

# Límites y continuidad

**Definición 1.1 (La razón promedio de cambio)** de  $y = f(x)$  con respecto a  $x$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$  sabiendo que  $\Delta x = x_2 - x_1 = h$  es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

## 1.1. Ejercicios

### Razones promedio de cambio

En los ejercicios 1 a 6, determine la razón promedio de cambio de la función en el intervalo o intervalos dados.

1.  $f(x) = x^3 + 1$

a)  $[2, 3]$

Respuesta.-  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3^3 + 1) - (2^3 + 1)}{3 - 2} = 19$

b)  $[-1, 1]$

Respuesta.-  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1^3 + 1) - ((-1)^3 + 1)}{1 - (-1)} = 1$

2.  $g(x) = x^2 - 2x$

a)  $[1, 3]$

Respuesta.-  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3^2 - 2 \cdot 3) - (1^2 - 2 \cdot 1)}{3 - 1} = 2$

b)  $[-2, 4]$ 

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(4^2 - 2 \cdot 4) - ((-2)^2 - 2 \cdot (-2))}{4 - (-2)} = 0$$

3.  $h(t) = \cot t$ (a)  $[\pi/4, 3\pi/4]$ 

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(\pi/4) - \cot(3\pi/4)}{\pi/4 - 3\pi/4} = \frac{1 + 1}{\frac{\pi - 3\pi}{4}} = \frac{8}{-2\pi}$$

(b)  $[\pi/6, \pi/2]$ 

$$\text{Respuesta.- } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(\pi/6) - \cot(\pi/2)}{\pi/6 - \pi/2} = \frac{-3\sqrt{3}}{\pi}$$

4.  $g(t) = 2 + \cos t$ (a)  $[0, \pi]$ 

$$\text{Respuesta.- } \frac{2 + \cos \pi - (2 + \cos 0)}{\pi - 0} = -\frac{2}{\pi}$$

(b)  $[-\pi, \pi]$ 

$$\text{Respuesta.- } \frac{2 + \cos \pi - (2 - \cos \pi)}{\pi + \pi} = \frac{3 - 3}{2\pi} = 0$$

5.  $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$ ;  $[0, 2]$ 

$$\text{Respuesta.- } \frac{\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 1 - (\sqrt{4 \cdot 0 + 1} + 1)}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$$

6.  $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$ ;  $[1, 2]$ 

$$\text{Respuesta.- } \frac{2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - (1^3 - 4^2 + 5)}{2 - 1} = 0$$

**Pendiente de una curva en un punto**

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar a) la pendiente de la curva en el punto  $P$  dado, y b) la ecuación de la recta tangente en  $P$

7.  $y = x^2 - 5$ ,  $P(2, -1)$

- a) Iniciamos con una recta secante que pasa por el punto  $(2, -1)$  y el punto cercano  $(2+h, (2+h)^2 - 5)$ , luego hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 5 - (2^2 - 5)}{2+h-2} = \frac{4h+h^2}{h} = 4+h$$

Luego aproximamos  $h$  a 0 siendo la pendiente  $m = 4$ .

- b) La ecuación de la recta tangente viene dado por  $y = mx + c$  de donde  $y = 4x + c$ , luego reemplazamos  $(2, -1)$ , quedándonos  $-1 = 4 \cdot 2 + c \implies c = -9$ . Por lo tanto

$$y = 4x - 9$$

8.  $y = 7 - x^2$ ,  $P(2, 3)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto  $P(2, 3)$  y el punto cercano  $Q[2+h, 7 - (2+h)^2]$ , hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - (2+h)^2 - (7 - 2^2)}{2+h-2} = \frac{7 - (2+h)^2 - 3}{h} = \frac{h(-h-4)}{h} = -h-4$$

Con forme  $Q$  se aproxima a  $P$  a lo largo de la curva,  $h$  se aproxima a cero, y la pendiente de la secante  $-h-4$  se aproxima a  $-4$ . Tomamos  $-4$  como la pendiente de la parábola en  $P$ .

- b) La ecuación de la recta tangente viene dado por  $y = mx + c$  de donde  $y = -4x + c$ , luego reemplazamos  $(2, 3)$ , así  $3 = -4(2) + c \implies c = 11$ . Por lo tanto

$$y = -4x + 11$$

9.  $y = x^2 - 2x - 3$ ,  $P(2, -3)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto  $P(2, -3)$  y el punto cercano  $Q[2+h, (2+h)^2 - 2(2+h) - 3]$ , hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - 3 - (-3)}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h+2$$

Con forme  $Q$  se aproxima a  $P$  a lo largo de la curva,  $h$  se aproxima a cero, y la pendiente de la secante  $h+2$  se aproxima a 2. Tomamos 2 como la pendiente de la parábola en  $P$ .

- b) La ecuación de la recta tangente viene dado por  $y = mx + c$  de donde  $y = 2x + c$ , luego reemplazamos  $(2, -3)$ , así  $-3 = 2(2) + c \implies c = -7$ . Por lo tanto

$$y = 2x - 7$$

10.  $y = x^2 - 4x$ ,  $P(1, -3)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto  $P(1, -3)$  y el punto cercano  $Q [1 + h, (1 + h)^2 - 4(1 + h)]$ , hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + h)^2 - 4(1 + h) - (-3)}{1 + h - 1} = \frac{h^2 - 2h}{h} = h - 2$$

Conforme  $Q$  se aproxima a  $P$  a lo largo de la curva,  $h$  se aproxima a cero, y la pendiente de la secante  $h - 2$  se aproxima a  $-2$ . Tomamos  $-2$  como la pendiente de la parábola en  $P$ .

- b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y - y_1 = m(x - x_1) \implies y = -2(x - 1) + (-3) \implies y = -2x + 2 - 3$$

por lo tanto

$$y = -2x - 1$$

## 11. $y = x^3$ , $P(2, 8)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto  $P(2, 8)$  y el punto cercano  $Q [2 + h, (2 + h)^3]$ , hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^3 - 8}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h} = h^2 + 6h + 12$$

Conforme  $Q$  se aproxima a  $P$  a lo largo de la curva,  $h$  se aproxima a cero, y la pendiente de la secante  $h^2 + 6h + 12$  se aproxima a 12. Tomamos 12 como la pendiente de la parábola en  $P$ .

- b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 12(x - 2) + 8 \implies y = 12x - 24 + 8$$

por lo tanto

$$y = 12x - 16$$

## 12. $y = 2 - x^3$ , $P(1, 1)$

- a) Sea la recta secante que pasa por el punto  $P(1, 1)$  y el punto cercano  $Q [1 + h, 2 - (1 + h)^3]$ , hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (1 + h)^3 - 1}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = h^2 + 3h + 3$$

Conforme  $Q$  se aproxima a  $P$  a lo largo de la curva,  $h$  se aproxima a cero, y la pendiente de la secante  $h^2 + 3h + 3$  se aproxima a 3. Tomamos 3 como la pendiente de la parábola en  $P$ .

b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 3(x - 1) + 1 \implies y = 3x - 3 + 1$$

por lo tanto

$$y = 3x - 2$$

**13.**  $y = x^3 - 12x$ ,  $P(1, -11)$

a) Sea la recta secante que pasa por el punto  $P(1, -11)$  y el punto cercano  $Q[1 + h, (1 + h)^3 - 12(1 + h)]$ , hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + h)^3 - 12(1 + h) + 11}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 - 9h}{h} = h^2 + 3h - 9$$

Conforme  $Q$  se aproxima a  $P$  a lo largo de la curva,  $h$  se aproxima a cero, y la pendiente de la secante  $h^2 + 3h - 9$  se aproxima a  $-9$ . Tomamos  $-9$  como la pendiente de la parábola en  $P$ .

b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = -9(x - 1) - 11 \implies y = -9x + 9 - 11$$

por lo tanto

$$y = -9x - 2$$

**14.**  $y = x^3 - 3x^2 + 4$ ,  $P(2, 0)$

a) Sea la recta secante que pasa por el punto  $P(2, 0)$  y el punto cercano  $Q[2 + h, (2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4]$ , hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4 - 0}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 3h^2}{h} = h^2 + 3h$$

Conforme  $Q$  se aproxima a  $P$  a lo largo de la curva,  $h$  se aproxima a cero, y la pendiente de la secante  $h^2 + 3h$  se aproxima a 0. Tomamos 0 como la pendiente de la parábola en  $P$ .

b) Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 0(x - 2) - 0$$

por lo tanto

$$y = 0$$

**Razones instantáneas de cambio**

- 15.** Rapidez de un automóvil. La siguiente figura muestra la gráfica tiempo-distancia de un automóvil deportivo que acelera desde el reposo.

- a) Determine las pendientes de la secante  $PQ_1, PQ_2, PQ_3$  y  $PQ_4$ , ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(10, 220)$	$\frac{650 - 220}{20 - 10} = 43$
$Q_2(14, 380)$	$\frac{650 - 380}{20 - 14} = 45$
$Q_3(17, 480)$	$\frac{650 - 480}{20 - 16} = 43$
$Q_4(17, 550)$	$\frac{650 - 550}{20 - 18} = 50$

Los resultados anteriores son redondeados.

- b) Después estime la rapidez del automóvil para el tiempo  $t = 20s$ .

Respuesta.- Tomamos el punto mas cercano a  $P$ , en este caso  $Q_4$  de donde la velocidad vendrá dado aproximadamente por  $50m/s$ .

- 16.** La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia de caída libre contra el tiempo para un objeto que cae desde un módulo espacial que se encuentra a una distancia de 80 m de la superficie de la Luna.

- a) Estime las pendientes de las secantes  $PQ_1, PQ_2, PQ_3$  y  $PQ_4$ , ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(5, 20)$	$\frac{80 - 20}{10 - 5} = 12$
$Q_2(7, 38)$	$\frac{80 - 38}{10 - 7} = 14$
$Q_3(8,5, 56)$	$\frac{80 - 56}{10 - 8,5} = 16$
$Q_4(9,5, 71)$	$\frac{80 - 71}{10 - 9,5} = 18$

- b) ¿Cuál será la rapidez aproximada del objeto cuando choca con la superficie de la Luna?

Respuesta.- Será de  $18m/s$ .

17. En la siguiente tabla se registran las utilidades de una pequeña empresa en cada uno de sus primeros cinco años de operación:

a) Trace los puntos que representan las utilidades como una función del año, y únalos mediante una curva suave.

b) ¿Cuál es la razón promedio de incremento de las utilidades entre 2012 y 2014?

Respuesta.-  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{175 - 63}{2014 - 2012} = 56$

c) Use su gráfica para estimar la razón a la que cambiaron las utilidades en 2012.

Respuesta.- Sea  $\frac{63 - 26}{2012 - 2011} = 37$  y  $\frac{112 - 63}{2013 - 2012} = 49$  entonces  $\frac{37 + 49}{2} = 43$ .

18. Elabore una tabla de valores para la función  $F(x) = (x+2)/(x-2)$  en los puntos  $x = 1,2, x = 11/10, x = 101/100, x = 1001/1000, x = 10001/10000$  y  $x = 1$

$x$	1,2	11/10	101/100	1001/1000	10001/10000	1
$F(x)$	-4	-31/9	-301/99	3001/999	30001/9999	-3

a) Determine la razón promedio de cambio de  $F(x)$  en los intervalos  $[1, x]$  para cada  $x \neq 1$  de su tabla.

b) Si es necesario, amplíe su tabla para intentar determinar la razón de cambio de  $F(x)$  en  $x = 1$ .

19. Sea  $g(x) = \sqrt{x}$  para  $x \geq 0$

a) Obtenga la razón promedio de cambio de  $g(x)$  con respecto a  $x$  en los intervalos  $[1, 2], [1, 1,5], [1, 1+h]$

Respuesta.- Para  $[1, 2]$  se tiene  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$ .

Para  $[1, 1,5]$  se tiene  $\frac{\sqrt{1,5} - 1}{1,5 - 1} = \frac{\sqrt{1,5} - 1}{0,5}$ .

Para  $[1, 1+h]$  se tiene  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1+h} - 1}{1+h-1} = \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$ .

b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de  $g$  con respecto a  $x$  en el intervalo  $[1, 1+h]$  para algunos valores de  $h$  cercanos a cero, digamos,  $h = 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001$  y  $0,000001$ .

Respuesta.-

$h$	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0,488	0,4987	0,4998	0,49998	0,499998	0,4999998

- c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de  $g(x)$  con respecto a  $x$  en  $x = 1$ ?

Respuesta.- 0.5

- d) Calcule el límite, cuando  $h$  se aproxima a cero, de la razón promedio de cambio de  $g(x)$  con respecto a  $x$  en el intervalo  $[1, 1+h]$ .

Respuesta.- 0.5

20. Sea  $f(t) = 1/t$  para  $t \neq 0$ .

- a) Obtenga la razón promedio de cambio de  $f$  con respecto a  $t$  en los intervalos *i.* de  $t = 2$  a  $t = 3$ , y *ii.* de  $t = 2$  a  $t = T$ .

Respuesta.- Para *i.* se tiene  $\frac{\Delta y}{\text{triangle } x} = \frac{1/3 - 1/2}{3 - 2} = -\frac{1}{6}$ . Para *ii.* se tiene  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1/T - 1/2}{T - 2} = \frac{2 - T}{2T(T - 2)}$

- b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de  $f$  con respecto a  $t$  en el intervalo  $[2, T]$  para algunos valores de  $T$  cercanos a 2, digamos,  $T = 2,1, 2,01, 2,001, 2,0001, 2,00001, 2,000001$ .

Respuesta.-

$2,1$	$2,01$	$2,001$	$2,0001$	$2,00001$	$2,000001$
$-0,238$	$-0,2487$	$-0,2498$	$-0,24998$	$-0,24999$	$-0,25$

- c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de  $f$  con respecto a  $t$  en  $t = 2$ ?

Respuesta.- -0.25.

- d) Calcule el límite, cuando  $T$  se aproxima a 2, de la razón promedio de cambio de  $f$  con respecto a  $t$  en el intervalo de 2 a  $T$ . Tendrá que hacer algo de álgebra antes de que pueda sustituir  $T = 2$ .

Respuesta.- Por la parte a), *ii.* tenemos  $\frac{2 - T}{2T(T - 2)}$  de donde  $-\frac{1}{2T}$  y por lo tanto  $-\frac{1}{4}$ .

21. La siguiente gráfica muestra la distancia total  $s$ , que recorre un ciclista después de  $t$  horas.

- a) Estime la velocidad promedio del ciclista en los intervalos de tiempo  $[0, 1]$ ,  $[1, 2,5]$  y  $[2,5, 3,5]$ .

Respuesta.-

$[0, 1]$	$[1, 2,5]$	$[2,5, 3,5]$
15	3,33	10



- b) Estime la velocidad instantánea del ciclista en los tiempos  $t = \frac{1}{2}$ ,  $t = 2$  y  $t = 3$ . Respuesta.-

$\frac{1}{2}$	$2$	$3$
$\frac{12}{12}$	$0$	$4$

- c) Estime la velocidad máxima del ciclista y el tiempo específico en que ésta se registra.

Respuesta.- Tenemos la velocidad máxima dada por  $\frac{30 - 20}{3,5 - 3} = 20$  en la hora 3,5.

- 22.** La siguiente gráfica muestra la cantidad total de gasolina  $A$  en el tanque de un automóvil después de conducirlo  $t$  días.

- a) Estime la razón promedio del consumo de gasolina en los intervalos de tiempo  $[0, 3]$ ,  $[0, 5]$  y  $[7, 10]$ .

Respuesta.-

$[0, 3]$	$[0, 5]$	$[7, 10]$
$-5/3$	$-2,24$	$0,5$

- b) Estime la razón instantánea de consumo de gasolina en los tiempos  $t = 1$ ,  $t = 4$  y  $t = 8$ . Respuesta.-

$1$	$4$	$8$
$-1$	$-4$	$-1/2$

- c) Estime la razón máxima de consumo de gasolina y el tiempo específico en que ésta se registra.

Respuesta.- con una razón de  $-4$ , en el día 4.

## 1.2. Límites de una función y leyes de los límites

**Teorema 1.1** Si  $L, M, c$  y  $k$  son números reales y

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. Regla de la suma:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = L + M$

2. Regla de la diferencia:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. Regla del múltiplo constante:  $\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$

4. Regla del producto:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

5. Regla del cociente:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

6. Regla de la potencia:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n, \quad n \text{ es un entero positivo}$

7. Regla de la raíz:  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}, \quad n \text{ es un entero positivo.}$

**Teorema 1.2 (Límites de las funciones polinomiales)** Si  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  entonces,

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

**Teorema 1.3 (Límites de las funciones racionales)** Si  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios, y  $Q(c) \neq 0$ , entonces,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

**Teorema 1.4 (El teorema del sándwich)** *Suponga que  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para toda  $x$  en algún intervalo abierto que contenga a  $c$ , excepto posiblemente en  $x = c$ . Suponga también que*

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

*entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ .*

**Teorema 1.5** *Si  $f(x) \leq g(x)$  para toda  $x$  en un intervalo abierto que contiene a  $c$ , excepto posiblemente en  $x = c$ , y los límites de  $f$  y  $g$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$ , entonces,*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

## 1.2. Ejercicios

### Límites a partir de gráficas

1. Para la función  $g(x)$  cuya gráficas a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

Respuesta.- No existe. Cuando  $x$  se aproxima a 1 por la derecha,  $g(x)$  se aproxima a 0. Cuando  $x$  se aproxima a 1 por la izquierda,  $g(x)$  se aproxima a 1. No hay un número único  $L$  para el que todos los valores de  $g(x)$  estén arbitrariamente cerca cuando  $x \rightarrow 1$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow 2,5} g(x) = 0,5$ .

2. Para la función  $f(t)$  cuya gráfica aparece a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a)  $\lim_{t \rightarrow -2} f(t) = 0$ .

b)  $\lim_{t \rightarrow -1} f(t) = -1$ .

c)  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ .

d)  $\lim_{t \rightarrow -0,5} f(t) = -1.$

3. ¿Cuáles de los siguientes enunciados acerca de la función  $y = f(x)$ , cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe.

Respuesta.- Verdadero.

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Respuesta.- Verdadero.

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Respuesta.- Falso.

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Respuesta.- Falso.

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

Respuesta.- Falso.

f)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe en todos los puntos  $c$  en  $(-1, 1)$

Respuesta.- Verdadero.

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe.

Respuesta.- Verdadero.

4. ¿Cuáles de los siguientes enunciados acerca de la función  $y = f(x)$ , cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  no existe.

Respuesta.- Falso.

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

Respuesta.- Falso.

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe.

Respuesta.- Verdadero.

d)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe en todos los puntos  $c$  en  $(-1, 1)$ .

Respuesta.- Verdadero.

e)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe en todos los puntos  $c$  en  $(1, 3)$ .

Respuesta.- Verdadero.

### Existencia de límites

En los ejercicios 5 y 6, explique por qué los límites no existen.

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ .

Respuesta.- No existe ya que si  $x$  se aproxima a 1 por la derecha,  $g(x)$  se aproxima a 0. Y cuando  $x$  se aproxima a 1 por la izquierda  $g(x)$  se aproxima a 1. Por lo tanto no hay un número único  $L$  para que todos los valores de  $g(x)$  estén arbitrariamente cerca cuando  $x \rightarrow 1$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

Respuesta.- De similar manera al anterior ejercicio se tiene  $L = \infty$  cuando  $x$  se aproxima por la izquierda. Y  $L = -\infty$  cuando  $x$  se aproxima por la derecha.

7. Suponga que una función  $f(x)$  está definida para todos los valores reales de  $x$ , excepto para  $x = c$ . ¿Qué puede decirse con respecto a la existencia de  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ? Justifique su respuesta.

Respuesta.- El límite existe debido a que  $x$  se aproxima a  $c$  tanto por la parte derecha como por la parte izquierda lo más que pueda, esto siempre y cuando sea un único  $L$ .

8. Suponga que una función  $f(x)$  está definida para toda  $x$  en  $[-1, 1]$ . ¿Qué puede decirse con respecto a la existencia de  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ? Justifique su respuesta.

Respuesta.- De similar forma al ejercicio anterior el límite existe.

9. Si  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ , ¿debe estar definida  $f$  en  $x = 1$ ? Si es así, ¿ $f(1)$  debe ser igual a 5? ¿Es posible concluir algo con respecto a los valores de  $f$  en  $x = 1$ ? Explique.

Respuesta.- No necesariamente debe estar definida en  $x = 1$ . No necesariamente debe ser igual a 5. No es posible concluir algo concreto.

- 10.** Si  $f(1) = 5$  ¿debe existir el  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? Si es así. ¿ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  debe ser igual a 5? ¿Es posible concluir algo respecto del  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? Explique.

Respuesta.- Si debería existir. Si debería ser igual a 5. Se puede concluir que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ .

### Cálculo de límites

En los ejercicios 11 a 22, encuentre los límites.

**11.**  $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 13) = -4.$

**17.**  $\lim_{x \rightarrow -1/2} 4x(3x + 4)^2 = -\frac{25}{2}.$

**12.**  $\lim_{t \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2) = 12.$

**18.**  $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y + 2}{y^2 + 5y + 6} = \frac{1}{5}.$

**13.**  $\lim_{t \rightarrow 6} (t - 5)(t - 7) = -1.$

**19.**  $\lim_{y \rightarrow -3} (5 - y)^{4/3} = 16.$

**14.**  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8) = -16.$

**20.**  $\lim_{z \rightarrow 4} \sqrt{z^2 - 10} = \sqrt{6}.$

**15.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{11 - x^3} = 3.$

**21.**  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1} = \frac{3}{2}.$

**16.**  $\lim_{s \rightarrow 2/3} (8 - 3s)(2s - 1) = 2.$

**22.**  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5h + 4} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5h + 4} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{5h + 4} + 2}{\sqrt{5h + 4} + 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h\sqrt{5h + 4} + 2} = \frac{5}{4}.$

**Límites de cocientes** Encuentre los límites en los ejercicios 23 a 42.

**23.**  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25} \implies \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x + 5)(x - 5)} = \frac{1}{10}.$

**24.**  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3} \implies \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{(x + 3)(x + 1)} = -\frac{1}{2}$

**25.**  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5} \implies \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x + 5)(x - 2)}{x + 5} = -7$

$$26. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 5)(x - 2)}{x - 2} = -3$$

$$27. \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t + 2)(t - 1)}{(t + 1)(t - 1)} = \frac{3}{2}$$

$$28. \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(t + 2)(t + 1)}{(t - 2)(t + 1)} = -\frac{1}{3}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2(x + 2)}{x^2(x + 2)} = -\frac{1}{2}$$

$$30. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3 + 8^2}{3y^3 - 16y^2} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2(5y + 8)}{y^2(3^2 - 16)} = -\frac{1}{2}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{-1} - 1}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x + 1}{x(x + 1)} = -1$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x^2 - 1)} = -2$$

$$33. \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^4 - 1}{u^3 - 1} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u - 1)(u + 1)(u^2 + 1)}{(u - 1)(u^2 + u + 1)} = \frac{4}{3}$$

$$34. \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^3 - 8}{u^4 - 16} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)} = \frac{3}{8}$$

$$35. \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{2} + 3}{\sqrt{x} + 3} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 1} \frac{x - 9}{(x - 9)\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{4}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x(x - 4)}{2 - \sqrt{x}} \cdot \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x(x - 4)(2 + \sqrt{x})}{4 - x} = -16$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x + 3} + 2}{\sqrt{x + 3} + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)}{x - 1} = 4$$

$$38. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8} + 3}{\sqrt{x^2 + 8} + 3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 8} + 3)} = -\frac{1}{3}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 12} + 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)} = \frac{1}{2}$$

$$40. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{2}$$

$$41. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3} \cdot \frac{2+\sqrt{x^2-5}}{2+\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-(x-3)(x+3)}{(x+3)(2+\sqrt{x^2-5})} = \frac{3}{2}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}} \cdot \frac{5+\sqrt{x^2+9}}{5+\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(5+\sqrt{x^2+9})}{(4-x)(x+4)} = \frac{5}{4}$$

**Límites con funciones trigonométricas** En los ejercicios 43 a 50, encuentre los límites.

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x - 1) = -1$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+\sin x}{3 \cos x} = \frac{1}{3}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1)(2 - \cos x) = -1$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} \sec x = 1$$

$$49. \lim_{x \rightarrow -\pi} \sqrt{x+4} \cos(x+\pi) = \sqrt{4-\pi}$$

$$46. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \tan x = \sqrt{3}$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 0} = \sqrt{7 + \sec^2 x} = \sqrt{7 + \frac{1}{\cos^2 0}} = \sqrt{8}$$

**Aplicaciones de las reglas de los límites.**

51. Suponga que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -5$ . Señale cuáles reglas del teorema 1 se emplean para obtener los pasos a), b) y c) del siguiente cálculo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{2/3}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{2/3}} && \text{regla del cociente.} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left[ \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7) \right]^{2/3}} && \text{regla de diferencia y de potencia.} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7 \right)^{2/3}} && \text{regla de la suma y múltiplo constante.} \\ &= \frac{2 \cdot 1 - (-5)}{(1 + 7)^{2/3}} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$



- 52.** Sean  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 5$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = 2$ . Señale cuáles reglas del teorema 1 se emplean para obtener los pasos a), b) y c) del siguiente cálculo.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x \rightarrow 1} \{p(x)[4-r(x)]\}} && \text{regla del cociente.} \\
 &= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} 5h(x)}}{\left[ \lim_{x \rightarrow 1} p(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow 1} (4-r(x)) \right]} && \text{regla de la raíz y del producto.} \\
 &= \frac{\sqrt{5 \lim_{x \rightarrow 1} h(x)}}{\left[ \lim_{x \rightarrow 1} p(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow 1} 4 - \lim_{x \rightarrow 1} r(x) \right]} && \text{regla de la diferencia y múltiplo constante.} \\
 &= \frac{\sqrt{5 \cdot 5}}{1(4-2)} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

- 53.** Suponga que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 5$  y  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -2$ . Encuentre

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) &\implies \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 5 \cdot (-2) = -10 \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow c} 2f(x)g(x) &\implies 2 \left( \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{x \rightarrow c} g(x) \right) = 2(-10) = -20 \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + 3g(x)) &\implies \lim_{x \rightarrow c} f(x) + 3 \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 5 + 3 \cdot (-2) = -1. \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{f(x) - g(x)} &\implies \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{5}{5 + 2} = \frac{5}{7}.
 \end{aligned}$$

- 54.** Suponga que  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$ . Encuentre

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + 3) &\implies \lim_{x \rightarrow 4} g(x) + \lim_{x \rightarrow 4} 3 = -3 + 3 = 0. \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} xf(x) &\implies \lim_{x \rightarrow 4} x \cdot \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4 \cdot 0 = 0. \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} (g(x))^2 &= (-3)^2 = 9 \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{f(x) - 1} &\implies \frac{\lim_{x \rightarrow 4} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 4} f(x) - \lim_{x \rightarrow 4} 1} = \frac{-3}{0 - 1} = 3.
 \end{aligned}$$

- 55.** Suponga que  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 7$  y  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -3$ . Encuentre

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow b} (f(x) + g(x)) \implies \lim_{x \rightarrow b} f(x) + \lim_{g(x)} = 7 + (-3) = 4.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) \implies \lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 7 \cdot (-3) = -21.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow b} 4g(x) \implies \lim_{x \rightarrow b} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 4 \cdot (-3) = -12$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow b} f(x)/g(x) \implies \frac{\lim_{x \rightarrow b} f(x)}{\lim_{x \rightarrow b} g(x)} = -\frac{7}{3}.$$

**56.** Suponga que  $\lim_{x \rightarrow -2} p(x) = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2} r(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow -2} s(x) = -3$ . Encuentre

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} (p(x) + r(x) + s(x)) \implies \lim_{x \rightarrow -2} p(x) + \lim_{x \rightarrow -2} r(x) + \lim_{x \rightarrow -2} s(x) = 4 + 0 + (-3) = 1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} p(x) \cdot r(x) \cdot s(x) \implies \lim_{x \rightarrow -2} p(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -2} r(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -2} s(x) = 4 \cdot 0 \cdot (-3) = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} (-4p(x) + 5r(x))/s(x) \implies \frac{-4 \cdot \lim_{x \rightarrow -2} p(x) + 5 \lim_{x \rightarrow -2} r(x)}{\lim_{x \rightarrow -2} s(x)} = \frac{-4 \cdot 4 + 5 \cdot 0}{-3} = \frac{16}{3}.$$

### Límites de razones promedio de cambio.

Debido a la relación que existe entre rectas secantes, tangentes y razones instantáneas, límites de la forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

aparecen a menudo en cálculo. En los ejercicios 57 a 62, evalúe este límite para el valor de  $x$  y la función  $f$  dados.

**57.**  $f(x)x^2$ ,  $x = 1$ .

$$\text{Respuesta.- } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h+h)}{2} = 2$$

**58.**  $f(x) = x^2$ ,  $x = -2$

$$\text{Respuesta.- } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-2)^2 - (-2)^2}{h} \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h + 4 - 4}{h} \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} = -4.$$

**59.**  $f(x) = 3x - 4$ ,  $x = 2$

$$\text{Respuesta.- } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 4 - (3x - 4)}{h} \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x + 3h - 4 - 3x + 4}{h} = 3.$$

**60.**  $f(x) = 1/x$ ,  $x = -2$

Respuesta.-  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/(x+h) - 1/x}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2+xh} = -\frac{1}{4}.$

**61.**  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 7$

Respuesta.-  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$

**62.**  $f(x) = \sqrt{3x+1}$ ,  $x = 0$

Respuesta.-  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1}}{\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1}} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x+3h+1-3x-1}{h\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2}.$

**Aplicación del teorema del sándwich.**

**63.** Si  $\sqrt{5-2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5-x^2}$  para  $-1 \leq x \leq 1$ , determine  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Respuesta.- Sea  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{5-2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{5-x^2} = \sqrt{5}$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{5}.$

**64.** Si  $2-x^2 \leq g(x) \leq 2\cos x$ , determine  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

Respuesta.- Sea  $\lim_{x \rightarrow 0} 2-x^2 = 2 = \lim_{x \rightarrow 0} 2\cos x$ , por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2.$

**65. a)** Es posible demostrar que las desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sen x}{2 - 2 \cos x} < 1$$

son válidas para todos los valores de  $x$  cercanos a cero. ¿Se puede decir algo acerca del

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sen x}{2 - 2 \cos x}?$$

justifique su respuesta.

Respuesta.- Si  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{6} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$  entonces por la ley del sandwich tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sen x}{2 - 2 \cos x} = 1$$

**b)** Dibuje en una misma gráfica  $y = 1 - (x^2/6)$ ,  $y = (x \sen x)/(2 - 2 \cos x)$  e  $y = 1$  para  $-2 \leq x \leq 2$ . Comente sobre el comportamiento de las gráficas cuando  $x \rightarrow 0$ .

Respuesta.- Cuando  $x$  tiende a 0 las tres funciones suscitada tienden a 1.

**66.** (a) Suponga que las desigualdades

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

Son válidas para los valores de  $x$  cercanos a cero. (Así sucede, como véra la sección 9.9). ¿Qué se puede decir, si acaso, acerca del

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}?$$

Justifique su respuesta.

Respuesta.- Sea  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} = \frac{1}{2}$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  entonces por la ley del sandwich se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(b) Grafique juntas las ecuaciones  $y = (1/2) - (x^2/24)$ ,  $y = (1 - \cos x)/x^2$ , y  $y = 1/2$  para  $-2 \leq x \leq 2$ . Comente sobre el comportamiento de las gráficas cuando  $x \rightarrow 0$ .

Respuesta.- Cuando  $x$  tiende a 0 las tres funciones tienden a  $\frac{1}{2}$ .

**Estimación de límites.**

**67.** Sea  $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ .

a) Elabore una tabla con los valores de  $f$  en los puntos  $x = -3, 1, 3.01, -3.0001$ , y así hasta donde lo permita su calculadora. Después, estime  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ . ¿Qué estimación obtendrá si ahora evalúa  $f$  en  $x = -2.9, .2.99, -2.999...$ ?

Respuesta.-

x	-3.1	.3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
f(x)	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso a) graficando  $f$  cerca de  $c = -3$  y empleando las funciones Zoom y Trace de su calculadora para estimar los valores  $y$  de la gráfica cuando  $x \rightarrow -3$ .

c) Determine  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  algebraicamente como en el ejemplo 7.

Respuesta.-

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \implies \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = 6$$

Los ejercicios 68 al 74 son similares al ejercicio 67.

Teoría y ejemplos.

75.