

# Cálculo diferencial

## 1.1 Ejemplos resueltos de problemas de extremos

**Ejemplo 1.1** (Principio del producto máximo con suma constante). Dado un número positivo  $S$ . Demostrar que entre todos los pares de números positivos  $x$  e  $y$  tales que  $x + y = S$ , el producto  $xy$  es el mayor cuando  $x = y = \frac{1}{2}S$ .

Demostración.- Si  $x + y = S$ ,  $y = S - x$  y el producto  $xy$  es igual a  $x(S - x) = xS - x^2$ . Pongamos  $f(x) = xS - x^2$ . Este polinomio cuadrático tiene como derivada primera  $f'(x) = S - 2x$  que es positiva para  $x < \frac{1}{2}S$  y negativa para  $x > \frac{1}{2}S$ . Por tanto el máximo de  $xy$  se presenta cuando  $x = \frac{1}{2}S$ ,  $y = S - x = \frac{1}{2}S$ . Esto también se puede demostrar sin utilizar el Cálculo. Pongamos simplemente  $f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}S\right)^2$  y observamos que  $f(x)$  es máximo cuando  $x = \frac{1}{2}S$ .

**Ejemplo 1.2** (Principio de suma mínima, con producto constante). Dado un número positivo  $P$ . Demostrar que entre todos los pares de números positivos  $x$  e  $y$  tales que  $xy = P$ , el que hace la suma  $x + y$  mínima es  $x = y = \sqrt{P}$ .

Demostración.- Tenemos que determinar el mínimo de la función  $f(x) = x + \frac{P}{x}$  para  $x > 0$ . La primera derivada es  $f'(x) = 1 - \frac{P}{x^2}$ . Esta es negativa para  $x^2 < P$  y positiva para  $x^2 > P$ , de manera que  $f(x)$  tiene su mínimo en  $x = \sqrt{P}$ . Luego, la suma  $x + y$  es mínima cuando  $x = y = \sqrt{P}$ .

**Ejemplo 1.3.** Entre los rectángulos de perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.

Demostración.- Utilizando el resultado del ejemplo 4.1 Tom Apostol. Sea  $x$  e  $y$  los lados de un rectángulo cualquiera. Si el perímetro está fijado, entonces  $x + y$  es constante, con lo que el área  $xy$  tiene mayor valor cuando  $x = y$ . Luego, el rectángulo máximo es el cuadrado.

**Ejemplo 1.4.** La media geométrica de dos números positivos no excede a su media aritmética. Esto es,  $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$ .

Demostración.- Dados  $a > 0$ ,  $b > 0$ , sea  $P = ab$ . Entre todos los positivos  $x$  e  $y$  siendo  $xy = P$ , la

suma  $x + y$  es la menor cuando  $x = y = \sqrt{P}$ . Es decir, si  $xy = P$  entonces  $x + y \geq \sqrt{P} + \sqrt{P} = 2\sqrt{P}$ . En particular,  $a + b \geq 2\sqrt{P} = 2\sqrt{ab}$ , con lo que  $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$ . La igualdad se presenta si y sólo si  $a = b$ .

**Ejemplo 1.5.** Un bloque de peso  $W$  es movido a lo largo de un plano por una fuerza que forma un ángulo  $\theta$  con la recta de la dirección del movimiento, siendo  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ , como se ve en la figura 4.15 Tom Apostol. Supongamos que la resistencia por fricción es proporcional a la fuerza normal con la que el bloque presiona perpendicularmente contra el plano. Hallar el ángulo  $\theta$  para el que la fuerza de propulsión necesaria para vencer la fricción sea lo más pequeña posible.

Demostración.-

## 1.2 Ejercicios

1. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

Demostración.- Sea  $x$  e  $y$  denotado por los lados del rectángulo. Si el área es fija, entonces  $xy$  es una constante, tal que  $xy = A$ . El perímetro de un rectángulo viene dado por  $P(x, y) = 2x + 2y$ , de donde

$$P(x) = 2x + 2\frac{A}{x}.$$

Para encontrar el valor mínimo, tomamos la derivada de  $P(x)$ ,

$$P'(x) = 2 - \frac{2A}{x^2}.$$

Luego igualamos a cero y resolvemos para  $x$ ,

$$2 - \frac{2A}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{A}.$$

Ya que,  $P'(x) < 0$ , cuando  $x < \sqrt{A}$  y  $P'(x) > 0$ , cuando  $x > \sqrt{A}$  por el teorema 4.8 Apostol, se tiene que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $\sqrt{A}$ . Como  $x = \sqrt{A}$  implica  $y = \sqrt{A}$ , tenemos que el perímetro es mínimo cuando  $x = y$ . Es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado.

2. Un granjero tiene  $L$  pies de alambre para cercar un terreno de pasto rectangular adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones darán el área máxima al terreno cercado?.

Respuesta.- Sea  $y$  el ancho de la pradera (es decir, la longitud de los lados perpendiculares a la pared) y sea  $x$  la longitud de la pradera (es decir, la longitud del lado del rectángulo que es paralelo a la pared). Entonces, tenemos lo  $2y + x = L$  que implica  $x = L - 2y$ . Entonces queremos maximizar

$$A(y) = (L - 2y)y = Ly - 2y^2.$$

Derivando se tiene,

$$A'(y) = L - 4y.$$

Igualando a cero,

$$L - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{L}{4}.$$

Así,  $A'(y) > 0$  cuando  $y < \frac{L}{4}$  y  $A'(y) < 0$  cuando  $y > \frac{L}{4}$ . Por el teorema 4.8 Apostol,  $A(y)$  toma el valor máximo cuando  $y = \frac{L}{4}$ . Luego,

$$x = L - 2y = L - 2\frac{L}{4} = \frac{L}{2}.$$

De donde las dimensiones serán  $\frac{L}{2}$  por  $\frac{L}{4}$ .

3. Un granjero quiere cercar un terreno de pasto rectangular de área  $A$  adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones exigen la mínima cantidad de alambre de cerca?

Respuesta.- Sea  $x$  la longitud del lado paralelo al muro de piedra e  $y$  la longitud de los lados perpendiculares al muro de piedra. Entonces,  $A = xy$  fija, por lo que  $y = \frac{A}{x}$ . La función que queremos minimizar es  $P = x + 2y = x + \frac{2A}{x}$ . Luego, tomando la derivada que tenemos,

$$P'(x) = 1 - \frac{2A}{x^2}.$$

Igualando a cero,

$$1 - \frac{2A}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2A}.$$

Así,  $P'(x) < 0$  cuando  $x < \sqrt{2A}$  y  $P'(x) > 0$  cuando  $x > \sqrt{2A}$ . Por el teorema 4.8 Apostol,  $P(x)$  toma el valor mínimo cuando  $x = \sqrt{2A}$ . De donde,

$$y = \frac{A}{x} \rightarrow y = \frac{A}{\sqrt{2A}} = \frac{\sqrt{2A}}{2}.$$

4. Dado  $S > 0$ . Probar que entre todos los números positivos  $x$  e  $y$  tales que  $x + y = S$ , la suma  $x^2 + y^2$  es mínima cuando  $x = y$ .

Demostración.- Ya que  $x + y = S$  que implica  $y = S - x$ . Entonces, la función que queremos minimizar es

$$f(x) = x^2 + (S - x)^2.$$

Luego, tomando la derivada se tiene,

$$f'(x) = 2x - 2(S - x) = 4x - 2S.$$

Igualando a cero,

$$4x - 2S = 0 \Rightarrow x = \frac{S}{2}.$$

Así,  $f'(x) < 0$  cuando  $x < \frac{S}{2}$  y  $f'(x) > 0$  cuando  $x > \frac{S}{2}$ . Por el teorema 4.8 Apostol,  $f(x)$  toma el valor mínimo cuando  $x = \frac{S}{2}$ . De donde,

$$y = S - x = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}.$$

Por lo tanto la suma es mínima, cuando

$$x = y.$$

5. Dado  $R > 0$ . Probar que entre todos los números positivos  $x$  e  $y$  tales que  $x^2 + y^2 = R$ , la suma  $x + y$  es máxima cuando  $x = y$ .

Demostración.- Por la ecuación  $x^2 + y^2 = R$  se tiene,

$$y = \sqrt{R - x^2}.$$

Entonces, encontramos el máximo de la función de la siguiente manera,

$$f(x) = x + \sqrt{R - x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{R - x^2}}.$$

Luego, igualamos a cero,

$$\frac{x}{\sqrt{R - x^2}} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{R}{2}}.$$

Así,  $f'(x) > 0$  cuando  $x < \sqrt{\frac{R}{2}}$  y  $f'(x) < 0$  cuando  $x > \sqrt{\frac{R}{2}}$ . Por el teorema 4.8 Apostol,  $f(x)$  toma el valor máximo cuando  $x = \sqrt{\frac{R}{2}}$ . De donde,

$$y = \sqrt{R - x^2} = \sqrt{R - \frac{R}{2}} = \sqrt{\frac{R}{2}} = x.$$

Por lo tanto la suma  $x + y$  es máxima, cuando  $x = y$ .

6. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud  $L$ . Demostrar que entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, el de área mínima tiene lados de longitud  $\frac{1}{2}L\sqrt{2}$ .

Respuesta.- Sea un cuadrado con aristas de longitud  $L$  de donde  $x + y = L$ . Vemos que  $x$  e  $y$  son longitudes de las dos secciones de  $L$  creadas por el punto en el que la esquina del cuadrado inscrito se encuentra con el borde del cuadrado exterior. Sea  $e$  la longitud de la arista del cuadrado inscrito. Entonces,  $x + y = L$  implica  $y = L - x$ . Pongamos  $f(x) = e^2$ , por lo que

$$\text{Área} = f(x) = e^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (L - x)^2 = 2x^2 - 2Lx + L^2.$$

Sacando la derivada,

$$f'(x) = 4x - 2L.$$

Igualando a cero,

$$4x - 2L = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}.$$

Así,  $f'(x) < 0$  cuando  $x < \frac{L}{2}$  y  $f'(x) > 0$  cuando  $x > \frac{L}{2}$ . Por el teorema 4.8 Apostol,  $f(x)$  toma el valor mínimo cuando  $x = \frac{L}{2}$ . Usando nuestra ecuación para  $y$ , tenemos

$$y = L - x = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}.$$

Finalmente, resolviendo para la longitud de la arista  $e$ ,

$$e^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2} \Rightarrow e = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}L.$$

7. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud  $L$ . Hallar el tamaño del cuadrado de máxima área que puede circunscribirse al cuadrado dado.

Respuesta.- Sea la longitud de la arista del cuadrado circunscrito. Después  $e = x + y$ . Además, si  $L$  es la longitud de la arista del cuadrado dado, tenemos

$$x^2 + y^2 = L^2 \Rightarrow y = \sqrt{L^2 - x^2}.$$

Sea  $f(x) = \text{Área} = (x + y)^2$ , entonces

$$\text{Área} = f(x) = (x + y)^2 = (L^2 + x^2)^2 = x^2 + 2x\sqrt{L^2 - x^2} + L^2 - x^2 = 2x\sqrt{L^2 - x^2} + L^2.$$

Sacando la derivada,

$$f'(x) = 2\sqrt{L^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{L^2 - x^2}} = 2\frac{L^2 - x^2 - x}{\sqrt{L^2 - x^2}}.$$

Igualando a cero,

$$2\frac{L^2 - x^2 - x}{\sqrt{L^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

Así,  $f'(x) > 0$  cuando  $x < \frac{L}{\sqrt{2}}$  y  $f'(x) < 0$  cuando  $x > \frac{L}{\sqrt{2}}$ . Por el teorema 4.8 Apostol,  $f(x)$  toma el valor máximo cuando  $x = \frac{L}{\sqrt{2}}$ . Usando nuestra ecuación para  $y$ , tenemos

$$y = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{2}} = \sqrt{\frac{L^2}{2}} = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente, dado que  $e = x + y$  tenemos el área del cuadrado circunscrito dada por

$$\text{Área} = e^2 = (x + y)^2 = \left(\frac{L}{\sqrt{2}} + \frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2L}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2L^2.$$

8. Demostrar que entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en un círculo dado, el cuadrado tiene el área máxima.

Demostración.- Sean  $x$  e  $y$  que denotan las longitudes de los lados del rectángulo inscrito, y  $r$  denota el radio del círculo. Entonces  $x^2 + y^2 = 4r^2$  que implica  $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$ . Sea  $f(x) = x \cdot y$ . Entonces, derivando se tiene,

$$\text{Área} = f(x) = xy = x\sqrt{4r^2 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}.$$

Luego, Igualando a cero,

$$\frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}r.$$

Así,  $f'(x) < 0$  cuando  $x < \sqrt{2}r$  y  $f'(x) > 0$  cuando  $x > \sqrt{2}r$ . Por el teorema 4.8 Apostol,  $f(x)$  toma el valor máximo cuando  $x = \sqrt{2}r$ . Usando nuestra ecuación para  $y$ , tenemos

$$y = \sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r.$$

Finalmente,  $x = y$  por lo que el rectángulo es un cuadrado.

9. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado tiene el círculo circunscrito mínimo.

Demostración.- Sean  $x$  e  $y$  los lados del rectángulo,  $r$  el radio del círculo circunscrito y  $A = xy$  el área del cuadrado. Entonces,

$$A = xy \Rightarrow y = \frac{A}{x}.$$

Además, dado que tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el diámetro del círculo (por lo tanto es  $2r$ ) y cuyos catetos son los lados del cuadrado que tenemos,

$$\begin{aligned} (2r)^2 &= x^2 + y^2 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + \left(\frac{A}{x}\right)^2} \\ &\Rightarrow r = \frac{\sqrt{x^4 + A^2}}{2x}. \end{aligned}$$

Luego queremos encontrar el valor mínimo de esta función (ya que esta función nos da el radio del círculo). Llamemos a la función  $f(x)$  y tomemos su derivada de la siguiente manera,

$$f'(x) = \frac{(2x) \left(\frac{1}{2}\right) (4x^3) (x^4 - A^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(\sqrt{x^4 + A^2}\right) (2)}{4x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + A^2}} - \frac{\sqrt{x^4 - A^2}}{2x^2}.$$

Igualando a cero,

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^4 + A^2}} - \frac{\sqrt{x^4 - A^2}}{2x^2} = 0 \Rightarrow x^4 = A^2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{A}, \quad x_2 = \sqrt{A}.$$

Luego el punto critico es un mínimo ya que,  $f'(x) < 0$  cuando  $x < \sqrt{A}$  y  $f'(x) > 0$  cuando  $x > \sqrt{A}$ . Por lo tanto, el radio del círculo se minimiza cuando  $x = y = \sqrt{A}$ , por lo que el rectángulo es un cuadrado.

10. Dada una esfera de radio  $R$ . Hallar el radio  $r$  y la altura  $h$  del cilindro circular recto de mayor superficie lateral  $2\pi rh$  que puede inscribirse en la esfera.

Demostración.- Primero, sea  $h$  una función de  $r$ . Luego sea, un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud  $r$  y catetos de longitud  $\frac{h}{2}$  (ya que el segundo cateto solo llega al centro de la esfera, no a la longitud total del cilindro). Por lo tanto,

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Entonces, sabemos que el área de la superficie lateral, , viene dada por la fórmula

$$A = 2\pi rh = 2\pi r \sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Llamando a esta función  $f(r)$  y diferenciando tenemos,

$$f'(r) = 4\pi \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{4\pi r}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Igualando a cero,

$$4\pi \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{4\pi r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \Rightarrow 2r^2 = R^2 \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Luego,  $f'(r) < 0$  cuando  $r < \frac{R}{\sqrt{2}}$  y  $f'(r) > 0$  cuando  $r > \frac{R}{\sqrt{2}}$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $f(r)$  toma el valor mínimo cuando  $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ . Por lo tanto, el área de la superficie lateral es mínima cuando

$$r = \frac{h}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

11. Entre todos los cilindros circulares rectos de área lateral dada, demostrar que la menor esfera circunscrita tiene el radio igual al radio del cilindro multiplicado por  $\sqrt{2}$ .

Demostración.- El área de la superficie lateral  $A = 2\pi rh$  es constante y

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}.$$

Entonces, tenemos

$$A = 2\pi rh \Rightarrow h = \frac{A}{2\pi r}.$$

Por lo tanto,

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} = r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2} \Rightarrow R = \sqrt{r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}}.$$

Llamemos a esta función  $f'(r) = 0$ . Luego tomando la derivada,

$$f'(r) = \frac{1}{2} \left( r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 2r - \frac{2A^2}{16\pi^2 r^3} \right).$$

Igualando a cero,

$$\frac{1}{2} \left( r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 2r - \frac{2A^2}{16\pi^2 r^3} \right) = 0 \Rightarrow 2r = \frac{A^2}{8\pi^2 r^3} \Rightarrow r^4 = \frac{A^2}{16\pi^2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

Luego,  $f'(r) < 0$  cuando  $r < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$  y  $f'(r) > 0$  cuando  $r > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $f(r)$  toma el valor mínimo cuando  $r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ . Por lo tanto, el radio de la esfera circunscrita es mínimo cuando

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}} = \sqrt{\frac{2A}{2\pi}} = \sqrt{2}r.$$

12. Dado Un cono circular recto de radio  $R$  y altura  $H$ . Hallar el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor área lateral que puede inscribirse en el cono.

Respuesta.- El área de la superficie lateral del cilindro viene dada por  $A = 2\pi rh$ , donde  $r$  es el radio del cilindro y  $h$  es la altura del cilindro. Del diagrama encontramos una fórmula para  $h$  en términos de las constantes  $H$  y  $R$ , y el radio del cilindro  $r$ ,

$$h = -\frac{H}{R}r + H.$$

Así, sea  $f(r)$  el área de la superficie lateral tenemos

$$A = f(r) = 2\pi rh = 2\pi r \left( -\frac{H}{R}r + H \right) = 2\pi rH - \frac{2\pi H}{R}r^2.$$

Tomando la derivada con respecto a  $r$  e igualando a cero,

$$2\pi H - \frac{4\pi H}{R}r = 0 \Rightarrow R - 2r = 0 \Rightarrow r = \frac{R}{2}.$$

Luego,  $f'(r) > 0$  cuando  $r < \frac{R}{2}$  y  $f'(r) < 0$  cuando  $r > \frac{R}{2}$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $f(r)$  toma el valor máximo cuando  $r = \frac{R}{2}$ . Por lo tanto, el área de la superficie lateral es máxima cuando

$$h = \frac{1}{2}H.$$

13. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede inscribirse en un cono circular recto de radio  $R$  y altura  $H$ .

Respuesta.- Tenemos la siguiente expresión para  $h$ ,

$$h = -\frac{H}{R}r + H.$$

Entonces,

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left( -\frac{H}{R}r + H \right) = \pi r^2 H - \frac{\pi H}{R}r^3.$$

Derivando con respecto a  $r$ ,

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi Hr - \frac{3\pi H}{R}r^2.$$

Igualando a cero,

$$\begin{aligned} 2\pi Hr - \frac{3\pi H}{R}r^2 = 0 &\Rightarrow 2\pi H - \frac{3\pi H}{R}r = 0 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{3}{2R}r = 0 \\ &\Rightarrow r = \frac{2}{3}R. \end{aligned}$$

Luego,  $f'(r) > 0$  cuando  $r < \frac{2}{3}R$  y  $f'(r) < 0$  cuando  $r > \frac{2}{3}R$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $f(r)$  toma el valor máximo cuando  $r = \frac{2}{3}R$ . Por lo tanto, el volumen es máximo cuando

$$h = \frac{2}{3}H.$$

14. Dada una esfera de radio  $R$ . Calcular, en función de  $R$ , el radio  $r$  y la altura  $h$  del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en esa esfera.

Respuesta.- Queremos maximizar el volumen del cono,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$



Luego podemos encontrar la siguiente expresión para  $h$  en términos de  $R$  y  $r$ ,

$$h = R + \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Por lo tanto, nuestra expresión para  $V$  en términos de  $r$  es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 R + \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Derivando con respecto a  $r$ ,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{2}{3}\pi r R + \frac{2}{3}\pi r \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{1}{3}\pi r^3 \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = \frac{2}{3}\pi r \left( R + \sqrt{R^2 - r^2} \right) - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Igualando a cero,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\pi r \left( R + \sqrt{R^2 - r^2} \right) - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}} &= 0 \Rightarrow R + \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \\ &\Rightarrow 9r^2 = 8r^2 R^2 \\ &\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R. \end{aligned}$$

Luego,  $f'(r) > 0$  cuando  $r < \frac{2\sqrt{2}}{3}R$  y  $f'(r) < 0$  cuando  $r > \frac{2\sqrt{2}}{3}R$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $f(r)$  toma el valor máximo cuando  $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$ . Por lo tanto, el volumen es máximo cuando

$$h = R + \sqrt{R^2 - \frac{8}{9}R^2} = \frac{4}{3}R.$$

15. Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

Respuesta.- Sean  $r$  el radio del semicírculo,  $x$  la mitad de la base del rectángulo y  $y$  la altura del rectángulo. Queremos maximizar el área,  $A = 2xy$  tal que

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Luego,

$$A = 2x \left( \sqrt{r^2 - x^2} \right).$$

Derivando con respecto a  $x$ ,

$$f'(x) = \frac{dA}{dx} = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Igualando a cero,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} &= 0 \Rightarrow 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2x^2 \\ &\Rightarrow 2r^2 - 4x^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Luego,  $f'(x) > 0$  cuando  $x < \frac{r}{\sqrt{2}}$  y  $f'(x) < 0$  cuando  $x > \frac{r}{\sqrt{2}}$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $f(x)$  toma el valor máximo cuando  $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ . Ya que  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ , entonces

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, la base del rectángulo tiene longitud  $\frac{2r}{\sqrt{2}}$  y su altura tiene longitud  $\frac{r}{\sqrt{2}}$ .

16. Hallar el trapecio de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

Respuesta.- Sea  $r$  el radio del semicírculo,  $b_1$  sea el borde inferior del trapecioide y  $b_2$  el borde superior. Recordamos de la geometría que el área del trapecioide está dada por

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h,$$

donde  $b_1$  y  $b_2$  son las longitudes de las bases y  $h$  es la altura del trapecioide. A continuación, queremos encontrar fórmulas para  $b_1$  y  $b_2$  en función al radio  $r$ . Como  $b_1$  se encuentra en el diámetro del semicírculo, tenemos  $b_1 = 2r$ . La hipotenusa de cada uno de estos es  $r$ , y los catetos tienen longitudes  $h$  y  $\frac{b_2}{2}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r^2 &= h^2 + \left(\frac{b_2}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = h^2 + \frac{b_2^2}{4} \\ &\Rightarrow b_2^2 = 4r^2 - 4h^2 \\ &\Rightarrow b_2 = 2\sqrt{r^2 - h^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos en la fórmula para el área de un trapecioide, obtenemos una expresión para el área del trapecioide en función de  $r$  y  $h$ ,

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = hr + h\sqrt{r^2 - h^2}.$$

Derivando con respecto a  $h$ ,

$$f'(h) = \frac{dA}{dh} = r + \sqrt{r^2 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{r^2 - h^2}}.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\begin{aligned} r + \sqrt{r^2 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{r^2 - h^2}} &= 0 \Rightarrow r\sqrt{r^2 - h^2} + r^2 - h^2 - h^2 \\ &\Rightarrow 4h^4 = 3r^2h^2 \\ &\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}r. \end{aligned}$$

Luego,  $f'(h) > 0$  cuando  $h < \frac{\sqrt{3}}{2}r$  y  $f'(h) < 0$  cuando  $h > \frac{\sqrt{3}}{2}r$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $f(h)$  toma el valor máximo cuando  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ . Finalmente, usamos este valor  $h$  para resolver  $b_2$  en función de  $r$ ,

$$b_2 = 2\sqrt{r^2 - h^2} = 2\sqrt{\frac{r^2}{4}}.$$

Como  $b_1 = 2r$ , entonces las longitudes de los bordes superiores e inferiores del trapecioide son:

$$b_1 = 2r, \quad b_2 = r.$$

17. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10; b) 12 y 18.

Respuesta.- Comenzamos con un rectángulo con lados cada uno de longitud 10. Entonces, los bordes de la base de la caja tienen cada uno, una longitud de  $l = w = 10 - 2x$ , y la altura  $x$ ; por lo tanto, el volumen es

$$V = x(10 - 2x)^2 = 4x^3 - 40x^2 + 100x.$$

Derivando con respecto a  $x$ ,

$$f'(x) = \frac{dV}{dx} = 12x^2 - 80x + 100.$$

Iguualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$12x^2 - 80x + 100 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \text{ y } x_2 = 4.$$

Luego,  $f'(x) > 0$  cuando  $0 < x < \frac{5}{4}$  y  $f'(x) < 0$  cuando  $\frac{5}{3} < x < 5$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $V$  toma el valor máximo cuando  $x = \frac{5}{3}$ . Resolviendo para la longitud y el ancho de la base de la caja tenemos, entonces

$$l = w = 10 - 2x = 10 - 2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{20}{3}.$$

Para el inciso b) comencemos con un rectángulo de 18 de largo y 12 de ancho. Entonces, los bordes de la base de la caja tienen longitudes  $w = 12 - 2x$  y  $l = 18 - 2x$ , y la altura de la caja es  $x$ . Por tanto, el volumen es

$$V = x(12 - 2x)(18 - 2x) = 4x^3 - 60x^2 + 216x.$$

Derivando con respecto a  $x$ ,

$$f'(x) = \frac{dV}{dx} = 12x^2 - 120x + 216.$$

Iguualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$12x^2 - 120x + 216 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 - \sqrt{7} \text{ y } x_2 = 5 + \sqrt{7}.$$

Luego,  $f'(x) > 0$  cuando  $0 < x < \frac{5 - \sqrt{7}}{2}$  y  $f'(x) < 0$  cuando  $\frac{5 - \sqrt{7}}{2} < x < 5 + \sqrt{7}$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $V$  toma el valor máximo cuando  $x = \frac{5 - \sqrt{7}}{2}$ . Resolviendo para  $l$  y  $w$  se tiene,

$$l = w = 18 - 2(5 - \sqrt{7}) = 8 + 2\sqrt{7}, \quad w = 12 - 2(5 - \sqrt{7}) = 2 + 2\sqrt{7}.$$

18. Si  $a$  y  $b$  son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1, hallar el mayor valor de  $2a + b$ .

Respuesta.- Por el teorema de Pitágoras, se tiene

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1 - b^2}.$$

Recordemos que queremos maximizar,

$$2a + b = 2\sqrt{1 - b^2} + b.$$

Llamemos a esta función  $f(b)$  y derivemos con respecto a  $b$  tenemos,

$$f'(b) = -\frac{2b}{\sqrt{1 - b^2}} + 1.$$

Iguálamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{2b}{\sqrt{1 - b^2}} + 1 = 0 \Rightarrow -2b + \sqrt{1 - b^2} = 0$$

$$\Rightarrow 5b^2 = 1 - b^2.$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Luego,  $f'(b) > 0$  cuando  $b < \frac{\sqrt{5}}{5}$  y  $f'(b) < 0$  cuando  $b > \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $f(b)$  toma el valor máximo cuando  $b = \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Dado que  $a = \sqrt{1 - b^2}$ , se tiene

$$a = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Por lo tanto, el máximo valor de  $2a + b$  es

$$2a + b = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}.$$

19. Un camión va a recorrer 300 millas por una autopista a una velocidad constante de  $x$  millas por hora. Las leyes de velocidad requieren  $30 \leq x \leq 60$ . Suponga que el combustible cuesta 30 centavos por galón y se consume a razón de  $2 + x^2/600$  galones por hora. Si el salario del conductor es de  $D$  dólares por hora y obedece todas las leyes de velocidad, encuentre la velocidad más económica y el costo del viaje si (a)  $D = 0$ , (b)  $D = 1$ , (c)  $D = 2$ , (d)  $D = 3$ , (e)  $D = 4$ .

Respuesta.- Primero escribamos una ecuación para el costo total del viaje en términos de velocidad  $x$ . Al conducir se le debe pagar  $D$  dólares por hora, y el viaje dura  $300/x$  horas. Es decir, 300 millas divididas por el número de millas por hora. De donde obtenemos,

$$\text{Salario} = \frac{300D}{x}.$$

Luego, el costo total del combustible es el número de horas de viaje, dado por  $300/x$  por el número de galones de combustible por hora por el costo del combustible, 30 centavos por galón:

$$\text{Coste combustible} = 0.3 \left( \frac{300}{x} \right) \left( 2 + \frac{x^2}{600} \right) = \frac{180}{x} + \frac{3x}{20}.$$

Entonces, el costo total del viaje en términos de la velocidad es

$$C(x) = \frac{300D + 180}{x} + \frac{3x}{20}.$$

Ahora, calculemos para los valores específicos de  $D$  del problema.

a) Si  $D = 0$ , entonces

$$C(x) = \frac{300 \cdot 0 + 180}{x} + \frac{20}{3x} = \frac{180}{x} + \frac{3x}{20} \Rightarrow c'(x) = -\frac{180}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{180}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{3}\text{mph.}$$

Luego,  $C'(x) < 0$  cuando  $x < 20\sqrt{3}$  y  $C'(x) > 0$  cuando  $x > 20\sqrt{3}$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $c(x)$  toma el valor mínimo cuando  $x = 20\sqrt{3}$ . El costo a esta velocidad es,

$$C(x) = \frac{180}{x} + \frac{3x}{20} = 6\sqrt{3} = \$10.39.$$

b) Si  $D = 1$ , entonces

$$C(x) = \frac{480}{x} + \frac{3x}{20} \Rightarrow C'(x) = -\frac{480}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{480}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \Rightarrow x = 40\sqrt{2}\text{mph.}$$

Luego,  $C'(x) < 0$  cuando  $x < 40\sqrt{2}$  y  $C'(x) > 0$  cuando  $x > 40\sqrt{2}$ . Por el teorema 4.8 Tom Apostol,  $c(x)$  toma el valor mínimo cuando  $x = 40\sqrt{2}$ . El costo a esta velocidad es,

$$C(x) = \frac{480}{40\sqrt{2}} + \frac{3 \cdot 40\sqrt{2}}{20} = 12\sqrt{2} = \$16.97.$$

c) Si  $D = 2$ , entonces

$$C(x) = \frac{780}{x} + \frac{3x}{20} \Rightarrow C'(x) = -\frac{780}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{780}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{3}\text{mph.}$$

Ya que  $30 \leq x \leq 60 < 20\sqrt{3}$  y dado que el costo es decreciente en el intervalo  $30 \leq x \leq 60$ . Es decir la derivada es negativa en todo el intervalo, tomamos  $x = 60$  mph. Luego

$$C = 13 + 9 = \$22.$$

d) Si  $D = 3$ , entonces

$$C(x) = \frac{1080}{x} + \frac{3x}{20} \Rightarrow C'(x) = -\frac{1080}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{1080}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \Rightarrow x = 30\sqrt{2}\text{mph.}$$

Ya que  $30 \leq x \leq 60 < 30\sqrt{2}$  y dado que el costo es decreciente en el intervalo  $30 \leq x \leq 60$ . Es decir la derivada es negativa en todo el intervalo, tomamos  $x = 60$  mph. Luego

$$C = \frac{1080}{60} + 90 = \$27.$$

e) Si  $D = 4$ , entonces

$$C(x) = \frac{1380}{x} + \frac{3x}{20} \Rightarrow C'(x) = -\frac{1380}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{1380}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{23}\text{mph.}$$

Ya que  $30 \leq x \leq 60 < 20\sqrt{23}$  y dado que el costo es decreciente en el intervalo  $30 \leq x \leq 60$ . Es decir la derivada es negativa en todo el intervalo, tomamos  $x = 60$  mph. Luego

$$C = \frac{1380}{60} + 9 = \$32.$$

20. Se obtiene un cilindro haciendo girar un rectángulo alrededor del eje  $x$ , la base del rectángulo se encuentra en el eje  $x$  y todo el rectángulo se encuentra en la región entre la curva  $y = x/(x^2 + 1)$  y el eje  $x$ . Encuentre el volumen máximo posible del cilindro.

Respuesta.- Primero, sabemos que las dos esquinas superiores deben tener la misma distancia desde el eje  $x$  (dado que este es un rectángulo, la línea que une las esquinas superiores debe ser horizontal). Ambas esquinas superiores se encontrarán en la curva  $y$  ya que si alguna de las esquinas no estuviera en la curva, podríamos obtener un rectángulo más grande (por lo tanto, un cilindro más grande cuando rotemos). Extendiendo el rectángulo para que la esquina esté en la curva. Sea  $a$  la coordenada  $x$  de la esquina superior izquierda y  $b$  la coordenada  $x$  de la esquina superior derecha. Dado que ambos se encuentran en la curva que tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+a^2} &= \frac{b}{1+b^2} \Rightarrow a(1+b^2) = b(1+a^2) \\ &\Rightarrow a^2(-b) + a(1+b^2) = 0 \\ &\Rightarrow a = \frac{1+b^2 \pm \sqrt{1-2b^2+b^4}}{2b} \\ &\Rightarrow a = \frac{1+b^2 \pm (1-b^2)}{2b} \end{aligned}$$

Sin embargo, una de estas soluciones es el caso trivial  $a = b$ , por lo que el cilindro en este caso tiene volumen 0. Luego, la otra solución será

$$a = \frac{1+b^2+1-b^2}{2b} = \frac{1}{b}.$$

En este caso, calculando el volumen de este cilindro, tenemos

$$V = \pi r^2 h = \pi [f(x)]^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pi \left[\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right] \left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}.$$

Derivando con respecto a  $x$ ,

$$V'(x) = \pi \frac{(3x^2-1)(6x)(x^2+1)^2 - (x^3-x)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \pi \frac{-x^4+6x^2-1}{(x^2+1)^3}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\frac{-x^4+6x^2-1}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow x^4-6x^2+1=0 \Rightarrow x^2=3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Estos valores de  $x^2$  corresponden a los valores de  $a$  y  $b$ , por lo que tenemos

$$b = \sqrt{x} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1\sqrt{2}.$$

Ya que el problema requiere que sea un valor positivo. El valor máximo  $V_{\max}$  está dado por,

$$V_{\max} = \pi \frac{(1 + \sqrt{2})^3 - 1 - \sqrt{2}}{(4 + \sqrt{2})^2} = \frac{\pi}{4}.$$

21. La esquina inferior derecha de una página se dobla para llegar al borde más a la izquierda. (Vea la Figura 4.17. Tom Apostol, capítulo 4) Si el ancho de la página es de seis pulgadas, encuentre la longitud mínima del pliegue. ¿Qué ángulo formará este pliegue mínimo con el borde más a la derecha de la página? Suponga que la página es lo suficientemente larga para evitar que el pliegue llegue a la parte superior de la página.

Respuesta.- Denote el ángulo que forma el pliegue con el borde derecho del papel mediante  $\theta$ , el ancho horizontal del pliegue por  $x$  (es decir, la línea de puntos a lo largo de la parte inferior de la longitud del papel  $x$ ), y que la longitud del pliegue sea  $y$ . Entonces, del diagrama vemos  $x = y \sin \theta$ . Luego, el triángulo encerrado por las líneas negras punteadas debe ser congruente con el triángulo encerrado por las líneas azules, ya que cuando doblamos el papel, el triángulo encerrado por las líneas negras punteadas es exactamente el espacio en el que estaba el triángulo azul antes de que hiciéramos el doblez. (Disculpe el hecho de que el diagrama está mal dibujado y hace que estos dos triángulos parezcan de diferentes tamaños.) Teniendo esto en cuenta, considere el triángulo en la esquina inferior izquierda. Este triángulo tiene hipotenusa  $x = y \sin \theta$  y el ángulo en la esquina inferior derecha debe ser  $2\theta$  (Esto se debe a que los otros dos ángulos a lo largo de la línea horizontal en la parte inferior son ambos  $90 - \theta$ , y  $180 - (90 - \theta) - (90 - \theta) - 2\theta$ ). Finalmente, la longitud del cateto de este triángulo a lo largo de la parte inferior de la hoja de papel es  $6 - x = 6 - y \sin \theta$  ya que sabemos que el papel mide 6 pulgadas de ancho.

De la trigonometría (específicamente, cos es igual a adyacente sobre la hipotenusa) tenemos

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \frac{6 - y \sin \theta}{y \sin \theta} \Rightarrow \cos(2\theta) = \frac{6}{y \sin \theta} - 1 \\ \Rightarrow \cos(2\theta) + 1 &= \frac{6}{y \sin \theta} \\ \Rightarrow y \sin \theta &= \frac{6}{\cos(2\theta) + 1} \\ \Rightarrow y &= \frac{6}{\sin \theta [\cos(2\theta) + 1]} \\ \Rightarrow y &= \frac{6}{2 \sin \theta \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

La igualdad final se sigue del uso de la identidad trigonométrica  $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$  lo que implica  $1 + \cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta$ . Ahora queremos minimizar  $y$  que es lo mismo que maximizar  $2 \sin \theta \cos^2 \theta$ . Tomando la derivada de esto y poniéndola a 0 para encontrar los puntos críticos que tenemos,

$$(2 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta)' = 0 \Rightarrow 2 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 3 \operatorname{sen}^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ya que  $1 - 3 \operatorname{sen}^2 \theta > 0$  para  $\operatorname{sen} \theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$  y  $1 - 3 \operatorname{sen}^2 \theta < 0$  para  $\operatorname{sen} \theta > \frac{1}{\sqrt{3}}$  tenemos que  $2 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta$  tiene un máximo cuando  $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Por lo tanto, reemplazando esto en nuestra expresión para la longitud del pliegue que tenemos

$$y = \frac{6}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)6 = \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

y

$$\theta = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}.$$