

Universidad: **Mayor de San Andrés.**  
 Asignatura: **Cálculo diferencial e integral II.**  
 Práctica: 1.  
 Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

---

**Problema 1.** Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x, y \neq 0$ . Si  $\|x\| = \|y\|$ , entonces hallar la medida del ángulo entre  $\frac{1}{2}(x+y)$  e  $y-x$ .

**Respuesta.-** Ya que  $x, y \neq 0$  y por el teorema de los cosenos se tiene,

$$\left\langle \frac{1}{2}(x+y), y-x \right\rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad (1)$$

Por definición de producto interno y la parte izquierda de (1),

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2}(x_i + y_i) \cdot (y_i - x_i) \right] = -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = -\frac{1}{2} (\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle).$$

Así (1) quedará de la siguiente manera,

$$\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = -2\|x\| \|y\| \cos \theta.$$

Ya que  $\|x\| = \|y\|$  y el teorema de cosenos. Entonces,

$$\|x\| \|x\| \cos \theta + \|y\| \|y\| \cos \theta = -2\|x\| \|x\| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta (3\|x\| \|x\| + \|y\| \|y\|) = 0$$

Por lo tanto,

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \arccos(0) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

**Problema 2.** Demuestre que si  $x+y$  y  $x-y$  son ortogonales, entonces los vectores  $x$  e  $y$  deben tener la misma longitud.

**Demostración.-** Sea  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Por definición de ortogonalidad, se tiene

$$\langle x+y, x-y \rangle = 0.$$

Luego por definición de producto interno,

$$\sum_{i=1}^n [(x_i + y_i)(x_i - y_i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$$

$$\langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle = 0$$

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\|x\| = \|y\|$$

Ya que la norma mide el tamaño del vector entonces  $x$  e  $y$  tienen la misma longitud.

**Problema 3.** Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Demuestre que  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  si, y solamente si,  $x$  e  $y$  son ortogonales.

**Demostración.-** Sea  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ . Como  $\langle x, y \rangle = 0$ , entonces

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

**Problema 4.** Demuestre, y dé una interpretación geométrica de, la ley del paralelogramo: Si  $x, y \in \mathbb{R}^3$ , entonces:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**Demostración.-** Ya que  $x, y \in \mathbb{R}^3$  y por definición de norma, entonces

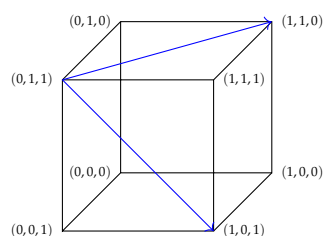
$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \left( \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \right)^2 + \left( \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 [(x_i + y_i)(x_i + y_i)] + \sum_{i=1}^3 [(x_i - y_i)(x_i - y_i)] \\ &= \sum_{i=1}^3 (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) + \sum_{i=1}^3 (x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2) \\ &= 2 \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 + \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right) = 2(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle) \\ &= 2 \left[ \left( \sqrt{\langle x, x \rangle} \right)^2 + \left( \sqrt{\langle y, y \rangle} \right)^2 \right] \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Otra manera de demostrar sería:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**Problema 5.** Calcule el ángulo formado por los diagonales de dos caras consecutivas de un cubo de arista igual a  $a$ .

**Demostración.-** Ya que se tiene un cubo. Entonces,



Luego se tiene al vector  $x = (1, 0, 1) - (0, 1, 1) = (1, -1, 0)$  y  $y = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) = (1, 0, -1)$ , por lo tanto el ángulo será:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle (1, -1, 0), (1, 0, -1) \rangle}{\|(1, -1, 0)\| \|(1, 0, -1)\|} \Rightarrow \cos \theta \\ &= \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

**Problema 6.** Demuestre que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

**Demostración.-**

**Problema 7.** Demuestre que uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo.

**Demostración.-**

**Problema 8.** Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices.

**Demostración.-**

**Problema 9.** Demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

**Demostración.-**

**Problema 10.** Pruebe la ley de senos utilizando vectores.

**Demostración.-**

**Problema 11.** Muestre que las medianas de un triángulo se cortan en un punto a un tercio de cada mediana.

**Demostración.-**

**Problema 12.** Demuestre que las diagonales de un rombo son ortogonales entre si.

**Demostración.-**

**Problema 13.** Si  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , entonces demostrar que:

$$x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z.$$

**Demostración.-**

**Problema 14.** Sean  $x, y \in \mathbb{R}^3$  con  $x, y \neq 0$ . Si  $\frac{\|x \times y\|}{\|x\|^3} = 3$ , entonces hallar  $\frac{\|\langle x, x \rangle y - \langle x, y \rangle x\|}{\|x\|^4}$ .

**Demostración.-**

**Problema 15.** Si  $x, y \in \mathbb{R}^3$ , entonces demostrar que:

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

**Demostración.-**

**Problema 16.** Si  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ , entonces demostrar que:

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$

**Demostración.-**