Kenneth Hoffman

Algebra lineal

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y APUNTES

POR

FODE

CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

LIBRO EN SU SEGUNDA EDICIÓN (Ingles)

Título de la obra original:
Linear Algebra second Edition.
Edición original en lengua inglesa publicada por:
Prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Sin ninguna revisión de esta obra.

Propiedad de esta obra:
CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA
E-mail: soyfode@gmail.com

2020

Contents

1

Ecuaciones lineales

1.1 Cuerpos

Se designa por F el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos.

1. La adición es conmutativa,

$$x + y = y + x$$

para cualquiera x e y de F.

2. La adición es asociativa,

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

para cualquiera x, y y z de F.

3. Existe un elemento único 0 (cero) de F tal que $x + 0 = x$, para todo x en F.

4. A cada x de F corresponde un elemento único $(-x)$ de F tal que $x + (-x) = 0$.

5. La multiplicación es conmutativa,

$$xy = yx.$$

6. La multiplicación es asociativa,

$$x(yz) = (xy)z.$$

7. Existe un elemento no nulo único de F tal que $x1 = x$, para todo x en F.

8. A cada elemento no nulo x de F corresponde un único elemento x^{-1} (o $(1/x)$) de F tal que $xx^{-1} = 1$.

9. La multiplicación es distributiva respecto de la adición, esto es, $x(y + z) = xy + xz$, para cualquiera x, y y z de F.

El conjunto F, junto con las operaciones de suma y multiplicación, se llama entonces **cuerpo**.
Un **subcuerpo** de un cuerpo C es un conjunto F de números complejos que es a su vez un cuerpo respecto de las operaciones usuales de adición y multiplicación de números complejos. Esto significa que el 0 y el 1 están en el conjunto F, y que si x e y son elementos de F, también lo son $(x + y)$, $-x$, $xy - x^{-1}$ si $(x \neq 0)$.

Ejemplo 1.1 El conjunto de los enteros positivos: $1, 2, 3, \ldots$ no es un subcuerpo de C por varias razones. Por ejemplo, 0 no es un entero positivo; para ningún entero positivo n, es $-n$ un entero positivo; para ningún entero positivo n, excepto 1, es $1/n$ un entero positivo. ■

Ejemplo 1.2 El conjunto de los enteros: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ no es un subcuerpo de C, porque para un entero n, $1/n$ no es un entero al menos que n sea 1 o -1. Con las operaciones usuales de adición y multiplicación, el conjunto de los enteros satisface todas las condiciones (1)-(9), con excepción de la condición (8). ■

Ejemplo 1.3 El conjunto de los números racionales, esto es, números de la forma p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$, es un subcuerpo del cuerpo de los complejos. La división que no es posible en el conjunto de los enteros es posible en el conjunto de los números racionales. ■

Ejemplo 1.4 El conjunto de todos los números complejos de la forma $x + y\sqrt{2}$, donde x e y son racionales, es un subcuerpo de C.

Demostración.- La multiplicación y la suma de un número racional y un número irracional siempre da un irracional. Estos números cumplen las condiciones (1)-(9), por lo que podemos concluir que este conjunto es un subcuerpo de C. ■

1.2 Sistema de ecuaciones lineales

Supóngase que F es un cuerpo. Se considera el problema de encontrar n escalares (elementos de F) $x_1, \ldots, x_n$ que satisfagan las condiciones

$$\begin{array}{rcl} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n & = & y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \ldots + A_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \tag{1.1}$$

donde $y_1, \ldots, y_m$ y A_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, son elementos de F. A (1-1) se le llama un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas**. Todo n-tuple $(x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de F que satisface cada una de las ecuaciones de (1-1) se llama una **solución** del sistema. Si $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$, se dice que el sistema es **homogéneo**, o que cada una de las ecuaciones es homogénea.

Para el sistema general (1-1), supóngase que seleccionamos m escalares $c_1, \ldots, c_m$, que se multiplica la j-ésima ecuación por c_j y que luego se suma. Se obtiene la ecuación

$$(c_1A_{11} + \ldots + c_mA_{m1})x_1 + \ldots + (c_1A_{1n} + \ldots + c_mA_{mn})x_n = c_1y_1 + \ldots + c_my_m$$

A tal ecuación se le llama **combinación lineal** de las ecuaciones (1-1).

Si se tiene otro sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} B_{11}x_1 + \ldots + B_{1n}x_n & = & z_1 \\ \vdots & & \vdots \\ B_{k1}x_1 + \ldots + B_{kn}x_n & = & z_k \end{array} \tag{1.2}$$

en que cada una de las k ecuaciones sea combinación lineal de las ecuaciones de (1-1), entonces toda solución de (1-1) es solución de este nuevo sistema.

Se dirá que dos sistemas de ecuaciones lineales son **equivalentes** si cada ecuación de cada sistema es combinación lineal de las ecuaciones del otro sistema.

Teorema 1.1 Sistemas equivalentes de ecuaciones lineales tiene exactamente las mismas soluciones. ■

Ejercicios

1. Verificar que el conjunto de número complejos descritos en el Ejemplo 4 es un subcuerpo de **C**.

Demostración.- La multiplicación y la suma de un número racional y un número irracional siempre da un irracional. Estos números cumplen las condiciones (1)-(9), por lo que podemos concluir que este conjunto es un subcuerpo de C.

2. Sea F el cuerpo de los números complejos. ¿Son equivalentes los dos sistemas de ecuaciones lineales siguientes? Si es así, expresar cada ecuación de cada sistema como combinación lineal de las ecuaciones del otro sistema.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}$$

Respuesta.- Sí, los sistemas dados son equivalentes ya que cada ecuación en un sistema se puede escribir como una combinación lineal de las ecuaciones del otro sistema.

Sean $c_1 = 1$ y $c_2 = -2$ tal que

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= (c_1 \cdot 3 + c_2)x_1 + (c_1 + c_2)x_2 \\ &= [1 \cdot 3 + (-2)]\, x_1 + [1 + (-2)]\, x_2 \\ &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Sean $c_1 = \dfrac{1}{2}$ y $c_2 = \dfrac{1}{2}$ tal que

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= (c_1 \cdot 3 + c_2)x_1 + (c_1 + c_2)x_2 \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2}\right] x_1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] x_2 \\ &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Por lo que podemos decir que la primera ecuación es combinación lineal de la segunda ecuación. Luego,

Sean $c_1 = \dfrac{1}{3}$ y $c_2 = \dfrac{4}{3}$ tal que

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &= (c_1 + c_2 \cdot 2)\, x_1 + (c_1 \cdot (-1) + c_2)\, x_2 \\
&= \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot 2\right] x_1 + \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{4}{3}\right] x_2 \\
&= 3x_1 + 1x_2
\end{aligned}$$

Sean $c_1 = -\frac{1}{3}$ y $c_2 = \frac{2}{3}$ tal que

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= (c_1 + c_2 \cdot 2)\, x_1 + (c_1 \cdot (-1) + c_2)\, x_2 \\
&= \left[-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2\right] x_1 + \left[-\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{2}{3}\right] x_2 \\
&= 1x_1 + 1x_2
\end{aligned}$$

Por lo que podemos decir que la segunda ecuación es combinación lineal de la primera ecuación. Así, los sistemas dados son equivalente.

3. Examine los siguientes sistemas como en el ejercicio 2.

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\
x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{5}{2}x_3 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_1 \qquad - x_3 &= 0 \\
x_2 + 3x_3 &= 0
\end{aligned}$$

Respuesta.- Sean $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + 4x_3 &= (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0)x_1 + (c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1)x_2 + (c_1(-1) + c_2 3)x_3 \\
&= [(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0]\, x_1 + [(-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1]\, x_2 + [-1(-1) + 1 \cdot 3]\, x_3 \\
&= -x_1 + x_2 + 4x_3
\end{aligned}$$

Sean $c_1 = 1$ y $c_2 = 3$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0)x_1 + (c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1)x_2 + (c_1(-1) + c_2 3)x_3 \\
&= [1 \cdot 1 + 3 \cdot 0]\, x_1 + [1 \cdot 0 + 3 \cdot 1]\, x_2 + [1(-1) + 3 \cdot 3]\, x_3 \\
&= x_1 + 3x_2 + 8x_3
\end{aligned}$$

Sean $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = 1$ Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 &= (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0)x_1 + (c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1)x_2 + (c_1(-1) + c_2 3)x_3 \\
&= \left[\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 0\right] x_1 + \left[\frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1\right] x_2 + \left[\frac{1}{2}(-1) + 1 \cdot 3\right] x_3 \\
&= \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3
\end{aligned}
$$

Luego. Sean $c_1 = -\frac{3}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}$ y $c_3 = 0$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_3 &= \left[c_1(-1) + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot \frac{1}{2}\right] x_1 + (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 3 + c_3 \cdot 1)x_2 + \left(c_1 \cdot 4 + c_2 \cdot 8 + c_3 \cdot \frac{5}{2}\right) x_3 \\
&= \left[-\frac{3}{4}(-1) + \frac{1}{4} \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2}\right] x_1 + \left[-\frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 + 0 \cdot 1\right] x_2 + \left(-\frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 8 + 0 \cdot \frac{5}{2}\right) x_3 \\
&= x_1 - x_3
\end{aligned}
$$

Por último, sean $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = 0$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
x_2 + 3x_3 &= \left[c_1(-1) + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot \frac{1}{2}\right] x_1 + (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 3 + c_3 \cdot 1)x_2 + \left(c_1 \cdot 4 + c_2 \cdot 8 + c_3 \cdot \frac{5}{2}\right) x_3 \\
&= \left[\frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4} \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2}\right] x_1 + \left[\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 + 0 \cdot 1\right] x_2 + \left(\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 8 + 0 \cdot \frac{5}{2}\right) x_3 \\
&= x_2 + 3x_3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto las dos ecuaciones dadas son equivalentes.

4. Examine los siguientes sistemas como en el ejercicio 2.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + (-1+i)x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\
3x_2 - 2ix_3 + 5x_4 &= 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{i}{2}\right) x_1 + 8x_2 - ix_3 - x_4 &= 0 \\
\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 + 7x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Respuesta.- Ya que c_1 y c_2 no existen, para

$$
\begin{aligned}
2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 &= \left[c_1\left(1 + \frac{i}{2}\right) + c_2 \cdot \frac{2}{3}\right] x_1 + \left[c_1 \cdot 8 + c_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] x_2 \\
&+ \left[c_1 \cdot (-1) + c_2\right] x_3 + \left[c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot 7\right] x_4
\end{aligned}
$$

Entonces, las ecuaciones no son equivalentes.

5. Sea F un conjunto que contiene exactamente dos elementos, 0 y 1. Se define una adición y multiplicación por las tablas:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Verificar que el conjunto F, juntamente con estas operaciones, es un cuerpo.

Demostración.- Para verificar que F es un cuerpo, demostraremos las distintas operaciones de suma y multiplicación (Pag. 1.).

1. La conmutatividad para la adición es cierta, ya que

$$\begin{array}{rcl} 0+0 & = & 0+0 \\ 0+1 & = & 0+1 \\ 1+0 & = & 1+0 \\ 1+1 & = & 1+1 \end{array}$$

2. La adición es asociativa, ya que

$$\begin{array}{rcl} 0+(0+1) & = & (0+0)+1 \\ 0+(0+0) & = & (0+0)+0 \\ 0+(1+1) & = & (0+1)+1 \\ 0+(1+0) & = & (0+1)+0 \\ 1+(0+1) & = & (1+0)+1 \\ 1+(1+0) & = & (1+1)+0 \\ 1+(1+1) & = & (1+1)+1 \\ 1+(0+0) & = & (1+0)+0 \end{array}$$

3. Ya que $0+0=0$ y $0+1=1$. Entonces, existe un elemento único 0 de F tal que $x+0=x$, para todo x en F.
4. Ya que el inverso aditivo de 0 es 0 y el inverso aditivo de 1 es 1. Entonces, a cada x en F, corresponde un elemento único $-x$ de F tal que $x+(-x)=0$.
5. La multiplicación es conmutativa, ya que

$$\begin{array}{rcl} 0\cdot 0 & = & 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 & = & 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 & = & 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 & = & 1\cdot 1 \end{array}$$

6. La multiplicación es asociativa, ya que

$$\begin{array}{rcl} 0\cdot(0\cdot 1) & = & (0\cdot 0)\cdot 1 \\ 0\cdot(0\cdot 0) & = & (0\cdot 0)\cdot 0 \\ 0\cdot(1\cdot 1) & = & (0\cdot 1)\cdot 1 \\ 0\cdot(1\cdot 0) & = & (0\cdot 1)\cdot 0 \\ 1\cdot(0\cdot 1) & = & (1\cdot 0)\cdot 1 \\ 1\cdot(1\cdot 0) & = & (1\cdot 1)\cdot 0 \\ 1\cdot(1\cdot 1) & = & (1\cdot 1)\cdot 1 \\ 1\cdot(0\cdot 0) & = & (1\cdot 0)\cdot 0 \end{array}$$

7. Ya que $1\cdot 0=0$ y $1\cdot 1=1$. Entonces, existe un elemento no nulo único de F tal que $x1=x$, para todo x en F.

8. Ya que $1 \neq 0 \in F$. El inverso multiplicativo de 1 es 1.
9. La multiplicación es distributiva respecto de la adición, ya que

$$\begin{array}{rcl}
0 \cdot (0+1) & = & (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) \\
0 \cdot (0+0) & = & (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \\
0 \cdot (1+1) & = & (0 \cdot 1) + (0 \cdot 1) \\
0 \cdot (1+0) & = & (0 \cdot 1) + (0 \cdot 0) \\
1 \cdot (0+1) & = & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) \\
1 \cdot (1+0) & = & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) \\
1 \cdot (1+1) & = & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \\
1 \cdot (0+0) & = & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0)
\end{array}$$

Por lo tanto, el conjunto F es un cuerpo.

6. Demostrar que si dos sistemas homogéneos de ecuaciones lineales con dos incógnitas tienen las mismas soluciones, son equivalentes.

Demostración.- Consideremos los dos sistemas homogéneos con dos incógnitas (x_1, x_2).

$$\left\{ \begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & 0 \\
\vdots & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & = & 0
\end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcl}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 & = & 0 \\
b_{21}x_1 + b_{22}x_2 & = & 0 \\
\vdots & & \\
b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 & = & 0
\end{array} \right.$$

Se dirá que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si cada ecuación de cada sistema es combinación lineal de las ecuaciones del otro sistema. Por lo que por definición de combinación lineal se tiene m escalares $c_1, \ldots, c_m$ que se multiplica la j-ésima ecuación por c_j y que luego se suma. Sean los escalares $c_1, c_2, \ldots c_m$. De donde multiplicamos m ecuaciones del primer sistemas por c_m y sumamos por columnas,

$$(c_1a_{11} + \ldots + c_m a_{m1})\, x_1 + (c_1 a_{12} + \ldots + c_m a_{m2})\, x_2 = 0$$

Luego comparando esta ecuación con todas las ecuaciones del segundo sistema y utilizando también el hecho de que ambos sistemas tiene las mismas soluciones, obtenemos

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = (c_1a_{11} + \ldots + c_m a_{m1})\, x_1 + (c_1 a_{12} + \ldots + c_m a_{m2})\, x_2.$$

Lo mismo ocurre con las demás ecuaciones del segundo sistema. Sean otros escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, tal que

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = (c_1a_{11} + \ldots + c_m a_{m1})\, x_1 + (c_1 a_{12} + \ldots + c_m a_{m2})\, x_2$$

Así, sucesivamente hasta

$$b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 = (c_1a_{11} + \ldots + c_m a_{m1})\, x_1 + (c_1 a_{12} + \ldots + c_m a_{m2})\, x_2$$

con m escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Por lo que demostramos que el segundo sistema es una combinación lineal del primer sistema.

De manera similar podemos demostrar que el primer sistema es una combinación lineal del segundo sistema. Sean los escalares $c_1, c_2, \ldots c_m$, entonces

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = (c_1b_{11} + \ldots + c_m b_{m1})\, x_1 + (c_1 b_{12} + \ldots + c_m b_{m2})\, x_2.$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = (c_1b_{11} + \ldots + c_mb_{m1})\,x_1 + (c_1b_{12} + \ldots + c_mb_{m2})\,x_2.$$

Así concluimos que ambos sistemas son equivalentes.

7. Demostrar que todo subcuerpo del cuerpo de los números complejos contiene a todo número racional.

Demostración.- Sea F un subcampo en $\mathbb{C}$, por este hecho, tenemos $0 \in F$ y $1 \in F$. Luego ya que F es un subcampo y cerrado bajo la suma, se tiene

$$1 + 1 + \ldots + 1 = n \in F.$$

De este modo $\mathbb{Z} \subseteq F$. Ahora, sabiendo que F es un subcampo, todo elemento tiene un inverso multiplicativo, por lo tanto $\dfrac{1}{n} \in F$. Por otro lado vemos también que F es cerrado bajo la multiplicación. Es decir, para $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ tenemos

$$m \cdot \frac{1}{n} \in F \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} \in F.$$

Así, concluimos que $\mathbb{Q} \subseteq F$.

8. Demostrar que todo cuerpo de características cero contiene una copia del cuerpo de los números racionales.

Demostración.- Sea F cualquier campo de caracterización cero. Ahora, $0 \in F$ y $1 \in F$. Ya que la caracteristica de F es cero, se tiene

$$1 \neq 1 + 1 \neq 1 + 1 + 1 \neq 1 + 1 + 1 + 1 \ldots \neq 0.$$

Ahora, F es un campo y por ende cerrado bajo la suma, se obtiene

$$1 + 1 + \ldots + 1 = n \in F \text{ con } n \neq 0.$$

De este modo, $\mathbb{Z} \subseteq F$. Ahora, dado que F es un cuerpo, todo elemento tiene un inversio multiplicativo, por lo tanto $\dfrac{1}{n} \in F$. Además, F es cerrado bajo la multiplicación, así, para $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, tenemos

$$m \cdot \frac{1}{n} \in F \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} \in F.$$

Por lo que $\mathbb{Q} \in F$. Concluimos que F contiene una copia del campo de número racional.

1.3 Matrices y operaciones elementales de fila

El sistema (1-1) se abreviará ahora así:

$$AX = Y$$

donde

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

A se llama **matriz de los coeficientes** del sistema.
Una **matriz** $m \times n$ **sobre el cuerpo** F es una función A del conjunto de los pares enteros (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, en el cuerpo F.
Los **elementos** de la matriz A son los escalares $A(i, j) = A_{ij}$, con frecuencia, suele ser más conveniente describir la matriz disponiendo sus elementos en un arreglo rectangular con m filas y n columnas.
Deseamos ahora considerar operaciones sobre las filas de la matriz A que corresponden a la formación de combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema $AX = Y$. Se limitará nuestra atención a **tres operaciones elementales de filas** en una matriz $m \times n$, sobre el cuerpo F:

1. Multiplicación de una fila de A por un escalar c no nulo;

2. Remplazo de la r-ésima fila de A por la fila r más c veces la fila s, donde c es cualquier escalar y $r \neq s$;

3. Intercambio de dos filas de A.

Una operación elemental de filas es, pues, un tipo especial de función (regla) e que asocia a cada matriz $m \times n$, A, una matriz $m \times n$, $e(A)$. Se puede describir e en forma precisa en los tres casos como sigue:

1. $e(A)_{ij}$ si $i \neq r$, $e(A)_{rj} = cA_{rj}$.

2. $e(A)_{ij}$ si $i \neq r$, $e(A)_{rj} = A_{rj} + cA_{sj}$.

3. $e(A)_{ij}$ si i es diferente de r y s, $e(A)_{rj} = A_{sj}$, $e(A)_{sj} = A_{rj}$.

Una función e particular esta definida en la clase de todas las matrices sobre F que tiene m filas.

Teorema 1.2 A cada operación elemental de filas e corresponde una operación elemental de filas e_1, del mismo tipo de e, tal que $e_i(e(A)) = e(e_1(A)) = A$ para todo A. Es decir, existe la operación (función) inversa de una operación elemental de filas y es una operación elemental de filas del mismo tipo.

Demostración.- (1) Supóngase que e es la operación que multiplica la r-ésima fila de una matriz por un escalar no nulo c. Sea e_1 la operación que multiplica la fila r por c^{-1}. (2) Supóngase que e sea la operación que remplaza la fila r por la misma fila r a la que le sumo la fila s multiplicada por c, $r \neq s$. Sea e_1 la operación que reemplaza la fila r por la fila r a la que se le ha sumado la fila s multiplicada por $(-c)$. (3) Si e intercambia las filas r y s, sea $e_1 = e$. En cada uno de estos casos es claro que $e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A$ para todo A. ■

Definición 1.1 Si A y B son dos matrices $m \times n$ sobre el cuerpo F, se dice que B es equivalente por filas a A si B se obtiene de A por una sucesión finita de operaciones elementales de filas.

Usando el teorema 2, se verificará que: Cada matriz es equivalente por filas a ella misma. Si B es equivalente por filas a A, entonces A es equivalente por filas a B; si B es equivalente por filas a A y C es equivalente por filas a B, entonces C es equivalente por filas a A. O sea, que la equivalencia por filas es una relación de equivalencia.

Teorema 1.3 Si A y B son matrices equivalentes por filas, los sistemas homogeneos de ecuaciones lineales $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones.

Demostración.- Supóngase que se pasa de A a B por una sucesión finita de operaciones elementales de filas:

$$A = A_0 \to A_1 \to \ldots \to A_k = B.$$

Basta demostrar que los sistemas $A_j X = 0$ y $A_{j+1}X = 0$ tienen las mismas soluciones, es decir, que una operación elemental por filas no altera el conjunto de soluciones.
así, supóngase que B se obtiene de A por una sola operación elemental de filas. Sin que importe cuál de los tres tipos (1), (2) o (3) de operaciones sea, cada ecuación del sistema $BX = 0$ será combinación lineal de las ecuaciones del sistema $AX = 0$. Dado que la inversa de una operación elemental de filas es una operación elemental de filas, toda ecuación de $AX = 0$ será también combinación lineal de las ecuaciones de $BX = 0$. Luego estos dos sistemas son equivalente y, por el teorema 1, tienen las mismas soluciones. ■

Definición 1.2 Una matriz $m \times n$, R, se llama **reducida por filas** si:

(a) el primer elemento no nulo de cada fila no nula de R es igual a 1;

(b) cada columna de R que tiene el primer elemento no nulo de alguna fila tiene todos sus otros elementos 0.

Teorema 1.4 Toda matriz $m \times n$ sobre el cuerpo F es equivalente por filas a una matriz reducida por filas.

Demostración.- Sea A una matriz $m \times n$ sobre F. Si todo elemento de la primera fila A es 0, la condición (a) se cumple en lo que concierne a la fila 1. Si la fila 1 tiene un elemento no nulo, sea k el menor entero positivo j para el que $A_{1j} \neq 0$. Multiplicando la fila 1 por A_{1k}^{-1} la condición (a) se cumple con respecto a esa fila. Luego, para todo $i \geq 2$, se suma $(-A_{ik})$ veces la fila 1 a la fila i. Y ahora el primer elemento no nulo de la fila 1 está en la columna k, ese elemento es 1, y todo otro elemento de la columna k es 0.
Considérese ahora la matriz que resultó de lo anterior. Si todo elemento de la fila 2 es 0, se deja tal cual. Si algún elemento de la fila 2 es diferente de 0, se multiplica esa fila por un escalar de modo que el primer elemento no nulo sea 1. En caso de que la fila 1 haya tenido un primer elemento no nulo en la columna k, este primer elemento no nulo de la fila 2 no puede estar en la columna k, supóngase que esté en la columna $k_r \neq k$. Sumando múltiplos apropiados de la fila 2 a las otras filas, se puede lograr que todos los elementos de la columna k_r sean 0, excepto el 1 en la fila 2. Lo que es importante observar es lo siguiente: Al efectuar etas operaciones, no se alteran los elementos de la fila 1 el alas columnas $1, \ldots, k$ ni ningún elemento de la columna k. Es claro que, si la fila 1 era idénticamente nula, las operaciones con la fila 2 no afecta la fila 1.
Si se opera, como se indicó, con una fila cada vez, es evidente que después de un número finito de etapas se llegará a una matriz reducida por filas. ■

Ejercicios

1. Hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcl} (1-i)x_1 & - & ix_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & (1-i)x_2 & = & 0. \end{array}$$

Respuesta.- Colocando en su forma matricial tenemos,

$$\begin{bmatrix} 1-i & -i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}$$

Reduciendo por filas,

$$\begin{bmatrix} 1-i & -i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix} \qquad R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1-i & -i \end{bmatrix} \quad \frac{R_1}{2} \to R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1-i}{2} \\ 1-i & -i \end{bmatrix}$$

$$R_2 - (1-i)R_1 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1-i}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo se tiene,

$$x_1 + \frac{1-i}{2}x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-1+i}{2}x_2.$$

Supongamos $x_2 = t \in \mathbb{C}$, por lo que el conjunto de soluciones estará dado por

$$\left\{ \left(\frac{-1+i}{2}t, t \right) |t \in \mathbb{C} \right\}.$$

2. Si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar todas las soluciones de $AX = 0$ reduciendo A por filas.

Respuesta.- Se efectuará una sucesión finita de operaciones elementales de filas en A, indicando el tipo de operación realizada.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_1 \to R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_2 - 2R_1 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - 3R_1 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad R_3 - \frac{8}{7}R_2 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos las ecuaciones,

$$\begin{cases} \dfrac{6}{7}x_3 = 0 \\ 7x^2 + x^3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

De donde

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Por lo tanto, $AX = 0$ tiene una solución trivial.

3. Si

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hallar todas las soluciones de $AX = 2X$ y todas las soluciones de $AX = 3X$ (el símbolo cX representa la matriz, cada elemento de la cual es c veces el correspondiente elemento de X).

Demostración.- El sistema $AX = 2X$ será

$$\begin{array}{rcl} 6x_1 - 4x_2 & = & 2x_1 \\ 4x_1 - 2x_2 & = & 2x_2 \\ -x_1 + 3x_3 & = & 2x_3 \end{array}$$

El cual es equivalente a

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 - 4x_2 & = & 0 \\ 4x_1 - 4x_2 & = & 0 \\ -x_1 + x_3 & = & 0 \end{array}$$

Reduciendo por filas, la matriz de coeficientes nos queda

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \frac{1}{4}R_1 \to R_1 \\ \\ \frac{1}{4}R_2 \to R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R_3 + R_1 \to R_3 \\ \\ -R_1 + R_2 \to R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_1 \to R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde tenemos las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_3 = x_2 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, el conjunto solución será

$$\{(t,t,t) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Para el sistema $AX = 3X$ se tiene

$$\begin{array}{rcl} 6x_1 - 4x_2 & = & 3x_1 \\ 4x_1 - 2x_2 & = & 3x_2 \\ -x_1 + 3x_3 & = & 3x_3 \end{array}$$

El cual es equivalente a

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - 4x_2 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 & = & 0 \end{array}$$

Reduciendo por filas, la matriz de coeficientes nos queda

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -R_3 \to R_3 \\ \\ R_3 \leftrightarrow R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -R_1 + R_2 \to R_2 \\ \\ -3R_1 + R_3 \to R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}R_2 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad 4R_2 + R_3 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde tenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Así, el conjunto de soluciones viene dado por

$$\{(0,0,t)|t \in \mathbb{R}\}.$$

4. Hallar una matrix reducida por filas que sea equivalente por filas a

$$A = \begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}$$

Respuesta.- Reducimos por filas de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix} \qquad R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ i & -(1+i) & 0 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} R_2 - R_1 & \to & R_2 \\ R_3 - R_1 & \to & R_3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1+i & -i \\ 0 & 2i+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - \frac{2i+2}{-1+i}R_2 \quad \to \quad R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1+i & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Demostrar que las siguientes dos matrices no son equivalentes por filas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Demostración.- Reduzcamos por filas la primera matriz,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ccc} R_2 - \frac{a}{2}R_1 & \to & R_2 \\ \\ R_3 - \frac{b}{2}R_1 & \to & R_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix} \quad R_3 + cR_2 \quad \to \quad R_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora, reduzcamos por filas la segunda matriz,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ccc} R_2 - 2R_1 & \to & R_2 \\ \\ R_3 - R_1 & \to & R_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad R_3 - R_2 \quad \to \quad R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que las dos matrices tiene diferentes formas. Es decir uno de ellos tiene dos filas distintas de cero mientras que la otra matriz tiene tres filas distintas de cero. Por lo tanto, ninguna puede obtenerse de la otra mediante una secuencia de operaciones por fila. Así las dos matrices no son equivalentes por filas.

6. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es una matriz 2×2 con elementos complejos. Supóngase que A es reducida por filas y también que $a + b + c + d = 0$. Demostrar que existen exactamente tres de estas matrices.

Demostración.- Ya que A es dado como una matríz reducida por filas, entonces se presentas los siguientes casos.

Caso i. Sea $a = b = c = d = 0 + 0i$ por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 0+0i & 0+0i \\ 0+0i & 0+0i \end{bmatrix}$$

Caso ii. Sea $c = d = 0 \;\Rightarrow\; a + b = 0 \;\Rightarrow\; b = -a$ con $a = 1$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otra posibilidad podría ser que la fila 1 sea cero. Es decir, $a = b = 0 \;\Rightarrow\; c + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -c$ de donde tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Caso iii. Dos filas distintas de cero. Es decir, $a \neq 0, d \neq 0$, $c = b = 0 \;\Rightarrow\; a + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -a$, de donde A al ser reducido por fila implicará $a = 1 \;\Rightarrow\; d = -1$. Pero d es la entrada principal distinto de cero de la fila 2 por lo tanto debe ser igual a uno. Así este caso no existe.

Por lo tanto, concluimos que existe tres matrices que satisfacen la condición dada.

7. Demostrar que el intercambio de dos filas en una matriz puede hacerse por medio de un número finito de operaciones elementales con filas de los otros tipos.

Demostración.- Consideremos la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que se necesita el intercambio de las filas 1 y 3, entonces se puede realizar la siguiente secuencia para hacerlo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 + R_3 \to R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 - R_1 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-R_3 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 - R_3 \to R_1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Generalizando obtenemos que para realizar el intercambio de R_i y R_j, la secuencia de operaciones elementales de los otros tipos es:

a) $R_j - R_i \to R_j$. Restar fila i de la fila j, que da como resultado una fila j como el negativo de la fila original i.

b) $-R_j \to R_j$. Fila negativa j lo que resultará en la fila j cambiando a fila i.

c) $R_i - R_j \to R_j$. Restar fila j de la fila i que resultará en la fila i cambiando a la fila original j.

8. Considere el sistema de ecuaciones $AX = 0$, donde

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es una matriz 2×2 sobre el cuerpo F. Demostrar lo siguiente:

(a) Si todo elemento de A es 0, entonces cada par (x_1, x_2) es una solución de $AX = 0$.

Demostración.- Sea $A = 0$, entonces

$$AX = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0 \end{cases}$$

Por lo que cada par (x_1, x_2) es una solución de $AX = 0$.

(b) Si $ad - bc \neq 0$, el sistema $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial $x_1 = x_2 = 0$.

Demostración.- Sea $ad - bc \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} AX = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} ax_1 + bx_2 &= 0 \\ cx_1 + dx_2 &= 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad x_2 = \frac{-cx_1}{d} \\ &\Rightarrow \quad ax_1 + b\left(\frac{-cx_1}{d}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_1 = x_2 = 0$ es la única solución trivial $AX = 0$.

(c) Si $ad - bc = 0$ y algún elemento de A es diferente de 0, entonces existe una solución (x_1^0, x_2^0) tal que (x_1, x_2) es una solución si, y sólo si, existe un escalar y tal que $x_1 = yx_1^0, x = yx_2^0$.

Demostración.- Supóngase $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Dado que $ad - bc = 0$, entonces $c = d = 0$. Por lo que nos queda la ecuación $ax_1 + bx_2 = 0$. Ya que (x_1^0, x_2^0) resuelve el sistema, tenemos

$$ax_1^0 + bx_2^0 = 0. \qquad (1)$$

Ahora, (x_1, x_2) es una solución del sistema si y sólo si

$$ax_1 + bx_2 = 0. \qquad (2)$$

Multiplicando x_1 en (1) y (2) y luego restandolos, obtenemos

$$
\begin{aligned}
b\left(x_1^0 x_2 - x_2^0 x_1\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1^0 x_2 - x_2^0 x_1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x_1^0 x_2 = x_2^0 x_1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{x_1^0}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_2} = \frac{1}{y} \qquad\qquad \text{supongamos } \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow \quad x_1 = y x_1^0 \text{ y } x_2 = y x_2^0.
\end{aligned}
$$

1.4 Matrices escalón reducida por filas

Definición 1.3 Una matriz $m \times n$, R, se llama **matriz escalón reducida por filas** si:

(a) R es reducida por filas;

(b) toda fila de R que tiene todos los elementos 0 está debajo de todas las filas que tienen elementos no nulos;

(c) si las filas $1, \ldots, r$ son las filas no nulas de R, y si el primer elemento no nulo de la fila i está en la columna $k_i, i = 1, \ldots, r$, entonces $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Se puede describir también una matriz escalón R reducida por filas como sigue. Todo elemento de R es 0, o existe un número positivo r, $l \leq r \leq m$, y r entero positivo $k_1, \ldots, k_r$ con $1 \leq k_i \leq n$ y

(a) $R_{ij} = 0$ para $i > r$, y $R_{ij} = 0$ si $j < k_i$.

(b) $R_{ik_j} = \delta_{ij}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r$.

(c) $k_1 < \ldots < k_r$.

Teorema 1.5 Toda matriz $m \times n$, A, es equivalente por filas a una matriz escalón por filas.

Demostración.- Sabemos que A es equivalente por filas a una matriz reducida por filas. Todo lo que se necesita observar es que, efectuando un número finito de intercambios de filas en una matriz reducida por filas, se la puede llevar a la forma escalón reducida por filas. ■

Examinaremos el sistema $RX = 0$, donde R es una matriz escalón reducida por filas. Sean las filas $1, \ldots, r$ las no nulas de R, y supóngase que el elemento principal no nulo de la fila i está e la columna k_i. El sistema $RX = 0$ consta entonces de r ecuaciones no triviales. Además, la incógnita x_{k_i} aparecerá (con coeficiente no nulo) solamente en la i-ésima ecuación. Si $u_1, \ldots, u_{n-r}$ representan las $(n - r)$ incógnitas que son diferentes de $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$, entonces las r ecuaciones no triviales de $RX = 0$ son de la forma

$$\begin{array}{ccccc} x_{k_1} & + & \sum_{j=1}^{n-r} C_{1j}u_j & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{k_r} & + & \sum_{j=1}^{n-r} C_{rj}u_j & = & 0. \end{array} \tag{1.3}$$

Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $RX = 0$ se obtienen dando valores arbitrarios a $u_1, \ldots, u_{n-r}$ y calculando entonces los correspondientes valores de $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ de (1-3).

Observemos una cosa más, en relación con el sistema de ecuaciones $RX = 0$. Si el número r de filas no nulas de R es menor que n, entonces el sistema $RX = 0$ tiene una solución no trivial, esto es, una solución $(x_1, \ldots, x_n)$ en que no todo x_j es 0. En efecto, como $r < n$, se puede elegir algún x_j que no esté entre las r incógnitas $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ y se puede entonces construir una solución como antes, en que este x_j es 1.

Teorema 1.6 Si A es una matriz $m \times n$ con $m < n$, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene una solución trivial.

Demostración.- Sea R una matriz escalón reducida por fila que sea equivalente por fila a A. Entonces los sistemas $AX = 0$ y $RX = 0$ tienen las mismas soluciones por el teorema 3. Si r es el número de filas no nulas de R, entonces ciertamente $r \leq m$, y como $m < n$ tenemos que $r < n$. Se sigue inmediatamente de las observaciones anteriores que $AX = 0$ tiene una solución trivial. ■

Teorema 1.7 Si A es una matriz $n \times n$ (cuadrada), A es equivalente por filas a la matriz identidad $n \times n$, si, y sólo si, el sistema de ecuaciones $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial.

Demostración.- Si A es equivalentes por filas a I, entonces $AX = 0$ e $IX = 0$ tienen las mismas soluciones. Recíprocamente, supóngase que $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial $X = 0$. Sea R una matriz escalón reducida por filas $n \times n$, que es equivalente por filas a A, y sea r el número de filas no nulas de R. Entonces $RX = 0$ carece de solución no trivial. Con lo que $r \geq n$. Pero como R tiene un 1 como primer elemento no nulo en cada una de sus n filas y como estos 1 están en las diferentes columnas n, R debe ser la matriz identidad $n \times n$. ■

Se construye la matriz aumentada A' del sistema $AX = Y$. Esta es la matrix $m \times (n+1)$ cuyas primeras n columnas son las columnas de A y cuya última columna es Y; más precisamente,

$$A'_{ij} = A_{ij}, \text{ si } j \leq n.$$

$$A'_{i(n+1)} = y_i.$$

Ejercicios

1. Hallar, mediante reducción por filas de la matriz de coeficientes todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{1}{3}x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & & & + & 5x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & 0 \\ -\frac{7}{3}x_1 & + & 2x_2 & - & \frac{8}{3}x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Respuesta.- Consideremos la matriz de la forma $AX = 0$ para la respectiva reducción por filas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \qquad 3R_1 \to R_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} R_2 + 4R_1 & \to & R_2 \\ R_3 + 3R_1 & \to & R_3 \\ R_4 + \frac{7}{3}R_1 & \to & R_4 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 24 & -67 \\ 0 & 24 & -67 \\ 0 & 16 & -\frac{134}{3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{24}R_2 \to R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -\frac{67}{24} \\ 0 & 24 & -67 \\ 0 & 16 & -\frac{134}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 - 6r_2 & \to & R_1 \\ R_3 - 24R_2 & \to & R_3 \\ R_4 - 16R_2 & \to & R_4 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -\frac{67}{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - 6R_2 \to R_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{67}{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde

$$x_i - \frac{5}{4}x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5}{4}x_3$$

$$x_2 - \frac{67}{24}x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{67}{24}x_3$$

Por lo que la solución está dado por $\left\{ \left(\frac{5}{4}, \frac{67}{24}, 1 \right) t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Hallar una matriz escalón reducida por filas que sea equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}$$

¿Cuales son las soluciones de $AX = 0$?.

Respuesta.- Por definición de matriz escalón reducida se tiene,

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} R_2 - 2R_1 & \to & R_2 \\ R_3 - iR_1 & \to & R_3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2+2i \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \frac{1}{i}R_3 \to R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2+2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 + iR_3 & \to & R_1 \\ R_2 - (2+2i)R_3 & \to & R_2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 \leftrightarrow R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que es la matriz escalonada reducida por filas equivalente a A. Por lo tanto la solución esta dada por,

$$x_1 = x_2 = 0.$$

3. Describir explícitamente todas las matrices escalón 2×2 reducidas por filas.

Respuesta.- Por la definición 1.3 tenemos las siguientes matrices escalón reducidas por filas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2. \end{array}$$

¿Tiene este sistema solución? Si es así, determinar todas sus soluciones.

Respuesta.- Sea $AX = b$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Luego, aplicando la definición 1.3 tenemos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{rcl} R_2 - 2R_1 & \to & R_2 \\ R_3 - R_1 & \to & R_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{R_2}{2} \to R_2 \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_3 + R_2 & \to & R_1 \\ R_3 + 2R_2 & \to & R_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De esta última matriz podemos asegurar que existe una solución. Como veremos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & \dfrac{1}{2} \\ \\ x_2 - x_3 & = & \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \dfrac{1}{2} - x_3 \\ \\ x_2 & = & \dfrac{1}{2} + x_3 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, las soluciones estarán dadas por,

$$\left(\frac{1}{2} - x_3, \frac{1}{2} + x_3, x_3\right).$$

5. Dar un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tengan solución.

Respuesta.- Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array}$$

Luego el sistema no tiene solución ya que,

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_3 & = & 2(x_1 + x_2) \\ & = & 2 \cdot 1 \\ & = & 2 \neq 3. \end{array}$$

6. Mostrar que el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \mathbf{x_1} & - & \mathbf{2x_2} & + & \mathbf{x_3} & + & \mathbf{2x_4} & = & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_1} & + & \mathbf{x_2} & - & \mathbf{x_3} & + & \mathbf{x_4} & = & \mathbf{2} \\ \mathbf{x_1} & + & \mathbf{7x_2} & - & \mathbf{5x_3} & - & \mathbf{x_4} & = & \mathbf{3} \end{array}$$

No tiene solución.

Demostración.- Se tiene la matriz

$$\boldsymbol{AX = b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{-5} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{lcl} \boldsymbol{R_2 - R_1} & \rightarrow & \boldsymbol{R_2} \\ \boldsymbol{R_3 - R_1} & \rightarrow & \boldsymbol{R_3} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{-6} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\tfrac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-\tfrac{2}{3}} & \mathbf{-\tfrac{1}{3}} & \mathbf{\tfrac{1}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{-6} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{lcl} \boldsymbol{R_1 + 2R_2} & \rightarrow & \boldsymbol{R_1} \\ \boldsymbol{R_3 - 9R_2} & \rightarrow & \boldsymbol{R_3} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-\tfrac{1}{3}} & \mathbf{\tfrac{4}{3}} & \mathbf{\tfrac{5}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-\tfrac{2}{3}} & \mathbf{-\tfrac{1}{3}} & \mathbf{\tfrac{1}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{array}\right]$$

Que es la forma escalonada reducida por filas del sistema. De la última fila, obtenemos $\mathbf{0 = -1}$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, el sistema dado no tiene solución.

7. Hallar todas las soluciones de

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 5x_4 & + & 2x_5 & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & -2 \\ 2x_1 & & & - & 4x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & + & 6x_4 & + & 2x_5 & = & -7 \end{array}$$

Respuesta.- Sea la matriz,

$$AX = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 & -7 \end{array}\right] \qquad \tfrac{1}{2}R_1 \to R_1 \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 & -7 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_2 - R_1 & \to & R_2 \\ R_3 - 2R_1 & \to & R_3 \\ R_4 - R_1 & \to & R_4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 1 & -6 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}R_2 \to R_2 \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 1 & -6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 - \frac{3}{2}R_2 & \to & R_1 \\ R_3 - 3R_2 & \to & R_3 \\ R_4 - \frac{7}{2}R_2 & \to & R_4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 - R_3 & \to & R_1 \\ R_4 - R_3 & \to & R_4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Por lo tanto las soluciones estarán dadas por:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 & \Rightarrow & x_1 = 1 + 2x_3 - x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 & \Rightarrow & x_2 = 2 - x_3 + x_4 \\ x_5 & = & 1. \end{array}$$

Sea $x_3 = s \in \mathbb{R}$ y $x_4 = t \in \mathbb{R}$ donde el conjunto de soluciones estará dado por:

$$\{(1,2,0,0,1) + (2,-1,1,0,0)s + (-1,1,0,1,0)t \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$

8. Sea

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Para cuáles ternas (y_1, y_2, y_3) tiene una solución el sistema $AX = Y$?.

Respuesta.- Sea el sistema $AX = Y$ de donde,

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & y_1 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 1 & -3 & 0 & y_3 \end{array}\right] \qquad R_1 \leftrightarrow R_3 \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & y_3 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 3 & -1 & 2 & y_1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_2 - 2R_1 & \to & R_2 \\ R_3 - 3R_2 & \to & R_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & y_3 \\ 0 & 7 & 1 & y_2 - 2y_3 \\ 0 & 8 & 2 & y_1 - 3y_3 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{7}R_2 \to R_2 \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{y_2 - 2y_3}{7} \\ 0 & 8 & 2 & y_1 - 3y_3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 + 3R_2 & \to & R_1 \\ R_3 + 8R_2 & \to & R_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{y_3 + 3y_2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{y_2 - 2y_3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{7y_1 - 8y_2 - 5y_3}{7} \end{array}\right]$$

$$\tfrac{7}{6}R_3 \to R_3 \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{y_3 + 3y_2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{y_2 - 2y_3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7y_1 - 8y_2 - 5y_3}{6} \end{array}\right]$$

Por lo que las únicas soluciones para cada (y_1, y_2, y_3) estarán dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \dfrac{y_3 + 3y_2}{7} - \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{7y_1 - 8y_2 - 5y_3}{6}\right) \\ \\ x_2 & = & \dfrac{y_2 - 2y_3}{7} - \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{7y_1 - 8y_2 - 5y_3}{6}\right) \\ \\ x_3 & = & \dfrac{7y_1 - 8y_2 - 5y_3}{6}. \end{array} \right.$$

9. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Para cuál (y_1, y_2, y_3, y_4) tiene solución de ecuaciones $AX = Y$?.

Respuesta.- Escribamos el sistema $AX = Y$ y reduzcamoslo a la forma escalonada reducida mediante la definición 1.3, como sigue

$$\left[\begin{array}{rrrr|l} 3 & -6 & 2 & -1 & y_1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & y_4 \end{array}\right] \qquad R_1 \leftrightarrow R_4 \qquad \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & 1 & 0 & y_4 \\ -2 & 4 & 1 & 3 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_3 \\ 3 & -6 & 2 & -1 & y_1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} R_2+2R_1 & \to & R_2 \\ R_4-3R_1 & \to & R_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & y_4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & y_2+2y_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & y_1-3y_4 \end{array}\right]$$

$$\frac{R_2}{3} \quad \to \quad R_2 \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & y_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dfrac{y_2+2y_4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & y_1-3y_4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} R_3-R_2 & \to & R_3 \\ R_4+R_2 & \to & R_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & y_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dfrac{y_2+2y_4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3-\dfrac{y_2}{3}-\dfrac{2}{3}y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1-\dfrac{7}{3}y_4+\dfrac{y_2}{3} \end{array}\right]$$

De donde,

$$y_3-\frac{y_2}{3}-\frac{2}{3}y_4=0 \quad \text{y} \quad y_1-\frac{7}{3}y_4+\frac{y_2}{3}=0.$$

Por lo tanto el sistema $AX=Y$ tiene solución, dado por

$$y \in \{(y_1,y_2,y_3,y_4) | 3y_3-y_2-2y_4=0 \wedge 3y_1-7y_4+y_2=0\}.$$

10. Supóngase que R y R' son matrices escalón 2×3 reducidas por filas y que los sistemas $RX=0$ y $R'X=0$ tienen exactamente las mismas soluciones. Demostrar que $R=R'$.

Demostración.- Para demostrar que las matrices escalonadas reducidas en filas son iguales, tenemos que demostrar básicamente que las matrices son equivalentes en filas, es decir, que cada fila de cada matriz puede expresarse como una combinación lineal de filas de la otra. Dado que tanto R como R' son matrices escalonadas reducidas por filas de 2×3, se dan los tres casos siguientes:

Caso 1. Supongamos que una de las matrices, R no tiene filas no nulas, es decir $R=0$. Entonces, $RX=0$ satisface toda X. Ya que $RX=0$ y $R'X=0$ tiene exactamente las mismas soluciones. Por lo tanto $R'X=0$ satisface todas las X. Así, $R'=0$, lo que implica $R=R'$.

Caso 2. Supongamos que R tiene una fila no nula. Por lo tanto, la solución de $RX=0$ tendrá dos variables sin valor. Ya que $RX=0$ y $R'X=0$ tienen exactamente la misma solución, por lo tanto la solución de $R'X=0$ también tendra dos variables sin valor. Así, R' tiene una fila no nula. Ahora, consideremos una matriz A con la primera fila como la fila no nula de R y la segunda fila como la fila no nula de R'. Por lo que A es una matrix 2×3. Claramente, X satisface $RX=0$ y $R'X=0$ el cual también satisfacera $AX=0$ y por lo tanto, A en su forma reducida debe tener una fila distinta de cero, lo que sólo es posible cuando las filas de A son identicas (ya que la entrada principal de cada fila es uno). Concluimos, R y R' deben concidir.

Caso 3. Supongamos que $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R'}$ tiene todos las filas no nulas. Entonces, $\boldsymbol{RX} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{R'X} = \boldsymbol{0}$ tiene solucoines $\boldsymbol{X}$ dependiendo de sus variables. Ahora, considere una matrix $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{4} \times \boldsymbol{3}$ con las dos primeras filas como las de $\boldsymbol{R}$ y las dos últimas como las de $\boldsymbol{R'}$. Es evidente que cualquier $\boldsymbol{X}$ que satisfaga $\boldsymbol{RX} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{R'X} = \boldsymbol{0}$, también satifacerá $\boldsymbol{CX} = \boldsymbol{0}$. Por lo tanto, la forma escalonada reducida de $\boldsymbol{B}$ debe tener dos filas no nulas, lo que implica que las filas de $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R'}$ deben ser una combinación lineal entre sí. Esto sólo es posible cuando los coeficientes principales de sus primeras filas se encuentran en la misma columna. Pues, si la primera fila de $\boldsymbol{R'}$ comienza con más ceros que la primera fila de $\boldsymbol{R}$, entonces también lo hacen las segundas filas de $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R'}$ y cualquier combinación lineal de ambos. Por el mismo argumento, los coeficientes principales de las segundas filas también deben aparecer en la misma columna. Así, la única manera de que las filas de $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R'}$ sean una combinación lineal entre si es que las filas respectivas concidan. Por lo tanto $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R'}$.

1.5 Multiplicación de matrices

Supongamos que B es una matriz $n \times p$ sobre le cuerpo F, con filas $\beta_1, \ldots, \beta_n$ y que a partir de B se construye una matriz C con filas $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, efectuando ciertas combinaciones lineales

$$\gamma_i = A_{i1}\beta_1 + A_{i2}\beta_2 + \cdots + A_{in}\beta_n. \tag{1.4}$$

Las filas de C quedan determinadas por mn escalares A_{ij}, que son los elementos de una matriz $m \times n$, A. Si se desarrolla (1.4)

$$\left(C_{i1} \cdots C_{ip}\right) = \sum_{r=1}^{n} \left(A_{ir}B_{r1} \cdots A_{ir}B_{rp}\right)$$

se ve que los elementos de C vienen dados por

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rj}.$$

Definición 1.4 Sea A una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo F y sea B una matriz $n \times p$ sobre F. El **producto** AB es la matriz $m \times p$, C, cuyos elementos i, j son

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rj}.$$

El producto está definido si, y sólo si, el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda.

Aunque los productos AB y BA estén definidos, no es necesariamente $AB = BA$; es decir, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

Teorema 1.8 Si A, B, C son matrices sobre el cuerpo F, tales que los productos BC y $A(BC)$ están definidos, entonces también lo están los productos AB, $(AB)C$ y

$$A(BC) = (AB)C.$$

Demostración.- Supóngase que B es una matriz $n \times p$. Como BC está definida, C es una matriz con p filas y BC tiene n filas. Como $A(BC)$ está definida, se puede suponer que A es una matriz $m \times n$. Así el producto AB existe y es una matriz $m \times p$, de lo que se sigue que el producto $(AB)C$ existe. para ver que $A(BC) = (AB)C$ se debe demostrar que

$$[A(BC)]_{ij} = [(AB)C]_{ij}$$

Para todo los i, j. Por definición

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir}(BC)_{rj} &&= \sum_r A_{ir} \sum_s B_{rs}C_{sj} \\
&= \sum_s \sum_r A_{ir}B_{rs}C_{sj} &&= \sum_r \sum_s A_{ir}B_{rs}C_{sj} \\
&= \sum_r \left(\sum_s AB_{ir} \right) C_{sj} &&= \sum_r (AB)_{is}C_{sj} \\
&= [(AB)C]_{ij}.
\end{aligned}$$

■

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, el producto AA está definido. Esta matriz se representa por A^2. En general el producto $AA \cdots A$ (k veces) está definido y se representará por A^k.

Obsérvese que la relación $A(BC) = (AB)C$ implica, entre otras cosas, que combinaciones lineales de combinaciones lineales de filas de C son otra vez combinaciones lineales de fila de C.

Si B es una matriz y C se obtiene de B por medio de una operación elemental de filas, entonces toda fila de C es combinación lineal de las filas de B, y por tanto, existe una matriz A tal que $AB = C$. En general, existen muchas de estas matrices A, y entre todas ellas es conveniente y posible escoger una que tenga algunas propiedades especiales. Antes de ver esto se necesita introducir una clase de matrices.

Definición 1.5 Una matriz $m \times m$ se dice matriz elemental si se puede obtener de la matriz identidad $m \times m$ por medio de una sola operación elemental simple por filas.

Teorema 1.9 Sea e una operación elemental de fila y sea E la matriz elemental $m \times m$, $E = e(I)$. Entonces para toda matriz $m \times n$, A

$$e(A) = EA.$$

Demostración.- La clave de la demostración radica en que el elemento de la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz producto EA se obtiene de la i-ésima fila de E y de la j-ésima columna de A. Los tres tipos de operaciones elementales de fila deben ser estudiados separadamente. Se dará una demostración detallada para una operación tipo (ii) . Los otros dos casos, ,más fáciles de estudiar se dejan como ejercicios. Supóngase que $r \neq s$ y que e es una operación que remplaza la fila r por la fila r más c veces la fila s. Entonces

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik}, & i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta sk, & i \neq r. \end{cases}$$

Luego

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{ij} + cA_{sj}, & i = r. \end{cases}$$

Es decir, $EA = e(A)$. ■

Corolario 1.1 Sean A y B dos matrices $m \times n$ sobre el cuerpo F. Entonces B es equivalente por filas a A si, y sólo si, $B = PA$, donde P es un producto de matrices elementales $m \times m$.

Demostración.- Supóngase que $B = PA$, donde $P = E_s \cdots E_2 E_1$ y los E_i son matrices elementales $m \times m$. Entonces $E_i A$ es equivalente por filas a A_1 y $E_2(E_1 A)$ es equivalente por filas a $E_1 A$. Luego $E_2 E_1 A$ es equivalente por filas a A. Sean $E_1, E_2, \ldots E_s$a matrices elementales correspondientes a cierta sucesión de operaciones elementales de filas que lleva A a B. Entonces $B = (E_s, \cdots, E_1)A$. ■

Ejercicios

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1].$$

Calcular ABC y CAB.

Respuesta.- Dado que $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 1}$ y $C_{1\times 2}$. Entonces por el teorema 8, tenemos $(AB)C$. Luego, utilizando la definición de producto de matrices, calculemos primero $(AB)_{2\times 1}$.

$$\begin{array}{rcl|rcl} C_{11} & = & \sum_{i=1}^{3} A_{1i}B_{i1} & C_{21} & = & \sum_{i=1}^{3} A_{2i}B_{i1} \\ & = & A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & & = & A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \\ & = & 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) & & = & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\ & = & 4. & & = & 4. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$(AB) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Luego, Multipliquemos $[(AB)C]_{2\times 2}$

$$\begin{array}{rcl|rcl} C_{11} & = & (AB)_{11}C_{11} & C_{12} & = & (AB)_{11}C_{12} \\ & = & 4\cdot 1 & & = & 4(-1) \\ & = & 4. & & = & -4. \\ \hline C_{21} & = & (AB)_{21}C_{11} & C_{22} & = & (AB)_{21}C_{12} \\ & = & 4\cdot 1 & & = & 4(-1) \\ & = & 4. & & = & -4. \end{array}$$

De donde,

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Por último, multipliquemos $C(AB)_{1\times 1}$

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{i=1}^{2} C_{1i}(AB)_{i1} \\ &= C_{11}(AB)_{11} + C_{12}(AB)_{21} \\ &= 1\cdot 4 + (-1)\cdot 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C(AB) = 0.$$

2. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Verificar directamente que $A(AB) = A^2B$.

Respuesta.- Primero multipliquemos $AB_{3\times 2}$

$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{i=1}^{3} A_{1i}B_{i1} \\ &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ &= 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ &= 5. \end{aligned}$	$\begin{aligned} C_{12} &= \sum_{i=1}^{3} A_{1i}B_{i2} \\ &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ &= 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 4 \\ &= -1. \end{aligned}$
$\begin{aligned} C_{21} &= \sum_{i=1}^{3} A_{2i}B_{i1} \\ &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \\ &= 2\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ &= 8. \end{aligned}$	$\begin{aligned} C_{22} &= \sum_{i=1}^{3} A_{2i}B_{i2} \\ &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \\ &= 2\cdot(-2) + 0\cdot 3 + 1\cdot 4 \\ &= 0. \end{aligned}$
$\begin{aligned} C_{31} &= \sum_{i=1}^{3} A_{3i}B_{i1} \\ &= A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} + A_{33}B_{31} \\ &= 3\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ &= 10. \end{aligned}$	$\begin{aligned} C_{32} &= \sum_{i=1}^{3} A_{3i}B_{i2} \\ &= A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} + A_{33}B_{32} \\ &= 3\cdot(-2) + 0\cdot 3 + 1\cdot 4 \\ &= -2. \end{aligned}$

De donde,

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 0 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora calculemos, $(A^2)_{3\times 3}$.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{i=1}^{3} A_{1i}A_{i1} \\ &= A_{11}A_{11} + A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} \\ &= 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= \sum_{i=1}^{3} A_{1i}A_{i2} \\ &= A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{32} \\ &= 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ &= -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{13} &= \sum_{i=1}^{3} A_{1i}A_{i3} \\ &= A_{11}A_{13} + A_{12}A_{23} + A_{13}A_{33} \\ &= 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{21} &= \sum_{i=1}^{3} A_{2i}A_{i1} \\ &= A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} + A_{23}A_{31} \\ &= 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ &= 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= \sum_{i=1}^{3} A_{2i}A_{i2} \\ &= A_{21}A_{12} + A_{22}A_{22} + A_{23}A_{32} \\ &= 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ &= -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{23} &= \sum_{i=1}^{3} A_{2i}A_{i3} \\ &= A_{21}A_{13} + A_{22}A_{23} + A_{23}A_{33} \\ &= 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{31} &= \sum_{i=1}^{3} A_{3i}A_{i1} \\ &= A_{31}A_{11} + A_{32}A_{21} + A_{33}A_{31} \\ &= 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ &= 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{32} &= \sum_{i=1}^{3} A_{3i}A_{i2} \\ &= A_{31}A_{12} + A_{32}A_{22} + A_{33}A_{32} \\ &= 3\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{33} &= \sum_{i=1}^{3} A_{3i}A_{i3} \\ &= A_{31}A_{13} + A_{32}A_{23} + A_{33}A_{33} \\ &= 3\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego calculemos, $A(AB)_{3\times 2}$.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{i=1}^{3} A_{1i}(AB)_{i1} \\ &= A_{11}AB_{11} + A_{12}AB_{21} + A_{13}AB_{31} \\ &= 1\cdot 5 + (-1)\cdot 8 + 1\cdot 10 \\ &= 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= \sum_{i=1}^{3} A_{1i}(AB)_{i2} \\ &= A_{11}AB_{12} + A_{12}AB_{22} + A_{13}AB_{32} \\ &= 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 1\cdot(-2) \\ &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{21} &= \sum_{i=1}^{3} A_{2i}(AB)_{i1} \\ &= A_{21}AB_{11} + A_{22}AB_{21} + A_{23}AB_{31} \\ &= 2\cdot 5 + 0\cdot 8 + 1\cdot 10 \\ &= 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= \sum_{i=1}^{3} A_{2i}(AB)_{i2} \\ &= A_{21}AB_{12} + A_{22}AB_{22} + A_{23}AB_{32} \\ &= 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) \\ &= -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{31} &= \sum_{i=1}^{3} A_{3i}(AB)_{i1} \\ &= A_{31}AB_{11} + A_{32}AB_{21} + A_{33}AB_{31} \\ &= 3\cdot 5 + 0\cdot 8 + 1\cdot 10 \\ &= 25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{32} &= \sum_{i=1}^{3} A_{3i}(AB)_{i2} \\ &= A_{31}AB_{12} + A_{32}AB_{22} + A_{33}AB_{32} \\ &= 3\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) \\ &= -5. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A(AB) = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 20 & -4 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$$

Por último, calculemos, $\left(A^2B\right)_{3\times 2}$.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{i=1}^{3}(A^2)_{1i}B_{i1} \\ &= (A^2)_{11}B_{11} + (A^2)_{12}B_{21} + (A^2)_{13}B_{31} \\ &= 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ &= 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= \sum_{i=1}^{3}(A^2)_{1i}B_{i2} \\ &= (A^2)_{11}B_{12} + (A^2)_{12}B_{22} + (A^2)_{13}B_{32} \\ &= 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 4 \\ &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{21} &= \sum_{i=1}^{3}(A^2)_{2i}B_{i1} \\ &= (A^2)_{21}B_{11} + (A^2)_{22}B_{21} + (A^2)_{23}B_{31} \\ &= 5\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 3\cdot 4 \\ &= 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= \sum_{i=1}^{3}(A^2)_{2i}B_{i2} \\ &= (A^2)_{21}B_{12} + (A^2)_{22}B_{22} + (A^2)_{23}B_{32} \\ &= 5\cdot(-2) + (-2)\cdot 3 + 3\cdot 4 \\ &= -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{31} &= \sum_{i=1}^{3}(A^2)_{3i}B_{i1} \\ &= (A^2)_{31}B_{11} + (A^2)_{32}B_{21} + (A^2)_{33}B_{31} \\ &= 6\cdot 2 + (-3)\cdot 1 + 4\cdot 4 \\ &= 25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{32} &= \sum_{i=1}^{3}(A^2)_{3i}B_{i2} \\ &= (A^2)_{31}B_{12} + (A^2)_{32}B_{22} + (A^2)_{33}B_{32} \\ &= 6\cdot(-2) + (-3)\cdot 3 + 4\cdot 4 \\ &= -5. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A(AB) = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 20 & -4 \\ 25 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 20 & -4 \\ 25 & -5 \end{bmatrix} = A^2B$$

3. Encontrar dos matrices 2×2, A, diferentes tales que $A^2 = 0$ pero $A \neq 0$.

Respuesta.- Sea,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{i=1}^{2} A_{1i}A_{i1} \\ &= A_{11}A_{11} + A_{12}A_{21} \\ &= 0\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= \sum_{i=1}^{2} A_{1i}A_{i2} \\ &= A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ &= 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
C_{21} & = & \sum_{i=1}^{2} A_{2i}A_{i1} & C_{22} & = & \sum_{i=1}^{2} A_{2i}A_{i2} \\
& = & A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & & = & A_{21}A_{12} + A_{22}A_{22} \\
& = & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\
& = & 0. & & = & 0.
\end{array}
$$

Por lo tanto,

$$A^2 = 0$$

Por otro lado, sea

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Entonces,

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
C_{11} & = & \sum_{i=1}^{2} B_{1i}B_{i1} & C_{12} & = & \sum_{i=1}^{2} B_{1i}B_{i2} \\
& = & B_{11}B_{11} + B_{12}B_{21} & & = & B_{11}B_{12} + B_{12}B_{22} \\
& = & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & & = & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\
& = & 0. & & = & 0. \\
\hline
C_{21} & = & \sum_{i=1}^{2} B_{2i}B_{i1} & C_{22} & = & \sum_{i=1}^{2} B_{2i}B_{i2} \\
& = & B_{21}B_{11} + B_{22}B_{21} & & = & B_{21}B_{12} + B_{22}B_{22} \\
& = & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & & = & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\
& = & 0. & & = & 0.
\end{array}
$$

Por lo tanto,

$$A^2 = 0.$$

4. Para cada A del ejercicio 2, hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tal que

$$E_k \cdot E_2 E_1 A = I.$$

Respuesta.- Sea,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
E_1A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\
E_2(E_1A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\
E_3(E_2E_1A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\
E_4(E_3E_2E_1A) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\
E_5(E_4E_3E_2E_1A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
E_6(E_5E_4E_3E_2E_1A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
E_7(E_6E_5E_4E_3E_2E_1A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
E_8(E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Existe una matriz C tal que $CA = B$?.

Respuesta.- Está claro que la matriz C tiene la forma 2×3. Es decir,

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$CA = B \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 + c_3 & -c_1 + 2c_2 \\ c_4 + 2c_5 + c_6 & -c_4 + 2c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\left\{\begin{array}{rcr} c_1+2c_2+c_3 & = & 3 \\ -c_1+2c_2 & = & 1 \\ c_4+2c_5+c_6 & = & -4 \\ -c_4+2c_5 & = & 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} c_2 & = & \frac{1+c_1}{2} \\ c_3 & = & 2-rc_1 \\ c_4 & = & 2c_5-4 \\ c_6 & = & -4c_5 \end{array}\right.$$

Así, existen infinitas matrices para algunos c_1 y c_5. Una de estas tiene la forma de

$$C = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

6. Sea A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times k$. Demostrar que las columnas de $C = AB$ sea combinaciones lineales de las columnas de A. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las columnas de A y $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ son las columnas de C, entonces

$$\gamma_i = \sum_{r=1}^{n} B_{rj}\alpha_r.$$

Demostración.- Por definición de multiplicación de matrices, tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \left\{\begin{array}{ccccccc} A_{11}B_{1j} & + & A_{12}B_{2j} & + & \cdots & + & A_{1n}B_{nj} \\ A_{21}B_{1j} & + & A_{22}B_{2j} & + & \cdots & + & A_{2n}B_{nj} \\ & & & \vdots & & & \\ A_{m1}B_{1j} & + & A_{m2}B_{2j} & + & \cdots & + & A_{mn}B_{nj} \end{array}\right. \\ &= B_{ij}\left[\begin{array}{c} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{array}\right] + B_{2j}\left[\begin{array}{c} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{m2} \end{array}\right] + \ldots + B_{nj}\left[\begin{array}{c} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{mn} \end{array}\right] \\ &= B_{1j}\alpha_1 + B_{2j}\alpha_2 + \cdots + B_{nj}\alpha_n \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{n} B_{rj}\alpha_r \end{aligned}$$

Por lo tanto, las columnas de $C = AB$ son combinaciones lineales de las columnas de A.

7. Sean A y B matrices 2×2 tales que $AB = I$. Demostrar que $BA = I$.

Demostración.- Supongamos dos matrices 2×2,

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc} e & f \\ g & h \end{array}\right]$$

De donde

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
C_{11} & = & \sum_{i=1}^{2} A_{1i}B_{i1} & C_{12} & = & \sum_{i=1}^{2} A_{1i}B_{i2} \\
 & = & A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & & = & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\
 & = & a \cdot e + b \cdot g & & = & a \cdot f + b \cdot h \\
\hline
C_{21} & = & \sum_{i=1}^{2} A_{2i}B_{i1} & C_{22} & = & \sum_{i=1}^{2} A_{2i}B_{i2} \\
 & = & A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & & = & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \\
 & = & c \cdot e + d \cdot g & & = & c \cdot f + d \cdot h
\end{array}
$$

$$AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

Luego, $AB = I$ implica el siguiente sistema en u, r, s, t tiene una solución

$$\begin{cases} au+bs &= 1 \\ cu+ds &= 0 \\ ar+bt &= 0 \\ cr+dt &= 1 \end{cases}$$

Ya que (x, y, z, w) es una de esas soluciones. La matriz de coeficientes aumentada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d & 1 \end{array}\right]$$

Mientras que $ad - bd \neq 0$ este sistema se reduce por filas a la siguiente forma escalonada reducida por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{ad-bc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-c}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \qquad (3)$$

De donde, necesariamente $x = \dfrac{d}{ad-bc}$, $y = \dfrac{-b}{ad-bc}$, $z = \dfrac{-c}{ad-bc}$ y $w = \dfrac{a}{ad-bc}$. De este modo

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

Ahora, comprobaremos que

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, debemos ver que si $AB = I$ entonces $ad - bc \neq 0$. Sea $ad - bc = 0$, por lo que demostraremos que no hay solución para (3), lo que contradice el hecho de que (x, y, z, w) es una solución. Si $a = b = c = d = 0$, entonces obviamente $AB \neq I$. Así, supongamos que $a \neq 0$ (porque mediante operaciones de fila elementales podemos mover cualquiera de los cuatro elementos para que sea la entrada superior izquierda). Restar $\frac{c}{a}$ veces la tercera fila de la cuarta fila de (3) da

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & c-\frac{c}{a}a & 0 & d-\frac{c}{a}b & 1 \end{array}\right]$$

Ahora, $c - \dfrac{c}{a}a = 0$, $ad - bc = 0$, además $d - \dfrac{c}{a}b = 0$. Así obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

se sigue que (3) no tiene solución.

8. Sea

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

una matriz 2×2. Se desea saber si es posible encontrar matrices 2×2, A y B, tales que $C = AB - BA$. Demostrar que tales matrices pueden hallarse si, y sólo si $C_{11} + C_{22} = 0$.

Demostración.- Sea,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

tal que $C = AB - BA$. Ahora,

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{21} & a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Después,

$$\begin{aligned} C &= AB - BA \\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} - b_{12}a_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{21} & a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De donde,

$$\left\{ \begin{aligned} c_{11} &= a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad c_{11} + c_{22} = a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} + a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} = 0$$

Por lo tanto, las matrices A y B existe, si y sólo si la suma de las entradas diagonales de C suman cero.

1.6 Matrices inversibles

Definición 1.6 Sea A una matriz (cuadrada) $n \times n$ sobre el cuerpo F. Una matriz $n \times n$, B, tal que $BA = I$ se llamada **inversa a la izquierda** de A; una matriz $n \times n$, B, tal que $AB = I$ se llamada **inversa a la derecha** de A. Si $AB = BA = I$, entonces B se llama inversa **bilátera** de A, y se dice que A es **inversible**.

Lema 1.1 Si A tiene una inversa a la izquierda, B, y una inversa a la deracha, C, entonces $B = C$.

Demostración.- Supóngase que $BA = I$ y que $AC = I$. Entonces,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

(Esto demuestra la unicidad de B). ■

Así, si A es inversa a la izquierda e inversa a la derecha, A es inversible y tiene una inversa bílátera que se representará por A^{-1} y se llamará simplemente **la inversa** de A.

Teorema 1.10 Sean A y B dos matrices $n \times n$ sobre F.

(i) Si A es inversible, también lo es A^{-1} y $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(ii) Si A y B son inversibles, también lo es AB y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración.- La primera afirmación es evidente por la simetría de la definición. La segunda se desprende de las relaciones

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I.$$

■

Corolario 1.2 Un producto de matrices inversibles es inversible. ■

Teorema 1.11 Una matriz elemental es inversible.

Demostración.- Sea E una matriz elemental correspondiente a la operación elemental de fila e. Si e_1 es la operación inversa de e (teorema 2) y $E_1 = e_1(I)$, entonces

$$EE_i = e(E_i) = e\left[e_i(I)\right] = I$$

y

$$E_iE = e_1(E) = e_1\left[e(I)\right] = I$$

con lo que E es inversible y $E_1 = E^{-1}$. ■

Teorema 1.12 Si A es una matriz $n \times n$, los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) A es inversible.

(ii) A es equivalente por filas a la matriz identidad $n \times n$.

(iii) A es un producto de matrices elemetales.

Demostración.- Sea R una matriz escalón reducida por filas, equivalentes por filas a A. Por el teorema 9 (o su corolario),

$$R = E_k \cdots E_2 E_1 A$$

donde $E_1, \ldots, E_k$ son matrices elementales. Cada E_j es inversible, y así

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R.$$

Como el producto de matrices inversibles es inversible, se ve que A es inversible si, y sólo si, R es inversible. Como R es una matriz (cuadrada) escalón reducida por filas, R es inversible si, y sólo si, toda fila de R contiene un elemento no nulo, esto es, si, y sólo si, $R = I$. Hemos visto que A es inversible si, y sólo si, $R = I$, y si $R = I$ entonces $A = E_k^{-1}, \ldots, E_1^{-1}$. Se ve ahora que (i), (ii) y (iii) son afirmaciones equivalentes respecto de A. ■

Corolario 1.3 Si A es una matriz inversible $n \times n$ y si una sucesión de operaciones elementales de fila reduce A a la identidad, entonces la misma sucesión de operaciones, cuando se aplica a I, da A^{-1}. ■

Corolario 1.4 Sean A y B dos matrices $m \times n$. Entonces, B es equivalente por filas a A si, y sólo si, $B = PA$, donde P es una matriz $m \times m$ inversible. ■

Teorema 1.13 Para una matriz $n \times n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) A es inversible.

(ii) El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solo la solución trivial $X = 0$.

(iii) El sistema de ecuaciones $AX = Y$ tiene una solución X para cada matriz $n \times 1$, Y.

Demostración.- De acuerdo con el teorema 7, la condición (ii) es equivalente al hecho de que A es equivalente por filas a la matriz identidad. Por el teorema 12, (i) y (ii) son, por tanto, equivalente. Si A es inversible, la solución de $AX = Y$ es $X = A^{-1}Y$. Recíprocamente, supóngase que $AX = Y$ tiene una solución para cada Y dada. Sea R una matriz reducida por filas que sea equivalente por filas a A. Se debe demostrar que $R = I$. Esto equivale a demostrar que la última fila de R no es 0 (idénticamente). Sea

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si el sistema $RX = E$ puede resolverse para X, la última fila de R no puede ser 0. Se sabe que $R = PA$, donde P es inversible. Luego $RX = E$ si, y sólo si, $AX = P^{-1}E$. De acuerdo con (iii), el útimo sistema tiene una solución. ■

Corolario 1.5 Una matriz cuadrada que tiene una inversa a la izquierda o a la derecha es inversible.

Demostración.- Sea A una matriz $m \times n$. Supóngase que A tiene una inversa a la izquierda, es decir, una matriz B tal que $BA = I$. Entonces $AX = 0$ tiene solo la solución trivial, porque $X = IX = B(AX)$. Luego A es inversible. Por otro lado, supóngase que A tiene una inversa a la deracha, es decir, una matriz C tal que $AC = I$. Entonces C tiene una inversa a la izquierda y es, por tanto, inversa. Se sigue entonces que $A = C^{-1}$ y así A es inversible con inversa C. ■

Dado que, no hay ningún privilegio con respecto a las filas, lo tratado en la última sección pudo haberse hecho usando columnas en vez de filas. Si se define una operación elemental de columna y equivalencia por columna, es claro que toda matriz $m \times n$ será equivalente por columnas a una matriz escalón reducida por columnas. Así cada operación elemental de columna será de la forma $A \to AE$, donde E es una matriz elemental $n \times n$, y así sucesivamente.

Ejercicios

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar una matriz escalón reducida por filas R que sea equivalente a A, y una matriz inversible 3×3, P, tal que $R = PA$.

Respuesta.- Podemos realizar operaciones de fila elementales en A, mientras realizamos las mismas operaciones en I, determinando también la matriz elemental, y así encontrar R y P.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 + R_1 \to R_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - R_1 \to R_3 \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_2}{2} \to R_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + 2R_2 \to R_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 + 4R_2 \to R_3 \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_3}{8} \to R_3 \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right] \quad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$R_2 - 2R_3 \to R_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right] \quad E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + 3R_2 \to R_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right] \quad E_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya que las matrices elementales son invertibles y el producto de matrices invertibles es invertible, entonces $P = E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$ es invertible. Así,

$$R = PA \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Repetir el Ejercicio 1, pero con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & i \\ 1 & -3 & -i \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Respuesta.- Podemos realizar operaciones de fila elementales en A, mientras realizamos las mismas operaciones en I, determinando también la matriz elemental, y así encontrar R y P.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & i & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_1 \to R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -i & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - 2R_1 \to R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3i & 1 & -2 & 0 \\ i & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - iR_1 \to R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+3i & 0 & -i & 0 & 1 \end{array}\right] \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_2}{6} \to R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{i}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1+3i & 0 & 0 & -i & 1 \end{array}\right] \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + 3R_2 \to R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{i}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1+3i & 0 & 0 & -i & 1 \end{array}\right] \qquad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - (1+3i)R_2 \to R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{i}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3-i}{2} & -\frac{1+3i}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \qquad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(1+3i) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2R_3}{3-i} \to R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{i}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{i}{2} & \frac{3+i}{15} & \frac{3+i}{5} \end{array}\right] \qquad E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+i}{5} \end{bmatrix}$$

$$R_1 - \frac{i}{2}R_3 \to R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1-3i}{30} & \frac{1-3i}{10} \\ 0 & 1 & \frac{i}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{i}{2} & \frac{3+i}{15} & \frac{3+i}{5} \end{array}\right] \qquad E_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - \frac{i}{2}R_3 \to R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1-3i}{30} & \frac{1-3i}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{-(3+i)}{10} & \frac{1-3i}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{i}{3} & \frac{3+i}{15} & \frac{3+i}{5} \end{array}\right] \qquad E_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya que las matrices elementales son invertibles y el producto de matrices invertibles es invertible, entonces $P = E_9E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$ es invertible. Así,

$$R = PA \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-3i}{30} & \frac{1-3i}{10} \\ 0 & -\frac{-(3+i)}{10} & \frac{1-3i}{10} \\ -\frac{i}{3} & \frac{3+i}{15} & \frac{3+i}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & i \\ 1 & -3 & -i \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Para cada una de las dos matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

emplear operaciones elementales de fila para determinar cuándo es invresible y encontrar la inversa en caso que lo sea.

Respuesta.- Para la primera matriz, por el teorema 12 y el corolario 3, reducimos por filas la matriz aumentada de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \frac{R_1}{2} \to R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \to R_2 \\ \\ R_3 - 6R_1 \to R_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 - R_2 \to R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Puesto que la última fila es cero. Entonces, A no puede ser reducida por filas a la identidad. Es decir, por el teorema 12, A no es equivalente por fila a la matriz identidad, por lo tanto, A no es invertible.

Para la segunda matriz, reducimos por filas la matriz aumentada de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad R_2 - 3R_1 \to R_2 \qquad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \qquad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} R_1 - R_2 & \to & R_1 \\ R_3 - 5R_2 & \to & R_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\frac{R_3}{8} \to R_3 \qquad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right]$$

$$2R_3 + R_2 \to R_2 \qquad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right]$$

Por lo tanto la matriz inversa es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

4. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

¿Para que X existe un escalar c tal que $AX = cX$?.

Respuesta.- Sea,

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

que implica

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x & & & & & = & cx \\ x & + & 5y & & & = & cy \\ & & y & + & 5z & = & cz \end{array}$$

Si $c \neq 5$, entonces $x = 0$, lo que implica que $y = 0$ y $z = 0$. Por lo que es cierto para

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } c = 0.$$

Por otro lado, si $c = 5$, entonces por la ecuación 2, $x = 0$; lo que implica que $y = 0$. Por lo tanto, es cierto para

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \text{ con } c = 5.$$

5. Determinar si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es invertible y hallar A^{-1} si existe.

Respuesta.- Reduciendo por filas, tenemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 - R_2 \to R_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 - R_3 \to R_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 - R_4 \to R_3 \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \frac{R_2}{2} \to R_2 \\ \frac{R_3}{3} \to R_3 \\ \frac{R_4}{4} \to R_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Por lo tanto, por el teorema 12, A es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

6. Supóngase que A es una matriz 2×1 y que B es una matriz 1×2. Demostrar que $C = AB$ no es inversible.

Demostración.- Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

De donde,

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}$$

Luego, si sumamos $-\dfrac{a_2}{a_1}$ de la primera fila a la segunda fila se tiene:

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, por el teorema 12, de equivalencia por filas a la identidad, C no es inversible.

7. Sea A una matriz (cuadrada) $n \times n$. Demostrar que las siguientes dos afirmaciones:

(a) Si A es inversible y $AB = 0$ para alguna matriz $n \times n$, B, entonces $B = 0$.

Demostración.- Por el teorema 8 y por la definción de matriz inversible, se tiene

$$0 = A^{-1}0 = A^{-1}AB = \left(A^{-1}A\right) B = IB = B.$$

(b) Si A no es inversible, entonecs existe una matriz $n \times n$, B, tal que $AB = 0$, pero $B \neq 0$.

Demostración.- Por el teorema 13(ii), ya que A no es invertible, AX=0 debe tener una solución no trivial. Por lo que $X \neq 0$ tal que $x = 0$. Ahora, consideremos la matriz B,

$$B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

donde b_n respresenta las columnas de B. Luego, sea $b_1 = x$ y $b_i = 0$ para todo $i = 2, 3, \ldots, n$ obtenemos $B \neq 0$ y $b = 0$. Así cuando A no es inverible, existe una matriz distinta de cero B tal que $b = 0$.

8. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Demostrar, usando operaciones elementales de fila, que A es inversible si, y sólo si, $(ad - bc) \neq 0$.

Demostración.- Primero, si A es inversible, entonces a, b, c o d debe ser distinto de cero. Si $a \neq 0$, se sigue

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \frac{R_1}{a} \to R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ c & d \end{bmatrix} \quad R_2 - cR_1 \to R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{bmatrix}$$

de donde, debemos tener $ad - bc \neq 0$ ya que de lo contrario A no podría ser equivalente por filas a la matriz identidad, contradiciendo el Teorema 12.
Si, en cambio, $a = 0$. Entonces, debemos tener $b \neq 0$ ya que de lo contrario A tendría una fila de ceros y no podría ser equivalente por fila a la matriz identidad. Es decir,

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \frac{R_1}{b} \to R_1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 - dR_2 \to R_1 \quad \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos que debemos tener $c \neq 0$. Así, $ad - bc = -bc \neq 0$. Esto completa la primera mitad de la demostración.
Por el contrario, suponga que $ad - bc \neq 0$. Si $d \neq 0$, entonces A puede reducirse para obtener

$$\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & dR_1 \to R_1 & \begin{bmatrix} ad & bd \\ c & d \end{bmatrix} \\[2ex]
 & R_1 - bR_2 \to R_1 & \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \\[2ex]
 & \dfrac{R_1}{ad-bc} \to R_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \\[2ex]
 & R_2 - cR_1 \to R_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\[2ex]
 & \dfrac{R_2}{d} \to R_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Por lo que, A es equivalente por fila a la matriz identidad. Por otro lado, si $d = 0$, entonces b y c deben ser distintos de cero, lo que nos queda

$$\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} & \dfrac{R_2}{c} \to R_2 & \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\[2ex]
 & R_1 \leftrightarrow R_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \\[2ex]
 & R_2 - aR_1 \to R_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\[2ex]
 & R_2 - bR_1 \to R_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

de modo que A es nuevamente equivalente por filas a la matriz identidad. En cualquier caso, A debe ser invertible por el Teorema 12.

9. Una matriz $n \times n$, A, se llama **triangular superior** si $A_{ij} = 0$ para $i > j$; esto es, si todo elemento por debajo de la diagonal principal es 0. Demostrar que una matriz (cuadrada) triangular superior es inversible si, y sólo si, cada elemento de su diagonal principal es diferente de 0.

Demostración.- Sea A una matriz triangular superior $n \times n$. Supóngase que cada elemento de la diagonal principal de A es distinta de cero, luego considere el sistema lineal homogéneo $AX = 0$,

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \ldots & + & A_{1n}x_n & = & 0 \\
 & & A_{22}x_2 & + & \ldots & + & A_{2n}x_n & = & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & A_{nn}x^n & = & 0
\end{array}$$

. Ya que $A_{nn} \neq 0$, la última ecuación implica que $x_n = 0$.. Dado que $A_{n-1,n_1} \neq 0$, la penultima ecuación implica que $x_{n-1} \neq 0$. Continuando de esta manera, vemos que $x_i = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, el sistema $AX = 0$ tiene solo la solución trivial, por lo que A es invertible.
Por el contrario, supongamos que A es invertible. Entonces A no puede contener ninguna fila de ceros, ni puede ser equivalente por filas a una matriz con una fila de ceros. Esto implica que

$A_{nn} \neq 0$. Después, considere $A_{n-1,n-1}$. Si $A_{n-1,n-1} = 0$, entonces dividiendo la fila n por A_{nn}, y sumando $-A_{n-1,n}$ por la fila n a la fila $n-1$, vemos que A es equivalente en filas a una matriz cuya $(n-1)$ primera fila es todos ceros. Pero esto es una contradicción. Entonces, $A_{n-1,n-1} \neq 0$. De la misma manera, podemos mostrar que $A_{ii} \neq 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, todas las entradas en la diagonal principal de A son distintas de cero.

10. Demostrar la siguiente generalización del Ejercicio 6. Si A es una matriz $m \times n$, B es una matriz $n \times m$ y $n < m$, entonces AB no es inversible.

Demostración.- Existen n columnas en A por lo que el espacio vectorial generado por esas columnas tiene una dimensión no mayor que n. Todas las columnas de AB son combinaciones lineales de las columnas de A. Así, el espacio vectorial generado por las columnas de AB están contenidos en el espacio vectorial generado por las columnas de A. Por lo que, el espacio columna de AB tiene una dimensión no mayor que n. Por lo tanto, el espacio columna de la matriz, $m \times m$ AB tiene una dimensión menor o igual a n con $n < m$. De donde las columnas de AB generan un espacio de dimensión estrictamente menor que m. Lo que se concluye que AB no es invertible.

11. Sea A una matriz $m \times n$. Hacer ver que por medio de un número finito de operaciones elementales de fila y/o de columna se puede pasar de A a la matriz R que es simultáneamente escalón reducida por filas y escalon reducida por columnas; es decir, $R_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $R_{ii=1}$, $1 \leq i \leq r$, $R_{ii} = 0$ si $i > r$. Demostrar que $R = PAQ$, donde P es una matriz inversible $m \times m$ y Q es una matriz inversible $n \times n$.

Demostración.- Por el teorema 5, A es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas R_0. Luego, por el segundo corolario del teorema 12, existe una matriz invertible $m \times m$, P tal que $R_o = PA$.
Los resultados que son análogos a los teoremas 5 y 12 (con demostraciones similares) se cumplen para matrices escalonadas reducidas en columnas, por lo que hay una matriz R que es columna equivalente a R_0 y una matriz Q invertible $n \times n$ tal que $R = R_0 Q$. Entonces $R = PAQ$, después vemos que, a través de un número finito de operaciones elementales de filas y/o columnas, A pasa a una matriz R que es escalonada reducida tanto por filas como por columnas.

12. El resultado del ejemplo 16 sugiere que tal vez la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

es inversible y A^{-1} tiene elementos enteros. ¿Se puede demostrar esto?.

Demostración.-

2

Espacios vectoriales

2.1 Espacios vectoriales

Definición 2.1 Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) consta de lo siguiente:

1. Un cuerpo F de escalares;
2. un conjunto V de objetos llamados vectores;
3. una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores α, β de V un vector $\alpha + \beta$ de V, que se llama suma de α y β, de tal modo que:
   (a) La adición es conmutativa, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
   (b) la adición es asociativa, $\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$;
   (c) existe un único vector 0 de V, llamado vector nulo tal que $\alpha + 0 = \alpha$, para todo α de V;
   (d) para cada vector α de V existe un vector $-\alpha$ de V, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$;
4. una regla (u operación) llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar c de F y cada vector α de V a un vector $c\alpha$ en V, llamado producto de c y α, de tal modo que:
   (a) $1\alpha = \alpha$ para todo α de V;
   (b) $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$;
   (c) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$;
   (d) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.