1

Ecuaciones lineales

1.1 Cuerpos

Se designa por F el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos.

1. La adición es conmutativa,
$$x + y = y + x$$
para cualquiera x e y de F.
2. La adición es asociativa,
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
para cualquiera x, y y z de F.
3. Existe un elemento único 0 (cero) de F tal que $x + 0 = x$, para todo x en F.
4. A cada x de F corresponde un elemento único $(-x)$ de F tal que $x + (-x) = 0$.
5. La multiplicación es conmutativa,
$$xy = yx.$$
6. La multiplicación es asociativa,
$$x(yz) = (xy)z.$$
7. Existe un elemento no nulo único de F tal que $x1 = x$, para todo x en F.
8. A cada elemento no nulo x de F corresponde un único elemento x^{-1} (o $(1/x)$) de F tal que $xx^{-1} = 1$.
9. La multiplicación es distributiva respecto de la adición, esto es, $x(y + z) = xy + xz$, para cualquiera x, y y z de F.

1.2 Sistema de ecuaciones lineales

Supóngase que F es un cuerpo. Se considera el problema de encontrar n escalares (elementos de F) $x_1, \ldots, x_n$ que satisfagan las condiciones

$$\begin{array}{rcl} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n & = & y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \ldots + A_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \tag{1.1}$$

donde $y_1, \ldots, y_m$ y A_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, son elementos de F. A (1-1) se le llama un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas**. Todo n-tuple $(x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de F que satisface cada una de las ecuaciones de (1-1) se llama una **solución** del sistema. Si $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$, se dice que el sistema es homogéneo, o que cada una de las ecuaciones es homogénea.

Para el sistema lineal (1-1), supóngase que seleccionamos m escalares $c_1, \ldots, c_m$, que se multiplica la j-ésima ecuación por c_j y que luego se suma. Se obtiene la ecuación

$$(c_1A_{11} + \ldots + c_mA_{m1})x_1 + \ldots + (c_1A_{1n} + \ldots + c_mA_{mn})x_n = c_1y_1 + \ldots + c_my_m$$

A tal ecuación se le llama **combinación lineal** de las ecuaciones (1-1).

Se dirá que dos sistemas de ecuaciones lineales son **equivalentes** si cada ecuación de cada sistema es combinación lineal de las ecuaciones del otro sistema.

Teorema 1.1. Sistemas equivalentes de ecuaciones lineales tiene exactamente las mismas soluciones.

Ejercicios

1.3 Matrices y operaciones elementales de fila

Deseamos ahora considerar operaciones sobre las filas de la matriz A que corresponden a la formación de combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema $AX = Y$. Se limitará nuestra atención a **tres operaciones elementales de filas** en una matriz $m \times n$, sobre el cuerpo F:

1. Multiplicación de una fila de A por un escalar c no nulo;
2. Remplazo de la r-ésima fila de A por la fila r más c veces la fila s, donde c es cualquier escalar y $r \neq s$;
3. Intercambio de dos filas de A.

Una operación elemental de filas es, pues, un tipo especial de función (regla) e que asocia a cada matriz $m \times n$, A, una matriz $m \times n$, $e(A)$. Se puede describir e en forma precisa en los tres casos como sigue:

1. $e(A)_{ij}$ si $i \neq r$, $e(A)_{rj} = cA_{rj}$.
2. $e(A)_{ij}$ si $i \neq r$, $e(A)_{rj} = A_{rj} + cA_{sj}$.
3. $e(A)_{ij}$ si i es diferente de r y s, $e(A)_{rj} = A_{sj}$, $e(A)_{sj} = A_{rj}$.

Teorema 1.2. A cada operación elemental de filas e corresponde una operación elemental de filas e_1, del mismo tipo de e, tal que $e_i(e(A)) = e(e_1(A)) = A$ para todo A. Es decir, existe la operación (función) inversa de una operación elemental de filas y es una operación elemental de filas del mismo tipo.

Demostración.- (1) Supóngase que e es la operación que multiplica la r-ésima fila de una matriz por un escalar no nulo c. Sea e_1 la operación que multiplica la fila r por c^{-1}. (2) Supóngase que e sea la operación que remplaza la fila r por la misma fila r a la que le sumo la fila s multiplicada por c, $r \neq s$. Sea e_1 la operación que reemplaza la fila r por la fila r a la que se le ha sumado la fila s multiplicada por $(-c)$. (3) Si e intercambia las filas r y s, sea $e_1 = e$. En cada uno de estos casos es claro que $e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A$ para todo A.

Definición 1.1. Si A y B son dos matrices $m \times n$ sobre el cuerpo F, se dice que B es equivalente por filas a A si B se obtiene de A por una sucesión finita de operaciones elementales de filas.

Teorema 1.3. Si A y B son matrices equivalentes por filas, los sistemas homogeneos de ecuaciones lineales $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones.

Demostración.- Supóngase que se pasa de A a B por una sucesión finita de operaciones elementales de filas:

$$A = A_0 \to A_1 \to \ldots \to A_k = B.$$

Basta demostrar que los sistemas $A_jX = 0$ y $A_{j+1}X = 0$ tienen las mismas soluciones, es decir, que una operación elemental por filas no altera el conjunto de soluciones.
así, supóngase que B se obtiene de A por una sola operación elemental de filas. Sin que importe cuál de los tres tipos (1), (2) o (3) de operaciones sea, cada ecuación del sistema $BX = 0$ será combinación lineal de las ecuaciones del sistema $AX = 0$. Dado que la inversa de una operación elemental de filas es una operación elemental de filas, toda ecuación de $AX = 0$ será también combinación lineal de las ecuaciones de $BX = 0$. Luego estos dos sistemas son equivalente y, por el teorema 1, tienen las mismas soluciones.

Definición 1.2. Una matriz $m \times n$, R, se llama **reducida por filas** si:

(a) el primer elemento no nulo de cada fila no nula de R es igual a 1;

(b) cada columna de R que tiene el primer elemento no nulo de alguna fila tiene todos sus otros elementos 0.

Teorema 1.4. Toda matriz $m \times n$ sobre el cuerpo F es equivalente por filas a una matriz reducida por filas.

Demostración.- Sea A una matriz $m \times n$ sobre F. Si todo elemento de la primera fila A es 0, la condición (a) se cumple en lo que concierne a la fila 1. Si la fila 1 tiene un elemento no nulo, sea k el menor entero positivo j para el que $A_{1j} \neq 0$. Multiplicando la fila 1 por A_{1k}^{-1} la condición (a) se cumple con respecto a esa fila. Luego, para todo $i \geq 2$, se suma $(-A_{ik})$ veces la fila 1 a la fila i. Y ahora el primer elemento no nulo de la fila 1 está en la columna k, ese elemento es 1, y todo otro elemento de la columna k es 0.
Considérese ahora la matriz que resultó de lo anterior. Si todo elemento de la fila 2 es 0, se deja tal cual. Si algún elemento de la fila 2 es diferente de 0, se multiplica esa fila por un escalar de modo que el primer elemento no nulo sea 1. En caso de que la fila 1 haya tenido un primer elemento no nulo en la columna k, este primer elemento no nulo de la fila 2 no puede estar en la columna k, supóngase que esté en la columna $k_r \neq k$. Sumando múltiplos apropiados de la fila 2 a las otras filas, se puede lograr que todos los elementos de la columna k_r sean 0, excepto el 1 en la fila 2. Lo que es importante observar es lo siguiente: Al efectuar etas operaciones, no se alteran los elementos de la fila 1 el alas columnas $1, \ldots, k$ ni ningún elemento de la columna k. Es claro que, si la fila 1 era idénticamente nula, las operaciones con la fila 2 no afecta la fila 1.
Si se opera, como se indicó, con una fila cada vez, es evidente que después de un número finito de etapas se llegará a una matriz reducida por filas.

Ejercicios

1.4 Matrices escalón reducida por filas

Definición 1.3. Una matriz $m \times n$, R, se llama matriz escalón reducida por filas si:

(a) R es reducida por filas;

(b) toda fila de R que tiene todos los elementos 0 está debajo de todas las filas que tienen elementos no nulos;

(c) si las filas $1, \ldots, r$ son las filas no nulas de R, y si el primer elemento no nulo de la fila i está en la columna $k_i, i = 1, \ldots, r$, entonces $k_1 < k_2 < \ldots, k_r$.

Se puede describir también una matriz escalón R reducida por filas como sigue. Todo elemento de R es 0, o existe un número positivo r, $l \leq r \leq m$, y r entero positivo $k_1, \ldots, k_r$ con $1 \leq k_i \leq n$ y

(a) $R_{ij} = 0$ para $i > r$, y $R_{ij} = 0$ si $j < k_i$.

(b) $R_{ik_j} = \delta_{ij}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r$.

(c) $k_1 < \ldots < k_r$.

Teorema 1.5. Toda matriz $m \times n$, A, es equivalente por filas a una matriz escalón por filas.

Demostración.- Sabemos que A es equivalente por filas a una matriz reducida por filas. Todo lo que se necesita observar es que, efectuando un número finito de intercambios de filas en una matriz reducida por filas, se la puede llevar a la forma escalón reducida por filas.

Teorema 1.6. Si A es una matriz $m \times n$ con $m < n$, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene una solución trivial.

Demostración.- Sea R una matriz escalón reducida por fila que sea equivalente por fila a A. Entonces los sistemas $AX = 0$ y $RX = 0$ tienen las mismas soluciones por el teorema 3. Si r es el número de filas no nulas de R, entonces ciertamente $r \leq m$, y como $m < n$ tenemos que $r < n$. Se sigue inmediatamente de las observaciones anteriores que $AX = 0$ tiene una solución trivial.

Teorema 1.7. Si A es una matriz $n \times n$ (cuadrada), A es equivalente por filas a la matriz identidad $n \times n$, si, y sólo si, el sistema de ecuaciones $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial.

Demostración.- Si A es equivalentes por filas a I, entonces $AX = 0$ e $IX = 0$ tienen las mismas soluciones. Recíprocamente, supóngase que $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial $X = 0$. Sea R una matriz escalón reducida por filas $n \times n$, que es equivalente por filas a A, y sea r el número de filas no nulas de R. Entonces $RX = 0$ carece de solución no trivial. Con lo que $r \geq n$. Pero como R tiene un 1 como primer elemento no nulo en cada una de sus n filas y como estos 1 están en las diferentes columnas n, R debe ser la matriz identidad $n \times n$.

Se construye la matriz aumentada A' del sistema $AX = Y$. Esta es la matrix $m \times (n+1)$ cuyas primeras n columnas son las columnas de A y cuya última columna es Y; más precisamente,

$$A'_{ij} = A_{ij}, \text{ si } j \leq n.$$

$$A'_{i(n+1)} = y_i.$$

Ejercicios

1.5 Multiplicación de matrices

Definición 1.4. Sea A una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo F y sea B una matriz $n \times p$ sobre F. El producto AB es la matriz $m \times p$, C, cuyos elementos i, j son

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir} B_{rj}.$$

El producto está definido si, y sólo si, el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda.

Teorema 1.8. Si A, B, C son matrices sobre el cuerpo F, tales que los productos BC y $A(BC)$ están definidos, entonces también lo están los productos AB, $(AB)C$ y

$$A(BC) = (AB)C.$$

Demostración.- Supóngase que B es una matriz $n \times p$. Como BC está definida, C es una matriz con p filas y BC tiene n filas. Como $A(BC)$ está definida, se puede suponer que A es una matriz $m \times n$. Así el producto AB existe y es una matriz $m \times p$, de lo que se sigue que el producto $(AB)C$ existe. para ver que $A(BC) = (AB)C$ se debe demostrar que

$$[A(BC)]_{ij} = [(AB)C]_{ij}$$

Para todo los i, j. Por definición

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir}(BC)_{rj} && = \sum_r A_{ir} \sum_s B_{rs} C_{sj} \\
&= \sum_s \sum_r A_{ir} B_{rs} C_{sj} && = \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj} \\
&= \sum_r \left(\sum_s AB_{ir} \right) C_{sj} && = \sum_r (AB)_{is} C_{sj} \\
&= [(AB)C]_{ij}
\end{aligned}$$

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, el producto AA está definido. Esta matriz se representa por A^2. En general el producto $AA \cdots A$ (k veces) está definido y se representará por A^k.

Definición 1.5. Una matriz $m \times m$ se dice matriz elemental si se puede obtener de la matriz identidad $m \times m$ por medio de una sola operación elemental simple por filas.

Teorema 1.9. Sea e una operación elemental de fila y sea E la matriz elemental $m \times m$, $E = e(I)$. Entonces para toda matriz $m \times n$, A

$$e(A) = EA.$$

Demostración.- La clave de la demostración radica en que el elemento de la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz producto EA se obtiene de la i-ésima fila de E y de la j-ésima columna de A. Los tres tipos de operaciones elementales de fila deben ser estudiados separadamente. Se dará una demostración detallada para una operación tipo (ii) . Los otros dos casos, ,más fáciles de estudiar se dejan como ejercicios. Supóngase que $r \neq s$ y que e es una operación que remplaza la fila r por la fila r más c veces la fila s. Entonces

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik}, & i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta sk, & i \neq r. \end{cases}$$

Luego

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{ij} + cA_{sj}, & i = r. \end{cases}$$

Es decir, $EA = e(A)$.

Corolario 1.1. Sean A y B dos matrices $m \times n$ sobre el cuerpo F. Entonces B es equivalente por filas a A si, y sólo si, $B = PA$, donde P es un producto de matrices elementales $m \times m$.

Demostración.- Supóngase que $B = PA$, donde $P = E_s \cdots E_2E_1$ y los E_i son matrices elementales $m \times m$. Entonces E_iA es equivalente por filas a A_1 y $E_2(E_1A)$ es equivalente por filas a E_1A. Luego E_2E_1A es equivalente por filas a A. Sean $E_1, E_2, \ldots E_s$a matrices elementales correspondientes a cierta sucesión de operaciones elementales de filas que lleva A a B. Entonces $B = (E_s, \cdots, E_1)A$.

Ejercicios