Tom M. Apostol

CALCULUS

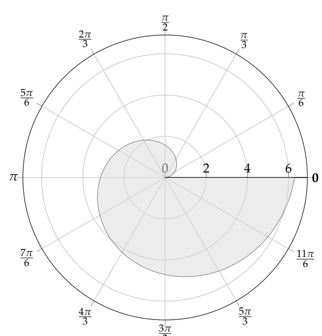
Volumen 1

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Y APUNTES

POR

FODE

CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA



LIBRO EN SU SEGUNDA EDICIÓN (Ingles)

Título de la obra original:
CALCULUS, One -Variable Calculus,
with an introduction to Linear Algebra
Edición original en lengua inglesa publicada por:
Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts

Sin ninguna revisión de esta obra.

Propiedad de esta obra:
CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA
E-mail: soyfode@gmail.com

2020

Contents

Introducción

1.3 El método de exhaución para el área de un segmento de parábola

El método consiste simplemente en lo siguiente: se divide la figura en un cierto número de bandas y se obtienen dos aproximaciones de la región, una por defecto y otra por exceso, utilizando dos conjuntos de rectángulos.
Se subdivide la base en n partes iguales, cada una de longitud b/n. Los puntos de subdivisión corresponden a los siguientes valores de x:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, ..., \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b$$

La expresión general de un punto de la subdivisión es $x = \frac{kb}{n}$, donde k toma los valores sucesivos $k = 0, 01, 2, 3, ..., n$. En cada punto $\frac{kb}{n}$ se construye el rectángulo exterior de altura $(kb/n)^2$. El área de este rectángulo es el producto de la base por la altura y es igual a:

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{3}k^3$$

Si se designa por S_n la suma de las áreas de todos os rectángulos exteriores, puesto que el área del rectángulo k-simo es $(b^3/n^3)k^3$ se tiene la formula.

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) \qquad (1)$$

De forma análoga se obtiene la fórmula para la suma s_n de todos los rectángulos interiores:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2] \qquad (2)$$

Luego se tiene la identidad

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{6}{n} \qquad (3)$$

Como también

$$1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 = \frac{n^2}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \qquad (4)$$

Las expresiones exactas dadas no son necesarias para el objeto que aquí se persigue, pero sirven para deducir fácilmente las dos desigualdades que interesan

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + ... + n^2$$

que son válidas para todo entero $n \geq 1$. Multiplicando ambas desigualdades por b^3/n^3 y haciendo uso de (1) y (2) se tiene:

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n$$

Probemos que $b^3/3$ es el único número que goza de esta propiedad, es decir, que si A es un número que verifica las desigualdades

$$s_n < A < S_n \qquad (7)$$

para cada entero positivo n, ha de ser necesariamente $A = b^3/3$. Por esta razón dedujo Arquímedes que el área del segmento parabólico es $b^3/3$.
Para probar que $A = b^3/3$ se utilizan una vez más las desigualdades (5). Sumando n^2 a los dos miembros de la desigualdad de la izquierda en (5) se obtiene

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + n^2$$

Multiplicando por $b^3/3$ y utilizando (1) se tiene

$$S_n < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \qquad (8)$$

Análogamente, restando n^2 de los dos miembros de la desigualdad de la derecha en (5) y multiplicando por b^3/n^3 se llega a la desigualdad:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n \qquad (9)$$

Por tanto,cada número A que satisfaga (7) ha de satisfacer también:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \qquad (10)$$

para cada entero $n \geq 1$. Ahora también, hay sólo tres posibilidad:

$$A > \frac{b^3}{3}, \quad A < \frac{b^3}{3} \quad A = \frac{b^3}{3}$$

Si se prueba que las dos primeras conducen a una contradicción habrá de ser $A = \frac{b^3}{3}$
Supongamos que la desigualdad $A > b^3/3$ fuera cierta. De la segunda desigualdad en (10) se obtiene

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n} \qquad (11)$$

para cada entero $n \geq 1$. Puesto que $A - b^3/3$ es positivo, se puede dividir ambos miembros de (11) por $A - b^3/3$ y multiplicando después por n se obtiene la desigualdad

$$n < \frac{b^3}{A - b^3/3}$$

para cada n. Pero esta desigualdad es evidentemente para $n > b^3/(A - b^3/3)$. Por tanto la desigualdad es una contradicción. De forma análoga se demuestra para $A < b^3/3$ de donde concluimos que $A = b^3/3$.

3.2 Axiomas de cuerpo

Axioma .1 **Propiedad conmutativa.** $x + y = y + x, \ xy = yx.$

Axioma .2 **Propiedad asociativa.** $x + (y + z) = (x + y) + z, \ x(yz) = (xy)z.$

Axioma .3 **Propiedad distributiva.** $x(y + z) = xy + xz.$

Axioma .4 **Existencia de elementos neutros.** Existen dos números reales distintos que se indican por 0 y 1 tales que para cada número real x se tiene: $0 + x = x + 0 = x$ y $1 \cdot x = x \cdot 1 = 1.$

Axioma .5 **Existencia de negativos.** Para cada número real x existe un número real y tal que $x + y = y + x = 0.$

Axioma .6 **Existencia del recíproco.** Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real y tal que $xy = yx = 1.$

Teorema 3.1 **Ley de simplificación para la suma.** Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$ (En particular esto prueba que el número 0 del axioma 4 es único)

Demostración.- Dado a+b=a+c. En virtud de la existencia de negativos, se puede elegir y de manera que $y + a = 0$, con lo cual $y + (a + b) = y + (a + c)$ y aplicando la propiedad asociativa tenemos $(y + a) + b = (y + a) + c$ entonces, $0 + b = 0 + c$. En virtud de la existencia de elementos neutros, se tiene $b = c$.
por otro lado este teorema demuestra que existe un solo número real que tiene la propiedad del 0 en el axioma 4. En efecto, si 0 y $0^{'}$ tuvieran ambos esta propiedad, entonces $0 + 0^{'} = 0$ y $0 + 0 = 0$; por lo tanto, $0 + 0^{'} = 0 + 0$ y por la ley de simplificación para la suma $0 = 0'$. ■

Teorema 3.2 **Posibilidad de la sustracción.** Dado a y b existe uno y sólo un x tal que $a + x = b$. Este x se designa por $b - a$. En particular $0 - a$ se escribe simplemente $-a$ y se denomina el negativo de a.

Demostración.- Dados a y b por el axioma 5 se tiene y de manera que $a + y = 0$ ó $y = -a$, por hipótesis y teorema tenemos que $x = b - a$ sustituyendo y tenemos $x = b + y$ y propiedad conmutativa $x = y + b$, entonces $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$ esto por sustitución, propiedad asociativa y propiedad de neutro, Por lo tanto hay por lo menos un x tal que $a + x = b$. Pero en virtud del teorema 1.1, hay a lo sumo una. Luego hay una y sólo una x en estas condiciones. ■

Teorema 3.3 $b - a = b + (-a)$

Demostración.- Sea $x = b - a$ y sea $y = b + (-a)$. Se probará que $x = y$. por definición de $b - a$, $x + a = b$ y $y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b$, por lo tanto, $x + a = y + a$ y en virtud de teorema 1.1 $x = y$. ■

Teorema 3.4 $-(-a) = a$

Demostración.- Se tiene $a + (-a) = 0$ por definición de $-a$ incluido en el teorema 1.1. Pero esta igualdad dice que a es el opuesto de $-a$, es decir, que si $a + (-a) = 0$ entonces $a = 0 - (-a) = a = -(-a)$. ■

3.3 Ejercicios

1. Demostrar los teoremas del 1.5 al 1.15, utilizando los axiomas 1 al 6 y los teoremas I.1 al I.4

Teorema 3.5 $a(b - c) = ab - ac$

Demostración.- Sea $a(b - c)$ por teorema tenemos que $a\,[b + (-c)]$ y por la propiedad distributiva $[ab + a(-c)]$, y en virtud de anteriores teoremas nos queda $ab - ac$. ■

Teorema 3.6 $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

Demostración.- Sea $0 \cdot a$ por la propiedad conmutativa $a \cdot 0$, $a \cdot 0 + 0$ y $a \cdot 0 + [a + (-a)]$ y en virtud la propiedad asociativa y distributiva $a(0 + 1) + (-a)$ después $1(a) + (-a)$, luego por elemento neutro y existencia de negativos tenemos 0, Así queda demostrado que cualquier número multiplicado por cero es cero. ■

Teorema 3.7 **Ley de simplificación para la multiplicación.** Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$. (En particular esto demuestra que el número 1 del axioma 4 es único)

Demostración.- Sea b, $a \neq 0$, y por el existencia del recíproco tenemos $a \cdot a' = 1$ luego, $b = b \cdot 1 = b\left[a(a')\right] = (ab)(a') = (ac)(a') = c(a \cdot a') = c \cdot 1 = c$ por lo tanto queda demostrado la ley de simplificación. ■

Teorema 3.8 **Posibilidad de la división.** Dados a y b con $a \neq 0$, existe uno y sólo un x tal que $ax = b$. La x se designa por b/a ó $\frac{b}{a}$ y se denomina cociente de b y a. En particular $1/a$ se escribe también a^{-1} y se designa recíproco de a

Demostración .- Sea a y b por axióma 6 se tiene un y de manera que $a \cdot y = 1$ ó $y = a^{-1}$. Por hipótesis y teorema se tiene $x = b \cdot a^{-1}$, sustituyendo tenemos $x = y \cdot b$ entonces $ax = a(y \cdot b) = (a \cdot y)b = 1 \cdot b = b$ por lo tanto hay por lo menos un x tal que $ax = b$ pero en virtud del teorema 1.7 hay por lo mucho uno, luego hay una y sólo una x en estas condiciones. ∎

Teorema 3.9 Si $a \neq 0$, entonces $b/a = b \cdot a^{-1}$

Demostración.- Sea $x = b/a$ y sea $y = b \cdot a^{-1}$ se probará que $x = y$, por definición de b/a, $ax = b$ y $ya = (b \cdot a^{-1})a = b(a^{-1}a) = b \cdot 1 = 1$, entonces $ya = xa$ y por la ley de simplificación para la multiplicación $y = x$. ∎

Teorema 3.10 Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$

Demostración.- Si $a \neq 0$ entonces $(a^{-1})^{-1} = 1 \cdot (a^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{a^{-1}} = a$ esto por axioma de neutro, definición de a^{-1} y teorema 1.9, así concluimos que $(a^{-1})^{-1} = a$. ∎

Teorema 3.11 Si $ab = 0$, entonces ó $a = 0$ ó $b = 0$

Demostración.- Veamos dos casos, cuando $x \neq 0$ y cuando $x = 0$
Si $x \neq 0$ y $ab = 0$ entonces $b = b \cdot 1 = b(a \cdot a^{-1}) = (ab)a^{-1} = 0a^{-1} = 0$, ahora si $a = 0$ y virtud del teorema 1.6 nos queda demostrado que la multiplicación de dos números cualesquiera es igual a cero si $a = 0$ ó $b = 0$. ∎

Teorema 3.12 $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$

Demostración.- Empecemos demostrando la primera proposición, Por la ley de simplificación para la suma podemos escribir como $(-a)b + ab = 0$ entonces por la propiedad distributiva $b\left[(-a) + a\right]$ por lo tanto $b \cdot 0$, luego por el teorema 1.6 queda demostrado la primera proposición.
Para demostrar la segunda proposición acudimos a la primera proposición, $(-a)(-b) = -\left[a(-b)\right]$ y luego,
$-\left[a(-b) + b + (-b)\right] = -\left[(-b)(a+1) + b\right] = -\left[(-b)(a+1) - 1(-b)\right] = -\left[(-b)(a+1-1)\right] = -\left[(-b)a\right] = -\left[-(ab)\right]$ y en virtud del el teorema 1.4 $(-a)(-b) = ab$ así queda demostrado la proposición. ∎

Teorema 3.13 $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)\ /\ (bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

Demostración.- Si $(a/b) + (c/d)$ entonces por definición de a/b, $a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1 = (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1 = (a \cdot b^{-1}) \cdot dd^{-1} + (c \cdot d^{-1}) \cdot bb^{-1}$ por las propiedades asociativa conmutativa y distributiva, $(b^{-1}d^{-1})(ad) + (b^{-1}d^{-1})(cb) = (b^{-1}d^{-1})(ad + cb)$, por lo tanto $(ad + bc)/bd$ esto por definición. ∎

Teorema 3.14 $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Demostración.- Por definición, $(ab^{-1})(cd^{-1})$, propiedades conmutativa y asociativa $(ac)(b^{-1}d^{-1})$, y por definición queda demostrado la proposición. ■

Corolario 3.1 Si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $(cd^{-1}) = c^{-1}d$

Demostración.- Por definición de a^{-1} tenemos que $(cd^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{cd^{-1}}$, por el teorema de posibilidad de la división $1 = (c^{-1}d)(cd^{-1})$ y en virtud de los axiomas de conmutatividad y asociatividad $1 = (c^{1}c)(dd^{-1})$, luego $1 = 1$. Quedando demostrado el corolario. ■

Teorema 3.15 $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ si $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$

Demostración.- Sea $(a/b)/(c/d)$ entonces por definición $(ab^{-1})(cd^{-1})^{-1}$, en virtud del corolario 1 se tiene que $(ab^{-1})(c^{-1}d)$, y luego por axioma conmutativa y asociativa $(ad)(c^{-1}b^{-1})$, así por definición concluimos que $(ad)/(cd)$. ■

2. $-0 = 0$

Demostración.- Sabemos que por el axioma 5 $a + (-a) = 0$, $-[a + (-a)] = 0$ y $-a + -(-a) = 0$ en virtud de teorema 1.12 y propiedad conmutativa $a + (-a) = 0$, por lo tanto $0 = 0$.

3. $1^{-1} = 1$

Demostración.- Por la existencia de elementos nuestros tenemos $1^{-1} \cdot 1$ y por axioma de existencia de reciproco $1 = 1$

4. El cero no tiene reciproco

Demostración.- Supongamos que el cero tiene reciproco es decir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ pero por el teorema 1.6 se tiene que $0 \cdot 0^{-1} = 0$ y $0 = 1$ esto no es verdad, por lo tanto el cero no tiene reciproco.

5. $-(a + b) = -a - b$

Demostración.- Por existencia de reciproco $-[1(a + b)]$ y teorema 1.12 $(-1)(a + b)$ luego por la propiedad distributiva $[(-1)b] + [(-1)b]$, una vez mas por el teorema 1.12 $-(1a) + [-(1b)]$, en virtud del axioma 4 $-a + (-b)$, y teorema 1.3, $-a - b$

6. $-(-a - b) = a + b$

Demostración

Si $-(-a - b)$ entonces por axioma $-[1(-a - b)]$, luego $(-1)(-a - b) = (-1)(-a) - [(-1)b]) = (1 \cdot a) - [-(1 \cdot b)]$ y por axioma $a - [-(b)]$, así por teorema $a + b$.

7. $(a-b)+(b-c)=a-c$

Demostración.- Por definición tenemos $[a+(-b)]+[b+(-c)]$, y axiomas de asociatividad y conmutatividad $[a+(-c)]+[b+(-b)]$, luego por existencia de negativos $[a+(-c)]+0$,, así $a+(-c)$ y $a-c$.

8. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

Demostración.- Por hipótesis $\frac{1}{a}\frac{1}{b}$ luego $\frac{1}{ab}$ por lo tanto $(ab)^{-1}$

9. $-(a/b)=(-a/b)=a/(-b)$ si $b \neq 0$

Demostración.- Primero demostremos que $-(a/b)=(-a/b)$, Sea $b \neq 0$, en virtud de definición de la división y teorema 1.12 no queda que $-(a/b)=(-a)\cdot b^{-1}=-a/b$.
Ahora demostramos que $-(a/b)=(-a/b)=a/(-b)$, sea $b \neq 0$, luego $-(b^{-1}\cdot a)=[-(b^{-1}1)]\cdot a = a/-b$.

10. $(a/b)-(c/d)=(ad-bc)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Demostración.- Sea $b \neq 0$ y $d \neq 0$ y por definición $ab^{-1}-cd^{-1}$, luego por axiomas $(ab^{-1})(d\cdot d^{-1})-(cd^{-1})(b\cdot b^{-1})$, y en virtud del teorema 1.5 y propiedad asociativa $b^{-1}\cdot d^{-1}(ad-bc)$ y $(ad-bc)/bd$

3.4 Axiomas de orden

Axioma .7 Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, lo mismo ocurre a $x+y$ y xy

Axioma .8 Para todo real $x \neq 0$, ó $x \in \mathbb{R}^+$ ó $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos.

Axioma .9 $0 \not\subset \mathbb{R}^+$

Definición 3.1 $x<y$ significa que $y-x$ es positivo.

Definición 3.2 $y > x$ significa que $x < y$

Definición 3.3 $x \geq y$ significa que ó $x < y$ ó $x = y$

Definición 3.4 $y \leq x$ significa que $x \leq y$

3.5 Ejercicios

1. Demostrar los teoremas 1.22 al 1.25 utilizando los teoremas anteriores y los axiomas del 1 al 9

Teorema 3.16 **Propiedad de Tricotomía.** Para a y b números reales cualesquiera se verifica se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$

demostración.- Sea $x = b - a$. Si $x = 0$, entonces $x = a - b = b - a$, por axioma 9, $0 \notin \mathbb{R}^+$ es decir:

$$a < b, \quad b - a \in \mathbb{R}^+$$

$$b < a, \quad a - b \in \mathbb{R}^+$$

pero como $a - b = b - a = 0$ entonces no ser $a < b$ ni $b < a$
Si $x0 \neq 0$, el axioma 8 afirma que ó $x > 0$ ó $x < 0$, pero no ambos, por consiguiente, ó es $a < b$ ó es $b < a$, pero no ambos. Pro tanto se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a = b$, $a < b$, $b < a$.

■

Teorema 3.17 **Propiedad Transitiva.** Si $a < b$ y $b < c$, es $a < c$

Demostración.- Si $a < b$ y $b < c$, entonces por definición $b - a > 0$ y $c - b > 0$. En virtud de axioma $(b - a) + (c - b) > 0$, es decir, $c - a > 0$, y por lo tanto $a < c$.

■

Teorema 3.18 Si $a < b$ es $a + c < b + c$

Demostración.- Sea $x = a + c$ ■

Teorema 3.19 Si $a < b$ y $c > 0$ es $ac < bc$

Demostración.- Si $a < b$ por definición $b - a > 0$, dado que $c > 0$ y por el axioma $(b - a)c > 0$ y $bc - ac > 0$, por lo tanto $ac < bc$

■

Teorema 3.20 Si $a \neq 0$ es $a^2 > 0$

Demostremos por casos..- Si $a > 0$, entonces por axioma $a \cdot a > 0$ y $a^2 > 0$. Si $a < 0$, entonces por axioma $(-a)(-a) > 0$ y $a^2 > 0$

■

Teorema 3.21 1>0

Demostración.- Por el anterior teorema, si $1 > 0$ ó $1 < 0$ entonces $1^2 > 0$, y $1^2 = 1$, por lo tanto que $1 > 0$

■

Teorema 3.22 Si $a < b$ y $c < 0$, es $ac > bc$

Demostración.- Si $c < 0$, por definición $-c > 0$, en virtud del axioma $-c(b - a) > 0$, y $ac - cb > 0$, por lo tanto $ab < ac = ac > bc$

■

Teorema 3.23 Si $a < b$, es $-a > -b$. En particular si $a < 0$, es $-a > 0$

Demostración.- Si $1 > 0$, por la existencia de negativos $-1 < 0$ y por teorema tenemos que $-1a > -1b$ por lo tanto $-a > -b$

■

Teorema 3.24 Si $ab > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos

Demostración.- Sea $a > 0$ y $b > 0$, por axioma $ab > 0$, y sea $a < 0$ y $b < 0$, por definición $-a > 0$ y $-b > 0$, por lo tanto $(-a)(-b) > 0$ y por teorema 1.12 $ab > 0$.

■

Teorema 3.25 Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$

Demostración.- Si $a < c$ y $b < d$ por definición $c - a > 0$ y $d - b > 0$, en virtud del axioma 6:

$$(c - a) + (d - b) > 0 \Rightarrow c - a + d - b > 0 \Rightarrow (c + d) - (a + b) > 0$$

por lo tanto $a + b < c + d$.

■

2. No existe ningún número real tal que $x^2 + 1 = 0$

Demostración.- Sea $Y = x^2 + 1 = 0$ de acuerdo con la propiedad de tricotomía:

- Si $x > 0$ entonces por teorema 2.5 $x^2 > 0$ y por axioma 7 $x^2 + 1 > 0$ esto es $Y > 0$ y no satisface $Y = 0$ para $x > 0$.
- Si $x = 0$ entonces $x^2 = 0$ y $x^2 + 1 = 1$ esto es $Y = 1$ pero no satisface a $Y = 1$ para $x = 0$.
- Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y $x^2 + 1 > 0$, esto es $Y = 0$ pero tampoco satisface a $y = 0$ para $x < 0$.

3. La suma de dos números negativos es un número negativo.

Demostración.- Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $-a > 0$ y $-b > 0$ por axioma 7 $(-a) + (-b) > 0$ y en virtud del teorema 1.19 $-(a + b) > 0$ es decir $a + b < 0$

4. Si $a > 0$, también $1/a > 0$; Si $a < 0$ entonces $1/a < 0$

Demostración.-

- Si $a > 0$ entonces $(2a)^{-1} \cdot a > 0 \cdot (2a)^{-1}$ por lo tanto $1/a > 0$
- Si $a < 0$ entonces $-a > 0$ y $(-2a)^{-1} \cdot (-a) > 0 \cdot (-2a)^{-1}$ por lo tanto $1/a > 0$ y $-1/a < 0$

5. Si $0 < a < b$, entonces, $0 < b^{-1} < a^{-1}$

Demostración.- Si $b > 0$ entonces por el teorema anterior $b^{-1} > 0$ ó $0 < b^{-1}$.
Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$, dado que $a < b$ y por teorema $a \cdot a^{-1} < a^{-1}b$ así $1 < a^{-1}b$, luego $b-1 < a^{-1} \cdot bb^{-1}$, por lo tanto $b^{-1} < a^{-1}$. Y por la propiedad transitiva queda demostrado que $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

6. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ es $a \leq c$

Demostración.- Si $a < b$ ó $a = b$ y $b < c$ ó $b = c$ demostremos por casos: Si $a < b$ y $b < c$ por la propiedad transitiva $a < c$, después si $a < b$ y $b = c$ entonces $a < c$, luego si $a = b$ y $b < c$ entonces $a < c$, por último si $a = b$ y $b = c$ entonce $a = c$, por lo tanto $a \leq c$

Corolario 3.2 Si $c \leq b$ y $b \leq c$ entonces $c = b$

Demostración .- Si $b - c > 0$ y $c - b > 0$ entonces $(b - c) + (c - b) > 0$ y $0 < 0$ es Falso, entonces queda que $c = b$ (Usted puede comprobar para cada uno de los casos que se suscita parecido al teorema anterior.)

■

7. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ y $a = c$ entonces $b = c$

Demostración.- Si $a \leq b$ y $a = c$ entonces $c \leq b$. Sea $c \leq b$ y $b \leq c$ y por corolario anterior $b = c$.

8. Para números reales a y b cualquiera, se tiene $a^2 + b^2 \leq 0$. Si $ab \geq 0$, entonces es $a^2 + b^2 > 0$.

Demostración.- Si $ab > 0$ por teorema ($a > 0$ y $b > 0$) ó ($a < 0$ y $b < 0$) luego por teorema $a^2 > 0$ y $b^2 > 0$ por lo tanto por axioma 7 y ley de tricotomía $a^2 + b^2 > 0$.

9. No existe ningún número real a tal que $x \leq a$ para todo real x

Demostración.- Supongamos que existe un número real "a" tal que $y \leq a$. Sea $n \in \mathbb{R}$ y $x = y + n$ entonces por teorema 1.18 $y + n \leq a + n$ y $x \leq a + n$ esto contradice que existe un número real a tal que $y \leq a$, por lo tanto no existe ningún número real tal que para todo x, $x \leq a$.

10. Si x tiene la propiedad que $0 \leq x < h$ para cada número real positivo h, entonces $x = 0$

Demostración .- Por el teorema anterior ni $0 < x$ ni $x < h$ satisfacen la proposición por lo tanto queda $x = 0$

Lema 3.1 Para $b \geq 0$ $a^2 > b \Rightarrow a > \sqrt{b}$ ó $a < -\sqrt{b}$

Demostración.- Por hipótesis $a^2 > b$ y $a^2 - b > 0$, luego $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) > 0$, y por teorema $a - \sqrt{b} > 0$ y $a + \sqrt{b} < 0$ ó $a - \sqrt{b} < 0$ y $a + \sqrt{b} < 0$, por lo tanto $a - \sqrt{b} < 0$ ó $a < -\sqrt{b}$

■

3.6 Números enteros y racionales

Definición 3.5 **Definción de conjunto inductivo.** Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las propiedades siguientes:

a) El número 1 pertenece al conjunto.

b) Para todo x en el conjunto, el número $x + 1$ pertenece también al conjunto.

Definición 3.6 **Definición de enteros positivos.** Un número real se llama entero positivo si pertenece a todo conjunto inductivo.

3.8 Cota superior de un conjunto, elemento máximo, extremo superior

Definición 3.7 **definición de extremo superior.** Un número B se denomina extremo superior de un conjunto no vacío S si B tiene las dos propiedades siguientes:

a) B es una cota superior de S.

b) Ningún número menor que B es cota superior para S.

Teorema 3.26 Dos números distintos no pueden ser extremos superiores para el mismo conjunto.

Demostración.- Sean B y C dos extremos superiores para un conjunto S. La propiedad $b)$ de la definición 3.1 implica que $C \geq B$ puesto que B es extremo superior; análogamente, $B \geq C$ ya que C es extremo superior. Luego $B = C$

■

3.9 Axioma del extremo superior (axioma de completitud)

Axioma .10 Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que $B = supS$

Definición 3.8 **Definición de extremo inferior (Ínfimo.)**Un número L se llama extremo inferior (o ínfimo) de S si:

a) L es una cota inferior para S,

$$L \leq x, \ \forall x \in S$$

b) Ningún número mayor que L es cota inferior para S.

$$Si\ t \leq x, \ \forall x \in S, \ entonces\, t \leq L$$

El extremo inferior de S, cuando existe, es único y se designa por $infS$. Si S posee mínimo, entonces $minS = infS$

Teorema 3.27 Todo conjunto no vacío S acotado inferiormente posee extremo inferior o ínfimo; esto es, existe un número real L tal que $L = inf S$.

Demostración.- Sea $-S$ el conjunto de los números opuestos de los de S. Entonces $-S$ es no vacío y acotado superiormente. El axioma 10 nos dice que existe un número B que es extremo superior de $-S$. Es fácil ver que $-B = inf S$.

■

3.10 La propiedad Arquimediana del sistema de los números reales

Teorema 3.28 El conjunto P de los enteros positivos 1,2,3,... no está acotado superiormente.

Demostración.- Supóngase P acotado superiormente. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. Puesto que P no es vacío, el axioma 10 nos dice que P tiene supremo, sea este b. El número $b - 1$, siendo menor que b, no puede ser cota superior de P. Por b) de la definición 3.1 existe $n > b - 1$ es decir $b - 1 \in P,\ b - 1 < b\ \ \exists n \in P :\ \ b - 1 < n$. Para este n tenemos $n + 1 > b$. Puesto que $n + 1$ pertenece a P, esto contradice el que b sea una cota superior para P.

■

Teorema 3.29 Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$

Demostración.- Si no fuera así, x sería una cota superior de P, en contradicción con el teorema 3.3.

■

Teorema 3.30 Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$

Demostración.- Aplicar teorema 3.4 cambiando x por y/x.

■

Teorema 3.31 Si tres números reales a, x, e y satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq a + \dfrac{y}{n}$ para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$

Demostración.- Si $x > a$, el teorema 3.5 nos menciona que existe un entero positivo que satisface $n(x - a) > y$, en contradicción de la hipótesis, luego $x > a$ no satisface para todo número real x y a, con lo que deberá ser $x = a$.

■

Propiedades fundamentales del extremo superior ó supremo

Teorema 3.32 Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales.

a) Si S tiene extremo superior o supremo, para un cierto x de S se tiene

$$x > supS - h$$

Demostración.- Si es $x \leq supS - h$ para todo x de S, entonces $supS - h$ sería una cota superior de S menor que su supremo. Por consiguiente debe ser $x > supS - h$ por lo menos para un x de S.

b) Si S tiene extremo inferior o ínfimo, para un cierto x de S se tiene

$$x < infS + h$$

Demostración.- Si es $x \geq supS + h$ para todo x de S, entonces $supS + h$ sería una cota inferior de S mayor que su ínfimo. Por consiguiente debe ser $x < supS + h$ por lo menos para un x de S.

■

Teorema 3.33 **Propiedad aditiva.** Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, sea C el conjunto

$$C = \{a + b / a \in A,\ b \in B\}$$

a) Si A y B poseen supremo, entonces C tiene supremo, y

$$supC = supA + supB$$

Demostración.- Supongamos que A y B tengan supremo. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c \leq supA + supB$; de modo que $supA + supB$ es una cota superior de C. esto demuestra por el axioma 10 que C tiene supremo y que

$$supC \leq supA + supB$$

Sea ahora n un entero positivo cualquiera. Según el teorema 3.7 $(con\ h = 1/n)$ existen un a en A y un b en B tales que:

$$a > supA - \frac{1}{n}\ y\ b > supB - \frac{1}{n}$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$a + b > supA + supB - \frac{2}{n}, \quad supA + supB < a + b + \frac{2}{n} \leq supC + \frac{2}{n}$$

puesto que $a + b \leq supC$. Por consiguiente hemos demostrado que

$$supC \leq supA + supB < supC + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. En virtud del teorema 3.6, debe ser $supC = supA + supB$. Esto demuestra $a)$

b) Si A y B tienen ínfimo, entonces C tiene ínfimo, e

$$infC = infA + infB$$

Demostración.- Supongamos que A y B tengan ínfimo. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c \geq infA + infB$; de modo que $infA + infB$ es una cota inferior de C. esto demuestra por el axioma 10 que C tiene ínfimo y que

$$infC \geq infA + infB$$

Sea ahora n un entero positivo cualquiera. Según el teorema 3.7 $(con\ h = 1/n)$ existen un a en A y un b en B tales que:

$$a < infA + \frac{1}{n} \ \ y \ \ b < infB + \frac{1}{n}$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$a + b < infA + infB + \frac{2}{n}, \quad infA + infB \leq infC \leq a + b < infA + infB + \frac{2}{n}$$

puesto que $a + b \geq infC$ Por consiguiente hemos demostrado que

$$infA + infB \leq infC < infA + infB + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. En virtud del teorema 3.6, debe ser $supA + supB = infC$. Esto demuestra $b)$

■

Teorema 3.34 Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de $\mathbb{R}$ tales que

$$s \leq t$$

para todo s en S y todo t en T. Entonces S tiene supremo, T ínfimo, y se verifica

$$supS \leq infT$$

Demostración.- Cada t de T es corta superior para S. Por consiguiente S tiene supremo que satisface la desigualdad $supS \leq T$ para todo t de S. Luego $supS$ es una cota inferior de T, con lo cual T tiene ínfimo que no puede ser menor que $supS$. Dicho de otro modo, se tiene $supS \leq infT$, como se afirmó.

■

3.12 Ejercicios

1. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número real z tal que $x < z < y$

Demostración.- Sea S un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$, por axioma 10 se tiene un supremo llamemosle z, por definición $x \leq z$ para todo $x \in S$, ahora si $y \in \mathbb{R}$ que cumple $x \leq y$, para todo $x \in S$, entonces $z \leq y$, por lo tanto $x \leq z \leq y$ esto nos muestra que existe por lo menos un número real que cumple la condición $x < z < y$.

2. Si x es un número real arbitrario, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$

Demostración.- Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ en virtud del axioma 5 se verifica $n + m = 0$, donde m es el opuesto de n, esto nos dice que $m < n$ y por teorema anterior se tiene $m < x < n$.

3. Si $x > 0$, demuestre que existe un entero positivo n tal que $1/n < x$

Demostración.- Sea $y = 1$ entonces por teorema 3.5 $nx > 1$, por lo tanto $1/n < x$

4. Si x es un número real arbitrario, demostrar que existe un entero n único que verifica las desigualdades $n \leq x < n+1$. Este n se denomina la parte entera de x, se delega por $[x]$. Por ejemplo, $[5] = 5$, $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $\left[-\frac{8}{2}\right] = -3$

Demostración.- Primero probemos la existencia de n,

- Sea $1 \leq a$ y $S = \{m \in \mathbb{N} /\ m \leq a\}$
  Vemos que S es no vacío pues contiene a 1, y a es un cota superior de S, luego por axioma del supremo, existe un número $s = supS$, entonces por teorema 3.7 con $h = 1$ resulta:
  $$n > s - 1 \quad s < n+1, \ \ para\ algnn\ de\ S \quad (1)$$
  Como $z \in S$, se cumple $z \leq a$ y solo falta probar que $a < z+1$. En efecto, si fuese $z+1 \leq a$, entonces $n+1 \in S$ y por la propiedad a), se tendría $n+1 \leq s$, en contradicción con (1).
  Por tanto, el número entero positivo n cumple con $n \leq a < n+1$
- $0 \leq a < 1$
  En este caso, el entero $n = 0$ cumple con la propiedad requerida.
- $a < 0$ Entonces $-a > 0$ y por los dos casos anteriores, existe un entero u tal que $u \leq a < u+1$ de donde $-u-1 < a \leq -u$.
  Definiendo n por
  $$n = \begin{cases} -u-1 & si \quad a < -u \\ \text{si} & x \leq 5 \quad a = -u \end{cases} \tag{3.1}$$
  se prueba fácilmente que $z \leq a < z+1$

Luego demostramos la unicidad. Sea w y z dos números enteros tal que, $w \leq a < w+1$ y $z \leq a < z+1$ debemos probar que $w = z$. Si fuesen distintos, podemos suponer que $z < w$. Entonces $w - z \geq 1$, esto es $z+1 \leq w$, y de $a < z+1 \leq w \leq a$ resulta una contradicción ya que $a < a$ luego se cumple que $w = z$.

5. Si x es un número real arbitrario, $x < y$, probar que existe un entero único n que satisface la desigualdad $n \geq x < n+1$

Demostración.- sabemos que para $x \in \mathbb{R}$ hay exactamente un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \neq x < n+1$
Si $n = x$ entonces $x \neq n < x+1$.. Por otro lado si $n \neq x$, entonces tenemos $n < x$, así $n+1 < x+1$. Pero sabemos que $x < n+1$, por lo tanto,
$$x < n+1 < x+1 \rightarrow x \leq n+1 < x+1$$

6. Si a y b son números reales arbitrarios, $a < b$, probar que existe por lo menos un número racional r tal que $a < r < b$ y deducir de ello que existen infinitos. Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto de los números racionales es denso en el sistema de los números reales.

Demostración.- Por la propiedad arquimediana, para el número $\dfrac{1}{b-a}$ existe un número natural d tal que $\dfrac{1}{b-a}$, de donde
$$db - da > 1 \quad da + 1 < da \ \ (1)$$

y también si z=parte entera de da

$$z \leq da < z+1 \quad (2)$$

Sea $q = \dfrac{n}{d}$, con $n = z+1$. Entonces q es un número racional y cumple $x < q < y$ pues:

$$a = d\frac{a}{d} < \frac{z+1}{d} < q = \frac{z+1}{d} \leq \frac{da+1}{d} < d\frac{b}{d} = b$$

. y por ser $\dfrac{z+1}{d}$ deducimos que existen infinitos números racionales entre a e b

7. Si x es racional, $x \neq 0$, e y es irracional, demostrar que $x+y$, $x-y$, xy, x/y, son todos irracionales.

- $x+y, \;\; x-y$
  Supongamos que la suma nos da un racional, es decir $\dfrac{q}{p} + y = \dfrac{s}{t} \;\; para \;\; s,t \neq 0$, por lo tanto $y = \dfrac{qt+sp}{tp}$, así llegamos a una contradicción, en virtud del axioma 7 (la suma y multiplicación de dos racionales nos da otros racionales).
  $x-y$ Se puede comprobar de similar manera a la anterior demostración.

- $xy, \;\; x/y, \;\; y/x$
  Supongamos que el producto nos da un número racional, por lo tanto $\frac{p}{q} \cdot y = \dfrac{t}{s}$ para $q,s \neq 0$ y $y = \dfrac{sq}{pt}$ en contradicción con la hipótesis. De igual manera se comprueba que x/y es irracional.

8. ¿La suma o el producto de dos números irracionales es siempre irracional?

Demostración.- No siempre se cumple la proposición, veamos dos contra ejemplos.
Sea a un número irracional entonces por teorema anterior $1-a$ es irracional, así $a+(1-a)=1$, sabiendo que $1 \in \mathbb{R}$. Por otro lado sabemos que $\dfrac{1}{a}$ es irracional, por lo tanto $1 \in \mathbb{R}$.

9. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número irracional z tal que $x < z < y$ y deducir que existen infinitos

Demostración.- Sea $0 < x < y$ e i un número irracional, por propiedad arquimediana $y - x > \dfrac{i}{n}$ ó $\;x + \dfrac{i}{n} < y$.

por teorema 3.15 se tiene que $\dfrac{i}{n}$ es irracional llamemosle z por lo tanto $x+z > x$, luego existe $x < z < y$. Y de $\dfrac{i}{n}$ deducimos que existen infinitos números irracionales que cumplen la condición.

10. Un entero n se llama par si $n = 2m$ para un cierto entero m, e impar si $n+1$ es par demostrar las afirmaciones siguientes:

a) Un entero no puede ser a la vez par e impar.

Demostración.- Sean $2k$ y $2i+1$ dos enteros par e impar a la vez entonces $2k = 2i+1$ ó $(k-i) = \dfrac{1}{2}$ lo cual no es cierto, ya que la resta de dos números pares siempre da par, por lo tanto es par o es impar pero no los dos al mismo tiempo.

b) Todo entero es par o es impar.

Demostración.- Por inciso a) $2k \neq 2k-1$ para $k \in \mathbb{Z}$, por la tricotomía ó $2k < 2k-1$ ó $2k > 2k-1$ lo cual se cumple pero no ambos a la vez.

c) La suma o el producto de dos enteros pares es par. ¿ Qué se puede decir acerca de la suma o del producto de dos enteros impares ?

Demostración.- Sea $k \in \mathbb{R}$ entonces $2k + 2k = 4k = 2(2k)$. Luego para el producto $2k \cdot 2k = 4k^2 = 2(2k^2)$
Por otra parte $(2k-1) + (2k-1) = 4k - 2 = 2(2k-1)$. No pasa lo mismo para el producto ya que $(2k-1)(2k-1) = 2k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$

d) Si n^2 es par, también lo es n. Si $a^2 = 2b^2$, siendo a y b enteros, entonces a y b son ambos pares.

Demostración.- Si n es impar entonces n^2 es impar, reciprocamente hablando, entonces sea $n^2 = (2k-1)^2$ para $k \in \mathbb{R}$, por lo tanto $2(2k^2 + 4k) - 1$ es impar.
Por otro lado, sea $a = 2k$, $b = 2k - 1$ '; y $k \in \mathbb{Z}$ entonces $(2k)^2 = 2(2k-1)^2$, por lo tanto $k = \dfrac{1}{2}$, esto contradice $k \in \mathbb{Z}$.

e) Todo número racional puede expresarse en la forma a/b, donde a y b enteros, uno de los cuales por lo menos es impar.

demostración.- Sea r un número racional con $r = \dfrac{a}{b}$. Si a y b son ambos pares, entonces tenemos

$$a = 2c \ y \ b = 2d \ \Rightarrow \ \frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d},$$

con $c < a$ y $d < b$. ahora, si c y d ambos son pares, repita el proceso. Esto dará una secuencia estrictamente decreciente de enteros positivos, por lo que el proceso debe terminar por el principio de buen orden. Por lo tanto debemos tener algunos enteros r y s, no ambos con $n = \dfrac{a}{b} = \dfrac{r}{s}$.

11. Demostrar que no existe número racional cuyo cuadrado sea 2.

Demostración.- Utilizaremos el método de reducción al absurdo. Supongamos que n es impar, es decir, $n = 2k + 1$ $k \in \mathbb{Z}$, ahora operando:

$$n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Sabemos que $2k^2 + 2k$ es un número entero cualquiera, por lo tanto podemos realizar un cambio de variable, $2k^2 + 2k = k^{'}$, entonces:

$$n^2 = 2k^{'} + 1$$

Se tiene una contradicción ya por teorema anterior se de dijo que n^2 es par, por lo tanto queda demostrado la proposición. Ahora si estamos con la facultad de demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.
Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, existen números enteros tales que:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Supongamos también que p y q no tienen divisor común mas que el 1. Se tiene:

$$p^2 = 2q^2$$

Esto nos muestra que p^2 es par y por la previa demostración tenemos que p es par. En otras palabras $p = 2k, \; \forall k \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

Esto demuestra que q^2 es par y en consecuencia que q es par. Así pues, son pares tanto p como q en contradicción con el hecho de que p y q no tienen divisores comunes. Esta contradicción completa la demostración.

12. La propiedad arquimediana del sistema de números reales se dedujo como consecuencia del axioma del supremo. Demostrar que el conjunto de los números racionales satisface la propiedad arquimediana pero no la del supremo. Esto demuestra que la propiedad arquimediana no implica el axioma del supremo.

Demostración.- Está claro que que el conjunto de los racionales satisface la propiedad arquimediana ya que si $x = \dfrac{p}{q}$ e $y = \dfrac{s}{t}$ para $q, \; t \neq 0$ entonces $\dfrac{p}{q} \cdot n > \dfrac{s}{t}$.
Por otra parte sea S el conjunto de todos los racionales y supongase que esta acotado superiormente, por axioma 10 se tiene supremo, llamemosle B, entonces $x \leq B, \quad x \in S$, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $B \leq t$, así por teorema 3.14 $\quad B < x < t$, esto contradice que B sea supremo.

3.13 Existencia de raíces cuadradas de los números reales no negativos

Nota Los números negativos no pueden tener raíces cuadradas, pues si $x^2 = a$, al ser a un cuadrado ha de ser no negativo (en virtud del teorema 2.5). Además, si $a = 0$, $x = 0$ es la única raíz cuadrada (por el teorema 1.11). Supóngase, pues $a > 0$. Si $x^2 = a$ entonces $x \leq 0$ y $(-x)^2 = a$, por lo tanto, x y su opuesto son ambos raíces cuadradas. Pero a lo sumo tiene dos, porque si $x^2 = a$ e $y^2 = a$, entonces $x^2 = y^2 \quad$ y $\quad (x+y)(x-y) = 0$, en virtud del teorema 1.11, $\quad$ ó $x = y$ ó $x = -y$. Por lo tanto, si a tiene raíces cuadradas, tiene exactamente dos.

Definición 3.9 Si $a \geq 0$, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a^{1/2}$ o por $\sqrt{a}$. Si $a > 0$, la raíz cuadrada negativa es $-a^{1/2}$ ó $-\sqrt{a}$

Teorema 3.35 Cada número real no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única.

Demostración.- Si $a = 0$, entonces 0 es la única raíz cuadrada. Supóngase pues que $a > 0$. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos x tales que $x^2 \leq a$. Puesto que $(1+a)^2 > a$, el número $(a+1)$ es una cota superior de S. Pero, S es no vacío, pues $a/(1+a)$ pertenece a S; en efecto $a^2 \leq a(1+a)^2$ y por lo tanto $a^2/(1+a)^2 \leq a$. En virtud del axioma 10, S tiene un supremo que se designa por b. Nótese que $b \geq a/(1+a)$ y por lo tanto $b > 0$. Existen sólo tres posibilidades: $b^2 > a$, $b^2 < a$, $b^2 = a$.
Supóngase $b^2 > a$ y sea $c = b - (b^2 - a)/(2b)/(2b) = \dfrac{1}{2}(b + a/b)$. Entonces $a < c < b \quad$ y $c^2 = b^2 - (b^2 - a) + (b^2 - a)^2/4b^2 = a + (b^2 - a)^2/(4b^2) > a$. Por lo tanto, $c^2 > x^2$ para todo $x \in S$, es decir, $c > x$ para cada $x \in S$; luego c es una cota superior de S, y puesto que $c < b$ se tiene una contradicción con el hecho de ser b el extremo superior de S. Por tanto, la desigualdad $b^2 > a$ es imposible.

Supóngase $b^2 < a$. Puesto que $b > 0$ se puede elegir un número positivo c tal que $c < b$ y tal que $c < (a-b^2)7(3b).Setieneentonecs$

$$(b+c)^2 = b^2 + c(2b+c) < b^2 + 3bc < b^2 + (a-b^2) = a$$

es decir, $b+c$ pertenece a S. Como $b+c > b$, esta desigualdad está en contradicción con que b sea una cota superior de S. Por lo tanto, la desigualdad $b^2 < a$ es imposible y sólo queda como posible $b^2 = a$

■

3.14 Raíces de orden superior. Potencias racionales

El axioma del extremo superior se puede utilizar también para probar la existencia de raíces de orden superior. Por ejemplo, si n es un entero positivo impar, para cada real x existe un número real y, y uno sólo tal que $x^n = x$. Esta y se denomina raíz n-sima de x y se indica por:

Definición 3.10

$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad y = \sqrt[n]{x}$$

Si n es par, la situación es un poco distinta. En este caso, si x es negativo, no existe un número real y tal que $y^n = x$, puesto que $y^n \geq 0$ para cada número real y. Sin embargo, si x es positivo, se puede probar que existe un número positivo y sólo uno tal que $y^n = x$. Este y se denomina la raíz n-sima positiva de x y se indica por los símbolos anteriormente mencionados. Puesto que n es par, $(-y)^n = y^n$ y, por tanto, cada $x > 0$ tiene dos raíces n-simas reales, y e $-y$. Sin embargo, los símbolos $x^{\frac{1}{n}}$ y $\sqrt[n]{x}$; se reservan para la raíz n-sima positiva.

Definición 3.11 Si r es un número racional positivo, sea $r = m/n$, donde m y n son enteros positivos, se define como:

$$x^r = x^{m/n} = (x^m)^{\frac{1}{n}},$$

es decir como raíz n-sima de x^m, siempre que ésta exista.

Definición 3.12 Si $x \neq 0$, se define

$$x^{-r} = \frac{1}{x^r},$$

con tal que x^r esté definida.

Partiendo de esas definiciones, es fácil comprobar que las leyes usuales de los exponentes son válidas para exponentes racionales:

Propiedad .1 Propiedades de potencia.

1. $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$

2. $(x^r)^s = x^{rs}$

3. $(xy)^r = x^r \cdot y^r$

4. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

4.3 El principio de la inducción matemática

Método de demostración por inducción Sea $A(n)$ una afirmación que contiene el entero n. Se puede concluir que $A(n)$ es verdadero para cada $n \geq n_1$ si es posible:

a) Probar que $A(n_1)$ es cierta.

b) Probar, que supuesta $A(k)$ verdadera, siendo k un entero arbitrario pero fijado $\geq n_1$, que $A(k+1)$ es verdadera.

En la práctica, n_1 es generalmente igual a 1.

Teorema 4.36 **Principio de inducción matemática.** Sea S un conjunto de enteros positivos que tienen las dos propiedades siguientes:

a) El número 1 pertenece al conjunto S.

b) Si un entero k pertenece al conjunto S, también $k+1$ pertenece a S.

Entonces todo entero positivo pertenece al conjunto S.

Demostración.- Las propiedades $a)$ y $b)$ nos dicen que S es un conjunto inductivo. Por consiguiente S tiene cualquier entero positivo.

■

Teorema 4.37 **principio de buena ordenación.** Todo conjunto no vacío de enteros positivos contiene uno que es el menor

Demostración.- Sea T una colección no vacía de enteros positivos. Queremos demostrar que t_0 tiene un número que es el menor, esto es, que hay en T un entero positivo t.; tal que $t_0 \leq t$ para todo t de T.
Supongamos que no fuera así. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. El entero 1 no puede pertenecer a T (de otro modo él sería el menor número de T). Designemos con S la colección de todos los enteros positivos n tales que $n < t$ para todo t de T. Por tanto 1 pertenece a S porque $1 < t$ para todo t de T. Seguidamente, sea k un entero positivo de S. Entonces $k < t$ para todo t de T. Demostraremos que $k+1$ también es de S. Si no fuera así, entonces para un cierto t, de T tendríamos $t_1 \leq k+1$. Puesto que T no posee número mínimo, hay un entero t_2 en T tal que $t_2 < t_1$ Y por tanto $t_2 < k+1$. Pero esto significa que $t_2 \leq k$, en contradicción con el hecho de que $k < t$ para todo t de T. Por tanto $k+1$ pertenece a S. Según el principio de inducción, S contiene todos los enteros positivos. Puesto que T es no vacío, existe un entero positivo t en T. Pero este t debe ser también de S (ya que S contiene todos los enteros positivos). De la definición de S resulta que $t < t$, lo cual es absurdo. Por consiguiente, la hipótesis de que T no posee un número mínimo nos lleva a una contradicción. Resulta pues que T debe tener un número mínimo, y a su vez esto prueba que el principio de buena ordenación es una consecuencia del de inducción.

■

4.4 Ejercicios

1. Demostrar por inducción las fórmulas siguientes:

(a) $1+2+3+...+n = n(b+1)/2$

Demostración.- Sea $n=k$ entonces $1+2+3+...+k=k(k+1)/2$.
Para $k=1$ se tiene $1=1(1+1)/2$.
Por ultimo si $k=k+1$ nos queda probar que $1+2+3+...+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, luego $\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$. Así $\dfrac{k^2+3k+2}{2}$ y $\dfrac{(x+1)(x+2)}{2}$

(b) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

Demostración.- Sea $n=k$ entonces $1+3+5+...+(2k-1)=k^2$.
Para $k=1$ se tiene $[2(1)-1]=1^2$, así $1=1$
Luego, si $k=k+1$ entonces $1+3+5+...+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$. Por lo tanto $k^2+2k+1=(k+1)^2$.

(c) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$

Demostración.- Sea $n=k$ entonces,

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3=(1+2+3+...+k)^2$$

Para $k=1$

$$1=1,$$

Luego $k=k+1$,

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=(1+2+3+...+k)^2,$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3= &= \left(\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\right)^2\\
\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+k(k+1)^2+(k+1)^2\\
\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} &= \frac{k^2(k+1)^2+4k(k+1)^2+4(k+1)^2}{4}\\
\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} &= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}
\end{aligned}$$

(d) $1^3+2^3+...+(n-1)^3<n^4/4<1^3+2^3+...+n^3$

Demostración.- Sea $n=k$ entonces

$$1^3+2^3+...+(k-1)^3<k^4/4 \quad (1)$$

Para $k=1$, $0<1/4$ se observa que se cumple.
Después, para $k=k+1$,

$$1^3+2^3+...+k^3<(k+1)^4/4,$$

sumando k^3 a (1),

$$1^3+2^3+...+k^3<k^4/4+k^3$$

y para deducir como consecuencia de $k+1$, basta demostrar,

$$k^4/4+k^3<(k+1)^4/4$$

, Pero esto es consecuencia inmediata de la igualdad

$$(k+1)^4/4 = (k^4+4k^3+6k^2+4k+1)/4 = k^4/4+k^3+(3k^2)/2+k+1$$

Por tanto se demostró que $k+1$ es consecuencia de k

2. Obsérvese que:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 1-4 & = & -(1+2) \\ 1-4+9 & = & 1+2+3 \\ 1-4+9-16 & = & -(1+2+3+4) \end{array}$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por inducción

Demostración.- Verificando tenemos que la ley general es $1-4+9-16+...+(-1)^{n+1}\cdot n^2 = (-1)^{n+1}(1+2+3+...+n)$.
Ahora pasemos a demostrarlo. Sea $n=k$ entonces,

$$1-4+9-16+...+(-1)^{k+1}\cdot k^2 = (-1)^{k+1}(1+2+3+...+k)$$

Si $k=1$, se sigue, $(-1)^2\cdot 1^2 = (-1)^2\cdot 1$, vemos que satisface para $k=1$. Luego $k=k+1$,

$$1-4+9-16+...+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2 = (-1)^{k+2}\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]$$

.
Sumando $(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2$ a la segunda igualdad dada, se tiene,

$$1-4+9-16+...+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2 = (-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2$$

Por lo tanto, basta demostrar que $(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2 = (-1)^{k+2}\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]$

$$\begin{array}{rcl} (-1)^{k+1}\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2 & = & (-1)^{k+2}\left\{\dfrac{[(-1)(k+1)k]+2(k^2+2k+1)}{2}\right\} \\ & = & (-1)^{k+2}\left(\dfrac{-k^2-k+2k^2+4k+2}{2}\right) \\ & = & (-1)^{k+2}\left(\dfrac{k^2+3k+2}{2}\right) \\ & = & (-1)^{k+2}\left[\dfrac{(x+1)(x+2)}{2}\right] \end{array}$$

3. Obsérvese que:

$$\begin{array}{rcl} 1+\frac{1}{2} & = & 2-\frac{1}{2} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & = & 2-\frac{1}{4} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} & = & 2-\frac{1}{8} \end{array}$$

Demostración.- Se verifica que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2^n}=2-\dfrac{1}{2^n}$.

Para $n=k$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^k}=2-\frac{1}{2^k}$$

$k=1$
$$1+\frac{1}{2^1}=2-\frac{1}{2^1}$$

Luego $k=k+1$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^{k+1}}$$

Así solo falta demostrar que,
$$2-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^{k+1}}$$
$$\begin{aligned} 2-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} &= 2+\frac{-2+1}{2^{k+1}} \\ &= 2-\frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

4. Obsérvese que:
$$\begin{aligned} 1-\tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2} \\ (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3} \\ (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4}) &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por inducción.

Demostración.- Se induce que $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}$ para todo $n>1$.
Sea $n=k$, entonces $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{1}{k}$. Después para $k=2$, $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Si $k=k+1$ tenemos $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{1}{k+1}$. Luego es fácil comprobar que $\dfrac{1}{k}\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{1}{k+1}$.

5. Hallar la ley general que simplifica al producto
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)..\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
y demuéstrese por inducción.

Demostración.- Inducimos que $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)..\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$,para todo $n>1$.
Después $n=k=1$,
$$1-\frac{1}{2^2}=\frac{2+1}{2\dot{2}}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

Luego $k+1$,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)..\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k+1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \frac{(k+1)+1}{2(k+1)}\\
\left(\frac{k+1}{2k}-\frac{1}{2k(k+1)}\right) &= \frac{k+2}{2k+2}\\
\frac{(k+1)^2-1}{2k(k+1)} &= \frac{k+2}{2k+2}\\
\frac{k+2}{2k+2} &= \frac{k+2}{2k+2}
\end{aligned}$$

6. Sea $A(n)$ la proporción: $1+2+...+n=\frac{1}{8}(2n+1)^2$.

a) Probar que si $A(k)$, $A(k+1)$ también es cierta.

Demostración.- Para $A(k+1)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1) &= \frac{1}{8}\left[2(k+1)+1\right]^2\\
\frac{4k^2+12k+9}{8} &= \frac{4k^2+12k+9}{8}
\end{aligned}$$

b) Critíquese la proposición "de la inducción se sigue que $A(n)$ es cierta para todo n ".

Se ve que no se cumple para ningún entero $A(n)$ pero si para $A(n+1)$.

c) Transfórmese $A(n)$ cambiando la igualdad por una desigualdad que es cierta para todo entero positivo n

Primero comprobemos para $A(1)$, $1<\frac{9}{8}$.
Luego para $A(k)$,

$$1+2+...+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+1)^2$$

Después para $A(k+1)$

$$1+2+...+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+1)^2$$

Remplazando $(k+1)$ a $A(k)$

$$1+2+...+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1)$$

por último solo nos queda demostrar

$$\frac{1}{8}(2k+1)^2<\frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1)$$

Así $\dfrac{4k^2+12k+9}{8} < \dfrac{4k^2+12k+9}{8} + (k+1)$, vemos que la inecuación se cumple para cualquier número natural.

7. Sea n_1 el menor entero positivo n para el que la desigualdad $(1+x)^n > 1+nx+nx^2$ es cierta para todo $x > 0$. Calcular n_1, y demostrar que la desigualdad es cierta para todos los enteros $n \geq n_1$

Demostración.- vemos que la proposición es validad para $n_1 = 3$,

$$(1+x)^3 > 1+3x+3x^2,$$

y no así para $n = 1$ y $n = 2$ entonces $A(n) = A(k) \geq 3$, $(1+x)^k > 1+kx+kx^2$. Después para un $A(k+1)$, $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$, así $(1+kx+kx^2)(1+k) > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$, luego se cumple la desigualdad $x(kx^2)+x^2+kx+x+1+x^2 > kx^2+x^2+kx+x+1$.

8. Dados números reales positivos $a_1, a_2, a_3, ...,$ tales que $a_n \leq ca_{a-1}$ para todo $n \geq 2$. Donde c es un número positivo fijo, aplíquese el método de inducción para demostrar que $a_n \leq a_1c^{n-1}$ para cada $n \geq 1$

Demostración.- Primero, para el caso $n = 1$, tenemos $a_1c^0 = a_1$, por lo tanto la desigualdad es validad. Ahora supongamos que la desigualdad es válida para algún número entero k: $a_k \leq a_1c^{k-1}$, luego multiplicamos por c, $ca_k \leq a_1c^k$, pero dado que se asume por hipótesis $a_{k+1} \leq ca_k$, entonces $a_{k+1} \leq a_1c^k$, por lo tanto, la declaración es válida para todo n.

9. Demuéstrese por inducción la proposición siguiente: Dado un segmento de longitud unidad, el segmento de longitud $\sqrt{n}$ se puede construir con regla y compás para cada entero positivo n.

Demostración.- Dada una línea de longitud 1, podemos construir una línea de longitud $\sqrt{2}$ tomando la hipotenusa del triángulo rectángulo con patas de longitud 1.
Ahora, supongamos que tenemos una línea de longitud 1 y una línea de longitud $\sqrt{k}$ para algún número entero k. Luego podemos formar un triángulo rectángulo con patas de longitud 1 y longitud $\sqrt{k}$. La hipotenusa de este triángulo es $\sqrt{k+1}$. Por lo tanto, si podemos construir una línea de longitud $\sqrt{k}$, entonces podemos construir una línea de longitud $\sqrt{k+1}$. Como podemos construir una línea de longitud $\sqrt{2}$ en el caso base, podemos construir una línea de longitud $\sqrt{n}$ para todos los enteros n.

10. Sea b un entero positivo. Demostrar por inducción la proposición siguiente: Para cada entero $n \geq 0$ existen enteros no negativos q y r tales que:

$$n = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

Demostración.- Sea b ser un entero positivo fijo. Si $n = 0$, luego $q = r = 0$, la afirmación es verdadera (ya que $0 = 0b + 0$).
Ahora suponga que la afirmación es cierta para algunos $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis de inducción sabemos que existen enteros no negativos q y r tales que

$$k = qb + r, \quad 0 \leq r < b,$$

Por lo tanto, sumando 1 a ambos lados tenemos,

$$k+1 = qb + (r+1).$$

Pues $0 \leq r < b$ entonces sabemos que $0 \leq r \leq (b-1)$. Si $0 \leq r < b-1$, entonces $0 \leq r+1 < b$, y la declaración aún se mantiene con la misma elección q y $r+1$ en lugar de r.
Por otro lado, si $r = b-1$, entonces $r+1 = b$ y tenemos,

$$k+1 = qb + b = (q+1)b + 0$$

Por lo tanto, la declaración se mantiene de nuevo, pero con $q+1$ en lugar de q y con $r = 0$ (que es válido ya que si $r = 0$ tenemos $a \leq r < b$). Por ende, si el algoritmo de división es válido para k, entonces también es válido para $k+1$. Entonces, es válido para todos $n \in \mathbb{N}$.

11. Sea n y d enteros. Se dice que d es un divisor de n si $n = cd$ para algún entero c. Un entero n se denomina primo si $n > 1$ y los únicos divisores de n son 1 y n. Demostrar por inducción que cada entero $n > 1$ es o primo o producto de primos.

Demostración.- LA prueba se hará por inducción. Si $n = 2$ ó $n = 3$ entonces n es primo, entonces la proposición es verdadera.
Ahora supongamos que la afirmación es verdadera para todos los enteros desde 2 hasta k. Se debe demostrar que esto implica $k+1$ es primo o un producto de primos. Si $k+1$ es primo, entonces no hay nada que demostrar. Por otro lado, si $k+1$ no es primo, entonces sabemos que hay enteros c y d tal que $1 < c, d < k+1$ en otras palabras decimos que n es divisible por números disntintos de 1 y de sí mismo.
Por hipótesis de inducción, sabemos que $2 \leq c, d \leq k$ entonces c y d son primos o son producto de primos.
Por lo tanto, si la declaración es verdadera para todos los enteros mayores que 1 hasta k entonces, también es verdadera para $k+1$, así es cierto para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

12. Explíquese el error en la siguiente demostración por inducción.
Proposición.- Dado un conjunto de n niñas rubias, si por 10 menos una de las niñas tiene ojos azules, entonces las n niñas tienen ojos azules.
Demostración.- La proposición es evidentemente cierta si $n = 1$. El paso de k a $k+1$ se puede ilustrar pasando de $n = 3$ a $n = 4$. Supóngase para ello que la proposición es cierta para $n = 3$ Y sean G_1, G_2, G_3, G_4 cuatro niñas rubias tales que una de ellas, por lo menos, tenga ojos azules, por ejemplo, la G_1, Tomando G_1, G_2, G_3, conjuntamente y haciendo uso de la proposición cierta para $n = 3$, resulta que también G_2 y G_3 tienen ojos azules. Repitiendo el proceso con G_1, G_2 y G_4, se encuentra igualmente que G_4 tiene ojos azules. Es decir, las cuatro tienen ojos azules. Un razonamiento análogo permite el paso de k a $k+1$ en general.
Corolario. Todas las niñas rubias tienen ojos azules.
Demostración.- Puesto que efectivamente existe una niña rubia con ojos azules, se puede aplicar el resultado precedente al conjunto formado por todas las niñas rubias.

Esta prueba supone que la afirmación es cierta n = 3, es decir, supone que si hay tres chicas rubias, una de las cuales tiene ojos azules, entonces todas tienen ojos azules. Claramente, esta es una suposición falsa.

4.7 Ejercicios

1. Hallar los valores numéricos de las sumas siguientes:

a) $\sum_{k=1}^{4} k = 1+2+3+4 = 10$

b) $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$

c) $\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1} = 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 2+8+32+128 = 170$

d) $\sum_{n=1}^{4} n^n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 = 1+4+27+256 = 288$

e) $\sum_{i=0}^{5} (2i+1) = 1+3+5+7+9+11 = 36$

f) $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = 0,83333.....$

2. Establecer las siguientes propiedades del símbolo sumatorio.

a) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propiedad aditiva)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) \\
&= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n) \quad \text{Asociatividad y conmutatividad} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k
\end{aligned}$$

b) $\sum_{k=1}^{n} (ca_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (Prpiedad homogénea)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (ca_k) &= ca_1 + ca_2 + ... + ca_n \\
&= c(a_1 + a_2 + ... + a_n) \quad \text{distributividad} \\
&= c \sum_{k=1}^{n} a
\end{aligned}$$

c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (Propiedad telescópica)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + ... + (a_n - a_{n-1}) \\
&= (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) - (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}) + a_n \\
&= a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad \text{Reindexar la 2da suma} \\
&= a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
&= a_n - a_0
\end{aligned}$$

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$ (El sentido de esta suma es $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, cuando $a_k = 1$)

Demostración.- Probemos por inducción, Si $n = 1$, entonces la proposición es verdadera ya que $\sum\limits_{k=1}^{1} 1 = 1$. Ahora supongamos que el enunciado es verdadero para $n = m \in \mathbb{Z}^+$. Luego,

$$\sum_{k=1}^{m} 1 = m \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} 1 = m\right) + 1 = m + 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} 1 = m + 1$$

4. $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ $[Indicacin,\ 2k - 1 = k^2 - (k-1)^2]$

Demostración.- Sea $2k - 1 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = k^2 - (k-1)^2$ entonces por la propiedad telescópica se tiene $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum\limits_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = n^2 + 0 = n^2$

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$ [indicación. Úsese el ejercicio 3 y el 4.]

Demostración.- Por aditividad y homogeneidad se tiene $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} k - \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n^2$ entonces $2\sum\limits_{k=1}^{n} k - n = n^2$ ya que $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$, luego $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$

6. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}$ $[Indicacin.\ k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 2k + 1]$

Demostración.- Por la propiedad telescópica se tiene $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3 = n^3$, luego

$$n^3 = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 3k + 1 \quad \Rightarrow \quad n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \qquad \text{propiedad aditiva}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n}{3} \qquad \text{por los anteriores ejercicios}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

Demostración.- Sea $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ entonces

$$n^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \quad \Rightarrow \quad n^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 - 6\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) + 4\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) - n$$

$$\Rightarrow \quad 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 - 2n^2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

8. a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ si $x \neq 1$. Nota: Por definición $x^0 = 1$ [Indicación. Aplíquese el ejercicio 2 a $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$.]

Demostración.- Por propiedades aditiva y telescópica,

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = -\sum_{k=0}^{n}(x^{k+1} - x^k) = -(x^{n+1} - 1) = 1 - x^{n+1}$$

pro lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

b) ¿Cuál es la suma cuando $x = 1$?

Respuesta.- Si $x = 1$ por la parte 3 y el hecho de que $1^k = 1$ para $k = 0, ..., n$ tenemos

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

9. Demostrar por inducción, que la suma $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1)$ es proporcional a n, y hallar la constante de proporcionalidad.

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces $\sum_{k=1}^{2}(-1)^k(2k+1) = 2$. Así vemos que es valida para este caso. Observemos que $2n = 2$, lo mismo pasa para $n = 2$ donde $2n = 4$. Luego supongamos que la fórmula es válida para $n = m \in \mathbb{Z}^+$, es decir

$$\sum_{k=0}^{2} m(-1)^k(2k+1) = 2m,$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{2(m+1)}(-1)^k(2k+1) & = & (-1)(2k+1) \\ & = & 2m - [2(2m+1)+1] + [2(2m+2)+1] \\ & = & 2m - 4m - 3 + 4m + 5 \\ & = & 2(m+1) \end{array}$$

10. a) Dar una definición razonable del símbolo $\sum_{k=m}^{m+n} a_k$

$$\sum_{k=m}^{m+n} a_k = a_m + a_{m+1} + ... + a_{m+n}$$

b) Demostrar por inducción que para $n \geq 1$ se tiene

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1} 2n \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

Demostración.- Sea $n = 1$ se tiene,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

luego,

$$\sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \sum_{m=1}^{2} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ahora supongamos que se cumple para $n = j \in \mathbb{Z}^+$ entonces,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{k=j+1}^{2j} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2} = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m}\right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{k=j+1}^{2(j+1)} \frac{1}{k}\right) = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m}\right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{j+1} + \left(\sum_{k=j+2}^{2(j+1)} \frac{1}{k}\right) = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m}\right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=j+2}^{2(j+1)} \frac{1}{k} = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m}\right) + \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+2} - \frac{1}{j+1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=j+2}^{2(j+1)} \frac{1}{k} = \left(\sum_{m=1}^{2j} \frac{(1)^{m+1}}{m}\right) - \frac{1}{2(j+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=j+2}^{2(j+1)} \frac{1}{k} = \left(\sum_{m=1}^{2(j+1)} \frac{(1)^{m+1}}{m}\right)$$

11. Determinar si cada una de las igualdades siguientes es cierta o falsa. En cada caso razonar la decisión.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4$

Razonamiento.- Dado que se se evalúa para $n = 0$ entonces se tiene que $0^4 = 0$ entonces la desigualdad es cierta.

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{100} 2 = 200$

Razonamiento.- En vista que de si se evalúa para $n = 0$ el resultado es 2 entonces para $n = 100$ será 202, por lo tanto la igualdad es falsa

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k$

Razonamiento.- La igualdad es falsa debido a que el lado derecho de la igualdad se añade el 2 solo una vez, a diferencia de la igualdad de la izquierda que se añade a cada iteración de la suma.

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$

Razonamiento.- La igualdad es falsa ya que al cuadrado de la serie de la izquierda se añade en 1 a cada iteración, contemplando que $n = 100$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} k^2\right)$

Razonamiento.- La igualdad es falsa, ya que anteriormente se dijo que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

mientras que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

(f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{100} k\right)^3$

Razonamiento.- Similar a la parte (e) se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

mientras que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^3 = \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)^3$$

12. Inducir y demostrar una regla general que simplifique la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Demostración.- Esta claro ver que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{k}{k+1}$ ya que si sumamos para $n = 2$ el resultado es $\dfrac{2}{3}$, para $n = 3$ $\dfrac{3}{4}$ y así sucesivamente.

Luego efectivamente se cumple para $n = 1$, $\dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$. Así asumimos que se cumple para un entero fijo $n = m$,

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Ahora supongamos que se cumple para $m+1$ por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Por último solo falta demostrar que $\dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k+1}{k+2}$.

$$\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

13. Demostrar que $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ si $n \geq 1$. Utilizar luego este resultado para demostrar que

$$2\sqrt{m}-2 < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m}-1$$

si $m \geq 2$. En particular, cuando $m = 10^6$, la suma está comprendida entre 1998 y 1999.

Demostración.- Sea $0 < 1$ entonces

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & 1 \\ 4n^2+4n & < & 4n^2+4n+1 \\ 4n(n+1) & < & 4n^2+4n+1 \\ 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} & < & 2n+1 \\ 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} & < & \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) & < & \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Análogamente se puede demostrar para $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

Ahora demostramos la segunda parte del enunciado. Consideremos la desigualdad de la izquierda. Para $m = 2$ tenemos,

$$2\sqrt{2}-2;\ \ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{rcll} 2\sqrt{2}-2 & < & 2\sqrt{2}-\sqrt{2} & \text{ya que } 2 > \sqrt{2} \\ & = & \sqrt{2} & \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{ya que } \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ & < & 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \end{array}$$

donde la inecuación se cumple. Luego asumimos que la inecuación se cumple para algún $k \in \mathbb{Z}$ para $k \geq 2$, entonces sea

$$\begin{array}{rll} 2\sqrt{2}-2 < \sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{1}{n} & \Rightarrow & 2\sqrt{2}-2+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{n} \\ & \Rightarrow & 2\sqrt{2}-2+2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) < \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{por la parte 1 y } \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{n} < \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ & \Rightarrow & 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+1}+2\sqrt{k}-2) < \sum\limits_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{usando la parte 1} \\ & \Rightarrow & 2\sqrt{k+1}-2 < \sum_{n=1}^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Por lo tanto la inecuación es verdadera para todo $m \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$.
Ahora veamos la inecuación de la derecha. Para el caso de $m = 2$ tenemos,

$$+1\frac{1}{\sqrt{2}};\ \ 2\sqrt{2}-1$$

luego como $\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{2}$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} < \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad 2\sqrt{2} < 3 \\
&\Rightarrow \quad 2\sqrt{2} + 1 < 4 \\
&\Rightarrow \quad 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \\
&\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

por lo tanto la desigualdad es cierta. Asumamos entonces que es cierto para algunos $m = k \in \mathbb{Z},\ k \geq 2$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{k} - 1 \quad &\Rightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{k} - 1 + 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \qquad \text{parte 1} \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{k+1} - 1 \qquad \text{parte 1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la desigualdad correcta se aplica a todo $m \in \mathbb{Z}k \geq 2$. **Cabe recalcar que el libro menciona que** $m \geq 2$ pero este último solo se cumple para los extremos de la desigualdad y no así para $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2}}$

4.8 Valor absoluto y desigualdad triangular

Definición 4.13

$$|x| = \begin{cases} \text{si} & x, \quad x \geq 0 \\ \text{si} & -x, \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Teorema 4.38 Si $a \geq 0$, es $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$

Demostración.- Debemos probar dos cuestiones: primero, que la desiguadad $|x| \leq a$ implica las dos desigualdades $-a \leq x \leq a$ y recíprocamente, que $-a \leq x \leq a$ implica $|x| \leq a$.
Ya supuesto $|x| \leq a$ se tiene también $-a \leq -|x|$. Pero ó $x = |x|$ ó $x = -|x|$ y, por lo tanto, $x \leq a$ y $-a \leq x$, lo cual prueba la primera parte del teorema.
Para probar el recíproco, supóngase $-a \leq x \leq a$. Si $x \leq 0$ se tiene $|x| = x \leq a$; si por el contrario es $x \leq 0$, entonces $|x| = -x \leq a$. En ambos casos se tiene $|x| \leq a$, lo que demuestra el teorema.

■

Teorema 4.39 **Desigualdad triangular.** Para x e y números reales cualesquiera se tiene

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Demostración.- Puesto que $x = |x|$ ó $x = -|x|$, se tiene $-|x| \leq x \leq |x|$. Análogamente $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas desigualdades se tiene:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

y por tanto en virtud del teorema anterior se concluye que: $|x+y| \leq |x| + |y|$

■

Teorema 4.40 Si $a_1, a_2, ..., a_n$ son números reales cualesquiera

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Demostración.- Para $n = 1$ la desigualdad es trivial y para $n = 2$ es la desigualdad triangular. Supuesta cierta para n números reales, para $n+1$ números reales $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ se tiene:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} + a_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n}\right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

Por tanto, el teorema es cierto para $n+1$ números si lo es para n; luego, en virtud deñ principio de inducción, es cierto para todo número positivo n.

■

Teorema 4.41 **Desigualdad de Cauchy-Schwarz.** Si $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ son números reales cualesquiera, se tiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

El signo de igualdad es válido si y sólo si hay un npumero real x tal que $a_k x + b_k = 0$ ára cada vañpr de $k = 1, 2, ..., n$

Demostración.- Para $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$. Esto se puede poner en la forma

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0,$$

donde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Queremos demostrar que $B^2 \leq AC$. Si $A = 0$ cada $a_k = 0$, con lo que $B = 0$ y el resultado es trivial. Si $A \neq 0$, podemos completar el cuadrado y escribir

$$Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

El segundo miembro alcanza su valor mínimo cuando $x = -\dfrac{B}{A}$. Poniendo $x = -\dfrac{B}{A}$ en la primera ecuación, obtenemos $B^2 \leq AC$. Esto demuestra la desigualdad dada.

■

4.9 Ejercicios

1. Probar cada una de las siguientes propiedades del valor absoluto.

(a) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$

Demostración.- Si $|x| = 0$, por definición $x = 0$. Luego, si $x = 0$, entonces por teorema $\sqrt{x^2} = \sqrt{0^2} = 0$

(b) $|-x| = |x|$

Demostración.- Por definición $|-x| = -(-x)$ si $x \leq 0$ y $|-x| = x$ si $x \geq 0$ por lo tanto $|-x| = x$

(c) $|x-y| = |y-x|$

Demostración.- Por teorema $|x-y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{y^2 - 2yx + x^2} = \sqrt{(y-x)^2} = |y-x|$

(d) $|x|^2 = x^2$

Demostración.- Si $|x|^2$, por teorema $\left(\sqrt{x^2}\right)^2$, por propiedad de potencia x^2

(e) $|x| = \sqrt{x^2}$

Demostración.- Sea $x^2 \geq 0$ entonces por teorema $\sqrt{x^2}$, luego $(x^2)^{\frac{1}{2}}$, por lo tanto por definición de valor absoluto $x = |x|$.

(f) $|xy| = |x||y|$

Demostración.- Por el teorema anterior $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$

(g) $|x/y| = |x|/|y|$ si $y \neq 0$

Demostración.- Similar al anterior problema se tiene $|x/y| = \sqrt{(x/y)^2}$, luego por propiedades de potencia y raíces $\sqrt{x^2}/\sqrt{y^2}$, así nos queda $|x|/|y|$ si $y \neq 0$

(h) $|x-y| \leq |x|+|y|$

Demostración.- Por la desigualdad triangular y la parte (b) se tiene $|x-y| = |x+(-y)| = |x|+|-y| = |x|+|y|$

(i) $|x|-|y| \leq |x-y|$

Demostración.- Por la desigualdad triangular tenemos que $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$ entonces $|x|-|y| \leq |x-y|$

(j) $||x|-|y|| \leq |x-y|$

Demostración.- Parecido al anterior ejercicio se tiene $|y| = |x+(y-x)| \leq |x|+|y-x|$ entonces $|y|-|x| \leq |x-y|$ y por lo tanto $|x|-|y| \geq |x-y|$. Luego por el inciso (i) y teorema $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \Rightarrow ||x|-|y|| \leq |x-y|$

2. Cada desigualdad (a_i), de las escritas a continuación, equivale exactamente a una desigualdad (b_j). Por ejemplo, $|x|<3$ si y sólo si $-3<x<3$ y por tanto (a_1) es equivalente a (b_2). Determinar todos los pares equivalentes.

$$\begin{array}{lcl}
|x|<3 & \longrightarrow & -3<x<3 \\
|x-1|<3 & \longrightarrow & -2<x<4 \\
|3-2x|<1 & \longrightarrow & 1<x<2 \\
|1+2x| \leq 1 & \longrightarrow & -1 \leq x \leq 0 \\
|x-1|>2 & \longrightarrow & x>4 \ \vee \ x<-1 \\
|x+2| \geq 5 & \longrightarrow & x \geq 3 \ \vee \ x \leq -7 \\
|5-x^{-1}|<1 & \longrightarrow & 4<x<6 \\
|x-5|<|x+1| & \longrightarrow & x>2 \\
|x^2-2| \leq 1 & \longrightarrow & -\sqrt{3} \leq x \leq -1 \ \ 1 \leq x \leq \sqrt{3} \\
x<x^2-12<4x & \longrightarrow & \dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{4}
\end{array}$$

3. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa. En cada caso razonar la decisión.

(a) $x<5$ implica $|x|<5$

Es falso ya que $|-6|<5$ entonces $6>5$.

(b) $|x-5|<2$ implica $3<x<7$

Es verdad ya que por teorema $-2 < x - 5 < 2$ entonces $3 < x < 7$.

(c) $|1 + 3x| \leq 1$ implica $x > -\dfrac{2}{3}$

es verdad ya que $-1 \leq 1 + 3x \leq 1$ entonces $-\dfrac{2}{3} \leq x \leq 0$.

(d) No existe número real x para el que $|x - 1| = |x - 2|$

Es falso ya que se cumple para $\dfrac{3}{2}$.

(e) Para todo $x > 0$ existe un $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$

Es falso ya que si tomas $x = 3$ será $y < 0$

4. Demostrar que el signo de igualdad es válido en la desigualdad de Cauchy-Schwarz si y sólo si existe un número real tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo $k = 1, 2, ..., n$

Demostración.- $(\Rightarrow)$ Si $a_k = 0$ para todo k entonces la igualdad es verdadera así asumimos que $a_k \neq 0$ para al menos un k,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

, Luego, sea $\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$, entonces

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \;\; B = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k, \;\; C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

, así se tiene

$$Ax^2 + 2b^x + C \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

pero sabemos por suposición que $B^2 = AC$, donde $x = -\dfrac{B}{A}$ el cual esta en $\mathbb{R}$ ya que $A \neq 0$ y por lo tanto $a_k \neq 0$ para algún k y a_k^2 es no negativo. asís que la suma es estrictamente positivo como se vio en la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada $k = 1, ..., n$. Luego $a_k x + b_k = 0 \Rightarrow b_k = (-x)a_k$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) &= \left[-x\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\right]^2 \\
&= x^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x^2 a_k^2\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (-x a_k)^2\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)
\end{aligned}$$

4.10 Ejercicios varios referentes al método de inducción

Definición 4.14 **Coeficiente factorial y binomial.** El símbolo $n!$ (que se lee n factorial) se puede definir por inducción como sigue: $0! = 1,\ n! = (n-1!n$ si $n \geq 1$
Obsérvese que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.
Si $0 \leq k \leq n$ el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ se define por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Calcúlese los valores de los siguientes coeficientes binomiales:

(a) $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{4 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 10$

(b) $\binom{7}{0} = \dfrac{7!}{0!(7-0)!} = \dfrac{7!}{7!} = 1$

(c) $\binom{7}{1} = \dfrac{7!}{1!(7-1)!} = \dfrac{7!}{6!} = 7$

(d) $\binom{7}{2} = \dfrac{7!}{2!(7-2)!} = \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21$

(e) $\binom{17}{14} = \dfrac{17!}{14!(17-14)!} = \dfrac{15 \cdot 16 \cdot 17}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 680$

(f) $\binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = 1$

2. **(a)** Demostrar que: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Demostración.- Sea $\dfrac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!}$ entonces $\dfrac{n!}{(n-k)!k}$ por lo tanto $\binom{n}{k}$

(b) Sabiendo que $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$ calcular n

Respuesta.- Usando la parte (a) sabemos que $k = 10$ y $n - k = 7$ por lo tanto $n = 17$

(c) Sabiendo que $\binom{14}{k} = \binom{14}{k-4}$ calcular k

Respuesta.- Similar a la parte (b) $k = 14 - (k-4) \Rightarrow 2k = 18 \Rightarrow k = 9$

(d) ¿Existe un k tal que $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$

Respuesta.- No existe ya que $k = 12 - (k-3) \Rightarrow 2k = 15$ no es un entero.

3. Demostrar que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. Esta propiedad se denomina fórmula aditiva de los coeficientes combinatorios o ley del triángulo de Pascal y proporciona un método rápido para calcular sucesivamente los coeficientes binomiales. A continuación se da el triángulo de Pascal para $n \leq 6$.

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
n= & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Demostración.-

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n!)k + (n!)(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n!)(k+n-k+1)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n!(n+1))}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k![(n+1)-k]!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}
$$

4. Demuéstrese por inducción la fórmula de la potencia del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Y utilícese el teorema para deducir las fórmulas:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ \ y \ \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \ \ si \ \ n > 0$$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces

$$(a+n)^1 = a+b = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^0 b + ab^0 = b+a = a+b$$

Por lo tanto la formula es cierta para $n = 1$
Luego supongamos que la formula es cierta para algún $n = m \in \mathbb{Z}^+$ entonces,

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

Luego suponemos que se cumple para $m+1$

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= \left[\sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k} a^k b^{m-k}\right](a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\
&= a^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \tbinom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\
&= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \tbinom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{m} a^k b^{m+1-k} \\
&= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \tbinom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\
&= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left\{ \left[\tbinom{m}{k-1} + \tbinom{m}{k}\right] \left(a^k b^{m+1-k}\right) \right\} \\
&= a^{m+1} + b^{m+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{m} \tbinom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \tbinom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si la fórmula es verdadera para el caso m entonces es verdadera para el caso $m+1$.

Luego aplicando el teorema del binomio con $a = 1, \ b = 1$, entonces,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \Rightarrow (1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Para la segunda fórmula aplicamos una vez mas pero con $a = -1$ y $b = 1$, entonces,

$$(a+b)^n = (-1+1)^n = 0^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

Definición 4.15 **Símbolo producto..** El producto de n números reales $a_i, a_2, ..., a_n$ se indica por el símbolo $\prod_{k=1}^{n} a_k$, que se puede definir por inducción. El símbolo $a_1 a_2 \cdots a_n$ es otra forma de escribir este producto. Obsérvese que:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

5. Dar una definición por inducción del producto $\prod_{k=1}^{n} a_k$

Definición.-

$$\prod_{k=1}^{0} a_k = 1; \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Demostrar por inducción las siguientes propiedades de los productos:

6. $\prod_{k=1}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\prod_{k=1}^{n} b_k \right)$ (Propiedad multiplicativa)

Un caso importante es la relación: $\prod_{k=1}^{n} (c a_k) = c_n \prod_{k=1}^{n} a_k$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces $a_1 b_1 = a_1 b_1$. Supongamos que se cumple para $n = m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\prod_{k=1}^{m} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{m} a_k \right) \left(\prod_{k=1}^{m} b_k \right)$$

Luego sea $m+1$, por lo tanto

$$\prod_{k=1}^{m+1} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{m+1} a_k \right) \left(\prod_{k=1}^{m+1} b_k \right)$$

Así,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m+1} (a_k b_k) &= \left(\prod_{k=1}^{m} a_k \right) \cdot a_{m+1} \left(\prod_{k=1}^{m} b_k \right) \cdot b_{m+1} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{m+1} a_k \right) \left(\prod_{k=1}^{m+1} b_k \right) \end{aligned}$$

El caso $m+1$ es cierto por lo tanto la propiedad es válida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}$ si cada $a_k \neq 0$ (propiedad telescópica)

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0} \Rightarrow \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_1}{a_0}$ si $a_k \neq 0$. De ésta manera se cumple para $n = 1$.
Luego supongamos que se cumple para $n = m \in \mathbb{Z}^+$ así nos queda,

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_m}{a_0}$$

Ahora supongamos que es cierto para $m+1$, luego

$$\prod_{k=1}^{m+1} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{m+1}}{a_0}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{m+1} \frac{a_k}{a_{k-1}} &= \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \prod_{k=1}^{m} \frac{a_k}{a_{k-1}} \\
&= \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_m}{a_0} \\
&= \frac{a_{m+1}}{a_0}
\end{aligned}$$

Vimos que el caso $m+1$ es cierto, por lo tanto la propiedad es válida para $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

8. Si $x \neq 1$, demostrar que: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}$
¿Cuál es el valor del producto cuando $x = 1$?

Demostración.- Se cumple la condición para $n = 1$ ya que $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x} \Rightarrow 1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1 + x$.
Supongamos que se cumple para $n = m \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$\prod_{k=1}^{m} (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^m}}{1 - x}$$

, luego se cumple para $m+1$,

$$\prod_{k=1}^{m+1} (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^{m+1}}}{1 - x}$$

, por lo tanto nos queda,

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{m+1}(1+x^{2^{k-1}}) &= (1+x^{2^m})\cdot\prod_{k=1}^{m}(1+x^{2^{k-1}}) \\
&= (1+x^{2^m})\cdot\frac{1-x^{2^m}}{1-x} \\
&= \frac{(1+x^{2^m})(1-x^{2^m})}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple para $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

9. Si $a_k < b_k$ para cada valor de $k = 1, 2, ..., n$, es fácil demostrar por inducción $\sum_{k=1}^{n} < \sum_{k=1}^{n} b_k$.
Discutir la desigualdad correspondiente para productos:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} b_k$$

Demostración.- Es fácil ver que es la afirmación es cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierto para $n = m \in \mathbb{Z}^+$, luego por hipótesis sabemos que $b_{m+1} > a_{m+1} \geq 0$ de donde,

$$\prod_{k=1}^{m+1} a_k = a_{m+1}\cdot\prod_{k=1}^{m} a_k < a_{m+1}\cdot\prod_{k=1}^{m} b_k < b_{m+1}\cdot\prod_{k=1}^{m} b_k = \prod_{k=1}^{m+1} b_k$$

Algunas desigualdades notables

10. Si $x > 1$, demostrar por inducción que $x^n > x$ para cada $n \geq 2$. Si $0 < x < 1$, demostrar que $x^n < x$ para cada $x \geq 2$.

Demostración.- Es fácil probar que la afirmación se cumple para $n = 2$. Supongamos que se cumple para alguna $n = m \geq 2$, así

$$x^m \geq x,$$

de donde $m+1$ se cumple para

$$x^{m+1} \geq x,$$

así solo nos queda probar que

$$x \cdot x \geq x,$$

el cuál se cumple a simple vista.

Por otra parte sea $n = 2$ por lo tanto $x^2 < x$, como $0 < x < 1$ vemos se cumple la desigualdad. Supongamos que se cumple para $n = m \geq 2$, entonces,

$$
\begin{aligned}
x^m < x \quad &\Rightarrow \quad x^m < x \cot x \\
&\Rightarrow \quad x^{m+1} < x^2 \\
&\Rightarrow \quad x^{m+1} < x^2 < x \\
&\Rightarrow \quad x^{m+1} < x
\end{aligned}
$$

Así la desigualdad es válida para $m+1 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$

11. Determínense tofos los enteros positivos n para los cuales $2^n < n!$

Demostración.- Podemos observar que no se cumple para $n = 1, 2, 3$. Luego observemos que la afirmación es válida para $n = 4$,

$$2^4 < 4! \Rightarrow 16 < 24.$$

Ahora demostremos que la afirmación es válida para $n = m+1$ suponiendo que se cumple para algún $n = m \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$, entonces,

$$2^m < m! \Longrightarrow 2^m(m+1) < m!(m+1)! \Longrightarrow 2^{m+1} < (m+1)!$$

Ya que $m \geq 4 > 2$ entonces $2^m(m+1) > 2^m \cdot 2 = 2^{m+1}$. Así la inecuación es verdadera para $m+1$ $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$

12. **(a)** Con el teorema del binomio demostrar que para n entero positivo se tiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right)\right]$$

Demostración.- Sea $a = \dfrac{1}{n}$ y $b = 1$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n}+1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[\frac{\prod_{r=1}^{n} r}{\prod_{r=1}^{n-k} r}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\right] \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\prod_{r=n-k+1}^{n} r\right)\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[\prod_{r=0}^{k-1}(n-r)\right]\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

(b) Si $n > 1$, aplíquese la parte (a) y el Ejercicio 11 para deducir las desigualdades

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 3$$

Demostración.- Si $n > 1$ y $n \geq 2$ por el teorema bonomial tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k > 2$$

Donde la desigualdad es estricta ya que $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$ para $n \geq 2$.
Luego por la parte (a) sabemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right)\right] < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

ya que si $n > 1$ entonce $\left(1-\frac{r}{n}\right) < 1$, para todo $r = 0, ..., n-1$ por lo tanto $\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-\frac{r}{n}\right) <$ $\prod r = 0^{k-1} 1 = 1$ y en consecuencia $\frac{1}{k!}\left[\prod[r = 0^{k-1}\right)\left(1-\frac{r}{n}\right) < \frac{1}{k!}$
Por último demostraremos que $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 3$,

$$\begin{array}{rcll} 1 + \sum k = 1^n \frac{1}{k!} & = & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} & \\ & < & \frac{8}{3} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} & \text{por el problema 11} \\ & = & \frac{8}{3} + \frac{1}{16}\left(\sum_{k=0}^{n-4} \frac{1}{2^k}\right) & \\ & = & \frac{8}{3} + \frac{1}{16}\left(2 - \frac{1}{2^{n-4}}\right) & \text{por el problema 8} \\ & = & \frac{8}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2^n} & \\ & < & 3 & \end{array}$$

13. (a) Sea p un entero positivo. Demostrar que:

$$b^p - a^p = (b-a)(b^{p-1} + b^{p-2}a + b^{p-3}a^2 + ... + ba^{p-2} + a^{p-1})$$

Demostración.- Sea $(b-a)(b^{p-1} + b^{p-2}a + b^{p-3}a^2 + ... + ba^{p-2} + a^{p-1})$ entonces,

$$\begin{aligned}
&= (b-a)\left(\sum_{k=0}^{p-1} b^{p-k-1}a^k\right)\\
&= b\left(\sum_{k=0}^{p-1} b^{p-k-1}a^k\right) - a\left(\sum_{k=0}^{p-1} b^{p-k-1}a^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} b^{p-k}a^k - \sum_{k=0}^{p-1} b^{p-k}a^{k-1}\\
&= b^p + \sum_{k=1}^{p-1} b^{p-k}a^k - a^p - \sum_{k=1}^{p-1} b^{p-k}a^k\\
&= b^p - a^p
\end{aligned}$$

(b) Si p y n son enteros positivos, demostrar que

$$n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p$$

Demostración.- Por el teorema binomial se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} &= \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[\left(\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^k\right) - n^{p+1}\right]\\
&= \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[n^{p+1} + (p+1)n^p + \left(\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} n^k\right) - n^{p+1}\right]\\
&= n^p + \left(\frac{1}{p+1}\right)\left(\binom{p+1}{k} n^k\right)\\
&> n^p
\end{aligned}$$

Luego para la desigualdad de la derecha usaremos la parte (a), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} &= \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[(n+1)^p + n(n+1)^{p-1} + ... + n^{p-1}(n+1) + n^p\right]\\
&< \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[(n+1)^p + (p+1)^p + ... + (n+1)^p + (n+1)^p\right]\\
&= \left(\frac{1}{p+1}\right)\left[(p+1)(n+1)^p\right]\\
&= (n+1)^p
\end{aligned}$$

(c) Demuéstrese por inducción que:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces $\sum_{k=1}^{0} k^p = 0 < \dfrac{1^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{1} k^p = 1$ por lo tanto la inecuación se cumple. Luego asumimos que es verdad para algún $n = m \in \mathbb{Z}^{>0}$. Así para la inecuación de la izquierda se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^p < \frac{m^{p+1}}{p+1}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{m} k^p & < & \dfrac{m^{p+1}}{p+1} + m^p \\ & < & \dfrac{m^{p+1}}{p+1} + \dfrac{(m+1)^{p+1} - m^{p+1}}{p+1} \\ & = & \dfrac{(m+1)^{p+1}}{p+1} \end{array}$$

Ahora veamos para la inecuación de la derecha. Asumiendo que es verdad para algún $n = m \in \mathbb{Z}_{>0}$, tenemos:

$$\frac{m^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{m} k^p$$

, entonces

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{m^{p+1}}{p+1} + (m+1)^p & < & \sum_{k=1}^{m+1} k^p \\ \dfrac{m^{p+1} + (m+1)^{p+1} - m^{p+1}}{p+1} & < & \sum_{k=1}^{m+1} k^p \\ \dfrac{(m+1)^{p+1}}{p+1} & < & \sum_{k=1}^{m+1} k^p \end{array}$$

Así vemos que se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}^{>0}$

14. Sean $a_1, ..., a_n$ n números reales, todos del mismo signo y todos mayores que -1. Aplicar el método de inducción para demostrar que:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + ... + a_n$$

en particular, cuando $a_1 = a_2 = ... = a_n = x$, donde $x > -1$, se transforma en:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \text{ (desigualdad de Bernoulli)}$$

Probar que si $n > 1$ el signo de igualdad se presenta en (1.25) sólo para $x = 0$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces $1 + a_1 \geq 1 + a_1$ por lo que la desigualdad es válida. Ahora supongamos que la desigualdad es válida para algún $n = k \in \mathbb{Z}_{>0}$. así,

$$(1 + a_1)...(1 + a_k) \geq 1 + a_1 + ... + a_k$$

de donde,

$$\begin{array}{rcl} (1 + a_1)...(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) & \geq & (1 + a_1 + .. + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ & \geq & (1 + a_1 + ... + a_{k+1}) + a_{k+1}(a_1 + ... + a_k) \end{array}$$

dado que a_i deben ser del mismo signo por lo tanto a_{k+1} y $(a_1 + ... + a_k)$ debe ser positivo. Así,

$$(1+a_1)\cdots(1+a_{k+1}) \geq 1 + a_1 + ... + a_{k+1}$$

que cumple la desigualdad para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$
Vemos ahora la desigualdad de bernoulli. Si $x = 0$ entonces $(1+0)^n = 1 = 1 + n \cdot 0$, por lo tanto se cumple la igualdad si sólo si $x = 0$
Para el caso de $n = 2$ tenemos $(1+x)^2 01 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ entonces la desigualdad se cumple para $n = 2$. Supongamos ahora que la desigualdad es estricta para algún $n = k \in \mathbb{Z}_{>1}$ por lo tanto

$$(1+x)^k > 1 + kx$$

así,

$$\begin{array}{rcl}
(1+x)^k(1+x) & > & (1+kx)(1+x) \\
(1+x)^{k+1} & > & (k+1)x + kx^2 \\
(1+x)^{k+1} & > & 1 + (k+1)x
\end{array}$$

Ya que $k > 0$ y $x > 0$ implica que $kx^2 > 0$ por lo tanto la desigualdad es estricta para todo $n > 1$ si $x \neq 0$. Por lo tanto, la igualdad es válida si y sólo si $x = 0$

15. Si $n \geq 2$, demostrar que $n!/n^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$, siendo k la parte entera de $n/2$.

Demostración.- Demostremos por inducción. Sea $n = 2$ entonces

$$\frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

ya que $n/2 = 2/2 = 1 = k$ siendo k la parte entera de $n/2$. Supongamos que la desigualdad se cumple para algún $n = m \in \mathbb{Z} \geq 2$. Entonces,

$$\begin{array}{rl}
\dfrac{m!}{m^m} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k & \Rightarrow \quad \left(\dfrac{m!}{m^m}\right)\left[\dfrac{(m+1)m^m}{(m+1)^{m+1}}\right] \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left[\dfrac{(m+1)m^m}{(m+1)^{m+1}}\right] \\[2ex]
& \Rightarrow \quad \dfrac{(m+1)!}{(m+1)^{m+1}} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^m
\end{array}$$

Luego por el problema 13 se tiene

$$m^p < \frac{(m+1)^{p+1} - m^{p+1}}{p+1} \quad \forall\ p \in \mathbb{Z}^+$$

Supongamos que $p = m - 1$ entonces,

$$\begin{array}{rcll}
(p+1)m^p & \Rightarrow & (m+1)^{p+1} - m^{p+1} & \\
& \Rightarrow & m^{p+1} + (p+1)m^p < (m+1)^{p+1} & \\
& \Rightarrow & m^m + m^m < (m+1)^m & \text{ya que } p = m-1 \\
& \Rightarrow & 2m^m < (m+1)^m & \\
& \Rightarrow & \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^m < \dfrac{1}{2} &
\end{array}$$

Así nos queda que

$$\frac{(m+1)!}{(m+1)^{m+1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

Por último recordemos que k es la parte entera de $m/2$, para completar la demostración debemos demostrar que si la desigualdad se cumple para m entonces e cumplirá para $m+1$, en efecto si m es par, entonces $k = m/2$ y $k+1 = (m+1)/2$, por otro lado si m es impar entonces $k = (m+1)/2$. En cualquier caso $k+1 \geq (m+1)/2$ entonces

$$\frac{(m+1)!}{(m+1)^{m+1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\dfrac{m+1}{2}}$$

Por lo tanto la desigualdad es válida para el caso $m+1$ y en consecuencia es cierta para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$

16. Los números $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$ tales que cada uno después del segundo es la suma de los dos anteriores, se denomina números de Fibonacci. Se pueden definir por inducción como sigue:

$$a_1 = 1, \;\; a_2 = 2, \;\; a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \;\; si \; n \geq 2.$$

Demostrar que

$$a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para cada $n \geq 1$.

Demostración.- Para el caso de $n = 1$ tenemos

$$1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ya que $\sqrt{5} > 2$ se cumple la desigualdad para $n = 1$. Ahora supongamos que es verdad para algún $n = k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, luego

$$\begin{array}{rrcl}
 & a_k + a_{k-1} & < & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \\
\Rightarrow & a_{k+1} & < & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) \\
 & & = & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\
 & & = & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \qquad \text{ya que } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
 & & = & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}
\end{array}$$

Por lo tanto la desigualdad es válida para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

Definición 4.16 **Desigualdades que relacionan distintos tipos de promedios.** Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ n números reales positivos. Si p es un entero no nulo, la media de potencias p-énesimas M_p se define como sigue.

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + ... + x_n^p}{n} \right)^{1/p}$$

El número M_1 se denomina media aritmética, M_2 media cuadrática y M_{-1} media armónica.

17. Si $p > 0$ demostrar que $M_p < M_{2p}$ cuando $x_1, x_2, ..., x_n$ no son todos iguales.

Demostración.- Sea $a_k = x_k^p$ y $b_k = 1$ entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \cdot 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2p} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2 \right)$$

luego, vemos que la desigualdad es estricta ya que si se sostuviera la igualdad existiría alguna $y \in \mathbb{R}$ tal que $x_k^p \cdot y + 1 = 0$, $\forall k$, pero esto implicaría que $x_k = \left(-\frac{1}{y} \right)^{1/p}$, $\forall k$, contradiciendo nuestro supuesto de que x_k no todos son iguales. Luego sabemos que $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$ entonces

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p & < & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{2p} \right)^{1/2} \cdot n^{1/2} & \\
\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{1/p} & < & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{2p} \right)^{1/2p} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/2p} & \text{elevado por } 1^{1/p} \\
\left(\frac{1}{p} \right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{1/p} & < & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{2p} \right)^{1/2p} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/2p} & \text{por } \left(\frac{1}{n} \right)^{1/2} \\
\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}{n} \right)^{1/p} & < & \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{2p} x_k^{2p}}{n} \right)^{1/2p} &
\end{array}$$

18. Aplíquese el resultado del Ejercicio 17 para demostrar que

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{64}{3}$$

si $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ y $a,\ b,\ c > 0$.

Demostración.- Sea $a + b + c \in \mathbb{R}$ distintos entre si, aplicamos el problema 17 con $p = 2$,

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^{1/2} < \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^{1/4} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{3} \right)^2 < \frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad a^4 + b^4 + c^4 > \frac{64}{3}$$

Luego si $a = b = c$, entonces

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &\Rightarrow 3a^2 = 8\\
&\Rightarrow a^2 = b^2 = c^2 = \frac{8}{3}\\
&\Rightarrow a^4 = b^4 = c^4 = \frac{64}{9}\\
&\Rightarrow a^4+b^4+c^4 = \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la desigualdad se cumple para cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$

19. Sean $a_1, ..., a_n$ n números reales positivos cuyo producto es igual a 1. Demostrar que $a_1 + ... + a_n \geq n$ y que el signo de igualdad se presenta sólo cuando cada $a_k = 1$

Demostración.- Consideremos dos casos:

C1 Si $a_1 = ... = a_n = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \geq \prod_{k=1}^{n} a_n = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1$$

Por lo tanto la desigualdad se cumple.

C2 Sea $a_k \neq 1$ y $n = 2$ por inducción vemos que no se cumple la desigualdad

$$a_1 \cdot a_2 \neq 1$$

. Si uno de ellos no es uno tampoco lo es el siguiente es decir,

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot a_2 = 1 &\Rightarrow a_2 = \frac{1}{a_1}\\
&\Rightarrow a_1 + a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1}\\
&\Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{a_1^2+1}{a_1}\\
&\Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{a_1^2 - 2a_1 + 1 + 2a_1}{a_1}\\
&\Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{(a_1-1)^2}{a_1} + 2\\
&\Rightarrow a_1 + a_2 > 2
\end{aligned}$$

Donde la desigualdad final sigue desde $\dfrac{(a_1-1)^2}{a_1}$ para $a_1 > 0$, por lo tanto la desigualdad es válida para el caso $n = 2$

Supongamos que la desigualdad se cumple para $n = k \in \mathbb{Z}^+$. Luego $a_1, ..., a_{k+1} \in \mathbb{R}^+$ con $a_i \neq 1$ para al menos un $i = 1, ..., k+1$. Si $a_i < 1$, entonces debe haber algún $j \neq i$ tal que $a_j > 0$ porque de lo contrario si $a_j \leq 1$ para todo $j \neq i$, entonces $a_1 \cdots a_{k+1} < 1$. De manera similar, si $a_i > 1$, entonces hay algún $j \neq i$ tal que $a_j < 1$. Por lo tanto tenemos un par $a_i,\ a_j$ con un miembro del par mayor que 1 y el otro menor que 1. Sea este par a_1 y a_{k+1} entonces definamos $a_1 \cdot a_{k+1}$, entonces,

$$b \cdot a_2 \cdots a_k = 1 \Rightarrow b_1 + a_2 + ... - a_k \geq k$$

Además, dado que $(1-a_i)(1-a_{k+1}) < 0$ (dado que uno de a_1, a_{k+1} es mayor que 1 y el otro es menor que 1, uno de $(1-a_1), (1-a_{k+1})$ es positivo y el otro es negativo, luego

$$1 - a_1 - a_{k+1} + a_1 a_{k+1} < 0 \Rightarrow b < a_1 + a_{k+1} - 1,$$

Así

$$b + a_2 + ... + a_k \geq k \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} \geq k + 1$$

Por lo tanto, la desigualdad es válida para $k+1$ y en consecuencia es verdadera para $n \in \mathbb{Z}^+$

Definición 4.17 La media geométrica G de n números reales positivos $x_1, ..., x_n$ está definida por la fórmula $G = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$

20. (a) Desígnese con M_p la media de potencias p-ésimas. Demostrar que $G \leq M_1$ y que $G = M_1$ solo cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demostración.- Si $x_1, ..., x_n$ no todos iguales, entonces

$$G_n = \left[(x_1 \cdots x_n)^{1/n}\right]^n = x_1 \cdots x_n,$$

así,

$$\begin{array}{rcll} \left(\dfrac{1}{G_n}\right)(x_1 \cdots x_n) & = & 1 & \\ \left(\dfrac{x_1}{G}\right)\left(\dfrac{x_2}{G}\right)\cdots\left(\dfrac{x_n}{G}\right) & = & 1 & \\ \dfrac{x_1}{G} + \dfrac{x_2}{G} + ... + \dfrac{x_n}{G} & > & n & \text{por problema anterior} \\ x_1 + x_2 + ... + x_n & > & n \cdot G & \\ M_1 & > & G & \end{array}$$

luego si $x_1, ...x_n$ son todos iguales , entonces,

$$G = (x_1 \cdots x_n)^{1/n} = (x_1^n)^{1/n} = x_1 = \frac{nx_1}{n} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n} = M_1$$

(b) Sean p y q enteros, $q < 0 < p$. A partir de (a) deducir que $M_q < G < M_p$ si $x_1, x_2, ..., x_n$ no son todos iguales.

Demostración.- Probemos primero que $G < M_p$. Para ello primero veamos que si $x_1, ..., x_n$ son números reales positivos, no todos iguales entonces $x_P, ..., x_n^p$ también son números reales positivos también no todos iguales. A partir de la definición de M_p y dejando $M_p(x_1^p, ..., x_n^p)$ denotar la p-enésima potencia media de los números $x_i^p, ..., x_n^p$ tenemos,

$$\begin{aligned} M_1(x_1^p,...,x_n^p) &= \frac{x_1^p+...+x_n^p}{n} \\ &= \left[\left(\frac{x_1^p+...+x_n^p}{n}\right)^{1/p}\right]^p \\ &= [M_p(x_1,...,x_n)]^p \end{aligned}$$

así se observa que $[M_p(x_1,...,x_n)]^p = M_1(x_i^p,...,x_n^p)$ luego por la parte (a),

$$\begin{aligned} G(x_1,...,x_n) &= (x_1\cdots x_n)^{p/n} \\ &= (x_i^p\cdots x_n^p)^{1/n} \\ &= G(x_1^p,...,x_n^p) \\ &< M_1(x_1^p,...,x-n^p) \\ &= [M_p(x_1,...,x_n)]^p \end{aligned}$$

Por lo tanto implica que $G < M_p$
ahora debemos $M_q < G$ para $q < 0$, visto de otra forma $-q > 0$ entonces $G < M_{-q}$ y por la desigualadad que demostramos se tiene,

$$G^{-q} < (M_{-q})^{-q} \Rightarrow G^q > M_q^q \Rightarrow G > M_q$$

21. Aplíquese los resultados del Ejercicio 20 para probar la siguiente proposición: Si a, b y c son números reales y positivos tales que $abc = 8$, entonces $a+b+c \geq 6$ y $ab+ac+bc \geq 12$.

Demostración.- Sea $a, b \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$\begin{aligned} (a\cdot b\cdot c)^{1/3} &\leq \frac{a+b+c}{3} \\ 8 &\leq \frac{(a+b+c)^3}{3^3} \\ 2^3\cdot 3^3 &\leq (a+b+c)^3 \\ a+b+c &\geq 6 \end{aligned}$$

Luego para la segunda desigualdad utilizamos la parte (b) del anterior problema,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}{3}\right)^{-1} &\leq (a\cdot b\cdot c)^{1/3}\\
\left[\frac{3^3}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^3}\right]^3 &\leq 2^3\\
\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3 &\geq \frac{3^3}{2^3}\\
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &\geq \frac{3}{2}\\
\frac{bc+ac+ab}{abc} &\geq \frac{3}{2}\\
\frac{bc+ac+ab}{8} &\geq \frac{3}{2}\\
ab+ac+bc &\geq 12
\end{aligned}$$

22. Si $x_1, ..., x_n$ son números positivos y si $y_k = 1/x_k$, demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \geq n^2.$$

Demostración.- Sea $\sqrt{x_k}\sqrt{y_k} = 1$ ya que $y_k = \dfrac{1}{x_k}$ entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\\
\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\sqrt{y_k}\right)^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{y_k}^2\right)\\
\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\\
\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) &\geq n^2
\end{aligned}$$

23. Si a, b y c son números positivos y si $a+b+c=1$, demostrar que $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$

Demostración.- Sea $M_{-1}(a,b,c) \leq M_1(a,b,c)$ entonces

$$\left(\frac{a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}}{3}\right)^{-1} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} &\leq \frac{1}{3} \\
9 &\leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\
9abc &\leq bc+ac+ab \\
8abc &\leq bc+ac+ab-abc \\
8abc &\leq 1-(a+b+c)+ab+ac+bc-abc
\end{aligned}$$

ya que $1 = a+b+c$, luego $1-(a+b+c)+ab+ac+bc-abc = (1-a)(1-b)(1-c)$ así nos queda

$$8abc \leq (1-a)(1-b)(1-c)$$

1

Los conceptos del Cálculo Integral

1.3 Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o funciones reales.

Definición 1.1 **Par ordenado.** Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Definición 1.2 **Definición de función.** Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primero elemento.

Debe cumplir las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

(i) $\forall x \in D_f, \exists y / (x, y) \in f(x) \;\; y = f(x)$

(ii) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

Definición 1.3 **Dominio y recorrido.** Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el **dominio** de f. El conjunto de los segundos elementos y se denomina **recorrido** de f, o conjunto de valores de f.

Teorema 1.1 Dos funciones f y g son iguales si y sólo si

(a) f y g tienen el mismo dominio, y

(b) $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de f.

Demostración.- Sea f función tal que $x \in D_f, \exists y \ / \ y = f(x)$ es decir $(x, f(x))$, g una función talque $\forall z \in D_g, \exists y \ / \ y = g(z)$ es decir $(z, g(z))$, entonces por definición de par ordenado tenemos que $(x, f(x)) = (z, g(z))$ si y sólo si $x = z$ y $f(x) = g(z)$

■

Definición 1.4 **Sumas, productos y cocientes de funciones.** Sean f y g dos funciones reales que tienen el mismo dominio D. Se puede construir nuevas funciones a partir de f y g por adición, multiplicación o división de sus valores. La función u definida por,

$$u(x) = f(x) + g(x) \ \ si \ x \in D$$

se denomina suma de f y g, se representa por $f + g$. Del mismo modo, el producto $v = fcdotg$ y el cociente $w = f/g$ están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \ \ si \ x \in D, \quad w(x) = f(x)/g(x) \ \ si \, x \in D \ y \ g(x) \neq 0$$

1.5 Ejercicios

1. Sea $f(x) = x + 1$ para todo real x. Calcular:

- $f(2) = 2 + 1 = 3$
- $f(-2) = -2 + 1 = -1$
- $-f(2) = -(2 + 1) = -3$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$
- $\dfrac{1}{f(2)} = \dfrac{1}{3}$
- $f(a + b) = a + b + 1$
- $f(a) + f(b) = (a + 1) + (b + 1) = a + b + 2$
- $f(a) \cdot f(b) = (a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$

2. Sean $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = 1 - x$ para todo real x. calcular:

- $f(2) + g(2) = (1+2) + (1-2) = 2$

- $f(2) - g(2) = (1+2) - (1-2) = 4$

- $f(2) \cdot g(2) = (1+2) \cdot (1-2) = 3 \cdot (-1) = -3$

- $\dfrac{f(2)}{g(2)} = \dfrac{1+2}{1-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$

- $f[g(2)] = f(1-2) = f(-1) = 1 + (-1) = 0$

- $g[f(2)] = f(1+2) = g(3) = 1 - 3 = -2$

- $f(a) + g(-a) = (1+a) + (1-a) = 2$

- $f(t) \cdot g(-t) = (1+t) \cdot (1+t) = 1 + t + t + t^2 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$

3. Sea $f(x) = |x-3| + |x-1|$ para todo real x. Calcular:

- $f(0) = |0-3| + |0-1| = 3 + 1 = 4$
- $f(1) = |1-3| + |1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3| + |2-1| = -1 + 1 = 2$
- $f(3) = |3-3| + |3-1| = 2$
- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4 + 2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5 + 3 = 8$

Determinar todos los valores de t para los que $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{array}{rcl} |t+2-3| + |t+2-1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t-1| + |t+1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t+1| & = & t-3 \end{array}$$

Por lo tanto $t = 1$

4. Sea $f(x) = x^2$ para todo real x. Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números erales $x,\ y\ t$, etc., para los que la fórmula dada es válida.

(a) $f(-x) = f(x)$

Demostración.- Se tiene $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $f(y) - f(x) = (y-x)(y+x)$

Demostración.- $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (x-y)(x+y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

(c) $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.- $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.- $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$

(e) $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.- $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

(f) $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.- $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

5. Sea $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de $x,\ y, s$ y t son válidas.

(a) $g(-x) = g(x)$

Se tiene $g(-x) = \sqrt{2-(-x)^2} = \sqrt{2-(x)^2} = g(x),\quad para\ |x| \leq 2$

(b) $g(2y) = 2\sqrt{1-y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4-(2y)^2} = \sqrt{4(1-y^2)} = 2\sqrt{1-y^2},\quad para\ |y| \leq 1$ Se obtiene $|y| \leq 1$ de $\sqrt{1-y^2}$ es decir $1 - y^2 \geq 0$ entonces $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$ y $|y| \leq 1$

(c) $g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$

$g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \sqrt{4 - \left(\dfrac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4t^2-1}{t^2}} = \dfrac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|},\quad para\ |t| \geq \dfrac{1}{2}$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar $\sqrt{4t^2-1}$. Es decir

$$4t^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow 4t^2 \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq \frac{1}{2^2} \Rightarrow |t| \geq \frac{1}{2}$$

(d) $g(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$

$g(a-2) = \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(a-2)^2} = \sqrt{4a-a^2},\quad para\ 0 \leq a \leq 4$. Basta probar $4a - a^2 \geq 0$

(e) $g\left(\dfrac{s}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$

$s\left(\dfrac{s}{2}\right) = \sqrt{4-\left(\dfrac{s}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{16-s^2}}{2}$, *para* $|s| \leq 4$. ya que solo basta comprobar que $\sqrt{16-s^2} \geq 0$

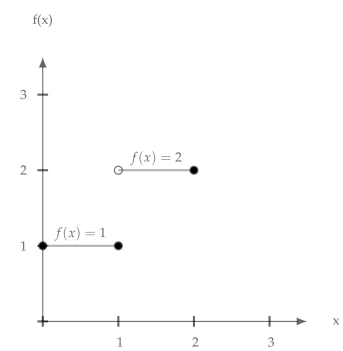
(f) $\dfrac{1}{2+g(x)} = \dfrac{2-g(x)}{x^2}$

$\dfrac{1}{2+g(x)} = \dfrac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2-g(x)}{x^2}$ *para* $|x| \leq 2$ *y* $x \neq 0$

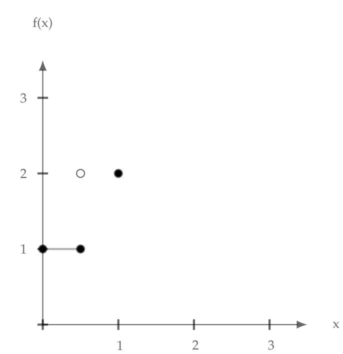
Evaluemos $\sqrt{4-x^2}$. Sea $4-x^2 \geq 0$ entonce $\sqrt{x^2} \leq 2$. Por otro lado tenemos que la función no puede ser 0 por $\dfrac{1}{x^2}$, por lo tanto debe ser $x^2 \neq 0$.

6. Sea f la función definida como sigue: $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ para $1 < x \leq 2$. La función no está definida si $x < 0$ ó si $x > 2$.

(a) Trazar la gráfica de f

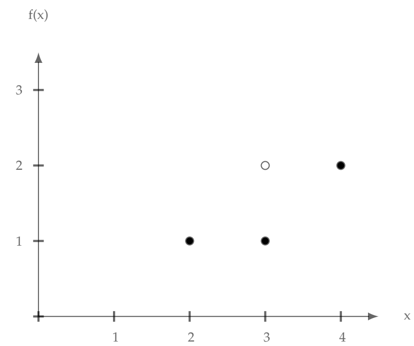


(b) Poner $g(x) = f(2x)$. Describir el dominio de g y dibujar su gráfica.



Debido a que $1 \leq 2x \leq 1$ y $1 < 2x \leq 2$ el dominio de $g(x)$ es $0 \leq x \leq 1$

(c) Poner $h(x) = f(x-2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

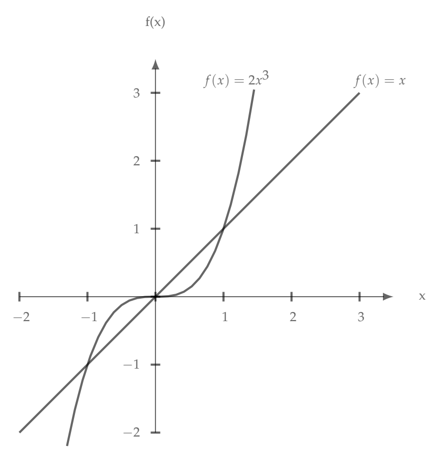


Debido a que $1 \leq x-2 \leq 1$ y $1 < x-2 \leq 2$ el dominio de $h(x)$ es $2 \leq x \leq 4$

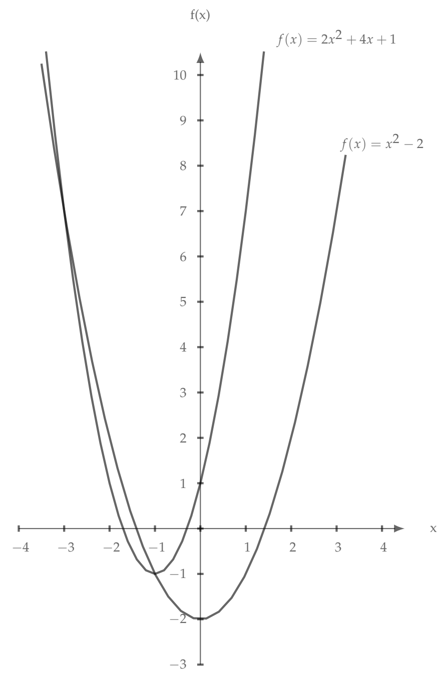
(d) Poner $k(x) = f(2x) + f(x-2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

El dominio está vacío ya $f(2x)$ que solo está definido para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x-2)$ solo está definido para $2 \leq x \leq 4$. Por lo tanto no hay ninguno x que satisfaga ambas condiciones.

7. Las gráficas de los dos polinomios $g(x) = x$ y $f(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.



8. Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.



9. Este ejercicio desarrolla ciertas propiedades fundamentales de los polinomios. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio de grado n. Demostrar cada uno de los siguientes apartados:

(a) Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, $f(x) = xg(x)$, siendo g un polinomio de grado $n-1$.

Para entender lo que nos quiere decir Apostol pongamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un polinomio donde $f(x) = 2x^2 + 3x - x$ entonces notamos que $f(x) = x(2x+3-1)$ donde $g(x) = 2x + 3 - 1$, esto quiere decir que si $0 = f(0) = c_0 \Rightarrow c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n = x(c_1 + c_2 x + ... + c_n x^{n-1})$ Así que debemos demostrar que $f(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $n \geq 1$ tal que $f(0) = 0$, entonces debe haber un polinomio de grado $n-1$, $g(x)$, tal que $f(x) = xg(x)$

Demostración.- Sabemos que

$$f(0) = c_n \cdot 0^n + c_{n-1} \cdot 0^{n-1} + ... + c_1 \cdot 0 + c_0 = c_0,$$

como $f(0) = 0$ se concluye que $c_0 = 0$. Así tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k.$$

Ahora crearemos una función $g(x)$. Dada la función $f(x)$ como la anterior, definamos,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

Ahora crearé una función $g(x)$. Dada una función $f(x)$ como la anterior, definamos

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

donde c_k son los mismos que los dados por la función $f(x)$. Primero notemos que el grado de $g(x)$ es $n-1$. Finalmente, tenemos que

$$xg(x) = x \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k = f(x).$$

(b) Para cada real a, la función p dada por $p(x) = f(x+a)$ es un polinomio de grado n.

Demostración.- Usando el teorema del binomio,

$$\begin{array}{rcl}
f(x+a) & = & \sum\limits_{k=0}^{n}(x+a)^k c_k \\
& = & c_o + (x+a)c_1 + (x+a)^2 c_2 + ... + (x+a)^n c_n \\
& = & c_o + c_1\left(\sum\limits_{j=0}^{1}\binom{1}{j}a^j x^{1-j}\right) + c_2\left(\sum\limits_{j=0}^{2}\binom{2}{j}a^j x^{2-j}\right) + ... + c_n\left(\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j x^{n-j}\right) \\
& = & (c_o + ac_1 + a^2c_2 + ... + a^n c_n) + x(c_1 + 2ac_2 + ... + na^{n-1}c_n) \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n}\left(x^k\left(\sum\limits_{j=k}\binom{j}{j-k}c_j aj - k\right)\right)
\end{array}$$

En la linea final reescribimos los coeficientes como sumas para verlos de manera más concisa. De cualquier manera, dado que todos los c_i son constantes, tenemos $\sum\limits_{j=k}^{n}\binom{j}{j-k}c_j a^{j-k}$ es alguna constante para cada k, de d_k y tenemos,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k x^k$$

(c) Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para un cierto valor real a, entonces $f(x) = (x-a)\,h(x)$, siendo h un polinomio de grado $n-1$. (considérese $p(x) = f(x+a)$.)

Demostración.- Por la parte b) se sabe que $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $p(x) = f(x+a)$ también es un polinomio del mismo grado. Ahora si $f(a) = 0$ entonces por hipótesis $p(0) = f(a) = 0$. Luego por la parte a), tenemos

$$p(x) = x \cdot g(x)$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. Así,

$$p(x-a) = f(x) = f(x) = (x-a) \cdot g(x-a)$$

ya que $p(x) = f(x+a)$. Pero, si $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, entonces por la parte b) nuevamente, también lo es $h(x) = g(x+(-a)) = g(x-a)$. Por lo tanto,

$$f(x) = (x-a) \cdot h(x)$$

para h un grado $n-1$ polinomial, según lo solicitado.

(d) Si $f(x) = 0$ para $n+1$ valores reales de x distintos, todos los coeficientes c_k son cero y $f(x) = 0$ para todo real de x

Demostración.- La prueba se realizara por inducción. Sea $n = 1$, entonces $f(x) = c_o + c_1 x$.

Dado que la hipótesis es que existen $n+1$ distintos x de tal manera que $f(x)=0$, sabemos que existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(a_1)=f(a_2)=0, \quad a_1 \neq a_2,$$
Así,
$$\begin{array}{rclcrcll} c_0+c_1a_1 & = & 0 & \Rightarrow & c_1a_1-c_1a_2 & = & 0 & \\ & & & \Rightarrow & c_1(a_1-a_2) & = & 0 & \\ & & & \Rightarrow & c_1 & = & 0 & \text{ya que } a_1 \neq a_2 \\ & & & \Rightarrow & c_0 & = & 0 & \text{ya que } c_0+c_1a_1=0 \end{array}$$
Por lo tanto, la afirmación es verdadera. Suponga que es cierto para algunos $n=k \in \mathbb{Z}^+$. Luego Sea $f(x)$ un polinomio de grado $k+1$ con $k+2$ distintos de 0, $a_1,...,a_{k+2}$. ya que $f(a_{k+2})=0$, usando la parte c), tenemos,
$$f(x)=(x-a_{k+2})h(x)$$
donde $h(x)$ es un polinomio de grado k. Sabemos que hay $k+1$ valores distintos $a_1,...a_{k+1}$ tal que $h(a_i)=0$. Dado que $f(a_i)=0$ para $1<i<k+2y$ y $(x-a_{k+2}) \neq 0$ para $x=a_i$ con $1<i<k+1$ ya que todos los a_1 son distintos), por lo tanto, según la hipótesis de inducción, cada coeficiente de h es 0 y $h(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así,
$$\begin{array}{rclcl} f(x) & = & (x-a_{k+2})h(x) & = & (x-a_{k+2}) \cdot \sum\limits_{j=0}^{k} c_jx^j \\ & & & = & \sum\limits_{j=0}^{k}(x-a_{k+2})c_jx^j \\ & & & = & c_kx^{k+1}+(c_{k-1}-a_k+2c_k)x^k+...+(c_1-a_{k+2}c_0)x+a_{k+2}c_0 \end{array}$$
Pero dado que todos los coeficientes de $h(x)$ son cero y $f(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la afirmación es verdadera para el caso $k+1$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

(e) Sea $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{m} b_kx^k$ un polinomio de grado m, siendo $m \geq n$. Si $g(x)=f(x)$, para $m+1$ valores reales de x distintos, entonces $m=n$, $b_k=c_k$ para cada valor de k, y $g(x)=f(x)$ para todo real x

Demostración.- Sea
$$p(x)=g(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{m} b_kx^k-\sum_{k=0}^{n} c_kx^k=\sum_{k=0}^{m}(b_k-c_k)x^k$$
donde $c_k=0$ para $n<k \leq m$, cabe recordar que tenemos $m \geq n$.
Entonces, hay $m+1$ distintos reales x para los cuales $p(x)=0$. Dado que hay $m+1$ valores reales distintos para lo cuál $g(x)=f(x)$, así en cada uno de estos valores $p(x)=g(x)-f(x)=0$. Por lo tanto, por la parte d), $b_k-c_k=0$ para $k=0,...,m$ y $p(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir
$$b_k-c_k=0 \quad \Rightarrow \quad b_k=c_k \quad para\ k=0,...,m$$
y
$$p(x)=0 \quad \Rightarrow \quad g(x)-f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=g(x),$$
para todo $x \in \mathbb{R}$. Ademas desde $b_k-c_k=0$ para $k=0,...,m$ y por supuesto $c_k=0$ para $k=n+1,...,m$, tenemos $b_k=0$ para $k=n+1,...,m$. Pero entonces,
$$g(x)=\sum_{k=0}^{n} b_kx^k+\sum_{k=n+1}^{m} 0 \cdot x^k=\sum_{k=0}^{n} b^kx^k$$
significa que $g(x)$ es un polinomio de grado n también.

10. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que satisfacen las condiciones dadas.

Sabemos que para un polinomio de grado ≤ 2 es:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $p(x) = p(1-x)$

Sea $f(x) = p(x) - 1$, entonces f es de grado como máximo 2 por la parte $d)$ del problema 9 tenemos que todos los coeficientes de f son 0 y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así,

$$p(x) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) $p(x) = p(1+x)$

Tenemos $p(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ luego, $p(1) = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ y finalmente, con $c = 1$ y $b = -a$, tenemos: $p(2) = 2 \Rightarrow 4a - 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. por lo tanto

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x(x-1) + 1$$

(c) $p(x) = p(0) = p(1) = 1$

Una vez mas, desde $p(0) = 1$ tenemos: $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ así, $p(x) = ax^2 - ax + 1 = ax(x-1) + 1$

(d) $p(0) = p(1)$

Simplemente sustituyendo estos valores que tenemos, $p(0) = p(1) \Rightarrow c = a + b + c \Rightarrow b = -a$ entonces,

$$p(x) = ax^2 - ax + c = ax(x-1) + c$$

11. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que para todo real x satisfacen las condiciones que se dan. Como p es un polinomio de grado por lo mucho 2, podemos escribir

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad para\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

(a) $p(x) = p(1-x)$

Sustituyendo se tiene $p(x) = p(1-x) = ax^2 + bx + c = a(1-x)^2 + b(1-x) + c \Rightarrow a - 2ax + ax^2 + b - bx + c$ por lo tanto

$$ax^2 + (-2a - b)x + (a + b + c)$$

Así para $a = a$, $b = -2a - b \Rightarrow a = -b$, $c = a + b + c$ entonces

$$p(x) = -bx^2 + bx + c = bx(1 - x) + c$$

(b) $p(x) = p(x) = p(1 + x)$

Una vez más sustituyendo, $p(x) = p(1 + x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(1 + x)^2 + b(1 + x) + c = ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c)$. Luego, igualando como potencias de x, $a = a$, $b = 2a + b \Rightarrow a = 0$, $c = a + b + c \Rightarrow b = 0$. Por lo tanto $p(x) = c$ donde c es una constante arbitraria.

(c) $p(2x) = 2p(x)$

Sustituyendo, $p(2x) = 2p(x) \Rightarrow 4ax^2 + 2bx + c = 2ax^2 + 2bx + 2c.$. Igualando a las potencias de x, $4a = 2a \Rightarrow a = 0$, $2b = 2b \Rightarrow b$ *arbitrario*, $c = 2c \Rightarrow c = 0$.
Así

$$p(x)bx, \ b \ arbitrario$$

(d) $p(2x) = p(x + 3)$

Sustituyendo $p(3x) = p(x + 3) \Rightarrow 9ax^2 + 3bx + c = ax^2 + (6a + b)x + (9a + 3b + c)$. Igualando como potencias de x, $9a = a \Rightarrow a = 0$, $3b = 6a + b \Rightarrow b = 0$, $c = 9a + 3b + c = c \Rightarrow c$ *arbitrario*. Por lo tanto

$$p(x) = c \text{para c constante arbitrario.}$$

Corolario 1.1 Probar que:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad parax \neq 1$$

Demostración.- Usando propiedades de suma,

$$(1 - x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = -\sum_{k=0}^{n}(x^{k+1} - x^k) = -(x^{n+1} - 1 = 1 - xn + 1)$$

En la penultima igualdad se deriva de la propiedad telescópica, por lo tanto nos queda,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

■

Corolario 1.2 Probar la identidad

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^{k-1}}\right)=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}, \quad para\ x\neq 1$$

Demostración.- Para $n=1$ a la izquierda tenemos,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^{k-1}}\right)=\prod_{k=0}^{1}\left(1+x^{2^{k-1}}=1+x^{2^0}=1+x\right)$$

Por otro lado a la derecha se tiene,

$$\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=\frac{1-x^2}{1-x}=\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}=1+x$$

Concluimos que la identidad se mantiene para $n=1$. Ahora supongamos que es válido para algunos $n=m\in\mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{m+1} &= \left(+x^{2^m}\right)\cdot\prod_{k=1}^{m}\left(1+x^{2^{k+1}}\right)\\ &= \left(1+x^{2^m}\right)\cdot\left(\frac{1-x^{2^m}}{1-x}\right)\\ &= \frac{(1+x^{2^m})(1-x^{2^m})}{1-x}\\ &= \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera para $m+1$, y así para todo $n\in\mathbb{Z}^+$

■

12. Demostrar que las expresiones siguientes son polinomios poniéndolas en la forma $\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ para un valor de m conveniente. En cada caso n es entero positivo.

(a) $(1+x)^{2n}$

Demostración.- Usando el teorema binomial $(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2} n\binom{2n}{k}x^k$, sea $m=2n$ entonces $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{n}x^k$, por lo tanto $\sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ si $c_k=\binom{m}{k}$ para cada k.

(b) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x\neq 1$

Demostración.- Por el corolario anterior

$$\begin{aligned} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= \frac{(1-x)(1+x+...+x^n)}{1-x} \\ &= 1+x+...+x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} 1\cdot x^k \end{aligned}$$

(c) $\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k})$

Demostración.- Por le corolario anterior,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})}{1-x} \\ &= \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \left(\frac{1-x^{2^n}}{1-x}\right)(1+x^{2^n}) \\ &= (1+x+...+x^{2^n+1})(1+x^{2^n}) \\ &= (1+x+...+x^{2^n+1})(x^{2^n}+x^{2^n+1}+...+x^{2^{n+1}-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} 1\cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} 1\cdot x^k \text{ si } m = 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$

Axioma .11 **Definición axiomática de área.** Supongamos que existe una clase M de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto a, cuyo dominio es M, con las propiedades siguientes:

1. **Propiedad de no negatividad**. Para cada conjunto S de M, se tiene $a(S) \geq 0$

2. **Propiedad aditiva**. Si S y T pertenecen a M, también pertenecen a M, $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene
$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$$

3. **Propiedad de la diferencia**. Si S y T pertenecen a M siendo $S \subseteq T$ entonces $T - S$ está en M, y se tiene $a(T - S) = a(T) - a(S)$

4. **Invariancia por congruencia**. Si un conjunto S pertenece a M y T es congruente a S, también T pertenece a M y tenemos $a(S) = a(T)$

5. **Elección de escala** Todo rectángulo R pertenece a M. Si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces $a(R) = hk$

6. **Propiedad de exhaución**. Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T de modo que
$$S \subseteq Q \subseteq T.$$
Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades
$$a(S) \leq c \leq a(T)$$
para todas la regiones escalonadas S y T que satisfacen $S \subseteq Q \subseteq T$, entonces Q es medible y $a(Q) = c$

1.7 Ejercicios

1. Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es medible y tiene área nula:

   (a) Un conjunto que consta de un solo punto.

   Demostración.- Un sólo punto se puede medir con un área 0, ya que un punto es un rectángulo con $h = k = 0$

   (b) El conjunto de un número finito de puntos.

   Demostración.- Demostraremos por inducción en n, el número de puntos. Para el caso de $n = 1$ ya quedo demostrado en el anterior inciso. Supongamos que es cierto para algunos $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Entonces, tenemos un conjunto $S \in M$ de k puntos en el plano y $a(S) = 0$. Sea T un punto en el plano. Por (a) $T \in M$ y $a(T) = 0$, por tanto por la propiedad aditiva,
$$S \cup T \in M \;\; y \;\; a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$
   pero $S \cap T \subseteq S$, entonces
$$a(S \cap T) \leq a(S) \Rightarrow a(S \cap T) \leq 0 \Rightarrow a(S \cap T) = 0.$$

   El axioma 1 nos garantiza que $a(S \cap T)$ no puede ser negativo. Por lo tanto, $a(S \uplus T) = 0$, Por tanto, el enunciado es verdadero para $k + 1$ puntos en un plano y, por tanto, para todo $n \in Z_{>0}$

(c) La reunión de una colección finita de segmentos de recta en un plano.

Demostración.- Por inducción, sea n el número de segmentos en un plano. Para $n = 1$, dejamos S ser un conjunto con una línea en un plano. Dado que una línea es un rectángulo y todos los rectángulos son medibles, tenemos $S \in M$ ademas, $a(S) = 0$ ya que una línea es un rectángulo con $h = 0$ ó $k = 0$, y así en cualquier caso $hk = 0$. Por lo tanto, el enunciado es verdadero para una sola línea en el plano, el caso $n = 1$.
Asuma entonces que es cierto para $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Sea S un conjunto de rectas en el plano. Luego, por la hipótesis de inducción, $S \in M$ y $a(S) = 0$. Sea T una sola línea en el plano. Por el caso $n = 1$ en $T \in M$ y $a(T) = 0$. Por lo tanto $S \cup T \in M$ y $a(S \cup T) = 0$ (ya que $a(S) = a(T)a(S \cap T) = 0$). Por tanto, la afirmación es verdadera para $k + 1$ líneas en un plano, y así para todos $n \in \mathbf{Z}^+$

2. Toda región en forma de triángulo rectángulo es medible pues puede obtenerse como intersección de dos rectángulos. Demostrar que toda región triangular es medible y que su área es la mitad del producto de su base por su altura.

Demostración.- Dado que cada triángulo rectángulo es medible, por el axioma 2 del área su unión es medible, denotando los dos triángulos rectángulos A y B, y la región triangular T, tenemos

$$a(T) = a(A) + a(B)$$

ya que A y B son disjuntos $a(A \cap B) = 0$.
Dejando que la altitud de la región triangular se denote por h, y su base por b, tendremos,

$$a(A) = \frac{1}{2}(hb_1) \quad a(B) = \frac{1}{2}hb_2 \quad con \quad b_1 + b_2 = b,$$

entonces

$$a(T) = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2 = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}hb$$

3. Demostrar que todo trapezoide y todo paralelogramo es medible y deducir las fórmulas usuales para calcular su área.

Demostración.- Todo trapecio es medible ya que, la unión de un rectángulo y dos triángulos rectángulos (disjuntos por pares y cada uno de los cuales es medible ppor los axiomas y el ejercicio anterior.)
Luego su área es la suma de las áreas de los triángulos rectángulos y el rectángulo (dado que están separados por pares, su intersección tiene un área cero). Para calcular esta área, especificamos las longitudes de los dos lados desiguales del trapezoide para que sean b_1 y b_2. La altura está indicada por a. Entonces, el área del rectángulo es de 1. El área de los triángulos es $\frac{1}{2}a \cdot b_3$ y $\frac{1}{2}a \cdot b_4$ dónde $b_1 + b_3 + b_4 = b_2$. Entonces, denotando el trapezoide por T, tenemos

$$a(T) = ab_1 + \frac{1}{2}ab_3 + \frac{1}{2}ab_4 = \frac{1}{2}ab_1 + \frac{1}{2}a(b_1 + b_3 + b_3) = \frac{1}{2}a(b_1 + b_2)$$

A continuación, un paralelogramo es solo un caso especial de un trapezoide, en el que $b_1 = b_2$; por lo tanto, por la fórmula anterior, y denotando el paralelogramo por P,

$$a(P) = \frac{1}{2}a(2b) = ab$$

4. Un punto (x, y) en el plano se dice que es un punto de una red, si ambas coordenadas x e y son enteras. Sea P un polígono cuyos vértices son puntos de una red. El área de P es $I + \frac{1}{2}B - 1$ donde I es el número de puntos de la red interiores a P, y B el de los de la frontera.

(a) Probar que esta fórmula es correcta para rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados.

Demostración.- Sea R un $h \times k$ rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas. Entonces, R es medible (ya que es un rectángulo) y $a(R) = hk$. A continuación, dado que los vértices están en puntos de celosía, $B = 2(h+1) + 2(k+1) - 4$ y $I = (h-1)(k-1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2}B - 1 &= (h-1)(k-1) + \frac{1}{2}\left[2(h+1) + 2(k+1) - 4\right] - 1 \\ &= hk - h - k + 1 + h + 1 + k + 1 - 2 - 1 \\ &= hk \end{aligned}$$

(b) Probar que la fórmula es correcta para triángulos rectángulos y paralelogramos.

Demostración.- Sabemos que cualquier triángulo rectángulo puede encerrarse en un rectángulo con bordes cuyas longitudes sean iguales a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo. Además, este rectángulo está compuesto por dos triángulos rectángulos congruentes unidos a lo largo de su diagonal. Cada uno de estos triángulos rectángulos tiene un área la mitad de la del rectángulo y se cruzan a lo largo de la diagonal (que tiene un área cero (1.7, problema 1) ya que es una línea en el plano). Dado un triángulo rectángulo T, R sea tal rectángulo, y S sea el triángulo rectángulo que forma la otra mitad de R, entonces $S \cup T = R$.
Dado que R es un rectángulo, sabemos por la parte (a) que

$$a(R) = I_R + \frac{1}{2}B_R - 1.$$

Además, cualquier punto interior R será un punto interior de cualquiera S o T, o se acuesta sobre su frontera compartida. Por lo tanto,

$$I_R = I_S + I_T + H_P$$

donde H_P denota los puntos en la hipotenusa (compartida) de los dos triángulos rectángulos. Entonces, también tenemos para los puntos límite,

$$B_R = B_S + B_T - 2 - 2H_P.$$

Finalmente, dado que S y T son congruentes, conocemos $B_S = B_T$ y $I_S = I_T$. Entonces, poniendo todo esto junto, tenemos,

$$\begin{aligned} a(R) &= I_R + \frac{1}{2}B_R - 1 \\ &= 2I_S + H_P + \frac{1}{2}(2B_S - 2 - 2H_P) - 1 \\ &= 2(I_S + \frac{1}{2}B_S - 1) \end{aligned}$$

ó,

$$I_S + \frac{1}{2}B_S - 1 = \frac{1}{2}a(R).$$

Pero, sabemos que $\frac{1}{2}a(R) = a(S)$; por lo tanto,

$$a(S) = I_S + \frac{1}{2}B_S - 1.$$

Esto prueba el resultado para triángulos rectángulos con vértices en puntos de una red.

(c) Emplear la inducción sobre el número de lados para construir una demostración para polígonos en general.

Respuesta.- Ya tenemos esto de la parte (b) ya que podemos realizar cualquier polígono simple como la unión de un número finito de triángulos rectángulos (es decir, cada polígono simple es triangularizable)

5. Demostrar que un triángulo cuyos vértices son puntos de una red no puede ser equilátero.

Demostración.- Supongamos que existe tal triángulo equilátero T. Entonces,

$$T = A\ cupB$$

Para dos triángulos rectángulos congruentes y disjuntos A, B. Dado que los vértices de T están en puntos de una red, sabemos que la altitud desde el vértice hasta la base debe pasar por h puntos de red (donde h es la altura de T). Por lo tanto, al denotar los puntos de red en esta altitud por $V_B = h+1$, tenemos

$$B_T = B_A + B_B - V_B + 2, \qquad I_T = I_A + I_B + V_B - 2.$$

Dado que T es un polígono con vértices de puntos de red, sabemos por el ejercicio anterior que $a(T) = I_T + \frac{1}{2}B_T - 1$. Además, por el problema 2, sabemos que $a(T) = \frac{1}{2}bh$. Así que,

$$\begin{array}{rrcll}
& I_T + \frac{1}{frm-e}B_T - 1 & = & (I_A + I_B + V_B - 2) + \frac{1}{2}(B_A + B_B - V_B + 2) & \\
\Rightarrow & I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 & = & 2I_A + B_A - 2 + \frac{1}{2}V_B & (B_A = B_B,\ I_A = I_B) \\
\Rightarrow & I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 & = & 2I_A + B_A - 2 + \frac{1}{2}(h+1) & (V_B = h+1) \\
\Rightarrow & I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 & = & 2(a(A)) + \frac{1}{2}(h+1) &
\end{array}$$

Pero, $\frac{1}{2}a(T) = a(A) = a(B)$ así,

$$I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 = a(T) + \frac{1}{2}(h+1) \qquad \Rightarrow \qquad a(T) = a(T) + \frac{1}{2}(h+1)$$

Pero, $h > 0$ entonces esto es una contradicción. Por lo tanto,T no puede tener sus vértices en puntos de red y ser equilátero.

6. Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$ y M la clase de todos los subconjuntos de A. (Son en número de 32 contando el mismo A y el conjunto vacio $\emptyset$.) Para cada conjunto S de M, representemos con $n(S)$ el número de elemento distintos de S. Si $S = \{1,2,3,4\}$ y $T = \{3,4,5\}$, calcular $n(S \cup T)$, $n(S \cup T)$, $n(S - T)$ y $n(T_S)$. Demostrar que la función de conjunto n satisface los tres primeros axiomas del área.

Demostración.- Calculemos,

$$\begin{array}{rcrcl} n(S \cup T) & = & n(\{1,2,3,4,5\}) & = & 5 \\ n(S \cap T) & = & n(\{3,4\}) & = & 2 \\ & = & n(\{1,2\}) & = & 2 \\ & = & n(\{5\}) & = & 1 \end{array}$$

Ahora demostremos que esto satisface los primeros tres axiomas de área.
Axioma 1. (Propiedad no negativa) Esto se satisface para cualquier conjunto, S ya que el número de elementos distintos en un conjunto no es negativo. Entonces, $n(S) \geq 0$ para todos S.
Axioma 2. (Propiedad aditiva) Primero, si $S, T \in\ mathcal M$, luego $S \subseteq A$, $T \subseteq A$ por definición de $\mathcal{M}$. Entonces, para cualquiera $x \in S$ que tengamos $x \in A$ y para cualquiera $y \in T$, tenemos $y \in A$.
Así, si $x \in S \cup T$, entonces $x \in A$; por lo tanto $S \cup T \subseteq A$, entonces $S \cup T \in \mathcal{M}$.
Entonces, $S \cap T \subseteq S$ implica $S \cap T \subseteq A$ (desde $S \subseteq A$). Por lo tanto, $S \cap T \in \mathcal{M}$.
Entonces, para cualquiera $S, T \in \mathcal{M}$ que tengamos $S \cup T \in \mathcal{M}$, $S \cap T \in \mathcal{M}$.
Luego, debemos mostrar $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$. Para cualquier $x \in S \cup T$ tenemos $x \in S$, $x \in T$, ó $x \in S$ y T. Entonces, esto significa $x \in (S - T)$, ó $x \in (T - S)$ ó $x \in (S \cap T)$. Por lo tanto,

$$n(S \cup T) = n(S - T) + n(T - S) + n(S \cap T)$$

Del mismo modo observamos,

$$\begin{array}{rcl} n(S) = (S - T) + n(S \cap T) & \Rightarrow & n(S - T) = n(S) - s(S \cap T) \\ n(T) = n(T - S) + n(T \cap S) & \Rightarrow & n(T - S) = n(T) - n(S \cap T) \end{array}$$

Así que,

$$\begin{array}{rcl} n(S \cup T) & = & n(S) - n(S \cap T) + n(T) - n(S \cap T) + n(S \cap T) \\ & = & n(S) + n(T) - n(S \cap T) \end{array}$$

Axioma 3 (Propiedades de la diferencia). Si $S, T \in \mathcal{M}$ y $S \subseteq T$, entonces desde arriba tenemos

$$n(T - S) = n(T) - n(T \cap S)$$

Pero porque $S \subseteq T$ sabemos $T \cap S = S$, entonces,

$$n(T - S) = n(T) - n(S)$$

1.8 Intervalos y conjuntos ordenados

Definición 1.5 **Intervalo cerrado.** Si $a < b$, se indica por $[a, b]$ el conjunto de todos los x que satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq b$.

Definición 1.6 **Intervalo abierto.** El intervalo abierto correspondiente, indicado por (a, b) es el conjunto de todos los x que satisfacen $a < x < b$

El intervalo abierto (a, b) se denomina también el interior de $[a, b]$

Definición 1.7 **Intervalo semiabiertos.** Los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ que incluyen sólo un extremo están definidos por las desigualdades $a < x \leq b$ y $a \leq x < b$, respectivamente.

1.9 Particiones y funciones escalonadas

Definición 1.8 Un conjunto de puntos que satisfaga

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$$

se denomina una partición P de $[a, b]$, y se utiliza el símbolo:

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

para designar tal partición, la partición P determina n subinterválos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

Definición 1.9 **Definición de función escalonada.** Una función s cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a, b]$ se dice que es una función escalonada, si existe una partición $P = \{x_o, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ tal que s es constante en cada subintervalo abierto de P. Es decir, para cada $k = 1, 2, ..., n$ existe un número real S_k tal que:

$$s(x) = s_K \qquad si \qquad x_{k-1} < x < x_k$$

A veces las funciones escalonadas se llaman funciones constantes a trozos.

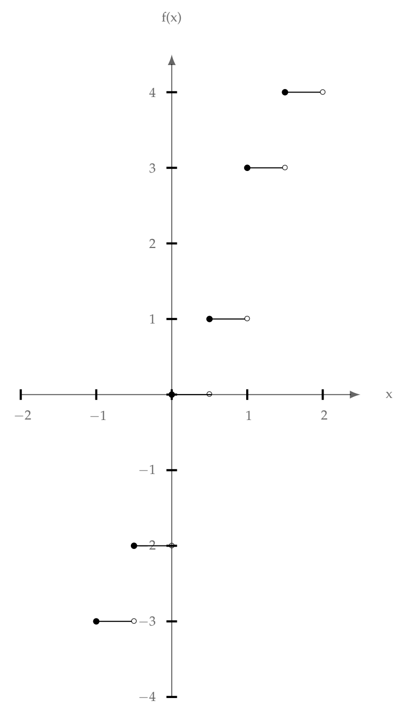
1.11 Ejercicios

En este conjunto de Ejercicios, $[x]$ representa el mayor entero $\leq x_i$ es decir, la parte entera de x.

1. Sean $f(x) = [x]$ y $g(x) = [2x]$ para todo real x. En cada caso, dibujar la gráfica de la función h definida en el intervalo $[-1, 2]$ por la fórmula que se da.

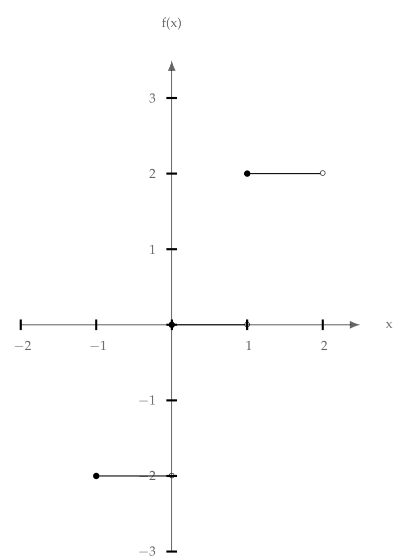
(a) $h(x) = f(x) + g(x)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] + [2x]$



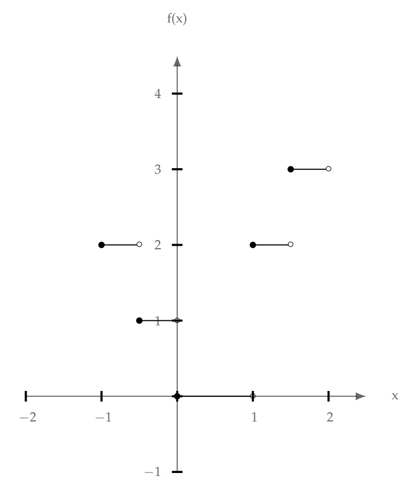
(b) $h(x) = f(x) + g(x/2)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] + [x] = 2[x]$



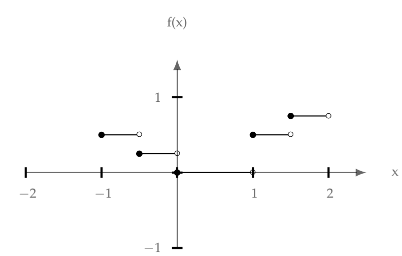
(c) $h(x) = f(x)g(x)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] \cdot [2x]$



(d) $h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g(x/2)$.

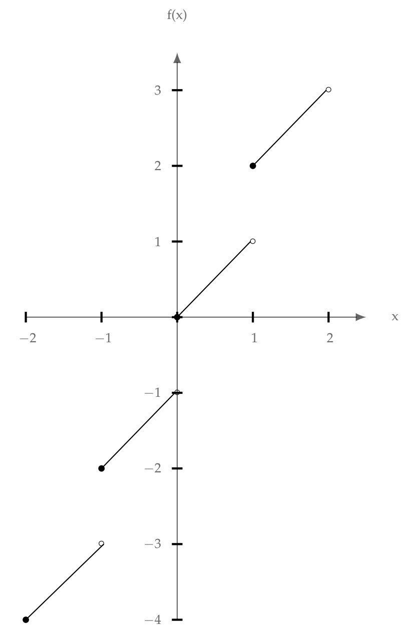
Respuesta.- $\frac{1}{4}[x][2x]$



2. En cada uno de los casos, f representa una función definida en el intervalo $[-2, 2]$ por la fórmula que se indica. Dibújense las gráficas correspondientes a cada una de las funciones f. Si f es una función escalonada, encontrar la partición P de $[-2, 2]$ tal que f es constante en los subintervalos abierto de P.

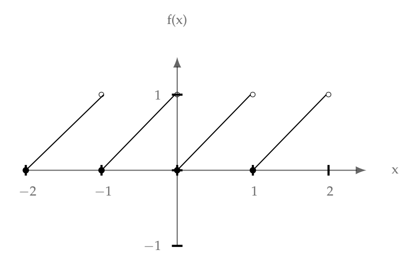
(a) $f(x) = x + [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



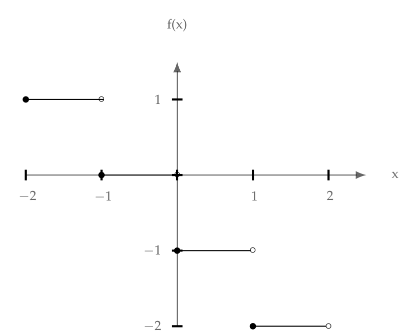
(b) $f(x) = x - [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



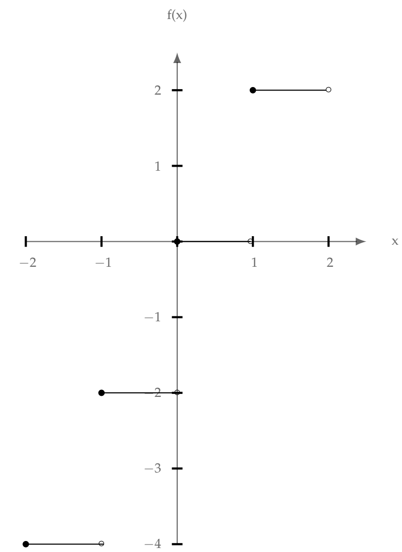
(c) $f(x) = [-x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



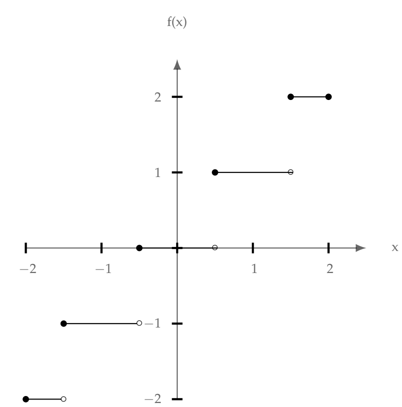
(d) $f(x) = 2[x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



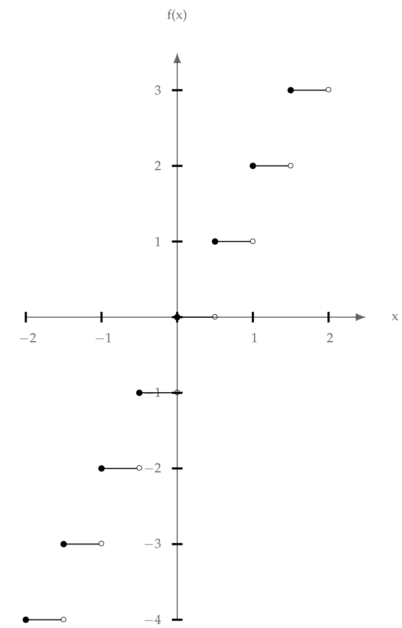
(e) $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 2\}$



(f) $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

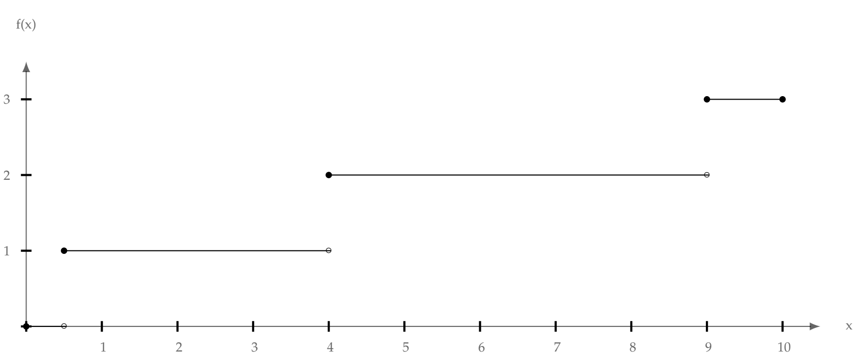
Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de los partición, $P = \{-2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$



3. En cada caso, dibujar la gráfica de la función definida por la fórmula que se da.

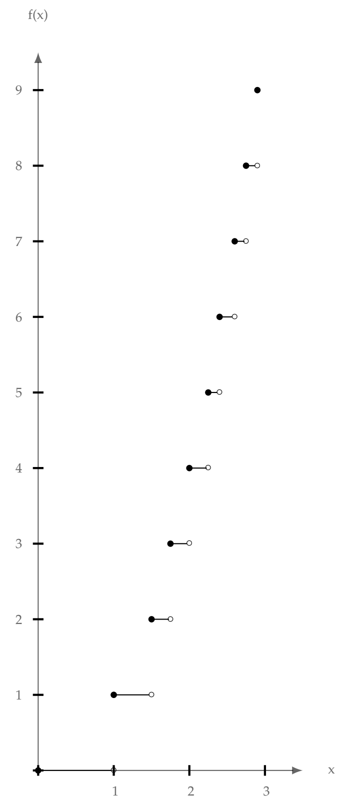
(a) $f(x) = [\sqrt{x}]$ para $0 \leq x \leq 10$

Respuesta.-



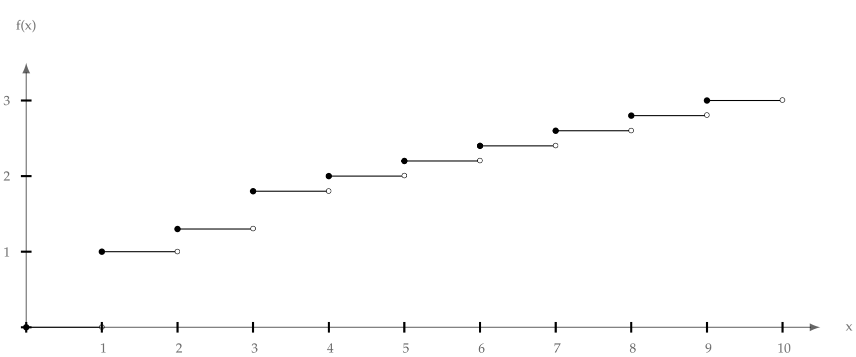
(b) $f(x) = [x^2]$

Respuesta.-



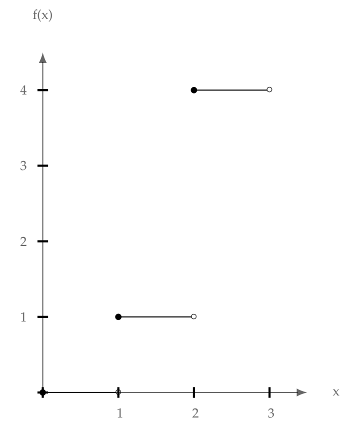
(c) $f(x) = \sqrt{[x]}$ para $0 \leq x \leq 10$.

Respuesta.-



(d) $f(x) = [x]^2$ para $0 \leq x \leq 3$.

Respuesta.-



4. demostrar que la función parte entera tiene las propiedades que se indican:

(a) $[x+n] = [x] + n$ para cada entero n.

Demostración.- Por definición sea $[x+n] = m$ para $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rcl} m \leq x+n < m+1 & \Longrightarrow & m-1 \leq x < m-n+1 \\ & \Longrightarrow & [x] = m-n \\ & \Longrightarrow & [x]+n = m \end{array}$$

(b) $[-x] = \begin{cases} -[x] & \textit{si } x \textit{ es entero} \\ -[x]-1 & \textit{en otro caso} \end{cases}$

Demostración.- Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $x = n$ para algunos $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $[x] = n$, luego

$$-x = -n \Longrightarrow [-x] = -n \Longrightarrow [-x] = -[x]$$

Por otro lado, si $x \neq \mathbb{Z}$, entonces $[x] = n$. Luego

$$n \leq x < n+1 \Longrightarrow -n-1 < -x < n \text{ ya que } n \neq x \Longrightarrow [-x] = -n-1 = -[x]-1$$

(c) $[x+y] = [x] + [y]$ ó $[x] + [y] + 1$

Demostración.- Sea $[x] = m$ y $[y] = n$, luego,

$$m \leq x < m+1 \qquad y \qquad n \leq y < n+1$$

Entonces, sumando obtenemos

$$m+n \leq x+y < m+n+2$$

por lo tanto

$$[x+y] = m+n = [x]+[y] \qquad o \qquad [x+y] = m+n+1 = [x]+[y]+1$$

Esto ya que si $x+y$ está entre $m+n$ y $m+n+1$ entonces $[x+y] = [x]+[y]+1$ y cuando $x+y$ está entre $m+n+1$ y $m+n+2$ entonces $[x+y] = [x]+[y]+1$.

(d) $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}$

Demostración.- Por la parte (c)

$$[2x] = [x + x] = [x] + [x] \qquad\qquad [x] + [x] + 1$$

Para $[2x] = [x] + [x]$, sea $[x] = n$, entonces

$$\begin{aligned} [2x] = 2n \quad &\Longrightarrow \quad 2n \leq 2x \leq 2n + 1 \\ &\Longrightarrow \quad n \leq x < n + \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \quad n \leq x + \frac{1}{2} < n + 1 \\ &\Longrightarrow \quad \left[x + \frac{1}{2}\right] = n \end{aligned}$$

de donde, $[2x] = 2n = n + n = [x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$

Por otro lado, para $[2x] = [x] + [x] + 1$, sea $[x] = n$, entonces:

$$\begin{aligned} [2x] = 2n + 1 \quad &\Longrightarrow \quad 2n + 1 \leq 2n + 2 \\ &\Longrightarrow \quad n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1 \\ &\Longrightarrow \quad n + 1 \leq x + \frac{1}{2} < n + 2 \\ &\Longrightarrow \quad \left[x + \frac{1}{2}\right] \text{= n+1} \end{aligned}$$

de donde $[2x] = n + n + 1 = [x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$

(e) $[3x] = [x] + [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{2}{3}]$

Demostración.- Por la parte (c) tenemos

$$[3x] = [x + x + x] = [x + x] + [x] \quad \text{o} \quad [x + x] + [x] + 1$$

$$\text{y}$$

$$[x + x] = [x] + [x] \quad \text{o} \quad [x] + [x] + 1.$$

de donde al juntarlos obtenemos:

$$[3x] = [x] + [x] + [x] \qquad\qquad [x] + [x] + [x] + 1 \qquad\qquad [x] + [x] + [x] + 2$$

Para $3x = [x] + [x] + [x]$ sea $[x] = n$ entonces

$$\begin{aligned}
3n \le 3x < 3x+1 \quad &\Longrightarrow \quad n \le x < n + \frac{1}{3} \\
&\Longrightarrow \quad n \le x + \frac{1}{3} < n+1 \qquad y \qquad n \le x + \frac{2}{3} < n+1 \\
&\Longrightarrow \quad [x] = \left[x + \frac{1}{3}\right] = \left[x + \frac{2}{3}\right] = n
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[x] = 3n = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$

Luego para $[3x] = [x] + [x] + [x] + 1$ sea $[x] = n$ entonces,

$$\begin{aligned}
3n+1 \le 3x < 3n+1 \quad &\Longrightarrow \quad n + \frac{1}{3} \le x < n + \frac{2}{3} \\
&\Longrightarrow \quad n + \frac{1}{3} \le x + \frac{1}{3} < n+1 \quad \Rightarrow \quad \left[x + \frac{1}{3}\right] = n \\
\text{y} \quad &\Longrightarrow \quad n+1 \le x + \frac{2}{3} < n+2 \quad \Rightarrow \quad \left[x + \frac{2}{3}\ \right] = n+1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $[3x] = 3n+1 \quad \Longrightarrow \quad [3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$

Finalmente, para $[3x] = [x] + [x] + [x] + 2$ sea $[x] = n$ entonces

$$\begin{aligned}
3x+2 \le 3x < 3x+3 \quad &\Longrightarrow \quad n + \frac{2}{3} \le x < n+1 \\
&\Longrightarrow \quad n+1 \le x + \frac{1}{3} < n+2 \qquad y \qquad n+1 \le x + \frac{2}{3} < n+2
\end{aligned}$$

Así que $[3x] = 3n+2 = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$

5. Las fórmulas de los Ejercicios $4(d)$ y $4(c)$ sugieren una generalización para $[nx]$. Establecer y demostrar una generalización.

Demostración.- Se puede afirmar que:

$$[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right],$$

luego sea $[x] = m$, entonces

$$m \le x < m+1 \quad \Longrightarrow \quad nm \le nx < nm+n$$

Por lo tanto existen algunos $j \in \mathbf{Z}$ con $0 \le j < n$ tales que

$$nm + j \le nx < nm + j + 1$$

ya que sabemos que para cualquier número nx está entre k y $k+1$ para un entero. Pero como $nm \le nx$ es un número entero k donde está en algún lugar entre nm y nx, lo que significa que es $nm + j$ para

algún número entero j. Entonces tenemos que nx está entre $nm + j$ y $nm + j + 1$: Básicamente, solo decimos que conocemos $k \leq nx < k + 1$ para algún entero k. Pero es mas conveniente escribirlo como $nm + j \leq nx > nm + j + 1$.
Luego, $[nx] = nm + j$. y por lo tanto,

$$m + \frac{j}{n} \leq x < m + \frac{j+1}{n}$$

para cada $k \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq k < n - j$ tenemos

$$\begin{aligned}
& m + \frac{k+k}{n} \leq x + \frac{k}{n} < m + \frac{j+k+1}{n} && \text{sumando } \frac{k}{n} \\
\Longrightarrow\quad & m \leq x + \frac{k}{n} < m + 1 && \frac{j+k}{n} < 1 \text{ ya que } k < n - j \\
\Longrightarrow\quad & \left[x + \frac{k}{n} = m = [x] \right] && \text{para } 0 \leq k < n - j
\end{aligned}$$

por otro lado $n - j \leq k < n$, entonces

$$\begin{aligned}
& m + \frac{k+k}{n} \leq x + \frac{k}{n} < m + \frac{j+k+1}{n} \\
\Longrightarrow\quad & m + 1 \leq x + \frac{k}{n} < m + 2 && \frac{j+k}{n} \geq 1 \text{ ya que } n - j \leq k \\
\Longrightarrow\quad & \left[x + \frac{k}{n} = m + 1 = [x] + 1 \right] && \text{para } n - j \leq k < n
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] &= \sum_{k=0}^{n-j-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] + \sum_{k=n-j}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] \\
&= (n-j)[x] + j([x] + 1) \\
&= n[x] + j \\
&= nm + j \\
&= [nx]
\end{aligned}$$

6. Recuérdese que un punto de red (x, y) en el plano es aquel cuyas coordenadas son enteras. Sea f una función no negativa cuyo dominio es el intervalo $[a, b]$, donde a y b son enteros, $a < b$. Sea S el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq f(x)$. Demostrar que el número de puntos de la red pertenecientes a S es igual a la suma

$$\sum_{n=a}^{b} [f(n)]$$

Demostración.- Sea $n \in \mathbb{Z}$ con $a \leq n < b$: Sabemos que tal n existe desde $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$. Entonces, el número de puntos de red S con el primer elemento n es el número de enteros y tales que

$0 < y \leq f(n)$. Pero, por definición, esto es $[f(n)]$ Sumando todos los números enteros n. $a \leq n \leq b$ tenemos,

$$S = \sum_{n=a}^{b} [f(n)]$$

7. Si a y b son enteros positivos primos entre sí, se tiene la fórmula

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Se supone que para $b = 1$ la suma del primer miembro es 0.

(a) Dedúzcase este resultado analíticamente contando los puntos de la red en un triángulo rectángulo.

Respuesta.- Sabemos por el ejercicio anterior que

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right]$$

(puntos de red de un triángulo rectángulo con base b y altura a). Ademas del ejercicio $1.7n4$ sabemos que

$$a(T) = I_t + \frac{1}{2}B_T - 1$$

donde I_T es el número de puntos de red interior y B_T es el número de puntos de red límite. También sabemos por la fórmula del área de un triángulo rectángulo que

$$a(T) = \frac{1}{2}(ab)$$

por lo tanto tenemos

$$I = \sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right] = \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}B_T + 1$$

Luego para calcular B_T notamos que no hay puntos límite en la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo ya que a y b no tienen un factor común. Esto se deduce ya que si no fuera tal punto a continuación, $\frac{na}{b} \in \mathbb{Z}$ para algunos $n < b$, tendríamos que a divide a b, lo que contradice que no tienen ningún factor común. Por lo tanto $B_T = a + b + 1$, de donde,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right] &= \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}(a+b+1) + 1 \\
&= \frac{1}{2}(ab - a - b + 1) \\
&= \frac{1}{2}(a-1)(b-1)
\end{aligned}$$

(b) Dedúzcase este resultado analíticamente de la manera siguiente. Cambiando el índice de sumación, obsérvese que $\sum_{a=1}^{b-1} [na/b] = \sum_{n=1}^{b-1} [a(b-n)/b]$. Aplíquese luego los ejercicios $4(a)$ y (b) al corchete de la derecha.

Respuesta.- Sea

$$\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right]=\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{a(b-n}{b}\right]$$

entonces,

$$\begin{array}{rcl}\sum\limits_{n=1}^{b-1}\left[\dfrac{a(b-n)}{b}\right] & = & \sum\limits_{n=1}^{b-1}[a]-\sum\limits_{n=1}^{b-1}\left[\dfrac{na}{b}\right]-\sum\limits_{n=1}^{b-1}1\\ \Longrightarrow \quad 2\sum\limits_{n=1}^{b-1}\left[\dfrac{a(b-n}{b}\right] & = & \sum\limits_{n=1}^{b-1}-\sum\limits_{n=1}^{b-1}=(b-1)a-(b-1)\\ \sum\limits_{n=1}^{b-1}\left[\dfrac{na}{b}\right] & = & \dfrac{1}{2}(a-1)(b-1)\end{array}$$

8. Sea S un conjunto de puntos en la recta real. La función característica de S es, por definición, la función $Xs(x)=1$ para todo x de S y $Xs(x)=0$ para aquellos puntos que o pertenecen a S. Sea f una función escalonada que toma el valor constante c_k en el k-simo subintervalo I_k de una cierta partición de un intervalo $[a,b]$. Demostrar que para cada x de la reunión $I_1\cup I_2\cup ...\cup I_n$ se tiene

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_kX_{I_k}(x)$$

Esta propiedad se expresa diciendo que toda función escalonada es una combinación lineal de funciones características del intervalos.

Demostración.- Definimos una función característica, Xs, en un conjunto S de puntos en $\mathbf{R}$ por

$$Xs(x)=\left\{\begin{array}{lll}1 & si & x\in S\\ \\ 0 & si & x\notin S\end{array}\right.$$

Primero, observemos que los subintervalos abiertos de alguna partición de $[a,b]$ son necesariamente disjuntos desde $P=\{x_0,x_1,...,x_n\} \quad \Longrightarrow \quad x_0<x_1<...<x_n$. Por lo tanto si $x\in I_1\cup...\cup I_n$ entonces $x\in I_j$ exactamente por uno $j, 1\leq j\leq n$. Por lo tanto,

$$XIs(x)=\left\{\begin{array}{lll}1 & si & xj=k\\ \\ 0 & si & j\neq k\end{array}\right.$$

para todos $1\leq k\leq n$ y para cualquiera x. Además, por definición de f, sabemos $f(x)=c_k$ si $x\in I_k$,. Así que,

$$\sum_{k=1}^{n}c_kXI_k(x)=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+...+c_k\cdot 1+...+c_n\cdot 0=c_k=f(x)$$

para cada $x\in I_i\cup...\cup I_n$

1.12 Definición de integral para funciones escalonadas

Definición 1.10 **Definición de integral de funciones escalonadas.** La integral de s de a a b, que se designa por el símbolo $\int_a^b s(x)dx$, se define mediante la siguiente fórmula:

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Es decir, para obtener el valor de la integra, se multiplica cada valor s_k constante, por la longitud de intervalo $k - simo$ correspondiente, formando el producto $s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ y se suman luego todos los productos obtenidos.

Definición 1.11 Si x es constante en el intervalo abierto (a, b), es decir, $s(x) = c$ si $a < x < b$, se tiene entonces:

$$\int_a^b s(x)dx = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b - a)$$

1.13 Propiedades de la integral de una función escalonada

Teorema 1.2 **Propiedad aditiva.** $\int_a^b [s(x) + t(x)]dx = \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)dx$

■

Teorema 1.3 **Propiedad Homogénea.** $\int_a^b c \cdot s(x)dx = c\int_a^b s(x)dx$

Demostración.- Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que s es constante en los subintervalos abiertos de P. Sea $s(x) = s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ para $k = 1, 2, ..., n$. Entonces, $c \cdot s(x) = c \cdot s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$, y por tanto en virtud de la definición de integral se tiene

$$\int_a^b c \cdot s(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} c \cdot s_k(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n} s_k(x_k - x_{k-1}) = c \cdot \int_a^b s(x)\ dx$$

■

Teorema 1.4 **Propiedad de la linealidad.** $\int_a^b [c_1x(x) + c_2t(x)]dx = c_1\int_a^b s(x)dx + c_2\int_a^b dx$

■

Teorema 1.5 **Teorema de comparación.** Si $s(x) < t(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces $\int_a^b s(x)dx = \int_a^b t(x)dx$

■

Teorema 1.6 **Aditividad respecto al intervalo de integración.** $\int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx = \int_a^b s(x)dx$ si $a < c < b$

■

Teorema 1.7 **Invariancia frente a una traslación.** $\int_a^b s(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)dx$ para todo real c

■

Teorema 1.8 **Dilatación o contracción del intervalo de integración.** $\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx$ para todo $k > 0$

Es conveniente considerar integrales con el límite inferior mayor que el superior. Esto se logra definiendo:

$$\int_a^b s(x)dx = -\int_a^b s(x)dx \qquad a < b$$

Demostración.- Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ tal que s es constante en los subintervalos abiertos de P. Supóngase que $s(x) = s_i$ si $x_{i-1} < x < x_i$. Sea $t(x) = s(x/k)$ si $ka < x < kb$. Entonces $t(x) = s_i$ si x pertenece al intervalo abierto (kx_{i-1}, kx_i);, por tanto $P' = \{kx_0, kx_1, ..., kx_n\}$ es una partición de $[ka, kb]$ y t es constante en los subintervalos abiertos de $P^{'}$. Por tanto t es una función escalonada cuya integral es:

$$\int_{ka}^{kb} t(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} s_i \cdot (kx_1 - kx_{i-1})k \sum_{k=1}^{n} s_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = k \int_a^b s(x)\ dx$$

Propiedad de reflexión de la integral $\int_a^b s(x)dx = \int_{-b}^{-a} s(-x)dx$

■

1.15 Ejercicios

1. Calcular el valor de cada una de las siguientes integrales. Se pueden aplicar los teoremas dados en la Sección 1.13 siempre que convenga hacerlo. La notación $[x]$ indica la parte entera de x.

(a) $\int_{-1}^{3} [x]dx.$

Respuesta.- Sea $P = \{-1, 0, 1, 2\}$ ya que

$$[x] = \begin{cases} -1 & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & si \quad 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

entonces por definición $\int_{-1}^{3} [x]dx = -1 \cdot [0 - (-1)] + 0 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (2 - 1) + 2(3 - 2) = 2$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left[x+\frac{1}{2}\right]dx$

Respuesta.- La partición viene dada por $P=\{-1,-1/2,1/2,3/2,5/2\}$ ya que

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=\begin{cases} -1 & si \quad -1\leq x+1/2<0 \quad \Longrightarrow \quad -3/2\leq x<-1/2 \\ 0 & si \quad 0\leq x+1/2<1 \quad \Longrightarrow \quad -1/2\leq x<1/2 \\ 1 & si \quad 1\leq x+1/2<2 \quad \Longrightarrow \quad 1/2\leq x<3/2 \\ 2 & si \quad 2\leq x+1/2<3 \quad \Longrightarrow \quad 3/2\leq x<5/2 \\ 3 & si \quad 3\leq x+1/2<4 \quad \Longrightarrow \quad 5/2\leq x<7/2 \end{cases}$$

entonces por definición $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left[x+\frac{1}{2}\right]dx=-1\left(-\frac{1}{2}+1\right)+0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)+$ $\displaystyle 3\left(3-\frac{5}{2}\right)=-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot\frac{1}{2}=4$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{3}([x]+[x+1/2])$

Respuesta.- Por la propiedad aditiva se tiene $\displaystyle\int_{-1}^{3}[x]dx+\int_{-1}^{3}\left[x+\frac{1}{2}\right]dx=2+4=6.$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{3}2[x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad homogénea se tiene $\displaystyle 2\cdot\int_{-1}^{3}[x]dx=2\cdot 2=4$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{3}[2x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad de parte entera donde $[2x]=[x]+[x+frac12]$ y (c) resulta que $\displaystyle\int_{-1}^{3}[2x]dx=6$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^{3}[-x]dx$

Respuesta.- Por propiedad de parte entera se tiene que $[-x]=-[x]-1$ ya que el valor de los subintervalos no es entero, luego

$$\int_{-1}^{3}-[x]-1=\int_{-1}^{3}-[x]+\int_{-1}^{3}=-\int_{-1}^{3}[x]-\int_{-1}^{3}1=-2-\{1\cdot[3-(-1)]\}$$

2. Dar un ejemplo de función escalonada s definida en el intervalo cerrado $[0,5]$, que tenga las siguientes propiedades $\displaystyle\int_{0}^{2}s(x)dx=5$, $\displaystyle\int_{0}^{5}s(x)dx=2$

Respuesta.- Existen infinitas funciones escalonadas que deben cumplir lo siguiente:

$$\int_{2}^{5}s(x)dx=\int_{0}^{5}s(x)dx-\int_{0}^{2}s(x)dx=-3$$

3. Probar que $\displaystyle\int_a^b [x]\ dx + \int_a^b [-x]\ dx = a - b$

Demostración.- Por propiedad de parte entera se tiene que $[-x] = -[x] - 1$ si x no es entero. Entonces $\displaystyle\int_a^b [x]\ \ dx + \int_a^b -[x] - 1\ \ dx$ luego por la propiedad aditiva $\displaystyle\int_a^b -1\ \ dx$, de donde por la propiedad dilatación $\displaystyle\int_b^a 1\ dx$ y por lo tanto $a - b$.

4. (a) Si n es un entero positivo, demostrar que $\displaystyle\int_0^n [t]\ dt = n(n-1)/2$.

Demostración.- Según la definición de la función de número entero mayor, $[t]$ es constante en los subintervalos abiertos, por lo que $[t] = k - 1$ si $k - 1 < t < k$ entonces

$$\int_0^n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)(k-(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)$$

Luego sabemos que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$ por lo tanto $\displaystyle\int_0^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

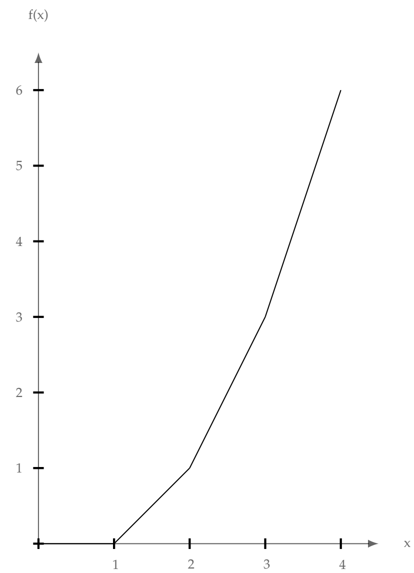
También se podría demostrar de la siguiente manera.

$$\int_0^n [t]\ dt = 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (2-1) + ... + (n-1) \cdot (n-(n-1)) = 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(b) Si $f(x) = \displaystyle\int_0^x [t]\ dt$ para $x \geq 0$, dibujar la gráfica de f sobre el intervalo $[0, 4]$.

Respuesta.- Ya que $x \in \mathbf{R}^+$ la gráfica será continua, pero por motivos prácticos dibujemos puntos en los números enteros del intervalo $[0, 4]$

- $f(0) = \displaystyle\int_0^0 [t]\ dt = 0(0-0) = 0$
- $f(1) = \displaystyle\int_0^1 [t]\ dt = 0(1-0) = 0$
- $f(2) = \displaystyle\int_0^2 [t]\ dt = 0(1-0) + 1(2-1) = 1$
- $f(3) = \displaystyle\int_0^3 [t]\ dt = 0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) = 3$
- $f(4) = \displaystyle\int_0^4 [t]\ dt = 0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) + 3(4-3) = 6$



5. (a) Demostrar que $\int_0^2 [t^2]\; dt = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Demostración.-

$$\left[t^2\right] = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq t^2 < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq t < \sqrt{2} \\ 2 & si \quad 2 \leq t^2 < 3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \leq t < \sqrt{3} \\ 3 & si \quad 3 \leq t^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} \leq t < 2 \end{cases}$$

Vemos que la partición esta dada por $P = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$ y por lo tanto:

$$\int_0^2 \left[t^2\right]\; dt = \sum_{k=1}^{5} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0(1-0) + 1(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 3(2-\sqrt{3}) = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

(b) Calcular $\int_{-3}^{3} \left[t^2\right]\; dt$

Respuesta.- Sea $\int_{-3}^{3} [t^2]\; dx = \int_0^3 [t^2]\; dx + \int_{-3}^{0} [t^2]\; dx = \int_0^3 [t^2]\; dx + \int_0^3 [(-t)^2]\; dx = 2\int_0^3 [t^2]\; dx$ entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3}\left[t^2\right]\,dt &= 2\cdot\int_{0}^{3}\left[t^2\right]\,dt\\
&= 2\cdot\left(\int_0^2\left[t^2\right]\,dt+\int_2^3\left[t^2\right]\,dt\right)\\
&= 2\cdot\left(5-\sqrt{2}-\sqrt{3}+4(\sqrt{5}-2)+5(\sqrt{6}-\sqrt{5})+6(\sqrt{7}-\sqrt{6})+7(\sqrt{8}-\sqrt{7})\right.\\
&+ \left.8(3-\sqrt{8})\right)\\
&= 2\left(21-3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)
\end{aligned}$$

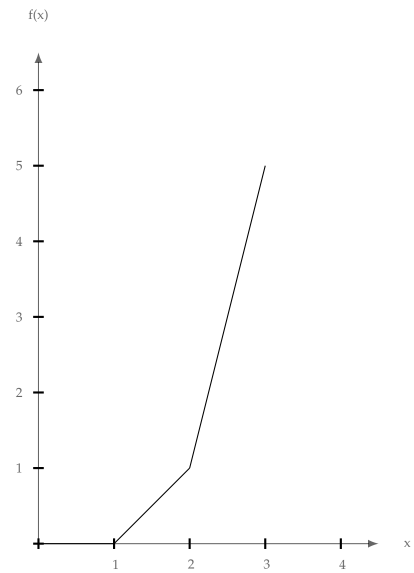
6. (a) Si n es un entero positivo demostrar que $\displaystyle\int_0^n [t]^2/;dt=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

Demostración.- Sea $P=\{0,1,...,n\}$. Entonces P es una partición de $[0,n]$ y $[t]^2$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Ademas, $[t]^2=(k-1)^2$ para $k-1<t<k$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^n [t]^2\,dt &= \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\cdot(k-(k-1))\\
&= \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\\
&= \sum_{n-1}^{k=0}k^2\\
&= \frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}
\end{aligned}$$

(b) Si $f(x)=\displaystyle\int_0^x [t]^2\,dt$ para $x\geq 0$, dibujar la gráfica de f en el intervalo $[0,3]$.

Respuesta.-



(c) Hallar todos los valores de $x > 0$ para los que $\int_0^x [t]^2\, dt = 2(x-1)$

Respuesta.- Los valores son $x = 1, \frac{5}{2}$ ya que son los que se intersectan con $2(x-1)$.

7. (a) Calcular $\int_0^9 [\sqrt{t}]\, dt$.

Respuesta.-

$$[\sqrt{t}] = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq \sqrt{t} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq \sqrt{t} < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq t < 4 \\ 2 & si \quad 2 \leq \sqrt{t} < 3 \quad \Rightarrow \quad 4 \leq t < 9 \end{cases}$$

$$\int_0^9 \left[\sqrt{t}\right]\, dt = 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (4-1) + 2(9-4) = 13$$

(b) Si n es un entero positivo, demostrar que $\int_0^{n^2} \left[\sqrt{t}\right]\, dt = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$

Demostración.- Sea $P = \{0, 1, 3, 9, ..., n^2\}$. Entonces P es una partición de $\left[0, n^2\right]$ y $\left[\sqrt{t}\right]$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Además, porque $(k-1)^2 < t < k^2$ tenemos $\left[\sqrt{t}\right] = (k-1)$. Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{n^2} \left[\sqrt{t}\right]\, dt &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)(k^2-(k-1)^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1)(2k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (2k^2-3k+1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{2n^3}{3} + n^2 + \frac{n}{3} - \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} + n \\
&= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}
\end{aligned}$$

8. Pruébese que la propiedad de traslación (teorema 1.7) se puede expresar en la forma siguiente.

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx = \int_a^b f(x+c)\, dx$$

Demostración.- Sea $d = a+c$ y $e = b+c$ entonces por el teorema de invariancia frente a una traslación

$$\int_d^e f(x)\, dx = \int_{e+(-c)}^{d+(-c)} f(x-(-c))\, dx$$

para $-c \in \mathbb{R}$. Luego, $a = d - c$ y $b = c - e$ por lo tanto

$$\int_{b+c}^{a+c} f(x)\, dx = \int_a^b f(x+c)\, dx$$

9. Probar que la propiedad siguiente es equivalente al teorema 1.8

$$\int_{ka}^{kb} f(x)\, dx = k\int_a^b f(kx)\, dx$$

Demostración.- Sea $\displaystyle\int_a^b f\left(\frac{x}{j}\right)\, dx$, por el teorema tenemos que para cualquier $j > 0$ se tiene

$$\int_{b/j}^{a/j} f\left(j\frac{x}{j}\right)\, dx = \frac{1}{j}\int_a^b f\left(\frac{x}{j}\right)\, dx \quad \Rightarrow \quad j\int_{a/j}^{b/j} f(x)\, dx = \int_a^b f\left(\frac{x}{j}\right)\, dx$$

Luego, si $j \in \mathbb{R}^+$ entonces $\dfrac{1}{j} \in \mathbb{R}^+$, de donde podemos aplicar el teorema como $k = \dfrac{1}{j}$:

$$\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)\, dx = \int_a^b \quad \Rightarrow \quad k\int_a^b f(kx)\, dx = \int_{ka}^{kb} f(x)\, dx$$

10. Dado un entero positivo p. Una función escalonada s está definida en el intervalo $[0,p]$ como sigue $s(x) = (-1)^n n$ si x está en el intervalo $n \leq x < n+1$ siendo $n = 0,1,2,...,p-1$; $s(p) = 0$. Póngase $f(p) = \int_0^p s(x)\,dx$.

(a) Calcular $f(3), f(4)$ y $f(f(3))$.

Respuesta.- Sea

$$s(x) = \begin{cases} (-1)^n n & si \quad n \leq x < n+1,\ n = 0,1,...p-1 \\ \\ 0 & si \quad x = p \end{cases}$$

Entonces calculamos para $f(x) = \int_0^p s(x)\,dx$:

$$\begin{array}{rclclcr} f(3) & = & \int_0^3 s(x)\,dx & = & (-1)^0 0(1-0) + (-1)\cdot 1 \cdot (2-1) + (-1)^2 2(3-2) & = & 1 \\ f(4) & = & \int_0^4 s(x)\,dx & = & \int_0^3 s(x)\,dx + \int_3^4 s(x)\,dx = 1 + (-1)^3 3(4-3) & = & -2 \\ f(f(3)) & = & f(1) & = & \int_0^1 s(x)\,dx = (-1)^0 0(1-0) & = & 0 \end{array}$$

(b) ¿Para qué valor o valores de p es $|f(p)| = 7$?

Respuesta.- Luego de completarlo por un bucle llegamos a la conclusión de que los números que cumplen la condición dada son $14, 15$.

11. Si en lugar de definir la integral de una función escalonada utilizando la fórmula (1.3) se tomara como definición:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^n s_k^3 \cdot (x_k - x^{k-1})$$

se tendría una nueva teoría de la integración distinta de la dada. ¿Cuáles de las siguientes propiedades seguirán siendo válidas en la nueva teoría?

(a) $\int_a^b s + \int_b^c s = \int_a^c s.$

Respuesta.- Sea $P_1 = \{x_0,...,x_m\}$ una partición de $[a,b]$ y $P_2 = \{y_0,...,y_n\}$ sea una partición de $[b,c]$ tal que $s(x)$ sea constante en los intervalos abiertos de P_1 y P_2, entonces, $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0,...,x_m, x_{m+1},..., xm+n\}$ de donde $x_m = y_0,\ x_{m+1} = y_1,\ x_{m+n} = y_n$, así P es una partición de $[a,c]$ y $s(x)$ es constante en los intervalos abiertos de P. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_a^c dx + \int_c^b s(x)\ dx &= \sum_{k=1}^{m} s_k^3(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} s_k^3(y_k - y_{k-1}) \qquad def\ de \int_a^b s \\
&= \sum_{k=1}^{m} s_k^3(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{n+m} s_k^3(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m+n} s_k^3(x_k - x_{k-1}) \\
&= \int_a^c s(x)\ dx
\end{aligned}$$

(b) $\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$

Respuesta.- Sea $\int_0^1 (s(x) + t(x))\ dx = 2^3(1-0) = 8$, por otro lado

$$\int_0^1 s(x)\ dx = \int_0^1 t(x)\ dx = 1(1-1) + 1(1-1) = 2$$

por lo tanto no se cumple la definición para esta propiedad.

(c) $\int_a^b c \cdot s = c \int_a^b s$

Respuesta.- Sea $s(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ y $c = 2$ entonces

$$n_0^1 s(x)\ dx = 2^3 = 2$$

, por otro lado

$$c \cdot \int_0^1 s(x)\ dx = 2 \cdot 1 = 2$$

por lo tanto es falso para esta propiedad.

(d) $\int_{a+c}^{b+c} s(x)\ dx = \int_a^b s(x+c)\ dx$

Respuesta.- Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $s(x))s_k$ en el que k es el subintervalo abierto de P. Luego,

$$P = \{x_o + c.x_1 + c, ..., x_n + c\}$$

es una partición de $[a+c, b+c]$ y $s(x-c) = x_k$ sobre $x_{k-1} + c < x < s_k + c$ entonces:

$$\int_a^b s(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} s_k^3(x_k - x_{k-1}) \qquad y \qquad \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\ dx = \sum_{k=1}^{n} s_k^3(x_k - x_{k-1})$$

por lo tanto

$$\int_a^b s(x)\ dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\ dx$$

(e) Si $s(x) < t(x)$ para cada x en $[a,b]$, entonces $\int_a^b s < \int_a^b t$.

Respuesta.- Como $s(x) < t(x)$ entonces $s(x)^3 < t(x)^3$ de donde el resultado se sigue inmediatamente.

12. Resolver el ejercicio 11 utilizando la definición

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^n s_k \cdot (x_k^2 - x_{k-1}^2)$$

(a) $\displaystyle\int_a^b s + \int_b^c s = \int_a^c s.$

Respuesta.- Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_m\}$ una partición de $[a,b]$ y $P_2 = \{y_0, ..., y_n\}$ sea una partición de $[b,c]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P_1 y P_2. Entonces $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+n}\}$ donde $x_m = y_0, x_{m+1} = y_1, x_{m+n} = y_n$, así P es un partición de $[a,c]$ y $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x)\, dx + \int_b^a s(x)\, dx &= \sum_{k=1}^m s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) + \sum_{k=1}^n s_k(y_k^2 - y_{k-1}^2) \\
&= \sum_{k=1}^m s_k(s_k^2 - x_{k-1}^2) + \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \sum_{k=1}^{m+n} x_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \int_a^c s(x)\, dx
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$

Respuesta.- Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ partición del intervalo $[a,b]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Supongamos que $s(x) + t(x) = s_k + t_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ para $k = 1, 2, ...n$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x) + t(x)\, dx &= \sum_{k=1}^n (s_k + t_k)(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \sum_{k=1}^n s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) + t_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \sum_{k=1}^n s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) + \sum_{k=1}^n t_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \int_a^b s(x)\, dx + \int_a^b t(x)\, dx
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_a^b c \cdot s = c \int_a^b s$

Respuesta.- Sea $P = \{x_0, ...x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P. Suponga que $s(x) = s_k$ si $x_{k-1} < x < s_k$ para $k = 1, 2, ...n$, entonces $c \cdot s(x) = c \cdot s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ de donde

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x)\,dx &= \sum_{k=1}^n c \cdot s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= c \cdot \sum_{k=1}^n s_k(x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
&= c \cdot \int_a^b s(x)\,dx
\end{aligned}$$

(d) $\int_a^b c \cdot s = c \int_a^b s$

Respuesta.- En particular se da un contraejemplo dejando $s(x) = 1$ para todo $x \in [1,2]$ y $c = 1$ Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{0+1}^{1+1} x(x)\,dx &= 1 \cdot (2^2 - 1^2) = 3 \\
\int_0^1 (s+1)\,dx &= 1 \cdot (1^2 - 0^2) = 1
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que es falso para dicha propiedad.

(e) Si $s(x) < t(x)$ para cada x en $[a,b]$, entonces $\int_a^b s < \int_a^b t$.

Respuesta.- Se da un contraejemplo considerando $s(x) = 0$ y $t(x) = 1$ en el intervalo $[-1,0]$. Luego $s < t$ en el intervalo, pero

$$\int_{-1}^0 s(x)\,dx = 0 \not< \int_{-1}^0 t(x)\,dx = 1 \cdot (0^2 - (-1)^2) = -1$$

13. Demostrar el teorema 1.2 (Propiedad aditiva).

Demostración.- Sea $P = \{x_o, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$, tal que $s(x) + t(x)$ es constante en los intervalos abiertos de P. Sea $s(x) + (x) = s_k + t_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ para $k = 1, 2, ..., n$, luego

$$\begin{aligned}
\int_a^b [s(x) + t(x)]\,dx &= \sum_{k=1}^n (s_k + t_k)(x_{k-1} - x_k) \\
&= \sum_{k=1}^n s_k(s_k + t_k) + t_k(s_k + t_k) \\
&= \sum_{k=1}^n s_k(s_k + t_k) + \sum_{K=1}^n t_k(s_k + t_k) \\
&= \int_a^b s(x)\,dx + \int_a^b t(x)\,dx
\end{aligned}$$

14. Demostrar el teorema 1.4(Propiedad lineal).

Demostración.- Por el teorema 1.2 y 1.3 se tiene

$$\int_a^b [c_1 s(x) + c_2 t(x)]\ dx = \int_a^b c_1 s(x)\ dx + \int_a^b c_2 t(x)\ dx = c_1 \int_a^b s(x)\ dx + c_2 \int_a^b t(x)\ dx$$

15. Demostrar el teorema 1.5 (teorema de comparación).

Demostración.- Sea $P\{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $s(x)$ y $t(x)$ sean constantes en los subintervalos abiertos de P. Suponga que $s(x) = s_k$ y $t(x) = t_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ de donde por definición de función escalonada de integrales tenemos:

$$\int_a^b s(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} s_k(x_{k-1} - x_k) \qquad y \qquad \int_a^b t(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} t_k(x_{k-1} - x_k)$$

Luego $s_k < t_k$ para cada $x \in [a,b]$, lo que implica:

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(x_{k-1} - x_k) < \sum_{k=1}^{n} t_k(x_{k-1} - x_k) \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b s(x)\ dx < \int_a^b t(x)\ dx$$

16. Demostrar el teorema 1.6 aditividad con respecto al intervalo.

Demostración.- Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_m\}$ una partición de $[a,b]$ y $P_2 = \{y_o, ..., y_n\}$ sea una partición de $[c,b]$ tal que $s(x)$ es constante en los subintervalos abiertos de P_1 y P_2 luego $P = P_1 \cup P_2$ una partición de $[a,b]$ siendo $y_0 = x_m$, $y_1 = x_{m+1}, ..., y_n = x_{m+n}$ y $s(x)$ constante en los subintervalos abiertos de P, así

$$\begin{aligned}
\int_a^c s(x)\ dx \int_c^b s(x)\ dx &= \sum_{k=1}^{m} s_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} s_k(k_y - y_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} s_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{m+n} s_k(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} s_k(s_k - x_{k-1}) \\
&= \int_a^b s(x)\ dx
\end{aligned}$$

17. Demostrar el teorema 1.7 invariancia frente a una traslación.

Demostración.- Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición $[a,b]$ tal que $s(x) = s_k$ constante en el subintervalo abierto de la partición. Por otro lado sea $P = \{x_0 + c, x_1 + c, ..., x_n + c\}$ en una partición de $[a+c, b+c]$ y $s(x-c) = s_k$ para $x_{k-1} + c < x < x_k + c$ Entonces,

$$\int_a^b s(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} s_k(x_k - x_{k-1}) = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\ dx$$

1.16 La integral de funciones más generales

Definición 1.12 **Definición de integral de una función acotada.** Sea f una función definida y acotada en $[a,b]$. Sean s y t funciones escalonadas arbitrarias definidas en $[a,b]$ tales que

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x)$$

para cada x en $[a,b]$. Si existe un número I, y sólo uno, tal que

$$\int_a^b s(x)\ dx \leq I \leq \int : a^b t(x)\ dx$$

Para cada par de funciones escalonadas s y t que verifiquen $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$, entonces este número I se denomina la integral de f desde a hasta b y se indica por el símbolo $\int_a^b f(x)\ dx$. Cuando I existe se dice que f es integrable en $[a,b]$.

Si $a < b$ se define $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$ supuesta integrable f en $[a,b]$.

También se define $\int_a^a f(x)\ dx = 0$. Si f es integrable en $[a,b]$, se dice que la integral $\int_a^b f(x)\ dxx$ existe.

La función f se denomina integrando, los número a y b los límites de integración, y el intervalo $[a,b]$ el intervalo de integración.

1.17 Integral superior e inferior

Definición 1.13 Supongamos la función f acotada en $[a,b]$. Si s y t son funciones escalonadas que satisfacen $s(x) < f(x) < t(x)$ se dice que s es inferior a f y que t es superior a f

Teorema 1.9 Toda función f acotada en $[a,b]$ tiene una integral inferior $\underline{\mathrm{I}}(f)$ y una integral superior $\bar{I}(f)$ que satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\ dx \leq \underline{\mathrm{I}}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t(x)\ dx$$

para todas las funciones s y t tales que $s \leq f \leq t$. La función f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si sus integrables superior e inferior son iguales, en cuyo caso se tiene

$$\int_a^b f(x)\ dx = \underline{\mathrm{I}}(f) = \bar{I}(f)$$

Demostración.- Sea S el conjunto de todos los números $\int_a^b s(x)\ dx$ obtenidos al tomar como s todas las funciones escalonadas inferiores a f, y sea T el conjunto de todos los números $\int_a^b t(x)\ dx$ al tomar como t todas las funciones escalonadas superiores a f. Esto es

$$S = \left\{ \int_a^b s(x)\ dx | s \leq f \right\}, \qquad T = \left\{ \int_a^b t(x)\ dx | f \leq t \right\}$$

Los dos conjuntos S y T son no vacíos puesto que f es acotada. Asimismo, $\int_a^b s(x)\, dx \leq \int_a^b t(x)\, dx$ si $s \leq f \leq t$, de modo que todo número de S es menor que cualquiera de T. Por consiguiente según el teorema I.34, S tiene extremo superior, y T tiene extremo inferior, que satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\, dx \leq \sup S \leq \inf T \leq \int_a^b y(x)\, dx$$

para todas las s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$. Esto demuestra que tanto $\sup S$ como el $\inf T$ satisfacen $\int_a^b s(x)\, dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\, dx$. Por lo tanto f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si $\sup S = \inf T$, en cuyo caso se tiene

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup S = \inf T.$$

El número $\sup S$ se llama integral inferior de f y se presenta por $\underline{I}(f)$. El número $\inf T$ se llama integral superior de f y se presenta por $\bar{I}(f)$. Así que tenemos

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^b s(x)\, dx \mid s \leq f\right\}, \qquad \bar{I}(f) = \inf\left\{\int_a^b t(x)\, dx \mid f \leq t\right\}$$

■

1.18 El área de un conjunto de ordenadas expresada como una integral

Teorema 1.10 Sea f una función no negativa, integrable en un intervalo $[a,b]$, y sea Q el conjunto de ordenadas de f sobre $[a,b]$. Entonces Q es medible y su área es igual a la integral $\int_a^b f(x)\, dx$

Demostración.- Sea S y T dos regiones escalonadas que satisfacen $S \subseteq Q \subseteq T$.. Existen dos funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$ en $[a,b]$, tales que

$$a(S) = \int_a^b s(x)\, dx \quad y \quad a(T) = \int_a^b t(x)\, dx$$

Puesto que f es integrable en $[a,b]$ el número $I = \int_a^b f(x)\, dx$ es el único que satisface las desigualdades

$$\int_a^b s(x) \leq I \leq \int_a^b t(x)\, dx$$

para todas las funciones escalonadas s y t que cumplen $s \leq f \leq t$. Por consiguiente ése es también el único número que satisface $a(S) \leq I \leq a(T)$ para todas las regiones escalonadas S y T tales que $S \subseteq Q \subseteq T$. Según la propiedad de exhaución, esto demuestra que Q es medible y que $a(Q) = I$

■

Teorema 1.11 Sea f una función no negativa, integrable en un intervalo $[a,b]$. La gráfica de f, esto es el conjunto

$$\{(x,y)/a \leq x \leq b, y = f(x)\}$$

es medible y tiene área igual a 0.

Demostración.- Sean Q el conjunto de ordenadas del teorema 1.11 y $Q^{'}$ el conjunto que queda si se quitan de Q los puntos de la gráfica de f. Esto es,

$$Q^{'} = \{(x,y)/a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

El razonamiento utilizado para demostrar el teorema 1.11 también demuestra que $Q^{'}$ es medible y que $a(Q^{'}) = a(Q)$. Por consiguiente, según la propiedad de la diferencia relativa al área, el conjunto $Q - Q^{'}$ es medible y

$$a(Q - Q^{'}) = a(Q) - a(Q^{'}) = 0$$

.

■

1.20 Funciones monótomas y monótonas a trozos. Definiciones y ejemplos

Definición 1.14 **Funciónes crecientes y decreciente.** Una función f se dice que es creciente en un conjunto S si $f(x) \leq f(y)$ para cada par de puntos x e y de S con $x < y$. Si se verifica la desigualdad estricta $f(x) < f(y)$ par todo $x < y$ en S se dice que la función es creciente en sentido estricto en S.

Una función se dice decreciente en S si $f(x) \geq f(y)$ para todo $x < y$ en S. Si $f(x) > f(y)$ para todo $x < y$ en S la función se denomina decreciente en sentido estricto en S.

Definición 1.15 **Función monótona.** Una función se denomina monótona en S si es creciente en S o decreciente en S. Monótona en sentido estricto significa que f o es estrictamente creciente en S o estrictamente decreciente en S. En general el conjunto S es un intervalo abierto o cerrado.

Definición 1.16 **Función monótona a trozos.** Una función f se dice que es monótona a trozos en un intervalo si su gráfica está formada por un número finito de trozos monótonos. Es decir, f es monótona a trozos en $[a,b]$ si existe una partición P de $[a,b]$ tal que f es monótona en cada uno de los subintervalos abiertos de P.

1.21 Integrabilidad de funciones monótonas acotadas

Teorema 1.12 Si f es monótona en un intervalo cerrado $[a,b]$, f es integrable en $[a,b]$

Demostración.- Demostraremos el teorema para funciones decrecientes. El razonamiento es análogo para funciones decrecientes. Supongamos pues f decreciente y sean $\underline{I}(f)$ e $\overline{I}(f)$ sus integrales inferior y superior. Demostraremos que $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.
Sea n un número entero positivo y construyamos dos funciones escalonadas de aproximación s_n y t_n del modo siguiente: $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$ en n subintervalos iguales, esto es, subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ tales que $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ para cada valor de k. Definamos ahora s_n y t_n por las fórmulas

$$s_n(x) = f(x_{k-1}), \quad t_n(x) = f(x_k) \quad si \quad x_{k-1} < x < x_k$$

en los puntos de división, se definen s_n y t_n de modo que se mantengan las relaciones $s(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$ en todo $[a, b]$. Con esta elección de funciones escalonadas, tenemos

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] =$$

$$= \frac{(b-a)\,[f(b) - f(a)]}{n}$$

siendo la última igualdad una consecuencia de la propiedad telescópica de las sumas finitas. Esta última relación tiene una interpretación geométrica muy sencilla. La diferencia $\int_a^n t_n - \int_a^b s_n$ es igual a la suma de las áreas de los rectángulos. Deslizando esos rectángulos hacia la derecha, vemos que completan un rectángulo de base $(b-a)/n$ y altura $f(b) - f(a)$; la suma de las áreas es por tanto, C/n, siendo $C = (b-a)\,[f(b) - f(a)]$.
Volvamos a escribir la relación anterior en la forma

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \frac{C}{n} \qquad (1)$$

Las integrales superior e inferior de f satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s_n \leq \underline{\mathrm{I}}(f) \leq \int_a^b t_n \quad y \quad \int_a^b s_n \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n$$

Multiplicando las primeras igualdades por (-1) y sumando el resultado a las segundas,es decir:

$$-\underline{\mathrm{I}}(f) \leq -\int_a^b s_n \;\wedge\; \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n \quad \vee \quad -\bar{I}(f) \leq -\int_a^b s_n \;\wedge\; \underline{\mathrm{I}}(f) \leq \int_a^b t_n$$

obtenemos

$$\bar{I}(f) - \underline{\mathrm{I}}(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n$$

Utilizando (1) y la relación $\underline{\mathrm{I}}(f) \leq \bar{I}(f)$ obtenemos

$$0 \leq \bar{I}(f) - \bar{I}(f) \leq \frac{C}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. Por consiguiente, según el teorema I.31 se tiene

$$\underline{\mathrm{I}}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \underline{\mathrm{I}}(f) + \frac{C}{n}$$

por lo tanto $\underline{\mathrm{I}}(f) = \bar{I}(f)$. Esto demuestra que f es integrable en $[a, b]$.

■

1.22 Cálculo de la integral de una función monótona acotada

Teorema 1.13 Supongamos f creciente en un intervalo cerrado $[a, b]$. Sea $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, ..., n$. Si I es un número cualquiera que satisface las desigualdades

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad (2)$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $I = \int_a^b f(x)\ dx$

Demostración.- Sean s_n y t_n las funciones escalonadas de aproximación especial obtenidas por subdivisión del intervalo $[a,b]$ en n partes iguales, como se hizo en la demostración del teorema 1.13. Entonces, las desigualdades (1.9) establecen que

$$\int_a^b s_n \leq I \leq \int_a^b t_n$$

para $n \geq 1$. Pero la integral $\int_a^b f(x)\ dx$ satisface las mismas desigualdades que I. Utilizando la igualdad (1) tenemos $I \leq \int_a^b t_n$ como también $\int_a^b s_n \leq \int_a^b f(x)\ dx \implies -\int_a^b f(x)\ dx \leq -\int_a^b s_n$ entonces

$$I - \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n$$

Similarmente usando las inecuaciones $\int_a^b s_n \leq I$ y $\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b t_n$ resulta que

$$\int_a^b f(x)\ dx - I \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n \quad \implies \quad I - \int_a^b f(x)\ dx \geq -\left(\int_a^b t_n - \int_a^b s_n\right)$$

Donde se concluye que

$$0 \leq \left| I - \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \frac{C}{n}$$

par todo $n \geq 1$. Por consiguiente, según el teorema I.31, tenemos $I = \int_a^b f(x)\ dx$

■

Teorema 1.14 Supongamos f decreciente en $[a,b]$. Sea $x_k = c + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, ..., n$. Si I es un número cualquiera que satisface las desigualdades

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $I = \int_a^b f(x)\ dx$

■

1.23 Cálculo de la integral $\int_0^b x^p\ dx$ siendo p entero positivo

Teorema 1.15 Si p es un entero positivo y $b > 0$, tenemos

$$\int_0^b x^p\ dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

Demostración.- Comencemos con las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

válidas para todo entero $n \geq 1$ y todo entero $p \geq 1$. Estas desigualdades se demostraron anteriormente. La multiplicación de esas desigualdades por b^{p+1}/n^{p+1} nos da

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^p < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^p$$

Si ponemos, las desigualdades (2) del teorema 1.14 se satisfacen poniendo $f(x) = x^p$, $a = 0$, entonces $I = \dfrac{b^{p+1}}{p+1}$. Resulta pues que

$$\int_0^b x^p\ dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

■

1.24 Propiedades fundamentales de la integral

Teorema 1.16 **Linealidad respecto al integrando.** Si f y g son ambas integrables en $[a, b]$ también lo es $c_1 f + c_2 g$ para cada par de constantes c_1 y c_2. Además, se tiene

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\ dx = c_1 \int_a^b f(x)\ dx + c_2 \int_a^b g(x)\ dx$$

Nota.- Aplicando el método de inducción, la propiedad de linealidad se puede generalizar como sigue: Si $f_1, ..., f_n$ son integrables en $[a.b]$ también lo es $c_1 f_1 + ... + c_n f_n$ para $c_1, ..., c_n$ reales cualesquiera y se tiene

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b f_k(x)\ dx$$

Demostración.- Descompongamos esa propiedad en dos partes:

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad (A)$$

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f \qquad (B)$$

Para demostrar (A), pongamos $I(f) = \int_a^b f$ e $I(g) = \int_a^b g$. Demostraremos que $\underline{I}(f+g) = \bar{I}(f+g) = I(f) + I(g)$. Sean s_1 y s_2 funciones escalonadas cualesquiera inferiores a f y g, respectivamente. Puesto que f y g son integrables, se tiene

$$I(f) = \sup\left\{\int_a^b s_1 | s_1 \leq f\right\}, \quad I(g) = \sup\left\{\int_a^b s_2 | s_2 \leq g\right\}$$

Por el teorema I.33 aditiva del extremo superior, también se tiene

$$I(f) + I(g) = \sup\left\{\int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 | s_1 \leq f, s_2 \leq g\right\} \qquad (1.11)$$

Pero si $s_1 \leq f$ y $s_2 \leq g$, entonces la suma $s = s_1 + s_2$ es una función escalonada inferior a $f + g$, y tenemos

$$\int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 = \int_a^b s \leq \underline{I}(f+g)$$

Por lo tanto, el número $\underline{I}(f+g)$ es una cota superior para el conjunto que aparece en el segundo miembro de (1.11). Esta cota superior no puede ser menor que el extremo superior del conjunto de manera que

$$I(f)+I(g) \leq \underline{I}(f+g) \qquad (1.12)$$

Del mismo modo, si hacemos uso de las relaciones

$$I(f)=\inf\left\{\int_a^b t_1 | f \leq t_1\right\}, \qquad I(g)=\inf\left\{\int_a^b t_2 | g \leq t_2\right\}$$

donde t_1 y t_2 representan funciones escalonadas arbitrarias superiores a f y g, respectivamente, obtenemos la desiguald

$$\bar{I}(f+g) \leq I(f)+I(g).$$

Las desigualdades (1.12) y (1.13) juntas demuestran que $\underline{I}(f+g)=\bar{I}(f+g)=I(f)+I(g)$. Por consiguiente $f+g$ es integrable y la relación (A) es cierta.
La relación (B) es trivial si $c=0$. Si $c>0$, observemos que toda función escalonada $s_1=cf$ es de la forma $s_1=cs$, siendo s una función escalonada inferior a f. Análogamente, cualquier función escalonada t_1 superior a cf es de la forma $t_1=ct$, siendo t una función escalonada superior a f. Por hipótesis se tenemos,

$$\bar{I}(cf)=\sup\left\{\int_a^b s_1 | s_1 \leq cf\right\}=\sup\left\{c\int_a^b s | s \leq f\right\}=cI(f)$$

y

$$\underline{I}(cf)=\inf\left\{\int_a^b t_1 | cf \leq t_1\right\}=\inf\left\{c\int_a^b t | f \leq t\right\}=cI(f)$$

Luego $\underline{I}(cf)=\bar{I}(cf)=cI(f)$. Aquí hemos utilizado las propiedades siguientes del extremo superior y del extremo inferior:

$$\sup\{cx | x \in A\}=c\sup\{x | x \in A\}, \qquad \inf\{cx | x \in A\}=c\inf\{x | x \in A\} \qquad (1.14)$$

que son válidas si $c>0$. Esto demuestra (B) si $c>0$.
Si $c<0$, la demostración de (B) es básicamente la misma, excepto que toda función escalonada s_1 inferior a cf es de la forma $s_1=ct$, siendo t una función escalonada superior a f y toda función escalonada t_1 superior a cf es de la forma $t_1=cs$, siendo s una función escalonada inferior a f. Asimismo, en lugar de (1.14) utilizamos las relaciones

$$\sup cx | x \in A = c\inf x | x \in A, \quad \inf cx | x \in A = c\sup x | x \in A,$$

que son ciertas si $c<0$. Tenemos pues

$$\underline{I}(cf)=\sup\left\{\int_a^b s_1 | s_1 \leq cf\right\}=\sup\left\{c\int_a^b t | f \leq t\right\}=\inf\left\{\int_a^b t | f \leq t\right\}=cI(f).$$

Análogamente, encontramos $\bar{I}(f)=cI(f)$. Por consiguiente (B) es cierta para cualquier valor real de c.

■

Teorema 1.17 **Aditividad respecto al intervalo de integración.** Si existen dos de las tres integrales siguientes, también existe la tercera y se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$$

Nota.- En particular, si f es monótona en $[a,b]$ y también en $[b,c]$, existen las dos integrales $\int_a^b f$ e $\int_b^c f$, con lo que también existe $\int_a^c f$ y es igual a la suma de aquellas.

Demostración.- Supongamos que $a < b < c$, y que las dos integrales $\in_a^b f$ e $\int_b^c f$ existen. Designemos con $\underline{I}(f)$ e $\bar{I}(f)$ las integrales superior e inferior de f en el intervalo $[a, c]$. Demostraremos que

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f. \qquad (1.15)$$

Si s es una función escalonada cualquiera inferior a f en $[a, c]$, se tiene

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c s.$$

Recíprocamente, si s_1 y s_2 son funciones escalonadas inferiores a f en $[a, b]$ y $[b, c]$ respectivamente, la función s que coincide con s_1 en $[a, b]$ y con s_2 en $[b, c]$ es una función escalonada inferior a f para lo que

$$\int_a^c = \int_a^b s_1 + \int_b^c s_2.$$

Por consiguiente, en virtud de la propiedad aditiva del extremo superior, tenemos

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^c s|s \leq f\right\} = \sup\left\{\int_a^b s_1|s_1 \leq f\right\} + \sup\left\{\int_b^c s_2|s_2 \leq f\right\} = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Análogamente, encontramos

$$\bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

lo que demuestra (1.15) cuando $a < b < c$. La demostración es parecida para cualquier otra disposición de los puntos a, b, c.

■

Teorema 1.18 **Invariancia frente a una traslación.** Si f es integrable en $[a, b]$, para cada número real c se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

Demostración.- Sea g la función definida en el intervalo $[a+c, b+c]$ por la ecuación $g(x) = f(x-c)$. Designemos por $\underline{I}(g)$ e $\bar{g}$ las integrales superior e inferior de g en el intervalo $[a+c, b+c]$. Demostraremos que

$$\underline{I}(g) = \bar{I}(g) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Sea s cualquier función escalonada inferior a g en el intervalo $[a+c, b+c]$. Entonces la función s_1 definida en $[a, b]$ por la ecuación $s_1(x) = s(x+c)$ es una función escalonada inferior a f en $[a, b]$. Además, toda función escalonada s_1 inferior a f en $[a, b]$ tiene esta forma para un cierta s inferior a g. También, por la propiedad de traslación para las integrales de las funciones escalonadas, tenemos

$$\int_{a+c}^{b+c} dx = \int_a^b s(x+c)\,dx = \int_a^b s_1(x)\,dx. \qquad (1.16)$$

Por consiguiente se tiene

$$\underline{I}(g) = \sup\left\{\int_{a+c}^{b+c} s|s \leq g\right\} = \sup\left\{\int_a^b s_1|s_1 \leq f\right\} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Análogamente, encontramos $\underline{I} = \int_a^b f(x)\,dx$, que prueba (1.16).

■

Teorema 1.19 **Dilatación o contracción del intervalo de integración.** Si f es integrable en $[a,b]$ para cada número real $k \neq 0$ se tiene:

$$\int_a^b f(x) = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\, dx$$

Nota.- En los dos teoremas 1.19 y 1.20 la existencia de una de las integrables implica la existencia de la otra. Cuando $k=-1$, el teorema 1.19 se llama propiedad de reflexión.

Demostración.- Supongamos $k>0$ y definamos g en el intervalo $[ka,kb]$ para la igualdad $g(x)=f(x/k)$. Designemos por $\underline{I}(g)$ e $\bar{I}(g)$ las integrales inferiores y superiores de g en $[ka,kb]$. Demostraremos que

$$\underline{I}(g) = \bar{I}(g) = k\int_a^b f(x)\, dx. \qquad (1.17)$$

Sea s cualquier función escalonada inferior a g en $[ka,kb]$. Entonces la función definida en $[a,b]$ por la igualdad $s_1(x)=(kx)$ es una función escalonada inferior a f en $[a,b]$. Además, toda función escalonada s_1 a f en $[a,b]$ tiene esta forma. También, en virtud de la propiedad de dilatación para las integrales de funciones escalonadas, tenemos

$$\int_{ka}^{kb} s(x)\, dx = k\int_a^b s(kx)\, dx = k\int_a^b s_1(x)\, dx.$$

Por consiguiente

$$\underline{I}(g) = \sup\left\{\int_{ka}^{kb} s|s\leq g\right\} = \sup\left\{k\int_a^b s_1|s_1\leq f\right\} = k\int_a^b f(x)\, dx.$$

Análogamente, encontramos $\underline{I}(g) = k\int_a^b f(x)\, dx$, que demuestra (1.17) si $k>0$. El mismo tipo de demostración puede utilizarse si $k<0$.

■

Teorema 1.20 **teorema de comparación.** Si f y g son ambas integrables en $[a,b]$ y si $g(x)\leq f(x)$ para cada x en $[a,b]$ se tiene:

$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx$$

Demostración.- Supongamos $g\leq f$ en el intervalo $[a,b]$. Sea s cualquier función escalonada inferior a g, y sea t cualquier función escalonada superior a f. Se tiene entonces $\int_a^b s \leq \int_a^b t$, y por tanto el teorema I.34 nos da

$$\int_a^b = \sup\left\{\int_a^b s|s\leq g\right\} \leq \inf\left\{\int_a^b t|f\leq t\right\} = \int_a^b f.$$

Esto demuestra que $\int_a^b g \leq \int_a^b f$, como deseábamos.

■

1.25 Integración de polinomios

Podemos usar el teorema 1.20 para demostrar que (1.11) también es válida para b negativo. Tomemos $k = -1$ en el teorema 1.20 y se obtiene

$$\int_0^{-b} = -\int_0^b (-x)^p \, dx = (-1)^{p+1} \int_0^b x^p \, dx = \frac{(-b)^{p+1}}{p+1}$$

lo cual prueba la validez de (1.11) para b negativo. La propiedad aditiva $\int_a^b x^p \, dx = \int_0^b x^p \, dx - \int_0^a x^p \, dx$ nos conduce a la formula general:

$$\int_a^b x^p \, dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

válida para todos los valores reales de a y b, y todo entero $p \geq 0$.
Algunas veces el símbolo

$$P(x) \mid_a^b$$

se emplea para designar la diferencia $P(b) - P(a)$. De este modo la fórmula anterior puede escribirse así:

$$\int_a^b x^p \, dx = \left. \frac{x^{p+1}}{p+1} \right|_a^b = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

Esta fórmula y la propiedad de linealidad, nos permiten integrar cualquier polinomio.
Con mayor generalidad, para calcular la integral de cualquier polinomio integramos término a término:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{b^{k+1} - a^{a+1}}{k+1}$$

1.26 Ejercicios

Calcular cada una de las integrales siguientes:

1. $\int_0^3 x^2 \, dx = \frac{3^3}{3} = 9$

2. $\int_{-3}^3 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^3 = \frac{3^3 - (-3)^3}{3} = \frac{54}{3} = 18$

3. $\int_0^2 4x^3 \, dx = 4\frac{2^4}{4} = 16.$

4. $\int_{-2}^2 4x^3 \, dx = 4 \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-2}^2 = 4\frac{2^4 - (-2)^4}{4} = 0$

5. $\displaystyle\int_0^1 5t^4\,dt = 5\frac{1^5}{5} = 1$

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 5t^4\,dt = 5\left.\frac{t^5}{5}\right|_{-1}^1 = 5\frac{1^5-(-1)^5}{5} = 5$

7. $\displaystyle\int_0^1 (5x^4-4x^3)\,dx = 5\frac{1^5}{5} - 4\frac{1^4}{4} = 0$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 (5x^4-4x^3)\;\;dx \;=\; 5\int_{-1}^1 x^4\;\;dx - 4\int_{-1}^1 x^3\;\;dx \;=\; 5\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^1 - 4\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^1 \;=\; 5\cdot\frac{1^5-(-1)^5}{5} - 4\cdot \frac{1^4-(-1)^4}{4} = 2$

9. $\displaystyle\int_{-1}^2 (t^2+1)\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^2 + \left.t\right|_{-1}^2 = \frac{2^3-(-1)^3}{3} + 2-(-1) = 6$

10. $\displaystyle\int_2^3 (3x^2-4x+2)\,dx = 3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 - 4\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3 + 2\cdot\left.t\right|_2^3 = 3\frac{3^3-2^3}{3} - 4\frac{3^2-2^2}{2} + 2(3-2) = 11$

11. $\displaystyle\int_0^{1/2} (8t^3+6t^2-2t+5)\,dt = 8\cdot\frac{(1/2)^4}{4} + 6\cdot\frac{(1/2)^3}{3} - 2\cdot\frac{(1/2)^2}{2} + 5\cdot(1/2) = \frac{21}{8}$

12. $\displaystyle\int_{-2}^4 (u-1)(u-2)\,du \quad\Longrightarrow\quad \int_{-1}^4 u^2-3u+2\,dx = \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-2}^4 - 3\cdot\left.\frac{u^2}{2}\right|_{-2}^4 + \left.2u\right|_{-2}^4 =$

$$= \frac{4^3-(-2)^3}{3} - 3\frac{4^2-(-2)^2}{2} + 2[4-(-2)] = \frac{73}{3} - 18 + 12 = 18$$

13. $\displaystyle\int_{-1}^0 (x+1)^2\,dx \Longrightarrow \int_{-1+1}^{0+1} (x-1+1)^2\,dx \;\;(traslacin) \Longrightarrow \int_1^0 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^2-0^2}{3} = \frac{1}{3}$

14. $\displaystyle\int_0^{-1} (x+1)^2\,dx$

Respuesta.- Por ser $-1 < 0$ entonces por el teorema de dilatación o contracción del intervalo de integración se tiene que

$$\int_0^{-1} (x+1)^2\,dx = -\int_{-1}^0 (x+1)^2\,dx = -\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^0 + 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^0 + \left.x\right|_{-1}^0\right) = -\left[\frac{1}{3}+1+(-1)\right] = -\frac{1}{3}$$

15. $\displaystyle\int_0^2 (x-1)(3x-1)\,dx = 3\cdot\frac{2^3}{3} - 4\cdot\frac{2^2}{2} + 2 = 2$

16. $\displaystyle\int_0^2 |(x-1)(3x-1)|\,dx$

Respuesta.- Se evaluará en intervalos en los que sea siempre sea positiva o siempre negativa, como también evaluar por separado. Examinando el polinomio se tiene ceros en $x = 1, \frac{1}{3}$, donde la expresión va a cambiar de signo en estos puntos, entonces:

$$\begin{aligned}
x < \frac{1}{3} &\quad\Longrightarrow\quad (x-1)(3x-1) > 0 \quad\Longrightarrow\quad |(x-1)(3x-1)| = (x-1)(3x-1)\\
\frac{1}{3} < x < 1 &\quad\Longrightarrow\quad (x-1)(3x-1) < 0 \quad\Longrightarrow\quad |(x-1)(3x-1)| = -(x-1)(3x-1)\\
x > 1 &\quad\Longrightarrow\quad (x-1)(3x-1) > 0 \quad\Longrightarrow\quad |(x-1)(3x-1)| = (x-1)(3x-1)
\end{aligned}$$

Luego por el teorema aditivo de integración

$$\int_0^2 (x-1)(3x-1)\,dx = \int_0^{1/3}(x-1)(3x-1)\,dx + \int_{1/3}^1 -(x-1)(3x-1)\,dx + \int_1^2 (x-1)(3x-1)\,dx$$

Así, nos queda

$$\int_0^2 3x^2-4x+1\,dx = \int_0^{1/3} 3x^2-4x+1\,dx + \int_{1/3}^1 -(3x^2-4x+1)\,dx + \int_1^2 3x^2-4x+1\,dx$$

por lo tanto

$$\left(3\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^{1/3} - \left(3\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{1/3}^{1} + \left(3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right) - 0 - \left[(1-2+1) - \left(\frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + 2 = \frac{62}{27}$$

17. $\displaystyle\int_0^3 (2x-5)^3\,dx$

Respuesta.- Por el teorema de invariancia frente a una traslación se tiene

$$\int_0^3 (2x-5)^3\,dx \int_{-5/2}^{1/2}\left[2\left(x+\frac{5}{2}\right)-5\right]^3\,dx = \int_{-5/2}^{1/2}(2x)^3\,dx = 80\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-5/2}^{1/2}\,dx = \frac{1}{8} - \frac{625}{8} = -78$$

18. $\displaystyle\int_{-3}^3 (x^2-3)^3\,dx = \int_{-3}^3 x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27\,dx = \left(\frac{x^7}{7} - 9\frac{x^5}{5} + 27\frac{x^3}{3} - 27x\right)\Bigg|_{-3}^{3} =$

$$= \left(\frac{2187}{7} - \frac{2187}{5} + 243 - 81\right) - \left(-\frac{2187}{7} + \frac{2187}{5} - 243 + 81\right) = \frac{2592}{35}$$

19. $\displaystyle\int_0^5 (x-5)^4\,dx = \int_0^5 x^4 - 20x^3 \cdot +150x^2 \cdot + -500x + 625\,dx = \left(\frac{5^5}{5} - 3125 + 6250 - 6250 + 3125\right) =$ 625

20. $\displaystyle\int_{-2}^{-4} (x+4)^{10}\,dx$

Respuesta.- Por la invariancia de la integral se tiene

$$\int_{-2}^{-4} (x+4)^{10}\,dx = \int_2^0 x^{10}\,dx = -\int_0^2 x^{10}\,dx = -\frac{2^{11}}{11}$$

21. Hallar todos los valores de c para los que

(a) $\displaystyle\int_0^c x(1-x)\,dx = 0$

Respuesta.- Al integrar tenemos que $\displaystyle\int_0^c x - x^2\,dx = \frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{3}$ igualando el resultado a 0 se tiene $3c^2 - 2c^3 = 0$ de donde

$$c = 0 \quad y \quad c = \frac{3}{2}$$

.

(b) $\displaystyle\int_0^c |x(1-x)|\,dx$

Respuesta.- Dado que $|x(1-x)| \geq 0$ para todo x, podemos usar el teorema de comparación para ver si $|x(1-x)| > 0$ para cualquier x, de donde

$$\int_0^c |x(1-x)|\,dx > \int_0^c 0 = 0$$

Así, para que la ecuación se mantenga debemos tener $|x(1-x)| = 0$ para todo $0 \leq x \leq c$ Dado que la expresión será distinta de cero para cualquier $0 < x \leq c$, debemos tener $c = 0$

22. Calcular cada una de las integrales siguientes. Dibújese la gráfica f en cada caso.

(a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ Respuesta.- Por el teorema de aditividad respecto al intervalo de integración se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx \\
&= \frac{1^3}{3} + 2x\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + (2\cdot 2 - 2\cdot 1) - \frac{2^2-1^2}{2} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x \le c \\ c\dfrac{1-x}{1-c} & si \quad c \le x \le 1 \end{cases}$ c es un número real fijado, $0 < c < 1$.

Respuesta.- dividimos la integral en $\displaystyle\int_0^c x\,dx + \int_c^1 \left(\frac{c}{1-c}\right)(1-x)\,dx$ de donde

$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^c + \frac{c}{1-c}\left(x\Big|_c^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_c^1\right) = \frac{c^2}{2} + \frac{c}{1-c}(1-c) - \frac{c}{1-c}\left(\frac{1^2-c^2}{2}\right) = \frac{c}{2}$$

23. Hallar un polinomio cuadrático P para el cual $P(0) = P(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx = 1$.

Respuesta.- Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ entonces para $P(0) = 0$ nos queda $c = 0$ y para $P(1)$ nos da

$$a + b + c = 0 \implies a = -b$$

De donde

$$\int_0^1 P(x)\,dx = 1 \implies \int_0^1 (ax^2 - ax)\,dx \implies a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 \implies a = -6$$

Por lo tanto se tiene

$$P(x) = 6x - 6x^2$$

24. Hallar un polinomio cúbico P para el cual $P(0) = P(-2) = 0,\ P(1) = 15$ y $\displaystyle\int_{-2}^0 P(x)\,dx = 4$

Respuesta.- Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d$ si $P(0)$ entonces $d = 0$. Luego para $P(-2) = 0$ se tiene

$$a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) = 0 \implies -8a + 4b - 2c = 0 \implies c = 2b - 4a \qquad (1)$$

Después si $P(1) = 15$ entonces $a + b + 2b - 4a = 15 \implies b = a + 5 \qquad (2)$

Remplazando en la ecuación cuadrática e integrando se tiene

$$\int_{-2}^0 \left[ax^3 + (5+a)x^2 + (10-2a)x\right]\,dx = 4$$

de donde

$$a\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0} + (5+a)\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0} + (10-2a)\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} = 4 \implies a\left(\frac{-(-2)^4}{4}\right) + (5+a)\left(\frac{-(-2)^3}{3}\right)$$

$$+ \quad (10-2a)\left(\frac{-(-2)^2}{2}\right) = 4$$

Así nos queda

$$-4a + \frac{40}{3} + \frac{8}{3}a - 20 + 4a = 4 \implies a = 4$$

Por lo tanto

$$4x^3 + 9x^2 + 2x$$

25. Sea f una función cuyo dominio contiene $-x$ siempre que contiene x. Se dice que f es una función par si $f(-x) = f(x)$ y una función impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f. Si f es integrable en $[0, b]$ demostrar que:

(a) $\displaystyle\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$ si f es par.

Demostración.- Por el teorema de adición de una integral tenemos

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx$$

De la primera integral y por el teorema de dilatación o contracción del intervalo de integración, con $k = -1$, tenemos,

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = -\int_b^0 f(-x)\,dx$$

Siendo la función par, y el hecho de que $-\int_b^0 = \int_0^b$ entonces

$$-\int_b^0 f(-x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx$$

Así, nos queda

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$$

(b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ si f es impar.

Demostración.- Sabemos que f es impar por lo tanto $\displaystyle\int_0^b f(-x)\;dx = -\int_0^b f(x)\;dx$. Luego Similar a la parte (a) nos queda

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b f(-x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = 0$$

26. Por medio de los teoremas 1.18 y 1.19 deducir la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\,dx$$

Demostración.- Por los teoremas mencionados en la hipótesis se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{b-a} f[x-(-a)]\,dx = (b-a)\int_0^1 f[x(b-a)+a]\,dx = \int_0^1 f[a+(b-a)x]\,dx$$

27. Los teoremas 1.18 y 1.19 sugieren una generalización de la integral $\int_a^b f(Ax+B)\,dx$. Obtener esa fórmula y demostrarla con el auxilio de los citados teoremas. Discutir también el caso $A=0$.

Demostración.- Sea

$$\int_a^b f(Ax+B)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_{Ab+B}^{Aa+B} & si \quad A\neq 0 \\ (b-a)f(B) & si \quad A=0 \end{cases}$$

Para el caso $A=0$, tenemos

$$\int_a^b f(Ax+B)\,dx = \int_a^b f(B)\,dx = f(B)\int_a^b\,dx = (b-a)f(B)$$

. Luego para el caso $A\neq 0$ usamos el teorema de expansión o contracción del intervalo de integración, para obtener,

$$\int_a^b f(Ax+B)\,dx = \frac{1}{A}\int_{Ab} Aaf(x+B)\,dx$$

así por la invariancia de la integral concluimos que

$$\frac{1}{A}\int_{Aa}^{Ab} f(x+B)\,dx = \frac{1}{A}\int_{Aa+b}^{Ab+B} f(x)\,dx$$

28. Mediante los teoremas 1.18 y 1.19 demostrar la fórmula

$$\int_a^b f(c-x)\,dx = \int_{c-a}^{c-b} f(x)\,dx$$

Demostración.- Por el teorema de expansión o contracción con $k=-1$ y el teorema de invariancia frente a la traslación,

$$\int_a^b f(c-x)\,dx = -\int_{-a} -bf(x+c)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x+c)\,dx = \int_{c-b}^{c-a} f(x)\,dx$$

2

Algunas aplicaciones de la integración

2.2 El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

Teorema 2.1 Supongamos que f y g son integrables y que satisfacen $f \leq q$ en $[a,b]$. La región S entre sus gráficas es medible y su área $a(S)$ viene dada por la integral

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$$

Demostración.- Demostración.- Supongamos primero que f y g son no negativas,. Sean F y G los siguientes conjuntos:

$$F = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x), \quad G = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x).$$

Esto es, G es el conjunto de ordenadas de g, y F el de f, menos la gráfica de f. La región S es la diferencia $G - F$. Según los teoremas 1.10 y 1.11, F y G son ambos medibles. Puesto que $F \subseteq G$ la diferencia $S = G - F$ es también medible, y se tiene

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$$

Consideremos ahora el caso general cuando $f \leq q$ en $[a,b]$, pero no son necesariamente no negativas. Este caso lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada encima del eje x. Esto es, elegimos un número positivo c suficientemente grande que asegure que $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$ para todo x en $[a,b]$. Por lo ya demostrado la nueva región T entre las gráficas de $f + c$ y $g + c$ es medible, y su parea viene dad por la integral

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)] = \int_{[} g(x) - f(x)]\ dx$$

Pero siendo T congruente a S, ésta es también medible y tenemos

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$$

Esto completa la demostración.

■

Nota 2.1 En los intervalos $[a, b]$ puede descomponerse en un número de subintervalos en cada uno de los cuales $f \leq g$ o $g \leq f$ la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$$

Lema 2.1 **Área de un disco circular.** Demostrar que $A(r) = r^2 A(1)$. Esto es, el área de un disco de radio r es igual al producto del área de un disco unidad (disco de radio 1) por r^2.

Demostración.- Ya que $g(x) - f(x) = 2g(x)$, el teorema 2.1 nos da

$$A(r) = \int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

En particular, cuando $r = 1$, se tiene la fórmula

$$A(1) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Cambiando la escala en el eje x, y utilizando el teorema 1.19 con $k = 1/r$, se obtiene

$$A(r) = 2\int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} g(rx)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - (rx)^2}\, dx = 2r^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = r^2 A(1)$$

Esto demuestra que $A(r) = r^2 A(1)$, como se afirmó.

■

Definición 2.1 Se define el número π como el área de un disco unidad.

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

La formula que se acaba de demostrar establece que $A(r) = \pi r^2$

Generalizando el anterior lema se tiene

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x)\, dx = k\int_{ka}^{kb} f(x/k)\, dx = k^2\int_a^b f(x)\, dx$$

Teorema 2.2 Para $a > 0$, $b > 0$ y n entero positivo, se tiene

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{b^{1-1/n} - a^{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Demostración.- Sea $\int_0^a x^{\frac{1}{n}}$. El rectángulo de base a y altura $a^{\frac{1}{n}}$ consta de dos componentes: el conjuntos de ordenadas de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ a a y el conjuntos de ordenadas $g(y) = y^n$ a $a^{\frac{1}{n}}$. Por lo tanto,

$$a \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}} = \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\, dx + \int_0^{a^{\frac{1}{n}}} y^n\, dy \implies \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\, dx = a^{1+\frac{1}{n}} - \left.\frac{y^{n+1}}{n+1}\right|_0^{a^{\frac{1}{n}}} = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Análogamente se tiene

$$\int_0^b x^{\frac{1}{n}}\ dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Luego notemos que

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\ dx = \int_0^b x^{\frac{1}{n}}\ dx - \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\ dx$$

por lo tanto

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\ dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}} - b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

■

2.4 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, calcular el área de la región S entre las gráficas de f y g para el intervalo $[a,b]$ que en cada caso se especifica. Hacer un dibujo de las dos gráficas y sombrear S.

1. $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 0, \quad a = -2, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [4 - x^2 - 0]\ dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) - \left(\frac{2^3-(-2)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

2. $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 8 - 2x^2, \quad a = -2, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [8 - 2x^2 - (4 - x^2)]\ dx = \int_{-2}^{2} 4 - x^2\ dx = \frac{32}{3}\ (\textit{por ejercicio } 1)$$

3. $f(x) = x^3 + x^2, \quad g(x) = x^3 + 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^{1} x^3 + 1 - (x^3 + x^2)\ dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\ dx = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{1-(-1)}{3} = \frac{4}{3}$$

4. $f(x) = x - x^2, \quad g(x) = -x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_0^2 x - x^2 - (-x)\ dx = \int_0^2 2x - x^2 = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{2}$$

5. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 1$

Respuesta.-

$$\int_0^1 x^{1/3} - x^{1/2}\,dx = \left.\frac{x^{1+1/3}}{1+1/3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

6. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 1, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_1^2 x^{1/2} - x^{1/3}\,dx = \left.\frac{x^{1/2+1}}{1+1/2}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{1/3}+1}{1+1/3}\right|_1^2 = \frac{2^{1/2+1}-1}{1+1/2} - \frac{2^{1/3+1}}{1+1/3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12}$$

7. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Sea

$$\int_0^1 |x^{1/3} - x^{1/2}|\,dx + \int_1^2 |x^{1/3} - x^{1/2}|\,dx$$

por los problemas 5 y 6 se tiene

$$\frac{1}{12} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{6}$$

8. $f(x) = x^{1/2}, \quad g(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{1/2} - x^2\,dx + \int_1^2 x^2 - x^{1/2}\,dx &= \left(\left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\right) + \left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_1^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+1/2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2^3-1}{3} - \frac{2^{1+1/2}-1}{1+1/2}\right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \\
&= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

9. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1, \quad a = -1, \quad b = (1+\sqrt{5})/2$

Respuesta.

$$\int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - (x+1)\,dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} (x+1) - x^2\,dx- \; =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - x - 1\,dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} x + 1 - x^2\,dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} + \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{6} \\
&= \frac{5\sqrt{5}-3}{4}
\end{aligned}
$$

10. $f(x) = x(x^2-1), \quad g(x) = x, \quad a = -1, \quad b = \sqrt{2}$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^{0} x(x^2-1) - x\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} x - [x(x^2-1)]\,dx = \int_{-1}^{0} x^3 - 2x\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} -x^3 + 2x\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} + 1 + (-1+2) = \frac{7}{4}$$

11. $f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad a = -1, \quad b = 1$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x \in [-1,0) \\ x & si \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} -x - x^2 + 1\,dx + \int_{0}^{1} x - x^2 + 1\,dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

12. $f(x) = |x+1|, \quad g(x) = x^2 - 2x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Definamos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} -(x+1) & si \quad x \in [0,1) \\ x+1 & si \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)-g(x)\,dx &= \int_0^1 -(x-1)-x^2+2x\,dx+\int_1^2 x-1-x^2+2x\,dx\\
&= \int_0^1 -x^2+x+1\,dx+\int_1^2 -x^2+3x-1\,dx\\
&= \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^2\\
&= \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{8}{3}+6-2+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1\right)\\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

13. $f(x)=2|x|,\quad g(x)=1-3x^3,\quad a=-\sqrt{3}/3,\quad b=\dfrac{1}{3}$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x & si \quad x\in[-\sqrt{3}/3,0)\\ x & si \quad x\in[0,1/3]\end{cases}$$

de donde se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)-f(x)\,dx &= \int_{-\frac{-\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)\,dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx\\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} 1-3x^3\,dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0} -2x\,dx-\int_0^{\frac{1}{3}} 2x\,dx\\
&= \left(x-\frac{3}{4}x^4\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}}+x^2\Bigg|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0}-x^2\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}\\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{108}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{12}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}\\
&= \frac{9\sqrt{3}-1}{27}
\end{aligned}$$

14. $f(x)=|x|+|x-1|,\quad g(x)=0,\quad a=-1,\quad b=2$

Respuesta.- En este problema $f(x)\geq g(x)$ en el intervalo $[-1,2]$, por lo tanto

$$\int_{-1}^2 f(x)-g(x)\,dx=\int_{-1}^2 |x|+|x+1|\,dx=\int_{-1}^2 |x|\,dx+\int_{-1}^2 |x-1|\,dx$$

Definimos cada función por separado,

$$|x|=\begin{cases} -x & si \quad x\in[-1,0)\\ x & si \quad x\in[0,2]\end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases} -(x-1) & si \quad x\in[-1,1)\\ x-1 & si \quad x\in[1,2]\end{cases}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}|x|\,dx+\int_{-1}^{2}|x-1|\,dx &= \int_{-1}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{2}x\,dx+\int_{-1}^{1}-(x-1)\,dx+\int_{1}^{2}x-1\,dx\\
&= \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2}+\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+(x)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}+(-x)\Bigg|_{1}^{2}\\
&= \frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+2-\frac{1}{2}-2+1\\
&= 5
\end{aligned}$$

15. Las gráficas de $f(x)=x^2$ y $g(x)=cx^3$, siendo $c>0$, se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(1/c,1/c^2)$. Determinar c de modo que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo $[0,1/c]$ tengan área $\frac{2}{3}$.

Respuesta.- Tenemos que $f\geq g$ en el intervalo $[0,1/c]$ de donde,

$$\int_0^{1/c}x^2-cx^3\,dx=\int_0^{1/c}x^2\,dx-c\int_0^{1/c}x^3\,dx=\frac{1}{12c^3}$$

luego $\dfrac{1}{12c^3}=\dfrac{2}{3}$ por lo tanto $c=\dfrac{1}{2}$.

16. Sea $f(x)=x-x^2$, $g(x)=ax$. Determinar a para que la región situada por encima de la gráfica de g y por debajo de f tenga área $frac92$.

Respuesta.- Tomaremos los casos cuando $a=0, a>0$ y $a<0$.
Veamos primero que si $g(x)\leq f(x)$ entonces

$$f(x)-g(x)\geq 0\Longrightarrow x-x^2-ax\geq 0\Longrightarrow (1-a)x\geq x^2$$

de donde si $x=0$ se tiene una igualdad. Luego si $x\neq 0$ entonces $x\leq(1-a)$. Ahora sea $a<0$ por suposición se tendrá $1-a>0$, que nos muestra que el intervalo estará dado por $[0,1-a]$. Análogamente se tiene el intervalo $[1-a,0]$ para $a>0$.

C 1. Si $a=0$, esto no es posible ya que si $a=0$ entonces $g(x)=ax=0$ y entonces el área arriba del gráfico de g y debajo del gráfico de f es igual a

$$\int_0^1 x-x^2\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\neq\frac{9}{2}$$

C 2. Si $a<0$, $f(x)\geq g(x)$ para $[0,1-a]$, por lo que tenemos la zona, $a(S)$ de la región entre las dos gráficas dadas por

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-a}x-x^2-ax\,dx &= (1-a)\int_0^{1-a}x\,dx-\int_0^{1-a}x^2\,dx\\
&= (1-a)\left(\frac{(1-a)^2}{2}\right)-\frac{(1-a)^3}{3}\\
&= -\frac{(1-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

así nos queda que

$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \Longrightarrow (1-a)^3 = -27 \Longrightarrow a = a$$

C 3. Sea $a > 0$ y $f(x) \geq g(x)$ entonces $[1-a, 0]$ lo que

$$\begin{aligned}
\int_{1-a}^{0} x - x^2 - ax\,dx &= (1-a)\int_{1-a}^{0} x\,dx - \int_{1-a}^{0} x^2\,dx \\
&= (1-a)\left(-\frac{(1-a)^2}{2} - \frac{(1-a)^3}{2}\right) \\
&= -\frac{(1-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

Así igualando por $\frac{9}{2}$ tenemos

$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \Longrightarrow (1-a)^3 = -27 \Longrightarrow a = 4$$

Por lo tanto los valores posibles para a son -2 y 4.

17. Hemos definido π como el área de un disco circular unidad. En el ejemplo 3 de la Sección 2.3, se ha demostrado que $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Hacer uso de las propiedades de la integral para calcular la siguiente en función de π.

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx.$

Respuesta.- Por el teorema 19 de dilatación, $\displaystyle\frac{1}{\frac{1}{3}}\int_{-3\frac{1}{3}}^{3\frac{1}{3}}\sqrt{9-\left(\frac{x}{\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx$, de donde nos queda

$$9\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

por lo tanto y en función de π se tiene $\dfrac{9}{2}\pi$.

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx.$

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene

$$\int_0^2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx = 2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-3)\sqrt{4-x^2}\,dx.$

Respuesta.- Comencemos usando la linealidad respecto al integrando de donde tenemos

$$\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx - 3\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Luego por el problema 25 de la sección 1.26, $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx = 0$, de donde

$$-6\int_{-1}^{1}\sqrt{4-4x^2}\,dx = -12\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = -6\pi$$

18. Calcular las áreas de los dodecágonos regulares inscrito y circunscrito en un disco circular unidad y deducir del resultado las desigualdades $3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$.

Respuesta.- Como estos son dodecágonos, el ángulo en el origen del círculo de cada sector triangular es $2\pi/12 = \pi/6$, y el ángulo de los triángulos rectángulos formado al dividir cada uno de estos sectores por la mitad es entonces $\pi/12$. Luego usamos el hecho de que,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{2}, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Ahora, para el dodecágono circunscrito tenemos el área del triángulo rectángulo T con base 1 dado por,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-\sqrt{3}) = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro, tenemos el área del dodecaedro circunscrito D_c dada por

$$a(D_c) = 24\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 12(2-\sqrt{3})$$

Por otro lado para el dodecágono inscrito, consideramos el triángulo rectángulo T con hipotenusa 1 en el diagrama. La longitud de uno de los catetos viene dada por $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ y la otra por $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Entonces el área del triángulo es,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Dado que hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro inscrito, D_i tenemos,

$$a(D_i) = 24\cdot\frac{1}{8} = 3$$

Por lo tanto, en vista de que el área del círculo unitario es, por definición π y se encuentra entre estos dos dodecaedros, tenemos,

$$3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$$

19. Sea C la circunferencia unidad, cuya ecuación cartesiana es $x^2+y^2=1$. Sea E el conjunto de puntos obtenido multiplicando la coordenada x de cada punto (x,y) de C por un factor constante $a>0$ y la coordenada y por un factor constante $b>0$. El conjunto E se denomina elipse. (Cuando $a=b$, la elipse es otra circunferencia.).

a) Demostrar que cada punto (x, y) de E satisface la ecuación cartesiana $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Demostración.- Sea $E = \{(ax, by)/(x, y) \in C, a > 0, b > 0\}$. Si (x, y) es un punto en E entonces $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ es un punto es C, ya que todos los puntos de E se obtienen tomando un punto de C y multiplicando la coordenada x por a y la coordenada y por b. Por definición de C, se tiene

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

b) Utilizar las propiedades de la integral para demostrar que la región limitada por esa elipse es medible y que su área es πab.

Demostración.- De la parte (a) sabemos que E es el conjunto de puntos (x, y) tales que $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Esto implica,

$$g(x) = b\sqrt{1 - ()^2}, \quad o \quad f(x) = -b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}^2$$

Por lo tanto, el área de E es el área cerrada de $-a$, a.
Para demostrar que esta región es medible y tiene área πab, comenzamos por mencionar

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{rcl}
\pi b & = & 2\displaystyle\int_{-1}^{1} b\sqrt{1 - x^2}\, dx \\
\pi ab & = & 2a\displaystyle\int_{-1}^{1} b\sqrt{1 - x^2}\, dx \\
\pi ab & = & 2\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2}\, dx \\
\pi ab & = & \displaystyle\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x}{a}} - \left(-b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)\, dx
\end{array}$$

Por lo tanto, sabemos que la integral de $-a$, a de $g(x) - f(x)$ existe y tiene valor πab, concluyendo que E es medible y $a(E) = \pi ab$.

20. El ejercicio 19 es una generalización del ejemplo 3 de la sección 2.3. Establecer y demostrar una generalización correspondiente al ejemplo 4 de la sección 2.3.

Demostración.- Para generalizar esto, procedemos de la siguiente manera. Sea f una función integrable no negativa en $[a, b]$, y S sea el conjunto de ordenadas de f. Si aplicamos una transformación bajo la cual multiplicamos la coordinada x de cada punto (x, y) en la gráfica de f por una constante $k > 0$ y cada coordinada y por una constante $j > 0$, entonces obtenemos una nueva función g donde un punto (x, y) está en g si y sólo si $\left(\dfrac{x}{k}, \dfrac{y}{j}\right)$ está en f. Luego,

$$\frac{y}{j} = f\left(\frac{x}{k}\right) \Longrightarrow y = j \cdot f\left(\frac{x}{k}\right) \Longrightarrow g(x) = j \cdot j\left(\frac{x}{k}\right)$$

Sea jkS y denotamos el conjunto ordenado de g.

$$a(S) = \int_a^b f(x)\, dx$$

entonces

$$\begin{aligned}
a(jsS) &= \int_{ka}^{kb} g(x)\, dx \\
&= j \cdot \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\, dx \\
&= jk \cdot \int_a^b f(x)\, dx \\
&= \int_{ka}^{kb} jk \cdot a(S)\, dx
\end{aligned}$$

21. Con un razonamiento parecido al del ejemplo 5 de la sección 2.3 demostrar el teorema 2.2.

Demostración.- Esta demostración ya fue dada junto a la definición del teorema 2.2.

2.5 Las funciones trigonométricas

Propiedad .2

1. Dominio de definición. Las funciones seno y coseno están definidas en toda la recta real.
2. Valores especiales. Tenemos $\cos 0 = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1, \cos \pi = -1$.
3. Coseno de una diferencia. Para x e y cualesquiera, tenemos
$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$
4. Desigualdades fundamentales. Para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, tenemos
$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

Teorema 2.3 Si dos funciones sen y cos satisfacen las propiedades 1 a 4, satisfacen también las siguientes:

(a) La identidad pitagórica, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo x.

Demostración.- La parte (a) se deduce inmediatamente si tomamos $x = y$ en

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$$

y usamos la relación $\cos 0 = 1$.

(b) Valores especiales, $\operatorname{sen} 0 = \cos \frac{1}{2}\pi = \operatorname{sen} \pi = 0$.

Demostración.- Resulta de (a) tomando $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \pi$ y utilizando la relación $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$.

(c) El coseno es función par y el seno es función impar. Esto es, para todo x tenemos

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

Demostración.- Que el coseno es par resulta también de

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$$

haciendo $y = 0$. A continuación deducimos la fórmula

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \operatorname{sen} x,$$

haciendo $y = \frac{1}{2}\pi$ en $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$. Partiendo de esto, encontramos que el seno es impar, puesto que

$$\operatorname{sen}(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$$

(d) Co-relaciones. Para todo x, se tiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{sen} x$$

Demostración.- Para demostrarlo utilizaremos $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \operatorname{sen} x$ reemplazando primero x por $\frac{1}{2}\pi + x$ y luego x por $-x$.

(e) Periodicidad. Para todo x se tiene $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Demostración.- El uso reiterado de (d) nos da entonces las relaciones de periodicidad (e).

(f) Fórmulas de adición. Para x e y cualesquiera, se tiene

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} y$$

Demostración.- Para demostrar, basta reemplazar x por $-x$ en $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$ y tener en cuenta la paridad o imparidad. Luego utilizando la parte (d) y la fórmula de adición para el coseno se obtiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x + y) &= -\cos\left(x + y + \tfrac{\pi}{2}\right) \\
&= -\cos x \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y
\end{aligned}$$

(g) Fórmulas de diferencias. Para todo los valores a y b, se tiene

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} = \cos \frac{a+b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}.$$

Demostración.- Reemplazaremos primero y por $-y$ en la fórmula de adición para $\operatorname{sen}(x+y)$ obteniendo

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

Restando ésta de la fórmula para $\operatorname{sen}(x+y)$ y haciendo lo mismo para función coseno, llegamos a

$$\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2 \operatorname{sen} y \cos x,$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$

Haciendo $x = (a+b)/2$, $y = (a-b)/2$ encontramos que esas se convierten en las fórmulas de diferencia (g).

(h) Monotonía. En el intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi]$, el seno es estrictamente creciente y el coseno estrictamente decreciente.

Demostración.- La propiedad 4 se usa para demostrar (h). Las desigualdades $0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$ prueban que $cos x$ y $\operatorname{sen} x$ son positivas si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Después de esto, si $0 < b < a < \frac{1}{2}\pi$, los números $(a+b)/2$ y $(a-b)/2$ están en el intrevalo $(0, \frac{1}{2}\pi)$, y las fórmulas de diferencias (g) prueban que $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$ y $\cos a < \cos b$. Esto completa la demostración.

■

2.6 Fórmulas de integración para el seno y el coseno

Teorema 2.4 Si $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$, y $n \geq 1$, tenemos

$$\frac{a}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{ka}{n} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{ka}{n} \qquad (2.6).$$

Demostración.- Las desigualdades anterior serán deducidas de la identidad

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \operatorname{sen} \frac{1}{2} x, \qquad (2.7)$$

válida para $n \geq 1$ y todo real x. Para demostrar, utilizaremos las fórmulas de diferencias (g) del teorema 2.3 para poner

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos kx = \operatorname{sen} \left(k + \frac{1}{2}\right) x - \operatorname{sen} \left(k - \frac{1}{2}\right) x$$

Haciendo $k = 1, 2, ..., n$ y sumando esas igualdades, encontramos que en la suma del segundo miembro se reduce unos términos con otros obteniéndose (2.7).
Si $\dfrac{1}{2}x$ no es un múltiplo entero de π podemos dividir ambos miembros de (2.7) por $2\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}x$ resultando

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2}x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$$

Reemplazando n por $n-1$ y sumando 1 a ambos miembros también obtenemos. (Ya que $\cos 0 = 1$).

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos kx = \frac{\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)x + \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$$

Esas dos fórmulas son válidas si $x \neq 2m\pi$, siendo m entero. Tomando $x = a/n$, donde $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ encontramos que el par de desigualdades (2.6) es equivalente al siguiente

$$\frac{a}{n}\frac{\operatorname{sen}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2n}\right)} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\frac{\operatorname{sen}\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{a}{b} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2n}\right)}$$

Este par, a su vez es equivalente al par

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) < \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2n}\right)}{\left(\dfrac{a}{2n}\right)}\operatorname{sen} a < \operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) \qquad (2.8)$$

Por consiguiente demostrar (2.6) equivale a demostrar (2.8). Demostraremos que se tiene

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta - \operatorname{sen}\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < \operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta \qquad (2.9)$$

para $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. Cuando $\theta = a/(2n)$ (2.9) se reduce a (2.8).
Para demostrar la desigualdad de la parte izquierda de (2.9), usamos la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\cos\theta + \cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta < \operatorname{sen} 2n\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} + \operatorname{sen}\theta,$$

habiendo usado también las desigualdades

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}, \quad 0z < \cos 2n\theta \leq 1, \quad \operatorname{sen}\theta > 0, \qquad (2.10)$$

siendo todas válidas ya que $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. La desigualdad (2.10) equivale a la parte izquierda de (2.9).
Para demostrar la parte derecha de (2.9), utilizamos nuevamente la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\cos\theta - \cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta$$

Sumando $\operatorname{sen}\theta$ ambos miembros, obtenemos

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta}\right) \qquad (2.11)$$

Pero ya que tenemos

$$\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta} = \frac{2\operatorname{sen}^2 n\theta}{2\operatorname{sen} n\theta\cos n\theta} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}$$

el segundo miembro de (2.11) es igual a

$$\operatorname{sen} 2n\theta\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}\right) = \operatorname{sen} 2n\theta\frac{\cos\theta\cos n\theta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta} = \operatorname{sen} 2n\theta\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}$$

Por consiguiente, para completar la demostración de (2.9), necesitamos tan sólo demostrar que

$$\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \qquad (2.12)$$

Pero tenemos

$$\cos n\theta = \cos(n-1)\cos\theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta\operatorname{sen}\theta < \cos(n-1)\theta\cos\theta < \cos(n-1)\theta\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

en donde otra vez hemos utilizado la desigualdad fundamental $\cos\theta < \theta\operatorname{sen}\theta$. ya que $\left(\cos x < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$, esta último relación implica (2.12), con lo que se completa la demostración del teorema 2.4.

■

Teorema 2.5 Si dos funciones sen y cos satisfacen las propiedades fundamentales de la 1 a la 4, para todo a real se tiene

$$\int_0^a \cos x\,dx = \operatorname{sen} a, \qquad (2.13)$$

$$\int_0^a senx\,dx = 1 - \cos a. \qquad (2.14)$$

Demostración.- Primero se demuestra (2.13), y luego usamos (2.13) para deducir (2.14). Supongamos que $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$. Ya que el coseno es decreciente en $[0,a]$ podemos aplicar el teorema 1.14 y las desigualdades del teorema 2.4 obteniendo (2.13). La fórmula es valida también para $a = 0$, ya que ambos miembros son cero. Pueden ahora utilizarse las propiedades de la integral para ampliar su validez todos los valores reales a.
Por ejemplo, si $-\frac{1}{2}\pi \leq a \leq 0$, entonces $0 \leq -a \leq \frac{1}{2}\pi$, y la propiedad de reflexión nos da

$$\int_0^a \cos x\,dx = -\int_0^{-a}\cos(-x)\,dx = -\int_0^{-a}\cos x\,dx = -\operatorname{sen}(-a) = \operatorname{sen} a.$$

Así, pues, (2.13) es válida en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$. Supongamos ahora que $\frac{1}{2}\pi \leq a \leq \frac{3}{2}\pi$. Entonces $-\frac{1}{2}\pi \leq a-\pi \leq \frac{1}{2}\pi$, de modo que

$$\int_0^a \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx + \int_{\pi/2}^a \cos x\,dx = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi + \int_{-\pi/2}^{a-\pi}\cos(x+\pi)\,dx = 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi}\cos x\,dx =$$

$$= 1 - \operatorname{sen}(a-\pi) + \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \operatorname{sen} a$$

Con ellos resulta que (2.13) es válida para todo a en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Pero este intervalo tiene longitud 2π, con lo que la fórmula (2.13) es válida para todo a puesto que ambos miembros son periódicos respecto a a con período 2π
Seguidamente usamos (2.13) para deducir (2.14). Ante todo demostramos que (2.14) es válida cuando $a = \pi/2$. Aplicando sucesivamente, la propiedad de traslación, la co-relación $\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)$, y la propiedad de reflexión, encontramos

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\,dx = \int_{-\pi/2}^0 \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\,dx = \int_{-\pi/2}^0 \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos(-x)\,dx$$

Haciendo uso de la relación $\cos(-x) = \cos x$ y la igualdad (2.13), se obtiene

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\,dx = 1$$

Por consiguiente, para cualquier a real, podemos escribir

$$\int_0^a \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\pi/2}^a \operatorname{sen} x \, dx = 1 + \int_0^{a-\pi/2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \, dx =$$

$$= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \cos x \, dx = 1 + \operatorname{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos a$$

Esto demuestra que la igualdad (2.13) implica (2.14).

■

Nota 2.2 Usando (2.13) y (2.14) junto con la propiedad aditiva

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_0^b f(x) \, dx - \int_0^a f(x) \, dx$$

llegamos a las fórmulas de integración más generales

$$\int_a^b \cos x \, dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = (1 - \cos b) - (1 - \cos a) = -(\cos b - \cos a).$$

Si nuevamente utilizamos el símbolo especial $f(x) \Big|_a^b$ para indicar la diferencia $f(b) - f(a)$, podemos escribir esas fórmulas de integración en la forma

$$\int_a^b \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_a^b \qquad y \qquad \int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_a^b$$

Nota 2.3 Con los resultados del ejemplo 1 y la propiedad de dilatación

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x/c) \, dx,$$

obtenemos las fórmulas siguientes, válidas para $c \neq 0$;

$$\int_a^b \cos cx \, dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} \cos x \, dx = \frac{1}{c}(\operatorname{sen} cb - \operatorname{sen} ca)$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} cx \, dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{c}(\cos cb - \cos ca).$$

Nota 2.4 La identidad $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ implica $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ con lo que, a partir del ejemplo 2, obtenemos

$$\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^a (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a$$

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, encontramos también

$$\int_0^a \cos^2 x\, dx = \int_0^a (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = a - \int_0^a \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a$$

2.8 Ejercicios

En este conjunto de ejercicios, se pueden emplear las propiedades del seno y del coseno citadas en las Secciones de la 2.5 a la 2.7.

1. (a)

Demostrar que $\operatorname{sen} n\pi = 0$ para todo entero n y que esos son los únicos valores de x para los que $\operatorname{sen} x = 0$.

Demostración.- Primero, ya que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$ implica que si $\operatorname{sen} x = 0$ entonces $\operatorname{sen}(-x) = 0$,, lo que es suficiente mostrar que la declaración es válida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Sabemos que $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}\pi = 0$. Por lo tanto, es válida para el caso de $n = 0$ y $n = 1$. Ahora utilizaremos la inducción dos veces, primero para los enteros pares y luego para los impares.
Supongamos que la declaración es válida para algunos pares $m \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, $\operatorname{sen}(m\pi) = 0$. Luego usando la periocidad de la función seno,

$$0 = \operatorname{sen}(m\pi) = \operatorname{sen}(m\pi + 2\pi) = \operatorname{sen}\left[(m+2)\pi\right].$$

Por lo tanto se cumple para todo par $n \in \mathbb{Z}^+$.
Luego supongamos que es verdad para algunos impares $m \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$0 = \operatorname{sen} m\pi = \operatorname{sen}(m\pi + 2\pi) = \operatorname{sen}\left[(m+2)\pi\right]$$

de donde es verdad para todo impar $n \in \mathbb{Z}^+$. Se sigue que es verdad para todo entero no negativo n, y por lo tanto para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Por otro lado debemos demostrar que estos son únicos valores reales el cual el seno es 0. Por la periocidad del seno, es suficiente mostrar que se cumple para cualquier intervalo 2π. Escogeremos el intervalo $(.\pi, \pi)$ y demostraremos que $\operatorname{sen} x = 0 \iff x = 0$ para todo $x \in (-\pi, \pi)$. Por la primera parte conocemos que $\operatorname{sen} 0 = 0$. Entonces por la propiedad fundamental del seno y el coseno, tenemos las inecuaciones

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x} \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

de donde ambos $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son positivos en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pero, de la identidad de correlación, tenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

así, para $x \in\in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ $\operatorname{sen} x \neq 0$. Pero también sabemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ y porque $x \in (0, \pi)$ tenemos $\operatorname{sen} x \neq 0$. Dado que seno es una función impar,

$$\operatorname{sen}(-x) = x \operatorname{sen} x \implies \operatorname{sen}(-x) \neq 0 \quad \text{para } x \in (0, \pi)$$

en consecuencia, $\operatorname{sen} x \neq 0$ para $x \in (-\pi, 0)$. así,

$$\operatorname{sen} x = 0 \implies x = 0 \quad \text{para } x \in (-\pi, \pi)$$

(b) Hallar todos los valores reales x tales que $\cos x = 0$.

Respuesta.- Se tiene que $\cos x = 0$ si y sólo si $x = \frac{pi}{2} + n\pi$. Probando esta proposición se tiene que $x = 0 \implies \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = 0$, aplicando la parte (a) concluimos que

$$x + \frac{\pi}{2} = n\pi \quad \implies \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

.

2. Hallar todos los reales x tales que

a) $\operatorname{sen} x = 1$

Respuesta.- x está dado por $\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. Para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $\cos x = 1$

Respuesta.- x es igual a $2n\pi$. Para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) $\operatorname{sen} x = -1$

Respuesta.- $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$. Para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) $\cos x = -1$

Respuesta.- Está dado por $x = (2n+1)\pi$. Para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Demostrar que $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(x + \pi) = -\cos x$ para todo x.

Demostración.- Por las fórmulas de adición se tiene

$$\operatorname{sen}(x + \pi) = \operatorname{sen} x \cos \pi + \cos x \operatorname{sen} \pi = -\operatorname{sen} x$$

Por otro lado se tiene

$$\cos(x + \pi) = \cos x \cos \pi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \pi = -\cos x$$

4. Demostrar que $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$ y $\cos 3x = \cos x - 4\operatorname{sen}^2 x \cos x$ para todo real x. Demostrar también que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Demostración.- Por la fórmula de adición y la identidad Pitagórica se tiene,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen} 3x & = & \operatorname{sen}(2x+x) \\ & = & \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x \\ & = & (\operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} x) \cos x + \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \\ & = & 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x \\ & = & 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x \\ & = & 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x \\ & = & 3 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}^3 x \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcll} \cos 3x & = & \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x & \\ & = & (1 - 2\operatorname{sen}^2 x) \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x & \\ & = & \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x & \\ & = & \cos x - 4 \operatorname{sen}^2 x \cos x & \text{Se demuestra la segunda proposición} \\ & = & \cos x - 4(1 - \cos^2 x) \cos x & \\ & = & \cos x - 4 \cos x + 4 \cos^3 x & \\ & = & 4 \cos x - 3 \cos x & \text{Se demuestra la tercera proposición} \end{array}$$

5. (a) Demostrar que $\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Demostración.- Por el anterior problema se tiene

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} \left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 4 \operatorname{sen}^3 \frac{\pi}{6}$$

luego ya que $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = 1$ se tiene,

$$3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 4 \operatorname{sen}^3 \frac{\pi}{6} = 1 \implies \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

se sigue,

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \left(3 \cdot \frac{\pi}{6} = 4 \cos^3 \frac{\pi}{6} - 3 \cos \frac{\pi}{6}\right)$$

por lo tanto

$$4 \cos^3 \frac{\pi}{6} - 3 \cos \frac{\pi}{6} = 0 \implies \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Demostrar que $\frac{1}{3}\pi = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}, \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$.

Demostración.- Se usa la parte (a) y la correlación del teorema 2.3, parte d,

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x \implies \cos \frac{\pi}{6} = -\operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{3}\right) \implies \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

similarmente,

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \implies \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \implies \cos \pi 3 = \frac{1}{2}.$$

(c) Demostrar que sen $\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Demostración.- Primeramente se tiene

$$1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}.$$

Luego

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4}.$$

se sigue

$$1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = 0 \implies \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \implies \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

entonces,

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 1 \implies \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1 \implies \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

por lo tanto

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Demostrar que $\tan(x-y) = (\tan x - \tan y)/(1+\tan x\tan y)$ para todo par de valores x, y tales que $\tan x\tan y \neq -1$. Obtener las correspondientes fórmulas para $\tan(x+y)$ y $\cot(x+y)$.

Demostración.- Por definición de tangente primeramente se tiene que,

$$\begin{aligned}
\tan(x-y) = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x-y)} &= \frac{\operatorname{sen}x\cos y - \operatorname{sen}x\cos y}{\cos x\cos y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y} \\
&= \frac{\operatorname{sen}x\cos y - \operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y(1+\tan x\tan y)} \\
&= \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x}
\end{aligned}$$

Luego probemos $\tan(x+y)$ para encontrar una fórmula de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} &= \frac{\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}x\cos y}{\cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y} \\
&= \frac{\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y(1-\tan x\tan y)} \\
&= \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x}
\end{aligned}$$

Por último probemos para la fórmula cotagente,

$$\begin{aligned}
\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y)} &= \frac{\cos x\cos y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x\cos y - \operatorname{sen}x\cos y} \\
&= \frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y(\cot x\cot -1)}{\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x)} \\
&= \frac{\cot x + \cot y - 1}{\cot x + \cot y}
\end{aligned}$$

7. Hallar dos números A y B tales que $3\operatorname{sen}(x+\frac{1}{3}\pi) = A\operatorname{sen}x + B\cos x$ para todo x.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} 3\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) &= 3\Big(\operatorname{sen}x\cos\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x\Big)\\ &= 3\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\\ &= \frac{3}{2}\operatorname{sen}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A=\frac{3}{2}, \qquad B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

8. Demostrar que si C y α son números reales dados, existen dos números reales A y B tal es que C $\operatorname{sen}(x-\alpha) = A\operatorname{sen}x + b\cos x$ para todo x.

Respuesta.- Para C y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\begin{aligned} C\operatorname{sen}(x+\alpha) &= C(\operatorname{sen}x\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos x)\\ &= (C\cos\alpha)\operatorname{sen}x+(C\operatorname{sen}\alpha)\cos x \end{aligned}$$

Ya que sen y cos está definida para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos $C\cos\alpha\; C\operatorname{sen}\alpha \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, los números que requerimos serán:

$$A = C\cos\alpha, \qquad B = C\operatorname{sen}\alpha$$

9. Demostrar que si A y B son números reales dados, existen dos números C y α siendo $C \geq 0$ tales que la fórmula del ejercicio 8 es válida.

Respuesta.- Sea

$$C=\sqrt{A^2+B^2}$$

de donde es verdad que

$$|A| \leq \left|\sqrt{A^2+B^2}\right|$$

y por lo tanto

$$\left|\frac{A}{C}\leq 1\right|$$

así sabemos que existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\cos\alpha=\frac{A}{C}.$$

Pero si $\cos\alpha = \dfrac{A}{C}$ entonces,

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha = \frac{A^2}{C^2} \quad \Longrightarrow \quad 1-\operatorname{sen}^2\alpha &= \frac{A^2}{A^2+B^2} \\
\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2\alpha &= 1-\frac{A^2}{A^2+B^2} = \frac{B^2}{A^2+B^2} \\
\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha &= \frac{B}{C}
\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}
C\operatorname{sen}(x+\alpha) &= C\operatorname{sen}x\cos\alpha + C\operatorname{sen}\alpha\cos x \\
&= (A^2+B^2)^{1/2}\frac{A}{(A^2+B^2)^{1/2}}\operatorname{sen}x + (A^2+B^2)^{1/2}\frac{B}{(A^2+B^2)^{1/2}}\cos x \\
&= A\operatorname{sen}x + B\cos x
\end{aligned}$$

10. Determinar C y α, siendo $C>0$, tales que $C\operatorname{sen}(x+\alpha) = -2\operatorname{sen}x - 2\cos x$ para todo x.

Respuesta.- Por el anterior ejercicio tenemos que

$$A\operatorname{sen}x + B\cos x = C\operatorname{sen}(x+\alpha)$$

para

$$C=\sqrt{A^2+B^2}, \text{ y } \operatorname{sen}\alpha = \frac{A}{(A^2+B^2)^{1/2}}, \quad \cos\alpha = \frac{B}{(A^2+B^2)^{1/2}}$$

Luego ya que tenemos $A=B=-2$, entonces

$$C = \left[(-2)^2+(-2)^2\right]^{1/2} = 2\sqrt{2}$$

y,

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha = \frac{5\pi}{4}.$$

11. Demostrar que si A y B son números reales dados, existen dos números C y α siendo $C\geq 0$ tales que $C\cos(x+\alpha) = A\operatorname{sen}x + B\cos x$. Determinar C y α si $A=B=1$.

Demostración.- Por el problema 9, sabemos que para $A,B\in\mathbb{R}$, existe $D,\beta\in\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
D\operatorname{sen}(x+\beta) &= A\operatorname{sen}x + B\cos x \\
D\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}+x+\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right] &= A\operatorname{sen}x + B\cos x \\
D\cos\left[x+\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right] &= A\operatorname{sen}x + B\cos x
\end{aligned}$$

entonces,

$$C=D, \quad \alpha = \beta-\frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto, C y α existe si $C\cos(x+\alpha) = A\operatorname{sen} x + B\cos x$. Luego, si $A = B = 1$, entonces $C = \sqrt{2}$ y $\alpha = \beta - \dfrac{\pi}{2}$ donde $\operatorname{sen}\beta = \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \beta = \dfrac{\pi}{4}$. Así,

$$C = \sqrt{2}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

12. Hallar todos los números reales x tales que $\operatorname{sen} x = \cos x$.

Respuesta.- Sea $\operatorname{sen} x = \cos x$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \cos x - \operatorname{sen} x &=& 0 \\ \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x\cos x &=& 0 \\ \operatorname{sen} 2x &=& \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \\ \operatorname{sen} 2x &=& 1 \\ 2x &=& \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \\ x &=& \dfrac{\pi}{4} + n\pi \quad para\ n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

13. Hallar todos los números reales tales que $\operatorname{sen} x - \cos x = 1$.

Respuesta.- Por el ejercicio 9 sabemos que existe C, α tal que

$$A\operatorname{sen} x + B\cos x = C\operatorname{sen}(x+\alpha),$$

para cualquier $A, B \in \mathbb{R}$. También sabemos que,

$$C = (A^2+B^2)^{1/2}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{A}{(A^2+B^2)^{1/2}} \qquad \frac{B}{(A^2+B^2)^{1/2}}$$

Así, en este caso tenemos $A = 1$, $B = 1$ y calculando,

$$C = \sqrt{2}, \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

luego sabiendo que $\operatorname{sen} x - \cos x = 1$ entonces,

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) &=& 1 \\ \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) &=& \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x - \dfrac{\pi}{4} &=& x - \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \ o \ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{4} + 2n\pi \\ x &=& \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \ o \ x = \pi + 2n\pi \end{array}$$

14. Demostrar que las identidades siguientes son válidas para todos los pares x e y:

(a) $2 \operatorname{sen} x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$.

Demostración.- Usando la fórmula para el coseno de una suma y de una diferencia, se sigue,

$$\begin{array}{rcl} 2\cos x \cos y & = & \cos x \cos y + \cos x \cos y \\ & = & \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ & = & \cos(x-y) + \cos(x+y) \end{array}$$

(b) $2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

Demostración.- Similar al anterior ejercicios tenemos,

$$\begin{array}{rcl} 2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y & = & \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ & = & \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) \\ & = & \cos(x-y) - \cos(x+y) \end{array}$$

(c) $2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$.

Demostración.- Usando la fórmula del seno de una suma y diferencia:

$$\begin{array}{rcl} 2\operatorname{sen} x \cos y & = & \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} x \cos y \\ & = & \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x + \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x \\ & = & \operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y) \end{array}$$

15. Si $h \neq 0$, demostrar que las identidades siguientes son válidas para todo x:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Estas fórmulas se utilizan en cálculo diferencial.

Demostración.- Usando el seno y coseno para la suma y diferencia, se sigue,

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ = & \dfrac{\operatorname{sen}(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - \operatorname{sen}(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h} \\ = & \dfrac{\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2}) + \operatorname{sen}(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2}) - \operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2}) + \operatorname{sen}(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2})}{h} \\ = & \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ = & \dfrac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h/2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \end{array}$$

y

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
=\;&\frac{\cos(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-\cos(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}\\
=\;&\frac{\cos(x+\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})-\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})-\cos(x+\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})-\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}\\
=\;&\frac{2\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}\\
=\;&-\frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h/2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)
\end{aligned}$$

16. Demostrar si son o no ciertas las siguientes afirmaciones.

(a) Para todo $x \neq 0$ se tiene $\operatorname{sen} 2x \neq 2\operatorname{sen} x$.

Demostración.- Sea $x = \pi$, entonces $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 2\pi = 0$, y $2\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\pi = 0$. Luego por hipótesis $x \neq 0$, pero $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x$, por lo tanto este proposición es falsa.

(b) Para cualquier x, existe un y tal que $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$.

Demostración.- Sea $x = 0$, entonces $\cos(x+y) = \cos y$, pero $\cos x + \cos y = 1 + \cos y$. Por lo tanto la proposición es falsa.

(c) Existe un x tal que $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ para todo y.

Demostración.- Sea $x = 0$, entonces $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} y$, para todo y, y $x + \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} y$ para todo y. Y por lo tanto la proposición es verdadera.

(d) Existe un $y \neq 0$ tal que $\int_0^y \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} y$.

Demostración.- Sea $y = \dfrac{\pi}{2}$, entonces $\displaystyle\int_0^p i2\operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$ y $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$. Por lo tanto la proposición es verdadera.

17. Calcular la integral $\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx$ para cada uno de los siguientes valores de a y b. En cada caso interpretar el resultado geométricamente en función del área.

(a) $a = 0,\; b = \pi/6$.

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos(\pi/6) = 1 - \sqrt{3}/2.$

(b) $a = 0, b = \pi/4$.

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos(\pi/4) = 1 - \sqrt{2}/2.$

(c) $a = 0, b = \pi/3$.

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos(\pi/3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

(d) $a = 0, b = \pi/2$.

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos(\pi/2) = 1.$

(e) $a = 0, b = \pi$.

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2.$

(f) $a = 0, b = 2\pi$.

Respuesta.- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos(2\pi) = 1 - 1 = 0.$

(g) $a = -1, b = 1$

Respuesta.- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} x\, dx = -[\cos(1) - \cos(-1)] = 0.$

(h) $a = -\pi/6, b = \pi/4$.

Respuesta.- $\displaystyle\int_{\pi/4}^{-\pi/6} \operatorname{sen} x\, dx = -[\cos(\pi/4) - \cos(-\pi/6)] = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi} (x + \operatorname{sen} x)\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} + 1 - (\cos \pi) = \frac{\pi^2}{2} + 1 - (-1) = \frac{\pi^2}{2} + 2.$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x^2 + \cos x)\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi/2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3} + 1 = \frac{\pi^3}{24} + 1.$

20. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - 1 = 0.$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos x|\, dx$

Respuesta.- Ya que $\cos x - \operatorname{sen} x \geq 0$ esta definida por $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y $\cos x - \operatorname{sen} x < 0$ esta dado por $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos x|\, dx &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&+ \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}$$

22. $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\, dt = \frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} + \operatorname{sen}\pi = \frac{\pi}{2}.$

23. $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{1}{2} + \cos t\right|\, dx.$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \left|\frac{1}{2} + \cos t\right| dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\, dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}\, dt + \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos(t)\, dt - \int_{\frac{2\pi}{3}} \pi \frac{1}{2}\, dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos(t)\, dt \\
&= \frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} + \operatorname{sen}(t)\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{t}{2}\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}\, dt - \operatorname{sen}(t)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{6}\right) - \left[\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

24. $\displaystyle\int_{-\pi}^{x} \left|\frac{1}{2} + \cos t\right|\, dx$ si $0 \leq x \leq \pi$.

Respuesta.- Primero queremos determinar $\frac{1}{2} + \cos t$ para t positivo y en otro caso negativo, por lo tanto,

$$\left|\frac{1}{2} + \cos t\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \cos t & si \quad -\pi \leq x \leq -\dfrac{2\pi}{3} \; o \; \dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi \\ -\left(\dfrac{1}{2} + \cos t\right) & si \quad -\dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Ahora consideremos dos casos. Si $0 \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x}\left|\frac{1}{2}+\cos t\right|\,dt &= -\int_{-ß}^{-\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)\,dt+\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{x}\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)\,dt\\
&= -\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\operatorname{sen}(-\pi)\right]+\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\\
&+ \left[\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\
&= \frac{\pi}{6}+\sqrt{3}+\frac{x}{2}+\operatorname{sen}x
\end{aligned}$$

En otro caso, si $\frac{2\pi}{3}\leq x\leq\pi$, entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x}\left|\frac{1}{2}+\cos t\right| &= -\int_{-\pi}^{-\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)\,dt+\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)\,dx-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)\,dx\\
&= \left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-\left(\operatorname{sen}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \frac{5\pi}{6}+2\sqrt{3}-\frac{x}{2}-\operatorname{sen}x
\end{aligned}$$

25. $\displaystyle\int_{x}^{x^2}(t^2+\operatorname{sen}t)\,dx=\frac{x^6-x^3}{3}-\cos(x^2)+\cos x.$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\operatorname{sen}2x\,dx=\frac{1}{2}\int_{0\cdot 2}^{\frac{\pi}{2}\cdot 2}\operatorname{sen}x\,dx=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=1.$

27. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3}\cos\frac{x}{2}\,dx=2\int_{0\cdot\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}}\cos x\,dx=2(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}-\operatorname{sen}0)=1.$

28. Demostrar las siguientes fórmulas de integración, válidas para $b\neq 0$.

$$\int_0^x cos(a+bt)\,dt=\frac{1}{b}\left[\operatorname{sen}(a+bx)+\operatorname{sen}a\right],$$

$$\int_0^x \operatorname{sen}(a+bt)\,dt=-\frac{1}{b}\left[\cos(a+bx)-\cos a\right].$$

Demostración.- Usando la formula de adición tenemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos(a+bt)\,dt &= \int_0^x [\operatorname{sen} a\cos(bt)+\operatorname{sen}(bt)\cos a]\,dt\\
&= \frac{\cos a}{b}\int_0^{bx}\cos t\,dt - \frac{\operatorname{sen} a}{b}\int_0^{bx}\operatorname{sen} t\,dt \qquad b\neq 0\\
&= \frac{1}{b}[\cos a\operatorname{sen}(bx)-\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} a\cos(bx)]\\
&= \frac{1}{b}[\operatorname{sen}(a+bx)-\operatorname{sen} a]
\end{aligned}$$

Similar a la anterior demostración tenemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \operatorname{sen}(a+bt)\,dt &= \int_0^x [\operatorname{sen} a\cos(bt)+\operatorname{sen}(bt)\cos a]\,dt\\
&= \frac{\operatorname{sen} a}{b}\int_0^{bx}\cos t\,dt - \frac{\cos a}{b}\int_0^{bx}\operatorname{sen} t\,dt \qquad b\neq 0\\
&= \frac{\operatorname{sen} a}{b}\operatorname{sen}(bx)+\frac{\cos a}{b}(1-\cos(bx))\\
&= \frac{1}{b}[\operatorname{sen} a\operatorname{sen}(bx)+\cos a-\cos a\cos(bx)]\\
&= -\frac{1}{b}[\cos(a+bx)-\cos a]
\end{aligned}$$

29. **(a)** Hacer uso de la identidad $\operatorname{sen} 3t = 3\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen}^3 t$ para deducir la fórmula de integración

$$\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\,dt = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}(2\operatorname{sen}^2 x)\cos x.$$

Respuesta.- $\operatorname{sen}^3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\operatorname{sen} t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3t)$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\,dx &= \int_0^x \left[\frac{3}{4}\operatorname{sen} t-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(3t)\right]dt\\
&= \frac{3}{4}(1-\cos x)-\frac{1}{12}\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt\\
&= \frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos x-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cos 3x\\
&= \frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\left(\cos x-4\operatorname{sen}^2 x\cos x\right)\\
&= \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cos x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\cos x\\
&= \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(2+\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x
\end{aligned}$$

(b) Deducir la identidad $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ y utilizándola para demostrar que

$$\int_0^x \cos^3 t\ dt = \frac{1}{3}(2+\cos^2 x)\,\text{sen}\, x$$

Respuesta.- $\cos 3x = 4\cos^2 - 3\cos x$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos^3 t\ dt &= \int_0^x [\cos(3t) + 3\cos t]\ dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^x \cos(3t)\ dt + \int_0^x \cos t\ dt \\
&= \frac{1}{12}\int_0^3 x\cos t\ dt + \frac{3}{4}\int_0^x \cos t\ dt \\
&= \frac{1}{12}\,\text{sen}(3t)\ dt + \frac{3}{4}\,\text{sen}\, x \\
&= \frac{1}{12}(3\,\text{sen}\, x - 4\,\text{sen}^3 x) + \frac{3}{4}\,\text{sen}\, x \\
&= \text{sen}\, x \frac{1}{3}\,\text{sen}^3 x \\
&= \text{sen}\, x \frac{1}{3}\,\text{sen}^2 x\,\text{sen}\, x \\
&= \text{sen}\, x - \frac{1}{3}\,\text{sen}^2 x\,\text{sen}\, x \\
&= \left[1 - \frac{1}{3}\left(1-\cos^2 x\right)\right]\text{sen}\, x \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos^2 x\right)\text{sen}\, x \\
&= \frac{1}{3}\left(2+\cos^2 x\right)\text{sen}\, x
\end{aligned}$$

30. Si una función f es periódica $p > 0$ e integrable en $[0,p]$, demostrar que $\int_0^{2p} f(x)\ dx = \int_a^{a+p} f(x)\ dx$ para todo a.

Demostración.- Sabemos que existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n \leq \frac{a}{p} < n+1 \quad \Longrightarrow \quad np \leq a < np + p \leq a + p \quad \Longrightarrow \quad np \leq a < (n+1)p \leq a+p$$

Entonces, empezamos dividiendo la integral en dos partes

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+p} f(x)\,dx &= \int_a^{(n+1)p} f(x)\,dx + \int_{(n+1)p}^{a+p} f(x)\,dx \\
&= \int_{a-np}^{(n+1)p-np} f(x+np)\,dx + \int_{(n+1)p-(n+1)p}^{a+p-(n+1)p} f(x+(n+1)p)\,dx \\
&= \int_{a-np}^{p} f(x)\,dx + \int_0^{a-np} f(x)\,dx && \textit{periodicidad de } p \\
&= \int_0^{p} f(x)\,dx && 0 \le a-np < p
\end{aligned}$$

31. (a) Demostrar que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = 0$ para todos los enteros $n \neq 0$.

Demostración.-

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\,dx &= \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx \\
\int_0^{2\pi\cdot n} \operatorname{sen} x\,dx &= \int_0^{2\pi\cdot n} \cos x\,dx \\
-\frac{1}{n}\left[\cos(2\pi\cdot n) - \cos 0\right] &= \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}(2\pi\cdot n) - \operatorname{sen} 0\right] \\
-\frac{1}{n}(0-0) &= \frac{1}{n}(1-1) \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

(b) Usando la parte (a) y las fórmulas de adición para seno y coseno, establecer las siguientes fórmulas, válidas para los enteros m y n, tales que $m^2 \neq n^2$;

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\,dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \qquad \textit{si } n \neq 0$$

Estas fórmulas son las relaciones de ortogonalidad para el seno y el coseno.

Demostración.-

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen}(n+m)x - \operatorname{sen}(n-m)x\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2(n+m)}\int_0^{2\pi(n+m)} \operatorname{sen} x\,dx - \frac{1}{2(n-m)}\int_0^{2\pi(n-m)} \operatorname{sen} x\,dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

32. A partir de la identidad

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx = \operatorname{sen}(2k+1)\frac{x}{2} - \operatorname{sen}(2k-1)\frac{x}{2}$$

y de las propiedades telescópicas de las sumas finitas demostrar que si $x \neq 2m$ (m entero) se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}(n+1)x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}$$

Demostración.- Haciendo $k = 1, 2, \ldots, n$ y sumando esas igualdades, se obtiene que

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname{sen}(2k+1)\frac{x}{2} - \operatorname{sen}(2k-1)\frac{x}{2} \right]$$

Luego por la propiedad telescopica de las sumas finitas, se tiene,

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \operatorname{sen} \left[(2n+1)\frac{x}{2} \right] - \operatorname{sen}(0+1)\frac{x}{2}$$

luego,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \cos kx &= \frac{\operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right] - \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\frac{x}{2}-\frac{x}{2}}{2}\cos\frac{(2n+1)\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

33. Si $x \neq 2m\pi$ (m un entero), probar que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}nx \operatorname{sen} \frac{1}{2}(n+1)x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}$$

Demostración.- Recordemos que

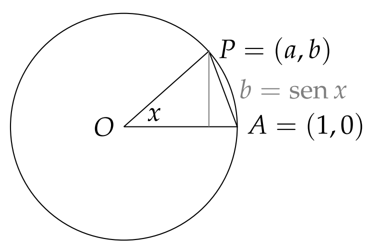
$$\begin{aligned} -2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(kx) &= \cos\left(\frac{x}{2}+kx\right) - \cos\left(\frac{x}{2}-kx\right) \\ &= \cos\left[(2k+1)\frac{x}{2}\right] - \cos\left[(1-2k)\frac{x}{2}\right] \\ &= \cos\left[(2k+1)\frac{x}{2}\right] - \cos\left[(2k-1)\frac{x}{2}\right] \end{aligned}$$

Luego, aplicando la propiedad telescópica de las sumas finitas, y la primera parte del teorema 4 se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx &= \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\right] - \cos\frac{x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\cos(nx)\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{x}{2}(\cos(nx)-1) - \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{-2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{nx}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{ns}{2}\cos\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{nx}{2} + \cos\frac{nx}{2}\operatorname{sen} x2\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

34. Se hace referencia a la figura 2.7. Por comparación del área del triángulo OAP con la del sector circular OAP, demostrar que $\operatorname{sen} x < x$ si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Usando entonces el hecho de que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, demostrar que $|\operatorname{sen} x| < |x|$ si $0 < |x| < \frac{1}{2}\pi$.

Demostración.- Considere la siguiente figura



Asumiendo que el radio es $r = 1$. Para $0 < x < \frac{x}{2}$ tenemos el triangulo OAP_t de tamaño de base $a = 1$ y altura $b = \operatorname{sen} x$, es decir,

$$Area(OAP_t) = \frac{1}{2}ab = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

Luego el área del sector circular OAP_s es

$$Area(OAP_s) = \frac{x}{2\pi}\pi r^2 = \frac{x}{2}$$

Ya que el área del triángulo OAP_t es menor al área del sector OAP_t tenemos,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x < x$$

dado que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces

$$\operatorname{sen} x < x \quad \Longrightarrow \quad -\operatorname{sen} x > -x \quad \Longrightarrow \quad |\operatorname{sen} x| < |x|$$

para $0 < |x| < \frac{x}{2}$.

2.10 la integral para el área en coordenadas polares

Teorema 2.6 Sea R el conjunto radial de una función no negativa f en un intervalo $[a,b]$, donde $0 \leq b-a \leq 2\pi$, y se asume que R es medible. Si f^2 es integrable en $[a,b]$ el área de R esta dado por la integral

$$a(R) = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\, d\theta$$

Demostración.- Elegimos dos funciones escalonadas s y t que satisface

$$0 \leq s(\theta) \leq f(\theta) \leq t(\theta)$$

Para todo θ en $[a,b]$, y denotamos S y T sus conjuntos radiales, respectivamente. Ya que $s \leq f \leq t$ en $[a,b]$, los conjuntos radiales satisfacen la relación de inclusión $S \subseteq R \subseteq T$. Por lo tanto, por la propiedad monótona del área, tenemos $a(S) \leq a(R) \leq a(T)$. Pero S y T son conjuntos radiales de la función escalonada, así $a(S) = \frac{1}{2}\int_a^b s^2(\theta)\, d\theta$ y $a(T) = \frac{1}{2}\int_a^b t^2(\theta)\, d\theta$. Entonces tenemos la inecuación

$$\int_a^b s^2(\theta)\, d\theta \leq 2a(R) \leq \int_a^b t^2(\theta)\, d\theta$$

para todo función escalonada s y t que satisface $s \leq f \leq t$ en $[a,b]$. Donde s^2 y t^2 son funciones escalonadas arbitrarias que satisfacen $s^2 \leq f^2 \leq t^2$ en $[a,b]$, se sigue f^2 es integrable, y tenemos $2a(R) = \int_a^b f^2(\theta)\, d\theta$. Esto prueba el teorema.

■

2.11 Ejercicios

En cada uno de los ejercicios 1 al 4, demostrar que el conjunto de puntos cuyas coordenadas rectangulares (x,y) satisfacen la ecuación cartesiana dada, es igual al conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas polares (r,θ) satisfacen la correspondiente ecuación polar.

1. $(x-1)^2 + y^2 = 1; \quad r = 2\cos\theta,\ cos\theta.$

Respuesta.- Sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ entonces

$$\begin{array}{rcr} (x-1)^2 + y^2 = 1 & \Longrightarrow & (r\cos\theta - 1)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ & \Longrightarrow & r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ & \Longrightarrow & r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2r\cos\theta = 0 \\ & \Longrightarrow & r = 2\cos\theta \end{array}$$

Donde $\cos\theta > 0$ entonces $r > 0$.

2. $x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2+y^2}; \quad r = 1 + \cos\theta.$

Respuesta.- Sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ entonces

$$\begin{array}{rcrcl} x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2+y^2} & \Longrightarrow & r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta & = & \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} \\ & \Longrightarrow & r^2 - r\cos\theta & = & r \\ & \Longrightarrow & 1 + \cos\theta & = & r. \end{array}$$

3. $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2,\ y^2 \leq x^2; \quad r = \sqrt{\cos 2\theta},\ \cos 2\theta \geq 0$

Respuesta.- Sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ entonces

$$\begin{array}{rcrcl} (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2 & \Longrightarrow & (r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^2 & = & r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta \\ & \Longrightarrow & r^4 & = & r^2\cos(2\theta) \\ & \Longrightarrow & r^2 & = & r^2\cos(2\theta) \\ & \Longrightarrow & r & = & \sqrt{\cos(2\theta)} \end{array}$$

Ya que $cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta$.

4. $(x^2+y^2) = |x^2-y^2|; \quad r = \sqrt{|\cos 2\theta|}$

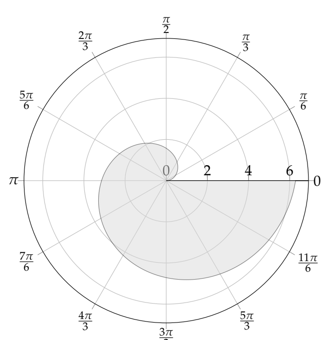
Respuesta.- Sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ entonces

$$\begin{array}{rcrcl} (x^2+y^2) = |x^2-y^2| & \Longrightarrow & (r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^2 & = & |r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta| \\ & \Longrightarrow & r^4 & = & r^2|\cos(2\theta)| \\ & \Longrightarrow & r^2 & = & |\cos(2\theta)| \\ & \Longrightarrow & & = & \sqrt{|\cos(2\theta)|}. \end{array}$$

En cada uno de los ejercicios del 5 al 15, trazar la gráfica de f en coordenadas polares y calcular el área del conjunto radial de f sobre el intervalo especificado. Se supondrá que cada conjunto es medible.

5. Espiral de Arquimedes: $f(\theta) = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

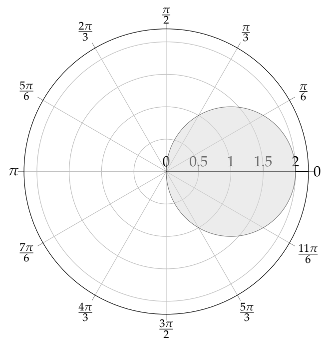
Respuesta.-



$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\theta^2\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\left(\left.\frac{\theta^3}{3}\right|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{4\pi^3}{3}$$

6. Circunferencia tangente al eje y: $f(\theta) = 2\cos\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Respuesta.-

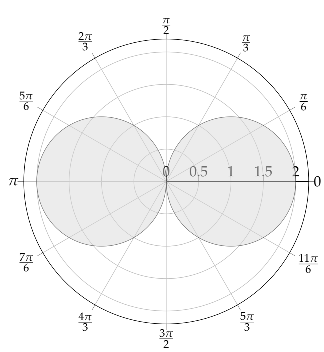


$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2\theta \, d\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-2\operatorname{sen}^2\theta - 1)\, d\theta \\
&= 2\pi + \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta\right) - \pi \\
&= \pi + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\theta\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) + \pi \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

7. Dos circunferencias tangentes al eje y: $f(\theta) = 2|\cos\theta|, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

Respuesta.-

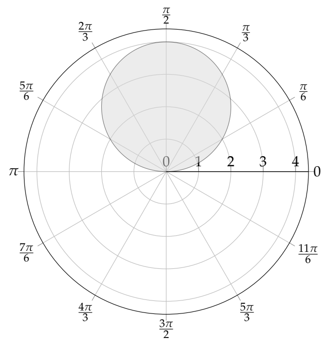
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\cos^2\theta \, d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\, d\theta = 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\, d\theta + 2\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\, d\theta = 2\pi + 0 = 2\pi$$



8. Circunferencia tangente al eje x: $f(\theta) = 4\operatorname{sen}\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$.

Respuesta.-

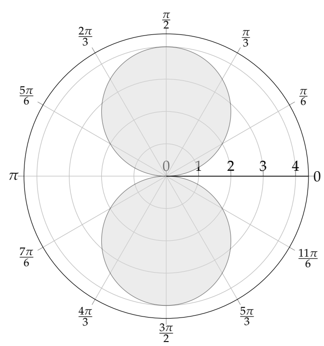
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} 16\operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = 8\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = 8\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\pi\right) = 4\pi$$



9. Dos circunferencias tangentes al eje x: $f(\theta) = 4|\operatorname{sen}\theta|, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

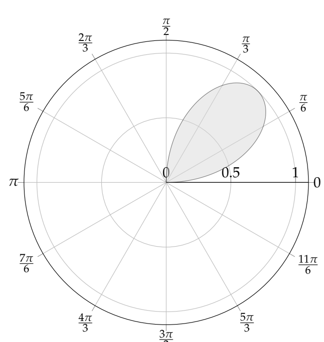
Respuesta.-

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} 16\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = 8\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi\right) = 8\pi$$



10. Pétalo de rosa: $f(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$.

Respuesta.-

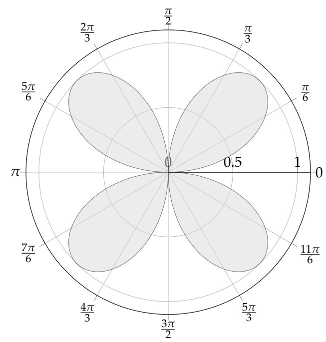


$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\cdot 2}\int_{0\cdot 2}^{2\cdot\pi/2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\theta}{2}\right)\, d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\pi)\right] = \frac{\pi}{8}$$

Se aplico el teorema 1.19 (dilatación o contracción del intervalo de integración) y la nota 2.4 respectivamente.

11. Rosa de cuatro hojas: $f(\theta) = |\operatorname{sen} 2\theta|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

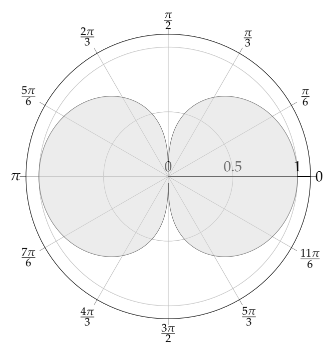
Respuesta.-



$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\cdot 2}\int_{2\cdot 0}^{2\cdot 2\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\theta}{2}\right)\, d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{4\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\cdot 4\pi)\right] = \frac{\pi}{2}$$

12. Ocho aplastado: $f(\theta) = \sqrt{|\cos\theta|}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

Respuesta.-



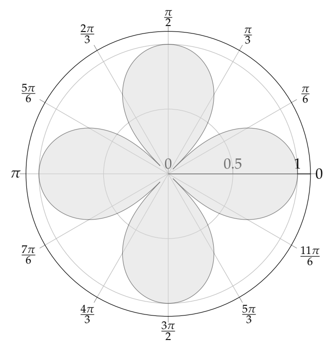
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{|\cos\theta|}\right)^2 d\theta &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} 2\pi - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}(1+1+1+0+1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Esto por la nota 2.2. y por hecho de que

$$|\cos\theta| = \begin{cases} + & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ - & si \quad \dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{3\pi}{2} \\ + & si \quad \dfrac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$$

13. Trébol de cuatro hojas: $f(\theta) = \sqrt{|\cos 2\theta|}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$

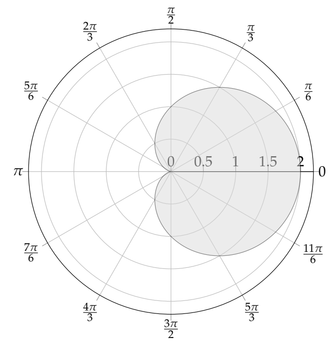
Respuesta.-



$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{|\cos(2\theta)|}\right)^2\,d\theta &= \frac{1}{2\cdot 2}\int_{0\cdot 2}^{2\pi\cdot 2}\left|\cos\frac{2\theta}{2}\right|\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{4\pi}|\cos\theta|\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right. \\
&+ \left.\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta - \int_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta + \int_{\frac{7\pi}{2}}^{4\pi}\cos\theta\,d\theta\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}2\pi - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right. \\
&+ \left.\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2} - \operatorname{sen}2\pi - \left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}4\pi - \operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}(1+1+1+0+1+1+1+1+0+1) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

14. Cardioide: $f(\theta) = 1 + \cos\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$

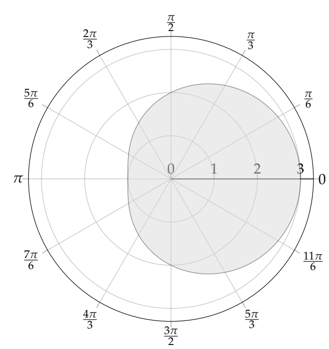
Respuesta.-



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)\,d\theta\\ &= \frac{1}{2}\left(2\pi+2\,\mathrm{sen}\,2\pi+\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,4\pi\right)\\ &= \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

15. Caracol: $f(\theta)=2+\cos\theta, \quad 0\le\theta\le 2\pi$.

Respuesta.-



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\theta)^2\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4+4\cos\theta+\cos^2\theta\right)\,d\theta\\ &= \frac{1}{2}\left(8\pi+4\,\mathrm{sen}\,2\pi+\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,4\pi\right)\\ &= \frac{9\pi}{2}\end{aligned}$$

2.12 Aplicación de la integración al cálculo de volúmenes

1. Propiedad de no negatividad. Para cada conjunto S de $\mathscr{A}$ se tiene $v(S)\ge 0$.

2. Aditividad. Si S y T pertenecen a $\mathscr{A}$, $S \cup T$ y $S \cap T$ también pertenecen a $\mathscr{A}$, y se tiene $v(S \cup T) = v(S) + v(T) - v(S \cap T.)$

3. Propiedad de la diferencia. Si S y T pertenecen a $\mathscr{A}$, siendo $S \subseteq T$, $T - S$ pertenece a $\mathscr{A}$ y se tiene $v(T - S) = v(T) - v(S)$.

Ya que $v(T - S) \geq 0$, implica también la siguiente propiedad monónota:

$$v(S) \leq v(T), \quad \text{para los conjuntos S y T en } \mathscr{A} \; con \; S \subseteq T.$$

4. Principio de Cavalieri. Si S y T son dos sólidos de Cavalieri pertenecientes a $\mathscr{A}$ tales que $a(S \cap F) \leq a(T \cap F)$ para todo plano F perpendicular a una recta dada, entonces $v(S) \leq v(T)$.

5. Elección de escala. Toda caja B pertenece a $\mathscr{A}$. Si los lados o aristas de B tienen longitudes a, b y c, se tiene que $v(B) = abc$.

6. Todo conjunto convexo pertenece a $\mathscr{A}$.

Teorema 2.7 Sea R un sólido de Cavalieri de $\mathscr{A}$ cuya función área seccional a_R, sea integrable en un intervalo $[a, b]$ y nula fuera del mismo. En tales condiciones el volumen de R es igual a la integral del área seccional:

$$v(R) = \int_a^b a_R(u)\, du$$

Demostración.- Elijamos funciones escalonadas s y t tales que $s \leq a_R \leq t$ en $[a, b]$ y definamos s y t como nulas fuera de $[a, b]$. Para cada subintervalo de $[a, b]$ en el que s sea constante, podemos imaginar un sólido cilíndrico construido de modo que su área seccional en este subintervalo tenga el mismo valor constante que s. La reunión de esos cilindros sobre los intervalos en los que s es constante es un sólido S cuyo volumen $v(S)$ es, por la aditividad, igual a la integral $\int_a^b s(u)\; du$. Del mismo modo, existe un sólido T, una reunión de cilindros, cuyo volumen $v(T) = \int_a^b t(u)\; du$. Pero $a_S(u) = s(u) \leq t(u) = a_r(u)$ para todo u de $[a, b]$, de modo que el principio de Cavalieri implica que $v(S) \leq v(R) \leq v(T)$. En otras palabras, $v(R)$ satisface las desigualdades,

$$\int_a^b s(u)\; du \leq v(R) \leq \int_a^b t(u)\; du.$$

para todas las funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \leq a_S \leq t$ en $[a, b]$. Puesto que a_S es integrable en $[a, b]$, resulta que $v(R) = \int_a^b a_S(u)\; du$. ∎

2.13 Ejercicios

1. Usa la integración para calculular el volumen de un cono circular recto engendrado haciendo girar alrededor del eje x la gráfica de la función f dada por $f(x) = xc$ en el intervalo $0 \leq x \leq b$. Demostrar que el resultado es el producto de un tercio del área de la base por la altura del cono.

Demostración.- Primero podemos ver que el área de un sección transversal de este sólido de revolución es $\pi c^2 x^2$. Así, usando la ecuación del volumen de un sólido de Cavalieri tenemos,

$$v(R) = \int_0^b \pi c^2 x^2\; dx = \pi c^2 \frac{x^3}{3}\bigg|_0^b = \pi c^2 \frac{b^3}{3}$$

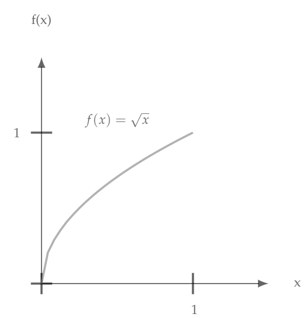
Dado que el área de la base es $\pi(cb)^2$, y en vista de que cb es el alto de $f(x) = cx$ a $x = b$ para luego girar alrededor del eje x, entonces tenemos

$$V = \frac{1}{3}a(B)h = \pi c^2 \frac{b^3}{3}$$

En cada uno de los ejercicios del 2 al 7, calcular el volumen del sólido engendrado al girar el conjunto de ordenadas de la función f sobre el intervalo indicado. Dibujar cada uno de los conjuntos de ordenadas.

2. $f(x) = \sqrt{x} \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

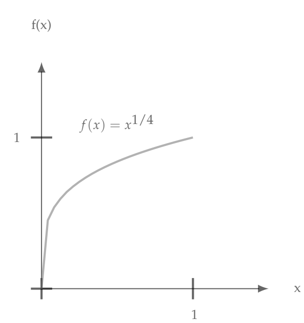


Entonces calculando el volumen del sólido se tiene,

$$V = \int_0^1 \pi \sqrt{x}^2 \, dx = \int_0^1 \pi x \, dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

3. $f(x) = x^{1/4}, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

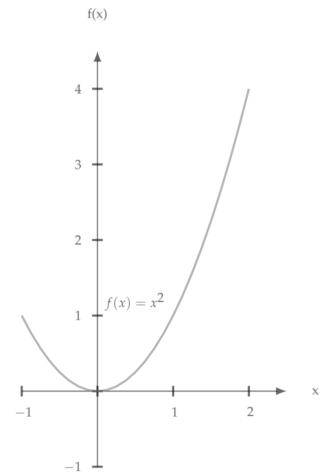


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$V = \int_0^1 \pi (x^{1/4})^2 = \int_0^1 \pi x^{1/2} = \pi \frac{2x^{3/2}}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

4. $f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2.$

Respuesta.-

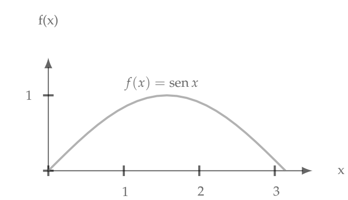


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$V = \int_{-1}^{2} \pi x^{2^2} \, dx = \int_{-1}^{2} \pi x^2 \, dx = \pi \frac{x^5}{5}\bigg|_{-1}^{2} = \frac{33\pi}{5}.$$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq pi.$

Respuesta.-

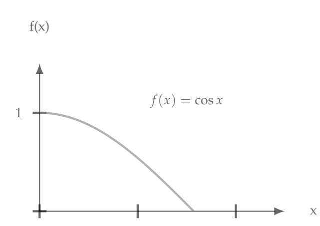


Calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$V = \int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} [1 - \cos(2x)] \, dx = \frac{\pi}{2}\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

6. $f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Respuesta.-

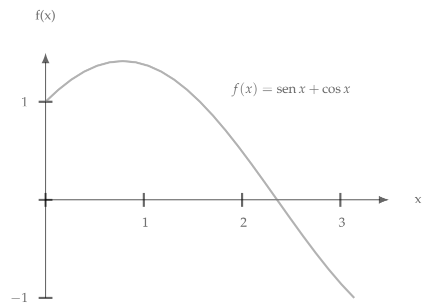


Calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$V = \int_0^{\pi/2} = \pi \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} [1 - \cos(2x)] \, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

Respuesta.-



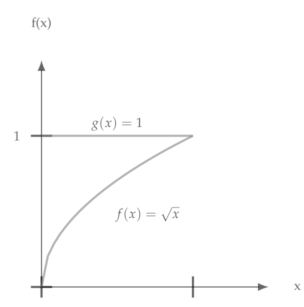
Calculamos el volumen del sólido de revolución.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi} \pi(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \, dx \\ &= \pi \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx + \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} x \cos x + \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \right) \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi^2. \end{aligned}$$

En cada uno de los ejercicios 8 al 11, dibujar la región entre las gráficas de f y g y calcular el volumen del sólido obtenido al girar dicha región alrededor del eje x.

8. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

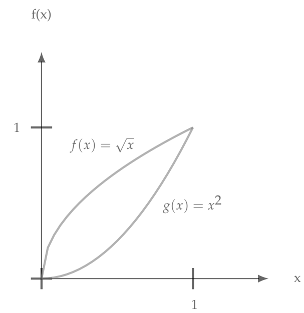


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^1 (1^2 - \sqrt{x}^2) \, dx = \pi \int_0^1 (1 - x) \, dx = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

9. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

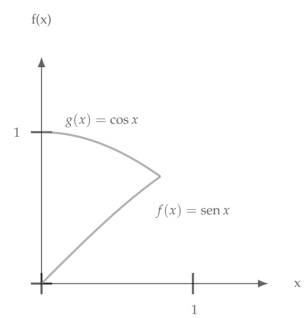


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^{2^2})\, dx = \pi \int_0^1 (x - x^4)\, dx = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}.$$

10. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$

Respuesta.-

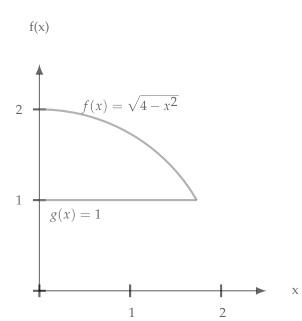


Luego calculamos el volumen del sólido de revolución de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

11. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$

Respuesta.-



Luego calculamos el volumen del sólido de revolución de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (4 - x^2 - 1)\, dx = 3\pi \int_0^{\sqrt{3}} dx - \pi \int_0^{\sqrt{3}} x^2\, dx = 3\pi\sqrt{3} - \pi\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3}.$$

12. Dibujar el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x/2$ sobre el intervalo $[0,2]$. Encuentre un número t, $1 < t < 2$, de modo que la región entre los gráficos de f y g sobre el intervalo $[0,t]$ gira alrededor del eje x, engendra un sólido de revolución cuyo volumen es igual a $\pi t^3/3$.

Respuesta.- El volumen del sólido de revolución generado por la región entre los gráficos f y g en el intervalo $[0,t]$ es,

$$V = \pi \int_0^t \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

Así,

$$\frac{\pi t^2}{3} = \int_0^t \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx \implies \frac{t^3}{3} = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^t - \left.\frac{x^3}{12}\right|_0^t \implies \frac{t^3}{3} = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{12} \implies 4t^3 = 6t^2 - t^3 \implies t = \frac{6}{5}.$$

13. ¿Qué volumen de material se quita de una esfera de radio $2r$ cuando se atraviesa con un taladro, formando un agujero centrado de radio r?.

Respuesta.- Primero, el volumen de una esfera de radio $2r$ es dado por,

$$V_S = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{32}{3}\pi r^3$$

entonces, el volumen de una esfera con un agujero centrado es el volumen del sólido de revolución generado por la región entre

$$f(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = r \quad \text{para} \quad -\sqrt{3}r \text{ hasta } \sqrt{3}r.$$

Denotemos en volumen por V_T de donde tenemos,

$$\begin{aligned} V_T &= \pi \left[\int_{-\sqrt{3}r}^{\sqrt{3}r} (4r^2 - x^2 - r^2)\, dx \right] \\ &= \pi \left[\int_{-\sqrt{3}r}^{\sqrt{3}r} (3r^2 - x^2)\, dx \right] \\ &= 4\sqrt{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen de material que se quita de una esfera cuando se atraviesa con un taladro es,

$$V_S - V_T = \frac{32}{3}\pi r^2.$$

14. Un servilletero se obtiene practicando un agujero cilíndrico en una esfera de modo que el eje de aquél pase por el centro de ésta. Si la longitud del agujero es $2h$, demostrar que el volumen del servilletero es $\pi a h^3$, siendo a un número racional.

Demostración.- Sea r_s el radio de la esfera y r_c el radio del agujero cilíndrico. Entonces el volumen del anillo es el volumen del sólido de revolución formado al rotación el área entre las funciones

$$f(x) = \sqrt{r_s^2 - x^2}, \quad g(x) = r_c, \quad -h \leq x \leq h$$

sobre el eje x. Dado que la longitud del agujero es $2h$, sabemos que $f(h) = g(h)$; por lo tanto $r_s^2 - h^2 = r_c^2 \implies r_s^2 - r_c^2 = h^2$. Así se tiene,

$$V = \pi \int_{-h}^{h} \left[\left(\sqrt{r_s^2 - x^2} \right)^2 - r_c^2 \right] dx = \pi \int_{-h}^{h} (r_s^2 - r_c^2 - x^2)\, dx = \pi h^2(2h) - \pi \frac{x^3}{3} \bigg|_{-h}^{h} = \frac{4}{3}\pi h^3 = \pi a h^3$$

.

15. Un sólido tiene una base circular de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.

Demostración.- Podemos describir la mitad superior de la base circular del sólido mediante la ecuación

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

de donde, la longitud de la base de cualquier sección transversal triangular equilátera es,

$$2\sqrt{4 - x^2} \quad -2 \leq x \leq 2$$

Como estos son triángulos equiláteros, con lado de longitud $2\sqrt{4 - x^2}$, el área es dada por

$$a(x) = \sqrt{3}(4 - x^2)$$

Por lo tanto, calculando el volumen se tiene,

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{3}(4 - x^2)\, dx \\ &= 3\sqrt{3}(4) - \sqrt{3} \left(\frac{x^3}{3} \bigg|_{-2}^{2} \right) \\ &= 16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\sqrt{3} \\ &= \frac{32\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

16. las secciones transversales de un sólido son cuadrados perpendiculares al eje x con sus centros en el eje. Si el cuadrado cortado en x tiene arista $2x^2$, encuentra el volumen del sólido entre $x = 0$ y $x = a$. Haz un dibujo. El área de las secciones transversales son dados por,

$$A(x) = (2x^2)^2 = 4x^4$$

Así, el volumen del sólido para $0 \leq x \leq a$ será,

$$V = \int_0^a 4x^4\, dx = \frac{4}{5}a^5.$$

17. Hallar el volumen de un sólido cuya sección transversal, por un plano perpendicular al eje x tiene de área $ax^2 + bx + c$ para x del intervalo $0 \leq x \leq h$. Expresar el volumen en términos de áreas B_1, M y B_2 de la sección transversal correspondiente a $x = 0$, $x = h/2$ y $x = h$, respectivamente.. La fórmula que resulta se conoce como fórmula del prismatoide.

Respuesta.- Ya que el área de la sección transversal en x está dada por $ax^2 + bx + c$, tenemos,

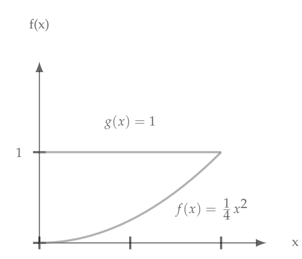
$$\begin{aligned} B_i &= c \\ M &= \frac{ah^2}{4} + \frac{bh}{2} + c \\ B_2 &= ah^2 + bh + c \end{aligned}$$

entonces, calculamos el volumen de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h (ax^2 + bx + c)\, dx \\ &= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch \\ &= \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c) \\ &= \frac{h}{6}(B_1 + 4M + B_2) \end{aligned}$$

18. Dibujar un esquema de la región en el plano xy formada por todos los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades simultaneas $0 \leq x \leq 2$, $\frac{1}{4}x^2 \leq y \leq 1$. Calcular el volumen del solido obtenido haciendo girar esta región: a) alrededor del eje x; b) alrededor del eje y c) alrededor de la vertical que pasa por $(2, 0)$; de la horizontal que pasa por $(0, 1)$.

Respuesta.-



Para el inciso $a)$, calculamos el volumen al girar sobre el eje de la siguiente manera

$$V = \pi \int_0^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right] dx = 2\pi - \frac{\pi}{16}\int_0^2 x^4\, dx = \frac{8\pi}{5}$$

Para el inciso $b)$ encontraremos una ecuación para $\dfrac{1}{4}x^2$ en términos de x, como sigue

$$y = \frac{1}{4}\, dx, \quad \Longrightarrow \; |x| = 2\sqrt{y}$$

entonces calculamos el volumen de la siguiente manera al girar alrededor del eje de la siguiente manera,

$$V = \pi \int_0^1 (2\sqrt{y})^2 \, dy = 2\pi$$

Para el inciso c), calculamos el volumen de la siguiente manera al girar alrededor de la línea vertical de la $x = 2$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 4 \, dy \\ &= 4\pi - \pi \int_0^1 (4 - 8\sqrt{y} + 4y) \, dx \\ &= \frac{p\pi}{3} \end{aligned}$$

Y por último para el inciso d) calculamos el volumen de la siguiente manera al girar alrededor de la linea horizontal de la $y = 1$ de la siguiente manera.

$$V = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right)^2 \, dx = \frac{16\pi}{15}.$$

2.14 Aplicación de la integración al concepto del trabajo

Propiedad .3 **Propiedades fundamentales del trabajo.** Designemos con $W_a(f)$ el trabajo realizado por una función fuerza f al mover una partícula desde a hasta b. Entonces el trabajo tiene las siguientes propiedades:

1. Propiedad aditiva. Si $a < c < b$. Entonces $W_a^c(f) + W_c^b(f)$.
2. Propiedad monótona. Si $f \leq g$ en $[a, b]$, entonces $W_a^b(f) \leq W_a^b(g)$. Esto es una mayor fuerza realiza un mayor trabajo.
3. Fórmula elemental. Si f es constante, $f(x) = c$ para todo x in el intervalo abierto (a, b), entones $W_a^b(f) = c \cdot (b - a)$.

La propiedad aditiva puede extenderse por inducción para cualquier número infinito del intervalo. Esto es, si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, tenemos,

$$W_a^b(f) = \sum_{k=1}^{n} W_k$$

Donde W_k es el trabajo realizado por f desde x_{k-1} a x_k. En particular, si la fuerza es una función escalonada s que toma un valor constante s_k en el intervalo abierto $(x_{k-1} - x_k)$ la propiedad 3 establece que $W_k = s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$, con lo que

$$W_a^b(s) = \sum_{k=0} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b s(x)\, dx$$

Así pues, para funciones escalonadas, el trabajo se expresa como una integral. Es fácil demostrar que esto es cierto en casos más generales.

Teorema 2.8 Supóngase que el trabajo fue definido para una clase de funciones fuerza f de modo que satisface las propiedades 1, 2, 3. Entonces el trabajo efectuado por una función fuerza integrable f al mover una partícula desde a hasta b es igual a la integral de f.

$$W_a^b(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Demostración.- Sean s y t dos funciones escalonadas que satisfacen $s \leq f \leq t$ en $[a, b]$. La propiedad del trabajo establece que $W_a^b(s) \leq W_a^b(f) \leq W_a^b(t)$. Pero $W_a^b(s) = \int_a^b s(x)$ y $W_a^b(t) = \int_a^b t(x)\, dx$ de modo que el número $W_a^b(f)$ satisface las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\, dx \leq W_a^b(f) \leq \int_a^b t(x)\, dx$$

para todas las funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$ en $[a, b]$. Puesto que f es integrable en $[a, b]$, resulta que $W_a^b(f) = \int_a^b f(x)\, dx$. ■

2.15 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2 se supone que la fuerza que actúa sobre el resorte obedece la ley de Hooke.

1. Si una fuerza de 10 libras alarga un muelle elástico 1 pulgada, ¿qué trabajo se realiza al alargar el muelle 1 pie?.

Respuesta.- Sea 1 pulgada = $\dfrac{1}{12}$ pie, entonces $f\left(\dfrac{1}{12}\right) = 10$ por lo tanto $c = 120$, luego

$$W = \int_0^1 120x\ dx = \Big|_0^1 = 60\ pies - libra$$

2. Un muelle tiene normalmente la longitud de 1 metro. Una fuerza de 100 newtons la comprime hasta 0.9 m. ¿Cuántos joules de trabajo se precisan para comprimirlo hasta la mitad de su longitud normal? ¿Cuál es la longitud del muelle cuando ya se han realizado 20 joules de trabajo?.

Respuesta.- Sea $f(100) = 100c = 0.1\ Longrightarrow\ c = 1000$ Luego calculamos cuanto trabajo es requerido para comprimir el muelle 0.5 metros,

$$W = \int_0^5 1000x\ dx = 1000\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^5\right) = 125 joules.$$

Como nos dan una cantidad de trabajo (20 loules) de donde resolveremos par un distacia a. Para la fórmula de trabajo tenemos,

$$\int_0^a 1000x\ dx \implies a = 0.2\ m$$

Dado que su longitud inicial es 1 m, tenemos que la longitud del resorte cuando se comprime es igual a $1m - 0.2m = 0.8m$.

3. Una partícula se mueve a lo largo del eje x mediante una fuerza impulsora $f(x) = 3x^2 + 4x$ newtons. Calcular cuántos joules de trabajo se realizan con esa fuera para trasladar la particular a) desde $x = 0$ hasta $x = 7$; b) desde $x = 2m$ hasta $x = 7m$.

Respuesta.- a) Usando la fórmula de trabajo entonces,

$$W = \int_0^7 (3x^2 + 4x)\ dx = x^3\Big|_0^7 + 2x^2\Big|_0^7 == 343 + 98 = 441\ joules.$$

b) Usando la fórmula de trabajo entonces,

$$W = \int_2^7 (3x^2 + 4x)\ dx = (x^3 + 2x^2)\Big|_2^7 == 441 - 16 = 425\ joules.$$

4. Una partícula se mueve a lo largo del eje x mediante una fuerza impulsadora dada por $f(x) = ax^2 + bx$ dinas. Calcular a y b de modo que se precisen 900 ergs de trabajo para desplazar la partícula $10cm$ a partir del origen, si la fuerza es de 65 dinas cuando $x = 4cm$.

Respuesta.- Dado $f(5) = 65$, entonces,

$$f(5) = 25a + 5b = 65 \implies b = 13 - 5a$$

luego, ya que 900 ergs de trabajo son requeridos para mover una partícula de $10cm$, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} \quad & \Longrightarrow \quad \frac{ax^3}{3}\Big| 0^{10} + \frac{bx^2}{2}\Big|_0^{10} = 900 \\
& \Longrightarrow \quad \left(\frac{1000}{3}\right) a + 50b = 900 \\
& \Longrightarrow \quad \left(\frac{1000}{3}\right) a + 650 - 150a = 900 \\
& \Longrightarrow \quad a = 3, \qquad b = -2
\end{aligned}$$

5. Un cable de 50 pies de longitud y 4 libras de peso por pie pende de un torno. Calcular el trabajo realizado al enrollar 25 pies de cable. No considerar más fuerzas que la gravedad.

Respuesta.- La función fuerza es $f(x) = 200 - 4x$, es decir, el peso total del cable menos 4 libras por pie, cuando enrollaos el cable. Se sigue que,

$$W = \int_0^{25} (200 - 4x)\, dx = 200 \cdot 25 - 2 \cdot 625 = 3750\ libras - pie.$$

6. Resolver el ejercicio 5 si se cuelga un peso de 50 libras en el extremo del cable.

Respuesta.- Dado que se tiene un peso de 50 libras en el extremo del cable, la función de fuerza ahora está dada por $f(x) = 250 - 4x$. Entonces, el trabajo requerido es,

$$W = \int_0^{25} (250 - 4x)\, dx = 6250 - 1250 = 5000\ libras - pie.$$

7. Un peso de 150 libras se fija en un extremo de una cadena cuyo peso es de 2 libras por pie. Inicialmente el peso se suspende con 10 pies de cadena sobre el borde de un edificio de 100 pies de altura. Considerando sólo la fuerza de gravedad, calcular el trabajo realizado cuando el peso se baja hasta una posición de 10 pies sobre el suelo.

Respuesta.- Dado que el edificio mide 100 pies y el extremo cuelga inicialmente 10 pies sobre el borde del edificio, comienza en una posición de 90 pies sobre el suelo. Se baja a 10 pies sobre el suelo. La fuerza de gravedad que actúa sobre la cadena es $f(x) = 150 + 2x$, por lo que el trabajo realizado es

$$W = \int_{10}^{90} (150 + 2x)\, dx 0 150 \cdot 80 + 90^2 - 10^2 = 2000\ libras - pies.$$

8. En el ejercicio 7, suponer que la cadena sólo tiene 60 pies de longitud y que el peso y la cadena se dejan caer al suelo, partiendo de la misma posición inicial que antes. Calcular el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad cuando el peso alcanza el suelo.

Respuesta.- Ahora tenemos una función de fuerza definida por partes: una parte mientras parte de la cadena aún está sobre el borde, y la otra parte una vez que toda la cadena está sobre el borde. Esta función es

$$f(x) = \begin{cases} 170 + 2x & para \quad 0 \le x \le 50 \\ 270 & para \quad 50 \le x \le 90 \end{cases}$$

Así, el trabajo realizado es,

$$W = \int_0^{50} (170 + 2x)\ dx + \int_{50}^{90} 270\ dx = 170 \cdot 50 + 50^2 + 270 \cdot (90 - 50) = 21800\ libras - pie.$$

9. Sea $V(q)$ el voltaje necesario para situar una carga q en las placas de un condensador. El trabajo necesario para cargar un condensador desde $q = a$ hasta $q = b$ se define mediante la integral $\int_a^b V(q)\ dx$. Si el voltaje es proporcional a la carga, demostrar que el trabajo realizado para situar una carga Q es un condensador descargado $\frac{1}{2}QV(Q)$.

Demostración.- Ya que asumimos que el voltaje es proporcional a la carga, tenemos $V(q) = cq$ para alguna constante c, entonces,

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b V(q)\ dq \\ &= \int_a^b cq\ dq \\ &= c\frac{q^2}{2}\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2}\left[cv(b) - cv(a)\right] \\ &= \frac{1}{2}QV(Q) \end{aligned}$$

2.16 Valor medio de una función

Definición 2.2 **Definición del valor medio de una función en un intervarlo.** Si f es integrable en un intervalo $[a, b]$, definimos $A(f)$, el valor medio de f en $[a, b]$, por la siguiente fórmula

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

Podemos ahora demostrar que ésta la fórmula es en realidad una extensión del concepto de media aritmética. Sea f una función escalonada que es constante en cada uno de los subintervalos de $[a, b]$, obtenidos al dividirlo en n partes iguales. En particular, sea $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y supongamos que $f(x) = f(x_k)$, si $x_{x-1} < x < x_k$. Entonces será $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$, con lo que se tiene

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Así pues, para funciones escalonadas, el promedio $A(f)$ coincide con la media aritmética de los valores $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ tomados en los intervalos en los que la función es constante.

Definición 2.3 **Definición del valor medio de una función en un intervarlo.**

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{f_a^b w(x)\,dx}$$

Definición 2.4 **Primer momento al rededor de 0.**

$$\overline{x} = \frac{\int_0^b xp(x)\,dx}{\int_0^a p(x)\,dx} \text{ para } p \text{ llamada densidad de masa.}$$

Definición 2.5 **Segundo momento al rededor de 0 o momento de inercia.**

$$r^2 = \frac{\int_0^b x^2p(x)\,dx}{\int_0^a p(x)\,dx} \text{ para } p \text{ llamada densidad de masa.}$$

2.17 Ejercicios

1. $f(x) = x^2, \quad a \leq x \leq b.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+2ba+a^2}{3}.$$

2. $f(x) = x^2 + x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (x^2+x^3)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

3. $f(x) = x^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{4-0}\int_0^4 x^{1/2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right|_0^4 = \frac{4}{3}.$$

4. $f(x) = x^{1/3}, \quad 1 \leq x \leq 8.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{8-1}\int_1^8 x^{1/3}\,dx = \frac{1}{7}\cdot\left.\frac{3x^{4/3}}{4}\right|_1^8 = \frac{48-3}{7} = \frac{45}{28}.$$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot(1-\cos\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

6. $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi/2+\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot(\operatorname{sen}\pi/2+\operatorname{sen}\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \le x \le \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{2}{2\pi}\int_{0\cdot 2}^{\frac{\pi}{2}\cdot 2} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{\pi}(1-\cos\pi) = \frac{2}{\pi}$$

.

8. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/4.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

9. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \le x \le \pi/2.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\pi = \frac{1}{2}.$$

10. $f(x) = \cos^2 x, \quad 0 \le x \le pi.$

Respuesta.-

$$A(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) = \frac{1}{2}.$$

11. **(a)** Si $f(x) = x^2$ para $0 \le x \le a$, hallar un número c que satisfaga $0 < x < a$ y tal que $f(c)$ sea igual al promedio de f en $[0, a]$.

Respuesta.-

$$\frac{1}{a}\int_0^a x^2\, dx = c^2 \Longrightarrow \frac{1}{a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = c^2 \Longrightarrow c = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

(b) Resolver la parte (a) si $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo cualquiera.

Respuesta.- Generalizando el anterior ejercicio tenemos,

$$c^n = \frac{1}{a}\int_0^a x^n\,dx \Longrightarrow c = \frac{a}{(n+1)^{1/n}}.$$

12. Sea $f(x) = x^2$ para $0 \le x \le 1$. El valor medio de f en $[0,1]$ es $\frac{1}{3}$- Hallar una función peso no negativa w tal que la media ponderada de f en $[0,1]$, definida en 2.19 sea:

Respuesta.- Sabiendo que,

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

entonces

(a) $\dfrac{1}{2}$.

Será $w(x) = x$ para que $A(f) = \dfrac{1}{2}$. Como se verá a continuación.

$$A(f) = \frac{\int_a^b x \cdot x^2\,dx}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\dfrac{3}{5}$.

Sea $w(x) = x^2$, entonces

$$A(f) = \frac{\int_a^b x^2 \cdot x^2}{\int_0^1 x^2\,dx} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}.$$

(c) $\dfrac{2}{3}$.

Sea $w(x) = x^3$, entonces

$$A(f) = \frac{\int_a^b x^3 \cdot x^2}{\int_0^1 x^3\,dx} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

13. Sea $A(f)$ el promedio de f en $[a,b]$. Demuestre que el promedio tiene las siguientes propiedades:

(a) Propiedad aditiva: $A(f+g) = A(f) + A(g)$.

Demostración.- Sea

$$A(f+g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) + g(x)\,dx$$

entonces por la el teorema 1.17 (aditividad respecto al intervalo de integración) se tiene,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx = A(f) + A(g)$$

así queda demostrado la propiedad aditiva del valor medio de una función.

(b) Propiedad homogénea: $A(cf) = cA(f)$ si c es algún número real.

Demostración.- Sea
$$A(cf) = \frac{1}{b-a}\int_a^b c[f(x)]\,dx$$
entonces por el teorema 1.16 (linealidad respecto al integrando) se tiene,
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b c[f(x)]\,dx = c\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right] = cA(f).$$

(c) Propiedad monótona: $A(f) \le A(g)$ si $f \le g$ en $[a,b]$.

Demostración.- dado que $f(x) \le g(x)$ entonces por el teorema de comparación (teorema 1.20) obtenemos que,
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \implies \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx \implies A(f) \le A(g).$$

14. ¿Cuáles de la propiedades del problema 13 son validas para las medias ponderadas definidas en 2.19?.

Respuesta.- Para $A(f+g)$ tenemos,
$$\begin{aligned} A(f+g) &= \frac{\int_a^b w(x)\,[f(x)+g(x)]\,\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \\ &= \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx + \int_a^b w(x)g(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \\ &= \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} + \frac{\int_a^b w(x)g(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \\ &= A(f) + A(g) \end{aligned}$$

Para $A(cf)$ tenemos,
$$\begin{aligned} A(cf) &= \frac{\int_a^b cf(x)w(x)\,dx}{int_a^b w(x)\,dx} \\ &= c\cdot\frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \\ &= cA(f) \end{aligned}$$

Por último sea $f \le q$ en $[a,b]$, entonces ya que w es no negativo tenemos, $w(x)f(x) \le w(x)g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Se sigue por la propiedad monótona de la integral que,
$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx \le \int_a^b w(x)g(x)\,dx$$

ya que w es no negativo, $\int_a^b w(x)\,dx$ también es no negativo y por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\int_a^b w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} & \leq & \dfrac{\int_a^b w(x)g(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \\ \\ A(f) & \leq & A(g) \end{array}$$

15. Designamos por $A_a^b(f)$ el promedio de f en el intervalo $[a,b]$.

(a) Si $a < c < b$, demostrar que existe un número t que satisface $0 < t < 1$ tal que $A_a^b(f) = tA_a^c(f) + (1-t)A_c^b(f)$. Así pues, $A_a^b(f)$ es una media aritmética ponderada de $A_a^c(f)$ y $A_c^b(f)$.

Demostración.- Sea

$$\frac{c-a}{b-a}$$

entonces, ya que $a < c < b$, tenemos $0 < t < 1$, de donde,

$$1 - t = 1 - \frac{a-c}{a-b} = \frac{c-b}{a-b}$$

así,

$$\begin{array}{rl} = & \dfrac{c-a}{b-a} \cdot \dfrac{1}{c-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \dfrac{c-b}{a-b} \cdot \dfrac{1}{b-c} \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx \\ = & \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^c f(x)\,dx - \dfrac{1}{a-b} \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx \\ = & \dfrac{1}{b-a} \left[\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx \right] \\ = & \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \\ = & A_a^b(f) \end{array}$$

(b) Demostrar que el resultado de la parte (a) también es válido para medias ponderadas como las definidas por 2.19.

Demostración.- Sea

$$t = \frac{\int_a^c w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

entonces,

$$1 - t = \frac{\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^c w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} = \frac{\int_c^b w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

por lo tanto, $0 < t < 1$ ya que $a < c < b$ y w es no negativo. Luego,

$$\begin{aligned}
t \cdot A_a^c(f) + (1+t) \cdot A_c^b(f) &= \frac{\int_a^c w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \cdot \frac{\int_a^c w(x)f(x)\,dx}{\int_a^c w(x)\,dx} + \frac{\int_c^b w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \cdot \frac{\int_c^b w(x)f(x)\,dx}{\int_c^b w(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_a^c w(x)f(x)\,dx + \int_c^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_a^b w(x)\,dx f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} \\
&= A_a^b(f)
\end{aligned}$$

En cada uno de los ejercicios del 16 al 21 se hace referencia a una varilla de longitud L situada en el eje x con un extremo en el origen. Con la densidad de masa ρ que se cita en cada caso, calcular (a) el centro de masa de la varilla, (b) el momentos de inercia en torno al origen, y (c) el radio de giro.

16. $\rho(x) = 1$ para $0 \neq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\overline{x} = \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} = \frac{\int_0^L x\,dx}{\int_0^L \,dx} = \frac{\frac{L^2}{2}}{L} = \frac{L}{2}.$$

El momento de inercia es,

$$\int_0^L x^2\rho(x)\,dx = \int_0^L x^2\,dx = \frac{L^3}{3}.$$

El radio de giro es,

$$r^2 = \frac{\int_0^L x^2\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} = \frac{\frac{L^3}{3}}{L} = \frac{L^2}{3}$$

$$r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

17. $\rho(x) = 1$ para $0 \leq x \leq \dfrac{L}{2}$, $\rho(x) = 2$ para $\dfrac{L}{2} < x \leq< L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2x\,dx}{\int_0^{\frac{L}{2}} \,dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^2}{8}}{\frac{3L^2}{4}} \frac{L}{2} + L \\
&= \frac{7L}{12}.
\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned}
\int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L 2x^2\,dx \\
&= \frac{L^3}{24} + \frac{2L^3}{3} - \frac{L^3}{12} \\
&= \frac{5L^3}{8}.
\end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\frac{5L^3}{8}}{\frac{3L}{2}} \\
&= \frac{5L^2}{12} \\
&= \frac{\sqrt{5}L}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

18. $\rho(x) = x$ para $0 \le x \le L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^L x^2\,dx}{\int_0^L x\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^3}{3}}{\frac{2L}{3}}. \\
&= \frac{2L}{3}.
\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned}
\int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^L x^3\,dx \\
&= \frac{L^4}{4}.
\end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\ &= \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^2}{2}} \\ &= \frac{L^2}{2} \end{aligned}$$

19. $\rho(x) = x$ para $0 \leq x \leq \dfrac{L}{2}$, $\rho(x) = \dfrac{L}{2}$ para $\dfrac{L}{2} \leq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\ &= \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L}{2}x\,dx}{\int_0^{\frac{L}{2}} x\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L}{2}\,dx} \\ &= \frac{\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{4} - \frac{L^3}{16}}{\frac{L^2}{8} + \frac{L^2}{4}} \\ &= \frac{11L}{18}. \end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned} \int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^{\frac{L}{2}} x^3\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L x^2\,dx \\ &= \frac{L^3}{64} + \frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{48} \\ &= \frac{31L^4}{192} \end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\ &= \frac{\frac{31L^4}{192}}{\frac{3L^2}{8}} \\ &= \frac{31L^2}{72}. \end{aligned}$$

20. $\rho(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^L x^3\,dx}{\int_0^L x^2\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^3}{3}} \\
&= \frac{3L}{4}
\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\int_0^L x^2\rho(x)\,dx = \int_0^L x^4\,dx = \frac{L^5}{5}.$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^5}{5}}{\frac{L^3}{3}} \\
&= \frac{3L^3}{5}
\end{aligned}$$

21. $\rho(x) = 0x^2$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $\rho(x) = \dfrac{L^2}{4}$ para $\dfrac{L}{2} \leq x \leq L$.

Respuesta.- El centro de masa es dado por,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} x^3\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L x\frac{L^2}{4}\,dx}{\int_0^{\frac{L}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L^2}{4}\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^4}{64} + \frac{L^4}{32}}{\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{8}} \\
&= \frac{\frac{7L^4}{64}}{\frac{L^3}{6}} \\
&= \frac{21L}{32}
\end{aligned}$$

El momento de inercia es,

$$\begin{aligned}
\int_0^L x^2\rho(x)\,dx &= \int_0^{\frac{L}{2}} x^4\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L x^2\frac{L^2}{4}\,dx \\
&= \frac{L^5}{160} + \frac{7L^5}{96} \\
&= \frac{16L^5}{240}
\end{aligned}$$

El radio de giro es,

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\frac{19L^5}{240}}{\frac{L^3}{6}} \\
&= \frac{19L^2}{40}
\end{aligned}$$

22. Determine la densidad de masa ρ para que el centro de masa de una barra de longitud L esté a una distancia L/4 de un extremo de la varilla.

Respuesta.- Sea

$$\rho(x) = x^2\ mboxpara\ 0 \leq x \leq L$$

entonces calculamos el centro de masa de la barra,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx} \\
&= \frac{\int_0^L x^3\,dx}{\int_0^L x^2\,dx} \\
&= \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^3}{4}} \\
&= \frac{3L}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masa está a una distancia $L/4$ de un extremo de la barra.

23. En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ en el tiempo t está dado por la fórmula $e(t) = 3\operatorname{sen} 2t$. Calcular: (a) el voltage medio sobre el intervalo de tiempo $[0, \pi/2]$; (b) la raíz cuadrada media del voltaje; esto es, la raíz cuadrada de la media de la función e^2 en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Respuesta.- Notemos que la media de $e(t)$ como $A(e)$,

$$\begin{aligned}
A(e) &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2t\,dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,dt} \\
&= \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2t\,dt \\
&= \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt \\
&= \frac{3}{\pi}(1-\cos\pi) \\
&= \frac{6}{\pi}
\end{aligned}$$

La raíz cuadrada media viene dada por la raíz cuadrada de la función e^2 sobre el intervalo $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, así,

$$\begin{aligned}
R^2 &= \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\operatorname{sen}^2 2t\,dt\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{9}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\frac{9}{2}} \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Donde usamos la fórmula de la solución del ejemplo 3 página 101, para calcular la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$.

24. En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ y la corriente $i(t)$ en el tiempo t son dados por las fórmulas $e(t) = 160 \operatorname{sen} t$, $i(t) = 2\operatorname{sen}(t - \pi/6)$. La potencia media se define como

$$\frac{1}{T}\int_0^T e(t)i(t)\, dx$$

donde T es el periodo del voltaje y la corriente. Determine T y calcule la potencia media.

Respuesta.- Primero, ya que el voltaje está dado por $e(t) = 160 \operatorname{sen} t$ sabemos que tiene periodo 2π, así $T = 2\pi$. Entonces podemos calcular la potencia promedio como sigue,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 320 \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\, dt \\
&= \frac{160}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\left(\operatorname{sen} t \cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos t\right)\, dt \\
&= \frac{160}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt\right) \\
&= \frac{160}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\, dt - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2t\, dt\right) \\
&= \frac{80\sqrt{3}}{2\pi}(2\pi - 0) - \frac{40}{\pi}\cdot 0 \\
&= 80\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

2.18 La integral como función de límite superior. Integrales indefinidas

Si f es no negativa en $[a, b]$, la integral indefinida A es creciente, puesto que se tiene

$$A(y) - A(x) = \int_a^y f(t)\, dx - \int_a^x f(t)\, dx = \int_x^y f(t)\, dx \geq 0$$

siempre que $a \leq x \leq b$.

Definición 2.6 **Definición de función convexa.** Una función g se llama convexa en un intervalo $[a, b]$ si, para todo x e y en $[a, b]$ y para cada α tal que $0 < \alpha < 1$, tenemos

$$g(z) \leq \alpha g(y) + (1-\alpha)g(x), \text{ donde } z = \alpha y + (1-\alpha)x$$

Decimos que g es cóncava en $[a, b]$ si es válida la desigualdad invertida,

$$g(z) \geq \alpha g(y) + (1-\alpha)g(x), \text{ donde } z = \alpha y + (1-\alpha)x$$

Teorema 2.9 Sea $A(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Entonces, A es convexa en cada intervalo donde f es creciente , y cóncavo en cada intervalo donde f es decreciente.

Demostración.- Supongamos que f es creciente en $[a,b]$, elijamos $x < y$, y sea $z = \alpha y + (1-\alpha)x$. Tenemos que demostrar que $A(z) \leq \alpha A(y) + (1-\alpha)A(x)$. Puesto que $A(z) = \alpha(z) + (1-\alpha)A(z)$, es lo mismo que demostrar que $\alpha A(z) + (1-\alpha)A(z) \leq \alpha A(y) + (1-\alpha)A(x)$, o que

$$(1-\alpha)\left[A(z) - A(x)\right] \leq \alpha\left[A(y) - A(z)\right].$$

Ya que $A(z) - A(x) = \int_x^z f(t)\ dt$ y $A(y) - A(z) = \int_z^y f(t)\ dt$, tenemos que demostrar que

$$(1\alpha)\int_x^z f(t)\ dt \leq \alpha \int_z^y f(t)\ dt.$$

Pero si f es creciente, se tiene las desigualdades

$f(t) \leq f(z)$ si $x \leq t \leq z$, y $f(z) \leq f(t)$ si $z \leq t \leq y$. Integrando esas desigualdades encontramos

$$\int_x^z f(t)\ dt \leq f(z)(z-x), \quad \text{y} \quad f(z)(y-z) \leq \int_x^z f(t)\ dt.$$

Pero $(1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$, de manera que esas desigualdades nos dan

$$(1-\alpha)\int_x^z f(t)\ dt \leq (1-\alpha)f(z)(z-x) = \alpha f(z)(y-z) \leq \alpha\int_z^y f(t)\ dt,$$

lo que demuestra $(1\alpha)\int_x^z f(t)\ dt \leq \alpha\int_z^y f(t)\ dt$. Esto prueba que A es convexa cuando f es creciente. Cuando f es decreciente, podemos aplicar el resultado que se acaba de demostrar a $-f$.

■

2.19 Ejercicios

Calcular las integrales de los ejercicios 1 al 16.

1. $\displaystyle\int_0^x (1+t+t^2)\ dt = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$

2. $\displaystyle\int_0^{2y} (1+t+t^2)\ dt = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2y} = 2y + 2y^2 + \frac{8y^2}{3}.$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{2x} (1+t+t^2)\ dx = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2x} = 2x + 1 + \frac{4x^2-1}{2} + \frac{8x^3+1}{3} = \frac{16x^3+12x^2+12x+5}{6}.$

4. $\displaystyle\int_1^{1-x} (1-2t+3t^2)\ dx = \left(t+t^2+t^3\right)\Bigg|_1^{1-x} = 1-x-1+(1-x)^2+1+(1-x)^3-1 = (1-x)^3 + (1-x)^2 + (1-x) - 1 = -x^3+2x^2-2x$

5. $\displaystyle\int_{-2}^{x} t^2(t^2+1)\,dt = \int_{-2}^{x}(t^4+t^2)\,dt = \left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{x} = \left(\frac{x^5}{5}\right) - \left(-\frac{32}{5}-\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{136}{15}.$

6. $\displaystyle\int_{x}^{x^2}(t^2+1)^2\,dt.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_{x}^{x^2}(t^2+1)^2\,dt &= \int_{x}^{x^2}(t^4+2t^2+1)\,dt\\
&= \left(\frac{t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}+t\right)\Bigg|_{x}^{x^2}\\
&= \left(\frac{x^10}{5}+\frac{2x^5}{3}+x^2\right)-\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{5}+x\right)\\
&= \frac{x^{10}}{5}+\frac{2x^6}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x^2-x
\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int_{1}^{x}(t^{1/2}+1)\,dt, \quad x>0.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{x}(t^{1/2}+1)\,dt &= \left(\frac{2t^{2/3}}{3}+t\right)\Bigg|_{1}^{x}\\
&= \left(\frac{2x^{2/3}}{3}+x\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right)\\
&= \frac{2x^{2/3}}{3}+x-\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

8. $\displaystyle\int_{x}^{x^2}(t^{1/2}+t^{1/4})\,dt, \quad x>0.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_{x}^{x^2}(t^{1/2}+t^{1/4})\,dt &= \left(\frac{2t^{2/3}}{3}+\frac{4t^{5/4}}{5}\right)\Bigg|_{x}^{x^2}\\
&= \left(\frac{2x^3}{3}-\frac{4x^{5/2}}{5}\right)-\left(\frac{2x^{2/3}}{3}+\frac{4x^{5/4}}{5}\right)\\
&= \frac{2}{3}(x^3-x^{3/2})+\frac{4}{5}(x^{5/2}-x^{5/4})
\end{aligned}$$

9. $\displaystyle\int_{-\pi}^{x} cost\,dt = \operatorname{sen} t\Bigg|_{-\pi}^{x} = \operatorname{sen} x.$

10. $\displaystyle\int_0^{x^2} (\frac{1}{2} + \cos t)\, dt = \left(\frac{t}{2} + \operatorname{sen} t\right)\Big|_0^{x^2} = \frac{x^2}{2} + \operatorname{sen} x^2.$

11. $\displaystyle\int_x^{x^2} (\frac{1}{2} - \operatorname{sen} t)\, dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \cos x + \cos x^2.$

12. $\displaystyle\int_0^{x} (u^2 + \operatorname{sen} 3u)\, du = \int_0^x u^2\, du + \frac{1}{3}\int_0^{3x} \operatorname{sen} u\, du 0\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}(-\cos u)\Big|_0^{3x} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 3x.$

13. $\displaystyle\int_x^{x^2} (v^2 + \operatorname{sen} 3v)\; dt \;=\; \int_x^{x^2} v^2\; dv + \int_x^{x^2} \operatorname{sen} 3v\; dv \;=\; \left(\frac{x^6}{3} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{3}\int_{3x}^{3x^2} \operatorname{sen} v\; dv \;=\; \frac{1}{3}(x^6 - x^3 +$ $\cos 3x - \cos^2 3x).$

14. $\displaystyle\int_0^{y} (\operatorname{sen}^2 x + x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^y (1 - \cos 2x)\, dx + \int_0^y x\, dx = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\int_0^y \cos x\, dx + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{4}\operatorname{sen} y + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}.$

15. $\displaystyle\int_0^{x} \left(\operatorname{sen} 2w + \cos\frac{w}{2}\right)\, dw.$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_0^{x} \left(\operatorname{sen} 2w + \cos\frac{w}{2}\right)\, dw &= \frac{1}{2}\int_0^{2x} \operatorname{sen} w\, dw + 2\int_0^{\frac{x}{2}} \cos w\, dw \\
&= \frac{1}{2}(-\cos w)\Big|_0^{2x} + 2(\operatorname{sen} w)\Big|_0^{\frac{x}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

16. $\displaystyle\int_{-\pi}^{x} (\frac{1}{2} + \cos t)^2\, dt.$

Respuesta.-

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x}(\frac{1}{2}+\cos t)^2\,dt &= \int_{-\pi}^{x}\left(\frac{1}{4}+\cos t+\cos^2 t\right)\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{x} t\,dt+\int_{-\pi}^{x}\cos t\,dt+\int_{-\pi}^{x}\cos^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{4}(x+\pi)+[\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}(-\pi)]+\int\int_{-\pi}^{x}\frac{1}{2}[1+\cos(2t)]\,dt \\
&= \frac{1}{4}(x+\pi)+\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}(x+\pi)+\frac{1}{4}\int_{-2\pi}^{2x}\cos t\,dt \\
&= \frac{3}{4}(x+\pi)+\operatorname{sen} x+\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} x\Big|_{-2\pi}^{2x}\right) \\
&= \frac{3}{4}(x+\pi)+\operatorname{sen} x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.
\end{aligned}
$$

17. Encuentre todos los valores reales de x tal que

$$\int_0^x (t^3-t)\,dt=\frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{x}(t-t^3)\,dt.$$

Dibuja una figura adecuada e interpreta la ecuación geométricamente.

Respuesta.- Primeramente evaluamos la integral de la izquierda.

$$\int_0^x (t^3-t)\,dt=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}.$$

luego evaluamos la integral de la derecha.

$$\frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{x}(t-t^3)\,dt=-\frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)$$

así, igualando los dos resultados nos que da

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)$$

Se ve claramente que una solución es $x=0$. Si $x\neq 0$ entonces podemos dividir por x^2 y obtenemos,

$$\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\right)\implies\frac{x^2}{3}=\frac{2}{3}\implies x^2=2\implies x=\pm\sqrt{2}.$$

de donde concluimos que las soluciones vienen dadas por $x=0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$.

18. Sea $f(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$ si x no es un entero, y sea $f(x)=0$ si x es un entero. (Se denota $[x]$ como el entero mayor $\leq x$). Definir una nueva función P como sigue:

$$P(x)=\int_0^x f(t)\,dt\quad\text{para cada real } x$$

(a) Graficar f sobre el intervalo $[-3,3]$ y demostrar que f es periódico con periodo 1; $f(x+1)=f(x)$ para todo x.

Demostración.- Tenemos

$$\begin{array}{rcl} f(x-1) & = & (x+1)-[x+1]-\frac{1}{2} \\ & = & (x+1)-([x]+1)-\frac{1}{2} \\ & = & x+1-[x]-1-\frac{1}{2} \\ & = & x-[x]-\frac{1}{2} \\ & = & f(x) \end{array}$$

Por lo que queda demostrada la proposición.

(b) Demostrar que $P(x)=\frac{1}{2}(x^2-x)$, si $0\leq x\leq 1$ y que P es periódico con periodo 1.

Demostración.- Primero estableceremos la fórmula requerida,

$$\begin{array}{rcl} P(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & = & \displaystyle\int_0^x \left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)\,dt \\ & = & \displaystyle\int_0^x t\,dt-\int_0^x [t]\,dt-\int_0^x \frac{1}{2}\,dt \\ & = & \displaystyle\int_0^x t\,dt-0-\int_0^x \frac{1}{2}\,dt \\ & = & \displaystyle\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x-\left.\frac{t}{2}\right|_0^x \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}(x^2-x) \end{array}$$

Notemos $\displaystyle\int_0^x [t]\,dt=0.$
Ahora probemos que $P(x)$ es periodico con periodo 1.

$$\begin{array}{rcl} P(x+1) & = & \displaystyle\int_0^{x+1} f(t)\,dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt+\int_x^{x+1} f(t)\,dt \\ & = & \displaystyle P(1)+\int_x^{x+1} f(t)\,dt \end{array}$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} & = & \displaystyle P(1)+\int_0^x f(t+1)\,dt \\ & = & \displaystyle P(1)+\int_0^x f(t)\,dt \end{array}$$

Vemos que f es periódica. Por último podemos resolver para $P(1)$, donde

$$P(x)=\frac{1}{2}(x^2-x) \implies P(1)=\frac{1}{2}(1^2-1)=0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &= P(1)+\int_0^x f(t)\,dt \\ &= 0+\int_0^x f(t)\,dt \\ &= \int_0^x f(t)';dt \\ &= P(x) \end{aligned}$$

(c) Expresar $P(x)$ in términos de $[x]$.

Demostración.- Para expresar $P(x)$ en términos de $[x]$ calculamos como sigue:

$$\begin{aligned} P(x)=\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^2 f(t)\,dt+\ldots+\int_{[x]}^x f(t)\,dt \\ &= 0+0+\ldots+\textstyle\int_{[x]}^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

donde $f(t+[x])=f(t)$ ya que $[x]$ es un entero y f tiene periodo 1.

Así $f(t+n)=f(t)$ para cualquier entero n. Luego,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{x-[x]}\left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)\,dt \\ &= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{x-[x]}-\left.\frac{t}{2}\right|_0^{x-[x]} \end{aligned}$$

Aquí, sabemos que $[t]$ en la integral es cero ya que $[t]=0$ para todo $t\in[0,[x]]$. Por último ya que $x-[x]<1$ entonces,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2}\left[(x-[x])^2-x+[x]\right] \\ &= \frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x]) \end{aligned}$$

Esta es la expresión que se obtiene.

(d) Determinar una constante c tal que $\int_0^1 [P(t)+c]\ dt=0$.

Respuesta.- Usando la fórmula de $P(x)$ de la parte (c) resolvemos el problema dado.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (P(t)+c)\,dt &\Longrightarrow \int_0^1\left(\frac{1}{2}(t-[t])^2-\frac{1}{2}(t+[t])+c\right)\,dt=0 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\,dt-\frac{1}{2}\int_0^1 t\,dt+\int_0^1 c\,dt=0 \\ &\Longrightarrow c=\frac{1}{12} \end{aligned}$$

(e) Para la constante c de la parte (d), sea $Q(x) = \int_0^x [P(t)+c]\ dt$. Demostrar que Q es periódico con periodo 1 y que

$$Q(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1.$$

Demostración.- Primero probaremos que Q es periódico con periodo 1.

$$\begin{array}{rcl} Q(x+1) & = & \displaystyle\int_0^{x+1} \left(P(t) + \frac{1}{12}\right)\ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \left(P(t) + \frac{1}{12}\right) + \int_t^{x+1} \left(P(t) + \frac{1}{12}\right)\ dt \\ & = & \displaystyle 0 + \int_0^x \left(P(t+q)\frac{1}{12}\right)\ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^x \left(P(t) + \frac{1}{12}\right)\ dt \\ & = & Q(x) \end{array}$$

Luego, si $0 \leq x \leq 1$ entonces,

$$\begin{array}{rcl} Q(x) & = & \displaystyle\int_0^x \left(P(t) + \frac{1}{12}\right)\ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{2}(t-[t])^2 - \frac{1}{2}(t-[t]) + \frac{1}{12}\right) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x t\ dt + \frac{1}{12}\int_0^x\ dt \end{array}$$

donde todos los $[t]$ son 0 para $0 \leq t \leq 1$, así,

$$\begin{array}{rcl} & = & \displaystyle\left.\frac{t^3}{6}\right|_0^x - \left.\frac{t^2}{4}\right|_0^x + \left.\frac{t}{12}\right|_0^x \\ & = & \displaystyle\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \end{array}$$

como queriamos encontrar.

19. Dado una función función f, definida en todas partes, periódica con periodo 2, e integrable en todo intervalo. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\ dt$

(a) Demostrar que $g(2n) = 0$ para cada entero n.

Demostración.- Podemos establecer esto por un calculo directo.

$$\begin{aligned}
g(2n) &= \int_0^2 nf(t)\,dt \\
&= \int_{-2n}^0 f(t+2n)\,dt \\
&= \int_{-2n}^0 f(t)\,dt \\
&= -\int_0^{-2n} f(t)\,dt \\
&= \int_0^{2n} f(-t)\,dt \\
&= -\int_0^{2n} f(t)\,dt
\end{aligned}$$

Pero entonces tenemos,

$$\int_0^{2n} f(t)\,dt = -\int_0^{2n} f(t)\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{2n} f(t)\,dt = 0$$

Ya que $f(2n) = \int_0^{2n} f(t)\,dt$ entonces tenemos el resultado es,

$$g(2n) = \int_0^{2n} f(t)\,dt = 0.$$

(b) Demostra que g es par y periodico de periodo 2.

Demostración.- Para demostrar que f es par necesitamos mostrar $g(-x) = g(x)$ para todo x. Utilizaremos el hecho que f es impar como también la propiedad de expación-contración de la integral. (teorema 1.19 con $k=-1$).

$$\begin{aligned}
g(-x) &= \int_0^{-x} f(t)\,dt \\
&= -\int_0^{x} f(-t)\,dt \\
&= \int_0^{x} f(t)\,dt \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

Luego, mostraremos que g es periódica con periodo 2, es decir, debemos demostrar que $g(x+2) =$

$g(x)$ para todo x.

$$\begin{aligned} g(x+2) &= \int_0^{x+2} f(t)\,dt \\ &= \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^{x+2} f(t)\,dt \\ &= 0 + \int_0^x f(t+2)\,dt \\ &= \int_0^2 f(t)\,dt \\ &= g(x) \end{aligned}$$

20. Dado una función par f, definida en todas partes, periódica con periodo 2, e integrable en todo intervalo. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ y sea $A = g(1)$.

(a) Demostrar que g es impar y que $g(x+2) - g(x) = g(2)$.

Demostración.- Usaremos la expanción-contracción del intervalo de intregración,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{t}{k}\right)\,dt$$

donde en este caso $k = -1$. De donde,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{-x} f(t)\,dt \\ &= \int_0^x f(-t)\,dt \\ &= \int_0^x f(t)\,dt \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, g es impar.

Por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned} g(x+2) - g(x) &= \int_0^{x+2} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\ &= \int_0^x f(t)\,dt + \int_2^{x+2} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\ &= g(2) + \int_0^x f(t+2)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\ &= g(2) + \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\ &= g(2) \end{aligned}$$

(b) Calcular $g(2)$ y $g(5)$ e terminos de A.

Respuesta.- Primeramente encontraremos $f(2)$. Sea $x = 1$, donde,

$$g(x+2) - g(x) = g(2) \implies g(3) - g(1) = g(2)$$

así,

$$\begin{array}{rcl}
g(2) & = & g(3) - g(1) \\
& = & \displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \\
& = & \displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \\
& = & \displaystyle\int_1^3 f(t)\,dt \\
& = & \displaystyle\int_{-1}^1 f(t+2)\,dt \\
& = & \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt \\
& = & \displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt \\
& = & \displaystyle -\int_1^0 f(-t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt \\
& = & \displaystyle\int_1^0 f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt \\
& = & \displaystyle 2\int_0^1 f(t)\,dt \\
& = & 2 \cdot g(1) \\
& = & 2A
\end{array}$$

Por lo tanto,

$$g(2) = g(3) - g(1) \implies 2A = g(3) - A \implies g(3) = 2A + A = 3A$$

Y finalmente para encontrar $g(5)$ suponemos que $x = 3$,

$$g(x+2) - g(x) = g(2) \implies g(5) - g(3) = g(2) \implies g(5) = 2A + 3A = 5A$$

(c) Para que valor de A será g periodica con periodo 2?

Respuesta.- g es periódica con periodo 2 por lo tanto,

$$\begin{array}{rcr}
g(x+2) = g(x) & \implies & g(x+2) - g(x) = 0 \\
& & g(0+2) - g(0) = 0 \\
& & g(2) - 0 = 0 \\
& & 2A = 0 \\
& & A = 0
\end{array}$$

21. Dadas dos funciones f y g, integrables en todo intervalo y teniendo las siguientes propiedades: f es par, g es impar, $f(5)=7,\ f(0)=0,\ g(x)=f(x+5),\ f(x)=\int_0^x g(t)\ dt$ para todo x. Demostrar que (a) $f(x-5)=-g(x)$ para todo x; (b) $\int_0^5 f(t)\ dt$; (c) $\int_0^x f(t)\ dt = g(0)-g(x)$.

Demostración.- para la (a) calculemos usando las propiedades dadas:

$$f(x+5)=g(x) \implies g(-x)=f(-x+5) \implies -g(x)=f(x-5)$$

donde g es impar y f es par.

Para la parte (b) una vez más calculamos usando las propiedades para f y g:

$$\int_0^5 f(t)\ dt = \int_0^5 g(t-5)\ dt = \int_{-5}^0 g(t)\ dt = -\int_5^0 g(-t)\ dt = \int_0^5 g(t)\ dt = f(5) = 7$$

Finalmente para (c):

$$\int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x g(t-5)\ dt = \int_{-5}^{x-5} = \int_{-5}^0 g(t)\ dt + \int_0^{x-5} g(t)\ dt = f(5)+f(x-5) = g(0)-g(x).$$

3

Funciones continuas

3.2 Definición de límite de una función

La continuidad existe si existe continuidad por la izquierda y por la derecha.

Definición 3.1 **Definición de entorno de un punto.** Cualquier intervalo abierto que contenga un punto p como su punto medio se denomina entorno de p.

Notación.- Designemos los entornos con $N(p), N_1(p), N_2(p)$, etc. Puesto que un entorno $N(p)$ es un intervalo abierto simétrico respecto a p, consta de todos los números reales x que satisfagan $p - r < x < p + r$ para un cierto $r > 0$. El número positivo r se llama radio del entorno. En lugar de $N(p)$ ponemos $N(p; r)$ si deseamos especificar su radio. Las desigualdades $p - r < x < p + r$ son equivalentes a $-r < x - p < r$, y a $|x - p| < r$. Así pues, $N(p; r)$ consta de todos los puntos x , cuya distancia a p es menor que r.
En la definición que sigue suponemos que A es un número real y que f es una función definida en un cierto entorno de un punto p (excepción hecha acaso del mismo p). La función puede estar definida en p pero esto no interviene en la definición.

Definición 3.2 **Definición de límite de una función.** El simbolismo

$$\lim_{x\to p} f(x) = A \qquad [\text{o } f(x) \to A \quad x \to p]$$

significa que para todo entorno $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x \neq p$$

El entorno $N_1(A)$ se cita en primer lugar, e indica cuán próximo queremos que sea $f(x)$ a su límite A. El segundo entorno, $N_2(p)$, nos indica lo próximo que debe estar x de p para que $f(x)$ sea interior al primer entorno $N_1(p)$. El entorno $N_2(p)$ dependerá del $N_1(A)$ elegido. Un entorno $N_2(p)$ que sirva para un $N_1(A)$ determinado servirá también, naturalmente, para cualquier $N_1(A)$ mayor, pero puede no ser útil para todo $N_1(A)$ más pequeño.
Decir que $f(x) \in N_1(A)$ es equivalente a la desigualdad $|f(x) - A| < \epsilon$ y poner que $x \in N_2(p),\ x \neq p$ es lo mismo que escribir $0 < |x - p| < \delta$. Por lo tanto, la definición de límite puede también expresarse así:

El símbolo $\lim\limits_{x\to p} f(x) = A$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta.$$

Observamos que las tres desigualdades,

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \lim_{x\to p}(f(x) - A) = 0, \lim_{x\to p}[f(x) - A] = 0$$

Son equivalentes. También son equivalentes las desigualdades,

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \lim_{h\to 0} f(p+h) = A.$$

Todas estas se derivan de la definición de límite.

Definición 3.3 **Límites laterales.** Los límites laterales pueden definirse en forma parecida. Por ejemplo, si $f(x) \to A$ cuando $x \to p$ con valores mayores que p, decimos que A es el límite por la derecha de f en p, indicamos esto poniendo

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = A.$$

En la terminología de los entornos esto significa que para todo entorno $N_1(A)$, existe algún entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \quad \text{y} \quad x > p.$$

Los límites a la izquierda, que indican poniendo $x \to p^-$, se definen del mismo modo restringiendo x a valores menores que p.

3.3 Definición de continuidad de una función

Definición 3.4 **Definición de continuidad de una función en un punto.** Se dice que una función f es continua en un punto p si

a) f está definida en p, y

b) $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Esta definición también puede formularse con entornos. Una función f es continua en p si para todo entorno $N_1[f(p)]$ existe un entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \in N_2(p).$$

Puesto que $f(p)$ pertenece siempre a $N_1[f(p)]$, no se precisa la condición $x \neq p$.

Especificando los radios de los entornos, la definición de continuidad puede darse como sigue:

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \text{ siempre que } |x - p| < \delta.$$

3.4 Teoremas fundamentales sobre límites. Otros ejemplos de funciones continuas.

Teorema 3.1 Sean f y g dos funciones tales que

$$\lim_{x \to p} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to p} g(x) = B$$

Se tiene entonces

(i) $\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = A + B$,

(ii) $\lim_{x \to p} [f(x) - g(x)] = A - B$,

(iii) $\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,

(iv) $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \qquad \text{si } B \neq 0.$

Las demostraciones estarán dadas en la sección 3.5. ■

Observemos primero que las afirmaciones del teorema pueden escribirse en forma un poco distinta. Por ejemplo, (i) puede ponerse como sigue:

$$\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to p} g(x).$$

Es costumbre indicar por $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f/g las funciones cuyos valores para cada x son:

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad y \quad f(x)/g(x).$$

Teorema 3.2 Sean f y g dos funciones continuas en un punto p. La suma $f+g$, la diferencia $f-g$, el producto $f \cdot g$ y $g(p) \neq 0$ siempre que $g(p) \neq 0$ son también continuas en p.

Demostración.- Puesto que f y g son continuas en p, se tiene $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$ y $\lim\limits_{x \to p} g(x) = g(p)$. Aplicando las propiedades para límites, dadas en el teorema 3.1, cuando $A = f(p)$ y $B = g(p)$, se deduce el teorema 3.2.

■

El teorema que sigue demuestra que si una función g está intercalada entre otras dos funciones que tienen el mismo límite cuando $x \to p$, g tiene también este límite cuando $x \to p$.

Teorema 3.3 **Principio de intercalación.** Supongamos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq p$ en un cierto entorno $N(p)$. Supongamos también que

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = a.$$

Se tiene entonces $\lim_{x \to p} g(x) = a$.

Demostración.- Sean $G(x) = g(x) - f(x)$, y $H(x) = h(x) - f(x)$. Las desigualdades $f \leq g \leq h$ implican $0 \leq g - f \leq h - f$ o

$$0 \leq G(x) \leq H(x)$$

para todo $x \neq p$ en $N(p)$. Para demostrar el teorema, basta probar que $G(x) \to 0$ cuando $x \to p$, dado que $H(x) \to 0$ cuando $x \to p$.
Sea $N_1(0)$ un entorno cualquier de 0. Puesto que $H(x) \to 0$ cuando $x \to p$, existe un entorno $N_2(p)$ tal que

$$H(x) \in N_1(0) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x \neq p.$$

Podemos suponer que $N_2(p) \subseteq N(p)$. Entonces la desigualdad $0 \leq G \leq H$ establece que $G(x)$ no está más lejos de 0 si x está en $N_2(p), x \neq p$. Por consiguiente $G(x) \in N_1(0)$ para tal valor x y por tanto $G(x) \to 0$ cuando $x \to p$. La misma demostración es válida si todos los límites son límites a un lado.

■

Teorema 3.4 **Continuidad de las integrales indefinidas.** Supongamos que f es integrable en $[a, x]$ para todo x en $[a, b]$, y sea

$$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Entonces la integral indefinida A es continua en cada punto de $[a, b]$ (En los extremos del intervalo tenemos continuidad a un lado.)

Demostración.- Elijamos p en $[a, b]$. Hay que demostrar que $A(x) \to A(p)$ cuando $x \to p$. Tenemos

$$A(x) - A(p) = \int_p^x f(t)\, dt$$

Puesto que f está acotada en $[a, b]$, existe una constante $M > 0$ tal que $-M \leq f(t) \leq M$ para t en $[a, b]$. Si $x > p$, integramos esas desigualdades en el intervalo $[p, x]$ obteniendo

$$\int_p^x -M\, dt \leq \int_p^x f(t)\, dt \leq \int_p^x M\, dt \quad \Longrightarrow \quad -M(x-p) \leq A(x) - A(p) \leq M(x-p).$$

Si $x < p$, obtenemos las mismas desigualdades con $x - p$ sustituida por $p - x$. Por consiguiente, en uno u otro caso podemos hacer que $x \to p$ y aplicar el principio de intercalación encontrando que $A(x) \to A(p)$. Esto prueba el teorema. Si p es un extremo de $[a, b]$, tenemos que hacer que $x \to p$ desde el interior del intervalo, con lo que los límites son a un lado. ■

3.5 Demostraciones de los teoremas fundamentales sobre límites

Demostración de (i) y (ii). Puesto que las dos igualdades:

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \;\text{ y }\; \lim_{x \to p}[f(x) - A] = 0$$

son completamente equivalentes, y como se tiene

$$f(x) + g(x) - (A + B) = [f(x) - A] + [g(x) - B],$$

basta demostrar las igualdades (i) y (ii) del teorema cuando los límites de A y B son ambos cero.
Supóngase pues, que $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Se demostrará en primer lugar que $f(x) + g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Para ello se tiene que probar que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) + g(x)| < \epsilon \;\text{ siempre que }\; 0 < |x - p| < \delta.$$

Sea ϵ dado. Puesto que $f(x) \to 0$ cuando $x \to p$, exista un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \;\text{ siempre que }\; 0 < |x - p| < \delta_1.$$

Análogamente, puesto que $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que:

$$|g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \;\text{ siempre que }\; 0 < |x - p| < \delta_2.$$

Si se indica por δ el menor de los dos números δ_1 y δ_2, entonces, ambas igualdades últimas son válidas si $0 < |x - p| < \delta$, y por tanto, en virtud de la desigualdad triangular, se tiene:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Esto demuestra la proposición dada que, a su vez, demuestra (i). La demostración de (ii) es completamente análoga, salvo que en el último paso se emplea la desigualdad $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.

Demostración de (iii). Supóngase que se ha demostrado (iii) en el caso particular en que uno de los límites es 0. Entonces el caso general resulta fácilmente de este caso particular, como se deduce de la siguiente igualdad:

$$f(x)g(x) - AB = f(x)[g(x) - B] + B[f(x) - A].$$

El caso particular implica que cada término del segundo miembro tienda a 0 cuando $x \to p$ y en virtud de la propiedad (i) la suma de los dos términos tiende también a 0. Por tanto, basta sólo probar (iii) en el caso en que uno de los límites, por ejemplo B, sea 0.
Supóngase que $f(x) \to A$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Se trata de probar que $f(x) \cdot g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Para ello se ha de ver que dado un número positivo ϵ, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)g(x)| < \epsilon \;\text{ siempre que }\; 0 < |x - p| < \delta.$$

Puesto que $f(x) \to A$ cuando $x \to p$, existe un δ_1 tal que

$$|f(x) - A| < 1 \;\text{ siempre que }\; 0 < |x - p| < \delta_1.$$

Para tal x, tenemos $|f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$, y por tanto

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < (1 + |A|)|g(x)|.$$

Ya que $f(x) \to 0$ cuando $x \to p$, para todo $\epsilon > 0$ existe un δ_2 tal que

$$|g(x)| < \frac{\epsilon}{1 + |A|} \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta_2.$$

Por consiguiente, si llamamos δ al menor de los dos números δ_1 y δ_2 entonces las dos igualdades son válidas siempre que $0 < |x - p| < \delta$ y para tal valor de x deducimos

$$|f(x)g(x)| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta.$$

Lo que completa la demostración.

Demostración de (iv). Puesto que el cociente $f(x)/g(x)$ es el producto de $f(x)/B$ por $B/g(x)$ basta demostrar que $B/g(x) \to 1$ cuando $x \to p$ y luego aplicar (iii). Sea $h(x) = g(x)/B$, por lo que $h(x) \to 1$ cuando $x \to p$, y se quiere demostrar que $1/h(x)$ cuando $x \to p$.
Dado $\epsilon > 0$, se trata de ver si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{h(x)} \right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta.$$

La diferencia se puede escribir como sigue:

$$\left| \frac{1}{h(x)} - 1 \right| = \frac{|h(x) - 1|}{|g(x)|}.$$

Puesto que $g(x) \to 1$ cuando $x \to p$ se puede elegir un $\delta > 0$ tal que ambas desigualdades:

$$|h(x) - 1| < \frac{\delta}{2} \quad \text{y} \quad |h(x) - 1| < \frac{1}{2}.$$

se satisfagan siempre que $0 < |x - p| < \delta$. La segunda de estas desigualdades implica $h(x) > \frac{1}{2}$ y por tanto $1/|h(x)| = 1/h(x) < 2$ para tales valores de x. Empleando este resultado en junto con la primera desigualdad, obtenemos

$$\left| \frac{1}{h(x)} - 1 \right| = \frac{|h(x) - 1|}{|g(x)|}.$$

Esto completa la demostración de (iv).

3.6 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 10, calcular los límites y explicar cuáles han sido los teoremas utilizados en cada caso.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x^2}$.

Respuesta.-

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} x^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (iv) y por el hecho de que el límite de una constante es la misma constante.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{25x^3+2}{75x^7-2}$

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{25x^3+2}{75x^7-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 25x^3 + \lim\limits_{x\to 0} 2}{\lim\limits_{x\to 0} 75x^7 - \lim\limits_{x\to 0} 2} = \frac{0+2}{0-2} = -1.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 = 4.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (1).

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$.

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2x - \lim_{x\to 1} 1 = 1.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (1).

5. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(t+h)^2-t^2}{h}$.

Respuesta.-

$$\lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^2-t^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{t^2+2th+h^2-t^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2t+h) = \lim_{h\to 0} 2t + \lim_{h\to 0} h = 2t.$$

Esto por el teorema 3.1 inciso (1).

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}, \qquad a \neq 0.$

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-a}{x+a} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} a}{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} a} = -1.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

7. $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}, \qquad a \neq 0.$

Respuesta.-

$$\lim_{a\to 0} \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2} = \lim_{a\to 0} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{a\to 0} \frac{x-a}{x+a} = \frac{\lim\limits_{a\to 0} x - \lim\limits_{a\to 0} a}{\lim\limits_{a\to 0} x + \lim\limits_{a\to 0} a} = 1.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

8. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}, \qquad a \neq 0.$

Respuesta.-

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x+a} = \frac{\lim\limits_{x\to a} x - \lim\limits_{x\to a} a}{\lim\limits_{x\to a} x + \lim\limits_{x\to a} a} = 0$$

Por el teorema 3.1 incisos (i),(ii) y (iii).

9. $\lim\limits_{t\to 0} \tan t.$

Respuesta.-

$$\lim_{t\to 0} \tan t = 0.$$

10. $\lim\limits_{t\to 0} (\operatorname{sen} 2t + t^2 \cos 5t).$

Respuesta.-

$$\lim_{t\to 0} (\operatorname{sen} 2t + t^2 \cos 5t) = \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} 2t + \lim_{t\to 0} t^2 \cdot \lim_{t\to 0} \cos 5t = 0.$$

Por el teorema 3.1 incisos (i) y (iii).

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}.$

Respuesta.- Ya que $|x| = x$ para $x > 0$, por lo tanto tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}.$

Respuesta.- Ya que $|x| = -x$ para $x < 0$, por lo tanto tenemos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

13. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Respuesta.- Para $x > 0$ tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = x$ entonces,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Respuesta.- Para $x < 0$ tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ entonces,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Utilizar la relación $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x$ para establecer las igualdades de los Ejercicios del 15 al 20.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$.

Respuesta.- Sea $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$ entonces

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{x} = 2\cos x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

de donde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(2\cos x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2.$$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\operatorname{sen} x} = 2$.

Respuesta.- Ya que $\tan 2x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$ entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos 2x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{\cos 2x} = 2.$$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = 5$.

Respuesta.- Primeramente tenemos,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x}\right)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}.$$

Luego usando la formula $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x+x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x \cos x + \operatorname{sen} x \cos 4x}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\operatorname{sen} 2x \cos 2x \cos x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cos 4x \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} 2\cos 2x \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cos 4x \right)
\end{aligned}$$

pero sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$, así

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} 2\cos 2x \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cos 4x \right) = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 5.$$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{x} = 2.$

Respuesta.- Sabemos por ejercicios anteriores que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x+x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x \cos x + \operatorname{sen} x \cos 2x}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cos 2x \right)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 2 + 1 = 3$$

Así, por el teorema 3.1(ii),

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{x} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \\
&= 5 - 3 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

19. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} = \cos a.$

Respuesta.- Por el teorema 2.3 (g) sabemos que

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

de donde

$$\lim_{x\to a} \frac{senx - \operatorname{sen} a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\operatorname{sen} \dfrac{x-a}{2} \cos \dfrac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\operatorname{sen} \dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}} \cos \frac{x+a}{2} \right)$$

pero,

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1, \qquad \text{ya que, } y = \frac{x-a}{2} \text{ e } y \to 0 \text{ como } x \to a.$$

así,

$$\lim_{x\to a} \frac{\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}} \cos \frac{x+a}{2} = \lim_{x\to a} \frac{x+a}{2} = \cos a.$$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

Respuesta.- Sea,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

Luego, ya que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \implies 1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 \frac{1}{1+\cos x} \right] \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \right] \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

21. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

Demostración.- Multiplicando por el límite dado por $1+\sqrt{1-x^2}$ tenemos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

22. Una función f está definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x\le c,\\ ax+b & \text{si} \quad x>c,\end{cases}$$

siendo a,b,c constantes. Si b y c están dados, hallar todos los valores de a (si existe alguno) para los que f es continua en el punto $x=c$.

Respuesta.- Por definición de continuidad, de una función en un punto, conocemos que f es continua en $x=c$ el cual significa que f está definida en c y $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$.
Ya que $\operatorname{sen} x$ y $ax+b$ son definidos para todo $x\in\mathbb{R}$, conocemos que f es conocida en $x=c$ para todo $c\in\mathbb{R}$. Entonces podemos encontrar valores de a tal que

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

Por la definición de f, sabemos que

$$f(c)=\operatorname{sen} c$$

Entonces, evaluamos el limite en $x\to c$ a través de valores mayores que c (ya que el límite en $x\to c$ a través de valores menos que c es $f(c)$ ya que $\operatorname{sen} x$ es una función continua y para valores menores que c, $f(x)=\operatorname{sen} x$),

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c^+} ax+b=ac+b$$

y por lo tanto, para que f sea continua en c debemos tener,

$$ac+b=\operatorname{sen} c \implies b=0, \text{ y } a \text{ es arbitrario.}$$

23. Resolver el ejercicio 22 si f se define de este modo:

$$f(x)=\begin{cases}2\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x\le c,\\ ax^2+b & \text{si} \quad x>c,\end{cases}$$

Respuesta.- Por la definición de continuidad, conocemos que f es continua en $x=c$ el cual significa que $f(c)$ es definida y $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$. Ya que $2\cos x$ y ax^2+b está definida para todo $x\in\mathbb{R}$, conocemos que f es definida para todo $c\in\mathbb{R}$. Entonces para demostrar que es continua debemos demostrar

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

De la definición de f sabemos
$$f(c) = 2\cos c.$$

Entonces, tomando el límite como x se aproxima a c por la derecha (ya que $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c)$, $2\cos x$ es continua y $f(x) = 2\cos x$ cuando x se aproxima a c por la izquierda),

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+} ax^2 + b = ac^2 + b.$$

Así, debemos tener
$$ac^2 + b = 2\cos c \implies a = \frac{2\cos - b}{c^2} \text{ si } c \neq 0.$$

Si $c = 0$ entonces,
$$ac^2 + b = 2\cos c \implies b = 2 \text{ y } a \text{ es arbitrario.}$$

24. ¿En qué punto son funciones continuas la tangente y la cotangente?.

Respuesta.- Sea
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ son continuas para todo los número reales de donde sabemos por el teorema 3.2 que $\tan x$ es continua en todas partes, por lo que $\cos x$ no es cero. Probamos que

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

por lo que $\tan x$ es continuo para

$$\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Similarmente
$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

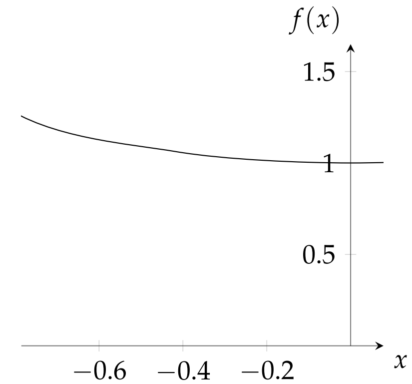
y por el teorema 3.2 tenemos que $\cot x$ es continua en todo lugar donde $\operatorname{sen} x$ no sea cero. Luego probamos que,
$$\operatorname{sen} x = 0 \iff x = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $\cot x$ es continua para

$$\{x \in \mathbb{R} | x \neq n\pi,\ n \in mathbbR\}.$$

25. Sea $f(x) = (\tan x/x)$ si $x \neq 0$. Esbozar la gráfica de f correspondientes a los intervalos semiabiertos $[-\frac{1}{4}\pi, 0]$. ¿Qué le ocurre a $f(x)$ cuando $x \to 0$? ¿Puede definirse $f(0)$ de modo que f se haga continua en 0?.

Respuesta.-



Tenemos que,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cos x \right] \\
&= \lim_{x\to 0} \cos x \\
&= 1.
\end{aligned}$$

ya que $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ no está definida en cero entonces no es una función continua. Sin embargo, dado que el límite existe, podríamos redefinir f por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \quad 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

26. Este ejercicio ofrece otra demostración de la continuidad de las funciones seno y coseno. a) La desigualdad $|\operatorname{sen} x| < |x|$, válida para $0 < |x| < \frac{1}{2}\pi$, fue demostrada en el ejercicio 34 de la sección 2.8. Utilizarla para demostrar que la función seno es continua en 0. b) Hacer uso de la parte a) y de la identidad $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ para demostrar la continuidad del coseno en 0.

Demostración.- Demostraremos primeramente que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$.
Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\operatorname{sen} x| < \epsilon$ entonces $|x| < \delta$. Sea $\delta = \epsilon$, se tiene

$$|\operatorname{sen} x| < |x|\delta = \epsilon, \qquad \text{de donde } 0 < |x| < \delta$$

así, $\operatorname{sen} x$ es continua en 0.
Por último usando la identidad dada, tenemos que

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \implies \cos x 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2},$$

por lo tanto

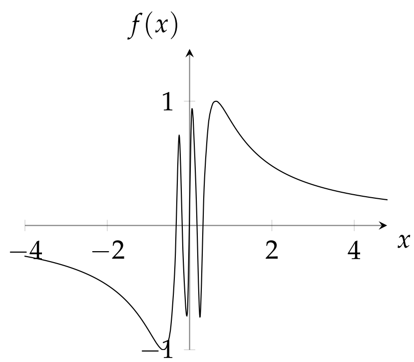
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\cos x &= \lim_{x\to 0}\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)\\
&= 1-2\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\frac{2}{x}\right)\right]\\
&= 1\\
&= \cos 0.
\end{aligned}$$

así, el coseno es continuo en 0.

27. La figura siguiente muestra una proporción de la gráfica de la función f definida como sigue:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

Para $x = 1/(n\pi)$, siendo n entero, tenemos $\operatorname{sen}(1/x) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$. Entre dos de esos puntos, la función asciende hasta 1 y baja otra vez hasta 0 o bien desciende a -1 y vuelve a subir a 0. Por consiguiente, entre cualquiera de esos puntos y el origen, la curva presenta infinitas oscilaciones. Esto sugiere que los valores de la función no tienden a ningún valor fijo cuando $x \to 0$. Demostrar que no existe ningún valor real A tal que $f(x) \to A$ cuando $x \to 0$. Esto demuestra que no es posible definir $f(0)$ de manera que f sea continua en 0.



Demostración.- Supongamos que existe algún $A \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = A$. De la definición de límites esto significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x| < \delta$$

Primero, afirmamos que para cualquiera de estos A debemos tener $|A| \leq 1$. Debe ser así porque si $|A| > 1$ entonces $|A| - 1 > 0$, de donde podríamos elegir ϵ tal que $0 < \epsilon < (|A| - 1)$. Pero se tiene $|f(x)| \leq 1$ para todo x, por consiguiente

$$|f(x) - A| = |A - f(x)| \geq |A| - |f(x)| \geq |A| - 1 > \epsilon$$

Esto contradice nuestra elección de ϵ, por lo que $|A|$ deber ser menor o igual que 1.
Luego supongamos $|A| \leq 1$ y elegimos $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$. Para obtener nuestra contradicción debemos demostrar que no existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \frac{1}{2} \text{ siempre que } 0 < |x| < \delta$$

Por la propiedad de Arquímedes de los números reales sabemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, existe un entero positivo tal que n con $n = 1$ $(modk\ 4)$. Pero,

$$0 < \frac{2}{n\pi} < |x| \implies 0 < \frac{2}{(n+2)\pi} < |x|$$

Entonces, por la definición de f y ya que $n = 1$ $(mod\ 4)$ y $n + 2 = 3$ $(\mod 4)$, tenemos

$$f\left(\frac{2}{n\pi}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 \qquad f\left[\frac{2}{(n+2)\pi}\right] = \text{sen}\left[\frac{(n+2)\pi}{2}\right] = -1$$

pero,

$$\left|f\left(\frac{n\pi}{2}\right) - A\right| \implies |1 - A| < \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} < A \leq 1$$

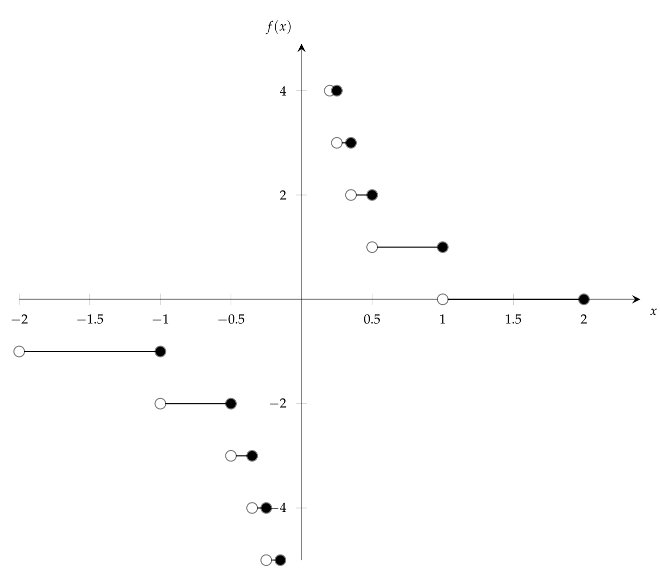
Además,

$$\left|f\left[\frac{(n+2)\pi}{2}\right] - A\right| = |-1 - A| > \frac{1}{2}.$$

Esto contradice que si $\lim_{x \to 0} f(x) = A$ entonces para cada $\epsilon > 0$ tenemos $|f(x) - A| < \epsilon$ para todo $0 < |x| < \delta$. En otras palabras, encontramos un ϵ mayor que 0 tal que no importa tan pequeño que elijamos δ existe un x tal que $|x|$ es menor que δ, pero $|f(x) - A|$ es mayor que ϵ. Esto contradice la definición de $\lim_{x \to 0} f(x) = A$. Por lo tanto no puede haber tal núemero en $A \in \mathbb{R}$.

28. Para $x \neq 0$, sea $f(x) = [1/x]$, designado por $[t]$ el mayor entero $\leq t$. Trazar la gráfica de f para los intervalos $[-2, -\frac{1}{5}]$ y $[\frac{1}{5}, 2]$. ¿Qué le ocurre a $f(x)$ cuando $x \to 0$ tomando valores positivos? ¿y tomando valores negativos? ¿Puede definirse $f(0)$ para que f sea continuo en 0?

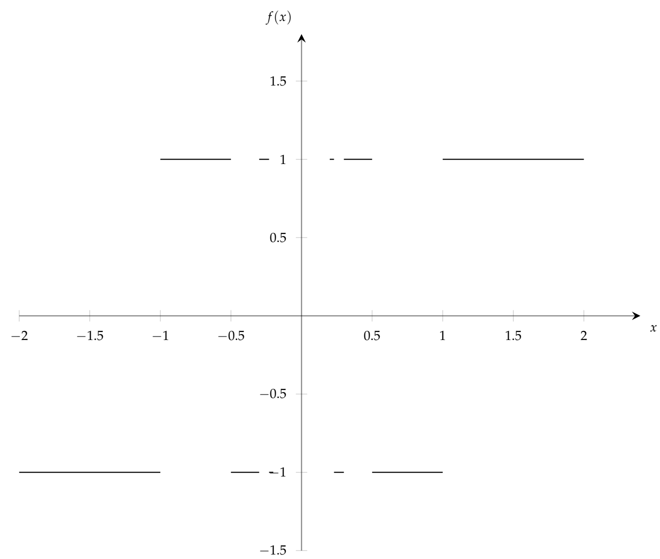
Respuesta.-



Como $x \to 0^+$, $f(x)$ toma valores positivos arbitrariamente grandes.
Como $x \to 0^-$, $f(x)$ toma valores negativos arbitrariamente grandes.
No hay manera de definir $f(0)$ para que f sea continuo en 0.

29. Hacer lo mismo que en el ejercicio 28, cuando $f(x) = (-1)^{[1/x]}$ para $x \neq 0$.

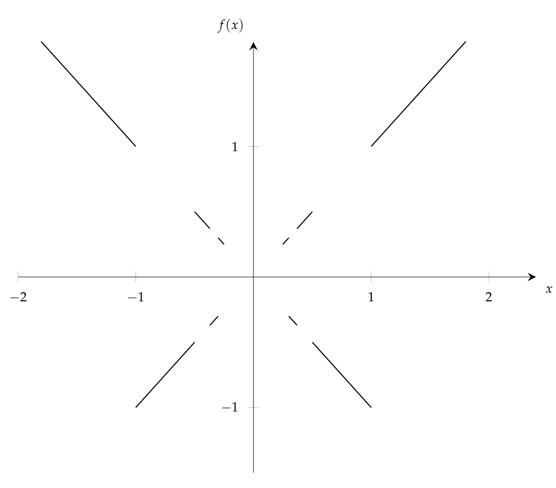
Respuesta.-



Como $x \to 0^+,\ f(x)$ alterna entre 1 y -1.
Como $x \to 0^-,\ f(x)$ alterna entre 1 y -1.
No hay forma de definir $f(0)$ para que f sea continuo en 0, ya que $f(x)$ tomará ambos valores 1 y -1 no importa cuán pequeño elijamos nuestro $\delta > 0$.

30. Los mismo que en el ejercicio 28, cuando $f(x) = x(-1)^{[1/x]}$ para $x \neq 0$.

Respuesta.-



Como $x \to 0^+$, $f(x) \to 0$.
Como $x \to 0^-$, $f(x) \to 0$.
Si definimos $f(0) = 0$ entonces f es continuo en 0.

31. Dar un ejemplo de una función continua en un punto de un intervalo y discontinua en los demás puntos del intervalo, o probar que no existe una tal función.

Demostración.- Sea f una función en el intrevalo $[-a,a]$ tal que,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo tanto, la función f es continua solo en el punto $x = 0$, y discontinuo en todos los demás puntos del intervalo $[-a,a]$.

32. Sea $f(x) = x\,\text{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$. Definir $f(0)$ de manera que f sea continua en 0.

Demostración.- Ya que $-1 \leq \text{sen}\,\dfrac{1}{x} \leq 1$ para todo $x \neq 0$ sabemos que,

$$-x \leq x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} \leq x, \quad x \neq 0$$

después se tiene que,

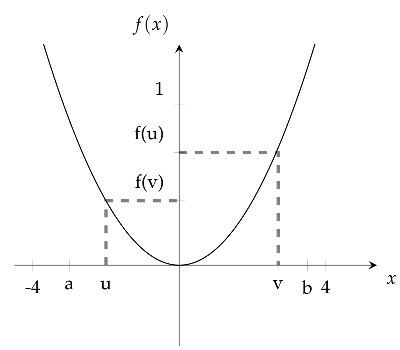
$$\lim_{x\to 0} -x = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Aplicando el teorema 3.3 concluimos,

$$\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = 0$$

Por lo tanto, definiendo $f(0) = 0$, extendemos f a una función continua en 0.

33. Sea f una función tal que $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$ para todos los valores u y v de un intervalo $[a,b]$.



a) Probar que f es continua en cada punto de $[a,b]$.

Demostración.- Sea h cualquier punto en $[a,b]$, de donde para todo $\epsilon > 0$ con $\delta = \epsilon$ se tiene por hipótesis que,

$$|x - h| < \delta \implies |x - h| < \epsilon \implies |f(x) - f(h)| < \epsilon$$

Así, para todo $\epsilon > 0$, tenemos $|f(x) - f(h)| < \epsilon$ siempre que $|x - h| < \delta$, y por lo tanto

$$\lim_{x\to h} f(x) = f(h).$$

b) Suponiendo que f sea integrable en $[a,b]$, demostrar que

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f(a) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}$$

Demostración.- Sea $x \in [a,b]$ tenemos,

$$|f(x) - f(a)| \leq |x-a| = x-a$$

y sabemos que,

$$\int_a^b f(a)\ dx = (b-a)f(a)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f(a) \right| &= \left| \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f(a)\ dx \right| \\
&= \left| \int_a^b [f(x) - f(a)]\ dx \right| \\
&\leq \int_a^b |f(x) - f(a)|\ dx \\
&\leq \int_a^b |x-a|\ dx = \int_a^b (x-a)\ dx \\
&= \frac{x^2}{2} - ax \Big|_a^b = \frac{(b-a)^2}{2}
\end{aligned}$$

c) Más general. Demostrar que para cualquier c de $[a,b]$, se tiene

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f(c) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}$$

Demostración.- Similar a la parte (b) se tiene que,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f(c) \right| &= \left| \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f(c)\ dx \right| \\
&\leq \int_a^b |f(x) - f(c)|\ dx \\
&= \int_a^b |x-c|\ dx
\end{aligned}$$

Luego ya que $c \in [a, b]$ y $|x - a| = -(x - c)$ para $x < c$ y $|x - c| = x - c$ para $x \geq c$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |x-c|\, dx &= \int_a^c -(x-c)\, dx + \int_c^b (x-c)\, dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\Big|_a^c + c\cdot x\Big|_a^c + \frac{x^2}{2}\Big|_c^b - c\cdot x\Big|_c^b \\
&= \frac{a^2-c^2}{2} + c(c-a) + \frac{b^2-c^2}{2} - c(b-c) \\
&= \frac{a^2+b^2}{2} + c^2 - c(b+a)
\end{aligned}$$

Pero, sabemos que $c \in [a, b]$ implica que $c \leq b$ por lo que

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{2} + c^2 - c(b+a) &= \frac{a^2+b^2}{2} + c[c-(b+a)] \\
&\leq \frac{b^2+a^2}{2} + b(b-b-a) \\
&= \frac{b^2+a^2}{2} - ab \\
&= \frac{b^2-2ab+a^2}{2} \\
&= \frac{(b-a)^2}{2}
\end{aligned}$$

3.7 funciones compuestas y continuas

Definición 3.5 Sean u y v dos funciones dadas cualquiera. La compuesta o la composición de u y v en ese orden se define como la función f para la cual

$$f(x) = u[v(x)]$$

Es decir, para calcular el valor de f en x primero se calcula $v(x)$ y luego se calcula u e el punto $v(x)$. Naturalmente que para que este cálculo tenga sentido, es necesario que los valores de $v(x)$ entren en el dominio de la función u, y f estará sólo definida en aquellos puntos x para los cuales $v(x)$ está en el dominio de u.

La notación para indicar composición es:

$$f = u \circ v$$

que tiene una analogía con la notación de producto $u \cdot v$. En efecto, se verá a continuación que la operación de composición tiene algunas de las propiedades de la multiplicación La **ley asociativa** está dada por:

$$u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$$

La demostración inmediata. Luego la ley conmutativa no es siempre válida en la composición.

Teorema 3.5 Suponiendo que v continua en p y que u es continua en q, siendo $q = v(p)$, la función compuesta $f = u \circ v$ es continua en p.

Demostración.- Puesto que u es continua en q, para todo entorno $N_1[u(q)]$ existe un entorno $N_2(q)$ tal que

$$u(y) \in N[u(q)] \text{ siempre que } y \in N_2(q).$$

Pero $q = v(p)$ y v es continua en p, de modo que para el entorno $N_2(q)$ existe otro entorno $N_3(p)$ tal que

$$v(x) \in N_2(q) \text{ siempre que } x \in N_3(p).$$

Si ponemos $y = v(x)$ y combinamos estas últimas, encontramos que para todo entorno $N_1(u[v(p)])$ existe un entorno $N_3(p)$ tal que

$$u[v(x)] \in N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \in N_3(p),$$

o, dicho de otro modo, puesto que $f(x) = u[v(x)]$,

$$f(x) \in N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \in N_3(p).$$

Esto significa que f es continua en p, como se afirmó.

■

3.8 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 10, las funciones f y g están definidas por las fórmulas dadas. Si no se dice lo contrario, los dominios de f y g consisten en todos los números reales. Pongamos $h(x) = f[g(x)]$ siempre que $g(x)$ esté en el dominio de f. En cada caso, precisar el dominio de h y dar una o más fórmulas para la determinación de $h(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 2x, \qquad g(x) = x + 1.$

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = (x+1)^2 - 2x = x^2 + 2x + 1 - 2x = x^2 + 1$$

esto es válido para $x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = x + 1, \qquad g(x) = x^2 - 2x.$

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

válido para $x \in \mathbb{R}$.

3. $f(x) = \sqrt{x}$, si $x \leq 0$ $\qquad g(x) = x^2$.

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Ya que $g(x) \geq 0$ la composición es válida para todos $x \in \mathbb{R}$.

4. $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$, $\qquad g(x) = -x^2$.

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = \sqrt{-x^2}$$

Ya que $-x^2 \leq 0$ y $\sqrt{x} \geq 0$ la composición sólo está definida para $x = 0$.

5. $f(x) = x^2$, $\qquad g(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$.

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

Esto es válido para $x \geq 0$.

6. $f(x) = -x^2$, $\qquad g(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$.

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = -\left(\sqrt{x}\right)^2 = -x.$$

Esto es válido para $x \geq 0$.

7. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\qquad g(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$.

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right).$$

Es válido para $x \geq 0$.

8. $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$, $\qquad g(x) = \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}.$$

Es válido para $x \geq 0$, por el hecho de que se define el dominio de f como $x \geq 0$.

9. $f(x) = \sqrt{x}$ si $x > 0$, $\qquad g(x) = x + \sqrt{x}$ si $x > 0$.

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}.$$

Ya que $g(x) = x + \sqrt{x} > 0$ y f está definida en $x > 0$, la composición es válida para $x > 0$.

10. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ si $x > 0$, $\qquad g(x) = x + \sqrt{x}$ si $x > 0$.

Respuesta.- Sea $h(x) = f[g(x)]$ entonces,

$$h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Ya que cada función está definida par $x > 0$, entonces la composición es válida para $x > 0$.

Calcular los límites en los ejercicios del 11 al 20 y explicar qué teoremas se aplican en cada caso.

11. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$.

Respuesta.-

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -3$$

12. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

Respuesta.-

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{3}.$$

13. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\tan t)}{\operatorname{sen} t}$.

Respuesta.- Recordemos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, por lo tanto

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan t)}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\tan t)}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}} \right) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\tan t)}{\tan t} \right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\cos t} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan t)}{\tan t} = 1.$$

14. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$.

Respuesta.- Sean $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ entonces

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x} = 1.$$

15. $\lim\limits_{t\pi} \dfrac{\operatorname{sen}(t-\pi)}{t-\pi}$.

Respuesta.- Sea $x = t - \pi$, donde $t \to \pi$ es $x \to 0$ entonces,

$$\lim_{t\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(t-\pi)}{t-\pi} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$.

Respuesta.- Sea $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ entonces,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left[x + 1 \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{(x+1)(x-1)} \right] = \lim_{x\to 1}(x+1) \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1} = 2.$$

17. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Respuesta.- Ya que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y

$$-1 \le \operatorname{sen} \frac{1}{x} \le 1, \; x \ne 0 \implies -x \le x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \le x, \; x \ne 0$$

como también,

$$\lim_{x\to 0} -x = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to 0} x = 0$$

entonces por el teorema 3.3 concluimos que,

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Respuesta.- Sea $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2\operatorname{sen}^2 x)}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2.$$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\sqrt{1-4x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-4x^2)}{x^2\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4}{1-\sqrt{1-4x^2}}\\
&= 2.
\end{aligned}$$

21. Sean f y g dos funciones definidas como sigue:

$$f(x) = \frac{x+|x|}{2} \text{ para todo } x, \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{para} \quad x<0, \\ x^2 & \text{para} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula (o fórmulas) para el cálculo de la función compuesta $h(x) = f[g(x)]$. ¿Para qué valores de x s continua h?.

Respuesta.- Si $x<0$, tenemos $|x| = -x$ de donde podemos calcular la composición de la siguiente manera,

$$h(x) = f(g(x)) = f(x) = \frac{x-x}{2} = 0.$$

Si $x \geq 0$, tenemos $|x| = x$ de donde,

$$h(x) = f(g(x)) = f\left(x^2\right) = \frac{2x^2}{2} = x^2.$$

Así,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0, \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Ciertamente vemos que h es continuo para todo $x \neq 0$, ya que las funciones constante $h8x) = 0$ y el polinomio $h(x) = x^2$ son continuos. Además h es continuo en $x=0$ ya que,

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = h(0).$$

22. Resolver el ejercicio 21 cuando f y g se definen del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x|>1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si} \quad |x| \leq 2, \\ 2 & \text{si} \quad |x|>2, \end{cases}$$

Respuesta.- Si $|x|>2$ entonces $g(x) = 2$ y así $|f(x)|>1$. Por lo tanto,

$$h(x) = f(g(x)) = 0.$$

Si $\sqrt{3} < x \leq 2$, entonces $|g(x)| = |2-x^2| > 1$ así,

$$h(x) = f(g(x)) = 0.$$

Luego si $1 \leq x \leq sqrt3$, entonces $|g(x)| = |2 - x^2| \leq 1$ de donde,

$$h(x) = f(g(x)) = 1.$$

Finalmente, si $|x| < 1$, entonces $|g(x)| = |2 - x^2| > 1$. Por lo tanto,

$$h(x) = f(g(x)) = 0.$$

Concluimos que,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq |x| < \sqrt{3}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para esta expresión tenemos que $h(x)$ es continua en cualquier punto menos en $|x| = 1$ y $|x| = \sqrt{3}$.

23. Resolver el ejercicio 21 cuando $h(x) = g[f(x)]$.

Respuesta.- Si $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ de donde calculamos la composición de la siguiente manera,

$$h(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{x - x}{2}\right] = g(0) = 0.$$

Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y la composición será,

$$h(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{x + x}{2}\right] = g(x) = x^2.$$

Por lo tanto,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Donde h es una función continua para todo x.

3.9 Teorema de Bolzano para las funciones continuas

Teorema 3.6 **Teorema de Bolzano.** Sea f continua en cada punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Existe entonces por lo menos un c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.

■

Basaremos nuestra demostración del teorema de Bolzano en la siguiente propiedad de las funciones continuas que establecemos aquí como un teorema.

Teorema 3.7 **Conservación del signo de las funciones continuas.** Sea f continua en c y supongamos que $f(c) \neq 0$. Existe entonces un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$.

Demostración.- Supóngase $f(c) > 0$. En virtud de la continuidad para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon \;\Rightarrow\; f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon \text{ siempre que } c - \delta < x < c + \delta \quad \Leftarrow |x - c| < \delta$$

Tomando el δ correspondiente a $\epsilon = f(c)/2$ (este ϵ es positiva) entonces se sigue,

$$\frac{1}{2}f(c) < f(c) < \frac{3}{2}f(c) \text{ siempre que } c - \delta < x < c + \delta$$

De aquí se deduce que $f(x) > 0$ en este intervalo y por tanto $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo. Si $f(c) < 0$ se toma δ correspondiente a $\epsilon = -\dfrac{1}{2}f(c)$ y se llega a la misma conclusión.

■

Nota.- Si existe continuidad a un lado de c, entonces existe el correspondiente intervalo unilateral $[(c, c + \delta)$ o $(c - \delta, c)]$

Demostración del teorema de Bolzano.- Para fijar ideas, supóngase $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Puede haber muchos valores de x entre a y b para los cuales $f(x) = 0$. Se trata aquí de encontrar uno y esto se hará determinando el mayor x para el cual $f(x) = 0$. Para ello, sea S el conjunto de todos los puntos del intervalo $[a, b]$ para los cuales $f(x) \leq 0$. Hay por lo menos un punto en S puesto que $f(a) < 0$. Por lo tanto, S es un conjunto no vacío. S está acotado superiormente puesto que todos los puntos de S están en $[a, b]$, y puesto que todo conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente tiene un extremo superior, a éste se le llama c. Se trata de demostrar que $f(c) = 0$.
Hay sólo tres posibilidades: $f(c) > 0$, $f(c) > 0$ y $(c) = 0$. Si $f(c) > 0$ hay un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ o $(c - \delta, c]$ si $c = b$, entonces $f(x)$ es positivo. Por tanto, ningún punto de S puede estar a la derecha de $c - \delta$ y así $c - \delta$ es una cota superior del conjunto S. Pero $c - \delta < c$ y c es el extremo superior de S. De donde concluimos que la desigualdad $f(c) > 0$ es imposible. Si $f(c) < 0$ hay un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ o $[c, c + \delta)$ si $c = a$, en el cual f es negativa y por tanto $f(x) < 0$ para algún $x > c$, en contra del hecho de que c es una cota superior de S. De donde $f(c) < 0$ también es imposible. Así sólo nos queda la posibilidad de que $f(c) = 0$. Además $a < c < b$ puesto que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Con lo que queda demostrado el teorema de Bolzano.

3.10 Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Consecuencia inmediata edl teorema de Bolzano es el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

Teorema 3.8 Sea f continua en cada punto de un intervalo $[a, b]$. Si $x_1 < x_2$ son dos puntos cualesquiera de $[a, b]$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces la función f toma todos los valores entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ en algún lugar del intervalo (x_1, x_2).

Demostración.- Supongamos $f(x_1) < f(x_2)$ y sea k cualquier valor entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Sea g la función definida en $[x_1, x_2]$ como sigue:

$$g(x) = f(x) - k.$$

Entonces g es continuo en cada punto de $[x_1, x_2]$, y tenemos

$$g(x_1) = f(x_1) - k < 0, \qquad g(x_2) = f(x_2) - k > 0.$$

Aplicando el teorema de Bolzano para g, tenemos $g(x) = 0$ para algún c entre x_1 y x_2. Pero esto significa $f(c) = k$, quedando así demostrado el teorema.

■

Teorema 3.9 Si n es un entero positivo y si $a > 0$, entonces existe exactamente un b positivo tal que $b^n = a$.

Demostración.- Escoja $c > 1$ tal que $0 < a < c$, y considere la función f definida en el intervalo $[0, c]$ por la ecuación $f(x) = x_n$. Esta función es continua en $[0, c]$, y en los extremos tenemos $f(0) = 0$ y $f(c) = c^n$. Puesto que $0 < a < c < c^n$ el número a dado está comprendido entre los valores de la función $f(0)$ y $f(c)$. Por tanto, en virtud del teorema del valor intermedio, se tiene $f(x) = a$ para algún x en $[0, c]$, digamos para $x = b$. Esto prueba la existencia de por lo menos un b positivo tal que $b^n = a$. No puede haber más que uno tal que puesto que f es estrictamente creciente en $[0, c]$, con lo cual queda demostrado en teorema.

■

3.11 Ejercicios

1. Sea f un polinomio de grado n, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$, tal que el primero y el último coeficiente c_0 y c_n tienen signos distintos. Demostrar que $f(x) = 0$ por lo menos para un valor positivo de x.

Demostración.- Tenemos que evaluar la función f en el punto 0 de la siguiente manera,

$$f(0) = \sum_{k=0}^{n} c_k 0^k = c_0$$

donde notamos que $f(0)$ tiene el mismo signo que c_0, luego

$$f(x) = c_n x^n + x_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x^0 = c_n x^n \left(1 + \frac{c_{n-1}}{c_n} + \ldots + \frac{c_0}{c_n} \cdot \frac{1}{x_n}\right)$$

se sigue que para un x grande se tiene,

$$1 + \frac{c_{n-1}}{c_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{c_0}{c_n} \cdot \frac{1}{x^n} > 0$$

por lo que $f(x)$ tendrá el mismo signo que c_n para un x grande, luego para $x > 0$,

$$x^n \left(1 + \frac{c_{n-1}}{c_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{c_0}{c_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right) > 0$$

que nos dice que cuando multiplicamos un número positivo por c_n el resultado tendrá el mismo signo que c_n.
Por lo tanto debemos demostrar que el término es realmente positivo. Primeramente,

$$1 + \frac{c_{n-1}}{c_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{c_0}{c_n} \cdot \frac{1}{x^n} \geq 1 - \left(\left|\frac{c_{n-1}}{c_n} \cdot \frac{1}{x}\right| + \ldots + \left|\frac{c_0}{c_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right|\right)$$

esto es cierto ya que,

$$\left|\frac{c_i}{c_n} \cdot \frac{1}{x^{n-i}}\right| \geq \frac{c_i}{c_n} \cdot \frac{1}{x_{n-i}} \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n-1$$

Ahora, dado que estamos mostrando que hay un tamaño suficientemente grande de x como para que nuestra afirmación sea verdadera, dejemos que

$$x > \max\left\{1, \left|\frac{c_n}{n \cdot c_a}\right|\right\}, \quad \text{donde} \quad |c_a| = \max\{|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_n|\}.$$

Ya que $x > 1$ sabemos que $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x^n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ por lo que

$$\begin{aligned}
1 - \left(\left| \frac{c_{n-1}}{c_n} \cdot \frac{1}{x} \right| + \ldots + \left| \frac{c_0}{c_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right| \right) &> 1 - \left(\left| \frac{c_{n-1}}{c_n} \cdot \frac{1}{x} \right| + \ldots + \left| \frac{c_0}{c_n} \cdot \frac{1}{x} \right| \right) \\
&= 1 - \left(\left| \frac{c_{n-1}}{c_n} \cdot \frac{c_n}{n \cdot c_a} \right| + \ldots + \left| \frac{c_0}{c_n} \cdot \frac{c_n}{n \cdot c_a} \right| \right) \\
&= 1 - \left(\left| \frac{c_{n-1}}{n \cdot c_a} \right| + \ldots + \left| \frac{c_0}{n \cdot c_a} \right| \right) \\
&> 1 - \left(\left| \frac{c_a}{n \cdot c_a} \right| + \ldots + \left| \frac{c_a}{n \cdot c_a} \right| \right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \right) \\
&= 1 - \left(\frac{n-1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n} > 0
\end{aligned}$$

Esto prueba nuestra afirmación, por lo que $f(x)$ tiene el mismo signo que c_n para un x suficientemente grande. Así tanto $f(0)$ y $f(x)$ tienen signos diferentes y por lo tanto hay algunos $c > 0$ tales que $f(c) = c$.

2. Un número real x_1, tal que $f(x_1) = 0$ es una raíz real de la ecuación $f(x) = 0$. Decimos que una raíz real de una ecuación a sido separada si se ha encontrado un intervalo $[a, b]$ que contiene esta raíz y ninguna otra. Con ayuda del teorema de Bolzano, separar las raíces reales de cada una de las siguientes ecuaciones (cada una tiene cuatro raíces reales).

(a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 26x - 8 = 0.$

Respuesta.-

$$\begin{array}{lll}
f(-4) = 168, \quad f(-3) = -143 & \Longrightarrow & f(c_1) = 0 \text{ para } c_1 = 0 \in [-4, -3] \\[2mm]
f(0) = -8, \quad f(1/2) = \dfrac{15}{16} & \Longrightarrow & f(c_2) = 0 \text{ para } c_2 \in [0, 1/2] \\[2mm]
f(1/2) = \dfrac{15}{16}, \quad f(-7) = -7 & \Longrightarrow & f(c_3) = 0 \text{ para } c_3 \in [1/2, 1] \\[2mm]
f(1) = -7, \quad f(4) = 200 & \Longrightarrow & f(c_4) = 0 \text{ para } c_4 \in [-7, 4]
\end{array}$$

(b) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0.$

Respuesta.-

$$\begin{array}{lcl} f(-4) =, \quad f(-3) = -7 & \Longrightarrow & f(c_1) = 0 \text{ para } c_1 \in [-4, -3] \\ f(0) =, \quad f(1) = 1 & \Longrightarrow & f(c_2) = 0 \text{ para } c_2 \in [0, 1] \\ f(1) =, \quad f(3/2) = -\dfrac{11}{8} & \Longrightarrow & f(c_3) = 0 \text{ para } c_3 \in [1, 3/2] \\ f(3/2) = -\dfrac{11}{8}, \quad f(2) = 3 & \Longrightarrow & f(c_4) = 0 \text{ para } c_4 \in [3/2, 2] \end{array}$$

(c) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0.$

Respuesta.-

$$\begin{array}{lcl} f(-3) = 2, \quad f(-5/2) = -\dfrac{3}{16} & \Longrightarrow & f(c_1) = 0 \text{ para } c_1 \in [-3, -5/2] \\ f(-5/2) = -\dfrac{3}{16}, \quad f(-2) = 2 & \Longrightarrow & f(c_2) = 0 \text{ para } c_2 \in [-5/2, -2] \\ f(0) = 2, \quad f(1/2) = -\dfrac{3}{16} & \Longrightarrow & f(c_3) = 0 \text{ para } c_3 \in [0, 1/2] \\ f(1/2) = -\dfrac{3}{16}, \quad f(1) = 2 & \Longrightarrow & f(c_4) = 0 \text{ para } c_4 \in [1/2, 1] \end{array}$$

3. Si n es un entero positivo impar y $a < 0$ demostrar que existe un número negativo b y sólo uno tal que $b^n = a$.

Demostración.- Sea $f(x) = x^n$ una función definida en $[c, 0]$ tal que $c < -1$. Así $f(x)$ es una función continua en $[c, 0]$. De donde en los extremos tenemos $f(c) = c^n$ y $f(0) = 0$, por lo que

$$c^n < c.$$

Luego sea a un número que se encuentra entre $f(c)$ y $f(0)$, entonces tenemos

$$f(c) < a < f(0) \quad \Rightarrow \quad c^n < a < 0$$

Por el teorema del valor intermedio, existe al menos un número negativo b en $[c, 0]$ tal que

$$f(b) = a \quad \Rightarrow \quad b^n = a.$$

de donde concluimos que f es una función estrictamente creciente en $[c, 0]$, por lo que existe exactamente un $b < 0$ tal que $b^n = a$.

4. Sea $f(x) = \tan x$. A pesar de ser $f(\pi/4) = 1$ y $f(4\pi/4) = -1$, no hay ningún punto x en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ tal que $f(x) = 0$. Explicar por qué no hay contradicción con el teorema de Bolzano.

Respuesta.- No se contradice ya que $\tan x$ no es continua en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ya que no está definido en $\pi/2$.

5. Dada una función f de valores reales continua en el intervalo cerrado $[0,1]$. Supongamos que $0 \leq f(x) \leq 1$ para cada x en $[0,1]$. Demostrar que existe por lo menos un punto c en $[0,1]$ para el cual $f(c) = c$. Tal punto se llama un punto fijo de f. El resultado de este ejercicio es un caso particular del teorema del punto fijo de Brower.

Demostración.- Sea $g(x) = f(x) - x$, por lo que g es continua en $[0,1]$, esto porque la diferencia de funciones continuas es continua sobre $[0,1]$, de donde tenemos las siguientes inecuaciones:

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0), \qquad g(1) = f(1) - 1$$

Luego ya que, $\forall x \in [0,1]$, entonces $0 \leq f(x) \leq 1$ por lo que se tiene las siguientes inecuaciones,

$$0 \leq f(0) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq g(0) \leq 1$$

y

$$0 \leq f(1) \leq 1, \quad \Rightarrow \quad -1 \leq f(1) - 1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq g(1) \leq 0$$

Así $g(0)$ y $g(1)$ tiene signos opuestos, entonces aplicando el teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0,1)$ tal que $g(c) = 0$, que implica $f(c) - c = 0$ o $f(c) = c$.

6. Dada una función continua f de valores reales en el intervalo cerrado $[a,b]$. Suponiendo que $f(a) \leq a$ y que $f(b) \geq b$, demostrar que f tiene un punto fijo en $[a,b]$.

Demostración.- Sea $g(x) = f(x) - x$, de donde $f(x)$ y x son funciones continuas en $[a,b]$, entonces $g(x)$ es continua en cada punto de $[a,b]$, por hipótesis tenemos,

$$f(a) \leq a \quad \Rightarrow \quad f(a) - a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad g(a) \leq 0$$

y

$$f(b) \geq b \quad \Rightarrow \quad f(b) - b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g(b) \geq 0.$$

de donde $g(a)$ y $g(b)$ tiene signos opuestos. Por el teorema de Bolzano, al al menos un c en $[a,b]$ tal que $g(c) = 0$, por lo tanto $f(c) - c = 0$ o $f(c) = c$.

3.12 El proceso de inversión

Definición 3.6 Sea f con dominio A y recorrido B. A cada x de A corresponde un y de B tal que $y = f(x)$. Para cada y de B, existe por lo menos un x de A tal que $f(x) = y$. Supongamos que existe uno sólo de esos x. Entonces podemos definir una nueva función g de B del modo siguiente:

$$g(y) = x \text{ significa que } y = f(x).$$

Dicho de otro modo, el valor de g en cada punto y de B es el único x de A tal que $f(x) = x$, es decir,

$$g[f(x)] = x \text{ para todo } x \text{ de } A \text{ y que } f[g(y)] = y \text{ para todo } y \text{ de } B.$$

El proceso de inversión puede aplicarse a cualquier función f que tenga la propiedad de que para cada y en el recorrido de f, existe un sólo x en el dominio de f tal que $f(x) = y$.

Lema 3.1 Toda función continua estrictamente monótona tiene inversa.

Demostración.- Sean una función continua y estrictamente monótona en un intervalo $[a, b]$ y $c = f(a)$, $d = f(b)$. El teorema del valor intermedio para las funciones continuas nos dice que en el intervalo $[a, b]$, f toma todo valor comprendido entre c y d. Además, no puede tomar dos veces el mismo valor porque $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$ ■

3.13 Propiedades de las funciones que se conservan por la inversión

Teorema 3.10 Sea f estrictamente creciente y continua en un intervalo $[a, b]$. Sean $c = f(a)$ y $d = f(b)$ y sea g la inversa de f. Esto es, para cada y en $[c, d]$, sea $g(y)$ aquel x de $[a, b]$ tal que $y = f(x)$. Entonces

(a) g es estrictamente creciente en $[c, d]$.

(b) g es continua en $[c, d]$.

Demostración.- Elijamos $y_1 < y_2$ en $[c, d]$ y pongamos $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$. Entonces $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Puesto que f es estrictamente creciente, la relación $y_1 < y_2$ implica que $x_1 < x_2$, la cual, a su vez, implica que g sea estrictamente creciente en $[c, d]$. Esto demuestre la parte (a).
Demostremos ahora b). Elijamos un punto y_0 en el intervalo abierto (c, d). Para demostrar que g es continua en y_0, debemos probar que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$g(y_0) - \epsilon < g(y) < g(x_0) + \epsilon \text{ siempre que } y_0 < y < y_0 + \delta.$$

Pongamos $x_0 = g(y_0)$, de modo que $f(x_0) = y_0$. Supongamos ϵ dado. (No se pierde generalidad si consideramos aquellos valores de ϵ bastante pequeños para que $x_0 - \epsilon$ y $x_0 + \epsilon$ queden en el interior de $[a, b]$.) Sea δ el menor de los dos números

$$f(x_0) - f(x_0 - \epsilon) \quad \text{y} \quad f(x_0 + \epsilon) - f(x_0).$$

Es fácil comprobar que con este δ se verifica. Una ligera modificación del razonamiento prueba que g es continua a la derecha de c, y a la izquierda de d.
Existe el teorema análogo para funciones decrecientes. Esto es, la inversa de una función f estrictamente decreciente es estrictamente decreciente y continua. Esto resulta de aplicar el teorema 3.10 a $-f$.

■

3.14 Inversas de funciones monótonas a trozos

Para encajar la función $f(x) = x^2$ con $g_1(y) = \sqrt{y}$ y $g_2(y) = -\sqrt{y}$ para cada y en $[0, c^2]$ se puede considerar que la ecuación $y = x^2$ no define una función f sino dos funciones f_1 y f_2 donde:

$$f_1(x) = x^2 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq c \quad \text{y} \quad f_2(x) = x^2 \quad \text{si} \quad -c \leq x \leq 0.$$

Estas funciones pueden considerarse como distintas porque tienen dominios distintos. Cada una de ellas es monótona es su dominio y cada una tiene una inversa, la inversa de f_1 es g_1 y la inversa de f_2 es g_2 donde g_1 y g_2 están dada por $g_1(y) = \sqrt{y}$ y $g_2(y) = -\sqrt{y}$ para cada y en $[0, c^2]$.

3.15 Ejercicios

En cada uno de los ejercicios 1 al 5, demostrar que f es estrictamente monótona en todo el eje real. Desígnese por g la inversa de f. Describir el dominio de g en cada caso. Poner $y = f(x)$ y despejar x en función de y; hallar una fórmula (o fórmulas) para calcular $g(y)$ para cada y en el dominio de g.

1. $f(x) = x + 1$.

Respuesta.- Primero demostremos que f es monótona. Sea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ entonces

$$x_1 + 1 < x_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Por lo que, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
Luego,

$$y = x + 1 \quad \to \quad x = y - 1 \quad \Rightarrow \quad g(y) = y - 1, \; \forall \, y \in \mathbb{R}.$$

2. $f(x) = 2x + 5$.

Respuesta.- Demostremos que f es monótona. Sea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$, entonces

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 < 2x_2 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Por lo que, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
Luego,

$$y = 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y-5}{2} \quad \Rightarrow \quad g(y) = \frac{y-5}{2}, \; \forall \, y \in \mathbb{R}.$$

3. $f(x) = 1 - x$.

Respuesta.- Demostremos que f es monótona. Sea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ entonces,

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad -x_1 > -x_2 \quad \Rightarrow \quad 1 - x_1 > 1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Por lo que, f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$.
Luego,

$$y = 1 - x \quad \Rightarrow \quad x = 1 - y \quad \Rightarrow \quad g(y) = 1 - y, \; \forall \, y \in \mathbb{R}.$$

4. $f(x) = x^3$.

Respuesta.- Demostremos que f es monótona. Sea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ de donde consideramos que

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2\right) = (x_2 - x_1)\left[\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3x_1^2}{4}\right]$$

pero, dado que $x_2 > x_1$ por suposición, tenemos $(x_2 - x_1) > 0$. El segundo término del producto también es positivo ya que es una suma de términos positivos. Por lo tanto,

$$x_2^3 - x_1^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1).$$

Así, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
Luego,

$$y = x^3 \quad \Rightarrow \quad x = y^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad g(y) = y^{\frac{1}{3}}, \; \forall \, y \in \mathbb{R}.$$

5. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 1, \\ x^2 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 4, \\ 8x^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

Respuesta.- Demostremos que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Notemos que cada componente es estrictamente creciente, entonces debemos comprobar que las funciones crece de un intervalo al otro.

$$x_1 < 1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 < x_2^2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

y

$$1 \leq x_1 \leq 4 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 < 8x_2^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Por lo tanto, f es creciente en $\mathbb{R}$. Luego,

$$g(y) = \begin{cases} y & \text{si} \quad y < 1, \\ y^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad 1 \leq y \leq 16, \\ \left(\dfrac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad y > 16 \end{cases}$$

Valores medios. Sea f continua y estrictamente monótona en el eje real positivo y sea g la inversa de f. Si $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ son n números reales positivos dados, se llama valor medio (o promedio) con respecto a f al número M definido como sigue:

$$M_f = g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right).$$

En particular, cuando $f(x) = x^p$ para $p \neq 0$, M_f es llamado media de potencias p-ésimas. Los ejercicios siguientes se refieren a las propiedades de los valores medios.

6. Demostrar que $f(M_f) = (1/n)\sum\limits_{i=1}^{n} f(a_i)$. Dicho de otro modo, el valor de f en el promedio M_f es la media aritmética de los valores $f(a_1), \ldots, f(a_n)$.

Demostración.- Ya que g es inversa de f sabemos que $f(g(x)) = x$ para todo x en el rango de f, es decir, para todo x tal que existe algún $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(c) = x$.
Por definición de valor medio tenemos que,

$$f(M_f) = f\left[g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)\right].$$

Así, si $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a_i)$ es en el dominio de g entonces hemos terminado. Por otro lado ya que g es la inversa de f su dominio es igual al rango de f. Por lo que demostraremos que este valor es en el rango de f usando el teorema del valor intermedio.
Sin perder la generalidad, supongamos que f es estrictamente creciente (la suposición alternativa, que f es estrictamente creciente, producirá un argumento casi idéntico). Entonce, como $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ son números reales positivos, tenemos $f(a_1) < f_(a_2) < \ldots < f(a_n)$. (Aquí, si hubiéramos asumido que f era estrictamente decreciente, las desigualdades de roles se invertirían). Entonces se tendrá,

$$f(a_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_1) < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_n) = f(a_n).$$

Luego por el teorema del valor intermedio, ya que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \in [f(a_1), f(a_n)]$$

debe existir algún $c \in \mathbb{R}^+$. De donde

$$f(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

Por lo tanto, $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a_i)$ está en el dominio de g, por lo que

$$f(M_f) = f\left[g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

7. Demostrar que $a_1 < M_f < a_n$. De otro modo, el promedio de $a_1, \ldots, a_n$ está comprendido entre el mayor y el menor de los a_i.

Demostración.- Dado que f es estrictamente monótona en el eje real positivo y $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ son n reales positivos, sabemos que f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, de donde,

$$f(a_i) < f(a_2) < \ldots < f(a_n) \quad \text{o} \quad f(a_1) > f(a_2) > \ldots > f(a_n).$$

Primero, supongamos que f es estrictamente creciente, luego

$$f(a_i) < f(a_2) < \ldots < f(a_n) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_1) < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_n).$$

Dado que f es estrictamente creciente, también lo es su inversa g (por el Teorema 3.10 de Apostol); así, tenemos

$$g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_1)\right) < g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right) < g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_n)\right) \;\Rightarrow\; g[f(a_i)] < M_f < g[f(a_n)] \;\Rightarrow\; a_i < M_f < a_n$$

Si f es estrictamente decreciente, entonces

$$\begin{aligned} f(a_i) > f(a_2) > \ldots > f(a_n) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_1) > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_n) \\ &\Rightarrow \quad g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right) < g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right) < g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_n)\right) \\ &\Rightarrow \quad a_i < M_f < a_n. \end{aligned}$$

8. Si $h(x) = af(x) + b$, donde $a \neq 0$, demostrar que $M_h = M_f$. Esto prueba que funciones distintas pueden conducir al mismo promedio. Interpretar geométricamente este teorema comparando las gráficas de h y f.

Demostración.- Sea $h(x) = af(x) + b$ con $a \neq 0$. Entonces, h tiene un inverso ya que es estrictamente monótona (esto es porque la composición de f y la función lineal $ax + b$, ambas son estrictamente monótonas para $a \neq 0$). De donde su inversa está dada por,

$$h^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Así,

$$\begin{aligned}
M_h &= h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(a_i)\right)\\
&= h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[af(a_i)+b]\right)\\
&= f^{-1}\left(\frac{[\sum_{i=1}^{n} f(a_i)]+b-b}{a}\right)\\
&= h^{-1}\left[\frac{a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)+b\right]\\
&= g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)\\
&= M_f.
\end{aligned}$$

3.16 teorema de los valores extremos para funciones continuas

Definición 3.7 Sea f una función de valores reales definida en un conjunto S de números reales. Se dice que la función f tiene un máximo absoluto en el conjunto S si existe por lo menos un punto c en S tal que

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \text{ en } S.$$

El número $f(c)$ se llama máximo absoluto de f en S.

Definición 3.8 Decimos que f es mínimo absoluto en S si existe un punto d en S tal que

$$f(x) \geq f(d) \text{ para todo } x \text{ en } S.$$

Teorema 3.11 **Teorema de acotación para funciones continuas.** Sea f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces f es acotada en $[a,b]$. Esto es, existe un número $C \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo x en $[a,b]$.

Demostración.- Razonamos por reducción al absurdo o contradicción, utilizando una técnica llamada método de bipartición. Supongamos que f no es acotada en $[a,b]$. Sea c el punto medio de $[a,b]$. Ya que f no es acotada en $[a,b]$ tampoco lo está en al menos uno de los subintervalos $[a,c]$ o $[c,b]$. Sea $[a_1,b_1]$ aquella mitad de $[a,b]$ en la que f no está acotada. Si f no es acotada en ambas mitades, sea $[a_1,b_1]$ la mitad izquierda de $[a,c]$. Continuemos el proceso de bipartición reiteradamente, designando con $[a_{n+1},b_{n+1}]$ la mitad de $[a_n,b_n]$ en la cual f no es acotada, con el convenio de elegir la mitad izquierda si f no es acotada en ambas mitades. Como la longitud de cada intervalo es la mitad de su precedente, observamos que la longitud de $[a_n,b_n]$, es $\dfrac{b-a}{2^n}$.
Designemos con A el conjunto de los extremos izquierdos $a, a_1, a_2, \ldots$, así obtenidos, y sea α el extremos superior de A. Tal punto α está situado en $[a,b]$. Por la continuidad de f en α, existe un intervalo de la forma $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ en el que

$$|f(x) - f(\alpha)| < 1.$$

Si $\alpha = a$ este intervalo tiene la forma $[a, a + \delta)$, y si $\alpha = b$ tiene la forma $(b - \delta, b]$. La desigualdad dada implica

$$|f(x)| < 1 + |f(\alpha)|,$$

de modo que f es acotada por $1 + |f(\alpha)|$ en ese intervalo. Sin embargo, el intervalo $[a_n, b_n]$ está contenido en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ cuando n es lo bastante grande para que $\dfrac{b-a}{2^n} < \delta$. Por consiguiente f también es acotada en $[a_n, b_n]$, en contradicción con el hecho de que f no está acotada en $[a_n, b_n]$. Esta contradicción completa la demostración.

■

Teorema 3.12 **Teorema del máximo (mínimo. para funciones continuas)**Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existen puntos c y d en $[a, b]$ tales que

$$f(c) = \sup f \quad \text{y} \quad f(d) = \inf f.$$

Demostración.- Basta probar que f alcanza su extremo superior en $[a, b]$. Para el extremo inferior basta tener en cuenta el extremo inferior de f es el extremo superior de $-f$.
Sea $M = \sup f$. Supondremos que no existe un x en $[a, b]$ para el que $f(x) = M$ y se llegará a una contradicción. Sea $g(x) = M - f(x)$. Para todo x en $[a, b]$ será entonces $g(x) > 0$ con lo que la función recíproca $1/g$ es continua en $[a, b]$, supongamos $1/g(x) < C$ par todo x en $[a, b]$, siendo $C > 0$. Esto implica que $M - f(x) > 1/C$, con lo que $f(x) < M - 1/C$ para todo x de $[a, b]$. Esto está en contradicción con el hecho de que M es la menor cota superior de f en $[a, b]$. Por consiguiente, $f(x) = M$ para por lo menos un x en $[a, b]$.
Este teorema demuestra que si f es continua en $[a, b]$, el $\sup f$ es su máximo absoluto y el $\inf f$ es su mínimo absoluto. Luego, en virtud del teorema del valor intermedio, el recorrido de f es el intervalo cerrado $[\inf f, \sup f]$.

■

3.17 Teorema de la continuidad uniforme

Definición 3.9 Sea f una función de valores reales y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sean $M(f)$ y $m(f)$ los valores máximos y mínimos respectivamente de f en $[a, b]$. Llamaremos a la diferencia

$$M(f) - m(f)$$

la oscilación de f en el intervalo $[a, b]$. Se podría utilizar la palabra extensión, en lugar de oscilación, ya que esta palabra tiene el inconveniente de sugerir funciones ondulares. en el inte Se podría utilizar la palabra extensión, en lugar de oscilación, ya que esta palabra tiene el inconveniente de sugerir funciones ondulares.

Teorema 3.13 Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para todo $\epsilon > 0$ existe una partición de $[a, b]$, en un número finito de subintervalos, tal que la oscilación de f en todo subintervalo es menor que ϵ.

Demostración.- Razonemos por contradicción, utilizando el método de biparticiones sucesivas. Supongamos que el teorema es falso. Esto es, que para un cierto ϵ, por ejemplo para $\epsilon = \epsilon_0$, el intervalo $[a, b]$

no puede ser subdividido en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales la oscilación de f sea menor que ϵ_0. Sea c el punto medio de $[a,b]$. Entonces para ese ϵ_0 el teorema es falso en por lo menos uno de los dos subintervalos $[a,c]$ o $[c,b]$. (Si el teorema fuese cierto en ambos subintervalos, también lo sería en el intervalo completo $[a,b]$.) Sea $[a_1,b_1]$ aquella mitad de $[a,b]$ en la que teorema es falso para ϵ_0. Si es falso en ambas mitadas, sea $[a_1,b_1]$ la mitad izquierda $[a,c]$. Reiteramos el proceso de bipartición, designando por $[a_{n+1},b_{n+1}]$ aquella mitad de $[a_n,b_n]$ en la que teorema es falso para ϵ_0, teniendo en cuenta que elegimos la mitad izquierda si el teorema es falso en ambas mitades de $[a_n,b_n]$. Nótese que la oscilación de f en cada subintervalo de $[a_n,b_n]$ así construido es por lo menos ϵ_0.
Llamemos A al conjunto de extremos izquierdos $a, a_1, a_2, \ldots$, construidos como se indicó, y sea α la mínima cota superior de A. Este punto α está situado en $[a,b]$. Por la continuidad de f en α, existe un intervalo $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ en el que la oscilación de f es menor que ϵ_0. (Si $\alpha=a$ ese intervalo es $[a,a+\delta]$, y si $\alpha=b$, es $(b-\delta,b)$.) Sin embargo, el intervalo $[a_n,b_n]$ está dentro de $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ cuando n es lo bastante grande para que $\dfrac{b-a}{2^n}<\delta$ con lo que la oscilación de f en $[a_n,b_n]$ es también menor que ϵ_0, lo que está en contradicción con el hecho de que la oscilación de f es por lo menos ϵ_0 en $[a_n,b_n]$. Esta contradicción completa la demostración del teorema.

■

3.18 Teorema de integrabilidad para funciones continuas

El teorema de la continuidad uniforme puede utilizarse para demostrar que una función continua en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.

Teorema 3.14 **Integrabilidad de funciones continuas.** Si una función f es continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a,b]$, es integrable en $[a,b]$.

Demostración.- El teorema 3.11 demuestra que f es acotada en $[a,b]$, con lo que f tiene una integral superior, $\overline{I}(f)$, y una integral inferior $\underline{I}(f)$. Demostraremos que $\overline{I}(f)=\underline{I}(f)$.
Elijamos un entero $N\geq 1$ y sea $\epsilon=1/N$. En virtud del teorema de la continuidad uniforme, elegido este ϵ existe una partición $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ de $[a,b]$ en n subintervalos tal es que la oscilación de f en cualquier subintervalo es menor que ϵ. Designemos por $M_k(f)$ y $m_k(f)$, respectivamente, el máximo y el mínimo absolutos de f en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1},x_k]$. Tenemos entonces

$$M_k(f)-m_k(f)<\epsilon$$

para cada $k=1,2,\ldots,n$. Sean s_n y t_n dos funciones escalonadas definidas en $[a,b]$ como sigue:

$$s_n(x)=m_k(f)\quad \text{si}\quad x_{k-1}<x\leq x_k,\quad s_n(a)=m_1(f),$$

$$t_n(x)=M_k(f)\quad \text{si}\quad x_{k-1}\leq x<x_k,\quad t_n(b)=M_n(f).$$

Tenemos entonces $s_n(x)\leq f(x)\leq t_n(x)$ para todo x de $[a,b]$. Tenemos también

$$\int_a^b s_n=\sum_{k=1}^n m_k(f)(x_k-x_{k-1})\quad \text{y}\quad \int_a^b t_n=\sum_{k=1}^n M_n(f)(x_k-x_{k-1}.$$

La diferencia de esas dos integrales es

$$\int_a^b t_n-\int_a^b s_n=\sum_{k=1}^n\left[M_k(f)-m_k(f)\right](x_k-x_{k-1})<\epsilon\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})=\epsilon(b-a).$$

Puesto que $\epsilon = 1/N$, esta desigualdad puede escribirse en la forma

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n < \frac{b-a}{N}$$

Por otra parte, las integrales superior e inferior de f satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s_n \leq \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n \qquad \text{e} \qquad \int_a^b \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n.$$

Multiplicando el primer conjunto de desigualdades por (-1) y sumando el resultado al segundo conjunto obtenemos

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n.$$

por la relación $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$, tenemos

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) < \frac{b-a}{N}$$

para todo entero $N \leq 1$. Por consiguiente, según el teorema I.31, debe ser $\underline{(f)} = \bar{I}(f)$. Esto demuestra que f es integrable en $[a, b]$.

■

3.19 teoremas del valor medio para funciones continuas

En la Sección 2.16 se definió el valor promedio $A(f)$ de una función f sobre un intervalo $[a, b]$ como el cociente $\int_a^b f(x)dx/(b-a)$. Cuando f es continua, podemos demostrar que este valor promedio es igual al valor de f en un cierto punto de $[a, b]$.

Teorema 3.15 **teorema del valor medio para integrales..** Si f es continua en $[a, b]$, para un cierto c de $[a, b]$ tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Demostración.- Representamos por m y M, respectivamente, los valores máximo y mínimo de f en $[a, b]$. Entonces $m \leq f(x) \leq M$ para todo x en $[a, b]$. Integrando esas desigualdades y dividiendo por $b - a$, encontramos que $m \leq A(f) \leq M$, siendo $A(f) = \int_a^b f(x)\,dx/(b-a)$. Pero ahora el teorema del valor intermedio nos dice que $A(f) = f(c)$ para un cierto c de $[a, b]$. Esto completa la demostración.

■

Teorema 3.16 **Teorema del valor medio ponderado para integrales..** Supongamos que f y g son continuas en $[a, b]$. Si g no cambia nunca de signo en $[a, b]$ entonces, para un cierto c de $[a, b]$, tenemos

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Demostración.- NO cambiando nunca de signo en $[a, b]$, g es siempre no negativa o siempre no positiva en $[a, b]$. Supongamos que g es no negativa en $[a, b]$. Entonces podemos razonar como en la demostración del teorema 3.15, excepto que integramos las desigualdades $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ obteniendo

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq M \int_a^b g(x)\, dx.$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx = 0$, esa desigualdad demuestra que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$. En este caso, se satisface para cualquier c ya que ambos miembros son cero. De otro modo, la integral de f es positiva, y podemos dividir por esta integral y aplicar como antes el teorema del valor intermedio para completar la demostración. Si g es no positiva, aplicamos el mismo razonamiento con $-g$.

■

3.20 Ejercicios

1. Con el teorema 3.16 establecer las desigualdades siguientes:

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\, dx \leq \frac{1}{10}.$$

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad g(x) = x^9.$$

Sustituyendo nuestras definiciones de f y g se tiene,

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\, dx = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

Ya que f y g son continuas y g no cambia de signo en $[0, 1]$ podemos aplicar el teorema 3.16,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_0^1 g(x)\, dx, \qquad \text{para algún } c \in [0, 1].$$

Luego f es estrictamente creciente en $[0, 1]$, por lo que,

$$f(0) \geq f(c) \geq f(1) \quad \Rightarrow \quad 1 \geq f(c) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto,

$$f(1) \int_0^1 g(x)\, dx \leq \int_0^1 g(x)\, dx \leq f(0) \int_0^1 g(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9\, dx \leq f(c) \int_0^1 x^9\, dx \leq \int_0^1 x^9\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{10\sqrt{2}} \leq f(c) \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\, dx \leq \frac{1}{10}.$$

2. teniendo en cuenta que $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)/\sqrt{1-x^2}$ y por medio del teorema 3.16 obtenemos las desigualdades

$$\frac{11}{frm{-}e4} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx \leq \frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Respuesta.- Sea
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad g(x) = 1 - x^2.$$
Entonces,
$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} = \int_0^{1/2} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{1/2} f(x)g(x)\, dx = f(c)\int_0^{1/2} g(x)\, dx$$
para algún $c \in [0, \frac{1}{2}]$. Ya que f es estrictamente creciente en $[0, \frac{1}{2}]$, tenemos $f(0) \leq f(c) \leq f(\frac{1}{2})$ el cual implica que $1 \leq f(c) \leq \sqrt{\dfrac{4}{3}}$. Y por lo tanto,
$$f(0)\int_0^{1/2} g(x)\, dx \leq f(c)\int_0^{1/2} g(x)\, dx \leq f(1)\int_0^{1/2} g(x)\, dx.$$
Por otro lado también sabemos que,
$$\int_0^{1/2} g(x)\, dx = \int_0^{1/2} (1-x^2)\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24}.$$
de donde concluimos que
$$\frac{11}{24} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx \leq \frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

3. Utilizar la identidad $1 + x^6 = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$ y el teorema 3.16 para demostrar que para $a > 0$, tenemos
$$\frac{1}{1+a^6}\left(a - \frac{a^5}{3} + \frac{a^5}{5}\right) \leq \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} \leq a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$
Tómese $a = 1/10$ y calcular el valor de la integral con seis cifras decimales.

Respuesta.- Sea
$$f(x)\frac{1}{1+x^6}, \quad g(x) = 1 - x^2 + x^4.$$
Entonces,
$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^a \frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}\, dx = \int_0^a f(x)g(x)\, dx = \frac{1}{c}\int_0^a g(x)\, dx$$
para algún $c \in [0, a]$. Ya que f es estrictamente creciente en $[0, a]$, tenemos $f(a) \leq f(c) \leq f(0)$. Por lo tanto,
$$\frac{1}{1+a^6} \leq f(c) \leq 1.$$
Es más,
$$\int_0^a g(x)\, dx = \int_0^a (1-x^2+x^4)\, dx = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$
Así,
$$\left(\frac{1}{1+a^6}\right)\left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{5}\right) \leq \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} \leq \left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}\right).$$
Ahora calculemos para $a = \dfrac{1}{10}$,
$$\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{10})^6}\right]\left[\frac{1}{10} - \frac{(\frac{1}{10})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{10})^4}{5}\right] \leq \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{dx}{1+x^2} \leq \left(\frac{1}{10} - \frac{(\frac{1}{10})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{10})^5}{5}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0 - 0996686 \leq \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{dx}{1+x^2} \leq 0.0996687$$

.

4. Una de las siguientes afirmaciones es incorrecta. Explicar por qué es falsa.

a) La integral $\int_{2\pi} 4\pi (\operatorname{sen} t)/t\ dt > 0$ debido a que $\int_{2\pi} 3\pi (\operatorname{sen} t)/t\ dt > \int_{3\pi}^{4\pi} |\operatorname{sen} t|/t\ dt$.

Respuesta.- La integral

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\ dt > 0$$

porque

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\ dt > \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t}\ dt.$$

b) La integral $\int_{2\pi} 4\pi (\operatorname{sen} t)/t\ dt = 0$ porque, según el teorema 3.16 para un cierto c comprendido entre 2π y 4π tenemos

$$\int_{2\pi}^{4\pi} = \frac{1}{c} \int_{2\pi}^{4\pi} \operatorname{sen} t\ dt 0 \frac{\cos(2\pi) - \cos(4\pi)}{c} = 0.$$

Respuesta.- La declaración (b) es falsa ya que el teorema del valor medio ponderado requiere que la función $g(t)$ no cambie de signo en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$. Pero como $g(t) = \operatorname{sen} t$ cambia de signo en el intervalo, no podemos aplicar el teorema.

5. Si n es un entero positivo, utilizar el teorema 3.16 para demostrar que

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen}(t^2)\ dt = \frac{(-1)^n}{c} \quad \text{donde} \quad \sqrt{n\pi} \leq c \leq \sqrt{(n+1)\pi}.$$

Respuesta.- Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} f(t)g(t)\ dt = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen} t^2\ dt = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \frac{1}{t} \cdot t \operatorname{sen} t^2\ dt.$$

donde f y g son funciones continuas en $\left[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}\right]$ tal que $f(t) = \dfrac{1}{t}$ y $g(t) = t \operatorname{sen} t^2$.
Ahora veamos si $f(t)$ es un función monótona creciente o decreciente para $t \in \left[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}\right]$. Es decir,

$$\sqrt{n\pi} \leq t \leq \sqrt{(n+1)\pi} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Sabemos que $f\left(\sqrt{n\pi}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$ y $f\left(\sqrt{(n+1)\pi}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$. De donde

$$f\left(\sqrt{(n+1)\pi}\right) \leq f(t) \leq f\left(\sqrt{n\pi}\right)$$

Por lo tanto la función f es estrictamente decreciente en $\left[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}\right]$.
Ahora estudiaremos el signo de la función $g(t)$ mediante las siguientes inecuaciones:

$$\sqrt{n\pi} \leq t \leq \sqrt{(n+1)\pi} \quad \Rightarrow \quad n\pi \leq t^2 \leq (n+1)\pi.$$

de donde

$$n\pi \leq t^2 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}(n\pi) \leq \operatorname{sen} t^2 \;\Rightarrow\; 0 \leq \operatorname{sen} t^2 \;\Rightarrow\; 0 \leq t \operatorname{sen} t^2 \;\Rightarrow\; 0 \leq g(t).$$

de esta manera podemos verificar que la función g no cambia de signo en $\left[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}\right]$.
Así, por el teorema del valor medio ponderado para las integrales, tenemos que para algún $c \in \left[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}\right]$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} f(t)g(t)\,dt &= f(c)\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} g(t)\,dt \\
&= \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} t \operatorname{sen} t^2\,dt \\
&= \frac{1}{c}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} t \operatorname{sen} t^2\,dt \\
&= \frac{1}{2c}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} 2t \operatorname{sen} t^2\,dt \\
&= \frac{1}{2c}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2c}\cdot(-\cos x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{c}
\end{aligned}$$

6. Supóngase que f es continua en $[a,b]$. Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, demostrar que $f(c) = 0$ por lo menos para un c de $[a,b]$.

Demostración.- Ya que f es continuo en el intervalo $[a,b]$, podemos aplicar el teorema del valor intermedio por lo que,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad \text{para algún } c \in [a,b].$$

Así,

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c)(b-a) = 0$$

Pero ya que $b > a$, sabemos que $(b-a) \neq 0$, por lo tanto tenemos un $f(c) = 0$ para algún $cin[a,b]$.

7. Supóngase que f es integrable y no negativa en $[a,b]$. Si $\int_a^b f(x)dx = O$, demostrar que $f(x) = O$ en cada punto de continuidad de f.

Demostración.- Demostremos por contradiccion. Sea $p \in [a,b]$ un punto en el cual f es continua, y supongamos $f(p) \neq 0$. Que implica $f(p) > 0$, ya que f es no negativo por hipótesis.Luego, dado que f es continua en p), sabemos por la propiedad de conservación de signo de las funciones continuas (Teorema 3.7), que existe alguna vecindad alrededor de p, por ejemplo $(p-\delta, p+\delta)$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(p)$ para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$, es decir, $f(x) > 0$ para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$.

Pero entonces por la propiedad monótona de la integral sabemos,

$$\int_{p-\delta}^{p+\delta} f(x)\ dx > \int_{p-\delta}^{p+\delta} 0\ dt = 0$$

Entonces,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{p-\delta} f(x)\ dx + \int_{p-\delta}^{p+\delta} f(x)\ dx + \int_{p+\delta}^b f(x)\ dx = 0.$$

Por lo que se contradice ya que f es no negativa. Luego,

$$\int_a^{p-\delta} f(x)\ dx \quad \text{y} \quad \int_{p+\delta}^b f(x)\ dx \geq 0.$$

Como $\int_{p-\delta}^{p+\delta} f(x)\ dt$ es estrictamente positiva, la suma de las tres partes de la integral $\int_a^b f(x)\ dx$ no puede ser igual a 0.

8. Supóngase que f es continua en $[a,b]$ y que $\int_a^b f(x)g(x)dx = O$, para toda función g que sea continua en $[a,b]$. Demostrar que $f(x) = O$ para todo x en $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)f(x)\ dt = \int_a^b [f(x)]^2\ dx = 0$$

Demostración.- Se tiene,

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = 0,$$

para toda función g, donde podemos elegir $g(x) = f(x)$. Ya que f es continua en $[a,b]$, entonces f^2 es continua en $[a,b]$ por lo que se tiene,

$$\int_a^b f^2(x)\ dx = 0.$$

Cabe mencionar que f^2 es integrable y no negativa en $[a,b]$. Luego sabemos que si $\int_a^b f^2(x)\ dx = 0.$, entonces por el anterior ejercicio $f^2(x) = 0$ para cada punto de continuidad de f^2. Luego ya que $f^2(x) = 0$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

4

Cálculo diferencial

4.4 Derivada de una función

Definición 4.1 **Definición de derivada.** La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

siempre que exista el límite. El número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x.

Ejemplo 4.1 **Derivada de una función potencial de exponente entero positivo.** Consideremos el caso $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo. El cociente de diferencias es ahora

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Para estudiar este cociente al tender h a cero, podemos proceder de dos maneras, o por la descomposición factorial del numerador considerado como diferencia de dos potencias n-simas o aplicando el teorema del binomio para el desarrollo de $(x+h)^n$. Seguiremos con el primer método.

En álgebra elemental se tiene la identidad

$$a^n - b^n = (b - a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Si se toma $a = x + h$ y $b = x$ y dividimos ambos miembros por h, esa identidad se transforma en

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-1-k}$$

En la suma hay n términos. Cuando h tiende a 0, $(x+h)^k$ tiende a x^k, el k-ésimo término tiende a $x^k x^{n-1-k} = x^{n-1}$, y por tanto la suma de los n términos tiende a nx^{n-1}. De esto resulta que

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall\, x.$$

■

Ejemplo 4.2 **Derivada de la función seno.** Sea $s(x) = \operatorname{sen} x$. El cociente de diferencias es

$$\frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

Para transformarlo de modo que haga posible calcular el límite cuando $h \to 0$, utilizamos la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2}$$

poniendo $y = x + h$. Esto conduce a la fórmula

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Como $h \to 0$, el factor $\cos(x + \frac{1}{2}h) \to \cos x$ por la continuidad del coseno. Así mismo, la fórmula

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

demuestra que

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1 \ \text{ para todo } \ h \to 0$$

Por lo tanto el cociente de diferencias tiene como límite $\cos x$ cuando $h \to 0$. Dicho de otro modo, $s'(x) = \cos x$; para todo x; la derivada de la función seno es la función coseno.

■

Ejemplo 4.3 **Derivada de la función coseno.** Sea $c(x) = \cos x$. Demostraremos que $c'(x) = -\operatorname{sen} x$; esto es, la derivada de la función coseno es menos la función seno. Partamos de la identidad

$$\cos y - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{y-x}{2} \operatorname{sen} \frac{y+x}{2}$$

y pongamos $y = x + h$. Esto nos conduce a la fórmula

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

La continuidad del seno demuestra que $\left(x + \frac{1}{2}h\right) \to x$ cuando $h \to 0$; luego ya que

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1 \ \text{ para todo } \ h \to 0$$

obtenemos $c'(x) = -\operatorname{sen} x$.

■

Ejemplo 4.4 **Derivada de la función raíz n-esima.** Si n es un entero positivo, sea $f(x) = x^{1/n}$ para $x > 0$. El cociente de diferencias para f es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{1/n} - x^{1/n}}{h}.$$

Pongamos $u = (x+h)^{1/n}$ y $v = x^{1/n}$. Tenemos entonces $u^n = x + h$ y $v^n = x$, con lo que $h = u^n - v^n$, y el cociente de diferencias toma la forma

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2}v^{n-1}}$$

La continuidad de la función raíz n-sima prueba que $u \to v$ cuando $h \to O$. Por consiguiente cada término del denominador del miembro de la derecha tiene límite v^{n-1} cuando $h \to O$. En total hay n términos, con lo que el cociente de diferencias tiene como límite v^{1-n}/n. Puesto que $v = x^{1/n}$, esto demuestra que

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n-1}.$$

■

Ejemplo 4.5 **Continuidad de las funciones que admiten derivada.** Si una función f tiene derivada en un punto x, es también continua en x. Para demostrar, empleamos la identidad

$$f(x+h) = f(x) + h\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

que es válida para $h \neq 0$. Si hacemos que $h \to 0$, el cociente de diferencias del segundo miembro tiende a $f'(x)$, puesto que este cociente está multiplicando por un factor que tiende a 0, el segundo término del segundo miembro tiende a $0 \cdot f'(x)$. Esto demuestra que $f(x+h) \to f(x)$ cuando $h \to 0$ y por tanto que f es continua en x. ■

4.5 Álgebra de las derivadas

Teorema 4.1 Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo común. En cada punto en que f y g tienen derivadas, también las tienen la suma $f+g$, la diferencia $f-g$, el producto $f \cdot g$ y el cociente f/g. (Para f/g hay que añadir también que g ha de ser distinta de cero en el punto considerado). Las derivadas de estas funciones están dadas por las siguientes fórmulas:

(i) $(f+g)' = f' + g'$,

(ii) $(f-g)' = f' - g'$,

(iii) $(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$,

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ en puntos x donde $g(x) \neq 0$.

Demostración.- Demostración de (i). Sea x un punto en el que existen ambas derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$: El cociente de diferencias para $f+g$ es

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}
\end{aligned}$$

Cuando $h \to 0$, el primer cociente del segundo miembro tiende a $f'(x)$ y el segundo a $g'(x)$ y por tanto la suma tiende a $f'(x) + g'(x)$. La demostración de (ii) es análoga.

Demostración de (iii). El cociente de diferencias para el producto $f \cdot g$ es:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Para estudiar este cociente cuando $h \to 0$ se suma y resta al numerador un término conveniente para que se puede escribir la fórmula dada como la suma de dos términos en los que aparezca los cocientes de diferencias de f y g. Sumando y restando $f(x)f(x+h)$ se convierte en

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Cuando $h \to 0$ el primer término del segundo miembro tiende a $g(x)f'(x)$, y puesto que $f(x+h) \to f(x)$, el segundo término tiende a $f(x)g'(x)$, lo que demuestra (iii).

Demostración de (iv). Un caso particular de (iv) se tiene cuando $f(x) = 1$ para todo x. En este caso $f'(x) = 0$ y (iv) se reduce a la fórmula

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

suponiendo que $f(x) \neq 0$ partir de este caso particular, se puede deducir la fórmula general (iv) escribiendo f/g como producto y aplicando (iii), con lo cual se tiene:

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{1}{g} \cdot f' + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

Por tanto, queda solamente por probar $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$. El cociente de diferencias de $1/g$ es:

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)} \frac{1}{g(x+h)}$$

Cuando $h \to 0$, el primer cociente de la derecha tiende a $g'(x)$ y el tercer factor tiende a $\frac{1}{g(x)}$. Se requiere la continuidad de g en x ya que se hace uso del hecho que $g(x+h) \to g(x)$ cuando $h \to 0$. Por tanto, el cociente tiende a $-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$.

■

Un caso particular de (iii) se tiene cuando una de las dos funciones es constante, por ejemplo, $g(x) = c$ para todo valor de x. En este caso, (iii) se transforma en: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; es decir, la derivada del producto de una función por una constante es el producto de la derivada de la función por la constante. Combinando esta propiedad con la de la derivada de una suma [propiedad (i)] se tiene, que para cada par de constantes c_1 y c_2, es:

$$(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'$$

Esta propiedad se denomina propiedad lineal de la derivada, y es análoga a la propiedad lineal de la integral.
Aplicando el método de inducción se puede extender la propiedad lineal a un número cualquiera finito de sumandos:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i',$$

donde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ son constantes y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones cuyas derivadas son $f_1', f_2', \ldots, f_n'$. Cuando se consideran los valores de estas funciones en un punto x, se obtienen fórmulas entre números; así la fórmula (i) implica

$$(f+g)(x) = f'(x) + g'(x)$$

Ejemplo 4.6 **funciones Racionales.** Si r es el cociente de dos polinomios, es decir, $r(x) = p(x)/q(x)$, la derivada $r'(x)$ se puede calcular por medio de la fórmula del cociente (iv) del teorema 4.1. La derivada existe para todo x en el que $g(x) \neq 0$. Obsérvese que la función r' así definida es a su vez una función racional. En particular, si $r(x) = 1/x^m$ donde m es un entero positivo y $x \neq 0$ se tiene:

$$r'(x) = \frac{x^m \cdot 0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}}$$

Escribiendo este resultado en la forma: $r'(x) = -mx^{-m-1}$ se obtiene una extensión a exponentes negativos de la fórmula dada para la derivación de potencias n-simas para n positivo.

■

4.6 Ejercicios

1. Si $f(x) = 2 + x - x^2$, calcular $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(-10)$.

Respuesta.- Por definición sea,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[2 + (x+h) - (x+h)^2\right] - (2 + x - x^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2 + x + h - x^2 - 2xh - h^2 - 2 - x + x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(1 - 2x - h)}{h} \\ &= 1 - 2x \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1 - 2\cdot 0 &&= 1 \\ f'(\tfrac{1}{2}) &= 1 - 2\cdot \tfrac{1}{2} &&= 0 \\ f'(1) &= 1 - 2\cdot 1 &&= -1 \\ f'(-10) &= 1 - 2\cdot(-10) &&= 21 \end{aligned}$$

2. Si $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$, encontrar todos los valores de x para los que

(a) $f'(x) = 0$.

Respuesta.- Sea $f'(x) = x^2 + x - 2$, entonces

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = -2.$$

(b) $f'(x) = -2$.

Respuesta.- Sea $f'(x) = x^2 + x - 2$, entonces

$$x^2 + x - 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = -1.$$

(c) $f'(x) = 10$.

Respuesta.- Sea $f'(x) = x^2 + x - 2$, entonces

$$x^2 + x - 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad \text{y} \quad x_2 = -4.$$

En los ejercicios del 3 al 12, obtener una fórmula para $f'(x)$ si $f(x)$ es la que se indica.

3. $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

Respuesta.- Por definición,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 2 - (x^2 + 2x + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 2 - x^2 - 2x - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x + 2)}{h} \\ &= 2x + 2 \end{aligned}$$

4. $f(x) = x^4 + \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Ya que $(f+g)' = f' + g'$ y sabiendo que la derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$, entonces

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x.$$

5. $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Ya que $(fg)' = f \cdot g' + g \cdot f'$ y la derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$, entonces

$$f'(x) = x^4 \cos x + 4x^3 \operatorname{sen} x.$$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad x \neq -1.$

Respuesta.- Sean $g(x) = 1$ y $h(x) = x + 1$. Sabemos que $\left(\dfrac{g}{h}\right)' = \dfrac{h \cdot g' - g \cdot h'}{h^2}$, entonces

$$f'(x) = \frac{(x+1) \cdot 1' - 1 \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + x^5 \cos x.$

Respuesta.- Sean, $k(x) = 1$, $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = x^5$ y $j(x) = \cos x$. Ya que $\left(\dfrac{k}{g}\right)' = \dfrac{g \cdot k' - k \cdot g'}{g^2}$, $(hj)' = h \cdot j' + j \cdot h'$ y la derivada de $\cos x$ es $-\operatorname{sen} x$, entonces

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2+1) \cdot 1' - 1 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} + x^5 \cdot (\cos x)' + \cos x \cdot (x^5)' \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-2x}{(x^2+1)^2} + x^5 \cdot (-\operatorname{sen} x) + \cos x \cdot 5x^4
\end{aligned}$$

8. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, \quad x \neq 1.$

Respuesta.- Sean $k(x) = x$ y $g(x) = x - 1$. Ya que $\left(\dfrac{k}{g}\right)' = \dfrac{g \cdot k' - k \cdot g'}{g^2}$ para $g \neq 0$, entonces

$$f'(x) = \frac{x - 1 - x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

9. $f(x) = \dfrac{1}{2 + \cos x}.$

Respuesta.-

$$f'(x) = \frac{(2+\cos x) \cdot 0 + \operatorname{sen} x}{(2+\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{(2+\cos x)^2}.$$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + 1}.$

Respuesta.-

$$f'(x) = \frac{(x^4+x^2+1)(2x+3) - (x^2+3x+2)(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{2x^5 + 9x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 2x - 3}{(x^4+x^2+1)^2}.$$

11. $f(x) = \dfrac{2 - \operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-\cos x)(2-\cos x) - (2 - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)}{(2-\cos x)^2} \\ &= \frac{-2\cos x + \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{(2-\cos x)^2} \\ &= \frac{1 - 2(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(2-\cos x)^2} \end{aligned}$$

12. $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1 + x^2}$.

Respuesta.- Primero escribimos

$$f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2} = x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\right)$$

Luego usando el la regla del producto y del cociente para derivadas tenemos,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2} + x\left[\frac{(1+x^2)\cos x - 2x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{1+x^2} - \frac{2x^2 \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}.$$

13. Se supone que la altura $f(t)$ de un proyectil, t segundos después de haber sido lanzado hacia arriba a partir del suelo con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo, está dada por la fórmula:

$$f(t) = v_0 t - 16t^2.$$

(a) Aplíquese el método descrito en la Sección 4.2 para probar que la velocidad media del proyectil durante el intervalo de tiempo de t a $t+h$ es $v_0 - 32t - 16h$ pies sobre segundo, y que la velocidad instantánea en el instante t es $v_0 - 32t$ pies por segundo.

Respuesta.- La velocidad media es dada por,

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{v_0(t+h) - 16(t+h)^2 - v_0 t + 16t^2}{h} = v_0 - 32t - 16h.$$

Luego, la velocidad instantánea está dada por,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{v_0(t+h) - 16(t+h)^2 - v_0 t + 16t^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{v_0 t + v_0 h - 16t^2 - 32th - 16h^2 - v_0 t + 16t^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{v_0 h - 32th - 16t^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} v_0 - 32t - 16h \\ &= v_0 - 32t. \end{aligned}$$

(b) Calcúlese (en función de v_0) el tiempo necesario para que la velocidad se anule.

Respuesta.- Para ello igualamos $v_0 - 32t$ a cero como sigue,

$$v_0 - 32t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{32}.$$

(c) ¿Cuál es la velocidad de retorno a la Tierra?.

Respuesta.- Sea $f'(t) = 0$, entonces

$$v_0 t - 16t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t(v_0 - 16t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{16}.$$

Esto significa que el proyectil regresa a la tierra luego de $\frac{v_0}{16}$ segundos. Luego la velocidad de retorno será:

$$v\left(\frac{v_0}{16}\right) = v_0 - 32 \cdot \frac{v_0}{16} = v_0 - 2v_0 = -v_0.$$

(d) ¿Cuál debe ser la velocidad inicial del proyectil para que regrese a la tierra al cabo de 1 segundo? ¿y al cabo de 10 segundos? ¿y al cabo de T segundos?.

Respuesta.- La velocidad inicial para que el proyectil regrese a la tierra luego de un segundo será:

$$f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \cdot 1 - 16 \cdot 1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = 16.$$

Después la velocidad inicial para que el proyectil regrese a la tierra luego de 10 segundos será:

$$f(10) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \cdot 10 - 16 \cdot 10^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = 160.$$

Y para que vuelva luego de T segundos será:

$$f(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \cdot T - 16 \cdot T^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = 16T.$$

(e) Pruébese que el proyectil se mueve con aceleración constante.

Demostración.- La aceleración constante viene dada por $f''(t)$, es decir,

$$f''(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(v_0 - 32t) = -32.$$

(f) Búsquese un ejemplo de otra fórmula para la altura que dé lugar a una aceleración constante de -20 pies por segundo al cuadrado.

Respuesta.- Sea $f(t) = v_0 t - 10t^2$, entonces $f'(t) = v_0 - 20t$ y $f''(t) = -20\ ft/sec^2$.

14. ¿Cuál es el coeficiente de variación del volumen de un cubo con respecto a la longitud de cada lado?.

Respuesta.- El volumen de un cubo viene dado por $V(x) = x^3$, por lo tanto el coeficiente de variación vendrá dado por,

$$V'(x) = 3x^2.$$

15. (a) El área de un círculo de radio r es πr^2 y su circunferencia es $2\pi r$. Demostrar que el coeficiente de variación del área respecto al radio es igual a la circunferencia.

Demostración.- Sea $C(r) = \pi r^2$. Dado que el coeficiente de variación es la derivada de $C(r)$ entonces,

$$C'(r) = 2\pi r.$$

Tal como se quiere.

(b) El volumen de una esfera de radio r es $4\pi r^3/3$ y su área es $4\pi r^2$. Demostrar que el coeficiente de variación del volumen respecto al radio es igual al área.

Demostración.- Sea $V(r) = 4\pi r^3/3$. Dado que el coeficiente de variación es la derivada de $V(r)$ entonces,

$$V'(r) = 4\pi r^2.$$

En los ejercicios del 16 al 23, obtener una fórmula para $f'(x)$ si $f(x)$ es la que se indica.

16. $f(x) = \sqrt{x}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Usando la definición de derivada para número con coeficiente racional se tiene,

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \qquad x > 0.$$

17. $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Usando la derivada para cocientes y la derivada de una potencia racional se tiene,

$$f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x})\cdot 0 - 1\cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \qquad x > 0.$$

18. $f(x) = x^{3/2}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Usando la derivada para potencias racionales se tiene,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \qquad x > 0.$$

19. $f(x) = x^{-3/2}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Usando la derivada para potencias racionales se tiene,

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}, \qquad x > 0.$$

20. $f(x) = x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Usando la derivada para potencias racionales se tiene,

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}, \qquad x > 0.$$

21. $x^{-1/2} + x^{-1/3} + x^{-1/4}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Usando la derivada para potencias racionales se tiene,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}, \qquad x > 0.$$

22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Usando la derivada para cocientes y la derivada de una potencia racional se tiene,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x}}}{(1+x)^2} = \frac{1+x-2x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}.$$

23. $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Usando la derivada para cocientes y la derivada de una potencia racional se tiene,

$$f'(x) = \frac{1+\sqrt{x} - x\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}.$$

24. Sean $f_1, \ldots, f_n$ funciones que admiten derivadas $f_1', \ldots, f_n'$. Dar una regla para la derivación del producto $g = f_1 \ldots f_n$ y demostrarla por inducción. Demostrar que para aquellos puntos x, en los que ninguno de los valores $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ es cero, tenemos

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \ldots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

Demostración.- Según la derivada para productos se tendría que demostra,

$$g' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdots f_n + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot f_{n-1} \cdot f_n'.$$

Par ello tomamos $n = 2$ por lo que la derivada nos queda,

$$f' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$$

Por lo que es cierto para $n = 2$. Supongamos luego que la afirmación:

$$g' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdots f_n + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdots f_{n-1} \cdot f_n'.$$

es cierta para n. Por lo que demostraremos que es cierta para $n+1$ de la siguiente manera,

$$\begin{array}{rcl} g & = & (f_1 \cdot f_2 \cdots f_n) \cdot f_{n+1} \\ & = & (f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' \cdot f_{n+1} + (f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots f_n) \cdot f'_{n+1} \\ & = & f'_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n \cdot f_{n+1} + f_1 \cdot f'_2 \cdot f_3 \cdots f_n \cdot f_{n+1} \\ + & & \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdots f_{n-1} \cdot f'_n \cdot f_{n+1} + f_1 \cdot f_2 \cdots f_n \cdot f'_{n+1}. \end{array}$$

Por lo tanto es cierto para $n+1$, así para $g = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$ tenemos la derivada,

$$g' = f'_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n + f_1 \cdot f'_2 \cdot f_3 \cdots f_n + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot f_{n-1} \cdot f'_n.$$

Por otro lado. Sea x un punto tal que $f_1(x) \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'_1 \cdot f_2 \cdots f_n}{f_1 \cdots f_n} + \ldots + \frac{f_1 \cdots f_{n-1} \cdot f'_n}{f_1 \cdots f_n} = \frac{f'_1 \cdots f_n}{f_1 \cdots f_2} + \ldots + \frac{f_1 \cdots f'_n}{f_1 \cdots f_n} = \frac{f'_1}{f_1} + \ldots + \frac{f'_n}{f_n}$$

25. Comprobar la pequeña tabla de derivadas que sigue. Se sobreentiende que las fórmulas son válidas para aquellos valores de x para los que $f(x)$ está definida.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\sec x$	$\tan x \sec x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\csc x$	$-\cot x \csc x$

Demostración.- Verificaremos que si $f(x) = \tan x$ entonces $f'(x) = \sec^2 x$. Sabemos que por la identidad trigonométrica

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Luego, aplicando las distintas reglas de derivación,

$$f'(x) = \frac{\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Ahora, verificaremos que si $f(x) = \cot x$ implica que $f'(x) = -\csc^2 x$. Sea $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. De donde,

$$f'(x) = \frac{(-\operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x.$$

Después verificamos que si $f(x) = \csc x$ entonces $f'(x) = \tan x \sec x$. Sea $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x.$$

Por último verificaremos que si $f(x) = \csc x$ entonces $f'(x) = -\cot \csc x$. Sea $f(x) = \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$. De donde,

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\cot x \csc x.$$

En los Ejercicios del 26 al 35. Calcular la derivada $f'(x)$. Se sobrentiende que cada fórmula será válida para aquellos valores de x para los que $f(x)$ esté definida.

26. $f(x) = \tan x \sec x$.

Respuesta.- Sean $(\tan x)' = \sec^2 x$ y $(\sec x)' = \tan x \sec x$, entonces usando las reglas de derivación para el producto,

$$f'(x) = \sec^2 x \sec x + \tan x(\tan x \sec x) = \sec^3 x + \tan^2 x \sec x.$$

27. $f(x) = x \tan x$.

Respuesta.- Sea $(\tan x)' = \sec^2 x$, entonces usando las reglas de derivación para el producto se tiene,

$$f'(x) = \tan x + x \sec^2 x.$$

28. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$.

Respuesta.- Usando la regla de derivación para cocientes tenemos,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}.$$

29. $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Respuesta.- Usando la regla de derivación para cocientes tenemos,

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

30. $f(x) = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

Respuesta.- Usando la regla de derivación para cocientes tenemos,

$$f'(x) = \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (1+x-x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$$

31. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Respuesta.- Usando la regla de derivación para cocientes tenemos,

$$f'(x) = \frac{(\cos x)x - \operatorname{sen} x}{x^2}.$$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x + \operatorname{sen} x}$.

Respuesta.- Usando la regla de derivación para cocientes tenemos,

$$f'(x) = \frac{-1 - \cos x}{(x + \cos x^2)^2}.$$

33. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

Respuesta.- Usando la regla de derivación para cocientes tenemos,

$$f'(x) = \frac{a(cx + d) - (ax + b)c}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bd}{(cx + d)^2}.$$

34. $f(x) = \dfrac{\cos x}{2x^2 + 3}$.

Respuesta.- Usando la regla de derivación para cocientes tenemos,

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x(2x^2 + 3) - (\cos x)4x}{(2x^2 + 3)^2} = -\frac{\operatorname{sen} x(2x^2 + 3) - 4x \cos x}{(2x^2 + 3)^2}.$$

35. $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

Respuesta.- Usando la regla de derivación para cocientes tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2ax + b)(\operatorname{sen} x + \cos x) - (ax^2 + bx + c)(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(2ax + b)(\operatorname{sen} x + \cos x) + (ax^2 + bx + c)(\operatorname{sen} x - \cos x)}{1 + \operatorname{sen} 2x} \end{aligned}$$

36. Si $f(x) = (ax + b) \operatorname{sen} x + (cx + d) \cos x$, determinar valores de las constantes a, b, c, d tal que $f'(x) = x \cos x$.

Respuesta.- Sea

$f'(x) = a \operatorname{sen} x + (ax + b) \cos x + c \cos x + (cx + d)(-\operatorname{sen} x) = (a - d - cx) \operatorname{sen} x + (ax + b + c) \cos x.$

Luego por hipótesis tenemos,

$$x \cos x = (a - d - cx) \operatorname{sen} x + (ax + b + c) \cos x$$

Comparando los coeficientes de $cosx$ y $\operatorname{sen} x$, se tiene

$$a - d - cx = 0 \qquad \text{y} \qquad ax + b + c = x \;\Rightarrow\; (a - 1)x + b + c = 0.$$

De donde,

$$cx = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \qquad \text{y} \qquad (a - 1)x = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Igualando nos queda,

$$1 - d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 1.$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} x\cos x & = & (1-0x-1)\operatorname{sen} x + (1x-0+0)\cos x \\ & = & 0\operatorname{sen} x + x\cos x \\ & = & x\cos x \end{array}$$

37. Si $g(x) = (ax^2+bx+c)\operatorname{sen} x + (dx^2+ex+f)\cos x$, determinar valores de las constantes a,b,c,d,e,f tal es que $g'(x) = x^2 \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Sea,

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & (2ax+b)\operatorname{sen} x + (ax^2+bx+c)\cos x + (2dx+e)\cos x - (dx^2+cx+f)\operatorname{sen} x \\ & = & \left[-dx^2+(2a-e)x+(b+f)\right]\operatorname{sen} x + \left[ax^2+(b+2d)+(c+e)\right]\cos x \end{array}$$

Ya que $g'(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ tenemos

$$-dx^2+(2a-c)x+b+f = x^2 \qquad \text{y} \qquad ax^2+(b+2d)+c+e = 0.$$

Luego, de la ecuación de la izquierda, igualando potencias similares de x tenemos,

$$d=-1, \quad 2a-e=0, \quad b+f=0.$$

Por otro lado de la ecuación de la derecha, igualando potencias similares de x tenemos,

$$a=0, \quad b+2d=0, \quad c+e=0.$$

Por último igualando todas estos resultados, nos queda

$$2\cdot 0-0 \Rightarrow e=0, \qquad b+2(-1)=0 \Rightarrow b=2, \qquad c+0=0 \Rightarrow c=0, \qquad 2+f=0 \Rightarrow f=-2.$$

Por lo tanto,

$$a=0, \quad b=2, \quad d=-1, \quad c=0, \quad f=-2.$$

38. Dada la fórmula

$$1+x+x^2+\ldots+x_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

válida si $x \neq 1$, determinar por derivación, fórmulas para las siguientes sumas:

(a) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

Respuesta.- Veamos que

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)' = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}.$$

Por lo que,

$$\begin{array}{rcl} 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1} & = & \left(\dfrac{x^{n+1}}{x-1}\right)' \\ & = & \dfrac{(x-1)\left[(n+1)x^n\right]-(x^{n+1}-1)1}{(x-1)^2} \\ & = & \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2} \end{array}$$

(b) $1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \ldots + n^2x^n$.

Respuesta.- Sea

$$\left(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}\right)' = \left(\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}\right)'$$

$$\Rightarrow \quad 2 + 6x + \ldots + n(n-1)x^{n-2}$$

$$= \frac{(x-1)^2\left[n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1}\right] - (2x-2)\left[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right]}{(x-1)^4}$$

$$\Rightarrow \quad \left[1 + 4x + 9x^2 + \ldots + (n-1)^2x^{n-2}\right] + \left[1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2}\right]$$

$$= \frac{(n-1)\left[n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1}\right] - 2\left[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right]}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{x}\right)\left[1^2x + 2^2x^2 + \ldots + (n-1)^2x^{n-1}\right] + \left[1 + 2x + \ldots + (n-1)x^{n-2}\right]$$

$$= \frac{(n^2-n)x^{n+1} - 2(n^2-1)x^n + n(n+1)x^{n-1} - 2}{(x-1)^3}$$

Entonces, por el segundo término en la suma de la izquierda tenemos,

$$\begin{aligned}
1 + 2x + \ldots + (n-1)x^{n-2} &= (1 + x + \ldots + x^n)' - nx^{n-1} \\
&= \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x-1}\right)' - nx^{n-1} \\
&= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x + 1}{(x-1)^2} - nx^{n-1} \\
&= \frac{(n+1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando esto en la expresión anterior,

$$\frac{1}{x}\left[1^2x + 2^2x^2 + \ldots + (n-1)^2x^{n-1}\right]$$

$$= \frac{(n^2-n)x^{n+1} - 2(n^2-1)x^n + n(n+1)x^{n-1} - 2}{(x-1)^3} - \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1^2x + 2^2x^2 + \ldots + (n-1)^2x^{n-1} + n^2x^n$$

$$= x\left\{\frac{(n^2-n)x^{n+1} - 2(n^2-1)x^n + n(n+1)x^{n-1} - 2 - \left[(x-1)((x-1)x^n + nx^{n-1} + 1)\right]}{(x-1)^3}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad 1^2 + x + 2^2x^2 + \ldots + (n-1)^2x^{n-1} + n^2x^n$$

$$= \frac{n^2x^{n+3} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} + (n+1)^2x^{n+1} - x^2 - x}{(x-1)^3}$$

39. Sea $f(x) = x^n$, siendo n entero positivo. Utilizar el teorema del binomio para desarrollar $(x+h)^n$ y deducir la fórmula

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

Expresar el segundo miembro en forma de sumatorio. Hágase que $h \to 0$ y deducir que $f'(x) = nx^{n-1}$. Indicar los teoremas relativos a límites que se han empleado.

Respuesta.- Sea

$$(n+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}.$$

el teorema del binomio. Así tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[(x+h)^n - x^n\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}\right) - x^n\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} \\
&= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \ldots + h^{n-1}
\end{aligned}$$

Tomando el límite de $h \to 0$ a ambos lados de la ecuación concluimos que,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}.$$

4.9 Ejercicios

1. Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ para todo x. Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es horizontal.

Respuesta.- Sea $f'(x) = x^2 - 4x + 3$, entonces para que la recta tangente sea horizontal igualamos la derivada a cero de la siguiente manera,

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$$

de donde se obtiene que,

$$x_1 = 3 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 1.$$

2. Sea $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$ para todo x. Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la pendiente es:

a) 0.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces

$$f'(x) = 2x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x-1)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

b) -1.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces

$$f'(x) = 2x^2 + x - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad x(2x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

c) 5.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces

$$f'(x) = 2x^2 + x - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

3. Sea $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ para todo x. Hallar todos los puntos x para los que la gráfica de f en $(x, f(x))$ tiene pendiente cero.

Respuesta.- Para tal efecto igualamos la derivada de $f(x)$ a 0.

$$1 + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = (2n+1)\pi, \; n \in \mathbb{Z}.$$

4. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo x. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 3)$.

Respuesta.- Primero, derivamos $f(x)$, como sigue

$$g'(x) = 2x + a.$$

Así, si la linea $y = 2x$ es tangente a f en el punto $(2, 4)$, tenemos

$$f'(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 + a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -2.$$

Luego, el punto $(2, 4)$ debe estar en la gráfica de f, es decir,

$$f(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 + (-2)2 + b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 4.$$

Por lo tanto, los valores son $a = -2$ y $b = 4$.

5. Hallar valores de las constantes a, b y c para los cuales las gráficas de los dos polinomios $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ se intersecten en el punto $(1, 2)$ y tengan la misma tangente en dicho punto.

Repuesta.- Dado que f y g se intersectan en $(1,2)$, podríamos tener $f(1) = g(1) = 2$, de donde

$$f(1) = 2 \;\rightarrow\; 1 + a + b = 2 \qquad \text{y} \qquad g(1) = 2 \;\Rightarrow\; 1 - c = 2 \;\Rightarrow\; c = -1.$$

Luego, calculamos las derivadas para que podamos encontrar la pendiente de las rectas tangentes en este punto,

$$f'(x) = 2x + a, \qquad g'(x) = 3x^2.$$

Por el hecho de que estos deben ser los mismos en el punto $(1,2)$ tenemos

$$f'(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Por lo que $1 + a + b = 2 \;\Rightarrow\; b = 0$. Por lo tanto las constantes son

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = -1.$$

6. Considérese la gráfica de la función f definida por la ecuación $f(x) = x^2 + ax + b$, siendo a y b constantes.

(a) Hallar la pendiente de la cuerda que une los puntos de la gráfica para los que $x = x_1$ y $x = x_2$.

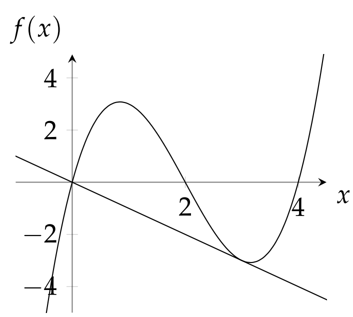
Respuesta.- Los puntos en la gráfica de f en x_1 y x_2 son $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Entonces la cuerda que los une tiene una pendiente dada

(b) Hallar, en función de x_1 y x_2, todos los valores de x para los que la tangente en $(x, f(x))$ tiene la misma pendiente que la cuerda de la parte a).

Repuesta.-

7. Demostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar los puntos de tangencia. ¿Vuelve la tangente a cortar la curva?.

Demostración.-



Primero calculemos la derivada de la recta y la curva, respectivamente

$$y' = -1, \qquad y_0' = 3x^2 - 12x + 8$$

Luego igualando estas ecuaciones obtenemos

$$y_1 = 3x^2 - 12x + 8 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 1.$$

Luego, para que la linea sea tangente a la curva, el punto debe estar en la curva $y_0 = x^3 - 6x^2 + 8x$ como sigue,

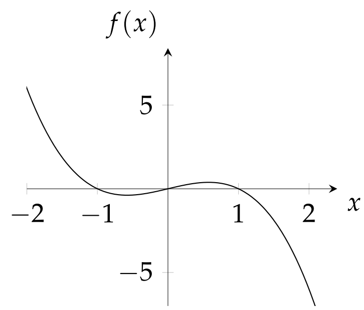
- Para $x_1 = 3$, se tiene $y(3) = -3 = -x$ por lo que $y = -x$ es tangente a la curva en $(3, -3)$.

- Para $x_2 = 1$, se tiene $y(1) = 1 \neq -x$ por lo que x_2 no es tangente a la curva.

Esta linea tangente también corta la curva en $(0, 0)$.

8. Dibujar la gráfica de la función cúbica $f(x) = x - x^3$ en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$. Hallar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 0)$. Una segunda recta que pasa por $(-1, 0)$ es también tangente a la gráfica de f en el punto (a, c). Determinar las coordenadas a y c.

Respuesta.-



Sea $f'(x) = 1 - 3x^2$, entonce la tangente de la linea en el punto $(-1, 0)$ será

$$f'(-1) = 1 - 3(-1)^2 = -2 \quad \Rightarrow \quad m = -2.$$

de donde b estará dado por,

$$y = mx + b \quad \Rightarrow \quad 0 = -2(-1) + b \quad \Rightarrow \quad b = -2.$$

Por lo tanto

$$y = -2x - 2.$$

Después, supongamos otra linea tangente $y_1 = m_1 x + b_1$ a f en el punto (a, c) con pendiente

$$f'(a) = 1 - 3a^2 = m_1$$

sabiendo que esta recta pasa por $(-1, 0)$, entonces

$$y_1(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - 3a^2)(-1) + b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 1 - 3a^2$$

Por lo que la recta y_1 es de la forma,

$$y_1 = (1 - 3a^2)x + (1 - 3a^2).$$

Por último, dado que el punto (a, c) está tanto en esta linea y_1 como en la curva f tenemos

$$f(a) = c \quad \Rightarrow \quad a - a^3 = c$$

y

$$y_1(a) = c \quad \Rightarrow \quad (1 - 3a^2)a + (1 - 3a^2) = c.$$

Igualando c se tiene,

$$a - a^3 = (1-3a^2)a + (1-3a^2) \quad \Rightarrow \quad 2a^3 + 3a^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a = \frac{1}{2}.$$

Ya que $a - a^3 = c$ entonces $c = \dfrac{3}{8}$. Así, el otro punto tangente está dado por $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$.

9. Una función f está definida del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > c, \\ \\ a + bx^2 & \text{si} \quad |x| \leq c. \end{cases}$$

Hallar los valores de a y b (en función de c) tales que $f'(c)$ exista.

Respuesta.- Sabemos que la derivada $f'(c)$ existe si y sólo si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Existe. También sabemos que el límite existe si

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Por lo que si tomamos c y nos acercamos a $ax+b$ desde la derecha, a x^2 desde la izquierda y tomando a $f(c) = c^2$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{a(c+h)+b-c^2}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(c+h)^2-c^2}{h} \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{ac+b-c^2}{h} + a &= 2c. \end{aligned}$$

Dado que $ac + b - c^2$ es una constante, entonces $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{ac+b-c^2}{h} = 0$. Por lo que nos queda la ecuación

$$a = 2c.$$

Ahora dado que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{ac+b-c^2}{h} = 0$, entonces

$$ac + b - c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -c^2.$$

10. Resolver el ejercicio 9 cuando f es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > c, \\ \\ a + bx^2 & \text{si} \quad |x| \leq c. \end{cases}$$

Respuesta.- Supongamos que $c > 0$ de lo contrario $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ para todo x. Entonces, existe la derivada para todo los valores de las constantes de a y b. Luego sabemos que si una función tiene derivada en un punto x, entonces también es continua en x, por lo tanto la función f es continua en c, así,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c^+} f(x) &= \lim_{x\to c^-} f(x) \\
\lim_{x\to c^+} \frac{1}{|x|} &= \lim_{x\to c^-} a + bx^2 \\
\frac{1}{c} &= a + bc^2 \\
ac + bc^3 &= 1
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} f(x) \\
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{|c+h|} - a + bc^2}{h} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{a + b(c+h)^2 - (a + bc^2)}{h} \\
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{c+h} - a + bc^2}{h} \cdot \frac{c+h}{c+h} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{2bch + bh^2}{h} \\
\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - ac - bc^3 - ah - bc^2 h}{h(c+h)} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{h(2bc + bh)}{h} \\
\lim_{x\to 0^+} \frac{ac + bx^3 - ac - bc^3 - ah - bc^2 h}{h} &= \lim_{x\to 0^-} 2bc + bh \\
\lim_{x\to 0^+} \frac{-h(a + bc^2)}{h(c+h)} &= 2bc + \lim_{x\to 0^-} bh \\
\lim_{x\to 0^+} -\frac{a + bc^2}{c+h} &= 2bc. \\
-\frac{a + bc^2}{c} &= 2bc.
\end{aligned}$$

Por último resolvemos las dos ecuaciones anteriores:

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{a + bc^2}{c} &= 2bc \\ ac + bc^3 &= 1 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} b &= -\frac{1}{2c^3} \\ a &= -\frac{3}{2c} \end{aligned} \right.$$

11. Resolver el ejercicio 9 cuando f es:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \leq c \\ ax + b & \text{si} \quad x > c. \end{cases}$$

Respuesta.- Sabemos que $f'(c)$ existe si y sólo si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Existe. También sabemos que el límite existe si y sólo si los dos límites unilaterales existen y son iguales, es decir

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Por lo tanto usando la definición de f tenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{a(c+h)+b-\operatorname{sen} c}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(c+h)-\operatorname{sen} c}{h}\\
\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{ac+b-\operatorname{sen} c}{h}\right)+a &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} c\cos h+\operatorname{sen} h\cos c-\operatorname{sen} c}{h}\\
\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{ac+b-\operatorname{sen} c}{h}\right)+a &= \lim_{h\to 0^-}\left[\frac{\operatorname{sen} c(\cos h-1)}{h}\right]+\cos c
\end{aligned}$$

Al simplificar el lado derecho usamos el hecho de que $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=1$. Además para que existe el límite por el lado izquierdo debemos tener $ac+b-\operatorname{sen} c=0$ de lo contrario el límite divergirá como $h\to 0$. Ahora, para la expresión de la derecha, vemos que el límite tiende a 0. Eso se puede ver ya que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} c(\cos h-1)}{h}=\operatorname{sen} c\lim_{h\to c^-}\frac{\cos h-1}{h}=\operatorname{sen} c\lim_{h\to c^-}\frac{\cos(0+h)-\cos 0}{h}$$

Pero este límite es la derivada de $\cos x$ en $x=0$. Luego ya que $(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} 0=0$ el termino tiende a 0. Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{ac+b-\operatorname{sen} c}{h}\right)+a=\lim_{h\to 0^-}\left[\frac{\operatorname{sen} c(\cos h-1)}{h}\right]+\cos c \quad\Rightarrow\quad a=\cos c.$$

Así, dado que $ac+b-\operatorname{sen} c=0$ entonces

$$b=\operatorname{sen} c-c\cos c.$$

12. Si $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ para $x>0$, hallar fórmulas para $Df(x)$, $D^2f(x)$ y $D^3f(x)$.

Respuesta.- La fórmula para $Df(x)$ es:

$$Df(x)=\frac{(1+\sqrt{x})\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}-(1-\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

Para $D^2f(x)$,

$$D^2f(x)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x(1+\sqrt{x})^4}=\frac{1+3\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^3}.$$

Por último para $D^3 f(x)$,

$$D^3 f(x) = \frac{\frac{3}{2\sqrt{x}} \cdot 2(x+\sqrt{x})^3 - 6(1+3\sqrt{x})(x+\sqrt{x})^2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4(x+\sqrt{x})^6} = -\frac{3(1+4\sqrt{x}+5x)}{4\left[\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^4\right]}.$$

13. Existe un polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $P(0) = P(1) = -2$, $P'(0) = -1$ y $P''(0) = 10$.Calcular a, b, c, d.

Respuesta.- Primeramente calculamos la primera y segunda derivada de $P(x)$:

$$P'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad P''(x) = 6ax + 2b.$$

De donde

$$P''(0) = 6 \cdot a \cdot 0 + 2b = 10 \quad \Rightarrow \quad b = 5.$$

y

$$P'(0) = 3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + c = -1 \quad \Rightarrow \quad c = -1.$$

Luego calculamos d y a de la siguiente manera:

$$P(0) = a \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2 - 0 + d = -2 \quad \Rightarrow \quad d = -2.$$

$$P(1) = a \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 1 - 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad a = -4.$$

Por lo tanto,

$$a = -4, \quad b = 5, \quad c = -1, \quad d = -2.$$

14. Dos funciones f y g admiten primera y segunda derivada en 0 y satisfacen las relaciones

$$f(0) = \frac{2}{g(0)}, \quad f'(0) = 2g'(0) = 4g(0), \quad g''(0) = 5f''(0) = 6f(0) = 3.$$

a) Póngase $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, y calcular $h'(0)$.

Respuesta.- Usando la regla de derivada se tiene,

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{f'(x) - g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

de donde sustituyendo obtenemos,

$$\begin{aligned} h'(0) &= \frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} &= \frac{4g^2(0) - f(0)g'(0) - \frac{2}{g(0)}2g(0)}{g^2(0)} \\ &= \frac{4g^2(0)}{g^2(0)} - \frac{4}{g^2(0)} &= 4 - \frac{4}{\frac{4}{f^2(0)}} \\ &= 4 - \frac{4}{\frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

b) Póngase $k(x) = f(x)g(x)\,\text{sen}\,x$, y calcular $k'(0)$.

Respuesta.- Usando la propiedad del producto derivamos como sigue,

$$k'(x) = f'(x)g'(x)\,\text{sen}\,x + f(x)g'(x)\,\text{sen}\,x + f(x)g(x)\cos x$$

Luego evaluamos en 0,

$$k'(0) = f'(0)g'(0)\,\text{sen}\,0 + f(0)g'(0)\,\text{sen}\,0 + f(0)g(0)\cos 0 = f(0)g(0) = 2.$$

c) Calcular el límite de $\dfrac{g'(x)}{f'(x)}$ cuando $x \to 0$.

Respuesta.- Sabemos que si f y g son diferenciables entonces son continuos, esto significa

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$$

Además $f'(0) \neq 0$ ya que $f'(0) = 4g(0)$ y $g(0) = \dfrac{2}{f(0)} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} g'(x)}{\lim\limits_{x\to 0} f'(x)} = \frac{g'(0)}{f'(0)} = \frac{g'(0)}{2g'(0)} = \frac{1}{2}.$$

15. Supóngase que existe la derivada $f'(a)$. Indicar cuáles de las desigualdades siguientes son ciertas y cuáles falsas. Expresar el fundamento de la decisión en cada caso.

(a) $f'(a) = \lim\limits_{h\to a} \dfrac{f(h) - f(a)}{h - a}$.

Respuesta.- Sea $j = h - a$ entonces

$$\lim_{h\to a} \frac{f(h) - f(a)}{h - a} = \lim_{h\to a} \frac{f(a - a + h) - f(a)}{h - a} = \lim_{j\to 0} \frac{f(a + j) - f(a)}{j} = f'(a).$$

Por lo que $f'(a)$ es verdadera.

(b) $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a) - f(a + h)}{h}$.

Respuesta.- Sea $j = -h$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a - h)}{h} = \lim_{h\to a} \frac{f(a) - f(a + j)}{-j} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + j) - f(a)}{j}.$$

Por lo tanto $f'(a)$ es verdadera.

(c) $f'(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a + 2t) - f(a)}{t}$.

Respuesta.- Sea $j = 2t$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + 2t) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} = 2 \cdot \frac{f(a + 2t) - f(a)}{2t} = 2 \cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(a + j) - f(a)}{j} = 2f'(a) \neq f'(a).$$

Por lo tanto $f'(a)$ es falsa.

(d) $f'(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t}$.

Respuesta.- Sea $j = 2t$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+2t)-f(a+t)+f(a)-f(a)}{2t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+2t)-f(a)}{2t} - \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{2t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+j)-f(a)}{j} - \frac{1}{2}\cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} \\
&= f'(a) - \frac{1}{2} f'(a) \\
&= \frac{1}{2} f'(a) \neq f'(a).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(a)$ es falsa.

16. Supóngase que en lugar de la definición usual de derivada $Df(x)$ se define una nueva clase de derivada $D^*f(x)$ por fórmula:

$$D^*f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h},$$

donde $f^2(x)$ significa $[f(x)]^2$.

(a) Hallar fórmulas para calcular la derivada D^* de una suma, diferencia, producto y cociente.

Respuesta.- Sea f y g. Para la suma se tiene,

$$\begin{aligned}
D^*\left[f(x)+g(x)\right] &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]^2 - \left[f(x)+g(x)\right]^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+h)+2f(x+h)(x+h)+g^2(x+h)-f^2(x)-2f(x)g(x)-g^2(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h}\right] + 2\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right] \\
&+ \lim_{h\to 0} \left[\frac{g^2(x+h)-g^2(x)}{h}\right] \\
&= D^*f(x) + d^*g(x) + 2\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right].
\end{aligned}$$

Luego multiplicamos el límite anterior por $\dfrac{f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x)}{f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x)}$, de donde

$$
\begin{aligned}
&= D^*f(x)+f^*g(x)+2\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\cdot\frac{f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x)}{f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x)}\right]\\
&= D^*f(x)+D^*g(x)+2\lim_{h\to 0}\left[\frac{f^2(x+h)g^2(x+h)-f^2(x)g^2(x)}{h\left(f(x+h)g(x+h)+f(x)g(x)\right)}\right]\\
&= D^*f(x)+D^*g(x)+\frac{1}{f(x)g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)g(x+h)]-[f(x)g(x)]^2}{h}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para el límite restante, usamos la regla del producto para la derivada en esta definición alternativa, que derivamos a continuación. (Este último límite es $D^*(f(x)g(x))$. Luego derivamos que $D^*(f(x)g(x)) = g^2D^*f + f^2D^*g$). Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
D^*\left[f(x)+g(x)\right] &= D^*f(x)+D^*g(x)+\frac{1}{f(x)g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)g(x+h)]-[f(x)g(x)]^2}{h}.\\
&= D^*f(x)+D^*g(x)+\frac{1}{f(x)g(x)}\left[g^2(x)D^*f(x)+f^2(x)D^*g(x)\right]\\
&= D^*f(x)+D^*g(x)+\frac{g(x)}{f(x)}D^*f(x)+\frac{f(x)}{g(x)}D^*g(x)\\
&= \left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)D^*f(x)+\left(1+\frac{f(x)}{g(x)}\right)D^*g(x)
\end{aligned}
$$

Para la diferencia se sigue similar a la suma,

$$
D^*\left[f(x)-g(x)\right] = \left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)D^*f(x)+\left(1-\frac{f(x)}{g(x)}\right)D^*g(x)
$$

Para el producto tenemos,

$$
\begin{aligned}
D^*\left[f(x)g(x)\right] &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)g(x+h)]^2-[f(x)g(x)]^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+h)g^2(x+h)-f^2(x)g^2(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+h)g^2(x+h)-f^2(x)g^2(x)+f^2(x+h)g^2(x)-f^2(x+h)g^2(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[g^2(x)\frac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left[f^2(x+h)\frac{g^2(x+h)-g^2(x)}{h}\right]\\
&= g^2(x)D^*f+f^2(x)D^*g.
\end{aligned}
$$

Por último para el cociente tenemos,

$$\begin{aligned}
D^*\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f^2(x+h)}{g^2(x+h)}-\frac{f^2(x)}{g^2(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g^2(x)f^2(x+h)-f^2(x)g^2(x+h)}{h\cdot g^2(x+h)g^2(x)}\right] \\
&= \frac{1}{g^4(x)}\lim_{h\to 0}\left[\frac{g^2(x)f^2(x+h)-f^2(x)g^2(x+h)+g^2(x)f^2(x)-g^2(x)f^2(x)}{h}\right] \\
&= \frac{1}{g^4(x)}\lim_{h\to 0}\left[g^2(x)\frac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h}-f^2(x)\frac{g^2(x+h)-g^2(x)}{h}\right] \\
&= \frac{g^2D^*f-f^2D^*g}{g^4}
\end{aligned}$$

(b) Expresar $D^*f(x)$ en función de $Df(x)$.

Respuesta.- Usaremos la idea de $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, y que $f(x)$ es una constante en h, por lo que podemos sacar el límite.

$$D^*f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+h)-f^28x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+f(x)]\,[f(x+h)-f(x)]}{h} = 2f(x)\cdot Df(x).$$

(c) ¿Para qué funciones es $D^*f = Df$?.

Respuesta.- Para encontrar la función f tal que $Df = D^*f$ igualamos las dos expresiones y resolvemos f usando $D^*f = 2Df$, como sigue

$$Df = D^*f \quad\Rightarrow\quad Df = 2f(x)Df \quad\Rightarrow\quad Df = 0 \text{ o } 2f(x) = 1.$$

En cualquier caso tenemos $f(x) = c$ para alguna constante c.

4.10 Regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas

Teorema 4.2 **Regla de la cadena.** Sea f la función compuesta de dos funciones u y v, expresado por $f = u\circ v$. Suponga que ambas derivadas $v'(x)$ y $u'(y)$ existen, donde $y = v(x)$, entonces la derivada $f'(x)$ también existe y es dado por la fórmula

$$f'(x) = u'(y)\cdot v'(x) \quad\text{o}\quad f'(x) = u'[v(x)]\cdot v'(x) \quad\text{o}\quad (u\circ v)' = (u'\circ v)\cdot v' \quad\text{o}\quad u(v)' = u'(v)\circ v'.$$

Dicho de otro modo, para calcular la derivada de $u\circ v$ respecto a x se calcula primero la derivada de u en el punto y donde $y = v(x)$, y se multiplica ésta por $v'(x)$.

Demostración.- Se trata aquí de demostrar $f'(x) = u'(v)\cdot v'(x)$. Se supone que v tiene derivada en

x y u tiene derivada en $v(x)$ y se trata de demostrar que f tiene derivada en x dada por el producto $u'[v(x)] \cdot v'(x)$. El cociente de diferencia para f es:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u[v(x+h)]-y[v(x)]}{h}$$

Ahora es conveniente introducir la siguiente notación: Sean $y = v(x)$ y sea $k = v(x+h) - v(x)$. Es importante poner de manifiesto que k depende de h. Entonces se tiene $v(x+h) = y + k$, por lo que el cociente de diferencias de f se transforma en:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(y+k)-u(y)}{h}$$

El segundo miembro sería el cociente de diferencias cuyo límite define $u'(y)$, si en el denominador en vez de h apareciera k. Si $k \neq 0$ se completa fácilmente la demostración multiplicando el numerador y el denominador por k toma la forma:

$$\frac{u(y+k)-u(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{u(y+k)-u(y)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

Cuando $h \to 0$ el último cociente del segundo miembro tiende a $v'(x)$. Puesto que $k = v(x+h) - v(x)$ y v es continua en x, al tender $h \to 0$ también $k \to 0$; por tanto, el primer cociente del segundo miembro tiende a $u'(y)$ cuando $h \to 0$.

Aunque el razonamiento precedente parece el camino más natural para la demostración, sin embargo no es completamente general. Como $k = v(x+h) - v(x)$, puede ocurrir que $k = 0$ para infinitos valores de h cuando $h \to 0$, en cuyo caso pasar a $\frac{u(y+k)-u(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{u(y+k)-u(y)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$ no es válido. Para soslayar esta dificultad es necesario modificar ligeramente la demostración.

Volviendo a la ecuación $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(y+k)-u(y)}{h}$ se expresa el cociente del segundo miembro de manera que no aparezca k en el denominador, para lo cual se introduce la diferencia entre la derivada $u'(y)$ y el cociente de diferencias cuyo límite es $u'(y)$. Es decir, se define una nueva función g como sigue:

$$g(t) = \frac{u(y+t)}{t} - u'(y) \text{ si } t \neq 0.$$

Esta ecuación define $g(t)$ sólo si $t \neq 0$. Multiplicando por t y transponiendo términos, se puede escribir en la forma:

$$u(y+t) - u(y) = t[g(t) + u'(y)].$$

Aunque esta última forma se había deducido en la hipótesis de ser $t \neq 0$, es válida también para $t = 0$ mientras se asigne algún valor definido a $g(0)$. El valor que se asigne a $g(0)$ no tiene importancia para esta demostración, pero ya que $g(t) \to 0$ cuando $t \to 0$ parece natural definir $g(0)$ igual a 0. Si ahora se sustituye t por k, donde $k = v(x+h) - v(x)$ y se sustituye el segundo miembro de $u(y+t) - u(y) = t[g(t) + u'(y)]$ en $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(y+k)-u(y)}{h}$ se obtiene:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{k} = \frac{k}{h}[g(k) + u'(y)]$$

fórmula que es válida aun cuando $k = 0$. Si $h \to 0$ el cociente $k/h \to v'(x)$ y $g(k) \to 0$; por lo tanto el segundo miembro tiende al límite $u'(y) \cdot v'(x)$. Queda pues completada la demostración de la regla de la cadena.

■

4.11 Aplicaciones de la regla de cadena. Coeficientes de variación ligados y derivación implícita

Introducimos los símbolos

$$y = v(x) \qquad \text{y} \qquad z = u(y).$$

Y designando con dy/dx la derivada $v'(x)$ y con dz/dy la de $u(y)$, la formación de la función compuesta queda indicada por:

$$z = u(y) = u[v(x)] = f(x),$$

siguiente lo notación de Leibniz, dz/dx designa la derivada $f'(x)$, la regla de la cadena tal como estaba expresada se presenta ahora en la forma:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Si $y = v(x)$ y $z = f(x)$, entonces $z = y^n$, $dz/dx = f'(x)$ y la regla de la cadena da:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = ny^{n-1}v'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x).$$

Ejemplo 4.7 Si $f(x) = [v(x)]^n$ donde n es un entero positivo, calcular $f'(x)$ en función de $v(x)$ y $v'8x)$.

Respuesta.- La solución f es una composición, $f(x) = u[v(x)]$, donde $y(x) = x^n$. Puesto que $u'(x) = nx^{n-1}$, se tiene $u'[v(x)]$ $u'[v(x)] = n[v(x)]^{n-1}v'(x)$. Y la regla de la cadena da:

$$f'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x).$$

Si se omite la referencia a x y se escribe como una igualdad entre funciones, se obtiene la importante fórmula:

$$(v^n)' = nv^{n-1}v'$$

que indica cómo se deriva la potencia n-ésima de v cuando v' existe. La fórmula es también válida para las potencias racionales si v^n y v^{n-1} están definidas.

■

4.12 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, determinar la derivada $f'(x)$. En cada caso se sobrentiende que x toma sólo los valores para los que $f(x)$ tiene sentido.

1. $f(x) \cos 2x - 2 \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = (-\operatorname{sen} 2x)2 - (0 \cdot \operatorname{sen} x + 2\cos x) = -2\operatorname{sen} 2x - 2\cos x.$$

2. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. $f(x) = (2 - x^2)\cos x^2 + 2x \operatorname{sen} x^3$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -2x\cos x^2 + (2-x^2)(-2x\operatorname{sen} x^2) + 2\operatorname{sen} x^3 \cdot 2\operatorname{sen} x^3 + 2x \cdot 3x^3 \cdot \cos x^3 \\ & = & (2x^3 - 4x)\operatorname{sen} x^2 - 2x\cos x^2 + 2\operatorname{sen} x^2 + 6x^3\cos x^3. \end{array}$$

4. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x) \cdot \cos(\operatorname{sen}^2 x)$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \cos\left(\cos^2 x\right)(-2\cos x \operatorname{sen} x)\cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right)\left[-\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right] 2\operatorname{sen} x\cos x \\ & = & (-2\operatorname{sen} x\cos x)\left[\cos\left(\cos^2 x\right)\cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right] \\ & = & -\operatorname{sen}(2x)\left[\cos\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)\right] \\ & = & -\operatorname{sen}(2x)\cos\left(\cos 2x\right). \end{array}$$

5. $f(x) = \operatorname{sen}^n x \cdot \cos nx$.

Respuesta.- Por el hecho de que $(v^n)' = nv^{n-1}v'$ tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & n\left(\operatorname{sen}^{n-1} x\right)\cos x\cos nx + \operatorname{sen}^n x(-\operatorname{sen} nx)n \\ & = & \left(n\operatorname{sen}^{n-1} x\right)\left[\cos x\cos nx - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} nx\right] \end{array}$$

Luego por la identidad $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$ concluimos que,

$$f'(x) = \left(n\operatorname{sen}^{n-1} x\right)\cos\left[(n+1)x\right].$$

6. $f(x) = \operatorname{sen}[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)]$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \cos\left[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\right] \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x.$$

7. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{(2\operatorname{sen} x\cos x)\left[\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right] - \left(\operatorname{sen}^2 x\right)\left[2x\cos\left(x^2\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(x^2\right)} \\ & = & \dfrac{2\operatorname{sen} x\left[\cos x\operatorname{sen}\left(x^2\right) - x\operatorname{sen} x\cos\left(x^2\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(x^2\right)}. \end{array}$$

8. $f(x) = \tan\dfrac{x}{2} - \cot\dfrac{x}{2}$.

Respuesta.- Sabemos que $(\tan x)' = \sec^2 x$ y $(\cot x)' = csc^2 x$ por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{1}{2}\sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\csc^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right] \\ & = & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right] \\ & = & \dfrac{1}{2\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]} \end{array}$$

Luego ya que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x\cos x$, es decir

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x.$$

Se tiene,

$$\frac{1}{2\cdot\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x\cdot\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

9. $f(x) = \sec^2 x + csx^2 x$.

Respuesta.- Simplificando la expresión dada, tenemos

$$f(x) = \sec^2 x + \csc^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\dfrac{1}{4}\cdot\operatorname{sen}^2(2x)} = \frac{4}{\operatorname{sen}^2(2x)}$$

Por lo tanto la derivada de f estará dada por,

$$f'(x) = \frac{-4[\cos(2x)][\operatorname{sen}(2x)]2}{\operatorname{sen}^4(2x)} = -\frac{16\cos(2x)}{\operatorname{sen}^3(2x)}.$$

10. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

11. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{-x^2} - x\dfrac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2} = \frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

12. $f(x) = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{3x^2\left(1-x^3\right)-\left(1+x^3\right)\left(-3x^2\right)}{\left(1-x^3\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{6x^2}{\left(1-x^3\right)^2} \\
&= \frac{2x^2}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{2x^2\left(1-x^3\right)}{\left(1-x^3\right)\left(1+x^3\right)} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{2x^2}{1-x^6} \cdot \frac{1+x^3}{1-x^3} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{2x^2}{1-x^6} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

Respuesta.- Primeramente simplifiquemos la expresión dada,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)} \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)} \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2-x^2\right)} \\
&= 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Ahora, derivemos f de la siguiente manera,

$$f'(x) = -\left[\frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}2x}{1+x^2}\right] = -\frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

14. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

Respuesta.- Sea $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, entonces

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1}{2g(x)} + \frac{1}{3\sqrt{x}g(x)}.$$

Luego usando $g(x)$ en la ecuación del enunciado tenemos,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{x + g(x)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+g(x)}}\left(1 + g'(x)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+g(x)}}\left(1 + \frac{1}{2g(x)} + \frac{1}{4\sqrt{x}g(x)}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{x}g(x) + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x}g(x)\sqrt{x+g(x)}}. \end{aligned}$$

15. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = (1+x)(2+x^2)^{1/2}(3+x^3)^{1/3},\ x^3 \neq -3$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2+x^2\right)^{1/2}\left(3+x^3\right)^{1/3} + (1+x)\left[\frac{1}{2}\left(2+x^2\right)^{-1/2}\left(3+x^3\right)^{1/3} + \left(2+x^2\right)^{1/2}\frac{1}{3}\left(\right)^{-2/3}3x^2\right] \\ &= \left(\right)^{1/2}\left(3+x^3\right)^{1/3} + (1+x)\left(3+x^3\right)^{1/3}\frac{x}{\left(2+x^2\right)^{1/2}} + (1+x)\left(2+x^2\right)^{1/2}\frac{x^2}{\left(3+x^3\right)^{2/3}} \\ &= \frac{3x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x + 6}{\left(2+x^2\right)^{1/2}\left(3+x^3\right)^{2/3}}. \end{aligned}$$

16. Sean $f(x) = \dfrac{1}{1+1/x}$ si $x \neq 0$ y $g(x) = \dfrac{1}{1+1/f(x)}$. Calcular $f'(x)$ y $g'(x)$.

Respuesta.- Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+1/x} = \dfrac{x}{x+1}$, entonces aplicando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Luego sea $g(x) = \dfrac{1}{1+1/f(x)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{1}{1+1/x}}} = \dfrac{1}{2+x^{-1}}$ entonces la derivada de g estará dada por,

$$g'(x) = \frac{x^{-2}}{(2+x^{-1})^2} = \frac{1}{x^2\left(4+4x^{-1}+x^{-2}\right)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}.$$

17. La siguiente tabla de valores se calculó sus derivadas respectivas para f' y g'. Construir la correspondiente tabla para las dos funciones compuestas h y k dadas por $h(x) = f[g(x)]$, $k(x) = g[f(x)]$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	5	2	-5
1	3	-2	0	1
2	0	2	3	1
3	2	4	1	-6

Respuesta.-

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{rclclcl} h(0) & = & f(g(0)) & = & f(2) & = & 0 \\ h(1) & = & f(g(1)) & = & f(0) & = & 1 \\ h(2) & = & f(g(2)) & = & f(3) & = & 2 \\ h(3) & = & f(g(3)) & = & f(1) & = & 3 \end{array} \right. \qquad k(x) = \left\{ \begin{array}{rclclcl} k(0) & = & g(f(0)) & = & g(1) & = & 0 \\ k(1) & = & g(f(1)) & = & g(3) & = & 1 \\ k(2) & = & g(f(2)) & = & g(0) & = & 2 \\ k(3) & = & g(f(3)) & = & g(2) & = & 3 \end{array} \right.$$

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \left\{ \begin{array}{rclclcr} h'(0) & = & f'(g(0))g'(0) & = & f'(2)(-5) & = & -10 \\ h'(1) & = & f'(g(1))g'(1) & = & f'(0)(1) & = & 5 \\ h'(2) & = & f'(g(2))g'(2) & = & f'(3)(1) & = & 4 \\ h'(3) & = & f'(g(3))g'(3) & = & f'(1)(-6) & = & 12 \end{array} \right.$$

$$k(x) = g'(f(x))f'(x) = \left\{ \begin{array}{rclclcr} k'(0) & = & g'(f(0))f'(0) & = & g'(1)(5) & = & 5 \\ k'(1) & = & g'(f(1))f'(1) & = & g'(3)(-2) & = & 12 \\ k'(2) & = & g'(f(2))f'(2) & = & g'(0)(2) & = & -10 \\ k'(3) & = & g'(f(3))f'(3) & = & g'(2)(4) & = & 4 \end{array} \right.$$

18. Una función f y sus dos primeras derivadas se han tabulado como se indica. Poner $g(x) = xf\left(x^2\right)$ y construir una tabla de g y sus dos primeras derivadas para $x = 0, 1, 2$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	1	2
1	1	1	1
2	3	2	1
3	6	3	0

Respuesta.- Sean $f'(x) = f\left(x^2\right) + 2x^2 f'\left(x^2\right)$ y $g''(x) = 6xf'\left(x^2\right) + 4x^3 f''\left(x^2\right)$, entonces

x	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$
0	0	0	0
1	1	3	10
2	30	2	36

19. Determinar la derivada $g'(x)$ en función de $f'(x)$ si:

(a) $g(x) = f\left(x^2\right)$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación se tiene,

$$g'(x) = f'\left(x^2\right)\left(x^2\right)' = 2xf'\left(x^2\right).$$

(b) $g(x) = \left(\operatorname{sen}^2 x\right) + f\left(\cos^2 x\right)$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación se tiene,

$$g'(x) = f'\left(\operatorname{sen}^2 x\right) 2 \operatorname{sen} x \cos x + f'\left(\cos^2 x\right) 2 \cos x(-\operatorname{sen} x).$$

(c) $g(x) = f[f(x)]$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación se tiene,

$$g'(x) = f'\left[f(x)\right] f'(x).$$

(d) $g(x) = f\left\{f[f(x)]\right\}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación se tiene,

$$g'(x) = f'\left\{f\left[f(x)\right]\right\} f'\left[f(x)\right] f'(x).$$

20. Cada arista de un cubo se dilata a razón de 1 cm por segundo. ¿Cuál es la razón de variación del volumen cuando la longitud de cada arista es (a) 5 cm, (b) 10 cm, (c) x cm?.

Respuesta.- El volumen de un cubo está dado por:

$$V = a^3$$

donde a es la longitud de la arista. Por tanto la razón de variación es,

$$\frac{dV}{da} = 3a^2.$$

Así,

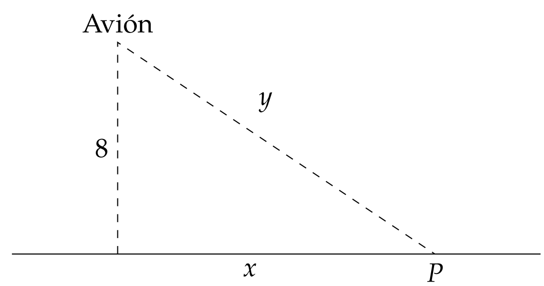
(a) $\dfrac{dV}{da} = 3(5)^2 = 75\ cm^3/seg.$

(b) $\dfrac{dV}{da} = 3(10)^2 = 300\ cm^3/seg.$

(c) $\dfrac{dV}{da} = 3x^2\ cm^3/seg.$

21. Un avión se desplaza en vuelo horizontal, a 8 millas de altura. (En este Ejercicio se supone la Tierra llana.) La ruta de vuelo pasa por encima de un punto P del suelo. La distancia entre el avión y el punto P disminuye a razón de 4 millas por minuto en el instante en el que esta distancia es de 10 millas. Calcular la velocidad del avión en millas por hora.

Respuesta.- Sea x la distancia desde el punto del avión en el suelo hasta el punto P e y sea la distancia desde el avión hasta el punto P.



Estamos tratando de calcular $\dfrac{dx}{dt}$ la velocidad del avión. Sabemos que la distancia desde el avión hasta el punto P está cambiando a razón de 4 millas por minuto cuando $y = 4$. Por tanto tenemos,

$$\frac{dy}{dt} = 4 \text{ si } y = 10.$$

Además por la identidad de Pitágoras podemos derivar,

$$x^2 = y^2 - 64 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{y^2-64}}.$$

Entonces en 10 millas tenemos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{5}{3}.$$

De este modo,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dy} = 10 \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{3}.$$

22. En campo de baseball es un cuadrado cuyo lado tiene 90 pies de longitud. Una pelota es lanzada por el bateador a lo largo de una línea que pasa por la tercera base con una velocidad constante de 100 pies por segundo. ¿Cuál es la rapidez con que varía la distancia de la pelota a la primera base, (a) cuando la pelota se encuentra a mitad de camino de la tercera base, (b) cuando la pelota alcanza la tercera base.

Respuesta.- Primero damos la configuración general para el problema.

x	=	La distancia de la pelota a la primera base.
y	=	La distancia de la pelota al plato de home.

Por lo que

$$\frac{dy}{dt} = 100\, ft/s$$

Además $x^2 = y^2 + 90^2$, así $x = \sqrt{y^2 + 90^2}$, de donde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 90^2}}$$

Si la pelota está a medio camino de la tercera base, significa que $y = 45$ pies, ya que el diamante es un cuadrado con lado de 90 pies de largo. Entonces tenemos

$$\frac{x}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dy} = 100\frac{45}{\sqrt{45^2 + 90^2}} = \frac{100}{\sqrt{5}} = 20\sqrt{5}\; ft/s.$$

Por último si la pelota está en la tercera base, significa que $y = 90$ ya que y es la distancia desde la pelota hasta el plato. Entonces tenemos,

$$\frac{x}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dy} = 100\frac{90}{\sqrt{90^2 + 90^2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}\; ft/s.$$

23. Un barco navega paralelamente a una costa recta, a una velocidad de 12 millas por hora y a una distancia de 4 millas. ¿Cuál es su velocidad de aproximación a un faro de la costa en el instante en que diste precisamente 5 millas del faro?.

Respuesta.- Sea

x	=	la distancia a lo largo de la orilla hasta el faro.
y	=	la distancia del barco al faro.

El problema nos da que la distancia a lo largo de la costa hasta el faro está cambiando a razón de 12 millas por hora (ya que el bote se mueve a 12 millas por hora y se mantiene paralelo a la línea de costa). Así, $\dfrac{dy}{dt} = 12$. Entonces, usando el teorema de Pitágoras, cuando $x = 5$ tenemos $y = 3$. Además, resolviendo x en términos de y, derivando tenemos

$$x = \sqrt{y^2 + 16} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 16}}$$

Por lo tanto, tenemos en $y = 3$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dy} = 12\frac{3}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{36}{5} = 7.5\, mph.$$

24. Un recipiente tiene forma de cono circular. La altura es 10 pies y el radio de la base 4 pies. Se introduce agua en el recipiente a una velocidad constante de 5 pies cúbicos por minuto, ¿con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de 5 pies, si (a) el vértice del cono está hacia arriba, (b) lel vértice del cono está hacia abajo?.

Respuesta.- Calculamos el radio del recipiente en terminos de altura h,

$$r = -\frac{4}{10}h = \frac{2}{5}h \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{2}{5}\frac{dh}{dt}.$$

Luego, usando la fórmula para el volumen de un cono circular recto que tenemos y dejando V que el volumen del agua que tenemos V sea igual al volumen de todo el tanque menos el volumen del cono vacío (más pequeño) sobre el agua:

$$V = \frac{1}{3}\pi 4^2 10^2 - \frac{1}{3}\pi r^2(10-h) = \frac{1600\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi r^2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1600\pi}{3} - r^2\left(\frac{10\pi}{3} - \frac{\pi}{3}h\right)$$

que implica

$$\frac{dV}{dt} = -2r\left(\frac{10\pi}{3} - \frac{\pi}{3}h\right)\frac{dr}{dt} - r^2\left(-\frac{\pi}{3}\frac{dh}{dt}\right).$$

(Aquí, necesitábamos usar la regla del producto para las derivadas, ya que ambos r y h son funciones de t, por lo que cuando diferenciamos su producto, debemos tener cuidado de usar la regla del producto y obtener los dos términos que se muestran arriba).
El problema nos da que la tasa de cambio en el volumen de agua es de 5 pies cúbicos por minuto, entonces,

$$\frac{dV}{dt} = 5.$$

Cuando $h = 5$, tenemos $r = 2$. Sustituyendo estos valores y se teniendo $\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{5}\frac{dh}{dt}$,

$$5 = -2\cdot 2\left(\frac{10\pi}{3} - \frac{\pi}{3}5\right)\left(-\frac{2}{5}\frac{dh}{dt}\right) - 2^2\left(-\frac{\pi}{3}\frac{dh}{dt}\right) = \frac{-20\pi}{3}\frac{-2}{5}\frac{dh}{dt} + \frac{4\pi}{3}\frac{dh}{dt} = \frac{60\pi}{15}\frac{dh}{dt}$$

entonces,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi}.$$

Para la parte (b) será casi igual que la parte (a). Ahora, el radio de la línea de flotación en términos de la altura del agua h es

$$r = \frac{4}{10}h = \frac{2}{5}h \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{2}{5}\frac{dh}{dt}.$$

Luego, usando el volumen de un cono circular recto y dejando V denotar el volumen del agua (las cosas son un poco más simples esta vez ya que el agua es un cono y no tenemos que restar nada) tenemos

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\pi r h\frac{dr}{dt} + \frac{1}{3}\pi r^2\frac{dh}{dt}.$$

(Como en la parte (a), tuvimos que tener cuidado al usar la regla del producto ya que ambas h y r son funciones de t). Entonces, el problema nos da que la tasa de cambio en el volumen de agua es de 5 pies cúbicos por minuto, así que de nuevo,

$$\frac{dV}{dt} = 5.$$

Cuando $h = 5$ todavía tenemos $r = 2$. Sustituyendo estos valores junto con $\frac{dr}{dt} = \frac{2}{5}\frac{dh}{dt}$ se tiene,

$$5 = \frac{2}{3}\pi\cdot 2\cdot 5\left(\frac{2}{5}\frac{dh}{dt}\right) + \frac{1}{3}\pi 2^2\frac{dh}{dt} = \frac{8\pi}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{4\pi}{3}\frac{dh}{dt} = \frac{12\pi}{3}\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi}.$$

25. Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto con su vértice hacia abajo. Su altura es de 10 pies y el radio de la base es de 15 pies. El agua se filtra por el fondo a una tasa constante de 1 pie cúbico por segundo. Se vierte agua en el tanque a una tasa constante de c pies cúbicos por segundo. Calcule c para que el nivel del agua aumente a razón de 4 pies por segundo en el instante en que el agua tenga 2 pies de profundidad.

Respuesta.- Se tiene,

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{h} = \frac{15}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}h.$$

Luego el volumen del cono está dando por,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

substituyendo r,

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}h\right)^2 h$$

Luego, derivando con respecto de t, tenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Se nos dice que el nivel del agua subirá a razón de 4 pies por segundo $\frac{dh}{dt} = 4$, cuando el agua es $h = 2$ pies de profundidad, por lo tanto

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}\pi 2^2 4 = 36\pi.$$

Finalmente,

$$\frac{dV}{dt} = c - 1 \quad \Rightarrow \quad 36\pi = c - 1 \quad \Rightarrow \quad c = 36\pi + 1.$$

26. El agua fluye hacia un tanque hemisférico de 10 pies de radio (la parte plana hacia arriba). En cualquier instante, sea h la profundidad del agua, medida desde el fondo, r el radio de la superficie del agua y V el volumen del agua en el tanque. Calcule dV/dh en el instante en que $h = 5$ pies. Si el agua fluye a una tasa constante de $5\sqrt{3}$ pies cúbicos por segundo, calcule dr/dt, la tasa a la que r está cambiando, en el instante t cuando $h = 5$ pies.

Respuesta.- Primero encontramos una fórmula para el volumen del agua en el tanque en función de h. Hacemos esto considerando el sólido de revolución de $\sqrt{20y - y^2}$ alrededor del eje y:

$$V = \pi \int_0^h \sqrt{20y - y^2}^2\, dy = \pi \int_0^h 20y - y^2\, dy = \pi\left(10y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = 10\pi h^2 - \frac{\pi h^3}{3}.$$

Diferenciando con respecto a h tenemos

$$\frac{dV}{dh} = 20\pi h - \pi h^2.$$

Entonces cuando $h = 5$,

$$\frac{dV}{dh} = 75\pi.$$

Luego nos dan $\frac{dV}{dt} = 5\sqrt{3}$ pies cúbicos por segundo. Sabemos también $\frac{dV}{dh} = 20\pi h - \pi h^2$. Así,

$$r^2 + (10 - h)^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{20h - h^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dh} = \frac{10 - h}{\sqrt{20h - h^2}}.$$

De este modo,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt}\frac{dr}{dh} = \frac{5\sqrt{3}}{20\pi h - \pi h^2} \cdot \frac{10 - h}{\sqrt{20h - h^2}}.$$

Por lo tanto, si $h = 5$ tenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{15\pi}\frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{1}{15\pi} \text{ pies por segundo.}$$

27. Un triángulo rectángulo ABC variable en el plano xy tiene su ángulo recto en el vértice B, un vértice A fijo en el origen y el tercer vértice C restringido para estar en la parábola $y = 1 + \frac{7}{36}x^2$. El punto B comienza en el punto $(0, 1)$ en el tiempo $t = 0$ y se desplaza hacia arriba a lo largo del eje y a una velocidad constante de 2 cm/seg. ¿Qué tan rápido aumenta el área del triángulo cuando $t = 7/2$ seg?

Respuesta.- Se nos da que el vértice B se mueve hacia arriba a lo largo del eje y a una velocidad constante de 2 centímetros por segundo, esto significa

$$\frac{dy}{dt} = 2.$$

Luego, calculamos el área del triángulo, la llamamos A_{ABC}, en términos de x e y,

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dA_{ABC}}{dt} = \frac{y}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{x}{2}\frac{dy}{dt}.$$

Donde usamos la regla del producto para diferenciar con respecto a t, recordando que ambos x e y son funciones de t también. Luego se nos da la fórmula para y con respecto a x,

$$y = 1 + \frac{1}{36}x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{14}{36}x\frac{dx}{dt} = \frac{7x}{18}\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{18}{7x}\frac{dy}{dt} = \frac{36}{7x}.$$

Entonces, cuando $t = \frac{7}{2}$ tenemos $y = 8$ lo que implica $x = 6$. Por tanto,

$$\frac{dA_{ABC}}{dt} = 4\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = \frac{24}{7} + 6 = \frac{66}{7}.$$

28. El radio de un cilindro circular recto aumenta a una tasa constante. Su altitud es una función lineal del radio y aumenta tres veces más rápido que el radio. Cuando el radio es de 1 pie, la altura es de 6 pies. Cuando el radio es de 6 pies, el volumen aumenta a razón de 1 pie cúbico por segundo. Cuando el radio es de 36 pies, el volumen aumenta a razón de n pies cúbicos por segundo, donde n es un número entero. Calcula n.

Respuesta.- Dado que la altitud (que denotamos h) es una función lineal del radio y aumenta tres veces más rápido, tenemos

$$h = 3r + c \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dr} = 3.$$

Cuando $r = 1$, se nos da $h = 6$. Por tanto, resolvemos para c y obtenemos $c = 3$. Cuando $r = 6$, tenemos

$$\frac{dV}{dt} = 1 \text{ pies cubico por segundo.}$$

Entonces, dado que $r = 6$ implica $h = 3 \cdot 6 + 3 = 21$ y

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi rh\frac{dr}{dt} = 1,$$

luego,

$$\pi(36)\left(3\frac{dr}{dt}\right) + 2\pi \cdot 6 \cdot 21\frac{dr}{dt} = 1.$$

Resolviendo para $\dfrac{dr}{dt}$ obtenemos,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{360\pi}.$$

Así, cuando $r = 36 \;\Rightarrow\; h = 111$,

$$n = \pi \cdot 36^2 \cdot \frac{1}{120\pi} + 2\pi \cdot 36 \cdot 111 \cdot \frac{1}{360\pi} = \frac{54}{5} + \frac{111}{5} = 33.$$

29. Una partícula está restringida a moverse a lo largo de una parábola cuya ecuación es $y = x^2$. (a) ¿En qué punto de la curva la abscisa y la ordenada cambian al mismo ritmo? (b) Encuentre esta velocidad si el movimiento es tal que en el tiempo t tenemos $x = \operatorname{sen} t$ e $y = sen^2 t$.

Respuesta.- Ya que $y = x^2$ tenemos

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}.$$

Así, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = \dfrac{1}{2}$. Entonces $y = x^2$ implica $y = \dfrac{1}{4}$..
Para (b). Si tenemos $x = \operatorname{sen} t$ y $\operatorname{sen}^2 t$ en el tiempo t y $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt}$, entonces

$$x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

30. La ecuación $x^3 + y^3 = 1$ define a y como una o más funciones de x. (a) Suponiendo que existe la derivada y', y sin intentar resolver para y, demuestre que y' satisface la ecuación $x^2 + y^2 y' = 0$. (b) Suponiendo que existe la segunda derivada y'', demuestre que $y'' = -2xy^{-5}$ siempre que $j \neq 0$.

Respuesta.- Para esta parte diferenciamos cada lado con respecto a x, teniendo en cuanta que y es una función de x, por lo que necesitamos usar la regla de la cadena para diferenciar y^3.

$$x^3 + y^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 3y^2 y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x^2}{y^2}$$

Luego ya que $y^2 = 2y \cdot y'$; derivamos y' para encontrar y'',

$$y'' = -\frac{y^2 2x - x^2 2yy'}{\left(y^2\right)^2} = \frac{-2xy^2 + x^2 2y\left(-\dfrac{x^2}{y^2}\right)}{y^4} = \frac{-2xy^3 - 2x^4}{y^5} = \frac{-2x\left(y^3 + x^3\right)}{y^5} = -2xy^{-5}.$$

31. Si $0 < x < 5$, la ecuación $x^{1/2} + y^{l/2} = 5$ define a y como una función de x. Sin resolver para y, demuestre que la derivada y' tiene un signo fijo. (Puede asumir la existencia de y'.)

Demostración.- Diferenciando con respecto de x se tiene,

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} < 0.$$

32. La ecuación $3x^2 + 3y^2 = 12$ define a y implícitamente como dos funciones de x si $|x| \leq 2$. Suponiendo que existe la segunda derivada y'', demuestre que satisface la ecuación $4y^3y'' = -9$.

Demostración.- Derivamos teniendo en cuenta que debemos usar la regla de la cadena para derivar y ya que es función de x,

$$3x^2 + 4y^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad 6x + 8yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{3x}{4y}$$

de donde

$$y'' = \frac{-12y + 12xy'}{16y^2} = \frac{-12y - \dfrac{9x^2}{4y}}{4y^2} = \frac{-12y^2 - 9x^2}{16y^2} = \frac{-3\left(4y^2 + 3x^2\right)}{16y^3} = -\frac{9}{4}y^{-3}.$$

Por lo tanto,

$$3y^3y'' = 9.$$

33. La ecuación $x \operatorname{sen} xy + 2x^2 = 0$ define a y implícitamente como una función de x. Suponiendo que existe la derivada y', demuestre que satisface la ecuación $y'x^2 \cos xy + xy \cos xy + \operatorname{sen} xy + 4x = 0$.

Demostración.- Derivamos la ecuación dada con respecto a x, teniendo en cuenta que y es función de x, por lo que debemos usar la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} x \operatorname{sen}(xy) + 2x^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left[x \operatorname{sen}(xy) + 2x^2\right]' = 0 \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(xy) + x\left(xy' + y\right)\cos(xy) + 4x = 0 \\ &\Rightarrow \quad y'x^2\cos(xy) + xy\cos(xy) + \operatorname{sen}(xy) + 4x = 0 \end{aligned}$$

34. Si $y = x^r$, donde r es un número racional, digamos $r = m/n$, entonces $y^n = x^m$. Suponiendo la existencia de la derivada y', obtenga la fórmula $y' = rx^{r-1}$ utilizando la diferenciación implícita y la fórmula correspondiente para exponentes enteros.

Demostración.- Sean $y = r^r$, $y^n = x^m$ y $r = \dfrac{m}{n} \;\Rightarrow\; m = nr$, entonces

$$ny^{n-1}y' = mx^{m-1} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{\left(x^r\right)^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{x^{nr-r}} = rx^{m-1-m+r} = rx^{r-1}.$$

4.13 Aplicaciones de la derivación a la determinación de los extremos de las funciones

Recordemos que se dice que una función f de valores reales tiene un máximo absoluto en un conjunto S si existe por lo menos un punto c en S tal que

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \text{ en } S.$$

El concepto de máximo relativo se define así:

Definición 4.2 **Definición de máximo relativo.** Una función f, definida en un conjunto S, tiene un máximo relativo en un punto c de S si existe un cierto intervalo abierto I que contiene c tal que

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \text{ situado en } I \cap S.$$

el concepto de mínimo relativo se define del mismo modo con la desigualdad invertida.

Es decir, un máximo relativo en e es un máximo absoluto en un cierto entorno de c, si bien no es necesariamente un máximo absoluto en todo el conjunto S. Naturalmente, cualquier máximo absoluto es, en particular, un máximo relativo.

Definición 4.3 **Definición de extremo.** Un número que es o un máximo relativo o un mínimo relativo de un función f se denomina valor extremo o un extremo de f.

Teorema 4.3 **Anulación de la derivada en un extremo interior.** Sea f definida en un intervalo abierto I y supongamos que f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en un punto c interior a I. Si la derivada $f'(c)$ existe, es $f'(x) = 0$.

Demostración.- Definamos en I un función Q como sigue:

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{si} \quad x \neq c, \quad Q(c) = f'(c).$$

Puesto que $f'(c)$ existe, $Q(x) \to Q(c)$ cuando $x \to c$, entonces Q es continua en c. Queremos probar que $Q(c) = 0$. Esto lo conseguiremos demostrando que cada una de las desigualdades $q(c) > 0$ y $Q(c) < 0$ nos lleva a una contradicción.
Supongamos $Q(c) > 0$. Según la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas, existe un intervalo que contiene a c en el que $Q(x)$ es positiva. Por tanto el numerador del cociente $Q(x)$ tiene el mismo signo que el denominador para todo $x \neq c$ en ese intervalo. Dicho de otro modo, $f(x) > f(c)$ cuando $x > c$ y $f(x) < f(c)$ cuando $x < c$. Esto contradice la hipótesis de que f tiene un extremo en c. De similar manera se muestra que no puede ser $Q(c) < 0$. Por lo tanto $Q(c) = 0$. Puesto que $Q(c) = f'(c)$, esto demuestra el teorema.

■

Es importante notar que el hecho de ser derivada nula en c no implica extremo en c. Por ejemplo sea $f(c) = x^3$. Puesto que $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$. Sin embargo, esta función es creciente en todo intervalo que contenga el origen por lo cual no existe extremo en c. Cabe mencionar que el teorema anterior supone que hay un extremo, es decir, en ausencia de puntos angulosos, la derivada necesariamente debe anularse en un extremo, si éste se presenta en el interior de un intervalo. Este criterio se expone más adelante en el teorema 4.8 y nos dice que un extremo siempre se presenta en un punto en el que la derivada cambia de signo. Pero como no es difícil de demostrar deduciremos este resultado como una consecuencia del teorema del valor medio para derivadas.

4.14 Teorema del valor medio para derivadas

El teorema del valor medio para derivadas es importante en cálculo porque muchas de las propiedades de las funciones pueden deducirse fácilmente a partir de él. Antes de establecer el teorema del valor medio, examinaremos uno de sus casos particulares a partir del cual puede deducirse el teorema general. Este caso particular lo descubrió en 1690 Michel Rolle (1652-1719), matemático francés.

Teorema 4.4 **Teorema de Rolle.** Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en cada punto del intervalo abierto (a,b). Supongamos también que

$$f(a) = f(b).$$

Entonces existe por lo menos un punto c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f'(c) = 0$.

En este teorema se afirma tan sólo que la curva debe tener una tangente horizontal en algún punto entre a y b.

Demostración.- Supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo abierto (a,b) y llegamos a una contradicción como se ve a continuación. Según el teorema de los valores extremos para funciones continuas, f debe alcanzar su máximo absoluto M y su mínimo absoluto m en algún punto del intervalo cerrado $[a,b]$. El teorema 4.3 nos dice que ningún extremo puede ser alcanzado en puntos interiores (de otra manera sería nula la derivada ahí). Luego, ambos valores extremos son alcanzados en los extremos a y b. Pero como $f(a) = f(b)$, esto significa que $m = M$ y por tanto f es constante en $[a,b]$. Esto contradice el hecho de que $f'(x) = 0$ para todo x en (a,b). Resulta pues que $f'(x) = 0$ por lo menos en un c que satisfaga $a < c < b$, lo que demuestra el teorema.

■

Teorema 4.5 **Teorema del valor medio para derivadas.** Si f es una función continua en todo un intervalo cerrado $[a,b]$ que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto (a,b), existe por lo menos un punto c interior a (a,b), para el que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demostración.- Para aplicar el teorema de Rolle necesitamos una función que tenga valores iguales en los extremos a y b. A fin de construirla, modificamos f en la forma siguiente:

$$h(x) = f(x)(b-a) - x[f(b) - f(a)].$$

Entonces $h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$. También, h es continua en $[a,b]$ y tiene derivada en el intervalo abierto (a,b). Aplicando el teorema de Rolle a h, encontramos que $h'(c) = 0$ para un cierto c de (a,b). Pero

$$h'(x) = f'(x)(b-a) - [f(b) - f(a)],$$

cuando $x = c$, se obtiene la igualdad $h(x) = f(x)(b-a) - x[f(b) - f(a)]$.

■

Con frecuencia es útil la siguiente extensión del teorema del valor medio.

Teorema 4.6 **Fórmula del valor medio de Cauchy.** Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ y que admitan derivadas en todo el intervalo abierto (a,b). Entonces, para un cierto c de (a,b), tenemos

$$f'(c) = [g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Demostración.- La demostración es parecida a la del teorema 4.5 (Tom Apostol). Pongamos

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

Entonces $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Aplicando el teorema de Rolle a h, encontramos que $h'(c)$ a partir de la fórmula que define h, obteniendo la fórmula del valor medio de Cauchy. El teorema 4.5 (Tom Apostol) es un caso particular de este teorema obtenido tomando $g(x) = x$.

■

4.15 Ejercicios

1. Probar que en la parabola $y = Ax^2 + Bx + C$, la cuerda que une los puntos para los cuales $x = a$ y $x = b$ es paralela a la tangente en el punto para el cual $x = \dfrac{a+b}{2}$.

Demostración.- Observamos que la propiedad de que dos rectas sean paralelas es la misma que la propiedad de que las dos rectas tengan la misma pendiente. Para cualquier polinomio de grado dos podemos escribir,

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2Ax + B.$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente en el punto $x = \dfrac{a+b}{2}$ es,

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = A(b+a) + B.$$

Así, la pendiente de la cuerda que uno a $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$ viene dada por el cociente de diferencias:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{Ab^2 + Bb + C - Aa^2 - Ba - C}{b-a} = \frac{A\left(b^2-a^2\right) + B(b-a)}{b-a} = A(b-a) + B.$$

2. Aplicando el teorema de Rolle, demostrar que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, cualquiera que sea el valor de b.

Demostración.- Supongamos que existe en $x^3 - 3x + b = 0$ dos puntos c_1 y c_2 en el intervalo $[-1, 1]$ por el cual $f(c_1) = f(c_2) = 0$ tal que,

$$-1 \leq c_1 < c_2 \leq 1.$$

Dado que $f(x) = x^3 - 3x + b$ es continua en $[-1, 1]$, derivable en $(-1, 1)$ donde aplicamos el teorema de Rolle en el intervalo $[c_1, c_2]$ para concluir que existe $c \in (c_1, c_2)$ tal que

$$f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3c^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 1.$$

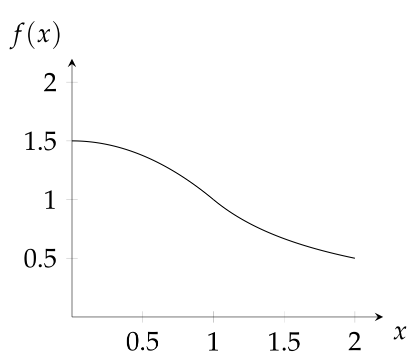
Pero esto contradice que $c \in (-1, 1)$. Por lo tanto, puede haber a lo sumo un punto $x \in [-1, 1]$ tal que $f(x) = 0$.

3. Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \frac{3-x^2}{2} \text{ si } x \leq 1, \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 1.$$

(a) Dibujar la gráfica de $f(x)$ para x en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.

Respuesta.-



(b) Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.

Demostración.- Dado que $\frac{3-x^2}{2}$ y $\frac{1}{x}$ son continuos en $[0,1]$ y $[1,2]$ respectivamente y diferenciables en $(0,1)$ y $(1,2)$. Donde el único punto donde la función podría ser discontinua y no diferenciable es en $x=1$. Analicemos este punto. Sea $x=1$ por lo que,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{3-x^2}{2}=1, \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1}=1.$$

Ya que los límites por la izquierda y la derecha son iguales, entonces f es continua en $x=1$. Luego verifiquemos que la derivada existe en $x=1$. Sea $f'(1)=\left(\frac{3-x^2}{2}\right)'=-x=-1=-\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{x}\right)'$, entonces la derivada existe.
Sabiendo esto, podemos aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$, como sigue:

$$f(2)-f(0)=f'(c)(2-0) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}-\frac{3-0^2}{2}=2\cdot f'(c) \quad\Rightarrow\quad f'(c)=-\frac{1}{2}.$$

Por último hallemos c para $x\le 1$ y para $x\ge 1$, de la siguiente manera.

$$f'(c)=-c \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}=-c \quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{2}.$$

y

$$f'(c)=-\frac{1}{c^2} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}=-\frac{1}{c^2} \quad\Rightarrow\quad c=\pm\sqrt{2}.$$

Por lo tanto los valores medios serán,

$$c=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad c=\sqrt{2}.$$

4. Sea $f(x)=1-x^{2/3}$. Probar que $f(1)=f(-1)=0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1,1]$. Explicar por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

Demostración.- Calculemos directamente para $f(1)$ y $f(-1)$.

$$f(1)=1-1^{2/3}=0=1-(-1)^{2/3}=f(-1).$$

Luego calculamos su derivada,

$$f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

Para mostrar que $f'(x)\neq 0$ en $[-1,1]$ consideraremos tres casos:

- Si $x<0$ entonces $x^{-1/3}$ implica $f'(x)>0$, ya que $-\frac{2}{3}$ veces un negativo es positivo.
- Si $x>0$ entonces $x^{-1/3}>0$ implica $f'(x)<0$, ya que $-\frac{2}{3}$ veces un positivo es negativo.
- Si $x=0$, entonces $f'(x)$ no está definida, ya que $x^{-1/3}=\frac{1}{x^{1/3}}$.

Por lo tanto, $f'(x)\neq 0$ para cualquier x en $[-1,1]$.
Esto no es una violación del teorema de Rolle, ya que el teorema requiere que $f(x)$ sea diferenciable para todo x en el intervalo abierto $(-1,1)$. Como $f'(x)$ no está definido en $x=0$, tenemos que $f(x)$ no es derivable en todo el intervalo.

5. Probar que $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ se verifica exactamente para dos valores de x.

Demostración.- Queremos encontrar los ceros de esta función ya que serán los puntos que satisfacen a la ecuación. Sea $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$, entonces

$$f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x - x\cos x + \operatorname{sen} x = x(2-\cos x).$$

Ya que $2 - \cos x \neq 0$ para cualquier x con $\cos x \leq 1$, tenemos

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Por lo tanto f es continua y derivable en todas partes. Por el teorema de Rolle sabemos que f tiene como máximo dos ceros. (Si hubiera tres o más, por ejemplo x_1, x_2 y x_3 entonces debe haber números distintos c_1 y c_2 con $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3$ tal que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$, pero sabemos que solo hay un c tal que $f'(c) = 0$). Además, f tiene al menos dos ceros desde $f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, $f(0) = -1 < 0$ y $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$. Así por el teorema de Bolzano hay ceros entre cada uno de estos puntos. Tenemos que el número de ceros de f es como máximo dos y como mínimo dos. Por lo tanto, el número de ceros debe ser exactamente dos.

6. Probar que la fórmula del valor medio se puede expresar en la forma:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \quad \text{donde} \quad 0 < \theta < 1.$$

Determinar θ en función de x y h cuando (a) $f(x) = x^2$, (b) $f(x) = x^3$. Dejar x fijo, $x \neq 0$ y determinar en cada caso el límite de θ cuando $h \to 0$.

Demostración.- Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces por el teorema del valor medio tenemos

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \quad \text{para algún } c \in [a,b].$$

Sea $a = x$ y $b = x + h$ para algún $h > 0$ con $b > a$, entonces

$$c \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad c = x + \theta h \quad \text{para algún } \theta \in (0,1)$$

Esto se deduce de nuestras definiciones, ya que h es la distancia desde $b - a$. Entonces, dado que c está en algún lugar del intervalo $[a,b]$, su valor debe ser a más una parte de la distancia hasta b. Esta parte es θ, con $0 < \theta < 1$. Luego sustituyendo $x = a$, $x + h = b$ y $c = x + \theta h$, se tiene

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \;\Rightarrow\; f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)(x+h-x) \;\Rightarrow\; f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

donde $0 < \theta < 1$ y $h > 0$.

(a) Si $f(x) = x^2$, tenemos $f'(x) = 2x$. Entonces,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \;\Rightarrow\; (x+h)^2 = x^2 + 2h(x+\theta h) \;\Rightarrow\; h^2 = 2\theta h^2 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}.$$

(b) Si $f(x) = x^3$, tenemos $f'(x) = 3x^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \quad &\Rightarrow \quad x^3 + 3x^3h + 3xh^2 + h^3 = x^3 + 3hx^2 + 6\theta xh^2 + 3\theta^2 h^3 \\ &\Rightarrow \quad 0 = \left(3h^3\right)\theta^2 + \left(6xh^2\right)\theta - \left(3xh^2 + h^3\right) \\ &\Rightarrow \quad 0 = h\theta^2 + 2x\theta + \left(-x - \frac{h^2}{3}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{-2x+\sqrt{4x^2+4hx+\frac{4h^2}{3}}}{2h}\\
\theta &= \frac{\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}-x}{h}\\
\theta &= \frac{\left(\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}-x\right)\left(\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}+x\right)}{h\left(\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}+x\right)}\\
\theta &= \frac{x^2+xh+\frac{h^2}{3}-x^2}{h\left(\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}+x\right)}\\
\theta &= \frac{x+\frac{h}{3}}{x+\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}}\\
\theta &= \lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

7. Sea f un polinomio. Se dice que un número real α es un cero de f de multiplicidad m si $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$, donde $g(\alpha) \neq 0$.

(a) Si f tiene r ceros en el intervalo $[a,b]$, probar que f' tiene por lo menos $r-1$ ceros, y que en general la derivada k-ésima $f^{(k)}$ tiene por lo menos $r-k$ ceros en $[a,b]$. (Los ceros se cuentan tantas veces como indica su multiplicidad.)

Demostración.- Sea $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ los k distintos ceros de f en $[a,b]$ y sea $m_1,\ldots,m_k$ sus multiplicidades. Por lo tanto el número total de ceros está dado por:

$$r = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Si α_i es un cero de f multiplicidad m_i entonces,

$$f'(x) = r(x-\alpha_i)^{m_i-1}g(x) - (x-\alpha_i)^{m_i}g'(x) = m_i(x-\alpha_i)^{m_i-1}\left[m_i g(x) + (x-\alpha)g'(x)\right].$$

Luego pongamos $g_1(x) = m_i g(x) + (x-\alpha_i)g'(x)$, de donde

$$f'(x) = m_i(x-\alpha_i)^{m_i-1}g_1(x).$$

Ya que $g_1(\alpha_i) = m_i g(\alpha_i) \neq 0$. Por lo tanto, α_i es un cero de multiplicidad $m_i - 1$ para $f'(x)$.

Demostremos la generalización. La función f es una función continua en $[\alpha_i, \alpha_j]$ tal que $\alpha_i < \alpha_j$ que tiene derivada en (α_i, α_j). Además,

$$f(\alpha_i) = f(\alpha_j).$$

Entonces por el teorema de Rolle, existe al menos un punto c_1 en (α_i, α_j) tal que $f'(c_1) = 0$. Por lo tanto, si f tiene k distintos ceros, entonces por el teorema del valor medio tenemos al menos $k-1$ números c tal que $f'(c) = 0$. Así f' tiene al menos:

$$\left[\sum_{i=1}^{k}(m_i - 1)\right] + k - 1 = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right) - 1 = r - 1$$

Después derivamos la función k veces, donde tenemos $k(k-1)$ de ceros. Entonces los números ceros para f' son al menos,

$$k(k-1) + \sum_{i=1}^{k}(m_i - k) = k^2 - k + \sum_{i=1}^{k} m_i - k\sum_{i=1}^{k} 1 = k^2 - k + \sum_{i=1}^{k} m_i - k^2 = \sum_{i=1}^{k} -k = r - k.$$

Por lo que la k-ésima derivada $f^{(k)}(x)$ tiene al menos $r-k$ ceros en $[a, b]$.

(b) Si la derivada k-ésima $f^{(k)}$ tiene exactamente r ceros en $[a, b]$ ¿qué se puede decir acerca del número de ceros de f en $[a, b]$?.

Respuesta.- Si la k-ésima $f^{(k)}$ tiene exactamente r ceros en $[a, b]$, entonces podemos concluir que f tiene como máximo $r + k$ ceros en $[a, b]$.

8. Utilizar el teorema del valor medio para deducir las desigualdades siguientes:

a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.

Respuesta.- Definamos $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = t$. Entonces f y g son continuos y diferenciables donde sea. Aplicando el teorema de valor medio se tiene para algún $c \in (x - y)$,

$$\begin{array}{rcl} f'(c)\,[g(x) - g(y)] & = & g'(c)\,[f(x) - f(y)] \\ (\cos c)(x - y) & = & \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y \\ |\cos c||x - y| & = & |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \end{array}$$

Ya que $|\cos c| \leq 1$ para todo c, entonces

$$|x - y| \geq |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|.$$

b) $ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y)$ si $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Respuesta.- Sea $f(t) = t^n$ y $g(t) = t$. Entonces $f'(t) = nt^{n-1}$ y $g'(t) = 1$. Así por el teorema de valor medio tenemos que existe un $c \in (x, y)$ tal que,

$$f'(c) = [g(x) - g(y)] = g'(c)\,[f(x) - f(y)]$$

Ya que x^{n-1} es una función creciente en los reales positivos, y $0 < y \leq c \leq x$, se sigue que

$$y^{n-1} \leq c^{n-1} \leq x^{n-1}.$$

Por lo tanto sustituyendo $nc^{n-1}(x - y) = x^n - y^n$ obtenemos

$$ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y).$$

9. Una función f, continua en $[a,b]$, tiene derivada segunda f'' en todo punto del intervalo abierto (a,b). El segmento de recta que une $(a, f(a)$ y $(b, f(b))$ corta la gráfica de f en un tercer punto $(c, f(c))$, siendo $a < c < b$, Demostrar que $f''(t) = 0$ por lo menos en un punto t de (a,b).

Demostración.- Sea $g(x)$ la ecuación de la recta que une $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$. Luego definimos una función

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Dado que f y g se intersecan en los valores a, b y c se tiene

$$f(a) = g(a), \qquad f(b) = g(b), \qquad f(c) = g(c).$$

Luego por la definición que construimos de h tenemos que

$$h(a) = h(b) = h(c) = 0.$$

Además, dado que f' y g' son continuas y derivables en (a,b). Aplicando el teorema de Rolle, en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ se tiene dos puntos c_1 y c_2 tales que

$$h'(c_1) = c'(c_2) = 0, \quad \text{con } a < c_1 < c < c_2 < b.$$

Así, aplicando una vez más el teorema de Rolle a la función h' en $[c_1, c_2]$ sabremos que existe $t \in (c_1, c_2)$ tal que $h''(t) = 0$. Por último, ya que $t \in (a,b)$ entonces

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = f'(x) - g'(x) \quad \Rightarrow \quad h''(x) = f''(x).$$

Por lo tanto concluimos que $f''(x) = 0$ para algunos $t \in (a,b)$.

10. Este ejercicio es un esbozo de demostración del teorema del valor intermedio para derivadas. Supongamos que f posee derivada en todo punto de un intervalo abierto I. Elijamos $a < b$ en I. La derivada f' toma cualquier valor comprendido entre $f'(a)$ y $f'(b)$ en algún punto de (a,b).

a) Definir una nueva función g en $[a,b]$ del modo siguiente:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{si } x \neq a, \quad g(a) = f'(a).$$

Demostrar que g toma cualquier valor comprendido entre $f'(a)$ y $g(b)$ en el intervalo abierto (a,b). Utilizar el teorema del valor medio para derivadas, para demostrar que f' toma cualquier valor comprendido entre $f'(a)$ y $g(b)$ en el intervalo abierto (a,b).

Demostración.- Por el hecho de que f es diferenciable en todo intervalo I. Sabemos que f es continuo en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Así, si $x \in [a,b]$ y $x \neq a$ entonces g es continuo en x. Ahora si $x = a$, entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = g(a),$$

Por lo tanto g es continua en $x = a$ también, el cual implica que g es continua en $[a,b]$ tal que $g(a) \neq g(b)$. Luego por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, sabemos que g toma todos los valores entre $g(a)$ y $g(b)$ en algún lugar del intervalo (a,b). Dado que $g(a) = f'(a)$, esta media toma todos los valores entre $f'(a)$ y $g(b)$ en algún intervalo (a,b).
Por el teorema del valor medio, sabemos que existe algún $c \in (a,b)$tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;\Rightarrow\; f'(c) = g(x), \text{ para algunos } c \in (a, x).$$

Como la función g toma todos los valores entre $f'(a)$ y $g(b)$ en algún lugar del intervalo (a,b), entonces la función f' toma todos los valores entre $f'(a)$ y $g(b)$ en algún lugar del intervalo (a,b).

b) Definir una nueva función h en $[a,b]$ del modo siguiente:
$$g(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad \text{si } x \neq a, \quad g(b) = f'(b).$$
Razonando en forma parecida a la que se ha seguido en la parte a), demostrar que f' toma cualquier valor comprendido entre $f'(b)$ y $h(a)$ en (a,b). Puesto que $h(a) = g(b)$, queda demostrado el teorema del valor intermedio para derivadas.

Demostración.- Por el hecho de que f es diferenciable en todo intervalo I. Sabemos que f es continuo en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Así, si $x \in [a,b]$ y $x \neq b$ entonces g es continuo en x. Ahora si $x = b$, entonces
$$\lim_{x \to b} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b) = h(b),$$
Por lo tanto h es continua en $x = b$ también, el cual implica que g es continua en $[a,b]$ tal que $h(a) \neq h(b)$. Luego por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, sabemos que h toma todos los valores entre $h(a)$ y $h(b)$ en algún lugar del intervalo (a,b). Dado que $h(a) = f'(b)$, esta media toma todos los valores entre $h(a)$ y $f'(b)$ en algún intervalo (a,b).
Por el teorema del valor medio, sabemos que existe algún $c \in (a,b)$tal que
$$f(x) - f(b) = f'(c)(b-a) \;\Rightarrow\; f'(c) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \;\Rightarrow\; f'(c) = h(x), \text{ para algunos } c \in (a,x).$$
Como la función h toma todos los valores entre $h(a)$ y $f'(b)$ en algún lugar del intervalo (a,b), entonces la función f' toma todos los valores entre $h(a)$ y $f'(b)$ en algún lugar del intervalo (a,b). Dado que $h(a) = g(b)$, esto prueba el teorema del valor intermedio para las derivadas.

4.16 Aplicación del teorema del valor medio a propiedades geométricas de las funciones

Teorema 4.7 Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ y que admite derivada en cada punto de un intervalo abierto (a,b). Tenemos entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a,b), f es estrictamente creciente en $[a,b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a,b), f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

c) Si $f'(x) = 0$ para algún x de (a,b), entonces f es constante en $[a,b]$.

Demostración.- Para probar a) tenemos que demostrar que $f(x) < f(y)$ siempre que $a \leq x < y \leq b$. Por consiguiente, supongamos $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio al intervalo cerrado $[x,y]$. Obtenemos
$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x), \quad \text{donde} \quad x < c < y.$$
Puesto que $f'(c)$ e $y - x$ son positivos, lo mismo le ocurre a $f(y) - f(x)$, y esto significa $f(x) < f(y)$, como se afirmó. La demostración de b) es parecida. Para demostrar c), utilizamos la igualdad dada haciendo $x = a$. Ya que $f'(c) = 0$, tenemos $f(y) = f(a)$ para todo y en $[a,b]$, con lo que f es constante en $[a,b]$.

Este teorema podemos emplearlo para demostrar que se presenta un extremo siempre que la derivada cambia de signo.

■

Teorema 4.8 Supongamos f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y que existe la derivada f' en todo punto del intervalo abierto (a,b), excepto posiblemente en un punto c.

a) Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y negativa para todo $x > c$, f tiene un máximo relativo en c.

b) Si, por otra parte, $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$, y positiva para todo $x > c$, f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración.- En el caso a), el teorema 4.7 nos dice que f es estrictamente creciente en $[a,c]$ y estrictamente decreciente en $[c,b]$. Luego $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ en (a,b), con lo que f tiene un máximo relativo en c. Esto demuestra a) y la demostración de b) es completamente análoga. ■

4.17 Criterio de la derivada segunda para los extremos

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, el teorema de los valores extremos nos dice que tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en algún punto de $[a,b]$. Si f tiene derivada en cada punto interior, entonces los únicos puntos en los que pueden presentarse los extremos son:

1) En los extremos del intervalo a y b;

2) en aquellos puntos interiores x en los que $f'(x) = O$.

Los puntos del tipo 2) se llaman con frecuencia puntos críticos de f. Para decidir si en un punto crítico c existe un máximo o un mínimo (o ni uno ni otro), necesitamos más información acerca de la función f. Ordinariamente el comportamiento de f en un punto crítico puede determinarse a partir del signo algebraico de la derivada en las proximidades de c. El teorema que sigue hace ver que un estudio del signo de la derivada segunda en las cercanías de e puede también sernos de utilidad.

Teorema 4.9 **Criterio de la derivada segunda para extremos en un punto crítico.** Sea c un punto crítico de f en un intervalo abierto (a,b); esto es, supongamos $a < c < b$ y que $f'(c) = 0$. Supongamos también que exista la derivada segunda f'' en (a,b). Tenemos entonces:

a) Si f'' es negativa en (a,b), f tiene un máximo relativo en c.

b) Si f'' es positiva en (a,b), f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración.- Consideremos el caso a), $f'' < 0$ en (a,b). Según el teorema 4.7 Tom Apostol (aplicado a f'), la función f' es estrictamente decreciente en (a,b). Pero $f'(c) = 0$, con lo que f' cambia su signo de positivo a negativo en c. Luego, según el teorema 4.8 Tom Apostol, f tiene un máximo relativo en c. La demostración en el caso b) es completamente análoga.

■

El signo de la derivada segunda también está relacionado con la concavidad o la convexidad de f. El siguiente teorema demuestra que la función es convexa en los intervalos en los que f'' es positiva, f es cóncava ya que f'' es negativa. Basta discutir tan sólo el caso de la convexidad, ya que si f es convexa, $-f$ es cóncava.

Teorema 4.10 **Criterio de la derivada para la convexidad.** Supongamos f continua en $[a,b]$ y que tenga derivada en el intervalo abierto (a,b). Si f' es creciente en (a,b) entonces f es convexa en $[a,b]$. En particular, f es convexa si f'' existe y es no negativa en (a,b).

Demostración.- Consideremos $x < y$ en $[a,b]$ y pongamos $z = \alpha y + (1-\alpha)x$, donde $0 < \alpha < 1$. Queremos demostrar que $f(z) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$. Puesto que $f(z) = \alpha f(z) + (1-\alpha) f(z)$, esto es lo mismo que demostrar que

$$(1-\alpha)[f(z) - f(x)] \leq \alpha[f(y) - f(z)].$$

Según el teorema del valor medio (aplicando dos veces), existen puntos c y d que satisfacen $x < c < z$ y $z < d < y$ tales que

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z-x), \quad \text{y} \quad f(y) - f(z) = f'(d)(y-z).$$

Puesto que f' es creciente, tenemos $f'(c) \leq f'(d)$. Así mismo, tenemos $(1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$, de modo que podemos escribir

$$(1-\alpha)[f(z)-f(x)] = (1-\alpha)f'(c)(z-x) \leq \alpha f'(d)(y-z) = \alpha[f(y)-f(z)],$$

lo que demuestra la desigualdad exigida por la convexidad.

■

4.19 Ejercicios

En los siguientes Ejercicios, a) hallar todos los puntos x tales que $f'(x) = 0$; b) examinar el signo de f' y determinar aquellos intervalos en los que f es monótona; c) examinar el signo de f'' y determinar aquellos intervalos en los que f' es monótona; d) construir un boceto de la gráfica de f. En cada caso, la función está definida para todos los x para los cuales tiene sentido $f(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Respuesta.-

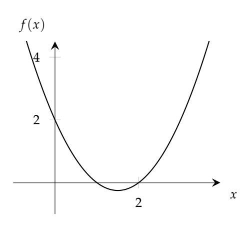
(a) Derivando $f(x)$, tenemos $f'(x) = 2x - 3$. Luego igualando a 0,

$$2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que f' es creciente si $x > \dfrac{3}{2}$ y decreciente si $x < \dfrac{3}{2}$.

(c) Sea $f''(x) = 2$. Ya que $2 > 0$, entonces por el mismo criterio del teorema 4.7 (tom Apostol, capítulo 4) f' es creciente para todo x.

(d)



2. $f(x) = x^3 - 4x$.

Respuesta.-

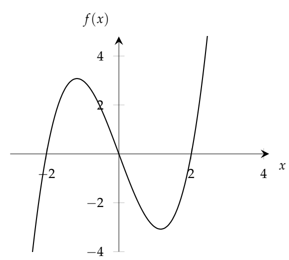
(a) Derivando $f(x)$, tenemos $f'(x) = 3x^2 - 4$. Luego igualando a 0,

$$3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que f' es creciente si $|x| > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y decreciente si $|x| < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(c) Sea $f''(x) = 6x$. Por lo tanto, f' es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$.

(d)



3. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos

$$f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = 3(x^2-1)$$

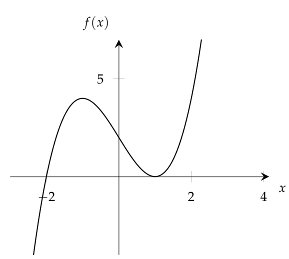
Luego igualando a 0,

$$3(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que f' es creciente si $|x| > 1$ y decreciente si $|x| < -1$.

(c) Sea $f''(x) = 6x$. Por lo tanto, f' es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$.

(d)



4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

Respuesta.-

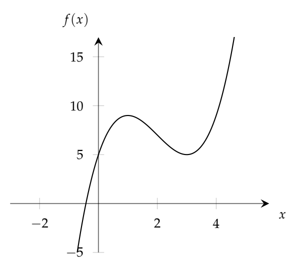
(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$
Luego igualando a 0,
$$3(x^2 - 4x + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:

$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x < 1 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & 1 < x < 3 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > 3 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = 2x - 4$. Entonces,
$$2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2 \qquad \text{y} \qquad 2x - 4 < 0 \Rightarrow x < 2.$$
Por lo tanto por el mismo criterio del teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), se tiene que f' es creciente si $x > 2$ y decreciente si $x < 2$.

(d)



5. $f(x) = 2 + (x - 1)^4$.

Respuesta.-

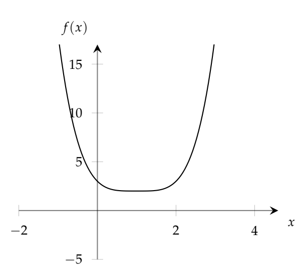
(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = 4(x - 1)^3.$$
Luego igualando a 0,
$$(x - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:

$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x < 1 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > 1 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = 12(x - 1)^2$. Ya que $(x - 1)^2 > 0$. Por lo tanto por el mismo criterio del teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), se tiene que f' es creciente para todo x.

(d)



6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

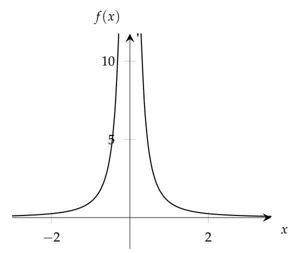
Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = -\frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$
Luego igualando a 0,
$$-\frac{2}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \text{ es nunca cero.}$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:
$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x < 0 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > 0 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$. Por lo tanto f' es decreciente para todo $x \neq 0$ y $x = 0$ no está definido.

(d)



7. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$.

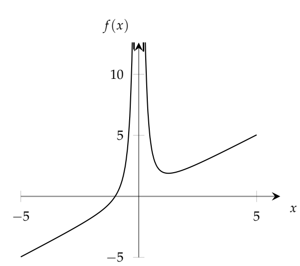
Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^3}.$$
Luego igualando a 0,
$$1 + \frac{2}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:
$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x < 0 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & 1 < x < \sqrt[3]{2} & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > \sqrt[3]{2} & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$. Entonces, f' es creciente para todo $x \neq 0$ y $x = 0$ no está definido.

(d)



8. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$.

Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos

$$f'(x) = -\frac{2x-4}{(x-1)^2(x-3)^2}.$$

Luego igualando a 0,

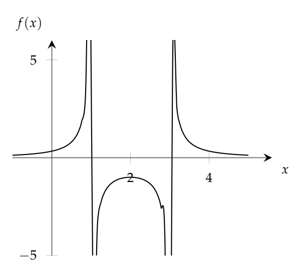
$$-\frac{2x-4}{(x-1)^2(x-3)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), y teniendo en cuenta que la función no está definida en $x = 1$ y $x = 3$, podemos señalar que:

$$\begin{array}{lcccccl} \text{Si} & x < 1 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & 1 < x < 2 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & 2 < x < 3 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > 3 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = \dfrac{1}{(x-3)^3} - \dfrac{1}{(x-1)^3}$. Entonces, f' es creciente para todo $x \neq 1$ y $x > 3$ y f' es decreciente para $1 < x < 3$.

(d)



9. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Luego igualando a 0,

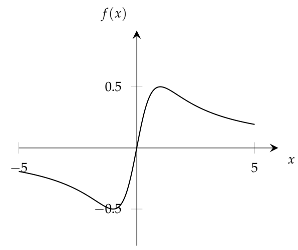
$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:

$$\begin{array}{lcccccl} \text{Si} & |x| < 1 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & |x| > 1 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Entonces, f' es creciente para todo $-\sqrt{3} < x < 0$ o $x > \sqrt{3}$ y f' es decreciente para $x < -\sqrt{3}$ o $0 < x < \sqrt{3}$.

(d)



10. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$.

Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos

$$f'(x) = -\frac{10x}{(x^2-9)^2}$$

Luego igualando a 0,

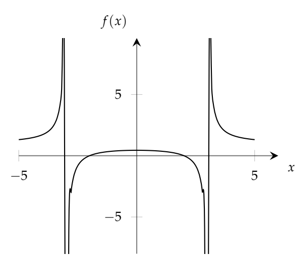
$$-\frac{10x}{(x^2-9)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:

$$\begin{array}{lcccccl} \text{Si} & x < -3 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & -3 < x < 0 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & 0 < x < 3 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > 3 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = \dfrac{30(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$. Entonces, f' es creciente para $x < -3$ o $x > 3$ y f' es decreciente para $-3 < x < 3$.

(d)



11. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos

$$f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen}(2x).$$

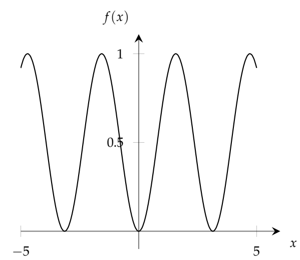
Luego igualando a 0,

$$\operatorname{sen}(2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{n\pi}{2} \qquad \text{para } n \text{ entero.}$$

(b) f es creciente si $n\pi < x < \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ y decreciente si $\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi < x < n\pi$

(c) Sea $f''(x) = -2\cos(2x)$. Entonces, f' es creciente si $\left(n - \dfrac{1}{4}\right) < x < \left(n + \dfrac{1}{4}\right)\pi$ y f' es decreciente si $\left(n + \dfrac{1}{4}\right)\pi < x < \left(n + \dfrac{3}{4}\right)\pi$.

(d)



12. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$.

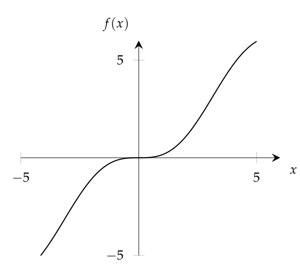
Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = 1 - \cos x.$$
Luego igualando a 0,
$$1 - \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2n\pi.$$

(b) f es creciente para todo x ya que $1 - \cos x \geq 0$ para todo x.

(c) Sea $f''(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces, f' es creciente si $2n\pi < x < (2+1)\pi$ y f' es decreciente si $(2n-1)\pi < x < 2n\pi$.

(d)



13. $f(x) = x + \cos x$.

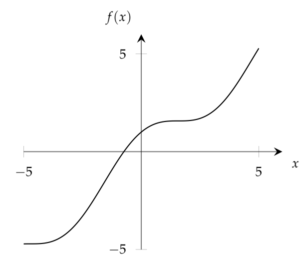
Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = 1 - \operatorname{sen} x$$
Luego igualando a 0,
$$1 - \operatorname{sen} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

(b) f es creciente para todo x, ya que $1 - \operatorname{sen} x \geq 0$ para todo x.

(c) Sea $f''(x) = -\cos x$. Entonces, f' es creciente si $\left(2n - \dfrac{1}{2}\right) < x < \left(2n + \dfrac{3}{2}\right)\pi$ y f' es decreciente si $\left(2 - \dfrac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$.

(d)



14. $f(x) = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{12}\cos 2x$.

Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\,\text{sen}(2x).$$

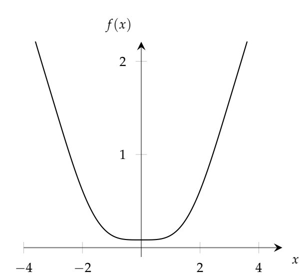
Luego igualando a 0,

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\,\text{sen}(2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

(b) f es creciente si $x > 0$ y decreciente si $x < 0$.

(c) Sea $f''(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$. Entonces, f' es creciente para todo x.

(d)



4.20 Ejemplos resueltos de problemas de extremos

Ejemplo 4.8 **Principio del producto máximo con suma constante.** Dado un número positivo S. Demostrar que entre todos los pares de números positivos x e y tales que $x + y = S$, el producto xy es el mayor cuando $x = y = \dfrac{1}{2}S$.

Demostración.- Si $x + y = S$, $y = S - x$ y el producto xy es igual a $x(S - x) = xS - x^2$. Pongamos

$f(x) = xS - x^2$. Este polinomio cuadrático tiene como deriva primera $f'(x) = S - 2x$ que es positiva para $x < \frac{1}{2}S$ y negativa para $x > \dfrac{1}{2}S$. Por tanto el máximo de xy se presenta cuando $x = \dfrac{1}{2}S$, $y = S - x = \dfrac{1}{2}S$. Esto también se puede demostrar sin utilizar el Cálculo. Pongamos simplemente $f(x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}S\right)^2$ y observamos que $f(x)$ es máximo cuando $x = \dfrac{1}{2}S$.

■

Ejemplo 4.9 **Principio de suma mínima, con producto constante.** Dado un número positivo P. Demostrar que entre todos los pares de números positivos x e y tales que $xy = P$, el que hace la suma $x + y$ mínima es $x = y = \sqrt{P}$.

Demostración.- Tenemos que determinar el mínimo de la función $f(x) = x + \dfrac{P}{x}$ para $x > 0$. La primera derivada es $f'(x) = 1 - \dfrac{P}{x^2}$. Esta es negativa para $x^2 < P$ y positiva para $x^2 > P$, de manera que $f(x)$ tiene su mínimo en $x = \sqrt{P}$. Luego, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = \sqrt{P}$.

■

Ejemplo 4.10 Entre los rectángulos de perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.

Demostración.- Utilizando el resultado del ejemplo 4.1 Tom Apostol. Sea x e y los lados de un rectángulo cualquiera. Si el perímetro está fijado, entonces $x + y$ es constante, con lo que el área xy tiene mayor valor cuando $x = y$. Luego, el rectángulo máximo es el cuadrado.

■

Ejemplo 4.11 La media geométrica de dos números positivos no excede a su media aritmética. Esto es, $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$.

Demostración.- Dados $a > 0$, $b > 0$, sea $P = ab$. Entre todos los positivos x e y siendo $xy = P$, la suma $x + y$ es la menor cuando $x = y = \sqrt{P}$. Es decir, si $xy = P$ entonces $x + y \geq \sqrt{P} + \sqrt{P} = 2\sqrt{P}$. En particular, $a + b \geq 2\sqrt{P} = 2\sqrt{ab}$, con lo que $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$. La igualdad se presenta si y sólo si $a = b$.

■

Ejemplo 4.12 Un bloque de peso W es movido a lo largo de un plano por una fuerza que forma un ángulo θ con la recta de la dirección del movimiento, siendo $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$,, como se ve en la figura 4.15 Tom Apostol. Supongamos que la resistencia por fricción es proporcional a la fuerza normal con la que el bloque presiona perpendicularmente contra el plano. Hallar el ángulo θ para el que la fuerza de propulsión necesaria para vencer la fricción sea lo más pequeña posible.

Demostración.- ■

4.21 Ejercicios

1. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

Demostración.- Sea x e y denotado por los lados del rectángulo. Si el área es fija, entonces xy es una constante, tal que $xy = A$. El perímetro de un rectángulo viene dado por $P(x,y) = 2x + 2y$, de donde

$$P(x) = 2x + 2\frac{A}{x}.$$

Para encontrar el valor mínimo, tomamos la derivada de $P(x)$,

$$P'(x) = 2 - \frac{2A}{x^2}.$$

Luego igualamos a cero y resolvemos para x,

$$2 - \frac{2A}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{A}.$$

Ya que, $P'(x) < 0$, cuando $x < \sqrt{A}$ y $P'(x) > 0$, cuando $x > \sqrt{A}$ por el teorema 4.8 Apostol, se tiene que f tiene un mínimo relativo en $\sqrt{A}$.. Como $x = \sqrt{A}$ implica $y = \sqrt{A}$, tenemos que el perímetro es mínimo cuando $x = y$. Es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado.

2. Un granjero tiene L pies de alambre para cercar un terreno de pasto rectangular adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones darán el área máxima al terreno cercado?.

Respuesta.- Sea y el ancho de la pradera (es decir, la longitud de los lados perpendiculares a la pared) y sea x la longitud de la pradera (es decir, la longitud del lado del rectángulo que es paralelo a la pared). Entonces, tenemos lo $2y + x = L$ que implica $x = L - 2$. Entonces queremos maximizar

$$A(y) = (L - 2y)y = Ly - 2y^2.$$

Derivando se tiene,

$$A'(y) = L - 4y.$$

Igualando a cero,

$$L - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{L}{4}y.$$

Así, $A'(y) > 0$ cuando $y < \dfrac{L}{4}$ y $A'(y) < 0$ cuando $y > \dfrac{L}{4}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $A(y)$ toma el valor máximo cuando $y = \dfrac{L}{4}$. Luego,

$$x = L - 2y = L2\frac{L}{4} = \frac{L}{2}.$$

De donde las dimensiones serán $\dfrac{L}{2}$ por $\dfrac{L}{4}$.

3. Un granjero quiere cercar un terreno de pasto rectangular de área A adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones exigen la mínima cantidad de alambre de cerca?.

Respuesta.- Sea x la longitud del lado paralelo al muro de piedra e y la longitud de los lados perpendiculares al muro de piedra. Entonces, $A = xy$ fija, por lo que $y = \frac{A}{x}$. La función que queremos minimizar es $P = x + 2y = x + \frac{2A}{x}$. Luego, tomando la derivada que tenemos,

$$P'(x) = 1 - \frac{2A}{x^2}.$$

Igualando a cero,

$$1 - \frac{2A}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2A}.$$

Así, $P'(x) < 0$ cuando $x < \sqrt{2A}$ y $P'(x) > 0$ cuando $x > \sqrt{2A}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $P(x)$ toma el valor mínimo cuando $x = \sqrt{2A}$. De donde,

$$y = \frac{A}{x} \quad \rightarrow \quad y = \frac{A}{2\sqrt{2A}} = \frac{\sqrt{2A}}{2}.$$

4. Dado $S > O$. Probar que entre todos los números positivos x e y tales que $x + y = S$, la suma $x^2 + y^2$ es mínima cuando $x = y$.

Demostración.- Ya que $x + y = S$ que implica $y = S - x$. Entonces, la función que queremos minimizar es

$$f(x) = x^2 + (S - x)^2.$$

Luego, tomando la derivada se tiene,

$$f'(x) = 2x - 2(S - x) = 4x - 2S.$$

Igualando a cero,

$$4x - 2S = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{S}{2}.$$

Así, $f'(x) < 0$ cuando $x < \frac{S}{2}$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > \frac{S}{2}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor mínimo cuando $x = \frac{S}{2}$. De donde,

$$y = S - x = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}.$$

Por lo tanto la suma es mínima, cuando

$$x = y.$$

5. Dado $R > 0$. Probar que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2 + y^2 = R$, la suma $x + y$ es máxima cuando $x = y$.

Demostración.- Por la ecuación $x^2 + y^2 = R$ se tiene,

$$y = \sqrt{R - x^2}.$$

Entonces, encontramos el máximo de la función de la siguiente manera,

$$f(x) = x + \sqrt{R - x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{R - x^2}}.$$

Luego, igualamos a cero,

$$\frac{x}{\sqrt{R - x^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{R}{2}}.$$

Así, $f'(x) > 0$ cuando $x < \sqrt{\frac{R}{2}}$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > \sqrt{\frac{R}{2}}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor máximo cuando $x = \sqrt{\frac{R}{2}}$. De donde,

$$y = \sqrt{R - x^2} = \sqrt{R - \frac{R}{2}} = \sqrt{\frac{R}{2}} = x.$$

Por lo tanto la suma $x+y$ es máxima, cuando $x=y$.

6. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Demostrar que entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, el de área mínima tiene lados de longitud $\frac{1}{2}L\sqrt{2}$.

Respuesta.- Sea un cuadrado con aristas de longitud L de donde $x+y=L$. Vemos que x e y son longitudes de las dos secciones de L creadas por el punto en el que la esquina del cuadrado inscrito se encuentra con el borde del cuadrado exterior. Sea e la longitud de la arista del cuadrado inscrito. Entonces, $x+y=L$ implica $y=L-x$. Pongamos $f(x)=e^2$, por lo que

$$\text{Área} = f(x) = e^2 = x^2+y^2 = x^2+(L-x)^2 = 2x^2-2Lx+L^2.$$

Sacando la derivada,

$$f'(x) = 4x-2L.$$

Igualando a cero,

$$4x-2L=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{L}{2}.$$

Así, $f'(x)<0$ cuando $x<\dfrac{L}{2}$ y $f'(x)>0$ cuando $x>\dfrac{L}{2}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor mínimo cuando $x=\dfrac{L}{2}$. Usando nuestra ecuación para y, tenemos

$$y = L-x = L-\frac{L}{2} = \frac{L}{2}.$$

Finalmente, resolviendo para la longitud de la arista e,

$$e^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}L.$$

7. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Hallar el tamaño del cuadrado de máxima área que puede circunscribirse al cuadrado dado.

Respuesta.- Sea la longitud de la arista del cuadrado circunscrito. Después $e=x+y$. Además, si L es la longitud de la arista del cuadrado dado, tenemos

$$x^2+y^2=L^2 \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{L^2-x^2}.$$

Sea $f(x) = \text{Área} = (x+y)^2$, entonces

$$\text{Área} = f(x) = (x+y)^2 = \left(L^2+x^2\right)^2 = x^2+2x\sqrt{L^2-x^2}+L^2-x^2 = 2x\sqrt{L^2-x^2}+L^2.$$

Sacando la derivada,

$$f'(x) = 2\sqrt{L^2-x^2} - \frac{2x}{\sqrt{L^2-x^2}} = 2\frac{L^2-x^2-x}{\sqrt{L^2-x^2}}.$$

Igualando a cero,

$$2\frac{L^2-x^2-x}{\sqrt{L^2-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

Así, $f'(x)>0$ cuando $x<\dfrac{L}{\sqrt{2}}$ y $f'(x)<0$ cuando $x>\dfrac{L}{\sqrt{2}}$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor máximo cuando $x=\dfrac{L}{\sqrt{2}}$. Usando nuestra ecuación para y, tenemos

$$y = \sqrt{L^2-\frac{L^2}{2}} = \sqrt{\frac{L^2}{2}} = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente, dado que $e = x + y$ tenemos el área del cuadrado circunscrito dada por

$$\text{Área} = e^2 = (x+y)^2 = \left(\frac{L}{\sqrt{2}} + \frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2L}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2L^2.$$

8. Demostrar que entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en un círculo dado, el cuadrado tiene el área máxima.

Demostración.- Sean x e y que denotan las longitudes de los lados del rectángulo inscrito, y r denota el radio del círculo. Entonces $x^2 + y^2 = 4r^2$ que implica $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$. Sea $f(x) = x \cdot y$. Entonces, derivando se tiene,

$$\text{Área} = f(x) = xy = x\sqrt{4r^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}.$$

Luego, Igualando a cero,

$$\frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}r.$$

Así, $f'(x) < 0$ cuando $x < \sqrt{2}r$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > \sqrt{2}r$. Por el teorema 4.8 Apostol, $f(x)$ toma el valor máximo cuando $x = \sqrt{2}r$. Usando nuestra ecuación para y, tenemos

$$y = \sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r.$$

Finalmente, $x = y$ por lo que el rectángulo es un cuadrado.

9. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado tiene el círculo circunscrito mínimo.

Demostración.- Sean x e y los lados del rectángulo, r el radio del circulo circunscrito y $A = xy$ el área del cuadrado. Entonces,

$$A = xy \quad \Rightarrow \quad y = \frac{A}{x}.$$

Además, dado que tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el diámetro del círculo (por lo tanto es $2r$) y cuyos catetos son los lados del cuadrado que tenemos,

$$\begin{aligned} (2r)^2 = x^2 + y^2 \quad &\Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + \left(\frac{A}{x}\right)^2} \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{x^4 + A^2}}{2x}. \end{aligned}$$

Luego queremos encontrar el valor mínimo de esta función (ya que esta función nos da el radio del círculo). Llamemos a la función $f(x)$ y tomemos su derivada de la siguiente manera,

$$f'(x) = \frac{(2x)\left(\frac{1}{2}\right)\left(4x^3\right)\left(x^4 - A^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\sqrt{x^4 + A^2}\right)(2)}{4x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + A^2}} - \frac{\sqrt{x^4 - A^2}}{2x^2}.$$

Igualando a cero,

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^4+A^2}} - \frac{\sqrt{x^4-A^2}}{2x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{A}, \quad x_2 = \sqrt{A}.$$

Luego el punto critico es un mínimo ya que, $f'(x) < 0$ cuando $x < \sqrt{A}$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > \sqrt{A}$. Por lo tanto, el radio del círculo se minimiza cuando $x = y = \sqrt{A}$, por lo que el rectángulo es un cuadrado.

10. Dada una esfera de radio R. Hallar el radio r y la altura h del cilindro circular recto de mayor superficie lateral $2\pi rh$ que puede inscribirse en la esfera.

Demostración.- Primero, sea h una función de r. Luego sea, un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud r y catetos de longitud $\frac{h}{2}$ (ya que el segundo cateto solo llega al centro de la esfera, no a la longitud total del cilindro). Por lo tanto,

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = 2\sqrt{R^2-r^2}.$$

Entonces, sabemos que el área de la superficie lateral, , viene dada por la fórmula

$$A = 2\pi rh = 2\pi r\sqrt{R^2-r^2} = 4\pi r\sqrt{R^2-r^2}.$$

Llamando a esta función $f(r)$ y diferenciando tenemos,

$$f'(r) = 4\pi\sqrt{R^2-r^2} + \frac{4\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Igualando a cero,

$$4\pi\sqrt{R^2-r^2} + \frac{4\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Luego, $f'(r) < 0$ cuando $r < \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ y $f'(r) > 0$ cuando $r > \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor mínimo cuando $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto, el área de la superficie lateral es mínima cuando

$$r = \frac{h}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

11. Entre todos los cilindros circulares rectos de área lateral dada, demostrar que la menor esfera circunscrita tiene el radio igual al radio del cilindro multiplicado por $\sqrt{2}$.

Demostración.- El área de la superficie lateral $A = 2\pi rh$ es constante y

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}.$$

Entonces, tenemos

$$A = 2\pi rh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{A}{2\pi r}.$$

Por lo tanto,

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} = r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}}.$$

Llamemos a esta función $f'(r) = 0$. Luego tomando la derivada,

$$f'(r) = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2r - \frac{2A^2}{16\pi^2 r^3}\right).$$

Igualando a cero,

$$\frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2r - \frac{2A^2}{16\pi^2 r^3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r = \frac{A^2}{8\pi^2 r^3} \quad \Rightarrow \quad r^4 = \frac{A^2}{16\pi^2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

Luego, $f'(r) < 0$ cuando $r < \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$ y $f'(r) > 0$ cuando $r > \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor mínimo cuando $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$. Por lo tanto, el radio de la esfera circunscrita es mínimo cuando

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{A^2}{16\pi^2 r^2}} = \sqrt{\frac{2A}{2\pi}} = \sqrt{2}r.$$

12. Dado Un cono circular recto de radio R y altura H. Hallar el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor área lateral que puede inscribirse en el cono.

Respuesta.- El área de la superficie lateral del cilindro viene dada por $A = 2\pi rh$, donde res el radio del cilindro y hes la altura del cilindro. Del diagrama encontramos una fórmula para h en términos de las constantes H y R, y el radio del cilindro r,

$$h = -\frac{H}{R}r + H.$$

Así, sea $f(r)$ el área de la superficie lateral tenemos

$$A = f(r) = 2\pi rh = 2\pi r\left(-\frac{H}{R}r + H\right) = 2\pi rH - \frac{2\pi H}{R}r^2.$$

Tomando la derivada con respecto a r e igualando a cero,

$$2\pi H - \frac{4\pi H}{R}r = 0 \quad \Rightarrow \quad R - 2r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{2}.$$

Luego, $f'(r) > 0$ cuando $r < \dfrac{R}{2}$ y $f'(r) < 0$ cuando $r > \dfrac{R}{2}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor máximo cuando $r = \dfrac{R}{2}$. Por lo tanto, el área de la superficie lateral es máxima cuando

$$h = \frac{1}{2}H.$$

13. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede inscribirse en un cono circular recto de radio R y altura H.

Respuesta.- Tenemos la siguiente expresión para h,

$$h = -\frac{H}{R}r + H.$$

Entonces,

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(-\frac{H}{R} r + H \right) = \pi r^2 - \frac{\pi H}{R} r^3.$$

Derivando con respecto a r,

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi H r - \frac{3\pi H}{R} r^2.$$

Igualando a cero,

$$\begin{aligned} 2\pi H r - \frac{3\pi H}{R} r^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\pi H - \frac{3\pi H}{R} r = 0 \\ &\Rightarrow \quad 1 - \frac{3}{2R} r = 0 \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{2}{3} R. \end{aligned}$$

Luego, $f'(r) > 0$ cuando $r < \dfrac{2}{3}R$ y $f'(r) < 0$ cuando $r > \dfrac{2}{3}R$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor máximo cuando $r = \dfrac{2}{3}R$. Por lo tanto, el volumen es máximo cuando

$$h = \frac{2}{3} H.$$

14. Dada una esfera de radio R. Calcular, en función de R, el radio r y la altura h del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en esa esfera.

Respuesta.- Queremos maximizar el volumen del cono,

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Luego podemos encontrar la siguiente expresión para h en términos de R y r,

$$h = R + \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Por lo tanto, nuestra expresión para V en términos de r es

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 R + \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Derivando con respecto a r,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{2}{3} \pi r R + \frac{2}{3} \pi r \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{1}{3} \pi r^3 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = \frac{2}{3} \pi r \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} \right) - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Igualando a cero,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi r \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} \right) - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad R + \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \\ &\Rightarrow \quad 9r^2 = 8r^2 R^2 \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R. \end{aligned}$$

Luego, $f'(r) > 0$ cuando $r < \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$ y $f'(r) < 0$ cuando $r > \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(r)$ toma el valor máximo cuando $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$. Por lo tanto, el volumen es máximo cuando

$$h = R + \sqrt{R^2 - \frac{8}{9}R^2} = \frac{4}{3}R.$$

15. Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

Respuesta.- Sean r el radio del semicirculo, x la mitad de la base del rectángulo e y la altura del rectángulo. Queremos maximizar el área, $A = 2xy$ tal que

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Luego,

$$A = 2x\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right).$$

Derivando con respecto a x,

$$f'(x) = \frac{dA}{dx} = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Igualando a cero,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2x^2 \\ &\Rightarrow \quad 2r^2 - 4x^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{r}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Luego, $f'(x) > 0$ cuando $x < \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(x)$ toma el valor máximo cuando $x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Ya que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, entonces

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, la base del rectángulo tiene longitud $\dfrac{2r}{\sqrt{2}}$ y su altura tiene longitud $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$.

16. Hallar el trapecio de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

Respuesta.- Sea rel radio del semicírculo, b_1 sea el borde inferior del trapezoide y b_2 el borde superior. Recordamos de la geometría que el área del trapezoide está dada por

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h.,$$

donde b_1 y b_2 son las longitudes de las bases y h es la altura del trapezoide. A continuación, queremos encontrar fórmulas para b_1 y b_2 en función al radio r. Como b_1 se encuentra en el diámetro del semicírculo, tenemos $b_1 = 2r$. La hipotenusa de cada uno de estos es r, y los catetos tienen longitudes h y $\dfrac{b_2}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r^2 = h^2 + \left(\frac{b_2}{2}\right)^2 \quad &\Rightarrow \quad r^2 = h^2 + \frac{b_2^2}{4} \\ &\Rightarrow \quad b_2^2 = 4r^2 - 4h^2 \\ &\Rightarrow \quad b_2 = 2\sqrt{r^2 - h^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos en la fórmula para el área de un trapezoide, obtenemos una expresión para el área del trapezoide en función de r y h,

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = hr + h\sqrt{r^2 - h^2}.$$

Derivando con respecto a h,

$$f'(h) = \frac{dA}{dh} = r + \sqrt{r^2 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{r^2 - h^2}}.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\begin{aligned} r + \sqrt{r^2 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{r^2 - h^2}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad r\sqrt{r^2 - h^2} + r^2 - h^2 - h^2 \\ &\Rightarrow \quad 4h^4 = 3r^2h^2 \\ &\Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}r. \end{aligned}$$

Luego, $f'(h) > 0$ cuando $h < \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$ y $f'(h) < 0$ cuando $h > \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(h)$ toma el valor máximo cuando $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$. Finalmente, usamos este valor h para resolver b_2 en función de r,

$$b_2 = 2\sqrt{r^2 - h^2} = 2\sqrt{\frac{r^2}{4}}r.$$

Como $b_1 = 2r$, entonces las longitudes de los bordes superiores e inferiores del trapezoide son:

$$b_1 = 2r, \qquad b_2 = r.$$

17. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10; b) 12 y 18.

Respuesta.- Comenzamos con un rectángulo con lados cada uno de longitud 10. Entonces, los bordes de la base de la caja tienen cada uno, una longitud de $l = w = 10 - 2x$, y la altura x; por lo tanto, el volumen es

$$V = x(10 - 2x)^2 = 4x^3 - 40x^2 + 100x.$$

Derivando con respecto a x,

$$f'(x) = \frac{dV}{dx} = 12x^2 - 80x + 100.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$12x^2 - 80x + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \quad \text{y} \quad x_2 = 4.$$

Luego, $f'(x) > 0$ cuando $0 < x < \dfrac{5}{4}$ y $f'(x) < 0$ cuando $\dfrac{5}{3} < x < 5$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, V toma el valor máximo cuando $x = \dfrac{5}{3}$. Resolviendo para la longitud y el ancho de la base de la caja tenemos, entonces

$$l = w = 10 - 2x = 10 - 2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{20}{3}.$$

Para el inciso b) comencemos con un rectángulo de 18 de largo y 12 de ancho. Entonces, los bordes de la base de la caja tienen longitudes $w = 12 - 2x$ y $l = 18 - 2x$, y la altura de la caja es x. Por tanto, el volumen es

$$V = x(12 - 2x)(18 - 2x) = 4x^3 - 60x^2 + 216x.$$

Derivando con respecto a x,

$$f'(x) = \frac{dV}{dx} = 12x^2 - 120x + 216.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$12x^2 - 120x + 216 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 - \sqrt{7} \quad \text{y} \quad x_2 = 5 + \sqrt{7}.$$

Luego, $f'(x) > 0$ cuando $0 < x < \dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$ y $f'(x) < 0$ cuando $\dfrac{5-\sqrt{7}}{2} < x < 5 + \sqrt{7}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, V toma el valor máximo cuando $x = \dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$. Resolviendo para l y w se tiene,

$$l = w = 18 - 2(5 - \sqrt{7}) = 8 - 2\sqrt{7}, \qquad w = 12 - 2(5 - \sqrt{7}) = 2 + 2\sqrt{7}.$$

18. Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1, hallar el mayor valor de $2a + b$.

Respuesta.- Por el teorema de Pitágoras, se tiene

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{1 - b^2}.$$

Recordemos que queremos maximizar,

$$2a + b = 2\sqrt{1 - b^2} + b.$$

Llamemos a esta función $f(b)$ y derivemos con respecto a b tenemos,

$$f'(b) = -\frac{2b}{\sqrt{1 - b^2}} + 1.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\begin{aligned} -\frac{2b}{\sqrt{1-b^2}} + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad -2b + \sqrt{1 - b^2} = 0 \\ &\Rightarrow \quad 5b^2 = 1 - b^2. \\ &\Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Luego, $f'(b) > 0$ cuando $b < \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ y $f'(b) < 0$ cuando $b > \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $f(b)$ toma el valor máximo cuando $b = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Dado que $a = \sqrt{1-b^2}$, se tiene

$$a = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Por lo tanto, el máximo valor de $2a + b$ es

$$2a + b = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}.$$

19. Un camión va ha recorrer 300 millas por una autopista a una velocidad constante de x millas por hora. Las leyes de velocidad requieren $30 \leq x \leq 60$. Suponga que el combustible cuesta 30 centavos por galón y se consume a razón de $2 + x^2/600$ galones por hora. Si el salario del conductor es de D dólares por hora y obedece todas las leyes de velocidad, encuentre la velocidad más económica y el costo del viaje si (a) $D = 0$, (b) $D = 1$, (c) $D = 2$, (d) $D = 3$, (e) $D = 4$.

Respuesta.- Primero escribamos una ecuación para el costo total del viaje en términos de velocidad x. Al conducir se le debe pagar D dolares por hora, y el viaje dura $300/x$ horas. Es decir, 300 millas divididas por el número de millas por hora. De donde obtenemos,

$$\text{Salario} = \frac{300D}{x}.$$

Luego, el costo total del combustible es el número de horas de viaje, dado por $300/x$ por el número de galones de combustible por hora por el costo del combustible, 30 centavos por galón:

$$\text{Coste combustible} = 0.3\left(\frac{300}{x}\right)\left(2 + \frac{x^2}{600}\right) = \frac{180}{x} + \frac{3x}{20}.$$

Entonces, el costo total del viaje en términos de la velocidad es

$$C(x) = \frac{300D + 180}{x} + \frac{3x}{20}.$$

Ahora, calculemos para los valores específicos de D del problema.

a) Si $D = 0$, entonces

$$C(x) = \frac{300 \cdot 0 + 180}{x} + \frac{20}{3x} = \frac{180}{x} + \frac{3x}{20} \quad \Rightarrow \quad c'(x) = -\frac{180}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{180}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 20\sqrt{3}\text{mph}.$$

Luego, $C'(x) < 0$ cuando $x < 20\sqrt{3}$ y $C'(x) > 0$ cuando $x > 20\sqrt{3}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $c(x)$ toma el valor mínimo cuando $x = 20\sqrt{3}$. El costo a esta velocidad es,

$$C(x) = \frac{180}{x} + \frac{3x}{20} = 6\sqrt{3} = \$10.39.$$

b) Si $D = 1$, entonces

$$C(x) = \frac{480}{x} + \frac{3x}{20} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -\frac{480}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{480}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 40\sqrt{2}\text{mph}.$$

Luego, $C'(x) < 0$ cuando $x < 40\sqrt{2}$ y $C'(x) > 0$ cuando $x > 40\sqrt{2}$. Por el teorema 4.8 Tom Apostol, $c(x)$ toma el valor mínimo cuando $x = 40\sqrt{2}$. El costo a esta velocidad es,

$$C(x) = \frac{480}{40\sqrt{2}} + \frac{3 \cdot 40\sqrt{2}}{20} = 12\sqrt{2} = \$16.97.$$

c) Si $D = 2$, entonces

$$C(x) = \frac{780}{x} + \frac{3x}{20} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -\frac{780}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{780}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 20\sqrt{3}\text{mph}.$$

Ya que $30 \leq x \leq 60 < 20\sqrt{3}$ y dado que el costo es decreciente en el intervalo $30 \leq x \leq 60$. Es decir la derivada es negativa en todo el intervalo, tomamos $x = 60$ mph. Luego

$$C = 13 + 9 = \$22.$$

d) Si $D = 3$, entonces

$$C(x) = \frac{1080}{x} + \frac{3x}{20} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -\frac{1080}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{1080}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 30\sqrt{2}\text{mph}.$$

Ya que $30 \leq x \leq 60 < 30\sqrt{2}$ y dado que el costo es decreciente en el intervalo $30 \leq x \leq 60$. Es decir la derivada es negativa en todo el intervalo, tomamos $x = 60$ mph. Luego

$$C = \frac{1080}{60} + 90 = \$27.$$

e) Si $D = 4$, entonces

$$C(x) = \frac{1380}{x} + \frac{3x}{20} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -\frac{1380}{x^2} + \frac{3}{20}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$-\frac{1380}{x^2} + \frac{3}{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 20\sqrt{23}\text{mph}.$$

Ya que $30 \leq x \leq 60 < 20\sqrt{23}$ y dado que el costo es decreciente en el intervalo $30 \leq x \leq 60$. Es decir la derivada es negativa en todo el intervalo, tomamos $x = 60$ mph. Luego

$$C = \frac{1380}{60} + 9 = \$32.$$

20. Se obtiene un cilindro haciendo girar un rectángulo alrededor del eje x, la base del rectángulo se encuentra en el eje x y todo el rectángulo se encuentra en la región entre la curva $y = x/(x^2+1)$ y el eje x. Encuentre el volumen máximo posible del cilindro.

Respuesta.- Primero, sabemos que las dos esquinas superiores deben tener la misma distancia desde el eje x (dado que este es un rectángulo, la línea que une las esquinas superiores debe ser horizontal). Ambas esquinas superiores se encontrarán en la curva y ya que si alguna de las esquinas no estuviera en la curva, podríamos obtener un rectángulo más grande (por lo tanto, un cilindro más grande cuando rotemos). Extendiendo el rectángulo para que la esquina esté en la curva. Sea a la coordenada x de la esquina superior izquierda y b la coordenada x de la esquina superior derecha. Dado que ambos se encuentran en la curva que tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1+a^2} = \frac{b}{1+b^2} \quad &\Rightarrow \quad a(1+b^2) = b(1+a^2) \\
&\Rightarrow \quad a^2(-b) + a(1+b^2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad a = \frac{1+b^2 \pm \sqrt{1-2b^2+b^4}}{2b} \\
&\Rightarrow \quad a = \frac{1+b^2 \pm (1-b^2)}{2b}
\end{aligned}$$

Sin embargo, una de estas soluciones es el caso trivial $a = b$, por lo que el cilindro n este caso tiene volumen 0. Luego, la otra solución será

$$a = \frac{1+b^2+1-b^2}{2b} = \frac{1}{b}.$$

En este caso, calculando el volument de este cilindro, tenemos

$$V = \pi r^2 h = \pi \left[f(x)\right]^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pi \left[\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right] \left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}.$$

Derivando con respecto a x,

$$V'(x) = \pi \frac{(3x^2-1)(6x)(x^2+1)^2 - (x^3-x)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \pi \frac{-x^4+6x^2-1}{(x^2+1)^3}.$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\frac{-x^4+6x^2-1}{(x^2+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Estos valores de x^2 corresponden a los valores de a y b, por lo que tenemos

$$b = \sqrt{x} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1\sqrt{2}.$$

Ya que el problema requiere que sea un valor positivo. El valor máximo $V_{\max}$ está dado por,

$$V_{\max} = \pi \frac{(1+\sqrt{2})^3 - 1 - \sqrt{2}}{(4+\sqrt{2})^2} = \frac{\pi}{4}.$$

21. La esquina inferior derecha de una página se dobla para llegar al borde más a la izquierda. (Vea la Figura 4.17. Tom Apostol, capítulo 4) Si el ancho de la página es de seis pulgadas, encuentre la longitud mínima del pliegue. ¿Qué ángulo formará este pliegue mínimo con el borde más a la derecha de la página? Suponga que la página es lo suficientemente larga para evitar que el pliegue llegue a la parte superior de la página.

Respuesta.- Denote el ángulo que forma el pliegue con el borde derecho del papel mediante θ, el

ancho horizontal del pliegue por x (es decir, la línea de puntos a lo largo de la parte inferior de la longitud del papel x), y que la longitud del pliegue sea y. Entonces, del diagrama vemos $x = y \operatorname{sen}\theta$. Luego, el triángulo encerrado por las líneas negras punteadas debe ser congruente con el triángulo encerrado por las líneas azules, ya que cuando doblamos el papel, el triángulo encerrado por las líneas negras punteadas es exactamente el espacio en el que estaba el triángulo azul antes de que hiciéramos el doblez. (Disculpe el hecho de que el diagrama está mal dibujado y hace que estos dos triángulos parezcan de diferentes tamaños.) Teniendo esto en cuenta, considere el triángulo en la esquina inferior izquierda. Este triángulo tiene hipotenusa $x = y \operatorname{sen}\theta$ y el ángulo en la esquina inferior derecha debe ser 2θ (Esto se debe a que los otros dos ángulos a lo largo de la línea horizontal en la parte inferior son ambos $90 - \theta$, y $180 - (90 - \theta) - (90 - \theta) - 2\theta$). Finalmente, la longitud del cateto de este triángulo a lo largo de la parte inferior de la hoja de papel es $6 - x = 6 - y \operatorname{sen}\theta$ ya que sabemos que el papel mide 6 pulgadas de ancho.
De la trigonometría (específicamente, cos es igual a adyacente sobre la hipotenusa) tenemos

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) = \frac{6 - y\operatorname{sen}\theta}{y\operatorname{sen}\theta} \quad &\Rightarrow \quad \cos(2\theta) = \frac{6}{y\operatorname{sen}\theta} - 1\\
&\Rightarrow \quad \cos(2\theta) + 1 = \frac{6}{y\operatorname{sen}\theta}\\
&\Rightarrow \quad y\operatorname{sen}\theta = \frac{6}{\cos(2\theta)+1}\\
&\Rightarrow \quad y = \frac{6}{\operatorname{sen}\theta\,[\cos(2\theta)+1]}\\
&\Rightarrow \quad y = \frac{6}{2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}.
\end{aligned}$$

La igualdad final se sigue del uso de la identidad trigonométrica $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ lo que implica $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$. Ahora queremos minimizar y que es lo mismo que maximizar $2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$. Tomando la derivada de esto y poniéndola a 0 para encontrar los puntos críticos que tenemos,

$$\begin{aligned}
(2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta)' = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\cos^3\theta - 4\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta = 0\\
&\Rightarrow \quad \cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta = 0\\
&\Rightarrow \quad 1 - 3\operatorname{sen}^2\theta = 0\\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Ya que $1 - 3\operatorname{sen}^2\theta > 0$ para $\operatorname{sen}\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $1 - 3\operatorname{sen}^2\theta < 0$ para $\operatorname{sen}\theta > \frac{1}{\sqrt{3}}$ tenemos que $2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$ tiene un máximo cuando $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto, reemplazando esto en nuestra expresión para la longitud del pliegue que tenemos

$$y = \frac{6}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)6 = \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

y

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

22. (a) Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia de radio r como se indica en la figura 4.18 (Tom Apostol). Suponiendo el ángulo 2α en el vértice, comprendido entre O y $\frac{1}{2}\pi$, hallar el valor medio y el valor menor del perímetro del triángulo. Dar todos los detalles del razonamiento seguido. Respuesta.- Podemos imaginar seis líneas radiales, que dividen el triángulo en seis triángulos congruentes, cada uno con hipotenusa de longitud r y catetos de longitud $r \operatorname{sen}\alpha$. Dos de los lados del triángulo isósceles inscrito tienen longitudes $2r\cos\alpha$ y el tercer cateto tiene longitudes $2r\operatorname{sen}(2\alpha)$. Por lo tanto, el perímetro es,

$$P = 4r\operatorname{sen}\alpha + 2r\operatorname{sen}(2\alpha).$$

Sacando la derivada,

$$P' = -4\operatorname{sen}\alpha + 4r\cos(2\alpha).$$

Ahora, debemos notar que los valores extremos de la función ocurren cuando la derivada es 0 o en un punto final del intervalo que estamos viendo; en este caso, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$ es el intervalo estipulado en el problema. Primero, igualemos la derivada a cero y encontremos los valores de en el intervalo en el que la derivada es 0.

$$\begin{aligned}
-4r\operatorname{sen}\alpha + 4r\cos(2\alpha) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4r\cos(2\alpha) = 4r\operatorname{sen}\alpha \\
&\Rightarrow \quad \cos(2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\
&\Rightarrow \quad 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha \\
&\Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha - 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad -1
\end{aligned}$$

Entonces, el único de α en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ y $\alpha = -1$ es

$$\alpha = \frac{\alpha}{6}.$$

Reemplazando esto en nuestra expresión para el perímetro del triángulo isósceles, encontramos,

$$\begin{aligned}
P_{max} &= 4r\cos\alpha + 2r\operatorname{sen}(2\alpha) \\
&= 3r\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2r\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{3}r + \sqrt{3}r \\
&= 3\sqrt{3}r.
\end{aligned}$$

Examinando el signo de la derivada de la función perimetral a medida que α cambia, vemos que se trata de un máximo. Además, vemos que el mínimo ocurre en el punto final, $\alpha = 0$. Entonces el perímetro mínimo es

$$P_{min} = 4r\cos\alpha + 2r\operatorname{sen}(2\alpha) = 4r\cos 0 + 2r\operatorname{sen} 0 = 4r.$$

(b) ¿Cuál es el radio del menor disco circular suficientemente grande para cubrir todo triángulo isósceles de perímetro dado L? Dar todos los detalles del razonamiento.

Respuesta.- Primero, identificamos el valor α en el que el radio necesario para cubrir el triángulo isósceles es máximo (el peor de los casos para cubrir el triángulo, si lo desea). De la parte (a) sabemos que el perímetro L debe satisfacer la ecuación

$$L = 4r\cos\alpha + 2r\,\text{sen}(2\alpha).$$

Como L ahora es una constante fija, podemos escribir r como una función de α,

$$r = \frac{L}{4\cos\alpha + 2\,\text{sen}(2\alpha)}.$$

Ahora, el valor de r es máximo cuando el denominador es mínimo, por lo que estamos buscando un mínimo de la función

$$f(\alpha) = 4\cos\alpha + 2\,\text{sen}(2\alpha).$$

Tomando la derivada,

$$f'(\alpha) = -4\,\text{sen}\,\alpha + 4\cos(2\alpha).$$

Igualamos esto a cero para encontrar los puntos críticos.

$$-4\,\text{sen}\,\alpha + 4\cos(2\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\alpha = \cos(2\alpha).$$

De la parte (a) sabemos que esto implica $\alpha = 0$ o $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Nuevamente, de la parte (a) sabemos que esto es mínimo cuando $\alpha = 0$. Ya que estamos tratando de minimizar esto, queremos el valor $\alpha = 0$.

Finalmente, hay un pequeño problema con $\alpha = 0$, ya que corresponde solo a una línea, no realmente a un triángulo. Podemos ignorar ese problema y simplemente conectar $\alpha = 0$ o (lo que equivaldrá a lo mismo) podemos encontrar el valor mínimo de como límite como:

$$r = \lim_{\alpha\to 0} \frac{L}{4\cos\alpha + 2\,\text{sen}(2\alpha)} = \frac{L}{4}.$$

donde podemos calcular el límite simplemente evaluando en $\alpha = 0$ ya que la función es continua.

23. Una ventana tiene forma de rectángulo terminando por un semicírculo con diámetro igual a la base del rectángulo. La parte rectangular debe ser de vidrio transparente y la parte semicircular debe ser de vidrio coloreado que admita solo la mitad de luz por pie cuadrado que el vidrio transparente. El perímetro total del marco de la ventana debe tener una longitud fija P. Encuentre, en términos de P, las dimensiones de la ventana que admitirán la mayor cantidad de luz.

Respuesta.- Sea r la longitud del radio del semicírculo. Entonces, el perímetro está dado por la ecuación,

$$P = 2r + 2x + \pi r \quad \Rightarrow \quad x = \frac{P - 2r - \pi r}{2}.$$

La cantidad total de luz que entra por la ventana es el área de la parte rectangular multiplicada por 1, más el área de la región semicircular multiplicada por 1/2:

$$L = 2rx + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = 2rx + \frac{\pi r^2}{4}.$$

Reemplazando nuestra expresión para x obtenemos una expresión para la cantidad total de luz en términos del radio (y la constante P),

$$L = 2r\left(\frac{P - 2r - \pi r}{2}\right) + \frac{\pi r^2}{4} = Pr - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{4} = Pr - 2r^2 - \frac{3\pi r^2}{4}.$$

Diferenciando con respecto a r tenemos

$$L' = P - 4r - \frac{3\pi r}{2}.$$

Igualando esto a 0 y resolviendo para r,

$$P - 4r - \frac{3\pi r}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2P}{8+3\pi}.$$

Como la longitud de la base de la región rectangular es 2r, la base del rectángulo tiene una longitud

$$\text{Base} = 2r = \frac{4P}{8+3\pi}.$$

Entonces, usando la expresión anterior para X, la altura de la región rectangular, tenemos,

$$\begin{aligned} x &= \frac{P-2r-\pi r}{2} \\ &= \frac{P - \frac{4P}{8+3\pi} - \frac{2P\pi}{8+3\pi}}{2} \\ &= \frac{P}{2} - \frac{2P}{8+3\pi} - \frac{P\pi}{8+3\pi} \\ &= \frac{(8+3\pi)P - 4P - 2\pi P}{16+6\pi} \\ &= \frac{P(4+\pi)}{16+6\pi}. \end{aligned}$$

Estas son las dimensiones solicitadas en cuanto al perímetro.

24. Un trozo de madera de 12 pies de largo tiene la forma de un tronco de cono circular recto con diámetros de 4 pies y $(4+h)$ pies en sus extremos, donde $h > 0$. Determine, en función de h, el volumen del rectángulo más grande Cilindro circular que se puede cortar del tronco, si su eje coincide con el del tronco.

Respuesta.- Denotemos r el radio del cilindro circular recto y a su altura. Entonces, el volumen está dado por

$$V = \pi r^2 a.$$

Primero, encontramos una ecuación para a en términos de r. Supongamos que a se encuentra en la línea que conecta el origen con el borde superior del tronco. La ecuación de esta línea es $y = \frac{24}{h}x$ porque tiene pendiente $\frac{24}{h}$ (ya que la altura del tronco es de 12 pies y la distancia horizontal entre el borde inferior y el borde superior es $\frac{h}{2}$). Por lo tanto,

$$a = \frac{24}{h}\left(2 + \frac{h}{2} - r\right).$$

Por lo tanto, tenemos el volumen V del cilindro que estamos cortando dado por

$$V = \pi r^2 a = \pi r^2 \left(\frac{48}{h} - \frac{24r}{h} + 12\right).$$

Como queremos maximizar este volumen, tomamos la derivada con respecto a r y buscamos los puntos críticos,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{96\pi r}{h} - \frac{72\pi r^2}{h} + 24\pi r.$$

Igualando esto a 0 tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{96\pi r}{h}-\frac{72\pi r^2}{r}+24\pi r=0 \quad &\Rightarrow \quad 96\pi r-72\pi r^2+24\pi rh=0\\ &\Rightarrow \quad 4-3r+h=0\\ &\Rightarrow \quad r=\frac{4+h}{3}.\end{aligned}$$

También tenemos una restricción adicional del problema que es que deberíamos requerir $r \geq 2$ ya que la altura máxima del cilindro que estamos cortando es de 12 pies y

$$a=\frac{24}{h}\left(2+\frac{h}{2}-r\right)\leq 12 \quad \Rightarrow \quad r\geq 2.$$

Ya que $r=\frac{4+h}{3}$ esto implica que este valor es válido para $h\geq 2$. Entonces si $h\geq 2$ tenemos

$$a=\frac{24}{h}\left(2+\frac{h}{2}-r\right)=\frac{24}{h}\left(\frac{4+h}{6}\right).$$

Reemplazando esto en la fórmula para el volumen del cilindro obtenemos un máximo para el volumen de

$$V=\pi r^2 a=\pi\left(\frac{4+3}{3}\right)^2\left(\frac{24}{h}\right)\left(\frac{4+h}{6}\right)=\frac{4\pi}{9h}(4+h)^3.$$

Si $0\leq h<2$, entonces tenemos $r=2$ y así $a=\frac{24}{h}\cdot\frac{h}{2}=12$. Por lo tanto,

$$V=\pi r^2 a=48\pi.$$

Poniendo esto junto en una ecuación tenemos

$$V=\begin{cases}48\pi & \text{si } 0\leq h<2\\ \\ \dfrac{4\pi}{9h}(4+h)^3 & \text{si } h\geq 2.\end{cases}$$

25. Dados n números reales $a_1,...,a_n$. Demuestre que la suma $\sum\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ es mínima cuando x es la media aritmética de $a_1,...,a_n$.

Respuesta.- Recordemos que la media aritmética de $a_1,...,a_n$ está dada por,

$$x=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

Para encontrar el mínimo, primero tomamos la derivada, usando la linealidad de la derivada sobre esta suma (finita), (es decir, usando eso $(f+g)'=f'+g'$),

$$\begin{aligned}\left[\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2\right]' &= \left[\sum_{k=1}^{n}\left(x^2-2a_kx+a_k^2\right)\right]'\\ &= \left[\left(x^2-2a_1x+a_1^2\right)+\left(x^2-2a_2x+a_2^2\right)+\ldots+\left(x^2-2a_nx+a_n^2\right)\right]'\\ &= \left[nx^2-2\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)x+\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\right]'\\ &= 2nx-2\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}(x-a_k).\end{aligned}$$

Igualando esto a 0 y resolviendo tenemos

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)=0 \quad &\Rightarrow \quad 2\left(\sum_{k=1} x-\sum_{k=1}^{n} a_k\right)=0 \\
&\Rightarrow \quad nx-\sum_{k=1}^{n} a_k=0 \\
&\Rightarrow \quad nx=\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\Rightarrow \quad x=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.
\end{aligned}
$$

26. Si $x>0$, sea $f(x)=5x^2+Ax^{-5}$, donde A es una constante positiva. Encuentre el A más pequeño tal que $f(x)\geq 24$ para todo $x>0$.

Respuesta.- Primero encontraremos el mínimo de la función. Para luego establecer el mínimo encontrado e igualar a 24. Para encontrar el mínimo tomamos la derivada de $f(x)$,

$$f'(x)=10x-5Ax^{-6}$$

Luego, igualando a cero y resolviendo tenemos

$$10x-5Ax^{-6}=0 \qquad \Rightarrow \quad 10x^7=5A \quad \Rightarrow \quad x=\left(\frac{A}{2}\right)^{1/7}.$$

Por lo que $f(x)$ tiene un mínimo en este punto x. Ahora remplazando x, $f(x)$ e igualándolo a 24, obtenemos

$$
\begin{aligned}
5\,()^{\frac{2}{7}}+A\left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} \quad &= \quad 24 \\
\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{7}}\left[5+A\left(\frac{A}{2}\right)^{-1}\right]=24 \\
A=2\left(\frac{24}{7}\right)^{\frac{7}{2}}.
\end{aligned}
$$

27. Para cada t real, sea $f(x)=-\frac{1}{3}x_3+t^2x$, y sea $m(t)$ el mínimo de $f(x)$ sobre el intervalo $0\leq x\leq 1$. Determine el valor de $m(t)$ para cada t en el intervalo $-1\leq t\leq 1$. Recuerde que para algunos valores de t el mínimo de $f(x)$ puede ocurrir en los extremos del intervalo $0\leq x\leq 1$.

Respuesta.- Dado que Apostol nos advierte específicamente que tengamos cuidado de que la solución mínima esté en los extremos de $[0,1]$, calculamos el valor en 0 y 1,

$$
\begin{aligned}
f(0) \quad &= \quad -\frac{1}{3}0^3+t^2(0)=0 \\
f(1) \quad &= \quad -\frac{1}{3}1^3+t^2(1)=t^2-\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Derivando $f(x)$,

$$f'(x)=-x^2+t^2.$$

Igualando a 0, encontramos que si f(x) tiene un extremo en el interior de [0,1], entonces

$$-x^2+t^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=t^2 \quad \Rightarrow \quad x=|t| \quad (\text{ya que } x\geq 0).$$

Luego, evaluando $f(x)$ en $x=|t|$ se tiene,

$$f(|t|)=-\frac{1}{3}t^2|t|+t^2|t|=\frac{2}{3}t^2|t|.$$

Pero esto es mayor o igual a 0 para todos los valores de $t\in[-1,1]$, por lo que no puede ser el mínimo (ya que sabemos $f(0)=0$ que es al menos mayor que $f(0)$). Por lo tanto, el mínimo debe ocurrir en los puntos extremos. Es decir,

$$m(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t^2\geq \dfrac{1}{3} \\[2ex] t^2-\dfrac{1}{3} & \text{si} \quad t^2<\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

28. Se sabe que un número x está en un intervalo $a\leq x\leq b$, donde $a>0$. Deseamos aproximar x por otro número t en $[a,b]$ para que el error relativo, $|t-x|/x$, sea lo más pequeño posible. Sea $M(t)$ el valor máximo de $|t-x|/x$ cuando x varía de a a b. a) Demuestre que este máximo ocurre en uno de los extremos $x=a$ o $x=b$. (b Demuestre que $M(t)$ es menor cuando t es la media armónica de a y b, es decir, cuando $1/t=\frac{1}{2}(1/a+1/b)$.

Respuesta.-

(a) Reescribimos el término de error como una función por partes (para que podamos considerar la derivada de cada parte),

$$\frac{|t-x|}{x}=\begin{cases} \dfrac{t-x}{x} & \text{si } t\geq x \\[2ex] \dfrac{x-t}{x} & \text{si } t<x. \end{cases}$$

Entonces, tomamos la derivada con respecto a x, se tiene

$$\left(\frac{|t-x|}{x}\right)'=\begin{cases} -\dfrac{t}{x^2} & \text{si } t\geq x \\[2ex] -\dfrac{t}{x^2} & \text{si } t<x. \end{cases}$$

Pero sabemos que $a>0$ y dado que ambos x y t están en el intervalo $[a,b]$, tenemos $x,t>0$. Por lo tanto, la derivada no es cero en ningún lugar del intervalo (ya que $-\frac{t}{x^2}\neq 0$ y $\frac{t}{x^2}\neq 0$ por lo que t no es cero). Así, $M(t)$ no puede tener un máximo en (a,b), por lo que el máximo debe estar en uno de los puntos extremos, $x=a$ o $x=b$.

(b) Ahora, queremos encontrar el valor de t el cual $M(t)$ es menor (es decir, cuando el error máximo es menor). De la parte (a), sabemos que para cualquier t fijo, el valor máximo del error debe ocurrir en un punto final, $x=a$ o $x=b$. Como $M(t)$ es la función que devuelve el máximo error, tenemos

$$M(t)=\frac{|t-a|}{a} \quad \text{o} \quad M(t)=\frac{|t-b|}{b}.$$

Se sabe que este es el máximo error, por lo que

$$M(t)=\frac{|t-a|}{a} \quad \text{si} \quad \frac{t-a}{a}>\frac{t-b}{b}$$

y
$$M(t) = \frac{|t-b|}{b} \quad \text{si} \quad \frac{t-a}{a} > \frac{t-b}{b}.$$
Luego, ya que $a \leq t \leq b$, entonces $|t-a| = t-a$ y $|t-b| = b-t$. Ahora,
$$\frac{t-a}{a} > \frac{b-t}{b} \quad \Rightarrow \quad t > \frac{2ab}{a+b}$$
y
$$\frac{b-t}{b} > \frac{t-a}{a} \quad \Rightarrow \quad t < \frac{2ab}{a+b}.$$
Así, podemos dar una fórmula para $M(t)$,
$$M(t) = \begin{cases} \dfrac{t-a}{a} & \text{si } t > \dfrac{2ab}{a+b} \\[2ex] \dfrac{b-t}{b} & \text{si } t < \dfrac{2ab}{a+b}. \end{cases}$$
Derivando con respecto a t, tenemos
$$M'(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } t > \dfrac{2ab}{a+b} \\[2ex] -\dfrac{1}{b} & \text{si } t < \dfrac{2ab}{a+b}. \end{cases}$$
Por el hecho de que a y b son positivos. Es decir, $M'(t)$ es negativo si $t < \dfrac{2ab}{a+b}$ y $M'(t)$ es positivo si $x > \dfrac{2ab}{a+b}$; Entonces $M(t)$ es decreciente para $t < \dfrac{2ab}{a+b}$ y creciente para $t > \dfrac{2ab}{a+b}$. Por lo tanto $M(t)$ tiene un mínimo en
$$t = \frac{2ab}{a+b} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

4.22 Derivadas Parciales

Si $\dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ tiende a un límite definido cuando $h \to 0$ este límite se denomina la derivada parcial de f con respecto a x.

Para asignar la derivada parcial con respecto de x, hay varios símbolos siendo algunos de los más corrientes:
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0), \quad f_1(x_0, y_0) \quad , D_1 f(x_0, y_0)$$
El subíndice en las dos últimas notaciones se refiere al hecho de que sólo la primera coordenada varía cuando se forma el cociente de diferencias.
Así se tiene
$$f_1(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$
Análogamente, se define la derivada partial respecto a y en (x_0, y_0) por
$$f_2(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Siendo las notaciones correspondientes

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad f'_y(x_0, y_0), \quad f_2(x_0, y_0) \quad , D_2 f(x_0, y_0)$$

Si se escribe $z = f(x, y)$, también se usan los símbolos $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ para designar las derivadas parciales.

Geométricamente, la derivada parcial $f_1(x, y_o)$ representa la pendiente de la tangente en un punto de la curva.

La derivación parcial es un proceso que da lugar a nuevas funciones $f_1 = (\partial f / \partial x)$ y $f_2 = \partial f / \partial y$ a partir de una función dada. Puesto que f_1 y f_2 son a us vez funciones de dos variables, se pueden considerar sus derivadas parciales. Estas se denominan derivadas parciales de segundo orden de f y se indican como sigue:

$$f_{1,1} = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{1,2} = f_{x,y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{2,1} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{2,2} = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

En la notación ∂ se indica el orden de derivación escribiendo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Esta derivada no siempre coinciden con la derivada parcial que resulta al invertir el orden de derivación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

4.23 Ejercicios

En los Ejercicios 1 al 8, calcular todas las derivadas parciales de primer y segundo orden. Comprobar en cada caso que las derivadas parciales $f_{1,2}(x, y)$ y $f_{2,1}(x, y)$ son iguales.

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

Respuesta.- Las derivada parcial de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 8xy^2. \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3 - 8x^2y. \end{aligned}$$

Las derivadas parciales de segundo orden están dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12x^2 - 8y^2. \\
f_{1,2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4y^3 - 8x^2 y\right) = -16xy. \\
f_{2,1}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3 - 8xy^2\right) = -16xy. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 12y^2 - 8x^2.
\end{aligned}$$

Luego, vemos que $f_{1,2}(x,y) = f_{2,1}(x,y)$.

$$f_{1,2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{2,1}(x,y).$$

2. $f(x,y) = x \operatorname{sen}(x+y)$.

Respuesta.- Las derivada parcial de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \operatorname{sen}(x+y) + x\cos(x+y)1 = \operatorname{sen}(x+y) + x\cos(x+y). \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 0\operatorname{sen}(x+y) + x\cos(x+y)1 = x\cos(x+y).
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de segundo orden están dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos(x+y)1 + 1\cos(x+y) + x\left[-\operatorname{sen}(x+y)\right]1 = 2\cos(x+y) - x\operatorname{sen}(x+y) \\
f_{1,2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\cos(x+y)\right] = \cos(x+y) - x\operatorname{sen}(x+y) \\
f_{2,1}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{sen}(x+y) + x\cos(x+y)\right] = \cos(x+y) - x\operatorname{sen}(x+y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0\cos(x+y) + x\left[-\operatorname{sen}(x+y)\right]1 = -x\operatorname{sen}(x+y)
\end{aligned}$$

Luego, vemos que $f_{1,2}(x,y) = f_{2,1}(x,y)$.

$$f_{1,2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x\operatorname{sen}(x+y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{2,1}(x,y).$$

3. $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y}, \quad (y \neq 0)$.

Respuesta.- Las derivada parcial de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y+\frac{1}{y}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x-\frac{x}{y^2}\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de segundo orden están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y+\frac{1}{y}\right)=0\\ f_{1,2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x-\frac{x}{y^2}\right)=1+\frac{1}{y^2}\\ f_{2,1}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{1}{y^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{2x}{y^3}\end{aligned}$$

Luego, vemos que $f_{1,2}(x,y)=f_{2,1}(x,y)$.

$$f_{1,2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1+\frac{1}{y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{2,1}(x,y).$$

4. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Respuesta.- Las derivada parcial de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de segundo orden están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\ f_{1,2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}\\ f_{2,1}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Luego, vemos que $f_{1,2}(x,y) = f_{2,1}(x,y)$.

$$f_{1,2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{2,1}(x,y).$$

5. $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(x^2y^3\right)$.

Respuesta.- Las derivada parcial de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^3 \cos\left(x^2y^3\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^2y^2 \cos\left(x^2y^3\right) \end{aligned}$$

Las derivadas parciales de segundo orden están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2y^3\cos\left(x^2y^3\right)\right] = 2y^3\cos\left(x^2y^3\right) - 4x^3y^6 - 4x^3y^6 \operatorname{sen}\left(x^2y^3\right) \\ f_{1,2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[3x^2y^2\cos\left(x^2y^3\right)\right] = 6xy^2\cos\left(x^2y^3\right) - 6x^3y^5 \operatorname{sen}\left(x^2y^3\right) \\ f_{2,1}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2x^2y^3\cos\left(x^2y^3\right)\right] = 6xy^2\cos\left(x^2y^3\right) - 6x^3y^5 \operatorname{sen}\left(x^2y^3\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[3x^2y^2\cos\left(x^2y^3\right)\right] = 6x^2y\cos\left(x^2y^3\right) - 6x^4y^4 \operatorname{sen}\left(x^2y^3\right) \end{aligned}$$

Luego, vemos que $f_{1,2}(x,y) = f_{2,1}(x,y)$.

$$f_{1,2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2\cos\left(x^2y^3\right) - 6x^3y^5 \operatorname{sen}\left(x^2y^3\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{2,1}(x,y).$$

6. $f(x,y) = \operatorname{sen}\left[\cos(2x-3y)\right]$.

Respuesta.- Las derivada parcial de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{-2\cos\left[\cos\left(2x-3y\right)\operatorname{sen}\left(2x-3y\right)\right]\right\} \\
&= -4\left\{\cos(2x-3y)\cos\left[\cos(2x-3y)\right]+\left[\operatorname{sen}(2x-3y)\right]^2\operatorname{sen}\left[\cos(2x-3y)\right]\right\} \\
f_{1,2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{3\cos\left[\cos\left(2x-3y\right)\operatorname{sen}\left(2x-3y\right)\right]\right\} \\
&= 6\cos(2x-3y)\cos\left[\cos(2x-3y)\right]+6\left[\operatorname{sen}(2x-3y)\right]^2\operatorname{sen}\left[\cos(2x-3y)\right] \\
f_{2,1}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{-2\cos\left[\cos\left(2x-3y\right)\operatorname{sen}\left(2x-3y\right)\right]\right\} \\
&= 6\cos(2x-3y)\cos\left[\cos(2x-3y)\right]+6\left[\operatorname{sen}(2x-3y)\right]^2\operatorname{sen}\left[\cos(2x-3y)\right] \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{3\cos\left[\cos\left(2x-3y\right)\operatorname{sen}\left(2x-3y\right)\right]\right\} \\
&= -9\left\{\cos(2x-3y)\cos\left[\cos(2x-3y)\right]+\left[\operatorname{sen}(2x-3y)\right]^2\operatorname{sen}\left[\cos(2x-3y)\right]\right\}
\end{aligned}$$

Luego, vemos que $f_{1,2}(x,y)=f_{2,1}(x,y)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6\cos(2x-3y)\cos\left[\cos(2x-3y)\right]+6\left[\operatorname{sen}(2x-3y)\right]^2\operatorname{sen}\left[\cos(2x-3y)\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

7. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}\quad (x\neq y)$.

Respuesta.- Las derivada parcial de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x-y}-\frac{x+y}{(x-y)^2}=\frac{-2y}{(x-y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x-y}+\frac{x+y}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de segundo orden están dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-2y}{(x-y)^2}\right]=\frac{(-2y)(2)(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{4y}{(x-y)^3} \\
f_{1,2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2x}{(x-y)^2}\right]=\frac{2(x-y)^2-(2x)(2)(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{-2(x+y)}{(x-y)^3} \\
f_{2,1}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-2y}{(x-y)^2}\right]=\frac{2(x-y)^2+(2y)(2)(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{-2(x+y)}{(x-y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2x}{(x-y)^2}\right]=\frac{(2x)(2)(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{4x}{(x-y)^3}
\end{aligned}$$

Como $f_{1,2}(x,y)=f_{2,1}(x,y)$, entonces:

$$f_{1,2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-2(x+y)}{(x-y)^3}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{2,1}(x,y).$$

8. $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Respuesta.- Las derivada parcial de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-x\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de segundo orden están dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{-y^2\left(\dfrac{3}{2}\right)(2x)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{-3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\\
f_{1,2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{-y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}+xy(2x)\left(\dfrac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^3}=\frac{y\left(2x^2y-y^2\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\\
f_{2,1}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{2y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}-y^2\left(\dfrac{3}{2}\right)(2y)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^3}=\frac{y\left(2x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{-x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}+xy(2y)\left(\dfrac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^3}=\frac{x(xy^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

Como $f_{1,2}(x,y)=f_{2,1}(x,y)$, entonces:

$$f_{1,2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{y\left(2x^2y-y^2\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{2,1}(x,y).$$

9. Demostrar que $x\left(\partial z/\partial x\right)+\left(\partial z/\partial y\right)=2z$ si (a) $z=(x-2y)^2$, (b) $z=\left(z^4+y^4\right)^{1/2}$.

(a) $z=(x-2y)^2$.

Demostración.- Calculando se tiene,

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= x\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-2y)^2\right]+y\left[\frac{\partial}{\partial y}(x-2y)^2\right]\\
&= x\left[2(x-2y)\right]+y\left[2(-2)(x-2y)\right]\\
&= 2x^2-4xy-4xy+8y^2\\
&= 2z.
\end{aligned}$$

(b) $z = \left(z^4 + y^4\right)^{1/2}$.

Demostración.- Calculando se tiene,

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right) &= x\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4+y^4\right)^{\frac{1}{2}}\right] + y\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(x^4+y^4\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= x\left(4x^3\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^4+y^4\right)^{-\frac{1}{2}} + y\left(4y^3\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^4+y^4\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2\left(x^4+y^4\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2z.
\end{aligned}$$

10. Si $f(x,y) = xy/\left(x^2+y^2\right)^2$ para $(x,y) \neq (0,0)$, demostrar que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Demostración.- Primeramente, calculamos la derivada parcial de primer orden con respecto a x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y\left(x^2+y^2\right)^2 - 2(xy)(2x)\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4} \\
&= \frac{x^2y + y^3 - 4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^3} \\
&= \frac{y^3 - 3x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^3}
\end{aligned}$$

Luego, calculamos la derivada parcial de primer orden con respecto a y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x\left(x^2+y^2\right)^2 - 2(xy)(2y)\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4} \\
&= \frac{x^3 + y^2 - 4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3} \\
&= \frac{x^3 - 3xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}
\end{aligned}$$

Ahora, calculamos las derivadas parciales de segundo orden con respecto a x y y y viceversa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y^3-3x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right] \\
&= \frac{-6xy\left(x^2+y^2\right)^3-3\left(y^3-3x^2y\right)(2x)\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^6} \\
&= 12xy\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^4} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^3-3xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right] = \frac{-6xy\left(x^2+y^2\right)^3-3\left(x^3-3xy^2\right)(2y)\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^6} = -12xy\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^4}.
\end{aligned}$$

Finalmente, sumando las dos últimas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 12xy\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^4}-12xy\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

5

Relación entre integración y derivación

5.1 La derivada de una integral indefinida. Primer teorema fundamental del cálculo

Teorema 5.1 **Primer Teorema fundamental del cálculo.** Sea f una función que es integrable en $[a,x]$ para cada x en $[a,b]$. Sea c tal que $a \leq c \leq b$ y definamos una nueva función A del siguiente modo:

$$A(x) = \int_c^x f(t)\, dt \quad \text{si} \quad a \leq x \leq b$$

Existe entonces la derivada $A'(x)$ en cada punto x del intervalo abierto (a,b) donde f es continua, y para tal x tenemos

$$A'(x) = f(x) \tag{5.1}$$

Interpretación geométrica: La figura 5.1 (Apostol, capítulo 5) muestra la gráfica de una función f en un intervalo $[a,b]$. En la figura, h es positivo y

$$\int_x^{x+h} f(t)\, dt = \int_0^{x+h} f(t)\, dt - \int_0^x f(t)\, dt = A(x+h) - A(x).$$

El ejemplo es el de una función continua en todo el intervalo $[x, x+h]$. Por consiguiente, por el teorema del valor medio para integrales, tenemos

$$A(x+h) - A(x) = hf(z), \quad \text{donde } x \leq z \leq x+h.$$

Luego, resulta

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(z). \tag{5.2}$$

Puesto que $x \leq z \leq x+h$, encontramos que $f(z) \to f(x)$ cuando $h \to 0$ con valores positivos. Si $h \to 0$ con valores negativos, se razona en forma parecida. Por consiguiente, $A'(x)$ existe y es igual a $f(x)$.
Demostración.- Sea x un punto en el que f es continua y supuesta x fija, se forma el cociente:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h}.$$

Para demostrar el teorema se ha de probar que este cociente tiende a $f(x)$ cuando $h \to 0$. El numerador es:

$$A(x+h) - A(x) = \int_0^{x+h} f(t)\, dt - \int_c^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Si en la última integral se escribe $f(t) = f(x) - [f(t) - f(x)]$ resulta:

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_x^{x+h} f(x)\,dt + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\ dt \\ &= hf(x) + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\ dt, \end{aligned}$$

de donde

$$\text{(5.3)} \qquad \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\ dt. \tag{5.3}$$

Por tanto, para completar la demostración de (5.1) es necesario demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\ dt = 0.$$

En esta parte de la demostración es donde se hace uso de la continuidad de f en x.
Si se designa por $G(h)$ el último término del segundo miembro de (5.3), se trata de demostrar que $G(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Aplicando la definición de límite, se ha de probar que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$G(h) < \epsilon \text{ siempre que } 0 < h < \delta. \tag{5.4}$$

En virtud de la continuidad de f en x, dado un ϵ existe un número positivo δ tal que:

$$|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2}\epsilon. \tag{5.5}$$

siempre que

$$x - \delta < t < x + \delta. \tag{5.6}$$

Si se elige h de manera que $0 < h < \delta$, entonces cada t en el intervalo $[x, x+h]$ satisface (5.6) y por tanto (5.5) se verifica para cada t de este intervalo. Aplicando la propiedad $| \int_x^{x+h} | \leq \int_x^{x+h} |g(t)|\ dt$, cuando $g(t) = g(t) - f(x)$, de la desigualdad en (5.5) se pasa a la relación:

$$\left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\ dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt \leq \int_x^{x+h} \frac{1}{2}\epsilon\,dt = \frac{1}{2}h\epsilon < h\epsilon.$$

Dividiendo por h se ve que (5.4) se verifica para $0 < h < \delta$. Si $h < 0$, un razonamiento análogo demuestra que (5.4) se verifica siempre que $0 < |h| < \delta$, lo que completa la demostración. ■

5.2 Teorema de la derivada nula

Si una función f es constante en un intervalo (a, b), su derivada es nula en todo el intervalo (a, b). Ya hemos demostrado este hecho como una consecuencia inmediata de la definición de derivada. También se demostró, como parte c) del teorema 4.7, el recíproco de esa afirmación que aquí se presenta como teorema independiente.

Teorema 5.2 **Teorema de la derivada nula.** Si $f'(x) = 0$ para cada x en un intervalo abierto I, es f constante en I. ■

Este teorema, cuando se utiliza combinando con el primer teorema fundamental del cálculo, nos conduce al segundo teorema fundamental.

5.3 Funciones primitivas y segundo teorema fundamental del cálculo

Definición 5.1 **Definición de función primitiva.** Una función P se llama primitiva (o antiderivada) de una función f en un intervalo abierto I si la derivada de P es f, esto es, si $P'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Decimos una primitiva y no la primitiva, porque si P es una primitiva de f también lo es $P + k$ para cualquier constante k. Recíprocamente, dos primitivas cualesquiera P y Q de la misma función f sólo pueden diferir en una constante por que su diferencia $P - Q$ tiene la derivada

$$P'(x) - Q'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

para toda x en I y por tanto, según el teorema 5.2

Teorema 5.3 **Segundo teorema fundamental del cálculo.** Supongamos f continua en un intervalo abierto I, y sea P una primitiva cualquiera de f en I. Entonces, para cada c y cada x en I, tenemos

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)\, dt.$$

Demostración.- Sea $A(x) = \int_c^x f(t)\, dt$. Puesto que f es continua en cada x de I, el primer teorema fundamental nos dice que $A'(x) = f(x)$ para todo x de I. Es decir, A es primitiva de f en I. Luego, ya que dos primitivas de f pueden diferir tan sólo en una constante, debe ser $A(x) - P(x) = k$ para una cierta constante k. Cuando $x = c$ esta fórmula implica $-P(c) = k$, ya que $A(c) = 0$. Por consiguiente, $A(x) - P(x) = -P(c)$, de lo que obtenemos $P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)\, dt$. es constante en I. ■

El teorema 5.3 nos indica cómo encontrar una primitiva P de una función continua f. Integrando f desde un punto fijo c a un punto arbitrario x y sumando la constante $P(c)$ obtenemos $P(x)$. Pero la importancia real del teorema radica en que poniendo $P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)\, dt$ en la forma

$$\int_c^x f(t)\, dt = P(x) - P(c).$$

Se ve que podemos calcular el valor de una integral mediante una simple substracción si conocemos una primitiva P.

Como consecuencia del segundo teorema fundamental, se pueden deducir las siguientes fórmulas de integración.

Ejemplo 5.1 **Integración de potencias recionales.** La fórmula de integración

$$\int_a^b x^n\, dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

se demostró directamente en la Sección 1.23 (Spivak) a partir de la definición de integral. Aplicando el segundo teorema fundamental, puede hallarse de nuevo este resultado y además generalizarlo para exponentes racionales. En primer lugar se observa que la función P definida por

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

tiene como derivada $P'(x) = x^n$ para cada n entero no negativo. De esta igualdad válida para todo número real x, aplicando $\int_c^x f(t)\, dt = P(x) - P(c)$ se tiene

$$\int_a^b x^n\, dx = P(b) - P(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

para cualquier intervalo $[a, b]$. Esta fórmula, demostrada para todo entero $n \geq 0$ conserva su validez para todo entero negativo excepto $n = -1$, que se excluye puesto que el denominador aparece $n + 1$. Para demostrar $\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ para n negativo, basta probar que $P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ implica $P'(x) = x^n$ cuando n es negativo $x \neq -1$, lo cual es fácil de verificar derivando P como función racional. Hay que tener en cuenta que si n es negativo se deben excluir aquellos intervalos $[a, b]$ que contienen el punto $x = 0$. ∎

El resultado del ejemplo 3 de la Sección 4.5, permite extender $\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ a todos los exponentes racionales (excepto -1) siempre que el integrando esté definido en todos los puntos del intervalo $[a, b]$ en consideración.

Ejemplo 5.2 **Integración de seno y coseno.** Puesto que la derivada del seno es el coseno y la del coseno menos el seno, el segundo teorema fundamental da las fórmulas siguientes:

$$\int_a^b \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_a^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a,$$

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_a^b = -\cos b + \cos a.$$

∎

Estas fórmulas se conocían ya, pues se demostraron en el capítulo 2 a partir de la definición de integral. Se obtienen otras fórmulas de integración a partir de los ejemplos 1 y 2 tomando sumas finitas de términos de la forma Ax^n, $B \operatorname{sen} x$, $Ccosx$, donde A, B, C son constantes.

5.4 Propiedades de una función deducida de propiedades de su derivada

Si una función f tiene derivada continua f' en un intervalo abierto I, el segundo teorema fundamental afirma que

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) \, dt$$

cualesquiera que sean x y c en I.

Propiedad .4 Supóngase que f' es continua y no negativa en I. Si $x > c$, entonces $\int_c^x f'(t) \, dt \geq 0$, y por tanto $f(x) \geq f(c)$. Es decir, si la derivada es continua y no negativa en I, la función es creciente en I.

En el teorema 2.9 se demostró que la integral indefinida de una función creciente es convexa. Por consiguiente, si f' es continua y creciente en I, la igualdad $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) \, dt$ demuestra que f es convexa en I. Análogamente, f es cóncava en los intervalos en los que f' es continua y decreciente.

5.5 Ejercicios

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 10, encontrar una primitiva de f; es decir, encontrar una función P tal que $P'(x) = f(x)$ y aplicar el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x) \, dx$.

1. $f(x) = 5x^3$.

Respuesta.- Por el ejemplo 5.1 (Apostol) se define a P como,

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Por lo que la función primitiva de $5x^3$, esta dada por:

$$P(x) = 5\frac{x^{3+1}}{3+1} = 5\frac{x^4}{4}.$$

Esta función es primitiva de f ya que:

$$P'(x) = 5\frac{x^4}{4} = 5x^3.$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b 5x^3\,dx &= P(b) - P(a) \\ &= \frac{5}{4}b^4 - \frac{5}{3}a^4. \\ &= \frac{5}{4}(b^4 - a^4). \end{aligned}$$

2. $f(x) = 4x^4 - 12x$.

Respuesta.- Por el ejemplo 5.1 (Apostol) se define a P como,

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Por lo que la función primitiva de $4x^4 - 12x$, esta dada por:

$$\begin{aligned} P(x) &= 4\frac{x^{4+1}}{4+1} - 12\frac{x^{1+1}}{1+1} \\ &= \frac{4}{5}x^5 - 6x^2. \end{aligned}$$

Esta función es primitiva de f ya que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{5}x^5 - 6x^2 \\ &= 4x^4 - 12x. \end{aligned}$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b 4x^4 - 12x\,dx &= P(b) - P(a) \\ &= \frac{4}{5}b^5 - 6b^2 - \left(\frac{4}{5}a^5 - 6a^2\right) \\ &= \frac{4}{5}(b^5 - a^5) - 6(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

3. $f(x) = (x+1)(x^3-2)$.

Respuesta.- Por el ejemplo 5.1 (Apostol) se define a P como,

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Por lo que la función primitiva de $(x+1)(x^3-2) = x^4 + x^3 - 2x - 2$, esta dada por:

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & \dfrac{x^{4+1}}{4+1} + \dfrac{x^{3+1}}{3+1} - 2\dfrac{x^{1+1}}{1+1} - 2\dfrac{x^{0+1}}{0+1} \\ & = & \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 - 2x. \end{array}$$

Esta función es primitiva de f ya que,

$$\begin{array}{rcl} P'(x) & = & \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 - 2x \\ & = & x^4 + x^3 - 2x - 2 \\ & = & (x+1)(x^3-2). \end{array}$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_a^b (x+1)(x^3-2)\,dx & = & P(b) - P(a) \\ & = & \dfrac{b^5}{5} + \dfrac{b^4}{4} - 2b^2 - 2b - \left(\dfrac{a^5}{5} + \dfrac{a^4}{4} - 2a^2 - 2a\right) \\ & = & \dfrac{1}{5}\left(b^5 - a^5\right) + \dfrac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right) - \left(b^2 - a^2\right) - 2(b-a). \end{array}$$

4. $f(x) = \dfrac{x^4 + x - 3}{x^3}, \qquad x \neq 0.$

Respuesta.- Podemos reescribir la función f como:

$$f(x) = \frac{x^4 + x - 3}{x^3} = \left(x^4 + x - 3\right)x^{-3} = x + x^{-2} - 3x^{-3}.$$

Por el ejemplo 5.1 (Apostol) se define a P como,

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Por lo que la función primitiva de $x + x^{-2} - 3x^{-3}$, esta dada por:

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & \dfrac{x^{1+1}}{1+1} + \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} - \dfrac{3x^{-3+1}}{-3+1} \\ & = & \dfrac{x^2}{2} - x^{-1} + \dfrac{3x^{-2}}{2}. \end{array}$$

Esta función es primitiva de f ya que,

$$P'(x) = x + x^{-2} - 3x^{-3} = \frac{x^4 + x - 3}{x^3} = f(x).$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= P(b) - P(a) \\
&= \frac{b^2}{2} - b^{-1} + \frac{3b^{-2}}{2} - \left(\frac{a^2}{2} - a^{-1} + \frac{3a^{-2}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \left(b^{-1} - a^{-1}\right) + \frac{3}{2}\left(b^{-2} - a^{-2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).
\end{aligned}$$

5. $f(x) = \left(1 + \sqrt{x}\right)^2, \quad x > 0.$

Respuesta.- Dado que $x > 0$. Reescribimos la función f como:

$$f(x) = 1 + 2\sqrt{x} + |x| \quad \Rightarrow \quad f(x) = 1 + 2x^{\frac{1}{2}} + x$$

Como $x > 0$, entonces $|x| = x$. Luego, por el ejemplo 5.1 (Apostol) tenemos,

$$\begin{aligned}
P(x) &= 1\frac{x^{0+1}}{0+1} + \frac{2x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} \\
&= x + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Esta función es primitiva de f ya que,

$$P'(x) = 1 + \frac{3}{2}\frac{4x^{\frac{3}{2}-1}}{3} + \frac{2x^2}{2} = 1 + 2x^{\frac{1}{2}} + x = \left(1 + \sqrt{x}\right)^2 = f(x).$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= P(b) - P(a) \\
&= x + \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{b^2}{2} - \left(x + \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{a^2}{2}\right) \\
&= \frac{4}{3}\left(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) + (b - a).
\end{aligned}$$

6. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{1}{2}x}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Por el ejemplo 5.1 (Apostol) tenemos,

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \\
&= \frac{2\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3}
\end{aligned}$$

Esta función es primitiva de f ya que,

$$P'(x) = \frac{3}{2}\frac{2\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}-1}}{3} + \frac{3}{2}\frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}-1}}{3} = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{1}{2}x} = f(x).$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= P(b) - P(a) \\
&= \frac{2\sqrt{2}b^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{3} - \left(\frac{2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}{3}\right) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{3}\right)b^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{3}\right)a^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}$$

7. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 7}{2\sqrt{x}} \qquad x > 0.$

Respuesta.- Reescribimos la función f como:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{7}{2x^{\frac{1}{2}}} \\
&= x^2x^{-\frac{1}{2}} - 3xx^{-\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\
&= x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por el ejemplo 5.1 (Apostol) tenemos,

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{3x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{7}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \\
&= \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - 2x^{\frac{3}{2}} + 7x^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Esta función es primitiva de f ya que,

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \frac{5}{2}\cdot\frac{2x^{\frac{5}{2}-1}}{5} - \frac{3}{2}\cdot 2x^{\frac{3}{2}-1} + \frac{1}{2}\cdot 7x^{\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}}. \\
&= \frac{2x^2 - 6x + 7}{2\sqrt{7}} = f(x).
\end{aligned}$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= P(b) - P(a) \\
&= \frac{2b^{\frac{5}{2}}}{5} - 2b^{\frac{3}{2}} + 7b^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2a^{\frac{5}{2}}}{5} - 2a^{\frac{3}{2}} + 7a^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{2}{5}\left(b^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}\right) - 2\left(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right) + 7\left(b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

8. $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}, \qquad x > 0.$

Respuesta.- Por el ejemplo 5.1 (Apostol) tenemos,

$$\begin{aligned}
P(x) &= 2\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \\
&= \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{2} - \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}
\end{aligned}$$

Esta función es primitiva de f ya que,

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \frac{4}{3}\cdot\frac{3x^{\frac{4}{3}-1}}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3x^{\frac{2}{3}-1}}{2} \\
&= 2x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} = f(x).
\end{aligned}$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= P(b) - P(a) \\
&= \frac{3b^{\frac{4}{3}}}{2} - \frac{3b^{\frac{2}{3}}}{2} - \left(\frac{3a^{\frac{4}{3}}}{2} - \frac{3a^{\frac{2}{3}}}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}}\right) - \frac{3}{2}\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right).
\end{aligned}$$

9. $f(x) = 3\operatorname{sen} x + 2x^5$.

Respuesta.- Claramente podemos ver que,

$$P(x) = -3\cos x + \frac{1}{3}x^6,$$

es una función primitiva ya que,

$$P'(x) = 3\operatorname{sen} x + 2x^5 = f(x).$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\, dx$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= P(b) - P(a) \\ &= -3\cos b + \frac{1}{3}b^6 - \left(-3\cos a + \frac{1}{3}a^6\right) \\ &= -3(\cos b - \cos a) + \frac{1}{3}\left(b^6 - a^6\right).\end{aligned}$$

10. $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 5\cos x$.

Respuesta.- Claramente podemos ver que,

$$P(x) = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - 5\sin x,$$

es una función primitiva ya que,

$$P'(x) = x^{\frac{4}{3}} - 5\cos x = f(x).$$

Luego, aplicando el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\, dx$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= P(b) - P(a) \\ &= \frac{3}{7}b^{\frac{7}{3}} - 5\sin b - \left(\frac{3}{7}a^{\frac{7}{3}} - 5\sin a\right) \\ &= \frac{3}{7}\left(b^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{7}{3}}\right) - 5\left(\sin b - \sin a\right).\end{aligned}$$

11. Demostrar que no existe ningún polinomio f cuya derivada esté dada por la fórmula $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración.- Supongamos lo contrario. Sea $f'(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}$, entonces podemos hallar su primitiva de la siguiente manera:

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0}.$$

Lo cual es un absurdo. Por lo tanto no existe ningún polinomio f cuya derivada esté dada por la fórmula $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

12. Demostrar que $\int_0^x |t|\, dt = \frac{1}{2}x|x|$ para todo número real x.

Demostración.- Consideremos tres casos.

Caso 1. Si $x = 0$, entonces para ambos lados de la ecuación el resultado será 0, por lo que el resultado se cumple.

Caso 2. Si $x > 0$, entonces $|t| = t$ para todo $t \in [0, x]$, así

$$\int_0^x |t|\ dt = \int_0^x t\ dt = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x|x|.$$

Caso 3. Si $x < 0$, entonces $|t| = -t$ para todo $t \in [x, 0]$, así

$$\int_0^x |t|\ dt = -\int_0^x t\ dt = \int_x^0 t\ dt = \frac{1}{2}t^2\bigg|_x^0 = -\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x|x|.$$

13. Demostrar que

$$\int_0^x (t+|t|)^2\ \ dt = \frac{2x^2}{3}(x+|x|) \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Demostración.- Consideremos dos casos.

Caso 1. Si $x \geq 0$ entonces $t = |t|$ para todo $t \in [0, x]$ así,

$$\int_0^x (t+|t|)^2\ dt = \int_0^x 4t^2\ dt = \frac{4}{3}x^3 = \frac{2}{3}x^2(2x) = \frac{2}{3}x^2(x+|x|).$$

Caso 2. Si $x < 0$ entonces $|t| = -t$ para todo $t \in [x, 0]$ así,

$$\int_0^x (t+|t|)^2\ dt = \int_0^x (t-t)^2\ dt = 0 = \frac{2}{3}x^2(x-x) = \frac{2}{3}x^2(x+|x|).$$

14. Una función f es continua para cualquier x y satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)\ dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

para todo x. Calcular $f\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ y $f'\left(\frac{1}{4}\pi\right)$.

Respuesta.- Sea,

$$A(x) = \int_0^x f(t)\ dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo la derivada de $A(x)$ existe. Es decir,

$$A'(x) = f(x).$$

De donde,

$$f(x) = A'(x) = 2x + \operatorname{sen}(2x) + 2x\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x) = 2x + 2x\cos(2x).$$

Luego, evaluando en $x = \frac{\pi}{4}$ tenemos

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = A'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Por otro lado, derivamos $f(x)$ y obtenemos

$$f(x) = 2x + 2x\cos(2x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 + 2\cos(2x) - 4x\operatorname{sen}(2x).$$

Así,

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \pi.$$

15. Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que:

$$\int_c^x f(t)\ dt = \cos x - \frac{1}{2} \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Respuesta.- Sea $f(t) = -\operatorname{sen} t$ y $c = \frac{\pi}{3}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_c^x f(t)\ dt &= \int_{\frac{\pi}{3}}^x (-\operatorname{sen} t)\ dt \\ &= \cos t \Big|_{\frac{\pi}{3}}^x \\ &= \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

16. Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que:

$$\int_c^x tf(t)\ dt = \operatorname{sen} x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2 \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Respuesta.- Sea $f(t) = \operatorname{sen} t - 1$ y $c = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_c^x tf(t)\ dt &= \int_0^x (t\operatorname{sen} t - t)\ dt \\ &= \left(\operatorname{sen} t - t\cos t - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^x \\ &= \operatorname{sen} x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

17. Existe una función f definida y continua para todo número real x que satisface una ecuación de la forma:

$$\int_0^x f(t)\ dt = \int_x^1 t^2 f(t)\ dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c,$$

donde c es constante. Encontrar una fórmula explícita para $f(x)$. y hallar el valor de la constante c.

Respuesta.- Sea $P(x) = \int_x^1 t^2 f(t)\ dt$. Entonces, usando los teoremas fundamentales del calculo, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) = [P(1) - P(x)]' + 2x^{15} + 2x^{17} + 0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) = -x^2 f(x) + 2x^{15} + 2x^{17} \\ &\Rightarrow \quad f(x)\left(x^2+1\right) = 2x^{15}\left(x^2+1\right). \\ &\Rightarrow \quad f(x) = 2x^{15}. \end{aligned}$$

Ahora, reemplazando $f(x)$ en la ecuación inicial, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^x 2t^{15}\,dt &= \int_x^1 t^2\cdot 2t^{15}\,dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c\\
\left.\frac{t^{16}}{8}\right|_0^x &= \left.\frac{t^{18}}{9}\right|_x^1 + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c\\
\frac{16}{8} &= \frac{1}{9} - \frac{x^{18}}{9} + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c\\
c &= -\frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

18. Una función f está definida para todo real x por la fórmula

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2}\,dt.$$

Sin intentar el cálculo de esta integral, hallar un polinomio cuadrado $p(x) = a + bx + cx^2$ tal que $p(0) = f(0),\ p'(0)$ y $p''(0) = f''(0)$.

Respuesta.- Sea $p(0) = a + b\cdot 0 + c\cdot 0^2 = a$. Luego calculemos $f(0)$, como sigue

$$f(0) = 3 + \int_0^0 \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2}\,dt = 3.$$

Dado que $f(0) = p(0)$ tenemos

$$a = 3.$$

Después, sea

$$p'(x) = b + 2cx \quad \Rightarrow \quad p'(0) = b$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo,

$$f'(x) = \left(3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2}\,dt\right)' = \frac{1+\operatorname{sen} x}{2+x^2}.$$

Luego, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$. Ya que $f'(0) = p'(0)$, entonces $b = \dfrac{1}{2}$.
Finalmente,

$$p''(x) = 2c \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2c.$$

Calculemos $f''(0)$, como sigue

$$f''(0) = \frac{\cos x(2+x^2) - 2x(1+\operatorname{sen} x)}{(2+x^2)^2}$$

De donde

$$f''(0) = \frac{1\cdot(2+0) - 0(1+0)}{(2+0)^2} = \frac{1}{2}.$$

Dado que $f''(0) = p''(0)$, entonces

$$c = \frac{1}{4}.$$

Así,

$$p(x) = 3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2.$$

19. Dada una función g, continua para todo x, tal que $g(1) = 5$ e $\int_0^1 g(t)\ dt = 2$. Póngase $f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\ dt$, demostrar que

$$f'(x) = x\int_0^x g(t)\ dt - \int_0^x tg(t)\ dt,$$

y calcular $f''(1)$ y $f'''(1)$.

Demostración.- Podemos reescribir f de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \left[x^2g(t) - 2xtg(t) + t^2g(t)\right]\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x x^2g(t)\ dt - \int_0^x xtg(t)\ dt + \int_0^x t^2g(t)\ dt \\
&= \frac{x^2}{2}\int_0^x g(t)\ dt - x\int_0^x tg(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_0^x t^2g(t)\ dt.
\end{aligned}$$

De donde sacamos x de la integral ya que no depende de t. Después, usando la regla del producto y el teorema 1.1, sacamos la derivada de x.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^2}{2}\right)'\int_0^x g(t) + \frac{x^2}{2}\left(\int_0^x g(t)\ dt\right)' - x'\int_0^x tg(t)\ dt - x\left(\int_0^x tg(t)\ dt\right)' + \frac{1}{2}\left(\int_0^x t^2g(t)\right)' \\
&= x\int_0^x g(t)\ dt + \frac{x^2}{2}g(x) - \int_0^x tg(t)\ dt - x^2g(x) + \frac{x^2}{2}g(x) \\
&= x\int_0^x g(t)\ dt - \int_0^x tg(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Luego, calculamos f'' y f''':

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \int_0^x g(t)\ dt + xg(x) - xg(x) \\
&= \int_0^x g(t)\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \left(\int_0^x g(t)\right)' \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f''(1) = \int_0^1 g(t)\ dt = 2$$

$$f'''(1) = g(1) = 4.$$

20. Sin calcular las siguientes integrales indefinidas, hallar la derivada $f'(x)$ en cada caso si $f(x)$ es igual a

(a) $\displaystyle\int_0^x (1+t^2)^{-3}\,dt.$

Respuesta.- Sea
$$A(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}\,dt.$$
Entonces por el primer teorema fundamental del calculo (teorema 1.1),
$$f'(x) = A'(x) = \left(1+x^2\right)^{-3}.$$

(b) $\displaystyle\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt.$

Respuesta.- Sea
$$A(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt.$$
Entonces, por teorema 1.1
$$f'(x) = A'\left(x^2\right) = 2xA'\left(x^2\right) = (2x)\left[1+\left(x^2\right)^2\right]^{-3} = 2x\left(1+x^4\right)^{-3}.$$

(c) $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt.$

Respuesta.- Reescribamos la integral como,
$$f(x) = \int_{x^3}^{x^2}\left(1+t^2\right)^{-3}\,dt = \int_0^{x^2} - \int_0^{x^3}\left(1+t^2\right)^{-3}\,dt.$$
Así,
$$f(x) = A\left(x^2\right) - A\left(x^3\right).$$
Por lo tanto,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[A\left(x^2\right)\right]' - \left[A\left(x^3\right)\right]' \\ &= (2x)A'\left(x^2\right) + \left(3x^2\right)A'\left(x^3\right) \\ &= (2x)\left(1+x^4\right)^{-3} - \left(3x^2\right)\left(1+x^6\right)^{-3} \end{aligned}$$

21. Sin calcular la integral, calcular $f'(x)$ si f está definida por la fórmula
$$f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt.$$

Respuesta.- Sea
$$A(x) = \int_0^x \frac{t^6}{1+t^4}\,dt.$$
Entonces, por el primer teorema fundamental del calculo (teorema 1.1),
$$A'(x) = \frac{x^6}{1+x^4}.$$

Así, usando la linealidad de la integral

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt \\ &= \int_0^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt - \int_0^{x^3} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt \\ &= A\left(x^2\right) - A\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la regla de la cadena concluimos que,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[A\left(x^2\right)\right]' - \left[A\left(x^3\right)\right]' \\ &= (2x)\,A'\left(x^2\right) - \left(3x^2\right)\left(x^3\right) \\ &= (2x)\,\frac{x^{12}}{1+x^8} - \left(3x^2\right)\frac{x^{18}}{1+x^{12}} \\ &= \frac{2x^{13}}{1+x^8} - \frac{3x^{20}}{1+x^{12}}. \end{aligned}$$

22. En cada caso, calcular $f(2)$ si f es continua y satisface la fórmula dada para todo $x \geq 0$.

(a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$.

Respuesta.- Ya que,

$$\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x) = x^3 + x^2.$$

Tomemos la derivada de ambos lados,

$$f(x) = 3x^2 + 2x.$$

Por lo tanto,

$$f(2) = 16.$$

(b) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1+x)$.

Respuesta.- Ya que,

$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1+x) = x^3 + x^2.$$

Tomamos la derivada de ambos lados como se observa en la parte (b) del ejercicio 20, Spivak, capítulo 5. Para obtener

$$2xf\left(x^2\right) = 3x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad f\left(x^2\right) = \frac{3}{2}x + 1.$$

Por lo tanto,

$$f(2) = f\left(\sqrt{2}^2\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1.$$

(c) $\displaystyle\int_0^{f(x)} t^2\, dt = x^2(1+x)$.

Respuesta.- Tenemos,

$$\int_0^{f(x)} t^2\, dt = x^2(1+x) = x^3 + x^2.$$

Evaluando la integral de la parte izquierda,

$$\int_0^{f(x)} t^2\, dt = \frac{1}{3}\bigg|_0^{(x)} = \frac{1}{3}\left[f(x)\right]^3.$$

Por lo tanto,

$$f(2) = 36^{\frac{1}{3}}.$$

(d) $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\, dt = x$.

Respuesta.- Tenemos,

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\, dt = x.$$

Tomando la derivada de ambos lados,

$$\left(3x^2+2x\right) f\left(x^3+x^2\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad f\left(x^3+x^2\right) = \frac{1}{3x^2+2x}.$$

Entonces, por el hecho de que

$$x^3 + x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

ya que que el polinomio cúbico $x^3 + x^2 - 2 = 0$ tiene sólo una raíz real en $x = 1$. Entonces,

$$f(2) = \frac{1}{5}.$$

23. La base de un sólido es el conjunto de ordenadas de una función no negativa f en el intervalo $[0, a]$. Todas las secciones perpendiculares a ese intervalo son cuadrados. El volumen del sólido es

$$a^3 - 2a\cos a + \left(2 - a^2\right)\operatorname{sen} a$$

para todo $a \geq 0$. Suponiendo que f es continua en $[0, a]$, calcular $f(a)$.

Respuesta.- Tenemos la expresión,

$$V = a^3 - 2a\cos a + \left(2 - a^2\right)\operatorname{sen} a.$$

Sabemos que podemos calcular el volumen como la integral de 0 a a del área de cada sección transversal. Dado que las secciones transversales son cuadrados y la longitud del borde en la base está dada por $f(x)$ (ya que la base es el conjunto ordenado de f, la longitud de la base de una sección transversal en un punto x es $f(x) - 0 = f(x)$). Sabemos que el área de cada sección transversal es $[f(x)]^2$. Por lo tanto, tenemos otra expresión para el volumen del sólido dada por

$$V = \int_0^a \left[f(x)\right]^2\, dx.$$

Igualando estas dos expresiones para el volumen y diferenciando ambos lados tenemos

$$a^3 - 2a\cos a + \left(2 - a^2\right)\operatorname{sen} a = \int_0^x [f(x)]^2\, dx \quad \Rightarrow \quad 3a^2 - a^2\cos a = [f(a)]^2$$
$$\Rightarrow \quad f(a) = a(3 - \cos a)^{\frac{1}{2}}.$$

24. Un mecanismo impulsa una partícula a lo largo de una recta. Está concebido de manera que la posición de la partícula en el instante t a partir del punto inicial 0 en la recta está dado por la fórmula $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t\operatorname{sen} t$. El mecanismo trabaja perfectamente hasta el instante $t = \pi$ en surge una avería inesperada. A partir de ese momento la partícula se mueve con velocidad constante (1a velocidad adquirida en el instante $t = \pi$). Calcular : a) su velocidad en el instante $t = \pi$; b) su aceleración en el instante $t = \frac{1}{2}\pi$; c) su aceleración en el instante $\frac{3}{2}\pi$; d) su posición a partir de O en el instante $t = \frac{5}{2}\pi$; e) Hallar el instante $t > \pi$ en el que la partícula vuelve al punto inicial O, o bien demostrar que nunca regresa a O.

Respuesta.-

a) Ya que la velocidad de la partícula es dada por la derivada de la posición, tenemos

$$v(t) = f'(t) = t + 2\operatorname{sen} t + 2t\cos t.$$
$$v(\pi) = \pi + 2\operatorname{sen}(\pi) + 2\pi\cos(\pi) = \pi - 2\pi = -\pi.$$

b) La aceleración es la derivad de la velocidad del inciso a). Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} a(t) = v'(t) & = & 1 + 2\cos t + 2\cos t - 2t\operatorname{sen} t. \\ & = & 1 + 4\cos t - 2t\operatorname{sen} t. \end{array}$$

para $a\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{array}{rcl} a\left(\dfrac{\pi}{2}\right) & = & 1 + 4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \pi\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right). \\ & = & 1 + \pi. \end{array}$$

c) Sabemos por el enunciado del problem que $v(t) = c$ para $t > \pi$, donde c es una constante. Ya que $v'(t) = 0$ para $t > \pi$, se sigue que la aceleración en el tiempo $t = \dfrac{3}{2}\pi$ es 0.

d) Para encontrar la posición en el tiempo $t = \frac{5}{2}\pi$, consideremos el movimiento de la partícula en dos intervalos de tiempo: El tiempo de 0 a π y el tiempo desde π hasta $\frac{5}{2}\pi$. Durante el intervalo de tiempo $[0, \pi]$ la posición es dado por la siguiente función

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t\operatorname{sen} t.$$

Para el tiempo $t = \pi$, sabemos que la partícula se mueve con velocidad constante de $f'(\pi)$. Por lo que su posición cambia por $\frac{3}{2}\pi f'(\pi)$, durante el intervalo de tiempo $[\pi, \frac{5}{2}\pi]$. Por lo tanto, la posición en el tiempo $t = \frac{5}{2}\pi$ viene dado por

$$\begin{array}{rcl} f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) & = & f(\pi) + \left(\dfrac{3\pi}{2}\right)f'(\pi) \\ & = & \dfrac{\pi^2}{2} - \dfrac{3\pi^2}{2} \\ & = & -\pi^2. \end{array}$$

e) Se nos pide encontrar $t > \pi$ tal que $g(t) = 0$, donde
$$g(t) = f(\pi) + (t - \pi)v(\pi).$$
En la parte d), obtuvimos $f(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2$ y $v(\pi) = -\pi$. Por lo tanto,
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\pi^2 - \pi(t - \pi) &= 0 \\
\frac{1}{2}\pi^2 - \pi t + \pi^2 &= 0 \\
t\pi &= \frac{3}{2}\pi^2 \\
t &= \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

25. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición en el instante t en $f(t)$. Cuando $0 \leq t \leq 1$, la posición viene dada por la integral
$$f(t) = \int_0^t \frac{1 + 2\,\text{sen}\,\pi x \cos \pi x}{1 + x^2}\,dx.$$
(No intente el cálculo de esta integral.) Para $t \geq 1$, la partícula se mueve con aceleración constante (la aceleración adquirida en el instante $t = 1$). Calcular: a) su aceleración en el instante $t = 2$; b) su velocidad cuando $t = 1$; c) su velocidad cuando $t > 1$; d) la distancia $f(t) - f(1)$ cuando $t > 1$.

Respuesta.-

a) Dado que la aceleración en el tiempo $t \geq 1$ es constante, la aceleración en el tiempo $t = 2$ es la misma que la aceleración en tiempo $t = 1$. Para encontrar la aceleración en el tiempo $t = 1$, diferenciamos dos veces $f(t)$ y lo evaluamos en $t = 1$,
$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t \frac{1 + 2\,\text{sen}(\pi x)\cos(\pi x)}{1 + x^2}\,dx. \\
f'(t) &= \frac{1 + 2\,\text{sen}(\pi x)\cos(\pi x)}{1 + x^2} \\
&= \frac{1 + \text{sen}(2\pi t)}{1 + t^2}. \\
f''(t) &= \frac{\left(1 + t^2\right)\left[\cos(2\pi t) - 2t\left(1 + \text{sen}^2(\pi t)\right)\right]}{\left(1 + t^2\right)^2} \\
f''(1) &= \frac{4\pi - 2}{4} \\
&= \pi - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b) De la parte (a) sabemos que $f'(t) = v(t) = \dfrac{1+\text{sen}(2\pi t)}{1+t^2}$. Por lo que la velocidad en el tiempo $t = 1$ es

$$v(1) = f'(1) = \frac{1+\text{sen}(2\pi \cdot 1)}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

c) Podemos encontrar la velocidad en el tiempo $t > 1$, determinando la velocidad en el tiempo $t = 1$ y añadiendo la velocidad para moverse con la aceleración constante. Por lo tanto, tenemos

$$v(t) = v(1) + (t-1)\cdot a(t), \qquad t > 1.$$

Sabemos que $t > 1$. Así $a(t) = a(1) = \pi - \dfrac{1}{2}$. También conocemos que $v(t) = \dfrac{1}{2}$. De donde,

$$v(t) = \frac{1}{2} + (t-1)\left(\pi - \frac{1}{2}\right), \qquad t > 1.$$

d) La diferencia $f(t) - f(1)$ es la posición en el tiempo t menos la posición en el tiempo $t = 1$, donde t > 0. Entonces, usando la linealidad de la integral con respecto al intervalo de integración que tenemos,

$$f(t) - f(1) = \int_1^t f'(x)\, dt, \quad f'(t) - f'(1) = \int_1^t f''(x)\, dx.$$

Sabemos que $f''(t)$ es la aceleración y para $t > 1$ viene dada por

$$f''(t) = \pi - \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$f'(t) - f'(1) = \left(\pi - \frac{1}{2}\right)(t-1).$$

De donde,

$$\begin{aligned}
f(t) - f(1) &= \int_1^t (x-1)\left(\pi - \frac{1}{2}\right)\, dx \\
&= \int_1^t \left(\pi - \frac{1}{2}\right) x\, dx - \int_1^t \left(\pi - \frac{1}{2}\right)\, dx \\
&= \left(\pi - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}(t^2-1)\right]_1^t - (t-1)\left[\pi - \frac{1}{2}\right] \\
&= \left(\pi - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{t^2-2t+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

26. En cada uno de los casos siguientes encontrar una función f (con segunda derivada f'' continua) que satisfaga a todos las condiciones indicadas, o bien explicar por qué no es posible encontrar una tal función.

(a) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f'(1) = 0$.

Respuesta.- No puede haber una función que cumpla todas estas condiciones, ya que $f''(x) > 0$, de donde $f'(x)$ es creciente. Esto porque su derivada, f'', es positiva. Luego $f'(0) > f'(1)$ contradice que $f'(x)$ vaya creciendo.

(b) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f'(1) = 3$.

Respuesta.- Sea $f(x) = x^2 + x$. Luego

$$\begin{array}{rcl} f'(x) = 2x + 1 & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\ & \Rightarrow & f'(1) = 3. \end{array}$$

Además, $f''(x) = 2 > 0$ para cada x.

(c) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f(x) \leq 100$ para cada positivo x.

Respuesta.- No puede haber ninguna función que cumpla todas estas condiciones. Una vez más, $f''(x) > 0$ para todos x implica que $f'(x)$ está creciendo para todos x. Por lo tanto, $f'(0) = 1$ implica $f'(x) > 1$ para todos $x > 0$. Entonces, por el teorema del valor medio, sabemos que para cualquier $b > 0$ existe algún $c \in (0, b)$ tal que

$$f(b) - f(0) = f'(c)(c - 0) \quad \Rightarrow \quad f(b) > b + f(0), \quad \text{ya que } f'(c) > 1.$$

Luego, elija $b > 100 - f(0)$. Por lo que, $f(b) > 100$, el cual contradice $f(x) \leq 100$ para cada $x > 0$.

(d) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f(x) \leq 100$ para cada negativo x.

Respuesta.- Definamos f como sigue,

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Notemos que la derivada está definida en $x = 0$, por lo que podemos derivar cada parte,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{si } x \geq 0 \\ \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Derivando una vez más, tenemos

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq 0 \\ \\ \dfrac{2}{(1-x)^3} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Así, $f''(x) > 0$ para todo x y $f'(0) = 1$. Además, para $x < 0$ se tiene,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \leq 100 \text{ para todo } x < 0.$$

27. Una partícula se mueve a lo largo de una recta, siendo su posición en el instante t, $f(t)$. Parte con una velocidad inicial $f'(0) = O$ Y tiene una aceleración continua $f''(t) \geq 6$ para todo t en el intervalo $O \leq t \leq 1$. Demostrar que la velocidad es $f'(t) \geq 3$ para todo t en un cierto intervalo $[a, b]$, donde $O \leq a < b \leq 1$, siendo $b - a = \frac{1}{2}$.

Respuesta.- Por el segundo teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$\begin{aligned} f'(t) - f'(0) = \int_0^t f''(x)\,dx \quad &\Rightarrow \quad f'(t) \geq \int_0^x 6\,dx \\ &\Rightarrow \quad f'(t) \geq 6t \\ &\Rightarrow \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) \geq 3. \end{aligned}$$

Entonces, ya que $f''(x) \geq 6 > 0$, que implica $f'(x)$ sea creciente para todo $t \in [0,1]$, se tiene

$$f'(t) \geq 3, \ \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Con esto, notemos que tenemos $b = 1$ y $a = \frac{1}{2}$, por ende $b - a = \frac{1}{2}$ y $f'(t) \geq 3, \ \forall t \in [a,b]$ para $0 \leq a < b \leq 1$, como se solicitó.

28. Dada una función f tal que la integral $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ exista para cada x e un intervalo $[a,b]$. Sea c un punto del intervalo abierto (a,b). Considerar las siguientes afirmaciones relativas a f y A:

a) f es continua en c.

b) f es discontinua en c.

c) f es creciente en (a,b).

d) $f'(c)$ existe.

e) f' es continua en c.

α) A es continia en c.

β) A es discontinua en c.

γ) A es convexa en (a,b).

δ) $A'(c)$ existe.

ϵ) A' es continua en c.

Respuesta.- La tabla estaría dada por:

	α	β	γ	δ	ϵ
a	V			V	
b	V				
c	V		V		
d	V			V	
e	V			V	V

Sabemos que la primera columna tiene todos los V ya que la función $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua para cualquier función f. Por el primer teorema fundamental sabemos que la derivada $A'(x)$ existe en cada punto en el intervalo abierto (a,b). Como diferenciabilidad implica continuidad, entonces sabemos que $A(x)$ es continua en cualquier punto $c \in (a,b)$.
Luego sabemos que la segunda columna no puede tener V en ninguna parte, por el mismo argumento anterior, la función $A(x)$ es continua en todos los puntos $c \in (a,b)$. Por lo tanto, no puede ser discontinuo en ningún punto.
El enunciado a, b, c, d y e no puede implicar que $A(x)$ sea convexo en (a,b), ya que son enunciados sobre continuidad y existencia de derivadas. Ninguna de estas propiedades tiene que ver con la convexidad. Entonces, el enunciado c) si implica la afirmación γ, esto porque una función es convexa si su derivada es creciente. Como f es la derivada de A y es creciente tenemos que A es convexa.

5.6 La notación de Leibniz para las primitivas

Hemos definido una primitiva P de una función f como cualquier función para la que $P'(x) = f(x)$. Si f es continua en un intervalo, una primitiva viene dada por una fórmula de la forma

$$P(x) = \int_c^x f(t)\, dt.$$

Leibniz usó el símbolo $\int f(x)\ dx$ para designar una primitiva general de f. Con esta notación, una igualdad como

$$\int f(x)\, dx = P(x) + C$$

se considera como otra forma de escribir $P'(x) = f(x)$.

Ya que la derivada de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es x^n, podemos escribir

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

para cualquier potencia racional tal que $n \neq -1$. El símbolo C representa una constante arbitraria.

El primer teorema fundamental indica que cada integral indefinida de f es también una primitiva de f. Por lo cual, en $\int f(x)\ dt = P(x) + C$, se puede sustituir $P(x)$ por $\int_c^x f(t)\ dt$ donde c es un cierto límite inferior y resulta:

$$\int f(x)\, dx = \int_c^x f(t)\, dt + C.$$

Esto indica que se puede considerar el símbolo $\int f(x)\ dx$ como representante de una integral indefinida de f, más una constante.

El segundo teorema fundamental, expresa que para cada primitiva P de f y cada constante C, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [P(x) + C]\Big|_a^b.$$

Si se sustituye $P(x) + C$ por $\int f(x)\ dx$, esta fórmula se puede escribir de la forma:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int f(x)\, dx\Big|_a^b.$$

Debido a una larga tradición, muchos tratados de Cálculo consideran el símbolo $\int f(x)\ dx$ como representante de una integral indefinida y no de una función primitiva o antiderivada-

5.7 Integración por sustitución

Sea Q la composición de dos funciones P y g, es decir $Q(x) = P[g(x)]$ para todo x en un cierto intervalo I. Entonces,

$$P'(x) = f(x) \text{ implica } Q'(x) = f[g(x)]g'(x).$$

Con la notación de Leibniz, esta afirmación puede escribirse del modo siguiente: Si tenemos la fórmula de integración

$$\int f(x) = P(x) + C,$$

tenemos también la fórmula más general

$$\int f[g(x)]g'(x)\ dx = P[g(x)] + C.$$

Sustituimos $g(x)$ por un nuevo símbolo u y reemplacemos $g'(x)$ por du/dx, según la notación de Leibniz para las derivadas. Entonces,

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\ dx = P(u) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(u)\ du = P(u) + C.$$

Teorema 5.4 **Teorema de sustitución para integrales.** Supongamos que g tiene una derivada continua g' en un intervalo I. Sea J el conjunto de los valores que toma g en I y supongamos que f es continua en J. Entonces para cada x y cada c en I, tenemos

$$\int_c^x f[g(t)]g'(t)\ dt = \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)\ du.$$

Demostración.- Sea $g(c)$ y definimos dos nuevas funciones P y Q del siguiente modo:

$$P(x) = \int_c^x f(u)\ du \quad \text{si } x \in J, \qquad Q(x) = \int_c^x f[g(t)]g'(t)\ dt \quad \text{si } x \in I.$$

Puesto que P y Q son integrales indefinidas de funciones continuas, tienen derivadas dada por la fórmulas

$$P'(x) = f(x), \quad Q'(x) = f[g(x)]g'(x).$$

Llamemos ahora R a la función compuesta, $R(x) = P[g(x)]$. Con la regla de la cadena, encontramos

$$R'(x) = P'[g(x)]g'(x) = f[g(x)]g'(x) = Q'(x).$$

Aplicando dos veces el segundo teorema fundamental, obtenemos

$$\int_{g(x)}^{g(x)} f(u)\ du = \int_{g(x)}^{g(x)} P'(u)\ du = P[g(x)] - P[g(c)] = R(x) - R(c),$$

y

$$\int_c^x f[g(t)]g'(t)\ dt = \int_c^x Q'(t)\ dt = \int_c^x R'(t)\ dt = R(x) - R(c).$$

Esto demuestra que las dos integrales $\int_c^x f[g(t)]g'(t)\ dt = \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)\ du$ son iguales. ■

5.8 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 20, aplicar el método de sustitución para calcular las integrales.

1. $\int \sqrt{2x+1}\ dx.$

Respuesta.- Sea $u = 2x+1 \Rightarrow 2 = \dfrac{du}{dx}$. Entonces, usando la sustitución

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \frac{\sqrt{u}}{2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)+C \\
&= \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C.
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int x\sqrt{1+2x}\,dx$.

Respuesta.- Sea

$$u = 1+3x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u-1}{3}$$

$$du = 3\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}\,du.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1+3x}\,dx &= \int \left(\frac{u-1}{3}\right)\left(\sqrt{u}\right)\,\frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\,du \\
&= \frac{1}{9}\int u^{\frac{3}{2}} - \int u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)+C \\
&= \frac{2}{45}(1+3x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{27}(1+3x)^{\frac{3}{2}}+C.
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$.

Respuesta.- Sea

$$u = x+1 \quad \Rightarrow \quad x = u-1$$

$$du = dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{x+1}\,dx &= \int (u-1)^2\sqrt{u}\,du \\
&= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)\,du \\
&= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{2-3x}}$.

Respuesta.- Sea

$$u = 2-3x \quad\Rightarrow\quad x = \frac{2-u}{3}$$

$$du = -3\,dx \quad\Rightarrow\quad dx = -\frac{1}{3}\,du.$$

Por el teorema 1.4,

$$u\left(\frac{1}{3}\right) = 2-3\cdot\frac{1}{3} = 1 \qquad \text{y} \qquad u\left(-\frac{2}{3}\right) = 2-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = 4.$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-3x}} &= \int_{u\left(-\frac{2}{3}\right)}^{u\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{\frac{2-u}{3}}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{3} \\
&= -\frac{1}{9}\int_4^1 (2-u)u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= -\frac{1}{9}\int_4^1 \left(2u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\,du \\
&= -\frac{1}{9}\left[\left(2\frac{u^{-\frac{1}{2}}+1}{-\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_4^1 - \left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_4^1\right] \\
&= -\frac{1}{9}\left[(4-8) - \left(\frac{2}{3}-\frac{16}{3}\right)\right] \\
&= -\frac{2}{27}.
\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

Respuesta.- Sea

$$u = x^2+2x+3 \quad\Rightarrow\quad du = 2(x+1)\,dx$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+1)\,dx}{\left(x^2+2x+3\right)^3} &= \frac{1}{2}\int u^{-3}\,du \\
&= -\frac{1}{4}u^{-2}+C \\
&= -\frac{1}{4}\left(x^2+2x+3\right)^{-2}+C.
\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx.$

Respuesta.- Reescribamos la integral como

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3\,dx &= \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x\,dx \\
&= \int \operatorname{sen} x\left(1-\cos^2 x\right)\,dx \\
&= \int \operatorname{sen} x\,dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx
\end{aligned}$$

Luego, sea

$$u=\cos x \quad \Rightarrow \quad du=-\operatorname{sen} x\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen} x\,dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx \\
&= -\cos x + \int u^2\,du \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}u^3 + C \\
&= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.
\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int z(z-1)^{\frac{1}{3}}\,dx.$

Respuesta.- Sea

$$u=z-1 \quad \Rightarrow \quad du=dz.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int z(z-1)^{\frac{1}{3}}\,dx &= \int (u+1)u^{\frac{1}{3}}\,du \\
&= \frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C \\
&= \frac{3}{7}(z-1)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}(z-1)^{\frac{4}{3}} + C.
\end{aligned}$$

8. $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x}$.

Respuesta.- Sea,

$$u = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x\, dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx &= \int u^{-3}\, du \\
&= -\frac{1}{2}u^{-2} + C \\
&= -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x + C.
\end{aligned}$$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2x\sqrt{4 - \operatorname{sen} 2x}\, dx$.

Respuesta.- Sea,

$$u = 4 - \operatorname{sen}(2x) \quad \Rightarrow \quad du = -2\cos(2x)\, dx.$$

Por el teorema 1.4,

$$u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - 1 = 3 \qquad \text{y} \qquad u\,(0) = 4 - \operatorname{sen}\,(0) = 4 - 0 = 4.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\sqrt{4 - \operatorname{sen}(2x)}\, dx &= -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{4}\right)} u^{\frac{1}{2}}\, du \\
&= \int_4^3 u^{\frac{1}{2}}\, du \\
&= -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^3 \\
&= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{27} - 8\right) \\
&= \frac{8}{3} - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

10. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(3 + \cos x)^2}$.

Respuesta.- Sea,

$$u = 3 + \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\operatorname{sen} x\, dx.$$

Entonces,

$$\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(3 + \cos x)^2} = -\int u^{-2}\, du = u^{-1} + C = \frac{1}{3 + \cos x} + C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$.

Respuesta.- Sea,

$$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\operatorname{sen} x\, dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} x (\cos x)^{-\frac{3}{2}}\, dx &= \int u^{-\frac{3}{2}}\, du \\ &= 2u^{-\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C. \end{aligned}$$

12. $\displaystyle\int_3^8 \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}\, dx}{\sqrt{x+1}}$.

Respuesta.- Sea,

$$u = \sqrt{x+1} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

Por el teorema 1.4,

$$u(3) = 2 \quad \text{y} \quad u(8) = 3.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\, dx &= 2\int_2^3 \operatorname{sen} u\, du \\ &= 2\left(-\cos u\Big|_2^3\right) \\ &= 2(\cos 2 - \cos 3). \end{aligned}$$

13. $\displaystyle\int x^{n-1} \operatorname{sen} x^n\, dx$.

Respuesta.- Sea,

$$u = x^n \quad \Rightarrow \quad du = nx^{n-1}\, dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int x^{n-1} \operatorname{sen} x^n\, dx &= \frac{1}{n}\int \operatorname{sen} u\, du \\ &= -\frac{1}{n}\cos u + C \\ &= -\frac{1}{n}\cos x^n + C. \end{aligned}$$

14. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

Respuesta.- Sea,

$$u = 1 - x^6 \quad \Rightarrow \quad du = -6x^5\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} &= -\frac{1}{6}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= -\frac{1}{3}\left(1-x^6\right)^{\frac{1}{2}} + C.
\end{aligned}$$

15. $\displaystyle\int t(1+t)^{\frac{1}{4}}\,dt$.

Respuesta.- Sea,

$$u = 1 + t \quad \Rightarrow \quad du = dt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int t(1+t)^{\frac{1}{4}}\,dt &= \int (u-1)u^{\frac{1}{4}}\,du \\
&= \int u^{\frac{5}{4}}\,du - \int u^{\frac{1}{4}}\,du \\
&= \frac{4}{9}u^{\frac{9}{4}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{4}} + C \\
&= \frac{4}{9}\left(1+t\right)^{\frac{9}{4}} - \frac{4}{5}\left(1+t\right)^{\frac{5}{4}} + C.
\end{aligned}$$

16. $\displaystyle\int (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx$.

Respuesta.- Sea,

$$u = \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad du = -x\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$$

De donde,

$$x = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx &= \int -\frac{1}{x}\,du \\
&= \int \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\,du.
\end{aligned}$$

Luego, sustituimos por segunda vez

$$v = 1 - u^2 \quad \Rightarrow \quad dv = -2u\,du$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\,du &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv \\
&= \sqrt{v}+C \\
&= \sqrt{1-u^2}+C \\
&= \sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}+C \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.
\end{aligned}$$

17. $\displaystyle\int x^2(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}\,dx.$

Respuesta.- Sea,

$$u = 8x^3+27 \quad \Rightarrow \quad du = 24x^2\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int x^2\left(8x^3+27\right)\,dx &= \frac{1}{24}\int u^{\dfrac{2}{3}}\,du \\
&= \frac{1}{40}u^{\frac{5}{3}}+C \\
&= \frac{1}{40}\left(8x^3+27\right)^{\frac{5}{3}}+C.
\end{aligned}$$

18. $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)\,dx}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^{\frac{1}{3}}}.$

Respuesta.- Sea,

$$u = \operatorname{sen} x-\cos x \quad \Rightarrow \quad du = \operatorname{sen} x+\cos x\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{(\operatorname{sen} x-\cos x)^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \int u^{-\frac{1}{3}}\,du \\
&= \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}+C \\
&= \frac{3}{2}\left(\operatorname{sen} x-\cos x\right)^{\frac{2}{3}}+C.
\end{aligned}$$

19. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\,dx.$

Respuesta.- Simplifiquemos la integral como sigue,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} &= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+x^2)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}} \\
&= \int \frac{x\,dx}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}\right)}.
\end{aligned}$$

Ahora, sea

$$u = \sqrt{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}\right)} &= \int u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= 2u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.
\end{aligned}$$

20. $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+1-2x\right)^{\frac{1}{5}}\,dx}{1-x}.$

Respuesta.- Simplificando la integral, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\left(x^2+1-2x\right)^{\frac{1}{5}}}{1+x}\,dx &= \int \frac{(x-1)^{\frac{2}{5}}}{1-x}\,dx \\
&= -\int (x-1)^{-\frac{3}{5}}\,dx.
\end{aligned}$$

Ahora, sea

$$u = x-1 \quad \Rightarrow \quad du = dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
-\int (x-1)^{-\frac{3}{5}}\,dx &= -\int u^{-\frac{3}{5}}\,du \\
&= -\frac{5}{2}u^{\frac{2}{5}} + C \\
&= -\frac{5}{2}(x-1)^{\frac{2}{5}} + C.
\end{aligned}$$

21. Deducir las fórmulas de los teoremas 1.18 y 1.19 por medio del método de sustitución.

Demostración.- Deduzcamos el teorema 1.18 (invarianza bajo traslación). Para una función f integrable en un intervalo $[a,b]$ y para todo $c \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$

Si P es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(b) - P(a).$$

Sea,

$$u = g(x) = x - c \quad \Rightarrow \quad du = g'(x)\,dx = dx.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx &= \int_{a+c}^{b+c} f\left[g(x)\right] g'(x)\,dx \\
&= P\left[g(b+c)\right] - P\left[g(a+c)\right] \\
&= P(b) - P(a).
\end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$

Ahora, deduzcamos el teorema 1.19 (Expansión o contracción del intervalo de integración). Para una función f integrable en un intervalo $[a,b]$ y para todo $k \in \mathbb{R}$ distinto de 0, se tiene

$$\int_a^b f(x) = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx.$$

Sea,

$$u = g(x) = \frac{x}{k} \quad \Rightarrow \quad du = g'(x)\,du = \frac{1}{k}\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx & \\
&= \int_{ka}^{kb} f\left[g(x)\right] g'(x)\,dx \\
&= \int_{g(ka)}^{g(kb)} f(u)\,du \\
&= P\left[g(b)\right] - P\left[g(a)\right] \\
&= P(b) - P(a).
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_a^b f(x) = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx.$$

22. Sea

$$F(x,a) = \int_0^x \frac{t^q}{(t^2+q^2)^q}\,dt,$$

donde $a > 0$ y p y q son enteros positivos. Demostrar que $F(x,a) = a^{p+1-2q}F(x/a,1)$.

Respuesta.- Sea,

$$u = \frac{t}{a} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{a}\,dt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^p}{(t^2+a^2)^q}\,dt &= a\int_{u(0)}^{u(x)} \frac{u^p a^p}{(u^2a^2+a^2)^q}\,du \\
&= a^{p+1}\int_{u(0)}^{u(x)} \frac{u^p}{a^{2q}(u^2+1)^q}\,du \\
&= a^{p+1-2q}\int_0^{\frac{x}{a}} \frac{u^p}{(u^2+1)^q}\,du \\
&= a^{p+1-2q}F\left(\frac{x}{a},1\right).
\end{aligned}$$

23. Demostrar que

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}, \text{ si } x>0.$$

Demostración.- Sea

$$u = g(t) = \frac{1}{t}, \qquad du = \frac{1}{t^2}\,dt.$$

Lo que implica,

$$t = \frac{1}{u}, \qquad dt = -t^2\,du = -\frac{1}{u^2}\,du.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} &= -\int_{g(x)}^{g(1)} \frac{\frac{1}{u^2}\,du}{1+\frac{1}{u^2}} \\
&= \int_{g(1)}^{g(x)} \frac{\frac{1}{u^2}\,du}{1+\frac{1}{u^2}} \\
&= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} \\
&= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

24. Demostrar que

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx.$$

Demostración.- Sea,

$$u = 1-x \quad \Rightarrow \quad du = -dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx &= -\int_{u(0)}^{u(1)}(1-u)^m u^n\,du\\
&= -\int_1^0 (1-u)^m u^n\,du\\
&= \int_0^1 (1-u)^m u^n\,du\\
&= \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx.
\end{aligned}$$

25. Demostrar que

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,\mathrm{sen}^m x\,dx = 2^{-m}\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,dx.$$

si m es un entero positivo.

Demostración.- Primero, simplifiquemos la integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{sen}^m x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x\,\mathrm{sen}\,x)^m\,dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x)\right]^m\,dx\\
&= \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^m(2x)\,dx.
\end{aligned}$$

Luego, usamos el método de sustitución

$$u = 2x, \qquad du = 2\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^m(2x)\,dx &= \frac{1}{2^{m+1}}\int_{u(0)}^{u(\pi/2)}(\mathrm{sen}\,u)^m\,du\\
&= \frac{1}{2^{m+1}}\int_0^{\pi}(\mathrm{sen}\,u)^m\,du\\
&= \frac{1}{2^{m+1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{sen}\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right]^m\,du\\
&= \frac{1}{2^{m+1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m u\,du\\
&= \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx\\
&= 2^{-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx.
\end{aligned}$$

26. (a) Demustrar que

$$\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

Demostración.- Sea,

$$u = \pi - x \quad \Rightarrow \quad du = -dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\, dx &= -\int_{u(0)}^{u(\pi)} (\pi - u)f\left[\operatorname{sen}(\pi - u)\right]\, du \\
&= \int_{\pi}^{0} (\pi - u)f(\operatorname{sen} u)\, du \\
&= \int_0^{\pi} (\pi - u)f(\operatorname{sen} u)\, du \\
&= \int_0^{\pi} \pi f(\operatorname{sen} u)\, du - \int_0^{\pi} uf(\operatorname{sen} u)\, du.
\end{aligned}$$

Aquí, cambiamos el nombre de la variable de integración de u a x. (Siempre podemos cambiar el nombre de la variable de integración ya que integrar $f(t)\, dt$ es lo mismo que integrar $f(x)\, dx$, por ejemplo). Así que esto significa que tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\, dx &= \int_0^{\pi} \pi f(\operatorname{sen} x)\, dx - \int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\, dx \\
&= \int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx.
\end{aligned}$$

(b) Aplicar (a) para deducir la fórmula:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx = \pi\int_0^{1} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Demostración.- Usemos primero, la identidad trigonométrica $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, lo que implica $1+\cos^2 x = 2 - \operatorname{sen}^2 x$, para reescribir la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx &= \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\, dx \;\text{ donde }\; f(x) = \frac{2}{2-x^2}
\end{aligned}$$

Entonces, por (a) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\, dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx.
\end{aligned}$$

Luego, sea
$$u = \cos x, \qquad du = -\operatorname{sen} x\, dx.$$

Así,
$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+u^2}\, du & \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= \pi\int_0^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.\end{aligned}$$

27. Demostrar que $\int_0^1 (1-x^2)^{n-1/2}\ dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u\ du$ si n es un entero positivo. [Indicación: $x = \operatorname{sen} u$.] La integral del segundo miembro se puede calcular por el método de integración por partes.

Demostración.- Sea,
$$x = \operatorname{sen} x, \qquad dx = \cos u\, du.$$

Entonces,
$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\operatorname{sen}^2 u\right)^{n-\frac{1}{2}} \cos u\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 u\right)^{n-\frac{1}{2}} \cos u\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{2n-1} u\right) \cos u\ \ du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u\, du.\end{aligned}$$

La última igualdad sigue puesto $\frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$ de modo que esta es una función par. Por lo tanto (por un ejercicio anterior) la integral de -1 a 1 es el doble de la integral de 0 a 1.

5.9 Integración por partes

Se demostró en el capitulo 4 que la derivada de un producto de dos funciones f y g está dada por la fórmula:
$$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$
donde $h(x) = f(x)\cdot g(x)$. Traduciendo esto a la notación de Leibiz para primitivas se tiene $\int f(x)g'(x)\ dx + \int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) + C$, que se escribe usualmente en la forma

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx + C.$$

Esta igualdad, conocida por fórmula de integración por partes, da lugar a una nueva técnica de integración.

En el caso de integrales definidas, la fórmula anterior se transforma en

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$

Poniendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$ se tiene $du = f'(x)\ dx$ y $dv = g'(x)\ dx$ y la fórmula de integración por partes toma una forma abreviada que parece más fácil de recordar:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du + C.$$

Ejemplo 5.3 Algunas veces el método falla porque conduce de nuevo a la integral original. Por ejemplo, al intentar calcular por partes la integral $\int x^{-1}\ dx$. Si se hace $u = x$ y $dv = x^{-2}\ dx$, entonces $\int x^{-1}\ dx = \int u\ dv$. Con esta elección de u y v se tiene $du = dx$ y $v = -x^{-1}$ de manera que (5.24) da:

$$\int x^{-1}\ dx = \int u\ dv = uv - \int c\ du + C = -1 + \int x^{-1}\ dx + C,$$

y se vuelve al punto de partida. Por otra parte, la situación no mejora si se intenta $u = x^n$ y $dv = x^{-n-1}\ dx$.
Este ejemplo se usa con frecuencia para evidenciar la importancia de no olvidar la constante arbitraria C. Si en la fórmula anterior no se hubiera escrito la C, se hubiera llegado a la ecuación $\int x^{-1}\ dx = -1 + \int x^{-1}\ dx$ que se utiliza algunas veces para dar una aparente demostración de que $O = -1$. ■

Como aplicación del método de integración por partes, se obtiene otra versión del teorema del valor medio ponderado para integrales (teorema 3.16).

Teorema 5.5 **Segundo teorema del valor medio para integrales.** Supongamos que g es continua en $[a, b]$, y que f tiene derivada continua y que nunca cambia de signo en $[a, b]$. Entonces, para un cierto c de $[a, b]$, tenemos

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(a)\int_a^c g(x)\ dx + f(b)\int_c^b g(x)\ dx.$$

Demostración.- Sea $G(x) = \int_a^x g(t)\ dt$. Como que g es continua, tenemos $G'(x) = g(x)$. Por consiguiente, la integración por partes nos da

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = \int_a^b f(x)G'(x)\ dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\ dx,$$

puesto que $G(a) = 0$ (hipótesis). Según el teorema del valor medio ponderado, se tiene

$$\int_a^b f'(x)G(x)\ dx = G(c)\int_a^b f'(x)\ dx = G(c)[f(b) - f(a)]$$

para un cierto c en $[a, b]$. Por consiguiente $\int_a^b f(x)g(x)\ dx = \int_a^b f(x)G'(x)\ dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\ dx$, se convierte en

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(b)G(b) - G(c)[f(b) - f(a)] = f(a)G(c) + f(b)[G(b) - G(c)].$$

Esto demuestra $\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(a)\int_a^c g(x)\ dx + f(b)\int_c^b g(x)\ dx$ ya que $G(c) = \int_a^c g(x)\ dx$ y $G(b) - G(c) = \int_c^b g(x)\ dx$. ■

5.10 ejercicios

Con el método de integración por partes calcular las integrales de los Ejercicios 1 al 6.

1. $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

Respuesta.- Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x \, dx &= \int u \, dv \\ &= uv - \int v \, du \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

2. $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$.

Respuesta.- Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x \, dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= \int u \, dv \\ &= uv - \int v \, du \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Volviendo a utilizar la fórmula de integración por partes,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \int u \, dv \\ &= uv - \int v \, du \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int x^3 \cos x \, dx.$

Respuesta.- Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2 \, dx$$

$$dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos x \, dx &= \int u \, dv \\ &= uv - \int v \, du \\ &= x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Por el anterior ejercicio 2,

$$\int x^2 \operatorname{sen} \, dx = 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x - x^2 \cos x + C.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos x \, dx &= x^3 \operatorname{sen} x - \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx \\ &= x^3 \operatorname{sen} x - 3(2x \operatorname{sen} x + 2\cos x - x^2 \cos x) + C \\ &= x^3 \operatorname{sen} x - 6x \operatorname{sen} x - 6\cos x + 3x^2 \cos x + C. \end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx.$

Respuesta.- Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2 \, dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int x^3 \operatorname{sen} x \, dx &= \int u \, dv \\ &= uv - \int v \, du \\ &= -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes una vez más,

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x \, dx$$

$$dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x \, dx &= \int u \, dv \\
&= uv - \int v \, du \\
&= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx.
\end{aligned}$$

Luego, por el ejercicio 1,

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C,$$

se tiene,

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= x^2 \sin x - 2(\operatorname{sen} x - x \cos x) + C \\
&= x^2 \sin x - 2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x + C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx &= -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx \\
&= -x^3 \cos x + 3(x^2 \sin x - 2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x) + C \\
&= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \operatorname{sen} x + 6x \cos x + C.
\end{aligned}$$

5. $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx.$

Respuesta.- Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned}
u = \operatorname{sen} x \quad &\Rightarrow \quad du = \cos x \, dx \\
dv = \cos x \, dx \quad &\Rightarrow \quad v = -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx &= \int u \, dv \\
&= uv - \int v \, du \\
&= \operatorname{sen}^2 x - \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx.
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
2 \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx &= \operatorname{sen}^2 x + C \\
\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx &= \tfrac{\operatorname{sen}^2 x + C}{2}.
\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \cos x \; dx.$

Respuesta.- Por las propiedades trigonométricas se tiene,

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x,$$

por lo que evaluaremos

$$\frac{1}{2} \int x \operatorname{sen} 2x \; dx.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} 2x \; dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} 2x \; dx &= \frac{1}{2}\left[x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right] - \frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) \; dx + C \\ &= -\frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{4} \int \cos 2x \; dx + C \\ &= -\frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 2x + C. \end{aligned}$$

7. Con la integración por partes deducir la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^2 x \; dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \; dx.$$

En la segunda integral, poner $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y así deducir la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^2 x \; dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x.$$

Respuesta.- Primero, usamos la fórmula de integración por partes,

$$u = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x \; dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \; dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \; dx &= \int u \; dv \\ &= uv - \int v \; du \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \; dx \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \; dx \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int 1 \; dx - \int \operatorname{sen}^2 x \; dx \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{array}{rcl} 2\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx & = & -\operatorname{sen} x \cos x + x + C \\ \displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx & = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C. \end{array}$$

8. Integrando por partes deducir la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx.$$

En la segunda integral, poner $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y con eso deducir la fórmula recurrente

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx.$$

Demostración.- Usando la fórmula de integración por partes,

$$\begin{array}{lcl} u = \operatorname{sen}^{n-1} x & \Rightarrow & du = (n-1)\cos^{n-2} x\, dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx & \Rightarrow & v = -\cos x. \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx & = & u\, dx \\ & = & uv - \displaystyle\int v\, du \\ & = & -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\displaystyle\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx \end{array}$$

Luego, usando la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx & = & -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x - (n-1)\displaystyle\int \operatorname{sen}^{n-2} x \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\, dx \\ \displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx & = & -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\displaystyle\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx \\ n\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx & = & -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\displaystyle\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx \\ \displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx & = & -\dfrac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx. \end{array}$$

9. Con los resultados de los Ejercicios 7 y 8 demostrar que

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$.

Demostración.- Usando la fórmula del Ejercicio 7,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - 0 \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{3\pi}{16}.$

Demostración.- Usando la fórmula del Ejercicio 8 (b), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 x\, dx &= -\frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx \\
&= 0 + \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\, dx = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{5\pi}{32}.$

Demostración.- Usando la fórmula del Ejercicio 8 (b), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 x\, dx &= -\frac{\operatorname{sen}^5 x \cos x}{6}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x\, dx \\
&= 0 + \frac{5}{6}\left(\frac{3\pi}{16}\right) \\
&= \frac{5\pi}{32}.
\end{aligned}$$

10. Con los resultados de los ejercicios 7 y 8 deducir las siguientes fórmulas.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x.$

Respuesta.- Por el ejercicio 8 y dado $\cos(3x) = 4\cos^3 - 3\cos x$, que implica $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(3x) +$

$\dfrac{3}{4}\cos x$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x\, dx &= -\frac{\operatorname{sen}^2 x\cos x}{3} + \frac{2}{3}\int \operatorname{sen} x\, dx \\
&= -\frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}^2 \cos x + 2\cos x\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left[\left(1-\cos^2 x\right)\cos x + 2\cos x\right] \\
&= -\frac{1}{3}\cos x\left(3-\cos^2 x\right) \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x\right] \\
&= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos(3x).
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x.$

Respuesta.- Usando el ejercicio 8 y el ejercicio 7, y dado $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ que implica $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= -\frac{\operatorname{sen}^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\, dx \\
&= -\frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}^3 x\cos x\right) + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right] \\
&= -\frac{1}{8}\left[\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}(2x)\right] + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen}(2x) \\
&= -\frac{1}{16}\left[\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(2x)\cos(2x)\right] + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen}(2x) \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x).
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\, dx = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{1}{80}\cos 5x.$

Respuesta.- Usando el ejercicio 8 y luego la parte (a) de este ejercicio, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= -\frac{\operatorname{sen}^4 x\cos x}{5} + \frac{4}{5}\int \operatorname{sen}^3 x\,dx \\
&= -\frac{1}{5}\left[\left(1-\cos^2 x\right)\left(1-\cos^2 x\right)\cos x\right] + \frac{4}{5}\left[-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos(3x)\right] \\
&= -\frac{1}{5}\left(\cos x - 2\cos^3 x + \cos^5 x\right) + \frac{1}{16}\left[10\cos x + 5\cos(3x) + \cos(5x)\right] \\
&- \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{15}\cos(3x) \\
&= -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{8}\cos x - \frac{3}{16}\cos(3x) + \frac{1}{16}\cos(5x)\right] - \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{15}\cos(3x) \\
&= -\frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{48}\cos(3x) - \frac{1}{80}\cos(5x).
\end{aligned}$$

11. Con la integración por partes y los resultados de los ejercicios 7 y 10 deducir las siguientes formulas:

(a) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x).$

Respuesta.- Aplicando la integración por partes, tenemos

$$u = x \quad\Rightarrow\quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}^2 x\,dx \quad\Rightarrow\quad v = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}.$$

Usando el ejercicio 7 para la primitiva de $\operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx &= \int u\,dv \\
&= \int uv - \int v\,du \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen}(2x) - \int\left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x).
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{36}\operatorname{sen}(3x) - \frac{3}{4}x\cos x + \frac{1}{12}x\cos(3x).$

Respuesta.- Aplicando la integración por partes, tenemos

$$u = x \quad\Rightarrow\quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}^3 x\,dx \quad\Rightarrow\quad v = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos(3x).$$

Aplicando el ejercicio 10 para la primitiva de $\operatorname{sen}^3 x$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int u \, dv \\
&= \int uv - \int v \, du \\
&= -\frac{3}{4} x \cos x + \frac{1}{12} x \cos(3x) - \int \left[-\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos(3x) \right] dx \\
&= -\frac{3}{4} x \cos x + \frac{1}{12} x \cos(3x) + \frac{3}{4} \operatorname{sen} x - \frac{1}{36} \operatorname{sen}(3x).
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{6} x^3 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} x^2 \right) \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4} x \cos(2x).$

Respuesta.- Aplicando la integración por partes, tenemos

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = x \operatorname{sen}^2 x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8} \cos(2x).$$

Acplicando la parte (a) derivando la primitiva de $x \operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int x^2 \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int u \, dv \\
&= \int uv - \int v \, du \\
&= \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{4} x^2 \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8} x \cos(2x) - \int \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8} (2x) \right] dx \\
&= \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{4} x^2 \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8} x \cos(2x) - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{4} \int x \operatorname{sen}(2x) \, dx + \frac{1}{16} \operatorname{sen}(2x).
\end{aligned}$$

Luego, necesitamos usar nuevamente la integración por partes para $\int x \operatorname{sen}(2x) \, dx$, como sigue

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(2x) \, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2} \cos(2x).$$

Después, integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen}(2x) \, dx &= \int u \, dv \\
&= \int uv - \int v \, du \\
&= -\frac{1}{2} x \cos(2x) - \int \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right] dx \\
&= -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x).
\end{aligned}$$

Así, la integral queda

$$\begin{aligned}
\int x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8}x\cos(2x) - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}\int x\operatorname{sen}(2x)\, dx + \frac{1}{16}\operatorname{sen}(2x) \\
&= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8}x\cos(2x) - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right] \\
&+ \frac{1}{16}\operatorname{sen}(2x) \\
&= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{8}x\cos(2x) - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x\cos(2x) + \frac{1}{16}\operatorname{sen}(2x) \\
&+ \frac{1}{16}\operatorname{sen}(2x) \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)x^3 - \frac{1}{4}x^2\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x) \\
&= \frac{1}{6}x^3 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}x^2\right)\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x).
\end{aligned}$$

12. Integrando por partes deducir la fórmula recurrente

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1}\operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx.$$

Respuesta.- Aplicando la integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned}
u = \cos^{n-1} x \quad &\Rightarrow \quad du = -(n-1)\cos^{n-2} x \operatorname{sen} x\, dx \\
dv = \cos x\, dx \quad &\Rightarrow \quad v = \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Después, usando la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x\, dx &= \int u\, dv \\
&= uv - \int v\, du \\
&= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\ \operatorname{sen}^2 x\, dx \\
&= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\left(1 - \cos^2 x\right)\, dx \\
&= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\left(\int \cos^{n-2} x\, dx - \int \cos^n x\, dx\right).
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
(n-1)\int \cos^n x\,dx + \int \cos^n x\,dx &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx \\
n\int \cos^n x\,dx &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx \\
\int \cos^n x\,dx &= \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.
\end{aligned}$$

13. Utilizar el resultado del Ejercicio 12 para obtener la fórmula siguiente.

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$.

Respuesta.- Aplicando el ejercicio 12 y la identidad $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x\cos x$, se tiene

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{2} + \frac{1}{2}\int\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x).$$

(b) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 3x$.

Respuesta.- Aplicando el ejercicio 12 y la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x\,dx &= \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x}{3} \\
&= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x.
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x)$.

Respuesta.- Aplicando el ejercicio 12 y la solución de la parte (a) de este ejercicio, se tiene

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\,dx &= \frac{\cos^3 x \operatorname{sen} x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\cos^2 x\right] + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right] \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8}\left[\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}^2 x\right] \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x).
\end{aligned}$$

14. Integrando por partes, demostrar que

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Sea $x^2 = x^2 - 1 + 1$ en la segunda integral deducir la fórmula

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Respuesta.- Integrando por partes, se tiene

$$u = \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int u\,dv \\
&= uv - \int v\,du \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.
\end{aligned}$$

Luego, escribiendo $x^2 = x^2 - 1 + 1$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

15. a) Usar la integración por partes para deducir la fórmula

$$\int \left(a^2-x^2\right)^n\,dx = \frac{x\left(a^2-x^2\right)^n}{2n+1} + \frac{2a^2n}{2n+1}\int \left(a^2-x^2\right)^{n-1}\,dx + C.$$

Respuesta.- Sea,

$$u = \left(a^2-x^2\right)^n \quad \Rightarrow \quad du = (-2nx)\left(a^2-x^2\right)^{n-1}\,dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int ()^n\,dx &= \int u\,dv \\
&= uv - \textstyle\int v\,du \\
&= x\left(a^2-x^2\right)^n - 2n\int x^2\left(a^2-x^2\right)^{n-1}\,dx + C.
\end{aligned}$$

Usando la identidad $x^2 = x^2 + a^2 - a^2 = -\left(a^2 - x^2\right) + a^2$, se tiene

$$\int \left(a^2 - x^2\right)^n \, dx = x\left(a^2 - x^2\right)^n + 2n\left[-\int \left(a^2 - x^2\right)^n \, dx + a^2 \int \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} \, dx\right]$$

$$\Downarrow$$

$$(2x+1)\int \left(a^2 - x^2\right)^n \, dx = x\left(a^2 - x^2\right)^n + 2na^2 \int \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} \, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int \left(a^2 - x^2\right)^n \, dx = \frac{x\left(a^2 - x^2\right)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}\int \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} \, dx.$$

b) Utilizar la parte a) para calcular $\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^{5/2} \, dx$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{5}{2}} \, dx &= \left[\frac{x\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{5}{2}}}{6} + \frac{5a^2}{6}\int \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \, dx\right]\Bigg|_0^a \\
&= \frac{5a^2}{6}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \, dx \\
&= \frac{5a^2}{6}\left[\frac{x\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3a^2}{4}\int \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \, dx\right]\Bigg|_0^a \\
&= \frac{15a^4}{24}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \, dx \\
&= \left(\frac{5a^4}{8\cdot 2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) 2\int_{-a}^a \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \, dx \\
&= \frac{5\pi}{32}a^6.
\end{aligned}$$

16. a) Si $I_n(x) = \int_0^x t^n \left(t^2 + a^2\right)^{-1/2} \, dt$, aplicar el método de integración por partes para demostrar que

$$nI_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2} = (n-1)a^2 I_{n-2}(x) \qquad \text{si } n \geq 2.$$

Demostración.- Aplicando el método de integración por partes, se tiene

$$u = t^{n-1} \quad \Rightarrow \quad du = (n-1)t^{n-2} \, dt$$

$$dv = t\left(t^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad v = \left(t^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}} \, dt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
I_n(x) = \int_0^x t^n \left(t^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= \int_0^x u\ dv \\
&= uv\Big|_0^x - \int_0^x v\ du \\
&= t^{n-1}\left(t^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^x - \int_0^x (n-1)t^{n-2}\left(t^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}\ dt \\
&= x^{n-1}\left(x^2+a^2\right) - \int_0^x (n-1)t^{n-2}\left(t^2+a^2\right)\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dt \\
&= x^{n-1}\left(x^2+a^2\right) - \int_0^x (n-1)t^{n-2}\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dt \\
&- \int_0^x (n-1)t^{n-2}a^2\left(t^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dt \\
&= x^{n-1}\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}} - (u-1)I_n(x) - a^2(n-1)I_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

Luego añadiendo $(n-1)I_n(x)$ a ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$nI_n(x) = x^{n-1}\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}} - a^2(n-1)I_{n-2}(x).$$

b) Aplicando (a) demostrar que $\int_0^2 x^5\left(x^2+5\right)^{-1/2}\ dx = \dfrac{168}{5} - 40\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Respuesta.- Primero por la definición de $I_n(x)$, se tiene

$$\begin{aligned}
I_5(2) &= \int_0^2 t^5\left(t^2+5\right)^{-\frac{1}{2}}\ dt \\
I_5(2) &= \int_0^2 t^3\left(t^2+5\right)^{-\frac{1}{2}}\ dt
\end{aligned}$$

Luego, usando la fórmula de la parte (a) obtenemos

$$5I_5(2) = 2^4\sqrt{4+5} - 4\cdot 5\cdot I_3(2) \quad \Rightarrow \quad I_5(2) = \frac{48}{5} - 4I_3(2).$$

Usando una vez más la fórmula de la parte (a), tenemos

$$3I_(2) = 2^2\sqrt{4+5} - 5\cdot 2\cdot I_1(2) \quad \Rightarrow \quad I_3(2) = 4 - \frac{10}{3}\cdot I_1(2) = 4 - \frac{10}{3}\int_0^2 t\left(t^2+5\right)^{-\frac{1}{2}\,dt}.$$

Luego, utilizando el método de sustitución para $u = t\ 2+5$ que implica $du = 2t\ dt$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^2 t\left(t^2+5\right)^{-\frac{1}{2}}\ dt &= \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(2)} u^{-\frac{1}{2}}\ du \\
&= \frac{1}{2}2u^{\frac{1}{2}}\Big|_5^9 \\
&= 3-\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Introduciendo está solución a $I_3(2)$,

$$I_3(2) = 4 - \frac{10}{3}\left(3 - \sqrt{5}\right) = \frac{10}{3}\sqrt{5} - 6.$$

Y después, intruduciendo a $I_5(2)$, concluimos que

$$I_5(2) = \frac{48}{5} - 4\left(\frac{10}{3}\sqrt{5} - 6\right) = \frac{168}{5} - \frac{40\sqrt{5}}{3}.$$

17. Calcular la integral $\int_{-1}^{3} t^3\left(4+t^3\right)^{-1/2}\ dt$, sabiendo que $\int_{-1}^{3}\left(4+t^3\right)^{1/2}\ dt = 11.35$ Dejar el resultado en función de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{31}$.

Respuesta.- Aplicando la integración por partes, se tiene

$$\begin{array}{rcl} u = t & \Rightarrow & du = dt \\ dv = \dfrac{3}{2}t^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{4+t^3}}\,dt & \Rightarrow & v = \sqrt{4+t^3} \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{3} t^3\left(4+t^3\right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{2}{3}\int_{-1}^{3}\frac{3}{2}t^3\left(4+t^3\right)^{-\frac{1}{2}}\ dt \\
&= \frac{2}{3}\int_{-1}^{3} u\ dv \\
&= \frac{2}{3}\left(uv\Big|_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3} v\ du\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(t\sqrt{4+t^3}\Big|_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3}\sqrt{4+t^3}\ dt\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(3\sqrt{31} + \sqrt{3} - 11.35\right).
\end{aligned}$$

18. Integrando por partes deducir la fórmula

$$\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{\cos^{m+1} x} = \frac{1}{m}\frac{\operatorname{sen}^{n} x}{\cos^{m} x} - \frac{n}{m}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x}{\cos^{m-1} x}\,dx.$$

Aplicar la fórmula para integrar $\int \tan^2 x\ dx$ y $\int \tan^4 x\ dx$.

Respuesta.- Aplicando la integración por partes,

$$u = \operatorname{sen}^n x \quad \Rightarrow \quad du = n\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\ dx$$

$$dv = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{m+1}}\ dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\cos^m x}.$$

Luego, haciendo la sustitución $t = \cos x$ que implica $dt = -\operatorname{sen} x\ dx$. Por lo que tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{m+1}}\ dx &= -\int \frac{1}{t^{m+1}}\ dt \\
&= \frac{1}{m}t^{-m} \\
&= \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\cos m}
\end{aligned}$$

Después,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{\cos^{m+1} x}\,dx &= \int u\,dv \\
&= uv - \int v\,du \\
&= \frac{1}{m}\frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{\cos^m x}\,dx \\
&= \frac{1}{m}\frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{\cos^m x}\,dx.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la fórmula a $\int \tan^2 x$, y dado que $\tan^2 x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$. Este es el caso de la formula de arriba con $n+1 = m+1 = 2$. Por lo que

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx \\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \int dx \\
&= \tan x - x + C.
\end{aligned}$$

Entonces, para $\int \tan^4 x\,dx$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^4}{\cos^4 x}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} - \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.
\end{aligned}$$

19. Integrando por partes deducir la fórmula

$$\int \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x}\,dx = -\frac{1}{n}\frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n}\int \frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x}\,dx.$$

Utilizar la fórmula para integrar $\int \cot^2 x\,dx$ y $\int \cot^4 x\,dx$.

Respuesta.- Usando la integración por partes,

$$u = \cos^m x \quad \Rightarrow \quad du = -m\cos^{m-1} x \operatorname{sen} x\,dx$$

$$dv = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n+1}}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}.$$

Donde la formula para v con $t = \operatorname{sen} x$ y $dt = \cos x$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n+1}}\,dx &= \int \frac{1}{t^{n+1}}\,dt \\
&= -\frac{1}{n}t^{-n} \\
&= -\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x}\, dx &= \int u\, dv \\
&= uv - \int v\, du \\
&= -\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n}\int \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^n x}\, dx \\
&= -\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n}\int \frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x}\, dx.
\end{aligned}$$

Luego, usamos esta solución para evaluar $\cot^2 x$ y $\cot^4 x$. Primero para $\cot^2 x$ usamos la formula con $m+1=n+1=2$, como sigue

$$\begin{aligned}
\int \cot^2 x\, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx \\
&= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \int dx \\
&= -\cot x - x + C.
\end{aligned}$$

Para $\cot^4 x$ usamos la formula con $m+1=n+1=4$,

$$\begin{aligned}
\int \cot^4 x\, dx &= \int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx \\
&= -\frac{1}{3}\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^3 x} - \int \cot^2 x\, dx \\
&= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C.
\end{aligned}$$

20. (a) Hallar un entero n tal que $n\int_0^1 xf''(2x)\, dx = \int_0^2 tf''(t)\, dt$.

Respuesta.- Utilicemos la propiedad de expansión contracción de la integral, de donde

$$\begin{aligned}
\int tf''(t)\, dt &= n\int_0^1 xf''(2x)\, dx \\
&= \frac{n}{2}\int_0^2 \frac{x}{2} f''(x)\, dx \\
&= \frac{n}{4}\int_0^2 xf''(x)\, dx \\
&= \frac{n}{4}\int_0^2 tf''(x)\, dt.
\end{aligned}$$

Esta ecuación se cumple siempre que $n=4$.

(b) Calcular $\int_0^1 xf''(2x)\, dx$, sabiendo que $f(0)=1$, $f(2)=3$ y $f'(2)=5$.

Respuesta.- Utilizando la parte (a), se tiene

$$\int_0^1 xf''(2x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 xf''(x)\,dx.$$

Entonces, usamos la integración por partes con

$$\begin{array}{rcl} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = f''(x)\,dx & \Rightarrow & v = f'(x). \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}\int xf''(x)\,dx & = & \frac{1}{4}\left(xf'(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x)\,dx \right) \\ & = & \frac{1}{4}\left[2f'(2) - f(2) + f(0)\right] \\ & = & \frac{1}{4}(10 - 3 + 1) \\ & = & 2. \end{array}$$

21. a) Si ϕ'' es continua y no nula en $[a,b]$, y si existe una constante $m > 0$ tal que $\phi'(t) \geq m$ para todo t en $[a,b]$, usar el teorema 5.5 para demostrar que

$$\left| \int_a^b \operatorname{sen}\phi(t)\,dt \right| \leq \frac{4}{m}.$$

[Indicación: Multiplicar y dividir el integrando por $\phi'(t)$.]

Demostración.- Ya que $\phi'(t) \geq m > 0$ para todo $t \in [a,b]$, podemos dividir por $\phi'(t)$ de donde obtenemos

$$\left| \int_a^b \operatorname{sen}\phi(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b \frac{\operatorname{sen}\phi(t)}{\phi'(t)} \cdot \phi'(t)\,dt \right|$$

Entonces, para aplicar el segundo teorema de valor medio para integrales (Teorema 5.5, Tom Apostol) se define las funciones siguientes

$$f(t) = \frac{1}{\phi'(t)} y g(t) = \phi'(t)\operatorname{sen}\phi(t).$$

La función g es continua, ya que $\operatorname{sen}\phi(t)$ es una composición de funciones continuas (sabemos que $\phi(t)$ es continua ya que es derivable) y $\phi'(t)$ es continua (es derivable ya que $\phi''(t)$ existe y es continua). Entonces el producto de la función continua también es continuo, lo que establece que g es continua. También sabemos que f cumple las condiciones del teorema, puesto que tiene derivada dada por

$$f''(t) = -\frac{\phi''(t)}{[\phi'(t)]^2}.$$

Esta derivada es continua en $[a,b]$, pues $\phi''(t)$ y $\phi'(t)$ son continuas y $\phi'(t)$ no es cero. Además, $\phi''(x) \neq 0 \in [a,b]$. Recordemos por el teorema de Bolzano que una función continua que cambia de signo debe tener un cero. Por lo que podemos aplicar el segundo teorema de valor medio:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \frac{\phi'(t)\operatorname{sen}\phi(t)}{\phi'(t)}\,dt\right| &= \left|\frac{1}{\phi'(a)}\int_a^c \phi'(t)\operatorname{sen}\phi(t)\,dt + \frac{1}{\phi'(b)}\int_c^b \phi'(t)\operatorname{sen}\phi(t)\,dt\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{m}\int_a^c \phi'(t)\operatorname{sen}\phi(t)\,dt + \frac{1}{m}\int_c^b \phi'(t)\operatorname{sen}\phi(t)\,dt\right| \\
&\leq \left|\left(-\frac{1}{m}\right)\cos\phi(t)\Big|_a^c\right| + \left|\left(-\frac{1}{m}\right)\cos\phi(t)\Big|_c^b\right|
\end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
&\leq \left|-\frac{2}{m}\right| + \left|-\frac{2}{m}\right| \\
&= \frac{2}{m} + \frac{2}{m} \\
&= \frac{4}{m}.
\end{aligned}$$

b) Si $a > 0$, demostrar que $\left|\int_a^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\right| \leq \frac{2}{a}$ para todo $x > a$.

Demostración.- Sea $\phi(t) = t^2$, por la parte (a) se tiene

$$\begin{aligned}
\phi(t) = t^2 \quad &\Rightarrow \quad \phi'(t) = 2t \\
&\Rightarrow \quad \phi''(t) = 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\phi''(t)$ es continua y no cambia de signo. Además, $\phi' \geq m = 2a$ donde a es una constante con $2a > 0 \;\Rightarrow\; a > 0$. Así,

$$\left|\int_a^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\right| \leq \frac{4}{2a} = \frac{2}{a} \quad \text{para todo } x > a.$$

5.11 Ejercicios de repaso

1. Sea f un polinomio tal que $f(0) = 1$ y sea $g(x) = x^n f(x)$. Calcular $g(0), g'(0), \ldots, g^n(0)$.

Respuesta.- Usando la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned}
g'(x) &= nx^{n-1}f(x) + x^n f'(x) \\
g''(x) &= n(n-1)x^{n-2}f(x) + 2nx^{n-1}f'(x) + x^n f''(x) \\
g^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3}f(x) + \binom{3}{2}n(n-1)x^{n-2}f'(x) + \binom{3}{1}nx^{n-1}f''(x) + x^n f^{(3)}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^4(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}f(x) + \binom{4}{3}n(n-1)(n-2)x^{n-3}f'(x) + \binom{4}{2}n(n-1)x^{n-2}f''(x) \\ &+ \binom{4}{1}nx^{n-1}f^{(3)}(x) + x^n f^{(4)}(x) \end{aligned}$$

Vemos que se cumple un patrón, por lo que podemos generalizarde la siguente manera:

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= n!f(x) + \binom{n}{n-1}\frac{n!}{1!}xf'(x) + \binom{n}{n-2}x^2f''(x) + \ldots + \binom{n}{2}\frac{n!}{(n-2)!}x^{n-2}f^{n-2}(x) \\ &+ \binom{n}{1}\frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1}f^{(n-1)}(x) + x^n f^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Luego, usando está fórmula para calcular $g(0), g'(0), \ldots, g^{(n)}(0)$ se tiene

$$\begin{aligned} g'(0) &= g''(0) = \ldots = g^{n-1}(0) = 0 \\ g^n(0) &= n!f(0) = n!. \end{aligned}$$

2. Hallar un polinomio P de grado ≤ 5 tal que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P'(0) = P''(0) = P'(1) = P''(1) = 0$.

Respuesta.- Como debe ser un polinomio de grado ≤ 5 podemos escribir:

$$P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a^2x^2 + a_1x + a_0$$

donde cualquiera de las a_i podría ser 0. Ya que podríamos tener un polinomio de grado menor a 5. En primer lugar, apliquemos la condición $P(0) = 1$ para obtener

$$P(0) = a_0 = 1.$$

Reemplazando esta condición en $P(x)$ y derivando, tenemos

$$\begin{aligned} P(x) &= a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a^2x^2 + a_1x + 1 \\ P'(x) &= 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a^2x + a_1 \\ P''(x) &= 20a_5x^3 + 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a^2. \end{aligned}$$

Luego, podemos aplicar las condiciones $P'(0)$ y $P''(0) = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} P'(0) &= a_1 &= 0 \\ P''(0) &= 2a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Así, tenemos $a_0 = 1$ y $a_1 = a_2 = 0$ de donde

$$P(x) = a_5x^5 + a^4x^4 + a^3x^3 + 1.$$

Después, necesitamos usar las otras tres condiciones dadas,

$$\begin{aligned} P(1) = 2 &\Rightarrow a_5 + a^4 + a^3 = 1 \\ P'(1) = 0 &\Rightarrow 5a_5 + 4a^4 + 3a^3 = 0 \\ P''(1) = 0 &\Rightarrow 20a_5 + 12a^4 + 6a^3 = 0. \end{aligned}$$

Por la primera ecuación se tiene
$$a_3 = 1 - a_4 - a_5$$

Reemplazando esta ecuación en la segunda

$$\begin{aligned} 5a_5 + 4a_4 + 3(1 - a_4 - a_5) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2a_5 + a_4 + 3 = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_4 = -3 - 2a_5. \end{aligned}$$

Introduciendo ahora nuestras expresiones para a_3 y a_4 en la tercera ecuación tenemos

$$20a_5 + 12(-3 - 2a_5) + 6\left[1 - (-3 - 2a_5) - a_5\right] \quad \Rightarrow \quad a_5 = 6.$$

Luego,
$$\begin{array}{rcr} a_4 & = & -15 \\ a_3 & = & 10 \end{array}$$

Ahora que hemos calculado todas las constantes a_i, podemos escribir la fórmula del polinomio

$$P(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1.$$

3. Si $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, demostrar que

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2}n\pi\right) \quad \text{y} \quad g^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}n\pi\right).$$

Demostración.- Utilizaremos la prueba por inducción. Para $n = 1$ tenemos

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right), \qquad g'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}\pi\right).$$

Estas igualdades se deducen de las correlaciones del seno y el coseno (Teorema 2.3 parte (d) en la página 96 de Apostol). Por tanto, las fórmulas son verdaderas para el caso $n = 1$. Supongamos entonces que son verdaderas para algún $n = k \in \mathbb{Z}^+$. Para $f(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x) &= \left[f^k(x)\right]' \\ &= \left[\cos\left(x + \frac{1}{2}k\pi\right)\right]' \\ &= -\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}k\pi\right) \\ &= \cos\left[\left(x + \frac{1}{2}k\pi\right) + \frac{1}{2}\pi\right] \\ &= \cos\left[x + \frac{1}{2}(k+1)\pi\right]. \end{aligned}$$

De las misma forma para $g(x)$

$$
\begin{aligned}
g^{k+1}(x) &= \left[g^k(x)\right]' \\
&= \left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{2}k\pi\right)\right]' \\
&= \cos\left(x+\frac{1}{2}k\pi\right) \\
&= \operatorname{sen}\left[\left(x+\frac{1}{2}k\pi\right)+\frac{1}{2}\pi\right] \\
&= \operatorname{sen}\left[x+\frac{1}{2}(k+1)\pi\right].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el teorema se sigue por inducción para todos los números enteros positivos.

4. Si $h(x) = f(x)g(x)$, demostrar que la derivada n-ésima de h viene dada por la fórmula

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x),$$

en donde $\binom{n}{k}$ representa el coeficiente binomial. Esta es la llamada fórmula de Leibniz.

Demostración.- La prueba es por inducción. Sean $h(x) = f(x)g(x)$ y $n = 1$. Usemos la regla de la cadena, se tiene

$$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)}(x) g^{(1-k)}(x).$$

Por lo que la fórmula es cierta para $n = 1$. Suponiendo que es verdad para $n = m \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, consideremos la $(m+1)$ derivada de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
h^{(m+1)}(x) &= \left[h^{(m)}(x)\right]' \\
&= \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)}(x)\right]' \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left[\binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)}(x)\right]'.
\end{aligned}
$$

Aquí utilizamos la linealidad de la derivada para diferenciar término a término sobre esta suma finita. Esta propiedad se estableció en el Teorema 4.1 (i) y en los comentarios que siguen al teorema. Luego, aplicamos la regla del producto,

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m} \left[\binom{m}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(m-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(m-k+1)}(x)\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(m-k)}(x) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} f^{(k+1)}(x) g^{(m-k)}(x) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m-k+1)}(x),
\end{aligned}
$$

donde hemos reindexado la primera suma desde $k=1$ a $m+1$ en lugar de $k=0$ para m. Entonces, sacamos el término $k=m+1$ de la primera suma y el término de la segunda,

$$\begin{aligned}
&= f^{(m+1)}(x)g(x)+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k-1}f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x)+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x)+f(x)g^{(m+1)}(x)\\
&= f^{(m+1)}(x)g(x)+f(x)g^{(m+1)}(x)+\sum_{k=0}^{m}\left[\binom{m}{k-1}\binom{m}{k}\right]f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x)
\end{aligned}$$

Recordemos, la ley de triangulo de Pascal

$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m+1}{k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&= f^{(m+1)}(x)g(x)+f(x)g^{(m+1)}(x)+\sum_{k=0}^{m}\left[\binom{m}{k-1}\binom{m}{k}\right]f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(m+1-k)}(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula es válida para $m+1$ si es válida para m.

5. Dadas las funciones f y g cuyas derivadas f' y g' satisfacen las ecuaciones

$$f'(x)=g(x),\quad g'(x)=-f(x),\quad f(0)=0,\quad g(0)=1,$$

para todo x en un cierto intervalo abierto J que contiene el 0. Por ejemplo, esas ecuaciones se satisfacen cuando $f(x)=\operatorname{sen}x$ y $g(x)=\cos x$.

a) Demostrar que $f^2(x)+g^2(x)=1$ para todo x de J.

Demostración.- Primero probaremos que $f^2(x)+g^2(x)=c$ para alguna constante, y luego probaremos que esa constante es 1. Para demostrar f^2+g^2 es constante tomemos la derivada, como sigue

$$\begin{aligned}
\left[f^2(x)+g^2(x)\right]' &= \left[f^2(x)\right]'+\left[g^2(x)\right]'\\
&= 2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)\\
&= 2f(x)g(x)-2g(x)f(x)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

esto, para todo $x\in J$; por lo tanto, por el teorema 4.7 c en Tom Apostol, tenemos que $f^2(x)+g^2(x)=c,\ x\in I$ para algúna constante c. Después, por hipótesis, vemos que $0\in J$ de donde,

$$f^2(0)+g^2(0)=0+1=1.$$

Así, $f^2(x)+g^2(x)=1$ para todo $x\in J$.

b) Sean F y G otro par de funciones que satisfagan (5.30). Demostrar que $F(x) = f(x)$ y $G(x) = g(x)$, para todo x de J.

Demostración.- Sea,
$$h(x) = [F(x) - f(x)]^2 + [G(x) - g(x)]^2 .$$
que implica
$$h'(x) = 2\left[F(x) - f(x)\right]\left[F'(x) - f'(x)\right] + 2\left[G(x) - g(x)\right]\left[G'(x) - g'(x)\right].$$
luego, usando las relaciones de la hipótesis
$$\begin{aligned} h'(x) &= 2\left[F(x) - f(x)\right]\left[F'(x) - f'(x)\right] + 2\left[F'(x) - f'(x)\right]\left[f(x) - F(x)\right] \\ &= 2\left[F(x) - f(x)\right]\left[F'(x) - f'(x)\right] - 2\left[F(x) - f(x)\right]\left[F'(x) - f'(x)\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$
para todo $x \in J$. Por lo tanto, $h(x) = c$ para algúna cosntante c. Entonces, para $h(0)$, usando las relaciones $f(0) = F(0) = 0$ y $g(0) = G(0) = 1$, tenemos
$$\begin{aligned} h(0) &= c \\ &= [F(0) - f(0)]^2 + [G(0) - g(0)]^2 \\ &= 0 + (1-1)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$
Así, $h(x) = 0$ para todo $x \in J$. Luego, como es una suma de cuadrados (que deben ser no negativos), tenemos que $h(x) = 0$ sí, y sólo si
$$F(x) - f(x) = 0 \quad \text{y} \quad G(x) - g(x) = 0$$
para todo $x \in J$. Concluimos que
$$F(x) = f(x) \quad \text{y} \quad G(x) = g(x).$$

c) ¿Qué más se puede decir acerca de las funciones f y g que satisfacen (5.30)?.

Respuesta.- Dado que hemos establecido que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ satisfacen estas propiedades y que cualquier función que satisfaga estas propiedades es única, podemos concluir que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son las únicas funciones que satisfacen las propiedades dadas.

6. Una función f, definida para todo número real positivo, satisface la ecuación $f\left(x^2\right) = x^3$ para cada $x > 0$. Determinar $f'(4)$.

Respuesta.- Tomemos la derivada de ambos lados de la ecuación dada, usando la regla de la cadena.
$$\begin{aligned} f\left(x^2\right) = x^3 \quad &\Rightarrow \quad \left[f\left(x\right)^2\right]' = \left(x^3\right)' \\ &\Rightarrow \quad 2xf'\left(x^2\right) = 3x^2 \\ &\Rightarrow \quad f'\left(x^2\right) = \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

Asumiendo que x es un número no negativo. Entonces,

$$f'(4) = f'\left(2^2\right) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

7. Una función g definida para todo número real positivo satisface las dos condiciones siguientes: $g(1) = 1$ y $g'\left(x^2\right) = x^3$ para todo $x > 0$. Calcular $g(4)$.

Respuesta.- Primero multipliquemos la ecuación dada, por $2x$.

$$g'\left(x^2\right) = x^3 \quad \Rightarrow \quad 2xg'\left(x^2\right) = 2x^4.$$

Donde,

$$g'\left[f(x)\right]' = \left[g\left(x^2\right)\right]' = 2xg'\left(x^2\right).$$

Así, podemos integrar ambos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned} 2xg'\left(x^2\right) = 2x^4 \quad &\Rightarrow \quad \int 2xg'\left(x^2\right)\, dx = \int 2x^4\, dx \\ &\Rightarrow \quad \int \left[g\left(x^2\right)\right]'\, dx = \frac{2}{5}x^5 + C \\ &\Rightarrow \quad g\left(x^2\right) = \frac{2}{5}x^5 + C. \end{aligned}$$

Ya que, $g(1) = 1$. Entonces

$$g(1) = 1 = \frac{2}{5} \cdot 1^5 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{5}.$$

De donde,

$$g\left(x^2\right) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{5}.$$

Así, calculando $g(4) = g\left(2^2\right)$, tenemos

$$g(4) = \frac{2}{5}2^5 + \frac{3}{5} = \frac{67}{5}.$$

8. Demostrar que

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t+1}\, dt \geq 0 \text{ para todo } x \geq 0.$$

Demostración.- Recordemos el segundo teorema de valor medio para las integrales (Teorema 5.5). Para una función continua g en el intervalo $[a,b]$. Si f tiene derivadas continuas el cual nunca cambian de signo, en dicho intervalo, entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a)\int_a^c g(x)\, dx + f(b)\int_c^b g(x)\, dx.$$

Apliquemos ahora lo dicho con $g(t) = \operatorname{sen} t$ y $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$. Ya que $\operatorname{sen} t$ es continuo para todo los reales, es continuo para el intervalo $[a,x]$. De donde,

$$f'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

es continua para todo $t \neq -1$, y por ende continuo para todo $t \geq 0$. Además, ya que $(1+t)^2 > 0$ para todo $t \geq 0$, tenemos que $f'(t) < 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, $f'(t)$ es continua y nunca cambia de signo en el intervalo $[0, x]$. Así, podemos aplicar el teorema de valor medio; Existe un $c \in [0, x]$ para cualquier $x \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\frac{1}{1+t}\right) \operatorname{sen} t\, dt &= \frac{1}{1+0}\int_0^c \operatorname{sen} t\, dt + \frac{1}{1+1}\int_c^x \operatorname{sen} t\, dt \\
&= (-\cos t)\Big|_0^c + \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_c^x \\
&= 1 - \cos c + \frac{1}{2}\cos c - \frac{1}{2}\cos x \\
&= 1 - \frac{1}{2}(\cos c + \cos x).
\end{aligned}$$

Pero como $\cos x \leq 1$ para todo x, sabemos que $c + \cos x \leq 2$ para cualesquier c y x. Por lo tanto,

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t}\, dt = 1 - \frac{1}{2}(\cos x + \cos x) \geq 0.$$

9. Sean C_1 y C_2 dos curvas que pasan por el origen tal como se indica en la figura 5.2. Una curva C se dice que biseca en área la región C_1 y C_2, si para cada punto P de C las dos regiones A y B sombreadas en la figura, tienen la misma área. Determinar la curva superior C_2, sabiendo que la curva bisectriz C tiene de ecuación $y = x^2$ y que la curva inferior C_1 tiene de ecuación $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

Respuesta.- Primero, calculemos el área A dada por:

$$\begin{aligned}
\int_0^t x^2\, dx - \int_0^t \frac{x^2}{2}\, dx &= \int_0^t \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right)\, dx \\
&= \int_0^t \frac{x^2}{2}\, dx \\
&= \frac{x^3}{6}\Big|_0^t \\
&= \frac{t^3}{6}.
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que la ecuación para C_2 es de la forma kx^2 para $k \in \mathbb{R}^+$. Entonces, encontremos el área de la región B, encontrando el área de las curvas C y C_2 en terminos de y, de la siguiente manera:

$$\mathrm{C} : y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y}$$

$$C_2 : y = kx^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{y}.$$

Por lo que, integrando de 0 a t^2. En área de B es dado por:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t^2} \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) dy &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \int_0^{t^2} \sqrt{y}\, dy \\
&= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{t^2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{2t^3}{3} - \frac{2t^3}{3\sqrt{k}}.
\end{aligned}$$

Ahora, igualamos las áreas de las regiones, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{t^3}{6} = \frac{2t^3}{3} - \frac{2t^3}{3\sqrt{k}} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3\sqrt{k}} \\
&\Rightarrow \quad \frac{2}{3\sqrt{k}} = \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \quad 4 = 3\sqrt{k} \\
&\Rightarrow \quad k = \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de C_2 es

$$y = \frac{16}{9} x^2,$$

10. Una función f está definida para todo x como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si} \quad x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Póngase $Q(h) = \frac{f(h)}{h}$ si $h \neq 0$.

a) Demostrar que $Q(h) \to 0$ cuando $h \to 0$.

Demostración.- Sea $\epsilon > 0$. Entonces, elijamos $0 < \delta = \epsilon$. Por lo que si

$$|h - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |h| < \delta$$

tenemos

$$\left|\frac{Q(h)}{h} - 0\right| = \begin{cases} \dfrac{h^2}{|h|} = |h| & \text{si} \quad h \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad h \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Así, encontramos un $\delta > 0$ tal que $\left|\dfrac{Q(h)}{h}\right| < \epsilon$ cuando $|h - 0| < \delta$. Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{Q(h)}{h} = 0.$$

b) Demostrar que f tiene derivada en 0 , y calcular $f'(0)$.

Demostración.- Para mostrar que f tiene una derivada en 0 debemos demostrar el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

existe. Notenemos que $f(0)=0$, ya que $0^2=0$. Entonces por la parte (a),

$$\begin{array}{rcl} f'(0) & = & \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ & = & \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} \\ & = & \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h} \\ & = & 0. \end{array}$$

11. $\displaystyle\int (2+3x)\operatorname{sen} 5x\ dx.$

Respuesta.- Sea,

$$\int (2+3x)\operatorname{sen}(5x)\ dx = 2\int \operatorname{sen}(5x)\ dx + \int x\operatorname{sen}(5x)\ dx.$$

Luego,

$$u=5x \ \Rightarrow\ du = 5\ dx$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} 2\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x)\ dx & = & \dfrac{2}{5}\displaystyle\int \operatorname{sen} u\ du \\ & = & -\dfrac{2}{5}\cos u + C \\ & = & -\dfrac{2}{5}\cos(5x) + C. \end{array}$$

Después,

$$u = x \quad\Rightarrow\quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(5x)\ dx \quad\Rightarrow\quad v = -\frac{1}{5}\cos(5x)$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} 3\displaystyle\int x\operatorname{sen}(5x)\ dx & = & 3\displaystyle\int u\ dv \\ & = & 3\left(uv - \displaystyle\int v\ du\right) \\ & = & 3\left(-\dfrac{x}{5}\cos(5x) + \dfrac{1}{25}\operatorname{sen}(5x)\right) + C \\ & = & \dfrac{4}{25}\operatorname{sen}(5x) - \dfrac{3x}{5}\cos(5x) + C. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\int (2+3x)\operatorname{sen}(5x)\; dx = -\frac{2}{5}\cos(5x) + \frac{4}{25}\operatorname{sen}(5x) - \frac{3x}{5}\cos(5x) + C.$$

12. $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\; dx.$

Respuesta.- Sea,

$$u = 1+x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\; dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1+x^2}\; dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\; du \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

13. $\displaystyle\int_{-2}^{1} x\left(x^2-1\right)^9\; dx.$

Respuesta.- Sea,

$$u = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x.$$

Luego,

$$u(-2) = 3 \quad \text{y} \quad u(1) = 0.$$

Así, por el teorema de sustitución para integrales tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} x\left(x^2-1\right)^9\; dx &= \frac{1}{2}\int_3^0 u^9\; du \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}u^{10}\Big|_3^0\right) \\
&= -\frac{3^10}{20}.
\end{aligned}$$

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{(6x+7)^3}\; dx.$

Respuesta.- Primero, transformemos la integral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2x+3}{(6x+7)^3}\; dx &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{6x+9}{(6x+7)^3}\; dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{6x+7}{(6x+7)^3}\; dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2}{(6x+7)^3}\; dx \\
&= \frac{1}{18}\int_0^1 \frac{6}{(6x+7)^2}\; dx + \frac{1}{9}\int_0^1 \frac{6}{(6x+7)^3}\; dx
\end{aligned}$$

Ahora, usando la integración por partes,

$$u = 6x + 7 \quad \Rightarrow \quad du = 6';dx.$$

Y por el teorema de sustitución para integrales tenemos

$$u(0) = 7 \quad \text{y} \quad u(1) = 13.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2x+3}{(6x+7)^3}\,dx &= \frac{1}{18}\int_7^{13} \frac{1}{u^2}\,du + \frac{1}{9}\int_7^{13} \frac{1}{u^3}\,dx \\
&= \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{u}\Big|_7^{13}\right) + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{u^2}\Big|_7^{13}\right) \\
&= \frac{1}{18}\left(-\frac{u+1}{u^2}\Big|_7^{13}\right) \\
&= \frac{1}{18}\left(\frac{8}{49} - \frac{14}{169}\right) \\
&= \frac{37}{8281}.
\end{aligned}$$

15. $\displaystyle\int x^4\left(1+x^5\right)^5\,dx.$

Respuesta.- Utilizando la integración por partes,

$$u = 1 + x^5 \quad \Rightarrow \quad du = 5x^4\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int x^4\left(1+x^5\right)^5\,dx &= \frac{1}{5}\int 5x^4\left(1+x^5\right)^5\,dx \\
&= \frac{1}{5}\int u^5\,du \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}u^6\right) \\
&= \frac{1}{30}(1+x^5)^6.
\end{aligned}$$

16. $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^{20}\,dx.$

Respuesta.- Primero, sustituimos $u = 1 - x$ y $du = -dx$ para luego aplicar la integración por partes, de la siguiente manera:

$$u(0) = 1 \quad \text{y} \quad u(1) = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^4(1-x)^{20}\,dx &= \int_1^0 -(1-u)^4u^{20}\,du\\ &= \int_0^1 (1-u)^4u^{20}\,du.\end{aligned}$$

De donde,

$$(1-u)^4y^{20} = u^{20}\left(1-4u+6u^2-4u^3+u^4\right) = u^{24}-4u^{23}+6u^{22}-4u^{21}+u^{20}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-u)^4\,u^{20}\,du &= \int_0^1 u^{24}-4u^{23}+6u^{22}-4u^{21}+u^{20}\,du\\ &= \left(\frac{u^{25}}{25}-\frac{u^{24}}{6}+\frac{6u^{23}}{23}-\frac{2u^{22}}{11}+\frac{u^{21}}{21}\right)\Bigg|_0^1\\ &= \frac{1}{25}-\frac{1}{6}+\frac{6}{23}-\frac{2}{11}+\frac{1}{21}\\ &= \frac{1}{265650}.\end{aligned}$$

17. $\displaystyle\int_1^2 x^{-2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\,dx.$

Respuesta.- Utilizando la integración por partes,

$$u=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad du=-\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Y luego, utilizando el teorema de sustitución para integrales,

$$u(1)=1 \quad \text{y} \quad u(2)=\frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx &= -\int_1^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen} u\,du\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \operatorname{sen} u\,du\\ &= (-\cos u)\Big|_1^{\frac{1}{2}}\\ &= \cos\frac{1}{2}-\cos 1.\end{aligned}$$

18. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2 \, dx.$

Respuesta.- Primero observemos la derivada siguiente:

$$\left[(x-1)^{\frac{1}{4}}\right]' = \frac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{4}}}.$$

Entonces,

$$\int \operatorname{sen}(x-1)^{\frac{1}{4}} \, dx = \int \left[4(x-1)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{4}}} \cdot \operatorname{sen}(x-1)^{\frac{1}{4}}\right)\right] \, dx.$$

Ahora, aplicamos la integración por partes,

$$t = (x-1)^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{4}}} \, dx.$$

Dandonos,

$$\int \operatorname{sen}(x-1)^{\frac{1}{4}} \, dx = \int 4t^3 \operatorname{sen} t \, dt.$$

Por el ejercicio 6 de la sección 5.8, notemos que

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 7 \operatorname{sen} x + C.$$

De donde tenemos

$$\begin{aligned}\int 4t^3 \operatorname{sen} t \, dt &= 4 \int t^3 \operatorname{sen} t \, dt \\ &= 4\left(-t^3 \cos t + 3t^2 \operatorname{sen} t + 6t \cos t - 6 \operatorname{sen} t\right) + C\end{aligned}$$

Después, ya que $t = (x-1)^{\frac{1}{4}}$, entonces

$$4\left[-(x-1)^{\frac{3}{4}}\right] \cos(x-1)^{\frac{1}{3}} + 3(x-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(x-1)^{\frac{1}{4}} + 6(x-1)^{\frac{1}{4}} \cos(x-1)^{\frac{1}{4}} - 6 \operatorname{sen}(x-1)^{\frac{1}{4}} + C.$$

19. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2 \, dx.$

Respuesta.- Apliquemos la integración por partes,

$$u = x^2 \quad \to \quad du = 2x \, dx.$$

Entonces,

$$\int x \operatorname{sen}\left(x^2\right) \cos\left(x^2\right) \, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} u \cos u \, du.$$

Por el hecho de que $\operatorname{sen}(2u) = 2 \operatorname{sen} u \cos u$ se tiene,

$$\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u \cos u \, du = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2u)\, du.$$

Por lo que sustituyendo $t = 2u \;\Rightarrow\; dt = 2\, du$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int \operatorname{sen}(2u)\, du &= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen} t\, dt \\
&= \frac{1}{8}(-\cos t) + C \\
&= -\frac{\cos(2u)}{8} + C.
\end{aligned}$$

Ya que, $\cos(2u) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$, entonces

$$\begin{aligned}
-\frac{\cos(2u)}{8} + C &= \frac{2\operatorname{sen}^2 u - 1}{8} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 u}{4} - \frac{1}{8} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 u}{4} + C' \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x^2 + C'.
\end{aligned}$$

20. $\displaystyle\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x \operatorname{sen} 2x}\; dx.$

Respuesta.- Apliquemos la integración por partes. Recordemos la identidad trigonometrica $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x}\operatorname{sen}(2x)\, dx &= -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\, du \\
&= -\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= -\frac{2}{9}\left(1 + 3\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

21. Demostrar que el valor de la integral $\displaystyle\int_0^2 375x^5\left(x^2+1\right)^{-4} dx$ es 2^n para un cierto entero n.

Demostración.- Aplicando la integración por partes, tenemos

$$u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\, dx.$$

Luego, utilizando el teorema de sustitución para integrales

$$u(0) = 1 \quad \text{y} \quad u(2) = 5.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 375x^5\left(x^2+1\right)^{-4}\,dx &= \frac{375}{2}\int_0^2 x^4\left(x^2+1\right)^{-4}\,dx\\
&= \frac{375}{2}\int_1^5 (u-1)^2u^{-4}\,du\\
&= \frac{375}{2}\int_1^5\left(\frac{u^2-2u+1}{u^4}\right)\,du\\
&= \frac{375}{2}\left(\int_1^5\frac{1}{u^2}\,du-2\int_1^5\frac{1}{u^3}\,du+\int_1^5\frac{1}{u^4}\,du\right)\\
&= \frac{375}{2}\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{3u^3}\right)\Bigg|_1^5\\
&= \frac{375}{2}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{375}+1-1+\frac{1}{3}\right)\\
&= 2^5.
\end{aligned}
$$

Donde $n=5$.

22. Determinar un par de números a y b para los cuales $\displaystyle\int_0^1 (ax+b)\,(x\,2+3x+2)^{-2}\,dx=\frac{3}{2}$.

Respuesta.- Aplicando la integración por partes, tenemos

$$u=x^2+3x+2 \quad\Rightarrow\quad du=2x+3\,dx.$$

Para ello necesitamos que $ax+b$ en el numerador del integrando sea $2x+3$. Supongamos que hay alguna constante que podemos multiplicar por tal que $c(ax+b)=2x+3$. Entonces tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\int_0^1\frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}\,dx &= \int_{u(0)}^{u(1)}\frac{1}{u^2}\,du\\
&= \frac{1}{c}\left(-\frac{1}{u}\right)\Bigg|_{u(0)}^{u(1)}\\
&= \frac{1}{c}\left(-\frac{1}{x^2+3x+2}\right)\Bigg|_0^1\\
&= \frac{1}{c}\left(\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Luego, ya que la integral dada es igual a $\frac{3}{2}$. Entonces,

$$\frac{1}{3c}=\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad c=\frac{2}{9}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{9}(ax+b)=2x+3 \quad\Rightarrow\quad a=9;\quad b=\frac{27}{2}.$$

23. Sea $I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n\ dx$. Demostrar que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$, y utilizar esta relación para I_2, I_3, I_4 e I_5.

Demostración.- Aplicando la integración por partes, tenemos

$$u = \left(1-x^2\right)^n \quad \Rightarrow \quad du = -2xn\left(1-x^2\right)^{n-1}\ dx$$
$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n\ dx &= \left(uv - \int v\,du\right)\Big|_0^1 \\
&= x\left(1-x^2\right)^n\Big|_0^1 + 2n\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}\ dx \\
&= 2n\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}\ dx \\
&= 2n\int_0^1 \left(1-1+x^2\right)\left(1-x^2\right)^{n-1}\ dx \\
&= 2n\int_0^1 \left(4-x^2\right)^{n-1}\ dx - 2n\int_0^1 \left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)^{n-1}\ dx \\
&= 2nI_{n-1} - 2nI_n.
\end{aligned}$$

De donde,

$$(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}.$$

Ahora, evaluemos I_2, I_3, I_4 e I_5. Para ello comencemos evaluando I_1 de la siguiente manera:

$$I_1 = \int_0^1 \left(1-x^2\right)\ dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Aplicando $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$, para I_2 tenemos

$$(2\cdot 2+1)I_2 = 2\cdot 2I_1 \quad \Rightarrow \quad 5I_2 = 5\cdot\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{8}{15}.$$

Para I_3:

$$7I_3 = 6I_2 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{16}{35}.$$

Para I_4:

$$9I_4 = 8I_3 \quad \Rightarrow \quad I_4 = \frac{128}{315}.$$

Y finalmente para I_5:

$$11I_5 = 10I_4 \quad \Rightarrow \quad I_5 = \frac{256}{693}.$$

24. Sea $F(m,n) = \int_0^x t^m(1+t)^n\,dt$, $m>0$, $n>0$. Demostrar que

$$(m+1)F(m,n) + nF(m+1,n-1) = x^{m+1}(1+x)^n.$$

Utilizar este resultado para calcular $F(10,2)$.

Demostración.- Aplicando la integración por partes, tenemos

$$u)(1+t)^n \quad \Rightarrow \quad du = n(1+t)^{n-1}\,dt$$

$$dv = t^m\,dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{t^{m+1}}{m+1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
F(m,n) &= \int_0^x t^m(1+t)^n\,dt \\
&= \left(uv - \int v\,du\right)\Big|_0^x \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}(1+x)^n\Big|_0^x - \frac{n}{m+1}\int_0^x t^{m+1}(1+t)^{n-1}\,dt \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}(1+x)^n - \frac{n}{m+1}F(m+1,n-1).
\end{aligned}$$

Multiplicando por $m+1$,

$$\begin{aligned}
& (m+1)F(m,n) = x^{m+1}(1+x)^n - nF(m+1,n-1) \\
\Rightarrow \quad & (m+1)F(m,n) + nF(m+1,n-1) = x^{m+1}(1+x)^n.
\end{aligned}$$

Luego, calculamos $F(10,2)$. Para ello primero calculamos $F(11,1)$:

$$\begin{aligned}
F(11,1) &= \int_0^x t^{11}(1+t)\,dt \\
&= \int_0^x \left(t^{11} + t^{12}\right)\,dt \\
&= \frac{x^{12}}{12} + \frac{t^{13}}{13}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
11F(11,2) + 2F(11,1) = x^{11}(1+x)^2 \quad & \Rightarrow \quad 11F(10,2) + 2\left(\frac{x^{12}}{12} + \frac{t^{13}}{13}\right) = x^{13} + 2x^{12} + x^{11} \\
& \Rightarrow \quad 11F(10,2) = \frac{11x^{13}}{13} + \frac{11x^{12}}{6} + x^{11} \\
& \Rightarrow \quad F(10,2) = \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{6} + \frac{x^{11}}{11}.
\end{aligned}$$

25. Sea $f(n) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} x\ dx$ donde $n \geq 1$. Demostrar que

(a) $f(n+1) < f(n)$.

Demostración.- Consideremos $f(n) - f(n-1)$. De donde,

$$\begin{array}{rcl} f(n) - f(n-1) & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{0}} \tan^{n+1} x\ dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^n x - \tan^{n+1} x\right)\ dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left(1 - \tan x\right)\ dx. \end{array}$$

Notemos que este resultado es mayor que 0, ya que $0 < \tan x < 1$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$. Por lo tanto,

$$f(n) - f(n+1) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) > f(n+1).$$

(b) $f(n) + f(n-2) = \dfrac{1}{n-1}$ si $n > 2$.

Demostración.- Recordemos que $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ y que la derivada de $\tan x$ es $\sec^2 x$, de donde

$$\begin{array}{rcl} f(b) + f(n-2) & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x\ dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^n x + \tan^{n-2} x\right)\ dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \left(\tan^2 x + 1\right)\ dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x\ dx. \end{array}$$

Aplicando la integral por partes,

$$u = \tan x \quad \Rightarrow \quad du = \operatorname{sen}^2 x\ dx.$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} f(n) + f(n-2) & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x\ dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 u^{n-2}\ du \\ & = & \dfrac{u^{n-1}}{n-1}\Big|_0^1 \\ & = & \dfrac{1}{n-1}. \end{array}$$

(c) $\dfrac{1}{n+1} < 2f(n) < \dfrac{1}{n-1}$ si $n > 2$.

Demostración.- Por la parte (a) se tiene $f(n+1) < f(n)$, de donde $f(n) < f(n-1) < f(n-2)$. Así,

$$f(n) + f(n-2) > 2f(n).$$

Por la parte (b) sabemos que $f(n) + f(n-2) = \dfrac{1}{n-1}$. Por lo tanto,

$$2f(n) < \frac{1}{n-1}.$$

Para la desigualdad de la derecha usamos de nuevo la desigualdad de la parte (a), $f(n+2) < f(n+1) < f(n)$ y,

$$f(n+2) + f(n) < 2f(n).$$

Usando una vez más la parte (b) sabemos que $f(n+2) + f(n) = \dfrac{1}{(n+2)-1} = \dfrac{1}{n+1}$. De lo que,

$$\frac{1}{n+1} < 2f(n).$$

Concluimos que,

$$\frac{1}{n+1} < 2f(n) < \frac{1}{n-1}.$$

26. Calcular $f(0)$, sabiendo que $f(\pi) = 2$ y que $\displaystyle\int_0^\pi \left[f(x) + f''(x)\right] \operatorname{sen} x \, dx = 5$.

Respuesta.- Primero, usando la linealidad de la integral, tenemos que

$$\int_0^\pi \left[f(x) + f''(x)\right] \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x \, dx + \int_0^\pi f''(x) \operatorname{sen} x \, dx = 5.$$

Luego, usaremos dos veces la integración por partes, para obtener una expresión para la primera integral en términos de $f''(x)$ (y resultará que las integrales con $f''(x)$ se cancelarán, lo que nos permitirá resolver este problema). Para la primera integración por partes, sea

$$u = f(x) \quad \Rightarrow \quad du = f'(x)$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x \, dx &= -f(x)\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x \, dx \\
&= [f(\pi) + f(0)] + \int_0^\pi f0(x) \cos x \, dx \\
&= 2 + f(0) + \int_0^\pi f'(x) \cos x \, dx
\end{aligned}$$

Después, evaluamos la integral $\int_0^\pi \cos x \, dx$. De donde,

$$u = f'(x) \quad \Rightarrow \quad du = f''(x)$$

$$dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x.$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
2 + f(0) + \int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,dx &= 2 + f(0) + f'(x)\operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f''(x)\operatorname{sen} x\,dx \\
&= 2 + f(0) + \int_0^{\pi} f''(x)\operatorname{sen} x\,dx.
\end{aligned}
$$

Finalmente, volviendo a introducir, en nuestra expresión original, concluimos que

$$
\begin{aligned}
5 &= \int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} x\,dx + \int_0^{\pi} f''(x)\operatorname{sen} x\,dx \\
&= 2 + f(0) - \int_0^{\pi} f''(x)\operatorname{sen} x\,dx + \int_0^{\pi} f''(x)\operatorname{sen} x\,dx \\
&= 2 + f(0).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$f(0) = 3.$$

27. Designar por A el valor de la integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}\,dx.$$

Y calcular la siguiente integral en función de A:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{x+1}\,dx.$$

Respuesta.- Comencemos con la expresión para A integrando por partes:

$$u = \cos x \quad\Rightarrow\quad du = -\operatorname{sen} x\,dx$$

$$dv = \frac{1}{(x+2)^2}\,dx \quad\Rightarrow\quad v = -\frac{1}{x+2}.$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}\,dx &= -\frac{\cos x}{x+2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x+2}\,dx \\
&= \left(\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2}\right) - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x+2}\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi+2}\right) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x+2}\,dx.
\end{aligned}
$$

Usando la propiedad de expansión y contracción de la integral (teorema 1.19), tenemos

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi+2}\right) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{2(x+1)}\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi+2}\right) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{x+1}\,dx.
\end{aligned}
$$

Resolviendo para la integral en términos de A, se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi+2} - A\right).$$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} + C.$

Respuesta.- Multipliquemos el numerador y el denominador de la integral por $\sqrt{a+bx}$, de donde

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx &= \int \frac{a+bx}{x\sqrt{a+bx}}\,dx \\
&= \int \frac{bx}{x\sqrt{a+bx}}\,dx + \int \frac{a}{x\sqrt{a+bx}}\,dx \\
&= \int \frac{b}{\sqrt{a+bx}}\,dx + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.
\end{aligned}$$

Usando la integral por partes, tenemos

$$u = a+bx \quad \Rightarrow \quad du = b.$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{b}{\sqrt{a+bx}}\,dx &= \int u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= 2\sqrt{u} + C \\
&= 2\sqrt{a+bx} + C.
\end{aligned}$$

29. $\displaystyle\int x^n\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{a(2n+3)}\left[x^n(ax+b)^{3/2} - nb\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,dx\right] + C\left(n \neq -\frac{3}{2}\right).$

Respuesta.- Usando la integral por partes, tenemos

$$u = x^n \quad \Rightarrow \quad du = nx^{n-1}\,dx$$

$$dv = \sqrt{ax+b} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int x^n\sqrt{ax+b}\,dx &= uv - \int v\,du \\
&= \frac{2}{3a}x^n(ax+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3a}\int x^{n-1}(ax+b)^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{3a}x^n(ax+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3a}\int x^{n-1}(ax+b)\sqrt{ax+b}\,dx \\
&= \frac{2}{3a}x^n(ax+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3a}\int \left(ax^n\sqrt{ax+b} + bx^{n-1}\sqrt{ax+b}\right)\,dx \\
&= \frac{2}{3a}x^n(ax+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3}\int x^n\sqrt{ax+b} - \frac{2nb}{3a}\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,dx.
\end{aligned}$$

Luego, resolviendo la igualdad, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{2n}{3}\right)\int x^n\sqrt{ax+b}\,dx &= \frac{2}{3a}x^n\,(ax+b)^{\frac{3}{2}}-\frac{2nb}{3a}\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,dx\\
\frac{2n+3}{3}\int x^n\sqrt{ax+b}\,dx &= \frac{2}{3a}x^n\,(ax+b)^{\frac{3}{2}}-\frac{2nb}{3a}\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,dx\\
\int x^n\sqrt{ax+b}\,dx &= \frac{2x^n(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{a(2n+3)}-\frac{2nb}{a(2n+3)}\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,dx\\
\int x^n\sqrt{ax+b}\,dx &= \frac{2}{a(2n+3)}\left(x^n(ax+b)^{\frac{3}{2}}-nb\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,dx\right).
\end{aligned}$$

30. $\displaystyle\int\frac{x^m}{\sqrt{a+bx}}\,dx=\frac{2}{(2m+1)b}\left[x^m\sqrt{a+bx}-ma\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx}}\,dx\right]+C\left(m\neq-\frac{1}{2}\right).$

Respuesta.- Usando la integral por partes, tenemos

$$u=x^m\quad\Rightarrow\quad du=mx^{m-1}\,dx$$

$$dv=\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\,dx\quad\Rightarrow\quad v=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^m}{\sqrt{a+bx}}\,dx &= uv-\int v\,du\\
&= \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}x^m-\frac{2m}{b}\int x^{m-1}\sqrt{a+bx}\,dx\\
&= \frac{2x^m}{b}\sqrt{a+bx}-\frac{2m}{b}\int\frac{x^{m-1}(a+bx)}{\sqrt{a+bx}}\,dx\\
&= \frac{2x^m}{b}\sqrt{a+bx}-\frac{2ma}{b}\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx}}\,dx-2m\int\frac{x^m}{\sqrt{a+bx}}\,dx.
\end{aligned}$$

Luego, resolviendo la igualdad, se tiene

$$\begin{aligned}
(2m+1)\int\frac{x^m}{\sqrt{a+bx}}\,dx &= \frac{2x^m}{b}\sqrt{a+bx}-\frac{2ma}{b}\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx}}\,dx\\
\int\frac{x^m}{\sqrt{a+bx}}\,dx &= \frac{2}{(2m+1)b}\left(xm\sqrt{a+bx}-ma\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx}}\,dx\right)+C.
\end{aligned}$$

31. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}}\,dx=-\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}}-\frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}\,dx+C(n\neq1).$

Respuesta.- Empecemos desarrollando la integral

$$\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}.$$

Integrando por partes, tenemos

$$u = \frac{1}{x^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{n-1}{x^n}\,dx$$

$$dv = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{b}\sqrt{ax+b}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} &= uv - \int v\,du \\
&= \frac{2\sqrt{ax+b}}{ax^{n-1}} + \frac{2(n-1)}{x^n}\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^n}\,dx \\
&= \frac{2\sqrt{ax+b}}{ax^{n-1}} + \frac{2(n-1)}{a}\int \frac{(ax+b)}{x^n\sqrt{ax+b}}\,dx \\
&= \frac{2\sqrt{ax+b}}{ax^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} + \frac{2b(n-1)}{a}\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}}.
\end{aligned}$$

Luego, resolviendo la igualdad, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{2b(n-1)}{a}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} &= \int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} - \frac{2\sqrt{ax+b}}{ax^{n-1}} - 2(n-1)\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} \\
\frac{2b(n-1)}{a}\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} &= -\frac{2\sqrt{ax+b}}{ax^{n-1}} - (2n-3)\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} \\
\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}}\,dx &= -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}.
\end{aligned}$$

32. $\displaystyle\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2}}{\operatorname{sen}^n x}\,dx + C(m \neq n).$

Respuesta.- Por el ejercicio 19 la la sección 5.10, se tiene

$$\int \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x}\,dx = -\frac{1}{n}\frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n}\int \frac{\cos^{m-1}}{\operatorname{sen}^{n-1} x}\,dx.$$

Aplicando este resultado y reemplazando $m+1$ por m y $n+1$ por n, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx &= -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\,dx \\
&= -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^{m-2} x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx \\
&= -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^{m-2} x(1-\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^n x}\,dx \\
&= -\frac{\cos^{m-1} x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx + \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx.
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{m-1}{n-1}\right)\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx &= -\frac{\cos^{m-1} x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x}-\frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx\\
\frac{n-m}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx &= -\frac{\cos^{m-1} x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x}-\frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx\\
\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx &= -\frac{\cos^{m-1} x}{(n-m)\operatorname{sen}^{n-1} x}-\frac{m-n+2}{n-m}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx\\
\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx &= \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\operatorname{sen}^{n-1} x}-\frac{m-n+2}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx
\end{aligned}$$

33. $\displaystyle\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx=-\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x}-\frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\,dx+C(n\neq 1).$

Respuesta.- Podemos reescribir la integral como

$$\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx=\int \frac{\cos^{m+2} x}{\operatorname{sen}^n x}\sec^2 x\,dx.$$

Entonces, integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
u=\frac{\cos^{m+2} x}{\operatorname{sen}^n x} \quad\Rightarrow\quad du &= \frac{-(m+2)\cos^{m+1} x\operatorname{sen}^{n+1} x-n\operatorname{sen}^{n-1} x\cos^{m+3}}{\operatorname{sen}^{2n} x}\,dx\\
&= \frac{-(m+2)\cos^{m+1} x\operatorname{sen}^{2} x-x\cos^{m+3} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x}\,dx\\
&= -(m+2)\frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x}-n\frac{\cos^{m+3}}{\operatorname{sen}^{n+1} x}\,dx\\
dv=\sec^2 x\,dx \quad\Rightarrow\quad v &= \tan x
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} &= \int \frac{\cos^{m+2} x}{\operatorname{sen}^n x}\sec^2 x\,dx\\
&= uv-\int v\,du\\
&= \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x}+(m+2)\int\left[-(m+2)\frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}-n\frac{\cos^{m+2} x}{\operatorname{sen}^n}\right]dx\\
&= \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x}+(m+2)\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\,dx-n\int \frac{\cos^{m+2} x}{\operatorname{sen}^n}\,dx\\
&= \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x}+(m+2)\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\,dx-n\int \frac{\cos^m x(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^n x}\,dx\\
&= \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x}+(m+2)\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\,dx-n\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx-n\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\,dx.
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
(1-n)\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx &= \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} + (m+2-n)\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\,dx \\
\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx &= -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\,dx + C(n\neq 1)
\end{aligned}$$

34. a) Encontrar un polinomio $P(x)$ tal que $P'(x)-3P(x)=4-5x+3x^2$. Demostrar que existe una sola solución.

Demostración.- Sea

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \quad\Rightarrow\quad P'(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k(k)x^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)c_{k+1}x^k$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
P'(x)-3P(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)c_{k+1}x^k - 3\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)c_{k+1}-3c_k\right]x^k - 3c_n x^n.
\end{aligned}$$

Luego, igualando a $4-5x+3x^2$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)c_{k+1}-3c_k\right]x^k - 3c_n x^n = 4-5x+3x^2.$$

Pero, esto implica que $n=2$ y $c_2=-1$, ya que $-3c_n x^n$ es el único termino x^n de la izquierda (si $n>2$ entonces no podríamos tener x^2 la mayor potencia de x a la derecha). Por lo tanto, $P(x)$ es un polinomio de grado y con $c_2=-1$, y así

$$P(x)=c_0c_1x-x^2 \quad\Rightarrow\quad P'(x)=c_1-2x.$$

De donde,

$$\begin{aligned}
P'(x)-3P(x)=4-5x+3x^2 \quad&\Rightarrow\quad c_1-2x-3c_0-3c_1x+3x^2=4-5x+3x^2 \\
&\Rightarrow\quad (c_1-3c_0)-(2+3c_1)x=4-5x
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos las ecuaciones

$$c_1-3c_0=4 \quad \text{y} \quad 2+3c_1=5.$$

Lo que determina de manera única c_0 y c_1,

$$c_1=1, \quad c_0=-1.$$

De lo que concluimos que existe un único $P(x)$ que satisface la ecuación

$$P(x) = -1 + x - x^2.$$

b) Si $Q(x)$ es un polinomio dado, demostrar que existe uno y sólo un polinomio $P(x)$ tal que $P'(x) - 3P(x) = Q(x)$.

Demostración.- Sea $Q(x)$ un polinomio dado y supongamos que existe dos polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ tal que

$$P'(x) - 3P(x) = Q(x) \quad \text{y} \quad R'(x) - 3R(x) = Q(x).$$

Esto implica que

$$\left[P'(x) - R'(x)\right] - 3\left[P(x) - R(x)\right] = Q(x) \quad \Rightarrow \quad \left[P(x) - R(x)\right]' - 3\left[P(x) - R(x)\right] = 0.$$

Ahora, si $P(x) - R(x) \neq 0$, entonces es de grado n para algunos $n \geq 1$. Sabemos que su derivada tiene grado $n - 1$ (Apostol, pag 166). Se sigue que

$$\left[P(x) - R(x)\right]' - 3\left[P(x) - R(x)\right]$$

tiene grado n (dado que el coeficiente de x^n en $\left[P(x) - R(x)\right]'$ es cero, ya que es de grado $n - 1$ y el coeficiente de $3\left[P(x) - R(x)\right]$ es distinto de cero, ya que tiene grado n). Pero sabemos que esta diferencia es 0, lo que significa que no puede tener un grado n para algún $n \geq 1$. Por lo tanto, debemos tener

$$P(x) - R(x) = 0 \quad \text{o} \quad P(x) = r(x).$$

35. Una sucesión de polinomios (llamados polinomios de Bernoulli) se define por inducción como sigue:

a) Determinar fórmulas explícitas para $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_5(x)$.

Respuesta.- Comencemos con la condición inicial $P_0(x) = 1$. El cual nos da

$$P_1'(x) = 1 \cdot P_0(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(x) = \int dx = x + C_1.$$

Ahora, usando la condición para encontrar C_1, se tiene

$$\int_0^1 (x + C_1)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1 x\right)\Bigg|_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{2}.$$

De donde,

$$P_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

Luego, usando la expresión para $P_1(x)$, tenemos

$$P_2'(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad P_2(x) = x^2 - x + C_2.$$

Usando la condición para encontrar C_2, obtenemos

$$\int_0^1 \left(x^2 - x + C_2\right) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{6}.$$

De donde,

$$P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Después, usando la expresión para $P_2(x)$,

$$P_3'(x) = 3\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + C_3.$$

Usando la condición para encontrar C_3, se tiene

$$\int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + C_3\right) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + C_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_3 = 0.$$

Así,

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Luego, utilizando la expresión para $P_3(x)$, tenemos

$$P_4'(x) = 4\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) = 4x^3 - 6x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + C_4.$$

Usando la condición para encontrar C_4,

$$\int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2 + C_4\right) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + C_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_4 = \frac{1}{30}.$$

De donde,

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

Finalmente, usando la expresión para $P_4(x)$, tenemos

$$P_5'(x) = 5\left(x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}\right) = 5x^4 - 10x^3 + 5x^2 \quad \Rightarrow \quad P_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x + C_5.$$

Usando la condición para encontrar C_5,

$$\int_0^1 \left(x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x + C_5\right) dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{12} + C_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_5 = 0.$$

Por lo tanto,

$$P_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.$$

b) Demostrar, por inducción, que $P_n(x)$ es un polinomio en x de grado n, siendo el término de mayor grado x_n.

Demostración.- En la parte (a) demostramos para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Supongamos que la afirmación es cierta para algún entero positivo m; es decir,

$$P_m(x) = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k.$$

Entonces, por la definición de polinomios de Bernoulli, tenemos

$$P'_{m+1}(x) = (m+1)\left(x^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k\right) = (m+1)x^m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k,$$

donde $b_k = (m+1)a_k$ para $k = 1, \ldots, m-1$. Ahora, tomando la integral de esta expresión

$$P_{m+1}(x) = \int \left[(m+1)x^m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k\right] dx = x^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{k+1} x^{k+1}$$

Por lo tanto, la afirmación es cierta para el caso $m+1$. Así, lo será para todo entero positivo n.

c) Demostrar que $P_n(0) = P_n(1)$ si $n \geq 2$.

Demostración.- A partir de la propiedad integral en la definición de los polinomios de Bernoulli sabemos que para $n \geq 1$,

$$\int_0^1 P_n(x)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (n+1)P_n(x)\, dx = 0.$$

Entonces, usando la primera parte de la defínción se tiene $P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x)$; Por lo tanto,

$$0 = \int_0^1 (n+1)P_n(x)\, dx = \int_0^1 P'_{n+1}(x)\, dx = P_{n+1}(1) - P_{n+1}(0).$$

Así,

$$P_{n+1}(1) = P_{n+1}(0).$$

d) Demostrar que $P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1}$ si $n \geq 1$.

Demostración.- Demostraremos por inducción. Para $n = 1$ tenemos

$$P_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P_1(x+1) = x + \frac{1}{2}.$$

De donde,

$$P_1(x+1) - P_1(x) = 1.$$

Ya que $nx^{n-1} = 1 \cdot x^0 = 1$, la ecuación de diferencia enunciada es válida para $n = 1$. Supongamos entonces que la afirmación es válida para algún número entero positivo m. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$P_{m+1}(x) = \int_0^x P'_{m+1}(t)\ dt = (m+1)\int_0^x P_m(t)\ dt.$$

Así,

$$\begin{array}{rcl}
P_{m+1}(x+1) - P_{m+1}(x) & = & (m+1)\left[\int_0^{x+1} P_m(t)\ dt - \int_0^x P_m(t)\ dt\right] \\
& = & (m+1)\left[\int_0^1 P_m(t)\ dt + \int_1^{x+1} P_m(t)\ dt - \int_0^x P_m(t)\ dt\right] \\
& = & (m+1)\left[0 + \int_0^x P_m(t+1)\ dt - \int_1^x P_m(t)\ dt\right] \\
& = & (m+1)\left[\int_0^x \left(P_m(t+1) - P_m(t)\right)\ dt\right] \\
& = & (m+1)x^m.
\end{array}$$

Por lo tanto, la afirmación es válida para $m+1$. Así, lo será para todo entero positivo n.

e) Demostrar que para $n \leq 2$ tenemos

$$\sum_{r=1}^{k-1} r^n = \int_0^k P_n(x)\ dx = \frac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n+1}.$$

Demostración.- Sea k un entero positivo. Primero, usando la definición de los polinomios de Bernoulli, tenemos

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^k P_n(x)\ dx & = & \int_0^k \frac{1}{n+1} P'_{n+1}(x)\ dx \\
& = & \frac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n+1}.
\end{array}$$

Ahora, queremos expresar el numerador como una suma telescópica y utilizar la parte (d),

$$\begin{array}{rcl}
P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0) & = & \sum_{r=1}^{k-1} \left[P_{n+1}(r+1) - P_{n+1}(t)\right] \\
& = & \sum_{r=1}^{k-1} \left[(n+1)r^n\right] \\
& = & (n+1)\sum_{r=1}^{k-1} r^n.
\end{array}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{r=1}^{k-1} = \int_0^k P_n(x)\ dx = \frac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n+1}.$$

f) Demostrar que $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$ si $n \geq 1$.

Demostración.-

g) Demostrar que $P_{2n+1}(0) = 0$ y $P_{2n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ si $n \geq 1$.

Demostración.-

36. Suponiendo que $|f''(x)| \leq m$ para cada x en el intervalo $[0,a]$, y que f toma su mayor valor en un punto interno de este interval, demostrar que $|f'(0)| + |f'(a)| \leq am$. Puede ponerse que f'' sea continua en $[0,a]$. Demostración.- Ya que $f(x)$ alcanza su máximo en el intervalo $(0,a)$, sabemos que hay algún $c \in (0,a)$ tal que $f'(c) = 0$. De donde,

$$\int_0^a f''(x)\,dx = \int_0^c f''(x)\,dx + \int_c^a f''(x)\,dx.$$

Evaluando estas integrales por separado, se tiene, por el primer teorema fundamental del cálculo,

$$\int_0^c f''(x)\,dx = f'(0) = -f'(0) \quad \Rightarrow \quad |f'(0)| = \left|\int_0^c f''(x)\,dx\right|.$$

Ahora, utilizamos el límite $f''(x) \leq m$ para todo $x \in [0,a]$,

$$|f'(0)| = \left|\int_0^c f''(x)\,dx\right| \leq \int_0^c |f''(x)|\,dx \leq \int_0^c m\,dx = mc.$$

Luego, evaluamos la segunda integral,

$$\int_c^a f''(x)\,dx = f'(a) - f'(c) = f'(a).$$

Y así,

$$|f'(a)| = \left|\int_c^a f''(x)\,dx\right| \leq \int_c^a |f''(x)|\,dx \leq m(a-c).$$

Por lo tanto,

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq mc + m(a-c) = ma.$$

6

Función Logaritmo, función exponencial y funciones trigonométricas inversas

6.2 definición de logaritmo natural como integral

Una ecuación tal como $f(xy) = f(x) + f(y)$ que expresa una relación entre los valores de una función en dos o más puntos se denomina **ecuación funcional**.