

## Algunas aplicaciones de la integración

### 1.2. El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

**TEOREMA 1.1** *Supongamos que  $f$  y  $g$  son integrables y que satisfacen  $f \leq g$  en  $[a, b]$ . La región  $S$  entre sus gráficas es medible y su área  $a(S)$  viene dada por la integral*

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

*Demostración.- Demostración.- Supongamos primero que  $f$  y  $g$  son no negativas,. Sean  $F$  y  $G$  los siguientes conjuntos:*

$$F = (x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x), \quad G = (x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x).$$

*Esto es,  $G$  es el conjunto de ordenadas de  $g$ , y  $F$  el de  $f$ , menos la gráfica de  $f$ . La región  $S$  es la diferencia  $G - F$ . Según los teoremas 1.10 y 1.11,  $F$  y  $G$  son ambos medibles. Puesto que  $F \subseteq G$  la diferencia  $S = G - F$  es también medible, y se tiene*

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

*Consideremos ahora el caso general cuando  $f \leq g$  en  $[a, b]$ , pero no son necesariamente no negativas. Este caso lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada encima del eje  $x$ . Esto es, elegimos un número positivo  $c$  suficientemente grande que asegure que  $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ . Por lo ya demostrado la nueva región  $T$  entre las gráficas de  $f + c$  y  $g + c$  es medible, y su área viene dada por la integral*

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)] = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

*Pero siendo  $T$  congruente a  $S$ , ésta es también medible y tenemos*

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

*Esto completa la demostración.*

**Nota 1.1** En los intervalos  $[a, b]$  puede descomponerse en un número de subintervalos en cada uno de los cuales  $f \leq g$  o  $g \leq f$  la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

**LEMA 1.1 (Área de un disco circular)** Demostrar que  $A(r) = r^2 A(1)$ . Esto es, el área de un disco de radio  $r$  es igual al producto del área de un disco unidad (disco de radio 1) por  $r^2$ .

*Demostración.*- Ya que  $g(x) - f(x) = 2g(x)$ , el teorema 2.1 nos da

$$A(r) = \int_{-r}^r g(x) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

En particular, cuando  $r = 1$ , se tiene la fórmula

$$A(1) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

Cambiando la escala en el eje  $x$ , y utilizando el teorema 1.19 con  $k = 1/r$ , se obtiene

$$A(r) = 2 \int_{-r}^r g(x) dx = 2r \int_{-1}^1 g(rx) dx = 2r \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - (rx)^2} dx = 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = r^2 A(1)$$

Esto demuestra que  $A(r) = r^2 A(1)$ , como se afirmó.

**Definición 1.1** Se define el número  $\pi$  como el área de un disco unidad.

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

La formula que se acaba de demostrar establece que  $A(r) = \pi r^2$

Generalizando el anterior lema se tiene

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x) dx = k \int_{ka}^{kb} f(x/k) dx = k^2 \int_a^b f(x) dx$$

**TEOREMA 1.2** Para  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $n$  entero positivo, se tiene

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{b^{1+1/n} - a^{1+1/n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

*Demostración.*- Sea  $\int_0^a x^{\frac{1}{n}}$ . El rectángulo de base  $a$  y altura  $a^{\frac{1}{n}}$  consta de dos componentes: el conjunto de ordenadas de  $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$  a  $a$  y el conjunto de ordenadas  $g(y) = y^n$  a  $a^{\frac{1}{n}}$ . Por lo tanto,

$$a \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}} = \int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx + \int_0^{a^{\frac{1}{n}}} y^n dy \implies \int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{a^{\frac{1}{n}}} = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Análogamente se tiene

$$\int_0^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Luego notemos que

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}} dx = \int_0^b x^{\frac{1}{n}} dx - \int_0^a x^{\frac{1}{n}} dx$$

por lo tanto

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}} - a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

## 1.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, calcular el área de la región  $S$  entre las gráficas de  $f$  y  $g$  para el intervalo  $[a, b]$  que en cada caso se especifica. Hacer un dibujo de las dos gráficas y sombrear  $S$ .

**1.**  $f(x) = 4 - x^2$ ,  $g(x) = 0$ ,  $a = -2$ ,  $b = 2$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^2 [4 - x^2 - 0] dx = 4x \Big|_{-2}^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = 4(2 - (-2)) - \left( \frac{2^3 - (-2)^3}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

**2.**  $f(x) = 4 - x^2$ ,  $g(x) = 8 - 2x^2$ ,  $a = -2$ ,  $b = 2$ .

Respuesta.-

$$\int_{-2}^2 [8 - 2x^2 - (4 - x^2)] dx = \int_{-2}^2 4 - x^2 dx = \frac{32}{3} \text{ (por ejercicio 1)}$$

**3.**  $f(x) = x^3 + x^2$ ,  $g(x) = x^3 + 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ .

Respuesta.-

$$\int_{-1}^1 x^3 + 1 - (x^3 + x^2) dx = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = x \Big|_{-1}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 2 - \frac{1 - (-1)}{3} = \frac{4}{3}$$

**4.**  $f(x) = x - x^2$ ,  $g(x) = -x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$

Respuesta.-

$$\int_0^2 x - x^2 - (-x) dx = \int_0^2 2x - x^2 dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 2 \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{3}$$

**5.**  $f(x) = x^{1/3}$ ,  $g(x) = x^{1/2}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$

Respuesta.-

$$\int_0^1 x^{1/3} - x^{1/2} dx = \left. \frac{x^{1+1/3}}{1+1/3} \right|_0^1 - \left. \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} \right|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

**6.**  $f(x) = x^{1/3}$ ,  $g(x) = x^{1/2}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ .

Respuesta.-

$$\int_1^2 x^{1/2} - x^{1/3} dx = \left. \frac{x^{1/2+1}}{1+1/2} \right|_1^2 - \left. \frac{x^{1/3+1}}{1+1/3} \right|_1^2 = \frac{2^{1/2+1} - 1}{1+1/2} - \frac{2^{1/3+1}}{1+1/3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12}$$

**7.**  $f(x) = x^{1/3}$ ,  $g(x) = x^{1/2}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$

Respuesta.- Sea

$$\int_0^1 |x^{1/3} - x^{1/2}| dx + \int_1^2 |x^{1/3} - x^{1/2}| dx$$

por los problemas 5 y 6 se tiene

$$\frac{1}{12} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{6}$$

**8.**  $f(x) = x^{1/2}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{1/2} - x^2 dx + \int_1^2 x^2 - x^{1/2} dx &= \left( \left. \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} \right|_0^1 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \right) + \left( \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 - \left. \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} \right|_1^2 \right) \\ &= \left( \frac{1}{1+1/2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{2^3 - 1}{3} - \frac{2^{1+1/2} - 1}{1+1/2} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2} - 2}{3} \\ &= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

**9.**  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x + 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = (1 + \sqrt{5})/2$

Respuesta.

$$\int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - (x+1) dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} (x+1) - x^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - x - 1 \, dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} x + 1 - x^2 \, dx \\
&= \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} + \left( \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{6} \\
&= \frac{5\sqrt{5} - 3}{4}
\end{aligned}$$

**10.**  $f(x) = x(x^2 - 1)$ ,  $g(x) = x$ ,  $a = -1$ ,  $b = \sqrt{2}$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^0 x(x^2 - 1) - x \, dx + \int_0^{\sqrt{2}} x - [x(x^2 - 1)] \, dx = \int_{-1}^0 x^3 - 2x \, dx + \int_0^{\sqrt{2}} -x^3 + 2x \, dx = \\
&= \left( \frac{x^4}{4} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left( -\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} + 1 + (-1 + 2) = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

**11.**  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = x^2 - 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$

Respuesta.- Definimos  $f$  de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x) - g(x) \, dx &= \int_{-1}^0 -x - x^2 + 1 \, dx + \int_0^1 x - x^2 + 1 \, dx \\
&= \left( -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 \\
&= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

**12.**  $f(x) = |x + 1|$ ,  $g(x) = x^2 - 2x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$

Respuesta.- Definamos  $f$  de la siguiente manera:

$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} -(x + 1) & \text{si } x \in [0, 1) \\ x + 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x) - g(x) dx &= \int_0^1 -(x-1) - x^2 + 2x dx + \int_1^2 x - 1 - x^2 + 2x dx \\
&= \int_0^1 -x^2 + x + 1 dx + \int_1^2 -x^2 + 3x - 1 dx \\
&= \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 + \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 \\
&= \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) + \left( -\frac{8}{3} + 6 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

**13.**  $f(x) = 2|x|$ ,  $g(x) = 1 - 3x^3$ ,  $a = -\sqrt{3}/3$ ,  $b = \frac{1}{3}$

Respuesta.- Definimos  $f$  de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-\sqrt{3}/3, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, 1/3] \end{cases}$$

de donde se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x) - f(x) dx &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x) dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x) dx \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} 1 - 3x^3 dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^0 -2x dx - \int_0^{\frac{1}{3}} 2x dx \\
&= \left( x - \frac{3}{4}x^4 \right) \Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} + x^2 \Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^0 - x^2 \Big|_0^{\frac{1}{3}} \\
&= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{108} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{12} \right) + \left( -\frac{1}{3} \right) - \frac{1}{9} \\
&= \frac{9\sqrt{3} - 1}{27}
\end{aligned}$$

**14.**  $f(x) = |x| + |x - 1|$ ,  $g(x) = 0$ ,  $a = -1$ ,  $b = 2$

Respuesta.- En este problema  $f(x) \geq g(x)$  en el intervalo  $[-1, 2]$ , por lo tanto

$$\int_{-1}^2 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^2 |x| + |x - 1| dx = \int_{-1}^2 |x| dx + \int_{-1}^2 |x - 1| dx$$

Definimos cada función por separado,

$$\begin{aligned}
|x| &= \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases} \\
|x - 1| &= \begin{cases} -(x - 1) & \text{si } x \in [-1, 1) \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^2 |x| dx + \int_{-1}^2 |x-1| dx &= \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^2 x dx + \int_{-1}^1 -(x-1) dx + \int_1^2 x-1 dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 + \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^1 + (x)\Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 + (-x)\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

- 15.** Las gráficas de  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = cx^3$ , siendo  $c > 0$ , se cortan en los puntos  $(0, 0)$  y  $(1/c, 1/c^2)$ . Determinar  $c$  de modo que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo  $[0, 1/c]$  tengan área  $\frac{2}{3}$ .

Respuesta.- Tenemos que  $f \geq g$  en el intervalo  $[0, 1/c]$  de donde,

$$\int_0^{1/c} x^2 - cx^3 dx = \int_0^{1/c} x^2 dx - c \int_0^{1/c} x^3 dx = \frac{1}{12c^3}$$

luego  $\frac{1}{12c^3} = \frac{2}{3}$  por lo tanto  $c = \frac{1}{2}$ .

- 16.** Sea  $f(x) = x - x^2$ ,  $g(x) = ax$ . Determinar  $a$  para que la región situada por encima de la gráfica de  $g$  y por debajo de  $f$  tenga área  $\frac{9}{2}$ .

Respuesta.- Tomaremos los casos cuando  $a = 0$ ,  $a > 0$  y  $a < 0$ .

Veamos primero que si  $g(x) \leq f(x)$  entonces

$$f(x) - g(x) \geq 0 \implies x - x^2 - ax \geq 0 \implies (1-a)x \geq x^2$$

de donde si  $x = 0$  se tiene una igualdad. Luego si  $x \neq 0$  entonces  $x \leq (1-a)$ . Ahora sea  $a < 0$  por suposición se tendrá  $1-a > 0$ , que nos muestra que el intervalo estará dado por  $[0, 1-a]$ . Análogamente se tiene el intervalo  $[1-a, 0]$  para  $a > 0$ .

- C 1.** Si  $a = 0$ , esto no es posible ya que si  $a = 0$  entonces  $g(x) = ax = 0$  y entonces el área arriba del gráfico de  $g$  y debajo del gráfico de  $f$  es igual a

$$\int_0^1 x - x^2 dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6} \neq \frac{9}{2}$$

- C 2.** Si  $a < 0$ ,  $f(x) \geq g(x)$  para  $[0, 1-a]$ , por lo que tenemos la zona,  $a(S)$  de la región entre las dos gráficas dadas por

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-a} x - x^2 - ax dx &= (1-a) \int_0^{1-a} x dx - \int_0^{1-a} x^2 dx \\
&= (1-a) \left(\frac{(1-a)^2}{2}\right) - \frac{(1-a)^3}{3} \\
&= -\frac{(1-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

así nos queda que

$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \implies (1-a)^3 = -27 \implies a = a$$

**C 3.** Sea  $a > 0$  y  $f(x) \geq g(x)$  entonces  $[1-a, 0]$  lo que

$$\begin{aligned} \int_{1-a}^0 x - x^2 - ax \, dx &= (1-a) \int_{1-a}^0 x \, dx - \int_{1-a}^0 x^2 \, dx \\ &= (1-a) \left( -\frac{(1-a)^2}{2} - \frac{(1-a)^3}{2} \right) \\ &= -\frac{(1-a)^3}{6} \end{aligned}$$

Así igualando por  $\frac{9}{2}$  tenemos

$$-\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{9}{2} \implies (1-a)^3 = -27 \implies a = 4$$

Por lo tanto los valores posibles para  $a$  son  $-2$  y  $4$ .

**17.** Hemos definido  $\pi$  como el área de un disco circular unidad. En el ejemplo 3 de la Sección 2.3, se ha demostrado que  $\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ . Hacer uso de las propiedades de la integral para calcular la siguiente en función de  $\pi$ .

(a)  $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \, dx.$

Respuesta.- Por el teorema 19 de dilatación,  $\frac{1}{3} \int_{-3\frac{1}{3}}^{3\frac{1}{3}} \sqrt{9 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} \, dx$ , de donde nos queda  $9 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ , por lo tanto y en función de  $\pi$  se tiene  $\frac{9}{2}\pi$ .

(b)  $\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} \, dx.$

Respuesta.- Similar al anterior ejercicio se tiene

$$\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} \, dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

(c)  $\int_{-2}^2 (x-3)\sqrt{4-x^2} \, dx.$

Respuesta.- Comencemos usando la linealidad respecto al integrando de donde tenemos  $\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} \, dx -$

$3 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$ . Luego por el problema 25 de la sección 1.26,  $\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} \, dx = 0$ , de donde

$$-6 \int_{-1}^1 \sqrt{4-4x^2} \, dx = -12 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = -6\pi$$



- 18.** Calcular las áreas de los dodecágonos regulares inscrito y circunscrito en un disco circular unidad y deducir del resultado las desigualdades  $3 < \pi < 12(2 - \sqrt{3})$ .

Respuesta.- Como estos son dodecágonos, el ángulo en el origen del círculo de cada sector triangular es  $2\pi/12 = \pi/6$ , y el ángulo de los triángulos rectángulos formado al dividir cada uno de estos sectores por la mitad es entonces  $\pi/12$ . Luego usamos el hecho de que,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Ahora, para el dodecágono circunscrito tenemos el área del triángulo rectángulo  $T$  con base 1 dado por,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 - \sqrt{3}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro, tenemos el área del dodecaedro circunscrito  $D_c$  dada por

$$a(D_c) = 24 \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) = 12(2 - \sqrt{3})$$

Por otro lado para el dodecágono inscrito, consideramos el triángulo rectángulo  $T$  con hipotenusa 1 en el diagrama. La longitud de uno de los catetos viene dada por  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  y la otra por  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ . Entonces el área del triángulo es,

$$a(T) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Dado que hay 24 triángulos de este tipo en el dodecaedro inscrito,  $D_i$  tenemos,

$$a(D_i) = 24 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

Por lo tanto, en vista de que el área del círculo unitario es, por definición  $\pi$  y se encuentra entre estos dos dodecaedros, tenemos,

$$3 < \pi < 12(2 - \sqrt{3})$$

- 19.** Sea  $C$  la circunferencia unidad, cuya ecuación cartesiana es  $x^2 + y^2 = 1$ . Sea  $E$  el conjunto de puntos obtenido multiplicando la coordenada  $x$  de cada punto  $(x, y)$  de  $C$  por un factor constante  $a > 0$  y la coordenada  $y$  por un factor constante  $b > 0$ . El conjunto  $E$  se denomina elipse. (Cuando  $a = b$ , la elipse es otra circunferencia.).

- a) Demostrar que cada punto  $(x, y)$  de  $E$  satisface la ecuación cartesiana  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ .

Demostración.- Sea  $E = \{(ax, by)/(x, y) \in C, a > 0, b > 0\}$ . Si  $(x, y)$  es un punto en  $E$  entonces  $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$  es un punto en  $C$ , ya que todos los puntos de  $E$  se obtienen tomando un punto de  $C$  y multiplicando la coordenada  $x$  por  $a$  y la coordenada  $y$  por  $b$ . Por definición de  $C$ , se tiene

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

- b) Utilizar las propiedades de la integral para demostrar que la región limitada por esa elipse es medible y que su área es  $\pi ab$ .

Demostración.- De la parte (a) sabemos que  $E$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  tales que  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ . Esto implica,

$$g(x) = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad o \quad f(x) = -b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Por lo tanto, el área de  $E$  es el área cerrada de  $-a, a$ .

Para demostrar que esta región es medible y tiene área  $\pi ab$ , comenzamos por mencionar

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

y por lo tanto

$$\pi b = 2 \int_{-1}^1 b\sqrt{1 - x^2} \, dx$$

$$\pi ab = 2a \int_{-1}^1 b\sqrt{1 - x^2} \, dx$$

$$\pi ab = 2 \int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \, dx$$

$$\pi ab = \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x}{a}} - \left(-b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) \, dx$$

Por lo tanto, sabemos que la integral de  $-a, a$  de  $g(x) - f(x)$  existe y tiene valor  $\pi ab$ , concluyendo que  $E$  es medible y  $a(E) = \pi ab$ .

- 20.** El ejercicio 19 es una generalización del ejemplo 3 de la sección 2.3. Establecer y demostrar una generalización correspondiente al ejemplo 4 de la sección 2.3.

Demostración.- Para generalizar esto, procedemos de la siguiente manera. Sea  $f$  una función integrable no negativa en  $[a, b]$ , y  $S$  sea el conjunto de ordenadas de  $f$ . Si aplicamos una transformación bajo la cual multiplicamos la coordenada  $x$  de cada punto  $(x, y)$  en la gráfica de  $f$  por una constante  $k > 0$  y cada coordenada  $y$  por una constante  $j > 0$ , entonces obtenemos una nueva función  $g$  donde un punto  $(x, y)$  está en  $g$  si y sólo si  $\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{j}\right)$  está en  $f$ . Luego,

$$\frac{y}{j} = f\left(\frac{x}{k}\right) \implies y = j \cdot f\left(\frac{x}{k}\right) \implies g(x) = j \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$$

Sea  $jkS$  y denotamos el conjunto ordenado de  $g$ .

$$a(S) = \int_a^b f(x) \, dx$$

entonces

$$\begin{aligned}
a(jsS) &= \int_{ka}^{kb} g(x) dx \\
&= j \cdot \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx \\
&= jk \cdot \int_a^b f(x) dx \\
&= \int_{ka}^{kb} jk \cdot a(S) dx
\end{aligned}$$

**21.** Con un razonamiento parecido al del ejemplo 5 de la sección 2.3 demostrar el teorema 2.2.

*Demostración.-* Esta demostración ya fue dada junto a la definición del teorema 2.2.

## 1.5. Las funciones trigonométricas

### Propiedad .1

1. *Dominio de definición.* Las funciones seno y coseno están definidas en toda la recta real.
2. *Valores especiales.* Tenemos  $\cos 0 = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$ ,  $\cos \pi = -1$ .
3. *Coseno de una diferencia.* Para  $x$  e  $y$  cualesquiera, tenemos

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x.$$

4. *Desigualdades fundamentales.* Para  $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ , tenemos

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

**TEOREMA 1.3** Si dos funciones  $\sin$  y  $\cos$  satisfacen las propiedades 1 a 4, satisfacen también las siguientes:

(a) La identidad pitagórica,  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , para todo  $x$ .

*Demostración.-* La parte (a) se deduce inmediatamente si tomamos  $x = y$  en

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$$

y usamos la relación  $\cos 0 = 1$ .

(b) Valores especiales,  $\sin 0 = \cos \frac{1}{2}\pi = \sin \pi = 0$ .

*Demostración.-* Resulta de (a) tomando  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}\pi$ ,  $x = \pi$  y utilizando la relación  $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ .

(c) El coseno es función par y el seno es función impar. Esto es, para todo  $x$  tenemos

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \text{sen}(-x) = -\text{sen } x$$

*Demostración.-* Que el coseno es par resulta también de

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \text{sen } y \text{sen } x$$

haciendo  $y = 0$ . A continuación deducimos la fórmula

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \text{sen } x,$$

haciendo  $y = \frac{1}{2}\pi$  en  $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \text{sen } y \text{sen } x$ . Partiendo de esto, encontramos que el seno es impar, puesto que

$$\text{sen}(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \text{sen } \pi \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen } x$$

(d) Co-relaciones. Para todo  $x$ , se tiene

$$\text{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos x, \quad \text{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -\text{sen } x$$

*Demostración.-* Para demostrarlo utilizaremos  $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \text{sen } x$  reemplazando primero  $x$  por  $\frac{1}{2}\pi + x$  y luego  $x$  por  $-x$ .

(e) Periodicidad. Para todo  $x$  se tiene  $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ .

*Demostración.-* El uso reiterado de (d) nos da entonces las relaciones de periodicidad (e).

(f) Fórmulas de adición. Para  $x$  e  $y$  cualesquiera, se tiene

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{sen } y$$

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{sen } y$$

*Demostración.-* Para demostrar basta reemplazar  $x$  por  $-x$  en  $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \text{sen } y \text{sen } x$  y tener en cuenta la paridad o imparidad. Luego utilizando la parte (d) y la fórmula de adición para el coseno se obtiene

$$\text{sen}(x + y) = -\cos\left(x + y + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen } x \text{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \text{sen } y + \text{sen } x \cos y$$

(g) Fórmulas de diferencias. Para todo los valores  $a$  y  $b$ , se tiene

$$\text{sen } a - \text{sen } b = 2 \text{sen } \frac{a - b}{2} = \cos \frac{a + b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \text{sen } \frac{a + b}{2} \text{sen } \frac{a - b}{2}.$$

*Demostración.-* Reemplazaremos primero  $y$  por  $-y$  en la fórmula de adición para  $\sin(x+y)$  obteniendo

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Restando ésta de la fórmula para  $\sin(x+y)$  y haciendo lo mismo para función coseno, llegamos a

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \sin y \cos x,$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin y \sin x.$$

Haciendo  $x = (a+b)/2$ ,  $y = (a-b)/2$  encontramos que esas se convierten en las fórmulas de diferencia (g).

(h) *Monotonía.* En el intervalo  $[0, \frac{1}{2}\pi]$ , el seno es estrictamente creciente y el coseno estrictamente decreciente.

*Demostración.-* La propiedad 4 se usa para demostrar (h). Las desigualdades  $0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$  prueban que  $\cos x$  y  $\sin x$  son positivas si  $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ . Después de esto, si  $0 < b < a < \frac{1}{2}\pi$ , los números  $(a+b)/2$  y  $(a-b)/2$  están en el intervalo  $(0, \frac{1}{2}\pi)$ , y las fórmulas de diferencias (g) prueban que  $\sin a > \sin b$  y  $\cos a < \cos b$ . Esto completa la demostración.

## 1.6. Fórmulas de integración para el seno y el coseno

**TEOREMA 1.4** Si  $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$ , y  $n \geq 1$ , tenemos

$$\frac{a}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n} < \sin a < \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{ka}{n} \quad (2.6).$$

*Demostración.-* Las desigualdades anterior serán deducidas de la identidad

$$2 \sin \frac{1}{2}x \sum_{k=1}^n \cos kx = \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{1}{2}x, \quad (2.7)$$

válida para  $n \geq 1$  y todo real  $x$ . Para demostrar, utilizaremos las fórmulas de diferencias (g) del teorema 2.3 para poner

$$2 \sin \frac{1}{2}x \cos kx = \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left( k - \frac{1}{2} \right) x$$

Haciendo  $k = 1, 2, \dots, n$  y sumando esas igualdades, encontramos que en la suma del segundo miembro se reduce unos términos con otros obteniéndose (2.7).

Si  $\frac{1}{2}x$  no es un múltiplo entero de  $\pi$  podemos dividir ambos miembros de (2.7) por  $2 \sin \frac{1}{2}x$  resultando

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}x) - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

Reemplazando  $n$  por  $n-1$  y sumando 1 a ambos miembros también obtenemos. (Ya que  $\cos 0 = 1$ ).

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos kx = \frac{\sin(n - \frac{1}{2})x + \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

Esas dos fórmulas son válidas si  $x \neq 2m\pi$ , siendo  $m$  entero. Tomando  $x = a/n$ , donde  $0 < a < \frac{1}{2}\pi$  encontramos que el par de desigualdades (2.6) es equivalente al siguiente

$$\frac{a}{n} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{a}{n} - \sin\left(\frac{a}{2n}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2n}\right)} < \sin a < \frac{a}{n} \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{a}{n} + \sin\left(\frac{a}{2n}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2n}\right)}$$

Este par, a su vez es equivalente al par

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{a}{n} - \sin\left(\frac{a}{2n}\right) < \frac{\sin\left(\frac{a}{2n}\right)}{\left(\frac{a}{2n}\right)} \sin a < \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{a}{n} + \sin\left(\frac{a}{2n}\right) \quad (2.8)$$

Por consiguiente demostrar (2.6) equivale a demostrar (2.8). Demostraremos que se tiene

$$\sin(2n+1)\theta - \sin\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < \sin(2n-1)\theta + \sin\theta \quad (2.9)$$

para  $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$ . Cuando  $\theta = a/(2n)$  (2.9) se reduce a (2.8).

Para demostrar la desigualdad de la parte izquierda de (2.9), usamos la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\sin(2n+1)\theta = \sin 2n\theta \cos\theta + \cos 2n\theta \sin\theta < \sin 2n\theta \frac{\sin\theta}{\theta} + \sin\theta,$$

habiendo usado también las desigualdades

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}, \quad 0 < \cos 2n\theta \leq 1, \quad \sin\theta > 0, \quad (2.10)$$

siendo todas válidas ya que  $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$ . La desigualdad (2.10) equivale a la parte izquierda de (2.9).

Para demostrar la parte derecha de (2.9), utilizamos nuevamente la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\sin(2n-1)\theta = \sin 2n\theta \cos\theta - \cos 2n\theta \sin\theta$$

Sumando  $\sin\theta$  ambos miembros, obtenemos

$$\sin(2n-1)\theta + \sin\theta = \sin 2n\theta \left( \cos\theta + \sin\theta \frac{1 - \cos 2n\theta}{\sin 2n\theta} \right) \quad (2.11)$$

Pero ya que tenemos

$$\frac{1 - \cos 2n\theta}{\sin 2n\theta} = \frac{2 \sin^2 n\theta}{2 \sin n\theta \cos n\theta} = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}$$

el segundo miembro de (2.11) es igual a

$$\sin 2n\theta \left( \cos\theta + \sin\theta \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \right) = \sin 2n\theta \frac{\cos\theta \cos n\theta + \sin\theta \sin n\theta}{\cos n\theta} = \sin 2n\theta \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}$$

Por consiguiente, para completar la demostración de (2.9), necesitamos tan sólo demostrar que

$$\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\sin\theta}{\theta} \quad (2.12)$$

Pero tenemos

$$\cos n\theta = \cos(n-1)\theta \cos\theta - \sin(n-1)\theta \sin\theta < \cos(n-1)\theta \cos\theta < \cos(n-1)\theta \frac{\theta}{\sin\theta},$$

en donde otra vez hemos utilizado la desigualdad fundamental  $\cos\theta < \theta/\sin\theta$ . ya que  $\left(\cos x < \frac{x}{\sin x}\right)$ , esta última relación implica (2.12), con lo que se completa la demostración del teorema 2.4.

**TEOREMA 1.5** Si dos funciones  $\sin$  y  $\cos$  satisfacen las propiedades fundamentales de la 1 a la 4, para todo  $a$  real se tiene

$$\int_0^a \cos x \, dx = \sin a, \quad (2.13)$$

$$\int_0^a x \, dx = 1 - \cos a. \quad (2.14)$$

*Demostración.-* Primero se demuestra (2.13), y luego usamos (2.13) para deducir (2.14). Supongamos que  $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$ . Ya que el coseno es decreciente en  $[0, a]$  podemos aplicar el teorema 1.14 y las desigualdades del teorema 2.4 obteniendo (2.13). La fórmula es válida también para  $a = 0$ , ya que ambos miembros son cero. Pueden ahora utilizarse las propiedades de la integral para ampliar su validez todos los valores reales  $a$ . Por ejemplo, si  $-\frac{1}{2}\pi \leq a \leq 0$ , entonces  $0 \leq -a \leq \frac{1}{2}\pi$ , y la propiedad de reflexión nos da

$$\int_0^a \cos x \, dx = - \int_0^{-a} \cos(-x) \, dx = - \int_0^{-a} \cos x \, dx = -\sin(-a) = \sin a.$$

Así, pues, (2.13) es válida en el intervalo  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ . Supongamos ahora que  $\frac{1}{2}\pi \leq a \leq \frac{3}{2}\pi$ . Entonces  $-\frac{1}{2}\pi \leq a - \pi \leq \frac{1}{2}\pi$ , de modo que

$$\begin{aligned} \int_0^a \cos x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx + \int_{\pi/2}^a \cos x \, dx = \sin \frac{1}{2}\pi + \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos(x+\pi) \, dx = 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos x \, dx = \\ &= 1 - \sin(a-\pi) + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \sin a \end{aligned}$$

Con ellos resulta que (2.13) es válida para todo  $a$  en el intervalo  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ . Pero este intervalo tiene longitud  $2\pi$ , con lo que la fórmula (2.13) es válida para todo  $a$  puesto que ambos miembros son periódicos respecto a  $a$  con período  $2\pi$ .

Seguidamente usamos (2.13) para deducir (2.14). Ante todo demostramos que (2.14) es válida cuando  $a = \pi/2$ . Aplicando sucesivamente, la propiedad de traslación, la co-relación  $\sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ , y la propiedad de reflexión, encontramos

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \int_{-\pi/2}^0 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \, dx = \int_{-\pi/2}^0 \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos(-x) \, dx$$

Haciendo uso de la relación  $\cos(-x) = \cos x$  y la igualdad (2.13), se obtiene

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$$

Por consiguiente, para cualquier  $a$  real, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx + \int_{\pi/2}^a \sin x \, dx = 1 + \int_0^{a-\pi/2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \, dx = \\ &= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \cos x \, dx = 1 + \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos a \end{aligned}$$

Esto demuestra que la igualdad (2.13) implica (2.14).

**Nota 1.2** Usando (2.13) y (2.14) junto con la propiedad aditiva

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^b f(x) dx - \int_0^a f(x) dx$$

llegamos a las fórmulas de integración más generales

$$\int_a^b \cos x dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} x dx = (1 - \cos b) - (1 - \cos a) = -(\cos b - \cos a).$$

Si nuevamente utilizamos el símbolo especial  $f(x) \Big|_a^b$  para indicar la diferencia  $f(b) - f(a)$ , podemos escribir esas fórmulas de integración en la forma

$$\int_a^b \cos x dx = \operatorname{sen} x \Big|_a^b \quad y \quad \int_a^b \operatorname{sen} x dx = -\cos x \Big|_a^b$$

**Nota 1.3** Con los resultados del ejemplo 1 y la propiedad de dilatación

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x/c) dx,$$

obtenemos las fórmulas siguientes, válidas para  $c \neq 0$ ;

$$\int_a^b \cos cx dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} \cos x dx = \frac{1}{c} (\operatorname{sen} cb - \operatorname{sen} ca)$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} cx dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} \operatorname{sen} x dx = -\frac{1}{c} (\cos cb - \cos ca).$$

**Nota 1.4** La identidad  $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$  implica  $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  con lo que, a partir del ejemplo 2, obtenemos

$$\int_a^b \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^a (1 - \cos 2x) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2a$$

Puesto que  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ , encontramos también

$$\int_0^a \cos^2 x dx = \int_0^a (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx = a - \int_0^a \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2a$$

## 1.8. Ejercicios

En este conjunto de ejercicios, se pueden emplear las propiedades del seno y del coseno citadas en las Secciones de la 2.5 a la 2.7.

1. (a)