Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Cálculo diferencial e integral II.**
Práctica: 1.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Problema 1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ **con** $x, y \neq 0$**. Si** $\|x\| = \|y\|$**, entonces hallar la medida del ángulo entre** $\frac{1}{2}(x+y)$ **e** $y - x$**.**

Respuesta.- Ya que $x, y \neq 0$ y por el teorema de los cosenos se tiene,

$$\left\langle \frac{1}{2}(x+y), y - x \right\rangle = \|x\|\|y\| \cos\theta \qquad (1)$$

Por definición de producto interno y la parte izquierda de (1),

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2}(x_i + y_i) \cdot (y_i - x_i) \right] = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) = -\frac{1}{2} \left(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle \right).$$

Así (1) quedará de la siguiente manera,

$$\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = -2\|x\|\|y\| \cos\theta.$$

Ya que $\|x\| = \|y\|$ y el teorema de cosenos. Entonces,

$$\|x\|\|x\| \cos\theta + \|y\|\|y| \cos\theta = -2\|x\|\|x\| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta \left(3\|x\|\|x\| + \|y\|\|y|\right) = 0$$

Por lo tanto,

$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos(0) \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 2. **Demuestre que si** $x + y$ **y** $x - y$ **son ortogonales, entonces los vectores** x **e** y **deben tener la misma longitud.**

Demostración.- Sea $x.y \in \mathbb{R}^n$. Por definición de ortogonalidad, se tiene

$$\langle x + y, x - y \rangle = 0.$$

Luego por definición de producto interno,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i + y_i)(x_i - y_i) \right] &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 &= 0 \\
\langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle &= 0 \\
\sqrt{\langle x, x \rangle} &= \sqrt{\langle y, y \rangle} \\
\|x\| &= \|y\|
\end{aligned}$$

Ya que la norma mide el tamaño del vector entonces x e y tienen la misma longitud.

Problema 3. **Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si, y solamente si, x e y son ortogonales.**

Demostración.- Sea $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. Como $\langle x, y\rangle = 0$, entonces

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Problema 4. **Demuestre, y dé una interpretación geométrica de, la ley del paralelogramo: Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces:**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Demostración.- Ya que $x, y \in \mathbb{R}^3$ y por definición de norma, entonces

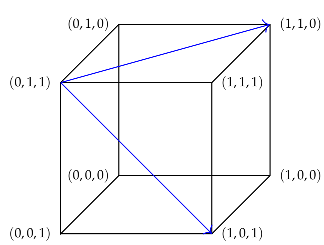
$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \left(\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i+y_i)(x_i+y_i)\right] + \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-y_i)(x_i-y_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2\right) \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{i=1}^{3} y_i^2\right) = 2\left(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle\right) \\
&= 2\left[\left(\sqrt{\langle x, x\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2\right] \\
&= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).
\end{aligned}$$

Otra manera de demostrar sería:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Problema 5. **Calcule el ángulo formado por los diagonales de dos caras consecutivas de un cubo de arista igual a a.**

Demostración.- Ya que se tiene un cubo. Entonces,



Luego se tiene al vector $x = (1,0,1) - (0,1,1) = (1,-1,0)$ y $y = (1,1,0) - (0,1,1) = (1,0,-1)$, por lo tanto el angulo será:

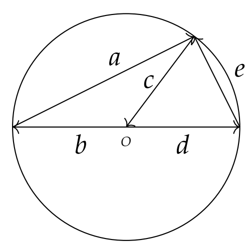
$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\langle (1,-1,0),(1,0,-1)\rangle}{\|(1,-1,0)\|\|(1,0,-1)\|} \\
&= \frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Problema 6. Demuestre que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Demostración.- Representamos la idea con la siguiente gráfica.



Donde $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}^n$ y O el centro de la circunferencia, por lo tanto los vectores b,d,c son iguales e inscritos en una semicircunferencia. Debemos demostrar que $\langle a,e\rangle = 0$.

Sean

$$a = c+b, \quad e = c+d \quad \text{y} \quad \|b\| = \|c\| = \|d\|$$

Entonces por las propiedades de producto interno tenemos,

$$\langle a,e\rangle = \langle c+b, c+d\rangle = \langle c+b, c\rangle + \langle c+b, d\rangle = \langle c,c\rangle + \langle c,b\rangle + \langle c,d\rangle + \langle b,d\rangle.$$

Ya que $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$ y $b = -d$, nos queda:

$$\langle a,e\rangle = \|c\|^2 - \langle c,d\rangle + \langle c,d\rangle - \|d\|^2 = 0.$$

Problema 7. Demuestre que uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo.

Demostración.-

Problema 8. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vertices.

Demostración.-

Problema 9. **Demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.**

Demostración.-

Problema 10. **Pruebe la ley de senos utilizando vectores.**

Demostración.-

Problema 11. **Muestre que las medianas de un triángulo se cortan en un punto a un tercio de cada mediana.**

Demostración.-

Problema 12. **Demuestre que las diagonales de un rombo son ortogonales entre si.**

Demostración.-

Problema 13. **Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:**

$$x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z.$$

Demostración.- La demos

Problema 14. **Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ con $x, y \neq 0$. Si $\dfrac{\|x \times y\|}{\|x\|^3} = 3$, entonces hallar $\dfrac{\|\langle x, x \rangle y - \langle x, y \rangle x\|}{\|x\|^4}$.**

Demostración.-

Problema 15. **Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:**

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

Demostración.-

Problema 16. **Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:**

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$

Demostración.- Por el problema 13, sabemos que $x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$. Por lo tanto,

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z + \langle y, x \rangle z - \langle y, z \rangle x + \langle z, y \rangle x - \langle z, x \rangle y.$$

Luego, por la propiedad de conmutatividad concluimos que:

$$\langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z + \langle x, y \rangle z - \langle y, z \rangle x + \langle y, z \rangle x - \langle x, z \rangle y = 0.$$