

Ejercicios capitulo 8

2023-02-24

Ejercicios capitulo 8

8.1

En un experimento binomial se observan x éxitos en n ensayos independientes. Se proponen las siguientes dos estadísticas como estimadores del parámetro de proporción p : $T_1 = X/n$ y $T_2 = (X + 1)/(n + 2)$.

a)

Obtener y comparar los errores cuadráticos medios para T_1 y T_2 .

Respuesta.- Primero obtendremos el error cuadrático medio para T_1 . Sea,

$$ECM(T_1) = Var(T_1) + [p - E(T_1)]^2$$

de donde, $E(X)$ para una distribución binomial viene dado por np ,

$$E(T_1) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

Luego, dado que $Var(n^{-1}X) = n^{-2}Var(X)$

$$Var(T_1) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = Var(n^{-1}X) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Así,

$$ECM(T_1) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Para T_2 se tiene

$$E(T_2) = E\left(\frac{X+1}{n+2}\right) = \frac{E(X+1)}{E(n+2)} = \frac{E(X)+1}{n+2} = \frac{np+1}{n+2}.$$

Después, dado que

$$Var(X-a) = E^2(X-a) - E(X-a)^2 = E^2(X) - E(X)^2 = Var(X).$$

Entonces,

$$Var(T_2) = Var\left(\frac{X+1}{n+2}\right) = Var\left[(n+2)^{-1}X + (n+2)^{-1}\right] = (n+2)^{-2}Var(X) = \frac{np(1-p)}{(n+2)^2}$$

Por lo tanto,

$$ECM(T_2) = \frac{np(1-p)}{(n+2)^2} + \left[p - \frac{np+1}{n+2} \right]^2 = \frac{np(1-p)}{(n+2)^2} + \frac{(2p+1)^2}{(n+2)^2} = \frac{np(1-p) + (2p+1)^2}{(n+2)^2}.$$

b)

Hacer una gráfica del ECM de cada estadística como funciones de p para $n = 10$ y $n = 25$. ¿Es alguno de estos estimadores uniformemente mejor que el otro?.

Respuesta.-