

Tres teoremas fuertes

TEOREMA 1.1 Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto.

TEOREMA 1.2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a, b]$.

Geométricamente, este teorema significa que la gráfica f queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal.

TEOREMA 1.3 Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe algún número y en $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Se dice que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo en dicho intervalo.

TEOREMA 1.4 Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Demostración.- Sea $g = f - c$. Entonces g es continua, y $g(a) + c < c < g(b) + c \implies g(a) < 0 < g(b)$. Por el teorema 1, existe algún x en $[a, b]$ tal que $g(x) = 0$. Pero esto significa que $f(x) = c$.

TEOREMA 1.5 Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a, b]$ y $-f(a) < -c < -f(b)$. Por el teorema 4 existe algún x en $[a, b]$ tal que $-f(x) = -c$, lo que significa que $f(x) = c$.

Si una función continua en un intervalo toma dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre ellos; esta ligera generalización del teorema 1 recibe a menudo el nombre de **teorema de los valores**

intermedios.

TEOREMA 1.6 Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es acotada inferiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo x en $[a, b]$.

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a, b]$, así por el teorema 2 existe un número M tal que $-f(x) \leq M$ para todo x en $[a, b]$. Pero esto significa que $f(x) \geq -M$ para todo x en $[a, b]$, así podemos poner $N = -M$.

Los teoremas 2 y 6 juntos muestran que una función continua f en $[a, b]$ son acotados en $[a, b]$, es decir, existe un número N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo x en $[a, b]$. En efecto, puesto que el teorema 2 asegura la existencia de un número N_1 tal que $f(x) \leq N_1$, para todo x de $[a, b]$ y el teorema 6 asegura la existencia de un número N_2 tal que $f(x) \geq N_2$, para todo x en $[a, b]$, podemos tomar $N = \max(|N_1|, |N_2|)$.

TEOREMA 1.7 Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún y en $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a, b]$; por el teorema 3 existe algún y en $[a, b]$ tal que $-f(y) \geq -f(x)$ para todo x en $[a, b]$, lo que significa que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

TEOREMA 1.8 Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si $\alpha > 0$, entonces existe algún número x tal que $x^2 = \alpha$.

Demostración.- Consideremos la función $f(x) = x^2$, el cual es ciertamente continuo. Notemos que la afirmación del teorema puede ser expresado en términos de f : "el número α posee una raíz cuadrada" significa que f toma el valor α . La demostración de este hecho acerca de f será una consecuencia fácil del teorema 4.

Existe, evidentemente, un número $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$; en efecto, si $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$, mientras que si $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Puesto que $f(0) < \alpha < f(b)$, el teorema 4 aplicado a $[0, b]$ implica que para algún x de $[0, b]$, tenemos $f(x) = \alpha$, es decir, $x^2 = \alpha$.

Precisamente el mismo raciocinio puede aplicarse para demostrar que todo número positivo tiene una raíz n -ésima, cualquiera que sea el número n . Si n es impar, se puede decir mas: todo número tiene una raíz n -ésima. Para demostrarlo basta observar que si el número positivo α tiene la raíz n -ésima x , es decir, si $x^n = \alpha$, entonces $(-x)^n = -\alpha$ (puesto que n es impar), de modo que α tiene una raíz n -ésima $-\alpha$. Afirmar que, para un n impar, cualquier número α tiene una raíz n -ésima equivale a afirmar que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

tiene una raíz si n es impar. El resultado expresado de este modo es susceptible de gran generalización.

TEOREMA 1.9

1.1. Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles está acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo y mínimo.

(i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. El mínimo es 0 e no tiene máximo.

(ii) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. No tiene máximo ni mínimo

(iii) $f(x) = x^2$ en \mathbf{R} .

Respuesta.- No está acotado superior pero si inferiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(iv) $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$.

Respuesta.- Está acotada inferiormente pero no así superiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a + 2, & x \geq a \end{cases}$ en $(-a - 1, a + 1)$

Respuesta.- Es acotado superior e inferiormente. Se entiende que $a > -1$ (de modo que $-a - 1 < a + 1$). Si $-1 < a \leq 1/2$, entonces $a < -a - 1$, así $f(x) = a + 2$ para todo x en $(-a - 1, a + 1)$, por lo tanto $a + 2$ es el máximo y mínimo valor. Si $-1/2 < a \leq 0$, entonces f tiene el mínimo valor en a^2 , y si $a \geq 0$, entonces f tiene un mínimo valor en 0. Ya que $a + 2 > (a + 1)^2$ solo para $[-1 - \sqrt{5}]/2 < a < [1 + \sqrt{5}]/2$, cuando $a \geq -1/2$ ésta función f tiene un máximo valor solo para $a \leq [1 + \sqrt{5}]/2$ (el máximo valor será $a + 2$).

(vi)