

## Tres teoremas fuertes

**TEOREMA 1.1** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(a) < 0 < f(b)$  entonces existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $f(x) = 0$ .

*Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto.*

**TEOREMA 1.2** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  está acotada superiormente en  $[a, b]$ , es decir, existe algún número  $N$  tal que  $f(x) \leq N$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

*Geométricamente, este teorema significa que la gráfica  $f$  queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal.*

**TEOREMA 1.3** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces existe algún número  $y$  en  $[a, b]$  tal que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

*Se dice que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo en dicho intervalo.*

**TEOREMA 1.4** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(a) < c < f(b)$ , entonces existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $f(x) = c$ .

*Demostración.- Sea  $g = f - c$ . Entonces  $g$  es continua, y  $g(a) + c < c < g(b) + c \implies g(a) < 0 < g(b)$ . Por el teorema 1, existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $g(x) = 0$ . Pero esto significa que  $f(x) = c$ .*

**TEOREMA 1.5** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(a) > c > f(b)$ , entonces existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $f(x) = c$ .

*Demostración.- La función  $-f$  es continua en  $[a, b]$  y  $-f(a) < -c < -f(b)$ . Por el teorema 4 existe algún  $x$  en  $[a, b]$  tal que  $-f(x) = -c$ , lo que significa que  $f(x) = c$ .*

Si una función continua en un intervalo toma dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre ellos; esta ligera generalización del teorema 1 recibe a menudo el nombre de **teorema de los valores**

intermedios.

**TEOREMA 1.6** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es acotada inferiormente en  $[a, b]$ , es decir, existe algún número  $N$  tal que  $f(x) \geq N$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

*Demostración.-* La función  $-f$  es continua en  $[a, b]$ , así por el teorema 2 existe un número  $M$  tal que  $-f(x) \leq M$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ . Pero esto significa que  $f(x) \geq -M$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ , así podemos poner  $N = -M$ .

Los teoremas 2 y 6 juntos muestran que una función continua  $f$  en  $[a, b]$  son acotados en  $[a, b]$ , es decir, existe un número  $N$  tal que  $|f(x)| \leq N$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ . En efecto, puesto que el teorema 2 asegura la existencia de un número  $N_1$  tal que  $f(x) \leq N_1$ , para todo  $x$  de  $[a, b]$  y el teorema 6 asegura la existencia de un número  $N_2$  tal que  $f(x) \geq N_2$ , para todo  $x$  en  $[a, b]$ , podemos tomar  $N = \max(|N_1|, |N_2|)$ .

**TEOREMA 1.7** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces existe algún  $y$  en  $[a, b]$  tal que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

*Demostración.-* La función  $-f$  es continua en  $[a, b]$ ; por el teorema 3 existe algún  $y$  en  $[a, b]$  tal que  $-f(y) \geq -f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ , lo que significa que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

**TEOREMA 1.8** Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si  $\alpha > 0$ , entonces existe algún número  $x$  tal que  $x^2 = \alpha$ .

*Demostración.-* Consideremos la función  $f(x) = x^2$ , el cual es ciertamente continuo. Notemos que la afirmación del teorema puede ser expresado en términos de  $f$ : "el número  $\alpha$  posee una raíz cuadrada" significa que  $f$  toma el valor  $\alpha$ . La demostración de este hecho acerca de  $f$  será una consecuencia fácil del teorema 4.

Existe, evidentemente, un número  $b > 0$  tal que  $f(b) > \alpha$ ; en efecto, si  $\alpha > 1$  podemos tomar  $b = \alpha$ , mientras que si  $\alpha < 1$  podemos tomar  $b = 1$ . Puesto que  $f(0) < \alpha < f(b)$ , el teorema 4 aplicado a  $[0, b]$  implica que para algún  $x$  de  $[0, b]$ , tenemos  $f(x) = \alpha$ , es decir,  $x^2 = \alpha$ .

Precisamente el mismo raciocinio puede aplicarse para demostrar que todo número positivo tiene una raíz  $n$ -ésima, cualquiera que sea el número  $n$ . Si  $n$  es impar, se puede decir mas: todo número tiene una raíz  $n$ -ésima. Para demostrarlo basta observar que si el número positivo  $\alpha$  tiene la raíz  $n$ -ésima  $x$ , es decir, si  $x^n = \alpha$ , entonces  $(-x)^n = -\alpha$  (puesto que  $n$  es impar), de modo que  $\alpha$  tiene una raíz  $n$ -ésima  $-x$ . Afirmar que, para un  $n$  impar, cualquier número  $\alpha$  tiene una raíz  $n$ -ésima equivale a afirmar que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

tiene una raíz si  $n$  es impar. El resultado expresado de este modo es susceptible de gran generalización.

**TEOREMA 1.9** Si  $n$  es impar, entonces cualquier ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

posee raíz.

*Demostración.-* Tendremos que considerar, evidentemente, la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

habría que demostrar que  $f$  es unas veces positiva y otras veces negativa. La idea intuitiva es que para un  $|x|$  grande, la función se parece mucho más a  $g(x) = x^n$  y puesto que  $n$  es impar, ésta función es positiva para  $x$  grandes positivos y negativos para  $x$  grandes negativos. Un poco de cálculo algebraico es todo lo que hace falta para dar forma a esta idea intuitiva.

Para analizar debidamente la función  $f$  conviene escribir

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

obsérvese que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \dots + \frac{|a_0|}{|x^n|}$$

En consecuencia, si elegimos un  $x$  que satisfaga

$$|x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_0| \quad (*)$$

entonces  $|x^k| > |x|$  y

$$\frac{|a_{n-k}|}{x^k} < \frac{|a_{n-k}|}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n}$$

de modo que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right| \leq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

expresado de otra forma,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Por lo tanto, si elegimos un  $x_1 > 0$  que satisfaga  $(*)$ , entonces

$$\frac{x_1^n}{2} \leq x_1^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \dots + \frac{a_0}{x_1^n}\right) = f(x_1)$$

así que  $f(x_1) > 0$ . Por otro lado, si  $x_2 < 0$  satisface  $(*)$ , entonces  $x_2^n < 0$  y

$$\frac{x_2^n}{2} \geq x_2^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \dots + \frac{a_0}{x_2^n}\right) = f(x_2),$$

así  $f(x_2) < 0$ .

Ahora aplicando el teorema 1 para el intervalo  $[x_2, x_1]$  llegamos a la conclusión de que existe un  $x$  en  $[x_2, x_1]$  tal que  $f(x) = 0$ .

**TEOREMA 1.10** Si  $n$  es par y  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ , entonces existe un número  $y$  tal que  $f(y) = f(x)$  para todo  $x$ .

*Demostración.*- Lo mismo que en el teorema 9, si

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_0|),$$

entonces para todo  $x$  con  $|x| \geq M$ , tenemos

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}$$

Al ser  $n$  par,  $x^n \geq 0$  para todo  $x$ , de modo que

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

siempre que  $|x| \geq M$ . Consideremos ahora el número  $f(0)$ . Sea  $b > 0$  un número tal que  $b^n \geq 2f(0)$  y también  $b > M$ . Entonces si  $x \geq b$ , tenemos

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Análogamente, si  $x \leq -b$ , entonces

$$f(x) \geq \geq = \geq f(0).$$

Resumiendo ahora el teorema 7 a la función  $f$  en el intervalo  $[-b, b]$ . Se deduce que existe un número  $y$  tal que

$$(1) \quad \text{si } -b \leq x \leq b, \text{ entonces } f(y) \leq f(x).$$

En particular,  $f(y) \leq f(0)$ . De este modo

$$(2) \quad \text{si } x \leq -b \text{ o } x \geq b, \text{ entonces } f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Cambiando (1) y (2) vemos que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$ .

**TEOREMA 1.11** Consideremos la ecuación

$$(*) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = c,$$

y supongamos que  $n$  es par. Entonces existe un número  $m$  tal que  $(*)$  posee una solución para  $c \geq m$  y no posee ninguna para  $c < m$ .

*Demostración.*- Sea  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ . Según el teorema 10, existe un número  $y$  tal que  $f(y) \leq f(x)$  para todo  $x$ .

Sea  $m = f(y)$ . Si  $c < m$  entonces la ecuación  $(*)$  no tiene, evidentemente, ninguna solución, puesto que el primer miembro tiene un valor  $\geq m$ . Si  $c = m$  entonces  $(*)$  tiene  $y$  como solución. Finalmente, supongamos  $c > m$ . Sea  $b$  un número tal que  $b > y$ ,  $f(b) > c$ . Entonces  $f(y) = m < c < f(b)$ . En consecuencia, según el teorema 4, existe algún número  $x$  en  $[y, b]$  tal que  $f(x) = c$ , con lo que  $x$  es una solución de  $(*)$ .

## 1.1. Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles está acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo y mínimo.

(i)  $f(x) = x^2$  en  $(-1, 1)$ .

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. El mínimo es 0 e no tiene máximo.

(ii)  $f(x) = x^3$  en  $(-1, 1)$ .

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. No tiene máximo ni mínimo

(iii)  $f(x) = x^2$  en  $\mathbf{R}$ .

Respuesta.- No está acotado superior pero si inferiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(iv)  $f(x) = x^2$  en  $[0, \infty)$ .

Respuesta.- Está acotada inferiormente pero no así superiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(v)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$  en  $(-a-1, a+1)$

Respuesta.- Es acotado superior e inferiormente. Se entiende que  $a > -1$  (de modo que  $-a-1 < a+1$ ). Si  $-1 < a \leq 1/2$ , entonces  $a < -a-1$ , así  $f(x) = a+2$  para todo  $x$  en  $(-a-1, a+1)$ , por lo tanto  $a+2$  es el máximo y mínimo valor. Si  $-1/2 < a \leq 0$ , entonces  $f$  tiene el mínimo valor en  $a^2$ , y si  $a \geq 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo valor en 0. Ya que  $a+2 > (a+1)^2$  solo para  $[-1-\sqrt{5}]/2 < a < [1+\sqrt{5}]/2$ , cuando  $a \geq -1/2$  esta función  $f$  tiene un máximo valor solo para  $a \leq [1+\sqrt{5}]/2$  (el máximo valor será  $a+2$ ).

(vi)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$  en  $[-a-1, a+1]$ .

Respuesta.- Está acotado superior e inferiormente. Como en la parte (v), se asume que  $a > -1$ . Si  $a \leq -1/2$  entonces  $f$  tiene el valor mínimo y un máximo  $3/2$ . Si  $a \geq 0$ , entonces  $f$  tiene un valor mínimo en 0, y un valor máximo  $\max(a^2, a+2)$ . Si  $-1/2 < a < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo valor  $3/2$  y no así con un valor mínimo.

(vii)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$  en  $[0, 1]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es 1.

(viii)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$  en  $[0, 1]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El máximo es 1 y no existe un mínimo.

(ix)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 0, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$  en  $[0, 1]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es  $-1$  y el máximo es 1.

(x)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$  en  $[0, a]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es  $a$ .

(xi)  $f(x) = \sin^2(\cos x + \sqrt{1-a^2})$  en  $[0, a^3]$ .

Respuesta.- Ya que es continua  $f$  tiene máximo como también mínimo.

(xii)  $f(x) = [x]$  en  $[0, a]$ .

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es  $a$ .

- 2.** Para cada una de las siguientes funcione polinómicas  $f$ , hallar un entero  $n$  tal que  $f(x) = 0$  para algún  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$ .

(i)  $f(x) = x^3 - x + 3$ .

Respuesta.-  $n = -2$ , ya que  $f(-2) = (-2)^3 + 2 + 3 = -3 < 0 < 3 = (-1)^3 - (-1) + 3$

(ii)  $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ .

Respuesta.-  $n = -5$  ya que  $f(-5) = -11 < 0 < f(-4)$ .

(iii)  $f(x) = x^5 + x + 1$ .

Respuesta.-  $n = -1$  ya que,  $f(-1) = -1 < 0 < f(0)$ .

(iv)  $4x^2 - 4x + 1$

Respuesta.- No existe un entero  $n$  tal que  $f(x) = 0$ .

- 3.** Demostrar que existe algún número  $x$  tal que

(i)  $x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 119$ .

Respuesta.- Si  $x^{179}$  y  $\frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x}$ , son continuas en  $\mathbb{R}$  entonces  $f(x) = x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x}$  es continua en  $\mathbb{R}$  y  $f(1) > 0$ , mientras que  $f(-2) < 0$ , de modo que  $f(x) = 0$  para algún  $x$  en  $(-2, 1)$ .

(ii)  $\sin x = x - 1$ .

Respuesta.- Sea  $f(x) = \sin x - x + 1$  entonces  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y  $f(0) > 0$ , mientras que  $f(2) < 0$ , así por el teoremas 4 se tiene que  $f(x) = c$  para algún  $x$  en  $(0, 2)$ .

- 4.** Este problema es una continuación del problema 3-7

(a) Si  $n - k$  es par, y  $\geq 0$ , hallar una función polinómica de grado  $n$  que tenga exactamente  $k$  raíces.

Respuesta.- Sea  $l = (n - k)/2$  de donde

$$f(x) = x^{2(n-k)/2} + (x - 1)(x - 2) \cdots (x - k).$$

(b)