1

Los conceptos del Cálculo Integral

1.3. Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o funciones reales.

Definición 1.1 (Par ordenado) *Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.*

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Definición 1.2 (Definición de función) *Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primero elemento.*

Debe cumplir las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

(i) $\forall x \in D_f, \exists y/(x, y) \in f(x)$ ó $y = f(x)$

(ii) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

Definición 1.3 (Dominio y recorrido) *Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el* ***dominio*** *de f. El conjunto de los segundos elementos y se denomina* ***recorrido*** *de f, o conjunto de valores de f.*

TEOREMA 1.1 *Dos funciones f y g son iguales si y sólo si*

(a) *f y g tienen el mismo dominio, y*

(b) *$f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de f.*

Demostración.- *Sea f función tal que $x \in D_f, \exists y \ / \ y = f(x)$ es decir $(x, f(x))$, g una función talque $\forall z \in D_g, \exists y \ / \ y = g(z)$ es decir $(z, g(z))$, entonces por definición de par ordenado tenemos que $(x, f(x)) = (z, g(z))$ si y sólo si $x = z$ y $f(x) = g(z)$*

Definición 1.4 (Sumas, productos y cocientes de funciones) *Sean f y g dos funciones reales que tienen el mismo dominio D. Se puede construir nuevas funciones a partir de f y g por adición, multiplicación o división de sus valores. La función u definida por,*

$$u(x) = f(x) + g(x) \ \ si\ x \in D$$

se denomina suma de f y g, se representa por $f + g$. Del mismo modo, el producto $v = fcdotg$ y el cociente $w = f/g$ están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \ \ si\ x \in D, \quad w(x) = f(x)/g(x) \ \ si\, x \in D\ y\ g(x) \neq 0$$

1.5. Ejercicios

1. Sea $f(x) = x + 1$ para todo real x. Calcular:

- $f(2) = 2 + 1 = 3$
- $f(-2) = -2 + 1 = -1$
- $-f(2) = -(2 + 1) = -3$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
- $\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{3}$
- $f(a + b) = a + b + 1$
- $f(a) + f(b) = (a + 1) + (b + 1) = a + b + 2$
- $f(a) \cdot f(b) = (a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$

2. Sean $f(x) = 1 + x \quad$ y $\quad g(x) = 1 - x$ para todo real x. calcular:

- $f(2) + g(2) = (1 + 2) + (1 - 2) = 2$
- $f(2) - g(2) = (1 + 2) - (1 - 2) = 4$
- $f(2) \cdot g(2) = (1 + 2) \cdot (1 - 2) = 3 \cdot (-1) = -3$

- $\dfrac{f(2)}{g(2)} = \dfrac{1+2}{1-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$

- $f\left[g(2)\right] = f(1-2) = f(-1) = 1 + (-1) = 0$

- $g\left[f(2)\right] = f(1+2) = g(3) = 1 - 3 = -2$

- $f(a) + g(-a) = (1+a) + (1-a) = 2$

- $f(t) \cdot g(-t) = (1+t) \cdot (1+t) = 1 + t + t + t^2 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$

3. Sea $f(x) = |x-3| + |x-1|$ para todo real x. Calcular:

- $f(0) = |0-3| + |0-1| = 3 + 1 = 4$
- $f(1) = |1-3| + |1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3| + |2-1| = -1 + 1 = 2$
- $f(3) = |3-3| + |3-1| = 2$
- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4 + 2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5 + 3 = 8$

Determinar todos los valores de t para los que $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{array}{rcl} |t+2-3| + |t+2-1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t-1| + |t+1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t+1| & = & t-3 \end{array}$$

Por lo tanto $t = 1$

4. Sea $f(x) = x^2$ para todo real x. Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números erales $x,\ y\ t$, etc., para los que la fórmula dada es válida.

(a) $f(-x) = f(x)$

Demostración.- Se tiene $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $f(y) - f(x) = (y-x)(y+x)$

Demostración.- $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (x-y)(x+y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

(c) $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.- $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.- $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y), \ \forall y \in \mathbb{R}$

(e) $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.- $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

(f) $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.- $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

5. Sea $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de $x, \ y, s$ y t son válidas.

(a) $g(-x) = g(x)$

Se tiene $g(-x) = \sqrt{2 - (-x)^2} = \sqrt{2 - (x)^2} = g(x), \ \ para \ |x| \leq 2$

(b) $g(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4 - (2y)^2} = \sqrt{4(1 - y^2)} = 2\sqrt{1 - y^2}, \ \ para \ |y| \leq 1$ Se obtiene $|y| \leq 1$ de $\sqrt{1 - y^2}$ es decir $1 - y^2 \geq 0$ entonces $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$ y $|y| \leq 1$

(c) $g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$

$g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \sqrt{4 - \left(\dfrac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4t^2 - 1}{t^2}} = \dfrac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}, \ \ para \ |t| \geq \dfrac{1}{2}$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar $\sqrt{4t^2 - 1}$. Es decir

$$4t^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow 4t^2 \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq \frac{1}{2^2} \Rightarrow |t| \geq \frac{1}{2}$$

(d) $g(a - 2) = \sqrt{4a - a^2}$

$g(a - 2) = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - (a - 2)^2} = \sqrt{4a - a^2}, \ \ para \ 0 \leq a \leq 4$. Basta probar $4a - a^2 \geq 0$

(e) $g\left(\dfrac{s}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{16 - s^2}$

$s\left(\dfrac{s}{2}\right) = \sqrt{4 - \left(\dfrac{s}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{16 - s^2}}{2}, \ \ para \ |s| \leq 4$. ya que solo basta comprobar que $\sqrt{16 - s^2} \geq 0$

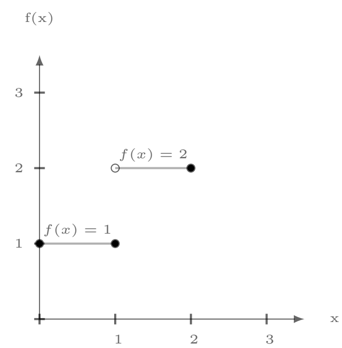
(f) $\dfrac{1}{2 + g(x)} = \dfrac{2 - g(x)}{x^2}$

$$\frac{1}{2+g(x)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-g(x)}{x^2} \; para \;\; |x| \leq 2 \; y \; x \neq 0$$

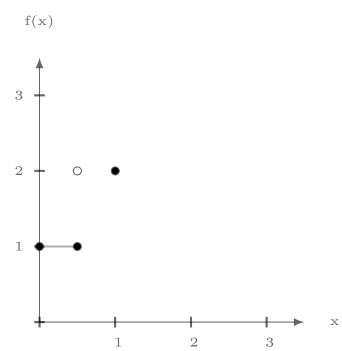
Evaluemos $\sqrt{4-x^2}$. Sea $4 - x^2 \geq 0$ entonce $\sqrt{x^2} \leq 2$. Por otro lado tenemos que la función no puede ser 0 por $\dfrac{1}{x^2}$, por lo tanto debe ser $x^2 \neq 0$.

6. Sea f la función definida como sigue: $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ para $1 < x \leq 2$. La función no está definida si $x < 0$ ó si $x > 2$.

(a) Trazar la gráfica de f

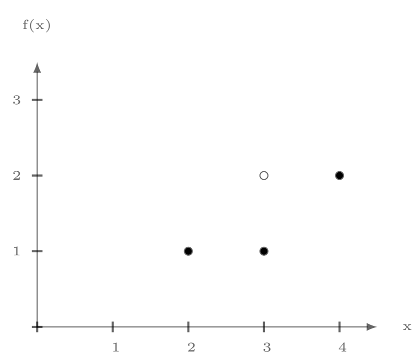


(b) Poner $g(x) = f(2x)$. Describir el dominio de g y dibujar su gráfica.



Debido a que $1 \leq 2x \leq 1$ y $1 < 2x \leq 2$ el dominio de $g(x)$ es $0 \leq x \leq 1$

(c) Poner $h(x) = f(x-2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

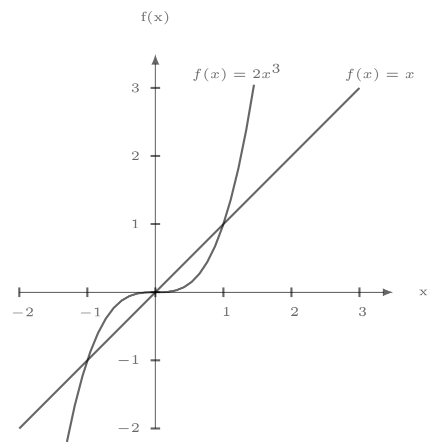


Debido a que $1 \leq x - 2 \leq 1$ y $1 < x - 2 \leq 2$ el dominio de $h(x)$ es $2 \leq x \leq 4$

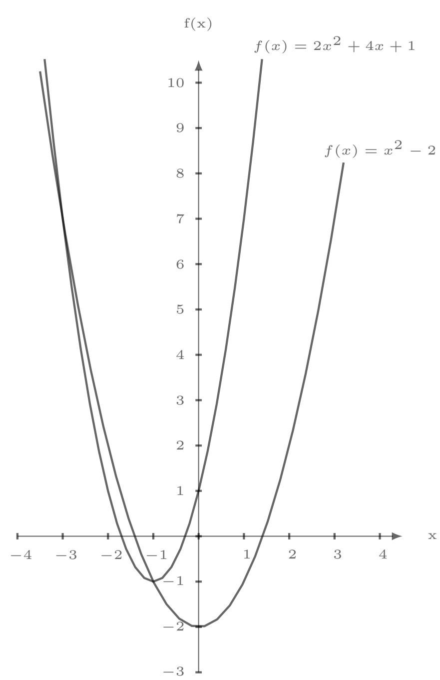
(d) Poner $k(x) = f(2x) + f(x-2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

El dominio está vacío ya $f(2x)$ que solo está definido para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x-2)$ solo está definido para $2 \leq x \leq 4$. Por lo tanto no hay ninguno x que satisfaga ambas condiciones.

7. Las gráficas de los dos polinomios $g(x) = x$ y $f(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.



8. Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.



9. Este ejercicio desarrolla ciertas propiedades fundamentales de los polinomios. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio de grado n. Demostrar cada uno de los siguientes apartados:

(a) Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, $f(x) = xg(x)$, siendo g un polinomio de grado $n-1$.

Para entender lo que nos quiere decir Apostol pongamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un polinomio donde $f(x) = 2x^2+3x-x$ entonces notamos que $f(x) = x(2x+3-1)$ donde $g(x) = 2x+3-1$, esto quiere decir que si $0 = f(0) = c_0 \Rightarrow c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n = x(c_1 + c_2x + ... + c_nx^{n-1})$ Así que debemos demostrar que $f(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $n \geq 1$ tal que $f(0) = 0$, entonces debe haber un polinomio de grado $n-1$, $g(x)$, tal que $f(x) = xg(x)$

Demostración.- Sabemos que

$$f(0) = c_n \cdot 0^n + c_{n-1} \cdot 0^{n-1} + ... + c_1 \cdot 0 + c_0 = c_0,$$

como $f(0) = 0$ se concluye que $c_0 = 0$. Así tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_kx^k.$$

Ahora crearemos una función $g(x)$. Dada la función $f(x)$ como la anterior, definamos,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_kx^{k-1}$$

Ahora crearé una función $g(x)$. Dada una función $f(x)$ como la anterior, definamos

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_kx^{k-1}$$

donde c_k son los mismos que los dados por la función $f(x)$. Primero notemos que el grado de $g(x)$ es $n-1$. Finalmente, tenemos que

$$xg(x) = x\sum_{k=1}^{n} c_kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_kx^k = f(x).$$

(b) Para cada real a, la función p dada por $p(x) = f(x+a)$ es un polinomio de grado n.

Demostración.- Usando el teorema del binomio,

$$\begin{aligned}
f(x+a) &= \sum_{k=0}^{n}(x+a)^kc_k \\
&= c_o + (x+a)c_1 + (x+a)^2c_2 + ... + (x+a)^nc_n \\
&= c_o + c_1\left(\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}a^jx^{1-j}\right) + c_2\left(\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}a^jx^{2-j}\right) + ... + c_n\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^jx^{n-j}\right) \\
&= (c_o + ac_1 + a^2c_2 + ... + a^nc_n) + x(c_1 + 2ac_2 + ... + na^{n-1}c_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(x^k\left(\sum_{j=k}\binom{j}{j-k}c_jaj-k\right)\right)
\end{aligned}$$

En la linea final reescribimos los coeficientes como sumas para verlos de manera más concisa. De cualquier manera, dado que todos los c_i son constantes, tenemos $\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{j-k}c_ja^{j-k}$ es alguna constante para cada k, de d_k y tenemos,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} d_kx^k$$

(c) Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para un cierto valor real a, entonces $f(x) = (x-a)\,h(x)$, siendo h un polinomio de grado $n-1$. (considérese $p(x) = f(x+a)$.)

Demostración.- Por la parte b) se sabe que $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $p(x) = f(x+a)$ también es un polinomio del mismo grado. Ahora si $f(a) = 0$ entonces por hipótesis $p(0) = f(a) = 0$. Luego por la parte a), tenemos

$$p(x) = x \cdot g(x)$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. Así,

$$p(x-a) = f(x) = f(x) = (x-a) \cdot g(x-a)$$

ya que $p(x) = f(x+a)$. Pero, si $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, entonces por la parte b) nuevamente, también lo es $h(x) = g(x+(-a)) = g(x-a)$. Por lo tanto,

$$f(x) = (x-a) \cdot h(x)$$

para h un grado $n-1$ polinomial, según lo solicitado.

(d) Si $f(x) = 0$ para $n+1$ valores reales de x distintos, todos los coeficientes c_k son cero y $f(x) = 0$ para todo real de x

Demostración.- La prueba se realizara por inducción. Sea $n = 1$, entonces $f(x) = c_o + c_1 x$. Dado que la hipótesis es que existen $n+1$ distintos x de tal manera que $f(x) = 0$, sabemos que existen a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a_1) = f(a_2) = 0, \quad a_1 \neq a_2,$$

Así,

$$\begin{array}{rclrcll} c_0 + c_1 a_1 & = & 0 & \Rightarrow \quad c_1 a_1 - c_1 a_2 & = & 0 & \\ & & & \Rightarrow \quad c_1(a_1 - a_2) & = & 0 & \\ & & & \Rightarrow \qquad\qquad c_1 & = & 0 & \text{ya que } a_1 \neq a_2 \\ & & & \Rightarrow \qquad\qquad c_0 & = & 0 & \text{ya que } c_0 + c_1 a_1 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera. Suponga que es cierto para algunos $n = k \in \mathbb{Z}^+$. Luego Sea $f(x)$ un polinomio de grado $k+1$ con $k+2$ distintos de 0, $a_1, ..., a_{k+2}$. ya que $f(a_{k+2}) = 0$, usando la parte c), tenemos,

$$f(x) = (x - a_{k+2})h(x)$$

donde $h(x)$ es un polinomio de grado k. Sabemos que hay $k+1$ valores distintos $a_1, ...a_{k+1}$ tal que $h(a_i) = 0$. Dado que $f(a_i) = 0$ para $1 < i < k + 2y$ y $(x - a_{k+2}) \neq 0$ para $x = a_i$ con $1 < i < k+1$ ya que todos los a_1 son distintos), por lo tanto, según la hipótesis de inducción, cada coeficiente de h es 0 y $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{array}{rclcl} f(x) & = & (x - a_{k+2})h(x) & = & (x - a_{k+2}) \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{k} c_j x^j \\ & & & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (x - a_{k+2}) c_j x^j \\ & & & = & c_k x^{k+1} + (c_{k-1} - a_k + 2c_k)x^k + ... + (c_1 - a_{k+2}c_0)x + a_{k+2}c_0 \end{array}$$

Pero dado que todos los coeficientes de $h(x)$ son cero y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la afirmación es verdadera para el caso $k+1$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

(e) Sea $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ un polinomio de grado m, siendo $m \geq n$. Si $g(x) = f(x)$, para $m+1$ valores reales de x distintos, entonces $m = n$, $b_k = c_k$ para cada valor de k, y $g(x) = f(x)$ para todo real x

Demostración.- Sea

$$p(x) = g(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{m} (b_k - c_k) x^k$$

donde $c_k = 0$ para $n < k \leq m$, cabe recordar que tenemos $m \geq n$.
Entonces, hay $m+1$ distintos reales x para los cuales $p(x) = 0$. Dado que hay $m+1$ valores reales distintos para lo cuál $g(x) = f(x)$, así en cada uno de estos valores $p(x) = g(x) - f(x) = 0$. Por lo tanto, por la parte d), $b_k - c_k = 0$ para $k = 0, ..., m$ y $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir

$$b_k - c_k = 0 \quad \Rightarrow \quad b_k = c_k \quad para\ k = 0, ..., m$$

y

$$p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ademas desde $b_k - c_k = 0$ para $k = 0, ..., m$ y por supuesto $c_k = 0$ para $k = n+1, ..., m$, tenemos $b_k = 0$ para $k = n+1, ..., m$. Pero entonces,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=n+1}^{m} 0 \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} b^k x^k$$

significa que $g(x)$ es un polinomio de grado n también.

10. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que satisfacen las condiciones dadas.

Sabemos que para un polinomio de grado ≤ 2 es:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $p(x) = p(1 - x)$

Sea $f(x) = p(x) - 1$, entonces f es de grado como máximo 2 por la parte d) del problema 9 tenemos que todos los coeficientes de f son 0 y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así,

$$p(x) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) $p(x) = p(1 + x)$

Tenemos $p(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ luego, $p(1) = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ y finalmente, con $c = 1$ y $b = -a$, tenemos: $p(2) = 2 \Rightarrow 4a - 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. por lo tanto

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x(x-1) + 1$$

(c) $p(x) = p(0) = p(1) = 1$

Una vez mas, desde $p(0) = 1$ tenemos: $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ así, $p(x) = ax^2 - ax + 1 = ax(x-1) + 1$

(d) $p(0) = p(1)$

Simplemente sustituyendo estos valores que tenemos, $p(0) = p(1) \Rightarrow c = a + b + c \Rightarrow b = -a$ entonces,

$$p(x) = ax^2 - ax + c = ax(x-1) + c$$

11. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que para todo real x satisfacen las condiciones que se dan. Como p es un polinomio de grado por lo mucho 2, podemos escribir

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad para\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

(a) $p(x) = p(1-x)$

Sustituyendo se tiene $p(x) = p(1-x) = ax^2 + bx + c = a(1-x)^2 + b(1-x) + c \Rightarrow a - 2ax + ax^2 + b - bx + c$ por lo tanto

$$ax^2 + (-2a - b)x + (a + b + c)$$

Así para $a = a$, $b = -2a - b \Rightarrow a = -b$, $c = a + b + c$ entonces

$$p(x) = -bx^2 + bx + c = bx(1-x) + c$$

(b) $p(x) = p(x) = p(1+x)$

Una vez más sustituyendo, $p(x) = p(1+x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(1+x)^2 + b(1+x) + c = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)$. Luego, igualando como potencias de x, $a = a$, $b = 2a + b \Rightarrow a = 0$, $c = a + b + c \Rightarrow b = 0$. Por lo tanto $p(x) = c$ donde c es una constante arbitraria.

(c) $p(2x) = 2p(x)$

Sustituyendo, $p(2x) = 2p(x) \Rightarrow 4ax^2 + 2bx + c = 2ax^2 + 2bx + 2c.$. Igualando a las potencias de x, $4a = 2a \Rightarrow a = 0$, $2b = 2b \Rightarrow b\ arbitrario$, $c = 2c \Rightarrow c = 0$.
Así

$$p(x)bx, \ b\ arbitrario$$

(d) $p(2x) = p(x+3)$

Sustituyendo $p(3x) = p(x+3) \Rightarrow 9ax^2 + 3bx + c = ax^2 + (6a+b)x + (9a + 3b + c)$. Igualando como potencias de x, $9a = a \Rightarrow a = 0$, $3b = 6a + b \Rightarrow b = 0$, $c = 9a + 3b + c = c \Rightarrow c\ arbitrario$. Por lo tanto

$$p(x) = c\text{para c constante arbitrario.}$$

Corolario 1.1 *Probar que:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad parax \neq 1$$

Demostración.- *Usando propiedades de suma,*

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = -\sum_{k=0}^{n}(x^{k+1} - x^k) = -(x^{n+1} - 1 = 1 - xn + 1)$$

En la penultima igualdad se deriva de la propiedad telescópica, por lo tanto nos queda,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Corolario 1.2 *Probar la identidad*

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^{k-1}}\right) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}, \quad para\ x \neq 1$$

Demostración.- *Para $n = 1$ a la izquierda tenemos,*

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^{k-1}}\right) = \prod_{k=0}^{1}\left(1+x^{2^{k-1}} = 1 + x^{2^0} = 1 + x\right)$$

Por otro lado a la derecha se tiene,

$$\frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1 + x$$

Concluimos que la identidad se mantiene para $n = 1$. Ahora supongamos que es válido para algunos $n = m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{m+1} &= \left(+x^{2^m}\right)\cdot \prod_{k=1}^{m}\left(1+x^{2^{k+1}}\right) \\
&= \left(1+x^{2^m}\right)\cdot\left(\frac{1-x^{2^m}}{1-x}\right) \\
&= \frac{(1+x^{2^m})(1-x^{2^m})}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera para $m+1$, y así para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

12. Demostrar que las expresiones siguientes son polinomios poniéndolas en la forma $\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ para un valor de m conveniente. En cada caso n es entero positivo.

(a) $(1+x)^{2n}$

Demostración.- Usando el teorema binomial $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2} n\binom{2n}{k}x^k$, sea $m = 2n$ entonces $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{n}x^k$, por lo tanto $\sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ si $c_k = \binom{m}{k}$ para cada k.

(b) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x \neq 1$

Demostración.- Por el corolario anterior

$$\begin{aligned}
\frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= \frac{(1-x)(1+x+...+x^n)}{1-x} \\
&= 1+x+...+x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} 1\cdot x^k
\end{aligned}$$

(c) $\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k})$

Demostración.- Por le corolario anterior,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})}{1-x} \\
&= \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} \\
&= \left(\frac{1-x^{2^n}}{1-x}\right)(1+x^{2^n}) \\
&= (1+x+...+x^{2^n+1})(1+x^{2^n}) \\
&= (1+x+...+x^{2^n+1})(x^{2^n}+x^{2^n+1}+...+x^{2^{n+1}-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} 1\cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} 1\cdot x^k \text{ si } m = 2^{n+1}-1
\end{aligned}$$

Axioma .1 (Definición axiomática de área) *Supongamos que existe una clase M de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto a, cuyo dominio es M, con las propiedades siguientes:*

1. ***Propiedad de no negatividad***. *Para cada conjunto S de M, se tiene $a(S) \geq 0$*
2. ***Propiedad aditiva***. *Si S y T pertenecen a M, también pertenecen a M, $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene*
$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$$
3. ***Propiedad de la diferencia***. *Si S y T pertenecen a M siendo $S \subseteq T$ entonces $T - S$ está en M, y se tiene $a(T - S) = a(T) - a(S)$*
4. ***Invariancia por congruencia***. *Si un conjunto S pertenece a M y T es congruente a S, también T pertenece a M y tenemos $a(S) = a(T)$*
5. ***Elección de escala*** *Todo rectángulo R pertenece a M. Si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces $a(R) = hk$*
6. ***Propiedad de exhaución***. *Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T de modo que*
$$S \subseteq Q \subseteq T.$$
Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades
$$a(S) \leq c \leq a(T)$$
para todas la regiones escalonadas S y T que satisfacen $S \subseteq Q \subseteq T$, entonces Q es medible y $a(Q) = c$

1.7. Ejercicios

1. Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es medible y tiene área nula:

(a) Un conjunto que consta de un solo punto.

Demostración.- Un sólo punto se puede medir con un área 0, ya que un punto es un rectángulo con $h = k = 0$

(b) El conjunto de un número finito de puntos.

Demostración.- Demostraremos por inducción en n, el número de puntos. Para el caso de $n = 1$ ya quedo demostrado en el anterior inciso. Supongamos que es cierto para algunos $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Entonces, tenemos un conjunto $S \in M$ de k puntos en el plano y $a(S) = 0$. Sea T un punto en el plano. Por (a) $T \in M$ y $a(T) = 0$, por tanto por la propiedad aditiva,
$$S \cup T \in M \;\; y \;\; a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$
pero $S \cap T \subseteq S$, entonces
$$a(S \cap T) \leq a(S) \Rightarrow a(S \cap T) \leq 0 \Rightarrow a(S \cap T) = 0.$$
El axioma 1 nos garantiza que $a(S \cap T)$ no puede ser negativo. Por lo tanto, $a(S \Cup T) = 0$, Por tanto,

el enunciado es verdadero para $k+1$ puntos en un plano y, por tanto, para todo $n \in Z_{>0}$

(c) La reunión de una colección finita de segmentos de recta en un plano.

Demostración.- Por inducción, sea n el número de segmentos en un plano. Para $n = 1$, dejamos S ser un conjunto con una línea en un plano. Dado que una línea es un rectángulo y todos los rectángulos son medibles, tenemos $S \in M$ ademas, $a(S) = 0$ ya que una línea es un rectángulo con $h = 0$ ó $k = 0$, y así en cualquier caso $hk = 0$. Por lo tanto, el enunciado es verdadero para una sola línea en el plano, el caso $n = 1$.
Asuma entonces que es cierto para $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Sea S un conjunto de rectas en el plano. Luego, por la hipótesis de inducción, $S \in M$ y $a(S) = 0$. Sea T una sola línea en el plano. Por el caso $n = 1$ en $T \in M$ y $a(T) = 0$. Por lo tanto $S \cup T \in M$ y $a(S \cup T) = 0$ (ya que $a(S) = a(T)a(S \cap T) = 0$). Por tanto, la afirmación es verdadera para $k+1$ líneas en un plano, y así para todos $n \in \mathbf{Z}^+$

2. Toda región en forma de triángulo rectángulo es medible pues puede obtenerse como intersección de dos rectángulos. Demostrar que toda región triangular es medible y que su área es la mitad del producto de su base por su altura.

Demostración.- Dado que cada triángulo rectángulo es medible, por el axioma 2 del área su unión es medible, denotando los dos triángulos rectángulos A y B, y la región triangular T, tenemos

$$a(T) = a(A) + a(B)$$

ya que A y B son disjuntos $a(A \cap B) = 0$.
Dejando que la altitud de la región triangular se denote por h, y su base por b, tendremos,

$$a(A) = \frac{1}{2}(hb_1) \quad a(B) = \frac{1}{2}hb_2 \quad con \quad b_1 + b_2 = b,$$

entonces

$$a(T) = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2 = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}hb$$

3. Demostrar que todo trapezoide y todo paralelogramo es medible y deducir las fórmulas usuales para calcular su área.

Demostración.- Todo trapecio es medible ya que, la unión de un rectángulo y dos triángulos rectángulos (disjuntos por pares y cada uno de los cuales es medible ppor los axiomas y el ejercicio anterior.) Luego su área es la suma de las áreas de los triángulos rectángulos y el rectángulo (dado que están separados por pares, su intersección tiene un área cero). Para calcular esta área, especificamos las longitudes de los dos lados desiguales del trapezoide para que sean b_1 y b_2. La altura está indicada por a. Entonces, el área del rectángulo es de 1. El área de los triángulos es $\dfrac{1}{2}a \cdot b_3$ y $\frac{1}{2}a \cdot b_4$ dónde $b_1 + b_3 + b_4 = b_2$. Entonces, denotando el trapezoide por T, tenemos

$$a(T) = ab_1 + \frac{1}{2}ab_3 + \frac{1}{2}ab_4 = \frac{1}{2}ab_1 + \frac{1}{2}a(b_1 + b_3 + b_3) = \frac{1}{2}a(b_1 + b_2)$$

A continuación, un paralelogramo es solo un caso especial de un trapezoide, en el que $b_1 = b_2$; por lo tanto, por la fórmula anterior, y denotando el paralelogramo por P,

$$a(P) = \frac{1}{2}a(2b) = ab$$

4. Un punto (x, y) en el plano se dice que es un punto de una red, si ambas coordenadas x e y son enteras. Sea P un polígono cuyos vértices son puntos de una red. El área de P es $I + \frac{1}{2}B - 1$ donde I es el número de puntos de la red interiores a P, y B el de los de la frontera.

(a) Probar que esta fórmula es correcta para rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados.

Demostración.- Sea R un $h \times k$ rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas. Entonces, R es medible (ya que es un rectángulo) y $a(R) = hk$. A continuación, dado que los vértices están en puntos de celosía, $B = 2(h+1) + 2(k+1) - 4$ y $I = (h-1)(k-1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2}B - 1 &= (h-1)(k-1) + \frac{1}{2}\left[2(h+1) + 2(k+1) - 4\right] - 1 \\ &= hk - h - k + 1 + h + 1 + k + 1 - 2 - 1 \\ &= hk \end{aligned}$$

(b) Probar que la fórmula es correcta para triángulos rectángulos y paralelogramos.

Demostración.- Sabemos que cualquier triángulo rectángulo puede encerrarse en un rectángulo con bordes cuyas longitudes sean iguales a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo. Además, este rectángulo está compuesto por dos triángulos rectángulos congruentes unidos a lo largo de su diagonal. Cada uno de estos triángulos rectángulos tiene un área la mitad de la del rectángulo y se cruzan a lo largo de la diagonal (que tiene un área cero (1.7, problema 1) ya que es una línea en el plano). Dado un triángulo rectángulo T, R sea tal rectángulo, y S sea el triángulo rectángulo que forma la otra mitad de R, entonces $S \cup T = R$.
Dado que R es un rectángulo, sabemos por la parte (a) que

$$a(R) = I_R + \frac{1}{2}B_R - 1.$$

Además, cualquier punto interior R será un punto interior de cualquiera S o T, o se acuesta sobre su frontera compartida. Por lo tanto,

$$I_R = I_S + I_T + H_P$$

donde H_P denota los puntos en la hipotenusa (compartida) de los dos triángulos rectángulos. Entonces, también tenemos para los puntos límite,

$$B_R = B_S + B_T - 2 - 2H_P.$$

Finalmente, dado que S y T son congruentes, conocemos $B_S = B_T$ y $I_S = I_T$. Entonces, poniendo todo esto junto, tenemos,

$$\begin{aligned} a(R) &= I_R + \frac{1}{2}B_R - 1 \\ &= 2I_S + H_P + \frac{1}{2}(2B_S - 2 - 2H_P) - 1 \\ &= 2(I_S + \frac{1}{2}B_S - 1) \end{aligned}$$

ó,

$$I_S + \frac{1}{2}B_S - 1 = \frac{1}{2}a(R).$$

Pero, sabemos que $\frac{1}{2}a(R) = a(S)$; por lo tanto,

$$a(S) = I_S + \frac{1}{2}B_S - 1.$$

Esto prueba el resultado para triángulos rectángulos con vértices en puntos de una red.

(c) Emplear la inducción sobre el número de lados para construir una demostración para polígonos en general.

Respuesta.- Ya tenemos esto de la parte (b) ya que podemos realizar cualquier polígono simple como la unión de un número finito de triángulos rectángulos (es decir, cada polígono simple es triangularizable)

5. Demostrar que un triángulo cuyos vértices son puntos de una red no puede ser equilátero.

Demostración.- Supongamos que existe tal triángulo equilátero T. Entonces,

$$T = A\ cupB$$

Para dos triángulos rectángulos congruentes y disjuntos A, B. Dado que los vértices de T están en puntos de una red, sabemos que la altitud desde el vértice hasta la base debe pasar por h puntos de red (donde h es la altura de T). Por lo tanto, al denotar los puntos de red en esta altitud por $V_B = h + 1$, tenemos

$$B_T = B_A + B_B - V_B + 2, \qquad I_T = I_A + I_B + V_B - 2.$$

Dado que T es un polígono con vértices de puntos de red, sabemos por el ejercicio anterior que $a(T) = I_T + \frac{1}{2}B_T - 1$. Además, por el problema 2, sabemos que $a(T) = \frac{1}{2}bh$. Así que,

$$\begin{aligned}
& I_T + \frac{1}{frm-e}B_T - 1 &=& \quad (I_A + I_B + V_B - 2) + \frac{1}{2}(B_A + B_B - V_B + 2) & \\
\Rightarrow \quad & I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &=& \quad 2I_A + B_A - 2 + \frac{1}{2}V_B & (B_A = B_B,\ I_A = I_B) \\
\Rightarrow \quad & I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &=& \quad 2I_A + B_A - 2 + \frac{1}{2}(h+1) & (V_B = h + 1) \\
\Rightarrow \quad & I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &=& \quad 2(a(A)) + \frac{1}{2}(h+1) &
\end{aligned}$$

Pero, $\frac{1}{2}a(T) = a(A) = a(B)$ así,

$$I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 = a(T) + \frac{1}{2}(h+1) \qquad \Rightarrow \qquad a(T) = a(T) + \frac{1}{2}(h+1)$$

Pero, $h > 0$ entonces esto es una contradicción. Por lo tanto,T no puede tener sus vértices en puntos de red y ser equilátero.

6. Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$ y M la clase de todos los subconjuntos de A. (Son en número de 32 contando el mismo A y el conjunto vacio $\emptyset$.) Para cada conjunto S de M, representemos con $n(S)$ el número de elemento distintos de S. Si $S = \{1,2,3,4\}$ y $T = \{3,4,5\}$, calcular $n(S \cup T)$, $n(S \cup T)$, $n(S - T)$ y $n(T_S)$. Demostrar que la función de conjunto n satisface los tres primeros axiomas del área.

Demostración.- Calculemos,

$$\begin{array}{rcrcl} n(S \cup T) & = & n(\{1,2,3,4,5\}) & = & 5 \\ n(S \cap T) & = & n(\{3,4\}) & = & 2 \\ & = & n(\{1,2\}) & = & 2 \\ & = & n(\{5\}) & = & 1 \end{array}$$

Ahora demostremos que esto satisface los primeros tres axiomas de área.
Axioma 1. (Propiedad no negativa) Esto se satisface para cualquier conjunto, S ya que el número de elementos distintos en un conjunto no es negativo. Entonces, $n(S) \geq 0$ para todos S.
Axioma 2. (Propiedad aditiva) Primero, si S, $T \in \; mathcal M$, luego $S \subseteq A$, $T \subseteq A$ por definición de $\mathcal{M}$. Entonces, para cualquiera $x \in S$ que tengamos $x \in A$ y para cualquiera $y \in T$, tenemos $y \in A$.
Así, si $x \in S \cup T$, entonces $x \in A$; por lo tanto $S \cup T \subseteq A$, entonces $S \cup T \in \mathcal{M}$.
Entonces, $S \cap T \subseteq S$ implica $S \cap T \subseteq A$ (desde $S \subseteq A$). Por lo tanto, $S \cap T \in \mathcal{M}$.
Entonces, para cualquiera $S, T \in \mathcal{M}$ que tengamos $S \cup T \in \mathcal{M}$, $S \cap T \in \mathcal{M}$.
Luego, debemos mostrar $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$. Para cualquier $x \in S \cup T$ tenemos $x \in S$, $x \in T$, ó $x \in S$ y T. Entonces, esto significa $x \in (S - T)$, ó $x \in (T - S)$ ó $x \in (S \cap T)$. Por lo tanto,

$$n(S \cup T) = n(S - T) + n(T - S) + n(S \cap T)$$

Del mismo modo observamos,

$$\begin{array}{rcl} n(S) = (S - T) + n(S \cap T) & \Rightarrow & n(S - T) = n(S) - s(S \cap T) \\ n(T) = n(T - S) + n(T \cap S) & \Rightarrow & n(T - S) = n(T) - n(S \cap T) \end{array}$$

Así que,

$$\begin{array}{rcl} n(S \cup T) & = & n(S) - n(S \cap T) + n(T) - n(S \cap T) + n(S \cap T) \\ & = & n(S) + n(T) - n(S \cap T) \end{array}$$

Axioma 3 (Propiedades de la diferencia). Si $S, T \in \mathcal{M}$ y $S \subseteq T$, entonces desde arriba tenemos

$$n(T - S) = n(T) - n(T \cap S)$$

Pero porque $S \subseteq T$ sabemos $T \cap S = S$, entonces,

$$n(T - S) = n(T) - n(S)$$

1.8. Intervalos y conjuntos ordenados

Definición 1.5 (Intervalo cerrado) *Si $a < b$, se indica por $[a, b]$ el conjunto de todos los x que satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq b$.*

Definición 1.6 (Intervalo abierto) *El intervalo abierto correspondiente, indicado por (a, b) es el conjunto de todos los x que satisfacen $a < x < b$*

El intervalo abierto (a, b) se denomina también el interior de $[a, b]$

Definición 1.7 (Intervalo semiabiertos) *Los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ que incluyen sólo un extremo están definidos por las desigualdades $a < x \leq b$ y $a \leq x < b$, respectivamente.*

1.9. Particiones y funciones escalonadas

Definición 1.8 *Un conjunto de puntos que satisfaga*

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$$

se denomina una partición P de $[a, b]$, y se utiliza el símbolo:

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

para designar tal partición, la partición P determina n subinterválos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

Definición 1.9 (Definición de función escalonada) *Una función s cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a, b]$ se dice que es una función escalonada, si existe una partición $P = \{x_o, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ tal que s es constante en cada subintervalo abierto de P. Es decir, para cada $k = 1, 2, ..., n$ existe un número real S_k tal que:*

$$s(x) = s_K \qquad si \qquad x_{k-1} < x < x_k$$

A veces las funciones escalonadas se llaman funciones constantes a trozos.

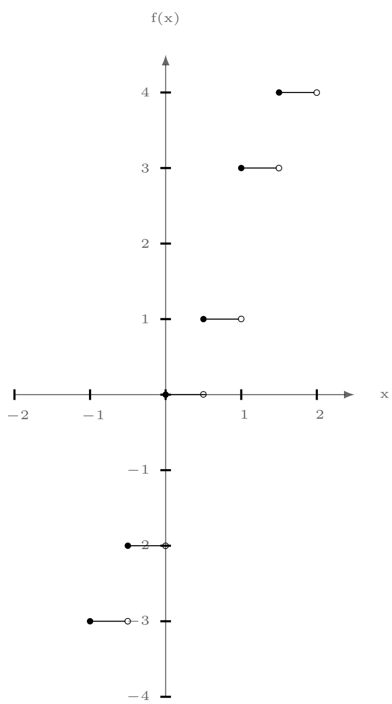
1.11. Ejercicios

En este conjunto de Ejercicios, $[x]$ representa el mayor entero $\leq x_i$ es decir, la parte entera de x.

1. Sean $f(x) = [x]$ y $g(x) = [2x]$ para todo real x. En cada caso, dibujar la gráfica de la función h definida en el intervalo $[-1, 2]$ por la fórmula que se da.

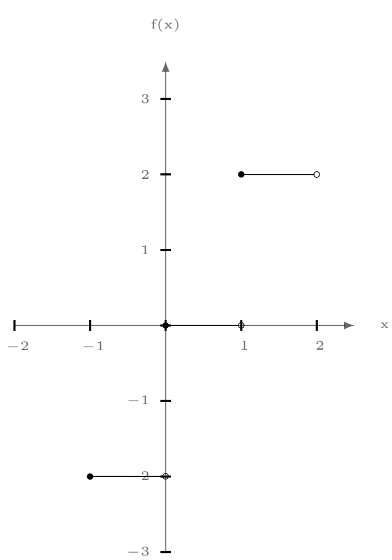
(a) $h(x) = f(x) + g(x)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] + [2x]$



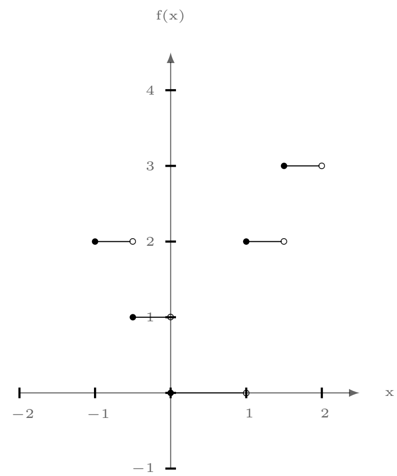
(b) $h(x) = f(x) + g(x/2)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] + [x] = 2[x]$



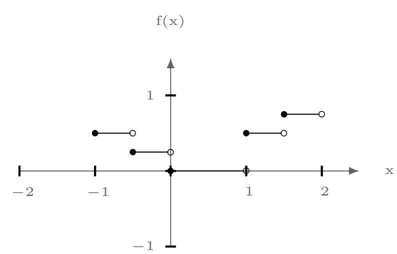
(c) $h(x) = f(x)g(x)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] \cdot [2x]$



(d) $h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g(x/2)$.

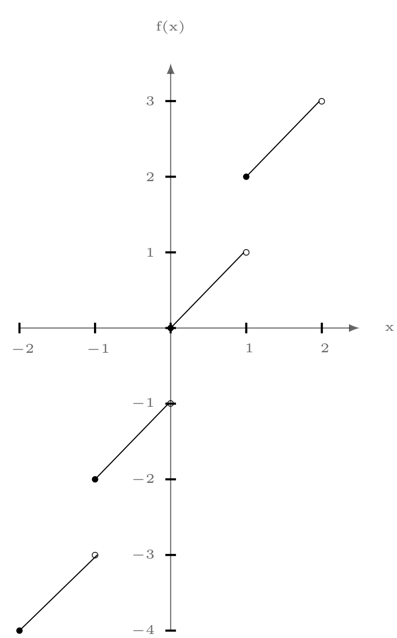
Respuesta.- $\frac{1}{4}[x][2x]$



2. En cada uno de los casos, f representa una función definida en el intervalo $[-2, 2]$ por la fórmula que se indica. Dibújense las gráficas correspondientes a cada una de las funciones f. Si f es una función escalonada, encontrar la partición P de $[-2, 2]$ tal que f es constante en los subintervalos abierto de P.

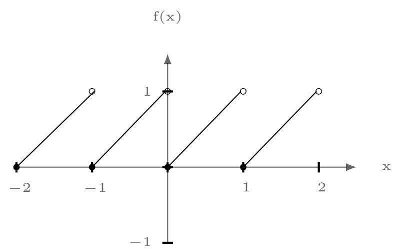
(a) $f(x) = x + [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



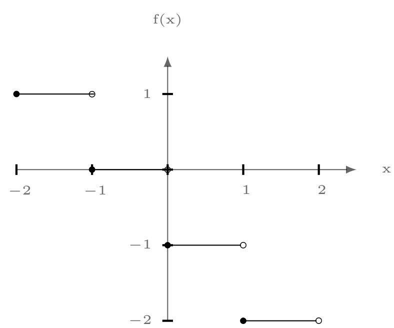
(b) $f(x) = x - [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



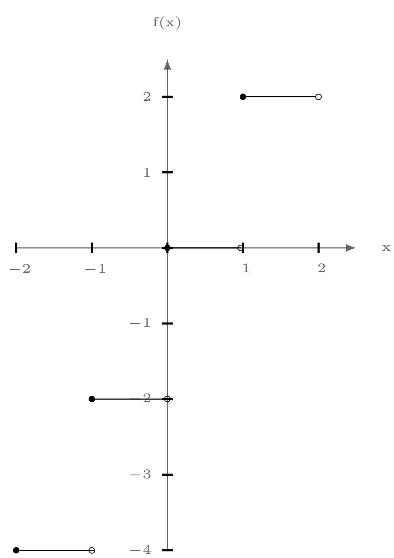
(c) $f(x) = [-x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



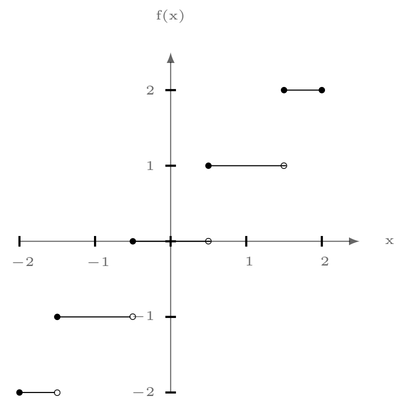
(d) $f(x) = 2[x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



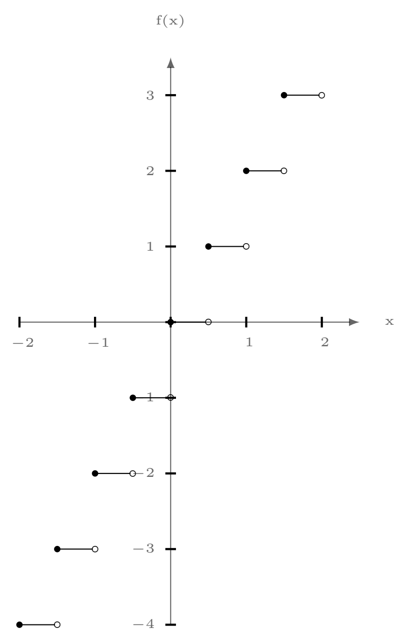
(e) $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 2\}$



(f) $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

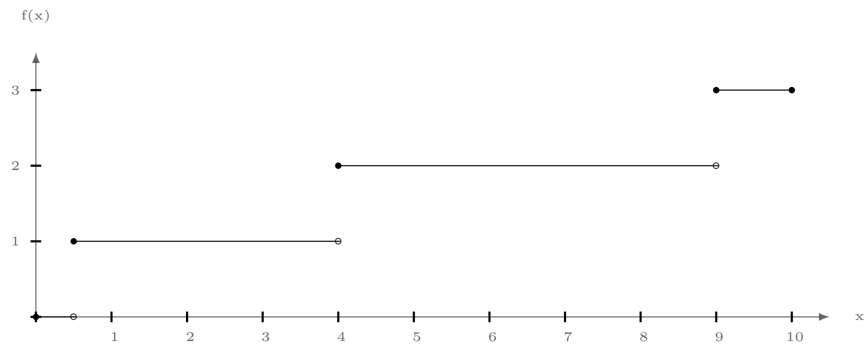
Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de los partición, $P = \{-2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$



3. En cada caso, dibujar la gráfica de la función definida por la fórmula que se da.

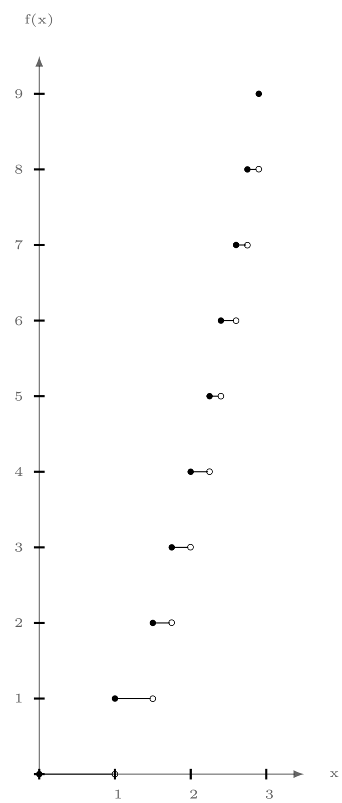
(a) $f(x) = [\sqrt{x}]$ para $0 \leq x \leq 10$

Respuesta.-



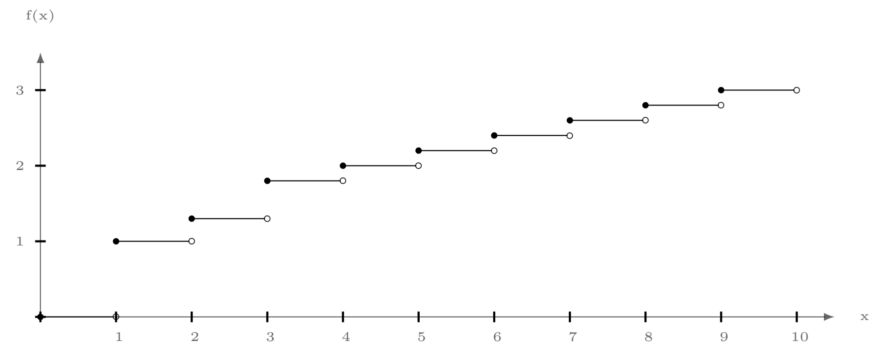
(b) $f(x) = [x^2]$

Respuesta.-



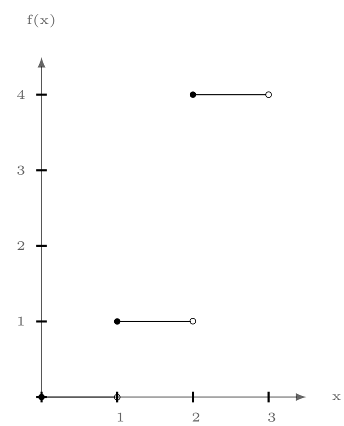
(c) $f(x) = \sqrt{[x]}$ para $0 \leq x \leq 10$.

Respuesta.-



(d) $f(x) = [x]^2$ para $0 \leq x \leq 3$.

Respuesta.-



4. demostrar que la función parte entera tiene las propiedades que se indican:

(a) $[x+n] = [x] + n$ para cada entero n.

Demostración.- Por definición sea $[x+n] = m$ para $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rcl} m \leq x+n < m+1 & \Longrightarrow & m-1 \leq x < m-n+1 \\ & \Longrightarrow & [x] = m-n \\ & \Longrightarrow & [x]+n = m \end{array}$$

(b) $[-x] = \left\{ \begin{array}{ll} -[x] & \textit{si } x \textit{ es entero} \\ -[x]-1 & \textit{en otro caso} \end{array} \right.$

Demostración.- Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $x = n$ para algunos $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $[x] = n$, luego

$$-x = -n \Longrightarrow [-x] = -n \Longrightarrow [-x] = -[x]$$

Por otro lado, si $x \neq \mathbb{Z}$, entonces $[x] = n$. Luego

$$n \leq x < n+1 \Longrightarrow -n-1 < -x < n \text{ ya que } n \neq x \Longrightarrow [-x] = -n-1 = -[x]-1$$

(c) $[x+y]=[x]+[y]$ ó $[x]+[y]+1$

Demostración.- Sea $[x]=m$ y $[y]=n$, luego,

$$m \le x < m+1 \qquad y \qquad n \le y < n+1$$

Entonces, sumando obtenemos

$$m+n \le x+y < m+n+2$$

por lo tanto

$$[x+y]=m+n=[x]+[y] \qquad o \qquad [x+y]=m+n+1=[x]+[y]+1$$

Esto ya que si $x+y$ está entre $m+n$ y $m+n+1$ entonces $[x+y]=[x]+[y]+1$ y cuando $x+y$ está entre $m+n+1$ y $m+n+2$ entonces $[x+y]=[x]+[y]+1$.

(d) $[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}$

Demostración.- Por la parte (c)

$$[2x]=[x+x]=[x]+[x] \qquad \text{ó} \qquad [x]+[x]+1$$

Para $[2x]=[x]+[x]$, sea $[x]=n$, entonces

$$\begin{aligned} [2x]=2n &\implies 2n \le 2x \le 2n+1 \\ &\implies n \le x < n+\frac{1}{2} \\ &\implies n \le x+\frac{1}{2} < n+1 \\ &\implies \left[x+\frac{1}{2}\right]=n \end{aligned}$$

de donde, $[2x]=2n=n+n=[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$

Por otro lado, para $[2x]=[x]+[x]+1$, sea $[x]=n$, entonces:

$$\begin{aligned} [2x]=2n+1 &\implies 2n+1 \le 2n+2 \\ &\implies n+\frac{1}{2} \le x < n+1 \\ &\implies n+1 \le x+\frac{1}{2} < n+2 \\ &\implies \left[x+\frac{1}{2}\right]=\text{n+1} \end{aligned}$$

de donde $[2x]=n+n+1=[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$

(e) $[3x] = [x] + [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{2}{3}]$

Demostración.- Por la parte (c) tenemos

$[3x] = [x+x+x] = [x+x]+[x]$ ó $[x+x]+[x]+1$ y $[x+x] = [x]+[x]$ ó $[x]+[x]+1$

de donde al juntarlos obtenemos:

$$[3x] = [x] + [x] + [x] \quad \text{ó} \quad [x] + [x] + [X] + 1 \quad \text{ó} \quad [x] + [x] + [x] + 2$$

Para $3x = [x] + [x] + [x]$ sea $[x] = n$ entonces

$$\begin{aligned} 3n \leq 3x < 3x + 1 \quad & \Longrightarrow \quad n \leq x < n + \frac{1}{3} \\ & \Longrightarrow \quad n \leq x + \frac{1}{3} < n + 1 \quad y \quad n \leq x + \frac{2}{3} < n + 1 \\ & \Longrightarrow \quad [x] = \left[x + \frac{1}{3}\right] = \left[x + \frac{2}{3}\right] = n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[x] = 3n = [x] + \left[x + \dfrac{1}{3}\right] + \left[x + \dfrac{2}{3}\right]$

Luego para $[3x] = [x] + [x] + [x] + 1$ sea $[x] = n$ entonces,

$$\begin{aligned} 3n + 1 \leq 3x < 3n + 1 \quad & \Longrightarrow \quad n + \frac{1}{3} \leq x < n + \frac{2}{3} \\ & \Longrightarrow \quad n + \frac{1}{3} \leq x + \frac{1}{3} < n + 1 \quad \Rightarrow \quad \left[x + \frac{1}{3}\right] = n \\ \text{y} \quad & \Longrightarrow \quad n + 1 \leq x + \frac{2}{3} < n + 2 \quad \Rightarrow \quad \left[x + \frac{2}{3}\quad\right] = n + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $[3x] = 3n + 1 \quad \Longrightarrow \quad [3x] = [x] + \left[x + \dfrac{1}{3}\right] + \left[x + \dfrac{2}{3}\right]$

Finalmente, para $[3x] = [x] + [x] + [x] + 2$ sea $[x] = n$ entonces

$$\begin{aligned} 3x + 2 \leq 3x < 3x + 3 \quad & \Longrightarrow \quad n + \frac{2}{3} \leq x < n + 1 \\ & \Longrightarrow \quad n + 1 \leq x + \frac{1}{3} < n + 2 \quad y \quad n + 1 \leq x + \frac{2}{3} < n + 2 \end{aligned}$$

Así que $[3x] = 3n + 2 = [x] + \left[x + \dfrac{1}{3}\right] + \left[x + \dfrac{2}{3}\right]$

5. Las fórmulas de los Ejercicios $4(d)$ y $4(c)$ sugieren una generalización para $[nx]$. Establecer y demostrar una generalización.

Demostración.- Se puede afirmar que:

$$[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right],$$

luego sea $[x]=m$, entonces

$$m \leq x < m+1 \quad \Longrightarrow \quad nm \leq nx < nm+n$$

Por lo tanto existen algunos $j \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq j < n$ tales que

$$nm+j \leq nx < nm+j+1$$

ya que sabemos que para cualquier número nx está entre k y $k+1$ para un entero. Pero como $nm \leq nx$ es un número entero k donde está en algún lugar entre nm y nx, lo que significa que es $nm+j$ para algún número entero j. Entonces tenemos que nx está entre $nm+j$ y $nm+j+1$: Básicamente, solo decimos que conocemos $k \leq nx < k+1$ para algún entero k. Pero es mas conveniente escribirlo como $nm+j \leq nx > nm+j+1$.
Luego, $[nx]=nm+j$. y por lo tanto,

$$m+\frac{j}{n} \leq x < m+\frac{j+1}{n}$$

para cada $k \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq k < n-j$ tenemos

$$\begin{aligned}
& m+\frac{k+k}{n} \leq x+\frac{k}{n} < m+\frac{j+k+1}{n} && \text{sumando } \frac{k}{n} \\
\Longrightarrow\quad & m \leq x+\frac{k}{n} < m+1 && \frac{j+k}{n} < 1 \text{ ya que } k < n-j \\
\Longrightarrow\quad & \left[x+\frac{k}{n}=m=[x]\right] && \text{para } 0 \leq k < n-j
\end{aligned}$$

por otro lado $n-j \leq k < n$, entonces

$$\begin{aligned}
& m+\frac{k+k}{n} \leq x+\frac{k}{n} < m+\frac{j+k+1}{n} && \\
\Longrightarrow\quad & m+1 \leq x+\frac{k}{n} < m+2 && \frac{j+k}{n} \geq 1 \text{ ya que } n-j \leq k \\
\Longrightarrow\quad & \left[x+\frac{k}{n}=m+1=[x]+1\right] && \text{para } n-j \leq k < n
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right] &= \sum_{k=0}^{n-j-1}\left[x+\frac{k}{n}\right]+\sum_{k=n-j}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right] \\
&= (n-j)[x]+j([x]+1) \\
&= n[x]+j \\
&= nm+j \\
&= [nx]
\end{aligned}$$

6. Recuérdese que un punto de red (x,y) en el plano es aquel cuyas coordenadas son enteras. Sea f una función no negativa cuyo dominio es el intervalo $[a,b]$, donde a y b son enteros, $a<b$. Sea S el conjunto

de puntos (x, y) que satisfacen $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq f(x)$. Demostrar que el número de puntos de la red pertenecientes a S es igual a la suma

$$\sum_{n=a}^{b} [f(n)]$$

Demostración.- Sea $n \in \mathbb{Z}$ con $a \leq n < b$: Sabemos que tal n existe desde $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$. Entonces, el número de puntos de red S con el primer elemento n es el número de enteros y tales que $0 < y \leq f(n)$. Pero, por definición, esto es $[f(n)]$ Sumando todos los números enteros n. $a \leq n \leq b$ tenemos,

$$S = \sum_{n=a}^{b} [f(n)]$$

7. Si a y b son enteros positivos primos entre sí, se tiene la fórmula

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Se supone que para $b = 1$ la suma del primer miembro es 0.

(a) Dedúzcase este resultado analíticamente contando los puntos de la red en un triángulo rectángulo.

Respuesta.- Sabemos por el ejercicio anterior que

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right]$$

(puntos de red de un triángulo rectángulo con base b y altura a). Ademas del ejercicio $1{,}7n4$ sabemos que

$$a(T) = I_t + \frac{1}{2}B_T - 1$$

donde I_T es el número de puntos de red interior y B_T es el número de puntos de red límite. También sabemos por la fórmula del área de un triángulo rectángulo que

$$a(T) = \frac{1}{2}(ab)$$

por lo tanto tenemos

$$I = \sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right] = \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}B_T + 1$$

Luego para calcular B_T notamos que no hay puntos límite en la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo ya que a y b no tienen un factor común. Esto se deduce ya que si no fuera tal punto a continuación, $\frac{na}{b} \in \mathbb{Z}$ para algunos $n < b$, tendríamos que a divide a b, lo que contradice que no tienen ningún factor común. Por lo tanto $B_T = a + b + 1$, de donde,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right] &= \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}(a+b+1) + 1 \\
&= \frac{1}{2}(ab - a - b + 1) \\
&= \frac{1}{2}(a-1)(b-1)
\end{aligned}$$

(b) Dedúzcase este resultado analíticamente de la manera siguiente. Cambiando el índice de sumación, obsérvese que $\sum_{a=1}^{b-1}[na/b] = \sum_{n=1}^{b-1}[a(b-n)/b]$. Aplíquese luego los ejercicios $4(a)$ y (b) al corchete de la derecha.

Respuesta.- Sea

$$\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right] = \sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{a(b-n}{b}\right]$$

entonces,

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{a(b-n)}{b}\right] & = & \sum_{n=1}^{b-1}[a] - \sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right] - \sum_{n=1}^{b-1} 1 \\ \Longrightarrow \quad 2\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{a(b-n}{b}\right] & = & \sum_{n=1}^{b-1} - \sum_{n=1}^{b-1} = (b-1)a - (b-1) \\ \sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right] & = & \frac{1}{2}(a-1)(b-1) \end{array}$$

8. Sea S un conjunto de puntos en la recta real. La función característica de S es, por definición, la función $Xs(x) = 1$ para todo x de S y $Xs(x) = 0$ para aquellos puntos que o pertenecen a S. Sea f una función escalonada que toma el valor constante c_k en el k-simo subintervalo I_k de una cierta partición de un intervalo $[a,b]$. Demostrar que para cada x de la reunión $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ se tiene

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_{I_k}(x)$$

Esta propiedad se expresa diciendo que toda función escalonada es una combinación lineal de funciones características del intervalos.

Demostración.- Definimos una función característica, Xs, en un conjunto S de puntos en $\mathbf{R}$ por

$$Xs(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in S \\ \\ 0 & si \quad x \notin S \end{cases}$$

Primero, observemos que los subintervalos abiertos de alguna partición de $[a,b]$ son necesariamente disjuntos desde $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \quad \Longrightarrow \quad x_0 < x_1 < ... < x_n$. Por lo tanto si $x \in I_1 \cup ... \cup I_n$ entonces $x \in I_j$ exactamente por uno $j, 1 \leq j \leq n$. Por lo tanto,

$$XIs(x) = \begin{cases} 1 & si \quad xj = k \\ \\ 0 & si \quad j \neq k \end{cases}$$

para todos $1 \leq k \leq n$ y para cualquiera x. Además, por definición de f, sabemos $f(x) = c_k$ si $x \in I_k$,. Así que,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k XI_k(x) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + ... + c_k \cdot 1 + ... + c_n \cdot 0 = c_k = f(x)$$

para cada $x \in I_i \cup ... \cup I_n$

1.12. Definición de integral para funciones escalonadas

Definición 1.10 (Definición de integral de funciones escalonadas) *La integral de s de a a b, que se designa por el símbolo $\int_a^b s(x)dx$, se define mediante la siguiente fórmula:*

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Es decir, para obtener el valor de la integra, se multiplica cada valor s_k constante, por la longitud de intervalo $k - simo$ correspondiente, formando el producto $s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ y se suman luego todos los productos obtenidos.

Definición 1.11 *Si x es constante en el intervalo abierto (a, b), es decir, $s(x) = c$ si $a < x < b$, se tiene entonces:*

$$\int_a^b s(x)dx = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$$

1.13. Propiedades de la integral de una función escalonada

TEOREMA 1.2 (Propiedad aditiva) $\displaystyle\int_a^b [s(x) + t(x)]dx = \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)dx$

TEOREMA 1.3 (Propiedad Homogénea) $\displaystyle\int_a^b c \cdot s(x)dx = c\int_a^b s(x)dx$

Demostración.- Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que s es constante en los subintervalos abiertos de P. Sea $s(x) = s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ para $k = 1, 2, ..., n$. Entonces, $c \cdot s(x) = c \cdot s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$, y por tanto en virtud de la definición de integral se tiene

$$\int_a^b c \cdot s(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} c \cdot s_k(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n} s_k(x_k - x_{k-1}) = c \cdot \int_a^b s(x)\ dx$$

TEOREMA 1.4 (Propiedad de la linealidad) $\displaystyle\int_a^b [c_1 x(x) + c_2 t(x)]dx = c_1\int_a^b s(x)dx + c_2\int_a^b dx$

TEOREMA 1.5 (Teorema de comparación) *Si $s(x) < t(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces* $\displaystyle\int_a^b s(x)dx = \int_a^b t(x)dx$

TEOREMA 1.6 (Aditividad respecto al intervalo de integración) $\displaystyle\int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx = \int_a^b s(x)dx$ *si $a < c < b$*

TEOREMA 1.7 (Invariancia frente a una traslación) $\displaystyle\int_a^b s(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)dx$ *para todo real* c

TEOREMA 1.8 (Dilatación o contracción del intervalo de integración) $\displaystyle\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx$ *para todo* $k >$ 0

Es conveniente considerar integrales con el límite inferior mayor que el superior. Esto se logra definiendo:

$$\int_a^b s(x)dx = -\int_a^b s(x)dx \qquad a < b$$

Demostración.- Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *una partición del intervalo* $[a, b]$ *tal que* s *es constante en los subintervalos abiertos de* P*. Supóngase que* $s(x) = s_i$ *si* $x_{i-1} < x < x_i$*. Sea* $t(x) = s(x/k)$ *si* $ka < x < kb$*. Entonces* $t(x) = s_i$ *si* x *pertenece al intervalo abierto* (kx_{i-1}, kx_i)*;, por tanto* $P' = \{kx_0, kx_1, ..., kx_n\}$ *es una partición de* $[ka, kb]$ *y* t *es constante en los subintervalos abiertos de* $P^{'}$*. Por tanto* t *es una función escalonada cuya integral es:*

$$\int_{ka}^{kb} t(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} s_i \cdot (kx_1 - kx_{i-1})k \sum_{k=1}^{n} s_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = k\int_a^b s(x)\ dx$$

TEOREMA 1.9 (Propiedad de reflexión de la integral) $\displaystyle\int_a^b s(x)dx = \int_{-b}^{-a} s(-x)dx$

1.15. Ejercicios

1. Calcular el valor de cada una de las siguientes integrales. Se pueden aplicar los teoremas dados en la Sección 1,13 siempre que convenga hacerlo. La notación $[x]$ indica la parte entera de x.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} [x]dx.$

Respuesta.- Sea $P = \{-1, 0, 1, 2\}$ ya que

$$[x] = \begin{cases} -1 & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & si \quad 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

entonces por definición $\displaystyle\int_{-1}^{3} [x]dx = -1 \cdot [0 - (-1)] + 0 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (2 - 1) + 2(3 - 2) = 2$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left[x+\frac{1}{2}\right]dx$

Respuesta.- La partición viene dada por $P=\{-1,-1/2,1/2,3/2,5/2\}$ ya que

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=\begin{cases} -1 & si \quad -1\le x+1/2<0 \quad \Longrightarrow \quad -3/2\le x<-1/2 \\ 0 & si \quad 0\le x+1/2<1 \quad \Longrightarrow \quad -1/2\le x<1/2 \\ 1 & si \quad 1\le x+1/2<2 \quad \Longrightarrow \quad 1/2\le x<3/2 \\ 2 & si \quad 2\le x+1/2<3 \quad \Longrightarrow \quad 3/2\le x<5/2 \\ 3 & si \quad 3\le x+1/2<4 \quad \Longrightarrow \quad 5/2\le x<7/2 \end{cases}$$

entonces por definición $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left[x+\frac{1}{2}\right]dx=-1\left(-\frac{1}{2}+1\right)+0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)+$ $\displaystyle 3\left(3-\frac{5}{2}\right)=-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot1+1\cdot1+2\cdot1+3\cdot\frac{1}{2}=4$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{3}([x]+[x+1/2])$

Respuesta.- Por la propiedad aditiva se tiene $\displaystyle\int_{-1}^{3}[x]dx+\int_{-1}^{3}\left[x+\frac{1}{2}\right]dx=2+4=6.$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{3}2[x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad homogénea se tiene $\displaystyle 2\cdot\int_{-1}^{3}[x]dx=2\cdot2=4$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{3}[2x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad de parte entera donde $[2x]=[x]+[x+frac12]$ y (c) resulta que $\displaystyle\int_{-1}^{3}[2x]dx=6$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^{3}[-x]dx$

Respuesta.- Por propiedad de parte entera se tiene que $[-x]=-[x]-1$ ya que el valor de los subintervalos no es entero, luego

$$\int_{-1}^{3}-[x]-1=\int_{-1}^{3}-[x]+\int_{-1}^{3}=-\int_{-1}^{3}[x]-\int_{-1}^{3}1=-2-\{1\cdot[3-(-1)]\}$$

2. Dar un ejemplo de función escalonada s definida en el intervalo cerrado $[0,5]$, que tenga las siguientes propiedades $\displaystyle\int_{0}^{2}s(x)dx=5,\ \int_{0}^{5}s(x)dx=2$

Respuesta.- Existen infinitas funciones escalonadas que deben cumplir lo siguiente:

$$\int_2^5 s(x)dx = \int_0^5 s(x)dx - \int_0^2 s(x)dx = -3$$

3. Probar que $\displaystyle\int_a^b [x]\ dx + \int_a^b [-x]\ dx = a - b$

Demostración.- Por propiedad de parte entera se tiene que $[-x] = -[x] - 1$ si x no es entero. Entonces $\displaystyle\int_a^b [x]\ dx + \int_a^b -[x] - 1\ dx$ luego por la propiedad aditiva $\displaystyle\int_a^b -1\ dx$, de donde por la propiedad dilatación $\displaystyle\int_b^a 1\ dx$ y por lo tanto $a - b$.

4. **(a)** Si n es un entero positivo, demostrar que $\displaystyle\int_0^n [t]\ dt = n(n-1)/2$.

Demostración.- Según la definición de la función de número entero mayor, $[t]$ es constante en los subintervalos abiertos, por lo que $[t] = k - 1$ si $k - 1 < t < k$ entonces

$$\int_0^n = \sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-(k-1)) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)$$

Luego sabemos que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$ por lo tanto $\displaystyle\int_0^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

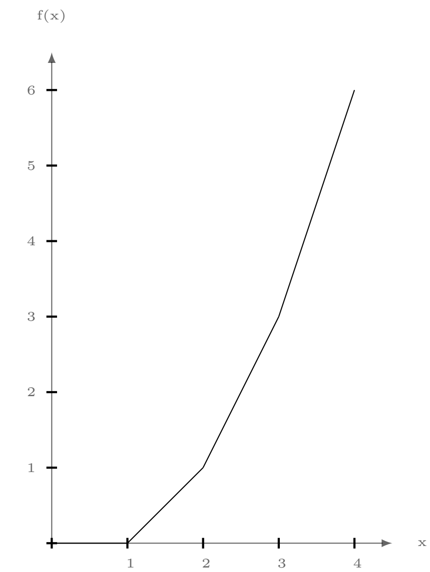
También se podría demostrar de la siguiente manera.

$$\int_0^n [t]\ dt = 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (2-1) + ... + (n-1) \cdot (n-(n-1)) = 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(b) Si $f(x) = \displaystyle\int_0^x [t]\ dt$ para $x \geq 0$, dibujar la gráfica de f sobre el intervalo $[0, 4]$.

Respuesta.- Ya que $x \in \mathbf{R}^+$ la gráfica será continua, pero por motivos prácticos dibujemos puntos en los números enteros del intervalo $[0, 4]$

- $f(0) = \displaystyle\int_0^0 [t]\ dt = 0(0-0) = 0$
- $f(1) = \displaystyle\int_0^1 [t]\ dt = 0(1-0) = 0$
- $f(2) = \displaystyle\int_0^2 [t]\ dt = 0(1-0) + 1(2-1) = 1$
- $f(3) = \displaystyle\int_0^3 [t]\ dt = 0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) = 3$
- $f(4) = \displaystyle\int_0^4 [t]\ dt = 0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) + 3(4-3) = 6$



5. **(a)** Demostrar que $\displaystyle\int_0^2 [t^2]\,dt = 5-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Demostración.-

$$[t^2] = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le t^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & si \quad 1 \le t^2 < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \le t < \sqrt{2} \\ 2 & si \quad 2 \le t^2 < 3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \le t < \sqrt{3} \\ 3 & si \quad 3 \le t^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} \le t < 2 \end{cases}$$

Vemos que la partición esta dada por $P = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$ y por lo tanto:

$$\int_0^2 \left[t^2\right]\ dt = \sum_{k=1}^{5} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0(1-0) + 1(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 3(2-\sqrt{3}) = 5-\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

(b) Calcular $\displaystyle\int_{-3}^{3} \left[t^2\right]\ dt$

Respuesta.- Sea $\displaystyle\int_{-3}^{3} [t^2]\ dx = \int_0^3 [t^2]\ dx + \int_{-3}^{0} [t^2]\ dx = \int_0^3 [t^2]\ dx + \int_0^3 [(-t)^2]\ dx = 2\int_0^3 [t^2]\ dx$ entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} \left[t^2\right]\ dt &= 2\cdot\int_0^3 \left[t^2\right]\ dt \\
&= 2\cdot\left(\int_0^2 \left[t^2\right]\ dt + \int_2^3 \left[t^2\right]\ dt\right) \\
&= 2\cdot\left(5-\sqrt{2}-\sqrt{3}+4(\sqrt{5}-2)+5(\sqrt{6}-\sqrt{5})+6(\sqrt{7}-\sqrt{6})+7(\sqrt{8}-\sqrt{7})+8(3-\sqrt{8})\right) \\
&= 2\left(21-3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)
\end{aligned}$$

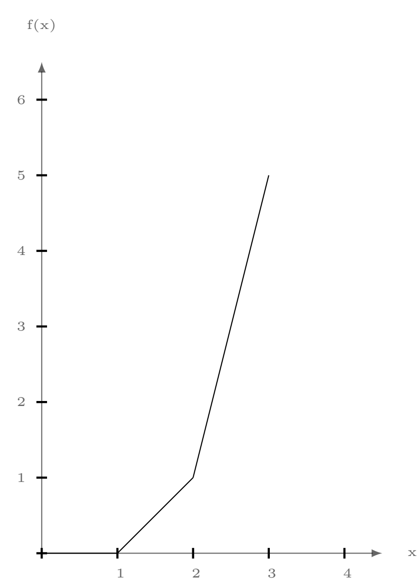
6. **(a)** Si n es un entero positivo demostrar que $\displaystyle\int_0^n [t]^2/;dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

Demostración.- Sea $P=\{0,1,...,n\}$. Entonces P es una partición de $[0,n]$ y $[t]^2$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Ademas, $[t]^2=(k-1)^2$ para $k-1<t<k$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^n [t]^2\ dt &= \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\cdot(k-(k-1)) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \\
&= \sum_{n-1}^{k=0} k^2 \\
&= \frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}
\end{aligned}$$

(b) Si $f(x)=\displaystyle\int_0^x [t]^2\ dt$ para $x\geq 0$, dibujar la gráfica de f en el intervalo $[0,3]$.

Respuesta.-



(c) Hallar todos los valores de $x > 0$ para los que $\displaystyle\int_0^x [t]^2\, dt = 2(x-1)$

Respuesta.- Los valores son $x = 1, \frac{5}{2}$ ya que son los que se intersectan con $2(x-1)$.

7. **(a)** Calcular $\displaystyle\int_0^9 [\sqrt{t}]\, dt$.

Respuesta.-

$$[\sqrt{t}] = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq \sqrt{t} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq t < 1 \\ \\ 1 & si \quad 1 \leq \sqrt{t} < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq t < 4 \\ \\ 2 & si \quad 2 \leq \sqrt{t} < 3 \quad \Rightarrow \quad 4 \leq t < 9 \\ \end{cases}$$

$$\int_0^9 \left[\sqrt{t}\right]\, dt = 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (4-1) + 2(9-4) = 13$$

(b) Si n es un entero positivo, demostrar que $\displaystyle\int_0^{n^2} \left[\sqrt{t}\right]\, dt = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$

Demostración.- Sea $P = \{0, 1, 3, 9, ..., n^2\}$. Entonces P es una partición de $\left[0, n^2\right]$ y $\left[\sqrt{t}\right]$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Además, porque $(k-1)^2 < t < k^2$ tenemos $\left[\sqrt{t}\right] = (k-1)$. Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{n^2} \left[\sqrt{t}\right]\, dt &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)(k^2 - (k-1)^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)(2k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 3k + 1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{2n^3}{3} + n^2 + \frac{n}{3} - \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} + n \\ &= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6} \end{aligned}$$

8. Pruébese que la propiedad de traslación (teorema 1.7) se puede expresar en la forma siguiente.

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx = \int_a^b f(x+c)\, dx$$

Demostración.- Sea $d = a + c$ y $e = b + c$ entonces por el teorema de invariancia frente a una traslación

$$\int_d^e f(x)\, dx = \int_{e+(-c)}^{d+(-c)} f(x - (-c))\, dx$$

para $-c \in \mathbb{R}$. Luego, $a = d - c$ y $b = c - e$ por lo tanto

$$\int_{b+c}^{a+c} f(x)\ dx = \int_a^b f(x+c)\ dx$$

9. Probar que la propiedad siguiente es equivalente al teorema 1.8

$$\int_{ka}^{kb} f(x)\ dx = k\int_a^b f(kx)\ dx$$

Demostración.- Sea $\displaystyle\int_a^b f\left(\frac{x}{j}\right)\ dx$, por el teorema tenemos que para cualquier $j > 0$ se tiene

$$\int_{b/j}^{a/j} f\left(j\frac{x}{j}\right)\ dx = \frac{1}{j}\int_a^b f\left(\frac{x}{j}\right)\ dx \quad \Rightarrow \quad j\int_{a/j}^{b/j} f(x)\ dx = \int_a^b f\left(\frac{x}{j}\right)\ dx$$

Luego, si $j \in \mathbb{R}^+$ entonces $\dfrac{1}{j} \in \mathbb{R}^+$, de donde podemos aplicar el teorema como $k = \dfrac{1}{j}$:

$$\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)\ dx = \int_a^b \quad \Rightarrow \quad k\int_a^b f(kx)\ dx = \int_{ka}^{kb} f(x)\ dx$$

10. Dado un entero positivo p. Una función escalonada s está definida en el intervalo $[0,p]$ como sigue $s(x) = (-1)^n n$ si x está en el intervalo $n \leq x < n+1$ siendo $n = 0,1,2,...,p-1$; $s(p) = 0$. Póngase $f(p) = \displaystyle\int_0^p s(x)\ dx$.

(a) Calcular $f(3), f(4)$ y $f(f(3))$.

Respuesta.- Sea

$$s(x) = \begin{cases} (-1)^n n & si \quad n \leq x < n+1,\ n = 0,1,...p-1 \\ 0 & si \quad x = p \end{cases}$$

Entonces calculamos para $f(x) = \displaystyle\int_0^p s(x)\ dx$:

$$\begin{array}{rcccccl} f(3) & = & \displaystyle\int_0^3 s(x)\ dx & = & (-1)^0 0(1-0) + (-1)\cdot 1\cdot(2-1) + (-1)^2 2(3-2) & = & 1 \\ f(4) & = & \displaystyle\int_0^4 s(x)\ dx & = & \displaystyle\int_0^3 s(x)\ dx + \int_3^4 s(x)\ dx = 1 + (-1)^3 3(4-3) & = & -2 \\ f(f(3)) & = & f(1) & = & \displaystyle\int_0^1 s(x)\ dx = (-1)^0 0(1-0) & = & 0 \end{array}$$

(b) ¿Para qué valor o valores de p es $|f(p)| = 7$?

Respuesta.- Luego de completarlo por un bucle llegamos a la conclusión de que los números que cumplen la condición dada son $14, 15$.

11. Si en lugar de definir la integral de una función escalonada utilizando la fórmula (1,3) se tomara como definición:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s_k^3 \cdot (x_k - x^{k-1})$$

se tendría una nueva teoría de la integración distinta de la dada. ¿Cuáles de las siguientes propiedades seguirán siendo válidas en la nueva teoría?

(a) $\displaystyle\int_a^b s + \int_b^c s = \int_a^c s.$

Respuesta.- Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_m\}$ una partición de $[a, b]$ y $P_2 = \{y_0, ..., y_n\}$ sea una partición de $[b, c]$ tal que $s(x)$ sea constante en los intervalos abiertos de P_1 y P_2, entonces, $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, ..., x_m, x_{m+1}, ..., xm + n\}$ de donde $x_m = y_0,\ x_{m+1} = y_1,\ x_{m+n} = y_n$, así P es una partición de $[a, c]$ y $s(x)$ es constante en los intervalos abiertos de P. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_a^c dx + \int_c^b s(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{m} s_k^3(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} s_k^3(y_k - y_{k-1}) \qquad def\ de \int_a^b s \\
&= \sum_{k=1}^{m} s_k^3(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{n+m} s_k^3(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m+n} s_k^3(x_k - x_{k-1}) \\
&= \int_a^c s(x)\,dx
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_a^b (s + t) = \int_a^b s + \int_a^b t$

Respuesta.- Sea $\displaystyle\int_0^1 (s(x) + t(x))\ dx = 2^3(1 - 0) = 8$, por otro lado

$$\int_0^1 s(x)\,dx = \int_0^1 t(x)\,dx = 1(1 - 1) + 1(1 - 1) = 2$$

por lo tanto no se cumple la definición para esta propiedad.

(c) $\displaystyle\int_a^b c \cdot s = c\int_a^b s$

Respuesta.- Sea $s(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$ y $c = 2$ entonces

$$\hat{\imath}n_0^1 s(x)\,dx = 2^3 = 2$$

, por otro lado

$$c \cdot \int_0^1 s(x)\,dx = 2 \cdot 1 = 2$$

por lo tanto es falso para esta propiedad.

(d) $\displaystyle\int_{a+c}^{b+c} s(x)\ dx = \int_a^b s(x+c)\ dx$

Respuesta.- Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $s(x))s_k$ en el que k es el subintervalo abierto de P. Luego,

$$P = \{x_o + c.x_1 + c, ..., x_n + c\}$$

es una partición de $[a + c, b + c]$ y $s(x - c) = x_k$ sobre $x_{k-1} + c < x < s_k + c$ entonces:

$$\int_a^b s(x)\ dx = \sum_{k=1}^n s_k^3(x_k - x_{k-1}) \qquad y \qquad \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\ dx = \sum_{k=1}^n s_k^3(x_k - x_{k-1})$$

por lo tanto

$$\int_a^b s(x)\ dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\ dx$$

(e) Si $s(x) < t(x)$ para cada x en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b s < \int_a^b t$.

Respuesta.- Como $s(x) < t(x)$ entonces $s(x)^3 < t(x)^3$ de donde el resultado se sigue inmediatamente.

12. Resolver el ejercicio 11 utilizando la definición

$$\int_a^b s(x)\ dx = \sum_{k=1}^n s_k \cdot (x_k^2 - x_{k-1}^2)$$

(a) $\displaystyle\int_a^b s + \int_b^c s = \int_a^c s.$

Respuesta.- Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_m\}$ una partición de $[a, b]$ y $P_2 = \{y_0, ..., y_n\}$ sea una partición de $[b, c]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P_1 y P_2. Entonces $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+n}\}$ donde $x_m = y_0, x_{m+1} = y_1, x_{m+n} = y_n$, así P es un partición de $[a, c]$ y $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Luego,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_a^b s(x)\ dx + \int_b^a s(x)\ dx &= \sum_{k=1}^m s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) + \sum_{k=1}^n s_k(y_k^2 - y_{k-1}^2) \\
&= \sum_{k=1}^m s_k(s_k^2 - x_{k-1}^2) + \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \sum_{k=1}^{m+n} x_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \int_a^c s(x)\ dx
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$

Respuesta.- Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ partición del intervalo $[a,b]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Supongamos que $s(x)+t(x) = s_k + t_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ para $k = 1,2,...n$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x)+t(x)\ dx &= \sum_{k=1}^n (s_k+t_k)(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \sum_{k=1}^n s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) + t_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \sum_{k=1}^n s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) + \sum_{k=1}^n t_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \int_a^b s(x)\ dx + \int_a^b t(x)\ dx
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_a^b c\cdot s = c\int_a^b s$

Respuesta.- Sea $P = \{x_0, ...x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Suponga que $s(x) = s_k$ si $x_{k-1} < x < s_k$ para $k = 1,2,...n$, entonces $c\cdot s(x) = c\cdot s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ de donde

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x)\ dx &= \sum_{k=1}^n c\cdot s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= c\cdot \sum_{k=1}^n s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= c\cdot \int_a^b s(x)\ dx
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_a^b c\cdot s = c\int_a^b s$

Respuesta.- En particular se da un contraejemplo dejando $s(x) = 1$ para todo $x \in [1,2]$ y $c = 1$ Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{0+1}^{1+1} x(x)\ dx &= 1\cdot(2^2 - 1^2) = 3 \\
\int_0^1 (s+1)\ dx &= 1\cdot(1^2 - 0^2) = 1
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que es falso para dicha propiedad.

(e) Si $s(x) < t(x)$ para cada x en $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b s < \int_a^b t$.

Respuesta.- Se da un contraejemplo considerando $s(x) = 0$ y $t(x) = 1$ en el intervalo $[-1,0]$. Luego $s < t$ en el intervalo, pero

$$\int_{-1}^0 s(x)\ dx = 0 \not< \int_{-1}^0 t(x)\ dx = 1\cdot(0^2 - (-1)^2) = -1$$

13. Demostrar el teorema 1,2 (Propiedad aditiva).

Demostración.- Sea $P = \{x_o, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, tal que $s(x) + t(x)$ es constante en los intervalos abiertos de P. Sea $s(x) + (x) = s_k + t_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ para $k = 1, 2, ..., n$, luego

$$\begin{aligned}
\int_a^b [s(x) + t(x)]\ dx &= \sum_{k=1}^n (s_k + t_k)(x_{k-1} - x_k) \\
&= \sum_{k=1}^n s_k(s_k + t_k) + t_k(s_k + t_k) \\
&= \sum_{k=1}^n s_k(s_k + t_k) + \sum_{K=1}^n t_k(s_k + t_k) \\
&= \int_a^b s(x)\ dx + \int_a^b t(x)\ dx
\end{aligned}$$

14. Demostrar el teorema 1,4(Propiedad lineal).

Demostración.- Por el teorema 1,2 y 1,3 se tiene

$$\int_a^b [c_1 s(x) + c_2 t(x)]\ dx = \int_a^b c_1 s(x)\ dx + \int_a^b c_2 t(x)\ dx = c_1 \int_a^b s(x)\ dx + c_2 \int_a^b t(x)\ dx$$

15. Demostrar el teorema 1,5 (teorema de comparación).

Demostración.- Sea $P\{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $s(x)$ y $t(x)$ sean constantes en los subintervalos abiertos de P. Suponga que $s(x) = s_k$ y $t(x) = t_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ de donde por definición de función escalonada de integrales tenemos:

$$\int_a^b s(x)\ dx = \sum_{k=1}^n s_k(x_{k-1} - x_k) \qquad y \qquad \int_a^b t(x)\ dx = \sum_{k=1}^n t_k(x_{k-1} - x_k)$$

Luego $s_k < t_k$ para cada $x \in [a, b]$, lo que implica:

$$\sum_{k=1}^n s_k(x_{k-1} - x_k) < \sum_{k=1}^n t_k(x_{k-1} - x_k) \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b s(x)\ dx < \int_a^b t(x)\ dx$$

16. Demostrar el teorema 1,6 aditividad con respecto al intervalo.

Demostración.- Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_m\}$ una partición de $[a, b]$ y $P_2 = \{y_o, ..., y_n\}$ sea una partición de $[c, b]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P_1 y P_2 luego $P = P_1 \cup P_2$ una partición de $[a, b]$ siendo $y_0 = x_m$, $y_1 = x_{m+1}, ..., y_n = x_{m+n}$ y $s(x)$ constante en los subintervalos abiertos de P, así

$$
\begin{aligned}
\int_a^c s(x)\,dx \int_c^b s(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{m} s_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} s_k(k_y - y_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} s_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{m+n} s_k(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} s_k(s_k - x_{k-1}) \\
&= \int_a^b s(x)\,dx
\end{aligned}
$$

17. Demostrar el teorema 1,7 invariancia frente a una traslación.

Demostración.- Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición $[a,b]$ tal que $s(x) = s_k$ constante en el subintervalo abierto de la partición. Por otro lado sea $P = \{x_0 + c, x_1 + c, ..., x_n + c\}$ en una partición de $[a+c, b+c]$ y $s(x-c) = s_k$ para $x_{k-1} + c < x < x_k + c$ Entonces,

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s_k(x_k - x_{k-1}) = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\,dx$$

1.16. La integral de funciones más generales

Definición 1.12 (Definición de integral de una función acotada) *Sea f una función definida y acotada en $[a,b]$. Sean s y t funciones escalonadas arbitrarias definidas en $[a,b]$ tales que*

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x)$$

para cada x en $[a,b]$. Si existe un número I, y sólo uno, tal que

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq I \leq \int : a^b t(x)\,dx$$

Para cada par de funciones escalonadas s y t que verifiquen $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$, entonces este número I se denomina la integral de f desde a hasta b y se indica por el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$. Cuando I existe se dice que f es integrable en $[a,b]$.

Si $a < b$ se define $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ supuesta integrable f en $[a,b]$.

También se define $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Si f es integrable en $[a,b]$, se dice que la integral $\int_a^b f(x)\,dxx$ existe.

La función f se denomina integrando, los número a y b los límites de integración, y el intervalo $[a,b]$ el intervalo de integración.

1.17. Integral superior e inferior

Definición 1.13 *Supongamos la función f acotada en $[a,b]$. Si s y t son funciones escalonadas que satisfacen $s(x) < f(x) < t(x)$ se dice que s es inferior a f y que t es superior a f*

TEOREMA 1.10 *Toda función f acotada en $[a,b]$ tiene una integral inferior $\underline{I}(f)$ y una integral superior $\bar{I}(f)$ que satisfacen las desigualdades*

$$\int_a^b s(x)\ dx \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t(x)\ dx$$

para todas las funciones s y t tales que $s \leq f \leq t$. La función f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si sus integrables superior e inferior son iguales, en cuyo caso se tiene

$$\int_a^b f(x)\ dx = \underline{I}(f) = \bar{I}(f)$$

Demostración.- *Sea S el conjunto de todos los números $\int_a^b s(x)\ dx$ obtenidos al tomar como s todas las funciones escalonadas inferiores a f, y sea T el conjunto de todos los números $\int_a^b t(x)\ dx$ al tomar como t todas las funciones escalonadas superiores a f. Esto es*

$$S = \left\{ \int_a^b s(x)\ dx | s \leq f \right\}, \qquad T = \left\{ \int_a^b t(x)\ dx | f \leq t \right\}$$

Los dos conjuntos S y T son no vacíos puesto que f es acotada. Asimismo, $\int_a^b s(x)\ dx \leq \int_a^b t(x)\ dx$ si $s \leq f \leq t$, de modo que todo número de S es menor que cualquiera de T. Por consiguiente según el teorema I.34, S tiene extremo superior, y T tiene extremo inferior, que satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\ dx \leq \sup S \leq \text{ínf}\, T \leq \int_a^b y(x)\ dx$$

para todas las s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$. Esto demuestra que tanto $\sup S$ como el $\text{ínf}\, T$ satisfacen $\int_a^b s(x)\ dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\ dx$. Por lo tanto f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si $\sup S = \text{ínf}\, T$, en cuyo caso se tiene

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sup S = \text{ínf}\, T.$$

El número $\sup S$ se llama integral inferior de f y se presenta por $\underline{I}(f)$. El número $\text{ínf}\, T$ se llama integral superior de f y se presenta por $\bar{I}(f)$. Así que tenemos

$$\underline{I}(f) = \sup \left\{ \int_a^b s(x)\ dx \mid s \leq f \right\}, \qquad \bar{I}(f) = \text{ínf} \left\{ \int_a^b t(x)\ dx \mid f \leq t \right\}$$

1.18. El área de un conjunto de ordenadas expresada como una integral

TEOREMA 1.11 *Sea f una función no negativa, integrable en un intervalo $[a,b]$, y sea Q el conjunto de ordenadas de f sobre $[a,b]$. Entonces Q es medible y su área es igual a la integral $\int_a^b f(x)\ dx$*

Demostración.- *Sea S y T dos regiones escalonadas que satisfacen $S \subseteq Q \subseteq T$.. Existen dos funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$ en $[a, b]$, tales que*

$$a(S) = \int_a^b s(x)\, dx \quad y \quad a(T) = \int_a^b t(x)\, dx$$

Puesto que f es integrable en $[a, b]$ el número $I = \int_a^b f(x)\, dx$ es el único que satisface las desigualdades

$$\int_a^b s(x) \leq I \leq \int_a^b t(x)\, dx$$

para todas las funciones escalonadas s y t que cumplen $s \leq f \leq t$. Por consiguiente ése es también el único número que satisface $a(S) \leq I \leq a(T)$ para todas las regiones escalonadas S y T tales que $S \subseteq Q \subseteq T$. Según la propiedad de exhaución, esto demuestra que Q es medible y que $a(Q) = I$

TEOREMA 1.12 *Sea f una función no negativa, integrable en un intervalo $[a, b]$. La gráfica de f, esto es el conjunto*

$$\{(x, y)/a \leq x \leq b, y = f(x)\}$$

es medible y tiene área igual a 0.

Demostración.- *Sean Q el conjunto de ordenadas del teorema 1.11 y $Q^{'}$ el conjunto que queda si se quitan de Q los puntos de la gráfica de f. Esto es,*

$$Q^{'} = \{(x, y)/a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

El razonamiento utilizado para demostrar el teorema 1.11 también demuestra que $Q^{'}$ es medible y que $a(Q^{'}) = a(Q)$. Por consiguiente, según la propiedad de la diferencia relativa al área, el conjunto $Q - Q^{'}$ es medible y

$$a(Q - Q^{'}) = a(Q) - a(Q^{'}) = 0$$

.

1.20. Funciones monótomas y monótonas a trozos. Definiciones y ejemplos

Definición 1.14 (Funciónes crecientes y decreciente) *Una función f se dice que es creciente en un conjunto S si $f(x) \leq f(y)$ para cada par de puntos x e y de S con $x < y$. Si se verifica la desigualdad estricta $f(x) < f(y)$ par todo $x < y$ en S se dice que la función es creciente en sentido estricto en S.*

Una función se dice decreciente en S si $f(x) \geq f(y)$ para todo $x < y$ en S. Si $f(x) > f(y)$ para todo $x < y$ en S la función se denomina decreciente en sentido estricto en S.

Definición 1.15 (Función monótona) *Una función se denomina monótona en S si es creciente en S o decreciente en S. Monótona en sentido estricto significa que f o es estrictamente creciente en S o estrictamente decreciente en S. En general el conjunto S es un intervalo abierto o cerrado.*

Definición 1.16 (Función monótona a trozos) *Una función f se dice que es monótona a trozos en un intervalo si su gráfica está formada por un número finito de trozos monótonos. Es decir, f es monótona a trozos en $[a,b]$ si existe una partición P de $[a,b]$ tal que f es monótona en cada uno de los subintervalos abiertos de P.*

1.21. Integrabilidad de funciones monótonas acotadas

TEOREMA 1.13 *Si f es monótona en un intervalo cerrado $[a,b]$, f es integrable en $[a,b]$*

Demostración.- Demostraremos el teorema para funciones decrecientes. El razonamiento es análogo para funciones decrecientes. Supongamos pues f decreciente y sean $\underline{I}(f)$ e $\overline{I}(f)$ sus integrales inferior y superior. Demostraremos que $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.
Sea n un número entero positivo y construyamos dos funciones escalonadas de aproximación s_n y t_n del modo siguiente: $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$ en n subintervalos iguales, esto es, subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ tales que $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ para cada valor de k. Definamos ahora s_n y t_n por las fórmulas

$$s_n(x) = f(x_{k-1}), \quad t_n(x) = f(x_k) \quad si \quad x_{k-1} < x < x_k$$

en los puntos de división, se definen s_n y t_n de modo que se mantengan las relaciones $s(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$ en todo $[a,b]$. Con esta elección de funciones escalonadas, tenemos

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] =$$

$$= \frac{(b-a)\,[f(b) - f(a)]}{n}$$

siendo la última igualdad una consecuencia de la propiedad telescópica de las sumas finitas. Esta última relación tiene una interpretación geométrica muy sencilla. La diferencia $\int_a^n t_n - \int_a^b s_n$ es igual a la suma de las áreas de los rectángulos. Deslizando esos rectángulos hacia la derecha, vemos que completan un rectángulo de base $(b-a)/n$ y altura $f(b)-f(a)$; la suma de las áreas es por tanto, C/n, siendo $C = (b-a)\,[f(b) - f(a)]$. Volvamos a escribir la relación anterior en la forma

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \frac{C}{n} \qquad (1)$$

Las integrales superior e inferior de f satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s_n \leq \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n \quad y \quad \int_a^b s_n \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n$$

Multiplicando las primeras igualdades por (-1) y sumando el resultado a las segundas,es decir:

$$-\underline{I}(f) \leq -\int_a^b s_n \ \wedge \ \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n \quad \vee \quad -\bar{I}(f) \leq -\int_a^b s_n \ \wedge \ \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n$$

obtenemos

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n$$

Utilizando (1) y la relación $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$ obtenemos

$$0 \leq \bar{I}(f) - \bar{I}(f) \leq \frac{C}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. Por consiguiente, según el teorema I.31 se tiene

$$\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \underline{I}(f) + \frac{C}{n}$$

por lo tanto $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. *Esto demuestra que* f *es integrable en* $[a, b]$.

1.22. Cálculo de la integral de una función monótona acotada

TEOREMA 1.14 *Supongamos* f *creciente en un intervalo cerrado* $[a, b]$. *Sea* $x_k = a + k(b-a)/n$ *para* $k = 0, 1, ..., n$. *Si* I *es un número cualquiera que satisface las desigualdades*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad (2)$$

para todo entero $n \geq 1$, *entonces* $I = \int_a^b f(x)\,dx$

Demostración.- Sean s_n *y* t_n *las funciones escalonadas de aproximación especial obtenidas por subdivisión del intervalo* $[a, b]$ *en* n *partes iguales, como se hizo en la demostración del teorema 1.13. Entonces, las desigualdades (1.9) establecen que*

$$\int_a^b s_n \leq I \leq \int_a^b t_n$$

para $n \geq 1$. *Pero la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *satisface las mismas desigualdades que* I. *Utilizando la igualdad* (1) *tenemos* $I \leq \int_a^b t_n$ *como también* $\int_a^b s_n \leq \int_a^b f(x)\,dx \implies -\int_a^b f(x)\,dx \leq -\int_a^b s_n$ *entonces*

$$I - \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n$$

Similarmente usando las inecuaciones $\int_a^b s_n \leq I$ *y* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b t_n$ *resulta que*

$$\int_a^b f(x)\,dx - I \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n \quad \implies \quad I - \int_a^b f(x)\,dx \geq -\left(\int_a^b t_n - \int_a^b s_n\right)$$

Donde se concluye que

$$0 \leq \left| I - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \frac{C}{n}$$

par todo $n \geq 1$. *Por consiguiente, según el teorema I.31, tenemos* $I = \int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA 1.15 *Supongamos* f *decreciente en* $[a, b]$. *Sea* $x_k = c + k(b-a)/n$ *para* $k = 0, 1, ..., n$. *Si* I *es un número cualquiera que satisface las desigualdades*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

para todo entero $n \geq 1$, *entonces* $I = \int_a^b f(x)\,dx$

1.23. Cálculo de la integral $\int_0^b x^p\, dx$ siendo p entero positivo

TEOREMA 1.16 *Si p es un entero positivo y $b > 0$, tenemos*

$$\int_0^b x^p\, dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

Demostración.- Comencemos con las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

válidas para todo entero $n \geq 1$ y todo entero $p \geq 1$. Estas desigualdades se demostraron anteriormente. La multiplicación de esas desigualdades por b^{p+1}/n^{p+1} nos da

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^p < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^p$$

Si ponemos, las desigualdades (2) del teorema 1.14 se satisfacen poniendo $f(x) = x^p$, $a = 0$, entonces $I = \dfrac{b^{p+1}}{p+1}$. Resulta pues que

$$\int_0^b x^p\, dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

1.24. Propiedades fundamentales de la integral

TEOREMA 1.17 (Linealidad respecto al integrando) *Si f y g son ambas integrables en $[a, b]$ también lo es $c_1 f + c_2 g$ para cada par de constantes c_1 y c_2. Además, se tiene*

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx = c_1 \int_a^b f(x)\, dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx$$

Nota.- Aplicando el método de inducción, la propiedad de linealidad se puede generalizar como sigue: Si $f_1, ..., f_n$ son integrables en $[a.b]$ también lo es $c_1 f_1 + ... + c_n f_n$ para $c_1, ..., c_n$ reales cualesquiera y se tiene

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b f_k(x)\, dx$$

TEOREMA 1.18 (Aditividad respecto al intervalo de integración) *Si existen dos de las tres integrales siguientes, también existe la tercera y se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

Nota.- En particular, si f es monótona en $[a, b]$ y también en $[b, c]$, existen las dos integrales $\int_a^b f$ e $\int_b^c f$, con lo que también existe $\int_a^c f$ y es igual a la suma de aquellas.

TEOREMA 1.19 (Invariancia frente a una traslación) *Si f es integrable en $[a,b]$, para cada número real c se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

TEOREMA 1.20 (Dilatación o contracción del intervalo de integración) *Si f es integrable en $[a,b]$ para cada número real $k \neq 0$ se tiene:*

$$\int_a^b f(x) = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx$$

Nota.- En los dos teoremas 1.19 y 1.20 la existencia de una de las integrables implica la existencia de la otra. Cuando $k=-1$, el teorema 1.19 se llama propiedad de reflexión.

TEOREMA 1.21 (teorema de comparación) *Si f y g son ambas integrables en $[a,b]$ y si $g(x) \leq f(x)$ para cada x en $[a,b]$ se tiene:*

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

1.25. Integración de polinomios

Podemos usar el teorema 1.20 para demostrar que (1.11) también es válida para b negativo. Tomemos $k=-1$ en el teorema 1.20 y se obtiene

$$\int_0^{-b} = -\int_0^b (-x)^p\,dx = (-1)^{p+1}\int_0^b x^p\,dx = \frac{(-b)^{p+1}}{p+1}$$

lo cual prueba la validez de (1.11) para b negativo. La propiedad aditiva $\int_a^b x^p\,dx = \int_0^b x^p\,dx - \int_0^a x^p\,dx$ nos conduce a la formula general:

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

válida para todos los valores reales de a y b, y todo entero $p \geq 0$.
Algunas veces el símbolo

$$P(x)\,|_a^b$$

se emplea para designar la diferencia $P(b)-P(a)$. De este modo la fórmula anterior puede escribirse así:

$$\int_a^b x^p\,dx = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_a^b = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

Esta fórmula y la propiedad de linealidad, nos permiten integrar cualquier polinomio.
Con mayor generalidad, para calcular la integral de cualquier polinomio integramos término a término:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^k\,dx = \int_{k=0}^{n} c_k \frac{b^{k+1}-a^{a+1}}{k+1}$$

1.26. Ejercicios

Calcular cada una de las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int_0^3 x^2\ dx = \frac{3^3}{3} = 9$

2. $\displaystyle\int_{-3}^3 x^2\ dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-3}^{3} = \frac{3^3-(-3)^3}{3} = \frac{54}{3} = 18$

3. $\displaystyle\int_0^2 4x^3\ dx = 4\frac{2^4}{4} = 16.$

4. $\displaystyle\int_{-2}^2 4x^3\ dx = 4\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-2}^{2} = 4\frac{2^4-(-2)^4}{4} = 0$

5. $\displaystyle\int_0^1 5t^4\ dt = 5\frac{1^5}{5} = 1$

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 5t^4\ dt = 5\left.\frac{t^5}{5}\right|_{-1}^{1} = 5\frac{1^5-(-1)^5}{5} = 5$

7. $\displaystyle\int_0^1 (5x^4-4x^3)\ dx = 5\frac{1^5}{5} - 4\frac{1^4}{4} = 0$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 (5x^4-4x^3)\ dx = 5\int_{-1}^1 x^4\ dx - 4\int_{-1}^1 x^3\ dx = 5\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1} - 4\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 5\cdot\frac{1^5-(-1)^5}{5} - 4\cdot\frac{1^4-(-1)^4}{4} = 2$

9. $\displaystyle\int_{-1}^2 (t^2+1)\ dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{2} + \left.t\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3-(-1)^3}{3} + 2-(-1) = 6$

10. $\displaystyle\int_2^3 (3x^2-4x+2)\ dx = 3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 - 4\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3 + 2\cdot\left.t\right|_2^3 = 3\frac{3^3-2^3}{3} - 4\frac{3^2-2^2}{2} + 2(3-2) = 11$

11. $\displaystyle\int_0^{1/2} (8t^3+6t^2-2t+5)\ dt = 8\cdot\frac{(1/2)^4}{4} + 6\cdot\frac{(1/2)^3}{3} - 2\cdot\frac{(1/2)^2}{2} + 5\cdot(1/2) = \frac{21}{8}$

12. $\displaystyle\int_{-2}^4 (u-1)(u-2)\ du \quad\Longrightarrow\quad \int_{-1}^4 u^2-3u+2\ dx = \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-2}^{4} - 3\cdot\left.\frac{u^2}{2}\right|_{-2}^{4} + \left.2u\right|_{-2}^{4} =$

$$= \frac{4^3-(-2)^3}{3} - 3\frac{4^2-(-2)^2}{2} + 2[4-(-2)] = \frac{73}{3} - 18 + 12 = 18$$

13. $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+1)^2\,dx \Longrightarrow \int_{-1+1}^{0+1} (x-1+1)^2\,dx\ \ (\textit{traslación}) \Longrightarrow \int_{1}^{0} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1^2-0^2}{3} = \frac{1}{3}$

14. $\displaystyle\int_{0}^{-1} (x+1)^2\,dx$

Respuesta.- Por ser $-1<0$ entonces por el teorema de dilatación o contracción del intervalo de integración se tiene que

$$\int_0^{-1}(x+1)^2\,dx = -\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx = -\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{0} + 2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + x\bigg|_{-1}^{0}\right) = -\left[\frac{1}{3}+1+(-1)\right] = -\frac{1}{3}$$

15. $\displaystyle\int_0^2 (x-1)(3x-1)\,dx = 3\cdot\frac{2^3}{3} - 4\cdot\frac{2^2}{2} + 2 = 2$

16. $\displaystyle\int_0^2 |(x-1)(3x-1)|\,dx$

Respuesta.- Se evaluará en intervalos en los que sea siempre sea positiva o siempre negativa, como también evaluar por separado. Examinando el polinomio se tiene ceros en $x=1, \frac{1}{3}$, donde la expresión va a cambiar de signo en estos puntos, entonces:

$$\begin{aligned}
x<\frac{1}{3} &\quad\Longrightarrow\quad (x-1)(3x-1)>0 \quad\Longrightarrow\quad |(x-1)(3x-1)| = (x-1)(3x-1)\\
\frac{1}{3}<x<1 &\quad\Longrightarrow\quad (x-1)(3x-1)<0 \quad\Longrightarrow\quad |(x-1)(3x-1)| = -(x-1)(3x-1)\\
x>1 &\quad\Longrightarrow\quad (x-1)(3x-1)>0 \quad\Longrightarrow\quad |(x-1)(3x-1)| = (x-1)(3x-1)
\end{aligned}$$

Luego por el teorema aditivo de integración

$$\int_0^2 (x-1)(3x-1)\,dx = \int_0^{1/3}(x-1)(3x-1)\,dx + \int_{1/3}^{1} -(x-1)(3x-1)\,dx + \int_1^2 (x-1)(3x-1)\,dx$$

Así, nos queda

$$\int_0^2 3x^2-4x+1\,dx = \int_0^{1/3} 3x^2-4x+1\,dx + \int_{1/3}^{1} -(3x^2-4x+1)\,dx + \int_1^2 3x^2-4x+1\,dx$$

por lo tanto

$$\left(3\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+x\right)\bigg|_0^{1/3} - \left(3\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+x\right)\bigg|_{1/3}^{1} + \left(3\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+x\right)\bigg|_1^{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\right) - 0 - \left[(1-2+1) - \left(\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4}{27}+\frac{4}{27}+2 = \frac{62}{27}$$

17. $\displaystyle\int_0^3 (2x-5)^3\,dx$

Respuesta.- Por el teorema de invariancia frente a una traslación se tiene

$$\int_0^3 (2x-5)^3\,dx \int_{-5/2}^{1/2} \left[2\left(x+\frac{5}{2}\right)-5\right]^3\,dx = \int_{-5/2}^{1/2} (2x)^3\,dx = 80\frac{x^4}{4}\Big|_{-5/2}^{1/2}\,dx = \frac{1}{8}-\frac{625}{8} = -78$$

18. $$\int_{-3}^{3} (x^2-3)^3\,dx = \int_{-3}^{3} x^6-9x^4+27x^2-27\,dx = \left(\frac{x^7}{7}-9\frac{x^5}{5}+27\frac{x^3}{3}-27x\right)\Big|_{-3}^{3} =$$

$$= \left(\frac{2187}{7}-\frac{2187}{5}+243-81\right)-\left(-\frac{2187}{7}+\frac{2187}{5}-243+81\right) = \frac{2592}{35}$$

19. $\displaystyle\int_0^5 (x-5)^4\,dx =$

20. $\displaystyle\int_{-2}^{-4} (x+4)^{10}\,dx$