1

Cálculo diferencial

1.1 Ejemplos resueltos de problemas de extremos

Ejemplo 1.1 (Principio del producto máximo con suma constante)**.** Dado un número positivo S. Demostrar que entre todos los pares de números positivos x e y tales que $x+y=S$, el producto xy es el mayor cuando $x=y=\dfrac{1}{2}S$.

Demostración.- Si $x+y=S$, $y=S-x$ y el producto xy es igual a $x(S-x)=xS-x^2$. Pongamos $f(x)=xS-x^2$. Este polinomio cuadrático tiene como deriva primera $f'(x)=S-2x$ que es positiva para $x<\frac{1}{2}S$ y negativa para $x>\dfrac{1}{2}S$. Por tanto el máximo de xy se presenta cuando $x=\dfrac{1}{2}S$, $y=S-x=\dfrac{1}{2}S$. Esto también se puede demostrar sin utilizar el Cálculo. Pongamos simplemente $f(x)=\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}S\right)^2$ y observamos que $f(x)$ es máximo cuando $x=\dfrac{1}{2}S$.

Ejemplo 1.2 (Principio de suma mínima, con producto constante)**.** Dado un número positivo P. Demostrar que entre todos los pares de números positivos x e y tales que $xy=P$, el que hace la suma $x+y$ mínima es $x=y=\sqrt{P}$.

Demostración.- Tenemos que determinar el mínimo de la función $f(x)=x+\dfrac{P}{x}$ para $x>0$. La primera derivada es $f'(x)=1-\dfrac{P}{x^2}$. Esta es negativa para $x^2<P$ y positiva para $x^2>P$, de manera que $f(x)$ tiene su mínimo en $x=\sqrt{P}$. Luego, la suma $x+y$ es mínima cuando $x=y=\sqrt{P}$.

Ejemplo 1.3. Entre los rectángulos de perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.

Demostración.- Utilizando el resultado del ejemplo 4.1 Tom Apostol. Sea x e y los lados de un rectángulo cualquiera. Si el perímetro está fijado, entonces $x+y$ es constante, con lo que el área xy tiene mayor valor cuando $x=y$. Luego, el rectángulo máximo es el cuadrado.

Ejemplo 1.4. La media geométrica de dos números positivos no excede a su media aritmética. Esto es, $\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}(a+b)$.

Demostración.- Dados $a>0$, $b>0$, sea $P=ab$. Entre todos los positivos x e y siendo $xy=P$, la suma $x+y$ es la menor cuando $x=y=\sqrt{P}$. Es decir, si $xy=P$ entonces $x+y\geq\sqrt{P}+\sqrt{P}=2\sqrt{P}$. En particular, $a+b\geq 2\sqrt{P}=2\sqrt{ab}$, con lo que $\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}(a+b)$. La igualdad se presenta si y sólo si $a=b$.

Ejemplo 1.5. Un bloque de peso W es movido a lo largo de un plano por una fuerza que forma un ángulo θ con la recta de la dirección del movimiento, siendo $0\leq\theta\leq\frac{1}{2}\pi$,, como se ve en la figura 4.15 Tom Apostol. Supongamos que la resistencia por fricción es proporcional a la fuerza normal con la que el bloque presiona perpendicularmente contra el plano. Hallar el ángulo θ para el que la fuerza de propulsión necesaria para vencer la fricción sea lo más pequeña posible.

Demostración.-

1.2 Ejercicios

1. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

Demostración.- Sea x e y denotado por los lados del rectángulo. Si el área es fija, entonces xy es una constante, tal que $xy=A$. El perímetro de un rectángulo viene dado por $P(x,y)=2x+2y$, de donde

$$P(x)=2x+2\frac{A}{x}.$$

Para encontrar el valor mínimo, tomamos la derivada de $P(x)$,

$$P'(x)=2-\frac{2A}{x^2}.$$

Luego igualamos a cero y resolvemos para x,

$$2-\frac{2A}{x^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{A}.$$

Ya que, $P'(x)<0$, cuando $x<\sqrt{A}$ y $P'(x)>0$, cuando $x>\sqrt{A}$ por el teorema 4.8 Apostol, se tiene que f tiene un mínimo relativo en $\sqrt{A}$.. Como $x=\sqrt{A}$ implica $y=\sqrt{A}$, tenemos que el perímetro es mínimo cuando $x=y$. Es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado.

2. Un granjero tiene L pies de alambre para cercar un terreno de pasto rectangular adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones darán el área máxima al terreno cercado?.

Respuesta.- Sea y el ancho de la pradera (es decir, la longitud de los lados perpendiculares a la pared) y sea x la longitud de la pradera (es decir, la longitud del lado del rectángulo que es paralelo a la pared). Entonces, tenemos lo $2y+x=L$ que implica $x=L-2$. Entonces queremos maximizar

$$A(y)=(L-2y)y=Ly-2y^2.$$

Derivando se tiene,

$$A'(y)=L-4y.$$

Igualando a cero,

$$L-4y=0 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{L}{4}y.$$

Así, $A'(y) > 0$ cuando $y < \dfrac{L}{4}$ y $A'(y) < 0$ cuando $y > \dfrac{L}{4}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $A(y)$ toma el valor máximo cuando $y = \dfrac{L}{4}$. Luego,

$$x = L - 2y = L2\frac{L}{4} = \frac{L}{2}.$$

De donde las dimensiones serán $\dfrac{L}{2}$ por $\dfrac{L}{4}$.

3. Un granjero quiere cercar un terreno de pasto rectangular de área A adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones exigen la mínima cantidad de alambre de cerca?.

Respuesta.- Sea x la longitud del lado paralelo al muro de piedra e y la longitud de los lados perpendiculares al muro de piedra. Entonces, $A = xy$ fija, por lo que $y = \frac{A}{x}$. La función que queremos minimizar es $P = x + 2y = x + \frac{2A}{x}$. Luego, tomando la derivada que tenemos,

$$P'(x) = 1 - \frac{2A}{x^2}.$$

Igualando a cero,

$$1 - \frac{2A}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2A}.$$

Así, $P'(x) < 0$ cuando $x < \sqrt{2A}$ y $P'(x) > 0$ cuando $x > \sqrt{2A}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $P(x)$ toma el valor mínimo cuando $x = \sqrt{2A}$. De donde,

$$y = \frac{A}{x} \quad \rightarrow \quad y = \frac{A}{2\sqrt{2A}} = \frac{\sqrt{2A}}{2}.$$

4. Dado $S > O$. Probar que entre todos los números positivos x e y tales que $x + y = S$, la suma $x^2 + y^2$ es mínima cuando $x = y$.

Demostración.- Ya que $x + y = S$ que implica $y = S - x$. Entonces, la función que queremos minimizar es

$$f(x) = x^2 + (S - x)^2.$$

Luego, tomando la derivada se tiene,

$$f'(x) = 2x - 2(S - x) = 4x - 2S.$$

Igualando a cero,

$$4x - 2S = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{S}{2}.$$

Así, $f'(x) < 0$ cuando $x < \dfrac{S}{2}$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > \dfrac{S}{2}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor mínimo cuando $x = \dfrac{S}{2}$. De donde,

$$y = S - x = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}.$$

Por lo tanto la suma es mínima, cuando

$$x = y.$$

5. Dado $R > 0$. Probar que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2 + y^2 = R$, la suma $x + y$ es máxima cuando $x = y$.

Demostración.- Por la ecuación $x^2 + y^2 = R$ se tiene,

$$y = \sqrt{R - x^2}.$$

Entonces, encontramos el máximo de la función de la siguiente manera,

$$f(x) = x + \sqrt{R - x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{R - x^2}}.$$

Luego, igualamos a cero,

$$\frac{x}{\sqrt{R - x^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{R}{2}}.$$

Así, $f'(x) > 0$ cuando $x < \sqrt{\frac{R}{2}}$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > \sqrt{\frac{R}{2}}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor máximo cuando $x = \sqrt{\frac{R}{2}}$. De donde,

$$y = \sqrt{R - x^2} = \sqrt{R - \frac{R}{2}} = \sqrt{\frac{R}{2}} = x.$$

Por lo tanto la suma $x + y$ es máxima, cuando $x = y$.

6. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Demostrar que entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, el de área mínima tiene lados de longitud $\frac{1}{2}L\sqrt{2}$.

Respuesta.- Sea un cuadrado con aristas de longitud L de donde $x + y = L$. Vemos que x e y son longitudes de las dos secciones de L creadas por el punto en el que la esquina del cuadrado inscrito se encuentra con el borde del cuadrado exterior. Sea e la longitud de la arista del cuadrado inscrito. Entonces, $x + y = L$ implica $y = L - x$. Pongamos $f(x) = e^2$, por lo que

$$\text{Área} = f(x) = e^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (L - x)^2 = 2x^2 - 2Lx + L^2.$$

Sacando la derivada,

$$f'(x) = 4x - 2L.$$

Igualando a cero,

$$4x - 2L = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{2}.$$

Así, $f'(x) < 0$ cuando $x < \frac{L}{2}$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > \frac{L}{2}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor mínimo cuando $x = \frac{L}{2}$. Usando nuestra ecuación para y, tenemos

$$y = L - x = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}.$$

Finalmente, resolviendo para la longitud de la arista e,

$$e^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}L.$$

7. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Hallar el tamaño del cuadrado de máxima área que puede circunscribirse al cuadrado dado.

Respuesta.- Sea la longitud de la arista del cuadrado circunscrito. Después $e = x + y$. Además, si L es la longitud de la arista del cuadrado dado, tenemos

$$x^2 + y^2 = L^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{L^2 - x^2}.$$

Sea $f(x) = \text{Área} = (x+y)^2$, entonces

$$\text{Área} = f(x) = (x+y)^2 = \left(L^2 + x^2\right)^2 = x^2 + 2x\sqrt{L^2 - x^2} + L^2 - x^2 = 2x\sqrt{L^2 - x^2} + L^2.$$

Sacando la derivada,

$$f'(x) = 2\sqrt{L^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{L^2 - x^2}} = 2\frac{L^2 - x^2 - x}{\sqrt{L^2 - x^2}}.$$

Igualando a cero,

$$2\frac{L^2 - x^2 - x}{\sqrt{L^2 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

Así, $f'(x) > 0$ cuando $x < \dfrac{L}{\sqrt{2}}$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > \dfrac{L}{\sqrt{2}}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor máximo cuando $x = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$. Usando nuestra ecuación para y, tenemos

$$y = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{2}} = \sqrt{\frac{L^2}{2}} = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente, dado que $e = x + y$ tenemos el área del cuadrado circunscrito dada por

$$\text{Área} = e^2 = (x+y)^2 = \left(\frac{L}{\sqrt{2}} + \frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2L}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2L^2.$$

8. Demostrar que entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en un círculo dado, el cuadrado tiene el área máxima.

Demostración.- Sean x e y que denotan las longitudes de los lados del rectángulo inscrito, y r denota el radio del círculo. Entonces $x^2 + y^2 = 4r^2$ que implica $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$. Sea $f(x) = x \cdot y$. Entonces, derivando se tiene,

$$\text{Área} = f(x) = xy = x\sqrt{4r^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}.$$

Luego, Igualando a cero,

$$\frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}r.$$

Así, $f'(x) < 0$ cuando $x < \sqrt{2}r$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > \sqrt{2}r$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor máximo cuando $x = \sqrt{2}r$. Usando nuestra ecuación para y, tenemos

$$y = \sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r.$$

Finalmente, $x = y$ por lo que el rectángulo es un cuadrado.

9. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado tiene el círculo circunscrito mínimo.

Demostración.- Sean x e y los lados del rectángulo, r el radio del circulo circunscrito y $A = xy$ el área del cuadrado. Entonces,

$$A = xy \quad \Rightarrow \quad y = \frac{A}{x}.$$

Además, dado que tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el diámetro del círculo (por lo tanto es $2r$) y cuyos catetos son los lados del cuadrado que tenemos,

$$\begin{aligned} (2r)^2 = x^2 + y^2 \quad &\Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + \left(\frac{A}{x}\right)^2} \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{x^4+A^2}}{2x}. \end{aligned}$$

Luego queremos encontrar el valor mínimo de esta función (ya que esta función nos da el radio del círculo). Llamemos a la función $f(x)$ y tomemos su derivada de la siguiente manera,

$$f'(x) = \frac{(2x)\left(\frac{1}{2}\right)\left(4x^3\right)\left(x^4-A^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\sqrt{x^4+A^2}\right)(2)}{4x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+A^2}} - \frac{\sqrt{x^4-A^2}}{2x^2}.$$

Igualando a cero,

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^4+A^2}} - \frac{\sqrt{x^4-A^2}}{2x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{A}, \quad x_2 = \sqrt{A}.$$

Luego el punto critico es un mínimo ya que, $f'(x) < 0$ cuando $x < \sqrt{A}$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > \sqrt{A}$. Por lo tanto, el radio del círculo se minimiza cuando $x = y = \sqrt{A}$, por lo que el rectángulo es un cuadrado.

10. Dada una esfera de radio R. Hallar el radio r y la altura h del cilindro circular recto de mayor superficie lateral $2\pi rh$ que puede inscribirse en la esfera.

Demostración.- Primero, sea h una función de r. Luego sea, un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud r y catetos de longitud $\frac{h}{2}$ (ya que el segundo cateto solo llega al centro de la esfera, no a la longitud total del cilindro). Por lo tanto,

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = 2\sqrt{R^2-r^2}.$$

Entonces, sabemos que el área de la superficie lateral, , viene dada por la fórmula

$$A = 2\pi rh = 2\pi r\sqrt{R^2-r^2} = 4\pi r\sqrt{R^2-r^2}.$$

Llamando a esta función $f(r)$ y diferenciando tenemos,

$$f'(r) = 4\pi\sqrt{R^2-r^2} + \frac{4\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Igualando a cero,

$$4\pi\sqrt{R^2-r^2} + \frac{4\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Luego, $f'(r) < 0$ cuando $r < \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ y $f'(r) > 0$ cuando $r > \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor mínimo cuando $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto, el área de la superficie lateral es mínima cuando

$$r = \frac{h}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

11. Entre todos los cilindros circulares rectos de área lateral dada, demostrar que la menor esfera circunscrita tiene el radio igual al radio del cilindro multiplicado por $\sqrt{2}$.

Demostración.- El área de la superficie lateral $A = 2\pi rh$ es constante y

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}.$$

Entonces, tenemos

$$A = 2\pi rh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{A}{2\pi r}.$$

Por lo tanto,

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} = r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}}.$$

Llamemos a esta función $f'(r) = 0$. Luego tomando la derivada,

$$f'(r) = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2r - \frac{2A^2}{16\pi^2 r^3}\right).$$

Igualando a cero,

$$\frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2r - \frac{2A^2}{16\pi^2 r^3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r = \frac{A^2}{8\pi^2 r^3} \quad \Rightarrow \quad r^4 = \frac{A^2}{16\pi^2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

Luego, $f'(r) < 0$ cuando $r < \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$ y $f'(r) > 0$ cuando $r > \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor mínimo cuando $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$. Por lo tanto, el radio de la esfera circunscrita es mínimo cuando

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}} = \sqrt{\frac{2A}{2\pi}} = \sqrt{2}r.$$

12. Dado Un cono circular recto de radio R y altura H. Hallar el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor área lateral que puede inscribirse en el cono.

Respuesta.- El área de la superficie lateral del cilindro viene dada por $A = 2\pi rh$, donde res el radio del cilindro y hes la altura del cilindro. Del diagrama encontramos una fórmula para h en términos de las constantes H y R, y el radio del cilindro r,

$$h = -\frac{H}{R}r + H.$$

Así, sea $f(r)$ el área de la superficie lateral tenemos

$$A = f(r) = 2\pi r h = 2\pi r\left(-\frac{H}{R}r + H\right) = 2\pi r H - \frac{2\pi H}{R}r^2.$$

Tomando la derivada con respecto a r e igualando a cero,

$$2\pi H - \frac{4\pi H}{R}r = 0 \quad \Rightarrow \quad R - 2r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{2}.$$

Luego, $f'(r) > 0$ cuando $r < \frac{R}{2}$ y $f'(r) < 0$ cuando $r > \frac{R}{2}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor máximo cuando $r = \frac{R}{2}$. Por lo tanto, el área de la superficie lateral es máxima cuando

$$h = \frac{1}{2}H.$$

13. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede inscribirse en un cono circular recto de radio R y altura H.

Respuesta.- Tenemos la siguiente expresión para h,

$$h = -\frac{H}{R}r + H.$$

Entonces,

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(-\frac{H}{R}r + H\right) = \pi r^2 - \frac{\pi H}{R}r^3.$$

Derivando con respecto a r,

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi H r - \frac{3\pi H}{R}r^2.$$

Igualando a cero,

$$\begin{aligned} 2\pi H r - \frac{3\pi H}{R}r^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\pi H - \frac{3\pi H}{R}r = 0 \\ &\Rightarrow \quad 1 - \frac{3}{2R}r = 0 \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{2}{3}R. \end{aligned}$$

Luego, $f'(r) > 0$ cuando $r < \frac{2}{3}R$ y $f'(r) < 0$ cuando $r > \frac{2}{3}R$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor máximo cuando $r = \frac{2}{3}R$. Por lo tanto, el volumen es máximo cuando

$$h = \frac{2}{3}H.$$

14. Dada una esfera de radio R. Calcular, en función de R, el radio r y la altura h del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en esa esfera.

Respuesta.- Queremos maximizar el volumen del cono,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Luego podemos encontrar la siguiente expresión para h en términos de R y r,

$$h = R + \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Por lo tanto, nuestra expresión para V en términos de r es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 R + \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Derivando con respecto a r,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{2}{3}\pi r R + \frac{2}{3}\pi r \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{1}{3}\pi r^3 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = \frac{2}{3}\pi r \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} \right) - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Igualando a cero,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\pi r \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} \right) - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad R + \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \\
&\Rightarrow \quad 9r^2 = 8r^2 R^2 \\
&\Rightarrow \quad r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R.
\end{aligned}$$

Luego, $f'(r) > 0$ cuando $r < \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$ y $f'(r) < 0$ cuando $r > \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor máximo cuando $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$. Por lo tanto, el volumen es máximo cuando

$$h = R + \sqrt{R^2 - \frac{8}{9}R^2} = \frac{4}{3}R.$$

15. Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

Respuesta.- Sean r el radio del semicirculo, x la mitad de la base del rectángulo e y la altura del rectángulo. Queremos maximizar el área, $A = 2xy$ tal que

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Luego,

$$A = 2x \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right).$$

Derivando con respecto a x,

$$f'(x) = \frac{dA}{dx} = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Igualando a cero,

$$\begin{aligned}
2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2x^2 \\
&\Rightarrow \quad 2r^2 - 4x^2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{r}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Luego, $f'(x) > 0$ cuando $x < \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(x)$ toma el valor máximo cuando $x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Ya que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, entonces

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, la base del rectángulo tiene longitud $\dfrac{2r}{\sqrt{2}}$ y su altura tiene longitud $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$.

16. Hallar el trapecio de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

Respuesta.- Sea rel radio del semicírculo, b_1 sea el borde inferior del trapezoide y b_2 el borde superior. Recordamos de la geometría que el área del trapezoide está dada por

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h.,$$

donde b_1 y b_2 son las longitudes de las bases y h es la altura del trapezoide. A continuación, queremos encontrar fórmulas para b_1 y b_2 en función al radio r. Como b_1 se encuentra en el diámetro del semicírculo, tenemos $b_1 = 2r$. La hipotenusa de cada uno de estos es r, y los catetos tienen longitudes h y $\dfrac{b_2}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r^2 = h^2 + \left(\frac{b_2}{2}\right)^2 \quad &\Rightarrow \quad r^2 = h^2 + \frac{b_2^2}{4} \\ &\Rightarrow \quad b_2^2 = 4r^2 - 4h^2 \\ &\Rightarrow \quad b_2 = 2\sqrt{r^2 - h^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos en la fórmula para el área de un trapezoide, obtenemos una expresión para el área del trapezoide en función de r y h,

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = hr + h\sqrt{r^2 - h^2}.$$

Derivando con respecto a h,

$$f'(h) = \frac{dA}{dh} = r + \sqrt{r^2 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{r^2 - h^2}}.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\begin{aligned} r + \sqrt{r^2 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{r^2 - h^2}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad r\sqrt{r^2 - h^2} + r^2 - h^2 - h^2 \\ &\Rightarrow \quad 4h^4 = 3r^2h^2 \\ &\Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}r. \end{aligned}$$

Luego, $f'(h) > 0$ cuando $h < \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$ y $f'(h) < 0$ cuando $h > \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(h)$ toma el valor máximo cuando $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$. Finalmente, usamos este valor h para resolver b_2 en función de r,

$$b_2 = 2\sqrt{r^2 - h^2} = 2\sqrt{\frac{r^2}{4}}r.$$

Como $b_1 = 2r$, entonces las longitudes de los bordes superiores e inferiores del trapezoide son:

$$b_1 = 2r, \qquad b_2 = r.$$

17. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10; b) 12 y 18.

Respuesta.- Comenzamos con un rectángulo con lados cada uno de longitud 10. Entonces, los bordes de la base de la caja tienen cada uno, una longitud de $l = w = 10 - 2x$, y la altura x; por lo tanto, el volumen es

$$V = x(10-2x)^2 = 4x^3 - 40x^2 + 100x.$$

Derivando con respecto a x,

$$f'(x) = \frac{dV}{dx} = 12x^2 - 80x + 100.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$12x^2 - 80x + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \quad \text{y} \quad x_2 = 4.$$

Luego, $f'(x) > 0$ cuando $0 < x < \dfrac{5}{4}$ y $f'(x) < 0$ cuando $\dfrac{5}{3} < x < 5$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, V toma el valor máximo cuando $x = \dfrac{5}{3}$. Resolviendo para la longitud y el ancho de la base de la caja tenemos, entonces

$$l = w = 10 - 2x = 10 - 2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{20}{3}.$$

Para el inciso b) comencemos con un rectángulo de 18 de largo y 12 de ancho. Entonces, los bordes de la base de la caja tienen longitudes $w = 12 - 2x$ y $l = 18 - 2x$, y la altura de la caja es x. Por tanto, el volumen es

$$V = x(12-2x)(18-2x) = 4x^3 - 60x^2 + 216x.$$

Derivando con respecto a x,

$$f'(x) = \frac{dV}{dx} = 12x^2 - 120x + 216.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$12x^2 - 120x + 216 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 - \sqrt{7} \quad \text{y} \quad x_2 = 5 + \sqrt{7}.$$

Luego, $f'(x) > 0$ cuando $0 < x < \dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$ y $f'(x) < 0$ cuando $\dfrac{5-\sqrt{7}}{2} < x < 5 + \sqrt{7}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, V toma el valor máximo cuando $x = \dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$. Resolviendo para l y w se tiene,

$$l = w = 18 - 2(5-\sqrt{7}) = 8 - 2\sqrt{7}, \qquad w = 12 - 2(5-\sqrt{7}) = 2 + 2\sqrt{7}.$$

18. Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1, hallar el mayor valor de $2a + b$.

Respuesta.- Por el teorema de Pitágoras, se tiene

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{1 - b^2}.$$

Recordemos que queremos maximizar,

$$2a + b = 2\sqrt{1-b^2} + b.$$

Llamemos a esta función $f(b)$ y derivemos con respecto a b tenemos,

$$f'(b) = -\frac{2b}{\sqrt{1-b^2}} + 1.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\begin{aligned} -\frac{2b}{\sqrt{1-b^2}} + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad -2b + \sqrt{1-b^2} = 0 \\ &\Rightarrow \quad 5b^2 = 1 - b^2. \\ &\Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Luego, $f'(b) > 0$ cuando $b < \frac{\sqrt{5}}{5}$ y $f'(b) < 0$ cuando $b > \frac{\sqrt{5}}{5}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(b)$ toma el valor máximo cuando $b = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Dado que $a = \sqrt{1-b^2}$, se tiene

$$a = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Por lo tanto, el máximo valor de $2a + b$ es

$$2a + b = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}.$$