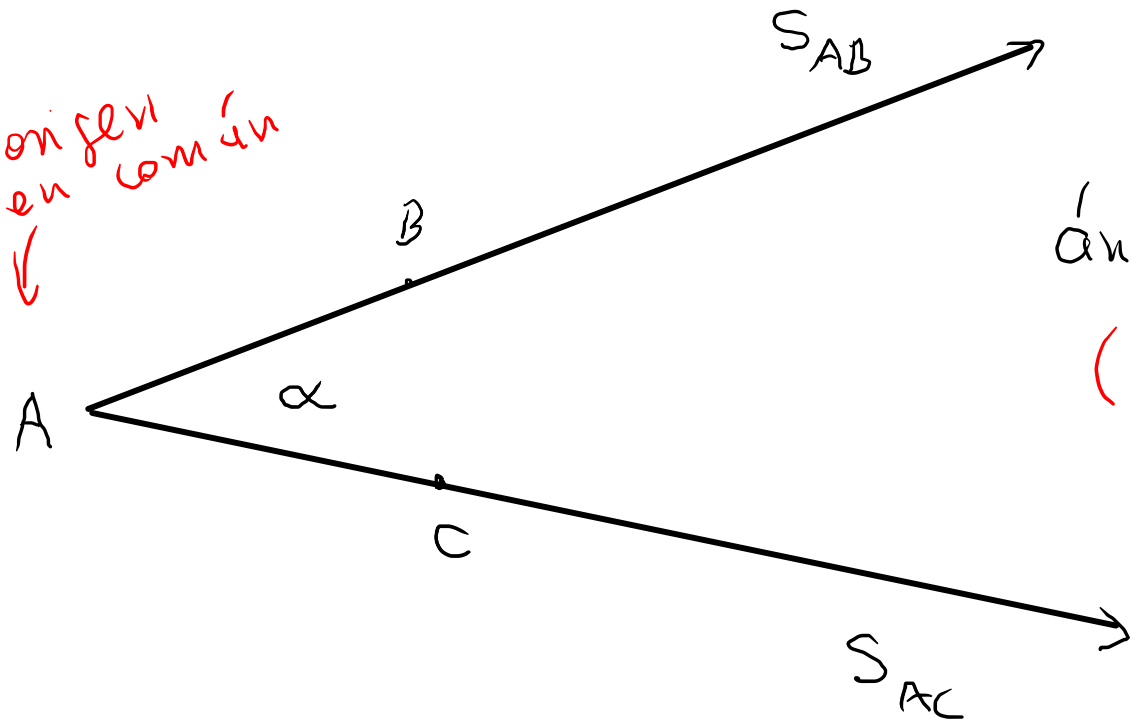
Cap. 3 Axiomas sobre medición de ángulos

Def: Un ángulo es la figura formada por dos semirrectas que tienen el mismo origen



ángulo: $S_{AB} \cup S_{AC}$

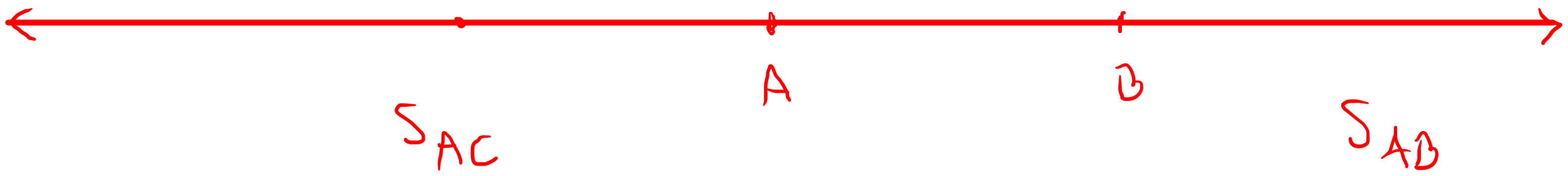
(conjunto de puntos)

Notación: $\widehat{BAC}$: ángulo formado por S_{AB} y S_{AC}

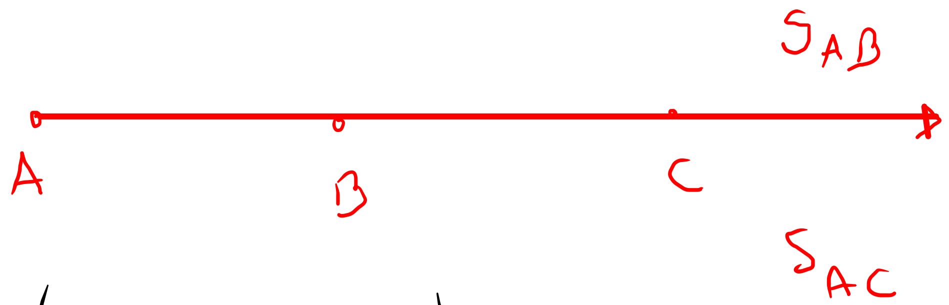
"$\angle BAC$" $\quad \hat{A}$: ángulo de vértice en A

Podemos utilizar letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Ángulos especiales



ángulo llano o razo



ángulo nulo

Axioma III_4 Todo ángulo tiene una medida mayor o igual a cero. La medida del ángulo es cero si y sólo si él está formado por dos semirectas coincidentes.

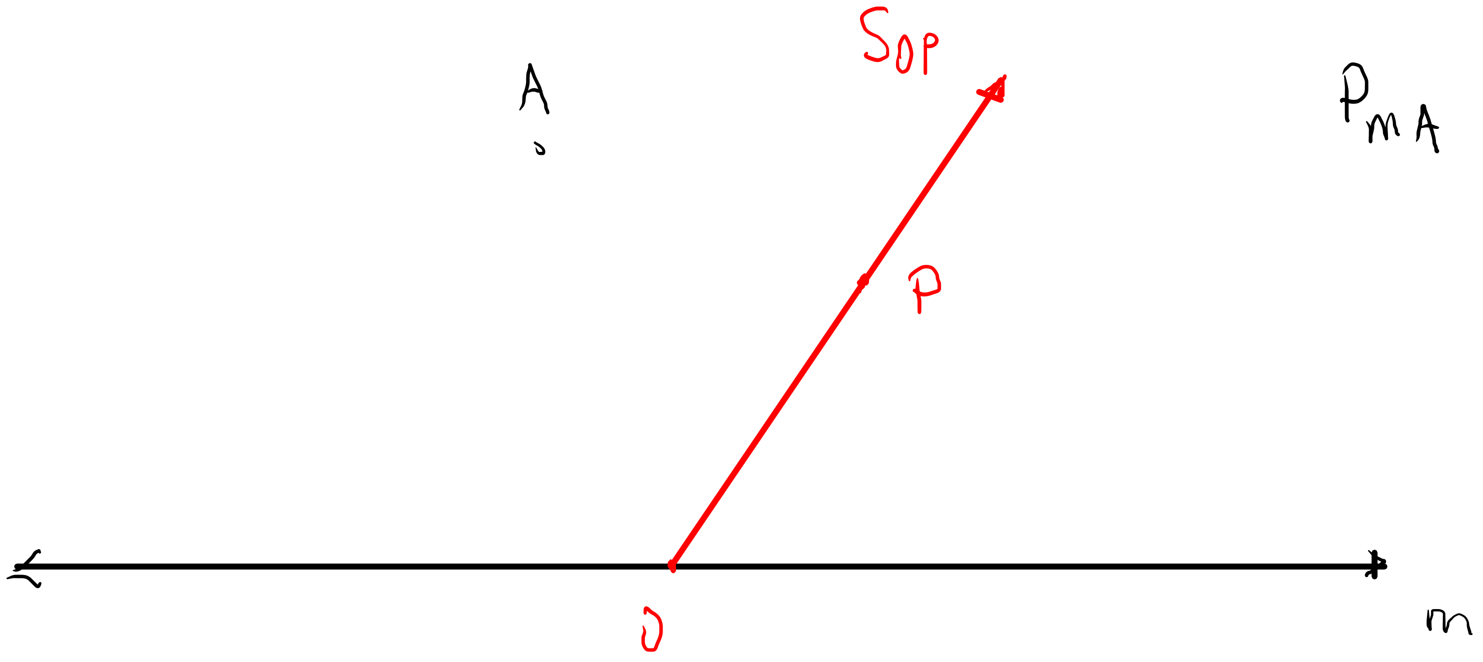
OBS: A cada ángulo le corresponde un único número real mayor o igual a cero llamado medida del ángulo

$$\text{ángulo} \longleftrightarrow \text{número} \geq 0$$
(medida del ángulo)

Notación:

- $A\hat{O}B$: ángulo y la medida del ángulo.
  $\hat{A}$
  α
- $m\,A\hat{O}B$: medida de $A\hat{O}B$.

Definición: Una semirecta divide un semiplano si ella está contenida en el semiplano y su origen es un punto de la recta que lo determina.



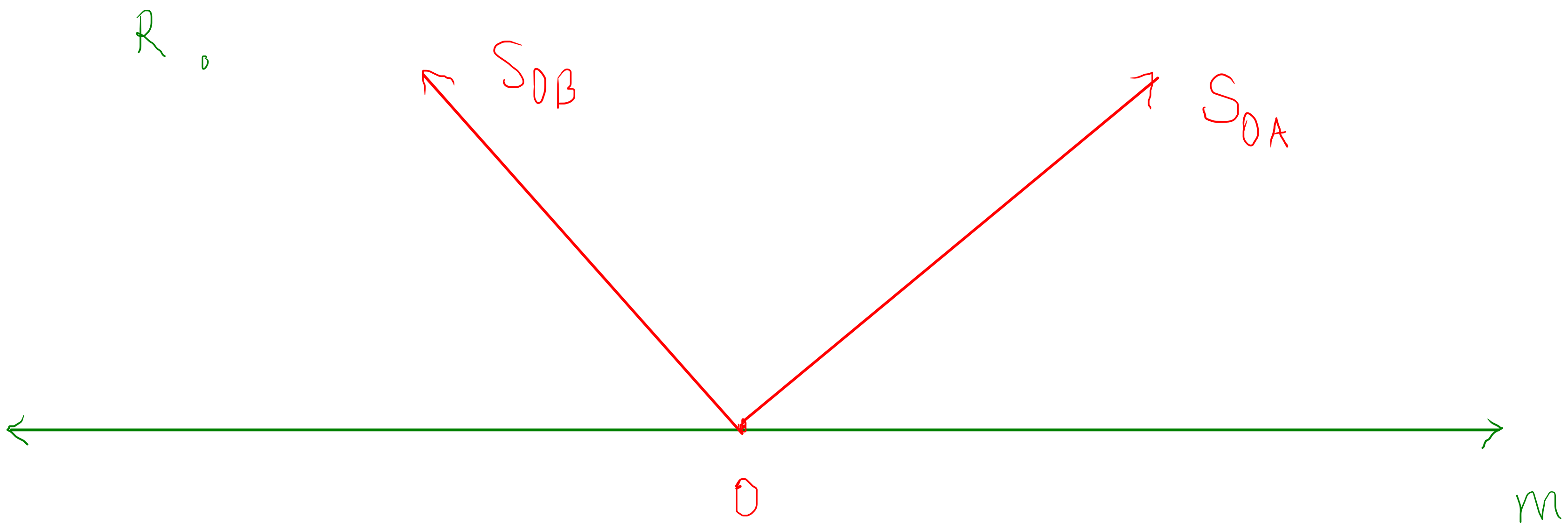
(S_{OP} divide a P_{mA})

Axioma III_5: Es posible colocar en correspondencia biunívoca los numeros reales entre 0 y 180 y las semirectas de mismo origen que dividen un semiplano dado, de modo que la diferencia entre estos números sea la medida del ángulo formado por las semirectas correspondientes.

OBS: Dado el semiplano P_{mR},

$$\{ S_{OA} \mid S_{OA} \text{ divide a } P_{mR} \} \to [0, 180] \subset \mathbb{R}$$

$$S_{OA} \longmapsto \text{coordenada de } S_{OA}.$$



$S_{OA} \mapsto a$, $S_{OB} \mapsto b$, $b \geq a$

medida $\widehat{AOB} = b - a$

$S_{OA} \mapsto a$, $S_{OB} \mapsto b$, $a \geq b$

medida $\widehat{AOB} = a - b$

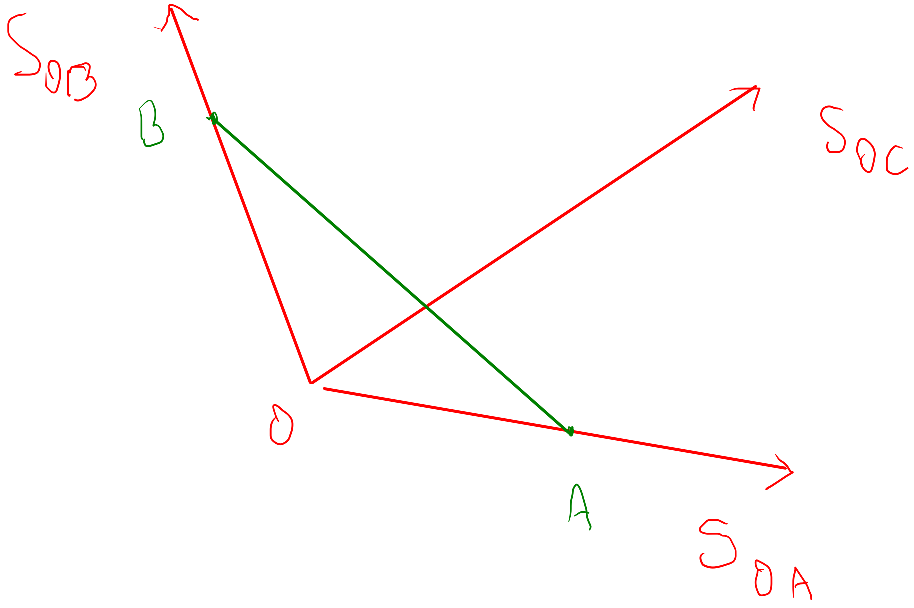
En general $\widehat{AOB} = |a-b|$ //

* A cada $a \in [0, 180]$ le corresponde una única semirecta S_{OA} que divide a P_{mR}

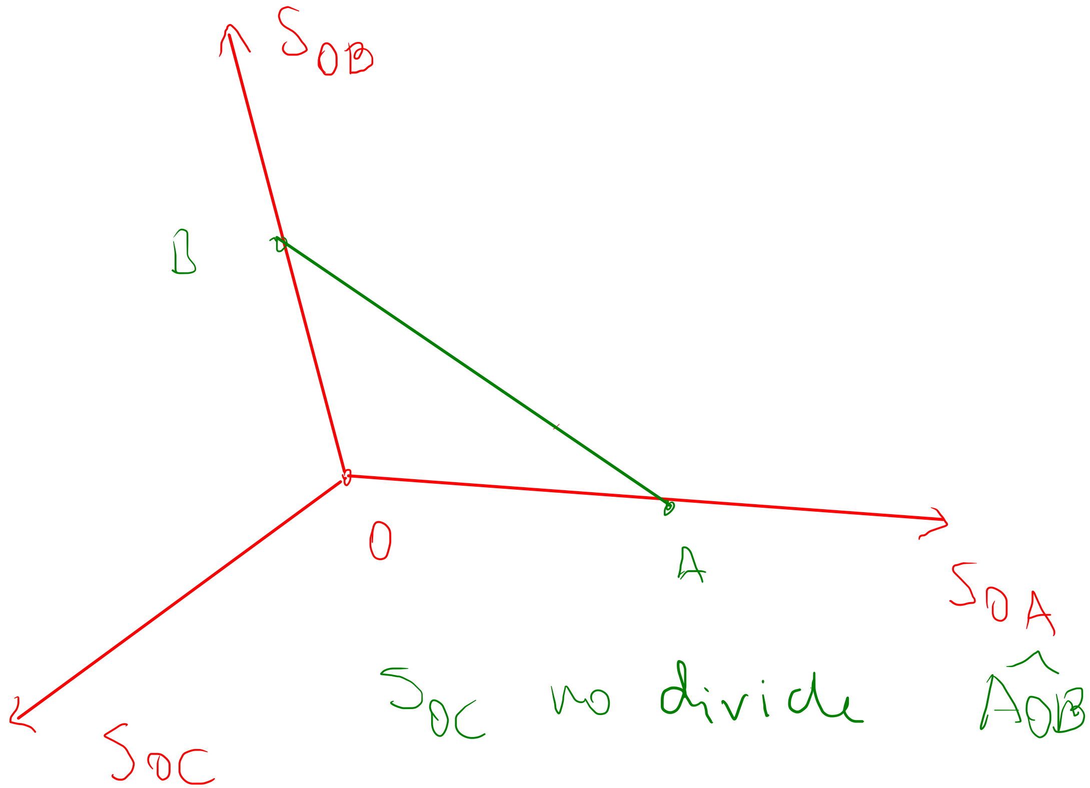
* A cada semirecta S_{OA} que divide a P_{mR}, le corresponde un único numero real $a \in [0, 180]$

Correspondencia biunívoca

Def: Sean S_{OA}, S_{OB}, S_{OC}. Si el segmento AB intersecta S_{OC} diremos que S_{OC} divide el ángulo $\widehat{AOB}$.



S_{OC} divide a $\widehat{AOB}$

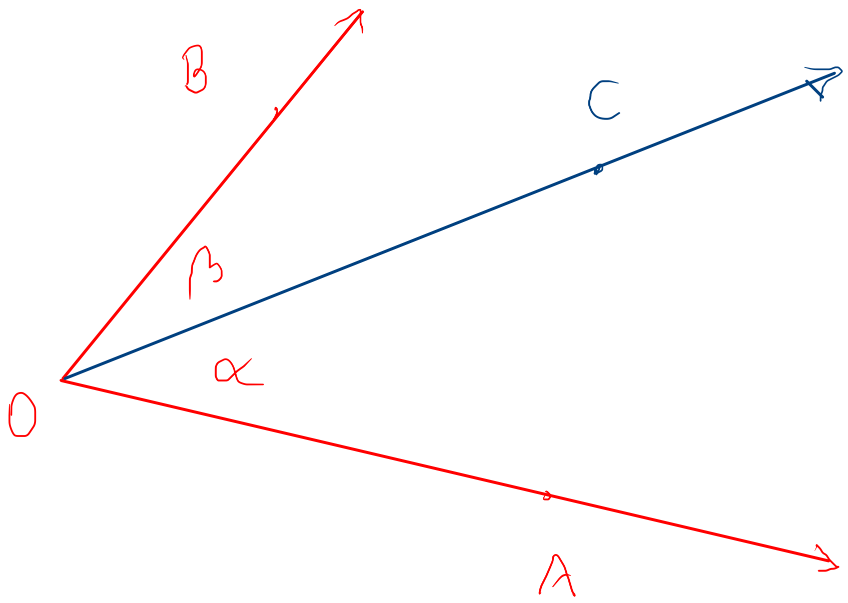


S_{OC} no divide $\widehat{AOB}$.

Axioma III_6

Si una semirecta S_{OC} divide un ángulo $\widehat{AOB}$ entonces

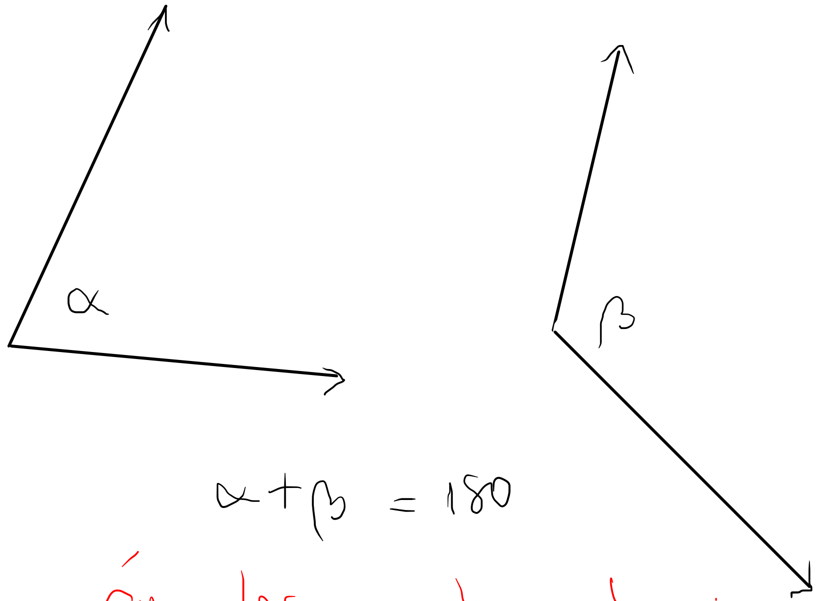
$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$$



ángulo		medida del ángulo
$\angle AOB$	$\longmapsto$	γ
$\angle AOC$	$\longmapsto$	α
$\angle COB$	$\longmapsto$	β

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Def: Dos ángulos se dicen suplementarios si la suma de sus medidas es 180°. El suplemento de un ángulo es el ángulo adyacente al ángulo dado obtenido por la prolongación de uno de sus lados

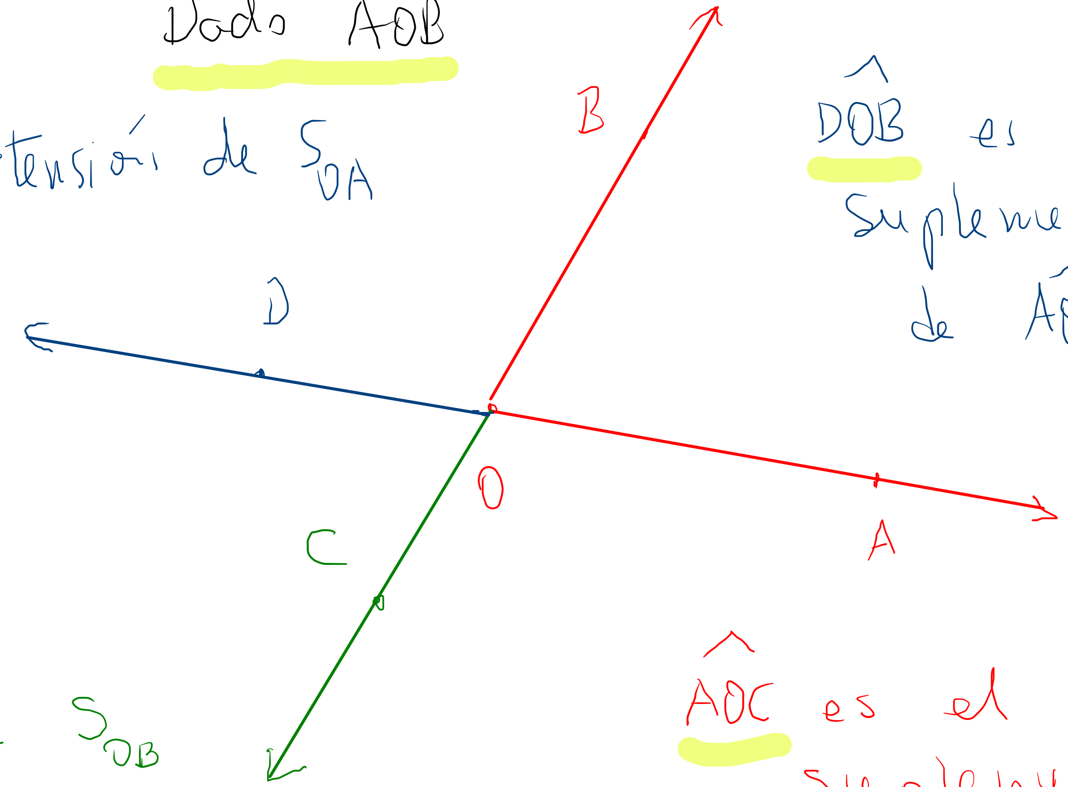


$\alpha + \beta = 180$

ángulos suplementarios

Dado $\widehat{AOB}$

extensión de S_{OA}

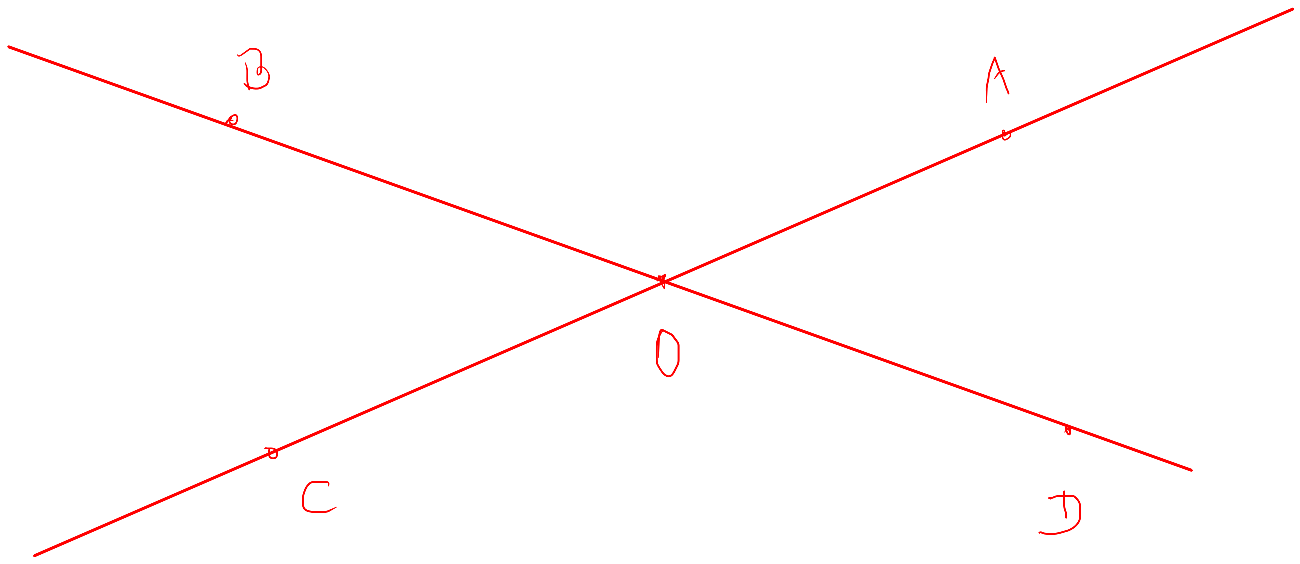


$\widehat{DOB}$ es el suplemento de $\widehat{AOB}$

extensión de S_{OB}
(recta BC = recta OB
$C \notin S_{OB}$)

$\widehat{AOC}$ es el suplemento de $\widehat{AOB}$

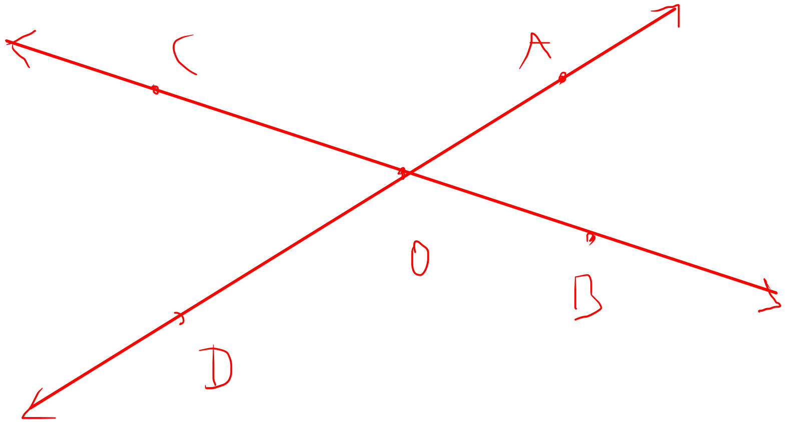
Def: Si dos rectas distintas se intersectan, se forman cuatro ángulos.



Decimos que $\widehat{AOB}$ y $\widehat{COD}$ son opuestos por el vértice,
$\widehat{AOD}$ y $\widehat{BOC}$ " " " " ".

Proposición: Ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida.

Prueba:



Sean $\widehat{AOB}$ y $\widehat{COD}$ opuestos por el vértice. Luego,

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 180,$$
$$\widehat{COD} + \widehat{AOC} = 180.$$

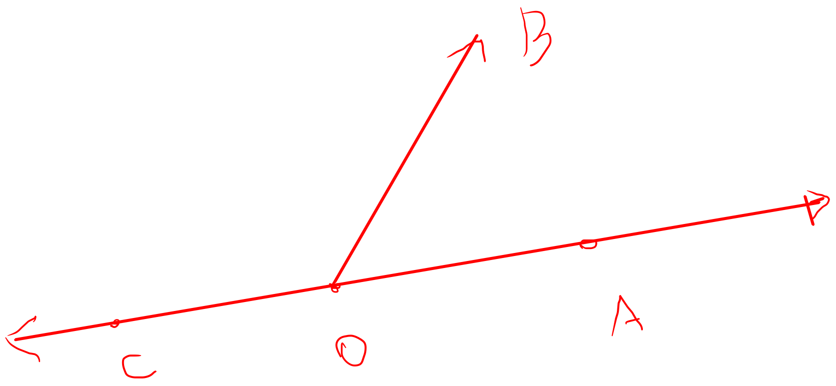
Por tanto,

$$\widehat{AOB} - \widehat{COD} = 0$$
$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}.$$

$\square$

Ejercicio. Mostrar que dado el ángulo $\hat{AOB}$, el suplemento de $\hat{AOB}$ es un ángulo suplementario a $\hat{AOB}$.

Sol:



Sea $\hat{BOC}$ suplemento de $\hat{AOB}$.

Supongamos que

$$\left.\begin{array}{l} S_{OA} \longmapsto 0 \\ S_{OC} \longmapsto 180 \end{array}\right\} \text{¿Por Qué?}$$

$$S_{OB} \longrightarrow b \in [0, 180]$$

Luego,

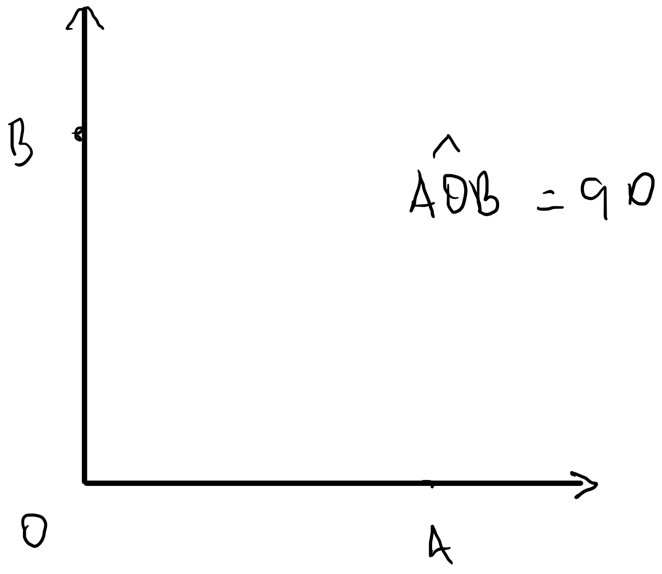
$$\hat{AOB} = |0 - b| = b$$

$$\hat{BOC} = |180 - b| = 180 - b$$

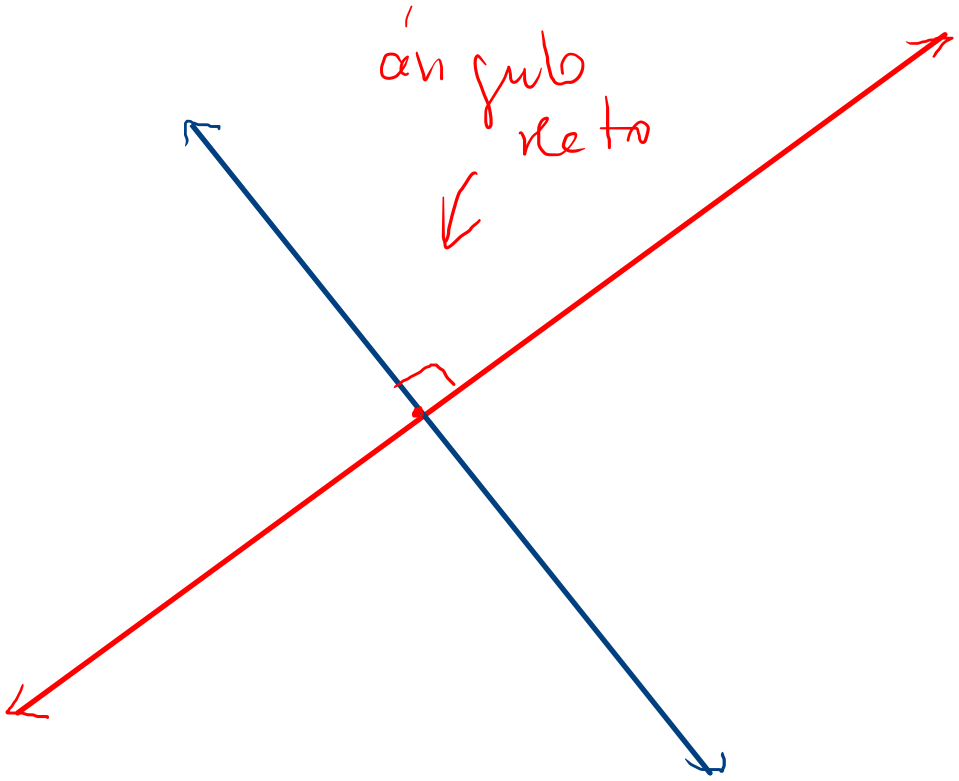
$$\hat{AOB} + \hat{BOC} = 180 \; //$$

Definición: Un ángulo cuya medida es 90° es llamado ángulo recto.

Si dos rectas se intersectan y uno de los cuatro ángulos formados es recto, decimos que las rectas son perpendiculares

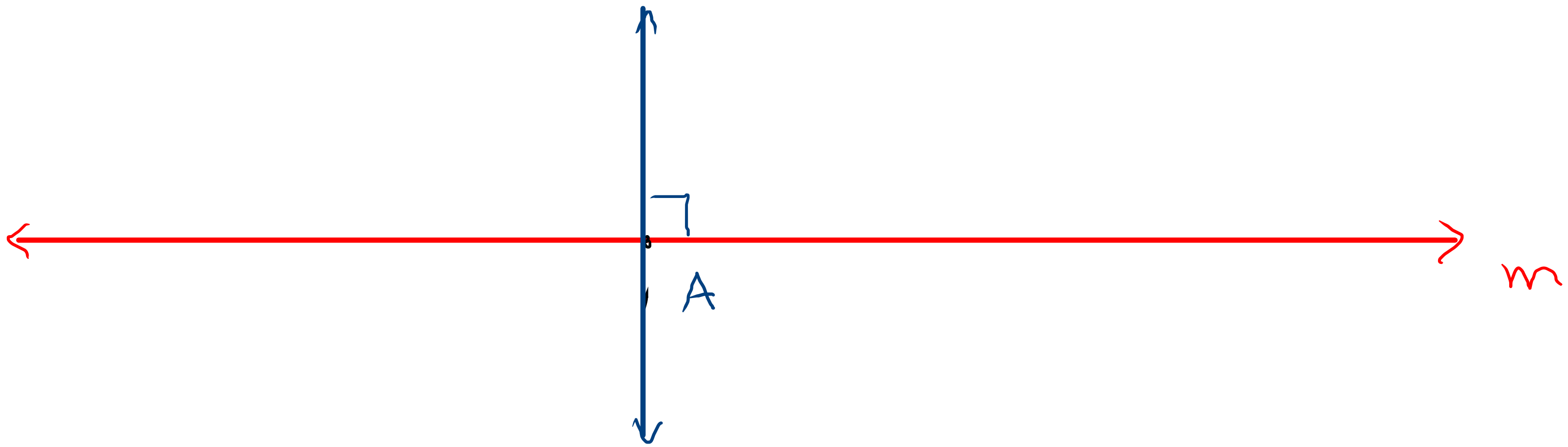


ángulo recto

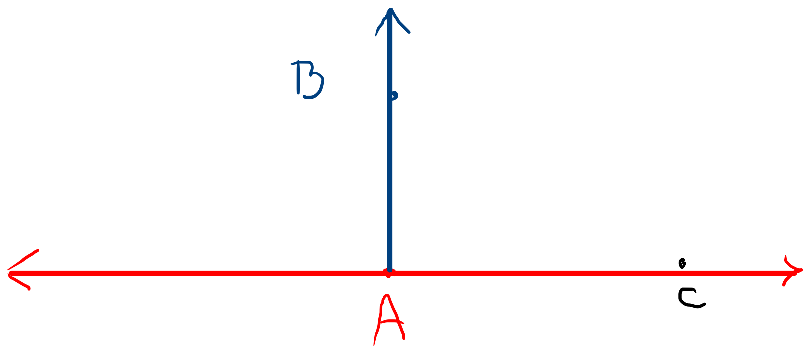


rectas perpendiculares

Teorema: Por cualquier punto de una recta pasa una única perpendicular a esa recta.



Dem: (Existencia) Sea m una recta y $A \in m$. Fijemos un semiplano que contiene a m. Por el axioma III_5, existe S_{AB} de coordenada 90. Si tomamos C en m,



entonces

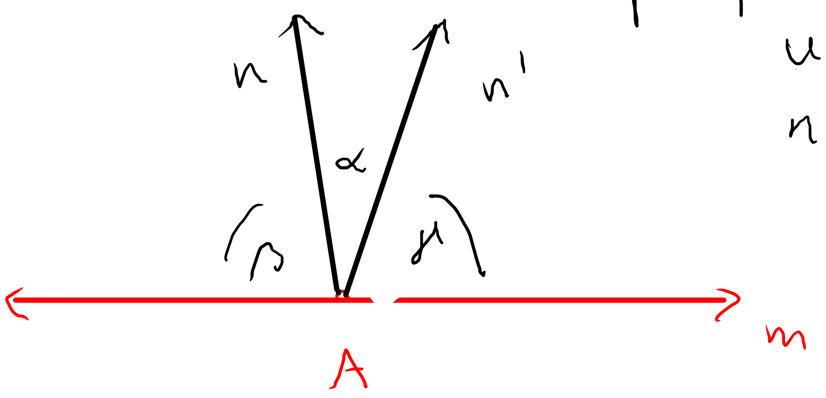
$$B\hat{A}C = |90 - 0| = 90,$$

y

$$B\hat{A}C = |180 - 90| = 90.$$

Por tanto, la recta AB es perpendicular a m.

(Unicidad) Sean n, n' rectas que pasan por A y son perpendiculares a m. Trabajando en un semiplano, sea α la medida entre n y n'. Sean β y γ como en la figura.



Como n, n' son perpendiculares a m $\Rightarrow$ $\gamma = 90$, $\beta = 90$.

Luego, por el axioma $\underline{\text{III}}_6$,

$$\gamma + \alpha + \beta = 180$$
$$180 + \alpha = 180$$
$$\alpha = 0,$$

de donde $n = n'$.