1

Espacios de Hilbert

1.1 Espacios de dimensión infinita

Definición 1.1 **Espacio vectorial.**

Dado $X \neq$, un **espacio vectorial** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una terna $(X, +, \cdot)$ siendo:

$$\begin{array}{rccc} + : & X \times X & \to & X \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times X & \to & X \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

donde se verifican las siguientes propiedades:

i) $(X, +)$ es un grupo abeliano.

ii) $+/\cdot$ son distributivas.

iii) $\exists 1 \in \mathbb{K}$ tal que $1 \cdot x = x \; \forall x \in X$.

Definición 1.2 **Base de un espacio vectorial.**

Un conjunto $\mathbb{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ se llama base de $(X, +, \cdot)$ si:

i) $\mathbb{B}$ es linealmente independiente. Es decir, Si podemos expresar:

$$0 = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_d x_d \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_d$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$. Entonces la única opción posible es que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_d = 0$$

ii) $\mathbb{B}$ es un sistema de generadores de X. Es decir,

$$\forall x \in X \; \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K} \text{ tal que } x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_d x_d$$

Además llamamos **dimensión del espacio vectorial** X como: $\dim(X) = \mathrm{card}(\mathbb{B}) = d$.

Nota: Hasta ahora tan solo nos hemos centrado en el estudio de espacios vectoriales de dimensión FINITA.

Ejemplo 1.1 Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f \text{aplicación}\}$. Podemos reescribir un elemento $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ del siguiente modo:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & f(n) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rccc} : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & x_n \end{array}$$

■