

Calculo diferencial e integral tomo 1  
Nikolai Piskunov

Resolución de problemas por FODE

---

## Índice general

# Funciones

## 1.1. Las funciones y sus gráficas

**Definición 1.1** Una función  $f$  de un conjunto  $D$  a un conjunto  $Y$  es una regla que asigna a cada elemento  $x \in D$  un solo o único elemento  $f(x) \in Y$

**Definición 1.2** Cuando definimos una función  $y = f(x)$  mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales  $x$  para los cuales la fórmula proporciona valores reales para  $y$ , el llamado **dominio natural**.

Cuando el rango de una función es un subconjunto de números reales, se dice que la función tiene **valores reales** (o que es **real valuada**)

**Definición 1.3 (Valor absoluto)**  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

**Definición 1.4** Sea una función definida en un intervalo  $I$  y sean  $x_1$  y  $x_2$  cualesquiera dos puntos en  $I$

1. Si  $f(x_2) > f(x_1)$ , siempre que  $x_1 < x_2$  entonces se dice que  $f$  es **creciente** en  $I$ .
2. Si  $f(x_2) < f(x_1)$ , siempre que  $x_1 < x_2$  entonces se dice que  $f$  es **decreciente** en  $I$ .

**Definición 1.5** Una función  $y = f(x)$  es una

1. Función par de  $x$  si  $f(-x) = f(x)$ .

2. Función impar de  $x$  si  $f(-x) = -f(x)$ .

Para toda  $x$  en el dominio de la función.

(Los nombres par e impar provienen de las potencias de  $x$ ).

**Definición 1.6** Dos variables  $x$  e  $y$  son **proporcionales** (una con respecto a la otra) si una siempre es un múltiplo constante de la otra; esto es, si  $y = kx$  para alguna constante  $k$  distinta de 0.

Si la variable  $y$  es proporcional al recíproco  $1/x$ , entonces algunas veces se dice que  $y$  es **inversamente proporcional** a  $x$  (puesto que  $1/x$  es el inverso multiplicativo de  $x$ ).

## 1.1. Ejercicios

1.  $f(x) = 1 + x^2$

Respuesta.- Al evaluar  $1 + x^2$  vemos que  $x$  se cumple para todos los reales, por lo tanto  $f_D = \{x; \forall x \in \mathbb{R}\}$ . Luego el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/y \geq 1\}$

2.  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- El dominio viene dado por  $f_D = \{x/x \geq 0\}$ . Y el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/y \leq 1\}$ .

3.  $F(x) = \sqrt{5x + 10}$

Respuesta.- Sea  $5x + 10 \geq 0$  ya que una raíz par no puede ser no negativo, entonces  $x \geq -2$ , por lo tanto el dominio viene dado por  $f_D = \{x/x \geq -2\}$ . Luego el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$ .

4.  $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio, evaluaremos  $x^2 - 3x \geq 0$ , de donde  $x(x - 3) \geq 0$ , por lo tanto el dominio es  $f_D = \{x/ \leq x \leq 0 \cup x \geq 3\}$ . Luego el rango viene definido por  $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$ .

5.  $f(t) = \frac{4}{3-t}$

Respuesta.- Sabemos que no se puede dividir un número por 0. Por lo tanto para hallar el dominio de la función debemos evaluar  $3 - t = 0$ , de donde  $t = 3$ , así  $f_D = \{t/t \neq 3\}$ . Luego el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/y \neq 0\}$ .

6.  $G(t) = \frac{2}{t^2 - 16}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio evaluamos  $t^2 - 16 = 0$ , de donde  $(t - 4)(t + 4) = 0$ , por lo tanto el dominio de la función viene dado por  $f_D = \{t/t \neq 4 \wedge t \neq -4\}$ . Luego el rango viene dado por  $f_R = \{y = f(x)/0 < y \leq -\frac{1}{8}\}$  ya que al despejar  $x$  nos queda  $x = \sqrt{\frac{2}{y} + 16}$  de donde se debe evaluar por un lado  $\frac{2}{y}$  y por otro  $\frac{2}{y} - 16 \geq 0$ .

En los ejercicios 7 y 8 ¿Cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de  $x$ ? ¿Cuáles no representan a funciones de  $x$ ? Dé razones que apoyen sus respuestas.

7. El inciso  $a$ . no es una función ya que no cumple con la prueba de la recta vertical ya una función sólo puede tener un valor  $f(x)$  para cada  $x$  en su dominio. Y el inciso  $b$ . no representa la gráfica de una función.

8. Los incisos  $a$ . y  $b$ . no representan a funciones de  $x$ . El único que no representa una gráfica de una función es el inciso  $b$ .

Determinación de fórmulas para funciones.

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado  $x$  del triángulo.

Respuesta.- El área se representa por  $f(x) = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$  y el perímetro por  $f(x) = 3x$

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud  $d$  de la diagonal del cuadrado. Exprese el área como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La longitud del lado de un cuadrado como función de longitud esta dado por  $d = \sqrt{2a^2}$ . El área es expresado por  $A = \frac{d^2}{2}$

11. Exprese la longitud del lado de un cubo como una función de la longitud de la diagonal  $d$  del cubo. Exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La expresión de la longitud del lado del cubo como función de la longitud de la diagonal  $d$  del cubo es

$$L(d) = (\sqrt{2}/2) \cdot d$$

Las expresiones del área de la superficie y el volumen del cubo como función de la longitud de la diagonal  $d$  del cubo son:

$$A(d) = 3 \cdot d\check{s} \quad y \quad V(d) = (\sqrt{2}/4) \cdot d\check{s}$$

12. Un punto  $P$  en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . Exprese las coordenadas de  $P$  como funciones de la pendiente de la recta que une a  $P$  con el origen.

Respuesta.- Sea el punto en el origen  $(0,0)$  y el punto  $P$  tenga las coordenadas  $(z, z')$ . Sabemos que una recta viene definido por  $f(x) = ax + b$  entonces formando un sistema de ecuaciones tenemos:

$$0 = 0x + b \quad y \quad z' = az + b$$

Luego  $z' = az$  de donde  $a = \frac{z'}{z}$ , y así nos queda la función

$$f(x) = \frac{z'}{z}x$$

- 13.** Considere el punto  $(x, y)$  que está en la gráfica de la recta  $2x + 4y = 5$ . Sea  $L$  la distancia del punto  $(x, y)$  al origen  $(0, 0)$ . Escriba  $L$  como función de  $x$ .

Respuesta.- Dado  $(x, y) \in 2x + 4y = 5; (0, 0)$  entonces

$$x = \frac{5 - 4y}{2} \quad \frac{5 - 2x}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } L &= \sqrt{(y - 0)^2 + (x - 0)^2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{5 - 4y}{2}\right)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{25 + 40y + 16y^2}{4}} = \sqrt{\frac{4y^2}{4} + \frac{25 + 40y + 16y^2}{4}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{20y^2 + 40y + 25} \end{aligned}$$

- 14.** Considere el punto  $(x, y)$  que está en la gráfica de  $y = \sqrt{x - 3}$ . Sea  $L$  la distancia entre los puntos  $(x, y)$  y  $(4, 0)$ . Escriba  $L$  como función de  $y$ .

Respuesta.-  $y = \sqrt{x - 3}, (x, y) \in y = \sqrt{x - 3}$  entonces calculamos la distancia entre  $y = \sqrt{x - 3}$  y  $(4, 0)$ .

$$y^2 = x - 3 \implies x = y^2 + 3 \quad y \quad y = \sqrt{x - 3}$$

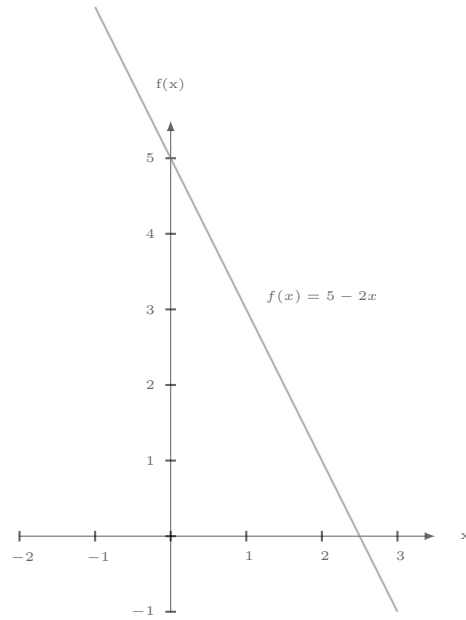
$$\text{Así } L = \sqrt{(y - 0)^2 + (x - y)^2} = \sqrt{y^2 + (y^2 + 3)^2} = \sqrt{y^2 + y^4 + 6y^2 + 9} = \sqrt{y^4 + 7y^2 + 9}$$

Las funciones y sus gráficas.

En los ejercicios 15 al 20, determine el dominio y grafique las funciones

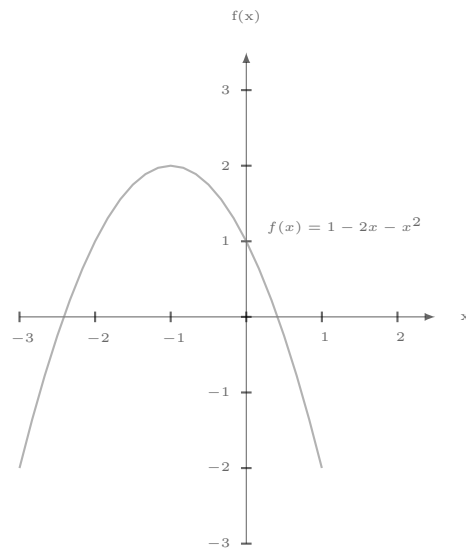
- 15.**  $f(x) = 5 - 2x$

Respuesta.- El dominio esta dado para todos los reales  $x$ .



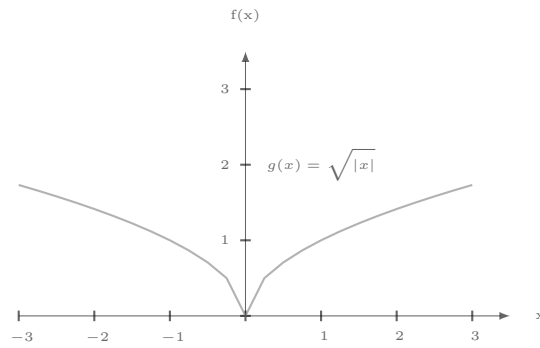
**16.**  $f(x) = 1 - 2x - x^2$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo real  $x$  positivo.



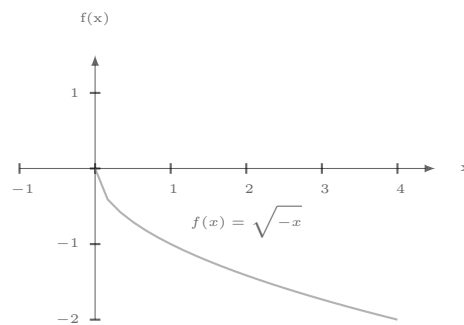
**17.**  $g(x) = \sqrt{|x|}$

Respuesta.- El dominio de la función es para  $x \in \mathbb{R}$



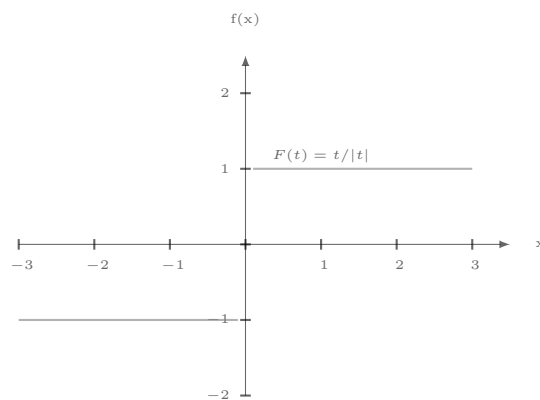
18.  $g(x) = \sqrt{-x}$

Respuesta.- El dominio de la función se cumple para los números reales negativos.



19.  $F(t) = t/|t|$

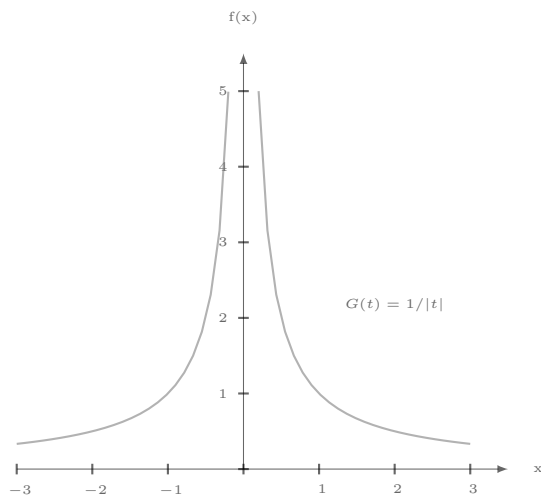
Respuesta.- El dominio viene dado para todo número real menos el 0.



20.  $G(t) = 1/|t|$

Respuesta.- El dominio se cumple para todo número real menos el 0.





- 21.** Determine el dominio de  $y = \frac{x+3}{4-\sqrt{x^2-9}}$

Respuesta.- Si  $y = f(x)$  entonces el dominio esta dado por  $D_f = \{x/x \geq 3 \wedge x \neq 4\}$

- 22.** Determine el rango de  $y = 2 + \frac{x^2}{x^2+4}$ .

Respuesta.- Si  $y = f(x)$  entonces el rango viene dado para todo  $y = f(x)$  tal que  $y \geq 2$

- 23.** Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de  $x$ .

**a.**  $|y| = x$

Respuesta.- No es una función de  $x$  ya que  $\sqrt{y^2} = x \implies y^2 = x^2 \implies \pm y = \pm x$

**b.**  $y^2 = x^2$

Respuesta.- Por el anterior problema 23a.

- 24.** Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de  $x$

**a.**  $|x| + |y| = 1$

Respuesta.- Ya que  $|y| = 1 - |x| \implies \sqrt{y^2} = 1 - |x| \implies y^2 = (1 - |x|)^2 \implies \pm y = |1 - |x||$

**b.**  $|x + y| = 1$

Respuesta.- Ya que  $\sqrt{(x + y)^2} = 1 \implies (x + y)^2 = 1 \implies x^2 + 2xy + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - 2xy - x^2 \implies \pm y = \sqrt{1 - 2xy - x^2}$