r p(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

El primer momento al rededor del cero es la media o valor esperado de la variable aleatoria. y se denota por  $\mu$ ; de ésta manera se tiene que  $\mu'_1 = \mu = E(X)$ .

**Definición 1.9** Sea  $X$  una variable aleatoria. El  $r$ -ésimo momento central de  $X$  o el  $r$ -ésimo momento alrededor de la media de  $X$  se define por:

$$\mu_r = E(X - \mu)^r = \sum_x (x - \mu)^r p(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$\mu_r = E(X - \mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

El momento central de cero de cualquier variable aleatoria es uno, dado que:

$$\mu_0 = E(X - \mu)^0 = E(1) = 1$$

De manera similar, el primer momento central de cualquier variables aleatoria es cero, dado que:

$$\mu_1 = E(X - \mu) = E(X) - \mu = 0$$

El segundo momento central:

$$\mu_2 = E(X - \mu)^2$$

Recibe el nombre de varianza de la variable aleatoria. Puesto que:

$$\begin{aligned} \mu_2 = Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \mu'_2 - \mu^2 \end{aligned}$$

La varianza de cualquier variable aleatoria es el segundo momento alrededor del origen menos el cuadrado de la media. Generalmente se denota por  $\sigma^2$

Es útil notar que la varianza de una variable aleatoria  $X$  es invariable; es decir,  $Var(X + b) = Var(X)$  para cualquier constante  $b$ . De manera más general, se demostrará que  $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$  para cualquiera dos constantes  $a$  y  $b$ . Por definición,

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= E(aX + b)^2 - E^2(aX + b) \\ &= E(a^2 X^2 - 2abX + b^2) - [aE(X) + b]^2 \\ &= a^2 E(X)^2 + 2abE(X) + b^2 - a^2 E^2(X) - 2abE(X) - b^2 \\ &= a^2 E(X)^2 - a^2 E^2(X) \\ &= a^2 [E(X)^2 - E^2(X)] \\ &= a^2 Var(X) \end{aligned}$$

Una medida que compara la dispersión relativa de dos distribuciones de probabilidad es el coeficiente de variación, que está definido por:

$$V = \frac{\sigma}{\mu}$$

Expresa la magnitud de la dispersión de una variable aleatoria con respecto a su valor esperado.

El tercer momento central

$$\mu_3 = E(X - \mu)^3$$

esta relacionado con la asimetría de la distribución de probabilidad de  $X$ .

Cualquier momento central de una variable aleatoria  $X$  puede expresarse en términos de los momentos de ésta, alrededor de cero. Por definición:

$$u_r = E(X - \mu)^r$$

pero la expansión de  $(X - \mu)^r$  puede expresarse como:

$$(X - \mu)^r = \sum_{i=0}^r (-1)^i \frac{r!}{(r-i)!i!} \mu^i x^{r-i} = \sum_{i=0}^r (-1)^i \frac{r!}{(r-i)!i!} \mu^i E(X^{r-i}) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \frac{r!}{(r-i)!i!} \mu^i \mu'_{r-i}$$

En particular,

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3$$

Para las distribuciones de probabilidad que presentan un sólo pico, si  $\mu_3 < 0$ , se dice que la distribución es asimétrica negativamente, si  $\mu_3 > 0$ , la distribución es asimétrica positivamente y si  $\mu_3 = 0$ , la distribución recibe el nombre de simétrica.

Una medida más apropiada de la asimetría, es el tercer momento estandarizado, dado por:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

Que recibe el nombre de coeficiente de asimetría. Una distribución de probabilidad es asimétrica positiva, negativa o simétrica si  $\alpha_3 > 0$ ,  $\alpha_3 < 0$  o  $\alpha_3 = 0$  respectivamente.

El cuarto momento central,

$$\mu_4 = E(X - \mu)^4 = \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4$$

Es una medida de qué tan puntiaguda es la distribución de probabilidad y recibe el nombre de curtosis. Al igual que para el tercer momento, es preferible emplear el cuarto momento estandarizado,

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Si  $\alpha_4 > 3$ , la distribución de probabilidad presenta un pico relativamente alto y recibe el nombre de leptocúrtica, si  $\alpha_4 < 3$ , la distribución es relativamente plana y recibe el nombre de platocúrtica y si  $\alpha_4 = 3$ , la distribución no presenta un pico muy alto i muy bajo y recibe el nombre de mesocúrtica.

En este momento se considerará el concepto de variable aleatoria estandarizada. Sea  $X$  cualquier variable aleatoria con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$  la cantidad

$$Y = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$

define una variable aleatoria  $Y$  con media cero y desviación estándar uno. Esta variable recibe el nombre de **variable aleatoria estandarizada** correspondiente a  $X$

El valor esperado de  $Y$  es cero, puesto que:

$$E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = 0$$

De hecho, puesto que  $E(Y) = 0$ , el  $r$ -ésimo momento central de  $Y$  es:

$$\begin{aligned}\mu_r(Y) &= E(Y^r) \\ &= E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^r \\ &= \frac{1}{\sigma^r} E(X - \mu)^r \\ &= \frac{\mu_r(X)}{\sigma^r}\end{aligned}$$

De esta manera se tiene que:

$$\mu_r(Y) = \frac{\mu_r(X)}{[\mu_2(X)]^{r/2}}$$

Ya que

$$\sigma^r = \sqrt{[\mu_2(X)]^r}$$

es decir,

$$(\sigma^r)^2 = [\mu_2(X)]^r \implies (\sigma^2)^r = [\mu_2(X)]^r \implies (\sigma^2)^r = (\sigma^2)^r$$

de donde se tiene que  $Var(Y) = \mu_2(Y) = 1$ . En particular, nótese que  $\alpha_3(Y) = \alpha_3(X)$  y  $\alpha_4(Y) = \alpha_4(X)$ . La estandarización de una variable aleatoria afecta a la media y a la varianza, pero no a los factores de forma.

## 1.6. Otras medidas de tendencia central y dispersión

**Definición 1.10** Para cualquier variable aleatoria  $X$ , se define a la mediana  $x_{0.5}$  de  $X$ , para ser:

$$P(X < x_{0.5}) \leq 1/2 \quad \text{y} \quad P(X \leq x_{0.5}) \geq 1/2 \quad \text{si } X \text{ es discreta, o}$$

$$P(X \leq x_{0.5}) = 1/2 \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

**Definición 1.11** Para cualquier variable aleatoria  $X$ , se define la moda como el valor  $x_m$  de  $X$  que maximiza la función de probabilidad si  $X$  es discreta o la función de densidad si  $X$  es continua.

## 1.7. Ejercicios

1. Solución script C3-ejercicios.R

2. Por definición 3.4, sea

$$k + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \implies k = \frac{12}{25}$$

entonces la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta  $X$  estará dada por:

$$\frac{12}{25} \quad si \quad x = 1$$

$$\frac{6}{25} \quad si \quad x = 2$$

$$\frac{4}{25} \quad si \quad x = 3$$

$$\frac{3}{25} \quad si \quad x = 4$$

$si$

Así, la probabilidad de  $P(1 \leq X \leq 3)$  será,

$$P(1 \leq X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25} = 1.88$$