1

Espacios vectoriales de dimensión finita

1.A Span e independencia lineal

1.2 Notación **Lista of vectores.**

Por lo general, escribiremos listas de vectores sin paréntesis alrededor.

Combinaciones lineales y generadores

1.3 Definición **Combinación lineal.**

Una **combinación lineal** de una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es un vector de la forma

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m,$$

donde $a_1, \ldots a_m \in \mathbf{F}$.

1.5 Definición **Span o generador.**

El conjunto de todas las combinaciones lineales de una lista de vectores $v_1, \ldots, v_m$ en V se denomina **generador** de $v_1, \ldots, v_m$, denotado por $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$. En otras palabras,

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m : a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}\}.$$

El span de la lista vacía $()$ es definida por $\{0\}$.

1.7 Teorema **Span es el subespacio más pequeño que lo contiene.**

El **span** de una lista de vectores en V es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los vectores de la lista.

Demostración.- Suponga que $v_1, \ldots, v_m$ es una lista de vectores en V. Primero demostraremos que $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es un subespacio de V. El 0 está en $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$, porque

$$0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m.$$

También, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es cerrado bajo la suma, ya que

$$(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) + (c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = (a_1 + c_1)v_1 + \cdots + (a_m + c_m)v_m.$$

Además, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, dado que

$$\lambda(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = \lambda a_1v_1 + \cdots + \lambda a_mv_m.$$

Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es un subespacio de V. Esto por 1.34.

Cada v_j es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$ (para mostrar esto, establezca $a_j = 1$ y que las otras a's en la definición de combinación lineal sean iguales a 0). Así, el $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ contiene a cada v_j. Por otra parte, debido a que los subespacios están cerrados bajo la multiplicación de escalares y la suma, cada subespacio de V que contiene a cada v_j contiene a $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los demás vectores $v_1, \ldots, v_m$. ■

1.8 Definición **Spans.**

Si $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es igual a V, decimos que $v_1, \ldots, v_m$ genera V.

1.10 Definición **Espacio vectorial de dimensión finita.**

Un espacio vectorial se llama finito-dimensional si alguna lista de vectores en él genera el espacio.

Es decir, si hay una lista de vectores en un espacio vectorial finito-dimensional que puede abarcar todo el espacio, entonces podemos decir que el espacio vectorial es finito-dimensional.

1.11 Definición **Polinomio, $\mathcal{P}$ (F)**

- Una función $p : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ es llamado polinomio con coeficientes en $\mathbf{F}$ si existe $a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_mz^m$$

  para todo $z \in \mathbf{F}$.
- $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbf{F}$.

Con las operaciones usuales de adición y multiplicación escalar, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$. En otras palabras, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un subespacio de $\mathbf{F}^{\mathbf{F}}$, el espacio vectorial de funciones de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{F}$.

Los coeficientes de un polinomio están determinados únicamente por el polinomio. Así, la siguiente definición define de manera única el grado de un polinomio.

1.12 Definición **Grado de un polinomio,** $deg\ p$.

- Un polinomio $p \in \mathcal{P}(F)$ se dice que tiene **grado** m si existen escalares $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ con $a_m \neq 0$ tal que
$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$
para todo $z \in \mathbf{F}$. Si p tiene grado m, escribimos $deg\ p = m$.
- El polinomio que es identicamente 0 se dice que tiene **grado** $-\infty$.

1.13 Definición $\mathcal{P}_m$ **(F)**

Para m un entero no negativo, $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficiente en $\mathbf{F}$ y grado no mayor a m.

Verifiquemos el siguiente ejemplo, tenga en cuenta que $\mathcal{P}_m(\mathbf{F}) = \text{span}\,(1, z, \ldots, z^m)$; aquí estamos abusando ligeramente de la notación al permitir que z^k denote una función.

1.15 Definición **Espacio vectorial de dimensión infinita.**

Un espacio vectorial se llama **infinitamente-dimensional** si no es de dimensión finita.

1.16 Ejemplo Demuestre que $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es infinitamente-dimensional.

Demostración.- Considere cualquier lista de elementos de $\mathcal{P}(\mathbf{F})$. Sea m el grado más alto de los polinomios en esta lista. Entonces, cada polinomio en el generador (span) de esta lista tiene grado máximo m. Por lo tanto, z^{m+1} no está en el span de nuestra lista. Así, ninguna lista genera $\mathcal{P}(\mathbf{F})$. Concluimos que $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es de dimensión infinita. ■

Independencia lineal

Suponga $v_1, \ldots, v_m \in V$ y $v \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Por la definición de span, existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que
$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m.$$
Considere la cuestión de si la elección de escalares en la ecuación anterior es única. Sea $c_1, \ldots, c_m$ otro conjunto de escalares tal que
$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m.$$
Sustrayendo estas últimas ecuaciones, se tiene
$$0 = (a_1 - c_1)v_1 + \cdots + (a_m - c_m)v_m.$$
Así, tenemos que escribir 0 como una combinación lineal de $(v_1, \ldots, v_m)$. Si la única forma de hacer esto es la forma obvia (usando 0 para todos los escalares), entonces cada $a_j - c_j$ es igual a 0, lo que significa que cada a_j es igual a c_j (y por lo tanto la elección de los escalares fue realmente única). Esta situación es tan importante que le damos un nombre especial, independencia lineal, que ahora definiremos.

1.17 Definición **Linealmente independiente.**

- Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V se llama linealmente independiente si la única posibilidad de que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$ sea igual a 0 es $a_1 = \cdots = a_m = 0$.
- La lista vacía $()$ también se declara linealmente independiente.

El razonamiento anterior muestra que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente si y sólo si cada vector en el $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ tiene sólo una representación lineal en forma de combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$.

1.19 Definición **Linealmente dependiente.**

- Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V se llama linealmente dependiente si no es linealmente independiente.
- En otras palabras, una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es linealmente dependiente si existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$.

1.21 Lema Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es una lista linealmente dependiente en V. Entonces, existen $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que se cumple lo siguente:

(a) $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$;

(b) Si el j-ésimo término se elimina de $v_1, \ldots, v_m$, el generador de la lista restante es igual a $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Demostración.- Ya que la lista $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente dependiente, existe números $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que
$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0.$$
Sea j el elemento más grande de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $a_j \neq 0$. Entonces,
$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \cdots - \frac{a_{j-1}}{a_j}v_{j-1} \qquad (1).$$
Lo que prueba (a).
Para probar (b), suponga $u \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Entonces, existe números $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{F}$ tal que
$$u = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m.$$
En la ecuación de arriba, podemos reemplazar v_j con el lado derecho de (1). Es decir,
$$u = c_1v_1 + \cdots + a_jv_j + \cdots + c_mv_m.$$
lo que muestra que u está en el span de la lista obtenida al eliminar el j-ésimo término de $v_1, \ldots, v_m$. Así (b) se cumple. ■

Eligir $j = 1$ en el lema de dependencia lineal anterior, significa que $v_1 = 0$, porque si $j = 1$ entonces la condición (a) anterior se interpreta como que $v_1 \in \operatorname{span}()$. Recuerde que $\operatorname{span}() = \{0\}$. Tenga en cuenta también que la demostración del inciso (b) debe modificarse de manera obvia si $v_i = 0$ y $j = 1$.

Ahora llegamos a un resultado importante. Dice que ninguna lista linealmente independiente en V es más extensa que una lista generadora en V.

1.23 Teorema La longitud de una lista linealmente independiente es $\leq$ a la longitud de la lista generadora.

En un espacio vectorial de dimensión finita, la longitud de cada lista linealmente independiente de vectores es menor o igual que la longitud de cada lista generadora de vectores (longitud=n de vectores).

Demostración.- Suponga $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente en $\mathbf{V}$. Suponga también que $w_1, \ldots, w_n$ generan V. Necesitamos probar que $m \leq n$. Lo hacemos a través del proceso de pasos que se describe a continuación; tenga en cuenta que en cada paso agregamos una de las $u's$ y eliminamos una de las $w's$.

Paso 1. Sea B la lista $w_1, \ldots, w_n$, que genera V. Por lo tanto, añadir cualquier vector en V a esta lista produce una lista linealmente dependiente (porque el nuevo vector añadido se puede escribir como una combinación lineal de los otros vectores, $u_1 = \frac{a_1}{c_1}w_1 + \cdots + \frac{a_n}{c_1})$. En particular, la lista

$$u_1, w_1, \ldots, w_n$$

es linealmente dependiente. Así, por el lema (2.21), podemos eliminar un de las w para que la nueva lista B (de longitud n) que consta de u_1 y las $w's$ restantes generen V.

Paso j. La lista B (de longitud n) del paso $j-1$ genera V. Así, añadir cualquier vector a esta lista produce una lista linealmente dependiente. En particular, la lista de longitud $(n+1)$ obtenida al unir u_j a B, colocándola justo después de $u_1, \ldots, u_{j-1}$, es linealmente dependiente. Por el lema de dependencia lineal (2.21), uno de los vectores de esta lista está en el generador de los anteriores, y ya que $u_1, \ldots, u_j$ es linealmente independientes, este vector es uno de los $w's$, no uno de los $u's$. Podemos eliminar esa w para la nueva lista B (de longitud n) que consta de $u_1, \ldots, u_j$ y las $w's$ restantes generan V.

Después del paso m, hemos agregado todas las u y el proceso se detiene. En cada paso, a medida que agregamos un u a B, el lema de dependencia lineal implica que hay algo de w que eliminar. Por lo tanto, hay al menos tantas w como u. ■

Aclaremos esto con dos ejemplos.

1.24 Ejemplo Demuestre que la lista $(1,2,3), (4,5,8), (9,6,7), (-3,2,8)$ no es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$.

Demostración.- La lista $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ genera $\mathbf{R}^3$. Por lo tanto, ninguna lista de longitud superior a 3 es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$. ■

1.25 Ejemplo Demostrar que la lista $(1,2,3,-5), (4,5,8,3), (9,6,7,-1)$ no genera $\mathbf{R}^4$.

Demostración.- La lista $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$ es linealmente independiente en $\mathbf{R}^4$. Por lo tanto, ninguna lista de longitud inferior a 4 genera $\mathbf{R}^4$. ■

1.26 Teorema Subespacio de dimensión finita.

Todo subespacio de un vector de dimensión finita es de dimensión finita.

Demostración.- Suponga que V es de dimensión finita y U es un subespacio de V. Necesitamos demostrar que U es de dimensión finita. Hacemos esto a través de la siguiente construcción de pasos.

Paso 1. Si $u = \{0\}$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \{0\}$, entonces elegimos un vector no nulo $v_1 \in U$

Paso 2. Si $U = \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, entonces elegimos un vector $v_j \in U$ tal que

$$v_j \in \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1}).$$

Después de cada paso, mientras continúa el proceso, hemos construido una lista de vectores tal que ningún vector en esta lista está en el generador de los vectores anteriores. Así, después de cada paso hemos construido una lista linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Esta lista linealmente independiente no puede ser más grande que cualquier lista de expansión de V (por 2,23). Por lo tanto, el proceso eventualmente termina, lo que significa que U es de dimensión finita. ■

1.A Ejercicios

1. Suponga v_1, v_2, v_3, v_4 se extiende por V. Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

también se extiende por V.

Demostración.- Sea $v \in V$, entonces existe a_1, a_2, a_3, a_4 tal que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4.$$

Que implica,

$$\begin{array}{rcl} v & = & a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 - a_1 v_2 + a_1 v_2 - a_1 v_3 + a_1 v_3 - a_2 v_3 + a_2 v_3 - a_1 v_4 + a_1 v_4 \\ & - & a_2 v_4 + a_2 v_4 - a_3 v_4 + a_3 v_4 \end{array}$$

De donde,

$$v = a_1(v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(v_3 - v_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)v_4.$$

Por lo tanto, cualquier vector en V puede ser expresado por una combinación lineal de

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4.$$

Así, esta lista se extiende por V.

2. Verifique las afirmaciones del Ejemplo 2.18.

(a) Una lista v de un vector $v \in V$ es linealmente independiente si y sólo si $v \neq 0$.

Demostración.- Demostremos que si v es linealmente independiente, entonces $v \neq 0$. Supongamos que $v = 0$. Sea un escalar $a \neq 0$. De donde, $av = 0$ incluso cuando $a \neq 0$. Esto contradice la definición de independencia lineal. Por lo tanto, v debe ser linealmente dependiente. Esto es, $v = 0$ implica que v es un vector linealmente dependiente. Por lo que, si v es linealmente independiente, entonces v es un vector distinto de cero.
Por otro lado, debemos demostrar que $v \neq 0$ implica que v es linealmente independiente. Sea un escalar a tal que $av = 0$. Si $a \neq 0$, entonces av no puede ser 0. Por eso a debe ser 0. Por lo tanto, $v \neq 0$ y $av = 0$ implica que $a = 0$. Así, v es linealmente independiente.

(b) Una lista de dos vectores en V es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

Demostración.- El enunciado siguiente es equivalente. Dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar de otro. Supongamos que v_1, v_2 son dos vectores linealmente dependientes. Por lo que, existe escalares a_1, a_2 tal que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

y no ambos escalares a_1, a_2 son cero. Sea $a_1 \neq 0$, entonces la ecuación se podría reescribir como

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$$

el cual prueba que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Por otro lado, si $a_2 \neq 0$, entonces $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$ de aquí podemos afirmar que v_2 es un múltiplo escalar de v_1.
Ahora supongamos que que uno de los v_1 o v_2 es un múltiplo escalar del otro. Podemos decir, sin perdida de generalidad, que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Esto es, $v_1 = cv_2$ para algún escalar c. Por lo tanto, la ecuación $v_1 - cv_2 = 0$ se cumple, ya que el multiplicador de v_1 es distintos de cero. Esto es precisamente lo que requerimos para la definición de dependencia lineal. Así, v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

(c) $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ es linealmente independiente en $\mathbf{F}^4$.

Demostración.- Utilizaremos la definición de independencia lineal. Sean a, b, c escalares en $\mathbf{F}$ tal que

$$a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) = \mathbf{0} = (0,0,0,0)$$

Entonces,

$$(a,b,c,0) = (0,0,0,0)$$

Lo que implica,

$$a, b, c = 0.$$

Esto demuestra que los tres vectores son linealmente independientes.

(d) La lista $1, z, \ldots, z^m$ es linealmente independiente en $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ para cada entero no negativo m.

Demostración.- Demostremos por contradicción. Supongamos que $1, z, \ldots, z^m$ es linealmente dependiente. Por lo que, existe un escalar $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tal que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m = 0.$$

Sea k el indice más grande tal que $a_k \neq 0$. Esto significa que los escalares desde a_{k+1} hasta a_m son cero. Entonces, se deduce que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k = 0.$$

Reescribiendo se tiene

$$z_k = -\frac{a_0}{a_k} - \frac{a_1}{a_k} z - \cdots - \frac{a_{k-1}}{a_k} z^{k-1}.$$

Aquí, expresamos z^k como un polinomio de grado $k-1$ el cual es absurdo. Por lo que $1, z, z^2, \ldots, z^m$ es un conjunto linealmente independiente.

3. Encuentre un número t tal que
$$(3,1,4),(2,-3,5),(5,9,t)$$
no es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$.

Respuesta.- Sea,
$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)+c(5,9,t)=0.$$
Si $c=0$. Entonces,
$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)=0.$$
Lo que implica
$$\begin{array}{rcl} 3a+2b & = & 0 \\ a-3b & = & 0 \\ 4a+5b & = & 0 \end{array}$$
De donde, resolviendo para a y b se tiene
$$a=0 \quad \text{y} \quad b=0.$$
Pero, no queremos que a,b,c sean cero. Así que debemos forzar que $c \neq 0$, como sigue:
$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)+c(5,9,t)=0 \quad \Rightarrow \quad (5,9,t)=-\frac{a}{c}(3,1,4)-\frac{b}{c}(2,-3,5).$$
Es decir, estamos expresando $(5,9,t)$ como una combinación lineal de los vectores restantes. Así, sea $-\dfrac{a}{c}=x$, $-\dfrac{b}{c}=y$ por lo que,
$$(5,9,t)=x(3,1,4)+y(2,-3,5).$$
Así, tenemos que
$$\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 5 \\ x-3y & = & 9 \\ 4x+5y & = & t \end{array}$$
Resolviendo para x e y se tiene
$$x=3 \quad \text{y} \quad y=-2.$$
Por lo tanto,
$$t=2.$$

4. Verifique la afirmación en el segundo punto del Ejemplo 2.20. Es decir, la lista $(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,c)$ es linealmente dependientes en $\mathbf{F}^3$ si y sólo si $c=8$, como debes verificar.

Respuesta.- Sea los escalares a,b,c no todos cero tal que
$$r(2,3,1)+s(1,-1,2)+t(7,3,c)=(0,0,0)$$
De donde, podemos escribir como ecuaciones lineales
$$\begin{array}{rcl} 2r+s+7t & = & 0 \\ 3r-s+3t & = & 0 \\ r+2s+ct & = & 0 \end{array}$$
De la ecuación 1 y 2 se tiene
$$5r+10t=0 \quad \Rightarrow \quad r=-2t.$$
Luego sustrayendo la ecuación 1 y 3,
$$2r+(c-4)t=0.$$

Así, tenemos que
$$2(-2t)+(c-4)t=0 \quad \Rightarrow \quad (c-8)t=0$$
Por lo que,
$$r=0 \quad \text{o} \quad c-8=0.$$
Si $t=0$. Entonces, $r=-2t=0$, y $s=0$. Contradiciendo el hecho de que no todos los escalares son cero. Por lo tanto, los tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si $c=8$.

5. (a) Demuestre que si pensamos en **C** como un espacio vectorial sobre **R**, entonces la lista $(1+i,1-i)$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a,b\in\mathbf{R}$, tal que
$$a(1+i)+b(1-i)=0 \quad \Rightarrow \quad (a+b)+(a-b)i=0.$$
Entonces,
$$a+b=0 \quad \text{y} \quad a-b=0.$$
Igualando estas dos ecuaciones se tiene
$$\begin{aligned} a+b=a-b &\Rightarrow 2b=0\\ &\Rightarrow b=0.\end{aligned}$$
Reemplazando en $a+b=0$,
$$a=0.$$
Por lo tanto, $(1+i,1-i)$ es linealmente independiente sobre **R**.

(b) Demuestre que si pensamos en **C** como un espacio vectorial sobre **C**, entonces la lista $(1+i,1-i)$ es linealmente dependiente.

Demostración.- Sean los escalares $i,1\in\mathbf{C}$, tal que
$$i(1+i)+1(1-i)=i+i^2+1-i=0 \quad \Rightarrow \quad (i-1)+(1-i)=(i-1)-(i-1)=0.$$
Donde concluimos que $(1+i,1-i)$ es linealmente dependiente sobre **C**.

6. Supongamos que v_1,v_2,v_3,v_4 es linealmente independiente en V. Demostrar que la lista
$$v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4$$
es también linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a,b,c,d\in F$ tal que
$$a(v_1-v_2)+b(v_2-v_3)+c(v_3-v_4)+d(v_4)=0.$$
De donde,
$$av_1-av_2+bv_2-bv_3+cv_3-cv_4+dv_4=0.$$
Por lo que,
$$av_1+(b-a)v_2+(c-b)v_3+(d-c)v_4=0$$

Ya que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente, entonces

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b-a &= 0 \\ c-b &= 0 \\ d-c &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para a, b, c, d se tiene

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

Esto implica que

$$0(v_1 - v_2) + 0(v_2 - v_3) + 0(v_3 - v_4) + 0(v_4) = 0.$$

Por lo tanto, la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

es linealmente independiente.

7. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V, Entonces

$$5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \ldots, v_m$$

es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i\mathbf{F}$ tal que

$$a_1(5v_1 - 4v_2) + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

De donde,

$$5a_1v_1 + (a_2 - 4a_1)v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

Sabemos que la independencia lineal obliga a todos los escalares de v_i a ser cero. En particular , $5a_1 = 0$ entonces $a_1 = 0$ y $a_2 - 4a_1 = 0$, implica $a_2 = 0$. Por lo tanto,

$$0 \cdot v_1 + (0-0)v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

Dado que todos a_i son cero, entonces $5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \ldots, v_m$ es linealmente independiente.

8. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V y $\gamma \in \mathbf{F}$ con $\gamma \neq 0$, Entonces $\gamma v_1, \gamma v_2, \ldots, \gamma v_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \ldots + a_m\gamma v_m = 0.$$

De donde,

$$\gamma\left(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m\right) = 0.$$

Lo que,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = 0.$$

Ya que, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente. Entonces, todos los $a_i's$ deben ser cero. Por lo tanto, $a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \ldots + a_m\gamma v_m = 0.$ es linealmente independiente.

9. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son listas linealmente independientes de vectores en V, entonces $v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a_i, b_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1 v_1 + a_1 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0 \quad \text{y} \quad b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_m v_m = 0.$$

Entonces,

$$a_1 v_1 + a_1 v_2 + \ldots + a_m v_m + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_m v_m = 0.$$

De donde,

$$(a_1 - b_1)(v_1 + w_1) + (a_2 - b_2)(v_2 + w_2) + \ldots + (a_m - b_m)(v_m + w_m) = 0.$$

Supongamos $c_i = a_i + b_i \in F$. Luego,

$$c_1(v_1 + w_1) + c_2(v_2 + w_2) + \ldots + c_m(v_m + w_m) = 0.$$

Dado que $a_i = b_i = 0$, ya que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son linealmente independientes. Concluimos que, $v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

10. Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$. Demostrar que si $v_1 + w, \ldots, v_m + w$ es linealmente dependiente, entonces $w \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Demostración.- Por definición de dependencia lineal. Existen $a_1, \ldots a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que

$$a_1(v_1 + w) + a_2(v_2 + w) + \ldots + a_m(v_m + w) = 0.$$

De donde,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) w. \qquad (1)$$

Dado que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente, entonces existen escalares $t_i, \ldots, t_m \in \mathbf{F}$, $\forall t_i = 0$, de modo que

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_m v_m = 0$$

Es único. Así pues notemos, para $a_i \neq 0$ que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m \neq 0$$

En consecuencia por (1)

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) w \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$w = -\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m) \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

11. Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$. Demostrar que $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente independiente si y sólo si

$$w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

Demostración.- Supongamos que $w \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Entonces,

$$w = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m.$$

De donde,
$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m - w = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + (-1)w = 0.$$
Por lo tanto, $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente dependiente.

Por otro lado: $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente independiente, entonces existe $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbf{F}$, $\forall a_i = 0$, tal que
$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + bw = 0.$$
Dado que $b = 0$, no se puede escribir w como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$. Es decir,
$$w = \frac{1}{0}(a_1v_1 + \ldots + a_mv_m),$$
lo que es imposible. De esta manera
$$w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

12. Explique por qué no existe una lista de seis polinomios que sea linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Notemos que $1, z, z^2, z^3, z^4$ genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Pero por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], la longitud de la lista linealmente independiente es menor o igual que la longitud de la lista que genera. Es decir, cualquier lista linealmente independiente no tiene más de 5 polinomios.

13. Explique por qué ninguna lista de cuatro polinomios genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si m vectores genera V y si tenemos un conjunto de n vectores linealmente independientes, entonces $n \leq m$. Es decir, el número de vectores en un conjunto linealmente independiente de V, no puede ser mayor que el número de vectores en un conjunto generador de V.
Por ejemplo, si cuatro polinomios podrían generar $P_4(\mathbf{F})$. Entonces, por la definición de arriba, cualquier conjunto de polinomios linealmente independientes en $P_4(\mathbf{F})$ podría tener cómo máximo cuatro vectores. Sin embargo, el conjunto $1, z, z^2, z^3, z^4$ tiene cinco polinomio linealmente independientes en $P_4(\mathbf{F})$. Por lo tanto, es imposible que cualquier conjunto de cuatro polinomios genere $P_4(\mathbf{F})$.

14. Demuestre que V es de dimensión infinita, si y sólo si existe una secuencia $v_1, v_2, \ldots,$ de vectores en V tal que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada entero positivo m.

Demostración.- Supongamos que V es de dimensión infinita. Queremos producir una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots,$ tal que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada m. Necesitamos mostrar que para cualquier $k \in \mathbf{N}$ y un conjunto de vectores linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots$ podemos definir un vector v_{k+1} tal que $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ es linealmente independiente. Si podemos probar esto, entonces significará que podemos continuar sumando vectores indefinidamente a conjuntos linealmente independientes de modo que los conjuntos resultantes también sean linealmente independientes. Esto nos dará una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots$, cuyo subconjunto finito es linealmente independiente.

Sea $v_1, v_2, \ldots, v_k$ un conjunto linealmente independiente en V. Ya que V es de dimensión finita, no puede generado por un conjunto finito de vectores. Por lo tanto, $V \neq \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Sea v_{k+1} tal que $v_{k+1} \notin \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Entonces, por el ejercicio 11 [Axler, Linear Algebra, que nos dice: Si $v:1,\ldots,v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$, el conjunto $v_1,\ldots,v_m,w$ es linealmente independiente si y sólo si $w \neq \text{span}(v_1,\ldots,v_m)$]. El conjunto $v_1,v_2,\ldots,v_{k+1}$ es linealmente independiente.

Por otro lado, sea $v_1,v_2,\ldots,v_n$ un conjunto generador de V. Entonces, por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], cualquier conjunto de vectores linealmente independiente en V pueden tener por lo más n vectores. De esto modo, cualquier conjunto que tenga $n+1$ o más vectores es linealmente dependiente. Así, si V es de dimensión finita, entonces no podemos tener una secuencia de vectores $v_1,v_2,\ldots$ tal que, para cada m, el subconjunto $v_1,v_2,\ldots,v_m$ es linealmente independiente. Tomando su recíproca, podemos decir que si existe una secuencia de vectores $v_1,v_2,\ldots$ tal que el conjunto $v_1,v_2,\ldots,v_m$ es linealmente independiente para cada m. Entonces, V es de dimensión infinita. Lo que completa de demostración.

15. Demostrar que $\mathbf{F}^\infty$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Sea un elemento $e_m \in \mathbf{F}^\infty$ como el elemento que tiene la coordenada m-ésima igual a 1 los demás elementos iguala a 0. Es decir,

$$(0,1,0,\ldots,0)$$

Ahora, si varía m sobre el conjunto de los números naturales, entonces tenemos una secuencia $e_1,e_2,\ldots$ en $\mathbf{F}^\infty$, si y sólo si podemos probar que $e_1,e_2,\ldots,e_m$ es linealmente independiente para cada m. Con este fin, sea

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_me_m = 0$$

De donde,

$$(a-1,a_2,\ldots,a_m,0,0,\ldots,0) = (0,0,\ldots,0)$$

Inmediatamente implica que $a_i's = 0$ y por lo tanto, $e_i's$ son linealmente independiente.

16. Demostrar que el espacio vectorial real para todos las funciones de valor real continuas en el intervalo $[0,1]$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Por el ejercicio 14 (Axler, Linear Algebra, 2A), tenemos que encontrar una secuencia linealmente independiente de funciones continuas en $[0,1]$. Observe que los monomiales $1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots$ son funciones continuas en $[0,1]$. Ahora, debemos demostrar que $1,x,x^2,\ldots,x^m$ es linealmente independiente en cada m. Para ello, sea $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m = 0$, donde 0 es el cero polinomial. Lo que significa que $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m = 0$ toma el valor cero en todo el intervalo $[0,1]$. Esto implica que cada punto en $[0,1]$ es una raíz del polinomio. Pero, ya que cada polinomio no trivial tiene como máximo un número finito de raíces, esto es imposible a menos que todos los a_i's sean cero. Lo que muestra que $1,x,x^2,\ldots,x^m$ es linealmente independiente para cada $m \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, el conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ es de dimensión infinita.

17. Suponga $p_0,p_1,\ldots,p_m$ son polinomios en $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ tal que $p_j(2) = 0$ para cada j. Demostrar que $p_0,p_1,\ldots,p_m$ no es linealmente independiente en $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Demostración.- Supondremos que $p_0,p_1,\ldots.p_m$ es linealmente independiente. Demostraremos que esto implica que $p_0,p_1,\ldots,p_m$ genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$. Y que esto a su vez conducirá a una contradicción al construir explícitamente un polinomio que no está en este generador. Notemos que la lista $1,z,\ldots,z^{m+1}$ genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ y tiene longitud $m+1$. Por lo tanto, cada lista linealmente independiente debe tener una longitud $m+1$ o menos (2.23). Si $\text{span}(p_0,p_1,\ldots,p_m) \neq \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$, existe algún

$p \notin \operatorname{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m)$, de donde la lista $p_0, p_1, \ldots, p_m, p$ es linealmente independiente de longitud $m+2$, lo que es una contradicción. Por lo que $\operatorname{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m) = \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.
Ahora definamos el polinomio $q = 1$. Entonces $q \in \operatorname{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m)$, de donde existe $a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$q = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_m P_m,$$

lo que implica

$$q(2) = a_0 p_0(2) + a_1 p_1(2) + \cdots + a_m P_m(2).$$

Pero esto es absurdo, ya que $1 = 0$. Por lo tanto, $p_0, p_1, \ldots, p_m$ no puede ser linealmente independiente.

1.B Bases

1.27 Definición **Base.**

Una base de V es una lista de vectores en V que es linealmente independiente y genera V.

1.28 Teorema **Criterio de base.**

Una lista $v_1, \ldots, v_n$ de vectores en V es una base de V si y sólo si cada $v \in V$ puede escribirse unívocamente de la forma

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$.

Demostración.- Primero suponga que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V. Ya que, $v_1, \ldots, v_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

se cumple. Para mostrar que esta representación es única, sean $c_1, \ldots, c_n$ escalares tales que, también tenemos

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Sustrayendo la primera ecuación de la segunda, tenemos

$$0 = (a_1 - c_1) v_1 + \cdots + (a_n - c_n) v_n.$$

Esto implica que cada $a_j - c_j$ es igual a cero. (Ya que, $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente). Por lo tanto $a_1 = c_1, \ldots, a_n = c_n$. Así, tenemos la unicidad deseada.

Por otro lado, suponga que cada $v \in V$ puede ser escrita de manera única como la forma $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Claramente esto implica que $v_1, \ldots, v_n$ genera V. Para demostrar que $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente, suponga que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ son tales que

$$0 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

La unicidad de la representación de $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ (tomando $v = 0$) implica que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Así, $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente y por tanto es una base de V. ■

Una lista generadora en un espacio vectorial puede no ser una base, ya que no es linealmente independiente. Nuestro próximo resultado dice que dada cualquier lista generadora, algunos (posiblemente ninguno) de los vectores en ella pueden descartarse para que la lista restante sea linealmente independiente y aún genere el espacio vectorial.

1.31 Teorema **La lista generadora contiene un base.**

Cada lista generadora en un espacio vectorial se puede reducir a una base del espacio vectorial.

Demostración.- Suponga que $v_1, \ldots, v_n$ genera V. Queremos eliminar algunos de los vectores de $v_1, \ldots, v_n$ para que los vectores restantes formen una base de V. Sea $B = v_1, \ldots, v_n$, de donde realizamos un bucle con las siguientes condiciones:

Paso 1. Si $v_1 = 0$, eliminamos v_1 de B. Si $v_1 \neq 0$ entonces no cambiamos B.

Paso J. Si v_j esta en $\text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, eliminamos v_j de B. Si v_j no está en $\text{span}(v_1, \ldots, v_j)$, entonces no cambiamos B (lema 2.21).

Paramos el proceso después del paso n, obteniendo una lista B. Esta lista B genera V, ya que nuestra lista original generó V y hemos descartado solo los vectores que ya estaban en el generador de los vectores anteriores. El proceso garantiza que ningún vector de B está en el generador de los anteriores. Así pues, B es linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Por tanto, B es una base de V. ■

Nuestro siguiente resultado, un corolario fácil del resultado anterior, nos dice que todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

1.32 Corolario **Base del espacio vectorial de dimensión finita.**

Cada espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

Demostración.- Por definición, un espacio vectorial de dimensión finita tiene una lista generadora. El resultado anterior nos dice que cada lista generadora puede ser reducida a una base. ■

Nuestro siguiente resultado es en cierto sentido un derivado de 2.31, que decía que toda puede reducirse a una base. Ahora mostramos que dada cualquier lista linealmente independiente, podemos unir algunos vectores adicionales (esto incluye la posibilidad de no unir ningún vector adicional) de modo que la lista ampliada siga siendo linealmente independiente pero que también genere el espacio.

1.33 Teorema **Una lista linealmente independiente se extiende a una base.**

Cada lista linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial se puede extender a una base del espacio vectorial.

Demostración.- Suponga $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente en un espacio vectorial V de dimensión finita. Sea $w_1, \ldots, w_n$ una base de V. Por lo que la lista

$$u_1, \ldots, u_m, \; w_1, \ldots . w_n$$

genera V. Aplicando el procedimiento de la prueba de 2.31 para reducir esta lista a una base de V se obtiene una base formada por los vectores $u_1, \ldots, u_m$ (ninguna de las $u's$ se elimina en este procedimiento porque $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente) y algunos de los w'. ■

Como aplicación del resultado anterior, mostramos ahora que cada subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita puede emparejarse con otro subespacio para formar una suma directa de todo el espacio.

1.34 Teorema **Cada subespacio de V forma parte de una suma directa igual a V.**

Suponga V es de dimensión finita y U es un subespacio de V. Entonces, existe un subespacio W de V tal que $U \oplus W = V$.

Demostración.- Ya que V es de dimensión finita, también lo es U por 2.26. Por lo que, existe una base $u_1, \ldots, u_m$ de U esto por 2.32. Por su puesto $u_1, \ldots, u_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V. Por lo tanto, esta lista puede extenderse a una base $u_1, \ldots, u_n$ de V esto por 2.33. Sea $W = \text{span}(w_1, \ldots, w_n)$. Para probar que $V = U \oplus W$, por 1.45, solo necesitamos demostrar que

$$V = U + W \quad \text{y} \quad U \cap W = \{0\}.$$

Para probar la primera ecuación, suponga $v \in V$. Entonces, ya que la lista $u_1, \ldots, u_m$, $w_1, \ldots, w_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n.$$

En otras palabras, tenemos $v = u + w$, donde $u \in U$ y $w \in W$ fueron definidas anteriormente. Así, $v \in U + W$, completando la prueba de $V = W + W$.
Para demostrar que $U \cap W = \{0\}$, suponga $v \in U \cap W$. Entonces, existe escalares $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m = b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n.$$

Por lo tanto,

$$a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m - b_1 w_1 - \cdots - b_n w_n = 0.$$

Esto, ya que $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ son linealmente independientes, esto implica que $a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_n = 0$. Así, $v = 0$, de donde $U \cap W = \{0\}$. ■

1.B Ejercicios

1. Halle todos los espacios vectoriales que tienen exactamente una base.

Respuesta.- Afirmamos que solo el espacio vectorial trivial tiene exactamente una base. Para ello demostraremos que para espacios vectorial de dimensión finita e infinita se tiene más de una base. Consideremos un espacio vectorial de dimensión finita. Sea V un espacio vectorial no trivial con base $v_1, \ldots, v_n$. Decimos que para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista $cv_1, \ldots, cv_n$ es también una base. Es decir, la lista es aún linealmente independiente, y es aún generador de V. Luego, sea $u \in V$ ya que $v_1, \ldots, v_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c}(cv_1) + \cdots + \frac{a_n}{c}(cv_n)$$

y así $cv_1, \ldots, cv_n$ genera también V. Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión finita.
Por otro lado. Sea W un espacio vectorial de dimensión infinita con base $w_1, w_2, \ldots$. Para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista $cw_1, cw_2, \ldots$ es también una base. Claramente la lista es linealmente independiente, y también genera V. Luego, sea $u \in V$, ya que $w_1, w_2, \ldots$ genera W, existe $a_1, a_2, \ldots \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c} c w_1 + \frac{a_2}{c} c w_2 + \cdots$$

y así $cw_1, cw_2, \ldots$ genera también W. Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión infinita.

2. Verifique todas las afirmaciones del ejemplo 2.28.

(a) La lista $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$, ..., $(0,\ldots,0,1)$ es una base de $\mathbf{F}^n$, llamado la base estándar de $\mathbf{F}^n$.

Respuesta.- Primero demostraremos que la lista genera $\mathbf{F}^n$. Sea, los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $\mathbf{F}$. Podemos escribir

$$x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + x_n(0,\ldots,0,1) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Donde, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector cualquier en $\mathbf{F}^n$. Esta expresión es una combinación lineal de los n vectores. Por definición, esta lista genera $\mathbf{F}^n$.
Ahora, demostraremos que la lista es linealmente independiente. Para ello, aplicaremos la definición. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + a_n(0,\ldots,0,1) = 0.$$

Esto implica que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0,0,\ldots,0).$$

Por lo que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Así, la lista es linealmente independiente.

(b) La lista $(1,2), (2,5)$ es una base de $\mathbf{F}^2$.

Respuesta.- Sea $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$. Buscaremos escalares c_1, c_2 tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 = (x_1, x_2).$$

que implica,

$$c_1(1,2) + c_2(3,5) = (x_1, x_2) \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 3c_2, 2c_1 + 5c_2) = (x_1, x_2)$$

De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= x_1 \\ 2c_1 + 5c_2 &= x_2 \end{aligned}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$c_2 = 2x_1 - x_2$$

Luego, reemplazándola a la primera ecuación, se tiene

$$c_1 = -5x_1 + 3x_2.$$

Por lo tanto, para cada vector $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$ podemos encontrar c_1, c_2 en función de x_1 y x_2 tal que $c_1v_1 + c_2v_2$ es una combinación lineal el cual genera $\mathbf{F}^2$.
Después, sólo nos haría falta reemplazar en

$$c_2 = 2x_1 - x_2 \quad \text{y} \quad c_1 = -5x_1 + 3x_2$$

$(x_1, x_1) = (0,0)$. De donde,

$$c_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0.$$

Esto implica que $(1,2)$ y $(2,5)$ es linealmente independiente Por lo que concluimos que la lista dada es una base de $\mathbf{F}^2$.

(c) La lista $(1,2,-4)$, $(7,-5,6)$ es linealmente independiente en $\mathbf{F}^3$ pero no es una base en $\mathbf{F}^3$, ya que no genera $\mathbf{F}^3$.

Respuesta.- Sean los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1(1,2,-4) + c_2(7,-5,6) = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (0,0,0)$$

Por lo que, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 7c_2 & = & 0 \\ 2c_1 - 5c_2 & = & 0 \\ -4c_1 + 6c_2 & = & 0 \end{array}$$

Multiplicando la segunda ecuación y sumando la tercera tenemos

$$c_2 = 0$$

Luego, sustituyendo en la primera ecuación,

$$c_1 = 0$$

Esto implica que los vectores dados son linealmente independientes.
Ahora, demostraremos que la lista no genera $\mathbf{F}^3$, con un contraejemplo. Supongamos que $(1,2,-4), (7,-5,6)$ puede generar $(1,0,0)$ el cual está en $\mathbf{F}^3$. Sea los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$, entonces

$$c_1(1,2,-4) + c_2(7,-5,6) = (1,0,0) \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (1,0,0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 7c_2 & = & 1 \\ 2c_1 - 5c_2 & = & 0 \\ -4c_1 + 6c_2 & = & 0 \end{array}$$

De las ecuaciones 2 y 3 se tiene que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Reemplazando en la primera ecuación,

$$0 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1.$$

Lo que es un absurdo, por lo tanto $(1,2,-4)$, $(7,-5,6)$ no genera $\mathbf{F}^3$.

(d) La lista $(1,2), (3,5), (4,13)$ genera $\mathbf{F}^2$ pero no es una base de $\mathbf{F}^2$, ya que no es linealmente independiente.

Respuesta.- Demostremos que la lista no es linealmente independiente. Sea $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1,2) + a_2(3,5) + a_3(4,13) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_1 + 3a_2 + 4a_3, 2a_1 + 5a_2 + 13a_3) = (0,0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & 3a_2 & + & 4a_3 & = & 0 \\ 2a_1 & + & 5a_2 & + & 13a_3 & = & 0 \end{array}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$a_2 = 5a_3.$$

Remplazando en la primera ecuación,
$$a_1 = -19a_3.$$
Sea, $a_3 = 1$, entonces
$$a_1 = -19 \quad \text{y} \quad a_2 = 5.$$
Por lo tanto, $(1,2),(3,5),(4,13)$ no es linealmente independiente.

Ahora, demostraremos que la lista $(1,2),(3,5),(4,13)$ genera $\mathbf{F}^2$. Sean $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$ tal que
$$a_1(1,2) + a_2(3,5) + a_3(4,13) = 0$$
Sabiendo que esta lista es linealmente dependiente, podemos reescribimos la ecuación de modo que $(1,2),(3,5)$ genera $(4,13)$:
$$(4,13) = \frac{a_1}{a_3}(1,2) - \frac{a_2}{a_3}(3,5)$$
Por el lema 2.21 (Axler, Linear Algebra), vemos que el generador de $(1,2),(3,5)$ es igual al generador de $(1,2),(3,5),(4,13)$. Sólo nos faltaría demostrar que $(1,2),(3,5)$ genera $\mathbf{F}^2$. Para ello, sea $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$, de modo que
$$a_1(1,2) + a_2(3,5) = (x_1, x_2)$$
Entonces,
$$\begin{array}{rcl} a_1 + 3a_2 &=& x_1 \\ 2a_1 + 5a_2 &=& x_2 \end{array}$$
Multiplicando la segunda ecuación por dos y restando la primera, tenemos
$$a_1 = 2x_1 - x_2.$$
Remplazando en la primera ecuación,
$$a_2 = -(5x_1 + 3x_2).$$
Por lo tanto, podemos hallar a_1 y a_2 en términos de x_1 y x_2 tal que $a_1(1,2) + a_2(3,5) = (x_1, x_2)$ es una combinación lineal que genera $\mathbf{F}^2$.

Siendo más prácticos podemos usar el teorema 2.23. Para saber que $(1,2),(3,5),(4,13)$ no es linealmente independiente pero genera $\mathbf{F}^2$.

(e) La lista $(1,1,0),(0,0,1)$ es una base de $\left\{(x,x,y) \in \mathbf{F}^3 \;:\; x,y \in \mathbf{F}\right\}$.

Respuesta.- Está claro que la lista es linealmente independiente. Ya que, la única forma de que se cumpla
$$c_1(1,1,0) + c_2(0,0,1) = 0$$
es que c_1, c_2 sean igual a cero.
Ahora demostraremos que la lista dada genera $\left\{(x,x,y) \in \mathbf{F}^3 \;:\; x,y \in \mathbf{F}\right\}$. Sea $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$ tal que
$$c_1(1,1,0) + c_2(0,0,1) = (x,x,y).$$
De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones como sigue:
$$\begin{array}{rcl} c_1 + 0 &=& x \\ c_1 + 0 &=& x \\ 0 + c_2 &=& y \end{array}$$
Por lo que, cualquier $\mathbf{F}^3$ puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores $(1,1,0),(0,0,1)$ y por lo tanto generan $\mathbf{F}^3$.

(f) La lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es una base de

$$\left\{(x,y,z)\in \mathbf{F}^3 \ : \ x+y+z=0\right\}.$$

Respuesta.- Si $x+y+z=0$ para $x,y,z\in\mathbf{F}$, entonces podemos escribir

$$x=-y-z.$$

Por lo que,

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) & = & (-y-z,y-z)\\ & = & (-y,y-0)+(-z,0z)\\ & = & -y(1,-1,0)-z(1,0,-1). \end{array}$$

Debido a que y,z son escalares, implica que podemos expresar cualquier $(x,y,z)\in\mathbf{F}^3$ como una combinación lineal de los vectores $(1,-1,0),(1,0,-1)$.

Es fácil ver que que la lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es linealmente independiente. Dado que, si $c_1,c_2\in\mathbf{F}^n$, entonces

$$\begin{array}{rcl} c_1(1,-1,0)+c_2(1,0,-1) & = & 0\\ (c_1+c_2,-c_1,-c_2) & = & 0. \end{array}$$

De donde,

$$c_1=c_2=0.$$

Así, la lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es linealmente independiente. Por lo tanto,$(1,-1,0),(1,0,-1)$ es una base de $\mathbf{F}^3$

(g) La lista $1,z,\ldots,z^m$ es una base de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Respuesta.- El elemento general de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ es una combinación lineal de $1,z,z^2,\ldots,z^m$ de la forma:

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m$$

donde $a_i\in\mathbf{F}$ para $1\leq i\leq m$. Lo que demuestra que genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Para demostrar que la lista es linealmente independiente, suponemos que la combinación lineal de estos elementos es igual a cero; es decir,

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m=0.$$

Donde el **0** es un polinomio. Esto implica que el polinomio del lado izquierdo toma valor cero para todo los valore de z. Esto es posible sólo cuando todos los $a_i's$ son cero, ya que cualquier polinomio no trivial tiene un número finito de raíces. Por lo tanto la lista $1,z,z^2,\ldots,z^m$ es base de $\mathcal{F}_m(\mathbf{F})$.

3. a). Sea U el subespacio de $\mathbf{R}^5$ definido por

$$U=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{F}^5 \ : \ x_1=3x_2 \text{ y } x_3=7x_4\right\}.$$

Encuentre una base de U.

Respuesta.- Dado que se tiene la condición $x_1=3x_2$ y $x_3=7x_4$. Podemos escribir el vector general, como sigue

$$\begin{array}{rcl} (3x_2,x_2,7x_4,x_4,x_5) & = & (3x_2,x_2,0,0,0)+(0,0,7x_4,x_4,0)+(0,0,0,0,x_5)\\ & = & x_2(3,1,0,0,0)+x_4(0,0,7,1,0)+x_5(0,0,0,0,1). \end{array}$$

Por lo que $(3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1)$ forma una base de U. Podemos demostrar fácilmente que estos vectores generar U, ya que U puede expresarse como una combinación lineal de estos tres vectores. Ahora, demostremos que son linealmente independiente. Sea $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$c_1(3,1,0,0,0) + c_2(0,0,7,1,0) + c_3(0,0,0,0,1) = 0$$

De donde,

$$(3c_1, c_2, 7c_2, c_2, c_3) = (0,0,0,0,0).$$

Igualando cada componente, tenemos que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Así se demuestra que estos tres vectores son linealmente independientes. Por lo tanto, $(3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1)$ es una base de U.

b). Extienda la base de la parte (a) a una base de $\mathbf{R}^5$.

Respuesta.- Sean $v_1 = (3,1,0,0,0)$, $v_2 = (0,0,7,1,0)$, $v_3 = c_3(0,0,0,0,1)$. Por el ejercicio 11 del apartado 2A (Axler, Linear Algebra), se sabe que si tenemos $v_4 \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ entonces v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente independientes. Nos preguntamos, ¿que clase de vectores no pueden ser generados por v_1, v_2, v_3?. Observemos que las primeras dos coordenadas de v_2 y v_3 son cero. Por lo que no pueden aportar a otras dos primeras coordenadas de cualquier combinación lineal que consideremos. De hecho, estas coordenadas deben provenir de v_1.
Si $av_1 + bv_2 + cv_3$ es una combinación lineal, entonces las dos primeras coordenadas son $3a$ y a. Luego, si escogemos un vector donde sus primeras dos coordenada no son de la forma $3a$ y a para cualquier escalar a, entonces no será generados por v_1, v_2, v_3. Por ejemplo podemos escoger el vector

$$v_4 = (0,1,0,0,0)$$

Ahora, encontremos un v_5 tal que $v_5 \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Observemos que las coordenadas cuatro y cinco de los vectores $v_1.v_2, v_3$ y v_4 son cero. Por lo que ambas coordenadas deben provenir de v_2.
Si $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$ es una combinación lineal, entonces las coordenadas cuatro y cinco son de la forma $7b$ y b, para cualquier escalar b. Por ejemplo podemos escoger el vector,

$$v_5 = (0,0,0,1,0).$$

Por último, demostremos que esta lista es base de $\mathbf{F}^5$. Por el teorema 2.23 sabemos que, si m vectores generan un espacio vectorial, entonces cualquier lista linealmente independiente en V no puede tener más de m vectores. Así, queda demostrada la independencia lineal de v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

Por otro lado, demostremos que esta lista genera $\mathbf{F}^5$. Nuestro objetivo será hallar una combinación lineal que incluya a v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 para $a, b, c, d, e \in \mathbf{F}$ tales que

$$a(1,0,0,0,0) + b(0,0,1,0,0) + c(0,0,0,0,1) + d(0,1,0,0,0) + e(0,0,0,1,0) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Para ello, notemos que ya se tiene $v_3 = (0,0,0,0,5)$, $v_4 = (0,1,0,0,0)$ y $v_5 = (0,0,0,1,0)$. Ahora, generemos los restantes $(1,0,0,0,0)$ y $(0,0,1,0,0)$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(v_1 - v_4) &= (1,0,0,0,0) \\ \frac{1}{7}(v_2 - v_5) &= (0,0,1,0,0). \end{aligned}$$

Dado que se incluye a v_1 y v_2 en combinación lineal con v_4 y v_5, entonces

$$\begin{array}{rcl} a & = & x_1 \\ b & = & x_2 \\ c & = & x_3 \\ d & = & x_4 \\ e & = & x_5. \end{array}$$

Encontrando los respectivos escalares a, b, c, d, e en términos de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Decimos que la lista v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 genera $\mathbf{F}^5$. Por lo tanto es una base de $\mathbf{F}^5$.

c). Encuentre un subespacio W de $\mathbf{F}^5$ tal que $\mathbf{R}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.- Por 1.45 (Axler, Lineal Algebra), demostraremos que $\mathbf{R}^5 = U + W$ y que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in \mathbf{R}^5$, ya que v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 es una base de $\mathbf{F}^5$, por el criterio de base (2.28, Axler, Lineal algebra) podemos escribir

$$\begin{array}{rcl} v & = & c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + c_5v_5 \\ & = & (c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) + (c_4v_4 + c_5v_5). \end{array}$$

Luego, sean $u = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ y $w = c_4v_4 + c_5v_5$. Entonces, $u \in U$ y $w \in W$. Está claro que u y w generan U y W respectivamente. De este modo, cada vector en $\mathbf{R}^5$ puede ser expresado como una suma de vectores en U y W. Esto prueba que $\mathbf{R}^5 = U + W$.

Ahora demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U \cap W$, ya que $v \in U$ entonces para algunos escalares $a, b, c \in \mathbf{F}$ se tiene

$$v = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Lo mismo pasa con $v \in W$, para algunos escalares $d, e \in \mathbf{F}$; es decir,

$$v = dv_4 + ev_5.$$

Dado que queremos encontrar $U \cap W$, se tiene

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = dv_4 + ev_5 \quad \Rightarrow \quad av_1 + bv_2 + cv_3 - dv_4 - ev_5 = 0$$

Por el hecho de que U y W son linealmente independiente, lo que implica $a = b = c = d = e = 0$, entonces $v = 0$, así $U \cap W = \{0\}$. Concluimos que

$$\mathbf{R}^5 = U \oplus W.$$

4. (a) Sea U el subespacio de $\mathbf{C}^5$ definida por

$$U = \Big\{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbf{C}^5 \ : \ 6z_1 = z_2 \ \text{ y } \ z_3 + 2z_4 + 3z_5 = 0\Big\}.$$

Encuentre una base de U.

Respuesta.- De las condiciones dadas, podemos escribir el conjunto U como

$$U = \{(6z_1, z_2, -2z_4 - 3z_5, z_4, z_5) \ : \ z_2, z_4, z_5 \in \mathbf{C}\}$$

Sea $z \in U$, que implica

$$\begin{array}{rcl} z & = & (6z_1, z_2, -2z_4 - 3z_5, z_4, z_5) \\ & = & z_2(6, 1, 0, 0, 0) + z_4(0, 0, -2, 1, 0) + z_5(0, 0, -3, 0, 1). \end{array}$$

Entonces, $z_2(6,1,0,0,0)$, $z_4(0,0,-2,1,0)$ y $z_5(0,0,-3,0,1)$ genera U. Ahora veamos si esta lista es linealmente independiente. Sean $a,b,c \in \mathbf{F}$ tal que

$$(6a, a, -2b-3c, b, c) = 0.$$

De donde,

$$\begin{array}{rcl} 6a & = & 0 \\ a & = & 0 \\ -2b-3c & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0. \end{array}$$

Por lo tanto, la lista es linealmente independiente. Así, concluimos que U es generado por $z_2(6,1,0,0,0)$, $z_4(0,0,-2,1,0)$ y $z_5(0,0,-3,0,1)$.

(b) Extienda la base en la parte (a) para una base de $\mathbf{C}^5$.

Respuesta.-

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathbf{C}^5$ tal que $\mathbf{C}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.-

5. Demostrar o refutar: existe una base p_0, p_1, p_2, p_3 de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$ tal que ninguno de los polinomios p_0, p_1, p_2, p_3 tiene grado 2.

Demostración.- Consideremos la lista,

$$\begin{array}{rcl} p_0 & = & 1, \\ p_1 & = & X, \\ p_2 & = & X^3 + X^2, \\ p_3 & = & X^3. \end{array}$$

El cual no tiene ningún polinomio de grado 2. Demostraremos que esta lista es una base. Primero veamos que $\operatorname{span}(p_0, P_1, p_2, p_3) = \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Sea $q \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Entonces existe $a_0, a_1, a_2, a_3 \in F$ alguno cero, tal que

$$q = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3.$$

Notemos que

$$\begin{array}{rcl} a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2(p_2 - p_3) + a_3 p_3 & = & a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 - a_2 p_3 \\ & = & a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + (a_3 - a_2) p_3 \\ & = & a_0 + a_1 X + a_2 \left(X^3 + X^2\right) + (a_3 - a_2) X^3 \\ & = & a_0 + a_1 X + a_2 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X^3 - a_2 X^3 \\ & = & a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \\ & = & p. \end{array}$$

Por lo que p_0, p_1, p_2, p_3 genera $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Ahora, demostraremos que la lista es linealmente independiente. Sean $b_0, \ldots, b_3 \in \mathbf{F}$ tales que

$$b_0 p_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = 0.$$

Se sigue que,

$$\begin{aligned} b_0 + b_1X + b_2(X^2 + X^3) + b_3X^3 &= 0 \\ b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_2X^3 + b_3X^3 &= 0 \\ b_0 + b_1X + b_2X^2 + (b_2 + b_3)X^3 &= 0. \end{aligned}$$

donde **0** es el cero polinomial. La lista $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ es linealmente independiente, ya que es una base en $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Por lo que

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ b_1 &= 0, \\ b_2 &= 0, \\ b_2 + b_3 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una base p_0, p_1, p_2, p_3 de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$ tal que ninguno de los polinomios tiene grado 2.

6. Suponga v_1, v_2, v_3, v_4 es una base de V. Demostrar que

$$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$$

es también una base de V.

Demostración.- Demostremos la independencia lineal. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{F}$ tales que

$$\begin{aligned} a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_2 + v_3) + a_3(v_3 + v_4) + a_4v_4 &= 0 \\ a_1v_1 + a_1v_2 + a_2v_2 + a_2v_3 + a_3v_3 + a_3v_4 + a_4v_4 &= 0 \\ a_1v_1 + (a_1 + a_2)v_2 + (a_2 + a_3)v_3 + (a_3 + a_4)v_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ya que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente, entonces $a_1 = a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = 0$. Por lo que $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$ es linealmente independiente.

Luego, demostremos que $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$ es una base de V. Por definición de generador (span), podemos expresar v_1, v_2, v_3, v_4 como combinaciones lineales de $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4 + v_4$, de la siguente manera

$$\begin{aligned} v_3 &= (v_3 + v_4) - v_4 \\ v_2 &= (v_2 + v_3) - (v_3 + v_4) + v_4 \\ v_1 &= (v_1 + v_2) - (v_2 + v_3) + (v_3 + v_4) - v_4 \end{aligned}$$

Por tanto, todos los vectores que pueden expresarnse como combinaciones lineales de v_1, v_2, v_3, v_4 también se pueden expresar linealmente por $v_1, +v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$; es decir, $v_1, +v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$ genera V.

7. Demostrar o dar un contraejemplo: Si v_1, v_2, v_3, v_4 es una base de V y U es un subespacio de V tal que $v_1, v_2 \in U$ y $v_3 \notin U$ y $v_4 \notin U$, entonces v_1, v_2 es una base de U.

Demostración.- Sean,

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0) \\ v_3 &= (0, 0, 1, 0) \\ v_4 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Luego, definimos

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x_3 = x_4 \right\}$$

Notemos que $v_1, v_2 \in U$ y $v_3, v_4 \notin U$. Pero ninguna combinación lineal de v_1, v_2 produce $(0,0,1,1)$. Entonces, v_1, v_2 no genera U. Por lo tanto no puede formar una base.

8. Suponga que U y W son subespacio de V tal que $V = U \oplus W$. Suponga también que $u_1, \ldots, u_m$ es una base de U y $w_1, \ldots, w_n$ es una base de W. Demostrar que

$$u_1, \ldots, u_m, \ w_1, \ldots, w_n$$

es una base de V.

Demostración.- Demostremos la independencia lineal. Sean $a_i \in \mathbf{F}$ y $c_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m + c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n = 0$$

Que implica,

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m = -(c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n).$$

Suponga que,

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m = -(c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n).$$

De donde, $v \in U$ y $v \in W$; esto es $v \in U \cap W$. Dado que $V = U \oplus W$, debemos tener $U \cap W = \{0\}$. Sea $v = 0$, por lo que

$$\begin{array}{rcl} a_1u_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mu_m & = & 0 \\ \\ -(c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n) & = & 0. \end{array}$$

Ya que, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ es base de U y W, respectivamente. Entonces, ambos son linealmente independiente. Es decir, $a_i = c_i = 0$. Por lo tanto, $u_1, \ldots, u_m, \ w_1, \ldots, w_n$ es linealmente independiente.

Ahora, demostremos que $u_1, \ldots, u_m, \ w_1, \ldots, w_n$ genera V. Sea $v \in V$, ya que $V = U \oplus W$ podemos escribir $v = u + w$ para algún $u \in U$ y $w \in W$. Luego, por el hecho de que $u_1, u_2, \ldots, u_m$ es base de U y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ es base de W, entonces

$$\begin{array}{rcl} u & = & a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m \\ \\ w & = & c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n, \end{array}$$

respectivamente. Por lo tanto, $v = u + w = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m + c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n$. Así, $u_1, u_2, \ldots, u_m, w_1, w_2, \ldots, w_n$ genera V. Concluimos que $u_1, u_2, \ldots, u_m, w_1, w_2, \ldots, w_n$ es base de V.

1.C Dimensión

1.35 Teorema La longitud de la base no depende de la base.

Dos bases cualquier de un espacio vectorial de dimensión finita tiene la misma longitud.

Demostración.- Suponga V es de dimensión finita. Sean B_1 y B_2 dos bases de V. Entonces B_1 es linealmente independiente en V y B_2 genera V. Así la longitud de la lista de B_1 es como máximo la longitud de la lista de B_2 (por 2.23). Intercambiando los roles de B_1 y B_2. tenemos también que la longitud de la lista de B_2 es como máximo la longitud de la lista de B_1. Por lo tanto la longitud de B_1 es igual a la longitud de B_2, como se desea. ■

Ahora que sabemos que dos bases cualesquiera de un espacio vectorial de dimensión finita tienen la misma longitud, podemos definir formalmente la dimensión de tales espacios.

1.36 Definición **Dimensión, dim V.**

- La **dimensión** de un espacio vectorial de dimensión finita es la longitud de cualquier base del espacio vectorial.
- La dimensión de V (si V es de dimensión finita) se denota por $\dim V$.

1.38 Teorema **Dimensión de un subespacio.**

Si V es de dimensión finita y U es un subespacio de V, entonces $\dim U \leq \dim V$.

Demostración.- Suponga V de dimensión finita y U es un subespacio de V. Piense en una base de U como una lista linealmente independiente en V, y piense en una base de V como una lista generadora en V. Ahora use 2.23 para concluir que $\dim U \leq \dim V$. ■

Para comprobar que una lista de vectores en V es una base de V, debemos, según la definición, demostrar dos propiedades: debe ser linealmente independiente y debe generar V. Los siguientes dos resultados muestran que si la lista en cuestión tiene la longitud correcta, entonces solo necesitamos verificar que satisface una de las dos propiedades requeridas. Primero probamos que toda lista linealmente independiente con la longitud correcta es una base.

1.39 Teorema **La lista linealmente independiente de la longitud correcta es una base.**

Suponga que V es de dimensión finita. Entonces, toda lista linealmente independiente de vectores en V con longitud $\dim V$ es una base de V.

Demostración.- Suponga $\dim V = n$ y $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente en V. La lista $v_1, \ldots, v_n$ puede ser extenderse a una base de V (por 2.33). Sin embargo, toda base de V tiene una longitud n, por lo que en este caso la extensión es trivial, lo que significa que ningún elemento está unido a $v_1, \ldots, v_n$ En otras palabras, $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, como deseamos. ■

1.40 Ejemplo Demostrar que la lista $(5,7),(4,3)$ es una base de $\mathbf{F}^2$.

Demostración.- Esta lista de dos vectores en $\mathbf{F}^2$ es obviamente linealmente independiente (poque ningún vector es un multiplo escalar del otro). Notemos que $\mathbf{F}^2$ tiene dimensión 2. Así, 2.39 implica que la lista linealmente independiente $(5,7),(4,3)$ de longitud 2 es una base de $\mathbf{F}^2$ (no necesitamos comprobar que genera $\mathbf{F}^2$). ■

1.41 Ejemplo Demostrar que $1,(x-5)^2,(x-5)^3$ es una base del subespacio U de $\mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ defina por

$$U = \left\{ p \in \mathcal{P}_3(\mathbf{R}) \ : \ p'(5) = 0 \right\}.$$

Solución.- Claramente cada los polinomios $1, (x-5)^2$ y $(x-5)^3$ es en U. Suponga $a, b, c \in \mathbf{R}$ y

$$a + b(x-5)^2 + c(x-5)^3 = 0$$

para cada $x \in \mathbf{R}$. Vemos que el lado izquierdo de la ecuación anterior tiene un termino cx^3. Como el lado derecho no tiene un término x^3, esto implica que $c = 0$. Como $c = 0$, vemos que el lado izquierdo tiene un término bx^2, lo que implica que $b = 0$. Como $b = c = 0$, podemos también concluye que $a = 0$. Así, la ecuación implica que $a = b = c = 0$. Por lo que la lista dada es linealmente independiente en U.

Observemos que $\dim U \geq 3$, ya que U es un subespacio de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$, sabemos que $\dim U \leq \dim \mathcal{P}_3(\mathbf{F}) = 4$ (por 2.38). Sin embargo, $\dim U$ no puede ser igual a 4, de lo contrario, cuando extendemos una base de U a una base de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$ obtendríamos una lista con una longitud mayor que 4. Por lo tanto, $\dim U = 3$. De esto modo, 2.39 implica que la lista linealmente independiente $1, (x-5)^2, (x-5)^3$ es una base de U. ■

Ahora probaremos que una lista generadora con longitud correcta es una base.

1.42 Teorema Lista generadora de la longitud correcta es una base.

Suponga que V es de dimensión finita. Entonces, cada lista generadora de vectores en V con longitud $\dim V$ es una base de V.

Demostración.- Suponga $\dim V = n$ y $v_1, \ldots, v_n$ genera V. La lista $v_1, \ldots, v_n$ puede ser reducido a una base de V (por 2.31). Sin embargo, cada base de V tiene longitud n. En este caso la reducción es trivial, lo que significa que no se eliminan elementos de $v_1, \ldots, v_n$. En otras palabras, $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, como deseamos. ■

El siguiente resultado da una fórmula para la dimensión de la suma de dos subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita.

1.43 Teorema Dimensión de una suma.

Si U_1 y U_2 son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Demostración.- Sea $u_1, \ldots, u_m$ una base de $U_1 \cap U_2$; por lo que $(U_1 \cap U_2) = m$. Ya que, $u_1, \ldots, u_m$ es una base de $U_1 \cap U_2$, es linealmente independiente en U_1. En consecuencia esta lista puede ser extendida a una base $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_j$ de U_1 (por 2.33). Así, $\dim U_1 = m + j$. También extendamos $u_1, \ldots, u_m$ a una base $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_k$ de U_2; de donde $U_2 = m + k$.
Tendremos que demostrar

$$u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_j, w_1, \ldots, w_k$$

es una base de $U_1 + U_2$. Claramente $\operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_j, w_1, \ldots, w_k)$ contiene a U_1 y U_2, por lo que es igual a $U_1 + U_2$. Entonces, para mostrar que la lista es una base de $U_1 + U_2$, necesitamos demostrar que es linealmente independiente. Suponga

$$a_1u_1 + \cdots + a_mu_m + b_1v_1 + \cdots + b_jv_j + c_1w_1 + \cdots + c_kw_k = 0,$$

donde todos los $a's, b's$ y $c's$ son escalares. Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$c_1w_1 + \cdots + c_kw_k = -a_1u_1 - \cdots - a_mu_m - b_1v_1 - \cdots - b_jv_j$$

el cual demuestra que $c_1w_1 + \cdots + c_kw_k \in U_1$. Luego, todos los $w's$ son en U_2, esto implica que $c_1w_1 + \cdots + c_kw_k \in U_1 \cap U_2$. Ya que, $u_1, \ldots, u_m$ es una base de $U_1 \cap U_2$, podemos escribir lo siguiente

$$c_1w_1 + \cdots + c_kw_k = d_1u_1 + \cdots + d_mu_m$$

para algunos escalares $d_1, \ldots, d_m$. Pero $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_k$ es linealmente independiente, así la útlima ecuación implica que todos los $c's$ (y $d's$) son igual a cero.

Por lo tanto, nuestra ecuación original que involucra las $a's, b's$ y $c's$ se convierten en

$$a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + b_1 v_1 + \cdots + b_j v_j = 0.$$

Porque la lista $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_j$ es linealmente independiente, esta ecuación implica que todas las $a's$ y $b's$ son 0. Ahora sabemos que todas las $a's$, $b's$ y $c's$ son iguales a 0, como deseamos. ■

1.C Ejercicios

1. Suponga que V es de dimensión finita y U es un subespacio de V tal que $\dim U = \dim V$. Demuestre que $U = V$.

Demostración.- Debemos demostrar que $U \subseteq V$ y $V \subseteq U$. Es fácil ver que $U \subseteq V$, ya que U es un subespacio de V.
Por otro lado, sean $v \in V$ y $u_1, u_2, \ldots, u_n$ base de U. Entonces, este conjunto es linealmente independiente en U, y por lo tanto también en V, esto porque U es un subespacio de V. Que sea base de U significa que $\dim U = n$. Sin embargo, $\dim U = \dim V$ implica que $\dim V = n$. Así, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ es un conjunto linealmente independiente en V con longitud igual a $\dim V$. Es decir, por 2.39 (Axler, Linear Algebra) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ es una base de V, por lo que genera V. Esto es, por 1.28 (Criterio de base) existe escalares $c_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n.$$

Notemos que $v_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$ es un vector en U. Por lo tanto, $v \in U$. Que $V \subseteq U$ y $U \subseteq V$ implica que $U = V$, como queríamos demostrar.

2. Demostrar que los subespacios de $\mathbf{R}^2$ son precisamente: $\{0\}$, $\mathbf{R}^2$, y todas las rectas en $\mathbf{R}^2$ que pasan por el origen.

Demostración.- Claramente $\{0\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^2$, porque contiene el vector cero, que está cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. En particular, cualquier combinación lineal del vector cero sigue siendo el vector cero.

Ahora, supongamos que U es un subespacio de $\mathbf{R}^2$ con $\dim U = 1$. En otras palabras, la base de U contiene solo un vector distinto de cero. Esto significa, que la lista contiene un vector distinto de cero que genera U. Esto implica que cada vector en U es un múltiplo escalar (combinación lineal) del único vector de la base. Luego, el conjunto de todos estos vectores en U describe una recta en $\mathbf{R}^2$; esto es, U es una recta en $\mathbf{R}^2$. Además, como U es un subespacio, en particular contiene la identidad aditiva $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$. Por tanto, U debe ser una recta en $\mathbf{R}^2$ que pase por el origen.

Por último, sea U un subespacio de $\mathbf{R}^2$ de dimensión 2. Entonces, por definición U tiene una base de dos vectores, digamos u_1 y u_2. Estas bases son linealmente independientes en U y por lo tanto linealmente independiente en $\mathbf{R}^2$. Sabiendo que $\dim U = \dim \mathbf{R}^2 = 2$, por 2.39 (Axler, Linear Algebra) u_1, u_2 es también una base de $\mathbf{R}^2$. Que U y $\mathbf{R}^2$ tengan la misma base, por la unicidad del criterio de base 2.28 (Axler, Linear Algebra) significa que $U = \mathbf{R}^2$.

3. Demuestre que los subespacios de $\mathbf{R}^3$ son precisamente $\{0\}$, $\mathbf{R}^3$, todas las lineas en $\mathbf{R}^3$, y todas las planos en $\mathbf{R}^3$ que pasan por el origen.

Demostración.- Suponga El conjunto $\{0\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^3$, ya que está cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. Es decir, para cualquier vector u y v en $\{0\}$ y cualquier escalar c, tenemos $u + v = 0 + 0 = 0$ y $cu = c(0) = 0$, ambos también están en $\{0\}$.

Suponga U un subespacio de $\mathbf{R}^2$ de $\dim U = 1$. Entonces la longitud de la base de U es 1; en otras palabras, la base de U contiene solo un vector no nulo. En particular, la lista contiene un vector no nulo que genera U; es decir, cada vector en U es un múltiplo escalar (combinación lineal) del único vector de la base. Luego, el conjunto de todos estos vectores en U describe una recta en $\mathbf{R}^3$. Esto es, U es una recta en $\mathbf{R}^3$. Además, como U es un subespacio, podemos asegurar que contiene la identidad aditiva $(0,0,0) \in \mathbf{R}^3$. Por lo tanto, U debe ser una recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen.

Suponga U un subespacio de $\mathbf{R}^3$ de $\dim U = 2$. Entonces la longitud de la base de U es 2. En particular, la base de U contiene dos vectores no nulos. En particular, la lista contiene dos vectores no nulos que genera U. Es decir, cada vector en U es una combinación lineal de los dos vectores de la base. Luego, el conjunto de todos estos vectores en U describe un plano en $\mathbf{R}^3$. Esto es, U es un plano en $\mathbf{R}^3$. Además, como U es un subespacio, podemos asegurar que contiene la identidad aditiva $(0,0,0) \in \mathbf{R}^3$. Por lo tanto, U debe ser un plano en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen.

Después, sea U un subespacio de $\mathbf{R}^3$ de dimensión 3. Entonces, por definición U tiene una base de dos vectores, digamos u_1 u_2 y u_3. Estas bases son linealmente independientes en U y por lo tanto linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$. Sabiendo que $\dim U = \dim \mathbf{R}^3 = 3$, por 2.39 (Axler, Linear Algebra) u_1, u_2, u_3 es también una base de $\mathbf{R}^3$. Que U y $\mathbf{R}^3$ tengan la misma base, por la unicidad del criterio de base 2.28 (Axler, Linear Algebra) significa que $U = \mathbf{R}^3$.

4. (a) Sea $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \ : \ p(6) = 0\}$. Encuentre una base de U.

Respuesta.- Sea $q(x)$ de grado $n-1$. Si $p(x)$ es un polinomio y $p(c) = 0$, entonces c se dice que es una raíz de $p(x)$ y $p(x) = (x-c)q(x)$, ya que

$$p(6) = (6-6)q(6) = 0.$$

En particular, $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $p(6) = 0$. Que podemos reescribirlo como $p(x) = (x-6)q(x)$, donde $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. Además, que $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})$, implica que $(x-6)q(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ y 6 como raíz de $(x-6)q(x)$. Así,

$$\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \mid p(6) = 0\} = \{(x-6)q(x) \mid q \in \mathcal{P}_3(\mathbf{F})\}.$$

Por el problema 2(g) del apartado 2.B (Axler, Linear Algebra), se sabe que $q(x) = 1, x, x^2, x^3$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$. De donde, demostremos que

$$(x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3$$

forma una base de U. Si $q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ para $a, b, c, d \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} (x-6)q(x) & = & (x-6)(a + bx + cx^2 + dx^3) \\ & = & a(x-6) + b(x-6) + c(x-6)x^2 + d(x-6)x^3. \end{array}$$

Esto implica que $(x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3$ genera U. Por último, debemos probar que $(x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3$ es linealmente independiente. Existe $a, b, c, d \in \mathbf{F}$ tal que

$$a(x-6) + b(x-6)x + c(x-6)x^2 + d(x-6)x^3 = 0.$$

Entonces,

$$-6a + (a-6b)x + (b-6c)x^2 + (c-7d)x^3 + dx^4 = 0.$$

Para que la lista sea linealmente independiente, cada coeficiente debe ser cero. En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} -6a & = & 0 \\ a-6b & = & 0 \\ b-6c & = & 0 \\ c-7d & = & 0 \\ d & = & 0. \end{array}$$

Resolviendo la ecuación, se tiene

$$\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0. \end{array}$$

Así, la lista es linealmente independiente. Por lo tanto, concluimos que

$$(x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3$$

es una base de U.

(b) Extienda la base de U en (a) a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- La condición del inciso (a) hace que 4 polinomios generen U. Ahora, por el problema 13 de la sección 2B (Axler, Linear Algebra); observamos que tenemos que tener 5 polinomios para que genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Para ello debemos extender U del inciso (a). Notemos que U tiene todos sus polinomios múltiplos de $(x-6)$, por lo que cualquier combinación lineal de U producirá otro polinomio múltiplo de $(x-6)$. Por el contrario un polinomio el cual no es múltiplo de $(x-6)$ no podrá pertenecer al generador de U; así que podemos agregar 1 a U. Está claro por el inciso (a) que los elementos de U son linealmente independientes y por lo dicho anteriormente, ninguna combinación lineal de los elementos de U pueden generar 1 (definición de independencia). Por lo tanto,

$$\{1\} \cup U = \left\{1, (x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3\right\}$$

es linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Observemos que esta lista contiene longitud igual a $\dim \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$: Entonces por 2.39 (Axler, Linear Algebra), concluimos que

$$\left\{1, (x-6), (x-6)x, (x-6)x^2, (x-6)x^3\right\}$$

es una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

(c) Encuentre un subepacio W de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

Respuesta.- Supongamos $W = \{1\}$. Debemos probar que $U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ y que $U \cap W = \{0\}$. Ya que, $U \cup W$ contiene todos los polinomios base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, el espacio vectorial $U + W$ contiene a $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Esto es,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \subseteq V + W.$$

Por otro lado, puesto que $U, W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, entonces

$$U + W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Así,

$$U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Ahora, demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U \cap W$. Como $v \in U$, entonces existe $c_i \in \mathbf{F}$ tal que,

$$v = c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4.$$

De la misma forma, ya que $v \in W$ entonces existe $c_0 \in \mathbf{F}$ tal que,

$$v = c_0.$$

Luego,

$$c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 = c_0.$$

Esto implica que

$$-c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 = 0.$$

Para que la lista linealmente independiente, cada coeficiente debe ser cero. En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} -c_0 & = & 0 \\ c_1(x-6) & = & 0 \\ c_2(x-6) & = & 0 \\ c_3(x-6) & = & 0 \\ c_4(x-6) & = & 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} c_0 & = & 0 \\ c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & 0 \\ c_3 & = & 0 \\ c_4 & = & 0. \end{array}$$

Así, $v = 0$. Por lo tanto, $U \cap W = \{0\}$. Otra manera de demostrar que la lista dada es linealmente independiente sería, suponer que

$$-c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 \neq 0$$

para todo x. Pero esto es absurdo, ya que si $x = 6$, entonces

$$-c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)x + c_3(x-6)x^2 + c_4(x-6)x^4 = 0.$$

Concluimos que $W = \{1\}$ es un subespacio de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

5. (a) Sea $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \ : \ p''(6)\}$. Encuentre una base de U.

Respuesta.- Sabemos que si $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, entonces $p''(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})$. De ahí,

$$\left\{p''(x) \mid p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})\right\} = \mathcal{P}_2(\mathbf{F}).$$

Además, si $p''(6) = 0$, entonces $p''(x) = (x-6)q(x)$, como se vio en el ejercicio anterior se cumple $p''(6) = (6-6)q(x) = 0$, donde $q(x)$ tiene un grado menos que $p''(x)$. Esto es $q(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbf{F})$.

Queremos encontrar elementos que generen $\mathcal{P}_2(\mathbf{F})$. Analicemos un subepacio S de $\mathcal{P}_2(\mathbf{F})$ tal que

$$S = \{u(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F}) \mid (x-6)q(x), q(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbf{F})\}.$$

Existe $a, b \in \mathbf{F}$ tal que $q(x) = a + bx \in \mathcal{P}_1(\mathbf{F})$, por lo que

$$\begin{array}{rcl} (x-6)q(x) & = & (x-6)(a+bx) \\ & = & a(x-6) + bx(x-6) \\ & = & a(x-6) + b(x-6+6)(x-6) \\ & = & a(x-6) + b(x-6)^2 + 6b(x-6) \\ & = & (a+6b)(x-6) + b(x-6)^2. \end{array}$$

Lo que demuestra que $(x-6),(x-6)^2$ genera S. Sea $c_1,c_2 \in \mathbf{F}$, tal que

$$c_1(x-6)+c_2(x-6)^2=0.$$

De donde,

$$6(4c_2-6c_1)+(c_1-12c_2)x+c_2x^2=0.$$

Para que la lista sea linealmente independiente, cada coeficiente debe ser cero. En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} 6(4c_2-6c_1) & = & 0 \\ (c_1-12c_2) & = & 0 \\ c_2 & = & 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & 0. \end{array}$$

Así, $(x-6),(x-6)^2$ es linealmente independiente. Por lo tanto,

$$\left\{(x-6),(x-6)^2\right\}$$

es una base de U.

Ahora, encontraremos una base de $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $p''(x) \in S$. Ya que $(x-6),(x-6)^2$ genera S; existe $a,b \in \mathbf{F}$, tal que

$$p''(x)=a(x-6)^2+b(x-6).$$

Integando $p''(x)$ dos veces obtenemos

$$\begin{aligned} p(x) &= \int\left[\int a(x-6)^2+b(x-6)\ dx\right]\ dx \\ &= \int\left[a\frac{(x-6)^3}{3}+b\frac{(x-6)^2}{2}+c\right]\ dx \\ &= a\frac{(x-6)^4}{12}+b\frac{(x-6)^3}{6}+cx+d \\ &= a\frac{(x-6)^4}{12}+b\frac{(x-6)^3}{6}+c(x-6)+(6c+d) \end{aligned}$$

Sean los escalares $s_1=a/12$, $s_2=b/6$, $s_3=c$ y $s_4=6c+d$. Entonces,

$$p(x)=s_1(x-6)^4+s_2(x-6)^3+s_3(x-6)+s_4.$$

Este polinomio cumple con las condiciones iniciales. Es decir, $p''(x)=12s_1(x-6)^2+6s_2(x-6)$ con $p''(6)=0$. En otras palabras, $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $p''(6)=0$ siempre que $p(x)$ puede ser expresado como $s_1(x-6)^4+s_2(x-6)^3+s_3(x-6)+s_4$ para algunos escalares s_1,s_2,s_3,s_4. Así,

$$U=\left\{p(x)\in\mathcal{P}_4(\mathbf{F})\mid p''(6)=0\right\}=\left\{s_1(x-6)^4+s_2(x-6)^3+s_3(x-6)+s_4\mid s_1,s_2,s_3,s_4\in\mathbf{F}\right\}.$$

Observe que este conjunto es un espacio vectorial generado por $\{1,(x-6),(x-6)^3,(x-6)^4\}$, el cual genera U. Luego, sea

$$s_1(x-6)^4+s_2(x-6)^3+s_3(x-6)+s_4=0$$

$$\Downarrow$$

$$s_1x^4+(s_2-24s_1)x^3+(216x_1-18x_2)x^2+(108s_2-864s_1+s_3)x+(129s_1-216s_2-6s_3+s_4)=0$$

de donde,

$$\begin{array}{rcl} s_1 &=& 0 \\ s_2 - 24s_1 &=& 0 \\ 216s_1 - 18s_2 &=& 0 \\ 108s_2 - 864s_1 + s_3 &=& 0 \\ 129s_1 - 216s_2 - 6s_3 + s_4 &=& 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} s_1 &=& 0 \\ s_2 &=& 0 \\ s_3 &=& 0 \\ s_4 &=& 0. \end{array}$$

Así, $\left\{1,(x-6),(x-6)^3,(x-6)^4\right\}$ es linealemente independiente. Por lo tanto,

$$\left\{1,(x-6),(x-6)^3,(x-6)^4\right\}$$

es una base de U.

(b) Extienda la base en (a) a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- La base de U es $\left\{1,(x-6),(x-6)^3,(x-6)^4\right\}$. Ya que, esta base es de longitud 4, debemos extender a longitud 5 para que sea base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Si podemos encontrar un polinomio $p(x)$ que no puede ser generado por los elementos de U, entonces implicará que $U \cup p(x)$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces tendremos un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ que tiene tantos vectores como la dimensión de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Así, tendríamos una base para $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Supongamos que este vector es $(x-6)^2$ y que

$$(x-6)^2 = a + b(x-6) + c(x-6) + c(x-6)^3 + d(x-6)^4$$

para $a,b,c,d \in \mathbf{F}$. De donde

$$\begin{array}{rcl} (x-6)^2 &=& a + b(x-6) + (x-6)^2\left[c(x-6) + d(x-6)^2\right] \\ (x-6)^2\left[1 - c(x-6) - d(x-6)^2\right] &=& a + b(x-6). \end{array}$$

Claramente $\{1,(x-6)\}$ no es múltiplo de $(x-6)^2$; sin embargo, lo será si y sólo si es igual a cero. Por lo tanto,

$$a, b = 0.$$

Substituyendo tendremos

$$\begin{array}{rcl} (x-6)^2 &=& c(x-6)^3 + d(x-6)^4 \\ (x-6)^2 &=& (x-6)^3\left[c + d(x-6)\right]. \end{array}$$

Está ecuación no es cierta, ya que el lado derecho de la ecuación no es múltiplo del lado izquierdo. Así, $(x-6)^2$ con un poco de manipulación de la ecuación podemos concluir que $(x-6)^2$ no será generado por los polinomios de U. Concluimos que $U \cup \left\{(x-6)^2\right\}$ es una base para $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

Respuesta.- Sea $W = \left\{(x-6)^2\right\}$. Ya que $U \cap W$ contiene a todos los polinomios base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, entonces el espacio vectorial $U + W$ contiene a $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Esto es,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \subseteq U + W.$$

Está claro que

$$U, W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$$

Así,

$$U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Ahora, demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U$; es decir, existen $c_0, c_1, c_3, c_4 \in \mathbf{F}$ tales que

$$v = c_0 + c_1(x-6) + c_3(x-6)^3 + c_3(x-6)^4.$$

Luego, ya que $v \in W$, entonces existe $c_2 \in \mathbf{F}$ siempre que

$$v = c_2(x-6)^2.$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones, tenemos

$$c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)^3 + c_3(x-6)^4 = c_2(x-6)^2,$$

Esto implica que

$$c_0 + c_1(x-6) + c_2(x-6)^2 + c_3(x-6)^3 + c_4(x-6)^4 = 0,$$

si resolvemos está ecuación con respecto a c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, e igualamos a cero, tendremos que

$$\begin{array}{rcl} c_0 & = & 0 \\ c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & 0 \\ c_3 & = & 0 \\ c_4 & = & 0. \end{array}$$

De está manera

$$v = 0$$

Por lo tanto, $U \cap W = \{0\}$. Concluimos que W es el subespacio de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W.$$

6. (a) Sea $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \ : \ p(2) = p(5)\}$. Encontrar una base de U.

Respuesta.- Sea

$$p(2) = \alpha = p(5).$$

Definamos $q(x) = p(x) - \alpha$, de donde $q(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$; por ejemplo, si sustraemos $p(x) - p(2)$, esta seguirá estando en $q(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Luego,

$$\begin{array}{ccc} q(2) = p(2) - \alpha = p(2) - p(2) = 0 & \Rightarrow & q(2) = 0 \\ q(5) = p(5) - \alpha = p(5) - p(5) = 0 & \Rightarrow & q(5) = 0. \end{array}$$

Esto nos dice que, 2 y 5 son raíces de $q(x)$. Por lo tanto,

$$q(x) = (x-2)\,(x-5)\,r(x),$$

donde $r(x)$ tiene grado dos, menor que $q(x)$. Esto es, $r(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})$. Dicho de otra manera, si $r(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})$, entonces $(x-2)(x-5)r(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ ó

$$V = \{q \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \mid q(2) = q(5) = 0\} = \{(x-2)(x-5)r(x) \ : \ r(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})\}.$$

Dicho esto, buscaremos una base de $\{(x-2)(x-5)r(x) \ : \ r(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})\}$. Ya que (Por el apartado 2.B problema 2(g): Axler, Linear Algebra) $1, x, x^2$ es una base de $\{\mathcal{P}_2(\mathbf{F})\}$, verificaremos que

$$\left\{(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2\right\}$$

forma una base de V.

Si $r(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})$ para algún $a, b, c \in \mathbf{F}$, entonces

$$\begin{aligned}(x-2)(x-5)r(x) &= (x-2)(x-5)\left(a + bx + cx^2\right) \\ &= a(x-2)(x-5) + b(x-2)(x-5)x + c(x-2)(x-5)x^2.\end{aligned}$$

Lo que nos muestra que $(x-2)(x-5), (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x^2$ genera V. Ahora, demostremos que $\{(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2\}$ es linealmente independiente. Con las condiciones dadas anteriormente, tenemos que verificar:

$$a(x-2)(x-5) + b(x-2)(x-5)x + c(x-2)(x-5)x^2 = (x-2)(x-5)\left(a + bx + cx^2\right) = 0.$$

Centremonos en $(a + bx + cx^2) = 0$. Ya que, $1, x, x^2$ es linealmente independiente. Entonces, los escalares a, b, c son ceros. Por lo tanto, la lista es linealmente independiente, (ya que $(x-2)(x-5)\left(0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2\right) = 0$). Así,

$$\left\{(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2\right\}$$

es una base de V.

Por otro lado, observemos que $p(x) \in U$, si y sólo si $q(x) = p(x) - p(2) \in V$. Por lo tanto, cualquier $p \in U$ puede ser expresado como

$$a + q(x)$$

donde $a = p(2)$ es un escalar y $q(x) \in V$. Por el hecho de que, $(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ genera V, entonces existe $b, c, d \in \mathbf{F}$, tal que

$$q(x) = b(x-2)(x-5) + c(x-2)(x-5)x + d(x-2)(x-5)x^2.$$

Ya que, $p(x) \in U$ tiene la forma

$$p(x) = a + q(x) = a + b(x-2)(x-5) + c(x-2)(x-5)x + d(x-2)(x-5)x^2.$$

Entonces, $1, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ genera U.

Por último, demostremos que $1, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ es linealmente independiente. Sabemos que $(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$ es linealmente independiente y vemos que todos los polinomios en esta lista son múltiplos de $(x-2)(x-5)$. Por lo que no pueden generar el polinomio 1. Es decir,

$$1 \notin \operatorname{span}\left[(x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2\right].$$

Esto significa que la lista

$$1, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2$$

es linealmente independiente. Por lo tanto, esta lista es base de U.

(b) Extienda la base en (a) a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Queremos extender la base $V = \left\{1, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2\right\}$ a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ de dimensión cinco.

Si podemos encontrar un polinomio $p(x)$ que no puede ser generado por los elementos de V, entonces implicará que $V \cup p(x)$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces tendremos un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ que tiene tantos vectores como la dimensión de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Así, tendríamos una base para $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.
Agreguemos el vector $p(x) = x$ a V. Así, para los escalares $a, b, c, d \in \mathbf{F}$, tendríamos

$$x = a + b(x-2)(x-5) + c(x-2)(x-5)x + d(x-2)(x-5)x^2.$$

De donde,

$$x - a = b(x-2)(x-5) + c(x-2)(x-5)x + d(x-2)(x-5)x^2.$$

Observemos que no hay manera de que $x - a$ sea múltiplo de $(x-2)(x-5)$, por lo que $p(x) \notin$ span(V). Esto implica que

$$\left\{1, x, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2\right\}$$

es una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

Respuesta.- Sean $U = \left\{1, (x-2)(x-5), (x-2)(x-5)x, (x-2)(x-5)x^2\right\}$ y $W = \{x\}$. Entonces, demostraremos que $U \cup W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Ya que, $U \cup W$ contiene todas los elementos base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, el espacio vectorial $U + W$ contiene a $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Esto es,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \subseteq U + W.$$

Por otro lado, ya que U y W están en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, entonces $U + W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Por lo que,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U + W.$$

Ahora, demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U$, para los escalares $c_0, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{F}$, tal que

$$v = c_0 + c_2(x-2)(x-5) + c_3(x-2)(x-5)x + c_4(x-2)(x-5)x^2.$$

Sea también $v \in W$ con $c_2 \in \mathbf{F}$, tal que

$$v = c_2 x.$$

Igualemos estas dos expresiones, obtenemos

$$c_0 + c_2(x-2)(x-5) + c_3(x-2)(x-5)x + c_4(x-2)(x-5)x^2 = c_2 x.$$

Esto implica que,

$$c_0 - c_1 x + c_2(x-2)(x-5) + c_3(x-2)(x-5)x + c_4(x-2)(x-5)x^2 = 0.$$

Esta ecuación se cumplirá siempre que todos los escales $c_i = 0$ sean cero. Por lo que, $v = 0$. Así, $U \cap W = \{0\}$. Por lo tanto, $W = \{x\}$ es un subespacio de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

7. (a) Sea $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) : p(2) = p(5) = p(6)\}$. Encontrar una base de U.

Respuesta.- Sea $p(2) = p(5) = p(6) = \alpha$, de donde $q(x) = p(x) - \alpha$. Entonces, $q(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Luego,

$$q(2) = p(2) - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad q(2) = 0$$

$$q(5) = p(5) - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad q(5) = 0$$

$$q(6) = p(6) - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad q(6) = 0.$$

Esto significa que $2, 5$ y 6 son raíces de $q(x)$. Por lo que,

$$q(x) = (x-2)(x-5)(x-6)r(x).$$

Donde, $r(x)$ tiene 3 grados menos que el grado de $q(x)$. Es decir, $r(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbf{F})$. Dado q ue, $q(2) = q(5) = q(6) = 0$. Entonces,

$$V = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) | p(2) = p(5) = p(6) = 0\} = \{(x-2)(x-5)(x-6)r(x) | r(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbf{F})\}.$$

Busquemos ahora una base de $\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) | p(2) = p(5) = p(6) = 0\}$, para luego convertirla en una base de $\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) | p(2) = p(5) = p(6)\}$. Ya que, $1, x$ es una base de $\mathcal{P}_1(\mathbf{F})$, verifiquemos si $\{(x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$ forma una base de V.
Sea $r(x) = a + bx \in \mathcal{P}_2(\mathbf{F})$, entonces

$$\begin{aligned}(x-2)(x-5)(x-6)r(x) &= (x-2)(x-5)(x-6)(a+bx) \\ &= a(x-2)(x-5)(x-6) + b(x-2)(x-5)(x-6)x.\end{aligned}$$

Esto implica que $\{(x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$ genera de V. Después,

$$\begin{aligned}a(x-2)(x-5)(x-6) + b(x-2)(x-5)(x-6)x &= 0 \\ (x-2)(x-5)(x-6)(a+bx) &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación podemos concluir que a, b son cero. Por lo tanto,

$$\{(x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$$

es linealmente independiente. Así,

$$\{(x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$$

es una base de V.

Ahora, si $p(x) \in U$, siempre que $q(x) = p(x) - p(2) \in V$, y viceversa. Sea $c = p(2) = p(5) = p(6)$ con $q(x) \in V$, por lo que podemos expresar a $p \in U$ como $c + q(x)$.

Ya que, $\{(x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$ genera V, entonces

$$p(x) = c + a(x-2)(x-5)(x-6) + b(x-2)(x-5)(x-6)x.$$

Por lo tanto, $\{1, (x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$ genera U. Por último, notemos que $1 \notin \operatorname{span}[(x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x]$. Así,

$$\{1, (x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$$

es linealmente independiente. Por lo tanto, es una base de U.

(b) Extienda la base en la parte (a) a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Queremos extender la base de U, $\{1, (x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$ a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ de dimensión cinco. Para ello, comprobemos si x se puede generar usando los elementos de $\{1, (x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$. Sean $a, b, c \in \mathbf{F}$,

$$x = a + b(x-2)(x-5)(x-6) + c(x-2)(x-5)(x-6)x.$$

Reescribiendo,

$$x - a = b(x-2)(x-5)(x-6) + c(x-2)(x-5)(x-6)x.$$

Esta ecuación nunca se puede cumplir, ya que, el lado izquierdo es un polinomio de grado uno, mientras que el lado derecho es un polinomio de grado tres. Por lo tanto, x no se puede generar usando los elementos de $\{1, (x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$.

Lo mismo, podemos decir de x^2. Sea $a, b, c \in \mathbf{F}$,

$$x^2 = a + b(x-2)(x-5)(x-6) + c(x-2)(x-5)(x-6)x.$$

Reescribiendo,

$$x^2 - a = b(x-2)(x-5)(x-6) + c(x-2)(x-5)(x-6)x.$$

Esta ecuación nunca se puede cumplir, ya que, el lado izquierdo es un polinomio de grado dos, mientras que el lado derecho es un polinomio de grado tres. Por lo tanto, x^2 no se puede generar usando los elementos de $\{1, (x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$.

Por lo tanto, $\left\{1, x, x^2, (x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x, x^2, x\right\}$ es una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$.

Respuesta.- Sean $U = \{1, (x-2)(x-5)(x-6), (x-2)(x-5)(x-6)x\}$ y $W = \left\{x, x^2\right\}$. Ya que, $U \cup W$ contiene todas los elementos base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. El espacio vectorial $U + W$ contiene a $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Esto es,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \subseteq U + W.$$

Por otro lado, ya que $U, W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Entones,

$$U + W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Así,

$$U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Ahora, probemos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U \cap W$, de donde podemos escribir para $c_0, c_3, c_4 \in \mathbf{F}$ de la siguiente manera

$$v = c_0 + c_3(x-2)(x-5)(x-6) + c_4(x-2)(x-5)(x-6)x$$

Luego, ya que $v \in W$, entonces para $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$

$$v = c_1 x + c_2 x^2.$$

Igualando ambas ecuaciones, tenemos

$$c_0 + c_3(x-2)(x-5)(x-6) + c_4(x-2)(x-5)(x-6)x = c_1 x + c_2 x^2.$$

Esto implica que

$$c_0 - c_1 x - c_2 x^2 + c_3(x-2)(x-5)(x-6) + c_4(x-2)(x-5)(x-6)x = 0.$$

Resolviendo podemos ver que c_i's son cero, por lo cual $v = 0$. Por lo tanto, $U \cap W = \{0\}$. Así,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W.$$

8. (a) Sea $U = \left\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{R}) \ : \ \int_{-1}^{1} p = 0\right\}$. Defina una base de U.

Respuesta.- Sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, tal que $\int_{-1}^{1} p(x)\ dx = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} p(x)\ dx &= \int_{-1}^{1}\left(a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4\right)\ dx \\
&= \left(ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4} + \frac{ex^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= a + \frac{b(1)^2}{2} + \frac{c(1)^3}{3} + \frac{d(1)^4}{4} + \frac{e(1)^5}{5} \\
&- \left[a(-1) + \frac{b(-1)^2}{2} + \frac{c(-1)^3}{3} + \frac{d(-1)^4}{4} + \frac{e(-1)^5}{5}\right] \\
&= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} + \frac{e}{5}\right) - \left(-a + \frac{b}{2} - \frac{c}{3} + \frac{d}{4} - \frac{e}{5}\right) \\
&= 2a + \frac{2c}{3} + \frac{2e}{5}
\end{aligned}$$

De donde, $\int_{-1}^{1} p(x)\ dx = 0$ si y sólo si $2a + \dfrac{2c}{3} + \dfrac{2e}{5} = 0$ o $a = -\dfrac{c}{3} - \dfrac{e}{5}$. Así,

$$\begin{aligned}
U &= \left\{p(x) \in P_4(\mathbf{F}) \mid \int_{-1}^{1} p(x)\ dx = 0\right\} \\
&= \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 \mid a = -\frac{c}{3} - \frac{e}{5}, b, c, d, e \in \mathbf{F}\right\} \\
&= \left\{-\frac{c}{3} - \frac{e}{5} + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 \mid b, c, d, e \in \mathbf{F}\right\} \\
&= \left\{bx + c\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + dx^3 + e\left(x^4 - \frac{1}{5}\right) \ \mid b, c, d, e \in \mathbf{F}\right\}.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\left\{x.x^2 - \frac{1}{3}, x^3, x^4 - \frac{1}{5}\right\}$ genera U. Luego, para ver que es linealmente independiente, supongamos que $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{F}$ para

$$c_1 x + c_2\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + c_3 x^3 + c_4\left(x^4 - \frac{1}{5}\right) = 0.$$

por lo que

$$-\frac{c_2}{3} - \frac{c_4}{5} + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = 0.$$

Resolviendo veremos que los $c_i's$ son cero. Concluimos que $\left\{x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3, x^4 - \frac{1}{5}\right\}$ es una base de U.

(b) Extienda la base en la parte (a) a una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$.

Respuesta.- Extendamos la base $B = \left\{x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3, x^4 - \frac{1}{5}\right\}$ de U, para que sea una base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$. Para ello, necesitaremos encontrar un polinomio $p(x) \notin \operatorname{span}(B)$, que al unir $B \cup \{p(x)\}$ serán linealmente independientes.

Observemos que B tiene todos los grados menos el grado 0, por lo que podemos elegir a $p(x) = 1$. Supongamos que $p(x) = 1$ genera B. Entonces para algunos $a, b, c, d \in \mathbf{F}$,

$$1 = ax + b\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + cx^3 + d\left(x^4 - \frac{1}{5}\right).$$

De donde,

$$\left(-\frac{b}{3} - \frac{d}{5} - 1\right) + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 = 0.$$

Notemos que $\left(-\frac{b}{3} - \frac{d}{5} - 1\right) \neq 0$, lo que nos lleva a una contradicción. Así, 1 no genera B. Por el ejercicio 11 del apartado 2A (Axler, Linear Algebra), implica que $B \cup 1$ es linealmente independiente. Por el teorema 1.39 (Axler) concluimos que $B \cup \{p(x) = 1\}$ es base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbf{R}) = U \oplus W$.

Respuesta.- Sean $B = \left\{x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3, x^4 - \frac{1}{5}\right\}$ una base de U y $W = \operatorname{span}\{1\}$. Ya que $U \cup W$ contiene todos los elementos base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, el espacio vectorial $U + W$ contiene a $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Esto es,

$$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) \subseteq U + W.$$

Por otro lado, ya que $U, W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$, entonces

$$U + W \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Esto implica que,

$$U + W = \mathcal{P}_4(\mathbf{F}).$$

Ahora, demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Supongamos $v \in U \cap W$. Entonces $v \in U$ y $v \in W$. Esto nos dice que

$$v = c_0 = c_1 x + c_2\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + c_3 x^3 + c_4\left(x^4 - \frac{1}{5}\right).$$

para todo $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{F}$. Ordenando los términos, tenemos que

$$-c_0 + c_1 x + c_2\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + c_3 x^3 + c_4\left(x^4 - \frac{1}{5}\right) = 0.$$

De donde,

$$\left(-\frac{c_2}{3} - \frac{c_4}{5} - c_0\right) + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = 0.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Por lo tanto, $v = 0$. Así, concluimos que $U \cap W = \{0\}$. Lo que se demuestra que W es un subespacio de $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ tal que $U \cap W = \{0\}$.

9. Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$. Demostrar que

$$\dim(\operatorname{span}\{v_1 + w, \ldots, v_m + w\}) \geq m - 1.$$

Demostración.- Sea $W = \operatorname{span}(v_1 + w, \ldots, v_m + w)$. Ya que, $v_k - v_{k-1} = (v_k + w) - (v_{k-1} + w)$ Entonces, podemos considerar la lista

$$v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_m - v_{m-1}$$

con longitud $m-1$. Dado que la dimensión de W debe ser mayor o igual (2.23) que la longitud de cualquier lista linealmente independiente, si demostramos que esta lista es linealmente independiente, habremos demostrado que $\dim W \geq m-1$. Supongamos que $a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbf{F}$ son tales que

$$a_1(v_2 - v_1) + \cdots + a_{m-1}(v_m - v_{m-1}) = 0.$$

Reescribiendo,

$$(-a_1)v_1 + (a_1 - a_2)v_2 + \cdots + (a_{m-2} - a_{m-1})v_{m-1} + a_{m-1}v_m = 0.$$

Dado que, $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente, entones $a_1 = 0$, luego $a_{k-1} - a_k = 0$ para $k = 2, \ldots, m-1$. Por lo tanto, $a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$. Así, la lista $v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_{m-1}$ es linealmente independiente, lo que implica que $\dim W \geq m-1$.

10. Suponga $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ son tales que cada p_j tiene grado j. Demostrar que $p_0, p_1, \ldots, p_m$ es una base de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Demostración.- Sabemos que $1, z, z^2, \ldots, z^m$ es una base de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$. Si podemos mostrar que el conjunto $p_0, p_1, \ldots, p_m$ genera $1, z, z^2, \ldots, z^m$, entonces se seguirá que $p_0, p_1, \ldots, p_m$ puede generar $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$. Además dado que el conjunto $p_0, p_0, \ldots, p_m$ tiene una longitud igual a la dimensión de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$, se seguirá que el conjunto es una base de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Sea $V = \operatorname{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m)$. Usarermos la inducción sobre z^j para demostrar que $z^j \in V$ para todo j, $0 \leq j \leq m$.. Por suposición, p_0 tiene grado 0. Esto es, p_0 es un escalar distinto de cero. Por lo tanto, todo múltiplo escalar de p_0 existe en V. Así,

$$\left(\frac{1}{p_0}\right) p_0 = 1 \in V.$$

De donde, el resultado es cierto es $j = 0$.

Ahora, supongamos que el resultado es verdadero para todo $j \leq k$. Esto es, $1, z, z^2, \ldots, z^k \in V$. Demostremos que $z^{k+1} \in V$. Sea, p_{k+1} de grado $k+1$ tal que

$$p_{k+1} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{k+1} z^{k+1}$$

donde $a_{k+1} \neq 0$. Dado que $1, z, z^2, \ldots, z^k \in V$, entonces cada combinación lineal se encuentra en V. Por lo tanto,

$$a_0 + a_1 z + \cdots + z_k z^k \in V.$$

Por la propiedad de espacio vectorial

$$p_{k+1} - \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + z_k z^k\right) = a_{k+1} z^{k+1} \in V.$$

Esto implica que todo múltiplo escalar de $a_{k+1} z^{k+1}$ también debe estar en V. Ya que,

$$\frac{1}{a_{k+1}} \left(a_{k+1} z^{k+1}\right) = z^{k+1} \in V.$$

Esto demuestra que el resultado es verdadera para $j = k+1$. Por el principio de inducción, el resultado es válido para j, con $0 \leq j \leq m$. Por lo tanto, $1, z, z^2, \ldots, z^m \in V$, lo que completa la demostración.

11. Suponga que U y W son subesapcios de $\mathbf{R}^8$ tal que $\dim U = 3$, $\dim W = 5$ y $U + W = \mathbf{R}^8$. Demostrar que $\mathbf{R}^8 = U \oplus W$.

Demostración.- Por 2.43 tenemos,

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Luego, ya que $\dim U = 3$, $\dim W = 5$ y $U + W = \mathbf{R}^8$, se sigue

$$8 = 3 + 5 - \dim(U \cap W).$$

Esta igualdad implica que $\dim(U \cap W) = 0$. Por lo tanto, $U \cap W = \{0\}$. Así,

$$\mathbf{R}^8 = U \oplus W.$$

12. Suponga U y W son ambos subespacios de dimensión cinco de $\mathbf{R}^9$. Demostrar que $U \cap W \neq \{0\}$

Demostración.- Por 2.43 tenemos,

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Por hipótesis,

$$9 \geq \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 10 - \dim(U \cap W).$$

Por lo tanto, $\dim(U \cap W) \geq 1$. Así, $U \cap W \neq \{0\}$.

13. Suponga U y W son ambos subespacios de dimensión cuatro de $\mathbf{C}^6$. Demostrar que existe dos vectores en $U \cap W$ tal que ninguno de estos vectores es múltiplo escalar del otro.

Demostración.- Por 2.43 tenemos que

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Reordenando,

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W).$$

Por hipótesis, $\dim U = \dim W = 4$. Por lo tanto, ya que $U + W \in \mathbf{C}^6$ con $\dim(U+W) \leq 6$, se tiene

$$\begin{aligned} \dim(U \cap W) &= 4 + 4 - \dim(U+W) \\ &\geq 8 - 6 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Esto implica que $\dim(U \cap W) \geq 2$. Así, $U \cap W$ tiene al menos dos vectores independientes. Por 2.18(b) de la sección C (Axler) sabemos que dos vectores en V es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo escalar del otro. Por lo tanto, existen dos vectores en $U \cap W$ ninguno de los cuales es múltiplo escalar del otro.

14. Suponga $U_1, \ldots, U_m$ son subespacios de dimensión finita en V. Demostrar que $U_1 + \cdots + U_m$ son de dimensión finita y

$$\dim(U_1 + \cdots + U_m) \leq \dim U_1 + \cdots + \dim U_m.$$

Demostración.- Usemos la inducción para m. Si $m = 2$, entonces por 2.43 tenemos

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Pero $\dim(U \cap W) \geq 0$. Por lo tanto, $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim U_1 + \dim U_2$. Así, se cumple para $m = 2$. Ahora, supongamos que el resultado es cierto para $m = k$. Esto es,

$$\dim(U_1 + \cdots + U_k) \leq \dim U_1 + \cdots + \dim U_k.$$

Demostremos que se cumple para $m = k + 1$. Sea $W = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$. Entonces,

$$\dim(W + U_{k+1}) = \dim W + \dim U_{k+1} - \dim(W \cap U_{k+1}).$$

Dado que $W \cap U_{k+1} \geq 0$ implica que $\dim(W + U_{k+1}) \leq \dim W + \dim U_{k+1}$. Es decir,

$$\dim(U_1 + U_2 + U_k + \cdots + U_{k+1}) \leq \dim U_1 + \cdots + \dim U_{k+1}.$$

Vemos que efectivamente se cumple para $m = k + 1$. Por lo tanto, por el principio de inducción el resultado es cierto para todo $m \in \mathbb{N}$.

15. Suponga V es de dimensión finita, con $\dim(V) = n \geq 1$. Demostrar que existe subespacios de una dimensión $U_1, \ldots, U_n$ de V tal que

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n.$$

Demostración.- Usaremos el método de inducción. Si V es de dimensión 1, entonces $V = U_1$. Entonces, el resultado es cierto para $n = 1$.
Ahora, sea $n = k$. Esto es, si V es de dimensión k, entonces existe subespacios $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de V tal que

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k.$$

Luego, consideremos el espacio vectorial V tiene dimensión $k + 1$. De donde, se tiene una base $\{v_i, v_2, \ldots, v_{k+1}\}$. Sea $U = \operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ y $W = \operatorname{span}(v_{k+1})$. Ambos, $U, W \subseteq V$, por lo que

$$U + W \subseteq V.$$

Además U contiene $v_1, v_2, \ldots, v_k$ y W contiene v_{k+1}, lo que significa que $U + W$ contiene a $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$, esto es una base de V. Por lo tanto, $U + W$ también contiene a V. Es decir,

$$B \subseteq U + W.$$

Así,

$$U + W = V.$$

Lo que implica, que

$$\dim(U + W) = k + 1.$$

Recordemos que,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Reescribiendo

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W).$$

Que $\dim(U) = k$, $\dim(W) = 1$ y $\dim(U + W) = k + 1$, entonces

$$\dim(U \cap W) = 0.$$

Esto último nos dice que $U \cap W = \{0\}$. Por lo tanto,

$$V = U \oplus W.$$

U es de dimensión k. Por hipótesis de inducción, U puede ser reescrito como $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$. Donde, cada $U_i's$ es de dimensión uno. Por otro lado, W es de dimensión uno, que podemos escribirlo como U_{k+1}, por lo que

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \oplus U_{k+1}.$$

Esto prueba que el resultado es verdadero para $n = k + 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

16. Suponga $U_1, \ldots, U_m$ son subespacios de dimensión finita de V tal que $U_1 + \cdots + U_m$ es una suma directa. Demostrar que $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ es de dimensión finita y

$$\dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_m) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_m.$$

[*El ejercicio anterior profundiza la analogía entre sumas directas de subespacios y uniones disjuntas de subconjuntos. Específicamente, compare este ejercicio con la siguiente declaración obvia: si un conjunto se escribe como una unión separada de subconjuntos finitos, entonces el número de elementos en el conjunto es igual a la suma de los números de elementos en los subconjuntos separados.*]

Demostración.- Luego de ver que se cumple para $m = 1$. Sea verdadero para $m = k$. Esto es, si $U_1, U_2, \ldots, U_k$ son subespacios de V tal que $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ es una suma directa. Entonces, $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ es de dimensión finita y

$$\dim(U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k) = \dim U_1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_k.$$

Ahora, demostremos que el resultado de cumple para $m = k + 1$. Sea $U_1, U_2, \ldots, U_k, U_{k+1}$ subespacios de V tal que $U_1 + U_2 + \cdots + U_k + U_{k+1}$ es una suma directa. Luego, definamos a $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$. De donde, $W + U_{k+1}$ es una suma directa. De lo que podemos concluir dos cosas:

i) $W \cap U_{k+1} = W \oplus U_{k+1}$.

ii) $W \cap U_{k+1} = \{0\}$. Esto implica que $\dim (W \cap U_{k+1}) = 0$.

Por el teorema de la dimensión, tenemos que

$$\dim(W + U_{k+1}) = \dim(W) + \dim (U_{k+1}) - \dim(W \cap U_{k+1}).$$

Usando (i) y (ii),

$$\dim(W \oplus U_{k+1}) = \dim(W) + \dim (U_{k+1}).$$

En otras palabras,

$$\dim(U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \oplus U_{k+1}) = \dim(U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k) + \dim(U_{k+1}).$$

Usando la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\dim(U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \oplus U_{k+1}) = \dim(U_1) + \dim(U_2) + \cdots + \dim(U_k) + \dim(U_{k+1}).$$

Esto nos muestra que se cumple para $m = k + 1$. De lo que también nos demuestra que $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \oplus U_{k+1}$ es de dimensión finita ya que cada $U_i i's$ es de dimensión finita y la dimensión de $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \oplus U_{k+1}$ es la suma de todas las dimensiones de $U_i's$. Por lo tanto, por el principio de inducción, resulta verdadero para todo $m \in \mathbf{N}$.

17. Se puede suponer, por analogía con la fórmula para el número de elementos en la unión de tres subconjuntos de un conjunto finito, que si U_1, U_2, U_3 son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces

$$\begin{aligned}\dim(U_1+U_2+U_3) &= \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3\\ &= \dim(U_1\cap U_2) - \dim(U_1\cap U_3) - \dim(U_2\cap U_3) + \dim(U_1\cap U_2\cap U_3).\end{aligned}$$

Demostrar esto o dar un contraejemplo.

Demostración.- Podemos dar un contraejemplo para ver que este resultado no es verdadero en general. Sea $V = \mathbf{R}^2$ y U_1, U_2, U_3 los subespacios de V definidos por:

$$\begin{aligned}U_1 &= \operatorname{span}\{(1,0)\}.\\ U_2 &= \operatorname{span}\{(0,1)\}.\\ U_3 &= \operatorname{span}\{(1,1)\}.\end{aligned}$$

Estos subespacios son $\dim(U_1) = \dim(U_2) = \dim U_3 = 1$. Luego ya que $U_1+U_2+U_3$ contiene los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$, que es una base de $\mathbf{R}^2$. Por lo que, $U_1+U_2+U_3 = \mathbf{R}^2$. Lo que implica,

$$\dim(U_1+U_2+U_3) = 2.$$

Por otro lado, cada U_1, U_2, U_3 es una recta que pasa por el origen donde el punto de intersección de dos de ellas es el origen. De este modo,

$$\dim(U_1\cap U_2) = \dim(U_1\cap U_3) = \dim(U_2\cap U_3) = 0.$$

De la misma manera,

$$\dim(U_1\cap U_2\cap U_3) = 0.$$

Así, tenemos que

$$\dim(U_1)+\dim(U_2)+\dim(U_3)-\dim(U_1\cap U_2)-\dim(U_1\cap U_3)-\dim(U_2\cap U_3)+\dim(U_1\cap U_2\cap U_3) = 3.$$

Pero vimos que $\dim(U_1+U_2+U_3) = 2$. que es distinto a

$$\dim(U_1)+\dim(U_2)+\dim(U_3)-\dim(U_1\cap U_2)-\dim(U_1\cap U_3)-\dim(U_2\cap U_3)+\dim(U_1\cap U_2\cap U_3).$$

2

Transformaciones lineales

2.1 Notación ***F*, *V*, *W*.**

- **F** denota **R** o **C**.
- V y W denota espacios vectoriales sobre **F**.

2.D El espacio vectorial de las Transformaciones lineales

Definición y ejemplos de Transformaciones lineales

2.2 Definición **Transformación lineal.**

Una **transformación lineal** de V en W es una función $T : V \to W$ con las siguientes propiedades:

- **Aditividad**
$$T(u + v) = Tu + Tv \text{ para todo } u, v \in V;$$
- **Homogeneidad**
$$T(\lambda v) = \lambda(Tv) \text{ para todo } \lambda \in \mathbf{F} \text{ y todo } v \in V.$$

2.3 Notación $\mathcal{L}(V, W)$

El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se denota por $\mathcal{L}(V, W)$.

2.5 Teorema **Transformaciones lineales y bases del dominio.**

Suponga que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, \ldots, w_n \in W$. Entonces, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que
$$T(v_j) = w_j$$

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Demostración.- Primero demostremos la existencia de una transformación lineal T, con la propiedad deseada. Defina $T : V \to W$ por

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1w_1 + \cdots + c_nw_n.$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son elementos arbitrarios de $\mathbf{F}$. La lista $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, y por lo tanto, la ecuación anterior de hecho define una función T para V en W (porque cada elemento de V puede ser escrito de manera única en la forma $c_1v_1, \ldots, c_nv_n$). Para cada j, tomando $c_j = 1$ y las otras $c's$ igual a 0 demostramos la existencia de $T(v_j) = w_j$.
Si $u, v \in V$ con $u = a_1v_1, \ldots, a_nv_n$ y $v = c_1v_1, \ldots, c_nv_n$, entonces

$$\begin{aligned} T(v+u) &= T\left[(a_1+c_1)v_1 + \ldots + (a_n+a_n)v_n\right] \\ &= (a_1+c_1)w_1 + \ldots + (a_n+c_n)w_n \\ &= (a_1w_1 + \ldots + a_nw_n) + (c_1w_1 + \ldots + c_nw_n) \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

Similarmente, si $\lambda \in \mathbf{F}$ y $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$, entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda c_1v_1 + \cdots + \lambda c_nv_n) \\ &= \lambda c_1w_1 + \cdots + \lambda c_nw_n \\ &= \lambda(c_1w_1 + \cdots + c_nw_n) \\ &= \lambda T(v). \end{aligned}$$

Así, T es una transformación lineal para V en W.
Para probar que es único, suponga que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y que $T(v_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Sea $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{F}$. La Homogeneidad de T implica que $T(c_jv_j) = c_jw_j$ para $j = 1, \ldots, n$. La Aditividad de T implica que

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1w_1 + \cdots + c_nw_n.$$

Por lo tanto, T se determina de forma única en span$(v_1, \ldots, v_n)$ para la ecuación de arriba. Porque $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, esto implica que T es determinado únicamente en V. ■

Operaciones algebraicas en $\mathcal{L}(V, W)$

2.6 Definición **Adición y multiplicación escalar en $\mathcal{L}\ (V, W)$**

Suponga que $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbf{F}$. La **suma** $S + T$ y el **producto** λT son transformaciones lineales para V en W definida por

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v) \quad \text{y} \quad (\lambda T)(v) = \lambda(Tv)$$

para todo $v \in V$.

2.7 Teorema **$\mathcal{L}$ (V, W es un espacio vectorial)**

Con las Operaciones de adición y multiplicación escalar como se definió, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial. ■

Por lo general, no tiene sentido multiplicar dos elementos de un espacio vectorial, pero para algunos pares de combinaciones lineales existe un producto útil. Necesitaremos un tercer espacio vectorial, así que para el resto de esta sección supongamos que U es un espacio vectorial sobre **F**.

2.8 Definición **Producto de combinaciones lineales.**

Si $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces el producto $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ es definido por

$$(ST)(u) = S(Tu)$$

para $u \in U$.

En otras palabras, ST es solo la composición habitual $S \circ T$ de dos funciones, pero cuando ambas funciones son lineales, la mayoría de los matemáticos escriben ST en lugar de $S \circ T$. Debe verificar que ST es de hecho una transformación lineal de U a W siempre que $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Tenga en cuenta que ST se define solo cuando T se transforma en el dominio de S.

2.9 Teorema **Propiedades algebraicas de producto de transformaciones lineales.**

Asociatividad

$$(T_1 T_2)T_3 = T_1(T_2 T_3)$$

siempre que T_1, T_2 y T_3 sean transformaciones lineales tales que los productos tengan sentido (lo que significa que T_3 se transforma en el dominio de T_2, y T_2 se transfora en el dominio de T_1).

Identidad

$$TI = IT = T$$

siempre que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ (el primer I es la transformación de indentidad en V, y el segundo I es la transformación de identidad en W).

Propiedades distributivas

$$(S_1 + S_2)T = S_1 T + S_2 T \quad \text{y} \quad S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$$

siempre que $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V, W)$. ■

La multiplicación de aplicaciones lineales no es conmutativa. En otras palabras, no es necesariamente cierto que $ST = TS$, incluso si ambos lados de la ecuación tienen sentido.

2.10 Ejemplo Suponga $D \in \mathcal{L}[\mathcal{P}(\mathbf{R}), \mathcal{P}(\mathbf{R})]$ es la transformación de diferenciación definido en el ejemplo 3.4 y $T \in \mathcal{L}[\mathcal{P}(\mathbf{R}), \mathcal{P}(\mathbf{R})]$ es la multiplicación por la transformación x^2 definida tempranamente en esta sección. Muestre que $TD \neq DT$.

Demostración.- Se tiene

$$[(TD)p](x) = x^2 p'(x) \quad \text{pero} \quad [(DT)p](x) = x^2 p'(x) + 2xp(x).$$

En otras palabras, no es lo mismo derivar y luego multiplicar por x^2 que multiplicar por x^2 y luego derivar. ■

2.11 Teorema Transformaciones lineales toman 0 a 0.

Suponga T es una transformación lineal para V en W. Entonces $T(0) = 0$.

Demostración.- Por la aditividad, se tiene

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0).$$

Agregue el inverso aditivo de $T(0)$ cada lado de la ecuación anterior para concluir que $T(0) = 0$. ■

Ejercicios 3.A

1. Suponga $b, c \in \mathbf{R}$. Defina $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ por

$$T(x,y,z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz).$$

Demuestre que T es lineal si y sólo si $b = c = 0$.

Demostración.- Por definición de transformación lineal, tendremos que demostrar que se cumple las propiedades de aditividad y homogeneidad.

Aditividad.- Supongamos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$. Entonces, por la definición de T se tiene

$$\begin{aligned}
T\left[(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)\right] &= T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \\
&= [2(x_1+x_2) - 4(y_1+y_2) + 3(z_1+z_2) + b, \\
&\ 6(x_1+x_2) + c(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)] \\
&= (2x_1 - 4y_1 + 3z_1 + b, 6x_1 + cx_1y_1z_1) \\
&+ (2x_2 - 4y_2 + 3z_2 + b, 6x_2 + cx_2y_2z_2) \\
&= T(x_1,y_1,z_1) + T(x_2,y_2,z_2).
\end{aligned}$$

Esto se cumplirá si $2b = b \Leftrightarrow b = 0$ y $cx_1y_1z_1 + cx_1y_2z_1 + cx_2y_1z_1 + cx_2y_2z_1 + cx_1y_1z_2 + cx_1y_2z_2 + cx_2y_1z_2 + cx_2y_2z_2 = cx_1y_1z_1 + cx_2y_2z_2 \Leftrightarrow c = 0$.

Homogeneidad.- Supongamos $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ y $\lambda \in \mathbf{R}$. Entonces, por la definición de T se tiene

$$\begin{aligned}
T\left[\lambda(x,y,z)\right] &= (2\lambda x - 4\lambda y + 3\lambda z + \lambda b, 6\lambda x + c\lambda xyz) \\
&= \lambda(2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz) \\
&= \lambda T\left[(x,y,z)\right].
\end{aligned}$$

Notemos que la homogeneidad se cumplirá para todo $b, c \in \mathbf{R}$. Por lo tanto, T es lineal si y sólo si $b = c = 0$.

2. Suponga $b, c \in \mathbf{R}$. Defina $T : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^2$ por

$$Tp = \left[3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx + c \operatorname{sen} p(0)\right].$$

Demuestre que T es una transformación lineal si y sólo si $b = c = 0$.

Demostración.- Primero demostraremos que si T es una transformación lineal, entonces $b = c = 0$. Por definición para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha Tp = T(\alpha p)$$

De esta manera se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha Tp &= \alpha \left[3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\ dx + c \operatorname{sen} p(0)\right] \\
&= \left[3\alpha p(4) + 5\alpha p'(6) + b\alpha p(1)p(2), \alpha \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\ dx + c\alpha \operatorname{sen} p(0)\right] \quad (1) \\
T(\alpha p) &= \left[3(\alpha p)(4) + 5(\alpha p)'(6) + b(\alpha p)(1)(\alpha p)(2), \int_{-1}^{2} x^3 (\alpha p)(x)\ dx + c \operatorname{sen}(\alpha p)(0)\right].
\end{aligned}$$

Es decir, si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, entonces

$$(\alpha p)(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)\, x + (\alpha a_2)\, x^2 + \cdots + (\alpha a_n)\, x^n.$$

Por lo tanto, para cada x,

$$\begin{aligned}
(\alpha p)(x) &= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)\, x + (\alpha a_2)\, x^2 + \cdots + (\alpha a_n)\, x^n \\
&= \alpha \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) \\
&= \alpha p(x).
\end{aligned}$$

Por esta deducción podemos decir que,

$$\begin{aligned}
T(\alpha p) &= \left[3\alpha p(4) + 5\alpha p'(6) + b\alpha^2 p(1)p(2), \int_{-1}^{2} \alpha x^3 p(x)\ dx + c \operatorname{sen}(\alpha p(0))\right] \\
&= \left[\alpha \left(3p(4) + 5p'(6) + b\alpha p(1)p(2)\right), \alpha \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\ dx + c\alpha \operatorname{sen} p(0)\right] \quad (2)
\end{aligned}$$

Ahora, podemos igualar (1) y (2) si y sólo si

$$b\alpha^2 p(1)p(2) = b\alpha P(1)p(1) \quad \text{y} \quad c \operatorname{sen}(\alpha p(0)) = c\alpha \operatorname{sen} p(0)$$

para cada $p(x)$ y cada $\alpha \in \mathbf{R}$.

Sean $p(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$ y $\alpha = 2$. De donde,

$$b\alpha^2 p(1)p(2) = 4b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad b\alpha p(0)p(1) = 2b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
4b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) &\Leftrightarrow 4b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) - 2b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow b = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$0 = c \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = c \sin\left(\alpha p(0)\right) = c\alpha \operatorname{sen} p(0) = 2c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2c$$

Por lo tanto,

$$c = 0.$$

Ahora, demostremos que si $b = c = 0$, entonces T es lineal; es decir, que T es aditiva y Homogénea. Supongamos $p, q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ y $\lambda \in \mathbf{R}$, por lo que

$$\begin{aligned}
T(p+q) &= \left[3(p+q)(4) + 5(p+q)'(6), \int_{-1}^{2} x^3 (p+q)(x)\, dx\right] \\
&= \left[3\left(p(4) + q(4)\right) + 5\left(p'(6) + q'(6)\right), \int_{-1}^{2} x^3 \left(p(x) + q(x)\right)\, dx\right] \\
&= \left[3p(4) + 5p'(6) + 3q(4) + 3q'(6), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx + \int_{-1}^{2} x^3 q(x)\, dx\right] \\
&= \left[3p(4) + 5p'(6), \int_{-1}^{2} p(x)\, dx\right] + \left[3q(4) + 3q'(6), \int_{-1}^{2} x^3 q(x)\, dx\right] \\
&= Tp + Tq.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
T(\lambda p) &= \left[3(\lambda p)(4) + 5(\lambda p)'(6), \int_{-1}^{2} x^3 (\lambda p)(x)\, dx\right] \\
&= \left[3\lambda p(4) + 5\lambda p'(6), \lambda \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx\right] \\
&= \left[\lambda(3p(4) + 5p(6)), \lambda \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx\right] \\
&= \lambda \left[3p(4) + 5p'(6), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\, dx\right] \\
&= \lambda Tp.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es lineal. Así, concluimos que T es lineal si y sólo si $b = c = 0$.

3. Suponga $T \in \mathcal{L}\left(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^m\right)$. Demostrar que existe escalares $A_{j,k} \in \mathbf{F}$ para $j = 1, \ldots, m$ y $k = 1, \ldots, n$ tal que

$$T\left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \mathbf{F}^n.$$

[El ejercicio demuestra que T tiene la forma prometida en el úmtimo apartado del ejemplo 3.4.]

4. Suponga $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v_1, \ldots, v_m$ una lista de vectores en V tal que $Tv_1, \ldots, Tv_m$ es una lista linealmente independiente en W. Demostrar que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sea para $c_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

Luego, multiplicamos por T a ambos lados de la ecuación anterior,

$$T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n) = T(0).$$

Por la definición 1.6 y el torema 3.11 tenemos que

$$c_1 T v_1 + c_2 T v_2 + \cdots + c_n T v_n = 0.$$

Entonces, como $Tv_1, \ldots, Tv_m$ es una lista linealmente independiente en W.

5. Demostrar la afirmación 3.7.

Demostración.- Verificaremos cada propiedad.

- Conmutatividad.- Sean $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, tenemos

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v) = T(v) + S(v) = (T + S)(v).$$

  Por lo tanto, la adición es comunutativa.

- Asociatividad.- Saen $R, S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, tenemos

$$\begin{aligned} [(R+S)+T](v) &= (R+S)(v) + T(v) \\ &= R(v) + S(v) + T(v) \\ &= R(v) + [S(v) + T(v)] \end{aligned}$$

  Por lo que la adición es asociativa. Luego, sean $a, b \in \mathbf{F}$, entonces

$$[(ab)T](v) = (ab)T(v) = a[bT(v)] = [a(bT)](v).$$

  Por lo tanto, la multiplicación es asociativa.

- Identidad aditiva.- Sea $0 \in \mathcal{L}(V, W)$ denotado como transformación cero, sean también $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$. Entonces,

$$(T + 0)(v) = T(v) + 0(v) = T(v).$$

  Por lo tanto, la transformación cero es la identidad aditiva.

- Inverso aditivo.- Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, y definamos a $(-T) \in \mathcal{L}(V, W)$ por $(-T)(v) = -T(v)$, entonces

$$[T + (-T)](v) = T(v) + (-T)(v) = T(v) - T(v) = 0,$$

  Por lo que, $(-T)$ es el inverso aditivo para cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

- Identidad multiplicativa.- Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces,

$$(1T)(v) = 1(T(v)) = T(v).$$

Así la identidad multiplicativa de **F** es la identidad multiplicativa de la multiplicación escalar.

- Propiedad distributiva.- Sean $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, $a, b \in \mathbf{F}$ y $v \in V$. Entonces,

$$\begin{aligned} [a(S+T)](v) &= a(Sv+Tv) \\ &= aS(v) + aT(v) \\ &= (aS)(v) + (aT)(v) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [(a+b)T](v) &= (a+b)T(v) \\ &= aT(v) + bT(v) \\ &= (aT)(v) + (bT)(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

6. Demostrar la afirmación 3.9.

Demostración.-

- Asociatividad.- Para x en el dominio de T_3, tenemos

$$\begin{aligned} [(T_1T_2)T_3](x) &= (T_1T_2)[T_3(x)] \\ &= T_1[T_2[T_3(x)]] \\ &= T_1[(T_2T_3)(x)] \\ &= [T_1(T_2T_3)](x). \end{aligned}$$

- Identidad.- Para $v \in V$, se tiene

$$\begin{aligned} TI(v) &= T[I(v)] \\ &= T(v) \\ &= I[T(v)] \\ &= IT(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $TI = IT = I$.

- Proipedad distributiva.- Para $u \in U$, se tiene

$$\begin{aligned} [(S_1+S_2)T](u) &= (S_1+S_2)[T(u)] \\ &= S_1[T(u)] + S_2[T(u)] \\ &= S_1T(u) + S_2T(u) \\ &= (S_1T+S_2T)(u). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [T(S_1+S_2)](u) &= T[(S_1+S_2)(u)] \\ &= T[S_1(u)+S_2(u)] \\ &= T[S_1(u)] + T[S_2(u)] \\ &= (TS_1+TS_2)(u). \end{aligned}$$

7. Demostrar que toda transformación lineal de un espacio vectorial unidimensional a sí mismo es multiplicación por un escalar. Más precisamente demostrar que si $\dim V = 1$ y $T \in \mathcal{L}(V,V)$, entonces existe $\lambda \in \mathbf{F}$ tal que $Tv = \lambda v$ para todo $v \in V$.

Demostración.- Supongamos que $\dim V = 1$ y $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sea también $u \in V, u \neq 0$. Entonces, todo vector en V es un multiplo escalar de u. En particular, $Tu = au$ para algún $a \in \mathbf{F}$. Ahora, consideremos un vector $v \in V$. Ya que, existe $b \in \mathbf{F}$ tal que $v = bu$. Entonces,

$$\begin{aligned} Tv &= T(bu) \\ &= bT(u) \\ &= b(au) \\ &= a(bu) \\ &= av. \end{aligned}$$

8. Dar un ejemplo de una función $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

para todo $a \in \mathbf{R}$ y para todo $v \in \mathbf{R}^2$ pero φ no es lineal.
[*El ejercicio anterior y el siguiente ejercicio muestran que ni la homogeneidad ni la aditividad por sí solas son suficientes para implicar que una función es una transformación lineal.*]

Respuesta.- Si $v = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, entonces definamos $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ como,

$$\varphi(v) = \varphi[(x,y)] = (x^3+y^3)^{1/3}.$$

Calculemos ahora $\varphi(av)$;

$$\begin{aligned}
\varphi(av) &= \varphi\left[a(x,y)\right] \\
&= \varphi\left[(ax,ay)\right] \\
&= \left[(ax)^3+(ay)^3\right]^{1/3} \\
&= \left[(a^3x^3)+(a^3y^3)\right]^{1/3} \\
&= a\left(x^3+y^3\right)^{1/3} \\
&= a\varphi\left(v\right)
\end{aligned}$$

Ahora, verifiquemos que φ no es lineal. Para ello, consideremos $v_1=(1,0)$ y $v_2=(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(v_1) &= \varphi\left[(1,0)\right]=1 \\
\varphi(v_2) &= \varphi\left[(0,1)\right]=1
\end{aligned}$$

De donde,

$$\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=1+1=2.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(v_1+v_2\right) &= \varphi\left[(1,0)+(0,1)\right] \\
&= \varphi\left[(1,1)\right] \\
&= \left[(1)^3+(1)^3\right]^{1/3} \\
&= 2^{1/3}.
\end{aligned}$$

Ya que,

$$\varphi\left(v_1+v_2\right)\neq\varphi\left(v_1\right)+\varphi\left(v_2\right) \qquad \text{(prop. de aditividad)}$$

entonces φ no es lineal.

9. Dar un ejemplo de una función $\varphi:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ tal que

$$\varphi(w+z)=\varphi(w)+\varphi(z)$$

para todo $w,z\in\mathbf{C}$ pero φ no es lineal. (Aquí $\mathbf{C}$ se considera como un espacio vectorial complejo. [*También existe una función $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tal que φ satisface la condición de aditividad anterior pero φ no es lineal. Sin embargo, mostrar la existencia de tal función implica herramientas considerablemente más avanzadas.*]

Respuesta.- Sean $x_1+y_1i,x_2+y_2i\in\mathbf{C}$ definida por, $\varphi:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ tal que

$$\varphi\left[(x+yi)\right]=x-yi.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\varphi\left[(x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i)\right] &= \varphi\left[(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i\right] \\
&= (x_1+x_2)-(y_1+y_2)i \\
&= (x_1-y_1 i)+(x_2-y_2 i) \\
&= \varphi\left[(x_1+y_1 i)\right]+\varphi\left[(x_2+y_2 i)\right].
\end{aligned}$$

Esto demuestra la aditividad de φ. Sin embargo, sean $v = 1+2i \in \mathbf{C}$ y $a = i \in \mathbf{C}$. Entonces,

$$\varphi(av) = \varphi\left[i(\cdot 1+2i)\right] = \varphi\left(i+2i^2\right) = \varphi(-2+1) = -(2+i)$$

y

$$a\varphi(v) = i \cdot \varphi(1+2i) = i(1+2i) = i-2.$$

Esto demuestra que

$$\varphi(av) \neq a\varphi(v)$$

no es lineal.

10. Suponga que U es un subespacio de V con $U \neq V$. Suponga también que $S \in \mathcal{L}(U,W)$ y $S \neq 0$ (lo que significa que $Su \neq 0$ para algún $u \in U$). Defina $T: V \to W$ por

$$Tv = \begin{cases} Sv & \text{si} \quad v \in U \\ 0 & \text{si} \quad v \in V \ \text{ y } \ v \notin U. \end{cases}$$

Demostrar que T no es una transformación lineal en V.

Demostración.- Notemos que $U \neq V$. Luego, podemos elegir $u \in U$ tales que $Su \neq 0$ y $v \in V$, entonces $u+v \in U$. De lo contrario,

$$v = (u+v)-u \in U$$

producirá una contradicción. Por eso $T(u+v) = 0$ por definición. Por otro lado, $Tu+Tv = SU \neq 0$. Resulta que $T(u+v) \neq Tu+Tv$, por eso T no es una transformación lineal en V.

11. Suponga que V es de dimensión finita. Demostrar que cada transformación lineal en una subespacio de V puede ser extendida a una transformación lineal en V. En otras palabras, demuestra que si U es un subespacio de V y $S \in \mathcal{L}(U,W)$, entonces existe $T \in \mathcal{L}(V,W)$ tal que $Tu = Su$ para todo $u \in U$.

Demostración.- Sea $v_1,\ldots,v_m$ una base de U, entonces por el teorema 2.33 podemos extenderlo a una base de V. Esto es, $v_1,\ldots,v_m,v_{m+1}\ldots,v_n$ es una extensión base de V tal que $v_{m+1},\ldots,v_n$ linealmente independiente.
Para cualquier $z \in V$, existe $a_1,\ldots,a_n \in \mathbf{F}$ tal que $z = \sum_{k=1}^n a_k v_k$ definida por

$$\begin{aligned}
T \quad : \qquad V &\to W \\
\sum_{k=1}^n a_k v_k &\mapsto \sum_{k=1}^m a_k S v_k + \sum_{k=m+1}^n a_k v_k.
\end{aligned}$$

Dado que cada $v \in V$ tiene una única representación como una combinación lineal de elementos de nuestra base, la transformación está definida. Primero, demostremos que T existe y es una transformación lineal. Suponga $z_1, z_2 \in V$. Luego, sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$z_1 = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \quad \text{y} \quad z_2 = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$$

se sigue que,

$$\begin{aligned}
T(z_1 + z_2) &= T\left(\sum_{k=1}^{n} a_kv_k + \sum_{1}^{n} b_kv_k\right) \\
&= T\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)v_k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)Sv_k + \sum_{k=m+1}^{n} (a_k + b_k)v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_kSv_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_kv_k + \sum_{k=1}^{n} b_kSv_k + \sum_{k=m+1}^{n} b_kv_k \\
&= T\left(\sum_{k=1}^{n} a_kv_k\right) + T\left(\sum_{k=1}^{n} b_kv_k\right) \\
&= T(z_1) + T(z_2).
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que T es aditiva. Ahora, sean $\sum_{i=1}^{n} a_kv_k = z \in V$ y $\lambda \in \mathbf{F}$, entonces para $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$, se tiene

$$\begin{aligned}
T(\lambda z) &= T\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} a_kv_k\right) \\
&= T\left[\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k)v_k\right] \\
&= S\left[\sum_{k=1}^{m} (\lambda a_k)v_k\right] + \sum_{k=m+1}^{n} (\lambda a_k)v_k \\
&= \lambda S\left[\sum_{k=1}^{m} a_kv_k\right] + \lambda \sum_{k=m+1}^{n} a_kv_k \\
&= \lambda\left[S\left(\sum_{k=1}^{m} a_kv_k\right) + \sum_{k=m+1}^{n} a_kv_k\right] \\
&= \lambda T\left(\sum_{k=1}^{n} a_kv_k\right) = \lambda Tz
\end{aligned}$$

por lo que T es homogénea. Por lo tanto, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Por último, para ver si $T = S$, sea $u \in U$ con $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que $u = \sum_{k=1}^{m} a_kv_k$ se tiene

$$Tu = T\left(\sum_{k=1}^{m} a_kv_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_kSv_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_kv_k = S\left(\sum_{k=1}^{m} a_kv_k\right) = Su.$$

Notemos que $\sum_{k=m+1}^{n} a_k v_k$ es linealmente independiente. Así, completamos la demostración.

12. Suponga que V es de dimensión finita con $\dim(V) > 0$, y suponga W es de dimensión infinita. Demostrar que $\mathcal{L}(V,W)$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Cualquier transformación lineal en V está determinado únicamente por su efecto sobre los elementos base. Por lo tanto, es suficiente definir una transformación lineal solo sobre los elementos base. Ahora, Recordemos por el ejercicio por el ejercicio 14A, Capitulo 2, que W es un espacio vectorial de dimensión infinita si y sólo existe una secuencia $w_1, w_2, \ldots \in W$ tal que $w_1, w_2, \ldots, w_m$ es linealmente independiente para cada $m \geq 1$. Sea $T_i \in \mathcal{L}(V,W)$ tal que $T_i(v_1) = w_i$ donde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es una base de V. La existencia de T_i está garatizado por 3.5. Entonces,demostraremos que $T_1, \ldots, T_m$ es linealmente independiente para cada entero positivo m. Supongamos que existen $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1 T_1, + \cdots + a_m T_m = 0.$$

Entonces, tenemos $(a_1 T_1 + \cdots + a_m T_m)(v_1) = 0$. Es decir,

$$a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m = 0.$$

Ya que $W_1, W_2, \ldots, W_m$ es linealmente independiente, se sigue que $a_1 = \cdots = a_m = 0$. Por lo tanto, $T_1, \ldots, T_m$ es linealmente independiente. Una vez más por el ejercicio 14A, Capitulo 2; se tiene que $\mathcal{L}(V,W)$ es de dimensión infinita.

13. Suponga que $v_1, \ldots, v_m$ es una lista de vectores linealmente dependiente en V. Suponga también que $W \neq \{0\}$. Demostrar que existe $w_1, \ldots, w_m \in W$ tal que que ningún $T \in \mathcal{L}(V,W)$ satisface $Tv_k = w_k$ para cada $k = 1, \ldots, m$.

Demostración.- Ya que, $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente dependiente, uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los demás. Sin perdida de generalidad, suponga que este es v_m. Entonces, existe $a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbf{F}$ tal que

$$v_m = a_1 v_1 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1}$$

Ya que, $W \neq \{0\}$, existe algún $z \in W$, $z \neq 0$. Definimos ahora $w_1, \ldots, w_m \in W$ por

$$w_k = \begin{cases} z & \text{si } k = m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora, supongamos que existe $T \in \mathcal{L}(V,W)$ tal que $Tv_k = w_k$ para $k = 1, \ldots, m$. Se sigue que

$$\begin{aligned} T(0) &= T\left(v_m - a_1 v_1 - \cdots - a_{m-1} v_{m-1}\right) \\ &= Tv_m - a_1 Tv_1 - \cdots - a_{m-1} Tv_{m-1} \\ &= z. \end{aligned}$$

Pero como $z \neq 0$, entonces $T(0) \neq 0$, lo cual es un absurvo por (3.11). Por lo tanto, no existe tal transformación lineal.

14. Suponga que V es de dimensión finita con $\dim V \geq 2$. Demostrar que existe $S, T \in \mathcal{L}(V,V)$ tal que $ST \neq TS$.

Demostración.- Ya que, $\dim V \geq 2$, existe una base de V formada por al menos dos vectores. Fijemos una base de V y v_1, v_2 los primeros dos vectores de esa base. Definamos T y S en la base de V tal que

$$T(v_1) = v_2, T(v_2) = v_1 \text{ y } S(v_1) = v_2, S(v_2) = 0.$$

Ahora, calculemos ST y TS para el vector v_1:

$$\begin{array}{rcccccc} ST(v_1) & = & S[T(v_1)] & = & S(v_2) & = & 0 \\ TS(v_1) & = & T[S(v_1)] & = & T(v_2) & = & v_1. \end{array}$$

Lo que demuestra que

$$ST(v_1) \neq TS(v_1).$$

Y por lo tanto,

$$ST \neq TS.$$

2.E Espacios Nulos y Rangos

Espacio Nulo (kernel) e Inyectividad

2.12 Definición **Espacio nulo, null T.**

Para $T \in \mathcal{L}(V, W)$, el **espacio nulo** de T denotado por null T es el subconjunto de V formado por aquellos vectores que T transforma a 0:

$$\text{null } T = \{v \in V : Tv = 0\}.$$

Algunos matemáticos usan el termino **kernel** en lugar de **espacio nulo**. La palabra "null" significa cero.

El siguiente resultado demuestra que el espacio nulo o kernel de cada transformación lineal es un subespacio del dominio. En particular, 0 está en el espacio nulo de cada transformación lineal.

2.14 Teorema **El espacio nulo es un subespacio.**

Suponga que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces, null T es un subespacio de V.

Demostración.- Ya que T es una transformación lineal, entonces sabemos por 3.11 que $T(0) = 0$. Por lo tanto, $0 \in \text{null } T$.
Supongamos ahora que $u, v \in \text{null } T$. Entonces,

$$T(u + v) = Tu + Tv = 0 + 0 = 0.$$

De ahí, $u + v \in \text{null } T$. Así null T es cerrado bajo la adición.
Luego, supongamos que $u \in \text{null } T$ y $\lambda \in \mathbf{F}$

$$T(\lambda u) = \lambda Tu = \lambda 0 = 0.$$

Por lo que, $\lambda u \in \text{null } T$. Así, null T es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Por 1.34, null T es un subespacio de V. ■

2.15 Definición **Inyectiva.**

Una función $T : V \to W$ es llamada **inyectiva** si $Tu = Tv$ implica $u = v$.

o T es inyectiva si $u \neq v$ implica que $Tu \neq Tv$.

Muchos matemáticos usan el termino **uno a uno**.

El siguiente resultado dice que podemos comprobar si una transformación lineal es inyectivo al verificar si 0 es el único vector que se asigna a 0.

2.16 Teorema **Inyectividad es a equivalente decir que el espacio nulo es igual a $\{0\}$.**

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces, T es inyectiva si y solo si null $T = \{0\}$.

Demostración.- Primero suponga que T es inyectiva. Queremos demostrar que null $T = \{0\}$. Sabemos por 3.11 que $\{0\} \subset$ null T. Para probar la inclusión en la otra dirección, suponga $v \in$ null T. Entonces,

$$t(v) = 0 = T(0).$$

Ya que T es inyectiva, implica que $v = 0$. Así, podemos concluir que null $T = \{0\}$. Como queriamos.

Para probar la implicación en la otra dirección. Si null $T = \{0\}$, entonces demostrarmos que T es inyectiva. Para esto, suponga que $u, v \in V$ y $Tu = Tv$, de donde

$$0 = Tu - Tv = T(u - v)$$

Así, $u - v$ está en null T, el cual es igual a $\{0\}$. Por lo tanto, $u - v = 0$, implica que $u = v$. Concluimos que, T es inyectiva. ■

Rango y sobreyectividad

Damos un nombre al conjunto de resultados de una función.

2.17 Definición **Rango.**

Para T una función de V en W, el **rango** de T es el subconjunto de W que consta de aquellos vectores que son de la forma Tv para algún $v \in V$:

$$\text{range}\, T = \{Tv : v \in V\}.$$

Algunos matemáticos usan la palabra **imagen** en lugar de rango.

EL siguiente resultado muestra que el rango de cada transformación lineal es un subespacio del espacio vectorial en el que se esta transformando.

2.19 Teorema El rango es un subespacio.

Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces el rango de T es un subespacio de W.

Demostración.- Suponga que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces por 3.11, $T(0) = 0$, lo que implica que $0 \in$ range T.
Si $w_1, w_2 \in$ range T, entonces existe $v_1, v_2 \in V$ tal que $Tv_1 = w_1$ y $Tv_2 = w_2$. Así,

$$T(v - 1 + v - 2) = Tv_1 + v_2 = w_1 + w_2.$$

Ya que $w_1 + w_2 \in$ rango T. Por lo tanto, rango T es cerrado bajo la adición.
Si $w \in$ rango T y $\lambda \in \mathbf{F}$, entonces existe $v \in V$ tal que $T_v = w$. Por lo que,

$$T(\lambda v) = \lambda T v = \lambda w.$$

Así, $\lambda w \in$ range T. Por lo tanto, rango T es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Por 1.34, el range T es un subespacio de W. ■

2.20 Definición Sobreyectiva.

Una función $T : V \to W$ es llamada **sobreyectiva** si su rango es igual a W.

Que una transformación lineal sea sobreyectiva depende del espacio vectorial al que se proyecte.

Teorema fundamental de las transformaciones lineales

2.22 Teorema Teorema fundamental de las transformaciones lineales.

Suponga que V es de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces, T es de dimensión finita y

$$\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T.$$

Demostración.- Sea $u_1, \ldots, u_m$ una base de null T; en consecuencia dim null $T = m$. Por 2.33, la lista linealmente independiente $u_1, \ldots, u_m$ puede extenderse a una base

$$u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$$

de V. Así la dim $V = m + n$. Para completar la prueba, sólo necesitamos demostrar que rango T es de dimensión finita y la dim rango $T = n$. Es decir, mostrarmos que $Tv_1, \ldots, Tv_n$ es una base del rango de T.

Sea $v \in V$. Ya que, $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ genera V. Entonces,

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n.$$

donde las $a's$ y $b's$ son en $\mathbf{F}$. Aplicando T a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$T_v = b_1 T v_1 + \ldots + b_n T v_n.$$

El termino con la forma Tu_j desaparece, porque cada u_j esta en null T. De donde, la última ecuación implica que $Tv_1, \ldots, Tv_n$ genera rango T. En particular, rango T es de dimensión finita.

Ahora, demostremos que $Tv_1, \ldots, Tv_n$ es linealmente independiente. Supongamos $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{F}$ y

$$c_1 Tv_1 + \cdots + c_n tv_n = 0.$$

Entonces,

$$T\left(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$c_1 v_1 + \cdots c_n v_n \operatorname{null} T.$$

Luego, ya que $u_1, \ldots, u_m$ genera null T, podemos escribir

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = d_1 u_1 + \cdots + d_m u_m.$$

para $d's$ en $\mathbf{F}$. Por el hecho de que $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente. Entonces, todos los $c's$ y $d's$ son 0. Por lo tanto, $Tv_1, \ldots, Tv_n$ es linealmente independiente y por ende es una base del rango T, como queriamos demostrar.

■

Ahora podemos demostrar que ninguna transformación lineal desde un espacio vectorial de dimensión finita hacia un espacio vectorial "más pequeño" puede ser inyectivo, donde "más pequeño" se mide por la dimensión.

2.23 Teorema **Una transformación para un espacio de dimensión pequeña no es inyectivo.**

Suponga que V y W son espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim V > \dim W$. Entonces, ninguna transformación lineal de V en W es inyectiva.

Demostración.- Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{null} T &= \dim V - \dim \operatorname{range} T \\ &\geq \dim V - \dim W \\ &> 0. \end{aligned}$$

Donde la ecuación de arriba viene dado por el teorema fundalmental de las transformaciones lineales (3.22). La desigualdad anterior establece que dim null $T > 0$. Esto significa que T contiene vectores distintos a cero. Por 3.16 concluimos que T es no inyectiva. ■

El siguiente resultado muestra que ninguna transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita a un espacio vectorial "más grande" puede ser sobreyectivo, donde "más grande" se mide por dimensión.

2.24 Teorema **Una transformación a un espacio de mayor dimensión no es suryectiva.**

Suponga que V y W son espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim V < \dim W$. Entonces, ninguna transformación lineal de V en W es sobreyectiva.

Demostración.- Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{range} T &= \dim V - \dim \operatorname{null} T \\ &\leq \dim V \\ &< \dim W. \end{aligned}$$

Donde la ecuación de arriba viene dado por el teorema fundalmental de las transformaciones lineales (3.22). La desigualdad anterior establece que range $T < \dim W$. Esto significa que range T no puede ser igual a W. Por lo tanto, T es no sobreyectiva.

■

Como veremos a continuación, 3.23 y 3.24 tienen importantes consecuencias en la teoría de ecuaciones lineales. La idea aquí es expresar cuestiones sobre sistemas de ecuaciones lineales en términos de transformaciones lineales.

2.25 Ejemplo Reformule en términos de transformaciones lineales la pregunta de si un sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene una solución distinta de cero.

Respuesta.- Sean los enteros m y n y sea $A_{j,k} \in \mathbf{F}$ para $j = 1, \ldots, m$ y $k = 1, \ldots, n$. Considere el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} A_{1,k} x_k &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{m,k} x_k &= 0. \end{aligned}$$

Está claro que $x_1 = \cdots = x_n = 0$ es la solución al sistema de ecuaciones; la cuestión aquí es si existen otras soluciones.

Defina $T : \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^m$ por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{1,k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} A_{m,k} x_k \right).$$

La ecuación $T(x_1, \ldots, x_n) = 0$ (el 0 aquí es la identidad aditiva en $\mathbf{F}^m$, es decir, la lista de longitud m de todos los 0) es la misma que el sistema homogéneo de ecuaciones lineales anterior.
Así pues, queremos saber si null T es estrictamente mayor que $\{0\}$. En otras palabras, podemos reformular nuestra pregunta sobre las soluciones no nulas de la siguiente manera (por 3.16): ¿Qué condición asegura que T no es inyectiva? ■

2.26 Teorema **Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.**

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con más variables que ecuaciones tienen soluciones distintas de cero.

Demostración.- Usemos la notación y el resultado de arriba. De donde, T es una transformación lineal de $\mathbf{F}^n$ en $\mathbf{F}^m$, y tenemos un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n variables $x_1, \ldots, x_n$. Por 3.23 vemos que T no es inyectiva si $n > m$. ■

2.29 Teorema **Sistemas no homogéneos de ecuaciones lineales.**

Un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales con más ecuaciones que variables no tienen solución para alguna opción de los términos constantes.

Demostración.- T es una transformación lineal para $\mathbf{F}^n$ en $\mathbf{F}^m$, y tenemos un sistema de m ecuaciones con n variables $x_1, \ldots, x_n$. Por 3.24 vemos que T es no sobreyectiva si $n < m$. ■

Ejercicios 3.B

1. Dar un ejemplo de una transformación lineal tal que $\dim \operatorname{null} T = 3$ y $\dim \operatorname{range} T = 2$.

Respuesta.- Sea, la transformación lineal $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$ tal que

$$(x_1, x_2, x_3, x_5, x_5) = (0, 0, 0, x_4, x_5).$$

Primero demostraremos que es una transformación lineal. Sea $x, y \in \mathbf{R}^5$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T\left[(x1, x_2, x_3, x_4, x_5) + (y_1, y_2, y_3, y_5, y_5)\right] \\ &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \\ &= (0, 0, 0, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \\ &= (0, 0, 0, x_4, x_5) + (0, 0, 0, y_4, y_5) \\ &= T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Luego, sea $\lambda \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(\lambda x) &= T(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5) \\ &= (0, 0, 0, \lambda x_4, \lambda x_5) \\ &= \lambda(0, 0, 0, x_4, x_5) \\ &= \lambda T(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal. Notemos ahora que,

$$\operatorname{null} T = \left\{ (x_1, x_2, x_3, 0, 0) \in \mathbf{R}^5 | x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Esta espacio claramente tiene como base a $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^5$, por ejemplo $(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0)$, por lo tanto tiene dimensión 3, y dado que $\dim$ range $T = 2$, por el teorema fundamental de transformaciones lineales, se tiene que

$$\dim \mathbf{R}^5 = 3 + \dim \operatorname{range} T.$$

De esta manera concluimos la demostración.

2. Suponga que V es un espacio vectorial y $S, T \in \mathcal{V}, \mathcal{V}$ tales que

$$\operatorname{range} S \subset \operatorname{null} T.$$

Demostrar que $(ST)^2 = 0$.

Demostración.- Sea $v \in V$. Por definición

$$(ST)^2(v) = S\left(T(S(T(v)))\right)$$

3. Suponga que $v_1, \ldots, v_m$ es una lista de vectores en V. Defina $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^m, V)$ por

$$T(z_1, \ldots, z_m) = z_1 v_1 + \cdots + z_m v_m.$$

(a) ¿Qué propiedad de T corresponde a $v_1, \ldots, v_m$ que genere V?

Respuesta.- El conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es un conjunto generador de V si y sólo si para cualquier $v \in V$, existe $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = z_1 v_1 + z_2 v_2 + \cdots + z_n v_n.$$

Esto es equivalente a decir que $v = T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ para algunos $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbf{F}^n$. Esto es, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es un conjunto generador si y sólo si cada $v \in V$ se encuentra en el rango T. Es decir, si y sólo si $V = \operatorname{range} T$. Por lo tanto, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es un conjunto generador de V si y sólo si T es sobreyectiva.

(b) ¿Qué propiedad de T corresponde a $v_1, \ldots, v_m$ que sea linealmente independiente?

Respuesta.- El conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es linealmente independiente si y sólo si

$$z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n = 0.$$

implica que $z_1, z_2, \ldots, z_n = 0$. Esto es equivalente a decir que $T(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ de donde $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ lo que significa que el único elemento que se encuentra en T es $(0, 0, \ldots, 0)$. Esto es verdadero sólo cuando T es inyectiva. Por lo tanto, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es linealmente independiente si y sólo si T es inyectiva.

4. Demostrar que

$$\left\{ T \in \mathcal{L}\left(\mathbf{R}^5, \mathbf{R}^4\right) : \dim \operatorname{null} T > 2 \right\}$$

no es un subespacio de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^5, \mathbf{R}^4)$.

Demostración.- Sea $e_1, \ldots, e_5$ una base de $\mathbf{R}^5$ y sea $d_1, \ldots, d_4$ una base para $\mathbf{R}^4$.