Universidad:	**Mayor de San Ándres.**
Asignatura:	**Geometría II.**
Ejercicio:	Pre-evaluación.
Alumno:	**PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Ejercicio 1. Dados los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que satisfacen la condición $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ y sabiendo que $\|\vec{a}\|=3, \|\vec{b}\|=1, \|\vec{c}\|=4$. Calcular $\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{b}\circ\vec{c}+\vec{a}\circ\vec{c}$.

Respuesta.- Sea $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Entonces, por propiedades de producto escalar y modulo

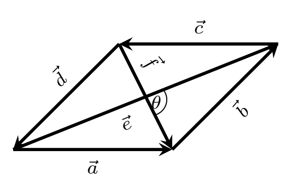
$$\begin{aligned}
\vec{0}=\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\|^2\\
&= \|\vec{a}\|^2+2[\vec{a}\circ(\vec{b}+\vec{c})]+\|\vec{b}+\vec{c}\|^2\\
&= \|\vec{a}\|^2+2\vec{a}\circ\vec{b}+2\vec{a}\circ\vec{b}+\|\vec{b}\|^2+2\vec{b}\circ\vec{c}+\|\vec{c}\|^2\\
&= \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2+2(\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{c}+\vec{b}\circ\vec{c})
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{c}+\vec{b}\circ\vec{c}=-\frac{\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2}{2}=-\frac{3^2+1^2+4^2}{2}=-13.$$

Ejercicio 2. Demostrar que las diagonales de un rombo son ortogonales entre si.

Demostración.- Sean $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e},\vec{f}\in V_n$. De donde gráficamente se tiene:



Así,

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{e}\circ\vec{f}}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\quad\Rightarrow\quad\theta=\cos^{-1}\left[\frac{(\vec{a}+\vec{b})\circ(\vec{d}+\vec{a})}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right].$$

Luego, ya que $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ forman un rombo. Es decir, un paralelogramo de lados iguales, entonces $\vec{d}=-\vec{b}$, por lo que:

$$\theta=\cos^{-1}\left[\frac{(\vec{a}+\vec{b})\circ(-\vec{b}+\vec{a})}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right].$$

Por las propiedades de producto interno y $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$,

$$\begin{aligned}
\theta &= \cos^{-1}\left[\frac{\vec{a}\circ(-\vec{b})+\vec{b}\circ(-\vec{b})+\vec{a}\circ\vec{a}+\vec{b}\circ\vec{a}}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right]\\
&= \cos^{-1}\left[\frac{-(\vec{a}\circ\vec{b})-(\vec{b}\circ\vec{b})+\vec{a}\circ\vec{a}+\vec{a}\circ\vec{b}}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right]\\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\circ\vec{a}-\vec{b}\circ\vec{b}}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right)\\
&= \cos^{-1}\left(\frac{0}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right)=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\vec{e}\perp\vec{f}.$$

Ejercicio 3. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(-1,4,2)$ y que contiene a la recta de intersección de los planos.

$$\boldsymbol{4x-y+z-2=0 \qquad \text{y} \qquad 2x+y-2z-3=0.}$$

Respuesta.- La ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos: $4x-y+z-2=0$ y $2x+y-2z-3=0$ está dada por:

$$4x-y+z-2+\lambda(2x+y-2z-3)=0$$

Dado que el plano anterior pasa por el punto dado $(-1,4,2)$, satisfará la ecuación del plano $4x-y+z-2+\lambda(2x+y-2z-3)=0$ de la siguiente manera

$$4(-1)-4+2-2+\lambda(2(-1)+4-2\cdot 2-3)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=-\frac{8}{5}.$$

Luego sustituyendo λ en la ecuación del plano $4x-y+z-2+\lambda(2x+y-2z-3)=0$ se concluye que:

$$4x-y+z-2-\frac{8}{5}(2x+y-2z-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 4x-13y+21z+14=0.$$

Ejercicio 4. Demostrar que la distancia D entre los planos paralelos $ax+by+cz+d=d_1$ y $ax+by+cz+d=d_2$ está dada por:

$$\boldsymbol{D=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.}$$

Demostración.- Sabemos que para $\mathscr{P}: ax+by+cz=d$ con $P_0=(x_0,y_0)$, la distancia está dada por:

$$d(P_0,\mathscr{P})\frac{|ax_0,by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Primero, hallemos un punto P_0 del plano $ax+by+cz+d=d_1$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad z=\frac{d_1-d}{c}.$$

Así $P_0 = \left(0, 0, \dfrac{d_1 - d}{c}\right)$ Por último, hallemos $D = d(P_0, ax + by + cz + d = d_2)$ de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \left(\frac{d_1 - d}{c}\right) - d_2 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{|d_1 - d - d_2 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}|} \\
&= \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.
\end{aligned}
$$