CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1

Propiedades básicas de los números

1.1. Propiedades, definiciones y Teoremas

Propiedad 1.1 (Ley asociativa para la suma)

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Propiedad 1.2 (Existencia de una identidad)

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Propiedad 1.3 (Existencia de inversos para la suma)

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Definición 1.1 *Conviene considerar la resta como una operación derivada de la suma: consideremos $a - b$ como una abreviación de $a + (-b)$*

TEOREMA 1.1 *Si un número x satisface $a + x = a$ para cierto número a, entonces es $x = 0$ (y en consecuencia esta ecuación se satisface también para cualquier a)*

Demostración.- *Si $a + x = a$ entonces $(-a) + (a + x) = (-a) + a = 0$ de donde $[(-a) + a] + x = 0$, por lo tanto $x = 0$*

Propiedad 1.4 (Ley conmutativa para la suma)

$$a + b = b + a$$

Propiedad 1.5 (Ley asociativa para la multiplicación)

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Propiedad 1.6 (Existencia de una identidad para la multiplicación)

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a; \; 1 \neq 0$$

Propiedad 1.7 (Existencia de inversos para la multiplicación)

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1; \; para \; a \neq 0$$

TEOREMA 1.2 *Si es $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$*

Demostración.- *Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$ entonces $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$ de donde $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$, por lo tanto $b = c$*

TEOREMA 1.3 *Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$*

Demostración.- *Si $a \neq 0$ entonces $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0$ de donde $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$ por lo tanto $b = 0$*
(Puede ocurrir que sea a la vez $a = 0$ y $b = 0$;) esta posibilidad no se excluye cuando decimos $a = 0$ y $b = 0$.

Definición 1.2 *Se define a la división en función de la multiplicación: el símbolo a/b significa $a \cdot b^{-1}$. Puesto que 0^{-1} no tiene sentido, tampoco lo tiene $a/0$;la división por 0 es siempre indefinida.*

Propiedad 1.8 (Ley conmutativa para la multiplicación)

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Propiedad 1.9 (Ley distributiva)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

TEOREMA 1.4 *Determinar cuando es $a - b = b - a$*

Demostración.- *Si $a - b = b - a$ entonces $(a - b) + b = (b - a) + b = b + (b - a)$ de donde $a = b + b - a$, luego $a + a == (b + b - a) + a = b + b$, en consecuencia $a \cdot (1 + 1) = b \cdot (1 + 1)$ y por lo tanto $a = b$*

TEOREMA 1.5 *Demostrar que $a \cdot 0 = 0$*

Demostración.- *Sea $0 + 0 = 0$ entones $a \cdot (0 + 0) = 0 \cdot a$ de donde $a \cdot 0 = 0$*

TEOREMA 1.6 *Demostrar que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$*

Demostración.- *Notemos que $(-a) \cdot b = [(-a) + a] \cdot b = 0 \cdot b = 0$, por lo tanto $(-a) \cdot b = 0$. Se sigue inmediatamente [sumando $-(a \cdot b)$ a ambos miembros] que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$*

TEOREMA 1.7 *Demostrar que $(-a)\dot{(} - b) = a \cdot b$*

Demostración.- *Notemos que $(-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] = (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b = (-a) \cdot [(-b) + b] = (-a) \cdot 0 = 0$. En consecuencia sumando $(a \cdot b)$ a ambos lados se obtiene $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$*

EJERCICIO 1.1 *Resolver $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$*

$$\begin{aligned}
(x-1) \cdot (x-2) &= x \cdot (x-2) + (-1) \cdot (x-2) \\
&= x \cdot x + x \cdot (-2) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-2) \\
&= x^2 + x\,[(-2) + (-1)] + 2 \\
&= x^2 - 2x + 2
\end{aligned}$$

Definición 1.3 *Para los números a que satisfagan:*

- *$a > 0$, se llaman **positivos***
- *$a < 0$ se llaman **negativos***

Definición 1.4 *$a < b$ puede interpretarse como $b - a > 0$*

Conviene considerar el conjunto de todos los números positivos, representados por P

Propiedad 1.10 (Ley de tricotomía) *Para todo número a se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:*

i) *$a = 0$*

ii) *a pertenece al conjunto P*

iii) *$-a$ pertenece al conjunto P*

Propiedad 1.11 (La suma cerrada) *Si a y b pertenecen a P, entonces $a + b$ pertenecen a P.*

Propiedad 1.12 (La multiplicación es cerrada) *Si a y b pertenecen a P, entonces $a \cdot b$ pertenece a P*

Definición 1.5 *Estas tres propiedades deben complementarse con las siguientes definiciones.*

$a > b$ *si* $a - b$ *pertenece a* P $a < b$ *si* $b > a$ $a \geq b$ *si* $a > b$ *ó* $a = b$ $a \leq b$ *si* $a < b$ *ó* $a = b$	*Nótese en particular que* $a > 0$ *si y sólo si* a *pertenece a* P.

Definición 1.6 *Si* a *y* b *son dos números cualesquiera, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:*

i) $a - b = 0$,

ii) $a - b$ *pertence al conjunto* p,

iii) $-(a - b) = b - a$ *pertenece al conjunto* p,

De las definiciones dadas se cumple una y sólo una de las sigueintes igualdades:

i) $a = b$,

ii) $a > b$,

iii) $b > a$.

TEOREMA 1.8 *Si* $a < b$ *y* $b < c$ *si y sólo si* $a < c$

Demostración.- *Si* $a < b$ *de modo que* $b - a$ *pertenece a* P, *entonces evidentemente* $(b + c) + (a + c)$ *pertenece a* P*; así si* $a < b$ *entonces* $a + c < b + c$. *Igualmente, supongamos* $a < b$ *y* $b < c$. *Entonces* $b - a$ *y* $c - b$ *están en* P *así que* $(c - b) + (b - a) = c - a$ *está en* P.

TEOREMA 1.9 *Si* $a < 0$ *y* $b < 0$, *entonces* $ab > 0$

Demostración.- *Por definición* $0 > a$ *lo cual significa que* $0 - a = -a$ *esta en* P. *Del mismo modo,* $-b$ *pertenece a* P *y, en consecuencia por P12,* $(-a)(-b) = ab$ *está en* P. *Así pues* $ab > 0$

TEOREMA 1.10 *Si* $a \neq 0$ *es* $a^2 > 0$

Demostremos por casos..- *Si* $a > 0$, *entonces* $a \cdot a > 0$ *y* $a^2 > 0$. *Por otro lado, si* $a < 0$, *entonces* $0 - a > 0$ *de modo que* $(-a)(-a) > 0$ *y por lo tanto* $a^2 > 0$

Definición 1.7 (Valor absoluto) *Se define como:*

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}$$

TEOREMA 1.11 *Para todos los números* a *y* b *se tiene*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración.- *Demostración.-* *Vamos a considerar cuatro casos:*

$$\begin{array}{lrr} (1) & a \geq 0 & b \geq 0 \\ (2) & a \geq & b \leq 0 \\ (4) & a \leq & b \geq 0 \\ (5) & a \leq 0 & b \leq 0 \end{array}$$

En el caso (1) *tenemos también* $a+b \geq 0$, *esto es evidente; en efecto por definición*

$$|a+b| = a+b = |a|+|b|$$

de modo que en este caso se cumple la igualdad.
En el caso (4) *se tiene* $a+b \leq 0$ *y de nuevo se cumple la igualdad:*

$$|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) = |a|+|b|$$

En el caso (2), *cuando* $a \geq 0$ *y* $b \leq 0$, *debemos demostrar que*

$$|a+b| \leq a-b$$

Este caso puede dividirse en dos subcasos. Si $a+b \geq 0$, *entonces tenemos que demostrar que*

$$a+b \leq a-b$$

es decir,

$$b \leq -b,$$

lo cual se cumple ciertamente puesto que b *es negativo y* $-b$ *positivo. Por otra parte, si* $a+b \leq 0$ *debemos demostrar que*

$$-a-b \leq a-b$$

es decir

$$-a \leq a,$$

lo cual es verdad puesto que a *es positivo y* $-a$ *negativo.*
Nótese finalmente que el caso (3) *puede despacharse sin ningún trabajo adicional aplicando el caso* (2) *con* a *y* b *intercambiados.*

Se puede dar una demostración mas corta dado que

$$|a| = \sqrt{a^2} \text{ ó } |a|^2 = a^2$$

. *Sea* $(|a+b|)^2 = (a+b)$ *Entonces*

$$\begin{aligned} (|a+b|)^2 &= (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ & &\leq a^2+2|a|\dot{|}b|+b^2 \\ & &= |a|^2 2|a|\dot{|}b|+|b|^2 \\ & &= (|a|+|b|)^2 \end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $|a+b| \leq |a|+|b|$ *porque* $x^2 < y^2$ *implica* $x < y$

Hay una tercera forma de probar que es utilizando el teorema anterior.
Puesto que $x = |x|$ *ó* $x = -|x|$, *se tiene* $-|x| \leq x \leq |x|$. *Análogamente* $-|y| \leq y \leq |y|$. *Sumando ambas desigualdades se tiene:*

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

y por tanto en virtud del teorema 4.2 se concluye que: $|x+y| \leq |x|+|y|$

1.2. Problemas

1. Demostrar lo siguiente:

i) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$

Demostración.- Sea $a \neq 0$ entonces $(a^{-1} \cdot a)x = a \cdot a^{-1}$ por lo tanto $\cdot x = 1$

ii) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

Demostración.- Partamos de $(x-y)(x+y)$ donde por la propiedad distributiva tenemos $(x-y)x + (x-y)y$, luego $x^2 - xy + xy - y^2$, por lo tanto por las propiedades de inverso y neutro $x^2 - y^2$

iii) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$

Demostración.- Dada la hipótesis entonces $x^2 + \left[-(y^2)\right] = y + \left[-(y^2)\right]$ y por propiedades de neutro y definición $x^2 - y^2 = 0$, luego $(x-y)(x+y)$ y en virtud del teorema $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$ no queda $x - y = 0$ ó $x + y = 0$, por lo tanto $x = y$ ó $x = -y$

iv) $(x^3 - y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

Demostración.- Dado $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ entonces por la propiedad distributiva $(x-y)x^2 + (x-y)xy + (x-y)y^2 = x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 + xy^2 - y^3$ por lo tanto en virtud de las propiedades de inverso y neutro $x^3 - y^3$.

v) $x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$

Demostración.-

$$\begin{array}{rl} & (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}) \\ = & x(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}) - y(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} \\ = & x^n + x^{n-1}y + ... + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} - (x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + ... + xy^{n-1} + y^n) \\ = & x^n - y^n \end{array}$$

vi) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Demostración.- Sea $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$ entonces por la propiedad distributiva $x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^2$, por lo tanto $x^3 + y^3$

2. ¿Donde está el fallo en la siguiente demostración? Sea $x = y$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & xy \\ x^2 + y^2 & = & xy - y^2 \\ (x+y)(x-y) & = & y(x-y) \\ x+y & = & y \\ 2 & = & 1 \end{array}$$

El fallo esta en que no se puede dividir un número por 0 sabiendo que $x = y$

3. Demostrar lo siguiente:

i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc},\ si\ b, c \neq 0$

Demostración.- Por definición tenemos que $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$, como $b,\ c \neq 0$ entonces $(ab)(c \cdot c^{-1})$, por las propiedades asociativa y conmutativa, $(ac)(b^{-1}c^{-1})$ por lo tanto $\dfrac{ac}{bc}$

ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd},\ si\ b, d \neq 0$

Demostración.- $(ad+bc)/(bd) = (ad+bc)(bd)^{-1} = (ad+bc)(b^{-1}d^{-1}) = ab^{-1} + cd^{-1} = a/d + c/d$

iii) $(ab)^1 = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$ (Para hacer esto hace falta tener presente cómo se ha definido $(ab)^{-1}$)

Demostración.- Demostremos que $a^{-1}b^{-1}(ab) = 1$, Sea $a^{-1}b^{-1}(ab) = \left(a^{-1}a\right)\left(b^{-1}b\right) = 1$

iv) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{db}$, si $b, d \neq 0$

Demostración.- Sea por definición $ab^{-1} \cdot cd^{-1}$ entonces por la propiedad conmutativa $ac \cdot b^{-1}d^{-1}$, por lo tanto $\dfrac{ac}{bd}$ si $b, d \neq 0$

Corolario 1.1 *Si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $(cd^{-1})^{-1} = c^{-1}d$*

Demostración.- Por definición de a^{-1} tenemos que $(cd^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{cd^{-1}}$, por el teorema de posibilidad de la división $1 = (c^{-1}d)(cd^{-1})$ y en virtud de los axiomas de conmutatividad y asociatividad $1 = (c^1c)(dd^{-1})$, luego $1 = 1$. quedando demostrado el corolario.

v) $\dfrac{a}{b} / \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$ si $b, c, d \neq 0$

Demostración.- Si $ab^{-1} \cdot \left(cd^{-1}\right)^{-1}$ en virtud del anterior corolario se tiene $ab^{-1} \cdot c^{-1}d$ y por lo tanto $\dfrac{ad}{bc}$

vi) Si $b,\ c \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si sólo si $ad = bc$, Determinar también cuando es $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$

Demostración.- Sea $b,\ c \neq 0$ si sólo si $ab^{-1} = cd^{-1}$ entonces $(ab^{-1})b = cd^{-1}b$, por propiedades asociativa y conmutativa $a(b \cdot b^{-1}) = (bc)d^{-1}$, $a = (bc)d^{-1}$ luego $ad = bc(d \cdot d^{-1})$, por lo tanto $ad = bc$.
Por otro lado, si $ab^{-1} = b^{-1}$ entonces $a^2 = b^2$,por lo tanto determinamos que $a = b$ ó $a = -b$

4. Encontrar todos los números x para los que

i) $4 - x < 3 - 2x$

$$
\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & 4-x+2x & < & 3-2x+2x & \\
\Rightarrow & x+4 & < & 3 & \text{Axiomas} \\
\Rightarrow & 4+(-4)x & < & 3+(-4) & \\
\Rightarrow & x & < & -1 & \text{propiedades}
\end{array}
$$

ii) $5-x^2<8$

$$
\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & (-5)+5-x^2+(-8) & < & (-8)+8+(-5) \\
\Rightarrow & -x^2-8 & < & -5 \\
\Rightarrow & -x^2-3 & < & 0 \\
\Rightarrow & -(-x^2-3) & > & -0 \\
\Rightarrow & x^2+3 & > & 0
\end{array}
$$

Sea $x \neq 0$ entonces por teorema $x^2>0$ y por propiedad se cumple que x^2+3 siempre es positivo, y como $3>0$ entonces el valor de x son todos los números reales.

iii) $5-x^2<-2$

$$
\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & (-5)+5-x^2 & < & -2+(-5) \\
\Rightarrow & -x^2 & < & -7 \\
\Rightarrow & x^2 & > & 7 \\
\Rightarrow & x>\sqrt{7} & \text{ó} & x<-\sqrt{7}
\end{array}
$$

iv) $(x-1)(x-3)>0$

$$
\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & x-1>0 & y & x-3>0 \\
 & & \text{ó} & \\
 & x-1<0 & y & x-3<0 \\
 & & & \\
\Rightarrow & x>1 & y & x>3 \\
 & & \text{ó} & \\
 & x<1 & y & x<3 \\
 & & & \\
\Rightarrow & x>3 & \text{ó} & x<1
\end{array}
$$

v) $x^2-2x+2>0$

Completando cuadrados obtenemos que $x^2-2x+1^2-1^2+2>0$, después $(x-1)^2+1^2>0$, luego $x^2>0$, y en virtud de teorema nos queda que la desigualdad dada satisface a todos los números reales.

vi) $x^2+x+1>2$

Aplicando el teorema se tiene $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{2^2-4(-1)}}{2}$. luego

$$
\left(x>\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad y \quad x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ó} \left(x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad y \quad x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),
$$

por lo tanto,

$$
x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cup x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}
$$

vii) $x^2 - x + 10 > 16$

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & x^2 - x - 6 & > & 0 \\ \Rightarrow & (x-3)(x+2) & > & 0 \\ & & & \\ \Rightarrow & x > 3 & y & x > -2 \\ & & ó & \\ & x < 3 & y & x < -2 \\ & & & \\ \Rightarrow & x > 3 & ó & x < -2 \end{array}$$

viii) $x^2 + x + 1 > 0$

Sabemos que $x^2 > 0$, *para* $x \neq 0$, luego será verdad para $x^2 + x + 1 > 0$, entonces la inecuación se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$

ix) $(x-\pi)(x+5)(x-3) > 0$ por la propiedad asociativa $(x-\pi)\left[(x+5)(x-3)\right] > 0$

$$\begin{array}{rccl} \Rightarrow & x > \pi & \wedge & [(x > -5 \wedge x > 3) \vee (x < -5 \wedge x < 3)] \\ & & \vee & \\ & x < \pi & \vee & [(x < -5 \wedge x > 3) \vee (x > -5 \wedge x < 3)] \\ & & & \\ \Rightarrow & x > \pi & \wedge & (x > 3 \vee x < -5) \\ & & \vee & \\ & x < \pi & \wedge & -5 < x - 3 \\ & & & \\ \Rightarrow & x < \pi & \vee & -5 < x - 3 \end{array}$$

x) $(x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$

$$\begin{array}{rccl} \Rightarrow & x > \sqrt[3]{2} & y & x > \sqrt{2} \\ & & ó & \\ & x < \sqrt[3]{2} & y & x < \sqrt{2} \\ & & & \\ \Rightarrow & x > \sqrt{2} & ó & x < \sqrt[3]{2} \end{array}$$

xi) $2^x < 8$

Podemos reescribir como $2^x < 2^3$ y por propiedad de logaritmos que se vera mas adelante se tiene que $x < 3$

xii) $x + 3^x < 4$

Visualizando, está claro que si $x = 1$ entonces $1 + 3^2 = 4$, luego cualquier número menor a 1 debería ser menor a 4, por lo tanto $x < 1$

xiii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$

$$
\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & \dfrac{1}{x(1-x)} & > & 0 \\[2ex]
\Rightarrow & \dfrac{1\cdot [x(1-x)]^2}{x(1-x)} & > & 0\cdot [x(1-x)]^2 \\[2ex]
\Rightarrow & x(1-x) & > & 0 \\[2ex]
\Rightarrow & x>0 & y & x<1 \\
 & & \text{ó} & \\
 & x<0 & y & x>1 \\[2ex]
\Rightarrow & 0 \; < & x & < \; 1
\end{array}
$$

xiv) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$

$$
\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{>} & > & 0(x+1)^2 \\[2ex]
\rightarrow & (x-1)(x+1) & > & 0 \\[2ex]
\Rightarrow & x>1 & y & x>-1 \\
 & & \text{ó} & \\
 & x<1 & y & x<-1 \\[2ex]
\Rightarrow & x>1 & \text{ó} & x<-1
\end{array}
$$

5. Demostrar lo siguiente:

i) Si $a<b$, y $c<d$, entonces $a+c<b+d$

Demostración.- Por hipótesis y propiedad de los números reales se tiene $b-a>0$ y $d-c>0$, luego $(b-a)+(d-c)>0$, así $a+c<b+d$

ii) Si $a<b$, entonce $-b<-a$

Demostración.- Sea $-1<0$, por teorema $-1(a)>-1(b)$, luego por existencia de elementos neutros $-a>-b$ por lo tanto $-b<-a$

iii) Si $a<b$ y $c>d$, entonces $a-c<b-d$

Demostración.- Si $a<b=b-a>0$ y $c>d=d<c=c-d>0$, por propiedad de números reales $(b-a)+(c-d)>0$, luego $(b-d)+(-a+c)>0$ y en virtud del teorema 1.19 y definición $(b-d)-(a-c)>0$, por lo tanto $a-c<b-d$

iv) Si $a<b$ y $c>0$, entonces $ac<bc$

Demostración.- Por propiedad de números reales $c(b-a)>0$, luego $bc-ac>0$, así $ac<bc$

v) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

Demostración.- Sea $b - a > 0$ y $0 - c > 0$, entonces $-c(b-a) > 0$, luego $ac - bc > 0$, así $ac > bc$

vi) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$

Demostración.- Sea $1 < a$ y $a - 1 > 0$, por propiedad $a(a-1) > 0 = a^2 - a > 0$, luego $a < a^2$ y $a^2 > a$

vii) Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$

Demostración.- La demostración es similar al teorema 2.14. Por definición $0 < a$ y $a < 1$ por lo tanto $1 - a > 0$ y $a(1-a) > 0$, $a^2 < a$.

viii) Si $a \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$

Demostración.- Tenemos que $a \geq 0$, $c \geq 0$, $a < d$ y $a < b$, en virtud de teorema $ac \leq bc$ y $ac \leq ad$ (cabe recalcar que por hipótesis podría dar el caso de $0 \leq 0$ por ello el símbolo " $\leq$ ") por lo tanto $bc - ac \geq 0$ y $ad - ac \geq 0$. luego $ac - ac \leq ad + bc$ y $-ad - bc \leq -2ac$.
Por otro lado sea $b - a > 0$ y $d - c > 0$ entonces $(b-a)(d-c) > 0$ y $db - ad - bc + ac > 0$.
Si $-ad - bc \leq -2ac$ entonces $db - 2ac + ac > 0$ así $ac < bd$.

ix) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

Demostración.- Por el problema anterior si $0 \leq a < b$ entonces $a \cdot a < b \cdot b$ y $a^2 < b^2$

x) Si $a,\ b \geq 0$ y $a^2 < b^2$, entonces $a < b$

Demostración.- Si $b^2 - a^2 > 0$, por teorema $(b-a)(b+a) > 0$, luego $(b - a > 0 \ \wedge\ b + a > 0) \ \vee\ (b - a < 0 \ \wedge\ b + a < 0)$. Sea $a,\ b \geq 0$ queda $(b - a > 0 \ \wedge\ b + a > 0)$ por lo tanto $a < b$.

6. **a)** Demostrar que si $0 \leq x < y$ entonces $x^n < y^n$

Demostración.- Sea $ac < bd$, $x^2 = a$, $y^2 = b$ y $c = x$, $d = x$ entonces $x \cdot x \cdot x < y \cdot y \cdot y$. Si aplicamos n veces dicho teorema $x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x < y \cdot y \cdot y \cdot ... \cdot y$ se tiene $x^n < y^n$

b) Demostrar que si $x < y$ y n es impar, entonces $x^n < y^n$

Demostración.- Si consideramos $x \geq 0$ ya quedo demostrado anteriormente. Ahora consideremos el caso donde $x < y \leq 0$, por lo tanto $0 \leq -y < -x$, así por la parte a) $-y^n < -x^n$, que significa que n es impar, y por lo tanto $x^n < y^n$. Finalmente si $x < 0 \geq y$ entonces $x^n < 0 \leq y^n$, ya que n es impar.Así queda demostrado la proposición dada.

c) Demostrar que si $x^n =^n$ y n es impar, entonces $x = y$

Demostración.- Sea $n = 2k-1$ y $x^n = y^n$ entonces $x^{2k-1} - y^{2k-1} = 0$ y por teorema $(x^{2k-1} - y^{2k-1})(x^{(2k-1)-1} + x^{(2k-1)-2}y^{2k-1} + ... + x^{2k-1}y^{(2k-1)-2} + y^{(2k-1)-1}) = 0$. Sea $x,\ y \neq 0$ entonces por la propiedad de existencia de reciproco o inverso $x - y = 0$ por lo tanto $x = y$

d) Demostrar que si $x^n = y^n$ y n es par, entonces $x = y$ ó $x = -y$

Demostración.- Si n es par, entonces $x, y \geq 0$ y $x^n = y^n$,luego $x = y$. Además, si $x, y \leq 0$ y $x^n = y^n$, entonces $-x, -y \geq 0$ y $(-x)^n = (-y)^n$, por lo tanto $x = y$. La única posibilidad es que x e y sea positivo y el otro negativo. En este caso, x e $-y$ son ambos positivos o negativos. Además $x^n = (-y)^n$, dado que n es par se sigue de los casos anteriores que $x = -y$.

7. Demostrar que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

Demostración.-

1. $a < \sqrt{ab}$

   Si $4a < b$ entonces $a^2 < ab$ y por raíz cuadrada dado que $a,\ b > 0$ entonces $a < \sqrt{ab}$

2. $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

   En vista de que $a,\ b > 0$ y $a < b$ entonces $a - b > 0$, $(a-b)^2 > 0$ por lo tanto, $a^2 - 2ab + b^2 > 0 \Rightarrow 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab - 2ab + 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 4ab < (a+b^)2 \Rightarrow ab < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

3. $\dfrac{a+b}{2} < b$

   Si $a < b$ entonces $a + b < 2b$ por lo tanto $\dfrac{a+b}{2} < b$

Y por la propiedad transitiva queda demostrado.

8. Aunque las propiedades básicas de las desigualdades fueron enunciadas en términos del conjunto P de los números positivos, y $<$ fue definido en términos de P este proceso puede ser invertido. Supóngase que las propiedades 10 al 13 se sustituyen por:

P-10 Cualquier que sean los números a y b, se cumple una y sólo una de las relaciones siguientes

- $a = b$
- $a < b$
- $b < a$

P-11 Cualquiera que sean a, b y c, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

P-12 Cualquiera que sean a, b y c, si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

P-13 Cualquiera que sean a, b y c, si $a < b$, y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Demostrar que las propiedades 10 al 13 se pueden deducir entonces como teoremas.

Demostración.- Con respecto a **P-11** se tiene $b - a > 0$ y $c - b > 0$ de modo que $c - a > 0$, por lo tanto $a < c$. Luego para **P-12** se tiene $b - a > 0$, por propiedad de neutro aditivo $b - a + c - c > 0$, en consecuencia $a + c < b + c$. Después para **P-13** tenemos $c(b - a) > 0$ por lo tanto $ac < bc$. Por último si $a < 0$ entonces $-a > 0$; ya que si $-a < 0$ se cumpliese, se tendría $0 = a + (-a) < 0$ el cual es un absurdo. En consecuencia, cualquier número a satisface una de las condiciones $a = 0$, $a > 0$ ó $-a > 0$. Con esto queda demostrado **P-10.**

9. Dese una expresión equivalente de cada una de las siguientes utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto.

$$
\begin{array}{crcl}
(i) & |\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}| & \Rightarrow & \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7} \\
(ii) & ||a+b|-|a|-|b|| & \Rightarrow & |a+b|-|a|-|b| \\
(iii) & |\left(|a+b|+|c|-|a+b+c|\right)| & \Rightarrow & |a+b|+|c|-|a+b+c| \\
(iv) & |x^2-2xy+y2| & \Rightarrow & x^2-2xy+y2 \\
(v) & |\left(|\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}|\right)| & \Rightarrow & \sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}
\end{array}
$$

10. Expresar lo siguiente prescindiendo de signos de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.

(i) $|a + b| - |b|$

$$
\begin{array}{rcccccccc}
a & \text{si} & a & \geq & -b & \text{y} & b & \geq & 0 \\
-a & \text{si} & a & \leq & -b & \text{y} & b & \leq & 0 \\
a+2b & \text{si} & a & \geq & -b & \text{y} & b & \leq & 0 \\
-a-2b & \text{si} & a & \leq & -b & \text{y} & b & \geq & 0
\end{array}
$$

(ii) $|x| - |x^2|$

$$
\begin{array}{rcccc}
x-x^2 & \text{si} & x & \geq & 0 \\
-x-x^2 & \text{si} & x & \leq & 0
\end{array}
$$

(iii) $|x| - |x^2|$

$$
\begin{array}{rcc}
x-x^2 & si & x \leq 0 \\
-x-x^2 & si & x \geq 0
\end{array}
$$

(iv) $a - |(a - |a|)|$

$$
\begin{array}{rcc}
a & si & a \leq 0 \\
3a & si & a \geq 0
\end{array}
$$

11. Encontrar todos los números x para los que se cumple

(i) $|x - 3| = 8$

$$\begin{array}{rcccl} -8 & = & x-3 & = & 8 \quad \text{teorema 4.1} \\ -5 & = & x & = & 11 \end{array}$$

(ii) $|x-3| < 8$

$$\begin{array}{rcccl} -8 & < & x-3 & < & 8 \quad \text{teorema} \\ -5 & < & x & < & 11 \end{array}$$

(iii) $|x+4| < 2$

$$\begin{array}{rcccl} -2 & < & x+4 & < & -2 \quad \text{teorema} \\ -6 & < & x & < & -2 \end{array}$$

(iv) $|x-1| + |x-2| > 1$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si \quad x \geq 2 \\ 2-x & si \quad x \leq 2 \end{cases} \tag{1.2}$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$\begin{array}{lclcl} \text{Si} & x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)+(2-x) > 1 & \Rightarrow & x < 1 \\ \text{Si} & 1 \leq x \leq 2 & \Rightarrow & (x-1)+(2-x) > 1 & \Rightarrow & 1 > 1 \\ \text{Si} & x \geq 2 & \Rightarrow & (x-1)+(x-2) > 1 & \Rightarrow & x > 2 \end{array}$$

Así: $x < 1 \ \vee \ x > 2$

(v) $|x-1| + |x+1| < 2$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -1-x & si \quad x \leq -1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$\begin{array}{lclcl} \text{Si} & x \leq -1 & \Rightarrow & (1-x)+(1-x) < 2 & \Rightarrow & x > -1 \\ \text{Si} & -1 \leq x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)+(x+1) < 2 & \Rightarrow & 2 < 2 \\ \text{Si} & x \geq 1 & \Rightarrow & (x-1)+(x+1) < 2 & \Rightarrow & x < 1 \end{array}$$

Pero es falso que x satisface a $-1 \leq x \leq 1$, y contradice a que x satisface a todos los reales, por lo tanto no existe solución

(vi) $|x-1|+|x+1|<1$

De la misma manera que el anterior ejercicio no tiene solución para ningún x.

(vii) $|x-1|\cdot|x+1|=0$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \\ \end{cases} \tag{1.5}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -1-x & si \quad x \leq -1 \end{cases} \tag{1.6}$$

queda comprobar:

$$\begin{array}{llcccl} \text{Si} & x \leq -1 & \Rightarrow & (1-x)+(-1-x)=0 & \Rightarrow & x \leq -1 \cup x=1 \cup x=-1 \\ \text{Si} & -1 \leq x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)\dot{(}x+1)=0 & \Rightarrow & -1 \leq x \leq 1 \ \cup \ x=1 \ \cup \ x=-1 \\ \text{Si} & x \geq 1 & \Rightarrow & (x-1)\dot{(}x+1)=0 & \Rightarrow & x \notin \mathbb{R} \end{array}$$

Por lo tanto $x=1 \quad$ ó $\quad x=-1$

(viii) $|x-1|\cdot|x+2|=3$

Si $x>1$ ó $x<-2$, entonces la condición se convierte en $(x-1)(x+2)=3$ ó $x^2+x-5=0$, cuyas soluciones son según la formula general son $\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ y $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$. Puesto que el primer valor es $x>1$ y el segundo es $x<-2$, ambos son soluciones de $|x-1||x+2|=3$. Para $-2<x<1$, la condición se convierte en $(1-x)(x+2)=3$ ó $x^2+x+1=0$, la cual carece de soluciones.

12. Demostrar lo siguiente:

(i) $|xy|=|x|\cdot|y|$

Demostración.- Si $|xy|$ Por teorema $\sqrt{(xy)^2}$ luego por propiedad $\sqrt{x^2\cdot y^2}$, así $\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y^2}$ y $|x|\cdot|y|$

(ii) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$

Demostración.- Si $\left|\dfrac{1}{x}\right|$ por definición $\sqrt{(x^{-1})^2}$, después $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2/2}$, por propiedad $\dfrac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{x^2}}$, luego $\dfrac{1}{|x|}$

(iii) $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$ si $y \neq 0$

Demostración.-
$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{x^{2/2}}{y^{2/2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{2/2} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

(iv) $|x-y| \leq |x| + |y|$

Demostración.- Sea $(|x-y|)^2 \leq (|x|+|y|)^2$, entonces:

$$\begin{array}{rcll} (|x-y|)^2 & = & (x-y)^2 & \\ & = & x^2 - 2xy + y^2 & \\ & \leq & |x|^2 + |-2xy| + |y|^2 & \text{Ya que } -2xy \leq |-2xy| \\ & = & |x|^2 + |-2||x||y| + |y|^2 & \text{Por teorema} \\ & = & |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 & \\ & = & (|x|+|y|)^2 & \end{array}$$

luego por teorema $|x-y| \leq |x| + |y|$

(v) $|x| - |y| \leq |x-y|$

Demostración.- Su demostración es parecida al anterior teorema,

$$\begin{array}{rcll} (|x|-|y|)^2 & = & |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 & \\ & \leq & x^2 - 2xy + y^2 & \text{por el contrareciproco de } |2xy| \geq 2xy \\ & = & (x-y)^2 & \\ & = & |x-y|^2 & \end{array}$$

Por lo tanto $|x| - |y| \leq |x-y|$

(vi) $||x| - |y|| \leq |x-y|$ (¿ Por qué se sigue esto inmediatamente del anterior teorema ?)

Demostración.- Sea $\sqrt{(|x|-|y|)^2}$ entonces,

$$\sqrt{(|x|-|y|)^2} = \sqrt{(x^2 - 2|x||y| + y^2} \leq \sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$$

y por definición se tiene $|x-y|$

(vii) $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$

Demostración.- Sea $\sqrt{(x+y+9)^2}$ entonces,

$$\sqrt{x^2 + z^2 + +y^2 + 2xy + 2xz + 2yz} \leq \sqrt{|x|^2 + |z|^2 + +|y|^2 + 2|x||y| + 2|x||z| + 2|y||z|}$$

por lo tanto $\sqrt{(|x|+|y|+|z|)^2}$. La igualdad se prueba si $\forall x,y,z \geq 0$ ó $\forall x,y,z \leq 0$

13. El máximo de dos números x e y se denota por $max(x,y)$. Así $max(-1,3) = max(3,3)$ y $max(-1,-4) = max(-4,-1 = -1)$. El mínimo de x e y se denota por $min(x,y)$. Demostrar que:

1. $max(x,y) = \dfrac{x+y+|y-x|}{2}$

2. $min(x,y) = \dfrac{x+y-|y-x|}{2}$

Derivar una fórmula para $max(x,y,z)$ y $min(x,y,z)$, utilizando. por ejemplo, $max(x,y,z) = max(x, max(x,y))$

Demostración.- Por definición de valor absoluto se tiene:

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & si, \quad x \geq y \\ y-x & si, \quad x \leq y \end{cases} \tag{1.7}$$

Por lo tanto

- $max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+x-y}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$
- $max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+y-x}{2} = \dfrac{2y}{2} = y$

La demostración es parecido para para $min(x,y)$
Se deriva una formula para $mas(x,y,z) = max(x, max(y,z))$ de la siguiente manera

$$max(x, max(y,z)) = \frac{x + \dfrac{y+z+|y-z|}{2} + \left| x - \dfrac{y+z+|y-z|}{2} \right|}{2}$$

14. Demostrar:

(a) Demostrar que $|a| = |-a|$

Demostración.- Si $a \geq 0$, para $|a|^2$ entonces a^2, luego $(-a)^2 = |-a|^2$, así se demuestra que $|a| = |-a|$. Luego es evidente para $a \leq 0$.

(b) Demostrar que $-b \leq a \leq b$ si y sólo si $|a| \leq b$. En particular se sigue que $-|a| \leq a \leq |a|$.

Demostración.- Sea $-a \leq b \wedge a \leq b$ entonces por definición de valor absoluto $|a| = a \leq b$ si $a \geq 0$. Y $|a| = -a \leq b$ si $a \leq 0$.
Por otro lado si $|a| \leq b$, entonces es claro que $b \geq 0$. Pero $|a| \leq b$ significa que $a \leq b$ si $a \leq 0$ como también $a \leq b$ si $a \leq 0$. Análogamente $|a| \leq b$ significa que $-a \leq b$, y en consecuencia $-b \leq a$, si $a \leq 0$ y $-b \leq a$, si $a \geq 0$, por lo tanto $-b \leq a \leq b$

(c) Utilizar este hecho para dar una nueva demostración de $|a+b| \leq |a| + |b|$

Demostración.- Sea $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ entonces $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$, de donde $|a+b| \leq |a|+|b|$.

15. Demostrar que si x e y son 0 los dos, entonces:

- $x^2 + xy + y^2 > 0$

  Demostración.- Sea $(x-y)^2 > 0$ entonces $x^2 + y^2 > xy$. Por otro lado si $x, y \neq 0$ por teorema $x^2 + y^2 > 0$, dado que $x^2 + y^2 > xy$ entonces se cumple $x^2 + y^2 + xy > 0$.

- $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

  Demostración.- Sea $(x^5 - y^5)^2 > 0$, por teorema $\left[(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)\right]^2 > 0$, así $(x-y)^2(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)^2 > 0$, $\quad (x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)^2 > 0$, por lo tanto $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) > 0$

16. **(a)** $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ solamente cuando $x = 0$ ó $y = 0$

Demostración.- Sea $x = 0$ y $x^2 + xy + y^2$ por teorema $0 \cdot y = 0$ entonces $x^2 + y^2$. Se demuestra de la misma manera para $y = 0$

(b) $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ solamente cuando $x = 0$ ó $y = 0$ ó $x = -y$

Demostración.- Es evidente para $x = 0$ é $y = 0$. Solo faltaría demostrar para $x = -y$.
Si $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ entonces $(x+y)^3 = x^3 + 3(-y)^2y + 3(-y)y^2 + y^3 = x^3 + 3y^3 + 3(-y)^3 + y^3$, por lo tanto $x^3 + y^3$.

(c) Haciendo uso del hecho que

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geq 0$$

demostrar que el supuesto $4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0$ lleva una contradicción.

Demostración.-

$$\begin{array}{rcl} 4^2 + 8xy + 4y^2 & < & 2xy \\ 4(x^2 + 2xy + y^2) & < & 2xy \\ x^2 + 2xy + y^2 & < & xy/2 \end{array}$$

Dado que $2xy < xy/2$ es falso, concluimos que $4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0$ también es falso y así llegamos a una contradicción.

(d) Utilizando la parte (b) decir cuando es $(x+y)^4 = x^4 + y^4$

Demostración.- Se tiene $(x+y)^2(x+y)^2$, por lo tanto se cumple que $x^4 + y^4$, si $x = 0$ ó $y = 0$

(e) Hallar cuando es $(x+y)^5 = x^5 + y^5$. Ayuda: Partiendo del supuesto $(x+y)^5 ? x^5 + y^5$ tiene que ser posible deducir la ecuación $x^3 + 2x^2y + y^3 = 0$, si $xy \neq 0$. Esto implica que $(x+y)^3 = x^2y + xy^2 = xu(x+y)$. El lector tendría que ser ahora capaz de intuir cuando $(x+y)^n = x^n + y^n$.

Demostración.- Si $x^5 + y^5 = (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$, entonces $0 = 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4$ $0 = 5xy(x^3 + 2x^2 + y + 2xy^2 + y^3)$. Así $x^3 + 2x^2 + y + 2xy^2 + y^3 = 0$.

restando esta ecuación de $(x+y)^3 = x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$ obtenemos, $(x+y)^3 = x^2y+xy^2 = xy(x+y)$. Así pues, ó bien $x+y=0$ ó $(x+y)^2 = xy$; la última condición implica que $x^2+xy+y^2=0$, con lo que $x=0$ ó $y=0$. por lo tanto $x=0$ ó $y=0$ ó $x=-y$.

17. **(a)** El valor mínimo de $2x^2-2x+4$

Para poder hallar el valor mínimo debemos llevar la ecuación a su forma canónica es decir,

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+4 &= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+4 \\ &= 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]+4 \\ &= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-2\left(\frac{3}{4}\right)^2+4 \end{aligned}$$

El mínimo valor posible es $\dfrac{23}{8}$, cuando $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2=0$ ó $x=\dfrac{3}{4}$

(b) El valor mínimo de $x^2-3x+2y^2+4y+2$

$$x^2-3x+2y^2+4y+2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2(y+1)^2-\frac{9}{4}$$

así el valor mínimo es $-\dfrac{9}{4}$, cuando $x=\dfrac{3}{2}$ y $y=-1$

(c) Hallar el valor mínimo de $x^2+4xy+5y^2-4x-6y+7$

$$\begin{aligned} x^2+4xy+5y^2-4x-6y+7 &= x^2+4(y-1)x+5y^2-6y+7 \\ &= [x+2(y-1)]^2+5y^2-6y+7-4(y-1)^2 \\ &= [x+2(y-19]^2+(y+1)^2+2 \end{aligned}$$

Así el valor mínimo es 2, cuando $y=-1$ y $x=-2(y-1)=4$

18. **(a)** Supóngase que $b^2-4c \geq 0$. Demostrar que los números

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}, \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

satisfacen ambos la ecuación $x^2+bx+c=0$

Demostración.- Para probar que satisfaga a la ecuación dada, podemos empezar a completar al cuadrado de la siguiente manera: $x^2+bx+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = -c+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$, así $\left(x^2+\dfrac{b}{2}\right)^2 = -c+\dfrac{b^2}{4}$. Por existencia de raíz cuadrada de los números reales no negativos $x+\dfrac{b}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{b^2-4c}{4}}$, luego $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

(b) Supóngase que $b^2 - 4c < 0$. Demostrar que no existe ningún número x que satisfaga $x^2 + bx + c = 0$; de hecho es $x^2 + bx + c > 0$ para todo x.

Demostración.- Tenemos

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \geq c - \frac{b^2}{4}$$

pero por hipótesis $c - \dfrac{b^2}{4} > 0$, así $x^2 + bx + c > 0$ para todo x.

(c) Utilizar este hecho para dar otra demostración de que si x e y no son ambos 0, entonces $x^2+xy+y^2 > 0$

Demostración.- Aplicando la parte b con y para b e y^2 para c, tenemos $b^2 - 4c = y^2 - 4y^2 < 0$ para $x \neq 0$, entonces $x^2 + xy + y^2 > 0$ para todo x.

(d) ¿Para qué número α se cumple que $x^2 + \alpha xy + y^2 > 0$ siempre que x e y no sean ambos 0?

Demostración.- α debe satisfacer $(\alpha y)^2 - 4y^2 < 0$, o $\alpha^2 < 4$, o $|\alpha| < 2$

(e) Hállese el valor mínimo posible de $x^2 + bx + c$ y de $ax^2 + bx + c$, para $a > 0$

Demostración.- Por ser

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \geq c - \frac{b^2}{4},$$

y puesto que $x^2 + bx + c$ tiene el valor $c - \dfrac{b^2}{4}$ cuando $x = -\dfrac{b}{2}$, el valor mínimo es $c - \dfrac{b^2}{4}$.
Después

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

el mínimo es

$$a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$$

19. El hecho de que $a^2 \geq 0$ para todo número a, por elemental que pueda parecer, es sin embargo la idea fundamental en que se basan en último instancia la mayor parte de las desigualdades. La primerísima de todas las desigualdades es la desigualdad de Schwarz:

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Las tres demostraciones de la desigualdad de Schwarz que se esbozan más abajo tienen solamente una cosa en común: el estar basadas en el hecho de ser $a^2 \geq 0$ para todo a.

(a) Demostrar que si $x_1 = \lambda y_1 \quad \text{y} \quad$ y $x_2 = \lambda y_2$ para algún número λ, entonces vale el signo igual en la desigualdad de Schwarz. Demuéstrese lo mismo en el supuesto $y_1 = y_2 = 0$: supóngase ahora que y_1 e y_2 no son ambos 0 y que no existe ningún número λ tal que $x_1 = \lambda y_1 \quad \text{y} \quad x_2 = \lambda y_2$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &< (\lambda y_1 - x_1)^2 + (\lambda y_2 - x_2)^2 \\ &= \lambda^2(y_1^2 + y_2^2) - 2\lambda(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Utilizando el teorema anterior, completar la demostración de la desigualdad de Schwarz.

Demostración.- Primero, Si $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$., entonces remplazando en la desigualdad de Schwarz, $\lambda \cdot (y_1)^2 + \lambda \cdot (y_2)^2 = \sqrt{(\lambda y_1)^2 + (\lambda y_2)^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ luego por propiedades de raíz se cumple

$$\lambda(y_1^2 + y_2^2) = \sqrt{\left[\lambda(y_1^2 + y_2^2)\right]^2}$$

Vemos que también se cumple la igualdad para $y_1 = y_2 = 0$.
Por último Si un tal λ no existe, entonces la ecuación carece de solución en λ, de modo que por el teorema 1.25 tenemos,

$$\left[\frac{2(x_1y_1 + x_2y_2)}{y_1^2 + y_2^2}\right]^2 - \frac{4(x_1^2 + y_1^2)}{y_1^2 + y_2^2} < 0$$

lo cual proporciona la desigualdad de Schwartz.

(b) Demostrar la desigualdad de Schwarz haciendo uso de $2xy \leq x^2 + y^2$(¿Cómo se deduce esto?) con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

primero para $i = 1$ y después para $i = 2$.

Demostración.- En vista de que $(x - y)^2 \geq 0$, tenemos $2xy \leq x^2 + y^2$. Realizando el respectivo remplazo tenemos:

1)

$$2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

2)

$$2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_2^2}{\sqrt{x_2^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

Luego sumando 1) y 2)

$$2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + 2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + \frac{x_2^2}{\sqrt{x_2^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

nos queda

$$\frac{2(x_1y_1 + x_2y_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leq 2$$

(c) Demostrar la desigualdad de Schwarz demostrando primero que

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

Demostración.- Es fácil ver que la igualdad se cumple,

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) = (x_1y_1)^2+2x_1y_1x_2y_2+(x_2y_2)^2+(x_1y_2)^2-2x_1y_1x_2y_2+(x_2y_1)^2 = (x_1y_1+x_2y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

Ya que $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$ entonces,

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2$$

(d) Deducir de cada una de estas tres demostraciones que la igualdad se cumple solamente cuando $y_1 = y_2 = 0$ ó cuando existe un número λ tal que $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$

Demostración.- La parte a) ya prueba el resultado deseado.
En la parte b) la igualdad se mantiene sólo si se cumple en (1) y (2). Sea $2xy = x^2 + y^2$ sólo cuando $(x-y)^2 = 0$ es decir $x = y$ esto significa

$$\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \;;\; para\ x = 1, 2$$

para que podamos elegir $\lambda = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}/\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.
En la parte (c), la igualdad se cumple solamente cuando $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$. Una posibilidad es $y_1 = y_2 = 0$. Si $y \leq 0$, entonces $x_l = (x_1y_1)y_1$ y también $x_2 = (x_1/y_1)y_1$ análogamente, si $y_2 \leq 0$, entonces $\lambda = x2/y2$.

20. Demostrar que si

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |y - y_0| < \frac{e}{2}$$

entonces

$$|(x + y) - (x_o + y_0)| < \epsilon,$$

$$|(x - y) - (x_o - y_0)| < \epsilon.$$

Demostración.- primeramente si $|(x + y) - (x_o + y_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)|$, por desigualdad triangular e hipótesis,

$$|(x - x_0) + (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Demostramos de similar manera y por teorema 1.7,

$$|(x - y) - (x_o - y_0)| = |(x - x_0) - (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

21. Demostrar que si

$$|x - x_0| < min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}\right) \quad y \quad |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2(x_0 + 1)}$$

entonces $|xy - x_0y_0| < \epsilon$.

La primera igualdad de la hipótesis significa precisamente que:

$$|x - x_0| < 1 \quad y \quad |x - x_0| \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

Demostración.- puesto que $|x - x_0| < 1$ se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

Así pues

$$\begin{array}{rcll}
|xy - x_0y_0| & = & |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| & \\
& = & |x(y-y_0) + y_0(x-x_0)| & \\
& \leq & |x| \cdot |y-y_0| + |y_0| \cdot |x-x_0| & \\
& < & (1+|x_0|) \cdot \dfrac{\epsilon}{2(|x_0|+1|)} + |y_0| \cdot \dfrac{\epsilon}{2(|y_0|+1|)} & \text{ya que } |y_0|\dfrac{\epsilon}{2(|y_0|+1|)} < |y_0|\dfrac{\epsilon}{2|y_0|} \text{ para } |y_0| \neq 0 \\
& \leq & \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} & \text{ó } |y_0|\dfrac{\epsilon}{2(|y_0|+1|)} = \dfrac{\epsilon}{2} \text{ si } |y_0| = 0 \\
& = & \epsilon &
\end{array}$$

22. Demostrar que si $y_0 \neq 0$ y

$$|y - y_0| < min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{|y_0|}\right|$$

Demostración.- Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{y_0}{2},$$

de modo que $|y| < \dfrac{|y_0|}{2}$. En particular, $y \neq 0$, y

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{y_0}.$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} < \frac{2}{y_0} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\epsilon|y_o|^2}{2} = \epsilon$$

23. Sustituir los interrogantes del siguiente enunciado por expresiones que encierren ϵ, x_0 e y_0 de tal manera que la conclusión sea válida:
Si y_0 y

$$|y - y_0| <? \quad y \quad |x - x_0| <?$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| < \epsilon$$

Sea $|x\dfrac{1}{y} - x_0\dfrac{1}{y_0}| < \epsilon$ entonce $|x \cdot y^{-1} - x_o \cdot y_0^{-1}| < \epsilon$ por teorema 4.14

$$|x - x_0| < min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0^{-1}|+1)}\right) \quad y \quad |y^{-1} - y_0^{-1}| < \frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}$$

luego por teorema 4.15

$$|y - y_0| < min\left(\frac{\dfrac{\epsilon}{2(|x_o|)+1} \cdot |y_0|^2}{2}\right) = \text{mín}\left(\frac{\epsilon \cdot |y_0|^2}{4(|x_o|+1)}\right)$$

24. Este problema hace ver que la colocación de los paréntesis en una suma es irrelevante. Las demostraciones utilizan la "La inducción matemática"; si no se está familiarizado con este tipo de demostraciones, pero a pesar de todo se quiere tratar este problema, se puede esperar hasta haber visto el capítulo 2, en el que se explican las demostraciones por inducción. Convengamos, para fijar ideas que $a_1 + ... + a_n$ denota

$$a_1 + (a_2(a_3 + ... + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n)))...)$$

Así $a_1 + a_2 + a_3$ denota $a_1(a_2 + a_3)$, y $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ denota $a_1(a_2 + (a_3 + a_4))$, etc.

(a) Demostrar que

$$(a_1 + ... + a_k) + a_{k+1} = a_1 + ... + a_{k+1}$$

Demostración.- Sea $k = 1$ entonces $a_1 + a_2 = a_1 + a_2$. Si la ecuación se cumple para k entonces

$$\begin{array}{rcl} (a_1 + ... + a_{k+1}) + a_{k+2} & = & [(a_1 + ... + a_k) + a_{k+1}] + a_{k+2} \\ & = & (a_1 + ... + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2}) \\ & = & a_1 + ... + a_k + (a_{k+1} + a_{k+2}) \\ & = & a_1 + ... + a_{k+2} \end{array}$$

(b) Demostrar que si $n \geq k$, entonces

$$(a_1 + ... + a_k) + (a_{k+1} + ... + a_n) = a_1 + ... + a_n$$

Demostración.- Para $k = 1$ la ecuación se reduce a la definición de $a_1 + ... + a_k$. Si la ecuación se cumple para $k < n$ entonces,

$$\begin{array}{rcll} (a_1 + ... + a_{k+1}) + (a_{k+2} + ... + a_n) & = & ([a_1 + ... + a_k] + a_{k+1}) + (a_{k+2} + ... + a_n) & \text{parte } (a) \\ & = & (a_1 + ... + a_k) + (a_{k+1} + (a_{k+2} + ... + a_n)) & \text{por propiedad} \\ & = & (a_1 + ... + a_k) + (a_{k+1} + ... + a_n) & \text{por definición} \\ & = & a_1 + ... + a_n & \text{hipótesis} \end{array}$$

(c) Sea $s(a_1, ..., a_k)$ una suma formada con $a_1, ..., a_k$. Demostrar que

$$s(a_1, ..., a_k) = a_1 + ... + a_k$$

Demostración.- El aserto es claro para $k = 1$. Supóngase que se cumple para todo $l < k$, entonces

$$\begin{array}{rcll} s(a_1, ..., a_k) & = & s^{'}(a_1, ..., a_l) + s^{''}(a_{l+1}, ..., a_k) & \\ & = & (a_1 + ... + a_l) + (a_{l+1}) + (a_{l+1} + ... + a_k) & \text{hipótesis} \\ & = & a_1 + ... + a_k & \text{parte } (b) \end{array}$$

25. Supóngase que por número se entiende sólo el 0 ó el 1 y que $+$ y $\cdot$ son las operaciones definidas mediante las siguiente tablas.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

	0	1
0	0	0
1	0	1

Comprobar que se cumplen las propiedades P1-P2, aunque 1+1=0

P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 resultan evidentes sin más que observar las tablas. Se presentan ocho casos para $P1$ y este número puede incluso reducirse: al cumplirse P2, resulta claro que $a+(n/b+c) = (a+b)+c$ si a, b ó c es 0, de modo que bastará comprobar el caso $a = b = c = 1$. Una observación análoga puede hacerse para $P5$. Finalmente, P9 se cumple para $a = 0$, ya que $0 \cdot b = 0$ para todo b, y para $a = 1$, ya que $1 \cdot b = b$ para todo b.

2

Distintas clases de números

2.1. Problemas

1. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

(i) $1^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Demostración.- Sea $n = k$:

$$1^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

Para $k = 1$,

$$1^2 = \frac{1(1+2)(2+1)}{6}$$

por lo tanto se cumple para $k = 1$, Luego para $k = k + 1$,

$$1^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

así cabe demostrar que:

$$\begin{aligned}
\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
\frac{2k^3 + k^2 + 2k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 3k^2 + 6k^2 + 9k + 4k + 6}{6} \\
\frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}
\end{aligned}$$

(ii) $1^3 + ... + n^3 = (1 + ... + n)^2$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces la igualdad es verdadera ya que $1^3 = 1^2$.Supongamos que se cumple para algún número $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$1^3 + ... + k^3 = (1 + ... + k)^2,$$

Luego suponemos que se cumple para $k + 1$,

$$1^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = (1 + ... + (k+1))^2$$

Así solo falta demostrar que

$$\begin{aligned}
(1+...+(k+1))^2 &= (1+...+k)^2+2(1+...+k)(k+1)+(k+1)^2 \\
&= (1^2+...+k)^2+2\frac{k(k+1)}{2}(k+1)+(k+1)^2 \\
&= 1^3+...+k^3+(k^3+2k^2+k)+(k^2+2k+1) \\
&= 1^3+...+k^3+(k+1)^3
\end{aligned}$$

Por lo tanto es válido para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$

2. Encontrar una fórmula para

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+...+(2n-1)$

$$\begin{array}{rcccl}
1 & = & 1 & = & 1^2 \\
1{+}3 & = & 4 & = & 2^2 \\
1{+}3{+}5 & = & 9 & = & 3^2 \\
1{+}3{+}5{+}7 & = & 16 & = & 4^2 \\
1{+}3{+}5{+}7{+}9 & = & 25 & = & 5^2
\end{array}$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2$

$$\begin{aligned}
1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2 &= \left[1^2+2^2+...+(2n)^2\right]-\left[2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2\right] \\
&= \left[1^2+2^2+...+(2n)^2\right]-4\left[1^2+2^2+3^2+...+n^2\right] \\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n(2n+1)\left[4n+1-2(n+1)\right]}{6} \\
&= \frac{2n(2n+1)(2n-1)}{6} \\
&= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}
\end{aligned}$$

Definición 2.1 (Coeficiente Binomial) *Si $0 \le k \le n$, se define el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ por*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!},\ si\ k \neq 0,\ n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Esto se convierte en un caso particular de la primera fórmula si se define $0! = 1$.

3. **(a)** Demostrar que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Esta relación de lugar a la siguiente configuración, conocida por triángulo de Pascal: Todo número que no esté sobre uno de los lados es la suma de los dos números que tiene encima: El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número k-ésimo de la fila $(n+1)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{kn!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

(b) Obsérvese que todos los números del triángulo de Pascal son números naturales. Utilícese la parte (a) para demostrar por inducción que $\binom{n}{k}$ es siempre un número natural.

Demostración.- Se ve claramente que $\binom{1}{1}$ es un número natural. Supóngase que $\binom{n}{p}$ es un número natural para todo $p \leq n$. Al ser:

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \; para \; p \leq n,$$

se sigue que $\binom{n+1}{p}$ es un número natural para todo $p \leq n$, mientras que $\binom{n+1}{n+1}$ es también un número natural. Así pues, $\binom{n+1}{p}$ es un número natural para todo $p \leq n+1$

(c) Dése otra demostración de que $\binom{n}{k}$ es un número natural, demostrando que $\binom{n}{k}$ es el número de conjuntos de exactamente k enteros elegidos cada uno entre $1, ..., n$.

Demostración.- Existen $n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ k-tuplas de enteros distintos elegidos entre $1, ..., n$, ya que el primero puede ser elegido de n maneras, el segundo de $n-1$ maneras, etc. Ahora bien, cada conjunto formado exactamente por k enteros distintos, da lugar a $k!$ k-tuplas, de modo que el número de conjuntos será $n(n^{-}1) \cdot ... \cdot (n-k+l)/k! = \binom{n}{k}$

(d) Demostrar el **TEOREMA DEL BINOMIO**: Si a y b son números cualesquiera, entonces

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}b^j.$$

El teorema del binomio resulta claro para $n = 1$. Sea algún número $k \in \mathbb{Z}^+$

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

de donde suponemos que se cumple para $k+1$ por lo tanto

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j.$$

entonces,

$$\begin{array}{rcll}
(a+b)^{n+1} & = & (a+b)(a+b)^n & \\
 & = & (a+b)\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j & \\
 & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1} & \\
 & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j & \\
 & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j & \text{por la parte } (a)
\end{array}$$

con lo que el teorema del binomio es válido para $n+1$. y por lo tanto para $n \in \mathbb{Z}^+$

(e) Demostrar que

(i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$

Demostración.- Por el teorema del binomio $2^n = (1+1)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(1^j)(1^{n-j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + ... \pm \binom{n}{n} = 0$

Demostración.- De igual manera por el teorema del binomio $0 = (1+(-1))^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$

(iii) $\displaystyle\sum_{l\ impar} \binom{n}{l} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... = 2^{n-1}$

Demostración.- Restando (ii) de (i) se tiene que,

$$\begin{array}{rcl}
2\binom{n}{0}+2\binom{n}{2}+...+2\binom{n}{n} & = & 2^n-0 \\
2\sum\limits_{j\ impar}^{n}\binom{n}{j} & = & 2^n \\
\sum\limits_{j\ impar}^{n}\binom{n}{j} & = & 2^n\cdot 2^{-1} \\
\sum\limits_{j\ impar}^{n}\binom{n}{j} & = & 2^{n-1}
\end{array}$$

(iv) $\displaystyle\sum_{l\ par}\binom{n}{l}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...=2^{n-1}$

Demostración.- La demostración es similar al problema anterior pero esta vez sumamos (i) en (ii)

4. **(a)** Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}=\binom{n+m}{l}$$

Demostración.- La multiplicación de series formales de potencias se realiza recolectando los términos con las mismas potencias de x:

$$\left(\sum_{a_K}^{\infty}a_kx^k\right)\left(\sum_{a_K}^{\infty}b_kx^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}a_jx^jb_{k-j}x^{k-j}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}\right)x^k$$

Tenga en cuenta que los subíndices en la suma interna suman k, la potencia de x en la suma externa. Luego aplicando la multiplicación de series de potencias a $(1+x)^m=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$ y $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$ de donde

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+n}{k}x^k$$

(Los índices en las sumas a ∞ ya que para $k>n$, $\binom{n}{k}=0$), Se tiene:

$$(1+x)^m(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}\right]x^k$$

ya que $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$ entonces

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

(b) demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Demostración.- Sea $m = n$, $l = n$ en la parte (a) y notar que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. de donde se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n+n}{n}$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

5. ——————(a)——————

Demostrar por inducción sobre n que

$$1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

si $r \neq 1$ (Si es $r = 1$, el cálculo de la suma no presenta problema alguno).

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces

$$1 + r = \frac{1 - r^2}{1 - r}$$

el cual vemos que se cumple.
Luego

(a)

$$\begin{array}{rcl} 1 + r + r^2 + ... + r^n + r^{n+1} & = & \dfrac{1 - r^{r+1}}{1 - r} + r^{r+1} \\ & = & \dfrac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\ & = & \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{array}$$

(b) Deducir este resultado poniendo $S = 1 + r + ... + r^n$, multiplicando esta ecuación por r y despejando S entre las dos ecuaciones.

Tenemos $r \cdot S = r + ... + r^n + r^{n+1}$, luego sea $S - rS$ entonces $S(1 - r) = 1 - r^{n+1}$ por lo tanto $S = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

6. La fórmula para $1^2 + 2^2 + ... + n^2$ se puede obtener como sigue: Empezamos con la fórmula

$$(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

particularmente esta fórmula para $k = 1, ..., n$ y sumando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 2^3 - 1^3 & = & 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 & = & 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ . & = & \\ . & = & \\ . & = & \\ (n + 1)^3 - n^3 & = & n^2 + 3 \cdot n + 1 \\ \hline (n + 1)^3 - 1 & = & 3\left[1^2 + ... + n^2\right] + 3\left[1 + ... + n\right] + n \end{array}$$

De este modo podemos obtener $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ una vez conocido $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ (lo cual puede obtenerse mediante un procedimiento análogo). Aplíquese este método para obtener.

(i) $1^3 + ... + n^3$

Sea $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1^4$ entonces

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1, \quad para\ k = 1, ..., n$$

por hipótesis tenemos $(n+1)^4 - 1 = 4\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n} k + n$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^4 - 1 - 6\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\dfrac{n(n+1)}{2} - n}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

(ii) $1^4 + ... + n^4$

Similar al anterior ejercicio partimos de $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \quad k = 1, ..., n$ para obtener $(k+1)^5 - k^5 = 5\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^4\right) + 10\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^3\right) + 10\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\right) + 5\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right) + n$, así

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{(n+1)^5 - 1 - 10\left(\dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{4} - 10\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} - 5\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2} - n\right)}{5} =$$

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

(iii) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$

A partir de

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, ..., n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

(iv) $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2\cdot 3^2} + ... + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

De

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}, \quad k = 1, ..., n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

7. Utilizar el método del problema 6 para demostrar que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ puede escribirse siempre en la forma

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + Cn^{p-2} + ...$$

Las diez primeras de estas expresiones son

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=1}^{n} k & = & \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 & = & \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 & = & \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^4 & = & \frac{1}{5}n^6 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^5 & = & \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^6 & = & \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^7 & = & \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^8 & = & \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^9 & = & \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^10 & = & \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n
\end{array}$$

Obsérvese que los coeficientes de la segunda columna son siempre $\frac{1}{2}$ y que después de la tercera columna las potencias de n de coeficiente no nulo van decreciendo de dos en dos hasta llegar a n^2 o a n. Los coeficientes de todas las columnas, salvo las dos primeras, parecen bastante fortuitos, pero en realidad obedecen a cierta regla; encontrarla puede considerarse como una prueba de superperspicacia. Para descifrar todo el asunto, véase el problema 26-17)

Demostración.- Sea $(k+1)^{p+1}$ entonces por el teorema del binomio:

$$\begin{array}{rcl}
(k+1)^{p+1} & = & \binom{p+1}{p+1}k^{p+1} + \binom{p+1}{p}k^p + ... + \binom{p+1}{1}k^p + \binom{p+1}{0}k^0 \\
(k+1)^{p+1} & = & 1 \cdot k^{p+1} + \binom{p+1}{p}k^p + ... + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{0}k^0 \\
(k+1)^{p+1} - k^{p+1} & = & (p+1)k^p + ... + (p+1)k + 1 \cdot k^0
\end{array}$$

Luego sumando para cada $k = 1, ..., n$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl}
2^{p+1} - 1^{p+1} & = & (o+1)1^p + ... + (p+1)1 + 1 \cdot 1^0 \\
3^{p+1} - 2p + 1 & = & (p+1)2^p + ... + (p+1)2 + 1 \cdot 2^0 \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
(n+1)^{p+1} & = & (p+1)n^p + ... + (p+1)n + 1 \cdot^0
\end{array}$$

Luego por el anterior problema

$$\begin{array}{rcl}
(n+1)^{p+1} & = & (p+1)\sum\limits_{k=1}^{n} k^p + ... + (p+1)\sum\limits_{k=1}^{n} k^1 + \sum\limits_{k=1}^{n} k^0 + k^0 \\
\dfrac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} & = & \sum\limits_{k=1}^{n} k^p + \dfrac{\binom{p+1}{p-1}}{(p+1)}\sum\limits_{k=1}^{n} k^{p-1} + ... + \dfrac{(p+1)}{(p+1)}\sum\limits_{k=1}^{n} k^1 + \dfrac{1}{(p+1)}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^0 + k^0\right)
\end{array}$$

Luego asumimos que la proposición es verdad para $p-1$ donde podríamos escribir como,

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} & = & \sum\limits_{k=1}^{n} k^p + \text{ términos que involucran las potencias de } n \leq p \\
\sum\limits_{k=1}^{n} k^p & = & \dfrac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} + \text{ términos que involucran las potencias de } n \leq p
\end{array}$$

8. Demostrar que todo número natural es o par o impar.

Demostración.- Asumimos que n es impar o par, entonces debemos probar que $n+1$ también, es o bien impar o bien par.
Sea n par entonces $n = 2k$ para algún k. Así $n+1 = 2k+1$ y por definición vemos que es impar.
Luego sea n impar, entonces $n = 2k+1$ para algún k. Por lo tanto $n+1 = 2k+1+1 = 2k+2 = 2(k+1)$.
Así en cualquiera de los dos casos, $n+1$ es o bien par o impar.

9. Demostrar que si un conjunto A de números naturales contiene n_0 y contiene $k+1$ siempre que contenga k, entonces A contiene todos los números naturales $\geq n_0$.

Demostración.- Sea B el conjunto de todos los números naturales l tales que $n_0 - 1 + 1$ está en A. Entonces 1 está en B, y $l+1$ está en B si l está en B, es decir $k = n_0 - 1 + l$, por lo tanto $k+1 = (n_0 - 1) + (l+1)$ está en A, lo que implica que $l+1$ está en B de modo que B contiene todos los números naturales, los cuales significa que A contiene todos los números naturales $\geq n_0$

10. Demostrar el principio de inducción completa a partir del principio de buena ordenación.

Demostración.- Supongamos que A contiene a 1 y que A contiene a $n+1$, si contiene a n. Si A no contiene todos los números naturales, entonces el conjunto B de números naturales que no están en A es distinto de $\emptyset$. Por lo tanto, B tiene un número natural n_0. Ahora $n_0, \neq 0$ ya que A contiene a 1 entonces podemos escribir $n_0 = (n_0 - 1) + 1$, donde $n_0 - 1$ es un número natural. Luego $n_0 - 1$ no está en B, entonces $n_0 - 1$ está en A. Por hipótesis, n_0 debe estar en A, entonces n_o no está en B, el cual es una contradicción.

11. Demostrar el principio de inducción completa a partir del principio de inducción ordinario.

Demostración.- Se sabe que 1 está en B. Luego si k está en B, entonces $1, ..., k$ están todos en A, de modo que $k+1$ está en A y así $1, ..., k+1$ están en A, con lo que $k+1$ está en B. Por inducción, $B = N$, así que también $A = N$.

12. **(a)** Si a es racional y b es irracional ¿es $a+b$ necesariamente irracional? ¿Y si a y b es irracional?

Respuesta.- Si, puesto que si $a+b$ fuese racional, entonces $b = (a+b) - a$ seria racional. Luego si a y b son irracionales, entonces $a+b$ podría ser racional, ya que b podría ser $r - a$ para algún número racional a.

(b) Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional?

Respuesta.- Si $a = 0$, entonces ab es racional. Pero si $a \neq 0$ entonces ab no podría ser racional, ya que entonces $b = (ab) \cdot a^{-1}$ sería racional.

(c) ¿Existe algún número a tal que a^2 es irracional pero a^4 racional?

Si existe por ejemplo $\sqrt[4]{2}$

(d) ¿Existen dos números irracionales tales que sean racionales tanto su suma como su producto?

Si existen por ejemplo $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

13. **a)** Demostrar que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$ son irracionales. Indicación: Para tratar $\sqrt{3}$, por ejemplo, aplíquese el hecho de que todo entero es de la forma $3n$ ó $3n+1$ ó $3n+2$ ¿Por qué no es aplicable esta demostración para $\sqrt{4}$?

Demostración.- Puesto que:

$$\begin{array}{rcl} (3n+1)^2 & = & 9n^2 + 6n + 1 & = & 3(3n^2 + 2n) + 1 \\ (3n+2)^2 & = & 9n^2 + 12n + 4 & = & 3(3n^2 + 4n + 1) + 1 \end{array}$$

queda demostrado que un número no es múltiplo de 3 si es de la forma $3n+1$ ó $3n+2$.
se sigue que k^2 es divisible por 3, entones k debe ser también divisible por 3. Supóngase ahora que $\sqrt{3}$ fuese racional, y sea $\sqrt{3} = p/q$, donde p y q no tienen factores comunes. Entonces $p^2 = 3q^2$, de modo que p^2 es divisible por 3, así que también lo debe ser p. De este modo, $p = 3p'$ para algún número natural p', y en consecuencia $(3p')^2 = 3q^2$ ó $(3p')^2 = q^2$. Así pues, q es también divisible por 3, lo cual es una contradicción.
Las mismas demostraciones valen para $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$, ya que las ecuaciones,

$$\begin{array}{lllll}
(5n+1)^2 & = & 25n^2+10n+1 & = & 5(5n^2+2n)+1 \\
(5n+2)^2 & = & 25n^2+20n+4 & = & 5(5n^2+4n)+4 \\
(5n+3)^2 & = & 25n^2+30n+9 & = & 5(5n^2+6n+1)+4 \\
(5n+4)^2 & = & 25n^2+40n+16 & = & 5(5n^2+8n+3)+1
\end{array}$$

la ecuación correspondiente para los números de la forma $6n+m$ demuestran que si k^2 es divisible por 5 ó 6, entones también lo debe ser k. La demostración falla para $\sqrt{4}$, porque $(4n+2)^2$ es divisible por 4.

b) Demostrar que $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{3}$ son irracionales.

Demostración.- Puesto que,

$$(2n+1)^3 = 8n^3+12n^2+6n+1 = 2(4n^3+6n^2+3n)+1,$$

se sigue que si k^3 es par, entonces k es par. Si $\sqrt[3]{2} = p/q$, donde p y q no tienen factores comunes, entonces $p^3 = 2q^3$, de modo que p^3 es divisible por 2, por lo que también lo debe ser p. Así pues, $p = 2p^{'}$ para algún número natural $p^{'}$ y en consecuencia $(2p^{'})^3 = 2q^3$, ó $4(p^{'})^3 = q^3$. Por lo tanto, q es también par, lo cual es una contradicción.
La demostración para $\sqrt[3]{3}$ es análogo, utilizando las ecuaciones.

$$(3n+1)^3 = 27n^3+27n^3+27n^2+9n+1 = 3(9n^3+9n^2+3n)+1,$$

$$(3n+2)^3 = 27n^3+54n^2+36n+8 = 3(9n^2+18n^2+12n+2)+2.$$

14. Demostrar que:

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es irracional.

Demostración.- Sea $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ racional, entonces $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ sería racional, luego

$$5+2\sqrt{6}$$

y en consecuencia $\sqrt{6}$ sería racional lo cual es falso.

(b) $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ es irracional.

Demostración.- Sea $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ racional, entonces

$$\begin{array}{lll}
\left[\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2 & = & 6+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \\
 & = & 11+2\sqrt{6}\left[2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]
\end{array}$$

Así, $\sqrt{6}\left[2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$ sería racional, con lo que de igual manera sería,

$$\begin{array}{lll}
\{\sqrt{6}\left[1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]\}^2 & = & 6\left[1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2 \\
 & = & 11+2\sqrt{6}\left[1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]
\end{array}$$

De este modo $\sqrt{6}-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ y $\sqrt{6}-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ serían racionales, lo que implicaría que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ fuese racional, en contradicción de la parte a).

15. **(a)** Demostrar que si $x = p + \sqrt{q}$, donde p y q son racionales, y m es un número natural, entonces $x^m = a + b\sqrt{q}$ siendo a y b números racionales.

Demostración.- Sea $m = 1$ entonces $(p + \sqrt{q})^1 = a + b\sqrt{q}$. Supongamos que se cumple para m, entonces

$$(p+\sqrt{q})^{m+1} = (a + b\sqrt{q})(p+\sqrt{q}) = (ap + bq) + (a + pb)\sqrt{q}$$

donde $ap + bq$ y $a + bp$ son racionales.

(b) Demostrar también que $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$

Demostración.- Similar a la parte a), se cumple para $m = 1$. Si es verdad para m, entonces

$$(p-\sqrt{q})^{m+1} = (a - b\sqrt{q})(p-\sqrt{q}) = (ap + bq) - (a + pb)\sqrt{q}$$

.

16. **(a)** Demostrar que si m y n son números naturales y $m^2/n^2 < 2$, entonces $(m+2n)^2 / (m+2)^2 > 2$; demostrar, además que

$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}$$

Demostración.- Si $m^2/n^2 < 2$ entonces $m^2 < 2n^2$, sumando m^2, $4mn$ y $2n^2$ tenemos $2m^2 + 4mn + 2n^2 < 4n^2 + m^2 + 4mn$, luego $2(m+n)^2 < (m+2n)^2$, así nos queda $(m+2n)^2/(m+n)^2 > 2$
Para la segunda parte podemos partir de $m^2 - 2n^2 < 0$, entonces:

$$\begin{array}{rcll}
m^2 - 2n^2 & < & 0 & \\
m^3 - 2mn^2 & < & 0 & \text{multiplicando por } m \\
mn^2 + m^3 + mn^2 - 4mn^2 & < & 0 & \text{escribiendo } mn^2 \text{ de otra manera} \\
mn^2 + 2n^3 + m^3 + m^2n + mn^2 - 2m^2n - 4mn^2 - 2n^3 & < & 0 & \text{sumando } 2n^3 \text{ y } 2m^2n \\
n^2(m+2n) + \left[(m^2 + 2mn + n^2)(m-2n)\right] & < & 0 & \\
n^2(m+2n)^2 + \left[(m+n)^2(m+2n)(m-2n)\right] & < & 0 & \text{multiplicando por } m+2n \\
n^2(m+2n)^2 + \left[(m+n)^2(m^2-4n^2)\right] & < & 0 & \\
\dfrac{n^2(m+2n)^2 - 4n^2(m+n)^2 + m^2(m+n)^2}{n^2(m+n)^2} & < & 0 & \text{dividimos por } n^2(m+n)^2 \\
\dfrac{(m+2n)^2 - 2(m+2)^2 - 2n^2(m+2)^2}{n^2(m+n)^2} & < & -\dfrac{m^2}{n^2} & \\
\dfrac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 & < & 2 - \dfrac{m^2}{n^2} &
\end{array}$$

(b) Demostrar los mismos resultados con todos los signos de desigualdad invertidos.

Demostración.- Quedará de la siguiente forma, Si $m^2/n^2 > 2$, entonces $(m+2n)^2 / (m+2)^2 < 2$, luego demostrar que

$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 > 2 - \frac{m^2}{n^2}$$

Similar a la parte a) tendremos $m^2 > 2n^2$, luego $2m^2 + 4mn + 2n^2 > 4n^2 + m^2 + 4mn$, así $(m+2n)^2 > 2(m+n)^2$

Después se puede demostrar la segunda parte con facilidad siguiendo el ejemplo a) pero invirtiendo la desigualdad ya que n y m son números natural.

(c) Demostrar que si $m/n < \sqrt{2}$, entonces existe otro número racional m^2/n^2 con $m/n < m^{'}/n^{'} < \sqrt{2}$

Demostración.- Sea $m_1 = m + 2n$ y $n_1 = m + n$, luego elegimos y remplazamos en,

$$\begin{array}{rcccl} m^{'} & = & m_1 + 2n_1 & = & 3m + 4n \\ n^{'} & = & m_1 + n_1 & = & 2m + 3n \end{array}$$

De donde $\dfrac{m}{n} < h$ si y sólo si $0 < m^{'} - mn^{'} = (3m+4n)n - (2m+3n)m = 2(2n^2 - m^2)$. Es claro para $\dfrac{m}{n} < \sqrt{2}$ que $2n^2 - m^2 > 0$

Por otro lado tenemos $\dfrac{m^{'}}{n^{'}}$ si y sólo si $0 < 2n^{'2} - m^{'2} = 2(2m+3n)^2 - (3m+4n)^2 = 2n^2 - m^2$. Como antes, $2n^2 - m^2 > 0$ se sigue de $\dfrac{m}{n} < \sqrt{2}$

17. Parece normal que $\sqrt{n}$ tenga que ser irracional siempre que el número natural n no sea el cuadrado de otro número natural. Aunque puede usarse en realidad el método del problema 13 del capitulo 2 de Michael Spivak para tratar cualquier caso particular, no está claro, sin más, que este método tenga que dar necesariamente resultados, y para una demostración del caso general se necesita más información. Un número natural p se dice que es un número primo si es imposible escribir $p = ab$; por conveniencia se considera que 1 no es un número primo. Los primeros números primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Si $n > 1$ no es primo, entonces $n = ab$, con a y b ambos $< n$; si uno de los dos a o b no es primo, puede ser factorizado de manera parecido; continuando de esta manera se demuestra que se puede escribir n como producto de números primos. Por ejemplo, $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.

a) Conviértase este argumento en una demostración riguroso por inducción completa. (En realidad, cualquier matemático razonable aceptaría este argumento informal, pero ello se debería en parte a que para él estaría claro cómo formularla rigurosamente.)
Un teorema fundamental acerca de enteros, que no demostraremos aquí, afirma que esta factorización es única, salvo en lo que respeta al orden de los factores. Así, por ejemplo, 28 no puede escribirse nunca como producto de números primos uno de los cuales sea 3, ni puede ser escrito de manera que 2 aparezca una sola vez (ahora debería verse clara la razón de no admitir a 1 como número primo.)

demostración.- Supóngase que para todo número $< n$ puede ser escrito como un producto de primos. Si $n > 1$ no es primo, entonces $n = ab$, para $a, b < n$. Pero a y b son ambos producto de primos, así que $n = ab$ lo es también.

b) Utilizando este hecho, demostrar que $\sqrt{n}$ es irracional a no ser que $n = m^2$ para algún número natural m.

Demostración.- Sea $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$, entonces $nb^2 = a^2$, luego si descomponemos en producto de factores primos, nb^2 y a^2 deberían coincidir. Ahora según lo explicado anteriormente, cada número primo debe aparecer un número par de veces en a^2 y b^2, y por lo tanto deberá ocurrir lo mismo con n. Esto implica que n es un cuadrado perfecto.

c) Demostrar que $\sqrt[k]{n}$ es irracional a no ser que $n = m^k$

Demostración.- La Demostración es parecida a la parte b pero haciendo uso del hecho de que cada número primo entra en a^k y en b^k un número de veces que es múltiplo de k

d) Al tratar de números primos no se puede omitir la hermosa demostración de Euclides de que existe un número infinito de ellos. Demuestre que no puede haber sólo un número finito de números primos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ considerando $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k + 1$

Demostración.- Si $p_1, ..., p_n$ fuesen los únicos números primos, entonces $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ no podría ser primo, ya que es mayor que cada uno de ellos, de modo que tiene que ser divisible por un número primo. Pero es claro que este número primo no es ninguno de los $p_1, ..., p_n$, lo cual constituye una contradicción. Para poder explicarlo mejor si $p_1, ..., p_n$ son los n primeros números primos, entonces el primo que ocupa el lugar $n+1$ es $\leq p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Sin embargo, $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ no tiene que ser necesariamente primo.

18. **(a)** Demostrar que si x satisface

$$x_n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

para algunos enteros $a_{n-1}, ..., a_n$ entonces x es irracional si no es entero. (¿Por qué es esto una generalización del problema 17?)

Demostración.- Supóngase que es $x = p/q$ donde p y q son números naturales primos entre si. Entonces

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_0 = 0,$$

con lo que

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_0q^n = 0$$

Ahora bien, si $q \neq \pm 1$, entonces q tiene por lo menos un divisor primo. Este divisor primo divide a cada uno de los términos que siguen a p^n, con lo que también deberá dividir a p^n. Dividirá por lo tanto a p, lo cual es una contradicción. Así pues, $q = \pm 1$, lo que significa que x es entero.

(b) Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ es irracional.

Demostración.- Sea $a = \sqrt{2} + 2^{1/3}$. Se demostrará por contradicción. Supongamos que a es racional, entones,

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & (2^{1/3})^3 \\ & = & (a - \sqrt{2})^3 \\ & = & a^3 - 3a^2\sqrt{2} + 3a \cdot 2 - 2^{3/2} \\ & = & a^3 + 6a - \sqrt{2}(3a^2 + 2) \end{array}$$

por lo tanto,

$$\sqrt{2} = \frac{a^3 + 6a - 2}{3a^2 + 2} \in \mathbb{Q}$$

es bien sabido que $\sqrt{2}$ es irracional. De ahí llegamos a una contradicción.

19. Demostrar la desigualdad de Bernoulli: Si $h > -1$, entonces

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

¿Por qué es esto trivial si $h > 0$?

Demostración.- Si $n = 1$, entonces $(1+h)^n = 1 + nh$. Supóngase que $(1+h)^n \geq 1 + nh$. Entonces $(1+h)^n + 1 = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh)$, ya que $1+h > 0$ luego $1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$ Para $h > 0$, la igualdad se sigue directamente del teorema del binomio, ya que todos los demás términos que aparecer en el desarrollo de $(1+h)^n$ son positivos.

20. La sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, ...$ se define como sigue:

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & 1, \\ a_2 & = & 1, \\ a_n & = & a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3 \end{array}$$

Esta sucesión, cuyos primeros términos son $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$, fue descubierta por Fibonacci (1175-1250, aprox.) en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número a_n de parejas nacidas en el n-ésimo mes es $n_{n-1} + a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además, cad pareja nacida hace dos meses produce ahora una nueva pareja. Es verdaderamente asombroso el número de resultados interesantes relacionados con esta sucesión, hasta el punto de existir una Asociación de Fibonacci que publica una revista, the Fibonacci Quarterly.
Demostrar que

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Demostración.- Al ser

$$\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

La fórmula es válida para $n = 1$ y también se cumple para $n = 1$. Supóngase que es válida para todo $k < n$, donde $n \geq 3$. En tal caso es válida en particular para $n-1$ y para $n-2$, luego por hipótesis

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_{n-1} + a_{n-2} \\ & = & \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ & = & \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\ & = & \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\ & = & \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}} \end{array}$$

21. La desigualdad de Schwarz (problema 1-19) tiene en realidad una forma más general:

$$\sum_{i=1}^{n} x_1 y_1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Dar de esto tres demostraciones, análogas a las tres demostraciones del problema 1-19

Demostración.-

i) Como antes, la demostración es trivial si para todo $y_i = 0$ o si hay algún numero λ con $x_i = \lambda y_i$ para todo i. Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{i=1} n(\lambda y_i - x_i)^2 \\ &= \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

así por el problema 1-18 queda demostrado.

ii) Usando $2xy \leq x^2 + y^2$ con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}, \quad y = \frac{y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

obtenemos,

$$\frac{2x_i y_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}} \leq \frac{x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} \quad (1)$$

luego

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} 2x_i y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} = 2$$

Nuevamente, la igualdad se cumple solo si se cumple en (1) para todo i, lo que significa que,

$$\frac{x_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

para todo i. Si todo y_i es distinto de 0. Esto significa que $x_i = \lambda y_i$ para

$$\lambda = \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

iii) La demostración depende de la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^n + \sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2$$

al verificar esta igualdad notamos que,

$$\sum_{i=1} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{i\neq j} x_i 2 y_j^2$$

y por lo tanto,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)^2 + \sum_{i\neq j} x_i y_i x_j y_j$$

La diferencia es

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}(x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) &= 2\sum_{i<j}(2_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - x_i y_i x_j y_j) \\ &= 2\sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2\end{aligned}$$

Si la igualdad se cumple en la desigualdad de Schwarz, para todo $x_i y_j = x_j y_i$. Si algún $y_i \neq 0$ y $y_i \neq 0$, luego $x_i = \dfrac{x_1}{y_1} y_i$ para todo i, así tenemos que $\lambda = \dfrac{x_1}{y_1}$

22. El resultado del problema 1-7 tiene una generalización importante:
Si $a_i, ..., a_n \geq 0$, entonces la **media aritmética**

$$A_n = \frac{a_1 + ... + a_n}{n}$$

y la **media geométrica**

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

satisfacen

$$G_n \leq A_n$$

(a) Supóngase que $a_1 < A_n$. Entonces algún a_i tiene que satisfacer $a_i > A_n$, pongamos que sea $a_2 > A_n$. Sea $\bar{a}_1 = A_n$ y sea $\bar{a}_2 = a_1 + a_2 - \bar{a}_1$. Demostrar que

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \geq a_1 a_2$$

¿Por qué la repetición de este proceso un suficiente número de veces demuestra que $G_n \leq A_n$? (He aquí otra ocasión en que resulta ser un buen ejercicio establecer una demostración formal por inducción, al tiempo que se da una explicación informal.)¿Cuándo se cumple la igualdad en la fórmula $G_n A_n$?

Demostración.- Tenemos que probar que

$$A_n(a_1 + a_2 - A_n) \geq a_1 a_2$$

Vemos que es lo mismo demostrar que $A_n^2 - (a_1 + a_2)A_n + a_1 a_2 \leq 0$ de donde $(A_n - a_1)(A_n - a_2) \leq 0$, el cual sabemos que es verdad porque $(A_n - a_1) > 0$ y $(A_n - a_2) < 0$

(b) Haciendo uso del hecho de ser $G_n \leq A_n$ cuando $n = 2$, demostrar por inducción sobre k, que $G_n \leq A_n$ para $n = 2_k$

Demostración.- Sabemos que $G_n \leq A_n$ cuando $n = 2^1$. Supóngase que $G_n \leq A_n$ para $n = 2^k$ para luego $m = 2^{k+1} = 2n$, entonces,

$$
\begin{aligned}
G_m &= \sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \\
&= \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}\,\sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_m}} \\
&\leq \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_m}}{2} \qquad \text{ya que } G_2 \leq A_2 \\
&\leq \frac{\dfrac{a_1 + ... + a_n}{n} + \dfrac{a_{n+1} + ... + a_m}{n}}{2} \\
&= \frac{a_1 + ... + a_m}{2n} \\
&= A_m
\end{aligned}
$$

(c) Para un n general, sea $2_m > n$. Aplíquese la parte (b) a los 2_m números

$$a_1, \cdots, a_n, \quad \underbrace{A_n, \cdots A_n}_{2^m - n\ veces}$$

para demostrar que $G_n \leq A_n$

Demostrar.- Aplicando la parte (b) a los 2^m números, para $k = 2^m - n$

$$
\begin{aligned}
(a_1 \cdots a_n)(A_n)^k &\leq \left[\frac{a_1 + ... + a_n + kA_n}{2^m}\right]^{2^m} \\
&= \left[\frac{nA_n + kA_n}{2^m}\right]^{2^m} \\
&= (A_n)^{2^m}
\end{aligned}
$$

así,

$$a_1 \cdots a_n \leq (A_n)^{2^m - k} = (A_n)^n$$

23. Lo que sigue es una definición recursiva de a_n :

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_{n+1} &= a_n \cdot a
\end{aligned}
$$

Demostrar por inducción que

$$
\begin{aligned}
a_{n+m} &= a_n \cdot a_m \\
(a^n)^m &= a^{nm}
\end{aligned}
$$

Demostración.- La primera ecuación es verdad para $m = 1$ ya que $a^{n+1} = a^n \cdot a^1$. Supongamos que $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$, entonces

$$
\begin{aligned}
a^{n+(n+1)} &= a^{(n+1)+1} \cdot a \\
&= (a^n \cdot a^m) \cdot a \\
&= a^n \cdot (a^m \cdot a) \\
&= a^n \cdot a^{m+1}
\end{aligned}
$$

por lo tanto la primera ecuación es verdad para $m+1$

La segunda ecuación es verdad para $m=1$ ya que $(a^n)^1 = a^{n\cdot 1}$. Supóngase que $(a^n)^m = a^{nm}$, entonces,

$$\begin{aligned} &= \\ &= (a^n \cdot a^m)\cdot a \\ &= a^n \cdot (a^m \cdot a) \\ &= a^n \cdot a^{m+1} \end{aligned}$$

24. Supóngase que conocemos las propiedades P1 y P4 de los números naturales, pero que no se ha hablado de multiplicación. Entonces se puede dar la siguiente definición recursiva de multiplicación:

$$1\cdot b = b \qquad (a+1)\cdot b = a\cdot b + b$$

Demostrar lo siguiente (¡en el orden indicado!)

$$\begin{array}{rcll} a\cdot(a+c) & = & a\cdot b + a\cdot c & \text{Utilizar inducción sobre } a \\ a\cdot 1 & = & a & \\ a\cdot b & = & b\cdot a & \text{lo anterior era el caso } b=1 \end{array}$$

Demostración.- Al ser

$$\begin{aligned} 1\cdot(b+c) &= b+c \\ &= 1\cdot b + 1\cdot c \quad \text{por definición,} \end{aligned}$$

el primer resultado es válido para $a=1$. Supóngase que $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ para todo b y c. Entonces,

$$\begin{aligned} (a+1)\cdot(b+c) &= a\cdot(b+c) + (b+c) \\ &= (a\cdot b + a\cdot c) + (b+c) \\ &= (a\cdot b + b) + (a\cdot c + c) \\ &= (a+1)\cdot b + (a+1)\cdot c \end{aligned}$$

La ecuación $a\cdot 1 = a$ vale para $a=1$ por definición. Supóngase que $a\cdot 1 = a$. Entonces

$$\begin{aligned} (a+1)\cdot 1 &= a\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ &= a+1 \end{aligned}$$

Para $b=1$, la ecuación $a\cdot b = b\cdot a$ es consecuencia de $a\cdot 1 = a$, que acaba de ser demostrada, y de $1\cdot a = a$, que vale por definición. Supóngase que $a\cdot b = b\cdot a$, entonces,

$$\begin{aligned} a\cdot(b+1) &= a\cdot b + a\cdot 1 \\ &= a\cdot b + a \\ &= b\cdot a + a \\ &= (b+1)\cdot a \end{aligned}$$

25. En este capítulo hemos empezado con los números naturales y gradualmente hemos ido ampliando hasta los reales. Un estudio completamente riguroso de este proceso requiere de por sí un pequeño libro. Nadie ha encontrado la manera de llegar a los números reales como dados, entonces los números naturales pueden ser definidos como los números naturales de la forma $1, 1+1, 1+1+1$, etc. Todo el objeto de este problema consiste en hacer ver que existe una manera matemática riguroso de decir **etc.**

(a) Se dice que un conjunto A de números reales es **inductivo** si

(i) $\mathbb{R}$ es inductivo.

Demostración.- Está claro según la definición.

(ii) El conjunto de los números reales positivos es inductivo.

Demostración.- Esto está claro, ya que 1 es positivo, y si k es positivo, entonces por definición $k+1$ es positivo.

(iii) El conjunto de los números reales positivos distintos de $\dfrac{1}{2}$ es inductivo.

Demostración.- Está claro que 1 pertenece a este conjunto. Si para el mismo no se cumpliera la condición 2, existiría entonces en el conjunto algún k con $k+1=1/2$. Pero esto es falso, ya que $k=-1/2$ no es positivo.

(iv) El conjunto de los números reales positivos distintos de 5 no es inductivo.

Demostración.- Este conjunto contiene 4, pero no $4+1$.

(v) Si A y B son inductivos, entonces el conjunto C de los números reales que están a la vez en A y en B es también inductivo.

Demostración.- Al estar 1 en A y en B, también está en C. Si k está en C, entonces k está a la vez en A y en B, con lo que $k+1$ está en A y en B, de modo que $k+1$ está en C.

(b) Un número real n será llamado **número natural** si n está en todo conjunto inductivo.

(i) Demostrar que 1 es un número natural.

Demostración.- 1 es un número natural, puesto que 1 está en todo conjunto inductivo, por la misma definición de conjunto inductivo.

(ii) Demostrar que $k+1$ es un número natural si k es un número natural.

Demostración.- Si k es un número natural, entonces k está en todo conjunto inductivo. Así pues, $k+1$ está en todo conjunto inductivo. Por lo tanto, $k+1$ es un número natural.

26. Un rompecabezas consiste en disponer de tres vástagos cilíndricos, el primero de los cuales lleva engastados n anillos concéntricos de diámetro decreciente. Se puede quitar el anillo superior de un vástago para engastarlo sobre otro vástago siempre que al hacer esto último el anillo desplazado no venga a caer sobre otro de diámetro inferior. Por ejemplo, si el anillo más pequeño se pasa al vástago 2 y el que le sigue pasar también al vástago 3 encima del que le sigue en tamaño. Demostrar que la pila completa se puede pasar al vástago 3 en 2_n+1 pasos y no en menos.

Demostración.- Si hay solo $n=1$ anillos, claramente se puede mover al eje 3 en $1=2^1-1$ movimientos. Suponiendo el resultado para k anillos, luego dados $k+1$ anillos,

(a) Mueve los anillos elevados a la k al eje 2 en $2k-1$ movimientos,

(b) mueva el anillo inferior al eje 3,

(c) mueva los k anillos superiores de nuevo al eje 3 en movimientos $2k - 1$.

Esto toma $2(2k-1)+1 = 2k+1-1$ se mueve. Si $2k-1$ movimientos es el mínimo posible para k anillos, luego $2k+1-1$ es el mínimo para $k+1$ anillos, ya que la parte inferior El anillo no se puede mover en absoluto hasta que los primeros k anillos se muevan a algún lugar, tomando al menos $2k-1$ se mueve, el anillo inferior debe moverse al eje 3, tomando al menos 1 movimiento, y luego los otros anillos deben colocarse encima, tomando al menos otros movimientos $2^k - 1$.

27. Hubo un tiempo en que la universidad B se preciaba de tener 17 profesores numerarios de matemáticas. La tradición obligaba a que el almuerzo comunitario semanal, al que concurrían fielmente los 17, todo miembro que hubiese descubierto un error en una de sus publicaciones tenia que hacer público este hecho y a continuación dimitir. Una declaración de este tipo no se había producido nunca porque ninguno de los profesores era consciente de la existencia de un error en su propio trabajo. Lo cual, sin embargo, mo quiere decir que no existieran errores. De hecho, en el transcurso de los años, por lo menos un error había sido descubierto en el trabajo de cada uno de los miembros por otro de entro ellos.La existencia de este error había sido comunicada a todos los demás miembros del departamento salvo al responsable, con objeto de evitar dimisiones.
Llegó un fatídico año en que el departamento aumentó el número de sus miembros con un visitante de otra universidad, un Profesor X que venía con la esperanza de que se le ofreciera un puesto permanente al final del año académico. Una vez que vio frustrada su esperanza, el Profesor X tomó su venganza en el último almuerzo comunitario del año diciendo: Me ha sido muy grata mi estancia entre ustedes, pero hay una cosa que creo que es mi deber comunicarles. Por lo menos uno de entre ustedes tiene publicado un resultado incorrecto, lo cual ha sido descubierto por otro del departamento. ¿Qué ocurrió al año siguiente?

Respuesta.- Primero Suponga que solo hay 2 profesores A y B, cada uno consciente del error en el trabajo del otro, pero sin darse cuenta de cualquier error en el suyo. Entonces ninguno se sorprende por la declaración del profesor X, pero cada uno espera que el otro sea sorprendido, y dimitir en el primer almuerzo del próximo año. Cuando esto no suceda, cada uno se da cuenta que esto solo puede ser porque él también ha cometido un error. Entonces, el la próxima reunión, ambos renunciaran.
A continuación, considere el caso de 3 profesores, A, B y C. El profesor C sabe que el profesor A es consciente de un error en el trabajo del profesor B, ya sea porque el profesor A encontró el error e informó, o porque encontró el error e informó al profesor A. Del mismo modo, él sabe que el profesor B sabe que hay un error en el trabajo del profesor A. Pero el profesor C piensa que no a cometido errores, por lo que a el respecta, la situación frente a los profesores A y B es precisamente el analizado en el párrafo anterior. El profesor C está asumiendo, de que nadie cree que exista un error cuando uno no lo hace. Entonces el profesor C espera tanto al profesor A como al profesor B renunciar en la segunda reunión. Por supuesto de manera similar los profesores A y B esperan que los otros dos renuncien en la segunda reunión. Cuando nadie renuncia todos se dan cuenta de que ha cometido un error, por lo que todos renuncian en la tercera reunión. Podría ser demostrado por inducción.

28. Después de imaginarse, o de consultar, la solución del problema 27, considere lo siguiente: Cada uno de los miembros del departamento era ya sabedor de lo que el Profesor X afirmaba. ¿Cómo pudo pues su afirmación cambiar las cosas?

Respuesta.- Ganar es una buena idea comenzar con el caso en el que el departamento consta solo de Profesores A y B. Ahora, por supuesto, ambos profesores saben que alguien ha publicado un resultado incorrecto, pero el Profesor A piensa que el Profesor B no lo sabe, y viceversa. Una vez que el Profesor X hace su anuncio, el Profesor A sabe que el Profesor B lo sabe. Y por eso espera que el Profesor B renuncie en la próxima reunión. En el caso de tres profesores, la situación es más complicada. Cada uno sabe que alguien ha cometido un error, y además cada uno sabe que los demás saben Por ejemplo, el Profesor C sabe que el Profesor A lo sabe, ya que él y el Profesor A han discutido el error en el trabajo del Profesor B, y él sabe de manera similar que el Profesor B lo sabe. Pero el Profesor C no cree que el Profesor A sepa que el Profesor B lo sabe. Así que el anuncio del Profesor X cambia las cosas: ahora el Profesor C sabe que el Profesor A sabe que el Profesor B sabe. Bueno, puedes ver lo que pasa en general. Esto parece probar que las declaraciones como A sabía que B sabía que C sabía que realmente tiene sentido.

3

Funciones

Definición 3.1 *El conjunto de los números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de **dominio** de la función.*

Definición 3.2 *Si f y g son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función $f+g$ denominada **suma** de $f+g$ mediante la ecuación:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los x que están a la vez en el dominio de f y en el dominio de g, es decir:

$$\textit{dominio } (f+g) = \textit{dominio } f \cap \textit{dominio } g$$

Definición 3.3 *El dominio de $f \cdot g$ es dominio $f \cap$ dominio g*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Definición 3.4 *Se expresa por dominio $f \cap$ dominio $g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definición 3.5 (Función constante)

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

TEOREMA 3.1 $(f+g)+h = f+(g+h)$

Demostración.- ***La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio.*** *Obsérvese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:*

$$\begin{aligned}[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= [f(x)+g(x)]+h(x)\end{aligned}$$

$$y$$

$$\begin{aligned}[f+(g+h)](x) &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= f(x)+[g(x)+h(x)]\end{aligned}$$

Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de $(f+g)+h$ y el de $f+(g+h)$ es evidentemente dominio f $\cap$ dominio g $\cap$ dominio h. Nosotros escribimos, naturalmente $f+g+h$ por $(f+g)+h = f+(g+h)$

TEOREMA 3.2 *Es igual fácil demostrar que $(f\cdot g)\cdot g = f\cdot(g\cdot h)$ y ésta función se designa por $f\cdot g\cdot h$. Las ecuaciones $f+g = g+f$ y $f\cdot g = g\cdot f$ no deben presentar ninguna dificultad.*

Definición 3.6 (Composición de función)

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f\circ g$ es $\{\ x : x$ está en el dominio de g y $g(x)$ está en el dominio de $f\ \}$

$$D_{f\circ g} = \{x\ /\ x\in D_g\ \wedge\ g(x)\in D_f\}$$

Propiedad 3.1 $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ *La demostración es una trivalidad.*

Definición 3.7 *Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a,b) y (a,c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b=c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.*

Definición 3.8 *Si f es una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a,b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a,b) está en f. Este b único se designa por $f(a)$.*

3.1. Problemas

1. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Interpretar lo siguiente:

(i) $f(f(x))$ (¿Para que x tiene sentido?)

Respuesta.- Sea $f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ entonces $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$, por lo tanto $\dfrac{1-x}{x+2}$ de donde llegamos a la conclusión de que x se cumple para todo número real de 1 y -2

(ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$ por lo tanto se cumple para todo $x \neq -1, 0$

(iii) $f(cx)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+cx}$ donde se cumple para todo $x \neq -1$ si $c \neq 0$

(iv) $f(x+y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x+y}$ donde se cumple para todo $x+y \neq -1$

(v) $f(x)+f(y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$ siempre y cuando $x \neq -1$ y $y \neq -1$

(vi) ¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?

Respuesta.- Para todo c ya que $f(c \cdot 0) = f(0)$

(vii) ¿Para que números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos x?

Respuesta.- Solamente $c = 1$ ya que $f(x) = f(cx)$ implica que $x = cx$, y esto debe cumplirse por lo menos para un $x \geq 1$

2. Sea $g(x) = x^2$ y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?

Respuesta-. Se cumple para $y \geq 0$ si y es racional, o para todo $y \geq 1$

(ii) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?

Respuesta-. Para $-1 \leq y \leq 1$ siempre que y sea racional y para todo y tal que $|y| \leq 1$

(iii) ¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?

Respuesta-.
$$g(h(z)) = \begin{cases} 0, & z^2 \ racional \\ 1, & z^2 \ irracional \end{cases}$$

Por lo tanto el resultado es 0

(iv) ¿Para cuáles w es $g(w) \leq w$?

Respuesta-. Para todo w tal que $0 \leq w \leq 1$

(v) ¿Para cuáles ϵ es $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$?

Respuesta-. Para $-1, 0, 1$

3. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Respuesta.- Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene $1 - x^2 \geq 0$ entonces $x^2 \leq 1$ por lo tanto el dominio son todos los x tal que $|x| \leq 1$

(ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Respuesta.- Se observa claramente que el dominio es $-1 \leq x \leq 1$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

Respuesta.- Operando un poco tenemos
$$f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)},$$
sabemos que el denominador no puede ser 0 por lo tanto el $D_f = \{x \ / \ x \neq 1, \ x \neq 2\}$

(iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Respuesta.- Claramente notamos que el dominio de f son -1 y 1 ya que si se toma otros números daría un número imaginario.

(v) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$

Respuesta.- Notamos que no se cumple para ningún x ya que si $0 \leq x \leq 1$ entonces no se cumple para $\sqrt{x-2}$ y si $x \geq 2$ no se cumple para $\sqrt{1-x}$

4. Sean $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$ y $s(x) = senx$. Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.

(i) $(S \circ P)(y)$

Respuesta.- Por definición se tiene que $(S \circ P)(y) = S(P(y))$ entonces $S(2^y) = 2^{2y}$ siempre y cuando $D_{S \circ P} = \{y/y \in D_P \wedge P(y) \in D_S\}$

(ii) $(S \circ s)(y)$

Respuesta.- Por definición tenemos que $(S \circ s)(y) = S(s(y))$ entonces $S(\operatorname{sen} y) = \operatorname{sen}^2 y$ siempre y cuando $D_{S \circ s} = \{y/y \in D_s \wedge S(y) \in D_S\}$

(iii) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Respuesta.- $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S((P \circ s)(t)) + s(P(t)) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\operatorname{sen} t)) + s(2^t) = S(2^{\operatorname{sen} t}) + \operatorname{sen} 2^t = 2^{2 \operatorname{sen} t} + \operatorname{sen} 2^t$

(iv) $s(t^3)$

Respuesta.- $s(t^3) = \operatorname{sen} t^3$

5. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s usando solamente $+, \cdot, \circ$

(i) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

Respuesta.- Claramente vemos que $P \circ s$

(ii) $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$

Respuesta.- $s \circ P$

(iii) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

Respuesta.- $s \circ S$

(iv) $f(x) = \operatorname{sen} x$

Respuesta.- $S \circ s$

(v) $f(t) = 2^{2t}$

Respuesta.- $P \circ P$

(vi) $f(u) = \operatorname{sen}(2^u + 2^{u^2})$

Respuesta.- $s \circ (P + P \circ S)$

(vii) $f(y) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2^{2^{2^{\operatorname{sen} y}}})))$

Respuesta.- $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$

(viii) $f(a) = 2^{\operatorname{sen}^2 a} + \operatorname{sen}(a^2) + 2^{sen(a^2 + \operatorname{sen} a)}$

Respuesta.- $P \circ S \circ s + s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

6. (a) Si $x_1, ..., x_n$ son números distintos, encontrar una función polinómica f_i de grado $n-1$ que tome el valor 1 en x_i y 0 en x_j para $j \neq i$. Indicación: El producto de todos los $(x - x_j)$ para $j \neq i$ es 0 en x_j si $j \neq i$. Este producto es designado generalmente por

$$\prod_{j=1_{j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

donde el símbolo $\prod$ (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que $\sum$ para sumas.

Respuesta.- Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija n y elegir un conjunto de distintas $x_1, x_2, ..., x_n$. Por ejemplo supongamos que elegimos $n = 3$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$, pero $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$. Es decir, F_1 es un cuadrático que tiene ceros en $x = 2$ y $x = 3$, pero es igual a 1 en $x = 1$. Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x-2)(x-3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante a. Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con $x = 1$, debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x-2)(x-3) = 2a,$$

por lo tanto $a = 1/2$ y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio $f_2(x)$ tal que $f_2(2) = 1$ con raíces en $x = 1, 3$ tendríamos que resolver la ecuación $1 = a(2-1)(2-3)$, lo que da $a = -1$ por lo tanto $f_2(x) = -(x-1)(x-3)$

Ahora veamos el caso general. El polinomio $f_i(x)$ satisface $f_i(x_i)$ y $f_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$, entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

Para alguna constante a. Para encontrar esta constante, aplicamos $x = x_1$:

$$f_i(x_i) = 1 = a \prod_{j \neq i} (x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

(b) Encontrar ahora una función polinómica de grado $n-1$ tal que $f(x_1) = a_1$, donde $a_1, ..., a_n$ son números dados. (Utilícense las Funciones f_1 de la parte (a).) La fórmula que se obtenga es la llamada **Fórmula de interpolación de Lagrange**

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i f_i(x)$$

entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

7. (a) Demostrar que para cualquier función polinómica f y cualquier número a existe función polinómica g y un número b tales que $f(x) = (x-a)g(x) + b$ para todo x. (La idea es esencialmente dividir $f(x)$ por $(x-a)$ mediante la división larga hasta encontrar un resto constante.)
Demostración.- Si el grado de f es 1, entonces f es de la forma

$$f(x) = cx + d = cx + d + ac - ac = c(x-a) + (d + ac)$$

de tal modo que $g(x) = c$ y $b = d + ac$. Por inducción supongamos que el resultado es válido para polinomios de grado $\leq k$. Si f tiene grado $k+1$, entonces f tiene la forma

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + ... + a_1 x + a_0$$

luego para grados $\leq k$ se tiene

$$f(x) - a_{k+1}x^{k+1} = (x-a)g(x) + b$$

así

$$f(x) = (x-a)\left[g(x) + a_{k+1}(x-a)^k\right] + b$$

(b) Demostrar que si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)g(x)$ para alguna función polinómica g. (La reciproca es evidente)

Demostración.- Por la parte (a), podemos poner que $f(x) = (x-a)g(x) + b$, entonces

$$0 = f(a) = (a-a)g(a) + b = b$$

de modo que $f(x)=(x-a)g(x)$

(c) Demostrar que si f es una función polinómica de grado n, entonces f tiene a lo sumo n raíces, es decir, existen a lo sumo n números a tales que $f(a)=0$

Demostración.- Supóngase que f tiene n raíces $a_1,...,a_n$. Entonces según la parte (b) podemos poner $f(x)(x-a)g_1(x)$ donde el grado de $g_1(x)$ es $n-1$. Pero

$$0=f(a_2)=(a_2-a_1)g_1(a_2)$$

de modo que $g_1(a_2)=0$, ya que $a_2\neq a_1$. Podemos pues escribir

$$f(x)(x-a_2)g_2(x),$$

donde el grado de g_2 es $n-2$. Prosiguiendo de esta manera, obtenemos que

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdot ...\cdot(x-a_n)c$$

para algún número $c\neq 0$. Está claro que $f(a)\neq 0$ si $a\neq a_1,...,a_n$. Así pues, f puede tener a lo sumo n raíces.

(d) Demostrar que para todo n existe una función polinómica de grado n con raíces. Si n es par, encontrar una función polinómica de grado n sin raíces, y si n es impar, encontrar una con una sola raíz

Demostración.- Si $f(x)=(x-1)(x-2)\cdot ...\cdot(x-n)$, entonces f tiene n raíces. Si n es par, entonces $f(x)=x^n+1$ no tiene raíces. Si n es impar, entonces $f(x)=x^n$ tiene una raíz única, que es 0.

8. ¿Para qué números a,b,c y d la función

$$f(x)=\frac{ax+d}{cx+b}$$

satisface $f(f(x))=x$ para todo x?

Respuesta.- Si

$$x=f(f(x))=\frac{a\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+d}$$

para todo x, entonces

$$x=\frac{a^2x+ab+bcx+bd}{acx+bc+cdx+d^2}$$

y por lo tanto

$$(ac+cd)\,x^2+\left(d^2-a^2\right)x-ab-bd=0$$

para todo x, de modo que

$$\begin{array}{rcl} ac+cd & = & 0\\ ab+bd & = & 0\\ d^2-a^2 & = & 0 \end{array}$$

Se sigue que $a = d$ ó $a = -d$. Una posibilidad es $a = d = 0$, en cuyo caso $f(x) = \dfrac{b}{cx}$ que satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq 0$. Si $a = d \neq 0$, entonces $b = c = 0$ con lo que $f(x) = x$. La tercera posibilidad es $a + d = 0$, de modo que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, la cual satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq \dfrac{a}{c}$ la cual satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq \dfrac{a}{c}$. Estrictamente hablando, podemos añadir la condición $f(x) \neq \dfrac{a}{c}$ para $x \neq \dfrac{a}{c}$, lo que significa que

$$\frac{ax+b}{cx-a} \neq \frac{a}{c}, \text{ ó } a^2 + bc \neq 0.$$

9. **(a)** Si A es un conjunto cualquiera de números reales, defínase una función C_A como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{si } \text{x } \textit{está en } \text{A} \\ 0, & \textit{si } \text{x } \textit{no está en } \text{A} \end{cases}$$

Encuéntrese expresiones para $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ y $C_{\mathbb{R}-A}$, en términos de C_A y C_B.

Respuesta.- Según la definición de teoría de conjunto tenemos,

$$\begin{array}{rcl} C_{A\cap B} & = & C_A \cdot C_B \\ C_{A\cup B} & = & C_A + C_B - C_A \cdot C_B \\ C_{\mathbb{R}-A} & = & 1 - C_A \end{array}$$

(b) Supóngase que f es una función tal que $f(x) = 0$ o 1 para todo x. Demostrar que existe un conjunto A tal que $f = C_A$

Demostración.- Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$, entonces $f = C_A$.

(c) Demostrar que $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A

Demostración.- Sea $f = f^2$, entonces para cada real x, $f(x) = f[f(x)]^2$, así $f(x) = 0$ó $f(x) = 1$, luego por la parte b), $f = C_A$ para algún A.
Por otro lado sea $f = C_A$ para algún A. Entonces si $x \in A$, $f(x) = 1 = 1^2 = f(x)^2$, mientras si $x \notin A$, $f(x) = 0 = 0^2 = f(x)^2$, así en cualquier caso $f(x) = [f(x)]^2$ y $f = f^2$

10. **(a)** ¿Para qué funciones f existe una función g tal que $f = g^2$?

Respuesta.- Debido a que algún número elevado al cuadrado siempre será no negativo podemos afirmar que las funciones f satisfacen a todo x tal que $f(x) \geq 0$

(b) ¿Para qué función f existe una función g tal que $f = 1/g$?

Respuesta.- Dado a que un número divido entre cero es indeterminado se ve claramente que satisfacen a todo x tal que $f(x) \neq 0$

(c) ¿Para qué funciones b y c podemos encontrar una función x tal que

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

para todos los números t?

Respuesta.- Por teorema se observa que para las funciones b y c que satisfacen $(b(t))^2 - 4c(t) \geq 0$ para todo t

(d) ¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones a y b si ha de existir una función x tal que

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

para todos los números t? ¿Cuántas funciones x de éstas existirán?

Respuesta.- Es facil notar que $b(t)$ tiene que ser igual a 0 siempre que $a(t) = 0$. Si $a(t) \neq 0$ para todo t, entonces existe una función única con esta condición, que es $x(t) = a(t)/b(t)$. Si $a(t) = 0$ para algún t, entonces puede elegirse arbitrariamente $x(t)$, de modo que existen infinitas funciones que satisfacen la condición.

11. (a) Supóngase que H es una función e y un número tal que $H(H(y)) = y$. ¿Cuál es el valor de

$$H(H(H...(H(y))))?$$

Respuesta.- Si aplicamos la hipótesis, tendremos que aplicar 78 veces la función, luego 76 y así, hasta llegar a 2, donde la función sera $H(H(y))$, y una vez más por hipótesis tenemos como resultado y.

(b) La misma pregunta sustituyendo 80 por 81

Respuesta.- Sea $H(H(y))$ la $78ava$ vez de la función, entonces la $81ava$ vez será $H(H(H(y))$, por lo tanto queda como resultado $H(y)$.

(c) La misma pregunta si $H(H(y)) = H(y)$

Respuesta.- Análogamente a la parte a) si la $80ava$ vez es y entonces por hipótesis nos queda $H(y)$.

(d) Encuéntrese una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todos los números x y tal que $H(1) = 36$, $H(2) = \dfrac{\pi}{3}$, $H(13) = 47$, $H(36)36$, $H(\pi/3)\dfrac{\pi}{3}$, $H(47) = 47$

Respuesta.- Dar a $H(l)$, $H(2)$, $H(13)$, $H(36)$, $H(\pi/3)$, y $H(47)$ los valores especificados y hágase $H(x) = 0$ para $x \neq 1, 2, 13, 36, \pi/3, 47$. Al ser, en particular, $H(0) = 0$, la condición $H(H(x)) = H(x)$ se cumple para todo x.

(e) Encontrar una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todo x y tal que $H(1) = 7$, $H(17) = 18$

Respuesta.- Hágase $H(1) = 7$, $H(7) = 7$, $H(17) = 18$, $H(18) = 18$, y $H(x) = 0$ para $x \neq l, 7, 17, 18$.

12. Una función f es par si $f(x) = f(-x)$, e impar si $f(x) = -f(-x)$. Por ejemplo, f es par si $f(x) = x^2$ ó $f(x) = |x|$ ó $f(x) = \cos x$, mientras que f es impar si $f(x) = x$ ó $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(a) Determinar si $f + g$ es par, impar o no necesariamente ninguna de las dos cosas, en los cuatro casos obtenidos al tomar f par o impar y g par o impar. (Las soluciones pueden ser convenientemente dispuestas en una tabla 2 x 2)

Respuesta.- Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$ entonces $f(-x) + g(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x) + g(x)$ por lo tanto par y par es par.
Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$ entonces $-f(-x) + (-g(-x)) = -(-x) + [-x(-x)] = x + x = f(x) + g(x)$, por lo tanto impar e impar es impar.
Los otros dos últimos se prueba fácilmente y se llega a la conclusión de que ni uno ni lo otro.

	Par	**Par**
Par	Par	Ninguno
Par	Ninguno	Par

(b) Hágase lo mismo para $f \cdot g$

Respuesta.- Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$, entonces $f(-x) \cdot g(-x) = x^2 \cdot |x| = f(x) \cdot g(x)$, por lo tanto se cumple para par y par.
Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$, entonces $-f(-x) \cdot -g(-x) = -(-x) \cdot -(-x) = x \cdot x = f(x) \cdot g(x)$, por lo tanto impar impar da impar
Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$, podemos crear otra función llamada h que contiene a $x^2 \cdot x$ por lo tanto $h(x) = x^3 = -(-x)^2$ y así demostramos que par e impar es impar.
De igual forma al anterior se puede probar que impar y par es impar.

	Par	**Par**
Par	Par	Impar
Par	Impar	Par

(c) Hágase lo mismo para $f \circ g$

Respuesta.- Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$, luego $h(x) = (f \circ g)(x)$ entonces $h(x) = x$ luego $-f(-x) = x$, por lo tanto impar e impar da impar.
De similar manera se puede encontrar para los demás problemas y queda:

	Par	**Par**
Par	Par	Par
Par	Par	Impar

(d) Demostrar que para toda función par f puede escribirse $f(x) = g(|x|)$, para una infinidad de funciones g.

Demostración.- Sea $g(x) = f(x)$ sabemos que f es par si $f(x) = f(-x)$, de donde $g(x) = f(-x)$, luego por definición de valor absoluto se tiene $g(|x|) = f(|-x|)$, y por lo tanto $f(x) = g(|x|)$

13. **(a)** Demostrar que para toda función f con dominio $\mathbf{R}$ puede ser puesta en la forma $f = E + O$, con E par y O impar.

Demostración.- Por la parte (b) y resolviendo en $E(x)$ y $O(x)$ se tiene

$$E(x)\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad O(x)\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

(b) Demuéstrese que esta manera de expresar f es única. (Si se intenta resolver primero la parte (b) despejando E y O, se encontrará probablemente la solución a la parte (a))

Demostración.- Si $f = E + O$, siendo E par y O impar, entonces

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

$$f(-x) = E(x) - O(x)$$

14. Si f es una función cualquiera, definir una nueva función $|f|$ mediante $|f|(x) = |f(x)|$. Si f y g son funciones, definir dos nuevas funciones, $max(f,g)$ y $min(f,g)$ mediante

$$max(f,g)(x) = max(f(x), g(x)),$$

$$min(f,g)(x) = min(f(x), g(x))$$

Encontrar una expresión para $max(f,g)$ y $min(f,g)$ en términos de $||$.

Respuesta.- Por problema 1,13 se tiene que

$$max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2};$$

$$min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

15. **(a)** Demostrar que $f = max(f,0) + min(f,0)$. Esta manera particular de escribir f es bastante usada; las funciones $max(f,0)$ y $min(f,0)$ se llaman respectivamente parte positiva y parte negativa de f

Demostración.- Esta proposición mostrará que se puede dividir una función en sus partes no negativas y no positivas. Es decir para todo los elementos x de algún dominio, es cierto que el valor de la función f en un punto x es igual a la suma dada, que consiste en la parte no negativa de $max(f(x), 0)$ y la parte no positiva de f, $min(f(x), 0)$.
Para probarlo, lo dividiremos en dos casos. Sabemos que ó $f(x) \geq 0$ ó $f(x) \leq 0$. Si $f(x) \geq 0$ entonces

$max(f(x),0) = f(x)$ y $min(f(x),0) = 0$ por lo que nuestra ecuación se reduce a $f(x) = f(x) + 0$. Por otro lado si $f(x) \leq 0$, entonces $max(f(x),0) = 0$ y $min(f(x),0) = f(x)$, por lo que nuestra ecuación se reduce a $f(x) = 0 + f(x)$.
En cualquier caso, nuestro lado derecho se reduce a $f(x)$ y sabemos que al menos uno de estos dos casos es verdadero; por lo tanto concluimos que $\forall x, f(x) = max(f(x),0) + min(f(x),0)$ ó $f = max(f,0) + min(f,0)$

(b) Una función f se dice que es no negativa si $f(x) \geq 0$ para todo x. Demostrar que para cualquier función f puede ponerse $f = g - h$ de infinitas maneras con g y h no negativas. (La manera corriente es $g = max(f,0)$ y $h = -min(f,0)$. Cualquier número puede ciertamente expresarse de infinitas maneras como diferencia de dos números no negativos.)

Demostración.- Comenzamos con la observación de que, para cualquier número real no negativo r, hay infinitos números reales no negativos s, t tales que

$$r = s - t$$

De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $s_n = 2r + n$ y $t_n = r + n$. Entonces, dado que $r \geq 0$, tanto s_n como t_n son no negativos. Además,

$$s_n = t_n = 2r + n - r - n = r$$

Ahora, para cada número real x, tenemos que $f(x) \geq 0$. Por lo tanto, a partir de la observación anterior, vemos que hay infinitos números reales no negativos s_x y t_x tales que

$$f(x) = s_x - t_x$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Así que definimos funciones no negativas g y h como sigue

$$g(x) = s_x \;\; y \;\; h(x) = t_x$$

. Entonces hemos demostrado que hay infinitas opciones de tales funciones. Además, tenemos que

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

. Por lo tanto, hemos demostrado que hay infinitas funciones no negativas g y h tales que

$$f = g - h$$

16. Supongase que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y.

(a) Demostrar que $f(x_1, +... + x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n)$

Demostración.- El resultado se cumple para $n = 1$, $f(x_1) = f(x_1)$. Luego si $f(x_1 + ... + x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n)$ para todo $x_1, ..., x_n$, entonces

$$\begin{array}{rcll} f(x_1 + ... + x_{n+1}) & = & f([x_1 + ... + x_n] + x_{n+1}) & \\ & = & f(x_1 + ... + x_n) + f(x_{n+1}) & \text{por hipótesis} \\ & = & f(x_1) + ... + f(n) + f(x_{n+1}) & \end{array}$$

(b) Demostrar que existe algún número c tal que $f(x) = cx$ para todos los números racionales x (en este punto no intentamos decir nada acerca de $f(x)$ cuando x es irracional). Indicación: Piénsese primero en cómo debe ser c. Demostrar luego que $f(x) = cx$, primero cuando x es un entero, después cuando

x es el reciproco de un entero, y finalmente para todo racional x.

Demostración.- Sea $c = f(1)$. Luego para cualquier número natural n y el inciso (a),

$$f(n) = f(1 + ... + 1) = f(1) + ... + f(1) = n \cdot f(1) = cn \quad (1)$$

Al ser

$$f(x) + f(0) = f(x + 0) = f(x),$$

entonces $f(0) = 0$. Ahora, puesto que

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0,$$

resulta que $f(-x) = -f(x)$. En particular, para cualquier número natural n y por (1),

$$f(-n) = -f(n) = -cn = c \cdot (-n)$$

Además

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = c$$

de modo que,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n},$$

y en consecuencia

$$f\left(\frac{1}{-n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) = -c \cdot \frac{1}{n} = c\left(\frac{1}{n}\right)$$

Por último, cualquier número racional puede escribirse en la forma m/n, siendo m un número natural y n un entero;

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right) = mc \cdot \frac{1}{n} = c \cdot \frac{m}{n}$$

17. Si $f(x) = 0$ para todo x, entonces f satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y también $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo x e y. Supóngase ahora que f satisface estas dos propiedades, pero que $f(x)$ no es siempre 0. Demostrar que

(a) Demostrar que $f(1) = 1$

Demostración.- Al ser $f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) \cdot f(1)$ y $f(a) \neq 0$ para algún a, resulta ser $f(1) = 1$

(b) Demostrar que $f(x) = x$ si x es racional

Demostración.- Por el problema 16, $f(x) = f(1) \cdot x = x$ para todo número racional x.

(c) Demostrar que $f(x) > 0$ si $x > 0$. (Esta parte es artificiosa, pero habiendo puesto atención a las observaciones filosóficas que van con los problemas de los dos últimos capítulos, se sabrá lo que hacer.)

Demostración.- Si $c > 0$ entonces $c = d^2$ para algún d, de modo que $f(c) = f(d^2) = (f(d))^2 \geq 0$. Por otro lado, no podemos tener $f(c) = 0$, ya que esto implicaría que

$$f(a) = f\left(c \cdot \frac{a}{c}\right) = f(c) \cdot f\left(\frac{a}{c}\right) = 0 \qquad \textit{para todo } a$$

(d) Demostrar que $f(x) > f(y)$ si $x > y$

Demostración.- Si $x > y$, entonces $x - y > 0$, luego por la parte (c) tenemos que $f(x) - f(y) > 0$.

(e) Demostrar que $f(x) = x$ para todo x. Indicación: Hágase uso del hecho de que entre dos números calesquiera existe un número racional

Demostración.- Sea $f(x) > x$ para algún x. Elíjase un número racional r con $x < r < f(x)$. Entonces, según las partes (b) y (d),

$$f(x) < f(r) = r < f(x),$$

lo cual constituye una contradicción. Análogamente, es imposible que $f(x) < x$ ya que si $f(x) < r < x$ entonces

$$f(x) < r = f(r) < f(x).$$

18. ¿Qué condiciones precisas deben satisfacer f, g, h y k para que $f(x)g(y) = h(x)k(y)$ para todo x e y?

Respuesta.- Se satisface la ecuación si $f = 0$ ó $g = 0$ y $h = 0$ ó $k = 0$. De no ocurrir esto, existirá algún x con $f(x) \neq 0$ y algún y con $g(y) \neq 0$, entonces $0 \neq ff(x)g(y) = h(x)k(y)$, de modo que también se tendrá $h(x) \neq 0$ y $k(y) \neq 0$. Haciendo $\alpha = h(x)/f(x)$, tenemos también $h(x^{'} = \alpha f(x^{'}$ para todo $x^{'}$ para todo $x^{'}$. Tenemos pues. que $g = \alpha k$ y $h = \alpha f$ para cierto número $\alpha = 0$.

19. **(a)** Demostrar que no existen funciones f y g con alguna de las propiedades siguientes:

(i) $f(x) + g(y) = xy$ para todo x e y.

Demostración.- Si $f(x) + g(y) = xy \ \forall x, y$ entonces para $y = 0$ tenemos $f(x) + g(0) = 0 \ \forall x.$, de donde $f(x) = -g(0)$, e implica que f es una función constante. Luego

$$xy = f(x) + g(y) = -g(0) + g(y) \ \forall y$$

porque $f(x)$ es constante para cualquier x. Por otro lado sabemos que $g(0)$ es una constante y $g(y)$ no depende de x, sin embargo su diferencia está dada por $g(y) - g(0) = xy$. Y finalmente sea $x = 0$ entonces $g(y) = g(0) \ \forall y$, por lo tanto se concluye que

$$xy = f(x) + g(x) = -g(0) + g(0) = 0 \ \forall x, y$$

ya que si tomamos $x = y = 1$ implica que $1 = 0$ donde llegamos a un absurdo.

(ii) $f(x) \cdot g(y) = x + y$ para todo x e y.

Demostración.- Sea $y = 0$, obtenemos $f(x) = x/g(0)$. De la misma forma si $x = 0$, entonces $g(y) = y/f(0)$. Por lo tanto

$$f(x) \cdot g(y) = x + y \Longrightarrow \frac{x}{g(0)} \cdot \frac{y}{f(0)} = x + y \qquad \forall x, \ e \ \forall y$$

Supongamos que $y = 0$, entonces $\dfrac{x}{g(0)} \cdot \dfrac{0}{f(0)} = x \quad \forall x \Longrightarrow 0 = x \quad \forall x$, lo cual es absurdo.

(b) Hallar funciones f y g tales que $f(x+y) = g(xy)$ para todo x e y.

Respuesta.- Sean f y g la misma función constante. Argumentos similares a los utilizados en la parte (a) muestran que estas son las únicas opciones posibles.

20. **(a)** Hallar una función f que no sea constante y tal que $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$.

Respuesta.- Podemos ver que la función $f(x) = x$ satisface la condición $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$

(b) Supóngase que $f(y) - f(x) \leq (y-x)^2$ para todo x e y. (¿ Por qué esto implica $|f(y) - f(x)| \leq (y-x)^2$?) Demostrar que f es una constante. Indicación: Divídase el intervalo $[x, y]$ en n partes iguales.

Demostración.- Supongamos, que puede probar que la siguiente desigualdad es cierta para todos $x, y \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{(y-x)^2}{n}$$

Ahora mantengamos los valores de x e y constantes. Podemos suponer $x \neq y$ (porque si $x = y$ entonces $f(x) = f(y)$ y así terminaríamos la demostración). Entonces, en el lado derecho, el numerador $(y-x)^2$ es distinto de 0, y mayor a cero. Por lo tanto, podemos dividir por $(y-x)^2$, de donde:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{(y-x)^2} \leq \frac{1}{n}$$

En el lado izquierdo tenemos un número no negativo que es constante (ya que x e y se mantienen constantes, el numerador no es negativo y el denominador es positivo). Este número es menor que cada fracción $\dfrac{1}{n}$ para todos los números naturales $n \geq 1$. Esto implica que el lado izquierdo es igual a cero:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{(y-x)^2} = 0$$

una vez mas multiplicamos por $(y-x)^2$ entonces

$$|f(y) - f(x)| = 0,$$

de donde

$$|f(y) - f(x)| = 0 \Longrightarrow f(y) = f(x)$$

Dado que esto es cierto para todos los valores x, y terminamos la demostración.

21. Demostrar o dar un contraejemplo de las siguientes proposiciones:

(a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

Demostración.- Esto es falso en general ya que si designamos a g y h la función identidad y f sea x^2 entonces

$$[f \circ (g+h)](x) = f\,(g+h)\,(x) = f\,[g(x) + h(x)] = f(x+x) = f(2x) = 4x^2.$$

luego por la parte derecha de la ecuación se tendra:

$$[(f \circ g) + (f \circ h)]\,(x) = (f \circ g)\,(x) + (f \circ h)\,(x) = f\,[g\,(x)] + f\,[h\,(x)] = f\,(x) + g\,(x) = x^2 + x$$

De donde $4x^2 \neq x^2 + x$

(b) $(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$.

Demostración.- Por definición de composición de función tenemos

$$\begin{array}{rcll} [(g+h)\circ f](x) & = & (g+h)[f(x)] & \\ & = & g[f(x)] + h[f(x)] & \text{por definición} \\ & = & (g\circ f)(x) + (h\circ f)(x) & \\ & = & [(g\circ f)+(h\circ f)](x) & \end{array}$$

Así $(g+h)\circ f = (g\circ f) + (h\circ f)$

(c) $\dfrac{1}{f\circ g} = \dfrac{1}{f}\circ g$.

Demostración.- Por definición se tiene,

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{1}{f\circ g}\right)(x) & = & \dfrac{1}{(f\circ g)(x)} \\ & = & \dfrac{1}{f[g(x)]} \\ & = & \left(\dfrac{1}{f}\right)[g(x)] \\ & = & \left(\dfrac{1}{f}\circ g\right)(x) \end{array}$$

Así, $1/(f\circ g) = (1/f)\circ g$

(d) $\dfrac{1}{f\circ g} = f\circ\left(\dfrac{1}{g}\right)$.

Demostración.- Esto es falso ya que si consideramos $f(x) = x+1$ y $g(x) = x^2$, entonces

$$\left(\frac{1}{f\circ g}\right)(x) = \frac{1}{(f\circ g)(x)} = \frac{1}{f[g(x)]} = \frac{1}{f(x^2)} = \frac{1}{x^2+1}$$

y por otro lado

$$\left[f\circ\left(\frac{1}{g}\right)\right](x) = f\left[\left(\frac{1}{g}\right)(x)\right] = f\left(\frac{1}{g(x)}\right) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}+1$$

de donde $\dfrac{1}{x^2+1} \neq \dfrac{1}{x^2}+1$

22. (a) Supóngase que $g = h\circ f$. Demostrar que si $f(x) = f(y)$, entonces $g(x) = g(y)$.

Demostración.- $g(x) = h(f(x)) = h(f(y)) = g(y)$ esto por definición e hipótesis.

(b) Recíprocamente, supóngase que f y g son dos funciones tales que $g(x) = g(y)$ siempre que $f(x) = f(y)$. Demostrar que $g = h\circ f$ para alguna función h. Indicación: Inténtese definir $h(z)$ cuando z es de la forma $z = f(x)$ (Éstos son los únicos z que importan) y aplicar la hipótesis para demostrar que la definicón es consistente.

Demostración.- Si $z = f(x)$, defínase $h(z) = g(x)$. Esta definición tiene sentido, ya que si $z = f(x^{'}$, entonces $g(x) = g(x^{'})$ según la parte (a). Tenemos entonces, para todo x del dominio de f, $g(x) = h(f(x))$.

23. Supóngase que $f \circ g = I$ donde $I(x) = x$. demostrar que

(a) Si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$

Demostración.- Supongamos que $x \neq y$ y $g(x) = g(y)$ esto implica que $x = I(x) = f(g(x)) = f(g(y)) = y$. Donde vemos una contradicción.

(b) Todo número b puede escribirse $b = f(a)$ para algún número a.

Demostración.- Por hipótesis $b = f(g(b))$ donde basta con poner $a = g(b)$.

24. **(a)** Supóngase que g es una función con la propiedad de ser $g(x) \neq g(y)$ si $x \neq y$. Demuéstrese que existe una función f tal que $f \circ g = I$

Demostración.- Es equivalente enunciar que si $x = y$, entonces $g(x) = g(y)$. en consecuencia del problema $22b$.

(b) Supóngase que f es una función tal que todo número b puede escribirse en la forma $b = f(a)$ para algún número a. Demostrar que existe una función g tal que $f \circ g = I$

Demostración.- Para cada x, elíjase un número a tal que $x = f(a)$. Llámese a este número $g(x)$. Entonces $f(g(x)) = x = I(x)$ para todo x.

25. Hallar una función f tal que $g \circ f = I$ para alguna función g, pero tal que no exista ninguna función h con $f \circ h = I$

Respuesta.- Basta hallar una función f tal que $f(x) \neq f(y)$ si $x \neq y$, pero tal que no todo número sea de la forma $f(x)$, pues entonces según el problema $24(a)$ existirá una función g con $g \circ f = I$, y según el problema $23(b)$ no existiría ninguna función g con $f \circ g = I$. Una función que reúne estas condiciones es:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

ningún número de los comprendidos entre 0 y 1 es de la forma $f(x)$.

26. Supóngase $f \circ g = I$ y $h \circ f = I$. Demostrar que $g = h$. Indicación: Aplíquese el hecho de que la composición es asociativa.

Demostración.- Sea $h \circ f \circ g$ entonces $h \circ (f \circ g) = h \circ I = h$, como también $h \circ f \circ g = (h \circ f) \circ g = I \circ g = g$.

27. **(a)** Supóngase $f(x) = x + 1$. ¿Existen funciones g tales que $f \circ g = g \circ f$?

Respuesta.- La condición $f \circ g = f \circ g$ significa que $f(x) + 1 = g(x + 1)$ para todo x. Existen muchas funciones g que satisfacen esta condición. La función g puede en efecto definirse arbitrariamente para $0 \leq x < 1$ y para otros x pueden determinarse sus valores mediante esta ecuación.

(b) Supóngase que f es una función constante. ¿Para qué funciones g se cumple $f \circ g = g \circ f$?

Respuesta.- Si $f(x) = c$ para todo x, entonces $f \circ g = g \circ f$ si y sólo si $c = f(g(x)) = g(f(x)) = g(c)$, es decir, $c = g(c)$

(c) Supóngase que $f \circ g = g \circ f$ para todas las funciones g. Demostrar que f es la función identidad $f(x) = x$

Respuesta.- Si $f \circ g = g \circ f$ para todo g, entonces se cumple esto en particular para todas las funciones constantes $g(x) = c$. Se sigue de la parte (b) que $f(c) = c$ para todo c.

28. **(a)** Sea F el conjunto de todas las funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Demuéstrese que con las definiciones de $+$ y $\cdot$ dadas en este capítulo, se cumplen todas las propiedades $P1 - P9$, excepto $P7$, siempre que 0 y 1 se interpreten como funciones constantes.

Demostración.- Se comprueba fácilmente.

(b) Demostrar que $P7$ no se cumple.

Demostración.- Sea f una función con $f(x) = 0$ para algún x, pero no para todo x. Entonces $f \neq 0$, pero claramente no existe ninguna función g con $f(x) \cdot g(x) = 1$ para todo x.

(c) Demostrar que no pueden cumplirse $P10 - P12$. En otros términos, demostrar que no existe ninguna colección P de funciones en F, tales que $P10 - P12$ se cumplen para P. (Es suficiente, y esto simplificará las cosas, considere sólo funciones que sean 0, excepto en dos puntos x_0 y x_1).

Demostración.- Sean f y g dos funciones cuyos valores son todos 0 excepto en x_0 y x_1, siendo $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0$, $gx_0 = 0$, $g(x_1) = 1$. Ninguna de ellas es 0, de modo que o bien f o bien $-f$ tendría que estar en P y lo mismo podría decirse de g o $-g$. Pero $(\pm f)(\pm g) = 0$, en contradicción con $P12$.

(d) Supóngase que se ha definido $f < g$ en el sentido de que $f(x) < g(x)$ para todo x. ¿Cuáles de las propiedades $P^{'} - P^{'}13$ (del problema $1 - 8$)? se cumplen ahora?

Respuesta.- $P^{'}11, P^{'}12$ y $P^{'}13$ se cumplen. $P^{'}10$ es falso; si bien se cumple a lo sumo una de las condiciones, o es necesariamente cierto que se tenga que cumplir por lo menos una de ellas. Por ejemplo, si $f(x) > 0$ para algún x y $y < 0$ para otro x, entonces ninguna de las condiciones $f = 0$, $f < 0$ ó $f > 0$ para todo x.

(e) si $f < g$, ¿Se cumple $h \circ f < h \circ g$? ¿Es $f \circ h < g \circ h$?

Respuesta.- No para el primer ejemplo; si $h(x) = -x$, entonces $f < g$ implica, en realidad , que $h \circ f > h \circ g$. Si para el segundo, ya que $f(h(x) < g(h(x)$ para todo x.

3.2. Pares ordenados

Definición 3.9 $(a, b) = \{a, a, b\}$

TEOREMA 3.3 *Si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$*

Demostración.- La hipótesis significa que

$$\{a, a, b\}\{c, a, d\},$$

Ahora bien, $\{a, a, b\}$ contiene justamente dos elementos a y a, b y a es el único elemento común a estos dos elementos de $\{a, a, b\}$. Por lo tanto, $a = c$. Así pues tenemos

$$\{a, a, b\} = \{a, a, d\},$$

y solamente queda por demostrar $b = d$. Conviene distinguir dos casos.
***Caso 1** $b = a$**.** En este caso, $a, b = a$, de modo que el conjunto $\{a, a, b\}$ tiene en realidad un solo elemento que es a. Lo mismo vale para $\{a, a, b\}$, de modo que $a, d = a$, lo cual implica $d = a = b$.*
***Caso 2.** $b \neq a$. En este caso, b pertenece a uno de los elementos de $\{a, a, b\}$, pero no al otro. Debe, por lo tanto cumplirse que b pertenece a uno de los elementos de $\{a, a, b\}$, pero no al otro. Esto solamente puede ocurrir si b pertenece a a, d, pero no a a; así pues, $b = a$ o $b = d$, pero $b \neq a$, con lo que $b = d$.*

4

Gráficas