1

Teoría elemental de la probabilidad

Sea E una colección de elementos $\xi.\eta, \zeta, \ldots$, que llamaremos sucesos elementales, y $\mathfrak{F}$ un conjunto de subconjuntos de E; los elementos del conjunto $\mathfrak{F}$ se llamarán eventos aleatorios.

Axioma .1 *$\mathfrak{F}$ es un campo de conjuntos. (Un sistema de conjuntos se denomina campo si la suma, el producto y la diferencia de dos conjuntos del sistema también pertenecen al mismo sistema).*

Axioma .2 *$\mathfrak{F}$ contiene el conjunto E.*

Axioma .3 *A cada conjunto A en $\mathfrak{F}$ se le asigna un número real no negativo $P(A)$. Este número $P(A)$ se llama probabilidad del evento A.*

Axioma .4 *$P(E)$ es igual a 1.*

Axioma .5 *Si A y B no tienen ningún elemento en común, entonces*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

1.4. Corolarios inmediatos de los axiomas; Probabilidades condicionales; teorema de Bayes

De $A + \overline{A} = E$ y los axiomas IV y V se sigue que,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{1.4.1}$$

$$P(\overline{A} = 1 - P(A). \tag{1.4.2}$$

Ya que $\overline{E} = 0$, en particular se tiene,

$$P(0) = 0. \tag{1.4.3}$$

Si $A, B, ..., N$ son incompatibles, entonces por el Axioma V se sigue la fórmula (**teorema de la suma**),

$$P(A + B + \ldots, +N) = P(A) + P(B) + \ldots + P(N) \tag{1.4.4}$$

Si $P(A) > 0$, entonces el cociente

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.4.5}$$

Es definida como la probabilidad condicional del evento B bajo la condición A.

Luego por (.5) se sigue que,

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{1.4.6}$$

Y por inducción obtenemos la fórmula general (**el teorema de la multiplicación**)

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\dots P_{A,A_2\dots A_{n-1}}(A_n) \tag{1.4.7}$$

Los siguientes teoremas se siguen fácilmente,

$$P_A(B) \geq 0, \tag{1.4.8}$$

$$P_A(E) = 1, \tag{1.4.9}$$

$$P_A(B + C) = P_A(B) + P_A(C). \tag{1.4.10}$$

$$P_A(A) = 1. \tag{1.4.11}$$

Por (.6) y la fórmula análoga

$$P(AB) = P(B)P_B(A)$$

obtenemos la fórmula,

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}, \tag{1.4.12}$$

que contiene el esencia el **teorema de bayes**

Teorema 1.1 (Teorema de la probabilidad total) *Sea $A_1 + A_2 + \dots + A_n = E$ (Sea asume que los eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ son mutuamente excluyentes) y sea X arbitrario. Entonces*

$$P(X) = P(A_1)P_{A_1}(X) + P(A_2)P_{A_2}(X) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(X); \tag{1.4.13}$$

Prueba.- *Sea*

$$X = A_1X + A_2X + \dots + A_nX;$$

Usando (.4) tenemos,

$$P(X) = P(A_1X) + P(A_2X) + \dots + P(A_nX)$$

y según (.6) tenemos al mismo tiempo

$$P(A_iX) = P(A_i)P_{A_t}(X)$$

Teorema 1.2 (Teorema de Bayes) *Sea $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E$ y X sea arbitrario, entonces*

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(X)}{P(A_1)P_{A_1}(X) + P(A_2)P_{A_2}(X) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(X)}, \quad para \ \ i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{1.4.14}$$

Prueba.- *De (.12) se tiene,*

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(X)}{P(X)}$$

Para obtener la fórmula (.14) solo queda sustituir la probabilidad $P(X)$ por su valor derivado de (.13) aplicando el teorema de la probabilidad total.

1.5. Independencia

Pasemos a la definición de la independencia. Dado n experimentos $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{U}^{(n)}$, es decir, n descomposiciones

$$E = A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{r_i}^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

del conjunto básico E. Entonces es posible asignar $r = r_1 r_2 \ldots r_n$ probabilidades (en el caso general).

$$P_{q_1 q_2 \ldots q_n} = P(A_{q_1}^1 A_{q_2}^2 \ldots A_{q_n}^n) \geq 0$$

que son completamente arbitrarios excepto por la condición única que,

$$\sum_{q_1, q_2, \ldots, q_n} P_{q_1 q_2 \ldots q_n} = 1. \tag{1.5.1}$$

Definición 1.1 *n experimentos $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{U}^{(n)}$ son llamados mutuamente independientes, si para cualquier $q_1, q_2, \ldots, q_n$ la siguientes ecuación es cierta*

$$P\left(A_{q_1}^{(1)}, A_{q_2}^{(2)} \ldots A_{q_n}^{(n)}\right) = P\left(A_{q_1}^{(1)}\right) P_{q_2}\left(A_{q_2}^{(2)}\right) \ldots P\left(A_{q_n}^{(n)}\right). \tag{1.5.2}$$

Teorema 1.3 *Si n experimentos $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{U}^{(n)}$, son llamados mutuamente independientes, entonces cualquier m $(m < n)$, $\mathfrak{U}^{(i_1)}, \mathfrak{U}^{(i_2)}, \ldots, \mathfrak{U}^{(i_m)}$, son también independientes.*
En el caso de la independencia tenemos la ecuación:

$$P\left(A_{q_1}^{(i_1)} A_{q_2}^{(1_2)} \ldots A_{q_m}^{(i_m)}\right) = P\left(A_{q_1}^{(i_1)}\right) P\left(A_{q_2}^{(i_2)}\right) \ldots P\left(A_{q_m}^{(i_m)}\right) \tag{1.5.3}$$

(para todo i_k diferente).

Prueba.- Para probar esto es suficiente mostrar que de la independencia mutua de n descomposiciones se sigue la independencia mutua del primer $n^{-}1$. Supongamos que se cumplen las ecuaciones (2). Luego

$$P\left(A_{q_1}^{(1)} A_{q_2}^{(2)} \ldots A_{q_{n-1}}^{(n-1)}\right) = \sum_{q_n} P\left(A_{q_1}^{(1)} A_{q_2}^{(2)} \ldots A_{q_n}^{(n)}\right) = P\left(A_{q_1}^{(1)}\right) P\left(A_{q_2}^{(2)}\right) \ldots P\left(A_{q_n-1}^{(n-1)}\right) \sum_{q_n} P\left(A_{q_n}^{(n)}\right)$$

$$= P\left(A_{q_1}^{(1)}\right) P\left(A_{q_2}^{(2)}\right) \ldots P\left(A_{q_n-1}^{(n-1)}\right)$$

Definición 1.2 *n*