

Ejercicios capítulo 6

Christian Limbert Paredes Aguilera

2022-08-12

Ejercicios Capítulo 6

6.1.

Se seleccionaron, aleatoriamente, 60 personas y se le preguntó su preferencia con respecto a tres marcas, A , B y C . Estas fueron de 27, 18 y 15 respectivamente. ¿Qué tan probable es este resultado si no existen otras marcas en el mercado y la preferencia se comparte por igual entre las tres?

Respuesta.- Ya que las preferencias son iguales entonces, se utilizará la función de distribución multinomial, como se verá a continuación:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}; n, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_{k-1}!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_{k-1}^{x_{k-1}}$$

De donde

$$p(27, 18, 15; 60, 1/3, 1/3, 1/3) = \frac{60!}{27! 18! 15!} \left(\frac{1}{3}\right)^{27} \left(\frac{1}{3}\right)^{18} \left(\frac{1}{3}\right)^{15} = 0.002153159.$$

```
factorial(60)/(factorial(27)*factorial(18)*factorial(15))*(1/3)^(27)*(1/3)^(18)*(1/3)^(15)
```

```
## [1] 0.002153159
```

```
dmultinom(c(27,18,15),60,c(1/3,1/3,1/3))
```

```
## [1] 0.002153159
```

6.2.

Supóngase que de un proceso de producción se seleccionan, de manera aleatoria, 25 artículos. Este proceso de producción por lo general produce un 90% de artículos listos para venderse y un 7% reprocesables. ¿Cuál es la probabilidad de que 22 de los 25 artículos estén listos para venderse y que dos sean reprocesables?

Respuesta.- Sea la función de distribución trinomial

$$p(x, y; n, p_1, p_2) = \frac{n!}{x! y! (n - x - y)!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^{n - x - y}.$$

Entonces,

$$p(22, 2; 25, 0.9, 0.07) = \frac{25!}{22! 2! (25 - 22 - 2)!} 0.9^{22} 0.07^2 (1 - 0.9 - 0.07)^{25 - 22 - 2} = 0.09988531.$$

```
(factorial(25)/(factorial(22)*factorial(2)*factorial(25-22-2))*
0.9^(22)*0.07^(2)*(1-0.9-0.07)^(25-22-2))
```

```
## [1] 0.09988531
```

6.3.

Sean X y Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x-y}{5} & 1 < x < 2, \quad 1 < y < 3, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Obtener la función de distribución conjunta acumulativa.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u-v}{5} \right) dv du = \int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \right) dv du \\ &= \int_1^x \left(\frac{3u}{5}v - \frac{v^2}{10} \right) \Big|_1^y du = \int_1^x \frac{3uy}{5} - \frac{3u}{5} - \frac{y^2}{10} + \frac{1}{10} du \\ &= \left(\frac{3u^2y}{10} - \frac{3u^2}{10} - \frac{y^2u}{10} - \frac{u}{10} \right) \Big|_1^x \\ &= \frac{3x^2y}{10} - \frac{3y}{10} - \left(\frac{3x^2}{10} - \frac{3}{10} \right) - \left(\frac{y^2x}{10} - \frac{y^2}{10} \right) + \frac{x}{10} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{3x^2y - xy^2 - 3x^2 + x - 3y + y^2 + 2}{10} \end{aligned}$$

b)

¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $X < 3/2$ e $Y < 2$?

Respuesta.- Ya que $\int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u-v}{5} \right) dv du = \frac{3x^2y - xy^2 - 3x^2 + x - 3y + y^2 + 2}{10}$, entonces

$$\begin{aligned} P(X < 3/2, Y < 2) &= \int_1^{3/2} \int_1^2 \left(\frac{3u-v}{5} \right) dv du \\ &= \frac{3 \cdot (3/2)^2 \cdot 2 - (3/2) \cdot 2^2 - 3(3/2)^2 + 3/2 - 3 \cdot 2 + 2^2 + 2}{10} \\ &= 0.225. \end{aligned}$$

```
x=3/2
y=2
(3*x^2*y-3*y-3*x^2+x-3*y+y^2+2)/10
```

```
## [1] 0.225
```

c)

Mediante el empleo de sus respuesta a la parte a, obtener las distribuciones acumulativas marginales de X e Y .

Respuesta.- Dado que 2 y 3 son los límite superior para x e y respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}P(X \leq x) &= F_X(x) = F(x, 3) \\&= \frac{3x^2 \cdot 3 - x \cdot 3^2 - 3x^2 + x - 3 \cdot 3 + 3^2 + 2}{10} \\&= \frac{9x^2 - 9x - 3x^2 + x - 9 + 9 + 2}{10} \\&= \frac{3x^2 - 4x + 1}{5}, \quad 1 < x < 2.\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}P(Y \leq y) &= F_Y(y) = F(2, y) \\&= \frac{3 \cdot 2^2 y - 2 \cdot y^2 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 3y + y^2 + 2}{10} \\&= \frac{12y - 2y^2 - 12 + 2 - 3y + y^2 + 2}{10} \\&= \frac{9y - y^2 - 8}{10}, \quad 1 < y < 3.\end{aligned}$$

d)

Obtener las funciones de densidad marginales de X y de Y .

Respuesta.- Sea $F(x, 3) = P(X \leq x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{5}$, entonces

$$f_X(x) = \frac{\partial F(x, 3)}{\partial x} = \frac{(6x^2 - 4)5}{5^2} = \frac{6x^2 - 4}{5}.$$

Y para $F(2, y) = P(Y \leq y) = \frac{9y - y^2 - 8}{10}$, se tiene

$$f_Y(y) = \frac{\partial F(2, y)}{\partial y} = \frac{(9 - 2y)10}{10^2} = \frac{9 - 2y}{10}.$$

6.4.

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x, y > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Demostrar que $f(x, y)$ es una función de densidad conjunta de probabilidad.

Respuesta.-; Ya que $x, y > 0$ entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-xy-x} dy dx &= \int_0^\infty x e^{-x} \int_0^\infty e^{-xy} dy dx \\&= \int_0^\infty x e^{-x} \int_0^\infty e^{-xy} \left(\frac{-x}{-x} \right) dy dx \\&= \int_0^\infty -e^{-x} \int_0^\infty e^{-xy} (-x) dy dx \\&= \int_0^\infty -e^{-x} (e^{-xy}) \Big|_0^\infty dx \\&= \int_0^\infty -e^{-x} (e^{-\infty} - e^0) dx \\&= \int_0^\infty e^{-x} dx = e^{-x} \Big|_0^\infty \\&= 1.\end{aligned}$$

```
integrate(function(y) {  
  sapply(y, function(y) {  
    integrate(function(x) x*exp(-x*(y+1)), 0, Inf)$value  
  })  
}, 0, Inf)$value
```

```
## [1] 0.9999956
```

b) ¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $X < 2$ e $Y < 1$?

Respuesta.-

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^1 x e^{-xy-x} dy dx &= \int_0^2 x e^{-x} \int_0^1 e^{-xy} dy dx \\&= \int_0^2 -e^{-x} (e^{-xy}) \Big|_0^1 dx \\&= \int_0^2 -e^{-x} (e^{-x} - e^0) dx \\&= \int_0^2 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int_0^2 e^{-3x} (-3) dx \\&= -\frac{1}{3} (e^{-3x}) \Big|_0^2 = -\frac{1}{3} (e^{-6} - 1) \\&= 0.3738225\end{aligned}$$

```
integrate(function(y) {
  sapply(y, function(y) {
    integrate(function(x) x*exp(-x*(y+1)), 0, 2)$value
  })
}, 0, 1)$value
```

```
## [1] 0.3738225
```

c)

Obtener las funciones de densidad marginal de X y de Y .

Respuesta.- La densidad marginal para x está dada por:

$$f_X(x) = \int_0^\infty x e^{-xy-x} dy = x e^{-x} \int_0^\infty e^{-xy} dy = -e^{-x} (e^{-xy}) \Big|_0^\infty = e^{-x}$$

La densidad marginal para y está dada por:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty x e^{-xy-x} dx \\ &= \left(\frac{x}{-y-1} e^{-xy-x} - \frac{1}{-y-1} \int_0^\infty e^{-xy-x} dx \right) \Big|_0^\infty \\ &= 0 - \frac{1}{(-y-1)^2} e^{xy-x} \Big|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{(-y-1)^2} (e^\infty - e^0) \\ &= -\frac{1}{(-y-1)^2} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{(-y-1)^2}. \end{aligned}$$

d)

¿Son X e Y estadísticamente independientes?.

Respuesta.- por el hecho de que,

$$x e^{-x(y-1)} \neq e^{-x} \frac{1}{(-y-1)^2} = \frac{e^{-x}}{(-y-1)^2}$$

Diremos que X e Y no son estadísticamente independientes.

6.5.

Sean X e Y dos variables aleatorias discretas en donde los posibles valores que estas pueden tomar son $-1, 0$ y 1 . En la siguiente tabla se dan las probabilidades conjuntas para todos los posibles valores de X e Y .

		X		
		-1	0	1
Y	-1	1/16	3/16	1/16
	0	3/16	0	3/16
	1	1/16	3/16	1/16

a)

Obtener las funciones de probabilidad marginal $p_X(X)$ y $P_Y(y)$.

Respuesta.- Para $p_X(x)$ se tiene al sumar las tres columnas de la tabla. Lo propio con $p_Y(y)$.

$$p_X(x) = p_Y(y) = \frac{5}{16}, \frac{6}{16}, \frac{5}{16}, \quad x = y = -1, 0, 1.$$

b)

¿Las variables aleatorias X e Y son estadísticamente independientes?

Respuesta.- No, ya que $p_{XY}(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y)$.

c)

Obtener $Cov(X, Y)$

Respuesta.-

$$(-1*-1*1/16+-1*1*1/16+1*-1*1/16+1/16)-(5/16*-1+6/16*0+5/16*1)*2$$

[1] 0

6.6.

Para las funciones de densidad conjuntas de probabilidad del ejercicio 6.3., obtener $Cov(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

Respuesta.- Para poder hallar la covarianza y el coeficiente de correlación tenemos que hallar $E(X), E(Y), E(x^2), E(Y^2)$ y $E(XY)$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_1^2 \int_1^3 x \left(\frac{3x-y}{5} \right) dy dx = \int_1^2 \frac{x}{5} \left(3xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^3 dx \\ &= \frac{1}{5} \int_1^2 6x^2 - 4x dx = \frac{1}{5} \left(\frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{5} (16 - 2 - 8 + 2) = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

```
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) x*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
  })
}, 1, 2)$value
```

[1] 1.6

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_1^2 \int_1^3 y \left(\frac{3x-y}{5} \right) dy dx = \frac{1}{5} \int_1^2 \int_1^3 3xy - y^2 dy dx \\
&= \frac{1}{5} \int_1^2 \left(\frac{3xy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^3 dx = \frac{1}{5} \int_1^2 12x - \frac{26}{3} dx \\
&= \frac{1}{5} \left(6x^2 - \frac{26x}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{28}{15}.
\end{aligned}$$

```

integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) y*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
  })
}, 1, 2)$value

```

```
## [1] 1.866667
```