1

Álgebra vectorial

1.2. El espacio vectorial de las n-plas de números reales

Definición 1.1 *Dos vectores A y B de V_n son iguales siempre que coinciden sus componentes. Esto es, si $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ..., b_3)$, la ecuación vectorial $A = B$ tiene exactamente el mismo significado que las n ecuaciones escalares*

$$a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2, \qquad a_n = b_n$$

La suma $A + B$ se define como el vector obtenido sumando los componentes correspondientes:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

La c es un escalar, definimos cA o Ac como el vector obtenido multiplicando cada componente de A por c:

$$cA = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$$

TEOREMA 1.1 ***a.*** *La adición de vectores es conmutativa.*

$$A + B = B + A$$

Demostración.- Sea V_n el espacio vectorial n-plas y $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ...b_n)$, por lo tanto por definición de adición y propiedad de números reales, tenemos

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, ..., b_n + a_n) = B + A$$

.

b. *y asociativa,*

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Demostración.- Sea V_n el espacio vectorial n-plas y $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ y $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ entonces

$$A + (B + C) = A + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, ..., b_n + c_n) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), ..., a_1 + (b_n + c_n)) =$$

$$((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, ..., (a_n + b_n) + c_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., b_n + c_n) + C = (A + B) + C$$

c. *La multiplicación por escalares es asociativa*

$$c(dA) = (cd)A$$

Demostración.- Sea $c, d \in \mathbb{R}$ y $A \in V_n$ entonces

$$\begin{array}{rcl} c(dA) & = & c(da_1, da_2, ..., da_n) \\ & = & ((cd)a_1, (cd)a_2, ..., (cd)a_3) \\ & = & (cd)A \end{array}$$

d. *y satisface las dos leyes distributivas*

$$c(A+B) = cA + cB, \quad y \quad (c+d)A = cA + dA$$

Demostración.- Las demostraciones son fáciles de realizar siempre y cuando se tomen en cuenta Las definiciones de 12.1.

e. *El vector con todos los componentes 0 se llama vector cero y se representa con O. Tiene la propiedad.*

Demostración.- Existencia. Sea $O = (o, o, ..., o)$ de donde $A + O = (a_1, a_2, ..., a_n) + (o, o, ..., o) = (a_1 + o, a_2 + o, ..., a_n + o) = (a_1, a_2, ..., a_n) = A$.
Unicidad. Supongamos que $O, O^{'} \in V_n; O \neq O$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{lll} A + O = A & \text{tomando } A = O^{'}: & O^{'} + O = O^{'} \\ A + O^{'} = A & \text{tomando } A = O: & O + O^{'} = O \end{array} \right.$$

Por lo tanto $O = O^{'}$.

f. *El vector $(-1)A$ que también se representa con $-A$ se llama el apuesto a A. También escribimos $A - B$ en lugar de $A + (-B)$ y lo llamamos diferencia de A y B. La ecuación $(A+B) - B = A$. Demuestra que la sustracción es la operación inversa de la adición. Obsérvese que $0A = O$ y que $1A = A$.*

1.3. Interpretación geométrica para $n \leq 3$

Definición 1.2 *Dos vectores A y B de V_n tienen la misma dirección si $B = cA$ para un cierto escalar positivo c, y la dirección opuesta si $B = cA$ para un cierto c negativo. Se llaman paralelos si $B = cA$ para un cierto c no nulo.*

1.4. Ejercicios

1. Sean $A = (1,3,6)$, $B = (4,-3,3)$ y $C = (2,1,5)$ tres vectores de V_3. Determinar los componentes de cada uno de los vectores:

a) $A + B = (1,3,6) + (4,-3,3) = (1+4, 3+(-3), 6+3) = (5,0,9)$

b) $A - B = (1, 3, 6) - (4, -3, 3) = (1 - 4, 3 - (-3), 6 - 3) = (-3, 6, 3)$

c) $A + B - C = (1, 3, 6) + (4, -3, 3) - (2, 1, 5) = (1 + 4 - 2, 3 - 3 - 1, 6 + 3 - 5) = (3, -1, 4)$

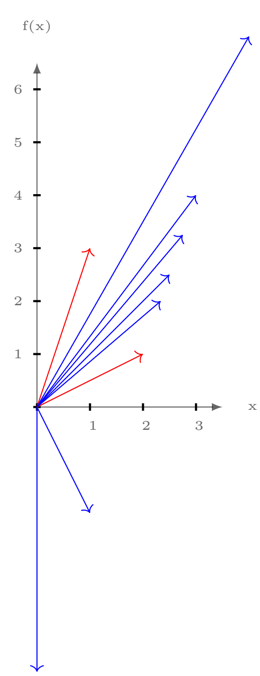
d) $7A - 2B - 3C = 7(1, 3, 6) - 2(4, -3, 3) - 3(2, 1, 5) = (7, 21, 42) - (8, -6, 6) - (6, 3, 15) =$
$= (7 - 8 - 6, 21 - 8 - (-6) - 3, 42 - 6 - 15) = (-7, 24, 21)$

e) $2A + B - 3C = 2(1, 3, 6) + (4, -3, 3)3(2, 1, 5) = (2 + 4 - 6, 6 - 3 - 3, 12 + 3 - 15) = (0, 0, 0)$

2. Dibujar los vectores geométricos que unen el origen a los puntos $A = (2, 1)$ y $B = (1, 3)$. En la misma figura trazar el vector geométrico que une el origen al punto $C = A + t(B)$ para cada uno de los siguientes valores de t: $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{3}{4}$; $t = 1$; $t = 2$; $t = -1$; $t = -2$.

Respuesta.-

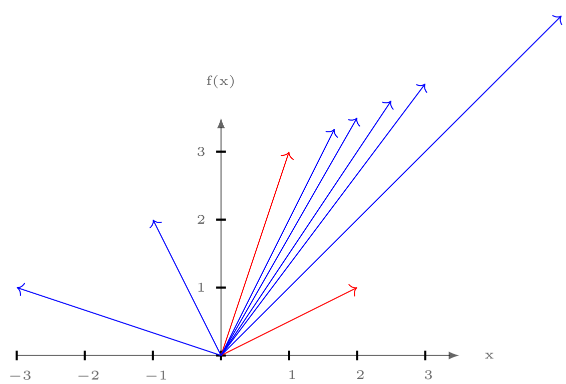
$$\begin{array}{llll}
\text{Si} & t = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & C = (\frac{7}{3}, 2) \\[6pt]
\text{Si} & t = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & C = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) \\[6pt]
\text{Si} & t = 1 & \Longrightarrow & C = (\frac{11}{4}, \frac{13}{4}) \\[6pt]
\text{Si} & t = 2 & \Longrightarrow & C = (3, 4) \\[6pt]
\text{Si} & t = -1 & \Longrightarrow & C = (4, 7) \\[6pt]
\text{Si} & t = -2 & \Longrightarrow & C = (1, -2) \\[6pt]
\text{Si} & t = \frac{3}{4} & \Longrightarrow & C = (0, -5)
\end{array}$$



3. resolver el ejercicio 2 si $C = tA + B$.

Respuesta.-

$$
\begin{array}{lll}
\text{Si} \quad t = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & C = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}) \\[2ex]
\text{Si} \quad t = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & C = (2, \frac{7}{2}) \\[2ex]
\text{Si} \quad t = 1 & \Longrightarrow & C = (\frac{5}{2}, \frac{15}{4}) \\[2ex]
\text{Si} \quad t = 2 & \Longrightarrow & C = (3, 4) \\[2ex]
\text{Si} \quad t = -1 & \Longrightarrow & C = (5, 5) \\[2ex]
\text{Si} \quad t = -2 & \Longrightarrow & C = (-1, 2) \\[2ex]
\text{Si} \quad t = \frac{3}{4} & \Longrightarrow & C = (-3, 1)
\end{array}
$$

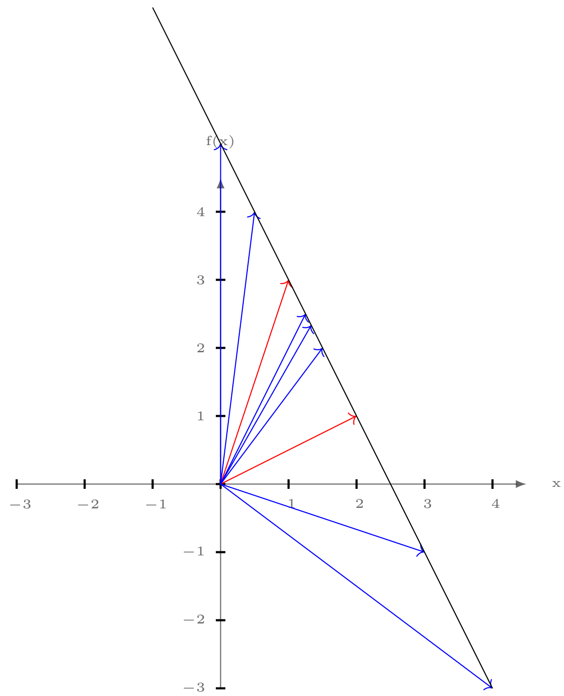


4. Sean $A = (2, 1)$, $B = (1, 3)$ y $C = xA + yB$, en donde x e y son escalares.

a) Trazar el vector que une el origen a C para cada uno de los siguientes pares de valores de x e y: $x = y = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{3}{4}$; $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}$; $x = 2,\ y = -1$; $x = 3,\ y = -2$; $x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2}$; $x = -1,\ y = 2$.

Respuesta.-

$$
\begin{array}{lll}
\text{Si} \quad x = y = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{3}{2}, 2\right) \\[2ex]
\text{Si} \quad x = \frac{1}{4},\ y = \frac{3}{4} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right) \\[2ex]
\text{Si} \quad x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) \\[2ex]
\text{Si} \quad x = 2,\ y = -1 & \Longrightarrow & C = (3, -1) \\[2ex]
\text{Si} \quad x = 3,\ y = -2 & \Longrightarrow & C = (4, -3) \\[2ex]
\text{Si} \quad x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2} & \Longrightarrow & C = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \\[2ex]
\text{Si} \quad x = -1,\ y = 2 & \Longrightarrow & C = (0, 5)
\end{array}
$$

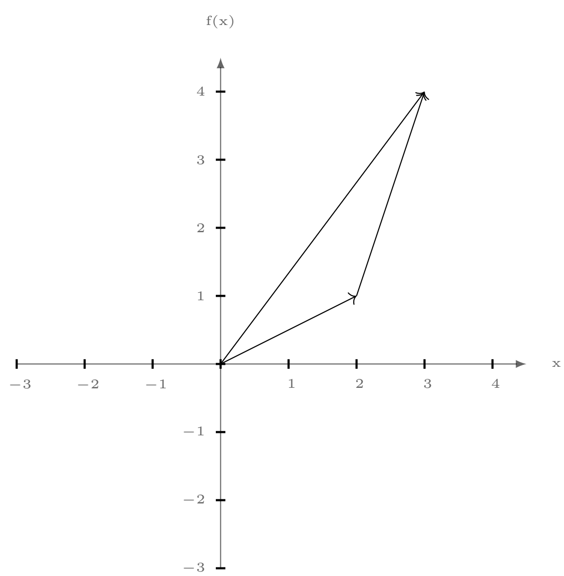


b) ¿Qué conjunto es el de los puntos C obtenidos cuando x e y toman todos los valores reales tales que $x+y=1$? (Hacer una conjetura y mostrar el lugar geométrico en la figura. No hacer la demostración).

Respuesta.- Sea $x=3,\ y=-2$ y $x=-2,\ y=3$ podemos graficar el conjunto de los puntos C tales que $x+y=1$.

c) Dar una idea del conjunto de todos los puntos C obtenidos al variar independientemente x e y en los intervalos $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$, y hacer una representación de ese conjunto.

Respuesta.-



d) ¿Qué conjunto es el de todos los puntos C obtenidos si x varía en el intervalo $0 \le x \le 1$ e y recorre todos los números reales?.

Respuesta.- La banda horizontal obtenida sumando xA a la línea $y = \frac{1}{3}x$ para cada uno $0 \leq x \leq 1$.

e) ¿Qué conjunto resulta si x e y recorren ambos todos los números reales?.

Respuesta.- Todo R^2.

5. Sean $A = (2,1)$ y $B = (1,3)$. Demostrar que todo vector $C = (c_1, c_2)$ de V_2 puede expresarse en la forma $C = xA + yB$. Expresar x e y en función de c_1 y c_2.

Demostración.- Ya que
$$C = xA + yB = (2x + y, x + 3y) = (c_1, c_2)$$
se tiene $c_1 = 2x + y$ y $c_2 = x + 3y$ de donde
$$y = \frac{1}{5}(2c_2 - c_1)$$
$$x = \frac{1}{5}(3c_1 - c_2)$$
Esto demuestra que cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ se puede obtener como $xA + yB$ dado $C = (c_1, c_2)$ que calculamos.

6. Sea $A = (1,1,1)$, $B = (0,1,1)$ y $C = (1,1,0)$ tres vectores de V_3 y $D = xA + yB + zC$, donde x, y z son escalares.

a) Determinar los componentes de D.

Respuesta.- Tenemos que $D = x(1,1,1) + y(0,1,1) + z(1,1,0)$ de donde $D = (x,x,x) + (0,y,y) + (z,z,0)$ así,
$$D = (x + z, x + y + z, x + y)$$

b) Si $D = 0$ demostrar que $x = y = z = 0$.

Demostración.- Sea $D = 0 = (0,0,0)$ entonces
$$\begin{aligned} x + z = 0 &\quad\Longrightarrow\quad x = -z \\ x + y + z = 0 &\quad\Longrightarrow\quad y = 0 \\ x + y = 0 &\quad\Longrightarrow\quad x = -y \end{aligned}$$
de donde concluimos que $x = y = z = 0$.

c) Hallar x, y, z tales que $D = (1,2,3)$.

Respuesta.-
$$\begin{aligned} x + z = 1 &\quad\Longrightarrow\quad z = 1 - x && \Longrightarrow z = -1 \\ x + y + z = 2 &\quad\Longrightarrow\quad x + y + 1 - x = 2 && \Longrightarrow y = 1 \\ x + y = 3 &\quad\Longrightarrow\quad x + 1 = 3 && \Longrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

7. Sean $A = (1,1,1)$, $B = (0,1,1)$ y $C = (2,1,1)$ tres vectores de V_3 y $D = xA + yB + zC$, en donde x, y, z son escalares.

a) Determinar los componentes de D.

Respuesta.- Sea $D = x(1,1,1) + y(0,1,1) + z(2,1,1)$ entonces $D = (x+2z, x+y+z, x+y+z)$.

b) Hallar x, y, z no todos nulos, tales que $D = 0$.

Respuesta.- Sea $x = 2$, $y = -1$ y $z = -1$, entonces

$$D = (x+2z, x+y+z, x+y+z) = (2-2, 2-1-1, 2-1-1) = (0,0,0) = O$$

c) Demostrar que ninguna elección de x, y, z hace $D = (1,2,3)$.

Demostración.- Sea

$$\begin{array}{rcll} x+2z=1 & \Longrightarrow & x = 1-2z & \\ x+y+z=2 & \Longrightarrow & 1-2z+y+z=2 & \Longrightarrow y = z+1 \\ x+y+z=3 & \Longrightarrow & 1-2z+z+1+z=3 & \Longrightarrow 2 = 3 \end{array}$$

de donde encontramos un absurdo al declarar que $2 = 3$, por lo tanto no existe ninguna elección que satisfaga a $D = (1,2,3)$.

8. Sean $A = (1,1,1,0)$, $B = (0,1,1,1)$, $C = (1,1,0,0)$ tres vectores de V_4 y $D = xA + yB + zC$ siendo x, y, z escalares.

a) Determinar los componentes de D.

Respuesta.- Se tiene $D = x(1,1,1,0) + y(0,1,1,1) + z(1,1,0,0)$ entonces $D = (x+z, x+y+z, x+y, y)$

b) Si $D = 0$, Demostrar que $x = y = z = 0$

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} x+z=0 & & \\ x+y+z=0 & \Longrightarrow & z=0 \\ x+y=0 & \Longrightarrow & x=0 \\ y=0 & & \end{array}$$

Por lo tanto $x = y = z = 0$.

c) Hallar x, y, z tales que $D = (1,5,3,4)$.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} x+z=1 & & \\ x+y+z=5 & \Longrightarrow & z=2 \\ x+y=3 & \Longrightarrow & x=-1 \\ y=4 & & \end{array}$$

Por lo tanto $x = -1$, $y = 4$ y $z = 2$.

d) Demostrar que ninguna elección de x, y, z hace $D = (1, 2, 3, 4)$.

Demostración.- La demostración es similar al problema 7c.

9. En V_n demostrar que dos vectores paralelos a un mismo vector son paralelos entre sí.

Demostración.- Por definición de vectores paralelos se tiene $c_1A = C$ y $c_2B = C$ de donde $c_1A = c_2B$, en vista de que $c_1 \cdot c_2 \neq 0$ entonces $B = c_1c_2^{-1}A$, por lo tanto concluimos que A y B son paralelos entre sí.

10. Dados cuatro vectores no nulos A, B, C, D de V_n tales que $C = A + B$ y A paralelo a D. Demostrar que C es paralelo a D si y sólo si B es paralelo a D.

Demostración. Sea $B = A - C$ de donde $B = cD - c_1D$ así, $B = (c - c_1)D$, (sabemos que $c - c_1 \neq 0$, ya que B es distinto de 0).
Por el contrario supongamos que B es paralelo a D. Dado que ambos A y B son paralelos entre sí, esto por el problema anterior. Entonces, tenemos $A = xB$ siendo x un escalar distinto de 0. Esto implica

$$C = C = xB + B \Longrightarrow C = (1 - x)B.$$

Por lo tanto si C es paralelo a B y B paralelo a D entonces C es paralelo a D.

11. **a)** Demostrar, para los vectores V_n las propiedades de la adición y de la multiplicación por escalares dadas en el teorema 12.1

Demostración.- Sea $A, B \in V_n$ donde $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ entonces para la conmutatividad de adición tenemos

$$A+B = (a_1, a_2, ..., a_n)+(b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n) = (b_1+a_1, b_2+a_1, ..., b_n+a_n) = B+A$$

Para la asociatividad de adición se tiene,

$$\begin{array}{rcl} A + (B + C) & = & (a_1, a_2, ..., a_n) + [(b_1, b_2, ..., b_n) + (c_1, c_2, ..., c_n)] \\ & = & [a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + b_3), ..., a_n + (b_n + c_n)] \\ & = & [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_3, ..., (a_n + b_n) + c_n] \\ & = & (A + B) + C \end{array}$$

Luego para la asociatividad de la multiplicación escalar tenemos,

$$\begin{array}{rcl} c(dA) & = & c\,[d(a_1, a_2, ..., a_n)] \\ & = & c(da_1, da_2, ..., da_n) \\ & = & [(cd)a_1, (cd)a_2, ..., (cd)a_n] \\ & = & (cd)(a_1, a_2, ..., a_n) \\ & = & (cd)A \end{array}$$

Para la primera ley distributiva se tiene,

$$\begin{array}{rcl} c(A + B) & = & c\,[(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n)] \\ & = & [c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2), ..., c(a_n + b_n)] \\ & = & (ca_1 + c_b1, ca_2 + cb_2, ..., ca_n + cb_n) \\ & = & (c_1, ca_2, ..., ca_n) + (cb_1, cb_2, ..., cb_n) \\ & = & c(a_1, a_2, ..., a_n) + c(b_1, b_2, ..., b_n) \\ & = & cA + cB \end{array}$$

Para la segunda ley distributiva obtenemos,

$$\begin{aligned}(c+d)A &= (c+d)(a_1, a_2, ..., a_n)\\ &= (ca_1+cb_1, ca_2+cb_2, ..., ca_n+da_n)\\ &= (c_1, ca_2, ..., ca_n)+(cb_1, cb_2, ..., cb_n)\\ &= c(a_1, a_2, ..., a_n)+d(a_1, a_2, ..., a_n)\\ &= cA+dA\end{aligned}$$

b) Mediante vectores geométricos en el plano, representar el significado geométrico de las dos leyes distributivas $(c+d)A = cA+dA$ y $c(A+B) = cA+cB$.

Respuesta.- La ley distributiva $(c+d)A = cA+dA$ significa que el vector $(c+d)$ Ase obtiene sumando la flecha dA al final de la flecha cA.
La ley distributiva $c(A+B) = cA+cB$ significa que el vector $c(A+B)$ es el vértice del paralelogramo formado por cA y cB.

12. Si un cuadrilátero $OABC$ de V_2 es un paralelogramo que tiene A y C como vértices opuestos, demostrar que $A+\frac{1}{2}(C-A) = \frac{1}{2}B$. ¿Qué teorema relativo a los paralelogramos puede deducirse de esta igualdad?.

Demostración.- Dado que este es un paralelogramo, tenemos $B = A+C$. Y por tanto,

$$B = A+C \implies \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A+C) \implies \frac{1}{2}B = A+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}A \implies \frac{1}{2}B = A+\frac{1}{2}(C-A)$$

1.5. Producto escalar

Definición 1.3 (Producto escalar ó interior de dos vectores) *Si $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ son dos vectores de V_n su producto escalar se representa con $A \cdot B$ y se define con la igualdad*

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$$

TEOREMA 1.2 *Para todos los vectores A, B, C de V_n y todos los escalares c se tienen las propiedades siguientes:*

(a)	$A \cdot B = B \cdot A$	*(ley conmutativa).*
(b)	$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$	*(ley distributiva)*
(c)	$c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$	*(homogeneidad)*
(d)	$A \cdot A > 0$ *si* $A \neq O$	*(positivadad)*
(e)	$A \cdot A = 0$ *si* $A = O$	

Demostración.- Comencemos demostrando el inciso (a) que es un consecuencia de la definición.

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (a_1 \cdot b_1)+(a_2 \cdot b_2)+...+(a_n \cdot b_n) = (b_n+a_n)+(b_2+a_n)+...+(b_n+a_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k = B \cdot A$$

Las demostraciones (b) y (c) se demuestran con la definición de producto escalar, la definición de vectores y el teorema 12.1.
Para demostrar las dos últimas, usamos la relación $A \cdot A = \sum a_k^2$. Puesto que cada térmi es no negativo, la suma es es no negativa. Además, la suma es cero si y sólo si cada término de la suma es cero y esto tan sólo

puede ocurrir si $A = O$.

TEOREMA 1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Si A y B son vectores de V_n, tenemos*

$$(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B) \qquad \textit{12.2}$$

. Además, el signo de desigualdad es el válido si y sólo si uno de los vectores es el producto de otro por un escalar.

Demostración.- Expresando cada uno de los miembros de (12.2) en función de los componentes, obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

que es la desigualdad ya demostrada en el teorema I.41.

Presentaremos otra demostración de 12.2 que no utiliza los componentes.
Tal demostración es interesante porque hace ver que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es una consecuencia de las cinco propiedades del producto escalar que se citan en el teorema 12.2 y no depende de la definicón que se utilizó para deducir esas propiedades.
Para llevar a acabo esta demostración, observemos primero que 12.2 es trivial si A ó B es el vector cero. Por tanto, podemos suponer que A y B son ambos no nulos. Sea C el vector

$$C = xA - yB, \quad \text{donde } x = B \cdot B \quad y \quad y = A \cdot B$$

Las propiedades d) y e) implican que $C \cdot C \geq 0$. Cuando expresamos esto en función de x e y, resulta 12.2. Para expresar $C \cdot C$ en función de x e y, utilizamos las propiedades a), b) y c) obteniendo

$$C \cdot C = (xA - yB) \cdot (xA - yB) = x^2(A \cdot A) - 2xy(A \cdot B) + y^2(B \cdot B).$$

Utilizando las definiciones de x e y como también la desigualdad $C \cdot C \leq 0$, se llega a

$$(B \cdot B)^2 \cdot (A \cdot A) - 2(A \cdot B)^2(B \cdot B) + (A \cdot B)^2(B \cdot B) \geq 0$$

La propiedad d) implica que $B \cdot B \geq 0$ puesto que $B \neq 0$, con lo que podemos dividir por $(B \cdot B)$ obteniendo

$$(B \cdot B)(A \cdot A) - (A \cdot B)^2 \geq 0$$

que coincide con 12.2. Esto también demuestra que el signo igual es válido en 12.2 si y sólo si $C = 0$. Pero $C = 0$ si y sólo si $xA = yB$. A su vez, esta igualdad se verifica si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar.

1.6. Longitud o norma de un vector

Definición 1.4 *si A es un vector en V_n su longitud o norma se designa con $\|A\|$ y se define mediante la igualdad*

$$\|A\| = (A \cdot A)^{1/2}$$

TEOREMA 1.4 *Si A es un vector de V_n y c un escalar, tenemos las siguientes propiedades.*

a) $\|A\| > 0$ *si* $A \neq 0$ *(Positividad)*
b) $\|A\| = 0$ *si* $A = 0$
c) $\|cA\| = |c|\,\|A\|$ *(homogeneidad)*

Demostración.- *Las propiedades a) y b) son consecuencia inmediata de las propiedades d) y e) del teorema 12.2. Para demostrar c) utilizamos la propiedad de homogeneidad del producto escalar obteniendo*

$$\|cA\| = (cA \cdot cA)^{1/2} = (c^2 A \cdot A)^{1/2})(c^2)^{1/2}(A \cdot A)^{1/2} = |c|\|A\|.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz también se puede expresar en función de la norma. Ella establece que

$$(A \cdot B)^2 \leq \|A\|^2\|B\|^2 \qquad \textit{12.3}$$

o

$$|A \cdot B| = \|A\|\|B\| \qquad \textit{12.4}$$

TEOREMA 1.5 (Desigualdad triangular) *. Si A y B son vectores de V_n, tenemos*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Demostración.- *para evitar las raíces cuadradas, escribimos la desigualdad triangular en la forma equivalente*

$$\|A \cdot B\|^2 = (\|A\| + \|B\|)^2 \qquad \textit{12.5}$$

El primer miembro de 12.5 es

$$\|A + B\|^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B = \|A\|^2 + 2A \cdot B + B \cdot B = \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2$$

mientras que el segundo miembro es

$$(\|A\| + \|B\|)^2 = \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2$$

Comparando esas dos fórmulas, vemos que 12.5 es válida si y sólo si se tiene

$$A \cdot B \leq \|A\|\|B\| \qquad 12{,}6$$

Pero $A \cdot B \leq A \cdot B$ con lo que 12.6 resulta de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, en la forma 12.4. Esto prueba que la desigualdad triangular es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
La proposición reciproca también es cierta. Esto es, si la desigualdad triangular es cierta también lo es 12.6 para A y para $-A$, de lo que obtenemos 12.3. Así pues, la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz son lógicamente equivalentes. Además, el signo de igualdad vale en una si y sólo si vale en la otra. Con lo que se complementa la demostración del teorema 12.5.

1.7. Ortogonalidad de vectores