CÁLCULO DE UNA VARIABLE

James Stewart

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1

Funciones y modelos

Definición 1.1 *Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.*

$$\{(x, f(x))/x \in D\}$$

la función f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f

Definición 1.2 *Una función se llama **creciente** sobre un intervalo l si*

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } l$$

*Se llama **decreciente** sobre l si*

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } l$$

1.1. Ejercicios

1. Si $f(x) = x + \sqrt{2-x}$ y $g(u) = u + \sqrt{2-u}$. ¿Es verdad que $f = g$?

Respuesta.- Es verdad ya que no afecta en nada el símbolo que se podría colocar a la variable dependiente.

2. Si $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ y $g(x) = x$ ¿Es verdad que $f = g$?

Respuesta.- No es verdad ya que el dominio de la función g son todos los reales contrariamente a la función f que no se cumple para $x = 1$

3. La gráfica de una función f está dada.

(a) Indique el valor de $f(1)$

Respuesta.- El valor es 3

(b) Calcule el valor de $f(-1)$

Respuesta.- El valor es $-0{,}3$ aproximadamente.

(c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 1$?

Respuesta.- Por definición solo se cumple para 0

(d) Calcule el valor de x tal que $f(x) = 0$

Respuesta.- El valor es aproximadamente $-0{,}7$

(e) Indique el dominio y el rango de f

Respuesta.- $f_D = \{x \in f_D / -2 \leq x \leq 4\}$, y $f_R = \{y \in f_R / -1 \leq y \leq 3\}$

(f) ¿En qué intervalo f es creciente?

Respuesta.- Es creciente en el intervalo $[-2, 1]$

4. Las gráficas de f y g están dadas.

(a) Indique los valores de $f(-4)$ y $g(3)$

Respuesta.- $f(-4) = -2$ y $g(3) = 4$

(b) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?

Respuesta.- Para 2, y -2

(c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$

Respuesta.- $x = -3$

(d) ¿Sobre qué intervalo f es decreciente?

Respuesta.- Sobre $[0, 4]$

(e) Establezca el dominio y el rango de f

Respuesta.- El dominio de f es $[-4, 4]$ y el rango de $[-2, 3]$

(f) Establezca el dominio y el rango de g

Respuesta.- El dominio es de $[-4,3]$ y el rango de $[0{,}5,4]$

5. La gráfica de la figura 1 fue registrada por un instrumento operado por el departamento de minas y geología de California en el hospital Universitario de California del Sur de Los Ángeles. Utilice esta gráfica para estimar el rango de la función aceleración vertical de suelo, en la Universidad de California del Sur, durante el terremoto de Northridge.

Respuesta.- El rango de la función de aceleración vertical del suelo es dado por el intervalo $[-1,3]$

6. En esta sección se discuten ejemplos de funciones cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo, de envío postal es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. De otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describen verbalmente. ¿Qué puede decir sobre el dominio y el rango de cada una de sus funciones? Si es posible, trace una gráfica de cada función.

Respuesta.-

7. No cumple con la definición de función.

8. Cumple con la definición de función por lo tanto $f_D = \{x/-2 \leq x \leq 2\}$ y $f_R = \{y \in f(x)/-1 \leq y \leq 2\}$

9. Cumple con la definición de función por lo tanto $f_D = \{x/-3 \leq x < -2 \ \cup \ -2 \leq x \leq 2\}$ y $f_R = \{y \in f(x)/-3 \leq x < -2 \ \cup \ -2 \leq y \leq 2{,}6\}$

10. No cumple con la definición de función por lo tanto no se tiene un dominio y rango.

11. En la figura se muestra una gráfica de la temperatura media global T durante el siglo XX. Estime lo siguiente.

(a) La temperatura media mundial en 1950

Respuesta.- 14.5 grados centígrados.

(b) El año en que la temperatura promedio fue de 14,2 C.

Respuesta.- Aproximadamente en 1905

(c) ¿En qué año la temperatura fue más baja? ¿Más alta?

Respuesta.- Fue más baja en 1920 y más alta en 2010

(d) El rango de T

Respuesta.- El rango se encuentra en el intervalo de $[12{,}8, 14{,}8]$

12. Los arboles crecen más rápido y forman anillos más amplios en los años cálidos y crecen más lentamente y forman anillos más angostos en los años más fríos. La figura muestra anillos anchos del pino Siberiano de 1500 a 2000.

(a) ¿Cuál es el rango de la función de ancho de anillo?

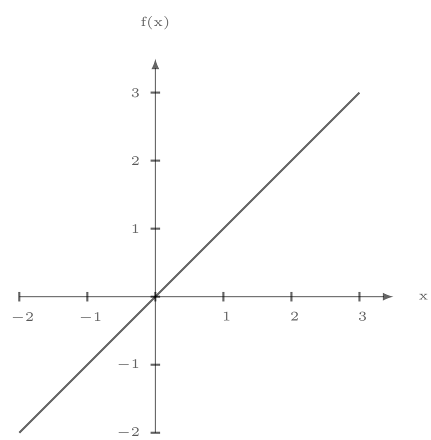
Respuesta.- El rango es de 0,1 a 1,41 aproximadamente.

(b) ¿Qué dice la gráfica acerca de la temperatura de la tierra? ¿La gráfica refleja las erupciones volcánicas de la mitad del siglo XIX?

Respuesta.- La temperatura cada vez es más cálida mientras pasa los años.
Se ve un pequeño realce entre $1800-1890$ donde podría haber existido algunas erupciones volcánicas.

13. Se ponen unos cubitos de hielo en un vaso, se llena el vaso con agua fría y luego se coloca sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua conforme transcurre el tiempo. Luego trace una gráfica de la temperatura del agua como una función del tiempo transcurrido.

Respuesta.- La temperatura va disminuyendo constantemente en función a la temperatura ambiente y del tiempo.



14. Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros. La gráfica muestra la distancia recorrida como una función del tiempo de cada corredor. Describa en palabras lo que la gráfica indica acerca de esta carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada corredor terminó la carrera?

Respuesta.- Gano la carrera el competidor A. Efectivamente cada competidor acabo la carrera.

15. La gráfica muestra el consumo de energía para un día de septiembre en San Francisco. (P se mide en megawatts: t se registra en horas a partir de la medianoche).

(a) ¿Cual fue el consumo de potencia a las 6 : 00? ¿A las 18 : 00?

Respuesta.- Para las 6 : 00 el consumo de potencia es 500 megawatts. y para las 18 : 00 es 720 megawatts.

(b) ¿Cuándo fue el consumo de energía más bajo? ¿Cuándo fue el más alto? ¿Estos tiempos parecen razonables?

Respuesta.- El más bajo fue a hrs. 4 : 00 y el mas alto fue en a hrs. 12 : 00. Los tiempos son razonables por la actividad que se puede realizar a esas horas.

16. Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz en función de la época del año.

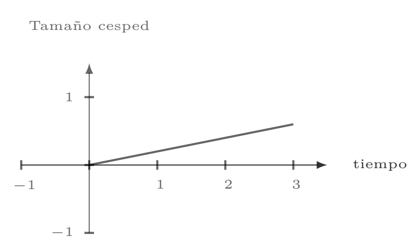
17. Trace una gráfica de la temperatura exterior en función del tiempo, durante un día típico de primavera.

18. Trace una gráfica aproximada del valor de mercado de un nuevo automóvil en función del tiempo, durante un periodo de 20 años. Suponga que el automóvil se mantiene en buen estado.

19. Trace la gráfica de la cantidad de una determinada marca de café vendido por una tienda en función del precio del café.

20. Coloque una tarta congelada en un horno y caliéntela durante una hora. Luego sáquela y déjela enfriar antes de comerla. Describa cómo cambia la temperatura de la tarda conforme pasa el tiempo. Luego trace una gráfica de la temperatura de la tarta en función del tiempo.

21. El propietario de una casa poda el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica de la altura del césped como una función del tiempo, en el transcurso de un periodo de cuatro semanas.



22. Un avión despega desde un aeropuerto y aterriza una hora más tarde en otro aeropuerto a 400 km de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado la terminal. $x(t)$ es la distancia horizontal recorrida y $y(t)$ la altitud del avión, trace

(a) Una posible gráfica de $x(t)$

(b) Una posible gráfica de $y(t)$

(c) Una posible gráfica de la rapidez respecto al suelo.

(d) Una posible gráfica de la velocidad vertical.

23. La siguientes lecturas de temperatura T (en C°) se registraron cada tres horas desde la medianoche a las $15:00$ en Montreal, el 13 de junio de 2004. El tiempo t se midió en horas a partir de la medianoche.

(a) Utilice las lecturas para trazar una gráfica de T como una función de t.

(b) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las $11:00$

24. Los investigadores midieron la concentración de alcohol en la sangre de ocho sujetos masculinos adultos después de consumir en forma rápida 30 mL de etanol. La tabla muestra los datos que se obtubieron promediando la BAC de los ocho hombres.

(a) Utilice las lecturas para trazar la gráfica de la BAC en función de t.

(b) Utilice la gráfica para describir cómo el efecto del alcohol varía con el tiempo.

25. Si $f(x)2x^2-x+2$, determine $f(2),\ f(-2),\ f(a),\ f(-a),\ f(a+1),\ 2f(a),\ f(2a),\ f(a^2),\ [f(a)^2],\ y\ f(a+h)$

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl}
f(2) & = & 2\cdot 2^2-2+2=8 \\
f(-2) & = & 2\cdot(-2)^2+2+2=12 \\
f(a) & = & 2a^2-a+2 \\
f(-a) & = & 2(-a)^2-(-a)+2 \\
f(a+1) & = & 2(a+1)^2-(a+1)+2 \\
2f(a) & = & 2(2a^2-a+2) \\
f(2a) & = & 2(2a)^2-2a2 \\
f(a^2) & = & 2(a^2)^2-a^2+2 \\
f(a)^2 & = & (2a^2+a-2)^2 \\
f(a+h) & = & 2(a+h)^2-(a+h)+2
\end{array}$$

26. Un globo esférico con radio de r centímetros tiene volumen $V(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire necesaria para inflar el globo de un radio de r centímetros a un radio $r+1$ centímetros.

Respuesta.- $V(r+1)=\dfrac{4}{3}\pi(r+1)^3$

$(27-30)$ Evalúe el cociente de diferencia de cada una de las siguientes funciones. Simplifique su respuesta.

27. $f(x) = 4 + 3x - x^2, \quad \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

Respuesta.- Se tiene

$$\frac{4 + 3(3+h) - (3+h)^2 - 4 + 9 - 9}{h} = \frac{9 + 3h - 9 - 6h - h^2}{h} = \frac{-h^2 - 3h}{h} = -(h+3)$$

28. $f(x) = x^3, \quad \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Respuesta.- $\dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \dfrac{a^3 + 3a^2h + 3ah^3 + h^3 - a^3}{h} = \dfrac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = h^2 + 3a^2 + 3ah$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Respuesta.-

$$\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}}{x - a} = \frac{\dfrac{a - x}{xa}}{x - a} = \frac{-(x-a)}{xa(x-a)} = -\frac{1}{xa}$$

30. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}, \qquad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Respuesta.-

$$\frac{\dfrac{x+3}{x+1} - 2}{x - 1} = \frac{\dfrac{x + 3 - 2(x+1)}{x+1}}{x - 1} = \frac{\dfrac{-x-1}{x+1}}{x-1} = \frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x-1}$$

$31 - 37$ Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

31. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 9}$

Respuesta.- Debemos tomar en cuenta que no podemos dividir por 0. Por lo tanto igualamos el denominador a 0.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0$$

entonces el dominio esta dado por todo $x - \{-3, 3\}$

32. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

Respuesta.- Ponemos a prueba

$$x^2 + x - 6,$$

entonces $(x+2)(x-3) = 0$ por lo tanto El dominio esta dado para todo $x - \{-2, 3\}$

33. $f(t) = \sqrt[3]{2t-1}$

Respuesta.- El dominio es dado para todo x, ya que la raíz cubica puede ser evaluada para número no positivos.

34. $g(t) = \sqrt{3-y} - \sqrt{2+t}$

Respuesta.- Evaluamos raíces cuadradas para números no negativos por lo tanto, $3-t \geq 0; \quad 2+t \geq 0$ entonces el dominio de la función esta dado por $-2 \leq t \leq 3$.

35. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-5x}}$

Respuesta.- Sea $x^2 - 5x \geq 0$, de donde $x(x-5) \geq 0$, así, $x \geq 0 \wedge x-5 \geq 0 \vee x \leq 0 \wedge x-5 \leq 0$, por lo tanto el dominio esta dado por $x \leq 0 \vee x \geq 5$.

36. $f(u) = \dfrac{u+1}{1+\dfrac{1}{u+1}}$

Respuesta.- Primeramente evaluamos $u+1=0$, entonces $u=-1$, luego evaluamos $1+\dfrac{1}{u+1}=0$, de donde $u=-2$, por lo tanto $\{x/x \neq = -1, -2\}$

37. $F(p) = \sqrt{2-\sqrt{p}}$

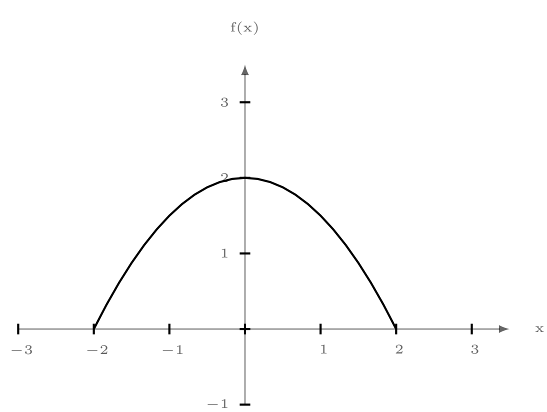
Respuesta.- Evaluamos primero $\sqrt{p}$ de donde $p \geq 0$ luego evaluamos $\sqrt{2-\sqrt{p}} \geq 0$, así $p \leq 4$ por lo tanto el dominio esta dado por $0 \leq x \leq 4$

38. Encuentre el dominio y el rango, y dibuje la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4-x^2}$

Respuesta.- Evaluamos el dominio de la función,

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -(x^2-4) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \leq 0$$

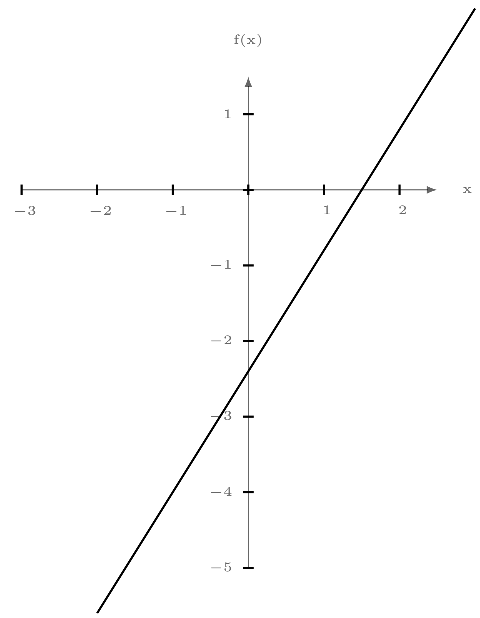
por lo tanto el dominio esta dado por $\{x/-2 \leq x \leq 2\}$.
Luego es fácil evaluar el rango, $\{f(x)/0 \leq f(x) \leq 2\}$



39 − 40 Encuentre el dominio y grafique cada una de las funciones siguientes:

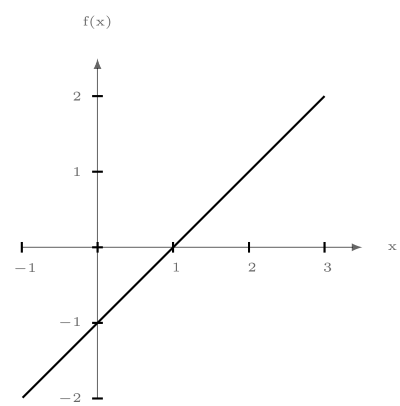
39. $f(x) = 1{,}6x - 2{,}4$

Respuesta.- El dominio viene dado por todos los reales.



40. $g(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t + 1}$

Respuesta.- El dominio esta dado por $\{x/x \neq -1\}$

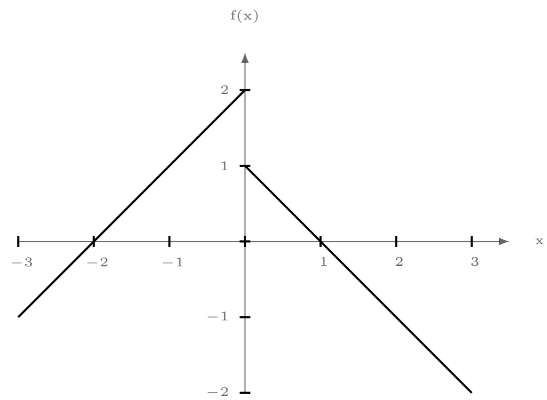


41 − 44 Evalúe $f(-3), f(0)$ y $f(2)$ para la función definida por partes. Luego trace la gráfica de la función.

41. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & si \quad x < 0 \\ 1 - x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Respuesta.-

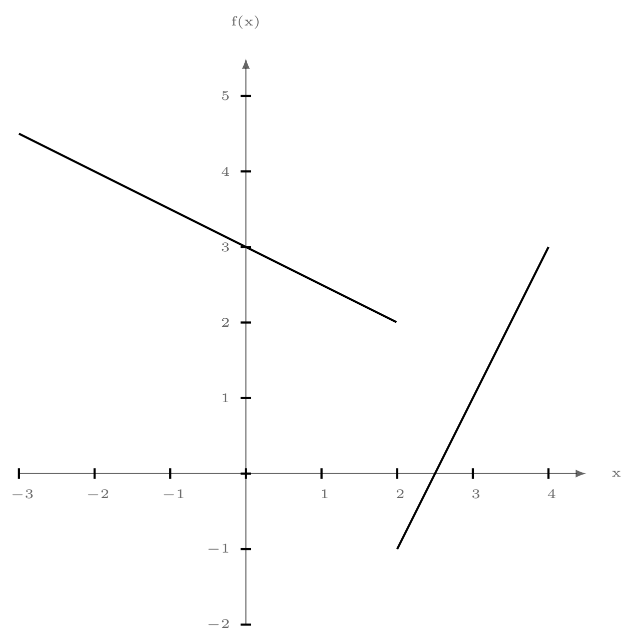
- $f(-3) = x + 2 = -3 + 2 = -1$.
- $f(0) = 1 - x = 1 - 0 = 1$.
- $f(2) = 1 - x = 1 - 2 = -1$.



42. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & si \quad x < 2 \\ \\ 2x - 5 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

Respuesta.-

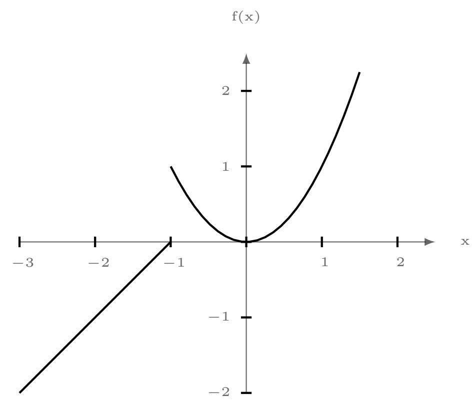
- $f(-3) = 3 - \frac{1}{2}x = 3 - \frac{1}{2}(-3) = \frac{9}{2}$.
- $f(0) = 3 - \frac{1}{2}x = 3 - \frac{1}{2}(0) = 3$.
- $f(2) = 2x - 5 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$.



43. $f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \leq -1 \\ x^2 & si \quad x > -1 \end{cases}$

Respuesta.-

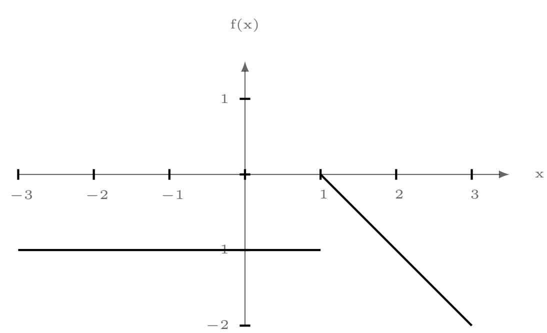
- $f(-3) = x + 1 = -3 + 1 = -2.$
- $f(0) = x^2 = 0^2 = 0.$
- $f(2) = x^2 = 2^2 = 4.$



44. $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \leq 1 \\ 7-2x & si \quad x > 1 \end{cases}$

Respuesta.-

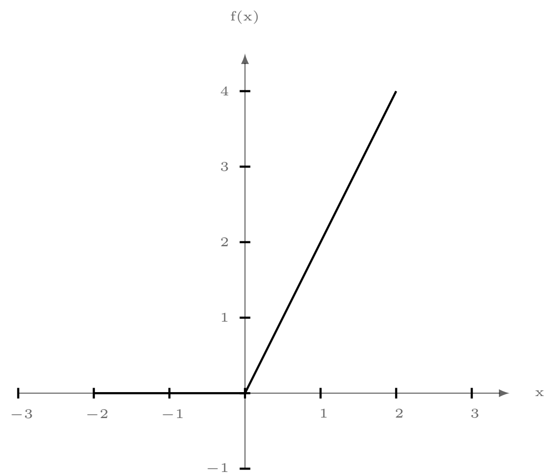
- $f(-3) = -1.$
- $f(0) = -1.$
- $f(2) = 7 - 2x = 7 - 2 \cdot 2 = 3.$



45 – 50 Trace la gráfica de la función.

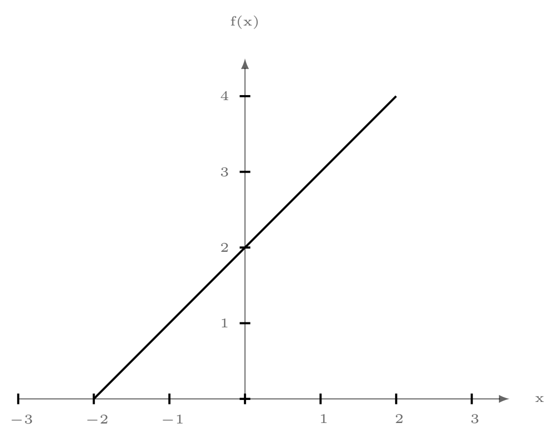
45. $f(x) = x + |x|$

Respuesta.-



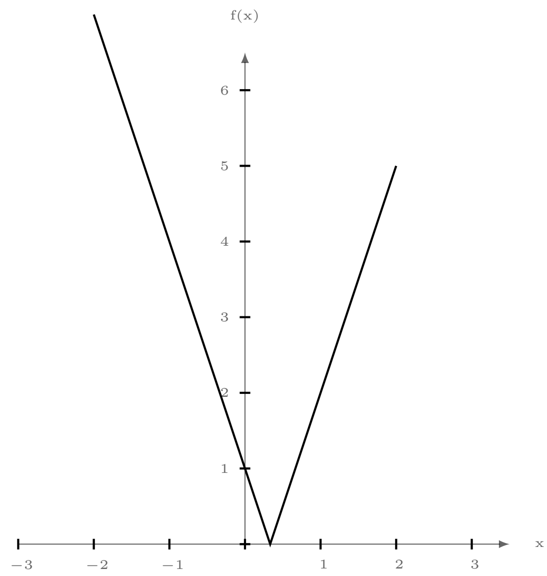
46. $f(x) = |x + 2|$

Respuesta.-



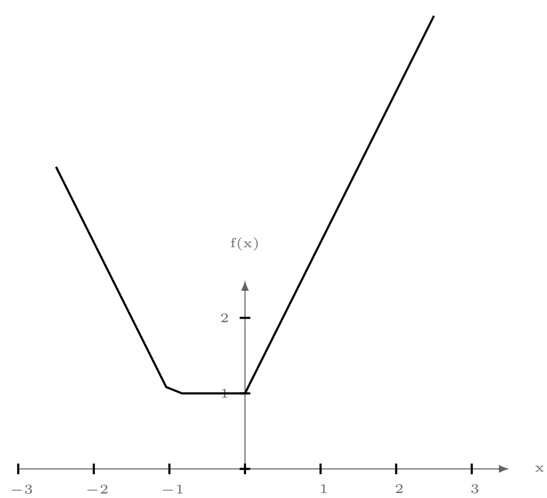
47. $g(t) = |1 - 3t|$

Respuesta.-



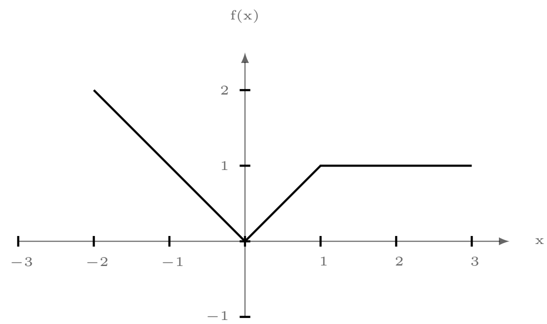
48. $h(t) = |t| + |t + 1|$

Respuesta.-



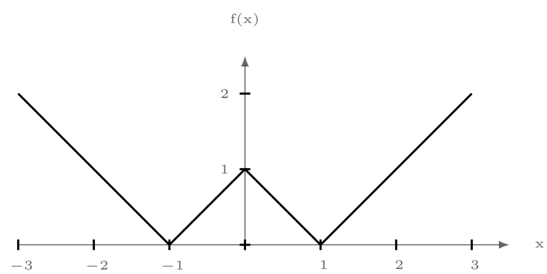
49. $f(x) = \begin{cases} |x| & si \quad |x| \leq 1 \\ 1 & si \quad |x| > 1 \end{cases}$

Respuesta.-



50. $g(x) = ||x| - 1|$

Respuesta.-



$51 - 56$ Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

51. El segmento de recta que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$

Respuesta.- el segmento viene dado por la ecuación $f(x)ax + b$ donde a es la pendiente y b el punto de corte. Formando un sistemas de ecuaciones con el primero y segundo punto respectivamente se tiene

$$-3 = a + b \qquad y \qquad 7 = 5a + b,$$

operando nos queda que $a = \dfrac{10}{4}$ y $b = -\dfrac{11}{2}$, por lo tanto la función viene dado por $f(x) = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{11}{2}$.

52. El segmento de recta que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio tenemos las ecuaciones

$$10 = -5a + b \qquad y \qquad -10 = 7a + b$$

de donde $a = -\dfrac{5}{3}$ y $b = \dfrac{5}{3}$ y por lo tanto

$$f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$$

53. La mitad inferior de la parabola $x + (y-1)^2 = 0$

Respuesta.- Se tiene $(y-1)^2 = -x \Longrightarrow y = \pm\sqrt{-x}+1$, luego la mitad inferior esta dada por $y = -\sqrt{-x}+1$

54. La mitad inferior de la circunferencia $x^2 + (y-2)^2 = 4$

Respuesta.- Se tiene $(y-2)^2 = 4 - x^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{5-x^2} + 2$, por lo tanto la parte superior de la circunferencia esta dado por $y = \sqrt{5-x^2} + 2$

55. Respuesta.-

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & si \quad 0 \leq x \leq 3 \\ \\ 2x-6 & si \quad 3 < x \leq 5 \\ \end{cases}$$

56. Respuesta.-

$$f(x) = \begin{cases} 2/3x+3 & si \quad -4 \leq x \leq -2 \\ \\ \sqrt{2-x^2} & si \quad -2 < x < 2 \\ \\ 2/3x-3 & si \quad 2 \leq x \leq 4 \\ \end{cases}$$

$57-61$ Encuentre una fórmula y el dominio para cada una de las funciones siguientes.

57. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Exprese el área del rectágulo en función de la longitud de uno de sus lados.

Respuesta.- Sea $A_{rec} = b \cdot h$ el área de un rectángulo y $2b + 2h = 20$ el perímetro. Entonces $h = 10 - b$ por lo tanto $A_{rec} = b(10-b)$

58. Un rectángulo tiene 16 m^2 de área. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

Respuesta.- Similar al anterior problema el perímetro viene dado por $2b+2h = P$ y el área por $16 = b \cdot h$ entonces $b = \dfrac{16}{h}$ por lo tanto $P = \dfrac{32+2h^2}{h}$

59. Exprese el área de un triángulo equilátero, como función de la longitud de un lado.

Respuesta.- $f(x) = \dfrac{L^2\sqrt{3} \cdot L}{4}$

60. Una caja rectangular cerrada con volumen 6 m^3 tiene un largo de dos veces el ancho. Exprese la altura de la caja como una función del ancho.

Respuesta.- El volumen viene dado por $6 = l \cdot a \cdot h$. Luego nos indica que $2l = a$, luego $h(a) = a + \dfrac{a}{2} - 6$

61. Una caja rectangular abierta con 2 m^3 de volumen tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base.

Respuesta.- Siendo la base cuadrada: $Vol = b^2h \Longrightarrow 2 = b^2h \Longrightarrow h = 2/b^2$ luego $A = b^2 + 4 \cdot (bh)$, de donde nos queda $A = b^2 + 4(b \cdot \dfrac{2}{b^2} = b^2 + \dfrac{8}{b}$

62. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la venta es de 10 m, exprese el área A de la ventana en función del ancho x de la ventana.

Respuesta.- Sea $A_{cuad} = x \cdot y$ y $A_{circ} = \pi \cdot r^2$ de donde $r = \dfrac{x}{2}$ por lo tanto $A_{circ} = \pi \cdot \dfrac{x^2}{8}$. Ya que se tiene un semicírculo. Luego el perímetro esta dado por $10 = 2y + x + 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{x}{2}$ entonces $y = \dfrac{x + \pi x - 10}{2}$. Finalmente se tiene $A_{Total} = A_{cuad} + A_{circ}$ entonces $A_{Total} = x \cdot \dfrac{x + \pi x - 10}{2} + \dfrac{\pi x^2}{8} \Longrightarrow A_{Total} = 2\pi^2 x^2 - 10x$

63. Se va a construir una caja sin tapa, a partir de una hoja rectangular de cartón que tiene dimensiones de 12 por 20 centímetros, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja en función de x.

Respuesta.- El volumen es dado por $V = L \cdot a \cdot h$ luego $h = x, \quad a = 12 - 2x, \quad L = 20 - 2x$ por lo tanto

$$V(x) = (20 - 2x)(12 - 2x) - x \quad \Longrightarrow \quad V(x) = 4x^3 - 424x^2 + 240x$$

64. Un plan de telefonía celular tiene una carga básica de 35 dólares al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cargos de 10 centavos de dólar por cada minuto adicional de uso. Escriba el costo mensual C como una función del número x de minutos utilizados, y trace la gráfica de C como una función de x para $0 \leq x \leq 600$.

Respuesta.- Sea x la cantidad de minutos del plan, entonces

$$C(x) = \begin{cases} 35 & si \quad 0 \leq x \leq 400 \\ \\ 35 + 0{,}1(x - 400) & si \quad 400 < x \leq 600 \end{cases}$$

65. En cierto estado del país, la velocidad máxima permitida en autopistas es 100 km/h y la velocidad mínima es de 50 km/h. La multa para los conductores que violan estos límites es \$10 por cada kilómetro por hora arriba de la velocidad máxima o debajo de la velocidad mínima. Exprese el monto de la multa F como una función de la velocidad x a la que se conduce y trace la gráfica de $F(x)$ para $0 \leq x \leq 180$.

Respuesta.-

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 50 \leq x \leq 100 \\ 10 & \text{si } 0 \leq x < 50 \text{ o } 100 < x \leq 180 \end{cases}$$

Ahora bien después nos cobran \$10 por una kilómetro por hora mas rápido o mas lento de lo establecido con lo cual:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 50 \leq x \leq 100 \\ 10 & \text{si } 100 < x \leq 101 \text{ o } 49 \leq x < 50 \\ 20 & \text{si } 101 < x \leq 102 \text{ o } 48 \leq x < 49 \end{cases}$$

Luego bien si el automotor se mueve ya sea k millas por hora mas rápido o mas lento entonces la expresión resultante es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & 50 \leq x \leq 100 \\ 10k & \text{si} & \begin{array}{c} 100 + (k-1) < x \leq 100 + k \\ 50 - (k+1) \leq x < 50 - k \end{array} \end{cases}$$

66. Una compañía de electricidad cobra a sus clientes una tasa base de 10 dólares al mes, más 6 centavos de dólar por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 1200 kWh y 7 centavos de dólar por kWh para todo uso arriba de 1200 kWh. Exprese el costo mensual E como una función de la cantidad x de electricidad utilizada. Luego trace la gráfica de la función E para $0 \leq x \leq 2000$.

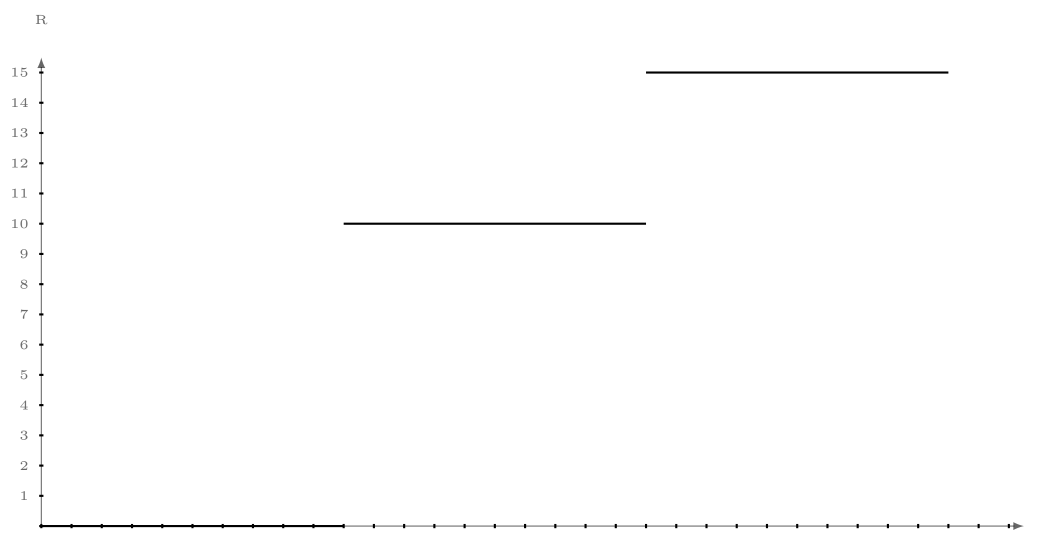
Respuesta.- La ecuación viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 10 + (0,006 \cdot x & si \quad 0 \leq x \leq 1200 \\ \\ 0,07x - 2 & si \quad x > 1200 \\ \end{cases}$$

67. En un determinado país, el impuesto sobre la renta se calculo como sigue. No hay impuesto sobre la renta para ingresos de hasta \$10000. Los ingresos de más de \$10000 se gravan con una tasa de 10 %, hasta un ingreso de \$20000. Los ingresos superiores a \$20000 se gravan en 15 %.

(a) Trace la gráfica de la tasa de impuestos R en función del ingreso I.

Respuesta.-

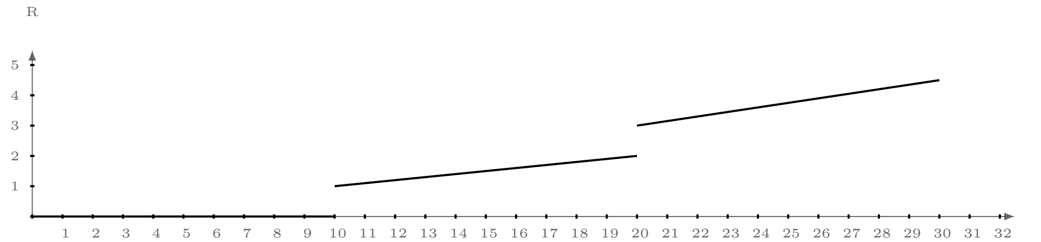


(b) ¿Qué impuesto corresponde a un ingreso de \$14000?

Respuesta-. Le corresponde un impuesto de $0{,}1 \cdot 14000 = \$1400$.

(c) Trace la gráfica del impuesto T en función del ingreso I.

Respuesta.-



68. Las funciones del ejemplo 10 y el ejercicio 67 se llaman funciones escalón porque sus gráficas parecen escaleras. Sugiera dos ejemplos de funciones escalón que surgen en la vida cotidiana.

Respuesta.- Cualquier ejemplo donde sea constantemente en los subintervalos.

$69 - 70$ Se muestran las gráficas de f y g. Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

69. Vemos que f y g son par ya que las gráfica son simétricas respecto a la ordenada. Contrariamente a g que es impar ya que es simétrica al origen.

70. f no es par ni impar ya que no tiene simetría en la ordenada ni respecto al origen. Luego g es par ya que es simétrico respecto a la ordenada.

71.

1) Si el punto $(5, 3)$ está en la gráfica de una función par ¿Cuál otro punto debe estar en la gráfica?

   Respuesta.- Tendría que estar el punto $(-5, 3)$

2) Si el punto $(5, 3)$ está en la gráfica de una función impar, ¿Cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

   Respuesta.- Estaría el pinto $(-5, -3)$

72. Una función f tiene dominio $[-5, 5]$ y se muestra una porción de su gráfica.

(a) Complete la gráfica de f si se sabe que f es par.

(b) Complete la gráfica de f si se conoce que f es impar.

$73 - 78$ Determine si f es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora. Utilícela para verificar visualmente su respuesta.

73.