

Variables aleatorias y distribución de probabilidad

1.1. El concepto de variables aleatorias

Definición 1.1 Sea S un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea X una función de valor real definida sobre S , de manera que transforme los resultados de S en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que X es un variable aleatoria.

Definición 1.2 Se dice que una variable aleatoria X es discreta si el número de valores que puede tomar es contable (ya sea finito o infinito), y si éstos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con los enteros positivos.

Definición 1.3 Se dice que una variable aleatoria X es continua si sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta de los reales.

1.2. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas

Definición 1.4 Sea X una variable aleatoria discreta. Se llamará a $p(x) = P(X = x)$ función de probabilidad de la variable aleatoria X , si satisface las siguientes propiedades:

1. $p(x) \geq 0$ para todos los valores x de X ;
2. $\sum_x p(x) = 1$.

Definición 1.5 La función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X es la probabilidad de que X sea menor o igual a un valor específico de x y está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

En general, la función de distribución acumulativa $F(x)$ de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores de X , de tal manera que:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ para cualquier x ;

2. $F(x_i) \geq F(x_j)$ si $x_i \geq x_j$;
3. $P(X > x) = 1 - F(x)$.
4. $P(X = x) = F(x) - F(x - 1)$;
5. $P(x_i \geq X \geq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$

1.3. Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas

Definición 1.6 1. $f(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$,

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ y

3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Para la función de distribución acumulativa $F(x)$ se tiene:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Dado que para cualquier variable aleatoria continua X ,

$$P(X = x) = \lim_{x \rightarrow x} f(t) dt = 0, \quad \implies \quad P(X \leq x) = P(X < x) = F(x)$$

La distribución acumulativa $F(x)$ es una función lisa no decreciente de los valores de la v.a. con las siguientes propiedades:

1. $F(-\infty) = 0$;
2. $F(\infty) = 1$;
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
4. $dF(x)/dx = f(x)$.

1.4. Valor esperado de una variable aleatoria

Definición 1.7 El valor esperado de una variable aleatoria X es el promedio o valor medio de X y está dado por:

$$E(X) = \sum_x xp(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

En donde $p(x)$ y $f(x)$ son las funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad, respectivamente.

En general, el valor esperado de una función $g(x)$ de la variables aleatoria X , está dado por:

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)p(x) \quad \text{Si } x \text{ es discreta, o}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)xf(x) dx \quad \text{Si } x \text{ es continua.}$$

1.4.1. Propiedades

1. El valor esperado de una constante c es el valor de la constante.

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c$$

2. El valor esperado de la cantidad $aX + b$, en donde a y b son constantes, es el producto de a por el valor esperado de x más b .

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = aE(X) + b$$

3. El valor esperado de la suma de dos funciones $g(X)$ y $h(X)$ de X es la suma de los valores esperados de $g(X)$ y $h(X)$.

$$E[g(X) + h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) + h(x)] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx = E[g(X)] + E[h(X)]$$

1.5. Momentos de una variable aleatoria