P

Álgebra Lineal (MAT-131)

Práctica 2

Parte B

Apellidos: **PAREDES AGUILERA** C.I.: **6788578 LP**

Nombres: **CHRISTIAN PAREDES** Cel.: **73055011**

Firma:

---

14. Halle todos los espacios vectoriales que tienen exactamente una base.

Respuesta.- Afirmamos que solo el espacio vectorial trivial tiene exactamente una base. Para ello demostraremos que para espacios vectorial de dimensión finita e infinita se tiene más de una base.
Consideremos un espacio vectorial de dimensión finita. Sea V un espacio vectorial no trivial con base $v_1, \ldots, v_n$. Decimos que para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista $cv_1, \ldots, cv_n$ es también una base. Es decir, la lista es aún linealmente independiente, y es aún generador de V. Luego, sea $u \in V$ ya que $v_1, \ldots, v_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c}(cv_1) + \cdots + \frac{a_n}{c}(cv_n)$$

y así $cv_1, \ldots, cv_n$ genera también V. Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión finita.
Por otro lado. Sea W un espacio vectorial de dimensión infinita con base $w_1, w_2, \ldots$. Para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista $cw_1, cw_2, \ldots$ es también una base. Claramente la lista es linealmente independiente, y también genera V. Luego, sea $u \in V$, ya que $w_1, w_2, \ldots$ genera W, existe $a_1, a_2, \ldots \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c} c w_1 + \frac{a_2}{c} c w_2 + \cdots$$

y así $cw_1, cw_2, \ldots$ genera también W. Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión infinita.

15. a). Sea U el subespacio de $\mathbf{R}^5$ definido por

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{F}^5 \ : \ x_1 = 3x_2 \text{ y } x_3 = 7x_4 \right\}.$$

Encuentre una base de U.

Respuesta.- Dado que se tiene la condición $x_1 = 3x_2$ y $x_3 = 7x_4$. Podemos escribir el vector general, como sigue

$$\begin{array}{rcl} (3x_2, x_2, 7x_4, x_4, x_5) & = & (3x_2, x_2, 0, 0, 0) + (0, 0, 7x_4, x_4, 0) + (0, 0, 0, 0, x_5) \\ & = & x_2(3, 1, 0, 0, 0) + x_4(0, 0, 7, 1, 0) + x_5(0, 0, 0, 0, 1). \end{array}$$

Por lo que $(3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 7, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ forma una base de U. Podemos demostrar fácilmente que estos vectores generar U, ya que U puede expresarse como una combinación lineal de estos tres vectores. Ahora, demostremos que son linealmente independiente. Sea $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$c_1(3, 1, 0, 0, 0) + c_2(0, 0, 7, 1, 0) + c_3(0, 0, 0, 0, 1) = 0$$

De donde,

$$(3c_1, c_2, 7c_2, c_2, c_3) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Igualando cada componente, tenemos que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Así se demuestra que estos tres vectores son linealmente independientes. Por lo tanto, $(3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 7, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ es una base de U.

b). Extienda la base de la parte (a) a una base de $\mathbf{R}^5$.

Respuesta.- Sean $v_1 = (3, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 7, 1, 0)$, $v_3 = c_3(0, 0, 0, 0, 1)$. Por el ejercicio 11 del apartado 2A (Axler, Linear Algebra), se sabe que si tenemos $v_4 \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ entonces v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente independientes. Nos preguntamos, ¿que clase de vectores no pueden ser generados por v_1, v_2, v_3?. Observemos que las primeras dos coordenadas de v_2 y v_3 son cero. Por lo que no pueden aportar a otras dos primeras coordenadas de cualquier combinación lineal que consideremos. De hecho, estas coordenadas deben provenir de v_1.
Si $av_1 + bv_2 + cv_3$ es una combinación lineal, entonces las dos primeras coordenadas son $3a$ y a. Luego, si escogemos un vector donde sus primeras dos coordenada no son de la forma $3a$ y a para cualquier escalar a, entonces no será generados por v_1, v_2, v_3. Por ejemplo podemos escoger el vector

$$v_4 = (0, 1, 0, 0, 0)$$

Ahora, encontremos un v_5 tal que $v_5 \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Observemos que las coordenadas cuatro y cinco de los vectores $v_1.v_2, v_3$ y v_4 son cero. Por lo que ambas coordenadas deben provenir de v_2. Si $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$ es una combinación lineal, entonces las coordenadas cuatro y cinco son de la forma $7b$ y b, para cualquier escalar b. Por ejemplo podemos escoger el vector,

$$v_5 = (0, 0, 0, 1, 0).$$

Por último, demostremos que esta lista es base de $\mathbf{F}^5$. Por el teorema 2.23 sabemos que, si m vectores generan un espacio vectorial, entonces cualquier lista linealmente independiente en V no puede tener más de m vectores. Así, queda demostrada la independencia lineal de v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

Por otro lado, demostremos que esta lista genera $\mathbf{F}^5$. Nuestro objetivo será hallar una combinación lineal que incluya a v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 para $a, b, c, d, e \in \mathbf{F}$ tales que

$$a(1, 0, 0, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 0, 0, 1) + d(0, 1, 0, 0, 0) + e(0, 0, 0, 1, 0) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Para ello, notemos que ya se tiene $v_3 = (0, 0, 0, 0, 5)$, $v_4 = (0, 1, 0, 0, 0)$ y $v_5 = (0, 0, 0, 1, 0)$. Ahora, generemos los restantes $(1, 0, 0, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, 0, 0)$, de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{3}(v_1 - v_4) & = & (1, 0, 0, 0, 0) \\ \dfrac{1}{7}(v_2 - v_5) & = & (0, 0, 1, 0, 0). \end{array}$$

Dado que se incluye a v_1 y v_2 en combinación lineal con v_4 y v_5, entonces

$$\begin{array}{rcl} a & = & x_1 \\ b & = & x_2 \\ c & = & x_3 \\ d & = & x_4 \\ e & = & x_5. \end{array}$$

Encontrando los respectivos escalares a, b, c, d, e en términos de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Decimos que la lista v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 genera $\mathbf{F}^5$. Por lo tanto es una base de $\mathbf{F}^5$.

c). Encuentre un subespacio W de $\mathbf{F}^5$ tal que $\mathbf{R}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.- Por 1.45 (Axler, Lineal Algebra), demostraremos que $\mathbf{R}^5 = U + W$ y que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in \mathbf{R}^5$, ya que v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 es una base de $\mathbf{F}^5$, por el criterio de base (2.28, Axler, Lineal algebra) podemos escribir

$$\begin{array}{rcl} v & = & c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + c_5v_5 \\ & = & (c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) + (c_4v_4 + c_5v_5). \end{array}$$

Luego, sean $u = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ y $w = c_4v_4 + c_5v_5$. Entonces, $u \in U$ y $w \in W$. Está claro que u y w generan U y W respectivamente. De este modo, cada vector en $\mathbf{R}^5$ puede ser expresado como una suma de vectores en U y W. Esto prueba que $\mathbf{R}^5 = U + W$.

Ahora demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U \cap W$, ya que $v \in U$ entonces para algunos escalares $a, b, c \in \mathbf{F}$ se tiene

$$v = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Lo mismo pasa con $v \in W$, para algunos escalares $d, e \in \mathbf{F}$; es decir,

$$v = dv_4 + ev_5.$$

Dado que queremos encontrar $U \cap W$, se tiene

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = dv_4 + ev_5 \quad \Rightarrow \quad av_1 + bv_2 + cv_3 - dv_4 - ev_5 = 0$$

Por el hecho de que U y W son linealmente independiente, lo que implica $a = b = c = d = e = 0$, entonces $v = 0$, así $U \cap W = \{0\}$. Concluimos que

$$\mathbf{R}^5 = U \oplus W.$$

16. Demostrar o refutar: existe una base p_0, p_1, p_2, p_3 de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$ tal que ninguno de los polinomios p_0, p_1, p_2, p_3 tiene grado 2.

Demostración.- Consideremos la lista,

$$\begin{array}{rcl} p_0 & = & 1, \\ p_1 & = & X, \\ p_2 & = & X^3 + X^2, \\ p_3 & = & X^3. \end{array}$$

El cual no tiene ningún polinomio de grado 2. Demostraremos que esta lista es una base. Primero veamos que $\operatorname{span}(p_0, P_1, p_2, p_3) = \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Sea $q \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Entonces existe $a_0, a_1, a_2, a_3 \in F$ alguno cero, tal que

$$q = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
a_0p_0 + a_1p_1 + a_2(p_2 - p_3) + a_3p_3 &= a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 - a_2p_3 \\
&= a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + (a_3 - a_2)p_3 \\
&= a_0 + a_1X + a_2\left(X^3 + X^2\right) + (a_3 - a_2)X^3 \\
&= a_0 + a_1X + a_2X^3 + a_2X^2 + a_3X^3 - a_2X^3 \\
&= a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \\
&= p.
\end{aligned}$$

Por lo que p_0, p_1, p_2, p_3 genera $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Ahora, demostraremos que la lista es linealmente independiente. Sean $b_0, \ldots, b_3 \in \mathbf{F}$ tales que

$$b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = 0.$$

Se sigue que,

$$\begin{aligned}
b_0 + b_1X + b_2(X^2 + X^3) + b_3X^3 &= 0 \\
b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_2X^3 + b_3X^3 &= 0 \\
b_0 + b_1X + b_2X^2 + (b_2 + b_3)X^3 &= 0.
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{0}$ es el cero polinomial. La lista $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ es linealmente independiente, ya que es una base en $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Por lo que

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0, \\
b_1 &= 0, \\
b_2 &= 0, \\
b_2 + b_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una base p_0, p_1, p_2, p_3 de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$ tal que ninguno de los polinomios tiene grado 2.

17. Suponga v_1, v_2, v_3, v_4 es una base de V. Demostrar que

$$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$$

es también una base de V.

Demostración.- Demostremos la independencia lineal. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{F}$ tales que

$$\begin{aligned}
a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_2 + v_3) + a_3(v_3 + v_4) + a_4v_4 &= 0 \\
a_1v_1 + a_1v_2 + a_2v_2 + a_2v_3 + a_3v_3 + a_3v_4 + a_4v_4 &= 0 \\
a_1v_1 + (a_1 + a_2)v_2 + (a_2 + a_3)v_3 + (a_3 + a_4)v_4 &= 0
\end{aligned}$$

Ya que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente, entonces $a_1 = a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = 0$. Por lo que $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$ es linealmente independiente.

Luego, demostremos que $v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_4, v_4$ es una base de V. Por definición de generador (span), podemos expresar v_1, v_2, v_3, v_4 como combinaciones lineales de $v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_4+v_4$, de la siguente manera

$$\begin{array}{rcl} v_3 & = & (v_3+v_4)-v_4 \\ \\ v_2 & = & (v_2+v_3)-(v_3+v_4)+v_4 \\ \\ v_1 & = & (v_1+v_2)-(v_2+v_3)+(v_3+v_4)-v_4 \end{array}$$

Por tanto, todos los vectores que pueden expresarnse como combinaciones lineales de v_1, v_2, v_3, v_4 también se pueden expresar linealmente por $v_1, +v_2, v_2+v_3, v_3+v_4, v_4$; es decir, $v_1, +v_2, v_2+v_3, v_3+v_4, v_4$ genera V.

18. Demostrar o dar un contraejemplo: Si v_1, v_2, v_3, v_4 es una base de V y U es un subespacio de V tal que $v_1, v_2 \in U$ y $v_3 \notin U$ y $v_4 \notin U$, entonces v_1, v_2 es una base de U.

Demostración.- Sean,

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & (1,0,0,0) \\ v_2 & = & (0,1,0,0) \\ v_3 & = & (0,0,1,0) \\ v_4 & = & (0,0,0,1). \end{array}$$

Luego, definimos

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x_3 = x_4\right\}$$

Notemos que $v_1, v_2 \in U$ y $v_3, v_4 \notin U$. Pero ninguna combinación lineal de v_1, v_2 produce $(0,0,1,1)$. Entonces, v_1, v_2 no genera U. Por lo tanto no puede formar una base.

19. Suponga que V es de dimensión finita y U es un subespacio de V tal que $\dim U = \dim V$. Demuestre que $U = V$.

Demostración.- Debemos demostrar que $U \subseteq V$ y $V \subseteq U$. Es fácil ver que $U \subseteq V$, ya que U es un subespacio de V.
Por otro lado, sean $v \in V$ y $u_1, u_2, \ldots, u_n$ base de U. Entonces, este conjunto es linealmente independiente en U, y por lo tanto también en V, esto porque U es un subespacio de V. Que sea base de U significa que $\dim U = n$. Sin embargo, $\dim U = \dim V$ implica que $\dim V = n$. Así, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ es un conjunto linealmente independiente en V con longitud igual a $\dim V$. Es decir, por 2.39 (Axler, Linear Algebra) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ es una base de V, por lo que genera V. Esto es, por 1.28 (Criterio de base) existe escalares $c_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n.$$

Notemos que $v_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$ es un vector en U. Por lo tanto, $v \in U$. Que $V \subseteq U$ y $U \subseteq V$ implica que $U = V$, como queríamos demostrar.

20. Demostrar que los subespacios de $\mathbf{R}^2$ son precisamente: $\{0\}$, $\mathbf{R}^2$, y todas las rectas en $\mathbf{R}^2$ que pasan por el origen.

Demostración.- Claramente $\{0\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^2$, porque contiene el vector cero, que está cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. En particular, cualquier combinación lineal del vector cero sigue siendo el vector cero.

Ahora, supongamos que U es un subespacio de $\mathbf{R}^2$ con $\dim U = 1$. En otras palabras, la base de U contiene solo un vector distinto de cero. Esto significa, que la lista contiene un vector distinto de cero que genera U. Esto implica que cada vector en U es un múltiplo escalar (combinación lineal) del único vector de la base. Luego, el conjunto de todos estos vectores en U describe una recta en $\mathbf{R}^2$; esto es, U es una recta en $\mathbf{R}^2$. Además, como U es un subespacio, en particular contiene la identidad aditiva $(0,0) \in \mathbf{R}^2$. Por tanto, U debe ser una recta en $\mathbf{R}^2$ que pase por el origen.

Por último, sea U un subespacio de $\mathbf{R}^2$ de dimensión 2. Entonces, por definición U tiene una base de dos vectores, digamos u_1 y u_2. Estas bases son linealmente independientes en U y por lo tanto linealmente independiente en $\mathbf{R}^2$. Sabiendo que $\dim U = \dim \mathbf{R}^2 = 2$, por 2.39 (Axler, Linear Algebra) u_1, u_2 es también una base de $\mathbf{R}^2$. Que U y $\mathbf{R}^2$ tengan la misma base, por la unicidad del criterio de base 2.28 (Axler, Linear Algebra) significa que $U = \mathbf{R}^2$.

21. (a) Sea $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \ : \ p(6) = 0\}$. Encuentre una base de U.

Respuesta.- Sea $q(x)$ de grado $n-1$. Si $p(x)$ es un polinomio y $p(c) = 0$, entonces c se dice que es una raíz de $p(x)$ y $p(x) = (x-c)q(x)$, ya que

$$p(6) = (6-6)q(6) = 0.$$

En particular, $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $p(6) = 0$. Que podemos reescribirlo como $p(x) = (x-6)q(x)$, donde $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Además, que $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$, implica que $(x-6)q(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ y 6 como raíz de $(x-6)q(x)$. Así,

$$\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \mid p(6) = 0\} = \{(x-6)q(x) \mid q \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})\}.$$

Por el problema 2(g) del apartado 2.B (Axler, Linear Algebra), se sabe que $q(x) = 1, x, x^2, x^3$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. De donde, demostremos que

$$(x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3$$

forma una base de U. Si $q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ para $a, b, c, d \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} (x-6)q(x) & = & (x-6)(a + bx + cx^2 + dx^3) \\ & = & a(x-6) + b(x-6) + c(x-6)x^2 + d(x-6)x^3. \end{array}$$

Esto implica que $(x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3$ genera U. Por último, debemos probar que $(x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3$ es linealmente independiente. Existe $a, b, c, d \in \mathbf{F}$ tal que

$$a(x-6) + b(x-6)x + c(x-6)x^2 + d(x-6)x^3 = 0.$$

Entonces,

$$-6a + (a-6b)x + (b-6c)x^2 + (c-7d)x^3 + dx^4 = 0.$$

Para que la lista sea linealmente independiente, cada coeficiente debe ser cero. En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} -6a & = & 0 \\ a-6b & = & 0 \\ b-6c & = & 0 \\ c-7d & = & 0 \\ d & = & 0. \end{array}$$

Resolviendo la ecuación, se tiene

$$\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0. \end{array}$$

Así, la lista es linealmente independiente. Por lo tanto, concluimos que

$$(x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3$$

es una base de U.

(b) Extienda la base de U en (a) a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- La condición del inciso (a) hace que 4 polinomios generen U. Ahora, por el problema 13 de la sección 2B (Axler, Linear Algebra); observamos que tenemos que tener 5 polinomios para que genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Para ello debemos extender U del inciso (a). Notemos que U tiene todos sus polinomios múltiplos de $(x-6)$, por lo que cualquier combinación lineal de U producirá otro polinomio múltiplo de $(x-6)$. Por el contrario un polinomio el cual no es múltiplo de $(x-6)$ no podrá pertenecer al generador de U; así que podemos agregar 1 a U. Está claro por el inciso (a) que los elementos de U son linealmente independientes y por lo dicho anteriormente, ninguna combinación lineal de los elementos de U pueden generar 1 (definición de independencia). Por lo tanto,

$$\{1\} \cup U = \left\{1, (x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3\right\}$$

es linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Observemos que esta lista contiene longitud igual a $\dim \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$: Entonces por 2.39 (Axler, Linear Algebra), concluimos que

$$\left\{1, (x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3\right\}$$

es una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

(c) Encuentre un subepacio W de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

Respuesta.- Supongamos $W = \{1\}$. Debemos probar que $U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ y que $U \cap W = \{0\}$. Ya que, $U \cup W$ contiene todos los polinomios base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, el espacio vectorial $U + W$ contiene a $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Esto es,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \subseteq V + W.$$

Por otro lado, puesto que $U, W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, entonces

$$U + W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Así,

$$U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Ahora, demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U \cap W$. Como $v \in U$, entonces existe $c_i \in \mathbf{F}$ tal que,

$$v = c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4.$$

De la misma forma, ya que $v \in W$ entonces existe $c_0 \in \mathbf{F}$ tal que,

$$v = c_0.$$

Luego,

$$c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 = c_0.$$

Esto implica que

$$-c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 = 0.$$

Para que la lista linealmente independiente, cada coeficiente debe ser cero. En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} -c_0 & = & 0 \\ c_1(x-6) & = & 0 \\ c_2(x-6) & = & 0 \\ c_3(x-6) & = & 0 \\ c_4(x-6) & = & 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} c_0 & = & 0 \\ c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & 0 \\ c_3 & = & 0 \\ c_4 & = & 0. \end{array}$$

Así, $v = 0$. Por lo tanto, $U \cap W = \{0\}$. Otra manera de demostrar que la lista dada es linealmente independiente sería, suponer que

$$-c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 \neq 0$$

para todo x. Pero esto es absurdo, ya que si $x = 6$, entonces

$$-c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 = 0.$$

Concluimos que $W = \{1\}$ es un subespacio de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

Ejercicios restantes del libro de Álgebra Lineal de Axler

1. Verifique todas las afirmaciones del ejemplo 2.28.

(a) La lista $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$, ..., $(0,\ldots,0,1)$ es una base de $\mathbf{F}^n$, llamado la base estándar de $\mathbf{F}^n$.

Respuesta.- Primero demostraremos que la lista genera $\mathbf{F}^n$. Sea, los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $\mathbf{F}$. Podemos escribir

$$x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + x_n(0,\ldots,0,1) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Donde, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector cualquier en $\mathbf{F}^n$. Esta expresión es una combinación lineal de los n vectores. Por definición, esta lista genera $\mathbf{F}^n$.
Ahora, demostraremos que la lista es linealmente independiente. Para ello, aplicaremos la definición. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + a_n(0,\ldots,0,1) = 0.$$

Esto implica que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0,0,\ldots,0).$$

Por lo que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Así, la lista es linealmente independiente.

(b) La lista $(1,2), (2,5)$ es una base de $\mathbf{F}^2$.

Respuesta.- Sea $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$. Buscaremos escalares c_1, c_2 tal que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = (x_1, x_2).$$

que implica,

$$c_1(1,2) + c_2(3,5) = (x_1, x_2) \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 3c_2, 2c_1 + 5c_2) = (x_1, x_2)$$

De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 3c_2 & = & x_1 \\ 2c_1 + 5c_2 & = & x_2 \end{array}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$c_2 = 2x_1 - x_2$$

Luego, reemplazándola a la primera ecuación, se tiene

$$c_1 = -5x_1 + 3x_2.$$

Por lo tanto, para cada vector $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$ podemos encontrar c_1, c_2 en función de x_1 y x_2 tal que $c_1v_1 + c_2v_2$ es una combinación lineal el cual genera $\mathbf{F}^2$.
Después, sólo nos haría falta reemplazar en

$$c_2 = 2x_1 - x_2 \quad \text{y} \quad c_1 = -5x_1 + 3x_2$$

$(x_1, x_1) = (0, 0)$. De donde,

$$c_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0.$$

Esto implica que $(1, 2)$ y $(2, 5)$ es linealmente independiente Por lo que concluimos que la lista dada es una base de $\mathbf{F}^2$.

(c) La lista $(1, 2, -4)$, $(7, -5, 6)$ es linealmente independiente en $\mathbf{F}^3$ pero no es una base en $\mathbf{F}^3$, ya que no genera $\mathbf{F}^3$.

Respuesta.- Sean los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1(1, 2, -4) + c_2(7, -5, 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (0, 0, 0)$$

Por lo que, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 7c_2 & = & 0 \\ 2c_1 - 5c_2 & = & 0 \\ -4c_1 + 6c_2 & = & 0 \end{array}$$

Multiplicando la segunda ecuación y sumando la tercera tenemos

$$c_2 = 0$$

Luego, sustituyendo en la primera ecuación,

$$c_1 = 0$$

Esto implica que los vectores dados son linealmente independientes.
Ahora, demostraremos que la lista no genera $\mathbf{F}^3$, con un contraejemplo. Supongamos que $(1, 2, -4), (7, -5, 6)$ puede generar $(1, 0, 0)$ el cual está en $\mathbf{F}^3$. Sea los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$, entonces

$$c_1(1, 2, -4) + c_2(7, -5, 6) = (1, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (1, 0, 0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 7c_2 & = & 1 \\ 2c_1 - 5c_2 & = & 0 \\ -4c_1 + 6c_2 & = & 0 \end{array}$$

De las ecuaciones 2 y 3 se tiene que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Reemplazando en la primera ecuación,

$$0 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1.$$

Lo que es un absurdo, por lo tanto $(1, 2, -4)$, $(7, -5, 6)$ no genera $\mathbf{F}^3$.

(d) La lista $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ genera $\mathbf{F}^2$ pero no es una base de $\mathbf{F}^2$, ya que no es linealmente independiente.

Respuesta.- Demostremos que la lista no es linealmente independiente. Sea $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1, 2) + a_2(3, 5) + a_3(4, 13) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_1 + 3a_2 + 4a_3, 2a_1 + 5a_2 + 13a_3) = (0, 0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & 3a_2 & + & 4a_3 & = & 0 \\ 2a_1 & + & 5a_2 & + & 13a_3 & = & 0 \end{array}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$a_2 = 5a_3.$$

Remplazando en la primera ecuación,

$$a_1 = -19a_3.$$

Sea, $a_3 = 1$, entonces

$$a_1 = -19 \quad \text{y} \quad a_2 = 5.$$

Por lo tanto, $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ no es linealmente independiente.

Ahora, demostraremos que la lista $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ genera $\mathbf{F}^2$. Sean $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1(1, 2) + a_2(3, 5) + a_3(4, 13) = 0$$

Sabiendo que esta lista es linealmente dependiente, podemos reescribimos la ecuación de modo que $(1, 2), (3, 5)$ genera $(4, 13)$:

$$(4, 13) = \frac{a_1}{a_3}(1, 2) - \frac{a_2}{a_3}(3, 5)$$

Por el lema 2.21 (Axler, Linear Algebra), vemos que el generador de $(1, 2), (3, 5)$ es igual al generador de $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$. Sólo nos faltaría demostrar que $(1, 2), (3, 5)$ genera $\mathbf{F}^2$. Para ello, sea $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$, de modo que

$$a_1(1, 2) + a_2(3, 5) = (x_1, x_2)$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} a_1 + 3a_2 & = & x_1 \\ 2a_1 + 5a_2 & = & x_2 \end{array}$$

Multiplicando la segunda ecuación por dos y restando la primera, tenemos

$$a_1 = 2x_1 - x_2.$$

Remplazando en la primera ecuación,

$$a_2 = -(5x_1 + 3x_2).$$

Por lo tanto, podemos hallar a_1 y a_2 en términos de x_1 y x_2 tal que $a_1(1, 2) + a_2(3, 5) = (x_1, x_2)$ es una combinación lineal que genera $\mathbf{F}^2$.

Siendo más prácticos podemos usar el teorema 2.23. Para saber que $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ no es linealmente independiente pero genera $\mathbf{F}^2$.

(e) La lista $(1,1,0),(0,0,1)$ es una base de $\left\{(x,x,y)\in\mathbf{F}^3\ :\ x,y\in\mathbf{F}\right\}$.

Respuesta.- Está claro que la lista es linealmente independiente. Ya que, la única forma de que se cumpla
$$c_1(1,1,0)+c_2(0,0,1)=0$$
es que c_1,c_2 sean igual a cero.
Ahora demostraremos que la lista dada genera $\left\{(x,x,y)\in\mathbf{F}^3\ :\ x,y\in\mathbf{F}\right\}$. Sea $c_1,c_2\in\mathbf{F}$ tal que
$$c_1(1,1,0)+c_2(0,0,1)=(x,x,y).$$
De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones como sigue:
$$\begin{array}{rcl} c_1+0 & = & x\\ c_1+0 & = & x\\ 0+c_2 & = & y \end{array}$$
Por lo que, cualquier $\mathbf{F}^3$ puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores $(1,1,0),(0,0,1)$ y por lo tanto generan $\mathbf{F}^3$.

(f) La lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es una base de
$$\left\{(x,y,z)\in\mathbf{F}^3\ :\ x+y+z=0\right\}.$$
Respuesta.- Si $x+y+z=0$ para $x,y,z\in\mathbf{F}$, entonces podemos escribir
$$x=-y-z.$$
Por lo que,
$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) & = & (-y-z,y-z)\\ & = & (-y,y-0)+(-z,0z)\\ & = & -y(1,-1,0)-z(1,0,-1). \end{array}$$
Debido a que y,z son escalares, implica que podemos expresar cualquier $(x,y,z)\in\mathbf{F}^3$ como una combinación lineal de los vectores $(1,-1,0),(1,0,-1)$.

Es fácil ver que que la lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es linealmente independiente. Dado que, si $c_1,c_2\in\mathbf{F}^n$, entonces
$$\begin{array}{rcl} c_1(1,-1,0)+c_2(1,0,-1) & = & 0\\ (c_1+c_2,-c_1,-c_2) & = & 0. \end{array}$$
De donde,
$$c_1=c_2=0.$$
Así, la lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es linealmente independiente. Por lo tanto,$(1,-1,0),(1,0,-1)$ es una base de $\mathbf{F}^3$

(g) La lista $1,z,\ldots,z^m$ es una base de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Respuesta.- El elemento general de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ es una combinación lineal de $1,z,z^2,\ldots,z^m$ de la forma:
$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m$$
donde $a_i\in\mathbf{F}$ para $1\leq i\leq m$. Lo que demuestra que genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Para demostrar que la lista es linealmente independiente, suponemos que la combinación lineal de estos elementos es igual a cero; es decir,

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m = 0.$$

Donde el $\mathbf{0}$ es un polinomio. Esto implica que el polinomio del lado izquierdo toma valor cero para todo los valore de z. Esto es posible sólo cuando todos los $a_i's$ son cero, ya que cualquier polinomio no trivial tiene un número finito de raíces. Por lo tanto la lista $1, z, z^2, \ldots, z^m$ es base de $\mathcal{F}_m(\mathbf{F})$.

2. (a) Sea U el subespacio de $\mathbf{C}^5$ definida por

$$U = \left\{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbf{C}^5 \ : \ 6z_1 = z_2 \ \text{ y } \ z_3 + 2z_4 + 3z_5 = 0\right\}.$$

Encuentre una base de U.

Respuesta.- De las condiciones dadas, podemos escribir el conjunto U como

$$U = \{(6z_1, z_2, -2z_4 - 3z_5, z_4, z_5) \ : \ z_2, z_4, z_5 \in \mathbf{C}\}$$

Sea $z \in U$, que implica

$$\begin{array}{rcl} z & = & (6z_1, z_2, -2z_4 - 3z_5, z_4, z_5) \\ & = & z_2(6,1,0,0,0) + z_4(0,0,-2,1,0) + z_5(0,0,-3,0,1). \end{array}$$

Entonces, $z_2(6,1,0,0,0)$, $z_4(0,0,-2,1,0)$ y $z_5(0,0,-3,0,1)$ genera U. Ahora veamos si esta lista es linealmente independiente. Sean $a, b, c \in \mathbf{F}$ tal que

$$(6a, a, -2b - 3c, b, c) = 0.$$

De donde,

$$\begin{array}{rcl} 6a & = & 0 \\ a & = & 0 \\ -2b - 3c & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0. \end{array}$$

Por lo tanto, la lista es linealmente independiente. Así, concluimos que U es generado por $z_2(6,1,0,0,0)$, $z_4(0,0,-2,1,0)$ y $z_5(0,0,-3,0,1)$.

(b) Extienda la base en la parte (a) para una base de $\mathbf{C}^5$.

Respuesta.-

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathbf{C}^5$ tal que $\mathbf{C}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.-

3. Suponga que U y W son subespacio de V tal que $V = U \oplus W$. Suponga también que $u_1, \ldots, u_m$ es una base de U y $w_1, \ldots, w_n$ es una base de W. Demostrar que

$$u_1, \ldots, u_m, \ w_1, \ldots, w_n$$

es una base de V.

Demostración.- Demostremos la independencia lineal. Sean $a_i \in \mathbf{F}$ y $c_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_m u_m + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_n w_n = 0$$

Que implica,

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m = -(c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n).$$

Suponga que,

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m = -(c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n).$$

De donde, $v \in U$ y $v \in W$; esto es $v \in U \cap W$. Dado que $V = U \oplus W$, debemos tener $U \cap W = \{0\}$. Sea $v = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} a_1u_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mu_m &= 0 \\ -(c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n) &= 0. \end{aligned}$$

Ya que, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ es base de U y W, respectivamente. Entonces, ambos son linealmente independiente. Es decir, $a_i = c_i = 0$. Por lo tanto, $u_1, \ldots, u_m,\ w_1, \ldots, w_n$ es linealmente independiente.
Ahora, demostremos que $u_1, \ldots, u_m,\ w_1, \ldots, w_n$ genera V. Sea $v \in V$, ya que $V = U \oplus W$ podemos escribir $v = u + w$ para algún $u \in U$ y $w \in W$. Luego, por el hecho de que $u_1, u_2, \ldots, u_m$ es base de U y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ es base de W, entonces

$$\begin{aligned} u &= a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m \\ w &= c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n, \end{aligned}$$

respectivamente. Por lo tanto, $v = u + w = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m + c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n$. Así, $u_1, u_2, \ldots, u_m,\ w_1, w_2, \ldots, w_n$ genera V. Concluimos que $u_1, u_2, \ldots, u_m,\ w_1, w_2, \ldots, w_n$ es base de V.

4. Demuestre que los subespacios de $\mathbf{R}^3$ son precisamente $\{0\}$, $\mathbf{R}^3$, todas las lineas en $\mathbf{R}^3$, y todas las planos en $\mathbf{R}^3$ que pasan por el origen.

Demostración.- Suponga El conjunto $\{0\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^3$, ya que está cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. Es decir, para cualquier vector u y v en $\{0\}$ y cualquier escalar c, tenemos $u + v = 0 + 0 = 0$ y $cu = c(0) = 0$, ambos también están en $\{0\}$.

Suponga U un subespacio de $\mathbf{R}^2$ de $\dim U = 1$. Entonces la longitud de la base de U es 1; en otras palabras, la base de U contiene solo un vector no nulo. En particular, la lista contiene un vector no nulo que genera U; es decir, cada vector en U es un múltiplo escalar (combinación lineal) del único vector de la base. Luego, el conjunto de todos estos vectores en U describe una recta en $\mathbf{R}^3$. Esto es, U es una recta en $\mathbf{R}^3$. Además, como U es un subespacio, podemos asegurar que contiene la identidad aditiva $(0,0,0) \in \mathbf{R}^3$. Por lo tanto, U debe ser una recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen.

Suponga U un subespacio de $\mathbf{R}^3$ de $\dim U = 2$. Entonces la longitud de la base de U es 2. En particular, la base de U contiene dos vectores no nulos. En particular, la lista contiene dos vectores no nulos que genera U. Es decir, cada vector en U es una combinación lineal de los dos vectores de la base. Luego, el conjunto de todos estos vectores en U describe un plano en $\mathbf{R}^3$. Esto es, U es un plano en $\mathbf{R}^3$. Además, como U es un subespacio, podemos asegurar que contiene la identidad aditiva $(0,0,0) \in \mathbf{R}^3$. Por lo tanto, U debe ser un plano en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen.

Después, sea U un subespacio de $\mathbf{R}^3$ de dimensión 3. Entonces, por definición U tiene una base de dos vectores, digamos u_1 u_2 y u_3. Estas bases son linealmente independientes en U y por lo tanto linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$. Sabiendo que $\dim U = \dim \mathbf{R}^3 = 3$, por 2.39 (Axler, Linear Algebra) u_1, u_2, u_3 es también una base de $\mathbf{R}^3$. Que U y $\mathbf{R}^3$ tengan la misma base, por la unicidad del criterio de base 2.28 (Axler, Linear Algebra) significa que $U = \mathbf{R}^3$.