

Algunas aplicaciones de la integración

1.2. El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

TEOREMA 1.1 *Supongamos que f y g son integrables y que satisfacen $f \leq g$ en $[a, b]$. La región S entre sus gráficas es medible y su área $a(S)$ viene dada por la integral*

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

Demostración.- Demostración.- Supongamos primero que f y g son no negativas,. Sean F y G los siguientes conjuntos:

$$F = (x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x), \quad G = (x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x).$$

Esto es, G es el conjunto de ordenadas de g , y F el de f , menos la gráfica de f . La región S es la diferencia $G - F$. Según los teoremas 1.10 y 1.11, F y G son ambos medibles. Puesto que $F \subseteq G$ la diferencia $S = G - F$ es también medible, y se tiene

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

Consideremos ahora el caso general cuando $f \leq g$ en $[a, b]$, pero no son necesariamente no negativas. Este caso lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada encima del eje x . Esto es, elegimos un número positivo c suficientemente grande que asegure que $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$ para todo x en $[a, b]$. Por lo ya demostrado la nueva región T entre las gráficas de $f + c$ y $g + c$ es medible, y su área viene dada por la integral

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)] = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

Pero siendo T congruente a S , ésta es también medible y tenemos

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

Esto completa la demostración.

Nota 1.1 En los intervalos $[a, b]$ puede descomponerse en un número de subintervalos en cada uno de los cuales $f \leq g$ o $g \leq f$ la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

LEMA 1.1 (Área de un disco circular) Demostrar que $A(r) = r^2 A(1)$. Esto es, el área de un disco de radio r es igual al producto del área de un disco unidad (disco de radio 1) por r^2 .

Demostración.- Ya que $g(x) - f(x) = 2g(x)$, el teorema 2.1 nos da

$$A(r) = \int_{-r}^r g(x) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

En particular, cuando $r = 1$, se tiene la fórmula

$$A(1) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

Cambiando la escala en el eje x , y utilizando el teorema 1.19 con $k = 1/r$, se obtiene

$$A(r) = 2 \int_{-r}^r g(x) dx = 2r \int_{-1}^1 g(rx) dx = 2r \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - (rx)^2} dx = 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = r^2 A(1)$$

Esto demuestra que $A(r) = r^2 A(1)$, como se afirmó.

Definición 1.1 Se define el número π como el área de un disco unidad.

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

La formula que se acaba de demostrar establece que $A(r) = \pi r^2$

Generalizando el anterior lema se tiene

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x) dx = k \int_{ka}^{kb} f(x/k) dx = k^2 \int_a^b f(x) dx$$

TEOREMA 1.2 Para $a > 0$, $b > 0$ y n entero positivo, se tiene

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{b^{1+1/n} - a^{1+1/n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Demostración.- Sea $\int_0^a x^{\frac{1}{n}}$. El rectángulo de base a y altura $a^{\frac{1}{n}}$ consta de dos componentes: el conjunto de ordenadas de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ a a y el conjunto de ordenadas $g(y) = y^n$ a $a^{\frac{1}{n}}$. Por lo tanto,

$$a \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}} = \int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx + \int_0^{a^{\frac{1}{n}}} y^n dy \implies \int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{a^{\frac{1}{n}}} = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Análogamente se tiene

$$\int_0^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Luego notemos que

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}} dx = \int_0^b x^{\frac{1}{n}} dx - \int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx$$

por lo tanto

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}} - a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

1.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, calcular el área de la región S entre las gráficas de f y g para el intervalo $[a, b]$ que en cada caso se especifica. Hacer un dibujo de las dos gráficas y sombrear S .

1. $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = 0$, $a = -2$, $b = 2$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^2 [4 - x^2 - 0] dx = 4x \Big|_{-2}^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = 4(2 - (-2)) - \left(\frac{2^3 - (-2)^3}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

2. $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = 8 - 2x^2$, $a = -2$, $b = 2$.

Respuesta.-

$$\int_{-2}^2 [8 - 2x^2 - (4 - x^2)] dx = \int_{-2}^2 4 - x^2 dx = \frac{32}{3} \text{ (por ejercicio 1)}$$

3. $f(x) = x^3 + x^2$, $g(x) = x^3 + 1$, $a = -1$, $b = 1$.

Respuesta.-

$$\int_{-1}^1 x^3 + 1 - (x^3 + x^2) dx = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = x \Big|_{-1}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 2 - \frac{1 - (-1)}{3} = \frac{4}{3}$$

4. $f(x) = x - x^2$, $g(x) = -x$, $a = 0$, $b = 2$

Respuesta.-

$$\int_0^2 x - x^2 - (-x) dx = \int_0^2 2x - x^2 dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 2 \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{3}$$

5. $f(x) = x^{1/3}$, $g(x) = x^{1/2}$, $a = 0$, $b = 1$

Respuesta.-

$$\int_0^1 x^{1/3} - x^{1/2} dx = \left. \frac{x^{1+1/3}}{1+1/3} \right|_0^1 - \left. \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} \right|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

6. $f(x) = x^{1/3}$, $g(x) = x^{1/2}$, $a = 1$, $b = 2$.

Respuesta.-

$$\int_1^2 x^{1/2} - x^{1/3} dx = \left. \frac{x^{1/2+1}}{1+1/2} \right|_1^2 - \left. \frac{x^{1/3+1}}{1+1/3} \right|_1^2 = \frac{2^{1/2+1} - 1}{1+1/2} - \frac{2^{1/3+1}}{1+1/3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12}$$

7. $f(x) = x^{1/3}$, $g(x) = x^{1/2}$, $a = 0$, $b = 2$

Respuesta.- Sea

$$\int_0^1 |x^{1/3} - x^{1/2}| dx + \int_1^2 |x^{1/3} - x^{1/2}| dx$$

por los problemas 5 y 6 se tiene

$$\frac{1}{12} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{6}$$

8. $f(x) = x^{1/2}$, $g(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 2$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{1/2} - x^2 dx + \int_1^2 x^2 - x^{1/2} dx &= \left(\left. \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} \right|_0^1 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \right) + \left(\left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 - \left. \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} \right|_1^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{1+1/2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2^3 - 1}{3} - \frac{2^{1+1/2} - 1}{1+1/2} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2} - 2}{3} \\ &= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

9. $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, $a = -1$, $b = (1 + \sqrt{5})/2$

Respuesta.

$$\int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - (x+1) dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} (x+1) - x^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - x - 1 \, dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} x + 1 - x^2 \, dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} + \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{6} \\
&= \frac{5\sqrt{5} - 3}{4}
\end{aligned}$$

10. $f(x) = x(x^2 - 1)$, $g(x) = x$, $a = -1$, $b = \sqrt{2}$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^0 x(x^2 - 1) - x \, dx + \int_0^{\sqrt{2}} x - [x(x^2 - 1)] \, dx = \int_{-1}^0 x^3 - 2x \, dx + \int_0^{\sqrt{2}} -x^3 + 2x \, dx = \\
&= \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} + 1 + (-1 + 2) = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

11. $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 1$, $a = -1$, $b = 1$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x) - g(x) \, dx &= \int_{-1}^0 -x - x^2 + 1 \, dx + \int_0^1 x - x^2 + 1 \, dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

12. $f(x) = |x + 1|$, $g(x) = x^2 - 2x$, $a = 0$, $b = 2$

Respuesta.- Definamos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} -(x + 1) & \text{si } x \in [0, 1) \\ x + 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x) - g(x) dx &= \int_0^1 -(x-1) - x^2 + 2x dx + \int_1^2 x - 1 - x^2 + 2x dx \\
&= \int_0^1 -x^2 + x + 1 dx + \int_1^2 -x^2 + 3x - 1 dx \\
&= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 \\
&= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) + \left(-\frac{8}{3} + 6 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

13. $f(x) = 2|x|$, $g(x) = 1 - 3x^3$, $a = -\sqrt{3}/3$, $b = \frac{1}{3}$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-\sqrt{3}/3, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, 1/3] \end{cases}$$

de donde se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x) - f(x) dx &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x) dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x) dx \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} 1 - 3x^3 dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^0 -2x dx - \int_0^{\frac{1}{3}} 2x dx \\
&= \left(x - \frac{3}{4}x^4 \right) \Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} + x^2 \Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^0 - x^2 \Big|_0^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{108} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{12} \right) + \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{1}{9} \\
&= \frac{9\sqrt{3} - 1}{27}
\end{aligned}$$

14. $f(x) = |x| + |x - 1|$, $g(x) = 0$, $a = -1$, $b = 2$

Respuesta.- En este problema $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[-1, 2]$, por lo tanto

$$\int_{-1}^2 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^2 |x| + |x - 1| dx = \int_{-1}^2 |x| dx + \int_{-1}^2 |x - 1| dx$$

Definimos cada función por separado,

$$\begin{aligned}
|x| &= \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases} \\
|x - 1| &= \begin{cases} -(x - 1) & \text{si } x \in [-1, 1) \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^2 |x| dx + \int_{-1}^2 |x-1| dx &= \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^2 x dx + \int_{-1}^1 -(x-1) dx + \int_1^2 x-1 dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 + \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^1 + (x)\Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 + (-x)\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

- 15.** Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = cx^3$, siendo $c > 0$, se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1/c, 1/c^2)$. Determinar c de modo que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo $[0, 1/c]$ tengan área $\frac{2}{3}$.

Respuesta.- Tenemos que $f \geq g$ en el intervalo $[0, 1/c]$ de donde,

$$\int_0^{1/c} x^2 - cx^3 dx = \int_0^{1/c} x^2 dx - c \int_0^{1/c} x^3 dx = \frac{1}{12c^3}$$

luego $\frac{1}{12c^3} = \frac{2}{3}$ por lo tanto $c = \frac{1}{2}$.

- 16.** Sea $f(x) = x - x^2$, $g(x) = ax$. Determinar a para que la región situada por encima de la gráfica de g y por debajo de f tenga área $\frac{9}{2}$.

Respuesta.- Tomaremos los casos cuando $a = 0$, $a > 0$ y $a < 0$.

Veamos primero que si $g(x) \leq f(x)$ entonces

$$f(x) - g(x) \geq 0 \implies x - x^2 - ax \geq 0 \implies (1-a)x \geq x^2$$

de donde si $x = 0$ se tiene una igualdad. Luego si $x \neq 0$ entonces $x \leq (1-a)$. Ahora sea $a < 0$ por suposición se tendrá $1-a > 0$, que nos muestra que el intervalo estará dado por $[0, 1-a]$. Análogamente se tiene el intervalo $[1-a, 0]$ para $a > 0$.

- C 1.** Si $a = 0$, esto no es posible ya que si $a = 0$ entonces $g(x) = ax = 0$ y entonces el área arriba del gráfico de g y debajo del gráfico de f es igual a

$$\int_0^1 x - x^2 dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6} \neq \frac{9}{2}$$

- C 2.** Si $a < 0$, $f(x) \geq g(x)$ para $[0, 1-a]$, por lo que tenemos la zona, $a(S)$ de la región entre las dos gráficas dadas por

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-a} x - x^2 - ax dx &= (1-a) \int_0^{1-a} x dx - \int_0^{1-a} x^2 dx \\
&= (1-a) \left(\frac{(1-a)^2}{2}\right) - \frac{(1-a)^3}{3} \\
&= -\frac{(1-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

así nos queda que

$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \implies (1-a)^3 = -27 \implies a = a$$

C 3. Sea $a > 0$ y $f(x) \geq g(x)$ entonces $[1-a, 0]$ lo que

$$\begin{aligned} \int_{1-a}^0 x - x^2 - ax \, dx &= (1-a) \int_{1-a}^0 x \, dx - \int_{1-a}^0 x^2 \, dx \\ &= (1-a) \left(-\frac{(1-a)^2}{2} - \frac{(1-a)^3}{2} \right) \\ &= -\frac{(1-a)^3}{6} \end{aligned}$$

Así igualando por $\frac{9}{2}$ tenemos

$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \implies (1-a)^3 = -27 \implies a = 4$$

Por lo tanto los valores posibles para a son -2 y 4 .

17. Hemos definido π como el área de un disco circular unidad. En el ejemplo 3 de la Sección 2.3, se ha demostrado que $\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$. Hacer uso de las propiedades de la integral para calcular la siguiente en función de π .

(a) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \, dx.$

Respuesta.- Por el teorema 19 de dilatación, $\frac{1}{3} \int_{-3\frac{1}{3}}^{3\frac{1}{3}} \sqrt{9 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} \, dx$, de donde nos queda $9 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$, por lo tanto y en función de π se tiene $\frac{9}{2}\pi$.

(b) $\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} \, dx.$

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene

$$\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} \, dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

(c) $\int_{-2}^2 (x-3)\sqrt{4-x^2} \, dx.$

Respuesta.- Comencemos usando la linealidad respecto al integrando de donde tenemos $\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} \, dx -$

$3 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$. Luego por el problema 25 de la sección 1.26, $\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} \, dx = 0$, de donde

$$-6 \int_{-1}^1 \sqrt{4-4x^2} \, dx = -12 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = -6\pi$$

- 18.** Calcular las áreas de los dodecágonos regulares inscrito y circunscrito en un disco circular unidad y deducir del resultado las desigualdades $3 < \pi < 12(2 - \sqrt{3})$.

Respuesta.- Como estos son dodecágonos, el ángulo en el origen del círculo de cada sector triangular es $2\pi/12 = \pi/6$, y el ángulo de los triángulos rectángulos formado al dividir cada uno de estos sectores por la mitad es entonces $\pi/12$. Luego usamos el hecho de que,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Ahora, para el dodecágono circunscrito tenemos el área del triángulo rectángulo T con base 1 dado por,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 - \sqrt{3}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro, tenemos el área del dodecaedro circunscrito D_c dada por

$$a(D_c) = 24 \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) = 12(2 - \sqrt{3})$$

Por otro lado para el dodecágono inscrito, consideramos el triángulo rectángulo T con hipotenusa 1 en el diagrama. La longitud de uno de los catetos viene dada por $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ y la otra por $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Entonces el área del triángulo es,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Dado que hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro inscrito, D_i tenemos,

$$a(D_i) = 24 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

Por lo tanto, en vista de que el área del círculo unitario es, por definición π y se encuentra entre estos dos dodecaedros, tenemos,

$$3 < \pi < 12(2 - \sqrt{3})$$

- 19.** Sea C la circunferencia unidad, cuya ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 = 1$. Sea E el conjunto de puntos obtenido multiplicando la coordenada x de cada punto (x, y) de C por un factor constante $a > 0$ y la coordenada y por un factor constante $b > 0$. El conjunto E se denomina elipse. (Cuando $a = b$, la elipse es otra circunferencia.).

- a) Demostrar que cada punto (x, y) de E satisface la ecuación cartesiana $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Demostración.- Sea $E = \{(ax, by)/(x, y) \in C, a > 0, b > 0\}$. Si (x, y) es un punto en E entonces $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ es un punto en C , ya que todos los puntos de E se obtienen tomando un punto de C y multiplicando la coordenada x por a y la coordenada y por b . Por definición de C , se tiene

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

- b) Utilizar las propiedades de la integral para demostrar que la región limitada por esa elipse es medible y que su área es πab .

Demostración.- De la parte (a) sabemos que E es el conjunto de puntos (x, y) tales que $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Esto implica,

$$g(x) = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad o \quad f(x) = -b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Por lo tanto, el área de E es el área cerrada de $-a, a$.

Para demostrar que esta región es medible y tiene área πab , comenzamos por mencionar

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

y por lo tanto

$$\pi b = 2 \int_{-1}^1 b\sqrt{1 - x^2} \, dx$$

$$\pi ab = 2a \int_{-1}^1 b\sqrt{1 - x^2} \, dx$$

$$\pi ab = 2 \int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \, dx$$

$$\pi ab = \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x}{a}} - \left(-b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) \, dx$$

Por lo tanto, sabemos que la integral de $-a, a$ de $g(x) - f(x)$ existe y tiene valor πab , concluyendo que E es medible y $a(E) = \pi ab$.

- 20.** El ejercicio 19 es una generalización del ejemplo 3 de la sección 2.3. Establecer y demostrar una generalización correspondiente al ejemplo 4 de la sección 2.3.

Demostración.- Para generalizar esto, procedemos de la siguiente manera. Sea f una función integrable no negativa en $[a, b]$, y S sea el conjunto de ordenadas de f . Si aplicamos una transformación bajo la cual multiplicamos la coordenada x de cada punto (x, y) en la gráfica de f por una constante $k > 0$ y cada coordenada y por una constante $j > 0$, entonces obtenemos una nueva función g donde un punto (x, y) está en g si y sólo si $\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{j}\right)$ está en f . Luego,

$$\frac{y}{j} = f\left(\frac{x}{k}\right) \implies y = j \cdot f\left(\frac{x}{k}\right) \implies g(x) = j \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$$

Sea jkS y denotamos el conjunto ordenado de g .

$$a(S) = \int_a^b f(x) \, dx$$

entonces

$$\begin{aligned}
a(jsS) &= \int_{ka}^{kb} g(x) dx \\
&= j \cdot \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx \\
&= jk \cdot \int_a^b f(x) dx \\
&= \int_{ka}^{kb} jk \cdot a(S) dx
\end{aligned}$$

21. Con un razonamiento parecido al del ejemplo 5 de la sección 2.3 demostrar el teorema 2.2.

Demostración.- Esta demostración ya fue dada junto a la definición del teorema 2.2.

1.5. Las funciones trigonométricas

Propiedad .1

1. *Dominio de definición.* Las funciones seno y coseno están definidas en toda la recta real.
2. *Valores especiales.* Tenemos $\cos 0 = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos \pi = -1$.
3. *Coseno de una diferencia.* Para x e y cualesquiera, tenemos

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x.$$

4. *Desigualdades fundamentales.* Para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, tenemos

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

TEOREMA 1.3 Si dos funciones \sin y \cos satisfacen las propiedades 1 a 4, satisfacen también las siguientes:

(a) La identidad pitagórica, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo x .

Demostración.- La parte (a) se deduce inmediatamente si tomamos $x = y$ en

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$$

y usamos la relación $\cos 0 = 1$.

(b) Valores especiales, $\sin 0 = \cos \frac{1}{2}\pi = \sin \pi = 0$.

Demostración.- Resulta de (a) tomando $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \pi$ y utilizando la relación $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$.

(c) El coseno es función par y el seno es función impar. Esto es, para todo x tenemos

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \text{sen}(-x) = -\text{sen } x$$

Demostración.- Que el coseno es par resulta también de

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \text{sen } y \text{sen } x$$

haciendo $y = 0$. A continuación deducimos la fórmula

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \text{sen } x,$$

haciendo $y = \frac{1}{2}\pi$ en $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \text{sen } y \text{sen } x$. Partiendo de esto, encontramos que el seno es impar, puesto que

$$\text{sen}(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \text{sen } \pi \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen } x$$

(d) Co-relaciones. Para todo x , se tiene

$$\text{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos x, \quad \text{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -\text{sen } x$$

Demostración.- Para demostrarlo utilizaremos $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \text{sen } x$ reemplazando primero x por $\frac{1}{2}\pi + x$ y luego x por $-x$.

(e) Periodicidad. Para todo x se tiene $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Demostración.- El uso reiterado de (d) nos da entonces las relaciones de periodicidad (e).

(f) Fórmulas de adición. Para x e y cualesquiera, se tiene

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{sen } y$$

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{sen } y$$

Demostración.- Para demostrar basta reemplazar x por $-x$ en $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \text{sen } y \text{sen } x$ y tener en cuenta la paridad o imparidad. Luego utilizando la parte (d) y la fórmula de adición para el coseno se obtiene

$$\text{sen}(x + y) = -\cos\left(x + y + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen } x \text{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \text{sen } y + \text{sen } x \cos y$$

(g) Fórmulas de diferencias. Para todo los valores a y b , se tiene

$$\text{sen } a - \text{sen } b = 2 \text{sen } \frac{a - b}{2} = \cos \frac{a + b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \text{sen } \frac{a + b}{2} \text{sen } \frac{a - b}{2}.$$

Demostración.- Reemplazaremos primero y por $-y$ en la fórmula de adición para $\sin(x+y)$ obteniendo

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Restando ésta de la fórmula para $\sin(x+y)$ y haciendo lo mismo para función coseno, llegamos a

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \sin y \cos x,$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin y \sin x.$$

Haciendo $x = (a+b)/2$, $y = (a-b)/2$ encontramos que esas se convierten en las fórmulas de diferencia (g).

(h) Monotonía. En el intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi]$, el seno es estrictamente creciente y el coseno estrictamente decreciente.

Demostración.- La propiedad 4 se usa para demostrar (h). Las desigualdades $0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$ prueban que $\cos x$ y $\sin x$ son positivas si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Después de esto, si $0 < b < a < \frac{1}{2}\pi$, los números $(a+b)/2$ y $(a-b)/2$ están en el intervalo $(0, \frac{1}{2}\pi)$, y las fórmulas de diferencias (g) prueban que $\sin a > \sin b$ y $\cos a < \cos b$. Esto completa la demostración.

1.6. Fórmulas de integración para el seno y el coseno