

Calculo diferencial e integral tomo 1

Nikolai Piskunov

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1. Funciones	3
1.1. Las funciones y sus gráficas	3
1.1. Ejercicios	4

Funciones

1.1. Las funciones y sus gráficas

Definición 1.1 Una función f de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento $x \in D$ un solo o único elemento $f(x) \in Y$

Definición 1.2 Cuando definimos una función $y = f(x)$ mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales x para los cuales la fórmula proporciona valores reales para y , el llamado **dominio natural**.

Cuando el rango de una función es un subconjunto de números reales, se dice que la función tiene **valores reales** (o que es **real valuada**)

Definición 1.3 (Valor absoluto) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Definición 1.4 Sea una función definida en un intervalo I y sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos en I

1. Si $f(x_2) > f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es **creciente** en I .
2. Si $f(x_2) < f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que f es **decreciente** en I .

Definición 1.5 Una función $y = f(x)$ es una

1. Función par de x si $f(-x) = f(x)$.

2. Función impar de x si $f(-x) = -f(x)$.

Para toda x en el dominio de la función.

(Los nombres par e impar provienen de las potencias de x).

Definición 1.6 Dos variables x e y son **proporcionales** (una con respecto a la otra) si una siempre es un múltiplo constante de la otra; esto es, si $y = kx$ para alguna constante k distinta de 0.

Si la variable y es proporcional al recíproco $1/x$, entonces algunas veces se dice que y es **inversamente proporcional** a x (puesto que $1/x$ es el inverso multiplicativo de x).

1.1. Ejercicios

1. $f(x) = 1 + x^2$

Respuesta.- Al evaluar $1 + x^2$ vemos que x se cumple para todos los reales, por lo tanto $f_D = \{x; \forall x \in \mathbb{R}\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 1\}$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Respuesta.- El dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq 0\}$. Y el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \leq 1\}$.

3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$

Respuesta.- Sea $5x + 10 \geq 0$ ya que una raíz par no puede ser no negativo, entonces $x \geq -2$, por lo tanto el dominio viene dado por $f_D = \{x/x \geq -2\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio, evaluaremos $x^2 - 3x \geq 0$, de donde $x(x - 3) \geq 0$, por lo tanto el dominio es $f_D = \{x/ \leq x \leq 0 \cup x \geq 3\}$. Luego el rango viene definido por $f_R = \{y = f(x)/y \geq 0\}$.

5. $f(t) = \frac{4}{3-t}$

Respuesta.- Sabemos que no se puede dividir un número por 0. Por lo tanto para hallar el dominio de la función debemos evaluar $3 - t = 0$, de donde $t = 3$, así $f_D = \{t/t \neq 3\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/y \neq 0\}$.

6. $G(t) = \frac{2}{t^2 - 16}$

Respuesta.- De igual forma al anterior ejercicio evaluamos $t^2 - 16 = 0$, de donde $(t - 4)(t + 4) = 0$, por lo tanto el dominio de la función viene dado por $f_D = \{t/t \neq 4 \wedge t \neq -4\}$. Luego el rango viene dado por $f_R = \{y = f(x)/0 < y \leq -\frac{1}{8}\}$ ya que al despejar x nos queda $x = \sqrt{\frac{2}{y} + 16}$ de donde se debe evaluar por un lado $\frac{2}{y}$ y por otro $\frac{2}{y} - 16 \geq 0$.

En los ejercicios 7 y 8 ¿Cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de x ? ¿Cuáles no representan a funciones de x ? Dé razones que apoyen sus respuestas.

7. El inciso a . no es una función ya que no cumple con la prueba de la recta vertical ya una función sólo puede tener un valor $f(x)$ para cada x en su dominio. Y el inciso b . no representa la gráfica de una función.
8. Los incisos a . y b . no representan a funciones de x . El único que no representa una gráfica de una función es el inciso b .

Determinación de fórmulas para funciones.

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado x del triángulo.

Respuesta.- El área se representa por $f(x) = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ y el perímetro por $f(x) = 3x$

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del cuadrado. Exprese el área como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La longitud del lado de un cuadrado como función de longitud esta dado por $d = \sqrt{2a^2}$. El área es expresado por $A = \frac{d^2}{2}$

11. Exprese la longitud del lado de un cubo como una función de la longitud de la diagonal d del cubo. Exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

Respuesta.- La expresión de la longitud del lado del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo es

$$L(d) = (\sqrt{2}/2) \cdot d$$

Las expresiones del área de la superficie y el volumen del cubo como función de la longitud de la diagonal d del cubo son:

$$A(d) = 3 \cdot d\sqrt{3} \quad y \quad V(d) = (\sqrt{2}/4) \cdot d^3$$

12. Un punto P en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente de la recta que une a P con el origen.

Respuesta.- Sea el punto en el origen $(0,0)$ y el punto P tenga las coordenadas (z, z') . Sabemos que una recta viene definido por $f(x) = ax + b$ entonces formando un sistema de ecuaciones tenemos:

$$0 = 0x + b \quad y \quad z' = az + b$$

Luego $z' = az$ de donde $a = \frac{z'}{z}$, y así nos queda la función

$$f(x) = \frac{z'}{z}x$$

- 13.** Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de la recta $2x + 4y = 5$. Sea L la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Escriba L como función de x .

Respuesta.- Dado $(x, y) \in 2x + 4y = 5; (0, 0)$ entonces

$$x = \frac{5 - 4y}{2} \quad \frac{5 - 2x}{4}$$

$$\text{Luego } L = \sqrt{(y - 0)^2 + (x - 0)^2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{5 - 4y}{2}\right)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{25 + 40y + 16y^2}{4}} = \sqrt{\frac{4y^2}{4} + \frac{25 + 40y + 16y^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{20y^2 + 40y + 25}$$

- 14.** Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de $y = \sqrt{x - 3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4, 0)$. Escriba L como función de y .

Respuesta.- $y = \sqrt{x - 3}, (x, y) \in y = \sqrt{x - 3}$ entonces calculamos la distancia entre $y = \sqrt{x - 3}$ y $(4, 0)$.

$$y^2 = x - 3 \implies x = y^2 + 3 \quad y \quad y = \sqrt{x - 3}$$

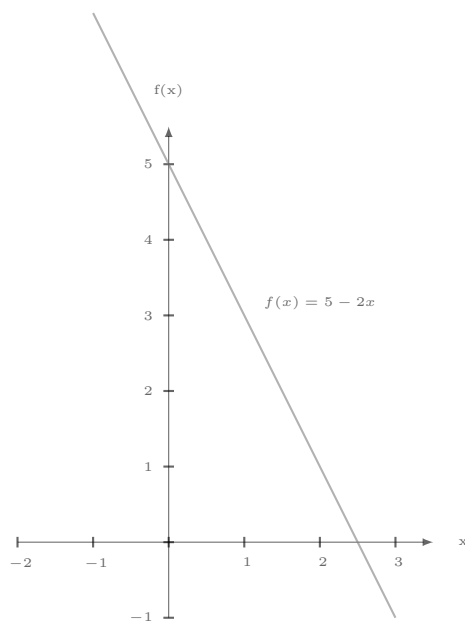
$$\text{Así } L = \sqrt{(y - 0)^2 + (x - y)^2} = \sqrt{y^2 + (y^2 + 3)^2} = \sqrt{y^2 + y^4 + 6y^2 + 9} = \sqrt{y^4 + 7y^2 + 9}$$

Las funciones y sus gráficas.

En los ejercicios 15 al 20, determine el dominio y grafique las funciones

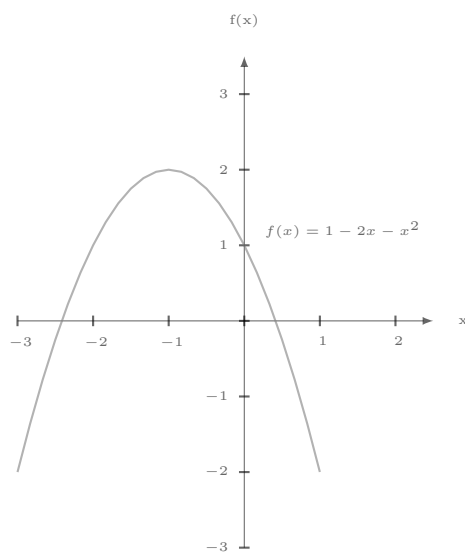
- 15.** $f(x) = 5 - 2x$

Respuesta.- El dominio esta dado para todos los reales x .



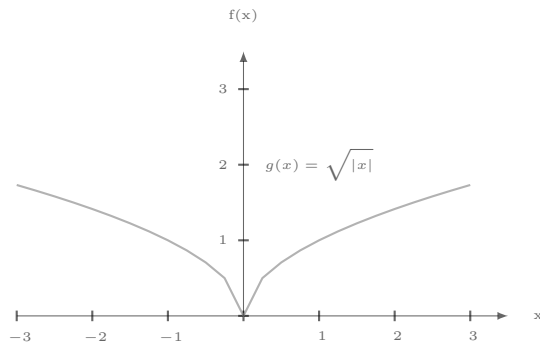
16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo real x positivo.



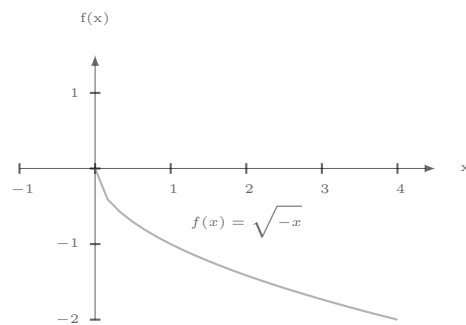
17. $g(x) = \sqrt{|x|}$

Respuesta.- El dominio de la función es para $x \in \mathbb{R}$



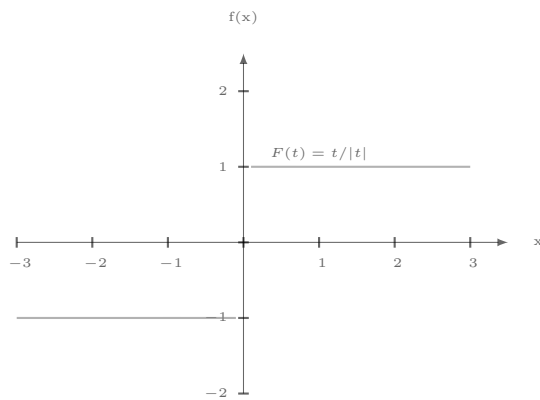
18. $g(x) = \sqrt{-x}$

Respuesta.- El dominio de la función se cumple para los números reales negativos.



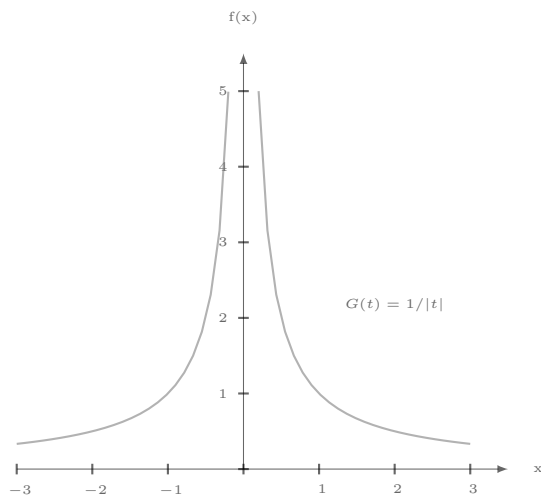
19. $F(t) = t/|t|$

Respuesta.- El dominio viene dado para todo número real menos el 0.



20. $G(t) = 1/|t|$

Respuesta.- El dominio se cumple para todo número real menos el 0.



- 21.** Determine el dominio de $y = \frac{x+3}{4-\sqrt{x^2-9}}$

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el dominio esta dado por $D_f = \{x/x \geq 3 \wedge x \neq 4\}$

- 22.** Determine el rango de $y = 2 + \frac{x^2}{x^2+4}$.

Respuesta.- Si $y = f(x)$ entonces el rango viene dado para todo $y = f(x)$ tal que $y \geq 2$

- 23.** Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x .

a. $|y| = x$

Respuesta.- No es una función de x ya que $\sqrt{y^2} = x \implies y^2 = x^2 \implies \pm y = \pm x$

b. $y^2 = x^2$

Respuesta.- Por el anterior problema 23a.

- 24.** Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x

a. $|x| + |y| = 1$

Respuesta.- Ya que $|y| = 1 - |x| \implies \sqrt{y^2} = 1 - |x| \implies y^2 = (1 - |x|)^2 \implies \pm y = |1 - |x||$

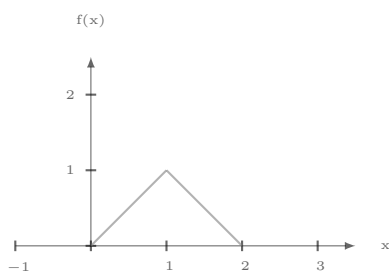
b. $|x + y| = 1$

Respuesta.- Ya que $\sqrt{(x + y)^2} = 1 \implies (x + y)^2 = 1 \implies x^2 + 2xy + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - 2xy - x^2 \implies \pm y = \sqrt{1 - 2xy - x^2}$

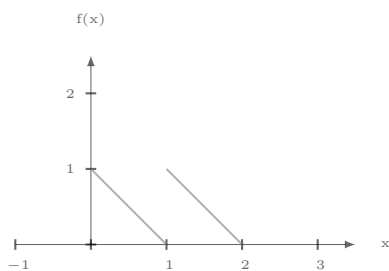
Funciones definidas por partes

En los ejercicios 25 a 28, grafique las funciones:

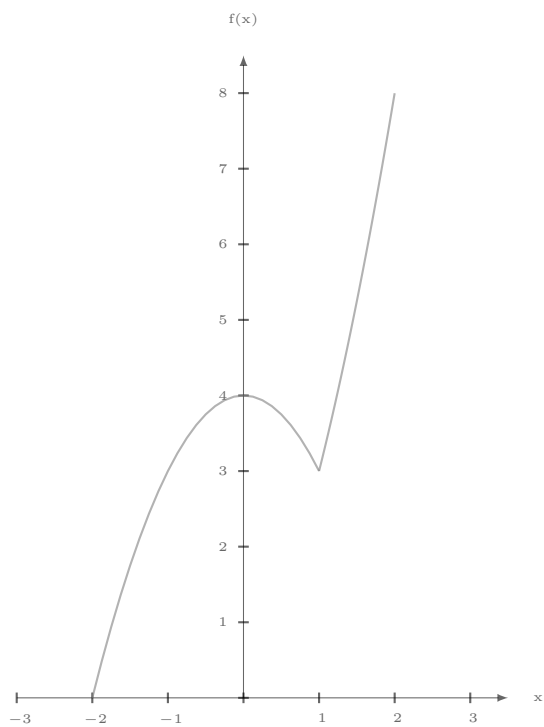
25. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



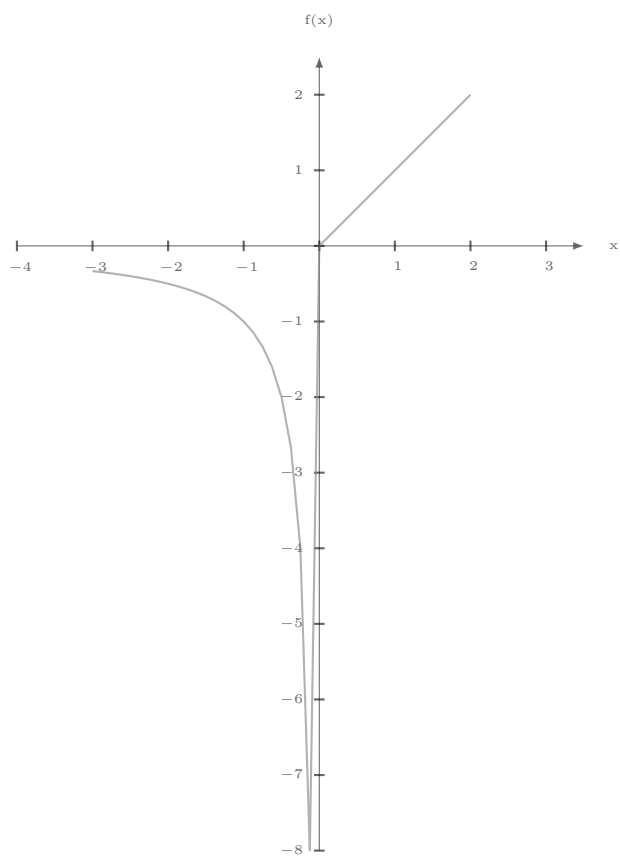
26. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



27. $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$



28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$



Determine una fórmula para cada función graficada en los ejercicios 29 a 32

- 29. a.** Sea $f(x) = ax + b$ entonces $0 = b$ y $1 = a + b$ luego $a = 1$ por lo tanto $f(x) = x$. Por otro lado $1 = a + b$ y $0 = 2a + 2 \implies a = -1$ de donde se tiene $f(x) = -x + 2$ así nos queda la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- b.** Está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ o } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ ó } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- 30. a.** Similar al ejercicio anterior se tiene que la formula

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1/2x + 5/7 & \text{si } 0 \leq 2 \leq 5 \end{cases}$$

- b.** Se tiene

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x + 3 & \text{si} \end{cases}$$

31.