Ejercicios capítulo 6

Christian Limbert Paredes Aguilera

2022-08-12

Ejercicios Capítulo 6

6.1.

Se seleccionaron, aleatoriamente, 60 personas y se le preguntó su preferencia con respecto a tres marcas, A, B y C. Estas fueron de $27, 18$ y 15 respectivamente. ¿Qué tan probable es este resultado si no existen otras marcas en el mercado y la preferencia se comparte por igual entre las tres?.

Respuesta.- Ya que las preferencias son iguales entonces, se utilizará la función de distribución multinomial, comos se verá a continuación:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}; n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

De donde

$$p(27, 18, 15; 60, 1/3, 1/3, 1/3) = \frac{60!}{27!18!15!} \left(\frac{1}{3}\right)^{27} \left(\frac{1}{3}\right)^{18} \left(\frac{1}{3}\right)^{15} = 0.002153159.$$

```
factorial(60)/(factorial(27)*factorial(18)*factorial(15))*(1/3)^(27)*(1/3)^(18)*(1/3)^(15)
```

```
## [1] 0.002153159
```

```
dmultinom(c(27,18,15),60,c(1/3,1/3,1/3))
```

```
## [1] 0.002153159
```

6.2.

Supóngase que de un proceso de producción se seleccionan, de manera aleatoria, 25 artículos. Este proceso de producción por lo general produce un 90% de artículos listos para venderse y un 7% reprocesables. ¿Cuál es la probabilidad de que 22 de los 25 artículos estén listos para venderse y que dos sean reprocesables?.

Respuesta.- Sea la función de distribución trinomial

$$p(x, y; n, p_i, p_2) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^{n-x-y}.$$

Entonces,

$$p(22, 2; 25, 0.9, 0.07) = \frac{25!}{22!2!(25-22-2)!} 0.9^{22} 0.07^2 (1 - 0.9 - 0.07)^{25-22-2} = 0.09988531.$$

```
(factorial(25)/(factorial(22)*factorial(2)*factorial(25-22-2))*
   0.9^(22)*0.07^(2)*(1-0.9-0.07)^(25-22-2))
```

```
## [1] 0.09988531
```

6.3.

Sean X y Y dos variables aleatorisa continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x-y}{5} & 1 < x < 2, \quad 1 < y < 3, \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Obtener la función de distribución conjunta acumulativa.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x \int_0^y \left(\frac{3u-v}{5}\right)\, dvdu = \int_0^x \int_0^y \left(\frac{3u}{5} - \frac{v}{5}\right)\, dvdu \\ &= \int_0^x \left(\frac{3u}{5}v - \frac{v^2}{10}\right)\Big|_0^y\, du = \int_0^x \left(\frac{3u}{5}y - \frac{y^2}{10}\right)\, du \\ &= \left(\frac{3u^2 y}{10} - \frac{uy^2}{10}\right)\Big|_0^x = \frac{3x^2y}{10} - \frac{xy^2}{10} \\ &= \frac{3x^2y - xy^2}{10}, \qquad 1 < x < 2, \quad 1 < y < 3. \end{aligned}$$

Esto podemos comprobarlo de la siguiente forma:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{6xy}{10} - \frac{y^2}{10} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y} = \frac{6x}{10} - \frac{2y}{10} = \frac{3x-y}{5}.$$

b)

¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $X < 3/2$ e $Y < 2$?.

Respuesta.- Ya que $\displaystyle\int_0^x \int_0^y \left(\frac{3u-v}{5}\right)\, dvdu = \frac{3x^2y - xy^2}{10}$, entonces

$$P(X < 3/2, Y < 2) = \int_0^{3/2} \int_0^2 \left(\frac{3u-v}{5}\right)\, dvdu = \frac{3(3/2)^2 \cdot 2 - (3/2) \cdot 2^2}{10} = 0.75.$$

```
x=3/2
y=2
(3*x^2*y-x*y^2)/10
```

```
## [1] 0.75
```

c)

Mediante el empleo de sus respuesta a la parte a, obtener las distribuciones acumulativas marginales de X e Y.

Respuesta.- Dado que 2 y 3 son los límite superior para x e y respectivamente, entonces

$$P(X \leq x) = F_X(x) = F(x,3) = \frac{3x^2 \cdot 3 - x \cdot 3^2}{10} = \frac{9\left(x^2 - x\right)}{10}. \qquad 1 < x < 2.$$

Y

$$P(Y \leq y) = F_Y(y) = F(2,y) = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot y - 2 \cdot y^2}{10} = \frac{2\left(6y - y^2\right)}{10} = \frac{6y - y^2}{5}, \qquad 1 < y < 3.$$

d)

Obtener las funciones de densidad marginales de X y de Y.

Respuesta.-