1

Significado de la derivada

Definición 1.1. Sea f una función y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un punto máximo de f en A si

$$f(x) \geq f(y) \qquad \text{para todo } y \text{ de } A.$$

El número $f(x)$ se denomina el **valor máximo** de f en A (y también diremos que f alcanza su valor máximo en el punto x de A).

f tiene un **mínimo** en el punto x de A si $-f$ tiene un máximo en el punto x de A.

En general, nos interesará el caso en que A es un intervalo cerrado $[a, b]$; si f es continua, entonces el Teorema 7-3 garantiza que f alcanza realmente dicho valor máximo en $[a, b]$.

Ahora ya estamos en condiciones para enunciar un teorema que ni siquiera depende de la existencia de cotas superiores mínimas.

Teorema 1.1. Sea f cualquier función definida en (a, b). Si x es un punto máximo (o mínimo) de f en (a, b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x) = 0$. (Observemos que no hemos supuesto la diferenciabilidad, ni siquiera la continuidad, de f en otros puntos.)

Demostración.- Consideremos el caso en que f tiene un máximo en x. Si h es cualquier número tal que $x + h$ pertenece a (a, b), entonces

$$f(x) \geq f(x+h),$$

ya que f tiene un máximo en el punto x de (a, b). Esto significa que

$$f(x+h) - f(x) \leq 0.$$

De manera que, si $h > 0$ tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0,$$

y por tanto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Por otra parte, si $h < 0$, tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

o sea

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0.$$

Por hipótesis, f es diferenciable en x, de manera que ambos límites deben ser iguales (de hecho son iguales a $f'(x)$). Esto significa que

$$f'(x)\leq 0 \quad \text{y} \quad f'(x)\geq 0,$$

de lo cual se deduce que $f'(x)=0$.

Definición 1.2. Sea f una función, y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un **punto máximo [mínimo] local** de f en A si existe algún $\delta>0$ tal que x es un punto máximo [mínimo] de f en $A\cap(x-\delta,x+\delta.)$

Teorema 1.2. Si x es un máximo o mínimo local de f en (a,b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x)=0$.

Demostración.- Se trata de una aplicación del teorema 1 (capítulo 11, Spivak).

El recíproco del teorema 2 no es cierto; la condición $f'(0)$ no implica que x sea un punto máximo o mínimo local en f. Precisamente por esta razón, se ha adoptado una terminología especial para describir a aquellos números x que satisfacen la condición $f'(0)$.

Definición 1.3. Un **punto critico** de una función f es un número x tal que

$$f'(x)=0.$$

Al número $f(x)$ se le denomina **valor critico** de f.

Consideremos en primer lugar el problema de hallar el máximo o el mínimo de f en un intervalo cerrado $[a,b]$. (En este caso, si f es continua, sabemos que dicho valor máximo y mínimo debe existir.) Para localizarlos, deben considerarse tres clases de puntos:

(1) Los puntos críticos de f en $[a,b]$.

(2) Los puntos extremos a y b.

(3) Aquellos puntos x de $[a,b]$ tales que f no es diferenciable en x.

Si x no pertenece al segundo no al tercer grupo entonces forzosamente debe pertenecer al primero.

Obs: 1.1. En el capítulo 7 ya resolvimos el problema de este tipo cuando demostramos que si n es par, la función

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

tiene un valor mínimo en toda la recta real. Dicho valor mínimo se puede encontrar resolviendo la ecuación, si es posible, y comparando los valores de $f(x)$ en dichos x.

Teorema 1.3 (Teorema de Rolle)**.** Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y $f(a)=f(b)$, entonces existe un número x en (a,b) tal que $f'(x)=0$.

Demostración.- A partir de la continuidad en f en $[a,b]$ deducimos que f tiene valor máximo y mínimo en $[a,b]$. Supongamos primero que el valor máximo se presenta en un punto x de (a,b). Entonces $f'(x)=0$ según el teorema 1, y la demostración queda completa. Supongamos ahora que el valor mínimo de f se presenta en algún punto x de (a,b). Entonces, de nuevo $f'(x)=0$ según el teorema 1. Finalmente, supongamos que los valores máximo y mínimo se presentan ambos en los extremos del intervalo. Como $f(a)=f(b)$, dichos valores coinciden, de manera que f es una función constante, y en este caso se puede elegir cualquier valor x de (a,b).

Teorema 1.4 (Teorema del valor medio)**.** Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), existe un número x en (a,b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demostración.- Sea

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a).$$

Evidentemente, h es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y

$$h(a) = f(a), \qquad h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](b-a) = f(a).$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle a la función h y deducir que existe algún x en (a,b) tal que

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

de modo que

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Corolario 1.1. Si f está definida en un intervalo y $f'(x) = 0$ en todo x del intervalo, entonces f es constante en dicho intervalo.

Demostración.- Sean a y b dos puntos del intervalo con $a \neq b$. Entonces existe algún x de (a,b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Pero $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, por tanto

$$0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

y por consiguiente $f(a) = f(b)$. Así pues, el valor de f en dos puntos cualesquiera del intervalo es el mismo, lo cual significa que f es constante en el intervalo.

Corolario 1.2. Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún número c tal que $f = g + c$.

Demostración.- Para todo x del intervalo se verifica que $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, de manera que, según el corolario 1, existe un número c tal que $f - g = c$.

Definición 1.4. Una función es **creciente** en un intervalo si $f(a) < f(b)$ siendo a y b dos números del intervalo con $a < b$. La función f es **decreciente** en un intervalo si $f(a) > f(b)$ para todo a y b del intervalo con $a < b$. (A menudo se dice simplemente que f es creciente o decreciente, en cuyo caso se deduce que el intervalo es el dominio de f.)

Corolario 1.3. Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en dicho intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en dicho intervalo.

Demostración.- Consideremos el caso en que $f'(x) > 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún punto x en (a, b) que verifica

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), por tanto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Como $b - a > 0$ se deduce que $f(b) > f(a)$.

Consideremos ahora el caso en que $f'(x) < 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún punto x en (a, b) que verifica

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), por tanto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0.$$

De donde se deduce que $f(b) < f(a)$.

Podemos dar un esquema general para decidir si un punto crítico es un máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas:

(1) Si $f' > 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' < 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto máximo local.

(2) Si $f' < 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' > 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto mínimo local.

(3) Si f' tiene el mismo signo en algún intervalo a la izquierda de x que en algún intervalo a la derecha, entonces x no es ningún punto máximo ni mínimo local.

En varios problemas de este capítulo y de capítulos sucesivos se pide hacer una representación gráfica de funciones. En cada caso debe determinar

(1) los puntos críticos de f,

(2) el valor de f en los puntos críticos,

(3) el signo de f' en las regiones entre los puntos críticos (si esto no está claro ya),

(4) los números x tales que $f(x) = 0$ (si es posible),

(5) el comportamiento de $f(x)$ cuando x se hace grande o grande negativo (si es posible).

Existe un criterio popular para hallar los máximos y mínimos locales, que depende del comportamiento de la función sólo en los puntos críticos.

Teorema 1.5. Supongamos que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a; si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.

Demostración.- Por definición,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a + h) - f'(a)}{h}.$$

Como $f'(a) = 0$, esta igualdad puede escribirse como

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Supongamos ahora que $f''(a) > 0$. Entonces $\dfrac{f'(a+h)}{h}$ ha de ser positivo para valores suficientemente pequeños de h. Por tanto:

$f'(a+h)$ ha de ser positivo para valores de $h > 0$ suficientemente pequeños. Y $f'(a+h)$ ha de ser negativo para valores de $h < 0$ suficientemente pequeños.

Esto significa por el corolario 3 (Spivak, capitulo 11) que f es creciente en algún intervalo a la derecha de a y f es decreciente en algún intervalo a la izquierda de a. Por consiguiente, f tiene un mínimo local en a. La demostración es análoga en el caso de que $f''(a) < 0$.

Aunque el Teorema 5 es muy útil en el caso de funciones polinómicas, para muchas otras funciones la segunda derivada es tan complicada que es más fácil considerar el signo de la primera derivada. Además, si a es un punto crítico de f puede ocurrir que $f''(a) = 0$. En este caso, el Teorema 5 no proporciona información: es posible que a sea un punto máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas.

Teorema 1.6. Supongamos que $f''(a)$ existe. Si f tiene mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$; si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.

Demostración.- Supongamos que f tiene un mínimo local en a. Si $f''(a) < 0$, entonces f tendría también un máximo local en a, por el teorema 5. Es decir, f sería constante en algún intervalo que contiene a a, y por tanto $f''(a) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, debe verificarse que $f''(a) \geq 0$. El caso de un máximo loca se trata de manera análoga.

Teorema 1.7. Supongamos que f es continua en a y que $f'(x)$ existe para todo x de algún intervalo que contiene a a, excepto quizás en $x = a$. Supongamos, además, que $\lim_{x \to 0} f'(x)$ existe. Entonces $f'(a)$ también existe y

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

Demostración.- Por definición,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a)}{h}.$$

Para valores de $h > 0$ suficientemente pequeños, la función f es continua en $[a, a+h]$ y diferenciables en $(a, a+h)$ (lo mismo ocurre para valores de $h < 0$ suficientemente pequeños). Según el teorema del valor medio, existe un número α_h en $(a, a+h)$ tal que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\alpha_h).$$

Además α_h tiende a a cuando h tiende a 0, ya que α_h pertenece al intervalo $(a, a+h)$; como $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe, se deduce que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} f'(\alpha_h) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

En otras palabras, sean $L = \lim_{x \to a} f'(x)$, por definición de límite se tiene

Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f'(x) - L| < \epsilon$.

Ahora, si $0 < |x-a| < \delta$ podríamos utilizar el teorema del valor medio para encontrar un punto c entre a y x que satisfaga,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c).$$

Notemos que c satisface también a $0 < |c-a| < \delta$, tal que $|f'(c)-L| < \epsilon$. Como consecuencia

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L\right| < \epsilon.$$

Es decir,

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L\right| < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$f'(a) = L.$$

Incluso si f es una función diferenciable en todo punto, es posible que f' sea discontinua. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ahora veremos una generalización del teorema del valor medio.

Teorema 1.8 (Torema del valor medio de Cauchy)**.** Si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b), entonces existe un número x en (a,b) tal que

$$[f(b)-f(a)]g'(x) = [g(b)-g(a)]f'(x).$$

(Si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observemos que si $g(x) = x$ para todo x, entonces $g'(x) = 1$, y se obtiene el teorema del valor medio. Por otra parte aplicando el Teorema del valor medio a f y a g por separado, se deduce que existen un x e y en (a,b) que verifican

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(y)};$$

pero no existe ninguna garantía de que los x e y hallados de esta manera sean iguales. Estas consideraciones pueden hacer pensar que el Teorema del Valor Medio de Cauchy es muy difícil de demostrar, pero en realidad basta aplicar uno de los artilugios más simples.)

Demostración.- Sea

$$h(x) = f(x)\left[g(b)-g(a)\right] - g(x)\left[f(b)-f(a)\right].$$

Entonces h es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Según el teorema de Rolle, $h'(x) = 0$ para algún x de (a,b), lo que significa que

$$0 = f'(x)\left[g(b)-g(a)\right] - f'(x)\left[f(b)-f(a)\right].$$

El Teorema del Valor Medio de Cauchy es la herramienta básica necesaria para demostrar un teorema que facilita el cálculo de límites de la forma
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$
cuando
$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x)=0.$$
En este caso no es aplicable el Teorema 5.2.

Teorema 1.9 (Regla de L'Hopital)**.** Supongamos que
$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x)=0,$$
y supongamos también que $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existe. Entonces $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ existe y
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
(Observe que el teorema 7 es un caso particular.)

Demostración.- La hipótesis de que el $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existe contiene dos suposiciones implícitas:

(1) existe un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ tal que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen para todo x de $(a-\delta, a+\delta)$ excepto quizás para $x=a$,

(2) en este intervalo $g'(x)\neq 0$ excepto quizás, de nuevo, en $x=a$.

Por otra parte, no se supone ni siquiera que f y g estén definidas en el punto a. Si definimos $f(a)=g(a)=0$ (cambiando, si es necesario, los valores previos de $f(a)$ y $g(a)$), entonces f y g son continuas en el punto a. Si $a<x<a+\delta$, puede aplicarse a f y a g el Teorema del Valor Medio y el Teorema del Valor Medio de Cauchy en el intervalo $[a,x]$ (y lo mismo ocurre en el caso de que $a-\delta<x<a$). Aplicando en primer lugar el Teorema del Valor Medio a g, vemos que $g(x)\neq 0$, ya que si $f(x)=0$ entonces existiría algún x_1 en (a,x) tal que $g'(x_1)=0$, lo que contradice (2). Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio de Cauchy a f y a g, vemos que existe un número α_x en (a,x) tal que
$$[f(x)-0]\,g'(\alpha_x)=[g(x)-0]\,f'(\alpha_x)$$
o
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$
Pero α_x se aproxima a a cuando x se aproxima a a, ya que α_x está en el intervalo (a,x); como estamos suponiendo que $\lim_{y\to a} f'(y)/g'(y)$ existe, se deduce que
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}=\lim_{y\to a}\frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

1.1 Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones, halle los valores máximos y mínimos en los intervalos indicados, determinando aquellos puntos del intervalo en los que la derivada es igual a 0 y comparando los valores de la función en estos puntos con sus valores en los extremos del intervalo.

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{4}{3}$$

Ambos número $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{4}{3}$ pertenecen al intervalo $[-2, 2]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -\frac{4}{3}$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-2, 2$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f(2) & = & 2^3 - 2^2 - 8 \cdot 2 + 1 & = & -11. \\ f\left(-\frac{4}{3}\right) & = & \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 & = & \frac{203}{27}. \\ f(-2) & = & -2^3 - 2^2 - 8 \cdot (-2) + 1 & = & 5. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por -11 y el máximo viene dado por $\frac{203}{27}$.

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$.

Respuesta.- Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 5x^4 + 1.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$5x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = -\frac{1}{5}.$$

El cual no es posible para ningún x real.

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-1, 1$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f(1) & = & 1^5 + 1 + 1 & = & 3. \\ f(-1) & = & (-1)^5 - 1 + 1 & = & -1. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por -1 y el máximo viene dado por 3.

(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 12x.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 1. \end{array} \right.$$

Sólo el número $x_1 = 0$ pertenece al intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es sólo el número:

$$x_1 = 0.$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{lcccl} f\left(-\dfrac{1}{2}\right) & = & 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 - 8\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + 6\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 & = & \dfrac{43}{16}. \\ f(0) & = & 3 \cdot 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 & = & 0. \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) & = & 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 - 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 & = & \dfrac{11}{16}. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por 0 y el máximo viene dado por $\dfrac{43}{16}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 5x^4 + 1.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$35x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\frac{1}{5}.$$

El cual no es posible para ningún x real.

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-\frac{1}{2}, 1$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{lcccl} f\left(-\dfrac{1}{2}\right) & = & \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1} & = & \dfrac{32}{15}. \\ f(1) & = & \dfrac{1}{1^5 + 1 + 1} & = & \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por $\dfrac{32}{15}$ y el máximo viene dado por $\dfrac{1}{3}$.

(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2(x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$\frac{x^2+1-2(x+1)}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 & = & -1+\sqrt{2} \\ x_2 & = & -1-\sqrt{2}. \end{cases}$$

Sólo el número $x_1 = -1+\sqrt{2}$ pertenece al intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es sólo el número:

$$x_1 = -1+\sqrt{2}.$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-1, \ \frac{1}{2}.$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f(-1) & = & \dfrac{-1+1}{(-1)^2+1} & = & 0. \\ f\left(1+\sqrt{2}\right) & = & \dfrac{\left(-1+\sqrt{2}\right)+1}{\left(-1+\sqrt{2}\right)^2+1} & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}+2\right)}. \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) & = & \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)+1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1} & = & \dfrac{6}{5}. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por 0 y el máximo viene dado por $\dfrac{6}{5}$.

(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ en $[0,5]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=-1.$$

El cual no es posible para ningún x real.

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$0, \; 5$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{0}{0^2-1} &= 0. \\ f(5) &= \frac{5}{5^2-1} &= \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

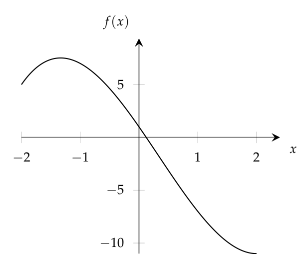
Por lo tanto el mínimo viene dado por 0 y el máximo viene dado por $\frac{5}{24}$.

2. Trace ahora la gráfica de cada una de las funciones del Problema 1 (Spivak, capítulo 11.) y halle todos los puntos máximos y mínimos locales.

Respuesta.-

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$$

De donde los puntos críticos están dados por:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x+4)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{4}{3}, \quad x_2 = 2.$$

Ya que f' existe, entonces podemos calcular f''.

$$f''(x) = 6x - 2.$$

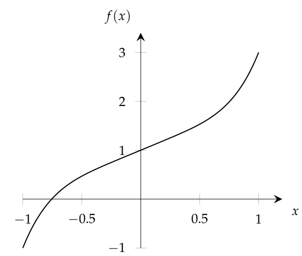
Luego, calculamos $f''\left(-\frac{4}{3}\right)$ y $f''(2)$.

$$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 6\left(-\frac{4}{3}\right) - 2 = -10 < 0 \quad ; \quad f''(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 10 > 0$$

Por lo tanto, $-\frac{4}{3}$ es un punto máximo local y 2 es un punto mínimo local.

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 5x^4 + 1.$$

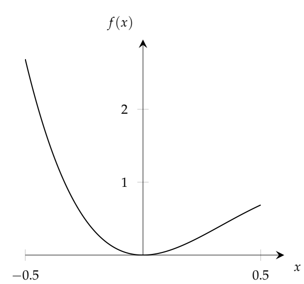
En este caso podemos ver que no existen puntos críticos, ya que

$$5x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = -\frac{1}{5}.$$

no tiene soluciones reales. Y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x.$$

De donde los puntos críticos están dados por:

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Ya que f' existe, entonces podemos calcular f''.

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12.$$

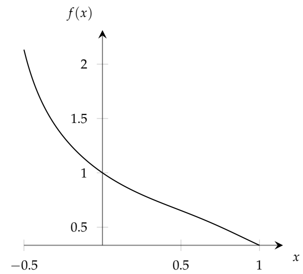
Luego, por el hecho de que $f''(1)$ no está contenido en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$ solo calcularemos $f''(0)$.

$$f''(0) = 36 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 12 = 12.$$

Por el teorema 11.6 de Spivak, vemos que $f'' = 12 \geq 0$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$, por lo tanto, 0 es un punto máximo local.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5+x+1}$ en $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = -\frac{5x^4+1}{x^5+x+1}.$$

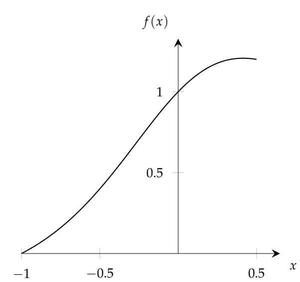
En este caso podemos ver que no existen puntos críticos, ya que

$$-\frac{5x^4+1}{x^5+x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^4+1 = 0.$$

no tiene soluciones en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = \frac{1-2x-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

De donde los puntos críticos están dados por:

$$\frac{1-2x-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2x-x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Ya que f' existe, entonces podemos calcular f''.

$$f''(x) = \frac{-2\left[(x^2+1)(x+1)+2x(1-2x-x^2)\right]}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

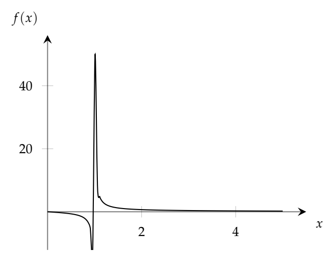
Luego, por el hecho de que $f''(-1-\sqrt{2})$ no está contenido en el intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}.\right]$ solo calcularemos $f''\left(-1+\sqrt{2}\right)$. Así, dado que

$$f''\left(-1+\sqrt{2}\right) < 0$$

Entonces $-1+\sqrt{2}$ es un máximo local.

(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ en $[0,5]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

En este caso podemos ver que no existen puntos críticos, ya que

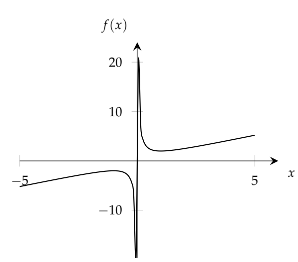
$$-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0.$$

no tiene soluciones reales. Y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

3. Trace las gráficas de las siguientes funciones:

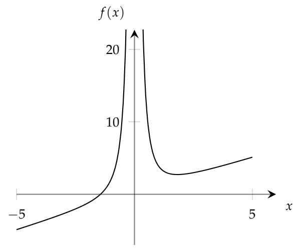
(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Respuesta.-



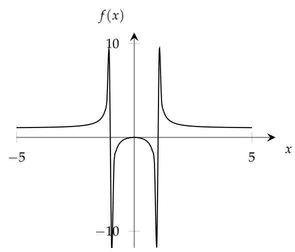
(ii) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$.

Respuesta.-



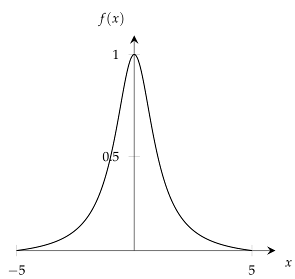
(iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Respuesta.-



(iv) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Respuesta.-



4. (a) Si $a_1 < \ldots < a_n$ halle el valor mínimo de $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$.

Respuesta.- Primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 2(x - a_1) \cdot 1 + 2(x - a_2) \cdot 1 + \ldots + 2(x - a_n) \cdot 1 = 2 \sum_{i=1}^{n} (x - a_i).$$

Luego encontremos los puntos críticos igualando $f'(x)$ cero.

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n}(x - a_i) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x - a_1) + (x - a_2) + \ldots + (x - a_n) = 0 \\ &\Rightarrow \quad nx = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i. \end{aligned}$$

Veamos ahora si este punto crítico es un mínimo o un máximo local. Para ello calculamos la segunda derivada de f.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2'\left[\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)\right]+2\left[\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)\right]' \\ &= 2(1+1+\ldots+1) \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Ya que $2n>0$, entonces podemos decir que el punto crítico $x=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ es un mínimo local de f.

Por lo tanto,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_i)\right]^2.$$

(b) Halle ahora el valor mínimo de $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x-a_i|$. Este es un problema en el que el cálculo infinitesimal no nos puede ayudar. En los intervalos entre los a_i la función f es lineal, por tanto el valor mínimo se localiza en uno de los a_i, y estos son, precisamente, los puntos en los cuales la función f no es diferenciable. Sin embargo, la solución es fácil de encontrar si se considera como varía $f(x)$ al pasar de un intervalo a otro.

Respuesta.- Tomemos dos puntos a y b en $[a_{i-1},a_i]$ y $[a_i,a_{i+1}]$ respectivamente. Tal que

$$|a-a_i|=|b-a_i|.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |b-a_j| &= |a-a_j|+|a-b| \quad \text{si } j\le i-1 \\ |b-a_j| &= |a-a_j|-|a-b| \quad \text{si } j\ge i+1 \end{aligned}$$

Luego, vemos que

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{j=1}^{n}|b-a_j| \\ &= \sum_{j=1}^{i-1}|b-a_j|+|b-a_i|+\sum_{j=i+1}^{n}|b-a_j| \\ &= \sum_{j=1}^{i-1}\left(|a-a_j|+|a-b|\right)+|b-a_i|+\sum_{j=i+1}^{n}\left(|a-a_j|-|a-b|\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1}|a-a_j|+(i-1)|a-b|+|b-a_i|+\sum_{j=i+1}^{n}|a-a_j|-(n-i)|a-b| \\ &= \sum_{j=1}^{i-1}|a-a_j|+|b-a_i|+\sum_{j=i+1}^{n}|a-a_j|(i-1)-(n-i)|a-b| \\ &= \sum_{j=1}^{i-1}|a-a_j|+|b-a_i|+\sum_{j=i+1}^{n}|a-a_j|+(2i-n-1)|a-b| \end{aligned}$$

Se sigue que $f(b) \geq f(a)$ siempre que

$$2i - n - 1 \geq 0 \quad \text{o} \quad i \geq \frac{n+1}{2}.$$

Por otro lado, de manera similar, $f(b) \leq f(a)$ siempre que

$$2i - n - 1 \leq 0 \quad \text{o} \quad i \leq \frac{n+1}{2}.$$

Así, tenemos a f decreciente si $i \leq \dfrac{n+1}{2}$ y f creciente si $i \geq \dfrac{n+1}{2}$. De esta manera f alcanza su mínimo en $a_{\frac{n+1}{2}}$ si n es impar y está en el intervalo $\left[a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}\right]$. Por lo tanto, el valor mínimo de f es $f\left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)$ si n es impar y $f\left(a_{\frac{n}{2}}\right)$ si n es par.

(c) Sea $a > 0$. Demuestre que el valor máximo de

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

es $(2+a)/(1+a)$. (Puede hallarse por separado la derivada en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ y (a, ∞)).

Respuesta.- La función dada se puede escribir como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-x+a} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x+a} & \text{si} \quad 0 < x < a \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+x-a} & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

Notemos que f es diferenciable en cada intervalo $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ y (a, ∞). Por lo que podemos hallar sus respectivas derivadas,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1-x+a)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1-x+a)^2} & \text{si} \quad 0 < x < a \\[2ex] \dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+x-a)^2} & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

el cual demuestra que $f'(x) > 0$ si $(-\infty, 0)$ y $f'(x) < 0$ si (a, ∞), esto ya que $(1-x)^2$ y $(1 \pm x + a)^2$ son positivos. Además, vemos que

$$f(0) = 1 + \frac{1}{1+a} = f(a) > 0$$

ya que $a > 0$. Así, f es creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[a, \infty]$, donde se concluye que f en $\mathbb{R}$ alcanza su punto máximo en algún punto del intervalo $[0, a]$. Ahora, verificamos si el máximo de f se alcanza en algún punto en $(0, a)$. Si b es tal punto, entonces

$$-\frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1-b+a)^2} = 0,$$

el cual implica,

$$(1+x)^2-(1-x+a)^2=(2+a)(2b-a)=0.$$

Así, $b=\dfrac{a}{2}$. Es más,

$$f(0)=f(a)=1+\frac{1}{1+a}=\frac{2+a}{1+a}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{2}{1+\frac{a}{2}}=\frac{4}{2+a}<\frac{2+a}{1+a}$$

lo que muestra que $\dfrac{2+a}{1+a}$ es el máximo valor de f en $[0,a]$.

5. Para cada una de las siguientes funciones, halle todos los puntos máximos y mínimos locales.

(i)

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 3,5,7,9\\ 5, & x=3\\ -3, & x=5\\ 9, & x=7\\ 7, & x=9\end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que todos los puntos locales máximo y mínimos deben estar en el conjunto $\{3,5,7,9\}$, ya que, aparte de estos puntos, f cumple la función identidad. Ahora vemos por la definición de f que

$$f(3)=5>3 \text{ y } 5>x, \text{ para todo } x\in(3-\delta,3+\delta), \text{ para } 0<\delta<1.$$

Así, 3 es un punto máximo local.

Para $x=5$ tenemos por la definición de f que

$$f(5)=-3<x \text{ para todo } x\geq 0.$$

Así, 5 es un punto mínimo local.

También vemos por la definición de f que

$$f(7)=9>7 \text{ y } 9>x, \text{ para todo } x\in(7-\delta,7+\delta), \text{ para } 0<\delta<1.$$

Así, 7 es un punto máximo local.

Para $x=5$ tenemos por la definición de f que

$$f(9)=7<9 \text{ y } 7<x, \text{ para todo } x\in(9-\delta,9+\delta), \text{ para } 0<\delta<1.$$

Así, 9 es un punto mínimo local.

(ii)

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ irracional}\\ 1/q, & x=p/q \text{ fracción irreducible.}\end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que cada número irracional x es un mínimo local de f ya que , en el caso de que $f(x)=0$ y $f(y)=\dfrac{1}{q}>0$, para cualquier racional $y=p/q$. Por otro lado, no existe un punto máximo local. De hecho, vemos por la definición de f que el máximo local sólo puede ocurrir para los números racionales. Pero para cualquier racional $x = p/q$, $f(x) = 1/q < p/q = x$ si $p > 0$ y $f(x) = 1/q > p/q = x$ si $p < 0$ pero $f(x) > 0 = f(y)$, para cualquier número racional y.

(iii)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, x & \text{irracional.} \end{cases}$$

Respuesta.- Observamos que todo número irracional positivo x es un mínimo local de f. Ya que, en este caso, $f(x) = 0$ y $f(y) = y > 0$, para cualquier racional $y \geq 0$. Por otro lado, para cualquier racional $y \leq 0$, tenemos $f(y) = y \leq 0$ y por lo tanto cualquier número irracional estrictamente negativo es un máximo local de f.

(iv)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}, 1/n$ es un punto local máximo a partir de la definición de f, $f(\frac{1}{n}) = 1$, y $f(x) = 0$. Similarmente, vemos que para cada número real tal que $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es un punto mínimo local, ya que en este conjunto f es idénticamente 0. Además si f es constante para cada número real tal que $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, entonces es un punto máximo y mínimo local a la vez, excepto el punto 0, ya que para cada $\epsilon > 0$, $(-\delta, \delta)$ contiene infinitos $1/n$, esto por la propiedad Arquimediana de los números reales.

(v)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ si el desarrollo decimal de } x \text{contiene un 5} \\ 0, & x \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que para cada

$$x \in \{x \in \mathbb{R} : \text{el desarrollo decimal de } x \text{contiene a 5}\}$$

es un punto máximo local a partir de la definición de f. Es este caso, $f(x) = 1$ y f es 0. Similarmente, vemos que cada número real tal que,

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{el desarrollo decimal de } x \text{contiene a 5}\}$$

es un punto mínimo local, ya que en este conjunto f es idénticamente 0. Además, ya que f es constante, tenemos que cada número en el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{el desarrollo decimal de } x \text{contiene a 5}\}$$

es un punto máximo local y un punto mínimo local, excepto el punto 0, ya que para cada $\delta > 0$, $(-\delta, \delta)$ contiene infinitos puntos con al menos un 5 en su expansión decimal, esto por la propiedad Arquimediana de los números reales

6. Demuestre la siguiente propiedad (que se utiliza muchas veces de manera implícita): si f es creciente en (a,b) y continua en a y b, entonces f es creciente en $[a,b]$. En particular, si f es continua en $[a,b]$ y $f > 0$ en (a,b), entonces f es creciente en $[a,b]$.

Demostración.- Sea $x, y \in [a,b]$ tal que x<y. Ya que f es creciente en (a,b), entonces f es también creciente en (x,y). Por el teorema de valor medio, existe un $c \in (x,y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) > 0.$$

Si f es creciente en (x,y),

$$f'(c) \geq 0 \text{ para todo } c \in (x,y).$$

Por el hecho de que $y - x > 0$, entonces

$$f(x) < f(y).$$

De esta manera, x e y son número arbitrarios en $[a,b]$ y por lo tanto f es creciente en $[a,b]$.

7. Se traza una recta desde el punto $(0,a)$ hasta el eje horizontal y desde allí otra a $(1,b)$, tal como se indica en la Figura 23 (Spivak). Demuestre que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales. (Naturalmente, deberá entrar en juego una función: expresar la longitud en términos de x, donde $(x,0)$ es el punto del eje horizontal. La línea a trazos de la Figura 23 sugiere una demostración geométrica; tanto en un caso como en otro puede resolverse el problema sin necesidad de hallar el punto $(x,0)$.)

Demostración.- De la figura dada, encontramos que la longitud total del camino está dada por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(1-x)^2 + b^2}.$$

Para la longitud más corta, obtenemos la primera derivada y la igualamos con cero

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+b^2}} = 0.$$

Reemplazando $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ con $\cos\alpha$ y $\dfrac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+b^2}}$ con $\cos\beta$, obtenemos

$$\cos\alpha - \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

8. (a) Sea (x_0, y_0) un punto del plano, y sea L la gráfica de la función $f(x) = mx + b$. Halle el punto $\overline{x}$ tal que la distancia de (x_0, y_0) a $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ sea mínima. [Observe que minimizar esta distancia equivale a minimizar su cuadrado. Esto puede simplificar, en cierta medida, los cálculos.] Respuesta.-