1

Algunas distribuciones discretas de probabilidad

1.2. La distribución binomial

Llámese éxito a la ocurrencia del evento y fracaso a su no ocurrencia.

Las dos suposiciones claves para la distribución binomial son:

I. La probabilidad de éxito p permanece constante para cada ensayo.

II. Los n ensayos son independientes entre sí.

Para obtener la función de probabilidad de la distribución binomial, primero se determina la probabilidad de tener, en n ensayos, x éxitos consecutivos seguidos de n-x fracasos consecutivos. Dado que, por hipótesis, los n ensayos son independientes de la definición 2.15, se tiene:

$$p \cdot p \cdots p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p) = p^x (1-p)^{n-x}$$

Definición 1.1 (Distribución binomial con función de probabilidad) *Sea X una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n ensayos y p la probabilidad de éxito con cualquiera de éstos. Se dice entonces que X tiene una distribución binomial con función de probabilidad.*

$$p(x;n,p) \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\ldots,n. \\ \\ 0 \textit{ para cualquier otro valor.} & 0 \leq p \leq 1. \textit{ para } n \textit{ entero.} \end{cases}$$

El nombre distribución binomial proviene del hecho de que los valores de $p(x;n,p)$ para $x = 1,2,\ldots,n$ son los términos sucesivos de la expansión binomial de $[(1-p)+p]^n$; esto es,

$$\begin{aligned} [(1-p)+p]^n &= (1-p)^n + n(1-p)^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}(1-p)^{n-2}p^2 + \cdots + p^n \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(x-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} p(x;n,p) \end{aligned}$$

Pero dado que $[(1-p)+p]^n = 1$ y $p(x;n,p) \geq 0$ para $x = 0,1,2,\ldots n$, este hecho también verifica que $p(x;n,p)$ es una función de probabilidad.

La probabilidad de que una variable aleatoria X sea menor o igual a un valor específico de x, se determina por la **función de distribución acumulativa**.

$$P(X \leq x) = F(x; n, p) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Nótese que si $n = 1$, la función de probabilidad binomial se deduce a

$$p(x; n, p) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x = 0, 1 \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

Que es la **función de probabilidad de la distribución puntual o Bernoulli.**

Por definición 3.8, el primer momento alrededor del cero de la variable aleatoria binomial X es el valor esperado de X.

$$\begin{aligned} E(X) &= x \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= x \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(n-x)!(x-1)!} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

en donde se ha escrito la suma desde uno hasta n, dado que cuando $x = 0$ el primer término es cero y se cancela la x del numerador con la x en $x!$. Factorizando n y p, se tiene:

$$E(X) = np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

Si $y = x - 1$ y $m = n - 1$, entonces:

$$E(X) = np \sum_{x=1}^{n} \frac{m!}{(m-y)!y!} p^y (1-p)^{n-y}$$

De donde se sabe que $p(y; m, p) = \dfrac{m!}{(m-y)!y!} p^y (1-p)^{n-y}$ es la función de probabilidad de una variable aleatoria binomial Y con parámetros $m = n - 1$ y p; de ésta manera $\sum_{y=0}^{m} p(y; m, p) = 1$ y **la media de una variable aleatoria binomial es**:

$$E(X) = \mu = np.$$

Para obtener la varianza, se necesita el segundo momento alrededor de cero, $\mu_2^{'}$, o:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 p(x; n, p)$$

pero, e el término $x^2/x!$ se cancelará una sola x en el numerador, y la que resta evitará que la suma se manipule de la misma forma en que se determinó la media. La alternativa es escribir x^2 como:

$$x^2 = x(x-1) + x;$$

de esta manera se tiene:

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X).$$

Dado que $E(X)$ ya se ha determinado, puede usarse el mismo procedimiento para evaluar $E(X(X-1))$:

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(n-x)(x-2)!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!}p^{x-2}(1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Sea $y = x-2$ y $m = n-2$, entonces:

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{(m-y)y!}p^y(1-p)^{m-y} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} p(y;m,p) \\
&= n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

Así,

$$E(X^2) = \mu_2^{'} = n(n-1)p^2 + np$$

De esta manera, la **varianza de una variable aleatoria binomial** es:

$$\boxed{Var(X) = \mu_2^{'} - \mu^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np[(n-1)p + 1 - np] = np(1-p).}$$

Para obtener el tercer momento alrededor del cero, se determina $E[X(X-1)(X-2)]$ dado que:

$$E[X(X-1)(X-2)] = \mu_3^{'} - 3\mu_2^{'} + 2\mu$$

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)(X-2)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)(x-2)\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=3}^{n} \frac{n!}{(n-x)!(x-3)!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 \textstyle\sum_{x=3}^{n} \displaystyle\frac{(n-3)!}{(n-x)!(x-3)!}p^{x-3}(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 \textstyle\sum_{x=3}^{n} \displaystyle\frac{m!}{(m-y)!y!}p^y(1-p)^{m-y} \\
&= n(n-1)(n-2)p^3
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\mu_3^{'} - 3\mu_2^{'} + 2\mu &= n(n-1)(n-2)p^3 \\ \mu_3^{'} &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3[n(n-1)p^2 + np] - 2np \\ &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np\end{aligned}$$

El tercero momento central μ_3 puede ser determinado por $\mu_3 = \mu_3^{'} - 3\mu\mu_2^{'} + 2\mu^3$.

$$\mu_3 = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np - 3np[n(n-1)p^2 + np] + 2n^3p^3$$

Lo que se traduce como:

$$\mu_3 = np(1-p)(1-2p)$$

Por tanto de $\alpha_3 = \dfrac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$ el tercer momento estandarizado de la distribución binomial es:

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \frac{np(1-p)(1-2p)}{[np(1-p)]^{3/2}} \\ &= \frac{np(1-p)(1-2p)}{np(1-p)[np(1-p)]^{1/2}} \\ &= \frac{1-2p}{[np(1-p)]^{1/2}}\end{aligned}$$

De manera similar, para el cuarto momento alrededor del cero se evalúa $E[X(X-1)(X-2)(X-3)]$ dado que:

$$E[X(X-1)(X-2)(X-3)] = \mu_4^{'} - 6\mu_3^{'} + 11\mu_2^{'} - 6\mu.$$

es decir,

$$\begin{aligned}E[X(X-1)(X-2)(X-3)] &= \sum_{x=4}^{n} x(x-1)(x-2)(x-3)\cdot\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 \sum_{x=4}^{n} \frac{(n-4)!}{(n-x)!(x-4)!}p^{x-4}(1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{(m-y)!y!}p^y(1-p)^{m-y} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4\end{aligned}$$

Sustituir en $E[X(X-1)(X-2)(X-3)] = \mu_4^{'} - 6\mu_3^{'} + 11\mu_2^{'} - 6\mu$. y para resolver $\mu_4^{'}$ se tiene:

$$\mu_4^{'} = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6[n(n-1)(n-2)p^2 + 3n(n-1)p^2 + np] - 11[n(n-1)p^2 + np] + 6np$$

Luego de acuerdo a $\mu_4 = \mu_4^{'} - 4\mu\mu_3^{'} + 6\mu^2\mu_2^{'} - 3\mu^4$ el cuarto momento central es:

$$\mu_4 = np(1-p)\{3np(1-p) + [1-6p(1-p)]\{.$$

Y de de acuerdo con $\alpha_4 = \mu_4/\mu_2^2$

$$\alpha_4 = \frac{np(1-p)\{3np(1-p) + [1-6p(1-p)]\{}{n^2p^2(1-p)^2} = 3 + \frac{[1-6p(1-p)]}{np(1-p)}$$

La varianza de una variable aleatoria binomial siempre es menor que el valor de su media.

De acuerdo con la definición 3.14 la función generadora de momentos para la distribución binomial es:

$$\begin{aligned} m_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \frac{n!}{(n-x)x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(n-x)x!} (e^t p)(1-p)^{n-x} \\ &= (1-p)^n + n(1-p)^{n-1}(e^t p) + \frac{n(n-1)}{2!}(1-p)^{n-2}(e^t p)^2 + \ldots + (e^t p)^n \\ &= [(1-p) + e^t p]^n \end{aligned}$$

Al tomar las dos primeras derivadas de $[(1-p)+e^t p]^n$ con respecto de t, se obtiene:

$$\frac{dm_X(t)}{dt} = ne^t p[(1-p)+e^t p]^{n-1}$$

y

$$\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} = n(n-1)(e^t p)^2[(1-p)+e^t p]^{n-2} + ne^t p[(1-p)+e^t p]^{n-1}$$

Si $t = 0$, obtiene el primero y segundo momento al rededor del cero,

$$\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = np[(1-p)+p]^{n-1} = np$$

y

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = n(n-1)p^2[(1-p)+p]^{n-2} + np[(1-p)+p]^{n-1} = n(n-1)p^2 + np.$$

1.3. La distribución de Poisson

La distribución es el principal modelo de probabilidad empleado para analizar problemas de líneas de espera. Además, ofrece una aproximación excelente a la función de probabilidad binomial cuando p es pequeño y n es grande.

Definición 1.2 *Sea X una variable aleatoria que representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren a una rapidez constante sobre el tiempo o el espacio. Se dice entonces que la variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson con función de probabilidad.*

$$p(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0,1,2,\ldots; \quad \lambda > 0 \\ 0 & \textit{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

El parámetro de la distribución de Poisson es λ, el número promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo.

Verificamos que es una función de probabilidad. Puesto que $p(x;\lambda) > 0$ para $x = 0,1,2,\ldots$,

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x;\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots\right) = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

Deducción de la función de probabilidad de Poisson.-

Sea $p(x;t)$ la probabilidad de tener, de manera exacta, X ocurrencias en un intervalo t, y supóngase lo siguiente:

1. En este intervalo, los eventos ocurren de manera independiente.

2. La probabilidad de una sola ocurrencia, en un intervalo muy pequeño dt es vdt, en donde v es la frecuencia constante de ocurrencia y $(v > 0)$.

3. El intervalo dt en tan pequeño, que la probabilidad de tener más de una ocurrencia en dt es despreciable.

El evento que en el tiempo $t + dt$ ha ocurrido exactamente x veces, puede llevarse a cabo de dos maneras diferentes y excluyentes:

1. Existen x ocurrencias por tiempo t, con probabilidad $p(x;t)$ y ninguna en dt, con probabilidad $(1 - vdt)$. Dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es $p(x;t)(1 - vdt)$.

2. Existen $x - 1$ ocurrencias por tiempo t, con probabilidad $p(x - 1;t)$ y una durante dt, con probabilidad vdt. Otra vez, dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es: $p(x - 1;t)vdt$.

Esto es:

$$p(x;t + dt) = p(x;t)(1 - vdt) + p(x - 1;t)vdt.$$

Después de multiplicar, transportar $p(x;t)$ al primer miembro, y dividir por dt se tiene:

$$\frac{p(x;t + dt) - p(x;t)}{dt} = v[p(x - 1;t)] - p(x;t).$$

Si se toma el límite conforme $dt \to 0$, por definición se tiene:

$$\frac{dp(x;t)}{dt} = v[p(x - 1;t) - p(x;t)]$$

Si se toma el límite conforme $dt \to 0$, por definición se tiene:

$$\frac{dp(x;t)}{dt} = v\,[p(x - 1;t) - p(x;t)]$$

que es una ecuación diferencial lineal con respecto a t y una ecuación de diferencias finitas de primer orden, con respecto a x. Si $x = 0$, la ecuación se convierte en

$$\frac{dp(0;t)}{dt} = v\,[p(-1;t) - p(0;t)] = -vp(0;t)$$

dado que $p()i - 1;t$ tiene que ser cero. La solución general de la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dp(0;t)}{dt} = -vp(0;t)$$

se obtiene mediante separación de variables e integración en ambos miembros, lo que da como resultado:

$$ln\,[p(0;t)] = ln(c) - vt,$$

o

$$p(0;t) = ce^{-vt}$$

Dado que la probabilidad de tener cero ocurrencias en un intervalo $t = 0$, debe ser 1, $c = 1$, y

$$p(0;t) = e^{-vt}.$$

Si $x = 1$, la ecuación $\dfrac{dp(x;t)}{dt} = v[p(x-1;t) - p(x;t)]$ se convierte en

$$\frac{dp(1;t)}{dt} = v[p(0;t) - p(1;t)]$$

o

$$\frac{dp(1;t)}{dt} + vp(1;t) = ve^{-vt}$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial no homogénea con la condición inicial de que $p(1;0) = 0$ dado que la probabilidad de tener exactamente una ocurrencia en $t = 0$ debe ser cero. La solución es

$$p(1;t) = (vt)e^{-vt}$$

De manera similar, para $x = 2$ y $p(2;0) = 0$, $\dfrac{dp(x;t)}{dt} = v[p(x-1;t) - p(x;t)]$ se reduce a

$$\frac{dp(2;t)}{dt} + vp(2;t) = v^2te^{-vt}$$

cuya solución es

$$p(2;t) = \frac{(vt)^2e^{-vt}}{2!}.$$

Al continuar este proceso puede deducirse que la probabilidad de tener exactamente x ocurrencias en t es

$$p(x;t) = \frac{(xt)^xe^{-vt}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

siempre que $p(x;0) = 0$. Si se sustituye $\lambda = vt$ en esta último ecuación, el resultado es la función de probabilidad de Poisson.

La probabilidad de que una variable aleatoria de Poisson X sea menor o igual a un valor de x se determina por la función de distribución acumulativa.

$$P(X \leq x) = F(x;\lambda) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$$

se podría usar también la relación

$$p(x;\lambda) = F(x;\lambda) - F(x-1;\lambda).$$