Michael Spivak

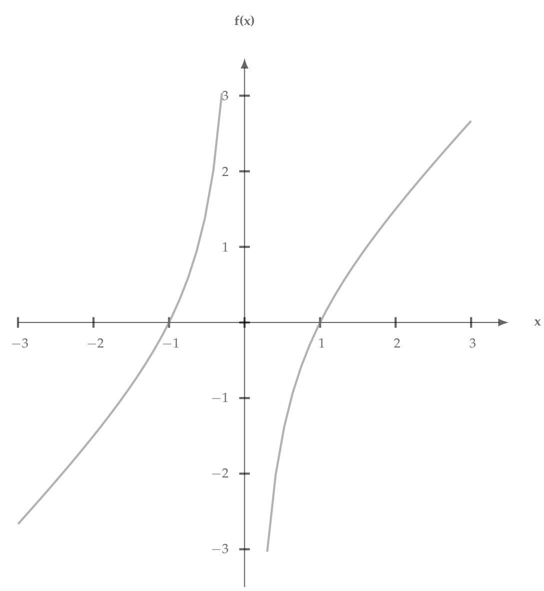
CALCULUS

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Y APUNTES**

POR

FODE

CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA



LIBRO EN SU CUARTA EDICIÓN (Ingles)

Título de la obra original:
Calculus. Fourth Edition
Edición original en lengua inglesa publicada por:
Publish or Perish, Inc.

Sin ninguna revisión de esta obra.

Propiedad de esta obra:
CHRISTIAN LIMBERT PAREDES AGUILERA
E-mail: soyfode@gmail.com

2020

Contents

1

Propiedades básicas de los números

1.1 Propiedades, definiciones y Teoremas

Propiedad .1 Si a, b y c son números cualesquiera, entonces

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Propiedad .2 Si a es cualquier número, entonces

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Propiedad .3 Para todo número a, existe un número $-a$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Definición 1.1 Conviene considerar la resta como una operación derivada de la suma: consideremos $a - b$ como una abreviación de $a + (-b)$

Lema 1.1 Si un número x satisface $a + x = a$ para cierto número a, entonces es $x = 0$ (y en consecuencia esta ecuación se satisface también para cualquier a)

Demostración.- Si $a + x = a$ entonces $(-a) + (a + x) = (-a) + a = 0$ de donde $[(-a) + a] + x = 0$, por lo tanto $x = 0$ ■

Propiedad .4 **Ley conmutativa para la suma.**

$$a + b = b + a$$

Propiedad .5 **Ley asociativa para la multiplicación.**

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Propiedad .6 **Existencia de una identidad para la multiplicación.**

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a; \; 1 \neq 0$$

Propiedad .7 **Existencia de inversos para la multiplicación.**

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1; \; para \; a \neq 0$$

Propiedad .8 **Ley conmutativa para la multiplicación.**

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Definición 1.2 Se define a la división en función de la multiplicación: el símbolo a/b significa $a \cdot b^{-1}$. Puesto que 0^{-1} no tiene sentido, tampoco lo tiene $a/0$; la división por 0 es siempre indefinida.

Lema 1.2 Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$

Demostración.- Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$ entonces $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$ de donde $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$, por lo tanto $b = c$. ■

Lema 1.3 Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$

Demostración.- Si $a \neq 0$ entonces $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0$ de donde $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$ por lo tanto $b = 0$
(Puede ocurrir que sea a la vez $a = 0$ y $b = 0$;) esta posibilidad no se excluye cuando decimos $a = 0$ y $b = 0$. ■

Propiedad .9 **Ley distributiva.** Si a, b y c son números cualesquiera, entonces

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Lema 1.4 Si $a - b = b - a$, entonces $a = b$.

Demostración.- Si $a - b = b - a$ entonces $(a - b) + b = (b - a) + b = b + (b - a)$ de donde $a = b + b - a$, luego $a + a = (b + b - a) + a = b + b$, en consecuencia $a \cdot (1 + 1) = b \cdot (1 + 1)$ y por lo tanto $a = b$. ■

Lema 1.5 Demostrar que $a \cdot 0 = 0$

Demostración.- Sea $0 + 0 = 0$ entones $a \cdot (0 + 0) = 0 \cdot a$ de donde $a \cdot 0 = 0$. ■

Lema 1.6 Demostrar que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

Demostración.- Notemos que

$$\begin{array}{rcl} (-a) \cdot b + a \cdot b & = & [(-a) + a] \cdot b \\ & = & 0 \cdot b \\ & = & 0, \end{array}$$

Se deduce inmediatamente (sumando $-(a \cdot b)$ a ambos miembros) que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. ■

Lema 1.7 Demostrar que $(-a)\dot{(} - b) = a \cdot b$

Demostración.- Notemos que

$$\begin{array}{rcl} (-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] & = & (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b \\ & = & (-a) \cdot [(-b) + b] \\ & = & (-a) \cdot 0 = 0. \end{array}$$

En consecuencia sumando $(a \cdot b)$ a ambos lados se obtiene $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$. ■

Ejercicio 1.1 Resolver $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$$\begin{array}{rcl} (x-1) \cdot (x-2) & = & x \cdot (x-2) + (-1) \cdot (x-2) \\ & = & x \cdot x + x \cdot (-2) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-2) \\ & = & x^2 + x\,[(-2) + (-1)] + 2 \\ & = & x^2 - 2x + 2. \end{array}$$

■

Definición 1.3 Para los números a que satisfagan:

- $a > 0$, se llaman **positivos**
- $a < 0$ se llaman **negativos**.

Definición 1.4 $a < b$ puede interpretarse como $b - a > 0$.

Conviene considerar el conjunto de todos los números positivos, representados por P

Propiedad .10 **Ley de tricotomía.** Para todo número a se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

i) $a = 0$

ii) a pertenece al conjunto P

iii) $-a$ pertenece al conjunto P

Propiedad .11 **La suma cerrada.** Si a y b pertenecen a P, entonces $a+b$ pertenecen a P.

Propiedad .12 **La multiplicación es cerrada.** Si a y b pertenecen a P, entonces $a \cdot b$ pertenece a P

Definición 1.5 Estas tres propiedades deben complementarse con las siguientes definiciones.

$$\begin{array}{lll} a > b & \text{si} & a-b \text{ pertenece a } P \\ a < b & \text{si} & b > a \\ a \geq b & \text{si} & a > b \text{ ó } a = b \\ a \leq b & \text{si} & a < b \text{ ó } a = b \end{array}$$

Nótese en particular que $a > 0$ si y sólo si a pertenece a P.

Definición 1.6 Si a y b son dos números cualesquiera, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

i) $a-b=0$,

ii) $a-b$ pertence al conjunto p,

iii) $-(a-b)=b-a$ pertenece al conjunto p,

De las definiciones dadas se cumple una y sólo una de las sigueintes igualdades:

i) $a=b$,

ii) $a>b$,

iii) $b>a$.

Teorema 1.1 Si $a<b$ y $b<c$ si y sólo si $a<c$

Demostración.- Si $a<b$ de modo que $b-a$ pertenece a P, entonces evidentemente $(b+c)+(a+c)$ pertenece a P; así si $a<b$ entonces $a+c<b+c$. Igualmente, supongamos $a<b$ y $b<c$. Entonces $b-a$ y $c-b$ están en P así que $(c-b)+(b-a)=c-a$ está en P. ■

Teorema 1.2 Si $a<0$ y $b<0$, entonces $ab>0$

Demostración.- Por definición $0>a$ lo cual significa que $0-a=-a$ esta en P. Del mismo modo, $-b$ pertenece a P y, en consecuencia por P12, $(-a)(-b)=ab$ está en P. Así pues $ab>0$. ■

Teorema 1.3 Si $a \neq 0$ es $a^2>0$

Demostración.- Demostraremos por casos. Si $a>0$, entonces $a \cdot a > 0$ y $a^2>0$. Por otro lado, si $a<0$, entonces $0-a>0$ de modo que $(-a)(-a)>0$ y por lo tanto $a^2>0$. ■

Definición 1.7 **Valor absoluto.** Se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}$$

Teorema 1.4 Para todos los números a y b se tiene

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Demostración.- Demostración.- Vamos a considerar cuatro casos:

$$\begin{array}{lrr} (1) & a \geq 0 & b \geq 0 \\ (2) & a \geq & b \leq 0 \\ (4) & a \leq & b \geq 0 \\ (5) & a \leq 0 & b \leq 0 \end{array}$$

En el caso (1) tenemos también $a+b \geq 0$, esto es evidente; en efecto por definición

$$|a+b| = a+b = |a| + |b|$$

de modo que en este caso se cumple la igualdad.
En el caso (4) se tiene $a+b \leq 0$ y de nuevo se cumple la igualdad:

$$|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

En el caso (2), cuando $a \geq 0$ y $b \leq 0$, debemos demostrar que

$$|a+b| \leq a-b$$

Este caso puede dividirse en dos subcasos. Si $a+b \geq 0$, entonces tenemos que demostrar que

$$a+b \leq a-b$$

es decir,

$$b \leq -b,$$

lo cual se cumple ciertamente puesto que b es negativo y $-b$ positivo. Por otra parte, si $a+b \leq 0$ debemos demostrar que

$$-a-b \leq a-b$$

es decir

$$-a \leq a,$$

lo cual es verdad puesto que a es positivo y $-a$ negativo.
Nótese finalmente que el caso (3) puede despacharse sin ningún trabajo adicional aplicando el caso (2) con a y b intercambiados.

Se puede dar una demostración mas corta dado que

$$|a| = \sqrt{a^2} \quad |a|^2 = a^2$$

. Sea $(|a+b|)^2 = (a+b)$ Entonces

$$\begin{aligned}(|a+b|)^2 &= (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\\ &\leq a^2+2|a|\dot{|}b|+b^2\\ &= |a|^2 2|a|\dot{|}b|+|b|^2\\ &= (|a|+|b|)^2\end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $|a+b| \leq |a|+|b|$ porque $x^2 < y^2$ implica $x < y$

Hay una tercera forma de probar que es utilizando el teorema anterior.
Puesto que $x = |x| \quad$ ó $\quad x = -|x|$, se tiene $-|x| \leq x \leq |x|$. Análogamente $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas desigualdades se tiene:

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

y por tanto en virtud del teorema 4.2 se concluye que: $|x+y| \leq |x|+|y|$. ■

1.2 Problemas

1. Demostrar lo siguiente:

i) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$

Demostración.- Sea $a \neq 0$, entonces $(a^{-1} \cdot a)x = a \cdot a^{-1}$. Por lo tanto $x = 1$

ii) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

Demostración.- Partamos de $(x-y)(x+y)$, donde por la propiedad distributiva tenemos $(x-y)x+(x-y)y$: Luego $x^2-xy+xy-y^2$, por lo tanto por las propiedades de inverso y neutro x^2-y^2

iii) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$

Demostración.- Dada la hipótesis entonces $x^2 + \left[-(y^2)\right] = y + \left[-(y^2)\right]$ y por propiedades de neutro y definición $x^2 - y^2 = 0$. Luego $(x-y)(x+y)$ y en virtud del teorema $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ no queda $x - y = 0$ ó $x + y = 0$, por lo tanto $x = y$ ó $x = -y$

iv) $(x^3 - y^3) = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

Demostración.- Dado $(x-y)(x^2+xy+y^2)$, entonces por la propiedad distributiva $(x-y)x^2 + (x-y)xy + (x-y)y^2 = x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 + xy^2 - y^3$. Por lo tanto en virtud de las propiedades de inverso y neutro $x^3 - y^3$.

v) $x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$

Demostración.-

$$\begin{array}{rl} & (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1}) \\ = & x(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})-y(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1} \\ = & x^n+x^{n-1}y+...+x^2y^{n-2}+xy^{n-1}-(x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+...+xy^{n-1}+y^n) \\ = & x^n-y^n \end{array}$$

vi) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

Demostración.- Sea $(x+y)(x^2-xy+y^2)$, entonces por la propiedad distributiva $x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^2$. Por lo tanto x^3+y^3

2. ¿Donde está el fallo en la siguiente demostración? Sea $x=y$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & xy \\ x^2+y^2 & = & xy-y^2 \\ (x+y)(x-y) & = & y(x-y) \\ x+y & = & y \\ 2 & = & 1 \end{array}$$

El fallo esta en que no se puede dividir un número por 0 sabiendo que $x=y$

3. Demostrar lo siguiente:

i) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc},\ si\ b,c\neq 0$

Demostración.- Por definición tenemos que $\dfrac{a}{b}=ab^{-1}$, como $b,\ c\neq 0$ entonces $(ab)(c\cdot c^{-1})$, por las propiedades asociativa y conmutativa, $(ac)(b^{-1}c^{-1})$ por lo tanto $\dfrac{ac}{bc}$

ii) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd},\ si\ b,d\neq 0$

Demostración.- $(ad+bc)/(bd)=(ad+bc)(bd)^{-1}=(ad+bc)(b^{-1}d^{-1})=ab^{-1}+cd^{-1}=a/d+c/d$

iii) $(ab)^1=a^{-1}b^{-1}$, si $a,b\neq 0$ (Para hacer esto hace falta tener presente cómo se ha definido $(ab)^{-1}$)

Demostración.- Demostremos que $a^{-1}b^{-1}(ab)=1$, Sea $a^{-1}b^{-1}(ab)=\left(a^{-1}a\right)\left(b^{-1}b\right)=1$

iv) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{db}$, si $b,d\neq 0$

Demostración.- Sea por definición $ab^{-1}\cdot cd^{-1}$ entonces por la propiedad conmutativa $ac\cdot b^{-1}d^{-1}$, por lo tanto $\dfrac{ac}{bd}$ si $b,d\neq 0$

Corolario 1.1 Si $c\neq 0$ y $d\neq 0$ entonces $(cd^{-1})^{-1}=c^{-1}d$

Demostración.- Por definición de a^{-1} tenemos que $(cd^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{cd^{-1}}$, por el teorema de posibilidad de la división $1 = (c^{-1}d)(cd^{-1})$ y en virtud de los axiomas de conmutatividad y asociatividad $1 = (c^1c)(dd^{-1})$, luego $1 = 1$. quedando demostrado el corolario.

∎

v) $\dfrac{a}{b} / \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$ si $b, c, d \neq 0$

Demostración.- Si $ab^{-1} \cdot \left(cd^{-1}\right)^{-1}$ en virtud del anterior corolario se tiene $ab^{-1} \cdot c^{-1}d$ y por lo tanto $\dfrac{ad}{bc}$

vi) Si $b,\ c \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si sólo si $ad = bc$, Determinar también cuando es $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$

Demostración.- Sea $b,\ c \neq 0$ si sólo si $ab^{-1} = cd^{-1}$ entonces $(ab^{-1})b = cd^{-1}b$, por propiedades asociativa y conmutativa $a(b \cdot b^{-1}) = (bc)d^{-1}$, $a = (bc)d^{-1}$ luego $ad = bc(d \cdot d^{-1})$, por lo tanto $ad = bc$.
Por otro lado, si $ab^{-1} = b^{-1}$ entonces $a^2 = b^2$,por lo tanto determinamos que $a = b$ ó $a = -b$

4. Encontrar todos los números x para los que

i) $4 - x < 3 - 2x$

$$\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & 4 - x + 2x & < & 3 - 2x + 2x & \\
\Rightarrow & x + 4 & < & 3 & \text{Axiomas} \\
\Rightarrow & 4 + (-4)x & < & 3 + (-4) & \\
\Rightarrow & x & < & -1 & \text{propiedades}
\end{array}$$

ii) $5 - x^2 < 8$

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & (-5) + 5 - x^2 + (-8) & < & (-8) + 8 + (-5) \\
\Rightarrow & -x^2 - 8 & < & -5 \\
\Rightarrow & -x^2 - 3 & < & 0 \\
\Rightarrow & -(-x^2 - 3) & > & -0 \\
\Rightarrow & x^2 + 3 & > & 0
\end{array}$$

Sea $x \neq 0$ entonces por teorema $x^2 > 0$ y por propiedad se cumple que $x^2 + 3$ siempre es positivo, y como $3 > 0$ entonces el valor de x son todos los números reales.

iii) $5 - x^2 < -2$

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & (-5) + 5 - x^2 & < & -2 + (-5) \\
\Rightarrow & -x^2 & < & -7 \\
\Rightarrow & x^2 & > & 7 \\
\Rightarrow & x > \sqrt{7} & & x < -\sqrt{7}
\end{array}$$

iv) $(x - 1)(x - 3) > 0$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad x-1>0 \quad y \quad x-3>0\\
x-1<0 \quad y \quad x-3<0\\
\Rightarrow \quad x>1 \quad y \quad x>3\\
x<1 \quad y \quad x<3\\
\Rightarrow \quad x>3 \qquad x<1
\end{aligned}
$$

v) $x^2-2x+2>0$

Completando cuadrados obtenemos que $x^2-2x+1^2-1^2+2>0$, después $(x-1)^2+1^2>0$, luego $x^2>0$, y en virtud de teorema nos queda que la desigualdad dada satisface a todos los números reales.

vi) $x^2+x+1>2$

Aplicando el teorema se tiene $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{2^2-4(-1)}}{2}$. luego

$$\left(x>\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad y \quad x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad y \quad x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

por lo tanto,

$$x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\cup x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

vii) $x^2-x+10>16$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad x^2-x-6 &> 0\\
\Rightarrow \quad (x-3)(x+2) &> 0\\
\Rightarrow \quad x>3 \quad y \quad x>-2\\
x<3 \quad y \quad x<-2\\
\Rightarrow \quad x>3 \qquad x<-2
\end{aligned}
$$

viii) $x^2+x+1>0$

Sabemos que $x^2>0,\ para\ x\neq 0$, luego será verdad para $x^2+x+1>0$, entonces la inecuación se cumple para todo $x\in\mathbb{R}$

ix) $(x-\pi)(x+5)(x-3)>0$ por la propiedad asociativa $(x-\pi)\left[(x+5)(x-3)\right]>0$

$$
\begin{array}{lcl}
\Rightarrow \quad x > \pi & \wedge & [(x > -5 \wedge x > 3) \vee (x < -5 \wedge x < 3)] \\
& \vee & \\
\quad\;\; x < \pi & \vee & [(x < -5 \wedge x > 3) \vee (x > -5 \wedge x < 3)] \\
\Rightarrow \quad x > \pi & \wedge & (x > 3 \vee x < -5) \\
& \vee & \\
\quad\;\; x < \pi & \wedge & -5 < x - 3 \\
\Rightarrow \quad x < \pi & \vee & -5 < x - 3
\end{array}
$$

x) $(x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$

$$
\begin{array}{lccc}
\Rightarrow & x > \sqrt[3]{2} & y & x > \sqrt{2} \\
& x < \sqrt[3]{2} & y & x < \sqrt{2} \\
\Rightarrow & x > \sqrt{2} & & x < \sqrt[3]{2}
\end{array}
$$

xi) $2^x < 8$

Podemos reescribir como $2^x < 2^3$ y por propiedad de logaritmos que se vera mas adelante se tiene que $x < 3$

xii) $x + 3^x < 4$

Visualizando, está claro que si $x = 1$ entonces $1 + 3^2 = 4$, luego cualquier número menor a 1 debería ser menor a 4, por lo tanto $x < 1$

xiii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$

$$
\begin{array}{lccc}
\Rightarrow & \dfrac{1}{x(1-x)} & > & 0 \\
\Rightarrow & \dfrac{1 \cdot [x(1-x)]^2}{x(1-x)} & > & 0 \cdot [x(1-x)]^2 \\
\Rightarrow & x(1-x) & > & 0 \\
\Rightarrow & x > 0 & y & x < 1 \\
& x < 0 & y & x > 1 \\
\Rightarrow & 0 \;<& x & <\; 1
\end{array}
$$

xiv) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$

$$
\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{>} & > & 0(x+1)^2 \\
\rightarrow & (x-1)(x+1) & > & 0 \\
\Rightarrow & x>1 & y & x>-1 \\
 & x<1 & y & x<-1 \\
\Rightarrow & x>1 & & x<-1
\end{array}
$$

5. Demostrar lo siguiente:

i) Si $a < b$, y $c < d$, entonces $a + c < b + d$

Demostración.- Por hipótesis y propiedad de los números reales se tiene $b - a > 0$ y $d - c > 0$, luego $(b - a) + (d - c) > 0$, así $a + c < b + d$

ii) Si $a < b$, entonce $-b < -a$

Demostración.- Sea $-1 < 0$, por teorema $-1(a) > -1(b)$, luego por existencia de elementos neutros $-a > -b$ por lo tanto $-b < -a$

iii) Si $a < b$ y $c > d$, entonces $a - c < b - d$

Demostración.- Si $a < b = b - a > 0$ y $c > d = d < c = c - d > 0$, por propiedad de números reales $(b - a) + (c - d) > 0$, luego $(b - d) + (-a + c) > 0$ y en virtud del teorema 1.19 y definición $(b - d) - (a - c) > 0$, por lo tanto $a - c < b - d$

iv) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$

Demostración.- Por propiedad de números reales $c(b - a) > 0$, luego $bc - ac > 0$, así $ac < bc$

v) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

Demostración.- Sea $b - a > 0$ y $0 - c > 0$, entonces $-c(b - a) > 0$, luego $ac - bc > 0$, así $ac > bc$

vi) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$

Demostración.- Sea $1 < a$ y $a - 1 > 0$, por propiedad $a(a - 1) > 0 = a^2 - a > 0$, luego $a < a^2$ y $a^2 > a$

vii) Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$

Demostración.- La demostración es similar al teorema 2.14. Por definición $0 < a$ y $a < 1$ por lo tanto $1 - a > 0$ y $a(1 - a) > 0$, $a^2 < a$.

viii) Si $a \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$

Demostración.- Tenemos que $a \geq 0$, $c \geq 0$, $a < d$ y $a < b$, en virtud de teorema $ac \leq bc$ y $ac \leq ad$ (cabe recalcar que por hipótesis podría dar el caso de $0 \leq 0$ por ello el símbolo $'' \leq ''$) por lo tanto $bc - ac \geq 0$ y $ad - ac \geq 0$. luego $ac - ac \leq ad + bc$ y $-ad - bc \leq -2ac$.
Por otro lado sea $b - a > 0$ y $d - c > 0$ entonces $(b-a)(d-c) > 0$ y $db - ad - bc + ac > 0$.
Si $-ad - bc \leq -2ac$ entonces $db - 2ac + ac > 0$ así $ac < bd$.

ix) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

Demostración.- Por el problema anterior si $0 \leq a < b$ entonces $a \cdot a < b \cdot b$ y $a^2 < b^2$

x) Si $a,\ b \geq 0$ y $a^2 < b^2$, entonces $a < b$

Demostración.- Si $b^2 - a^2 > 0$, por teorema $(b-a)(b+a) > 0$, luego $(b - a > 0 \ \wedge \ b + a > 0) \ \vee \ (b - a < 0 \ \wedge \ b + a < 0)$. Sea $a,\ b \geq 0$ queda $(b - a > 0 \ \wedge \ b + a > 0)$ por lo tanto $a < b$.

6. a) Demostrar que si $0 \leq x < y$ entonces $x^n < y^n$

Demostración.- Sea $ac < bd$, $x^2 = a$, $y^2 = b$ y $c = x$, $d = x$ entonces $x \cdot x \cdot x < y \cdot y \cdot y$. Si aplicamos n veces dicho teorema $x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x < y \cdot y \cdot y \cdot ... \cdot y$ se tiene $x^n < y^n$

b) Demostrar que si $x < y$ y n es impar, entonces $x^n < y^n$

Demostración.- Si consideramos $x \geq 0$ ya quedo demostrado anteriormente. Ahora consideremos el caso donde $x < y \leq 0$, por lo tanto $0 \leq -y < -x$, así por la parte a) $-y^n < -x^n$, que significa que n es impar, y por lo tanto $x^n < y^n$. Finalmente si $x < 0 \geq y$ entonces $x^n < 0 \leq y^n$, ya que n es impar.Así queda demostrado la proposición dada.

c) Demostrar que si $x^n =^n$ y n es impar, entonces $x = y$

Demostración.- Sea $n = 2k - 1$ y $x^n = y^n$ entonces $x^{2k-1} - y^{2k-1} = 0$ y por teorema $(x^{2k-1} - y^{2k-1})(x^{(2k-1)-1} + x^{(2k-1)-2}y^{2k-1} + ... + x^{2k-1}y^{(2k-1)-2} + y^{(2k-1)-1}) = 0$. Sea $x,\ y \neq 0$ entonces por la propiedad de existencia de reciproco o inverso $x - y = 0$ por lo tanto $x = y$

d) Demostrar que si $x^n = y^n$ y n es par, entonces $x = y$ ó $x = -y$

Demostración.- Si n es par, entonces $x, y \geq 0$ y $x^n = y^n$,luego $x = y$. Además, si $x, y \leq 0$ y $x^n = y^n$, entonces $-x, -y \geq 0$ y $(-x)^n = (-y)^n$, por lo tanto $x = y$. La única posibilidad es que x e y sea positivo y el otro negativo. En este caso, x e $-y$ son ambos positivos o negativos. Además $x^n = (-y)^n$, dado que n es par se sigue de los casos anteriores que $x = -y$.

7. Demostrar que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

Demostración.-

1. $a < \sqrt{ab}$

   Si $4a < b$ entonces $a^2 < ab$ y por raíz cuadrada dado que $a,\ b > 0$ entonces $a < \sqrt{ab}$

2. $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

   En vista de que $a,\ b > 0$ y $a < b$ entonces $a - b > 0$, $(a-b)^2 > 0$ por lo tanto, $a^2 - 2ab + b^2 > 0 \Rightarrow 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab - 2ab + 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 4ab < (a+b)2 \Rightarrow ab < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

3. $\dfrac{a+b}{2} < b$

   Si $a < b$ entonces $a + b < 2b$ por lo tanto $\dfrac{a+b}{2} < b$

Y por la propiedad transitiva queda demostrado.

8. Aunque las propiedades básicas de las desigualdades fueron enunciadas en términos del conjunto P de los números positivos, y $<$ fue definido en términos de P este proceso puede ser invertido. Supóngase que las propiedades 10 al 13 se sustituyen por:

P-10 Cualquier que sean los números a y b, se cumple una y sólo una de las relaciones siguientes

- $a = b$
- $a < b$
- $b < a$

P-11 Cualquiera que sean a, b y c, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

P-12 Cualquiera que sean a, b y c, si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

P-13 Cualquiera que sean a, b y c, si $a < b$, y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Demostrar que las propiedades 10 al 13 se pueden deducir entonces como teoremas.

Demostración.- Con respecto a **P-11** se tiene $b - a > 0$ y $c - b > 0$ de modo que $c - a > 0$, por lo tanto $a < c$. Luego para **P-12** se tiene $b - a > 0$, por propiedad de neutro aditivo $b - a + c - c > 0$, en consecuencia $a + c < b + c$. Después para **P-13** tenemos $c(b - a) > 0$ por lo tanto $ac < bc$. Por último si $a < 0$ entonces $-a > 0$; ya que si $-a < 0$ se cumpliese, se tendría $0 = a + (-a) < 0$ el cual es un absurdo. En consecuencia, cualquier número a satisface una de las condiciones $a = 0$, $a > 0$ ó $-a > 0$. Con esto queda demostrado **P-10.**

9. Dese una expresión equivalente de cada una de las siguientes utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto.

$$
\begin{array}{rrcl}
(i) & |\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}| & \Rightarrow & \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7} \\
(ii) & ||a+b|-|a|-|b|| & \Rightarrow & |a+b|-|a|-|b| \\
(iii) & |\left(|a+b|+|c|-|a+b+c|\right)| & \Rightarrow & |a+b|+|c|-|a+b+c| \\
(iv) & |x^2-2xy+y2| & \Rightarrow & x^2-2xy+y2 \\
(v) & |\left(|\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}|\right)| & \Rightarrow & \sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}
\end{array}
$$

10. Expresar lo siguiente prescindiendo de signos de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.

(i) $|a+b|-|b|$

$$
\begin{array}{rcccccccc}
a & \text{si} & a & \geq & -b & \text{y} & b & \geq & 0 \\
-a & \text{si} & a & \leq & -b & \text{y} & b & \leq & 0 \\
a+2b & \text{si} & a & \geq & -b & \text{y} & b & \leq & 0 \\
-a-2b & \text{si} & a & \leq & -b & \text{y} & b & \geq & 0
\end{array}
$$

(ii) $|x|-|x^2|$

$$
\begin{array}{rcccc}
x-x^2 & \text{si} & x & \geq & 0 \\
-x-x^2 & \text{si} & x & \leq & 0
\end{array}
$$

(iii) $|x|-|x^2|$

$$
\begin{array}{rcc}
x-x^2 & si & x \leq 0 \\
-x-x^2 & si & x \geq 0
\end{array}
$$

(iv) $a-|(a-|a|)|$

$$
\begin{array}{rcc}
a & si & a \leq 0 \\
3a & si & a \geq 0
\end{array}
$$

11. Encontrar todos los números x para los que se cumple

(i) $|x-3|=8$

$$
\begin{array}{rcccll}
-8 & = & x-3 & = & 8 & \text{teorema 4.1} \\
-5 & = & x & = & 11 &
\end{array}
$$

(ii) $|x-3|<8$

$$
\begin{array}{rcccll}
-8 & < & x-3 & < & 8 & \text{teorema} \\
-5 & < & x & < & 11 &
\end{array}
$$

(iii) $|x+4|<2$

$$
\begin{array}{rcccll}
-2 & < & x+4 & < & -2 & \text{teorema} \\
-6 & < & x & < & -2 &
\end{array}
$$

(iv) $|x-1|+|x-2|>1$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si \quad x \geq 2 \\ 2-x & si \quad x \leq 2 \end{cases} \tag{1.2}$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$\begin{array}{llcccc} \text{Si} & x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)+(2-x)>1 & \Rightarrow & x<1 \\ \text{Si} & 1 \leq x \leq 2 & \Rightarrow & (x-1)+(2-x)>1 & \Rightarrow & 1>1 \\ \text{Si} & x \geq 2 & \Rightarrow & (x-1)+(x-2)>1 & \Rightarrow & x>2 \end{array}$$

Así: $x<1 \ \vee \ x>2$

(v) $|x-1|+|x+1|<2$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -1-x & si \quad x \leq -1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$\begin{array}{llcccc} \text{Si} & x \leq -1 & \Rightarrow & (1-x)+(1-x)<2 & \Rightarrow & x>-1 \\ \text{Si} & -1 \leq x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)+(x+1)<2 & \Rightarrow & 2<2 \\ \text{Si} & x \geq 1 & \Rightarrow & (x-1)+(x+1)<2 & \Rightarrow & x<1 \end{array}$$

Pero es falso que x satisface a $-1 \leq x \leq 1$, y contradice a que x satisface a todos los reales, por lo tanto no existe solución

(vi) $|x-1|+|x+1|<1$

De la misma manera que el anterior ejercicio no tiene solución para ningún x.

(vii) $|x-1| \cdot |x+1| = 0$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -1-x & si \quad x \leq -1 \end{cases} \tag{1.6}$$

queda comprobar:

$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x \leq -1 & \Rightarrow & (1-x)+(-1-x)=0 & \Rightarrow & x \leq -1 \cup x=1 \cup x=-1 \\ \text{Si} & -1 \leq x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)\dot{(}x+1)=0 & \Rightarrow & -1 \leq x \leq 1 \cup x=1 \cup x=-1 \\ \text{Si} & x \geq 1 & \Rightarrow & (x-1)\dot{(}x+1)=0 & \Rightarrow & x \notin \mathbb{R} \end{array}$$

Por lo tanto $x = 1$ ó $x = -1$

(viii) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$

Si $x > 1$ ó $x < -2$, entonces la condición se convierte en $(x-1)(x+2) = 3$ ó $x^2 + x - 5 = 0$, cuyas soluciones son según la formula general son $\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ y $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$. Puesto que el primer valor es $x > 1$ y el segundo es $x < -2$, ambos son soluciones de $|x-1||x+2| = 3$. Para $-2 < x < 1$, la condición se convierte en $(1-x)(x+2) = 3$ ó $x^2 + x + 1 = 0$, la cual carece de soluciones.

12. Demostrar lo siguiente:

(i) $|xy| = |x| \cdot |y|$

Demostración.- Si $|xy|$ Por teorema $\sqrt{(xy)^2}$ luego por propiedad $\sqrt{x^2 \cdot y^2}$, así $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}$ y $|x| \cdot |y|$

(ii) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$

Demostración.- Si $\left|\dfrac{1}{x}\right|$ por definición $\sqrt{(x^{-1})^2}$, después $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2/2}$, por propiedad $\dfrac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{x^2}}$, luego $\dfrac{1}{|x|}$

(iii) $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$ si $y \neq 0$

Demostración.-

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{x^{2/2}}{y^{2/2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{2/2} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

(iv) $|x-y| \leq |x| + |y|$

Demostración.- Sea $(|x-y|)^2 \leq (|x|+|y|)^2$, entonces:

$$\begin{aligned}
(|x-y|)^2 &= (x-y)^2 \\
&= x^2 - 2xy + y^2 \\
&\leq |x|^2 + |-2xy| + |y|^2 && \text{Ya que } -2xy \leq |-2xy| \\
&= |x|^2 + |-2||x||y| + |y|^2 && \text{Por teorema} \\
&= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\
&= (|x| + |y|)^2
\end{aligned}$$

luego por teorema $|x-y| \leq |x| + |y|$

(v) $|x| - |y| \leq |x-y|$

Demostración.- Su demostración es parecida al anterior teorema,

$$\begin{aligned}
(|x| - |y|)^2 &= |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \\
&\leq x^2 - 2xy + y^2 && \text{por el contrareciproco de } |2xy| \geq 2xy \\
&= (x-y)^2 \\
&= |x-y|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|x| - |y| \leq |x-y|$

(vi) $||x| - |y|| \leq |x-y|$ (¿ Por qué se sigue esto inmediatamente del anterior teorema ?)

Demostración.- Sea $\sqrt{(|x| - |y|)^2}$ entonces,

$$\sqrt{(|x| - |y|)^2} = \sqrt{(x^2 - 2|x||y| + y^2} \leq \sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$$

y por definición se tiene $|x-y|$

(vii) $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$

Demostración.- Sea $\sqrt{(x+y+9)^2}$ entonces,

$$\sqrt{x^2 + z^2 + +y^2 + 2xy + 2xz + 2yz} \leq \sqrt{|x|^2 + |z|^2 + +|y|^2 + 2|x||y| + 2|x||z| + 2|y||z|}$$

por lo tanto $\sqrt{(|x| + |y| + |z|)^2}$. La igualdad se prueba si $\forall x, y, z \geq 0$ ó $\forall x, y, z \leq 0$

13. El máximo de dos números x e y se denota por $max(x,y)$. Así $max(-1,3) = max(3,3)$ y $max(-1,-4) = max(-4,-1 = -1)$. El mínimo de x e y se denota por $min(x,y)$. Demostrar que:

1. $max(x,y) = \dfrac{x+y+|y-x|}{2}$

2. $min(x,y) = \dfrac{x+y-|y-x|}{2}$

Derivar una fórmula para $max(x,y,z)$ y $min(x,y,z)$, utilizando. por ejemplo, $max(x,y,z) = max(x, max(x,y))$

Demostración.- Por definición de valor absoluto se tiene:

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & si, \quad x \geq y \\ y-x & si, \quad x \leq y \end{cases} \tag{1.7}$$

Por lo tanto

- $max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+x-y}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$
- $max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+y-x}{2} = \dfrac{2y}{2} = y$

La demostración es parecido para para $min(x,y)$
Se deriva una formula para $mas(x,y,z) = max(x, max(y,z))$ de la siguiente manera

$$max(x, max(y,z)) = \frac{x + \dfrac{y+z+|y-z|}{2} + \left| x - \dfrac{y+z+|y-z|}{2} \right|}{2}$$

14. Demostrar:

(a) Demostrar que $|a| = |-a|$

Demostración.- Si $a \geq 0$, para $|a|^2$ entonces a^2, luego $(-a)^2 = |-a|^2$, así se demuestra que $|a| = |-a|$. Luego es evidente para $a \leq 0$.

(b) Demostrar que $-b \leq a \leq b$ si y sólo si $|a| \leq b$. En particular se sigue que $-|a| \leq a \leq |a|$.

Demostración.- Sea $-a \leq b \wedge a \leq b$ entonces por definición de valor absoluto $|a| = a \leq b$ si $a \geq 0$. Y $|a| = -a \leq b$ si $a \leq 0$.
Por otro lado si $|a| \leq b$, entonces es claro que $b \geq 0$. Pero $|a| \leq b$ significa que $a \leq b$ si $a \leq 0$ como también $a \leq b$ si $a \leq 0$. Análogamente $|a| \leq b$ significa que $-a \leq b$, y en consecuencia $-b \leq a$, si $a \leq 0$ y $-b \leq a$, si $a \geq 0$, por lo tanto $-b \leq a \leq b$

(c) Utilizar este hecho para dar una nueva demostración de $|a+b| \leq |a| + |b|$

Demostración.- Sea $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ entonces $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$, de donde $|a+b| \leq |a|+|b|$.

15. Demostrar que si x e y son 0 los dos, entonces:

- $x^2 + xy + y^2 > 0$

  Demostración.- Sea $(x-y)^2 > 0$ entonces $x^2+y^2 > xy$. Por otro lado si $x, y \neq 0$ por teorema $x^2+y^2 > 0$, dado que $x^2+y^2 > xy$ entonces se cumple $x^2+y^2+xy > 0$.

- $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

  Demostración.- Sea $(x^5 - y^5)^2 > 0$, por teorema $\left[(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)\right]^2 > 0$, así $(x-y)^2(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)^2 > 0$, $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)^2 > 0$, por lo tanto $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) > 0$

16. **(a)** $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ solamente cuando $x = 0$ ó $y = 0$

Demostración.- Sea $x = 0$ y $x^2 + xy + y^2$ por teorema $0 \cdot y = 0$ entonces $x^2 + y^2$. Se demuestra de la misma manera para $y = 0$

(b) $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ solamente cuando $x = 0$ ó $y = 0$ ó $x = -y$

Demostración.- Es evidente para $x = 0$ é $y = 0$. Solo faltaría demostrar para $x = -y$.
Si $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ entonces $(x+y)^3 = x^3 + 3(-y)^2y + 3(-y)y^2 + y^3 = x^3 + 3y^3 + 3(-y)^3 + y^3$, por lo tanto $x^3 + y^3$.

(c) Haciendo uso del hecho que

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geq 0$$

demostrar que el supuesto $4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0$ lleva una contradicción.

Demostración.-

$$\begin{array}{rcl} 4^2 + 8xy + 4y^2 & < & 2xy \\ 4(x^2 + 2xy + y^2) & < & 2xy \\ x^2 + 2xy + y^2 & < & xy/2 \end{array}$$

Dado que $2xy < xy/2$ es falso, concluimos que $4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0$ también es falso y así llegamos a una contradicción.

(d) Utilizando la parte (b) decir cuando es $(x+y)^4 = x^4 + y^4$

Demostración.- Se tiene $(x+y)^2(x+y)^2$, por lo tanto se cumple que $x^4 + y^4$, si $x = 0$ ó $y = 0$

(e) Hallar cuando es $(x+y)^5 = x^5 + y^5$. Ayuda: Partiendo del supuesto $(x+y)^5?x^5 + y^5$ tiene que ser posible deducir la ecuación $x^3 + 2x^2y + y^3 = 0$, si $xy \neq 0$. Esto implica que $(x+y)^3 = x^2y + xy^2 = xu(x+y)$.
El lector tendría que ser ahora capaz de intuir cuando $(x+y)^n = x^n + y^n$.

Demostración.- Si $x^5 + y^5 = (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$, entonces $0 = 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4$ $0 = 5xy(x^3 + 2x^2 + y + 2xy^2 + y^3)$. Así $x^3 + 2x^2 + y + 2xy^2 + y^3 = 0$.
restando esta ecuación de $(x+y)^3 = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$ obtenemos, $(x+y)^3 = x^2y + xy^2 = xy(x+y)$. Así pues, ó bien $x + y = 0$ ó $(x+y)^2 = xy$; la última condición implica que $x^2 + xy + y^2 = 0$, con lo que $x = 0$ ó $y = 0$. por lo tanto $x = 0$ ó $y = 0$ ó $x = -y$.

17. (a) El valor mínimo de $2x^2 - 2x + 4$

Para poder hallar el valor mínimo debemos llevar la ecuación a su forma canónica es decir,

$$\begin{aligned}
2x^2 - 3x + 4 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 4 \\
&= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + 4 \\
&= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4
\end{aligned}$$

El mínimo valor posible es $\frac{23}{8}$, cuando $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 0$ ó $x = \frac{3}{4}$

(b) El valor mínimo de $x^2 - 3x + 2y^2 + 4y + 2$

$$x^2 - 3x + 2y^2 + 4y + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2(y+1)^2 - \frac{9}{4}$$

así el valor mínimo es $-\frac{9}{4}$, cuando $x = \frac{3}{2}$ y $y = -1$

(c) Hallar el valor mínimo de $x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 6y + 7$

$$\begin{aligned}
x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 6y + 7 &= x^2 + 4(y-1)x + 5y^2 - 6y + 7 \\
&= [x + 2(y-1)]^2 + 5y^2 - 6y + 7 - 4(y-1)^2 \\
&= [x + 2(y - 19]^2 + (y+1)^2 + 2
\end{aligned}$$

Así el valor mínimo es 2, cuando $y = -1$ y $x = -2(y-1) = 4$

18. (a) Supóngase que $b^2 - 4c \geq 0$. Demostrar que los números

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

satisfacen ambos la ecuación $x^2 + bx + c = 0$

Demostración.- Para probar que satisfaga a la ecuación dada, podemos empezar a completar al cuadrado de la siguiente manera: $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, así $\left(x^2 + \frac{b}{2}\right)^2 = -c + \frac{b^2}{4}$. Por existencia de raíz cuadrada de los números reales no negativos $x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}}$, luego $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$.

(b) Supóngase que $b^2 - 4c < 0$. Demostrar que no existe ningún número x que satisfaga $x^2 + bx + c = 0$; de hecho es $x^2 + bx + c > 0$ para todo x.

Demostración.- Tenemos

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\geq c-\frac{b^2}{4}$$

pero por hipótesis $c-\dfrac{b^2}{4}>0$, así $x^2+bx+c>0$ para todo x.

(c) Utilizar este hecho para dar otra demostración de que si x e y no son ambos 0, entonces $x^2+xy+y^2>0$

Demostración.- Aplicando la parte b con y para b e y^2 para c, tenemos $b^2-4c=y^2-4y^2<0$ para $x\neq 0$, entonces $x^2+xy+y^2>0$ para todo x.

(d) ¿Para qué número α se cumple que $x^2+\alpha xy+y^2>0$ siempre que x e y no sean ambos 0?

Demostración.- α debe satisfacer $(\alpha y)^2-4y^2<0$, o $\alpha^2<4$, o $|\alpha|<2$

(e) Hállese el valor mínimo posible de x^2+bx+c y de ax^2+bx+c, para $a>0$

Demostración.- Por ser

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\geq c-\frac{b^2}{4},$$

y puesto que x^2+bx+c tiene el valor $c-\dfrac{b^2}{4}$ cuando $x=-\dfrac{b}{2}$, el valor mínimo es $c-\dfrac{b^2}{4}$.
Después

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

el mínimo es

$$a\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$$

19. El hecho de que $a^2\geq 0$ para todo número a, por elemental que pueda parecer, es sin embargo la idea fundamental en que se basan en último instancia la mayor parte de las desigualdades. La primerísima de todas las desigualdades es la desigualdad de Schwarz:

$$x_1y_1+x_2y_2\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}.$$

Las tres demostraciones de la desigualdad de Schwarz que se esbozan más abajo tienen solamente una cosa en común: el estar basadas en el hecho de ser $a^2\geq 0$ para todo a.

(a) Demostrar que si $x_1=\lambda y_1$ y y $x_2=\lambda y_2$ para algún número λ, entonces vale el signo igual en la desigualdad de Schwarz. Demuéstrese lo mismo en el supuesto $y_1=y_2=0$: supóngase ahora que y_1 e y_2 no son ambos 0 y que no existe ningún número λ tal que $x_1=\lambda y_1$ y $x_2=\lambda y_2$. Entonces

$$\begin{array}{rcl}0&<&(\lambda y_1-x_1)^2+(\lambda y_2-x_2)^2\\&=&\lambda^2(y_1^2+y_2^2)-2\lambda(x_1y_1+x_2y_2)+(x_1^2+x_2^2)\end{array}$$

Utilizando el teorema anterior, completar la demostración de la desigualdad de Schwarz.

Demostración.- Primero, Si $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$., entonces remplazando en la desigualdad de Schwarz, $\lambda \cdot (y_1)^2 + \lambda \cdot (y_2)^2 = \sqrt{(\lambda y_1)^2 + (\lambda y_2)^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ luego por propiedades de raíz se cumple

$$\lambda(y_1^2 + y_2^2) = \sqrt{\left[\lambda(y_1^2 + y_2^2)\right]^2}$$

Vemos que también se cumple la igualdad para $y_1 = y_2 = 0$.
Por último Si un tal λ no existe, entonces la ecuación carece de solución en λ, de modo que por el teorema 1.25 tenemos,

$$\left[\frac{2(x_1y_1 + x_2y_2)}{y_1^2 + y_2^2}\right]^2 - \frac{4(x_1^2 + y_1^2)}{y_1^2 + y_2^2} < 0$$

lo cual proporciona la desigualdad de Schwartz.

(b) Demostrar la desigualdad de Schwarz haciendo uso de $2xy \leq x^2 + y^2$(¿Cómo se deduce esto?) con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

primero para $i = 1$ y después para $i = 2$.

Demostración.- En vista de que $(x - y)^2 \geq 0$, tenemos $2xy \leq x^2 + y^2$. Realizando el respectivo remplazo tenemos:

1)

$$2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

2)

$$2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_2^2}{\sqrt{x_2^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

Luego sumando 1) y 2)

$$2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + 2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + \frac{x_2^2}{\sqrt{x_2^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

nos queda

$$\frac{2(x_1y_1 + x_2y_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leq 2$$

(c) Demostrar la desigualdad de Schwarz demostrando primero que

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

Demostración.- Es fácil ver que la igualdad se cumple,

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1)^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + (x_2y_2)^2 + (x_1y_2)^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + (x_2y_1)^2 = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y$$

Ya que $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$ entonces,

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2$$

(d) Deducir de cada una de estas tres demostraciones que la igualdad se cumple solamente cuando $y_1 = y_2 = 0$ ó cuando existe un número λ tal que $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$

Demostración.- La parte a) ya prueba el resultado deseado.
En la parte b) la igualdad se mantiene sólo si se cumple en (1) y (2). Sea $2xy = x^2 + y^2$ sólo cuando $(x-y)^2 = 0$ es decir $x = y$ esto significa

$$\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \ ; \ para\ x = 1, 2$$

para que podamos elegir $\lambda = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} / \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.
En la parte (c), la igualdad se cumple solamente cuando $(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geq 0$. Una posibilidad es $y_1 = y_2 = 0$. Si $y \leq 0$, entonces $x_l = (x_1 y_1) y_1$ y también $x_2 = (x_1 / y_1) y_1$ análogamente, si $y_2 \leq 0$, entonces $\lambda = x2/y2$.

20. Demostrar que si

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |y - y_0| < \frac{e}{2}$$

entonces

$$|(x + y) - (x_o + y_0)| < \epsilon,$$
$$|(x - y) - (x_o - y_0)| < \epsilon.$$

Demostración.- primeramente si $|(x + y) - (x_o + y_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)|$, por desigualdad triangular e hipótesis,

$$|(x - x_0) + (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Demostramos de similar manera y por teorema 1.7,

$$|(x - y) - (x_o - y_0)| = |(x - x_0) - (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

21. Demostrar que si

$$|x - x_0| < min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}\right) \quad y \quad |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2(x_0 + 1)}$$

entonces $|xy - x_0 y_0| < \epsilon$.

La primera igualdad de la hipótesis significa precisamente que:

$$|x - x_0| < 1 \quad y \quad |x - x_0| \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

Demostración.- puesto que $|x - x_0| < 1$ se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

Así pues

$$\begin{aligned}
|xy - x_0y_0| &= |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\
&= |x(y-y_0) + y_0(x-x_0)| \\
&\leq |x|\cdot|y-y_0| + |y_0|\cdot|x-x_0| \\
&< (1+|x_0|)\cdot\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1|)} + |y_0|\cdot\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1|)} \qquad \text{ya que } |y_0|\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1|)} < |y_0|\frac{\epsilon}{2|y_0|} \text{ para } |y_0|\neq 0 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \qquad \text{ó } |y_0|\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1|)} = \frac{\epsilon}{2} \text{ si } |y_0| = 0 \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

22. Demostrar que si $y_0 \neq 0$ y

$$|y-y_0| < min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{|y_0|}\right|$$

Demostración.- Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y-y_0| < \frac{y_0}{2},$$

de modo que $|y| < \dfrac{|y_0|}{2}$. En particular, $y \neq 0$, y

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{y_0}.$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y|\cdot|y_0|} < \frac{2}{y_0}\cdot\frac{1}{|y_0|}\cdot\frac{\epsilon|y_o|^2}{2} = \epsilon$$

23. Sustituir los interrogantes del siguiente enunciado por expresiones que encierren $\epsilon,\ x_0\ e\ y_0$ de tal manera que la conclusión sea válida:
Si y_0 y

$$|y-y_0| <? \quad y \quad |x-x_0| <?$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| < \epsilon$$

Sea $|x\dfrac{1}{y} - x_0\dfrac{1}{y_0}| < \epsilon$ entonce $|x\cdot y^{-1} - x_o\cdot y_0^{-1}| < \epsilon$ por teorema 4.14

$$|x-x_0| < min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0^{-1}|+1)}\right) \qquad y \qquad |y^{-1} - y_0^{-1}| < \frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}$$

luego por teorema 4.15

$$|y-y_0| < min\left(\frac{\dfrac{\epsilon}{2(|x_o|)+1}\cdot|y_0|^2}{2}\right) = \min\left(\frac{\epsilon\cdot|y_0|^2}{4(|x_o|+1)}\right)$$

24. Este problema hace ver que la colocación de los paréntesis en una suma es irrelevante. Las demostraciones utilizan la "La inducción matemática"; si no se está familiarizado con este tipo de demostraciones, pero a pesar de todo se quiere tratar este problema, se puede esperar hasta haber visto el capítulo 2, en el que se explican las demostraciones por inducción. Convengamos, para fijar ideas que $a_1 + ... + a_n$ denota

$$a_1 + (a_2(a_3 + ... + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n)))...)$$

Así $a_1 + a_2 + a_3$ denota $a_1(a_2 + a_3)$, y $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ denota $a_1(a_2 + (a_3 + a_4))$, etc.

(a) Demostrar que

$$(a_1 + ... + a_k) + a_{k+1} = a_1 + ... + a_{k+1}$$

Demostración.- Sea $k = 1$ entonces $a_1 + a_2 = a_1 + a_2$. Si la ecuación se cumple para k entonces

$$\begin{array}{rcl} (a_1 + ... + a_{k+1}) + a_{k+2} & = & [(a_1 + ... + a_k) + a_{k+1}] + a_{k+2} \\ & = & (a_1 + ... + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2}) \\ & = & a_1 + ... + a_k + (a_{k+1} + a_{k+2}) \\ & = & a_1 + ... + a_{k+2} \end{array}$$

(b) Demostrar que si $n \geq k$, entonces

$$(a_1 + ... + a_k) + (a_{k+1} + ... + a_n) = a_1 + ... + a_n$$

Demostración.- Para $k = 1$ la ecuación se reduce a la definición de $a_1 + ... + a_k$. Si la ecuación se cumple para $k < n$ entonces,

$$\begin{array}{rcll} (a_1 + ... + a_{k+1}) + (a_{k+2} + ... + a_n) & = & ([a_1 + ... + a_k] + a_{k+1}) + (a_{k+2} + ... + a_n) & \text{parte } (a) \\ & = & (a_1 + ... + a_k) + (a_{k+1} + (a_{k+2} + ... + a_n)) & \text{por propiedad} \\ & = & (a_1 + ... + a_k) + (a_{k+1} + ... + a_n) & \text{por definición} \\ & = & a_1 + ... + a_n & \text{hipótesis} \end{array}$$

(c) Sea $s(a_1, ..., a_k)$ una suma formada con $a_1, ..., a_k$. Demostrar que

$$s(a_1, ..., a_k) = a_1 + ... + a_k$$

Demostración.- El aserto es claro para $k = 1$. Supóngase que se cumple para todo $l < k$, entonces

$$\begin{array}{rcll} s(a_1, ..., a_k) & = & s^{'}(a_1, ..., a_l) + s^{''}(a_{l+1}, ..., a_k) & \\ & = & (a_1 + ... + a_l) + (a_{l+1}) + (a_{l+1} + ... + a_k) & \text{hipótesis} \\ & = & a_1 + ... + a_k & \text{parte } (b) \end{array}$$

25. Supóngase que por número se entiende sólo el 0 ó el 1 y que $+$ y $\cdot$ son las operaciones definidas mediante las siguiente tablas.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

	0	1
0	0	0
1	0	1

Comprobar que se cumplen las propiedades P1-P2, aunque 1+1=0

P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 resultan evidentes sin más que observar las tablas. Se presentan ocho casos para $P1$ y este número puede incluso reducirse: al cumplirse P2, resulta claro que $a + (n/b + c) = (a + b) + c$ si a, b ó c es 0, de modo que bastará comprobar el caso $a = b = c = 1$. Una observación análoga puede hacerse para $P5$. Finalmente, P9 se cumple para $a = 0$, ya que $0 \cdot b = 0$ para todo b, y para $a = 1$, ya que $1 \cdot b = b$ para todo b.

2

Distintas clases de números

2.1 Problemas

1. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

(i) $1^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Demostración.- Sea $n = k$:

$$1^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

Para $k = 1$,

$$1^2 = \frac{1(1+2)(2+1)}{6}$$

por lo tanto se cumple para $k = 1$, Luego para $k = k + 1$,

$$1^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

así cabe demostrar que:

$$\begin{aligned}
\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
\frac{2k^3 + k^2 + 2k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 3k^2 + 6k^2 + 9k + 4k + 6}{6} \\
\frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} &= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}
\end{aligned}$$

(ii) $1^3 + ... + n^3 = (1 + ... + n)^2$

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces la igualdad es verdadera ya que $1^3 = 1^2$.Supongamos que se cumple para algún número $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$1^3 + ... + k^3 = (1 + ... + k)^2,$$

Luego suponemos que se cumple para $k + 1$,

$$1^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = (1 + ... + (k+1))^2$$

Así solo falta demostrar que

$$\begin{aligned}(1+...+(k+1))^2 &= (1+...+k)^2+2(1+...+k)(k+1)+(k+1)^2 \\ &= (1^2+...+k)^2+2\frac{k(k+1)}{2}(k+1)+(k+1)^2 \\ &= 1^3+...+k^3+(k^3+2k^2+k)+(k^2+2k+1) \\ &= 1^3+...+k^3+(k+1)^3\end{aligned}$$

Por lo tanto es válido para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$

2. Encontrar una fórmula para

(i) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+...+(2n-1)$

$$\begin{array}{rcccl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 1{+}3 & = & 4 & = & 2^2 \\ 1{+}3{+}5 & = & 9 & = & 3^2 \\ 1{+}3{+}5{+}7 & = & 16 & = & 4^2 \\ 1{+}3{+}5{+}7{+}9 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

(ii) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2$

$$\begin{aligned}1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2 &= \left[1^2+2^2+...+(2n)^2\right]-\left[2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2\right] \\ &= \left[1^2+2^2+...+(2n)^2\right]-4\left[1^2+2^2+3^2+...+n^2\right] \\ &= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n(2n+1)\left[4n+1-2(n+1)\right]}{6} \\ &= \frac{2n(2n+1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}\end{aligned}$$

Definición 2.1 **Coeficiente Binomial.** Si $0 \le k \le n$, se define el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!},\ si\ k \neq 0,\ n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Esto se convierte en un caso particular de la primera fórmula si se define $0! = 1$.

3. (a) Demostrar que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Esta relación de lugar a la siguiente configuración, conocida por triángulo de Pascal: Todo número que no esté sobre uno de los lados es la suma de los dos números que tiene encima: El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número k-ésimo de la fila $(n+1)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{kn!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

(b) Obsérvese que todos los números del triángulo de Pascal son números naturales. Utilícese la parte (a) para demostrar por inducción que $\binom{n}{k}$ es siempre un número natural.

Demostración.- Se ve claramente que $\binom{1}{1}$ es un número natural. Supóngase que $\binom{n}{p}$ es un número natural para todo $p \leq n$. Al ser:

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \; para \; p \leq n,$$

se sigue que $\binom{n+1}{p}$ es un número natural para todo $p \leq n$, mientras que $\binom{n+1}{n+1}$ es también un número natural. Así pues, $\binom{n+1}{p}$ es un número natural para todo $p \leq n+1$

(c) Dése otra demostración de que $\binom{n}{k}$ es un número natural, demostrando que $\binom{n}{k}$ es el número de conjuntos de exactamente k enteros elegidos cada uno entre $1, ..., n$.

Demostración.- Existen $n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ k-tuplas de enteros distintos elegidos entre $1, ..., n$, ya que el primero puede ser elegido de n maneras, el segundo de $n-1$ maneras, etc. Ahora bien, cada conjunto formado exactamente por k enteros distintos, da lugar a $k!$ k-tuplas, de modo que el número de conjuntos será $n(n^{-}1) \cdot ... \cdot (n-k+l)/k! = \binom{n}{k}$

(d) Demostrar el **TEOREMA DEL BINOMIO**: Si a y b son números cualesquiera, entonces

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}b^j.$$

El teorema del binomio resulta claro para $n = 1$. Sea algún número $k \in \mathbb{Z}^+$

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

de donde suponemos que se cumple para $k+1$ por lo tanto

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j.$$

entonces,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j \qquad \text{por la parte } (a)
\end{aligned}$$

con lo que el teorema del binomio es válido para $n+1$. y por lo tanto para $n \in \mathbb{Z}^+$

(e) Demostrar que

(i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$

Demostración.- Por el teorema del binomio $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(1^j)(1^{n-j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + ... \pm \binom{n}{n} = 0$

Demostración.- De igual manera por el teorema del binomio $0 = (1+(-1))^n = \sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$

(iii) $\displaystyle\sum_{l\ impar} \binom{n}{l} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... = 2^{n-1}$

Demostración.- Restando (ii) de (i) se tiene que,

$$\begin{aligned}
2\tbinom{n}{0}+2\tbinom{n}{2}+...+2\tbinom{n}{n} &= 2^n-0\\
2\sum_{j\ impar}^{n}\tbinom{n}{j} &= 2^n\\
\sum_{j\ impar}^{n}\tbinom{n}{j} &= 2^n\cdot 2^{-1}\\
\sum_{j\ impar}^{n}\tbinom{n}{j} &= 2^{n-1}
\end{aligned}$$

(iv) $\displaystyle\sum_{l\ par}\binom{n}{l}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...=2^{n-1}$

Demostración.- La demostración es similar al problema anterior pero esta vez sumamos (i) en (ii)

4. (a) Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}=\binom{n+m}{l}$$

Demostración.- La multiplicación de series formales de potencias se realiza recolectando los términos con las mismas potencias de x:

$$\left(\sum_{a_K}^{\infty}a_kx^k\right)\left(\sum_{a_K}^{\infty}b_kx^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}a_jx^jb_{k-j}x^{k-j}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}\right)x^k$$

Tenga en cuenta que los subíndices en la suma interna suman k, la potencia de x en la suma externa. Luego aplicando la multiplicación de series de potencias a $(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$ y $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$ de donde

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+n}{k}x^k$$

(Los índices en las sumas a ∞ ya que para $k>n$, $\binom{n}{k}=0$), Se tiene:

$$(1+x)^m(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}\right]x^k$$

ya que $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$ entonces

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

(b) demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Demostración.- Sea $m = n$, $l = n$ en la parte (a) y notar que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. de donde se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n+n}{n}$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

5. ——————(a)——————

Demostrar por inducción sobre n que

$$1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

si $r \neq 1$ (Si es $r = 1$, el cálculo de la suma no presenta problema alguno).

Demostración.- Sea $n = 1$ entonces

$$1 + r = \frac{1 - r^2}{1 - r}$$

el cual vemos que se cumple.
Luego

(a)

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + ... + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{r+1}}{1 - r} + r^{r+1} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

(b) Deducir este resultado poniendo $S = 1 + r + ... + r^n$, multiplicando esta ecuación por r y despejando S entre las dos ecuaciones.

Tenemos $r \cdot S = r + ... + r^n + r^{n+1}$, luego sea $S - rS$ entonces $S(1 - r) = 1 - r^{n+1}$ por lo tanto $S = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

6. La fórmula para $1^2 + 2^2 + ... + n^2$ se puede obtener como sigue: Empezamos con la fórmula

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

particularmente esta fórmula para $k = 1, ..., n$ y sumando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 2^3 - 1^3 & = & 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 & = & 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ . & = & \\ . & = & \\ . & = & \\ (n+1)^3 - n^3 & = & n^2 + 3 \cdot n + 1 \\ \hline (n+1)^3 - 1 & = & 3\left[1^2 + ... + n^2\right] + 3\left[1 + ... + n\right] + n \end{array}$$

De este modo podemos obtener $\sum_{k=1}^{n} k^2$ una vez conocido $\sum_{k=1}^{n} k$ (lo cual puede obtenerse mediante un procedimiento análogo). Aplíquese este método para obtener.

(i) $1^3 + ... + n^3$

Sea $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1^4$ entonces

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1, \quad para\ k = 1, ..., n$$

por hipótesis tenemos $(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^4 - 1 - 6\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\dfrac{n(n+1)}{2} - n}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

(ii) $1^4 + ... + n^4$

Similar al anterior ejercicio partimos de $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \quad k = 1, ..., n$ para obtener $(k+1)^5 - k^5 = 5\left(\sum_{k=1}^{n} k^4\right) + 10\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + 10\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 5\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$, así

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{(n+1)^5 - 1 - 10\left(\dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{4} - 10\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} - 5\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2} - n\right)}{5} =$$

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

(iii) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$

A partir de

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, ..., n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

(iv) $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2\cdot 3^2} + ... + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

De

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}, \quad k = 1, ..., n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

7. Utilizar el método del problema 6 para demostrar que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ puede escribirse siempre en la forma

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + Cn^{p-2} + ...$$

Las diez primeras de estas expresiones son

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5}n^6 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^5 &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^6 &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^7 &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^8 &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^9 &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^10 &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n
\end{aligned}$$

Obsérvese que los coeficientes de la segunda columna son siempre $\frac{1}{2}$ y que después de la tercera columna las potencias de n de coeficiente no nulo van decreciendo de dos en dos hasta llegar a n^2 o a n. Los coeficientes de todas las columnas, salvo las dos primeras, parecen bastante fortuitos, pero en realidad obedecen a cierta regla; encontrarla puede considerarse como una prueba de superperspicacia. Para descifrar todo el asunto, véase el problema 26-17)

Demostración.- Sea $(k+1)^{p+1}$ entonces por el teorema del binomio:

$$\begin{aligned}
(k+1)^{p+1} &= \binom{p+1}{p+1}k^{p+1} + \binom{p+1}{p}k^p + ... + \binom{p+1}{1}k^p + \binom{p+1}{0}k^0 \\
(k+1)^{p+1} &= 1 \cdot k^{p+1} + \binom{p+1}{p}k^p + ... + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{0}k^0 \\
(k+1)^{p+1} - k^{p+1} &= (p+1)k^p + ... + (p+1)k + 1 \cdot k^0
\end{aligned}$$

Luego sumando para cada $k = 1, ..., n$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} 2^{p+1} - 1^{p+1} & = & (o+1)1^p + ... + (p+1)1 + 1 \cdot 1^0 \\ 3^{p+1} - 2p + 1 & = & (p+1)2^p + ... + (p+1)2 + 1 \cdot 2^0 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ (n+1)^{p+1} & = & (p+1)n^p + ... + (p+1)n + 1.^0 \end{array}$$

Luego por el anterior problema

$$\begin{array}{rcl} (n+1)^{p+1} & = & (p+1)\sum\limits_{k=1}^{n} k^p + ... + (p+1)\sum\limits_{k=1}^{n} k^1 + \sum\limits_{k=1}^{n} k^0 + k^0 \\ \dfrac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} & = & \sum\limits_{k=1}^{n} k^p + \dfrac{\binom{p+1}{p-1}}{(p+1)}\sum\limits_{k=1}^{n} k^{p-1} + ... + \dfrac{(p+1)}{(p+1)}\sum\limits_{k=1}^{n} k^1 + \dfrac{1}{(p+1)}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^0 + k^0\right) \end{array}$$

Luego asumimos que la proposición es verdad para $p-1$ donde podríamos escribir como,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} & = & \sum\limits_{k=1}^{n} k^p + \text{ términos que involucran las potencias de } n \leq p \\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^p & = & \dfrac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)} + \text{ términos que involucran las potencias de } n \leq p \end{array}$$

8. Demostrar que todo número natural es o par o impar.

Demostración.- Asumimos que n es impar o par, entonces debemos probar que $n+1$ también, es o bien impar o bien par.
Sea n par entonces $n = 2k$ para algún k. Así $n+1 = 2k+1$ y por definición vemos que es impar.
Luego sea n impar, entonces $n = 2k+1$ para algún k. Por lo tanto $n+1 = 2k+1+1 = 2k+2 = 2(k+1)$. Así en cualquiera de los dos casos, $n+1$ es o bien par o impar.

9. Demostrar que si un conjunto A de números naturales contiene n_0 y contiene $k+1$ siempre que contenga k, entonces A contiene todos los números naturales $\geq n_0$.

Demostración.- Sea B el conjunto de todos los números naturales l tales que $n_0 - 1 + 1$ está en A. Entonces 1 está en B, y $l+1$ está en B si l está en B, es decir $k = n_0 - 1 + l$, por lo tanto $k+1 = (n_0 - 1) + (l+1)$ está en A, lo que implica que $l+1$ está en B de modo que B contiene todos los números naturales, los cuales significa que A contiene todos los números naturales $\geq n_0$

10. Demostrar el principio de inducción completa a partir del principio de buena ordenación.

Demostración.- Supongamos que A contiene a 1 y que A contiene a $n+1$, si contiene a n. Si A no contiene todos los números naturales, entonces el conjunto B de números naturales que no están en A es distinto de $\emptyset$. Por lo tanto, B tiene un número natural n_0. Ahora $n_0, \neq 0$ ya que A contiene a 1 entonces podemos escribir $n_0 = (n_0 - 1) + 1$, donde $n_0 - 1$ es un número natural. Luego $n_0 - 1$ no está en B, entonces $n_0 - 1$ está en A. Por hipótesis, n_0 debe estar en A, entonces n_o no está en B, el cual es una contradicción.

11. Demostrar el principio de inducción completa a partir del principio de inducción ordinario.

Demostración.- Se sabe que 1 está en B. Luego si k está en B, entonces $1, ..., k$ están todos en A, de modo que $k+1$ está en A y así $1, ..., k+1$ están en A, con lo que $k+1$ está en B. Por inducción, $B = N$, así que también $A = N$.

12. (a) Si a es racional y b es irracional ¿es $a+b$ necesariamente irracional? ¿Y si a y b es irracional?

Respuesta.- Si, puesto que si $a+b$ fuese racional, entonces $b = (a+b) - a$ seria racional. Luego si a y b son irracionales, entonces $a+b$ podría ser racional, ya que b podría ser $r - a$ para algún número racional a.

(b) Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional?

Respuesta.- Si $a = 0$, entonces ab es racional. Pero si $a \neq 0$ entonces ab no podría ser racional, ya que entonces $b = (ab) \cdot a^{-1}$ sería racional.

(c) ¿Existe algún número a tal que a^2 es irracional pero a^4 racional?

Si existe por ejemplo $\sqrt[4]{2}$

(d) ¿Existen dos números irracionales tales que sean racionales tanto su suma como su producto?

Si existen por ejemplo $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

13. a) Demostrar que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$ son irracionales. Indicación: Para tratar $\sqrt{3}$, por ejemplo, aplíquese el hecho de que todo entero es de la forma $3n$ ó $3n+1$ ó $3n+2$ ¿Por qué no es aplicable esta demostración para $\sqrt{4}$?

Demostración.- Puesto que:

$$\begin{array}{rcccl} (3n+1)^2 & = & 9n^2+6n+1 & = & 3(3n^2+2n)+1 \\ (3n+2)^2 & = & 9n^2+12n+4 & = & 3(3n^2+4n+1)+1 \end{array}$$

queda demostrado que un número no es múltiplo de 3 si es de la forma $3n+1$ ó $3n+2$.
se sigue que k^2 es divisible por 3, entones k debe ser también divisible por 3. Supóngase ahora que $\sqrt{3}$ fuese racional, y sea $\sqrt{3} = p/q$, donde p y q no tienen factores comunes. Entonces $p^2 = 3q^2$, de modo que p^2 es divisible por 3, así que también lo debe ser p. De este modo, $p = 3p^{'}$ para algún número natural $p^{'}$, y en consecuencia $(3p^{'})^2 = 3q^2$ ó $(3p^{'})^2 = q^2$. Así pues, q es también divisible por 3, lo cual es una contradicción.
Las mismas demostraciones valen para $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$, ya que las ecuaciones,

$$\begin{array}{rcccl} (5n+1)^2 & = & 25n^2+10n+1 & = & 5(5n^2+2n)+1 \\ (5n+2)^2 & = & 25n^2+20n+4 & = & 5(5n^2+4n)+4 \\ (5n+3)^2 & = & 25n^2+30n+9 & = & 5(5n^2+6n+1)+4 \\ (5n+4)^2 & = & 25n^2+40n+16 & = & 5(5n^2+8n+3)+1 \end{array}$$

la ecuación correspondiente para los números de la forma $6n+m$ demuestran que si k^2 es divisible por 5 ó 6, entones también lo debe ser k. La demostración falla para $\sqrt{4}$, porque $(4n+2)^2$ es divisible por 4.

b) Demostrar que $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{3}$ son irracionales.

Demostración.- Puesto que,

$$(2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1,$$

se sigue que si k^3 es par, entonces k es par. Si $\sqrt[3]{2} = p/q$, donde p y q no tienen factores comunes, entonces $p^3 = 2q^3$, de modo que p^3 es divisible por 2, por lo que también lo debe ser p. Así pues, $p = 2p'$ para algún número natural p' y en consecuencia $(2p')^3 = 2q^3$, ó $4(p')^3 = q^3$. Por lo tanto, q es también par, lo cual es una contradicción.
La demostración para $\sqrt[3]{3}$ es análogo, utilizando las ecuaciones.

$$(3n+1)^3 = 27n^3 + 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1 = 3(9n^3 + 9n^2 + 3n) + 1,$$

$$(3n+2)^3 = 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8 = 3(9n^2 + 18n^2 + 12n + 2) + 2.$$

14. Demostrar que:

(a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

Demostración.- Sea $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racional, entonces $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$ sería racional, luego

$$5 + 2\sqrt{6}$$

y en consecuencia $\sqrt{6}$ sería racional lo cual es falso.

(b) $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ es irracional.

Demostración.- Sea $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ racional, entonces

$$\begin{array}{rcl} \left[\sqrt{6} + \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right]^2 & = & 6 + \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{6}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \\ & = & 11 + 2\sqrt{6}\left[2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right] \end{array}$$

Así, $\sqrt{6}\left[2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right]$ sería racional, con lo que de igual manera sería,

$$\begin{array}{rcl} \{\sqrt{6}\left[1 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right]\}^2 & = & 6\left[1 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right]^2 \\ & = & 11 + 2\sqrt{6}\left[1 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right] \end{array}$$

De este modo $\sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})$ y $\sqrt{6} - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ serían racionales, lo que implicaría que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fuese racional, en contradicción de la parte a).

15. (a) Demostrar que si $x = p + \sqrt{q}$, donde p y q son racionales, y m es un número natural, entonces $x^m = a + b\sqrt{q}$ siendo a y b números racionales.

Demostración.- Sea $m = 1$ entonces $(p+\sqrt{q})^1 = a + b\sqrt{q}$. Supongamos que se cumple para m, entonces
$$(p+\sqrt{q})^{m+1} = (a+b\sqrt{q})(p+\sqrt{q}) = (ap+bq) + (a+pb)\sqrt{q}$$
donde $ap + bq$ y $a + bp$ son racionales.

(b) Demostrar también que $(p-\sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$

Demostración.- Similar a la parte a), se cumple para $m = 1$. Si es verdad para m, entonces
$$(p-\sqrt{q})^{m+1} = (a-b\sqrt{q})(p-\sqrt{q}) = (ap+bq) - (a+pb)\sqrt{q}$$
.

16. (a) Demostrar que si m y n son números naturales y $m^2/n^2 < 2$, entonces $(m+2n)^2\ /\ (m+2)^2 > 2$; demostrar, además que
$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}$$

Demostración.- Si $m^2/n^2 < 2$ entonces $m^2 < 2n^2$, sumando m^2, $4mn$ y $2n^2$ tenemos $2m^2 + 4mn + 2n^2 < 4n^2 + m^2 + 4mn$, luego $2(m+n)^2 < (m+2n)^2$, así nos queda $(m+2n)^2/(m+n)^2 > 2$
Para la segunda parte podemos partir de $m^2 - 2n^2 < 0$, entonces:

$$\begin{array}{rcll}
m^2 - 2n^2 & < & 0 & \\
m^3 - 2mn^2 & < & 0 & \text{multiplicando por } m \\
mn^2 + m^3 + mn^2 - 4mn^2 & < & 0 & \text{escribiendo } mn^2 \text{ de otra manera} \\
mn^2 + 2n^3 + m^3 + m^2n + mn^2 - 2m^2n - 4mn^2 - 2n^3 & < & 0 & \text{sumando } 2n^3 \text{ y } 2m^2n \\
n^2(m+2n) + \left[(m^2+2mn+n^2)(m-2n)\right] & < & 0 & \\
n^2(m+2n)^2 + \left[(m+n)^2(m+2n)(m-2n)\right] & < & 0 & \text{multiplicando por } m+2n \\
n^2(m+2n)^2 + \left[(m+n)^2(m^2-4n^2)\right] & < & 0 & \\
\dfrac{n^2(m+2n)^2 - 4n^2(m+n)^2 + m^2(m+n)^2}{n^2(m+n)^2} & < & 0 & \text{dividimos por } n^2(m+n)^2 \\
\dfrac{(m+2n)^2 - 2(m+2)^2 - 2n^2(m+2)^2}{n^2(m+n)^2} & < & -\dfrac{m^2}{n^2} & \\
\dfrac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 & < & 2 - \dfrac{m^2}{n^2} &
\end{array}$$

(b) Demostrar los mismos resultados con todos los signos de desigualdad invertidos.

Demostración.- Quedará de la siguiente forma, Si $m^2/n^2 > 2$, entonces $(m+2n)^2\ /\ (m+2)^2 < 2$, luego demostrar que
$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 > 2 - \frac{m^2}{n^2}$$

Similar a la parte $a)$ tendremos $m^2 > 2n^2$, luego $2m^2 + 4mn + 2n^2 > 4n^2 + m^2 + 4mn$, así $(m + 2n)^2 > 2(m+n)^2$
Después se puede demostrar la segunda parte con facilidad siguiendo el ejemplo $a)$ pero invirtiendo la desigualdad ya que n y m son números natural.

(c) Demostrar que si $m/n < \sqrt{2}$, entonces existe otro número racional m^2/n^2 con $m/n < m'/n' < \sqrt{2}$

Demostración.- Sea $m_1 = m + 2n$ y $n_1 = m + n$, luego elegimos y remplazamos en,

$$\begin{array}{rcccl} m' & = & m_1 + 2n_1 & = & 3m + 4n \\ n' & = & m_1 + n_1 & = & 2m + 3n \end{array}$$

De donde $\dfrac{m}{n} < h$ si y sólo si $0 < m' - mn' = (3m+4n)n - (2m+3n)m = 2(2n^2 - m^2)$. Es claro para $\dfrac{m}{n} < \sqrt{2}$ que $2n^2 - m^2 > 0$
Por otro lado tenemos $\dfrac{m'}{n'}$ si y sólo si $0 < 2n'^2 - m'^2 = 2(2m+3n)^2 - (3m+4n)^2 = 2n^2 - m^2$. Como antes, $2n^2 - m^2 > 0$ se sigue de $\dfrac{m}{n} < \sqrt{2}$

17. Parece normal que $\sqrt{n}$ tenga que ser irracional siempre que el número natural n no sea el cuadrado de otro número natural. Aunque puede usarse en realidad el método del problema 13 del capitulo 2 de Michael Spivak para tratar cualquier caso particular, no está claro, sin más, que este método tenga que dar necesariamente resultados, y para una demostración del caso general se necesita más información. Un número natural p se dice que es un número primo si es imposible escribir $p = ab$; por conveniencia se considera que 1 no es un número primo. Los primeros números primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Si $n > 1$ no es primo, entonces $n = ab$, con a y b ambos $< n$; si uno de los dos a o b no es primo, puede ser factorizado de manera parecido; continuando de esta manera se demuestra que se puede escribir n como producto de números primos. Por ejemplo, $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.

a) Conviértase este argumento en una demostración riguroso por inducción completa. (En realidad, cualquier matemático razonable aceptaría este argumento informal, pero ello se debería en parte a que para él estaría claro cómo formularla rigurosamente.)
Un teorema fundamental acerca de enteros, que no demostraremos aquí, afirma que esta factorización es única, salvo en lo que respeta al orden de los factores. Así, por ejemplo, 28 no puede escribirse nunca como producto de números primos uno de los cuales sea 3, ni puede ser escrito de manera que 2 aparezca una sola vez (ahora debería verse clara la razón de no admitir a 1 como número primo.)

demostración.- Supóngase que para todo número $< n$ puede ser escrito como un producto de primos. Si $n > 1$ no es primo, entonces $n = ab$, para $a, b < n$. Pero a y b son ambos producto de primos, así que $n = ab$ lo es también.

b) Utilizando este hecho, demostrar que $\sqrt{n}$ es irracional a no ser que $n = m^2$ para algún número natural m.

Demostración.- Sea $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$, entonces $nb^2 = a^2$, luego si descomponemos en producto de factores primos, nb^2 y a^2 deberían coincidir. Ahora según lo explicado anteriormente, cada número primo debe aparecer un número par de veces en a^2 y b^2, y por lo tanto deberá ocurrir lo mismo con n. Esto implica que n es un cuadrado perfecto.

c) Demostrar que $\sqrt[k]{n}$ es irracional a no ser que $n = m^k$

Demostración.- La Demostración es parecida a la parte b pero haciendo uso del hecho de que cada número primo entra en a^k y en b^k un número de veces que es múltiplo de k

d) Al tratar de números primos no se puede omitir la hermosa demostración de Euclides de que existe un número infinito de ellos. Demuestre que no puede haber sólo un número finito de números primos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ considerando $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k + 1$

Demostración.- Si $p_1, ..., p_n$ fuesen los únicos números primos, entonces $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ no podría ser primo, ya que es mayor que cada uno de ellos, de modo que tiene que ser divisible por un número primo. Pero es claro que este número primo no es ninguno de los $p_1, ..., p_n$, lo cual constituye una contradicción. Para poder explicarlo mejor si $p_1, ..., p_n$ son los n primeros números primos, entonces el primo que ocupa el lugar $n+1$ es $\leq p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Sin embargo, $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ no tiene que ser necesariamente primo.

18. (a) Demostrar que si x satisface

$$x_n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

para algunos enteros $a_{n-1}, ..., a_n$ entonces x es irracional si no es entero. (¿Por qué es esto una generalización del problema 17?)

Demostración.- Supóngase que es $x = p/q$ donde p y q son números naturales primos entre si. Entonces

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_0 = 0,$$

con lo que

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_0 q^n = 0$$

Ahora bien, si $q \neq \pm 1$, entonces q tiene por lo menos un divisor primo. Este divisor primo divide a cada uno de los términos que siguen a p^n, con lo que también deberá dividir a p^n. Dividirá por lo tanto a p, lo cual es una contradicción. Así pues, $q = \pm 1$, lo que significa que x es entero.

(b) Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ es irracional.

Demostración.- Sea $a = \sqrt{2} + 2^{1/3}$. Se demostrará por contradicción. Supongamos que a es racional, entones,

$$\begin{aligned} 2 &= (2^{1/3})^3 \\ &= (a - \sqrt{2})^3 \\ &= a^3 - 3a^2\sqrt{2} + 3a \cdot 2 - 2^{3/2} \\ &= a^3 + 6a - \sqrt{2}(3a^2 + 2) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\sqrt{2} = \frac{a^3 + 6a - 2}{3a^2 + 2} \in \mathbb{Q}$$

es bien sabido que $\sqrt{2}$ es irracional. De ahí llegamos a una contradicción.

19. Demostrar la desigualdad de Bernoulli: Si $h > -1$, entonces

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

¿Por qué es esto trivial si $h > 0$?

Demostración.- Si $n = 1$, entonces $(1+h)^n = 1+nh$. Supóngase que $(1+h)^n \geq 1+nh$. Entonces $(1+h)^n + 1 = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh)$, ya que $1+h > 0$ luego $1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$
Para $h > 0$, la igualdad se sigue directamente del teorema del binomio, ya que todos los demás términos que aparecer en el desarrollo de $(1+h)^n$ son positivos.

20. La sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, ...$ se define como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3 \end{aligned}$$

Esta sucesión, cuyos primeros términos son $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$, fue descubierta por Fibonacci (1175-1250, aprox.) en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número a_n de parejas nacidas en el n-ésimo mes es $n_{n-1} + a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además, cad pareja nacida hace dos meses produce ahora una nueva pareja. Es verdaderamente asombroso el número de resultados interesantes relacionados con esta sucesión, hasta el punto de existir una Asociación de Fibonacci que publica una revista, the Fibonacci Quarterly.
Demostrar que

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Demostración.- Al ser

$$\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

La fórmula es válida para $n = 1$ y también se cumple para $n = 1$. Supóngase que es válida para todo $k < n$, donde $n \geq 3$. En tal caso es válida en particular para $n-1$ y para $n-2$, luego por hipótesis

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

21. La desigualdad de Schwarz (problema 1-19) tiene en realidad una forma más general:

$$\sum_{i=1}^{n} x_1 y_1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Dar de esto tres demostraciones, análogas a las tres demostraciones del problema 1-19

Demostración.-

i) Como antes, la demostración es trivial si para todo $y_i = 0$ o si hay algún numero λ con $x_i = \lambda y_i$ para todo i. Es decir,

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_{i=1} n(\lambda y_i - x_i)^2 \\
&= \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2
\end{aligned}$$

así por el problema 1-18 queda demostrado.

ii) Usando $2xy \leq x^2 + y^2$ con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}, \quad y = \frac{y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

obtenemos,

$$\frac{2x_i y_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}} \leq \frac{x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} \quad (1)$$

luego

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} 2x_i y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} = 2$$

Nuevamente, la igualdad se cumple solo si se cumple en (1) para todo i, lo que significa que,

$$\frac{x_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

para todo i. Si todo y_i es distinto de 0. Esto significa que $x_i = \lambda y_i$ para

$$\lambda = \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

iii) La demostración depende de la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^n + \sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2$$

al verificar esta igualdad notamos que,

$$\sum_{i=1} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{i\neq j} x_i 2 y_j^2$$

y por lo tanto,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)^2 + \sum_{i\neq j} x_i y_i x_j y_j$$

La diferencia es

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}(x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) &= 2\sum_{i<j}(2_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - x_i y_i x_j y_j) \\ &= 2\sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2\end{aligned}$$

Si la igualdad se cumple en la desigualdad de Schwarz, para todo $x_i y_j = x_j y_i$. Si algún $y_i \neq 0$ y $y_i \neq 0$, luego $x_i = \dfrac{x_1}{y_1} y_i$ para todo i, así tenemos que $\lambda = \dfrac{x_1}{y_1}$

22. El resultado del problema 1-7 tiene una generalización importante:
Si $a_i, ..., a_n \geq 0$, entonces la **media aritmética**

$$A_n = \frac{a_1 + ... + a_n}{n}$$

y la **media geométrica**

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

satisfacen

$$G_n \leq A_n$$

(a) Supóngase que $a_1 < A_n$. Entonces algún a_i tiene que satisfacer $a_i > A_n$, pongamos que sea $a_2 > A_n$. Sea $\bar{a}_1 = A_n$ y sea $\bar{a}_2 = a_1 + a_2 - \bar{a}_1$. Demostrar que

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \geq a_1 a_2$$

¿Por qué la repetición de este proceso un suficiente número de veces demuestra que $G_n \leq A_n$? (He aquí otra ocasión en que resulta ser un buen ejercicio establecer una demostración formal por inducción, al tiempo que se da una explicación informal.)¿Cuándo se cumple la igualdad en la fórmula $G_n A_n$?

Demostración.- Tenemos que probar que

$$A_n(a_1 + a_2 - A_n) \geq a_1 a_2$$

Vemos que es lo mismo demostrar que $A_n^2 - (a_1 + a_2)A_n + a_1 a_2 \leq 0$ de donde $(A_n - a_1)(A_n - a_2) \leq 0$, el cual sabemos que es verdad porque $(A_n - a_1) > 0$ y $(A_n - a_2) < 0$

(b) Haciendo uso del hecho de ser $G_n \leq A_n$ cuando $n = 2$, demostrar por inducción sobre k, que $G_n \leq A_n$ para $n = 2_k$

Demostración.- Sabemos que $G_n \leq A_n$ cuando $n = 2^1$. Supóngase que $G_n \leq A_n$ para $n = 2^k$ para luego $m = 2^{k+1} = 2n$, entonces,

$$\begin{aligned}
G_m &= \sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \\
&= \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_m}} \\
&\leq \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_m}}{2} \qquad \text{ya que } G_2 \leq A_2 \\
&\leq \frac{\dfrac{a_1 + ... + a_n}{n} + \dfrac{a_{n+1} + ... + a_m}{n}}{2} \\
&= \frac{a_1 + ... + a_m}{2n} \\
&= A_m
\end{aligned}$$

(c) Para un n general, sea $2_m > n$. Aplíquese la parte (b) a los 2_m números

$$a_1, \cdots, a_n, \quad \underbrace{A_n, \cdots A_n}_{2^m - n \text{ veces}}$$

para demostrar que $G_n \leq A_n$

Demostrar.- Aplicando la parte (b) a los 2^m números, para $k = 2^m - n$

$$\begin{aligned}
(a_1 \cdots a_n)(A_n)^k &\leq \left[\frac{a_1 + ... + a_n + kA_n}{2^m}\right]^{2^m} \\
&= \left[\frac{nA_n + kA_n}{2^m}\right]^{2^m} \\
&= (A_n)^{2^m}
\end{aligned}$$

así,

$$a_1 \cdots a_n \leq (A_n)^{2^m - k} = (A_n)^n$$

23. Lo que sigue es una definición recursiva de a_n :

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & a \\ a_{n+1} & = & a_n \cdot a \end{array}$$

Demostrar por inducción que

$$\begin{array}{rcl} a_{n+m} & = & a_n \cdot a_m \\ (a^n)^m & = & a^{nm} \end{array}$$

Demostración.- La primera ecuación es verdad para $m = 1$ ya que $a^{n+1} = a^n \cdot a^1$. Supongamos que $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$, entonces

$$\begin{array}{rcl} a^{n+(n+1)} & = & a^{(n+1)+1} \cdot a \\ & = & (a^n \cdot a^m) \cdot a \\ & = & a^n \cdot (a^m \cdot a) \\ & = & a^n \cdot a^{m+1} \end{array}$$

por lo tanto la primera ecuación es verdad para $m + 1$

La segunda ecuación es verdad para $m = 1$ ya que $(a^n)^1 = a^{n \cdot 1}$. Supóngase que $(a^n)^m = a^{nm}$, entonces,

$$\begin{array}{rcl} & = & \\ & = & (a^n \cdot a^m) \cdot a \\ & = & a^n \cdot (a^m \cdot a) \\ & = & a^n \cdot a^{m+1} \end{array}$$

24. Supóngase que conocemos las propiedades P1 y P4 de los números naturales, pero que no se ha hablado de multiplicación. Entonces se puede dar la siguiente definición recursiva de multiplicación:

$$1 \cdot b = b \qquad (a+1) \cdot b = a \cdot b + b$$

Demostrar lo siguiente (¡en el orden indicado!)

$$\begin{array}{rcll} a \cdot (a + c) & = & a \cdot b + a \cdot c & \text{Utilizar inducción sobre } a \\ a \cdot 1 & = & a & \\ a \cdot b & = & b \cdot a & \text{lo anterior era el caso } b = 1 \end{array}$$

Demostración.- Al ser

$$\begin{array}{rcll} 1 \cdot (b + c) & = & b + c & \\ & = & 1 \cdot b + 1 \cdot c & \text{por definición,} \end{array}$$

el primer resultado es válido para $a = 1$. Supóngase que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo b y c. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} (a+1) \cdot (b+c) & = & a \cdot (b+c) + (b+c) \\ & = & (a \cdot b + a \cdot c) + (b+c) \\ & = & (a \cdot b + b) + (a \cdot c + c) \\ & = & (a+1) \cdot b + (a+1) \cdot c \end{array}$$

La ecuación $a \cdot 1 = a$ vale para $a = 1$ por definición. Supóngase que $a \cdot 1 = a$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} (a+1)\cdot 1 & = & a\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ & = & a+1 \end{array}$$

Para $b = 1$, la ecuación $a \cdot b = b \cdot a$ es consecuencia de $a \cdot 1 = a$, que acaba de ser demostrada, y de $1 \cdot a = a$, que vale por definición. Supóngase que $a \cdot b = b \cdot a$, entonces,

$$\begin{array}{rcl} a\cdot(b+1) & = & a\cdot b + a\cdot 1 \\ & = & a\cdot b + a \\ & = & b\cdot a + a \\ & = & (b+1)\cdot a \end{array}$$

25. En este capítulo hemos empezado con los números naturales y gradualmente hemos ido ampliando hasta los reales. Un estudio completamente riguroso de este proceso requiere de por sí un pequeño libro. Nadie ha encontrado la manera de llegar a los números reales como dados, entonces los números naturales pueden ser definidos como los números naturales de la forma $1, 1+1, 1+1+1$, etc. Todo el objeto de este problema consiste en hacer ver que existe una manera matemática riguroso de decir **etc.**

(a) Se dice que un conjunto A de números reales es **inductivo** si

(i) $\mathbb{R}$ es inductivo.

Demostración.- Está claro según la definición.

(ii) El conjunto de los números reales positivos es inductivo.

Demostración.- Esto está claro, ya que 1 es positivo, y si k es positivo, entonces por definición $k+1$ es positivo.

(iii) El conjunto de los números reales positivos distintos de $\dfrac{1}{2}$ es inductivo.

Demostración.- Está claro que 1 pertenece a este conjunto. Si para el mismo no se cumpliera la condición 2, existiría entonces en el conjunto algún k con $k+1 = 1/2$. Pero esto es falso, ya que $k = -1/2$ no es positivo.

(iv) El conjunto de los números reales positivos distintos de 5 no es inductivo.

Demostración.- Este conjunto contiene 4, pero no $4+1$.

(v) Si A y B son inductivos, entonces el conjunto C de los números reales que están a la vez en A y en B es también inductivo.

Demostración.- Al estar 1 en A y en B, también está en C. Si k está en C, entonces k está a la vez en A y en B, con lo que $k+1$ está en A y en B, de modo que $k+1$ está en C.

(b) Un número real n será llamado **número natural** si n está en todo conjunto inductivo.

(i) Demostrar que 1 es un número natural.

Demostración.- 1 es un número natural, puesto que 1 está en todo conjunto inductivo, por la misma definición de conjunto inductivo.

(ii) Demostrar que $k+1$ es un número natural si k es un número natural.

Demostración.- Si k es un número natural, entonces k está en todo conjunto inductivo. Así pues, $k+1$ está en todo conjunto inductivo. Por lo tanto, $k+1$ es un número natural.

26. Un rompecabezas consiste en disponer de tres vástagos cilíndricos, el primero de los cuales lleva engastados n anillos concéntricos de diámetro decreciente. Se puede quitar el anillo superior de un vástago para engastarlo sobre otro vástago siempre que al hacer esto último el anillo desplazado no venga a caer sobre otro de diámetro inferior. Por ejemplo, si el anillo más pequeño se pasa al vástago 2 y el que le sigue pasar también al vástago 3 encima del que le sigue en tamaño. Demostrar que la pila completa se puede pasar al vástago 3 en 2_n+1 pasos y no en menos.

Demostración.- Si hay solo $n=1$ anillos, claramente se puede mover al eje 3 en $1=2^1-1$ movimientos. Suponiendo el resultado para k anillos, luego dados $k+1$ anillos,

(a) Mueve los anillos elevados a la k al eje 2 en $2k-1$ movimientos,

(b) mueva el anillo inferior al eje 3,

(c) mueva los k anillos superiores de nuevo al eje 3 en movimientos $2k-1$.

Esto toma $2(2k-1)+1=2k+1-1$ se mueve. Si $2k-1$ movimientos es el mínimo posible para k anillos, luego $2k+1-1$ es el mínimo para $k+1$ anillos, ya que la parte inferior El anillo no se puede mover en absoluto hasta que los primeros k anillos se muevan a algún lugar, tomando al menos $2k-1$ se mueve, el anillo inferior debe moverse al eje 3, tomando al menos 1 movimiento, y luego los otros anillos deben colocarse encima, tomando al menos otros movimientos 2^k-1.

27. Hubo un tiempo en que la universidad B se preciaba de tener 17 profesores numerarios de matemáticas. La tradición obligaba a que el almuerzo comunitario semanal, al que concurrían fielmente los 17, todo miembro que hubiese descubierto un error en una de sus publicaciones tenia que hacer público este hecho y a continuación dimitir. Una declaración de este tipo no se había producido nunca porque ninguno de los profesores era consciente de la existencia de un error en su propio trabajo. Lo cual, sin embargo, mo quiere decir que no existieran errores. De hecho, en el transcurso de los años, por lo menos un error había sido descubierto en el trabajo de cada uno de los miembros por otro de entro ellos.La existencia de este error había sido comunicada a todos los demás miembros del departamento salvo al responsable, con objeto de evitar dimisiones.
Llegó un fatídico año en que el departamento aumentó el número de sus miembros con un visitante de otra universidad, un Profesor X que venía con la esperanza de que se le ofreciera un puesto permanente al final del año académico. Una vez que vio frustrada su esperanza, el Profesor X tomó su venganza en el último almuerzo comunitario del año diciendo: Me ha sido muy grata mi estancia entre ustedes, pero hay una cosa que creo que es mi deber comunicarles. Por lo menos uno de entre ustedes tiene publicado un resultado incorrecto, lo cual ha sido descubierto por otro del departamento. ¿Qué ocurrió al año siguiente?

Respuesta.- Primero Suponga que solo hay 2 profesores A y B, cada uno consciente del error en el trabajo del otro, pero sin darse cuenta de cualquier error en el suyo. Entonces ninguno se sorprende por la declaración del profesor X, pero cada uno espera que el otro sea sorprendido, y dimitir en el primer almuerzo del próximo año. Cuando esto no suceda, cada uno se da cuenta que esto solo puede ser porque él también ha cometido un error. Entonces, el la próxima reunión, ambos renunciaran.
A continuación, considere el caso de 3 profesores, A, B y C. El profesor C sabe que el profesor A es consciente de un error en el trabajo del profesor B, ya sea porque el profesor A encontró el error e

informó, o porque encontró el error e informó al profesor A. Del mismo modo, él sabe que el profesor B sabe que hay un error en el trabajo del profesor A. Pero el profesor C piensa que no a cometido errores, por lo que a el respecta, la situación frente a los profesores A y B es precisamente el analizado en el párrafo anterior. El profesor C está asumiendo, de que nadie cree que exista un error cuando uno no lo hace. Entonces el profesor C espera tanto al profesor A como al profesor B renunciar en la segunda reunión. Por supuesto de manera similar los profesores A y B esperan que los otros dos renuncien en la segunda reunión. Cuando nadie renuncia todos se dan cuenta de que ha cometido un error, por lo que todos renuncian en la tercera reunión. Podría ser demostrado por inducción.

28. Después de imaginarse, o de consultar, la solución del problema 27, considere lo siguiente: Cada uno de los miembros del departamento era ya sabedor de lo que el Profesor X afirmaba. ¿Cómo pudo pues su afirmación cambiar las cosas?

Respuesta.- Ganar es una buena idea comenzar con el caso en el que el departamento consta solo de Profesores A y B. Ahora, por supuesto, ambos profesores saben que alguien ha publicado un resultado incorrecto, pero el Profesor A piensa que el Profesor B no lo sabe, y viceversa. Una vez que el Profesor X hace su anuncio, el Profesor A sabe que el Profesor B lo sabe. Y por eso espera que el Profesor B renuncie en la próxima reunión. En el caso de tres profesores, la situación es más complicada. Cada uno sabe que alguien ha cometido un error, y además cada uno sabe que los demás saben Por ejemplo, el Profesor C sabe que el Profesor A lo sabe, ya que él y el Profesor A han discutido el error en el trabajo del Profesor B, y él sabe de manera similar que el Profesor B lo sabe. Pero el Profesor C no cree que el Profesor A sepa que el Profesor B lo sabe. Así que el anuncio del Profesor X cambia las cosas: ahora el Profesor C sabe que el Profesor A sabe que el Profesor B sabe. Bueno, puedes ver lo que pasa en general. Esto parece probar que las declaraciones como A sabía que B sabía que C sabía que realmente tiene sentido.

3

Funciones

Definición 3.1 El conjunto de los números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de **dominio** de la función.

Definición 3.2 Si f y g son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función $f+g$ denominada **suma** de $f+g$ mediante la ecuación:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los x que están a la vez en el dominio de f y en el dominio de g, es decir:

$$dominio\ (f+g) = dominio\ f\ \cap\ dominio\ g$$

Definición 3.3 El dominio de $f \cdot g$ es $dominio\ f \cap\ dominio\ g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Definición 3.4 Se expresa por dominio $f \cap$ dominio $g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definición 3.5 **Función constante.**

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

Teorema 3.1 $(f+g)+h = f+(g+h)$

Demostración.- **La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio.** Obsérvese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:

$$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x) \\ &= [f(x)+g(x)]+h(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [f+(g+h)](x) &= f(x)+(g+h)(x) \\ &= f(x)+[g(x)+h(x)] \end{aligned}$$

Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de $(f+g)+h$ y el de $f+(g+h)$ es evidentemente dominio $f \cap$ dominio $g \cap$ dominio h. Nosotros escribimos, naturalmente $f+g+h$ por $(f+g)+h = f+(g+h)$

■

Teorema 3.2 Es igual fácil demostrar que $(f \cdot g) \cdot g = f \cdot (g \cdot h)$ y ésta función se designa por $f \cdot g \cdot h$. Las ecuaciones $f+g = g+f$ y $f \cdot g = g \cdot f$ no deben presentar ninguna dificultad.

■

Definición 3.6 **Composición de función.**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{\ x : x$ está en el dominio de g y $g(x)$ está en el dominio de $f\ \}$

$$D_{f \circ g} = \{x \ / \ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

Propiedad .13 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ La demostración es una trivalidad.

Definición 3.7 Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a,b) y (a,c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

Definición 3.8 Si f es una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a,b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a,b) está en f. Este b único se designa por $f(a)$.

3.1 Problemas

1. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Interpretar lo siguiente:

(i) $f(f(x))$ (¿Para que x tiene sentido?)

Respuesta.- Sea $f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ entonces $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$, por lo tanto $\dfrac{1-x}{x+2}$ de donde llegamos a la conclusión de que x se cumple para todo número real de 1 y -2

(ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$ por lo tanto se cumple para todo $x \neq -1, 0$

(iii) $f(cx)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+cx}$ donde se cumple para todo $x \neq -1$ si $c \neq 0$

(iv) $f(x+y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x+y}$ donde se cumple para todo $x+y \neq -1$

(v) $f(x) + f(y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$ siempre y cuando $x \neq -1$ y $y \neq -1$

(vi) ¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?

Respuesta.- Para todo c ya que $f(c \cdot 0) = f(0)$

(vii) ¿Para que números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos x?

Respuesta.- Solamente $c = 1$ ya que $f(x) = f(cx)$ implica que $x = cx$, y esto debe cumplirse por lo menos para un $x \geq 1$

2. Sea $g(x) = x^2$ y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?

Respuesta-. Se cumple para $y \geq 0$ si y es racional, o para todo $y \geq 1$

(ii) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?

Respuesta-. Para $-1 \leq y \leq 1$ siempre que y sea racional y para todo y tal que $|y| \leq 1$

(iii) ¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?

Respuesta-.

$$g(h(z)) = \begin{cases} 0, & z^2 \; racional \\ 1, & z^2 \; irracional \end{cases}$$

Por lo tanto el resultado es 0

(iv) ¿Para cuáles w es $g(w) \leq w$?

Respuesta-. Para todo w tal que $0 \leq w \leq 1$

(v) ¿Para cuáles ϵ es $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$?

Respuesta-. Para $-1, 0, 1$

3. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Respuesta.- Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene $1 - x^2 \geq 0$ entonces $x^2 \leq 1$ por lo tanto el dominio son todos los x tal que $|x| \leq 1$

(ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Respuesta.- Se observa claramente que el dominio es $-1 \leq x \leq 1$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 2}$

Respuesta.- Operando un poco tenemos

$$f(x) = \frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)},$$

sabemos que el denominador no puede ser 0 por lo tanto el $D_f = \{x \; / \; x \neq 1, \; x \neq 2\}$

(iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Respuesta.- Claramente notamos que el dominio de f son -1 y 1 ya que si se toma otros números daría un número imaginario.

(v) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

Respuesta.- Notamos que no se cumple para ningún x ya que si $0 \leq x \leq 1$ entonces no se cumple para $\sqrt{x-2}$ y si $x \geq 2$ no se cumple para $\sqrt{1-x}$

4. Sean $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$ y $s(x) = senx$. Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.

(i) $(S \circ P)(y)$

Respuesta.- Por definición se tiene que $(S \circ P)(y) = S(P(y))$ entonces $S(2^y) = 2^{2y}$ siempre y cuando $D_{S \circ P} = \{y/y \in D_P \wedge P(y) \in D_S\}$

(ii) $(S \circ s)(y)$

Respuesta.- Por definición tenemos que $(S \circ s)(y) = S(s(y))$ entonces $S(\operatorname{sen} y) = \operatorname{sen}^2 y$ siempre y cuando $D_{S \circ s} = \{y/y \in D_s \wedge S(y) \in D_S\}$

(iii) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Respuesta.- $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S((P \circ s)(t)) + s(P(t)) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\operatorname{sen} t)) + s(2^t) = S(2^{\operatorname{sen} t}) + \operatorname{sen} 2^t = 2^{2 \operatorname{sen} t} + \operatorname{sen} 2^t$

(iv) $s(t^3)$

Respuesta.- $s(t^3) = \operatorname{sen} t^3$

5. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s usando solamente $+, \cdot, \circ$

(i) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

Respuesta.- Claramente vemos que $P \circ s$

(ii) $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$

Respuesta.- $s \circ P$

(iii) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

Respuesta.- $s \circ S$

(iv) $f(x) = \operatorname{sen} x$

Respuesta.- $S \circ s$

(v) $f(t) = 2^{2t}$

Respuesta.- $P \circ P$

(vi) $f(u) = \operatorname{sen}(2^u + 2^{u^2})$

Respuesta.- $s \circ (P + P \circ S)$

(vii) $f(y) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2^{2^{2^{\operatorname{sen} y}}})))$

Respuesta.- $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$

(viii) $f(a) = 2^{\operatorname{sen}^2 a} + \operatorname{sen}(a^2) + 2^{sen(a^2 + \operatorname{sen} a)}$

Respuesta.- $P \circ S \circ s + s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

6. (a) Si $x_1, ..., x_n$ son números distintos, encontrar una función polinómica f_i de grado $n-1$ que tome el valor 1 en x_i y 0 en x_j para $j \neq i$. Indicación: El producto de todos los $(x - x_j)$ para $j \neq i$ es 0 en x_j si $j \neq i$. Este producto es designado generalmente por

$$\prod_{j=1_{j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

donde el símbolo $\prod$ (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que $\sum$ para sumas.

Respuesta.- Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija n y elegir un conjunto de distintas $x_1, x_2, ..., x_n$. Por ejemplo supongamos que elegimos $n = 3$ $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$, pero $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$. Es decir, F_1 es un cuadrático que tiene ceros en $x = 2$ y $x = 3$, pero es igual a 1 en $x = 1$. Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x-2)(x-3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante a. Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con $x = 1$, debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x-2)(x-3) = 2a,$$

por lo tanto $a = 1/2$ y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio $f_2(x)$ tal que $f_2(2) = 1$ con raíces en $x = 1, 3$ tendríamos que resolver la ecuación $1 = a(2-1)(2-3)$, lo que da $a = -1$ por lo tanto

$f_2(x) = -(x-1)(x-3)$
Ahora veamos el caso general. El polinomio $f_i(x)$ satisface $f_i(x_i)$ y $f_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$, entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j\neq i}(x - x_j)$$

Para alguna constante a. Para encontrar esta constante, aplicamos $x = x_1$:

$$f_i(x_i) = 1 = a \prod_{j\neq i}(x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

(b) Encontrar ahora una función polinómica de grado $n-1$ tal que $f(x_1) = a_1$, donde $a_1, ..., a_n$ son números dados. (Utilícense las Funciones f_1 de la parte (a).) La fórmula que se obtenga es la llamada **Fórmula de interpolación de Lagrange**

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i f_i(x)$$

entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i \prod_{j\neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

7. (a) Demostrar que para cualquier función polinómica f y cualquier número a existe función polinómica g y un número b tales que $f(x) = (x-a)g(x) + b$ para todo x. (La idea es esencialmente dividir $f(x)$ por $(x-a)$ mediante la división larga hasta encontrar un resto constante.)

Demostración.- Si el grado de f es 1, entonces f es de la forma

$$f(x) = cx + d = cx + d + ac - ac = c(x-a) + (d + ac)$$

de tal modo que $g(x) = c$ y $b = d + ac$. Por inducción supongamos que el resultado es válido para polinomios de grado $\leq k$. Si f tiene grado $k+1$, entonces f tiene la forma

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + ... + a_1 x + a_0$$

luego para grados $\leq k$ se tiene

$$f(x) - a_{k+1}x^{k+1} = (x-a)g(x) + b$$

así

$$f(x) = (x-a)\left[g(x) + a_{k+1}(x-a)^k\right] + b$$

(b) Demostrar que si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)g(x)$ para alguna función polinómica g. (La reciproca es evidente)

Demostración.- Por la parte (a), podemos poner que $f(x) = (x-a)g(x) + b$, entonces

$$0 = f(a) = (a-a)g(a) + b = b$$

de modo que $f(x) = (x-a)g(x)$

(c) Demostrar que si f es una función polinómica de grado n, entonces f tiene a lo sumo n raíces, es decir, existen a lo sumo n números a tales que $f(a) = 0$

Demostración.- Supóngase que f tiene n raíces $a_1, ..., a_n$. Entonces según la parte (b) podemos poner $f(x)(x-a)g_1(x)$ donde el grado de $g_1(x)$ es $n-1$. Pero

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)g_1(a_2)$$

de modo que $g_1(a_2) = 0$, ya que $a_2 \neq a_1$. Podemos pues escribir

$$f(x)(x-a_2)g_2(x),$$

donde el grado de g_2 es $n-2$. Prosiguiendo de esta manera, obtenemos que

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdot ... \cdot(x-a_n)c$$

para algún número $c \neq 0$. Está claro que $f(a) \neq 0$ si $a \neq a_1, ..., a_n$. Así pues, f puede tener a lo sumo n raíces.

(d) Demostrar que para todo n existe una función polinómica de grado n con raíces. Si n es par, encontrar una función polinómica de grado n sin raíces, y si n es impar, encontrar una con una sola raíz

Demostración.- Si $f(x) = (x-1)(x-2)\cdot ... \cdot(x-n)$, entonces f tiene n raíces. Si n es par, entonces $f(x) = x^n + 1$ no tiene raíces. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ tiene una raíz única, que es 0.

8. ¿Para qué números a, b, c y d la función

$$f(x) = \frac{ax+d}{cx+b}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo x?

Respuesta.- Si

$$x = f(f(x)) = \frac{a\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+d}$$

para todo x, entonces

$$x = \frac{a^2x + ab + bcx + bd}{acx + bc + cdx + d^2}$$

y por lo tanto

$$(ac+cd)\,x^2 + \left(d^2 - a^2\right)x - ab - bd = 0$$

para todo x, de modo que

$$\begin{array}{rcl} ac+cd & = & 0 \\ ab+bd & = & 0 \\ d^2-a^2 & = & 0 \end{array}$$

Se sigue que $a = d$ ó $a = -d$. Una posibilidad es $a = d = 0$, en cuyo caso $f(x) = \dfrac{b}{cx}$ que satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq 0$. Si $a = d \neq 0$, entonces $b = c = 0$ con lo que $f(x) = x$. La tercera posibilidad es $a + d = 0$, de modo que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, la cual satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq \dfrac{a}{c}$ la cual satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq \dfrac{a}{c}$. Estrictamente hablando, podemos añadir la condición $f(x) \neq \dfrac{a}{c}$ para $x \neq \dfrac{a}{c}$, lo que significa que

$$\frac{ax+b}{cx-a} \neq \frac{a}{c}, \quad a^2+bc \neq 0.$$

9. **(a)** Si A es un conjunto cualquiera de números reales, defínase una función C_A como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & si \text{ x } est\ en \text{ A} \\ 0, & si \text{ x } no\ est\ en \text{ A} \end{cases}$$

Encuéntrese expresiones para $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ y $C_{\mathbb{R}-A}$, en términos de C_A y C_B.

Respuesta.- Según la definición de teoría de conjunto tenemos,

$$\begin{array}{rcl} C_{A\cap B} & = & C_A \cdot C_B \\ C_{A\cup B} & = & C_A + C_B - C_A \cdot C_B \\ C_{\mathbb{R}-A} & = & 1 - C_A \end{array}$$

(b) Supóngase que f es una función tal que $f(x) = 0$ o 1 para todo x. Demostrar que existe un conjunto A tal que $f = C_A$

Demostración.- Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$, entonces $f = C_A$.

(c) Demostrar que $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A

Demostración.- Sea $f = f^2$, entonces para cada real x, $f(x) = f[f(x)]^2$, así $f(x) = 0$ó $f(x) = 1$, luego por la parte b), $f = C_A$ para algún A.
Por otro lado sea $f = C_A$ para algún A. Entonces si $x \in A$, $f(x) = 1 = 1^2 = f(x)^2$, mientras si $x \notin A$, $f(x) = 0 = 0^2 = f(x)^2$, así en cualquier caso $f(x) = [f(x)]^2$ y $f = f^2$

10. **(a)** ¿Para qué funciones f existe una función g tal que $f = g^2$?

Respuesta.- Debido a que algún número elevado al cuadrado siempre será no negativo podemos afirmar que las funciones f satisfacen a todo x tal que $f(x) \geq 0$

(b) ¿Para qué función f existe una función g tal que $f = 1/g$?

Respuesta.- Dado a que un número divido entre cero es indeterminado se ve claramente que satisfacen a todo x tal que $f(x) \neq 0$

(c) ¿Para qué funciones b y c podemos encontrar una función x tal que

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

para todos los números t?

Respuesta.- Por teorema se observa que para las funciones b y c que satisfacen $(b(t))^2 - 4c(t) \geq 0$ para todo t

(d) ¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones a y b si ha de existir una función x tal que

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

para todos los números t? ¿Cuántas funciones x de éstas existirán?

Respuesta.- Es facil notar que $b(t)$ tiene que ser igual a 0 siempre que $a(t) = 0$. Si $a(t) \neq 0$ para todo t, entonces existe una función única con esta condición, que es $x(t) = a(t)/b(t)$. Si $a(t) = 0$ para algún t, entonces puede elegirse arbitrariamente $x(t)$, de modo que existen infinitas funciones que satisfacen la condición.

11. (a) Supóngase que H es una función e y un número tal que $H(H(y)) = y$. ¿Cuál es el valor de

$$H(H(H...(H(y))))?$$

Respuesta.- Si aplicamos la hipótesis, tendremos que aplicar 78 veces la función, luego 76 y así, hasta llegar a 2, donde la función sera $H(H(y))$, y una vez más por hipótesis tenemos como resultado y.

(b) La misma pregunta sustituyendo 80 por 81

Respuesta.- Sea $H(H(y))$ la 78*ava* vez de la función, entonces la 81*ava* vez será $H(H(H(y))$, por lo tanto queda como resultado $H(y)$.

(c) La misma pregunta si $H(H(y)) = H(y)$

Respuesta.- Análogamente a la parte a) si la 80*ava* vez es y entonces por hipótesis nos queda $H(y)$.

(d) Encuéntrese una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todos los números x y tal que $H(1) = 36$, $H(2) = \dfrac{\pi}{3}$, $H(13) = 47$, $H(36)36$, $H(\pi/3)\dfrac{\pi}{3}$, $H(47) = 47$

Respuesta.- Dar a $H(l)$, $H(2)$, $H(13)$, $H(36)$, $H(\pi/3)$, y $H(47)$ los valores especificados y hágase $H(x) = 0$ para $x \neq 1, 2, 13, 36, \pi/3, 47$. Al ser, en particular, $H(0) = 0$, la condición $H(H(x)) = H(x)$ se cumple para todo x.

(e) Encontrar una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todo x y tal que $H(1) = 7$, $H(17) = 18$

Respuesta.- Hágase $H(1) = 7$, $H(7) = 7$, $H(17) = 18$, $H(18) = 18$, y $H(x) = 0$ para $x \neq l, 7, 17, 18$.

12. Una función f es par si $f(x) = f(-x)$, e impar si $f(x) = -f(-x)$. Por ejemplo, f es par si $f(x) = x^2$ ó $f(x) = |x|$ ó $f(x) = \cos x$, mientras que f es impar si $f(x) = x$ ó $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(a) Determinar si $f + g$ es par, impar o no necesariamente ninguna de las dos cosas, en los cuatro casos obtenidos al tomar f par o impar y g par o impar. (Las soluciones pueden ser convenientemente dispuestas en una tabla 2 x 2)

Respuesta.- Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$ entonces $f(-x) + g(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x) + g(x)$ por lo tanto par y par es par.
Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$ entonces $-f(-x) + (-g(-x)) = -(-x) + [-x(-x)] = x + x = f(x) + g(x)$, por lo tanto impar e impar es impar.
Los otros dos últimos se prueba fácilmente y se llega a la conclusión de que ni uno ni lo otro.

	Par	**Impar**
Par	Par	Ninguno
Impar	Ninguno	Par

(b) Hágase lo mismo para $f \cdot g$

Respuesta.- Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$, entonces $f(-x) \cdot g(-x) = x^2 \cdot |x| = f(x) \cdot g(x)$, por lo tanto se cumple para par y par.
Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$, entonces $-f(-x) \cdot -g(-x) = -(-x) \cdot -(-x) = x \cdot x = f(x) \cdot g(x)$, por lo tanto impar impar da impar
Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$, podemos crear otra función llamada h que contiene a $x^2 \cdot x$ por lo tanto $h(x) = x^3 = -(-x)^2$ y así demostramos que par e impar es impar.
De igual forma al anterior se puede probar que impar y par es impar.

	Par	**Impar**
Par	Par	Impar
Impar	Impar	Par

(c) Hágase lo mismo para $f \circ g$

Respuesta.- Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$, luego $h(x) = (f \circ g)(x)$ entonces $h(x) = x$ luego $-f(-x) = x$, por lo tanto impar e impar da impar.
De similar manera se puede encontrar para los demás problemas y queda:

	Par	**Impar**
Par	Par	Par
Impar	Par	Impar

(d) Demostrar que para toda función par f puede escribirse $f(x) = g(|x|)$, para una infinidad de funciones g.

Demostración.- Sea $g(x) = f(x)$ sabemos que f es par si $f(x) = f(-x)$, de donde $g(x) = f(-x)$, luego por definición de valor absoluto se tiene $g(|x|) = f(|-x|)$, y por lo tanto $f(x) = g(|x|)$

13. **(a)** Demostrar que para toda función f con dominio $\mathbf{R}$ puede ser puesta en la forma $f = E + O$, con E par y O impar.

Demostración.- Sea $E(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ entonces $E(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = E(x)$ donde vemos que $E(x)$ es una función par. Luego por hipótesis $O(x) = f(x) - E(x) = f(x) - \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, así $O(-x) = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -O(x)$ entonces $O(x)$ es impar. Por lo tanto queda demostrado la proposición.

(b) Demuéstrese que esta manera de expresar f es única. (Si se intenta resolver primero la parte (b) despejando E y O, se encontrará probablemente la solución a la parte (a))

Demostración.- Si $f = E + O$, siendo E par y O impar, entonces

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

$$f(-x) = E(x) - O(x)$$

14. Si f es una función cualquiera, definir una nueva función $|f|$ mediante $|f|(x) = |f(x)|$. Si f y g son funciones, definir dos nuevas funciones, $max(f,g)$ y $min(f,g)$ mediante

$$max(f,g)(x) = max(f(x),g(x)),$$

$$min(f,g)(x) = min(f(x),g(x))$$

Encontrar una expresión para $max(f,g)$ y $min(f,g)$ en términos de $||$.

Respuesta.- Por problema 1.13 se tiene que

$$max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2};$$

$$min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

15. **(a)** Demostrar que $f = max(f,0) + min(f,0)$. Esta manera particular de escribir f es bastante usada; las funciones $max(f,0)$ y $min(f,0)$ se llaman respectivamente parte positiva y parte negativa de f

Demostración.- Esta proposición mostrará que se puede dividir una función en sus partes no negativas y no positivas. Es decir para todo los elementos x de algún dominio, es cierto que el valor de la función f en un punto x es igual a la suma dada, que consiste en la parte no negativa

de $max(f(x),0)$ y la parte no positiva de f, $min(f(x),0)$.
Para probarlo, lo dividiremos en dos casos. Sabemos que ó $f(x) \geq 0$ ó $f(x) \leq 0$. Si $f(x) \geq 0$ entonces $max(f(x),0) = f(x)$ y $min(f(x),0) = 0$ por lo que nuestra ecuación se reduce a $f(x) = f(x) + 0$. Por otro lado si $f(x) \leq 0$, entonces $max(f(x),0) = 0$ y $min(f(x),0) = f(x)$, por lo que nuestra ecuación se reduce a $f(x) = 0 + f(x)$.
En cualquier caso, nuestro lado derecho se reduce a $f(x)$ y sabemos que al menos uno de estos dos casos es verdadero; por lo tanto concluimos que $\forall x, f(x) = max(f(x),0) + min(f(x),0)$ ó $f = max(f,0) + min(f,0)$

(b) Una función f se dice que es no negativa si $f(x) \geq 0$ para todo x. Demostrar que para cualquier función f puede ponerse $f = g - h$ de infinitas maneras con g y h no negativas. (La manera corriente es $g = max(f,0)$ y $h = -min(f,0)$. Cualquier número puede ciertamente expresarse de infinitas maneras como diferencia de dos números no negativos.)

Demostración.- Comenzamos con la observación de que, para cualquier número real no negativo r, hay infinitos números reales no negativos s,t tales que

$$r = s - t$$

De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $s_n = 2r + n$ y $t_n = r + n$. Entonces, dado que $r \geq 0$, tanto s_n como t_n son no negativos. Además,

$$s_n = t_n = 2r + n - r - n = r$$

Ahora, para cada número real x, tenemos que $f(x) \geq 0$. Por lo tanto, a partir de la observación anterior, vemos que hay infinitos números reales no negativos s_x y t_x tales que

$$f(x) = s_x - t_x$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Así que definimos funciones no negativas g y h como sigue

$$g(x) = s_x \;\; y \;\; h(x) = t_x$$

. Entonces hemos demostrado que hay infinitas opciones de tales funciones. Además, tenemos que

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

. Por lo tanto, hemos demostrado que hay infinitas funciones no negativas g y h tales que

$$f = g - h$$

16. Supongase que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y.

(a) Demostrar que $f(x_1, +... + x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n)$

Demostración.- El resultado se cumple para $n = 1$, $f(x_1) = f(x_1)$. Luego si $f(x_1 + ... + x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n)$ para todo $x_1, ..., x_n$, entonces

$$\begin{array}{rcll} f(x_1 + ... + x_{n+1}) & = & f([x_1 + ... + x_n] + x_{n+1}) & \\ & = & f(x_1 + ... + x_n) + f(x_{n+1}) & \text{por hipótesis} \\ & = & f(x_1) + ... + f(n) + f(x_{n+1}) & \end{array}$$

(b) Demostrar que existe algún número c tal que $f(x) = cx$ para todos los números racionales x (en este punto no intentamos decir nada acerca de $f(x)$ cuando x es irracional). Indicación: Piénsese primero en cómo debe ser c. Demostrar luego que $f(x) = cx$, primero cuando x es un entero, después cuando x es el reciproco de un entero, y finalmente para todo racional x.

Demostración.- Sea $c = f(1)$. Luego para cualquier número natural n y el inciso (a),

$$f(n) = f(1 + ... + 1) = f(1) + ... + f(1) = n \cdot f(1) = cn \quad (1)$$

Al ser

$$f(x) + f(0) = f(x + 0) = f(x),$$

entonces $f(0) = 0$. Ahora, puesto que

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0,$$

resulta que $f(-x) = -f(x)$. En particular, para cualquier número natural n y por (1),

$$f(-n) = -f(n) = -cn = c \cdot (-n)$$

Además

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = c$$

de modo que,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n},$$

y en consecuencia

$$f\left(\frac{1}{-n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) = -c \cdot \frac{1}{n} = c\left(\frac{1}{n}\right)$$

Por último, cualquier número racional puede escribirse en la forma m/n, siendo m un número natural y n un entero;

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right) = mc \cdot \frac{1}{n} = c \cdot \frac{m}{n}$$

17. Si $f(x) = 0$ para todo x, entonces f satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y también $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo x e y. Supóngase ahora que f satisface estas dos propiedades, pero que $f(x)$ no es siempre 0. Demostrar que

(a) Demostrar que $f(1) = 1$

Demostración.- Al ser $f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) \cdot f(1)$ y $f(a) \neq 0$ para algún a, resulta ser $f(1) = 1$

(b) Demostrar que $f(x) = x$ si x es racional

Demostración.- Por el problema 16, $f(x) = f(1) \cdot x = x$ para todo número racional x.

(c) Demostrar que $f(x) > 0$ si $x > 0$. (Esta parte es artificiosa, pero habiendo puesto atención a las observaciones filosóficas que van con los problemas de los dos últimos capítulos, se sabrá lo que hacer.)

Demostración.- Si $c > 0$ entonces $c = d^2$ para algún d, de modo que $f(c) = f(d^2) = (f(d))^2 \geq 0$. Por otro lado, no podemos tener $f(c) = 0$, ya que esto implicaría que

$$f(a) = f\left(c \cdot \frac{a}{c}\right) = f(c) \cdot f\left(\frac{a}{c}\right) = 0 \qquad \textit{para todo a}$$

(d) Demostrar que $f(x) > f(y)$ si $x > y$

Demostración.- Si $x > y$, entonces $x - y > 0$, luego por la parte (c) tenemos que $f(x) - f(y) > 0$.

(e) Demostrar que $f(x) = x$ para todo x. Indicación: Hágase uso del hecho de que entre dos números calesquiera existe un número racional

Demostración.- Sea $f(x) > x$ para algún x. Elíjase un número racional r con $x < r < f(x)$. Entonces, según las partes (b) y (d),

$$f(x) < f(r) = r < f(x),$$

lo cual constituye una contradicción. Análogamente, es imposible que $f(x) < x$ ya que si $f(x) < r < x$ entonces

$$f(x) < r = f(r) < f(x).$$

18. ¿Qué condiciones precisas deben satisfacer f, g, h y k para que $f(x)g(y) = h(x)k(y)$ para todo x *e* y?

Respuesta.- Se satisface la ecuación si $f = 0$ ó $g = 0$ y $h = 0$ ó $k = 0$. De no ocurrir esto, existirá algún x con $f(x) \neq 0$ y algún y con $g(y) \neq 0$, entonces $0 \neq ff(x)g(y) = h(x)k(y)$, de modo que también se tendrá $h(x) \neq 0$ y $k(y) \neq 0$. Haciendo $\alpha = h(x)/f(x)$, tenemos también $h(x^{'} = \alpha f(x^{'}$ para todo $x^{'}$ para todo $x^{'}$. Tenemos pues. que $g = \alpha k$ y $h = \alpha f$ para cierto número $\alpha = 0$.

19. (a) Demostrar que no existen funciones f y g con alguna de las propiedades siguientes:

(i) $f(x) + g(y) = xy$ para todo x e y.

Demostración.- Si $f(x) + g(y) = xy \ \forall x, y$ entonces para $y = 0$ tenemos $f(x) + g(0) = 0 \ \forall x.$, de donde $f(x) = -g(0)$, e implica que f es una función constante. Luego

$$xy = f(x) + g(y) = -g(0) + g(y) \ \forall y$$

porque $f(x)$ es constante para cualquier x. Por otro lado sabemos que $g(0)$ es una constante y $g(y)$ no depende de x, sin embargo su diferencia está dada por $g(y) - g(0) = xy$. Y finalmente sea $x = 0$ entonces $g(y) = g(0) \ \forall y$, por lo tanto se concluye que

$$xy = f(x) + g(x) = -g(0) + g(0) = 0 \ \forall x, y$$

ya que si tomamos $x = y = 1$ implica que $1 = 0$ donde llegamos a un absurdo.

(ii) $f(x) \cdot g(y) = x + y$ para todo x e y.

Demostración.- Sea $y = 0$, obtenemos $f(x) = x/g(0)$. De la misma forma si $x = 0$, entonces $g(y) = y/f(0)$. Por lo tanto

$$f(x) \cdot g(y) = x + y \Longrightarrow \frac{x}{g(0)} \cdot \frac{y}{f(0)} = x + y \qquad \forall x, \; e \; \forall y$$

Supongamos que $y = 0$, entonces $\dfrac{x}{g(0)} \cdot \dfrac{0}{f(0)} = x \quad \forall x \Longrightarrow 0 = x \quad \forall x$, lo cual es absurdo.

(b) Hallar funciones f y g tales que $f(x + y) = g(xy)$ para todo x e y.

Respuesta.- Sean f y g la misma función constante. Argumentos similares a los utilizados en la parte (a) muestran que estas son las únicas opciones posibles.

20. (a) Hallar una función f que no sea constante y tal que $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$.

Respuesta.- Podemos ver que la función $f(x) = x$ satisface la condición $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$

(b) Supóngase que $f(y) - f(x) \leq (y - x)^2$ para todo x e y. (¿ Por qué esto implica $|f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2$?) Demostrar que f es una constante. Indicación: Divídase el intervalo $[x, y]$ en n partes iguales.

Demostración.- Supongamos, que puede probar que la siguiente desigualdad es cierta para todos $x, y \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{(y - x)^2}{n}$$

Ahora mantengamos los valores de x e y constantes. Podemos suponer $x \neq y$ (porque si $x = y$ entonces $f(x) = f(y)$ y así terminaríamos la demostración). Entonces, en el lado derecho, el numerador $(y - x)^2$ es distinto de 0, y mayor a cero. Por lo tanto, podemos dividir por $(y - x)^2$, de donde:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{(y - x)^2} \leq \frac{1}{n}$$

En el lado izquierdo tenemos un número no negativo que es constante (ya que x e y se mantienen constantes, el numerador no es negativo y el denominador es positivo). Este número es menor que cada fracción $\dfrac{1}{n}$ para todos los números naturales $n \geq 1$. Esto implica que el lado izquierdo es igual a cero:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{(y - x)^2} = 0$$

una vez mas multiplicamos por $(y - x)^2$ entonces

$$|f(y) - f(x)| = 0,$$

de donde

$$|f(y) - f(x)| = 0 \Longrightarrow f(y) = f(x)$$

Dado que esto es cierto para todos los valores x, y terminamos la demostración.

21. Demostrar o dar un contraejemplo de las siguientes proposiciones:

(a) $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.

Demostración.- Esto es falso en general ya que si designamos a g y h la función identidad y f sea x^2 entonces

$$[f \circ (g+h)](x) = f(g+h)(x) = f[g(x)+h(x)] = f(x+x) = f(2x) = 4x^2.$$

luego por la parte derecha de la ecuación se tendra:

$$[(f \circ g) + (f \circ h)](x) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = f[g(x)] + f[h(x)] = f(x) + g(x) = x^2 + x$$

De donde $4x^2 \neq x^2 + x$

(b) $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

Demostración.- Por definición de composición de función tenemos

$$\begin{array}{rcll} [(g+h) \circ f](x) & = & (g+h)[f(x)] & \\ & = & g[f(x)] + h[f(x)] & \text{por definición} \\ & = & (g \circ f)(x) + (h \circ f)(x) & \\ & = & [(g \circ f) + (h \circ f)](x) & \end{array}$$

Así $(g+h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f)$

(c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.

Demostración.- Por definición se tiene,

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{1}{f \circ g}\right)(x) & = & \dfrac{1}{(f \circ g)(x)} \\ & = & \dfrac{1}{f[g(x)]} \\ & = & \left(\dfrac{1}{f}\right)[g(x)] \\ & = & \left(\dfrac{1}{f} \circ g\right)(x) \end{array}$$

Así, $1/(f \circ g) = (1/f) \circ g$

(d) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\dfrac{1}{g}\right)$.

Demostración.- Esto es falso ya que si consideramos $f(x) = x+1$ y $g(x) = x^2$, entonces

$$\left(\frac{1}{f \circ g}\right)(x) = \frac{1}{(f \circ g)(x)} = \frac{1}{f[g(x)]} = \frac{1}{f(x^2)} = \frac{1}{x^2+1}$$

y por otro lado

$$\left[f \circ \left(\frac{1}{g}\right)\right](x) = f\left[\left(\frac{1}{g}\right)(x)\right] = f\left(\frac{1}{g(x)}\right) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} + 1$$

de donde $\dfrac{1}{x^2+1} \neq \dfrac{1}{x^2} + 1$

22. **(a)** Supóngase que $g = h \circ f$. Demostrar que si $f(x) = f(y)$, entonces $g(x) = g(y)$.

Demostración.- $g(x) = h(f(x)) = h(f(y)) = g(y)$ esto por definición e hipótesis.

(b) Recíprocamente, supóngase que f y g son dos funciones tales que $g(x) = g(y)$ siempre que $f(x) = f(y)$. Demostrar que $g = h \circ f$ para alguna función h. Indicación: Inténtese definir $h(z)$ cuando z es de la forma $z = f(x)$ (Éstos son los únicos z que importan) y aplicar la hipótesis para demostrar que la definicón es consistente.

Demostración.- Si $z = f(x)$, defínase $h(z) = g(x)$. Esta definición tiene sentido, ya que si $z = f(x^{'}$, entonces $g(x) = g(x^{'})$ según la parte (a). Tenemos entonces, para todo x del dominio de f, $g(x) = h(f(x))$.

23. Supóngase que $f \circ g = I$ donde $I(x) = x$. demostrar que

(a) Si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$

Demostración.- Supongamos que $x \neq y$ y $g(x) = g(y)$ esto implica que $x = I(x) = f(g(x)) = f(g(y)) = y$. Donde vemos una contradicción.

(b) Todo número b puede escribirse $b = f(a)$ para algún número a.

Demostración.- Por hipótesis $b = f(g(b))$ donde basta con poner $a = g(b)$.

24. **(a)** Supóngase que g es una función con la propiedad de ser $g(x) \neq g(y)$ si $x \neq y$. Demuéstrese que existe una función f tal que $f \circ g = I$

Demostración.- Es equivalente enunciar que si $x = y$, entonces $g(x) = g(y)$. en consecuencia del problema 22b.

(b) Supóngase que f es una función tal que todo número b puede escribirse en la forma $b = f(a)$ para algún número a. Demostrar que existe una función g tal que $f \circ g = I$

Demostración.- Para cada x, elíjase un número a tal que $x = f(a)$. Llámese a este número $g(x)$. Entonces $f(g(x)) = x = I(x)$ para todo x.

25. Hallar una función f tal que $g \circ f = I$ para alguna función g, pero tal que no exista ninguna función h con $f \circ h = I$

Respuesta.- Basta hallar una función f tal que $f(x) \neq f(y)$ si $x \neq y$, pero tal que no todo número sea de la forma $f(x)$, pues entonces según el problema 24(a) existirá una función g con $g \circ f = I$, y según el problema $23(b)$ no existiría ninguna función g con $f\circ g = I$. Una función que reúne estas condiciones es:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

ningún número de los comprendidos entre 0 y 1 es de la forma $f(x)$.

26. Supóngase $f\circ g = I$ y $h\circ f = I$. Demostrar que $g = h$. Indicación: Aplíquese el hecho de que la composición es asociativa.

Demostración.- Sea $h\circ f\circ g$ entonces $h\circ (f\circ g) = h\circ I = h$, como también $h\circ f\circ g = (h\circ f)\circ g = I\circ g = g$.

27. **(a)** Supóngase $f(x) = x+1$. ¿Existen funciones g tales que $f\circ g = g\circ f$?

Respuesta.- La condición $f\circ g = f\circ g$ significa que $f(x)+1 = g(x+1)$ para todo x. Existen muchas funciones g que satisfacen esta condición. La función g puede en efecto definirse arbitrariamente para $0 \leq x < 1$ y para otros x pueden determinarse sus valores mediante esta ecuación.

(b) Supóngase que f es una función constante. ¿Para qué funciones g se cumple $f\circ g = g\circ f$?

Respuesta.- Si $f(x) = c$ para todo x, entonces $f\circ g = g\circ f$ si y sólo si $c = f(g(x)) = g(f(x)) = g(c)$, es decir, $c = g(c)$

(c) Supóngase que $f\circ g = g\circ f$ para todas las funciones g. Demostrar que f es la función identidad $f(x) = x$

Respuesta.- Si $f\circ g = g\circ f$ para todo g, entonces se cumple esto en particular para todas las funciones constantes $g(x) = c$. Se sigue de la parte (b) que $f(c) = c$ para todo c.

28. **(a)** Sea F el conjunto de todas las funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Demuéstrese que con las definiciones de $+$ y $\cdot$ dadas en este capítulo, se cumplen todas las propiedades $P1-P9$, excepto $P7$, siempre que 0 y 1 se interpreten como funciones constantes.

Demostración.- Se comprueba fácilmente.

(b) Demostrar que $P7$ no se cumple.

Demostración.- Sea f una función con $f(x) = 0$ para algún x, pero no para todo x. Entonces $f \neq 0$, pero claramente no existe ninguna función g con $f(x)\cdot g(x) = 1$ para todo x.

(c) Demostrar que no pueden cumplirse $P10-P12$. En otros términos, demostrar que no existe ninguna colección P de funciones en F, tales que $P10-P12$ se cumplen para P. (Es suficiente, y esto simplificará las cosas, considere sólo funciones que sean 0, excepto en dos puntos x_0 y x_1).

Demostración.- Sean f y g dos funciones cuyos valores son todos 0 excepto en x_0 y x_1, siendo $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0$, $gx_0 = 0$, $g(x_1) = 1$. Ninguna de ellas es 0, de modo que o bien f o bien $-f$ tendría que estar en P y lo mismo podría decirse de g o $-g$. Pero $(\pm f)(\pm g) = 0$, en contradicción con $P12$.

(d) Supóngase que se ha definido $f < g$ en el sentido de que $f(x) < g(x)$ para todo x. ¿Cuáles de las propiedades $P' - P'13$ (del problema $1-8$)? se cumplen ahora?

Respuesta.- $P'11, P'12$ y $P'13$ se cumplen. $P'10$ es falso; si bien se cumple a lo sumo una de las condiciones, o es necesariamente cierto que se tenga que cumplir por lo menos una de ellas. Por ejemplo, si $f(x) > 0$ para algún x y $y < 0$ para otro x, entonces ninguna de las condiciones $f = 0$, $f < 0$ ó $f > 0$ para todo x.

(e) si $f < g$, ¿Se cumple $h \circ f < h \circ g$? ¿Es $f \circ h < g \circ h$?

Respuesta.- No para el primer ejemplo; si $h(x) = -x$, entonces $f < g$ implica, en realidad , que $h \circ f > h \circ g$. Si para el segundo, ya que $f(h(x) < g(h(x)$ para todo x.

3.2 Pares ordenados

Definición 3.9 $(a, b) = \{a, a, b\}$

Teorema 3.3 Si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$

Demostración.- La hipótesis significa que

$$\{a, a, b\}\{c, a, d\},$$

Ahora bien, $\{a, a, b\}$ contiene justamente dos elementos a y a, b y a es el único elemento común a estos dos elementos de $\{a, a, b\}$. Por lo tanto, $a = c$. Así pues tenemos

$$\{a, a, b\} = \{a, a, d\},$$

y solamente queda por demostrar $b = d$. Conviene distinguir dos casos.
Caso 1 $b = a$**.** En este caso, $a, b = a$, de modo que el conjunto $\{a, a, b\}$ tiene en realidad un solo elemento que es a. Lo mismo vale para $\{a, a, b\}$, de modo que $a, d = a$, lo cual implica $d = a = b$.
Caso 2. $b \neq a$. En este caso, b pertenece a uno de los elementos de $\{a, a, b\}$, pero no al otro. Debe, por lo tanto cumplirse que b pertenece a uno de los elementos de $\{a, a, b\}$, pero no al otro. Esto solamente puede ocurrir si b pertenece a a, d, pero no a a; así pues, $b = a$ o $b = d$, pero $b \neq a$, con lo que $b = d$.

■

4

Gráficas

NOTA: Siempre que se habla de un intervalo (a, b), el número a es menor que el b.

Ejemplo 4.1 Hallar la función f cuya gráfica pasa por (a, b) y (c, d). Esto equivale a decir que $f(a) = b$ y $f(c) = d$.

Respuesta.- Si f ha de ser de la forma $f(x) = \alpha x + \beta$, entonces se debe tener

$$\alpha a + \beta = b,$$

$$\alpha c + \beta = d$$

por lo tanto, $\alpha = (d - b)/(c - a)$ y $\beta = b - [()d - b/c - a]\, a$, de manera que:

$$f(x) = \frac{d-b}{c-a}x + b - \frac{d-b}{c-a}a = \frac{d-b}{c-a}(x - a) + b, \qquad si\ a \neq c$$

■

4.1 Problemas

1. Indíquse sobre una recta el conjunto de todas las x que satisfacen las siguientes condiciones. Dar también un nombre a cada conjunto, utilizando la notación para los intervalos (en algunos casos será necesario también el signo $\cup$).

(i) $|x - 3| < 1$

Respuesta.- $-1 < x - 3 < 1 \quad \Longrightarrow \quad 2 < x < 4$

(ii) $|x - 3| \leq 1$

Respuesta.- $2 \leq x \leq 4$

(iii) $|x-a|<\epsilon$

Respuesta.- $a-\epsilon<x<a+e$

(iv) $|x^2-1|<\dfrac{1}{2}$

Respuesta.- $\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}<x<\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

(v) $\dfrac{1}{1+x^2}\geq\dfrac{1}{5}$

Respuesta.- $x^2-4\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad x\geq 2\vee x\leq -2$

(vi) $\dfrac{1}{1+x^2}\leq a$

Respuesta.- $|x|\geq\pm\sqrt{\frac{1}{a}-1}$

(vii) $x^2+1\geq 2$

Respuesta.- $x\geq\pm 1$

(viii) $(x+1)(x-1)(x-2)>0$

Respuesta.- $x+1\geq 0>\wedge x-1>0\wedge x-2>0 \quad\Longrightarrow\quad -1<x<1\cup x>2$

2. Existe un procedimiento muy útil para descubrir los puntos del intervalo cerrado $[a,b]$ (Suponiendo como siempre que es $a<b$)

(a) Consideremos en primer lugar el intervalo $[0,b]$, para $b>0$. Demostrar que si x está en $[0,b]$,entonces $x=tb$ para cierto t con $0\leq t\leq 1$ ¿Cómo se puede interpretar el número t? ¿Cuál es el punto medio del intervalo $[0,b]$?

Demostración.- Sea $0\leq x\leq b$ entonces $0\leq\dfrac{x}{b}\leq 1$, luego sabemos que $0\leq t\leq 1$ por lo tanto $x=\dfrac{x}{b}\cdot b$. Ya que $t=\dfrac{x}{b}$, t representa la razón en la que x divide el intervalo $[0,b]$. Por último el punto medio del intervalo viene dado por $b/2$.

(b) Demostrar ahora que si x está en $[a,b]$, entonces $x=(1-t)a+tb$ para un cierto t con $0\leq t\leq 1$. Ayuda: esta expresión se puede poner también en la forma $a+t(b-a)$. ¿Cuál es el punto medio del intervalo $[a,b]$? ¿Cuál es el punto que está a $1/3$ de camino de a a b?

Demostración.- Sea $a\leq x\leq b$ entonces $0\leq x-a\leq b-a$, por la parte (a) se tiene $x-a=t(b-a)$ de donde $x=a+t(b-a)$

Luego el punto media del intervalor viene dado por $a+\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ y la tercera parte viene dado por $a+\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}b$.

(c) Demostrar a la inversa que si $0 \leq t \leq 1$, entonces $x = (1-t)a + tb$ esta en $[a,b]$

Demostración.- Sea $0 \leq t \leq 1$ entonces $a \leq bt \leq b$ y $0 \leq at \leq a$ entonces $0 \leq bt - at \leq b - a$ de donde $a \leq bt - at + a \leq b$ así queda demostrado que $a \leq (1-t)a + tb \leq b$.

(d) Los puntos del intervalo abierto (a,b), entonces $x = (1-t)a + tb$ para $0 < t < 1$.

Demostración.- la demostración es similar al inciso (b).

3. Dibujar el conjunto de todos los puntos (x,y) que satisface las siguientes condiciones. (En la mayor parte de los casos la imagen será una parte apreciable del plano y no simplemente una recta o una curva.)

4. Dibujar el conjunto de los puntos (x,y) que satisfacen las siguientes condiciones:

5. Dibujar el conjunto de los puntos (x,y) que satisfacen las siguientes condiciones:

6. **(a)** Demostrar que la recta que pasa por (a,b) y de pendiente m es la gráfica de la función $f(x) = m(x-a) + b$. Esta fórmula, conocida como forma punto-pendiente, es mucho más conveniente que la expresión equivalente $f(x) = mx + (b - ma)$; con la formula punto-pendiente queda inmediatamente claro que la pendiente es m y que el valor de f en a es b.

Demostración.- Obsérvese simplemente que la gráfica de $f(x) = m(x-a) + b = mx + (b - ma)$ es una recta de pendiente m, que pasa por el punto (a,b).

(b) Para $a \neq c$, demostrar que la recta que pasa por (a,b) y (c,d) es la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{d-b}{c-a}(x-a) + b$$

Demostración.- Se sabe que la pendiente esta dado por $\dfrac{d-b}{c-a}$ ya que $a \neq c$ y por la parte (a) queda demostrado la proposición.

(c) ¿Cuáles son las condiciones para que las gráficas de $f(x) = mx + b$ y $g(x) = m^{'}x + b^{'}$ sean rectas paralelas?

Respuesta.- Cuando $m = m^{'}$ y $b \neq b^{'}$.

7. **(a)** Si A, B y C, siendo A y B distintos de 0, son números cualesquiera, demostrar que el conjunto de todos los (x,y) que satisfacen $Ax + By + C = 0$ es una recta (que puede ser vertical). Indicación: Aclarar primero cuándo se tiene una recta vertical.

Demostración.- Si $B = 0$ y $A \neq 0$, entonces el conjunto es la recta vertical formada por todos los puntos (x, y) con $x = -\dfrac{C}{A}$. Si $B \neq 0$, el conjunto es la gráfica de $f(x) = (-A/B)x + (-C/B)$.

(b) Demostrar la inversa que toda recta, incluyendo las verticales, puede ser descrita como el conjunto de todos los (x, y) que satisfacen $Ax + By + C = 0$.

Demostración.- Los puntos (x, y) de la vertical con $x = a$ son precisamente los que satisfacen $I \cdot x + 0 \cdot y + (-a) = 0$. Los puntos (x, y) de la gráfica de $f(x) = mx + b$ son precisamente los que satisfacen $(-m)x + 1 \cdot y + (-b) = 0$.

8. (a) Demostrar que las gráficas de las funciones

$$f(x) = mx + b$$

$$g(x) = nx + c,$$

son perpendiculares si $mn = -1$, calculando los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo de la figura 29. (¿Por qué no se restringe la generalidad al considerar este caso especial en que las rectas se cortan en el origen?).

Demostración.- Sea $\sqrt{(1-1)^2 + (n-m)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-m)^2} + \sqrt{(1-0)^2 + (n-0)^2}$ entonces $-2mn = 2 \quad \Rightarrow \quad mn = -1$. Esto demuestra el resultado cuando $b = c = 0$. El caso general se deduce de este caso particualar, ya que la perpendicular depende sólo de la pendiente.

(b) Demostrar que las dos rectas que consisten en todos los puntos (x, y) que satisfacen las condiciones

$$Ax + By + C = 0$$

$$A^{'}x + B^{'}y + C^{'} = 0,$$

son perpendiculares si y sólo si $AA^{'} + BB^{'} = 0$.

Demostración.- Si $B \neq 0$ y $B^{'} \neq 0$, estas rectas son las gráficas de

$$f(x) = (-A/B)x - C/B$$

$$f(x) = (-A^{'}/B^{'})x - C/B$$

de modo que, según la parte (a), las rectas son perpendiculares si y sólo si

$$\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \left(\frac{A^{'}}{B^{'}}\right) = -1$$

por lo tanto $AA^{'} + BB^{'} = 0$. Si $B = 0$ y $A \neq 0$, entonces la primera recta es vertical, de modo que la segunda le es perpendicular si y sólo si $A^{'} = 0$, lo cual ocurre exactamente cuando $AA^{'} + BB = 0$ Análogamente para el caso $B^{'}$.

9. (a) Utilizando el problema $1 - 19$ demostrar que

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

Demostración.- Esta desigualdad tiene lugar si y sólo si se cumple la que se obtiene al elevar al cuadrado ambos miembros,

$$(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2 \leq (x_1^2+x_2^2)+(y_1^2+y_2^2)+2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

lo cual, como puede observarse, es equivalente a la desigualdad de Schwartz.

(b) Demostrar que

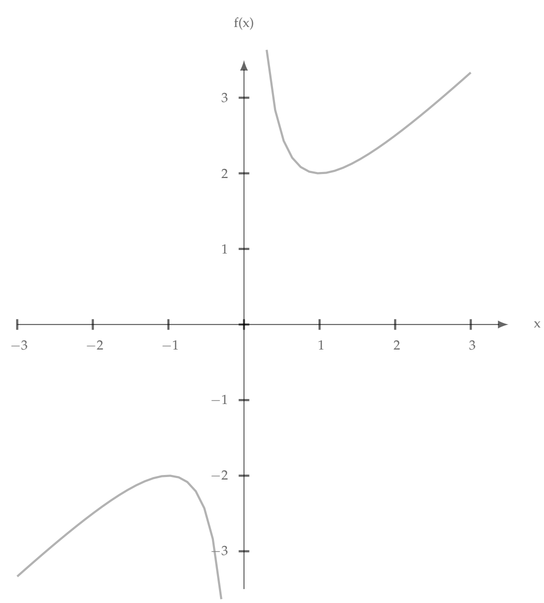
$$\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} \leq \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$$

Interpretar esta desigualdad geométrica (llamada desigualdad triangular) ¿En qué casos se satisface la igualdad?

Demostración.- Sustituyendo $x_1 = x_2 - x_1, \quad x_2 = y_2 - y_1, \quad y1 = x_3 - x_2, \quad y_2 = y_3 - y_2$ en (a) queda la ecuación esperada. Esta ecuación nos dice que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

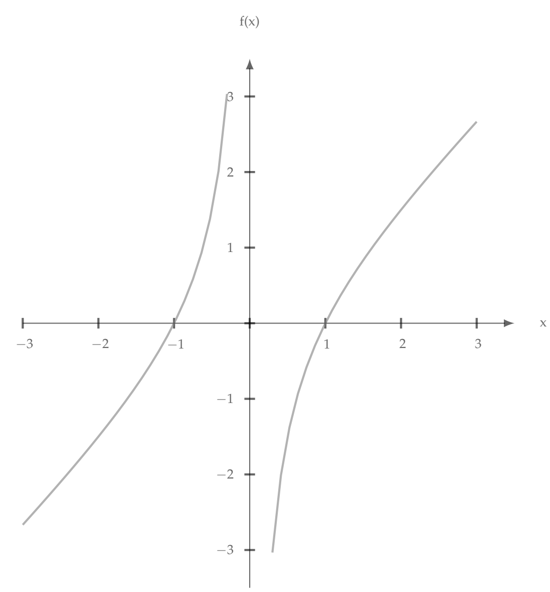
10. Esbozar las gráficas de las siguientes funciones, trazando un número de puntos suficiente para obtener una buena idea del aspecto general. (Una parte del problema consiste en hacer una estimación acerca de cuántos puntos serían suficientes; las preguntas que se plantean tienen por objeto hacer ver que vale más discurrir un poco que trazar centenares de puntos.)

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (¿Que ocurre cuando x está próximo a 0 y cuando x es grande? ¿Qué posición ocupa la gráfica en relación con la gráfica de la función identidad? ¿Por qué es suficiente considerar primero sólo x positivos?)

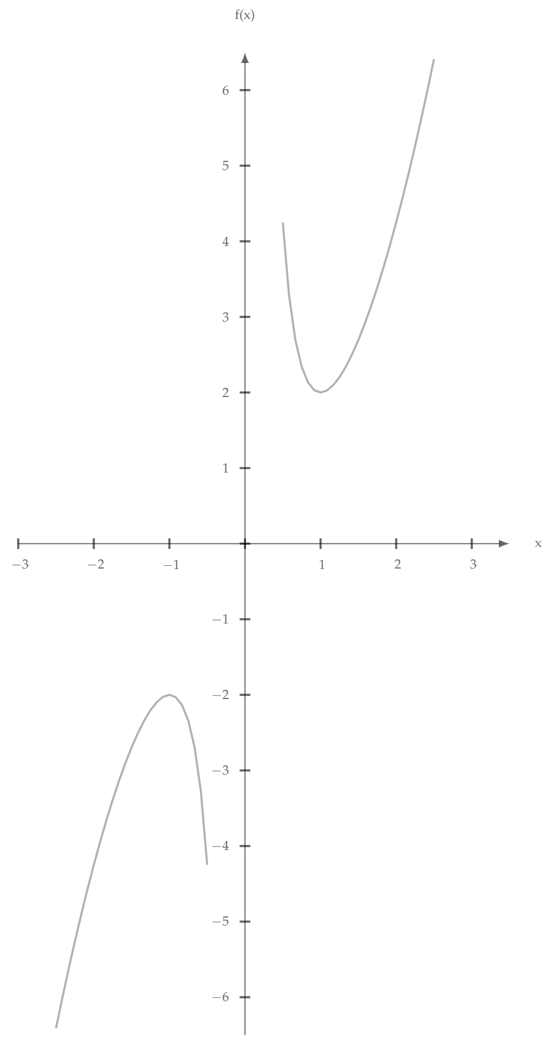


Respuesta.- Cuando x es próximo a 0 la función tiende al infinito, contrariamente a x grande que tiende a 1. Con respecto a la gráfica de la función identidad ocupa una similitud interesante. Es suficiente considerar solo los x positivos ya que se asimila los x negativos como una imagen de función impar.

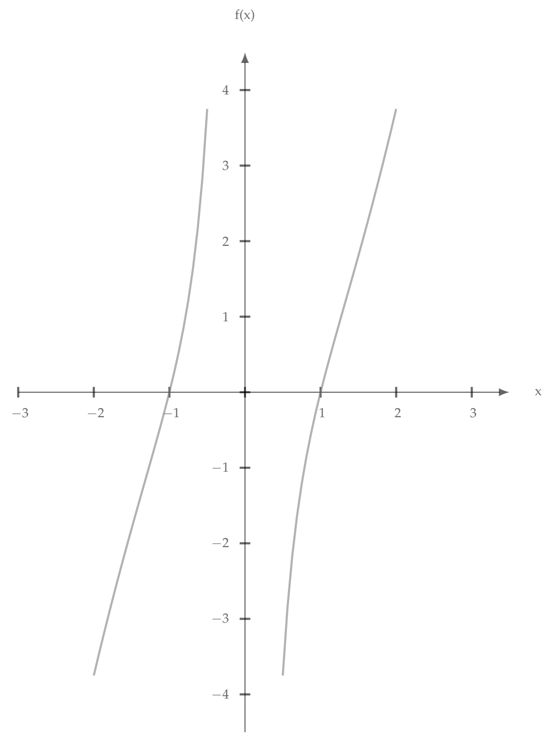
(ii) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$



(iii) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$



(iv) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$



11. Describir los rasgos generales de la gráfica de f si

(i) f es par.

Respuesta.- La gráfica es simétrica respecto al eje vertical.

(ii) f es impar.

Respuesta.- La gráfica es simétrica respecto al origen.

(iii) f es no negativa.

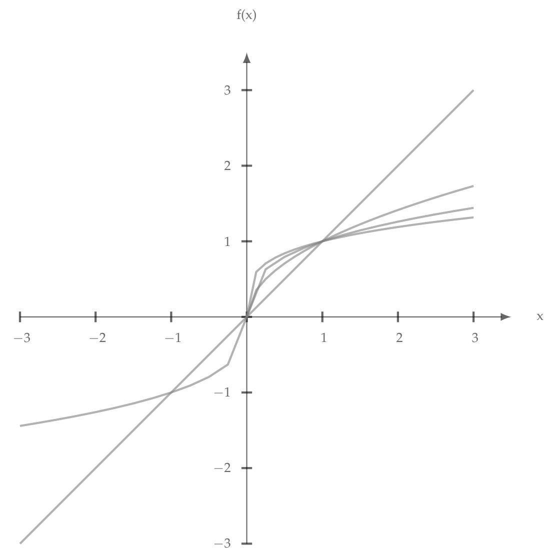
Respuesta.- La gráfica queda sobre el eje horizontal.

(iv) $f(x) = f(x+a)$ para todo x (las funciones que tienen eta propiedad reciben el nombre de periódicas con periodo a).

Respuesta.- La gráfica de f repite una y otra vez la parte comprendida entre 0 y a.

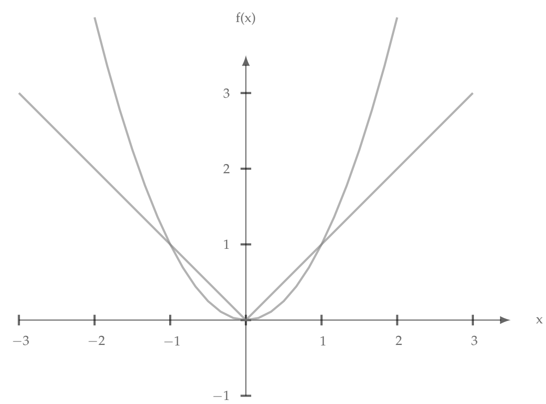
12. Trazar las funciones $f(x) = \sqrt[m]{x}$ para $m = 1, 2, 3, 4$. (Hay una manera fácil de hacer esto, utilizando la figura 14. Recuérdese, sin embargo, que $\sqrt[m]{x}$ significa la raíz m-ésima positiva de x cuando m es par; se debe también tener presente que existirá una diferencia notable entre las gráficas cuando m es par y cuando m es impar.)

Respuesta.-



13. **(a)** Trazar $f(x) = |x|$ y $f(x) = x^2$

Respuesta.-



(b) Trazr $f(x) = |\sin x|$ y $f(x) = \sin^2 x$(Existe una diferencia importante entre las gráficas, diferencia que todavía no podemos ni siquiera describir con rigor. Inténtese descubrir en qué consiste; la parte (a) está destinada a servir de orientación).

Respuesta.- La gráfica oscila como corresponde similar a (a) con respecto a la analogía.

14. Describir la gráfica de g en función de la gráfica de f si:

(i) $g(x) = f(x) + c$.

Respuesta.- La gráfica de g es la gráfica de f trasladada hacia arriba en c unidades.

(ii) $g(x) = f(x + c)$.

Respuesta.- La gráfica de g es la gráfica de f trasladada c unidades hacia la izquierda si $c > 0$.

(iii) $g(x) = cf(x)$

Respuesta.- La altura de la gráfica de f es multiplicada invariablemente por el factor c. Si $c = 0$ esto significa que $g = 0$; si $c > 0$, las distancias al eje horizontal son afectadas por el factor, pero conservan el mismo sentido,; si $c < 0$ se invierten los sentidos.

(iv) $g(x) = f(cx)$

Respuesta.- La gráfica de f resulta contraida mediante el factor c si $c > 0$; si $c < 0$, la contracción se combina con una simetría respecto al eje vertical. Si $c = 0$, entonces g es una función constante, $g(x) = f(0)$.

(v) $g(x) = f(1/x)$

Respuesta.- Todo lo que ocurre lejos de 0, ocurre también cerca, y viceversa, lo cual queda amploamente ilustrado con gráfica de $g(x) = \sin(1/x)$.

(vi) $g(x) = f(|x|)$

Respuesta.- La gráfica de g consiste en la parte de la gráfica a la derecha del eje vertical, junto con la simetría de dicha parte respecto al mismo eje vertical.

(vii) $g(x) = |f(x)|$

Respuesta.- La gráfica de g se obtiene levantando hacia arriba todas aquellas partes de la gráfica de f que quedan por debajo del eje horizontal.

(viii) $g(x) = max(f, 0)$

Respuesta.- La gráfica de g se obtiene recortando aquellas partes de la gráfica de f que se encuentran por debajo del eje horizontal.

(ix) $g(x) = min(f, 0)$

Respuesta.- La gráfica de g se obtiene recortando las partes de la gráfica de f que quedan por encima del eje horizontal.

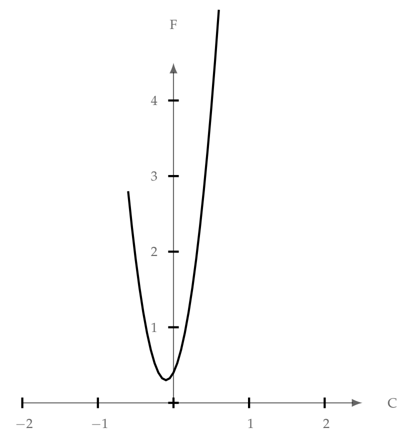
(x) $g(x) = max(f, 1)$

Respuesta.- La gráfica de g se obtiene recortando la parte de la gráfica de f que queda por debajo de la horizontal de altura 1 sobre el eje.

15. Trazar la gráfica de $(x) = ax^2 + bx + c$. Indicación: utilizar los métodos del problema $1 - 18$.

Respuesta.- Al ser

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}\right)\right]$$



16. Supóngase que A y C no son cero a la vez. Demostrar que el conjunto de todos los (x, y) que satisfacen

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$$

es o bien una parábola, una elipse o una hipérbola (o posiblemente θ). El caso $C = 0$ es en esencia el problema 15 y el caso $A = 0$ no es más que una variante. Considerar por separado los casos en que A y B son a la vez positivos o negativos y en que uno de ellos es positivo y el otro negativo.

Demostración.- Supongamos que $C = 0$, donde se tiene la ecuación

$$Ax^2 + Bx + Dy + E = 0$$

para todo (x, y). Si $D \neq 0$ entonces

$$y = -\frac{A}{D}x^2 - \frac{B}{D}x - \frac{E}{D}$$

por lo que el conjunto de todos (x, y) que satisfacen esta ecuación es el mismo que la gráfica de $f(x) = (-A/D)x^2 - (B/D)x - (E/D)$, el cual es una parábola, como se ve en el ejercicio 15.
Si $D = 0$, tenemos la ecuación $Ax^2 + Bx + E = 0$, $(A \neq 0)$, que puede tener cero, una o dos soluciones para x; en este caso, el conjunto de todos (x, y) que satisfacen la ecuación es $\emptyset$, una línea recta o dos líneas rectas paralelas. Similarmente, si $A = 0$ entonces tenemos una parábola nuevamente. Cuando $A, C \neq 0$ podemos escribir la ecuación como:

$$A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{D}{2C}\right)^2 = F$$

para algún F.
Cuando $A = C > 0$ tenemos un circulo, a menos que $F = 0$, en cuyo caso tenemos un punto es decir un circulo de radio 0, o $F < 0$, en cuyo caso tenemos 0 en general. Cuando $A, C > 0$ tenemos una elipse no necesariamente centrada en el origen. No es necesario considerar por separado el caso $A, C < 0$ ya que tenemos la misma situación, remplazando F por $-F$.

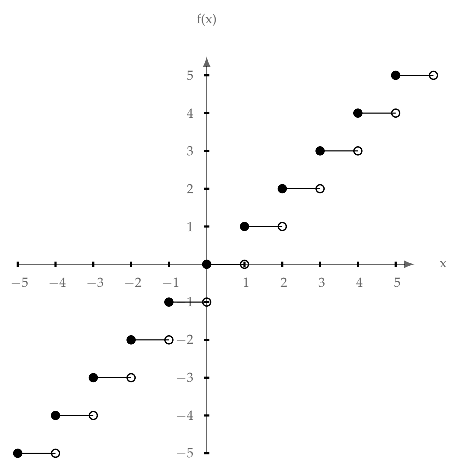
Cuando A y C tienen signos diferentes, tenemos una hipérbola para $F \neq 0$, donde hacia donde apunte depende del signo de A, C y F. Para $F = 0$ tenemos la ecuación

$$x + \frac{B}{2A} = \pm\sqrt{\frac{-C}{A}}\left(y + \frac{D}{2C}\right)$$

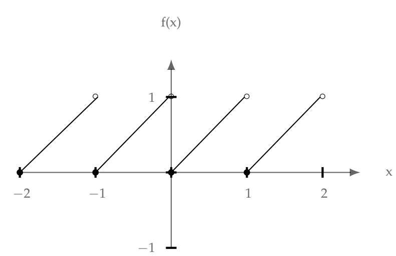
lo que da dos líneas intersectadas es decir una hipérbola degenerada.

17. Por $[x]$ se designa el mayor entero que es $\leq x$. Así, $[2.1] = [2] = 2$ y $[-0.9] = [-1.2] = -1$

(i) $f(x) = [x]$



(ii) $f(x) = x - [x]$



(iii) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$

(iv) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

(v) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$

(vi) $f(x) = \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$

18. Trazar la gráfica de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = x$, donde x es la distancia de x al entero más próximo

(b) $f(x) = 2x$

(c) $f(x) = x + \frac{1}{2}2x$

(d) $f(x) = 4x$

(e) $x + \frac{1}{2}2x + \frac{1}{4}4x$

19. Describir lo mejor que se pueda las gráficas de las funciones siguientes.

(i) $f(x) =$ el primer número del desarrollo decimal de x.

(ii) $f(x) =$ el segundo número del desarrollo decimal de x.

(iii) $ff(x) =$ el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito, y 0 en el caso contrario.

(iv) $f(x) = 0$ si el número de sietes del desarrollo decimal de x es finito y 1 en el caso contrario.

(v) $f(x) =$ el número obtenido sustituyendo todas las cifras del desarrollo decimal de x que vienen después del primer 7 si la hay por 0.

(vi) $f(x) = 0$ si 1 no aparece en el desarrollo decimal de x, y n si 1 aparece por primera vez en el n-ésimo lugar.

20. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \textit{ irracional} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{racional en forma irreducible} \end{cases}$$

21. (a) Los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2$ son los de la forma (x, x^2). Demostrar que cada uno de tales puntos equidista del punto $(0, \frac{1}{4})$ y de la gráfica de $g(x) = -\frac{1}{4}$.

Demostrar.- Supongamos que la distancia $d_1 = d_2$ siendo d_1 la distancia entre (x, x^2) y $(0, \frac{1}{4})$ y d_2 la distancia entre $(x.x^2)$ y $(x, -\frac{1}{4})$ entonces

$$(x-0)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2$$

por lo tanto queda demostrada la proposición.

(b) Dado un punto $P = (\alpha, \beta)$ y una recta horizontal L, gráfica de la función $g(x) = \gamma$, demostrar que el conjunto de todos los puntos (x, y) que equidistan de P y L es la gráfica de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Demostración.- El punto (x, y) satisface esta condición si y sólo si

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (y-\gamma)^2$$

es decir

$$y = \left(\frac{1}{2\beta - 2\gamma}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha}{\gamma - \beta}\right)x + \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\beta - 2\gamma}\right)$$

siempre que $\beta \neq \gamma$.

22. (a) Demostrar que el cuadrado de la distancia de (c, d) a (x, mx) es

$$x^2(m^2+1) + x(-2md - 2c) + d^2 + c^2$$

Utilizando el problema $1 - 18$ para encontrar el mínimo de estos números demostrar que la distancia de (c, d) a la gráfica $f(x) = mx$ es

$$|cm - d| / \sqrt{m^2+1}$$

Demostración.- La demostrar de la primera parte es sencilla si tomamos $(x-c)^2 + (mx-d)^2$. Luego según $1 - 18$ el mínimo de dos números se encuentra mediante $c - \dfrac{b^2}{4a}$ se tiene $d^2 + c^2 - \dfrac{(-2md-2c)^2}{4(m^2+1)}$ resolviendo nos queda $\dfrac{(cm-d)^2}{m^2+1}$.

(b) Hallar la distancia de (c, d) a la gráfica de $f(x) = x + b$. Reducir este caso a la parte (a).

Respuesta.- La distancia de (c, d) a la gráfica de f es la misma que la distancia de $(c, d-b)$ a la gráfica de $g(x) = mx$. Entones por la parte (a), nos queda

$$\frac{|cm - d + b|}{m^2+1}$$

.

23. (a) Utilizando el problema 22, demostrar que los número x' e y' indicados en la figura 31 vienen dados por

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y,$$
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

Demostración.- Debido a que el todos los ángulos que forman estas rectas son 45° se tiene $f(x) = -x$ y $g(x) = x$ entonces por el problema anterior nos queda

$$x' = \frac{|-x-y|}{\sqrt{2}} = |-1| \cdot \left| \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \right|,$$
$$y' = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right|$$

(b) Demostrar que el conjunto de todos los (x, y) con $(x'/\sqrt{2})^2 - (y'/\sqrt{2})^2 = 1$ es lo mismo que el conjunto de todos los (x, y) con $xy = 1$.

Demostración.- Al ser

$$\frac{x'}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2},$$
$$\frac{y'}{\sqrt{2}} = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

luego

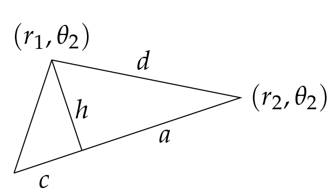
$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2} - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2}\right) \\ &= xy \end{aligned}$$

4.2 Problemas

1. Demostrar que si dos puntos tienen por coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), la distancia d entre ellos viene dada por

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Demostración.-



Por el teorema de Pitágoras se tiene $d^2 = a^2 + h^2$ y $r_1^2 = h^2 + c^2$ entonces $d^2 = a^2 + r_1^2 + c^2$. Luego $r_2 = c + a$ y por lo tanto $d^2 = (r_2 - c)^2 + r_1^2 - c^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_2c$. Nótese que $c = r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$ y por lo tanto

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

5

Limites

La función f se aproxima al límite l cerca de a, si $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a l si x se aproxima suficientemente a a pero es distinto de a.

Definición 5.1 La función f tiende hacia el límite l en a $\left(\lim_{x \to a} f(x) = l\right)$ significa: para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.

Existe algún $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x para el cual es $0 < |x - a| < \delta$, pero no $|f(x) - l| < \epsilon$.

Teorema 5.1 Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otros términos si f tiende hacia l en a, y f tiende hacia m en a, entonces $l = m$.

Demostración.- Puesto que f tiende hacia l en a, sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.
Sabemos también, puesto que f tiende hacia m en a, que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - m| < \epsilon$.
Hemos empleado dos números $delta_1$ y δ_2, ya que no podemos asegurar que el δ que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2),\ entonces\ |f(x) - l| < \epsilon\ \ y\ \ |f(x) - m| < \epsilon$$

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un $\epsilon > 0$ particular para el cual las dos condiciones $|f(x) - l| < \epsilon$ y $|f(x) - m| < \epsilon$ no puedan cumplirse a la vez si $l \neq m$
Si $l \neq m$, de modo que $|m - l| > 0$ podemos tomar como ϵ a $|l - m|/2$. Se sigue que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta,\ entonces\ |f(x) - l| < \frac{|l - m|}{2}\ \ y\ \ |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2}$$

Esto implica que para $0 < |x - a| < \delta$ tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2} + \frac{|l - m|}{2} = |l - m|$$

El cual es una contradicción.

■

Lema 5.1 Si x está cerca de x_0 e y está cerca de y_0, entonces $x+y$ estará cerca de x_0+y_0, xy estará cerca de x_0y_0 y $1/y$ estará cerca de $1/y_0$.

(1) Si $|x-x_0|<\dfrac{\epsilon}{2}$ y $|y-y_0|<\dfrac{\epsilon}{2}$ entonces $|(x+y)-(x_0+y_0)|<\epsilon$.

Demostración.-

$$|(x+y)-(x_0+y_0)| = |(x-x_0)+(y-y_0)| \le |x-x_0|+|y-y_0| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(2) Si $|x-x_0|<\min\left(1,\dfrac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}\right)$ y $|y-y_0|<\dfrac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}$ entonces $|xy-x_0y_0|<\epsilon$.

Demostración.- Puesto que $|x-x_0|<1$ se tiene

$$|x|-|x_0| \le |x-x_0| < 1,$$

de modo que

$$|x| < 1+|x_0|$$

así pues

$$\begin{array}{rcl} |xy-x_0y_0| & = & |x(y-y_0)+y_0(x-x_0)| \\ & \le & |x|\cdot|y-y_0|+|y_0|\cdot|x-x_0| \\ & < & (1+|x_0|)\cdot\dfrac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}+|y_0|\cdot\dfrac{\epsilon}{2(|y_0|+1)} \\ & < & \dfrac{\epsilon}{2}+\dfrac{\epsilon}{2}=\epsilon \end{array}$$

Notemos que $\dfrac{|y_0|}{|y_0|-1}<1$, por lo tanto $\dfrac{|y_0|}{|y_0|-1}\cdot\dfrac{\epsilon}{2}<\dfrac{\epsilon}{2}$.

(3) Si $y_0\neq 0$ y $|y-y_0|<\min\left(\dfrac{|y_0|}{2},\dfrac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right)$ entonces $y\neq 0$ y $\left|\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y_0}\right|<\epsilon$.

Demostración.- Se tiene

$$|y_0|-|y| < |y-y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

de modo que $-|y|<-\dfrac{|y_0|}{2} \Longrightarrow |y|>|y_0|/2$. En particular. $y\neq 0$, y

$$\frac{1}{|y|}<\frac{2}{|y_0|}$$

Así pues
$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0-y|}{|y|\cdot|y_0|} = \frac{1}{|y|}\cdot\frac{|y_0-y|}{|y_0|} < \frac{2}{|y_0|}\cdot\frac{1}{|y_0|}\cdot\frac{\epsilon|y_0|^2}{2} = \epsilon$$

■

Teorema 5.2 Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$, entonces

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = l+m$

(2) $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l\cdot m$

Además, si $m \neq 0$, entonces

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}$

Demostración.- La hipótesis significa que para todo $\epsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$si\ 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x)-l| < \epsilon$$

$$y \quad si\ 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x)-m < \epsilon|$$

Esto significa (ya que después de todo, $\epsilon/2$ es también un número positivo) que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$si\ 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x)-l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$y \quad si\ 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea ahora $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $0 < |x-a| < \delta_1$ y $0 < |x-a| < \delta_2$ se cumplen las dos, de modo que es a la vez

$$|f(x)-l| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}$$

pero según la parte (1) del lema anterior esto implica que $|(f+g)(x)-(l+m)| < \epsilon$.

Para demostrar (2) procedemos de la misma manera, después de consultar la parte (2) del lema. Si $\epsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x

$$si\ 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m|+1)}\right),$$

$$y \quad si\ 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2(|l|)+1}$$

Pongamos de nuevo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x-a| < \delta$, entonces

$$|f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m|+1)}\right) \qquad y \qquad |g(x)-m| < \frac{\delta}{2(|l|+1)}$$

Así pues, según el lema, $|(f \cdot g)(x) - l \cdot m| < \epsilon$, y esto demuestra (2).

Finalmente, si $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\epsilon|m|^2}{2}\right)$$

Pero según la parte (3) del lema, esto significa, en primer lugar que $g(x) \neq 0$, de modo que $(1/g)(x)$ tiene sentido, y en segundo lugar que

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \epsilon$$

Esto demuestra (3).

■

Definición 5.2 $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$si\ 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

La condición $0 < x - a < \delta$ es equivalente a $0 < |x - a| < \delta$ y $x > a$

Definición 5.3 $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$si\ 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

Definición 5.4 $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un número N grande, que, para todo x,

$$si\ x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

5.1 Problemas

1. Hallar los siguientes limites (Estos limites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

(i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$

(ii) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 2^2 + 4 + 4 = 12$

(iii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \dfrac{3^3-8}{3-2} = 19$

(iv) $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{x^n-y^n}{x-y} = \dfrac{(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})}{x-y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1} =$

$$= ny^{n-1}$$

(v) $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1} = nx^{n-1}$

(vi) $\lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \dfrac{(\sqrt{a+h})^2-(\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2. Hallar los límites siguientes:

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} \cdot \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1^2-(\sqrt{x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \cdot \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2}$

3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un δ tal que, $|f(x)-l| < \epsilon$ para todo x que satisface $0 < |x-a| < \delta$

(i) $f(x) = x^4;\ l = a^4$

Respuesta.- Por la parte (2) del lema anterior se tiene

$$|x^2-a^2| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2+1)}\right).$$

Si aplicamos una vez mas la parte (2) del lema obtenemos

$$|x-a| < \min\left(1, \frac{\min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2+1)}\right)}{2(|a|+1)}\right) = \min\left(1, \frac{\epsilon}{4(|a|^2+1)(|a|+1)}\right) = \delta$$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x};\ a = 1,\ l = 1$

Respuesta.- Por la parte (3) del lema se tiene $\left|\dfrac{1}{x} - 1\right| < \epsilon$ por lo tanto $|y-1| < \min\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\epsilon}{2}\right)$

(iii) $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x};\ a = 1,\ l = 2$

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene $\left|\left(x^4 + \dfrac{1}{x}\right) - (1+1)\right| < \epsilon$ de donde

$$|x^4 - 1| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \left|\frac{1}{x} - 1\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego por el inciso (i) y (ii)

$$|x-1| < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\frac{\epsilon}{2}}{2}\right) \quad y \quad |x-1| < \min\left(1, \frac{1, \min\left(\frac{\frac{\epsilon}{2}}{2(1+1)}\right)}{2(1+1)}\right) \implies |x-1| < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{4}, 1, \frac{\epsilon}{32}\right)$$

y por lo tanto

$$|x-1| < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{32}\right) = \delta$$

(iv) $f(x) = \dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x};\ a = 0,\ l = 0$

Respuesta.- Sea $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| < \epsilon \quad y \quad |x| < \delta$ pero $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| \le |x|$ por lo tanto $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| \le |x| < \delta = \epsilon$

(v) $f(x) = \sqrt{|x|};\ a = 0,\ l = 0$

Respuesta.- Sea $\left|\sqrt{|x|}\right| < \epsilon$ entonces $\left|(|x|)^{1/2}\right| = \left(\sqrt{x^2}\right)^{1/2} = \left[(x^2)^{1/2}\right]^{1/2} = \sqrt{x} < \epsilon$, luego sabemos que la raíz cuadrada de x debe ser siempre mayor o igual a 0 por lo tanto $|x| < \epsilon^2$, de donde concluimos que $\delta = \epsilon^2$

(vi) $f(x) = \sqrt{x};\ a = 1,\ l = 1$

Respuesta.- Si $\epsilon > 1$, póngase $\delta = 1$. Entonces $|x-1| < \delta$ implica que $0 < x < 2$ con lo que $0 < \sqrt{x} < 2$ y $|\sqrt{x} - 1| < 1$. Si $\epsilon < 1$, entonces $(1-\epsilon)^2 < x < (1+\epsilon)^2$ implica que $|\sqrt{x} - 1| < \epsilon$, de modo que podemos elegir un δ tal que $(1-\epsilon)^2 \le 1 - \delta$ y $1 + \delta \le (1-\epsilon)^2$. Podemos elegir, pues $\delta = 2\epsilon - \epsilon^2$

4. Para cada una de las funciones del problema $4 - 17$, decir para qué números a existe el límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

(i) Existe el límite si a no es un entero, ya que en los puntos enteros la función tiene un salto.

(ii) Existe el límite si a no es un entero.

(iii) De la misma forma que el inciso (ii).

(iv) Existe para todo a.

(v) Existe para todo a si sólo si sea $a = 0$ y $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

(vi) El límite no existe para los puntos $|a| < 1$ y $a \neq \frac{1}{n}$

5. **(a)** Hágase lo mismo para cada una de las funciones del problema $4 - 19$

(i) Existe para cualquier número que tenga la forma $n + \frac{k}{10}$, $n, k \in \mathbb{Z}$

(ii) Existe para cualquier número que tenga la forma $n + \frac{k}{100}$, $n, k \in \mathbb{Z}$

(iii) No es posible para ningún a.

(iv) De la misma forma que el anterior inciso.

(v) Existe para todo a excepto para los que terminan en 7999...

(vi) Existe para todo a excepto para los que terminan en 1999....

(b) El mismo problema usando decimales infinitos que terminen en una fila de ceros en lugar de los que terminan en una fila de nueves.

(i) De igual forma de la parte (a) inciso (i).

(ii) De igual forma de la parte (a) inciso (ii).

(iii) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).

(iv) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).

(v) Existe para todo a excepto para los que terminan en 8000...

(vi) Existe para todo a excepto para los que terminan en 2000...

6. Supóngase que las funciones f y g tiene n la siguiente propiedad: Para todo $\epsilon > 0$ y todo x,

$$si\ 0 < |x-2| < \operatorname{sen}^2\left(\frac{\epsilon^2}{9}\right) + \epsilon,\ entonces\ |f(x)-2| < \epsilon,$$

$$si\ 0 < |x-2| < \epsilon^2,\ entonces\ |g(x)-4| < \epsilon.$$

Para cada $\epsilon > 0$ hallar un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

(i) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x)+g(x)-6| < \epsilon$.

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene $|f(x)-2| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $|g(x)-4| < \dfrac{\epsilon}{2}$, luego remplazamos ϵ por $\epsilon/2$ de donde nos queda

$$0 < |x-2| < \operatorname{sen}^2\left[\frac{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}{9}\right] \quad y \quad |x-2| < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$$

Por último, solo hace verificar para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$. En este caso solo hace falta elegir

$$0 < |x-2| < \min\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\epsilon^2}{36}\right) + \epsilon, \frac{\epsilon^2}{4}\right] = \delta$$

(ii) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x)g(x)-8| < \epsilon$

Respuesta.- Por la segunda parte del lema demostrado tenemos que

$$|f(x)-2| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|4|+1)}\right) \quad y \quad |g(x)-4| < \frac{\epsilon}{2(|2|+1)}$$

ya que $|f(x)g(x)-2\cdot 4| < \epsilon$.
Luego reemplazando en ϵ a cada parte obteniendo,

$$0 < |x-2| < \min\left\{\operatorname{sen}^2\left[\frac{\min\left(\frac{\epsilon}{10}\right)^2}{9}\right] + \min\left(1, \frac{\epsilon}{10}\right), \left[\min\left(1, \frac{\epsilon}{6}\right)\right]^2\right\} = \delta$$

(iii) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{4}\right| < \epsilon$

Respuesta.- Por la tercera parte del lema se tiene que $|g(x)-4| < \min\left(\dfrac{|4|}{2}, \dfrac{\epsilon|4|^2}{2}\right)$, luego remplazando en ϵ obtenemos

$$|x-2| < [\min(2, 8\epsilon)]^2 = \delta$$

.

(iv) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2}\right| < \delta$

Respuesta.- Sea $\left|f(x)\dfrac{1}{g(x)} - 2dfrac14\right|$ entonces

$$|f(x)-2| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|1/4|+1)}\right) \quad y \quad \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4} < \frac{\epsilon}{2(|2|+1)}$$

, de donde

$$0 < |x-2| \min\left\{ \operatorname{sen}^2\left[\frac{(\min(1, 2\epsilon/5))^2}{9}\right] + \min(1, 2\epsilon/5), \left[\min\left(2, \frac{8\epsilon}{2(|2|+1)}\right)\right]^2 \right\} = \delta$$

7. Dese un ejemplo de una función f para la cual la siguiente proposición sea falsa: Si $|f(x)-l| < \epsilon$ cuando $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \epsilon/2$ cuando $0 < |x-a| < \delta/2$.

Respuesta.- Tomemos $a = 0$ y $l = 0$. Para $\epsilon > 0$, se tiene

$$|x-0| < \epsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{|x|} - 0| < \epsilon$$

. Aquí $\delta = \epsilon^2$. Pero si

$$0 < |x-0| < \frac{\epsilon^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{|x|} - 0| < \frac{\epsilon^2}{4} = \delta.$$

El cual no se cumple la proposición buscada.

8. **(a)** Si no existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿pueden existir $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$?

Respuesta.- Si. Por ejemplo considere

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Luego observe que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existen, mientras que $f(x)+g(x) = 1$ tiene un límite en $x = 0$. De similar forma, si tomamos $f(x) = g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe, mientras que $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{|x|^2}{x^2}$ es 1 y, por lo tanto, existe el límite en 0.

(b) Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, ¿debe existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

Respuesta.- Si, ya que

$$g(x) = [f(x)+g(x)] - f(x)$$

(c) Si existe el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y no existe el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?

Respuesta.- No, ya que es sólo otro modo de enunciar la parte (b).

(d) Si existe los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, ¿se sigue de ello que existe $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?

Respuesta.- No, el razonamiento es análogo a la parte (b), ya que si $g = (f\cdot g)/f$ no será aplicable si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

9. Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$.

Demostración.- Sea $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $g(h) = f(a+h)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$, tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \epsilon$. Ahora bien, si $0 < |h-0| < \delta$, entonces $|(h+a)-a| < \delta$, de modo que $|f(h+a)-l| < \epsilon$. Esta desigualdad puede escribirse $|g(x)-l| < \epsilon$. Así pues, $\lim\limits_{h\to 0} g(h) = l$, lo cual puede escribirse también $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = l$. el mismo razonamiento demuestra que si $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = m$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = m$. Así pues, existe uno cualquiera de los dos límites si existe el otro, y en este caso son iguales.

Se puede demostrar de otra manera. Sea $h = x-a$, observe que $h\to 0 \;\Leftrightarrow\; x-a\to 0 \;\Rightarrow\; x\to a$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h).$$

10. (a) Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-l] = 0$

Demostración.- Por definición vemos que Para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x)-l| < \epsilon$. Esta último desigualdad se puede escribir como $|[f(x)-l]-0| < \epsilon$ de modo que $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-l] = 0$. El razonamiento en sentido inverso es igual de simple e intuitivo.

(b) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} = \lim\limits_{x\to a} f(x-a)$

Demostración.- Supóngase que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = m$Queremos mostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x-a) = m$. Para todo $\epsilon > 0$ existen algún $\delta > 0$ tal que, para todo x con $0 < |x-0| < \delta$, entonces $|f(x)-m| < \epsilon \quad (1)$. Si $0 < |y-a| = |(y-a)-0| < \delta$, entonces por (1) implica que $|f(y-a)-m| < \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{y\to a} f(y-a) = m$.
Por el contrario, supóngase $\lim\limits_{x\to a} f(x-a) = m$, donde queremos demostrar $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = m$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo x con $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x-a)-m| < \epsilon \quad (2)$. Si $0 < |y| = |(y+a)-a| < \delta$, luego por (2) implica que $|f(y)-m| = |f[(y+a)-a]-m| < \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = m$.

(c) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$.

Demostración.- Sea $\lim_{x\to 0} f(x) = l$. Para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$, tal que, para todo x, si $0 < |x| < \delta$ entonces $|f(x)-l| < \epsilon$. Tomemos $0 < |x| < \min(1,\delta)$, entonces $0 < |x^3| < \delta$, para comprender mejor tomemos un número en particular, por ejemplo $x = 0.9$ donde $0 < |0.9| < \min(1,\delta)$ entonces se cumple que $0 < |0.9^3| < \delta$. Así pues $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$. Por otro lado, supongamos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$ existe, pongamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = m$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x^3)-m| < \delta$. Si $0 < |x| < \delta^3$, tenemos $0 < |\sqrt[3]{x}| < \delta$, de modo que $|f(\sqrt[3]{x^3}^3)-m| < \epsilon$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = m$.

(d) Dar un ejemplo en el que exista $\lim_{x\to 0} f(x^2)$, pero no $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Respuesta.- Sea $f(x) = 1$ para $x \leq 0$ y $f(x) = -1$ para $x < 0$. Entonces $\lim_{x\to 0} f(x^2) = 1$, pero $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

11. Supóngase que existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ cuando $0 < |x - a| < \delta$. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. En otras palabras, el $\lim_{x\to a} f(x)$ depende solamente de los valores de $f(x)$ cuando x está cerca de a; este hecho se expresa a menudo diciendo que los límites poseen una propiedad local.

Demostración.- Asumamos que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Deseamos demostrar que $\lim_{x\to a} g(x) = l$. Sea $\epsilon > 0$, de donde existe algún $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$. Luego pongamos $\delta' = \min(\delta, \delta_1)$ que complace $0 < |x - a| < \delta'$, en virtud de como se define δ' sabemos que si $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta$ tal que $f(x) = g(x)$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$, de donde concluimos que $|g(x) - l| < \epsilon$.

12. (a) Supóngase que $f(x) \leq g(x)$ para todo x. Demostrar que $\lim_{x\to a} = \lim_{x\to a} g(x)$ siempre que estos existan.

Demostración.- Demostremos por reducción al absurdo. Supóngase que $l = \lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x) = m$. Luego sea $l - m > 0$, existe entonces un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $l - f(x) < \epsilon/2$ y $|m - g(x)| < \epsilon/2$. Así pues, para $0|x - a| < \delta$ tenemos

$$g(x) < m + \epsilon/2 = l - \epsilon/2 < f(x),$$

contrario a la hipótesis.

(b) ¿De qué modo puede obtenerse una hipótesis más débil?.

Respuesta.- Basta suponer que $f(x) \leq g(x)$ para todo x que satisfaga $0|x - a| < \delta$, para algún $\delta > 0$.

(c) Si $f(x) < g(x)$ para todo x. ¿Se sigue de ello necesariamente que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$?

Respuesta.- No necesariamente ya que si $f(x) = 0$ y $g(x) = |x|$ para $x \neq 0$, y $g(0) = 1$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$.

13. Supóngase que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Demostrar que existe $\lim_{x\to a} g(x)$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

Demostración.- Intuitivamente vemos que $g(x)$ esta entre $f(x)$ y $h(x)$ donde se aproximan a un mismo número. Sea $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|h(x) - l| < \epsilon$, como también para $|f(x) - l| < \epsilon$, así pues, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon$$

de modo que $|g(x) - l| < \epsilon$.

14. (a) Demostrar que si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = l$ y $b \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(bx)/x = bl$.

Demostración.- Tengamos en cuenta que $x \to 0$ implica $bx \to 0$ siempre que b sea distinto de 0. Luego $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ de donde $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$, así $\lim\limits_{bx\to 0} g(bx) = l$, aclaremos que cuando $g(bx)$ solo ponemos un valor diferente sin alterar la función en si, es decir, sea $bx = y$ y $\lim\limits_{bx\to 0} g(bx) = l$ entonces $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = l$ que es igual a nuestra hipótesis $\left(\lim\limits_{x\to 0} g(x) = l\right)$. Por lo tanto tenemos,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(bx)}{x} = \lim_{x\to 0} b\frac{f(bx)}{bx} = b \lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} = bl$$

.

(b) ¿Qué ocurre si $b = 0$?

Respuesta.- Si $b = 0$ entonces $\dfrac{f(bx)}{bx} = \dfrac{f(0)}{0}$ el cual no esta definido, por lo tanto el límite no existe, a menos que $f(0) = 0$.

(c) La parte (a) nos permite hallar $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} 2x)/x$ en función de $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x$. Hallar este límite por otro procedimiento.

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{sen} x)(\cos x)}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \cos x \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2.$$

15. Calcular los límites siguientes en función del número $\alpha = \lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x$.

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{sen} x)(\cos x)}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \cos x \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2.$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} \frac{1}{b \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = a\alpha \cdot \frac{1}{b\alpha} = \frac{a}{b}$

(iii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 2x \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \cdot 2\alpha = 0$

(iv) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^2 = 4\alpha^2$

(v) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + 1)} = \frac{\alpha^2}{2}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x + 2x}{x+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\tan^2 x + 2x}{x}}{1+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos^2 x} + 2}{1+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + 2\right)}{1+x} = \alpha\cdot 0 + 2 = 2$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{sen} x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{sen} x(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{2}{\alpha}$

(viii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$

Respuesta.- Se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

de donde por (v) concluimos que $\alpha\cos x$.

(ix) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\operatorname{sen}(x^2-1)}{(x+1)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1} \\
&= 2\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1} \\
&= 2\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} h}{h} && \text{Por la misma razón del problema } 14(a) \\
&= 2\alpha
\end{aligned}$$

(x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3+\operatorname{sen} x}{\left(1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2} = \dfrac{3}{(1+\alpha)^2}$

(xi) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1)^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3 = 0$, ya que $|\operatorname{sen} 1/(x-1)^3| \leq 1$ para todo $x \neq 0$

16. **(a)** Demostrar que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a} |f|(x) = |l|$.

Demostración.- Sabemos que $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$ por lo tanto para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \epsilon$ de donde $\lim\limits_{x\to a} |f|(x) = |l|$

(b) Demostrar que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \max(f,g)(x) = \max(l,m)$ y lo mismo para el mínimo.

Demostración.- ya que $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ y por (a) entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \max(f,g)(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \frac{\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} |f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \frac{l+m+|l-m|}{2} \\
&= \max(l,m)
\end{aligned}$$

De similar manera,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \min(f,g)(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \frac{\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} |f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \frac{l+m-|l-m|}{2} \\
&= \min(l,m)
\end{aligned}$$

17. (a) Demostrar que $\lim_{x\to 0} 1/x$ no existe, es decir, demostrar que, cualquiera que sea l, $\lim_{x\to 0} 1/x = l$ es falso.

Demostración.- Supongamos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = l$ entonces por definción se tiene

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \Longleftrightarrow si\ 0 < |x-0| < \delta \Longrightarrow |f(x)-l| < \epsilon$$

de donde $|x| > \dfrac{1}{\epsilon + |l|}$ el cual contradice la suposición de que x tiende a 0.

(b) Demostrar que $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ no existe.

Demostración.- Podemos aplicar el mismo criterio del anterior ejercicio.

18. Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces existe un número $\delta > 0$ y un número M tal que $|f(x)| < M$ si $0 < |x-a| < \delta$. (¿Cómo puede verse esto gráficamente?).

Demostración.- Por definición tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists delta > 0\ /\ si\ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-l| < \epsilon$$

Tomemos $\epsilon = 1$ de donde $l-1 < f(x) < l+1$ de modo que podemos tomar $M > 1+l$ y $-M < 1-l$ por lo tanto $|f(x)| < M$.

19. Demostrar que si $f(x) = 0$ para x irracional y $f(x) = 1$ para x racional, entonces no existe $\lim_{x \to a} f(x)$ cualquiera que sea a.

Demostración.- Para cualquier $\delta > 0$ tenemos $f(x) = 0$ para algún x que satisface $0 < |x - a| < \delta$ y también $f(x) = 1$ para algún x que satisface $0 < |x - a| < \delta$. Significa esto que no podemos tener $|f(x) - l| < 1/2$ tenga l el valor que tenga.

20. Demostrar que si $f(x) = x$ para x racional y $f(x) = -x$ para x irracional, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe si $a \neq 0$.

Demostración.- Sea el caso $a > 0$. Al estar $f(x)$ cerca de a para todos los racionales x que están cerca de a, y al estar $f(x)$ cerca de $-a$ para todos los irracionales x que están cerca de a, no podemos tener a $f(x)$ próximo a ningún número fijo. Es decir, para cualquier $\delta > 0$ existe x con $0 < |x - a| < \delta$ y $f(x) > a/2$, así como x con $0 < |x - a| < \delta$ y $f(x) < -a/2$. Puesto que la distinta entre $a/2$ y $-a/2$ es a, esto significa que no podemos tener $|f(x) - l| < a$ para todos estos x, cualquiera que sea el valor de l.

21. **(a)** Demostrar que si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to 0} g(x) \operatorname{sen} 1/x = 0$.

Demostración.- En consecuencia de (b) y sabiendo que $|\operatorname{sen} 1/x| \leq 1$ para todo $x \neq 0$. Se tiene que el resultado esperado.

(b) Generalizar este hecho como sigue: Si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ y $|h(x)| \leq M$ para todo x, entonces $\lim_{x \to 0} g(x)h(x) = 0$

Demostración.- Por definición de límites y sea $M = 1$ se tiene $|g(x)| < \dfrac{\epsilon}{M} = \epsilon$, para todo x con $0 < |x| < \delta$. Entonces $|g(x)h(x)| < \epsilon$ ya que $|h(x)| \leq M$.

22. Considérese una función f con la siguiente propiedad: Si g es una función cualquiera para la cual no existe el $\lim_{x \to 0} g(x)$, entonces tampoco existe $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$. Demostrar que esto ocurre si y sólo si $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe.

Demostración.- Si $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, esta claro que $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ no existe cuando $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe, esto según el problema $8(b)$ y (c). Por otro lado, supongamos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, elija $g = -f$, entonces $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe, pero $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ existe.

23. Este problema es el análogo del problema 22 cuando $f + g$ se sustituye por $f \cdot g$. En este caso la situación es considerablemente más compleja y el análisis debe hacerse en varias etapas.

(a) Supóngase que existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ y es $\neq 0$. Demostrar que si $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe, entonces tampoco existe $\lim_{x \to 0} f(x)g(x)$.

Demostración.- Ya que $\lim_{x \to 0} f(x) \neq 0$ entonces

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} f(x)g(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x \to 0} f(x)}$$

Ponemos $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \alpha$, por lo cual

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{\alpha}\cdot \lim_{x\to 0} f(x)g(x)$$

Por lo tanto si $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$ no existe.

(b) Demostrar el mismo resultado si $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = \infty$.

Demostración.- Demostraremos que si $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = l$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Para entender mejor el problema veamos un ejemplo: Sea $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\cdot x = 1$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Ya mas claro el asunto, vayamos a la demostración.

Sea $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = \infty$, para cualquier $M > 0$ existe algún $\delta_M > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-0| < \delta_M \text{ entonces } |f(x)| > M.$$

Luego, para $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = l$ nos dice que para cualquier $\epsilon > 0$ existe algún $\delta_l > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-0| < \delta_l \text{ entonces } |f(x)g(x) - l| < \epsilon.$$

Ahora, para cualquier ϵ podemos establecer $M = \dfrac{\epsilon + |l|}{\epsilon}$ y escogemos $\delta_{min} = \min(\delta_M, \delta_l)$. Así, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta_{min} \text{ tenemos } |f(x)g(x) - l| < \epsilon \text{ y } |f(x)| > M = \frac{\epsilon + |l|}{\epsilon},$$

luego $|f(x)g(x)| - |l| \leq |f(x)g(x) - l| < \epsilon$, de donde $|f(x)g(x)| < |l| + \epsilon$, así

$$|g(x)| < \frac{|l|+\epsilon}{|f(x)|} < \frac{|l|+\epsilon}{M} = \frac{|l|+\epsilon}{M} = \frac{|l|+\epsilon}{\frac{|l|+\epsilon}{\epsilon}} = \epsilon$$

Por lo tanto, para cualquier $\epsilon > 0$ hay un δ_{min} tal que para todo x si

$$0 < |x-0| < \delta_{min} \text{ entonces } |g(x)| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

(c) Demostrar que si no se cumple ninguna de estas dos condiciones, entonces existe una función g tal que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe, pero existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$.

Demostración.- Demostraremos por casos.

Caso 1. Para algún $\epsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo x si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x)| > \epsilon$. Luego podemos definimos $g(x)$ para x como $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, aclaremos que para x pequeños el denominador es distinto de 0, de donde

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Así que el límite de $f(x)g(x)$ existe. Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$. Pero esto implicaría que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe, con lo que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe.

¿Cómo sabemos que $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ y por tanto se aplica a la parte a?. Supongamos $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, según nuestro definición del caso 1 tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Así para cualquier $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que para todo x si

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \epsilon$$

de donde $|f(x)| > \dfrac{1}{\epsilon}$ y por lo tanto

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$$

Esto significa que $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$, contrario al inciso b.

Caso 2. Elíjase x_n según se indica. Defínase $g(x) = 0$ para $x \neq x_n$ y $g(x) = 1$ para $x = x_n$. Entonces $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, pero $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

24. Supóngase que, para todo número natural n, A_n es un conjunto finito de número en $[0,1]$, y que A_n y A_m carecen de elementos comunes si $m \neq n$. Defínase f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & si \quad \text{está en } An \\ 0, & si \quad x \text{ no está en } A_n \text{ para ningún } n \end{cases}$$

Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ para todo a de $[0,1]$.

Demostración.- Dado $\epsilon > 0$, elíjase n con $1/n < \epsilon$ y hágase δ igual a la distancia mínima desde a a todos los puntos de $A_1, A_2, ..., A_n$, excepto a sí mismo en el caso en que a sea uno de estos puntos. Entonces $0 < |x-a| < \delta$ implica que x no está en $A_1, a_2, ..., A_n$, de modo que $f(x) = 0$ o $1/m$ para $m > n$, o sea que $|f(x)| < \delta$.

25. Explíquese por qué son correctas las siguientes definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$: Para todo $\delta > 0$ existe un $\epsilon > 0$ tal que, para todo x,

(i) Si $0 < |x-a| < \epsilon$, entonces $|f(x) - l < \delta$.

Respuesta.- Ésta es la definición en si,llamando simplemente a los números δ como ϵ y viceversa.

(ii) Si $0 < |x-a| < \epsilon$ entonces $|f(x) - l| \leq \delta$.

Respuesta.- Si la condición se cumple para todos los $\delta > 0$, entonces se puede aplicar a $\delta/2$, de modo que existe un $\epsilon > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \epsilon$, entonces $|f(x) - l| \leq \delta/2 < \delta$.

(iii) Si $0 < |x-a| < \epsilon$ entonces $|f(x) - l| < 5\delta$.

Respuesta.- Aplíquese a 5δ para obtener (i).

(iv) Si $0 < |x-a| < \epsilon/10$ entonces $|f(x)-l| < \delta$.

Respuesta.- Dice lo mismo que (i), ya que $\epsilon/10 > 0$, y es solamente la existencia de algún $\delta > 0$ lo que está en litigio.

26. Póngase ejemplos para demostrar que las siguientes definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$ no son correctos.

(a) Para todo $\delta > 0$ existe un $\epsilon > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x)-l| < \epsilon$.

Respuesta.- Aunque se es verdad que $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$, no es verdad que para todo $\delta > 0$ exista un $\delta > 0$ con $|1/x - 1| < \delta$ para $0 < |x-1| < \delta$. En efecto, si $\delta = 1$, no existe un ϵ, ya que $1/x$ puede ser tan grande como se quiera, siendo $0 < x-1 < 1$.

(b) Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|f(x)-l| < \epsilon$ entonces $0 < |x-a| < \delta$.

Respuesta.- Si f es una función constante $f(x) = c$, esta condición no se cumple, puesto que $|f(x)-c| < 1$ no implica ciertamente que $0 < |x-a| < delta$, para algún δ.
Además, la función $f(x) = x$, satisface esta condición cualquiera que sea a y l.

27. Para cada una de las funciones del problema 4-17 indíquese para qué números a existen los límites laterales $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

(i) Los dos límites existen para todo a.

(ii) Los dos límites existen para todo a.

(iii) Los dos límites existen para todo a.

(iv) Los dos límites existen para todo a.

(v) Los dos límites laterales existen, para $a \neq 0$, y ninguno de los dos existe para $a = 0$.

(vi) Los dos límites laterales existen para todo a con $|a| < 1$.

28. **(a)** **(i)** Los dos límites existen para todo a.

(ii) Los dos límites existen para todo a.

(iii) Ninguno de los dos límites laterales existe, cualquiera que sea a.

(iv) Ninguno de los dos límites laterales existe, cualquiera que sea a.

(v) Los dos límites laterales existen para todo a.

(vi) Los dos límites laterales existen para todos los a cuyo desarrollo decimal contenga por lo menos un 1; además, el límite por la derecha existe para todo a cuyo desarrollo decimal no contenga ningún 1, pero que termine en 0999....

(b) Las respuestas son las mismas que para la parte (a).

29. Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Demostración.- Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} = l$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{si } 0 < a - x < \delta_2, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

de donde

$$\text{si } a < x < a + \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{si } a - \delta_2 < x < a, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces o bien $a - \delta_2 < a - \delta < x < a$, o bien $a < x < a + \delta < a + \delta_1$, de modo que $|f(x) - l| < \epsilon$.
Se puede escribir también como sigue. Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces o bien $0 < x - a < \delta < \delta_1$ o bien $0 < a - x < \delta < \delta_2$, de modo que $|f(x) - l| < \epsilon$.

30. Demostrar que

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(-x)$.

Demostración.- Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ para $0 < x - 0 < \delta$, luego si $-\delta < x - 0 < 0$, entonces $0 < 0 - x < \delta$, de modo que $|f(-x) - l| < \epsilon$. Así pues, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(-x) = l$. La demostración reciproca es análoga.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Demostración.- Si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = l$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \epsilon|$ para $0 < x < \delta$. De donde $0 < |x| < |\delta|$ pero como $\delta > 0$ entonce $0 < |x| < \delta$, así $|f(|x|) - l| < \delta$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|) = l$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Demostración.- Si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ para $0 < x < \delta_1$ de donde $0 < x^2 < \delta_1$, como $|x^2| = x^2$ y $\delta = \delta_1^2$, se tiene $0 < |x^2| < \delta$, de modo que $|f(x^2) - l| < \delta$. Por lo tanto $\lim_{x\to 0} f(x^2) = l$.

31. Supóngase que $\lim_{x\to a^-} f(x) < \lim_{x\to a^+} f(x)$.(Ilústrese esta proposición con un dibujo.) Demostrar que existe algún $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(y)$ siempre que $x < a < y$, $|x-a| < \delta$ e $|y-a| < \delta$. ¿Se cumple la recíproca?.

Demostración.- Sea $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$. Al ser $m - l > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - l| < \frac{m-l}{2} \text{ cuando } 0 < a - x < \delta$$

$$|f(y) - l| < \frac{m-l}{2} \text{ cuando } 0 < y - a < \delta$$

Esto implica,

$$f(x) < l + \frac{m-l}{2} = m - \frac{l-m}{2} < f(y).$$

la reciproca es falsa como lo demuestra $f(t) = t$ y cualquier a. Por ello se concluye que $\lim_{x\to a^-} f(x) \leq \lim_{x\to a^+} f(x)$.

32. Demostrar que $\lim_{x\to\infty} (a_n x^n + ... + a_0) \,/\, (b_m x^m + ... + b_0)$ existe si y sólo si $m \geq n$. ¿Cuál es el límite cuando $m = n$? ¿Y cuándo $m > n$? Indicación: El límite fácil es $\lim_{x\to\infty} 1/x^k = 0$.

Demostración.- Supongamos que $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$. Si $x \neq 0$, entonces si dividimos todo por x^n nos queda,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + ... + a_0}{b_m x^m + ... + b_0} = \frac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_0}{x^n}}{\dfrac{b_m}{x^{n-m}} + ... + \dfrac{b_0}{x^n}}$$

Si $m < n$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = a_n$ pero $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Esto implica que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe. Por el contrario si $m > n$ entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \left[\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\right] \cdot \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

Por otro lado si $m \geq n$, entonces si dividimos por x^m se tiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + ... + a_0}{b_m x^m + ... + b_0} = \frac{\dfrac{a_n}{x_{m-n}} + ... + \dfrac{a_0}{x^m}}{b_m + ... + \dfrac{b_0}{x^m}}$$

Entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ si $m > n$ y a_n si $m = n$, mientras que $\lim_{x\to\infty} g(x) = b_m$.
Así pues, si $m > n$ implica $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_m}$ si $m = n$.

33. Hallar los límites siguientes

(i) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen}^3 x}{5x+6} \implies \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x + \operatorname{sen}^3 x}{x}}{\dfrac{5x+6}{x}} = \frac{1}{5}$$

(ii) Respuesta.- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+5} \implies \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+\dfrac{5}{x}} \cdot \operatorname{sen} x = 0$ ya que $1/\infty$ tiende a 0 y $|\operatorname{sen} x| \leq 1$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x \implies \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} \implies \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \implies$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

(iv) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1+\operatorname{sen}^2 x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$

Respuesta.- El límite no existe ya que $\left(1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$ se aproxima a 1, pero $1+\operatorname{sen}^2 x$ no se aproxima a $x \to \infty$.

34. Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Demostración.- Si $\lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe algún N tal que $|f(x)-l| < \epsilon$ para $x > N$, y evidentemente podemos suponer que $N > 0$. Ahora bien, si $0 < x < 1/N$ entonces $1/x > N$ de modo que $|f(x)-l| < \epsilon$. Por tanto, $\lim_{x\to 0^+} = l$. La demostración recíproca es parecida.

35. Hallar los límites siguientes en función del número $\alpha = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x/x$

(i) $\lim_{x\to infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Respuesta.- Ya que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para todo x entonces $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

(ii) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

36. Definir " $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$".

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ significa que par todo $\epsilon > 0$, hay algún N tal que $|f(x)-l| < \epsilon$ para algún $x < N$.

(a) Hallar $\lim_{x\to-\infty} (a_n x^n + ... + a_0)/(b_m x^m + ... + b_0)$

Respuesta.- La respuesta ya se dio en el problema 32 cuando $x \to \infty$.

(b) Demostrar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x)$.

Demostración.- Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, entonces para todo $\epsilon > 0$ para algún N tal que $|f(x)-l| < \epsilon$ para $x > N$. Luego por propiedades de números reales se tiene $-x > N$, por lo tanto $|f(-x)-l| < \epsilon$. Así $\lim_{x\to-\infty} f(-x) = l$.

(c) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(1/x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Demostración.- Si $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ para $x < N$, de donde asumimos que $N < 0$. Luego $1/N < x < 0$ se sigue $1/x < N$, así $|f(1/x) - l| < \epsilon$.

37. Definamos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ en el sentido de que para todo N existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > N$.

(a) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 3} 1/(x-3)^2 = \infty$.

Demostración.- Sabiendo que $N > 0$ y sea $\delta = 1/\sqrt{N}$, entonces $0 < |x - 3| < \delta$ implica que $(x-3)^2 < 1/N$, de donde $1/(x-3)^2 > N$.

(b) Demostrar que si $f(x) > \epsilon > 0$ para todo x, y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$$

Demostración.- Dado $N > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|g(x)| < \dfrac{\epsilon}{N}$, luego

$$0 < |x - a| < \delta \implies \frac{f(x)}{|g(x)|} > \frac{\epsilon}{\frac{\epsilon}{N}} = N,$$

luego ya que N es un número grande, queda demostrada la proposición.

38. (a) Definir $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$ (O por lo menos convénzase el lector que podría escribir las definiciones si tuviera humor para ello. ¿Cuántos otros símbolos podría definir?).

Respuesta.- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ significa que para todo N existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $a < x < a + \delta$, entonces $f(x) > N$.
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ significa que para todo N existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $a - \delta < x < a$, entonces $f(x) > N$.
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$ significa que para todo N existe un M tal que, para todo x, si $x > M$, entonces $f(x) > N$.
También es posible definir para,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \infty \\
\lim_{x\to a} f(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to a^+} f(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to a^-} f(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to \infty} f(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= -\infty
\end{aligned}$$

(b) Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

Demostración.- Dado $N > 0$, elegir un $\delta = 1/N$. Si $0 < x < \delta$, entonces $1/x > N$.

(c) Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$, entonces para todo N existe algún M tal que $f(1/x) < N$ para $x > M$. Escoge $M > 0$. Si $0 < x < 1/M$, entonces $x > M$, así $f(x) > N$.. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. La demostración en dirección contraria es similar.

39. Hallar los siguientes límites, si existen

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^2}}{7-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \infty.$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x(1+\operatorname{sen}^2 x).$

Respuesta.- El límite esta dado desde $1 \le 1+\operatorname{sen}^2 x \le 2$ para todo x.

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{sen}^2 x.$

Respuesta.- El límite no existe, ya que $\operatorname{sen}^2 x$ oscila entre 0 y 1.

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = \infty.$

(v) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1} =$
1.

(vi) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{1x}} =$
∞

(vii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

40. **(a)** Hallar el perímetro de un n-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio r; para las funciones trigonométricas que entren en juego.

Respuesta.- Si trazamos un circulo y un punto central O, dos puntos A y C en el perímetro de la circunferencia y un punto medio B entre A y C trazando una linea recta, entonces el angulo BOC es π/n. Luego $BC = r\operatorname{sen}(\pi/n)$ y $AC = 2\pi\operatorname{sen}(\pi/n)$. Así el perímetro es $2rn\operatorname{sen}(\pi/n)$.

(b) ¿A qué valor se aproxima este perímetro cuando n es muy grande?

Respuesta.- A medida que n se vuelve muy grande, esto se aproxima a

$$\lim_{x\to\infty} 2rx \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \pi 2r \frac{x}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 2\pi r\alpha$$

donde $\alpha = \lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{sen} x)/x$ como el problema 45 ii.

41. Una vez ya en la imprenta el manuscrito de la primera edición de éste libro, se me ocurrió una manera mucho más sencilla de demostrar que $\lim x^2 = a^2$, y $\lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3$, sin pasar por todos los pasos de la página 83. Supongamos que queremos demostrar que $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$, siendo $a > 0$. Dado $\epsilon > 0$ hacemos simplemente que δ sea el mínimo de $\sqrt{a^2+\epsilon} - a$ y $a - \sqrt{a^2-\epsilon}$; entonces $|x-a| < \delta$ implica que $\sqrt{a^2-\epsilon} < x < \sqrt{a^2+\epsilon}$, de modo que $a^2 - \epsilon < x^2 < a^2 + \epsilon$, o $|x^2 - a^2| < \epsilon$. Por fortuna no llegué a tiempo para introducir estos cambios, puesto que esta demostración es totalmente falsa.¿Dónde se encuentra el fallo?.

Respuesta.-

6

Funciones Continuas

Definición 6.1 La función f es continua en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$.
Pero en este caso, en que el límite es $f(a)$, la frase

$$0 < |x-a| < \delta$$

puede cambiarse por la condición más sencilla

$$|x-a| < \delta$$

puesto que si $x = a$ se cumple ciertamente que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Teorema 6.1 Si f y g son continuas en a, entonces

(1) $f+g$ es continua en a,

(2) $f \cdot g$ es continua en a,

(3) Además, si $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es continua en a.

Demostración.- Puesto que f y g son continuas en a,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que $f+g$ es continua en a.
Para $f \cdot g$ se tiene que

$$\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = f(a) \cdot fg(a) = (f \cdot g)(a)$$

Por último para $1/g$ tenemos que

$$\lim_{x\to a} 1/g = 1/g(a), \qquad para\ g(a) \neq 0$$

■

Teorema 6.2 Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.

Demostración.- Sea $\epsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{Si } |x-a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \epsilon, \text{ es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de f para estimar cómo de cerca tiene que estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que f es continua en $g(a)$, existe un $\delta^{'} > 0$ tal que para todo y,

$$\text{Si } |y - g(a)| < \delta^{'}, \text{ entonces } |f(y) - f(g(a))| < \epsilon. \qquad (1)$$

En particular, esto significa que

$$\text{Si } |g(x) - g(a)| < \delta^{'}, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon. \qquad (2)$$

Aplicamos ahora la continuidad de g para estimar cómo de cerca tiene que estar x de a para que se cumpla la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta^{'}$. El número $\delta^{'}$ es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar $\delta^{'}$ como el *epsilon* de la definición de continuidad de g en a. Deducimos que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \delta^{'}, \qquad (3)$$

combinando (2) y (3) vemos que para todo x,

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

■

Definición 6.2 Si f es continua en x para todo x en (a,b), entonces se dice que f es continua en (a,b) si

$$f \text{ es continua en } x \text{ para todo } x \text{ de } (a,b), \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b). \qquad (2)$$

Teorema 6.3 Supóngase que f es continua en a, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x-a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) > 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x-a| < \delta$.

Demostración.- Considérese el caso $f(a) > 0$ puesto que f que es continua en a, si $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Puesto que $f(a) > 0$ podemos tomar a $f(a)$ como el *epsilon*. Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a)$$

Y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.
Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\epsilon = -f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$.

■

6.1 Problemas

1. ¿para cuáles de las siguientes funciones f existe una función F de dominio R tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f?

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Respuesta.- Sabiendo que el límite cuando x tiende a 2 existe, entonces existe una función F de dominio R tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f.

(ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

Respuesta.- No existe F, ya que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

(iii) $f(x) = 0,\ x$ irracional.

Respuesta.- Existe F de dominio R tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f.

(iv) $f(x) = 1/q,\ x = p/q$ racional en fracción irreducible. Respuesta.- No existe F, ya que $F(a)$ tendría que ser 0 para los a irracionales, y entonces F no podría ser continua en a si a es racional.

2. ¿En qué puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?.

Respuesta.- Problema 4-17.
Para (i), (ii) y (iii) son continuas para todos los puntos menos para los enteros. Para (iv) es continua en todos los puntos.Para (v) es entera para todos los puntos excepto para 0 y $1/n$ para n en los enteros.

Problema 4-19.
(i) todos los puntos que no sean de la forma $n + k/10$ para todos los enteros k y n. El (ii) para todo los puntos que no sea de la forma $n + k/100$ para todos los enteros k y n. (iii) y (iv) para ningún punto. (v) para todos los puntos que el decimal no termine en $7999\ldots$. Y (vi) para todos los puntos que el decimal contenga al menos un 1.

3. **(a)** Supóngase que f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo x. Demostrar que f es continua en 0.[Observe que $f(0)$ debe ser igual a 0.]

Demostración.- Supongamos que $|f(x)| \leq |x|$. afirmamos que, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. De hecho dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \epsilon$. Si $|x| < \delta$ entonces $|f(x)| \leq |x| < \delta = \epsilon$. Esto prueba que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Para concluir que f es constante en 0, tenga en cuenta que, como se señala en la pregunta, aplicar $|f(x)| \leq |x|$ para todo x, en $x = 0$ se da $|f(0)| \leq 0$ y en consecuencia $f(0) = 0$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ implica que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, así f es constante en 0.

(b) Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún $a \neq 0$.

Respuesta.- Sea $f(x) = 0$ para x irracional, y $f(x) = x$ para x racional.

(c) Supóngase que g es continua en 0, $g(0) = 0$, y $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demostrar que f es continua en 0.

Demostración.- La condición $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x y $g(0) = 0$ implica que $ff(0) = 0$, así que sólo tenemos que demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
Sea $\epsilon > 0$, luego ya que g es continua en 0, existe un $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta$ entonces $|g(x) - g(0)| = |g(x)| < \epsilon$. Usando $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x, vemos que $|x| < \delta$ implica $|f(x)| \leq |g(x)| < \epsilon$. Por lo tanto esto demuestra que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

4. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos lo puntos.

Respuesta.- Sea $f(x) = 1$ para x racional, y $f(x) = -1$ para x irracional.

5. Para todo número a, hallar la función que sea continua en a, pero no lo sea en ningún otro punto.

Respuesta.- Sea $f(x) = a$ para x irracional, y $f(x) = x$ para x racional.

6. **(a)** Hallar una función f que sea descontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.

Respuesta.- Define f como sigue,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

(b) Hallar una función f que sea descontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, y en 0, pero sea continua en ningún en todos los demás puntos.

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

7. Supóngase que f satisface $(x + y) = f(x) + f(y)$, y que f es continua en 0. Demostrar que f es continua en a para todo a.

Demostración.- Sea $f(x+0) = f(x) + f(0)$, por lo tanto $f(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0} f(a) + f(h) - f(a)\\ &= \lim_{h\to 0} f(h)\\ &= \lim_{h\to 0} f(h) - f(0) = 0\end{aligned}$$

8. Supóngase que f es continua en a y $f(a) = 0$. Demostrar que si $\alpha \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinta de 0 en algún intervalo abierto que contiene a.

Demostración.- Sabiendo que $(f+\alpha)(a) \neq 0$, entonces por el teorema 3, $f + \alpha$ es distinto de cero en algún intervalo que contiene a a.

9. **(a)** Supóngase que f no es continua en a. Demostrar que para algún $\epsilon > 0$ existen números x tan próximos como se quiere de a con $|f(x) - f(a)| > \epsilon$.

Demostración.- Lógicamente equivalente a la definición de continuidad se tiene

$$\exists\, \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists\, x |x-a| < \delta\ y\ |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

Existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| > \epsilon$. Luego sea $\epsilon' = \dfrac{1}{2}\epsilon$, entonces tenemos $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon > \epsilon'$.

(b) Dedúzcase que para algún $\epsilon > 0$, o bien existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) < f(a) - \epsilon$ o bien existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) > f(a) + \epsilon$.

Demostración.- La demostración es directa aplicando la reciproca de la definicion de continuidad. Como se vio en el inciso a.

10. **(a)** Demostrar que si f es continua en a, entonces también lo es $|f|$.

Demostración.- Ya que $\lim_{x\to a} f(x) = l \implies \lim_{x\to a} |f|(x) = |l|$ como se vio en el problema 5-16, entonces

$$\lim_{x\to a} |f|(x) = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right| = |f(a)| = |f|(a).$$

(b) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = E + O$, donde E es par y continua y O es impar y continua.

Demostración.- Por el problema 13 del capítulo 3 (funciones) mostramos que E y O son continuas si f lo es.

(c) Demostrar que si f y g son continuas, también lo son $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$.

Demostración.- Por la parte a) y sabiendo que

$$\begin{aligned} \max(f,g) &= \frac{f+g+|f-g|}{2} \\ \min(f,g) &= \frac{f+g-|f-g|}{2} \end{aligned}$$

(d) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = g - h$, donde g y h son no negativas y continuas.

Demostración.- Por el problema 15 del capítulo 3 (funciones) podemos comprobar que $f = g - h$ siempre que f sea continua.

11. Demostrar el teorema 1(3) aplicando el teorema 2 y la continuidad de la función $f(x) = 1/x$.

Demostración.- Sea $f \circ g = \dfrac{1}{g}$ y f es continua en $g(a)$ para $g(a) \neq 0$, entonces por el teorema 2, se tiene que $\dfrac{1}{g}$ es continua en a para $g(a) \neq 0$.

12. (a) Demostrar que si f es continua en l, y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(l)$.

Demostración.- Sea

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \neq a \\ l & si \quad x = a \end{cases}$$

entonces G es continua en a, ya que $G(a) = l = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} G(x)$. Así $f \circ G$ es continua en a esto por el teorema 2. Luego

$$f(l) = f(G(a)) = (f \circ G)(a) = \lim_{x\to a} = \lim_{x\to a}(f \circ G)(x) = \lim_{x\to 0} f(g(x)).$$

(b) Demostrar que si no se supone la continuidad de f en l, entonces no se cumple, por lo general, que $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$.

Demostración.- Sea $g(x) = l + x - a$ y

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Luego $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$, así $f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = f(l) = l$, pero $g(x) \neq l$ para $x \neq a$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to a} = 0$.

13. (a) Demostrar que si f es continua en $[a,b]$, entonces existe una función g el cual es contuna en $\mathbb{R}$ y que satisface a $g(x) = f(x)$ para todo x en $[a,b]$.

Demostración.-

(b) Hágase ver con un ejemplo que ésta afirmación es falsa si se sustituye $[a,b]$ por (a,b).

Respuesta.- Definimos $f(x) = 1/(x^2-1)$ en el intervalo $(-1,1)$. Es continuo, pero no existe $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Ahora, para que f se extienda a una función g que sea constante en toda la línea real, es necesario que existan tanto $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ como $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$, lo que requiere $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ para existir. Entonces f no se puede extender a una función que sea constante en toda la línea real.

14. (a) Supóngase que g y h son continuos en a, y que $g(a) = h(a)$, Defínase $f(x)$ como $g(x)$ si $x \geq a$ y $h(x)$ si $x \leq a$. Demuestre que f es continua en a.

Demostración.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \geq a \\ h(x) & si \quad x \leq a \end{cases}$$

Luego se tiene

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a) \quad y \quad \lim_{x\to a} h(x) = h(a)$$

de donde

$$g(a) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad h(a) = \lim_{x\to a^-} h(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

(b) Supóngase que g es continuo en $[a,b]$ y h es continuo en $[b,c]$ y $g(b) = h(b)$. Sea $f(x)$ igual $g(x)$ para x en $[a,b]$ y $h(x)$ para x en $[b,c]$. Demuestre que f es continuo en $[a,c]$. (Así pues, las funciones continuas pueden ser "pegados juntos").

Demostración.- la continuidad de f en $[a,b)$ y en $(b,c]$ es evidente. En $[a,b)$ f es igual a g y g es continuo para todo los puntos del intervalo.
Ahora para la continuidad en b, si g es continuo en b, entonces $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = g(b)$, y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$. Similarmente, $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$, aquí tenemos que usar $g(b) = h(b) = f(b)$. Luego ya que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ y $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$ concluimos que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$, es decir f es también continuo en b.

15. (a) Demuestre la siguiente versión del teorema 3 para la continuidad por la derecha: Supóngase que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$.

Demostración.- Se tiene que

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists\, \delta > 0 \setminus \forall x, \; si \; 0 \leq x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

luego podemos tomar $f(a) > 0$ como ϵ, así nos queda,

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists\, \delta > 0 \setminus \forall x, \; si \; 0 \leq x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < f(a)$$

de donde implica $f(x) > 0$.

Análogamente

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \setminus \forall x,\ si\ 0 \leq a - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < f(a)$$

luego tomamos $\epsilon = -f(a) > 0$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \setminus \forall x,\ si\ 0 \leq x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < -f(a)$$

de donde implica que $f(x) < 0$.

(b) Demostrar una versión del teorema 3 cuando $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Demostración.- Similar al anterior inciso podemos decir que,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \setminus \forall x,\ si\ 0 \leq a - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < f(a)$$

cuando $f(a) > 0$ que implica que $f(x) > 0$.

Análogamente se tiene para $f(a) < 0$.

16. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, pero $\neq f(a)$, entonces se dice que f tiene una discontinuidad evitable en a.

(a) Si $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, ¿tiene f una descontinuidad evitable en 0? ¿Y si $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 1$?.

Respuesta.- No se tendrá en el primer caso. Y se tendrá en el segundo caso. Por la existencia en cada caso.

(b) Supóngase que f tiene una discontinuidad evitable en a. Sea $g(x) = f(x)$ para $x \neq a$, y sea $g(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Demuestre que g es continuo en a.

Demostración.- Si $g(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $f(x) = g(x)$ entonces g es continuo en a. Es decir,

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = g(a)$$

(c) Sea $f(x) = 0$ si x es racional, y sea $f(p/q) = 1/q$ si p/q es una fracción irreducible. ¿Qué función es la g definida por $g(x) = \lim\limits_{u\to x} f(y)$?.

Respuesta.- La función será $g(x) = 0$ para todo x.

(d) Sea f una función con la propiedad de que todo punto de discontinuidad es una discontinuidad evitable. Esto significa que $\lim\limits_{y\to x} f(y)$ existe para todo x, pero f podría ser discontinuo en algunos (incluso en infinitos) números x. Defínase $g(x) = \lim\limits_{y\to x} f(y)$. Demostrar que g es continua.

Demostración.- Sea $g(x) = \lim\limits_{y\to x} f(y)$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(y) - g(x)| < \epsilon$ para $0 < |y - x| < \delta$, esto significa que:

$$f(y) - \epsilon < g(x) < f(y) + \epsilon \quad \text{para} \quad |y - x| < \delta$$

luego,

$$f(y) - \epsilon < \lim_{y \to x} f(y) < f(y) + \epsilon \quad \text{para} \quad |y - x| < \delta$$

Por definición también sabemos que $g(a) = \lim_{y \to a} f(y)$ de donde se sigue que para todo $\epsilon > 0$ existe un $2\delta = \delta^{'} > 0$ tal que $|y - a| < \delta$ entonce $|f(y) - g(a)| < \epsilon$ es decir,

$$g(a) - \epsilon < f(y) < g(a) + \epsilon \quad \text{para} \quad |y - a| < \delta^{'}$$

Así por $|y - a| < \delta^{'}$ y $|y - x| < \delta$, se tiene,

$$g(a) - \epsilon \leq f(y) - \epsilon < \lim_{y \to x} f(y) < f(y) + \delta \leq g(a) + \epsilon \quad \text{para} \quad |x - a| < \delta$$

ya que $-2\delta - (-\delta) < y - a - (y - x) < 2\delta - \delta$. Lo cual demuestra que $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ para todo x que satisfaga $|x - a| < \delta$. De modo que g es continua en a.

(e) ¿Existe alguna función f que sea discontinua en todo punto y que tenga solamente discontinuidades evitables?.

Respuesta.- No existe.

7

Tres teoremas fuertes

Teorema 7.1 Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = 0$.

Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto. ■

Teorema 7.2 Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a,b]$.

Geométricamente, este teorema significa que la gráfica f queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal. ■

Teorema 7.3 Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe algún número y en $[a,b]$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.

Se dice que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo en dicho intervalo. ■

Teorema 7.4 Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = c$.

Demostración.- Sea $g = f - c$. Entonces g es continua, y $g(a) + c < c < g(b) + c \implies g(a) < 0 < g(b)$. Por el teorema 1, existe algún x en $[a,b]$ tal que $g(x) = 0$. Pero esto significa que $f(x) = c$.

■

Teorema 7.5 Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = c$.

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a,b]$ y $-f(a) < -c < -f(b)$. Por el teorema 4 existe algún x en $[a,b]$ tal que $-f(x) = -c$, lo que significa que $f(x) = c$.

■

Si una función continua en un intervalo toma dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre ellos; esta ligera generalización del teorema 1 recibe a menudo el nombre de **teorema de los valores intermedios**.

Teorema 7.6 Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es acotada inferiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo x en $[a,b]$.

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a,b]$, así por el teorema 2 existe un número M tal que $-f(x) \leq M$ para todo x en $[a,b]$. Pero esto significa que $f(x) \geq -M$ para todo x en $[a,b]$, así podemos poner $N = -M$.

■

Los teoremas 2 y 6 juntos muestran que una función continua f en $[a,b]$ son acotados en $[a,b]$, es decir, existe un número N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo x en $[a,b]$. En efecto, puesto que el teorema 2 asegura la existencia de un número N_1 tal que $f(x) \leq N$, para todo x de $[a,b]$ y el teorema 6 asegura la existencia de un número N_2 tal que $f(x) \geq N$, para todo x en $[a,b]$, podemos tomar $N = \max(|N_1|, |N_2|)$.

Teorema 7.7 Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe algún y en $[a,b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a,b]$; por el teorema 3 existe algún y en $[a,b]$ tal que $-f(y) \geq -f(x)$ para todo x en $[a,b]$, lo que significa que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.

■

Teorema 7.8 Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si $\alpha > 0$, entonces existe algún número x tal que $x^2 = \alpha$.

Demostración.- Consideremos la función $f(x) = x^2$, el cual es ciertamente continuo. Notemos que la afirmación del teorema puede ser expresado en términos de f: "el número α posee una raíz cuadrada" significa que f toma el valor $alpha$. La demostración de este hecho acerca de f será una consecuencia fácil del teorema 4.
Existe, evidentemente, un número $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$; en efecto, si $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$, mientras que si $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Puesto que $f(0) < \alpha < f(b)$, el teorema 4 aplicado a $[0,b]$ implica que para algún x de $[0,b]$, tenemos $f(x) = \alpha$, es decir, $x^2 = \alpha$.

Precisamente el mismo raciocinio puede aplicarse para demostrar que todo número positivo tiene una raíz n-ésima, cualquiera que sea el número n. Si n es impar, se puede decir mas: todo número tiene una raíz n-ésima. Para demostrarlo basta observar que si el número positivo α tiene la raíz n-ésima x, es decir, si $x^n = \alpha$, entonces $(-x)^n = -\alpha$ (puesto que n es impar), de modo que α tiene una raíz n-ésima $-\alpha$. Afirmar que, para un n impar, cualquier número α tiene una raíz n-ésima equivale a afirmar que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

tiene una raíz si n es impar. El resultado expresado de este modo es susceptible de gran generalización.

■

Teorema 7.9 Si n es impar, entonces cualquier ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

posee raíz.

Demostración.- Tendremos que considerar, evidentemente, la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

habría que demostrar que f es unas veces positiva y otras veces negativa. La idea intuitiva es que para un $|x|$ grande, la función se parece mucho más a $g(x) = x^n$ y puesto que n es impar, ésta función es positiva para x grandes positivos y negativos para x grandes negativos. Un poco de cálculo algebraico es todo lo que hace falta para dar formar a esta idea intuitiva.
Para analizar debidamente la función f conviene escribir

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

obsérvese que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \ldots + \frac{|a_0|}{|x^n|}$$

En consecuencia, si elegimos un x que satisfaga

$$|x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0| \qquad (*)$$

entonces $|x^k| > |x|$ y

$$\frac{|a_{n-k}}{x^k} < \frac{a_{n-k}}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}} = \frac{1}{2n}$$

de modo que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

expresado de otra forma,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x_n} \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x_n}..$$

Por lo tanto, si elegimos un $x_1 > 0$ que satisfaga $(*)$, entonces

$$\frac{x_1^n}{2} \leq x_1^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x_1)$$

así que $f(x_1) > 0$. Por otro lado, si $x_2 < 0$ satisface $(*)$, entonces $x_2^n < 0$ y

$$\frac{x_2^n}{2} \geq x_2^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \ldots + \frac{a_0}{x_2^n}\right) = f(x_2),$$

así $f(x_2) < 0$.
Ahora aplicando el teorema 1 para el intervalo $[x_2, x_1]$ llegamos a la conclusión de que existe un x en $[x_2, x_1]$ tal que $f(x) = 0$.

■

Teorema 7.10 Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, entonces existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.

Demostración.- Lo mismo que en el teorema 9, si

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|),$$

entonces para todo x con $|x| \geq M$, tenemos

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}$$

Al ser n par, $x^n \geq 0$ para todo x, de modo que

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

siempre que $|x| \geq M$. Consideremos ahora el número $f(0)$. Sea $b > 0$ un número tal que $b^n \geq 2f(0)$ y también $b > M$. Entonces si $x \geq b$, tenemos

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Análogamente, si $x \leq -b$, entonces

$$f(x) \geq \ \geq \ = \ \geq f(0).$$

Resumiendo ahora el teorema 7 a la función f en el intervalo $[-b, b]$. Se deduce que existe un número y tal que

$$(1) \qquad \text{si } -b \leq x \leq b, \text{ entonce } f(y) \leq f(x).$$

En particular, $f(y) \leq f(0)$. De este modo

$$(2) \qquad \text{si } x \leq -b \text{ o } x \geq b, \text{ entonces } f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Cambiando (1) y (2) vemos que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.

■

Teorema 7.11 Consideremos la ecuación

$$(*) \qquad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = c,$$

y supongamos que n es par. Entonces existe un número m tal que $(*)$ posee una solución para $c \geq m$ y no posee ninguna para $c < m$.

Demostración.- Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ Según el teorema 10, existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.
Sea $m = f(y)$. Si $c < m$ entonces la ecuación $(*)$ no tiene, evidentemente, ninguna solución, puesto que el primer miembro tiene un valor $\geq m$. Si $c = m$ entonces $(*)$ tiene y como solución. Finalmente, supongamos $c > m$. Sea b un número tal que $b > y$, $f(b) > c$. Entonces $f(y) = m < c < f(b)$. En consecuencia, según el teorema 4, existe algún número x en $[y, b]$ tal que $f(x) = c$, con lo que x es una solución de $(*)$.

■

7.1 Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles está acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo y mínimo.

(i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. El mínimo es 0 e no tiene máximo.

(ii) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. No tiene máximo ni mínimo

(iii) $f(x) = x^2$ en $\mathbf{R}$.

Respuesta.- No está acotado superior pero si inferiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(iv) $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$.

Respuesta.- Está acotada inferiormente pero no así superiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$

Respuesta.- Es acotado superior e inferiormente. Se entiende que $a > -1$ (de modo que $-a-1 < a+1$). Si $-1 < a \leq 1/2$, entonces $a < -a-1$, así $f(x) = a+2$ para todo x en $(-a-1, a+1)$, por lo tanto $a+2$ es el máximo y mínimo valor. Si $-1/2 < a \leq 0$, entonces f tiene el mínimo valor en a^2, y si $a \geq 0$, entonces f tiene un mínimo valor en 0. Ya que $a+2 > (a+1)^2$ solo para $[-1-\sqrt{5}]/2 < a < [1+\sqrt{5}]/2$, cuando $a \geq -1/2$ésta función f tiene un máximo valor solo para $a \leq [1+\sqrt{5}]/2$ (el máximo valor será $a+2$).

(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ en $[-a-1, a+1]$.

Respuesta.- Está acotado superior e inferiormente. Como en la parte (v), se asume que $a > -1$. Si $a \leq -1/2$ entonces f tiene el valor mínimo y un máximo $3/2$. Si $a \geq 0$, entonces f tiene un valor mínimo en 0, y un valor máximo $max(a^2, a+2)$. Si $-1/2 < a < 0$, entonces f tiene un máximo valor $3/2$ y no así con un valor mínimo.

(vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es 1.

(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El máximo es 1 y no existe un mínimo.

(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 0, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0,1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es -1 y el máximo es 1.

(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$ en $[0,a]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es a.

(xi) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x + \sqrt{1-a^2})$ en $[0,a^3]$.

Respuesta.- Ya que es continua f tiene máximo como también mínimo.

(xii) $f(x) = [x]$ en $[0,a]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es a.

2. Para cada una de las siguientes funcione polinómicas f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n+1$.

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.

Respuesta.- $n = -2$, ya que $f(-2) = (-2)^3 + 2 + 3 = -3 < 0 < 3 = (-1)^3 - (-1) + 3$

(ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.

Respuesta.- $n = -5$ ya que $f(-5) = -11 < 0 < f(-4)$.

(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.

Respuesta.- $n = -1$ ya que, $f(-1) = -1 < 0f(0)$.

(iv) $4x^2 - 4x + 1$

Respuesta.- No existe un entero n tal que $f(x) = 0$.

3. Demostrar que existe algún número x tal que

(i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$.

Respuesta.- Si x^{179} y $\dfrac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x}$, son continuas en $\mathbb{R}$ entonces $f(x) = x^{179} + \dfrac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x}$ es continua en $\mathbb{R}$ y $f(1) > 0$, mientras que $f(-2) < 0$, de modo que $f(x) = 0$ para algún x en $(-2, 1)$.

(ii) $\operatorname{sen} x = x - 1$.

Respuesta.- Sea $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$ entonces f es continua en $\mathbb{R}$ y $f(0) > 0$, mientras que $f(2) < 0$, así por el teoremas 4 se tiene que $f(x) = c$ para algún x en $(0, 2)$.

4. Este problema es una continuación del problema 3-7

(a) Si $n - k$ es par, y ≥ 0, hallar una función polinómica de grado n que tenga exactamente k raíces.

Respuesta.- Sea $l = (n-k)/2$ de donde

$$f(x) = (x^{2(n-k)/2} + 1)(x-1)(x-2)\cdots(x-k).$$

(b) Una raíz a de una función polinómica f se dice que tiene multiplicidad m si $f(x) = (x-a)^m g(x)$, donde g es una función polinómica que no tiene la raíz a. Sea f una función polinómica de grado n. Supóngase que f tiene k raíces, contando multiplicidades, es decir supóngase que k es la suma de las multiplicidades de todas las raíces. Demostrar que $n - k$ es par.

Demostración.- Por la condición dada, f es una función polinómica real de grado n tal que f tiene exactamente k raíces en $\mathbb{R}$ contando multiplicidades. Probaremos que $n - k$ es par. Para ello consideraremos los siguientes casos.

Caso 1.- Si $n = k$ es trivial decir que $n - k = 0$ de donde se sabe que es par.

Caso 2.- Si $n > k$, sea $x_1, x_2, \ldots, _m$ raíces reales de f con multiplicidades $k_1, k_2, \ldots, k_m$ respectivamente y por lo tanto,

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k.$$

Entonces f puede ser escrito como,

$$f(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m} p_1(x)p_2(x)\cdots p_i(x)$$

donde $p_i(x)$ son polinomios irreducibles en $\mathbb{R}$ tal que el grado de p_i suma $n - k$. Ahora recordemos que todo polinomio irreducible en $\mathbb{R}$ debe tener de grado un entero par. Esto se debe a que cada polinomio de orden impar tiene al menos una raíz real, esto por el teorema 9, por lo tanto $p_i(x)$ no puede ser irreducible en $\mathbb{R}$. Ahora observe que sin pérdida de generalidad hemos asumido que hay l polinomios irreducibles tales que la suma de sus grados $n - k$. Dado que cada uno de los l polinomios tienen grado par, entonces la suma de sus grados debe ser un entero par. Se sigue que $n - k$ es un entero par.

5. Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?.

Respuesta.- f es constante, ya que si f tomara dos valores distintos, entonces f tomaría todos los valores intermedios, incluyendo valores irracionales, es decir, si no fuera constante, entonces existe dos números racionales r_1 y r_2 tal que para algún c, d se tiene $a \leq c < d \leq$, $f(c) = r_1$ y $f(d) = r_2$. Por el teorema 7.4 en el intervalo $[c, d]$, f toma todos los valores entre r_1 y r_2, donde se concluye que existe algún número irracional, contradiciendo el hecho de que f solo toma valores racionales.

6. Supóngase que f es una función continua en $[-1, 1]$ tal que $x^2 + f^2(x) = 1$ para todo x. (Esto significa que $(x, f(x))$ siempre está sobre el circulo unidad.) Demostrar que o bien es $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para todo x, o bien $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ para todo x.

Demostración.- De lo contrario, f toma valores tanto positivos como negativos, por lo que f tendría el valor 0 en $(-1, 1)$, lo cual es imposible, ya que $\sqrt{1 - x^2} \neq 0$ para x en $(-1, 1)$.

7. ¿Cuántas funciones continuas f existen satisfaciendo $f^2(x) = x^2$ para todo x?.

Respuesta.- Existen 4 funciones continuas que satisfacen la condición dada, es decir,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x \\ f(x) & = & -x \\ f(x) & = & |x| \\ f(x) & = & -|x| \end{array}$$

8. Supóngase que f y g son continuas, que $f^2 = g^2$, y que $f(x) \neq 0$ para todo x. Demostrar que o bien $f(x) = g(x)$ para todo x, o bien $f(x) = -g(x)$ para todo x.

Demostración.- Si no fuera así, entonces $f(x) = g(x)$ para algún x y $f(y) = -g(y)$ para algún y. Pero ya que $f(x) \neq 0 \; \forall \; x$, entonces será o bien siempre positiva o bien siempre negativa. Así pues, $g(x)$ y $g(y)$ tendría distinto signo. Esto implicaría que $g(z) = 0$ para algún z, lo cual es imposible, ya que $0 \neq f(z) = \pm g(z)$.

9. **(a)** Supóngase que f es continuo, que $f(x) = 0$ solo para $x = a$, y que $f(x) > 0$ tanto para algún $x > a$, así como para algún $x < a$. ¿Que puede decirse acerca de $f(x)$ para todo $x \neq a$?.

Respuesta.- Por hipótesis, existe algún $x_1 \in (a, \infty)$ tal que $f(x_1) > 0$. Ahora si existe algún $y_i \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$, entonces debe existir $z_1 \in (a, \infty)$ entre x_1 y y_1 tal que $f(z_1) = 0$. Pero esto contradice que f es cero solo en $x = a$. Por lo tanto, no existe algún $y_1 \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$. Esto es, $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, \infty)$. Similarmente, $f(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, a)$. Por lo tanto podemos decir que $f(x) > 0$ para todo $x \neq a$.

(b) Supongamos ahora que f es continuo y que $f(x) = 0$ solo para $x = a$, pero supongamos, en cambio, que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ y $f(x) < 0$ para algún $x < a$. Ahora que puede decir de $f(x)$ para $x \neq a$?.

Respuesta.- Por hipótesis, existe algún $x_1 \in (a, \infty)$ tal que $f(x_1) > 0$.. Ahora si existe $y_1 \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$, entonces existe algún $z_1 \in (a, \infty)$ entre x_1 y y_1 tal que $f(z_1) = 0$. Esto contradice que f es cero sólo en $x = a$. Por lo tanto, no existe algún $y_1 \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$.
Esto es, $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, \infty)$. Luego por similar argumento, $f(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, a)$. Así, $f(x) > 0$ para todo $x > a$ y $f(x) < 0$ para todo $x < a$.

(c) Discutir el signo de $x^3 + x^2 + xy^2 + y^3$ cuando x e y no son ambos 0.

Respuesta.- Para $y \neq 0$, sea $f(x) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$. Luego

$$f(x) = \frac{x^4 - y^4}{x - y}$$

10. Supóngase f y g son continuas en $[a,b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en $[a,b]$.

Demostración.- Sea

$$h = f - g$$

entonces por el teorema 1 se tiene

$$h(x) = 0$$

por lo que

$$f(x) = g(x) \text{ para algún } x \in [a,b].$$

11. Supóngase que f es una función continua en $[0,1]$ y que $f(x)$ es en $[0,1]$ para cada x. Demostrar que $f(x) = x$ para algún número x.

Demostración.- Para $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$ entonces se puede elegir $x = 0$ o $x = 1$. Ya que x es continuo entonces

$$g(x) = x - f(x)$$

también es continuo. Luego, por el teorema 1 se tiene,

$$f(x) - x = 0 \implies x = f(x) \text{ para algún } x \in [0,1].$$

12. **(a)** El problema 11 muestra que f intersecta la diagonal del cuadrado. Demostrar que f debe cortar a la otra diagonal.

Demostración.- Vemos que la linea representa una función f en $[0,1]$, dado por,

$$f(x) = x.$$

es continuo sobre $[0,1]$. Ahora supongamos una nueva función g en $[0,1]$ tal que

$$g(x) = x - f(x)$$

de donde,

$$g(0) = 0 - f(0) = -f(0) \leq 0$$

$$g(1) = 1 - f(1)$$

De las dos funciones anteriores se tiene,

$$f(0) < g(0)$$

$$f(1) > g(1)$$

Por último definamos una nueva función continua h de forma que,

$$h = f - g$$

entonces,

$$h(1) = f(1) - g(1) > 0$$

$$h(0) = f(0) - g(0) < 0$$

Luego, existe algún punto c en $[0,1]$ por lo que ambas curvas es,

$$h(c) = 0$$

y

$$\begin{array}{rcl} f(c) - g(c) & = & 0 \\ f(c) & = & g(c) \end{array}$$

Por lo tanto, hay algún c en $[0,1]$ donde f intersecta a la otra linea diagonal.

(b) Demostrar el siguiente hecho más general: Si g es continuo en $[0,1]$ y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ o $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, entonces $f(x) = g(x)$ para algún x.

Demostración.- Sea f en $[0,1]$ entonces

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

La otra linea punteada representa una función g en $[0,1]$ dada por,

$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 1$$

De donde

$$f(0) < g(0)$$

$$f(1) > g(1)$$

Ahora definimos una nueva función continua h de forma que,

$$h = f - g$$

entonces,

$$h(1) = f(1) - g(1) > 0$$

$$h(0) = f(0) - g(0) < 0$$

Luego, existe algún punto c en $[0,1]$ por lo que ambas curvas es,

$$h(c) = 0$$

y

$$\begin{array}{rcl} f(c) - g(c) & = & 0 \\ f(c) & = & g(c) \end{array}$$

Por lo tanto, un continuo $f(g)$ y g, existe $f(x) = g(x)$ para algún x.

13. (a) Sea $f(x) = \operatorname{sen} 1/X$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$, ¿Es f continuo en $[-1,1]$?. Demostrar que f satisface la conclusión del teorema de valor intermedio en $[-1,1]$; en otras palabras, si f toma dos valores comprendidos en $[-1,1]$, toma también todos los valores intermedios.

Demostración.- Sea la secuencia x_{nn} en $[-1,1]$ definida por,

$$x_= \frac{2}{\pi(4n-3)}, \quad n \geq 1$$

luego notamos que

$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0$$

Ahora aplicando la función f se tiene,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi(4n-3)}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi(4n-3)}{2}\right) = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

por lo tanto la función f, como tal, no es continuo en $[-1,1]$.

Ahora demostraremos que f satisface el teorema de valor intermedio en $[-1,1]$. Ya que $f(0) = 0$ según la hipótesis, podemos decir que f es continuo en $[0,1]$. Vamos a considerar los siguientes casos:

C1 Si $a < b$ son dos puntos de $[-1,1]$ con $a,b > 0$ o $a,b < 0$, entonces f toma cada valor entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a,b]$ ya que f es continuo en $[a,b]$.

C2 Si $a < 0 < b$, entonces f toma todos los valores entre -1 y 1 en $[a,b]$.

Así f tomas todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Lo mismo ocurre para $a = 0$ o $b = 0$.

(b) Supóngase que f satisface la conclusión del teorema del valor intermedio y que f toma cada valor solo una vez. Demostrar que f es continua.

Demostración.- Si f no fuese continua en a, entonces por el problema 6-9(b) para algún $\epsilon > 0$ existirían x tan cerca como se quiera de a con $f(x) > f(a) + \epsilon$ $f(x) < f(a) - \epsilon$. Supongamos que ocurre lo primero. Podemos incluso suponer que existen x tan cerca como se quiera de a y $> a$, o bien tan cerca como se quiera de a y $< a$. Supongamos también aquí lo primero. Tomemos un $x > a$ con $f(x) > f(a) + \epsilon$. Según el teorema de los valores intermedios, existe un $x^{'}$ entre a y x con $f(x^{'}) < f(a) + \epsilon$. Pero existe también y entre a y $x^{'}$ con $f(y) < f(a) + \epsilon$. Pero existe también y entre a y $x^{'}$ con $f(y) > f(a) + \epsilon$. Según el teorema de los valores intermedios, f forma el valor $f(a) + \epsilon$ entre x y $x^{'}$ y también entre $x^{'}$ e y, contrariamente a la hipótesis.

(c) Generalizar para el caso donde f toma cada valor solo un número finito de veces.

Respuesta.- Lo mismo que en (b) elíjase $x_1 > a$ con $f(x_1) > f(a) + \epsilon$. Después elijase $x_1^{'}$ entre a y x_1 con $f(x_1^{'}) < f(a) + \epsilon$. Luego elíjase x_2 entre a y $x_1^{'}$ con $f(x_2) > f(a) + \epsilon$ y $x_2^{'}$ entre a y x_2 con $f(x_2^{'}) < f(a) + \epsilon$, etc. Entonces f toma el valor $f(a) + \epsilon$ en cada uno de los intervalos $[x_n^{'}, x_n]$ en contradicción con la hipótesis.

14. Si f es una función continua en $[0,1]$, sea $\|f\|$ el máximo valor de $|f|$ en $[0,1]$.

(a) Demostrar que para algún número c tenemos $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.

Demostración.- Ya que $|cf| = |c| \cdot |f(x)|$ para todo x de $[0,1]$. entonces podemos elegir un x_0 tal que $|f|(x_0) = \|f\|$, y por lo tanto $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.

(b) Demostrar que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Dar un ejemplo donde $\|f+g\| \neq \|f\| + \|g\|$.

Demostración.- Para las todos funciones dadas, tenemos

$$\begin{array}{rcl} |f+g|(x) & = & |f(x)+g(x)| \\ |f+g|(x) & \leq & |f(x)| + |g(x)| \\ |f+g|(x) & \leq & |f|(x) + |g|(x) \end{array}$$

También sabemos que si f o g tienen el máximo valor en x_0 entonces,

$$\begin{array}{rcl} |f|(x_0) & = & \|f\| \\ |g|(x_0) & = & \|g\| \end{array}$$

Luego si la función $|f+g|$ tiene el máximo valor en x_0 entonces,

$$\begin{array}{rcl} \|f+g\| & = & |f+g|(x_0) \\ \|f+g\| & \leq & |f|(x_0) + |g|(x_0) \\ \|f+g\| & \leq & \|f\| + \|g\| \end{array}$$

Por último, sea $f(x) = x+3$ y $g(x) = x-4$ entonces se cumple que $\|f+g\| \neq \|f\| + \|g\|$.

(c) Demostrar que $\|h-f\| \leq \|h-g\| + \|g-f\|$.

Demostración.- Para las todos funciones dadas, tenemos

$$\begin{array}{rcl} |h-f|(x) & = & |(h-g)-(g-f)|(x) \\ |h-f|(x) & \leq & |(h-g)(x)| + |(g-f)(x)| \\ |h-f|(x) & \leq & |h-g|(x) + |g-f|(x) \end{array}$$

También sabemos que si f o g tienen el máximo valor en x_0 entonces,

$$\begin{array}{rcl} |f|(x_0) & = & \|f\| \\ |g|(x_0) & = & \|g\| \\ |h|(x_0) & = & \|h\| \end{array}$$

Luego si la función $|f+g|$ tiene el máximo valor en x_0 entonces,

$$\begin{array}{rcl} \|h-f\| & = & |h-f|(x_0) \\ \|h-f\| & \leq & |h-g|(x_0) + |g-f|(x_0) \\ \|h-f\| & \leq & \|h-g\| + \|g-f\| \end{array}$$

15. Supóngase que ϕ es continua y $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x)/x^n = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x)/x^n$.

(a) Demostrar que si n es impar, entonces existe un número x tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

Demostración.- Sea $b > 0$ tal que

$$\left| \frac{\phi(b)}{b^n} \right| < \frac{1}{2}$$

entonces,

$$b^n + \phi(b) = b^n \left(1 + \frac{\phi(b)}{b^n}\right) > \frac{1}{2} > 0$$

De la misma manera, sea $a < 0$ tal que

$$\left|\frac{\phi(a)}{a^n}\right| < \frac{1}{2}$$

entonces, ya que n es impar,

$$a^n + \phi(a) = a^n \left(1 + \frac{\phi(a)}{a^n}\right) < \frac{a^n}{2} < 0$$

Por lo tanto, existe un x tal que

$$x^n + \phi(x) = 0.$$

(b) Demostrar que si n es par, entonces existe un número y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)$ para todo x.

Demostración.- Sea $b > 0$ tal que

$$b^n > 2\phi(0)$$

Y $|x| > b$

$$\left|\frac{\phi(x)}{x^n} < \frac{1}{2}\right|$$

de donde tenemos,

$$\begin{array}{rcl} x^n + \phi(x) & > & x^n \left(1 + \dfrac{\phi(x)}{x^n}\right) \\ x^n + \phi(x) & > & \dfrac{x^n}{2} \\ x^n + \phi(x) & > & \dfrac{b^n}{2} \\ x^n + \phi(x) & > & \phi(0). \end{array}$$

Así, el mínimo de $x^n + \phi(x)$ para x in $[-b, b]$ es el mínimo del intevalo. Y por lo tanto, existe un número y, para todo x, tal que,

$$y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x).$$

16. (a) Supóngase que f es continua en (a, b) y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Demostrar que f tiene un mínimo en todo el intervalo (a, b).

Demostración.- Sea $c \in (a, b)$. Ya que $\lim\limits_{x\to a^-} = \infty$, existe $a_1 \in (a, b)$ tal que $a_1 < c$ y $f(x) < f(c)$ para todo $x \in (a, a_1)$. Similarmente, ya que $\lim\limits_{x\to b^+} = \infty$, existe un $b_1 \in (a, b)$ tal que $b_1 > c$ y $f(x) > f(c)$ para todo $x \in (b_1, b)$, entonces por el teorema 7.7 Se tiene que existe un $y \in [a_1, b_1]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo $x \in [a_1, b_1]$.
En particular, $f(y) \leq f(c)$, de donde si $x \in [a_1, b_1]$, entonces $f(y) \leq f(x)$. Si $x \in (a, a_1)$, entonces $f(y) \leq f(c) < f(x)$ y si $x \in (b_1, b)$, entonces $f(y) \leq f(c) < f(x)$ de donde demostramos que f tiene un mínimo y en (a, b).

(b) Demostrar el correspondiente resultado cuando $a = -\infty$ y/o $b = \infty$.

Demostración.- Sea $c \in \mathbb{R}$. Ya que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M < c$ y $f(x) > f(c)$ para todo $x < M$. Similarmente, ya que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $N > c$ y $f(x) > f(c)$ para todo $x > N$.
Luego, f es continua en $[M, N]$, alcanza el mínimo en este intervalo. Esto es, existe $y \in [M, N]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo $x \in [M, N]$. En particular, $f(y) \leq f(c)$, de donde si $x \in [M, N]$, entonces $f(y) \leq f(x)$. Si $x < M$, entonces $f(y) \leq f(c) < f(x)$. Si $x > N$, entonces $f(y) \leq f(c) < f(x)$. Esto muestra que f tiene un mínimo en $y \in \mathbb{R}$.

17. Sea f cualquier función polinómica. Demostrar que existe algún número y tal que $|f(y)| \leq |f(x)|$ para todo x.

Demostración.- Ya que f es un polinomio real entonces,

$$\lim_{x \to \infty} |f(x)| = \lim_{x \to -\infty} |f(x)| = \infty$$

de donde existe un entero N tal que

$$|f(0)| < |f(x)| \quad \text{para todo } x \in (-\infty, -N) \cup (N, \infty)$$

Ahora consideremos el intervalo cerrado $[-N, N]$, notemos que este intervalo es un conjunto compacto en $\mathbb{R}$. Luego sabemos que la función $|f|$ es continuo en $[-N, N]$ por lo que debe existir un punto y en $[-N, N]$ tal que

$$|f(y)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [-N, N].$$

Ahora note que $0 \in [-N, N]$, se sigue que,

$$|f(y)| \leq |f(0)|.$$

por lo tanto,

$$|f(y)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

18. Supóngase que f es una función continua con $f(x) > 0$ para todo x, y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$. Demostrar que existe algún número y tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x.

Demostración.- Tomemos un número positivo b tal que $f(x) < f(0)$ para $|x| > b$, entonces el máximo de f en $[-b, b]$ es también el máximo en $\mathbb{R}$. Por lo tanto existe un número y, para todo x, tal que $f(y) \geq f(x)$.

19. (a) Supóngase que f es continua en $[a, b]$, y sea x algún número. Demostrar que existe un punto en la gráfica de f el cual es cerrado para $(x, 0)$; en otras palabras existe algún y en $[a, b]$ tal que la distancia desde $(x, 0)$ hasta $(y, f(y))$ es $\leq$ a la distancia desde $(x, 0)$ hasta $(z, f(z))$ para todo z en $[a, b]$.

Demostración.- Definamos $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ como $h(z) = \sqrt{(z - x)^2 + f(z)^2}$. Esta es la distancia del punto $(z, f(z))$ para el punto $(x, 0)$. Esta es una función continua en $[a, b]$ y por lo tanto alcanza el mínimo. Así, para algún $y \in [a, b]$, $h(y)$ es mínimo. Esto es, la distancia desde $(x, 0)$ hasta $(y, f(y) \leq$ a la distancia desde $(x, 0)$ hasta $(z, f(z))$ para algún $z \in [a, b]$.

(b) Demuestre que la misma afirmación no es necesariamente cierta si $[a,b]$ es remplazado por (a,b).

Demostración.- Sea $f(x) = x$ en $(0,1)$ y sea $x = 0$, entonces la distancia entre $(0,0)$ y un punto en la gráfica es $h(z) = \sqrt{(z-0)^2 + f(z)^2} = \sqrt{2}z$.
Esta función no alcanza el mínimo en $(0,1)$.

(c) Demuestre que este resultado es cierto si $[a,b]$ se sustituye por $\mathbb{R}$.

Demostración.- En otras palabras si f es una función continua en $\mathbb{R}$ y si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, entonces f alcanza el mínimo en $\mathbb{R}$.
Defina $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h(x) = \sqrt{(z-x)^2 + f(z)^2}$. Esta es la distancia del punto $(z, f(z))$ desde el punto $(x,0)$. Esta es una función continua en $\mathbb{R}$.
Observe que $h(z) \to \infty$ si $z \to \infty$ así como también si $<\to -\infty$.
Por lo tanto, en virtud del resultado anterior, $h(y)$ es mínimo para algún $y \in [a,b]$. Esto es, la distancia de $(x,0)$ hasta $(y, f(y)) \leq$ a la distancia de $(x,0)$ hasta $(z, f(z))$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$.

(d) En los casos (a) y (c), sea $g(x)$ la mínima distancia de $(x,0)$ a un punto de la gráfica de f. Demuestre que $g(y) \leq g(x) + |x-y|$, y concluya que g es continua.

Demostración.- Sea $g(x) = d((x,0),(\alpha, f(\alpha)))$ donde d denota la distancia. Esto significa que $(\alpha, f(\alpha))$ es el punto en la gráfica de f el cual es cerrado para $(x,0)$.
Por la inecuación triangular

$$d((y,0),(\alpha,f(\alpha))) \leq d((x,0),(\alpha,f(\alpha))) + d((y,0),(x,0))$$
$$d((y,0),(\alpha,f(\alpha))) < f(x) + |x+y| \qquad (1)$$

Ya que $g(y)$ es la distancia más corta de $(y,0)$ para el gráfico de f.

$$g(y) \leq d((y,0),(\alpha,f(\alpha))) \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) implican que $g(y) \leq g(x) + |x-y|$. Podemos reescribir esto como

$$g(y) - g(x) \leq |x+y|$$

Intercambiando los roles de x y y, tenemos

$$g(x) - g(y) \leq |y-x| = |x-y|$$

Ambos implican que

$$|g(x) - g(y)| \leq |x-y|$$

Para algún $\epsilon > 0$, elija $\delta = \epsilon$, entonces $|x-y| < \delta (= \epsilon)$ implica $|g(x) - g(y)| < \epsilon$. Esto demuestra que g es continua.

(e) Demuestre que existen números x_0 y x_1 de $[a,b]$ tales que la distancia de $(x_0,0)$ a $(x_1, f(x_1))$ es *leq* que la distancia $(x_0',0)$ a $(x_1', f(x_1'))$ para cualquiera x_0', x_1' de $[a,b]$.

Demostración.- Sea $g(x)$ la distancia más corta de $(x,0)$ para la gráfica de f. Entonces, por la anterior parte g es continua en $[a,b]$. Por consiguiente g alcanza el mínimo sobre $[a,b]$. Esto es, $g(x_0) \leq g\left(x_0'\right)$ para cualquier $x_0' \in [a,b]$. Es equivalente a decir que existe $(x_1, f(x_1))$ tal que la distancia desde (x_0) hasta $(x_1, f(x_1))$ es menor o igual a la distancia de $\left(x_0'\right)$ hasta $\left(x_1', f(x_1')\right)$ para cualquier $x_0' \in [a,b]$.

20. a) Supóngase que f es continua en $[0,1]$ y $f(0) = f(1)$. Sea n cualquier número natural. Demuestre que existe algún número x tal que $f(x) = f(x+1/n)$, como se muestra en la figura para $n = 4$. Considerar la función $g(x) = f(x) - f(x+1/n)$; ¿qué ocurriría si $f(x) \neq 0$ para todo x?.

Demostración.- Sea $g(x) = -f(x+1/n)$. Entonces , g es una función continua.
Si $g(x) = 0$ para algún $x \in [0,1]$, entonces hemos terminado con la demostración. Ahora supóngase que $g(x) \neq 0$ para cualquier x. Entonces será $g(x) > 0$ para todo x o $g(x) < 0$ para todo x.
Asumiendo, que $g(x) > 0$ para todo x, implica que $f(x) > f(x-1/n)$, y por lo tanto usando la relación recursiva se tiene

$$f(0) > f(1/n) > f(2/n) > \ldots > f[(n-1)/n] > f(n/n) = f(1).$$

Esto contradice la hipótesis que $f(0) = f(1)$. Así $f(x) = f(x+1/n)$ para algún x y para cada $n \in \mathbb{N}$.

b) Suponga que $0 < a < 1$, pero que a no es igual a $1/n$ para cualquier número natural n. Encuentre una función f que sea continua en $[0,1]$ y que satisfaga $f(0) = f(1)$, pero que no satisfaga $f(x) = f(x+a)$ para ningún x.

Respuesta.- Considere $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$. Entonces, $f(0) = f(1) = 0$. Luego sea $a = \dfrac{3}{4}$, donde para que se cumpla $x + a$ en $[0,1]$ solo puede variar de 0 a $\dfrac{1}{4}$. Es decir,

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4} \implies \frac{3}{4} \leq x + a \leq 1.$$

Por lo tanto, cuando $x \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, tenemos $f(x) > 0$ mientras que $f(x+a) < 0$. Así, $f(x) \neq f(x+a)$ para cualquier admisible valor de x.

21. a) Demuestre que no existe una función continua f definida en $\mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada uno de los valores, Indicación: Si $f(a) = f(b)$ para $a < b$, entonces o bien $f(x) > f(a)$ para todo x de (a,b), o bien $f(x) < f(a)$ para todo x de (a,b). ¿Por qué? En el primer caso todos los valores próximos a $f(a)$, pero ligeramente mayores que $f(a)$, son alcanzados en algún punto de (a,b); esto implica que $f(x) < f(a)$ para $x < a$ y $x > b$.

Demostración.- supóngase que f es una función definida en $\mathbb{R}$ que toma cada valor exactamente dos veces.
Sea $a < b$ y $f(a) = f(b)$, entonces f toma cada valor exactamente dos veces, para algunos $c \in (a,b)$, $f(c) > f(a)$ o $f(c) < f(a)$.
Para el primer caso, implica que $f(x) > f(a)$, $\forall x \in (a,b)$ porque f es una función continua en $[a,b]$, por lo que cambia de signo el término $f(x) - f(a)$ no es posible sin cruzar la linea $y = f(a)$ y eso implicaría la ocurrencia del valor $f(a)$ más de dos veces, contraría a la suposición.
De la misma manera, $f(c) < f(a) \Rightarrow f(x) < f(a)$, $\forall x \in (a,b)$.
Supongamos el primer caso, $f(x) > f(a)$, $forall x \in (a,b)$.
Ya que f es una función continua en $[a,b]$, existe algún $f(d_1) = M$ y $f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$ (la función continua en el segmento toma su máximo valor.) Basado en la suposición de que cada valor se toma exactamente dos veces, existe d_2 tal que $f(d_2) = M$. Porque $f(x) < f(a)$ para $x \in \mathbb{R}/[a,b] \rightarrow d_2 \in (a,b)$. entonces tenemos $d_1, d_2 \in (a,b)$, $d_1 \neq d_2$ y $f(d_1) = f(d_2) = M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Para algún $t \in (d_1, d_2)$, no es posible $f(t) > M$ ya que $m = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Además, no es posible $f(t) < M$ por que el valor $f(t)$ ya se toma dos veces, una vez para algún $x_1 \in (a, d_1)$ y una segunda vez para algún $x_2 \in (d_2, d)$, porque la continuidad de f en algún segmento (aquí asumimos $d_1 < d_2$.)

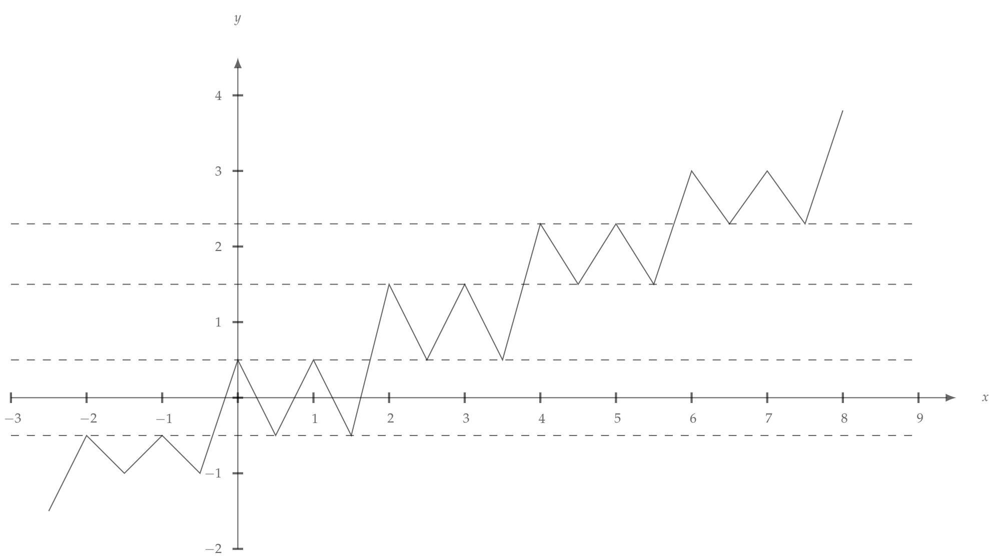
Sigue siendo $f(t) = M$, pero eso es una contradicción con el hecho de que cada valor se toma exactamente dos veces, ya que $f(d_1) = f(d_2) = M$.
Entonces, la suposición de que existe la función que toma todos los valores exactamente dos veces conduce a una contradicción, por lo que la suposición no es cierta.

b) Precise el apartado (a) demostrando que no existe ninguna función continua f que tome cada valor 2 veces o bien ninguna, es decir, que tome exactamente dos veces cada valor alcanzado por la función. Indicación: La indicación anterior implica que f posee o bien un valor máximo o un valor mínimo (el cual debe ser alcanzado dos veces). ¿Qué puede decirse acerca de los valores próximos al valor máximo?.

Respuesta.- Suponga lo contrario. Existe un función continua f que toma cada valor 0 veces o 2 veces.
Entonces, sea $y \in \mathbb{R}_f$ (la imagen de la función f). Entonces y se toma dos veces. Sea $a < b$ y $f(a) = f(b) = y$. Exactamente la misma consideración que en la parte (a) conduce a una contradicción con el hecho de que y se toma exactamente dos veces. Concluimos que la suposición era incorrecta.

c) Halle una función continua f que tome todos los valores exactamente tres veces. De modo más general, halle una función continua que tome todos los valores exactamente n veces, si n es impar.

Respuesta.- La figura que sigue, para $n = 5$, ilustra el caso general.



d) Demuestre que si n es par, entonces no existe ninguna función continua f que tome todos los valores exactamente n veces. Indicación: Para abordar, por ejemplo, el caso $n = 4$, ponga $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$. Entonces, o bien $f(x) > 0$ para todo x en dos de los tres intervalos $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4)$, o bien $f(x) < 0$ para todo x en dos de los tres intervalos.

Demostración.- Supongamos que buscamos una función que tome cada valor exactamente 4 veces. Sea x_1, x_2, x_3 y x_4 tales que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$. Ya que f es una función continua, es cierto que $f(x) > f(x_1), \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \forall i, i = 1,2,3$ o $f(x) < f(x_1), \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \forall i, i = 1,2,3$ (el termino $f(x) - f(x_1)$ mantiene el mismo signo en cada uno de los intervalos $(x_i, x_{y_0+1}), i = 1,2,3$). No es posible que el término $f(x) - f(x_1)$ tiene el mismo signo en cada uno de los intervalos (x_i, x_{y_0+1}), porque eso conducirá a la ocurrencia de parte del valor más de 4 veces. (Imagine que tenemos 6 valores positivos.) Entonces el término $f(x) - f(x_1)$ es positivo en dos de los tres intervalos, y negativo en un intervalo, o al contrario. Pero eso significa que tenemos ocurrencias

desiguales de los valores, por lo que no es posible lograr exactamente la misma ocurrencia de cada valor.
Dado que el número par de puntos genera el número impar de intervalos, la misma consideración nos lleva a la conclusión de que no es posible que una función continua alcance cada uno de los valores exactamente (cualquier) número par de veces.

8

Cotas superiores mínimas

Definición 8.1 Un conjunto A de números reales está acotado superiormente si existe un número x tal que

$$x \geq a \text{ para todo } a \text{ de } A.$$

este número x se denomina una cota superior de A.

A está acotado superiormente si y sólo si existe un número x que es una cota superior de A.(y en este caso existirán muchas cotas superiores de A);

Definición 8.2 Un número x es una cota superior mínima de A si

(1) x es una cota superior de A,

(2) si y es una cota superior de A, entonces $x \leq y$.

El término **supremo** de A es sinónimo al de cota superior mínima y tiene una ventaja: se puede abreviar mediante un símbolo muy adecuado

$$\sup A$$

Si x e y son ambos cotas superiores mínimas de A, entonces $x = y$.

Demostración.- En efecto, en este caso

$$\begin{array}{ll} x \leq y, & \text{ya que } y \text{ es una cota superior, y } x \text{ es una cota superior mínima,} \\ y \leq x & \text{ya que } x \text{ es un cota superior, e } y \text{ es una cota superior mínima.} \end{array}$$

por lo tanto, $x = y$.

Definición 8.3 Un conjunto A de números reales está acotado inferiormente si existe un número x tal que

$$x \leq a \text{ para todo } a \text{ de } A.$$

Dicho número x se denomina una cota inferior de A.

Definición 8.4 Un número x es la cota inferior máxima de A si

(1) x es una cota inferior de A, y

(2) si y es una cota inferior de A, entonces $x \geq y$.

La cota inferior máxima de A se denomina también el **ínfimo** de A, abreviadamente

$$\inf A$$

Propiedad .14 **Propiedad de la cota superior mínima.** Si A es un conjunto de números reales, $A \neq \emptyset$, y A está acotado superiormente, entonces A posee una cota superior mínima.

El enorme significado de P13 se hará patente sólo de manera gradual, aunque ya estamos en condiciones de comprobar su importancia dando las demostraciones que omitimos en el Capítulo 7.

Teorema 7.1 Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún número x de $[a,b]$ tal que $f(x) = 0$.

Demostración.- La demostración es tan sólo una versión rigurosa del método esbozado al final del capítulo 7: localizaremos el menor número x de $[a,b]$ tal que $f(x) = 0$.
Definamos el conjunto A, de la manera siguiente:

$$A = \{x : a \leq x \leq b, \text{ y } f \text{ negativa en en el intervalo } [a,x]\}.$$

Obviamente $A \neq \emptyset$ ya que a pertenece a A; de hecho, existe un $\delta > 0$ tal que A contiene a todos los puntos x que satisfacen $a \leq x < a + \delta$ ya que f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0$. Análogamente, b es una cota superior de A y, de hecho, existe un $\delta > 0$ tal que todos los puntos x que satisfacen $b - \delta < x \leq b$ son cotas superiores de A; esto también se deduce del Problema 6-16, ya que $f(b) > 0$.
A partir de estas observaciones se deduce que A posee cota superior mínima α y que $a < \alpha < b$. Ahora demostraremos que $f(\alpha) = 0$, excluyendo las posibilidades $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$.
Supongamos primero que $f(\alpha) < 0$. Según el teorema 6-3, existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ si $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$. Ha de existir un número x_0 de A que satisface $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$ (ya que sino α no sería la mínima cota superior de A). Esto significa que f es negativa en todo el intervalo $[a, x_0]$. Pero si x_1 es un número situado entre α y $\alpha + \delta$, entonces f también es negativa en todo el intervalo a A. Pero esto contradice el hecho de que α sea una cota superior de A; concluimos pues que la suposición que hemos hecho anteriormente, de que $f(\alpha) < 0$ sebe ser falsa.
Supongamos ahora que $f(\alpha) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ si $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$. Una vez más, sabemos que existe un x_0 de A que satisface $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$; pero esto significa que f es negativa en $[a, x_0]$, lo cual es imposible ya que $f(x_0) > 0$. Así pues, la suposición de que $f(\alpha) > 0$ conduce a una contradicción, quedando sólo la posibilidad de que $f(\alpha) = 0$.

■

Las demostraciones de los teoremas 2 y 3 del capítulo 7 requieren un sencillo resultado preliminar, que va a desempeñar una función muy similar a la del teorema 6-3 en la demostración anterior.

Teorema 8.1 Si f es continua en a, existe un número $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

Demostración.- Como el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } |x-a|<\delta, \text{ entonces } |f(x)-f(a)|<\epsilon,$$

Tan sólo es necesario aplicar esta propiedad a algún ϵ en particular, por ejemplo $\epsilon = 1$. Deducimos pues que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } |x-a|<\delta, \text{ entonces } |f(x)-f(a)|<1,$$

y, en particular, si $|x-a|<\delta$ entonces $f(x)-f(a)<1$. Esto completa la demostración: en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ la función f está acotada superiormente por $f(a)+1$.

■

Por supuesto, ahora podríamos demostrar también que f está acotada inferiormente en algún intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, concluyendo, por tanto, que f está acotada en algún intervalo abierto que contiene a a.
En este sentido, cabe destacar en particular la observación de que si $\lim\limits_{x\to a^+}$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en el conjunto $\{x : a \leq x < a+\delta\}$, pudiendo hacerse una observación análoga si $\lim\limits_{x\to b^-} = f(b)$.

Teorema 7.2 Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a,b]$.

Demostración.- Sea,

$$A = \{x : a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ está acotada superiormente en } [a,x]\}$$

Obviamente $A \neq \emptyset$ (ya que a pertenece a A), y está acotada superiormente por b, de manera que A posee una cota superior mínima α. Observemos que estamos aplicando el término acotado superiormente tanto al conjunto A, localizado en el eje horizontal, como a la función f, es decir, a conjuntos del tipo $\{f(y) : a \leq y \leq x\}$, localizados en el eje vertical.
La primera etapa de la demostración consiste en probar que $\alpha = b$. Supongamos, por el contrario, que $a < b$. Según el teorema 1 existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(a-\delta, a+\delta)$. Como α es la cota superior mínima de A existe algún x_0 de A que satisface $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$. Esto significa que f está acotada en $[a, x_0]$. Pero si x_1 es cualquier número tal que $\alpha < x_1 < \alpha+\delta$, entonces f también está acotada en $[x_0, x_1]$. Por lo tanto f está acotada en $[a, x_1]$, de manera que x_1 pertenece a A, lo que contradice el hecho de que α sea una cota superior a A. Esta contradicción demuestra que $\alpha = b$. Debemos mencionar un detalle: en la demostración hemos puesto implícitamente que $a < \alpha$ de manera que f está definida en algún intervalo $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$; la posibilidad $a = \alpha$ puede excluirse de manera similar, utilizando el hecho de que existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $\{x : a \leq x < a+\delta\}$.
La demostración todavía no es completa; únicamente sabemos que f está acotada en $[a,x]$ para todo $x < b$, no necesariamente que f está acotada en $[a,b]$. Sin embargo, sólo es necesario añadir una pequeña observación.
Existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $\{x : b-\delta < x \leq b\}$. Existe también un x_0 de A tal que $b-\delta < x_0 < b$. De manera que f está acotada en $[a, x_0]$ y también en $[x_0, b]$, por tanto f está acotada en $[a,b]$.

■

Teorema 7.3 Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe un número y de $[a,b]$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x de $[a,b]$.

Demostración.- Sabemos que f está acotada en $[a,b]$, lo que significa que le conjunto

$$\{f(x) : x \text{ pertenezca a } [a,b]\}$$

está acotado. Además, dicho conjunto es, obviamente, distinto del $\emptyset$, de manera que admite una cota superior mínima α. Como $\alpha \geq f(x)$ para x de $[a, b]$, basta demostrar que $\alpha = f(y)$ para algún y de $[a, b]$. Supongamos, por el contrario, que $\alpha \neq f(y)$ para todo y de $[a, b]$. Entonces la función g definida mediante

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}, \quad x \in [a, b]$$

es continua en $[a, b]$, ya que el denominador de la expresión del lado derecho de la igualdad nunca vale 0. Por otra parte, α es la mínima cota superior de $\{f(x) : x \text{ pertenezca a } [a, b]\}$, esto significa que

$$\text{para cada } \epsilon > 0 \text{ existe un } x \text{ de } [a, b] \text{ con } \alpha - f(x) < \epsilon.$$

Esto, a su vez, significa que

$$\text{para cada } \epsilon > 0 \text{ existe un } x \text{ de } [a, b] \text{ con } g(x) > 1/\epsilon.$$

Pero esto quiere decir que g no está acotada en $[a, b]$, lo que contradice el resultado del teorema anterior.

■

Teorema 8.2 $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

Demostración.- Supongamos que $\mathbb{N}$ estuviera acotado superiormente. Como $\mathbb{N} = \emptyset$, existiría una cota superior mínima α de $\mathbb{N}$. Entonces

$$\alpha \geq n \text{ para todo } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Por consiguiente,

$$\alpha \geq n + 1 \text{ para todo } n \text{ de } \mathbb{N},$$

ya que si n pertenece a $\mathbb{N}$, $n + 1$ también. Pero esto significa que

$$\alpha - 1 \geq n \text{ para todo } n \text{ de } \mathbb{N},$$

lo cual quiere decir que $\alpha - 1$ también es una cota superior de $\mathbb{N}$, lo que contradice el hecho de que α sea la cota superior mínima de $\mathbb{N}$.

■

Teorema 8.3 Para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número natural n con $1/n < \epsilon$.

Demostración.- Supongamos que no fuese así; entonces $1/n \geq \epsilon$ para todo n de $\mathbb{N}$. Por tanto, $n \leq 1/\epsilon$ para todo n de $\mathbb{N}$. Pero esto significa que $1/\epsilon$ es una cota superior de $\mathbb{N}$, lo cual contradice el resultado del teorema 8.2.

■

8.1 Problemas

1. Hallar la cota superior mínima y la cota inferior máxima (si existe) de los siguientes conjuntos. Decida también cuáles de ellos poseen un elemento máximo y un elemento mínimo (es decir, en qué casos la cota superior mínima y cota inferior máxima pertenecen al conjunto).

(i) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \text{ en } \mathbb{N}\right\}$.

Respuesta.- Sea A el conjunto dado. Vemos que el $\sup A = \max A = 1$, $\inf A = 0$ y $\min A$ no existe.

(ii) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \text{ en } \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\right\}$.

Respuesta.- Sea A el conjunto dado. Podemos ver que $\sup A = \max A = 1$ y $\inf A = \min A = -1$.

(iii) $\{x : x = 0 \text{ o } x = 1/n \text{ para algún } n \text{ en } \mathbb{N}\}$.

Respuesta.- Llamemos A al conjunto dado. Todos los números están en el intervalo $[0,1]$. De donde 0 es la mayor cota inferior y el 1 es la menor cota superior, es decir, $\sup A = \max A = 1$ y $\inf A = \min A = 0$.

(iv) $\left\{x : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } x \text{ racional }\right\}$.

Respuesta.- Sea A el conjunto dado. En este caso 0 es la mayor cota inferior y está contenido en el conjunto y $\sqrt{2}$ es la cota superior mínima pero no está en el conjunto, por lo tanto, $\inf A = \min A = 0$ y $\sup A = \sqrt{2}$.

(v) $\left\{x : x^2 + x + 1 \geq 0\right\}$.

Respuesta.- No existe ni máximo ni mínimo, tampoco supremo o ínfimo.

(vi) $\left\{x : x^2 + x - 1 < 0\right\}$.

Respuesta.- Sea $A = \left\{x : x^2 + x - 1 < 0\right\}$, entonces se tiene

$$x^2 + x - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

. Por lo tanto $\sup A = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ y $A = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ los dos no contenidos en A.

(vii) $\left\{x : x < 0 \text{ y } x^2 + x - 1 < 0\right\}$.

Respuesta.- Designemos al conjunto dado con A. Luego ya que

$$x < 0 \text{ y } x^2 + x - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < 0$$

Entonces $\sup A = 0 \notin A,\ \inf A = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin A$.

(viii) $\left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n : n \text{ en } \mathbb{N}\right\}$.

Respuesta.- Sea A el conjunto designado y sea $a_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$. Entonces $a_1 = 0$, para indices pares $a_n = \dfrac{1}{n} + 1$. La sucesión es decreciente, converge en 1 y el mayor elemento se obtiene en $n = 2$, $a_2 = \dfrac{3}{2}$. Para indices impares $a_n = \dfrac{1}{n} - 1$, la secuencia es decreciente, converge en -1 pero este número no se consigue, por lo que

$$-1 < a_n \leq \frac{3}{2}.$$

De donde concluimos que $\inf A = -1$ pero no existe el mínimo y $\sup A \max A = \dfrac{3}{2}$.

2. (a) Suponga que $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente. Sea $-A$ el conjunto de todos los $-x$ con x en A. Demuestre que $-A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y que $-\sup(-A)$ es la cota inferior máxima de A.

Demostración.- Sabemos que $A \neq 0 \;\Rightarrow\; -A \neq 0$. Luego ya que A está acotado inferiormente, existe algún y tal que $y \leq x$ para todo $x \in A$, entonces

$$y \leq x,\ \forall\ x \in A \implies -y \geq -x,\ \forall\ -x \in -A$$

Por lo tanto, $-A$ esta acotado superiormente.
Sea $\alpha = \sup(-A)$, entonces α es una cota superior de $-A$, por tanto invirtiendo el razonamiento que acabamos de hacer concluiremos que $-\alpha$ es una cota inferior de A.
Además, si β es cualquier cota inferior de A, entonces $-\beta$ es una cota superior de $-A$, por tanto $-\beta \geq \alpha$ y $\beta \leq -\alpha$. Por consiguiente $-\alpha$ es la mayor cota inferior o ínfimo de A.

(b) Si $A \neq 0$ está acotado inferiormente, sea B el conjunto de todas las cotas inferiores de A. Demuestre que $B \neq \emptyset$, que B está acotado superiormente y que $\sup B$ es la cota inferior máxima de A.

Demostración.- Al estar A acotado inferiormente, $B \neq \emptyset$. Luego puesto que $A \neq \emptyset$, existe algún x en A. Ningún y que sea mayor que x es cota inferior de A, o sea que ninguno de tales y pertenece a B. B está pues acotado superiormente. Sea $\alpha = \sup B$, entonces α es automáticamente mayor o igual que cualquier cota inferior de A, con lo que basta demostrar que α es cota inferior de A. Ahora bien si α no fuese cota inferior de A, existiría en A algún x con $x < \alpha$. Al ser α la cota superior mínima de B, esto significaría que en B existe algún y con $x < y < \alpha$. Pero esto es imposible, ya que $x < y$ significa que y no es cota inferior de A y por lo tanto y no puede pertenecer a B.

3. Sea f una función continua en $[a,b]$ con $f(a) < 0 < f(b)$.

(a) La demostración del teorema 7-1 estableció que existe un x mínimo de $[a,b]$ con $f(x) = 0$. Si existe más de un x de $[a,b]$ con $f(x) = 0$, ¿Existe necesariamente un segundo elemento más pequeño x tal que $f(x) = 0$? Demuestre que existe un máximo de $[a,b]$ con $f(x) = 0$.

Demostración.- El teorema 7.1 no dice nada sobre el número/cantidad de $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$. La idea es que solo exista al menos uno. Por lo tanto, no existe necesariamente el

segundo (el más pequeño.)
Sea $g(x) = f(a+b-x)$, entonces podríamos tener

$$g(a) = f(b) > 0 \quad \text{y} \quad g(b) = f(a) < 0$$

Por el enunciado, existe un y mínimo tal que $g(y) = 0$. De donde $f(a+b-y) = 0$ y $a+b-y$ es el máximo porque si no fuese así $g(z) = f(a+b-z) = 0$ para algún z con $a+b-y < a+b-z$ o $z < y$ pero esto es una contradicción ya que y es el máximo para el cual g es cero.

(b) La demostración del teorema 7-1 se basada en considerar el conjunto

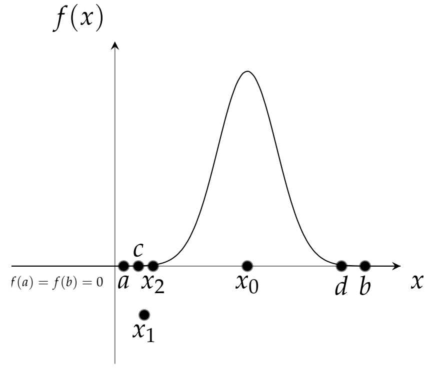
$$A = \{x : a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ negativa en } [a,x]\}.$$

De otra demostración del teorema 7-1, basada en considerar $B = \{x : a \leq x \leq b \text{ y } f(x) < 0\}$. ¿Qué punto x de $[a,b]$ con $f(x) = 0$ será localizado con esta demostración? Dé un ejemplo en el cual los conjuntos A y B sean los mismos.

Demostración.- Sabemos que $B \neq \emptyset$ y está acotada, por lo que existe el $\sup B \in [a,b]$. De donde demostraremos que $f(\sup B) = 0$.
Supongamos que $f(\sup B) < 0$. Ya que f es continuo, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ con $x \in (\sup B - \delta, \sup B + \delta)$. Pero, esto es una contracción ya que B tiene supremo, es decir, existe $x_1 \in (\sup B - \delta, \sup B)$ tal que $x_1 \in B$. Supongamos ahora que $f(\sup B) > 0$. Ya que f es continuo, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ con $x \in (\sup B - \delta, \sup B + \delta)$, pero esto también es una contradicción ya que B tiene mencionamos que tiene supremo. Por lo que concluimos que $f(\sup B) = 0$.
Si f tiene un múltiplo cero en el intervalo $[a,b]$, los conjuntos A y B no son los mismos.

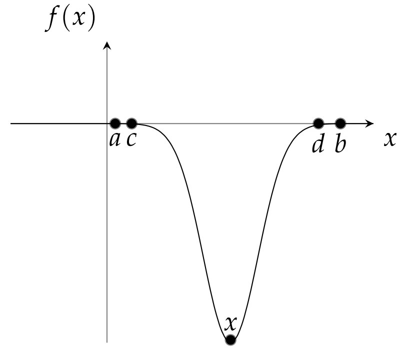
4. (a) Suponga que f es continua en $[a,b]$ y que $f(a) = f(b) = 0$. Suponga también que $f(x_0) > 0$ para algún x_0 de $[a,b]$. Demuestre que existen números c y d con $a \leq c < x_0 < d \leq b$ tales que $f(c) = f(d) = 0$, pero $f(x) > 0$ para todo x de (c,d).

Demostración.- Primero veamos que si $f(x) > 0$ con $x \in (a, x_0]$ entonces $c = a$.
Si existe $x_1 \in (a, x_0)$ tal que $f(x_1) < 0$ entonces por el teorema 7.1 existe $x_2 \in (x_1, x_0)$ tal que $f(x_2) = 0$. Basado en el problema 3, sabemos que existe un $x \in [x_1, x_0]$ máximo tal que $f(x) = 0$, denotemos con c. Así, $f(c) = 0$ y $f(x) > 0$ donde $x \in (c, x_0)$.
De la misma manera, si $f(x) > 0$, de donde $x \in [x_0, b)$ entonces $d = b$. Si no, entonces existe $x_1 \in (x_0, b)$ tal que $f(x_1) < 0$ entonces existe $x_2 \in (x_0, x_1)$ tal que $f(x_2) = 0$. Basado en el problema 3, conocemos que existe $x \in [x_0, x_1]$ mínimo tal que $f(x) = 0$, denotemos con d. Así $f(d) = 0$ y $f(x) > 0$ de donde $x \in (x_0, d)$. Por lo que la proposición queda demostrada.



(b) Suponga que f es continua en $[a,b]$ y que $f(a) < f(b)$. Demuestre que existen números c y d con $a \leq c < d \leq b$ tales que $f(c) = f(a)$ y $f(d) = f(b)$ y $f(a) < f(x) < f(d)$ para todo x de (c,d).

Demostración.-



Sea $A = \{x \in [a,b] : f(x) - f(a) < 0\}$, por el problema 3b sabemos que A está acotado y $\sup A = c$ tal que $f(c) = f(a)$. Luego sea $B = \{x \in [a,b] : f(x) - f(b) < 0$ en el intervalo $[c,x]\}$, de donde por la prueba del teorema 7.1 sabemos que B está acotado y que el $\sup B = d \in (c,b]$, tal que $f(d) = f(b)$.
Por lo que tenemos $a \leq c < d \leq b$ tal que $f(c) = f(a)$, $f(d) = f(b)$ y $f(a) < f(x) < f(d)$ para todo x en (c,d).

5. (a) Suponga que $y - x > 1$. Demuestre que existe un entero k tal que $x < k < y$.

Demostración.- Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$-n < x < n$$

Esto ya que $\mathbb{N}$ no está acotado. Podemos tomar el número más grande K entre $-n < x$, es decir, $K \leq x$. Luego por la definición del entero más grande se tiene que $K + 1 > x$, por lo que $x < K + 1 \leq x + 1 < y$. Así $K + 1$ es ese entero que buscamos.

(b) Suponga que $x < y$. Demuestre que existe un número racional r tal que $x < r < y$.

Demostración.- Si $y - x > 0$ entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(y - x) > 1$, esto implica que $ny - nx > 1$. Por el anterior inciso (a) tenemos que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$ny > k > nx, \quad n \in \mathbb{N} \iff y > \frac{k}{n} > x \quad \text{o} \quad x < \frac{k}{n} < y.$$

Así, $r = \dfrac{k}{n}$ es un numero racional.

(c) Suponga que $r < s$ son números racionales. Demuestre que existe un número irracional entre r y s.

Demostración.- Un número irracional en el intervalo $(0,1)$ es por ejemplo $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces el número irracional t e el intervalo (r,s) es $t = r + (s - r)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) Suponga que $x < y$. Demuestre que existe un número irracional entre x e y.

Demostración.- Del inciso (b) sabemos que hay un número racional r_1 tal que

$$x < r_1 < y$$

También, existe un número racional r_2 tal que

$$x < r_1 < r_2 < y$$

Luego por el inciso (c) sabemos que existe un número irracional t tal que

$$x < r_1 < t < r_2 < y.$$

6. Se dice que un conjunto A de números reales es denso si todo intervalo abierto contiene un punto de A. El problema 5 demuestra que el conjunto de los número racionales y el conjunto de los números irracionales son densos.

(a) Demuestre que si f es continua y $f(x) = 0$ para todo los números x de un conjunto denso A, entonces $f(x) = 0$ para todo x.

Demostración.- Sea $\epsilon > 0$, ya que f es continua, existe $\delta > 0$ tal que para cada $y \in \mathbb{R}$, si $0 < |y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \epsilon$.
Luego A es denso en $\mathbb{R}$ por lo que existe $y_0 \in A$ que satisface $|y_0 - x| < \delta$. Si $y_0 = x$ entonces $f(x) = 0$, de lo contrario $0 < |y_0 - x| < \delta$, de donde se tendría $|f(y_0) - f(x)| < \epsilon$ por lo que concluimos que $|f(x)| < \epsilon$. Ya que ϵ es arbitrario, $f(x) = 0$.

(b) Demuestre que si f y g son continuas y $f(x) = g(x)$ para todo x de un conjunto denso A, entonces $f(x) = g(x)$ para todo x.

Demostración.- Sea $h = f - g$, entonces basta demostrar que $\lim\limits_{x\to a} t(x) = 0 = h$. Dado ahora un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|t(x) - h| < \epsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$. Puesto que A es denso, existe un número x en A que satisface $0 < |x - a| < \delta$; así pues, $|0 - h| < \epsilon$. Al cumplirse esto para todo $\epsilon > 0$, se sigue que $h = 0$ y por lo tanto $f(x) = g(x)$.

(c) Si suponemos, en cambio que $f(x) \geq g(x)$ para todo x de A, demuestre que $f(x) \geq g(x)$ para todo x. ¿Puede sustituirse el símbolo $\geq$ por el símbolo $>$ en todas partes?.

Demostración.- Sea $f(x) \geq g(x)$ con $x \in A \implies h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ para $x \in A$. Si f y g son continuas también lo es h, por lo que sólo nos faltaría demostrar que $h(x) \geq 0\ \forall x$. Supóngase que $h(x) < 0$ para algún x. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que $h(x) < 0$ para $x \in (x - \delta, x + \delta)$. Ya que A es denso, existe $t \in (x - \delta, x + \delta)$ y $t \in A$ tal que $h(x) < 0$, donde es contradictorio al hecho de que $h(x) \geq 0$ para $x \in A$. Luego no podemos sustituir $\geq$ por $>$. Por ejemplo si $f(x) = |x|$, entonces $f(x) > 0$ para todo x del conjunto denso $x : x \neq 0$, pero no se cumple que $f(x) > 0$ para todo x.

7. Demuestre que si f es continua y $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y entonces existe un número c tal que $f(x) = cx$ para todo x.

Demostración.- Demostremos que $f(x) = cx$ en algún conjunto denso. Sea $x = y$ por lo que

$$f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

por inducción tenemos,

$$f(nx) = nf(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sustituyendo $x = 1$

$$f(n) = n \cdot f(1) = cn.$$

Por lo que podemos afirmar que la función tiene la forma dada a un principio.
Luego ya que

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0$$

se sigue que,

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \implies 0 = f(x) + f(-x)$$

así sabemos que la función es impar,

$$f(-x) = -f(x).$$

Para $n \in \mathbb{Z}$ tenemos,

$$f(-n) = -f(n) = -cn = c(-n)$$

así, es válido para $f(x) = cx, \quad x \in \mathbb{Z}$.
Por último sea $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ necesitamos demostrar $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = c\dfrac{p}{q}$.
Ya que p es entero entonces,

$$f\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) = f(p) = cp$$

por otro lado, ya que q es entero entonces,

$$f\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$

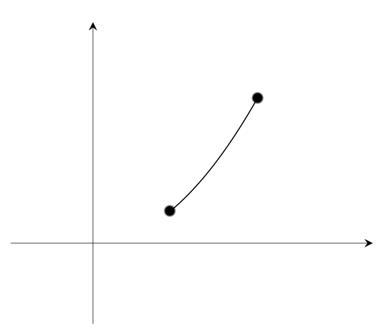
igualando, se sigue que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{cp}{q} = c\frac{p}{q}$$

por lo que es válido para

$$f(x) = cx, \quad x \in \mathbb{Q}.$$

8. Suponga que f es una función tal que $f(a) \leq f(b)$ siempre que $a < b$.



(a) Demuestre que $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen ambos.

Demostración.- Sea $A = \{f(x) : x < a\}$ acotado superiormente por lo que A tiene supremo, de donde tendremos que demostrar,

$$\sup A = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Sea $\epsilon > 0$, existe $x_0 < a$ tal que $f(x_0) > \sup A - \epsilon$. Ya que f es una función no decreciente,

$$x > x_0 \implies f(x) > \sup A - \epsilon \iff \sup A - f(x) < \epsilon$$

Así, para un $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ para $\delta = a - x_0$, tal que

$$a - \delta < x < a \implies \sup A - f(x) < \epsilon$$

que es la definición del límite dado, concluimos que $\inf A = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Por analogía se tiene $A^{'} = \{f(x) : x > a\}$ es acotado inferiormente por lo que A tiene ínfimo, así nos faltaría demostrar que,

$$\inf A^{'} = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $x_0 > a$ tal que $f(x_0) < \inf A^{'} + \epsilon$, luego ya que f es una función no decreciente,

$$x < x_0 \implies f(x) < \sup A^{'} \iff f(x_0) - \inf A^{'} < \epsilon$$

Así, para $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ para $\delta = x_0 - a$, tal que

$$a < x < a + \delta \implies f(x) - \inf A^{'} < \epsilon.$$

(b) Demuestre que f no tiene nunca una discontinuidad evitable.

Demostración.- Ya que f es una función no decreciente, entonces por la parte (a), tenemos que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Si el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, se sigue que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x),$$

que implica que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Por lo tanto f es continua en a.

(c) Demuestre que si f satisface las conclusiones del teorema del valor intermedio, entonces f es continua.

Demostración.- Tenemos que demostrar que para una función no decreciente f, suponiendo que para cada d existe un c tal que $f(c) = d$, implica que f es una función continua. Supongamos que f tiene una discontinuidad en algún a. De la parte (b), sabemos que f no tiene nunca una discontinuidad evitable, es decir,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) < \lim_{x\to a^+} f(x)$$

de donde hay al menos una d con $\lim_{x\to a^-} f(x) < d < \lim_{x\to a^+} f(x)$ tal que no existe un x para $f(x) = d$, lo cual contradice la suposición dada.

9. Si f es una función acotada en $[0,1]$, sea $|||f||| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$. Demuestre las propiedades análogas a las de $\|\|$ del problema 7-14.

Demostración.-

(a) Ya que c es constante se tiene,

$$\|cf\| = \sup\{|cf(x)|; x \in [0,1]\} = |c| \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\} = |c|\|f\|.$$

(b) Para $x \in [0,1]$, tenemos que $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ por lo que,

$$|f(x)| + g(x)| \leq \sup|f(x)| + \sup|g(x)|$$

que implica

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

que es válido para cualquier elemento de $x \in [0,1]$, por lo tanto

$$\sup|f(x) - g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

así,

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

(c) Sea $f, g, h \in [0,1]$, entonces por la parte (b), tenemos que,

$$\|h - f\| = \|h - g + g - f\| = \|(h - g) + (g - f)\| \leq \|h - g\| + \|g - f\|.$$

10. Suponga que $\alpha > 0$. Demuestre que todo número x puede escribirse de manera única en la forma $x = k\alpha + x^{'}$, donde k es un entero y $0 \leq x^{'} < \alpha$.

Demostración.- Sea k el mayor número entero que satisface $\leq x/\alpha$, y sea $x^{'} = x + k\alpha \geq 0$. Si $x - k\alpha = x^{'} \geq \alpha$, entonces $x \geq (k+1)\alpha$, por tanto $k + 1 \leq x/\alpha$, contradiciendo la elección de k. Por lo tanto $0 \leq x^{'} < \alpha$.

11. (a) Suponga que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión de números positivos con $a_{n+1} \leq a_n/2$. Demuestre que para cualquier $\epsilon > 0$ existe algún n con $a_n < \epsilon$.

Demostración.- Usaremos la relación $a_{n+1} \leq a_n/2$ recursivamente y deduciremos que,

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{2^2} \leq \ldots \leq \frac{a_1}{2^n}$$

para así probar por inducción que $2^n \geq n$ para $n \geq 0$.
El resultado es cierto para $n = 0$. Supongamos que el resultado es cierto para $n = k$ para algún $k > 0$, esto es,

$$2^k \geq k$$

también decimos que $2^k < 1$ para todo $k \geq 0$. Por lo tanto,

$$2^k - 2^k \geq k + 1 \longrightarrow 2^{k+1} \geq k + 1$$

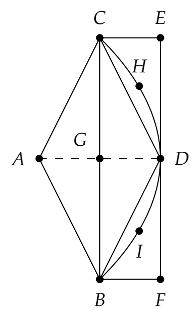
lo cual demuestra que es verdad para $n = k+1$ y por lo tanto por el principio de inducción es verdad para todo $n \geq 0$. Luego sea $\epsilon > 0$, recordemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\epsilon}{a_1}$. Para este n tenemos

$$a_{n+1} \leq \frac{a_1}{2^n} \leq \frac{a_1}{n} < a_1 \cdot \frac{\epsilon}{a_1} = \epsilon$$

Así, existe n para cada $a_n < \epsilon$.

(b) Suponga que P es un polígono regular inscrito en un círculo. Si P' es el polígono regular inscrito de doble número de lados, demuestre que la diferencia entre el área del círculo y el área de P' es menor que la mitad de la diferencia entre el área del círculo y el área de P.

Demostración.- Sea,



CB es arista de P mientras CD y DB son aristas de P'. Sea a la diferencia entre las áreas del sector circular $AIDHCA$ y la parte del polígono P que se encuentra dentro de este sector, De este modo,

$$a = Area(ABIDHCA) - Area(\triangle CAB) = Area(CGBIDHC)$$

Sea b la diferencia entre las áreas del sector circular $ABIDHCA$ y la parte del polígono P' que se encuentra dentro de este sector, De este modo,

$$b = Area(ABIDHCA) - Area(\square CABD) = Area(DBID) + Area(CDHC)$$

Donde demostraremos que $b \leq \dfrac{a}{2}$.

$$b \leq \frac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; -b \geq a - b \geq a - \frac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; a - b \geq \frac{a}{2}.$$

Por lo tanto probaremos la equivalencia $a - b \geq \dfrac{a}{2}$.

$$\begin{aligned}
a-b &= Area(CGBIDHC) - [Area(DBID) + Area(CDHC)] \\
&= Area(\triangle CBD) \\
&= Area(\triangle CGD) + Area(\triangle BGD) \qquad \text{ya que } \triangle BGD \cong \triangle CED \\
&= Area(\triangle CGD) + Area(\triangle CED) \\
&= Area(\square CGDE)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} a & = & Area(CGDIBHC) \\ & = & Area(CGDHC) + Area(GBIDG) \\ & = & 2Area(CGDHC) \qquad \text{ya que } CGDHC \cong GBIDG \end{array}$$

Así
$$\frac{1}{2} = Area(CGDHC)$$

Observe que $CGDHC$ es contenido en $\square$, de donde $Area(CGDHC) \leq Area(\square CGDE)$, comparando las inecuaciones $Area(\square CGDE)$ y $\dfrac{a}{2} = Area(CGDHC)$ tenemos,

$$a - b \geq \frac{a}{2}.$$

(c) Demuestre que existe un polígono regular P inscrito en un círculo y con área tan próxima como se desee al área del círculo.

Demostración.- Supongamos P_1 un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia y sea P_n el polígono regular con lados $3 \cdot 2^n$ inscrito en el mismo circo. Luego sea a_n denotado por la diferencia entre el área del circulo y la de P_n. Entonces por la parte (b),

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2}$$

Por la parte (a), dado cualquier ϵ, podemos encontrar n tal que $a_n < \epsilon$. Esto es, dado cualquier ϵ, se tiene P_n tal que la diferencia entre el área del circulo y la del P_n es menor que ϵ.
En otras palabras, podemos encontrar P_n cuya área es tan cercana al área del circulo como se desee.

(d) Utilizando el hecho de que las áreas de dos polígonos regulares con el mismo número de lados están entre sí en la misma relación que los cuadrados de sus lados, demuestre que las áreas de dos círculos están en la misma relación que los cuadrados de sus radios.

Demostración.- Consideremos dos círculos C_1 y C_2 co radio r_1 y r_2 respectivamente. Asumamos que
$$\frac{AreaC_1}{AreaC_2} = R < \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Elijase $\epsilon > 0$ tal que $R < R + \epsilon < \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$. Se tiene un polígono regular de n lado en C_1 y C_2. Llamados P_1 y P_2 respectivamente. Sea las longitudes de estos lados d_1 y d_2. Entonces,

$$d_1 = 2r_1 \operatorname{sen}(\pi/n), \qquad d_2 = 2r_2 \operatorname{sen}(\pi/n)$$

Por lo tanto, $\dfrac{d_1^2}{d_2^2} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2} = R$. Asumimos que $AreaC_1 = AreaP_1 + \epsilon_1$ y $AreaC_2 = AreaP_2 + \epsilon_2$.
Para $\dfrac{AreaC_1}{AreaC_2} = R < \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ obtenemos,

$$AreaC_1 = R \cdot AreaC_2$$

así,

$$AreaP_1 + \epsilon_1 = R(AreaP_2 + \epsilon_2) \;\Rightarrow\; \frac{AreaP_1}{AreaP_2} = R + \frac{1}{AreaP_2}(R\epsilon_2 + \epsilon_1)$$

Demostramos que podemos elegir n suficiente grande tal que ϵ_1 y ϵ_2 puede ser tan pequeño como se desee. Ahora elijamos n tal que $\dfrac{1}{AreaP_2}(R\epsilon_2 - \epsilon_1) < \epsilon$. Entonces

$$\frac{AreaP_1}{AreaP_2} = R + \frac{1}{AreaP_2}(R\epsilon_2 - \epsilon_1) < R + \epsilon < \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

donde $\dfrac{AreaP_1}{AreaP_2} < \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$ es una contradicción ya que ambos P_1 y P_2 son polígonos regulares que tiene igual número de lados. Esto muestra que nuestra suposición inicial $\dfrac{AreaC_1}{AreaC_2} < \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ es incorrecto. Por otro lado podemos argumentar análogamente y llegar a una contradicción si asumimos $\dfrac{AreaC_1}{AreaC_2} > \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$. Así se sigue,

$$\frac{AreaC_1}{AreaC_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

12. Supongamos que A y B son dos conjuntos no vacíos de números tales que $x \leq y$ para todo x en A y todo y de B.

(a) Demuestre que $\sup A \leq y$ para todo y de B.

Demostración.- Puesto que cualquier y en B satisface $y \geq x$ para todo x en A, cualquiera y en B es una cota superior de A, por tanto $y \geq \sup A$.

(b) Demuestre que $\sup A \leq \inf B$.

Demostración.- El apartado (a) demuestra que $\sup A$ es una cota inferior de B, por tanto $\sup A \leq \inf B$.

13. Sean A y B dos conjuntos numéricos no vacíos y acotados superiormente, y sea $A + B$ el conjunto de todos los números $x + y$ con x de A e y de B. Demuestre que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Demostración.- Supuesto que $x \leq \sup A$ e $y \leq \sup B$ para cualquier x en A e y en B, se deduce que $x + y \leq \sup A + \sup B$. En consecuencia, $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A + B$, por tanto

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Para todo $\epsilon > 0$. Ya que $\sup A$ es una cota superior mínima de A y $\sup A - \epsilon/2$ no es una cota superior de A, entonces existe un $x \in A$ tal que $\sup A - x < \epsilon/2$. De similar forma, existe un $y \in B$ tal que $\sup B - y < \epsilon/2$. Así nos aseguramos que $\sup A + \sup B > (x + y)$, es decir,

$$\sup A + \sup B - (x + y) < \epsilon$$

Luego por hipótesis sabemos que,

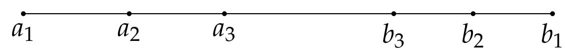
$$\sup(A + B) \geq x + y$$

de donde,

$$\sup(A + B) \geq x + y > \sup A + \sup B - \epsilon$$

Por lo tanto, $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

14. **(a)** Considere una sucesión de intervalos cerrados $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2], \ldots$. Suponga que $a_n \leq a_{n+1}$ y que $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n. Demuestre que existe un punto x que pertenece a todos los I_n.



Demostración.-

(b) Demuestre que esta conclusión es falsa si se consideran intervalos abiertos en lugar de intervalos cerrados.

Demostración.- El sencillo resultado del problema 14(a) se denomina Teorema de los Intervalos Encajados. Puede utilizarse para dar otras demostraciones de los Teoremas 1 y 2. El procedimiento utilizado, que se ilustra en los dos problemas siguientes, ilustra un método general denominado argumento de bisección.

15. Suponga que f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Entonces o bien $f[(a+b)/2] = 0$, o f tiene signos distintos en los extremos del intervalo $[a, (a+b)/2]$, o bien f tiene distintos en los extremos del intervalo $[(a+b)/2, b]$. ¿Por qué? Si $f[(a+b)/2] \neq 0$, sea I_1 aquel de los dos intervalos en el que f cambia de signo. Divida ahora I_1 en dos mitades. O bien f en 0 en el punto medio, o bien f cambia de signo en uno de los dos intervalos. Sea I_2 uno de estos. Continue de esta manera definiendo I_n para cada n (a no ser que f sea 0 en algún punto medio). Utilice el teorema de los intervalos encajados para hallar un punto x en el que $f(x) = 0$.

Demostración.- Si f es cero en algún punto medio, entonces quedará demostrada la proposición. Supongamos que f no es cero en ningún punto medio. Si denotamos el n-simo intervalo por $I_n = [a_n, b_n]$, podemos seguir construyendo I_n indefinidamente. Esta I_n tendrá la siguientes propiedades.

(a) $[a,b] = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$

(b) $l(I_n) = \dfrac{1}{2} l(I_n)$ donde $l(I)$ denota la longitud del intervalo I.

Por el argumento del ejercicio anterior, tenemos $a_m \leq b_n$ para todo m y n, que demuestra que el conjunto $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente y cada b_n es una cota superior de A. Sea $x = \sup A$, entonces $a_n \leq x$ para cada $n \geq 0$ y ya que x es la mínima cota superior, tenemos también $x \leq b_n$ para cada $n \geq 0$. De donde

$$a_n \leq x \leq b_n$$

para cada n.
Similarmente, el conjunto $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente y cada a_m es una cota inferior de B. Sea $y = \inf A$, entonces $b_n \geq y$ para cada $n \geq 0$ y ya que y es la mayor cota inferior, tenemos también $y \geq a_n$ para cada $n \geq 0$ y por lo tanto,

$$a_n \leq y \leq b_n$$

para cada n.
Si $x \leq z \leq y$, entonces $a_n \leq x \leq z \leq y \leq b_n$ para cada n. Por lo tanto, el intervalo $[x,y]$ se encuentra en I_n, para cada n. Esto es,

$$[x,y] \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

Recordemos la segunda propiedad citada a un principio. Usando recursivamente tenemos lo siguiente,

$$l(I_n) = \frac{1}{2} l\left(I_{n-1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 l\left(I_{n-2}\right) = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^n l(I_0) = \frac{b-a}{2^n}$$

Esto muestra que $l(I_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ya que $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \subseteq I_n$ para cada n, tenemos $[x, y] \subseteq I_n$ para cada n.
Como $n \to \infty$ entonces $l(I_n) \to 0$, efectivamente $l([x, y]) = 0$. Esto será posible si y sólo si $x = y$. Esto implica que $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ consiste de un simple elemento

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = x$$

Ahora probemos que para este $x, f(x) = 0$. Tenemos $\sup A = x = y = \inf B$. Ya que (a_n) es una secuencia creciente, $a_n \to x$. Similarmente, $b_n \to x$. Esto implica que $f(a_n) \to f(x)$ y $f(b_n) \to f(x)$ esto como f es continuo. Sin embargo, por construcción $f(a_n) < 0$ para todo k y $f(b_n) > 0$ para todo k. Esto es $f(x)$ tiene dos sucesiones, una formada por números positivos y la otra por números negativos, que convergen en ella. Esto es posible si $f(x) = 0$.

16. Suponga que f es continua en $[a, b]$, pero que no estuviese acotada en $[a, b]$. Entonces f no estaría acotada en $[a, (a+b)/2]$ o bien no lo estaría en $[(a+b)/2, b]$. ¿Por qué? Sea I_1 uno de estos intervalos en los que f no está acotada. Aplique el método utilizado en el problema 15 para llegar a una contradicción.

Demostración.- Si denotamos el n-esimo intervalo por $I_n = [a_n, b_n]$ podemos seguir construyendo I_n indefinidamente. Esta I_n satisfacerá las siguientes propiedades.

(a) $[a, b] = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$

(b) $l(I_n) = \dfrac{1}{2} l(I_n)$ donde $l(I)$ denota la longitud del intervalo I.

Por el argumento del anterior ejercicio, tenemos $a_m \leq b_n$ para cada m y cada n. Esto demuestra que el conjunto $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente y cada b_n es un una cota superior de A. Luego sea $x = \sup A$, entonces $a_n \leq x$ para cada $n \geq 0$ y ya que x es la mínima cota superior, tenemos también $x \leq b_n$ para cada $n \geq 0$. De donde

$$a_n \leq x \leq b_n$$

para cada n.
Similarmente, el conjunto $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente y cada a_m es una cota inferior de B. Sea $y = \inf A$, entonces $b_n \geq y$ para cada $n \geq 0$ y ya que y es la mayor cota inferior, tenemos también $y \geq a_n$ para cada $n \geq 0$ y por lo tanto,

$$a_n \leq y \leq b_n$$

para cada n.
Si $x \leq z \leq y$, entonces $a_n \leq x \leq z \leq y \leq b_n$ para cada n. Por lo tanto, el intervalo $[x, y]$ se encuentra en I_n, para cada n. Esto es,

$$[x, y] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$$

Recordemos la segunda propiedad citada a un principio. Usando recursivamente tenemos lo siguiente,

$$l(I_n) = \frac{1}{2} l\left(I_{n-1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 l\left(I_{n-2}\right) = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^n l(I_0) = \frac{b-a}{2^n}$$

Esto muestra que $l(I_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ya que $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \subseteq I_n$ para cada n, tenemos $[x,y] \subseteq I_n$ para cada n.
Como $n \to \infty$ entonces $l(I_n) \to 0$, efectivamente $l([x,y]) = 0$. Esto será posible si y sólo si $x = y$. Esto implica que $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ consiste de un simple elemento

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = x$$

Ya que f no está acotado en cada I_n y cada x se encuentra en cada I_n, entonces f no está acotado en x. De donde llegamos a una contradicción ya que por hipótesis f no está acotada en $[a,b]$.

17. (a) Sea $A = \{x : x < \alpha\}$. Demuestre lo siguiente:

(i) Si x pertenece a A e $y < x$, entonces y pertenece a A.

Demostración.- Que x esté en A implica que $x < \alpha$, luego que $y < x$ implica que $y < x < \alpha$. De este modo $y \in A$.

(ii) $A \neq \emptyset$.

Demostración.- Que $\alpha - 1 < \alpha$ implica que $\alpha - 1 \in A$, por lo que $A \neq \emptyset$.

(iii) $A \neq \mathbb{R}$.

Demostración.- Análogo al anterior inciso, se tiene que $\alpha + 1 > \alpha$ que implica que $\alpha + 1 \notin A$, por lo que $A \neq \mathbb{R}$.

(iv) Si x pertenece a A, entonces existe algún número x' de A tal que $x < x'$.

Demostración.- Sea $x \in A$, entonces $x < \alpha$ de donde $\alpha - x > 0$, luego sea $x' = x + \dfrac{\alpha - x}{2}$, entonces $x' > x$ ya que $\dfrac{\alpha - x}{2} > 0$, por lo tanto

$$x' = x + \frac{\alpha - x}{2} = \frac{\alpha + x}{2} < \frac{\alpha + \alpha}{2} = \alpha.$$

Esto demuestra que $x' < \alpha$ lo que implica que $x' \in A$.

(b) Suponga a la inversa, que A satisface (i)-(iv). Demuestre que $A = \{x : x < \sup A\}$.

Demostración.- Supongamos que $z \in \mathbb{R}$ tal que $z \notin A$. Luego sea $x > z$, si $x \in A$, entonces por la propiedad (i), z también está en A, lo que contradice el hecho de que $z \notin A$. Lo que demuestra que A está acotado superiormente por z. Luego ya que $A \neq \emptyset$ entonces el $\sup A$ existe. Por último, dado que $x \in A$, elíjase x' en A, de donde según (iv), con $x < x'$, entonces $x < x' \leq \sup A$, con lo que $x < \sup A$. Recíprocamente, si $x < \sup A$, existe entonces un y en A con $x < y$. De aquí, por (i), $x \in A$.

18. Un número x se denomina una casi cota superior de A si en A existen sólo un número finito de números y con $y \geq x$. Del mismo modo se define una casi cota inferior de A.

(a) Halle todas las casi cotas superiores y todas las casi cotas inferiores de los conjuntos del problema 1.

Respuesta.-

(i) Llamemos al conjunto de cotas casi superiores del conjunto A con $csupA$, y el conjunto de cotas casi inferiores con $cinfA$, entonces tenemos

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

de donde cualquier cota casi superior es una cota superior (cero elementos y tal que $y \geq x$ son un número finito de elementos) por lo que $[1, \infty) \subseteq csupA$. Luego cada número positivo ϵ es una cota casi superior, ya que $\dfrac{1}{n} > \epsilon$ tiene un número finito de soluciones ($\frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n < \frac{1}{\epsilon}$ número finito de soluciones para ϵ). Sabemos que cero o cualquier número negativo x, no es una cota casi superior, ya que existe infinitos elementos del conjunto A tal que $\dfrac{1}{n} \geq 0$ o $\dfrac{1}{n} \geq x$. Así,

$$csupA = (0, \infty)$$

Por otro lado cualquier cota inferior es una cota casi inferior (cero elementos y tal que $y \leq x$ son un número finito de elementos) entonces $(-\infty, 0] \subseteq cinfA$. Ningún elementos positivo x es una cota casi inferior, ya que existe infinitos elementos del conjunto A tal que $\dfrac{1}{n} \leq x$. Así,

$$cinfA = (-\infty, 0].$$

(ii) Sea

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\} = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$$

De donde cualquier cota casi superior es una cota superior (cero elementos y tal que $y \geq x$ son un número finito de elementos) por lo que $[1, \infty) \subseteq csupA$. Luego cada número positivo ϵ es una cota casi superior, ya que $\dfrac{1}{n} > \epsilon$ tiene un número finito de soluciones ($\frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n < \frac{1}{\epsilon}$ número finito de soluciones para ϵ). Sabemos que cero o cualquier número negativo x, no es una cota casi superior, ya que existe infinitos elementos del conjunto A tal que $\dfrac{1}{n} \geq 0$ o $\dfrac{1}{n} \geq x$. Así,

$$csupA = (0, \infty)$$

Por otro lado cada número negativo V es una cota casi superior, ya que existe un finito número y de elementos del conjunto A tal que $y \leq V$. Sabemos que cero o cualquier número negativo x, no es una cota casi inferior, ya que existe infinitos elementos del conjunto A tal que $y \leq x$. Así,

$$cinfA = (-\infty, 0].$$

(iii) Similar a los anteriores incisos,

$$csupA = (0, \infty), \qquad cinf A = (-\infty, 0].$$

(iv)

$$csupA = [\sqrt{2}, \infty], \qquad cinf A = (-\infty, 0].$$

(v)

$$\Big\{x : x^2 + x + 1 \geq 0\Big\} = \mathbb{R}$$

La desigualdad se cumple para todos los números reales, por lo que no hay una cota casi superior, ni una cota casi inferior.

(vi) Se tiene,

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

La parabola está abierta hacia arriba, entonces el conjunto solución es un intervalo

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

Así,

$$csupA = \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty\right), \qquad cinf A = \left(-\infty, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right].$$

(vii)

$$A = \{x : x < 0 \ \wedge \ x - 1 < 0\} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

Así,

$$csupA = [0, \infty), \quad cinf = \left(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right].$$

(viii)

$$A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$$

La subsecuencia con índices impares converge a -1, mientras que la subsecuencia con índices pares converge a 1, por lo que hay infinitos elementos del conjunto A entre 1 y -1, por lo tanto

$$csupA = (1, \infty), \qquad cinf A = (-\infty, -1].$$

(b) Suponga que A es un conjunto finito acotado, Demuestre que el conjunto B de todas las casi cotas superiores de A es no vacío y está acotado inferiormente.

Demostración.- Dado que A está acotado, tiene al menos una cota superior, y ese también es una cota casi superior, por lo que el conjunto B de cotas casi superiores no está vacío. Además, dado que A está acotado, tiene al menos una cota inferior, digamos l. Debido a que A es infinito, hay infinitos elementos de A por encima de l, por lo que l no es una casi cota superior, y tampoco lo es ningún número debajo de l, por la misma razón. Por lo tanto, l es una cota inferior para el conjunto de todos los límites casi superiores, y B está ciertamente acotado por abajo.

(c) Del apartado (b) se deduce que existe el inf B; este número se denomina el límite superior de A, y se representa mediante el símbolo $\overline{\lim} A$ o lim A para cada conjunto A del problema 1.

Respuesta.- Por (a) se sigue,

(i) $\overline{\lim} A = 0$.

(ii) $\overline{\lim} A = 0$.

(iii) $\overline{\lim} A = 0$.

(iv) $\overline{\lim} A = \sqrt{2}$.

(v) No existe.

(vi) $\overline{\lim} A = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(vii) $\overline{\lim} A = 0$.

(viii) $\overline{\lim} A = 1$.

(d) Defina el $\underline{\lim} A$ y hállelo para todos los A del problema 1.

Respuesta.- Si A es un conjunto infinito acotado, existe números m y M tal que

$$m \leq y \leq M, \; \forall \; y \in A$$

Luego, m es una cota casi inferior de A ya que o no existe elemento y de A tal que $y \leq M$ o existe un elemento $y = M$ de A tal que $y \leq M$. Denotemos el conjunto de todas las cotas casi inferiores de A con C. Este último conjunto está acotado superiormente con M, llamemos a este número cota inferior de A y denotado por $\underline{\lim} A$. Se sigue de (a):

(i) $\underline{\lim} A = 0$.

(ii) $\underline{\lim}A = 0.$

(iii) $\underline{\lim}A = 0.$

(iv) $\underline{\lim}A = 0.$

(v) No existe.

(vi) $\underline{\lim}A = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(vii) $\underline{\lim}A = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

(viii) $\underline{\lim}A = -1.$

19. Si A es un conjunto infinito acotado demuestre que

(a) $\underline{\lim}A \leq \overline{\lim}A.$

Demostración.- Sea B el conjunto de cotas casi superiores de A, entonces $\overline{\lim}A = \inf B$. Por la propiedad de infimo, existe $\alpha < \overline{\lim}A + \epsilon$ tal que $\alpha \in B$. Por lo que existe un número finito de elementos de A mayores o iguales a α. Por otro lado sea C el conjunto de cotas casi inferiores de A, entonces $\underline{\lim}A = \sup C$. Por la propiedad de supremo, existe $\beta > \underline{\lim}A - \epsilon$ tal que $\beta \in C$. Por lo tanto existe un número finito de elementos de A menores o iguales que β.
Ahora, probemos que $\beta < \alpha$. Sea $\beta \geq \alpha$, ya que existe un número finito de elementos de A mayores o iguales que α, entonces $\beta \geq \alpha$ implica que existe finitos números de A mayores o iguales a β. Sin embargo, existe números finitos elementos de A mayores o iguales que $\beta \in C$. Esto significa que existe número finitos elementos en A lo que contradice la hipótesis de que A es infinito. De este modo $\beta < \alpha$ implica que $\underline{\lim}A - \epsilon < \beta < \alpha < \overline{\lim}A + \epsilon$. Que $\underline{\lim}A - \epsilon < \overline{\lim}A + \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$ implica que $\underline{\lim}A \leq \overline{\lim}A$.

(b) $\overline{\lim}A \leq \sup A.$

Demostración.- Si B denota el conjunto de cotas casi superiores de A, entonces $\sup A \in B$. Luego ya que $\overline{\lim}A = \inf B$, por lo propiedad de ínfimo, $\overline{\lim} \leq \sup A$.

(c) Si $\overline{\lim}A < \sup A$, entonces A contiene un elemento máximo.

Demostración.- Sea $\overline{\lim}A < \sup A$, elija z tal que $\overline{\lim} < z < \sup A$. Si B es el conjunto de cotas casi superiores de A, entonces $z \in B$. Por lo tanto existe un número finito de elementos de A mayores o iguales que z. Por otro lado, ya que $z < \sup A$, existe al menos un elementos de A mayores o iguales a z. Es decir, hay un número finito y diferentes de cero en A mayor o igual que z, donde se elije el elemento más grande de A.

(d) Demuestre los casos análogos a los apartados (b) y (c) para $\underline{\lim}$.

Demostración.- Probemos que $\underline{\lim} A \geq \inf A$. Si C denota el conjunto de cotas casi superiores de A, entonces $\inf A \in C$. Ya que $\underline{\lim} A = \sup B$, por la propiedad de supremo $\underline{\lim} A \geq \inf A$.
Ahora demostremos que si $\underline{\lim} A > \inf A$, entonces A contiene el elemento más pequeño. Asumiendo que $\underline{\lim} A > \inf A$, elija z tal que $\underline{\lim} A > z > \inf A$. Si C es el conjunto de cotas casi inferiores de A, entonces $z \in C$. Por lo tanto existe números finitos de elementos de A menores o iguales que z. Por otro lado, ya que $z > \inf A$, existe al menos un elemento de A menores o iguales que z. Es decir, existe un número diferente de cero y finito de A mejor o igual que z. Donde se elije al elemento más pequeño de A.

20. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Un punto x se denomina un punto de sombra de f si existe un número $y > x$ con $f(y) > f(x)$. Suponga que todos los puntos de (a,b) son puntos de sombra, pero que a y b no lo son. En este caso se verifica, evidentemente, que $f(a) \geq f(b)$.

(a) Suponga que $f(a) > f(b)$. Demuestre que el punto en el que f alcanza su valor máximo en $[a,b]$ ha de ser a.

Demostración.- Supongamos que $f(a) > f(b)$, de donde debemos demostrar que f tiene un valor máximo en el punto a del intervalo $[a,b]$. Sea $z \in (a,b]$ un punto el cual la función alcanza su máximo. Por lo que tenemos que $f(z) > f(x),\ \forall\ x \in (a,b]$. Pero, z es el punto de sombra por la suposición inicial. Esto significa que existe algún punto z' por el cual $f(z) < f(z')$. Este punto no puede estar en el intervalo (a,b) ya que $f(z)$ es el máximo en el intervalo. De aquí se sigue que $z' > b$. De donde la combinación de todos estos resultados da,

$$f(b) < f(z) \leq f(z'), \text{ para } b < z'$$

Por lo tanto, b no es el punto de sombra, así demostramos que es una contradicción. Se sigue que $z = a$, es decir, la función debe alcanzar su máximo en el punto a.

(b) Demuestre ahora que esto conduce a una contradicción, de manera que se ha de verificar que $f(a) = f(b)$.

Demostración.- Existe tres posibilidades para $f(a)$ y $f(b)$.

$$f(a) < f(b), \quad f(a) > f(b) \quad \text{o} \quad f(a) = f(b).$$

Supongamos que $f(a) < f(b)$, ya que $a < b$, de la definición de los puntos de sombra se sigue que a será el punto de sombra, el cual es una contradicción.
Supongamos ahora que $f(a) > f(b)$, de donde sabemos que todos los puntos $x \in (a,b)$ son puntos de sombra, mientras b no es un punto de sombra. Por lo tanto $f(x) < f(b)$ para todo $x \in (a,b)$. Sabemos que f es una función continua, de la deducción anterior se sigue que existirá algún punto $t \in (a,b)$ por el cual $f(t) = f(b)$.
Ya que b no es un punto de sombra, entonces $f(b) > f(x)$ para $x > b$. Tengamos en cuenta que no es difícil deducir que $f(t) > f(x),\ \forall\ x > b$. Por lo tanto, los puntos en el intervalo (a,t) no son puntos de sombra, ya que $f(t) < f(z),\ \forall\ z \in (a,t)$. Esto es también contradictorio. Por lo que $f(a) = f(b)$.

8.2 Apéndice: Continuidad Uniforme

Definición 8.5 La función f es uniformemente continua en un intervalo A si para cada $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x e y de A,

$$|x - y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Lema 8.1 Sea $a < b < c$ y f continua en el intervalo $[a, c]$. Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que si verifican,

(i) Si x e y pertenecen a $[a, b]$ y $|x - y| < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$,

(ii) Si x e y pertenecen a $[b, c]$ y $|x - y| < \delta_2$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Entonces existe un $\delta > 0$ tal que,

$$\text{Si } x \text{ e } y \text{ pertenecen a } [a, c] \text{ y } |x - y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Demostración.- Como f es continua en b, existe un $\delta_3 > 0$ tal que,

$$\text{Si } |x - b| < \delta_3, \text{ entonces } |f(x) - f(b)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Deducimos pues que

iii) Si $|x - b| < \delta_3$ y $|y - b| < \delta_3$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Si elegimos δ igual al mínimo de $\delta_1.\delta_2$ y δ_3 es fácil demostrar que éste es el valor buscado; en efecto, supongamos que x e y son dos puntos cualesquiera del intervalo $[a, c]$ tales que $|x - y| < \delta$. Si x e y están en el intervalo $[a, b]$, entonces $|f(x) - f(y)| < \delta$ según (i); y si x e y pertenecen ambos al intervalo $[b, c]$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ según (ii). La única posibilidad que queda es que

$$x < b < y \text{ o } y < b < x.$$

En ambos casos, como $|x - y| < \delta$, se verifica también que $|x - b| < \delta$ y $|y - b| < \delta$. De manera que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ según (iii).

■

Teorema 8.4 Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Demostración.- Emplearemos la estrategia acostumbrada, aunque hemos de ir con cuidado con el mecanismo de la demostración. Dado un $\epsilon > 0$ diremos que f es $\epsilon - adecuada$ en $[a, b]$ si existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo y, z de $[a, b]$,

$$|y - z| < \delta, \text{ entonces } |f(y) - f(z)| < \epsilon.$$

De hecho, queremos demostrar que f es $\epsilon - adecuada$ en $[a, b]$ para todo $\epsilon > 0$.
Consideremos un $\epsilon > 0$ determinado. Sea

$$A = \{x : a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ es } \epsilon - adecuada \text{ en } [a, x]\}.$$

Entonces $A \neq 0$ (ya que pertenece a A), y A está acotado superiormente por b, de manera que A posee una cota superior mínima α. En realidad tendríamos que escribir α_ϵ ya que A y α podrían depender de ϵ. Pero no lo haremos ya que, precisamente, lo que intentamos demostrar es que $\alpha = b$, sea cual sea el ϵ

elegido.
Supongamos que $a < b$. Como f es continua en α, existe algún $\delta_0 > 0$ tal que, si $|y - \alpha| < \delta_0$, entonces $|f(y)\text{¯}f(\alpha)| < \epsilon/2$. Por tanto, si $|y - \alpha| < \delta_0$ y $|z - \alpha| < \delta_0$, entonces $|f(y) - f(z)| < \epsilon$. Esto nos asegura que f es $\epsilon - adecuada$ en el intervalo $[\alpha - \delta_0, \alpha + \delta_0]$. Por otra parte, como a es la cota superior mínima de A, se verifica también que f es $\epsilon - adecuada$ en el intervalo $[\alpha, \alpha - \delta_0]$. Entonces el Lema demostrado anteriormente implica que f es $\epsilon - adecuada$ en $[\alpha, \alpha + \delta_0]$, por tanto $\alpha + \delta_0$ pertenece a A, lo que contradice el hecho de que a sea una cota superior de A.
Para completar la demostración hemos de probar que $\alpha = b$ pertenece a A. El argumento, en este caso, es prácticamente el mismo: ya que f es continua en b, existe algún $\delta_0 > 0$ tal que, si $b - \delta_0 < y < b$, entonces $|f(y) - f(b)| < \epsilon/2$. Por tanto f es $\epsilon - adecuada$ en $[b - \delta_0, b]$. Pero f es también $\epsilon - adecuada$ en $[a, b - \delta_0]$, de manera que el Lema implica que f es $\epsilon - adecuada$ en $[a, b]$.

■

8.3 Problemas

1. (a) ¿Para cuáles de los siguientes valores de α, la función $f(x) = x^\alpha$ es uniformemente continua en $[0, \infty)$? $\alpha = 1/3, 1/2, 2, 3$.

Respuesta.- Sea $\epsilon > 0$. Ya que la función es continua, entonces es uniformemente continua en $[0, 1]$. Por lo que existe δ_1 tal que para cualquier x, yß$[0, 1]$ con $|x - y| < \delta_1$, tenemos $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Esto equivale a decir que si $x, y \leq 1$ y $|x - y| < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Luego sea $y > 1$ de donde $x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3} \geq y^{2/3} > 1$.
$|f(x) - f(y)| = |x^{1/3} - y^{1/3}| = \dfrac{|x - y|}{x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}} < |x - y|$. Así, si $|x - y| < \epsilon$, entonces se sigue $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Por último sea $\delta = \min \delta_1, \epsilon$, o ambos son $x, y \leq 1$ o uno de ellos es mayor que 1. Por lo tanto si $|x - y| < \delta$ entonces en cualquier caso $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Lo que demuestra la continuidad uniforme en $[0, \infty)$ para $\alpha = 1/3$.

La prueba para $\alpha = 1/2$ es similar. Con $x^{1/2} + y^{1/2} \geq y^{172} > 1$. Por lo que concluimos que la función f es uniformemente continua en $[0, \infty)$ para $\alpha = 1/2$.

Para $f(x) = x^2$ se tiene que $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y)|x - y|$ de este modo,

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad (x + y)|x - y| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| < \frac{\epsilon}{x + y}.$$

Esto demuestra que $|x - y|$ depende de los valores de x e y. Cuanto más grande sea x e y el más pequeño sebe ser $|x - y|$ para que $|f(x) - f(y)|$ sea menor que ϵ. Por lo que f no es uniformemente continua en $[0, \infty)$.

Similarmente vemos que no es uniforme para $f(x) = x^3$ ya que si $|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = (x^2 + xy + y^2)|x - y|$ entonces,

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 + xy + y^2)|x - y| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| < \frac{\epsilon}{x^2 + xy + y^2}.$$

Esto demuestra que $|x - y|$ depende de los valores de x e y. Cuanto más grande sea x e y el más pequeño sebe ser $|x - y|$ para que $|f(x) - f(y)|$ sea menor que ϵ.

(b) Halle una función f que sea continua y acotada en $(0, 1]$, pero no uniforme continua en $(0, 1]$.

Respuesta.- Sea $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Entonces f es continua y está acotada en $(0,1]$. Luego supongamos que $x = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ e $y = \dfrac{1}{(2n+1)+\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{(4n+3)\pi}$ y $\epsilon = 1$, por lo que

$$f(x) - f(y) = \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left[(2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right] = 1 - (-1) = 2 > \epsilon.$$

$$|x-y| = \left|\frac{2}{(4n+1)\pi} - \frac{2}{(4n+3)\pi}\right| = \frac{4}{(4n+1)(4n+3)\pi} < \delta$$

Dado cualquier $\delta > 0$, podemos escoger n tal que $|x-y| = \dfrac{4}{(4n+1)(4n+3)\pi} < \delta$. Esto significa que existe $\epsilon > 0$ tal que dado cualquier $\delta > 0$ existe un par x, y con $|x-y| < \delta$ pero $|f(x) - f(y)| > \epsilon$.

(c) Halle una función f que sea continua y acotada en $[0,\infty)$, pero no uniforme continua en $[0,\infty)$.

Respuesta.- Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Entonces es continua y acotada en $[0,\infty)$. Luego sean $\epsilon = 1$ y $x = \sqrt{\dfrac{(4n+1)\pi}{2}}$ e $y = \sqrt{\dfrac{(4n+3)\pi}{2}}$ entonces,

$$f(x) - f(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{(4n+3)\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2 > \epsilon$$

$$|x-y| = \left|\sqrt{\frac{(4n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{(4n+3)\pi}{2}}\right| = \frac{\left|\dfrac{(4n+1)\pi}{2} - \dfrac{(4n+3)\pi}{2}\right|}{\left|\sqrt{\dfrac{(4n+1)\pi}{2}} + \sqrt{\dfrac{(4n+3)\pi}{2}}\right|} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+3}}$$

Dado cualquier $\delta > 0$, podemos escoger n tal que $|x-y| = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n+3}} < \delta$. Esto significa que existe $\epsilon > 0$ tal que dado cualquier $\delta > 0$ existe un par x, y con $|x-y| < \delta$ pero $|f(x) - f(y)| > \epsilon$.

2. (a) Demuestre que si f y g son uniformemente continuas en A, entonces $f+g$ también lo es.

Demostración.- Sea $x > 0$, por la continuidad uniforme de f, existe δ_1 tal que $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. Similarmente por la continuidad uniforme de g existe un δ_2 tal que $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon/2$. Luego sea $\delta = \min \delta_1, \delta_2$, entonces $|x-y| < \delta$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ y $|g(x) - g(y)| < \epsilon/2$, por lo que

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x)| = |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto encontramos δ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(y)| < \epsilon$. Esto prueba que $f+g$ es uniformemente continua en A.

(b) Demuestre que si f y g son uniformemente continuas y acotadas en A, entonces fg es uniformemente en A.

Demostración.- Asumiendo que $|f(x)| < M$ tal que $x \in A$ y $g(x) < N$ tal que $x \in A$. Sea $\epsilon > 0$, entonces por la continuidad uniforme de f y g existen δ_1 y δ_2 tal que $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) -$

$f(y)| < \epsilon/2N$ y $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(y)| < \epsilon/2M$, respectivamente. Sea $\delta = \min \delta_1, \delta_2$, entonces $|x-y| < \delta$, implica que $|f(x)-f(y)| < \epsilon/2N$ y $|g(x)-g(y)| < \epsilon/2M$. Por lo que

$$\begin{array}{rcl} |fg(x)-fg(y)| & = & |f(x)g(x)-f(y)g(y)| \\ & = & |f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)| \\ & \leq & |f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)| \\ & < & M(\epsilon/2M)+N(\epsilon/2N) \\ & = & \epsilon \end{array}$$

Por lo tanto, podemos encontrar δ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |fg(x)-fg(y)| < \epsilon$. Esto prueba que fg es uniformemente continua en A.

(c) Demuestre que esta conclusión no es válida si una de ambas funciones no está acotada.

Demostración.- Sea $f(x) = x$ uniformemente continua y no acotado en $\mathbb{R}$ y sea $g(x) = \operatorname{sen} x$ también uniformemente continua pero acotada en $\mathbb{R}$, entonces demostraremos que $h(x) = x \operatorname{sen} x$ no es uniformemente continuo en $\mathbb{R}$.
Sean $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ y $x = 2n\pi\dfrac{1}{n}$ e $y = 2n\pi$, entonces $|x-y| = \dfrac{1}{n}$, por lo que

$$|h(x)-h(y)| = |x \operatorname{sen} x - 0| = \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 2n\pi \operatorname{sen} \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 2n\pi \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 2\pi \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)$$

Ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, podemos elegir un n_1 tal que $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} > \dfrac{1}{2}$ para todo $n \geq n_1$ esto es, $|h(x)-h(y)| > 2\pi \left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) > 2\pi \cdot \dfrac{1}{2} = \pi$. Dado un $\delta > 0$ tenemos que elegir n_2 tal que $|x-y| = \dfrac{1}{n_2} < \delta$. Luego sea $n = \max n_1, n_2$, entonces tenemos $|x-y| < \delta$ y $|h(x)-h(y)| > \pi$. Por lo tanto existe $\epsilon = \pi$ tal que dado cualquier $\delta > 0$, podemos definir el par x, y para cada $|x-y| < \delta$ pero $|h(x)-h(y)| > \epsilon$. Por lo que h no es uniformemente continua.

(d) Suponga que f es uniformemente continua en A, que g es uniformemente continua en B y que $f(x)$ pertenece a B para todo x en A. Demuestre que $g \circ f$ es uniformemente continua en A.

Demostración.- Sea $\epsilon > 0$. Usando la continuidad uniforme de g y eligiendo δ_1 tal que $|x-y| < \delta_1$, entonces $|g(x)-g(y)| < \epsilon$ y la continuidad uniforme de f tal que $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x)-f(y)| < \delta_1$. Luego sea $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x)-f(y)| < \delta_1$ que implica $|g(f(x)-g(f(y))| < \epsilon$. Esto es $|g \circ f(x) - g \circ f(y)| < \epsilon$. Por lo tanto, dado un ϵ, encontramos un $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.

3. Utilice el argumento de bisección para dar otra demostración del teorema 1.

Demostración.- Se da una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ por lo que demostraremos que esta función también es uniformemente continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.
Supongamos que f no es uniformemente continua en $[a, b]$, de donde usamos el argumento de bisección. Si bisecamos el intervalo $[a, b]$ tal que una secuencia de intervalos $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2], \ldots$, entonces dado ϵ y cada n, podemos elegir $x_n, y_n \in [a_n, b_n]$ tal que,

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

Ya que
$$a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b$$
de donde $a_1, a_2, b_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b-3, \ldots$ están acotadas y son monótonas, entonces son sucesiones convergentes. Luego vemos que $bn - a_n$ tiende a cero, entonces podríamos decir que ambas sucesiones deben converger al mismo límite, digamos k y formar la desigualdad
$$a_n \leq x_n \leq y_n \leq b_n$$
Así concluimos que la secuencia x_n y la secuencia y_n converge al límite k, es decir,
$$x_n \to k \quad \text{y} \quad y_n \to k$$
Que implica,
$$|f(x_n) - f(y_n)| \to |f(k) - f(k)| = 0.$$
que contradice el hecho que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ para todo n.

4. Deduzca el teorema 7-2 como una consecuencia del teorema 1.

Respuesta.- Sea f continua en $[a,b]$, entonces es también uniformemente continua en $[a,b]$. Supongamos ahora que $\epsilon > 0$, por la continuidad uniforme, existe $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f8x) - f(y)| < \epsilon$. Luego dividiendo el intervalo $[a,b]$ en N subintervalos $a = x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N = b$ tal que cada uno de esos tenga una longitud menor que δ, entonces $|f(x_j) - f(j-1)| < \epsilon$ para $1 \leq j \leq N$ donde N es un número fijo. Así sea $y \in [a,b]$, después $y \in [x_M, x_{M+1}]$ para algunos $M < N$, de donde estimaremos $|f(y) - f(a)|$.
Sumando y restando cada $x_M, x_{M-1}, \ldots, x_2, x_1$ se sigue,
$$\begin{array}{rcl} |f(y) - f(a)| & = & |f(y) - f(x_0)| \\ & = & |f(y) - f(x_M)| + f(x_M) - \ldots - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0)| \\ & = & |f(y) - f(x_M)| + |f(x_M - f(x_{M-1})| + \ldots + |f(x_1) - f(x_0)| \\ & < & (M+1)\epsilon \\ & \leq & N\epsilon \end{array}$$
donde $K = N\epsilon + |f(a)|$, el demuestra que $|f(y)| \leq K$ para cada $y \in [a,b]$. Esto es f esta acotado en $[a,b]$.

9

Derivadas

Definición 9.1 La función f es **diferenciable en a** si existe el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En este caso, dicho límite se presenta mediante $f'(a)$ y se denomina la derivada de f en a. (Diremos también que f es diferenciable si f es diferenciable en a para todo a del dominio de f.)

La derivada f' son representados a menudo mediante

$$\frac{df(x)}{dx}, \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

Recordemos que la diferenciabilidad se supone que es una mejora respecto a la simple continuidad. Esto lo demuestran los numerosos ejemplos de funciones que son continuas, pero no diferenciables; sin embargo, hay que destacar un punto importante:

Teorema 9.1 Si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en a.

Demostración.-

$$\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right] = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

La ecuación $\lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = 0$ es equivalente a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; así, f es continua en a.

■

Es muy importante recordar el Teorema 1, e igualmente importante recordar que el recíproco no es cierto. Una función diferenciable es continua, pero una función continua no necesariamente es diferenciable.

Las distintas funciones $f^{((k)}$, para $k \leq 2$ se denominan generalmente derivadas de orden superior de f. Y en la notación se tiene

$$\frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

9.1 Problemas

1 (a) Demuestre, aplicando directamente la definición, que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$ para $a \neq 0$.

Demostración.- Por definición se tiene

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h\to a} \frac{-h}{a(a+h)h} = -\frac{1}{a^2}, \quad \text{siempre que } x \neq 0.$$

(b) Demuestre que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, 1/a)$ sólo corta a la gráfica de f en este punto.

Demostración.- La pendiente de la tangente cuando $x = a$ es $-\dfrac{1}{a^2}$, de donde la ecuación de la recta tangente es,

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) \quad \Rightarrow \quad a^2y - a = -x + a \qquad \Rightarrow \quad a^2y + x = 2a.$$

Luego $y = \dfrac{1}{x}$ ya que necesitamos encontrar el punto de intersección, y en consecuencia,

$$a^2\frac{1}{x} + x = 2a \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a$$

Por lo tanto, el único punto de intersección será $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$.

2 (a) Demuestre que si $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(a) = -2/a_3$ para $a \neq 0$.

Demostración.- Por definición tenemos,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a^2-(a+h)^2}{a^2(a+h)^2}}{h} = \lim_{h\to a} \frac{-h(2a+h)}{ha^2(a+h)^2} = -\frac{2}{a^3}, \quad \text{siempre que } x \neq 0.$$

(b) Demuestre que la recta tangente a f en el punto $(a, 1/a^2)$ corta a f en otro punto, que se encuentra en el lado opuesto del eje vertical.

Demostración.- Ya que $f'(a) = -\dfrac{2}{a^3}$ que representa la pendiente de la tangente entonces la ecuación de la tangente estará dada para $(a, 1/a^2)$ por,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{a^3}(x-a) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}$$

luego resolviendo para x e y sabiendo que $y = \dfrac{1}{x^2}$ tenemos,

$$x_1 = a, \quad x_2 = -\frac{a}{2} \qquad \text{e} \qquad y_1 = \frac{1}{a^2}, \quad y_2 = \frac{4}{a^2}.$$

Por lo que la tangente intersecta a la f en $(a, 1/a^2)$ y en $(-a/2, 4/a^2)$. Así estos puntos son apuestos al eje vertical.

3 Demuestre que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = 1/\left(2\sqrt{a}\right)$, para $a > 0$.

Demostración.- Por definición,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}} = \lim_{a\to 0} \frac{a+h-a}{h\sqrt{a+h}\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

para $a > 0$.

4 Para cada número natural n, sea $S_n(x) = x^n$. Recordando que $S_1'(x) = 1, S_2'(x) = 2x$, y que $S_3'(x) = 3x^2$, encuentre una fórmula para $X_n'(x)$. Demuestre que la fórmula es correcta.

Demostración.- Usando el teorema del binomio se tiene,

$$\begin{aligned}
S_n'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(x^{n-j}h^j\right) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[\sum_{h\to 0} \binom{n}{j} x^{n-j}h^{j-1}\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1}h^{1-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h^{2-1} + \ldots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} x^{n-2}h^{2-1} + \ldots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1}\right] \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

5 Halle f' si $f(x) = [x]$.

Respuesta.- Sea x un número no entero, entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[x+h] - [x]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Luego si x es un número entero, entonces por el límite por la izquierda se tiene,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{[x+h] - [h]}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{h} = \infty$$

por último si x es un número entero, entonces por el límite por la derecha se tiene,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{[x+h] - [x]}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0}{h} = 0.$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$, $\forall x \notin \mathbb{Z}$ y $f'(x) =$ no existe, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

6 Demuestre, aplicando la definición:

(a) si $g(x) = f(x) + c$, entonces $g'(x) = f'(x)$.

Demostración.- Por definición se tiene,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + c - [f(x) - c]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

(b) si $g(x) = cf(x)$, entonces $g'(x) = cf'(x)$.

Demostración.- Por definición,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = cf'(x).$$

7 Suponga que $f(x) = x^3$.

(a) ¿Cuál es el valor de $f'(9), f'(25), f'(36)$?.

Respuesta.- Se sabe que $f'(x) = x^n = nx^{n-1}$ por lo que

$$f'(x) = 3x^2$$

Así,

$$\begin{array}{rcccl} f'(9) & = & 3\cdot 9^2 & = & 243. \\ f'(25) & = & 3\cdot 25^2 & = & 1875. \\ f'(36) & = & 3\cdot 36^2 & = & 3888. \end{array}$$

(b) ¿Y el valor de $f'\left(3^2\right), f'\left(5^2\right), f'\left(6^2\right)$?.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 3x^2$, entonces

$$\begin{array}{rcccl} f'\left(3^2\right) & = & 3\cdot\left(3^2\right)^2 & = & 243. \\ f'\left(5^2\right) & = & 3\cdot\left(5^2\right)^2 & = & 1875. \\ f'\left(6^2\right) & = & 3\cdot\left(6^2\right)^2 & = & 3888. \end{array}$$

(c) Calcule $f'\left(a^2\right), f'\left(x^2\right)$. Si no encuentra este problema trivial es que no tiene en cuenta una cuestión muy importante: $f'(x^2)$ significa la derivada de f en el punto que denominamos x^2; no es la derivada en el punto x de la función $g(x) = f\left(x^2\right)$.

Respuesta.- Ya que $f'(x) = 3x^2$, entonces

$$\begin{array}{rcccl} f'\left(a^2\right) & = & 3\left(a^2\right)^2 & = & 3a^4 \\ f'\left(x^2\right) & = & 3\left(x^2\right)^2 & = & 3x^4 \end{array}$$

(d) Para aclarar la cuestión anterior. Si $f(x) = x^3$, compare $f'\left(x^2\right)$ y $g'(x)$ donde $g(x) = f\left(x^2\right)$.

Respuesta.- Es $f'\left(x^2\right) = 3\left(x^2\right)^2 = 3x^4$, pero

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)^2 - f\left(x^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x-h)^2\right]^3 - \left(x^2\right)^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(6x^5 + 15x^5h + 20x^3h^2 + 15x^2h^3 + 6xh^4 + h^5\right)}{h} \\ &= 6x^5. \end{aligned}$$

8 (a) Suponga que $g(x) = f(x+c)$. Demuestre (partiendo de la definición) que $g'(x) = f'(x+c)$. Dibuje un esquema para ilustrarlo. Para resolver el problema debe escribir las definiciones de $g'(x)$ y $f'(x+c)$ correctamente. El objetivo del Problema 7 era convencerle de que aunque este problema es fácil no se trata de una trivialidad, y que hay algo que debe demostrarse: no se puede simplemente poner primas en la ecuación $g(x) = f(x+c)$.

Demostración.- Por el hecho de que $g(x) = f(x+c)$ y por definición de diferencia tenemos,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left[(x+c)+h\right] - f(x-c)}{h} = f'(x+c).$$

(b) Con el objeto de enfatizar el anterior punto. Demuestre que si $g(x) = f(cx)$, entonces $g(x) = c \cdot f'(cx)$. Intente también visualizar gráficamente por qué esta igualdad es cierta.

Demostración.- Por el hecho de que $g(x) = f(cx)$ y por definición de diferencia se tiene,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(cx+ch) - f(cx)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c\left[f(cx+ch) - f(cx)\right]}{ch} \end{aligned}$$

Sea $ch = k$ de donde

$$c \lim_{k\to 0} \frac{f(cx+k) - f(cx)}{k} \quad \Rightarrow \quad cf'(cx).$$

(c) Suponga que f es diferenciable y periódica, con periodo a (por ejemplo, $f(x+a) = f(x)$) para todo x). Demuestre que f' es también periódica.

Demostración.- Por hipótesis tenemos,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left[(x+a)+h\right] - f(x-a)}{h} = f'(x+a).$$

9 Halle $f'(x)$ y también $f'(x+3)$ en los siguientes casos. Hay que ser muy metódico para no cometer un error en algún paso.

(a) $f(x) = (x+3)^5$.

Respuesta.- si $g(x) = x^5$, entonces $g'(x) = 5x^4$. Ahora, $f(x) = g(x+3)$ por tanto

$$f'(x) = g'(x+3) = 5(x+3)^4 \quad \text{y} \quad f'(x+3) = 5[(x+3)+3]^4 = 5(x+6)^4.$$

(b) $f(x+3) = x^5$.

Respuesta.- Sea $t = x+3 \Rightarrow x = t-3$, entonces

$$f(t) = (t-3)^5.$$

De donde, $f(x) = (x-3)^5$.

Si $g(x) = x^5$, entonces $g'(x) = 5x^4$. Ahora, $f(x) = g(x-3)$, por tanto

$$f'(x) = 5(x-3)^4 \qquad \text{y} \qquad f'(x+3) = 5[(x+3)-3]^4 = 5x^4.$$

(c) $f(x+3) = (x+5)^7$.

Respuesta.- Sea $t = x+3$, de donde $x = t-3$, entonces

$$f(t) = [(t-3)+5]^7 = (t+2)^7.$$

Podemos reescribir esta última función como, $f(x) = (x+2)^7$.

Sea $g(x) = x^7$ que implica $g'(x) = 7x^6$, por lo que,

$$f'(x) = g'(x+2) = 7(x+2)^6 \qquad \text{y} \qquad f'(x+3) = g'(x+3+2) = 7(x+5)^6.$$

10 Halle $f'(x)$ si $f(x) = g(t+x)$, y si $f(t) = g(t+x)$. Las respuestas no son idénticas.

Respuesta.- Por definición e hipótesis,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+x+h)-g(t+x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g\left[(t+x)+h\right]-g(t+x)}{h} = g'(t+x).$$

Por otro lado,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h+x)-f(x+x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(2x+h)-f(2x)}{h} = g'(2x).$$

11 (a) Demuestre que Galileo se equivocó: si un cuerpo cae una distancia $s(t)$ en t segundos, y s' es proporcional a s, entonces s no puede ser una función de la forma $s(t) = ct^2$.

Demostración.- Si x es una función de la forma $s(t) = ct^2$ entonces $s'(t) = 2ct$. Luego sustituyendo el valor $t = \sqrt{\dfrac{s}{c}}$, se tiene

$$s'(t) = 2c\sqrt{\frac{s}{c}} = 2\sqrt{cs}.$$

Dado que $s'(t)$ es directamente proporcional a $\sqrt{s(t)}$ entonces contradice la afirmación obtenida.

(b) Demuestre que las siguientes afirmaciones sobre s son ciertas, si $s(t) = (a/2)t^2$ (la primera afirmación demostrará por qué hemos hecho el cambio de c a $a/2$):

(i) $s''(t) = a$ (la aceleración es constante).

Demostración.- Sea $s(t) = \dfrac{a}{2}t^2$, entonces

$$s'(t) = \frac{a}{2}\lim_{g\to 0}\frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{a}{2}(2t) = at.$$

Así,

$$s''(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s'(t+h) - s'(t)}{h} = a\lim_{h\to 0}\frac{(t+h) - t}{h} = a.$$

Donde vemos que la aceleración es constante.

(ii) $[s'(t)]^2 = 2as(t)$.

Demostración.- Sea $t^2 = \dfrac{2s(t)}{a}$, entonces

$$\left[s'(t)\right]^2 = a^2t^2 = a^2\left[\frac{2s(t)}{a}\right] = 2as(t).$$

(c) Si s mide en pies, el valor de a es 32. ¿Cuántos segundos tendrá que permanecer fuera de la trayectoria de una lámpara que cae del techo, desde una altura de 400 pues?. Si no se aparta, ¿cuál será la velocidad de la lámpara cuando le golpee? ¿A qué altura encontraba la lámpara cuando se desplazaba a la mitad de dicha velocidad?.

Respuesta.- Ya que $a = 32$, entonces

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 \;\Rightarrow\; 400 = \frac{32}{2}t^2 \;\Rightarrow\; t = 5 \text{ s}.$$

Luego,

$$s'(t) = (2\cdot 32\cdot 400)^{1/2} = 160 \text{ m/s}.$$

Por último para $s'(t) = 80$, tenemos

$$(80)^2 = 2\cdot 32\cdot s(t) \;\Rightarrow\; s(t) = 100 \text{ pies desde arriba}.$$

12 Suponga que en una carretera el límite de velocidad se especifica en cada punto. En otras palabras, existe una cierta función L tal que la velocidad límite a x millas desde el inicio de la carretera es $L(x)$. Dos automóviles, A y B, se desplazan por dicha carretera; la posición del automóvil A en el tiempo t es $a(t)$, y la del automóvil B es $b(t)$.

(a) ¿Qué ecuación expresa el hecho de que el automóvil A siempre se desplaza a la velocidad límite? (La respuesta no es $a'(t) = L(t)$.)

Respuesta.- La ecuación estará dada por,

$$a'(t) = L(x) = L\left[a(t)\right].$$

(b) Suponga que A siempre se desplaza a la velocidad límite, y que la posición de B en el tiempo t es la posición de A en el tiempo $t-1$. Demuestre que B también se desplaza en todo momento a la velocidad límite.

Demostración.- Sea $b(t) = a(t-1)$ y $L(x) = L\left[a(t)\right]$, entonces para B se tiene

$$b'(t) = L\left[b(t)\right] \quad \Rightarrow \quad a'(t-1) = L\left[a(t-1)\right].$$

Así, si $t-1$ es reemplazado por t, tenemos $a'(t) = L(t)$ el cual es cierto. Por lo que B se desplaza a la velocidad límite.

(c) Suponga, por el contrario, que B siempre se mantiene a una distancia constante por detrás de A. ¿En qué condiciones B se desplazará todavía en todo momento a la velocidad límite?.

Respuesta.- Sea $b(t) = a(t) - d$ para alguna constante $d > 0$, entonces dado $a'(t) = L\left[a(t)\right]$, se tiene

$$b'(t) = L\left[b(t)\right] \Rightarrow b'(t) = L\left[a(t) - d\right] = L\left[a(t)\right] = L\left[b(t) + d\right]$$

Esto es, B se desplaza a la velocidad límite, si L es una función periódica con periodo d.

13 Suponga que $f(a) = g(a)$ y que la derivada por la izquierda de f en a es igual a la derivada por la derecha de g en a. Defina $h(x) = f(x)$ para $x \leq a$, y $h(x) = g(x)$ para $x \geq a$. Demuestre que h es diferenciable en a.

Demostración.- Sea

$$\lim_{t \to 0+} \frac{h(a+t) - h(a)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{g(a+t) - g(a)}{t}$$

y

$$\lim_{t \to 0-} \frac{h(a+t) - h(a)}{t} = \lim_{t \to 0-} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}.$$

Y por el hecho de la existencia del límite por la derecha y por la izquierda entonces existe el límite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(a+t) - h(a)}{t}.$$

14 Sea $f(x) = x^2$ si x es racional, y $f(x) = 0$ si x es irracional. Demuestre que f es diferencial en 0.

Demostración.- Por definición,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 0}{h} = 0.$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0^+}\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0 = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

Entonces, f es diferencial en 0.

15 (a) Sea f una función tal que $|f(x)| \le x^2$ para todo x. Demuestre que f es diferenciable en el punto 0.

Demostración.- Tenemos que

$$|f(x)| \le x^2 \quad \Rightarrow \quad |f(0)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$

Ahora, vemos que

$$\left|\frac{f(h)}{h}\right| \le \frac{h^2}{|h|} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(h)}{h}\right| \le |h|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl}
\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h} & \le & \lim\limits_{h\to 0}|h| \\
\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h} & = & 0 \\
\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-0}{h} & = & 0 \\
\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{0} & = & 0 \\
f'(0) & = & 0
\end{array}$$

Así, ya que $f'(0)$ existe entonces f es diferencial en 0.

(b) Este resultado se puede generalizar si x^2 se sustituye por $|g(x)|$, en el caso de que g cumpla una determina propiedad. ¿Cuál?.

Respuesta.- Reemplacemos $x^2 = |g(x)|$ por lo que nos queda

$$|f(x)| \le |g(x)|.$$

Al ser f diferenciable en 0 entonces $f'(0)$ debe existir, por lo tanto

$$|g(x)| \ge |f(x)| \quad \Rightarrow \quad |g(0)| \ge |f(0)| \quad \Rightarrow \quad |g(0)| \ge 0.$$

Luego para g tan pequeño como se quiera,

$$|g(0)| = 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 0.$$

Además podemos observar,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(h)}{h}\right| &\leq \left|\frac{g(h)}{h}\right| \\
\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right| &\leq \lim_{h\to 0}\left|\frac{g(h)}{h}\right| \\
\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| &\leq \lim_{h\to 0}\left|\frac{g(h)-f(0)}{h}\right| \\
|f'(0)| &\leq |g'(0)| \\
0 &\leq |g'(0)| \\
|g'(0)| &\geq 0
\end{aligned}$$

Luego ya que $g'(0)$ podría ser lo más pequeño que se quiera, entonces

$$|g'(0)| = 0 \quad \Rightarrow \quad g'(0) = 0.$$

Por lo tanto f es diferenciable en 0 si se tiene,

$$g(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad g'(0).$$

16 Sea $\alpha > 1$. Si f satisface $|f(x)| \leq |x|^\alpha$, demuestre que f es diferenciable en 0.

Demostración.- Sea $|f(x)| \leq |x|^\alpha \;\Rightarrow\; -x^\alpha \leq f(x) \leq x^\alpha$ y $f(0) = 0$ entonces,

$$-h^{\alpha-1} \leq \frac{f(h)-f(0)}{h} \leq h^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad -h^\alpha \leq f(h) \leq h^\alpha.$$

Por lo que concluimos que f es diferencial en 0 y $f'(0) = 0$.

17 Sea $0 < \beta < 1$. Demuestre que si f satisface $|f(x)| \geq |x|^\beta$ y $f(0) = a$, entonces f no es diferenciable en 0.

Demostración.- Sea $|f(x)| \geq |x|^\beta \;\Rightarrow\; -x^\beta \leq f(x) \leq x^\beta$ y $f(0) = 0$ entonces,

$$-h^{\beta-1} \leq \frac{f(h)-f(0)}{h} \leq h^{\beta-1}.$$

Ya que $0 < \beta < 1$,, h^β será $\dfrac{1}{h^{1-\beta}}$, el cual tiende a ∞. Por lo tanto f no es diferenciable en 0.

18 Sea $f(x) = 0$ si x es irracional, y $1/q$ si $x = p/q$, fracción irreducible. Demuestre que f no es diferenciable en a para cualquier a.

Demostración.- Si a es racional, al no ser f continua en a será f derivable en a. Si $a = 0a_1a_2a_3\ldots$ es irracional y h es racional, entonces $a+h$ es irracional, co lo que $f(a+h) - f(a) = 0$. Pero si $h = -0.00\ldots 0a_{n+1}a_{n+2}\ldots$, entonces $a+h = 0a_1a_2\ldots a_n000\ldots$, con lo que $f(a+h) \geq 10^{-n}$, mientras que $|h| < 10^{-n}$, la cual hace que $|[f(a+h)-f(a)]/h| \geq 1$. Así pues, $[f(a+h)-f(a)/h]$ es 0 para valores de h tan pequeños como se quiera y tiene valores absolutos mayores que 1 también con h tan pequeño como se quiera, lo cual dice que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ no existe.

19 (a) Suponga que $f(a)=g(a)=h(a)$, que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ para todo x, y que $f'(a)=h'(a)$. Demuestre que g es diferenciable en a, y que $f'(a)=g'(a)=h'(a)$.

Demostración.- Ya que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ y $f(a)=g(a)=h(a)$, entonces

$$\begin{array}{rcccl}
f(x) & \leq & g(x) & \leq & h(x)\\
f(a+t) & \leq & g(a+t) & \leq & h(a+t)\\
\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t} & \leq & \dfrac{g(a+t)-g(a)}{t} & \leq & \dfrac{h(a+t)-h(a)}{t}\\
\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+t)f(a)}{t} & \leq & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(a+t)-g(a)}{t} & \leq & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(a+t)-h(a)}{t}\\
f'(a) & \leq & g'(a) & \leq & h'(a)
\end{array}$$

Luego sabemos que $f'(a)=h'(a)$ lo que implica $g'(a)$ existe y $f'(a)=g'(a)=h'(a)$. Por lo tanto g es diferenciable en a.

(b) Demuestre que la conclusión no es cierta si se omite la hipótesis $f(a)=g(a)=h(a)$.

Demostración.- Se dará un contraejemplo sin la condición $f(a)=g(a)=h(a)$.
Sea $f(x)=-1$, $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ y $h(x)=2$. Entonces

$$f(a)=-1,\quad g(a)=\frac{1}{1+e^{-a}},\quad h(a)=2.$$

Por lo que la conclusión no es cierta.

20 Sea f una función polinómica; veremos en el próximo capítulo que f es diferenciable. La recta tangente a f en $(a,f(a))$ es la gráfica $g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$. Por tanto, $f(x)-g(x)$ es la función polinómica $d(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$. Ya hemos visto que si $f(x)=x^2$, entonces $d(x)=(x-a)^2$, y si $f(x)=x^3$, entonces $d(x)=(x-a)^2(x-2a)$.

(a) Halle $d(x)$ cuando $f(x)=x^4$, y demuestre que es divisible por $(x-a)^2$.

Demostración.- Se tiene,

$$\begin{array}{rcl}
d(x) & = & f(x)-f(a)(x-a)-f(a)=x^4-4a^3(x-a)-a^4\\
 & = & x^4-4a^3x+3a^4\\
 & = & (x-a)(x^3+ax^2+a^2x-3a^3)
\end{array}$$

Por lo que $d(x)$ es divisible por $(x-a)^2$.

(b) Parece, ciertamente que $d(x)$ siempre sea divisible por $(x-a)^2$. En general, las rectas paralelas a la tangente cortan la gráfica de la función en dos puntos; la recta tangente corta a la gráfica sólo una vez cerca del punto, de manera que la intersección debería ser una doble intersección. Para dar una demostración riguroso, observe en primer lugar que

$$\frac{d(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Ahora responda las siguientes cuestiones. ¿Por qué $f(x)-f(a)$ es divisible por $(x-a)$? ¿Por qué existe una función polinómica h tal que $h(x) = d(x)/(x-a)$ para $x \neq a$? ¿Por qué el $\lim_{x\to a} h(x) = 0$? ¿Por qué $h(a)=0$? ¿Por qué esto resuelve el problema?.

Repuesta.- Tenemos $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$, entonces

$$d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$

También sabemos que

$$d(x) = [f(x)-f(a)] - f'(a)(x-a)$$

de donde $d(x)$ es divisible por $(x-a)^2$ lo que implica que $f(x)-f(a)$ es divisible por $(x-a)$. Así,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

es una función polinómica. Y por lo tanto la función h es un polinomio, como sigue

$$h(x) = \frac{d(x)}{x-a} \quad \Rightarrow \quad h(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$

para $x \neq a$. Ahora tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} h(x) &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right] \\
\lim_{x\to a} h(x) &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] - f'(a) \\
\lim_{x\to a} h(x) &= f'(a) - f'(a) \\
\lim_{x\to a} h(x) &= 0 \\
h(a) &= 0
\end{aligned}$$

Significa que h tiene a a como una raíz. Esto indica que $\dfrac{d(x)}{x-a}$ es divisible por $x-a$. Y así, $d(x)$ es divisible por $(x-a)^2$.

21 (a) Demuestre que $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Demostración.- Sean $h = x-a$, el hecho de que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$ y por un cambio infinitesimal $a \to a+h$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a+h}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
&= f'(a)
\end{aligned}$$

(b) Demuestre que las derivadas son una propiedad local: si $f(x) = g(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a, entonces $f'(a) = g'(a)$. (Esto significa que al calcular $f'(a)$, puede ignorarse a $f(x)$ para un determinado $x \neq a$. Evidentemente, ¡no! se puede ignorar a $f(x)$ para todos estos x simultáneamente.)

Demostración.- Se da f y g son iguales en un intervalo abierto que contiene a, entonces en el intervalo tenemos una pequeña cantidad $h \to 0$ como,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(a+h) &= \lim_{h\to 0} g(a+h)\\
\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] &= \lim_{h\to 0}[g(a+h)-g(a)]\\
\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]\\
f'(a) &= g'(a)
\end{aligned}$$

22 (a) Suponga que f es diferenciable en x. Demuestre que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

Demostración.- Sea $h = -h$ entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot\frac{-1}{-1} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

A continuación, sumamos la igualdad de la izquierda y de la derecha, como sigue

$$\begin{aligned}
f'(x)+f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right]\\
2f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right]\\
2f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\right]\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right]
\end{aligned}$$

(b) Demuestre, más generalmente, que

$$f'(x) = \lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}.$$

Aunque hasta ahora no habíamos encontrado expresiones como $\lim_{h,k\to 0}$, su significado debería ser claro para el lector, y por tanto debería ser capaz de formular la definición $\epsilon - \delta$ adecuada. Lo importante en este caso es que $\lim_{h,k\to 0}$, de manera que estamos considerando únicamente valores de h y k positivos.

Demostración.- Sea h suficientemente pequeño, entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right].$$

Similarmente, sea $k = -k$ sufientemente pequeño, entonces

$$f'(x) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x-k) - f(x)}{-k} \cdot \frac{-1}{-1} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x) - f(x-k)}{k}.$$

Ahora, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $0 < h < \delta$ y $0 < k < \delta$, entonces

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\epsilon < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) < \epsilon$$

$$\left|\frac{f(x) - f(x-k)}{k} - f(x)\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\epsilon < \frac{f(x) - f(x-k)}{k} - f(x) < \epsilon$$

Luego multiplicamos ambas desigualdades por $\frac{h}{h+k}$ y $\frac{k}{h+k}$. Aquí h y k son ambos positivos, ya que si no lo fuesen $\frac{h}{h+k}$ y $\frac{k}{h+k}$ podrían ser muy grandes, esto eligiendo $k \approx -h$.

$$-\epsilon \cdot \frac{h}{h+k} < \frac{h}{h+k}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{h+k} \cdot f'(x) < \epsilon \cdot \frac{h}{h+k}$$

$$-\epsilon \cdot \frac{k}{h+k} < \frac{k}{h+k}\frac{f(x) - f(x-k)}{k} - \frac{k}{h+k} \cdot f'(x) < \epsilon \cdot \frac{k}{h+k}$$

Sumando las desigualdades, obtenemos

$$-\epsilon < \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k} - f'(x) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x+h) - f(x-k)}{k+h} - f'(x)\right| < \epsilon$$

Por lo tanto

$$f'(x) = \lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}.$$

23 Demuestre que si f es par, entonces $f'(x) = -f'(-x)$. (Para evitar al máximo la confusión, sea $g(x) = f(-x)$; hállese $g'(x)$ y luego recuerde que otra cosa es g.)

Demostración.- Sea $g(x) = f(-x)$. Por el hecho de que $g(x) = f(cx) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = cf'(cx)$, se sigue

$$g(x) = f(-x) \;\Rightarrow\; g'(x) = -f'(-x)$$

Luego ya que f es par entonces $g(x) = f(-x) = f(x)$ que implica $g'(x) = f'(x)$. Por lo tanto

$$f'(x) = -f'(-x).$$

24 Demuestre que si f es impar, entonces $f'(x) = f'(-x)$.

Demostración.- Si $g(x) = f(-x)$, entonces $g'(x) = -f'(-x)$; esto ya que $g(x) = f(cx) \Rightarrow g'(x) = cf'(cx)$. Luego sabemos que f es impar, es decir, $g(x) = -f(-x) = -f(x)$ lo que implica que $g'(x) = -f'(x)$. Por lo tanto,

$$-f'(x) = -f'(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f'(-x).$$

25 En los problemas 23 y 24 se afirma que f' es par si f es impar e f' es impar si f es par. Por tanto, ¿qué puedo afirmar de $f^{(k)}$?.

Respuesta.- $f^{(k)}$ es par si f es impar y k también es impar. $f^{(k)}$ es par si f es impar y k es par y $f^{(k)}$ es par si f es par y k es impar.

26 Halle $f''(x)$ si

(i) $f(x) = x^3$.

Respuesta.- $f'(x) = 3x^2 \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x$.

(ii) $f(x) = x^5$.

Respuesta.- $f'(x) = 5x^4 \quad \text{y} \quad f''(x) = 20x^3$.

(iii) $f'(x) = x^4$.

Respuesta.- $f''(x) = 4x^3$.

(iv) $f(x+3) = x^5$.

Respuesta.- $f'(x+3) = 5(x+3)^4, \quad \text{y} \quad f''(x+3) = 20(x+3)^3$.

27 Si $S_n = x^n$ y $0 \leq k \leq n$, demuestre que

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = k!\binom{n}{k}x^{n-k}.$$

Demostración.- La prueba la realizaremos por inducción. Para comprender mejor verificaremos si se cumple la ecuación para $k = 0$, $k = 2$ y $k = 2$,

$$
\begin{array}{rcccl}
S_n^{(0)}(x) & = & \dfrac{n!}{(n-0)!}x^{n-0} & = & x^n \\
S_n^{(1)}(x) & = & \dfrac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} & = & nx^{n-1} \\
S_n^{(2)}(x) & = & \dfrac{n!}{(n-2)!}x^{n-2} & = & n(n-1)x^{n-2}
\end{array}
$$

En otras palabras podemos suponer que la fórmula dada puede encontrar la función sin derivar, la primera y segunda derivada.

Ahora, establecemos la hipótesis, para k

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

si derivamos una vez más, entonces para $k+1$ se tiene

$$
\begin{array}{rcl}
S_n^{(k+1)}(x) & = & \dfrac{n!(n-k)}{(n-k)!}x^{n-k-1} \\
 & = & \dfrac{n!}{(n-k-1)!}x^{n-(k+1)} \\
 & = & \dfrac{n!}{[n-(k+1)]!}x^{n-(k+1)}.
\end{array}
$$

El cual se cumple para $k+1$, por lo tanto

$$S_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

28 (a) Halle $f'(x)$ si $f(x) = |x|^3$. Halle $f''(x)$. ¿Existe $f'''(x)$ para todo x?.

Respuesta.- Dada la función $f(x) = |x|^3$ tenemos,

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0 \\ -6x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, & x > 0 \\ -6, & x < 0 \end{cases}$$

Además, $f'(0) = f''(0) = 0$. Pero $f'''(0)$ no existe. Por tanto $f'''(x)$ no existe para todo x.

(b) Analice f de manera similar si $f(x) = x^4$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -x^4$ para $x \leq 0$.

Respuesta.- Dada la función $f(x) = |x|^4$ tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \begin{cases} x^4, & x \geq 0 \\ -x^4, & x \leq 0 \end{cases} \\ \\ f'(x) & = & \begin{cases} 4x^3, & x \geq 0 \\ -4x^3, & x \leq 0 \end{cases} \\ \\ f''(x) & = & \begin{cases} 12x^2, & x \geq 0 \\ -12x^2, & x \leq 0 \end{cases} \\ \\ f'''(x) & = & \begin{cases} 24x, & x \geq 0 \\ -24x, & x \leq 0 \end{cases} \\ \\ f''''(x) & = & \begin{cases} 24, & x \geq 0 \\ -24, & x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

Y Además $f'(0) = f''(0) = 0$. Pero $f'''(0)$ no existe. Por tanto $f'''(x)$ no existe para todo x.

29 Sea $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$ y sea $f(x) = 0$ para $x \leq 0$. Demuestre que f^{n-1} existe (y encuentre una fórmula que la describa), pero que $f^{(n)}$ no existe.

Demostración.- La función esta dada como,

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & x^n & \text{para } x \geq 0 \\ f(x) & = & 0 & \text{para } x \leq 0 \end{array}$$

Luego para $0 \leq k \leq n-1$ se tiene,

$$\begin{array}{rcll} f^{(k)}(x) & = & \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{para } x \geq 0 \\ f^{(k)}(x) & = & 0 & \text{para } x < 0 \end{array}$$

de donde para $n-1$ obtenemos,

$$\begin{array}{rcll} f^{(n-1)}(x) & = & n!x & \text{para } x \geq 0 \\ f^{(n-1)}(x) & = & 0 & \text{para } x < 0 \end{array}$$

pero para $f^n(0)$

$$\begin{array}{rcll} f^{(n)}(0) & = & n! & \text{para } x \geq 0 \\ f^{(n)}(0) & = & 0 & \text{para } x < 0 \end{array}$$

no existe. Ya que $\lim\limits_{h \to 0^+} n! \cdot \dfrac{h}{h} = n!$, mientras que $\lim\limits_{h \to 0^-} 0 \cdot \dfrac{h}{h} = 0$.

30 Interprete las siguientes expresiones en las que se utiliza la notación de Leibniz; cada una de ellas es una nueva definición de un hecho ya considerado en un problema previo.

(i) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$f'(a) = na^{n-1}, \text{ si } f(x) = x^n.$$

(ii) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ si $z = \dfrac{1}{y}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}, \text{ si } f(y) = \frac{1}{y}.$$

(iii) $\dfrac{d[f(x)+c]}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(a) = f'(a), \text{ si } g(x) = f(x) + c.$$

(iv) $\dfrac{d[cf(x)]}{dx} = c\dfrac{df(x)}{dx}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(a) = cf'(a), \text{ si } g(x) = cf(x).$$

(v) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$ si $z = y + c$.

Respuesta.- La expresión significa que, si $\dfrac{d(y+c)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$, entonces

$$g'(a) = f'(a), \text{ si } g(x) = f(x) + c.$$

(vi) $\left.\dfrac{dx^3}{dx}\right|_{x=a^2} = 3a^4$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$f'(a) = 3a^4, \text{ si } f(x) = x^3.$$

(vii) $\left.\dfrac{df(x+a)}{dx}\right|_{x=b} = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=b+a}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(b) = f'(b+a), \text{ si } g(x) = f(x+a).$$

(viii) $\left.\dfrac{df(cx)}{dx}\right|_{x=b} = c\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=cb}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(b) = cf'(cb), \text{ si } g(x) = f(cx).$$

(ix) $\dfrac{df(cx)}{dx} = c\dfrac{df(y)}{dy}\bigg|_{y=cx}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$g'(ab) = cf'(cb), \text{ si } g(x) = f(cx).$$

(x) $\dfrac{d^k x^n}{dx^k} = k!\dbinom{n}{k}x^{n-k}$.

Respuesta.- La expresión significa que,

$$f^{(k)}(a) = k!\binom{n}{n}a^{n-k}, \text{ si } f(x) = x^n.$$

10

Diferenciación

Teorema 10.1 Si f es una función constante, $f(x) = c$, entonces

$$f'(a) = 0 \text{ para todo número } a.$$

Demostración.-

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(c+h) - c}{h} = 0.$$

■

Teorema 10.2 Si f es la función identidad, $f(x) = x$, entonces

$$f'(a) = 1 \text{ para todo número } a.$$

Demostración.-

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

■

Teorema 10.3 Si f y g son diferencibles en a, entonces $f + g$ es también diferenciable en a, y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-[f(a)+g(a)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a)+g'(a).
\end{aligned}$$

■

Teorema 10.4 Si f y g son diferenciables en a, entonces $f\cdot g$ es también diferenciable en a, y

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)\,(g(a+h)-g(a))}{h}+\frac{(f(a+h)-f(a))\,g(a)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}f(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(a) \\
&= f(a)\cdot g'(a)+f'(a)\cdot g(a).
\end{aligned}$$

Observemos que hemos utilizado el hecho de que $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)-f(a)=0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$. ■

Teorema 10.5 Si $f(x)=cf(x)$ y f es diferenciable en a, entonces g es diferenciable en a, y

$$g'(a) = c\cdot f'(a).$$

Demostración.- Si $h(x)=c$, de manera que $g=h\cdot f$, entonces,

$$\begin{aligned}
g'(a) &= (h\cdot f)'(a) \\
&= h(a)\cdot f'(a)+h'(a)\cdot f(a) \\
&= c\cdot f'(a)+0\cdot f(a) \\
&= c\cdot f'(a).
\end{aligned}$$

En particular, $(-f)'(a)=-f'(a)$, por tanto $(f-g)'(a)=(f+[-g])'\,(a)=f'(a)-g'(a)$. ■

Teorema 10.6 Si $f(x) = x^n$ para algún número natural n, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{ para todo número } a.$$

Demostración.- La demostración la haremos por inducción sobre n. Para $n = 1$ se aplica simplemente el teorema 2. Supongamos ahora que el teorema es cierto para n, de manera que si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(a) = na^{n-1} \text{ para todo } a.$$

Sea $g(x) = x^{n+1}$. Si $I(x) = x$, la ecuación $x^{n+1} = x^n \cdot x$ se puede escribir como

$$g(x) = f(x) \cdot I(x) \text{ para todo } x.$$

así, $g = f \cdot I$. A partir del teorema 4 deducimos que

$$\begin{array}{rcl} g'(a) & = & (f \cdot I)'(a) \\ & = & f'(a) \cdot I(a) + f(a) \cdot I'(a) \\ & = & na^{n-1} \cdot a + a^n \cdot 1 \\ & = & na^n + a^n \\ & = & (n+1)a^n, \text{ para todo } a. \end{array}$$

Este es precisamente el caso $n + 1$ que queríamos demostrar.
Si $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ para algún número natural n, entonces

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1};$$

así es válido tanto para enteros positivos como negativos. Si interpretamos $f(x) = x^0$ como $f(x) = 1$ y $0 \cdot x^{-1}$ como $f'(x) = 0$, entonces se verifica también para $n = 0$.

■

Teorema 10.7 Si g es diferenciable en a y $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es diferenciable en a, y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Demostración.- Incluso antes de escribir

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h}$$

debemos asegurarnos que esta expresión tiene sentido; es necesario comprobar que $(1/g)(a+h)$ está definido para valores suficientemente pequeños de h. Para ello son necesarias solamente dos observaciones. Como g es, por hipótesis, diferenciable en a, se deduce del teorema 9-1 que g es continua en a. Como $g(a) \neq 0$, deducimos también, a partir del teorema 6-3, que existe un $\delta > 0$ tal que $g(a+h) \neq 0$ para $|h| < \delta$. Por tanto, $(1/g) = (a+h)$ tiene sentido para valores de h suficientemente pequeños, y así podemos escribir

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h\left[g(a)\cdot g(a+h)\right]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\left[g(a+h) - g(a)\right]}{h} \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\left[g(a+h) - g(a)\right]}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a)\cdot g(a+h)} \\
&= -g'(a) \cdot \frac{1}{\left[g(a)\right]^2}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 10.8 Si f y g son diferenciables en a y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en a, y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)\cdot f'(a) - f(a)\cdot g'(a)}{\left[g(a)\right]^2}$$

Demostración.- Como $f/g = f\cdot(1/g)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{\left[g(a)\right]^2} \\
&= \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{\left[g(a)\right]^2}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 10.9 **Regla de la cadena.** Si g es diferenciable en a y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f\circ g$ es diferenciable en a y

$$(f\circ g)'(a) = f'\left[g(a)\right]\cdot g'(a).$$

Demostración.- Definamos una función ϕ de la manera siguiente:

$$\phi(h) = \begin{cases} \dfrac{f\left[g(a+h)\right] - f\left[g(a)\right]}{g(a+h) - g(a)}, & \text{si } g(a+h) - g(a) \neq 0 \\[2ex] f'\left[g(a)\right], & \text{si } g(a+h) - g(a) = 0. \end{cases}$$

Se intuye fácilmente que ϕ es continua en 0: cuando h es pequeño, $g(a+h)-g(a)$ también es pequeño, de manera que si $g(a+h)-g(a)$ no es 0, entonces $\phi(h)$ se aproximará a $f'[g(a)]$; y si es 0 entonces $\phi(h)$ es igual a $f'[g(a)]$, lo que es mejor todavía. Ya que la continuidad de ϕ es el punto crucial de toda la demostración, vamos a desarrollar rigurosamente este argumento intuitivo.
Sabemos que f es diferenciable en $g(a)$. Esto significa que

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}=f'(g(a)).$$

Así, si $\epsilon>0$ existe algún número $\delta'>0$ tal que, para todo k,

$$\text{si } 0<|k|<\delta', \text{ entonces } \left|\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}-f'(g(a))\right|<\epsilon.$$

Pero g es diferenciable en a y por lo tanto continua en a, de manera que existe un $\delta>0$ tal que para todo h,

$$\text{si } |h|<\delta, \text{ entonces } |g(a+h)-g(a)|<\delta'$$

Consideremos ahora cualquier h con $|h|<\delta$. Si $k=g(a+h)-g(a)\neq 0$, entonces

$$\phi(h)=\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k};$$

se deduce que $|k|<\delta'$, y por tanto deducimos que

$$|\phi(h)-f'(h(a))|<\epsilon.$$

Por otro lado, si $g(a+h)-g(a)=0$, entonces $\phi(g)=f'(g(a))$, de manera que se verifica ciertamente que

$$|\phi(h)-f'(g(a))|<\epsilon.$$

Por tanto hemos demostrado que

$$\lim_{h\to 0}\phi(h)=f'(g(a)),$$

o sea que ϕ es continua en 0. El resto de la demostración es fácil. Si $h\neq 0$, entonces tenemos

$$\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}=\phi(h)\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

incluso aunque $g(a+h)-g(a)=0$ (ya que en este caso ambos miembros de la igualdad son iguales a 0). Por tanto

$$(f\circ g)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}\lim_{h\to 0}\phi(h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

■

10.1 Problemas

1. Como ejercicio de precalentamiento, halle $f'(x)$ para cada una de las siguientes f. (No se preocupe por el dominio de f o de f'; obtenga tan sólo una fórmula para $f'(x)$ que dé la respuesta correcta cuando tenga sentido.)

(i) $f(x)=\operatorname{sen}(x+x^2)$.

Respuesta.- $f'(x)=\cos(x+x^2)\cdot(1+2x)$.

(ii) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x^2$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos x + \cos(x^2) \cdot 2x$.

(iii) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos(\cos x) \cdot (-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x \cos(\cos x)$.

(iv) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x = \cos x \cos(\operatorname{sen} x)$.

(v) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos\left(\dfrac{\cos x}{x}\right) \cdot \dfrac{-x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$.

(vi) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{x}$.

Respuesta.- $f'(x) = \dfrac{\cos(\cos x) \cdot (-\operatorname{sen} x)}{x^2} = -\dfrac{\operatorname{sen} x \cos(\cos x)}{x^2}$.

(vii) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos(x + \operatorname{sen} x) \cdot (1 + \cos x)$.

(viii) $f(x) = \operatorname{sen}[\cos(\operatorname{sen} x)]$.

Respuesta.- $f'(x) = \cos[\cos(\operatorname{sen} x)]\,[-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cos x]$.

2. Halle $f(x)$ para cada una de las siguientes funciones f. (El autor tardó 20 minutos en calcular las derivadas para la sección de soluciones, y al lector no debería costarle mucho más tiempo calcularlas. Aunque la rapidez en los cálculos no es un objetivo de las matemáticas, si se desea tratar con aplomo las aplicaciones teóricas de la Regla de la Cadena, estas aplicaciones concretas deberían ser un juego de niños; a los matemáticos les gusta hacer ver que ni siquiera saben sumar, pero la mayoría pueden hacerlo cuando lo necesitan.)

(i) $f(x) = \operatorname{sen}\left[(x+1)^2(x+2)\right]$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left[(x+1)^2(x+2)\right] \cdot \left[2(x+1)(x+2) + (x+1)^2\right] \\ &= (x+1)(3x+5)\cos\left[(x+1)^2(x+2)\right]. \end{aligned}$$

(ii) $f(x) = \operatorname{sen}^3\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right)$.

Respuesta.- $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) \cdot \cos\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) \cdot (2x + \cos x)$.

(iii) $f(x) = \operatorname{sen}^2\left[(x + \operatorname{sen} x)^2\right]$.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2\operatorname{sen}\left[(x+\operatorname{sen} x)^2\right]\cos\left[(x+\operatorname{sen} x)^2\right]\cdot 2(x+\operatorname{sen} x)(1+\cos x) \\ & = & 4(1+\cos x)(x+\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}\left[(x+\operatorname{sen} x)^2\right]\cos\left[(x+\operatorname{sen} x)^2\right] \end{array}$$

(iv) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \cos\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)\cdot\dfrac{3x^2\cos\left(x^3\right) - x^3\left[-\operatorname{sen}\left(x^3\right)\right]3x^2}{\cos^2\left(x^3\right)} \\ \\ & = & \cos\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)\cdot\dfrac{3x^2\cos\left(x^3\right) + x^3\operatorname{sen}\left(x^3\right)3x^2}{\cos^2\left(x^3\right)} \end{array}$$

(v) $f(x) = \operatorname{sen}(x\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen} x^2\right)$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \cos(x\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x + x\cos x + \cos\left(\operatorname{sen} x^2\right)\cos\left(x^2\right)2x.$$

(vi) $f(x) = f(x) = (\cos x)^{31^2}$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = -\left(31^2 - 1\right)(\cos x)^{31^2-1}\operatorname{sen} x.$$

(vii) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen} x^2\operatorname{sen}^2 x^2$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen}\left(x^2\right)\operatorname{sen}^2\left(x^2\right) + \operatorname{sen}^2 x\left[\cos\left(x^2\right)2x\operatorname{sen}^2\left(x^2\right)\right. \\ & + & \left.\operatorname{sen}\left(x^2\right)2\operatorname{sen}\left(x^2\right)\cos\left(x^2\right)2x\right] \\ & = & 2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen}\left(x^2\right)\operatorname{sen}^2\left(x^2\right) + 2x\operatorname{sen}^2 x\cos\left(x^2\right)\operatorname{sen}^2\left(x^2\right) \\ & + & 4x\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2\left(x^2\right)\cos\left(x^2\right). \end{array}$$

(viii) $f(x) = \operatorname{sen}^3\left[\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)\right]$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = 3\operatorname{sen}^2\left[\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)\right]\cos\left[\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)\right]2\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos(\operatorname{sen} x)\cos x.$$

(ix) $f(x) = \left(x + \operatorname{sen}^5 x\right)^6$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = 6\left(x + \operatorname{sen}^5 x\right)\left[1 + 5\operatorname{sen}^4 x \cos x\right].$$

(x) $f(x) = \operatorname{sen}\left[\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))\right]$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \cos\left(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))\right)\cdot\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))\cdot\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))\cdot\cos(\operatorname{sen} x)\cdot\cos x.$$

(xi) $f(x) = \operatorname{sen}\left[(\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7\right]$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \cos\left[\left(\operatorname{sen}^7 x^7 + 1\right)^7\right]\cdot 7\left(\operatorname{sen}^7 x^7 + 1\right)^6\cdot 7\operatorname{sen}^6 x^7\cdot\cos x^7\cdot 7x^6.$$

(xii) $f(x) = \left\{\left[\left(x^2 + x\right)^3 + x\right]^4 + x\right\}^5$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = 5\left[\left(x^2 + x\right)^3 + x\right]^4\cdot\left\{1 + 4\left[\left(x^2 + x\right)^3 + x\right]^3\left[1 + 3\left(x^2 + x\right)^2(1 + 2x)\right]\right\}.$$

(xiii) $f(x) = \operatorname{sen}\left[x^2 + \operatorname{sen}\left(x^2 + \operatorname{sen}^2 x\right)\right]$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x) = \cos\left[x^2 + \operatorname{sen}\left(x^2 + \operatorname{sen} x^2\right)\right]\cdot\left[2x + \cos\left(x^2 + \operatorname{sen} x^2\right)\cdot\left(2x + 2x\cos x^2\right)\right].$$

(xiv) $f(x) = \operatorname{sen}\left\{6\cos\left[6\operatorname{sen}\left(6\cos 6x\right)\right]\right\}$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos\left\{6\cos\left[6\operatorname{sen}\left(6\cos 6x\right)\right]\right\}\cdot\left\{-6\operatorname{sen}\left[6\operatorname{sen}(6\operatorname{sen} 6x)\right]\right\}\cdot 6\cos(6\operatorname{sen} 6x)\cdot 6[-\operatorname{sen}(6x)]\cdot 6.\\
&= 6^4\cos\left\{6\cos\left[6\operatorname{sen}\left(6\cos 6x\right)\right]\right\}\cdot\operatorname{sen}\left[6\operatorname{sen}(6\operatorname{sen} 6x)\right]\cdot\cos(6\operatorname{sen} 6x)\cdot[-\operatorname{sen}(6x)]\cdot.
\end{aligned}$$

(xv) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen} x}$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[\operatorname{sen}\left(x^2\right)2x\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}\left(x^2\right)2\operatorname{sen} x\cos x\right]\cdot(1+\operatorname{sen} x)-\operatorname{sen}\left(x^2\right)\operatorname{sen}^2 x\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{\left[2x\operatorname{sen}\left(x^2\right)\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen}\left(x^2\right)\operatorname{sen} x\cos x\right]\cdot(1+\operatorname{sen} x)-\operatorname{sen}\left(x^2\right)\operatorname{sen}^2 x\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} \end{aligned}$$

(xvi) $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x+\operatorname{sen} x}}$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x)=\frac{-\left[1-\dfrac{-2(1+\cos x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}\right]}{\left(x-\dfrac{2}{x+\operatorname{sen} x}\right)^2}$$

(xvii) $f(x)=\operatorname{sen}\left[\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right]$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$f'(x)=\cos\left[\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right]\cdot\left[\frac{3x^2\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)-x^3\cdot\cos\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)\cdot\dfrac{3x^2\cdot\operatorname{sen} x-x^3\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right].$$

(xviii) $f(x)=\operatorname{sen}\left[\dfrac{x}{x-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)}\right]$.

Respuesta.- Aplicando las reglas de derivada se tiene,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \cos\left[\frac{x}{x-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)}\right]\cdot \\
&\quad \frac{\left[x-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)\right]-x\left[1-\cos\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)\cdot\dfrac{(x-\operatorname{sen} x)-x(1-\cos x)}{(x-\operatorname{sen} x)^2}\right]}{\left[x-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)\right]^2}
\end{aligned}
$$

3. Halle las derivadas de las funciones tan, cotan, sec, cosec. (No es necesario memorizar estas fórmulas, aunque se necesitarán de vez en cuando; si se expresan las soluciones de manera correcta, resultan sencillas y algo simétricas.)

Respuesta.- Sea $f(x)=\tan x=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces

$$f'(x)=\frac{\cos x\cos x-\operatorname{sen}(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

Sea $f(x)=\operatorname{cotan} x=\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, entonces

$$f'(x)=\frac{-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} x-\cos x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=\operatorname{cosec}^2 x.$$

Sea $f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}=\cos^{-1} x$, entonces

$$f'(x)=-\cos^{-2} x\cdot(-\operatorname{sen} x)=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x.$$

Sea $f(x)=\operatorname{cosec}=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}=\operatorname{sen}^{-1} x$, entonces

$$f'(x)=-\operatorname{sen}^{-2} x\cdot\cos x=-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{cosec} x\operatorname{cotan} x.$$

4. Para cada una de las siguientes funciones f, halle $f'(f(x))$ no $(f\circ f)(x)$.

(i) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

Respuesta.- Sea $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, entonces

$$f'\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^2}=-\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^2.$$

(ii) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Se tiene $f'(\operatorname{sen} x) = \cos(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$.

(iii) $f(x) = x^2$.

Respuesta.- Se tiene $f'\left(x^2\right) = 2x = 2x^2$.

(iv) $f(x) = 17$.

Respuesta.- Se tiene $f'(17) = 0$.

5. Para cada una de las siguientes funciones f, halle $f\left[f'(x)\right]$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Respuesta.- Sea $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, entonces $f\left[f'(x)\right] = f\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{x^2}} = -x^2$.

(ii) $f(x) = x^2$.

Respuesta.- Sea $f'(x) = 2x$, entonces $f'\,(2x) = (2x)^2 = 4x^2$.

(iii) $f(x) = 17$.

Respuesta.- Sea $f'(17) = 0$, entonces $f'\,(17) = 17$

(iv) $f(x) = 17x$.

Respuesta.- Sea $f'(17x) = 17$, entonces $f'\,(17) = 17 \cdot 17 = 289$.

6. Halle f' en función de g' si

(i) $f(x) = g(x + g(a))$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'\left[x + g(a)\right] \cdot \left[x + g(a)\right]' = g'\left[x + g(a)\right].$$

(ii) $f(x) = g(x \cdot g(a))$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'\left[x \cdot g(a)\right] \cdot \left[x \cdot g(a)\right]' = g'\left[x \cdot g(a)\right] \cdot g(a).$$

(iii) $f(x) = g(x + g(x))$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'\left[x + g(x)\right]\left[x + g(x)\right]' = g'\left[x + g(x)\right]\left[1 - g'(x)\right].$$

(iv) $f(x) = g(x)(x - a)$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'(x)(x - a) + g'(x).$$

(v) $f(x) = g(a)(x - a)$.

Respuesta.- Por las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = g'(a)(x - a) + g(a)(x - a)' = g(a).$$

(vi) $f(x + 3) = g\left(x^2\right)$.

Respuesta.- Sea $z = x + 3 \;\Rightarrow\; x = z - 3$, entonces

$$f'(z) = g'\left[(z-3)^2\right] \cdot \left[(z-3)^2\right]' = g'\left[(z-3)^2\right](2(z-3) = 2g'\left[(z-3)^2\right](z-3).$$

7. (a) Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera no especificada, pero se sabe que cuando el radio es 6, la tasa de variación del mismo es 4. Halle la tasa de variación del área cuando el radio es 6. (Si $r(t)$ y $A(t)$ representan el radio y el área en el tiempo t, entonces las funciones r y A satisfacen $A = \pi r^2$; tan sólo es necesario aplicar directamente la Regla de la Cadena.)

Respuesta.- Encontrando la primera derivada con respecto de t para se tiene,

$$A'(t) = 2\pi r \cdot r'(t)$$

Dado que $r'(t) = 4$ cuando $r = 6$, entonces

$$A'(6) = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi.$$

(b) Suponga que el objeto circular que hemos estado observando es la sección transversal de un objeto esférico. Halle la tasa de variación del volumen cuando el radio es 6. (Es necesario conocer la fórmula del volumen de una esfera; en caso de que el lector la haya olvidado, el volumen es $\frac{4}{3}\pi$ veces el cubo del radio.)

Respuesta.- Encontrando la primera derivada con respecto de t para se tiene,

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot r'(t)$$

Dado que $r'(t) = 4$ cuando $r = 6$, entonces

$$V'(6) = 4\pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 576\pi.$$

(c) Suponga ahora que la tasa de variación del área de la sección transversal circular es 5 cuando el radio es 3. Halle la tasa de variación del volumen cuando el radio es 3. Este problema se puede resolver de dos maneras: primero, utilizando las fórmulas del área y el volumen en función del radio; y después expresando el volumen en función del área (para utilizar este método se necesita el Problema 9-3).

Respuesta.- Sabemos que

$$A'(t) = 2\pi r r'(t)$$

y $A' = 5$ cuando $r = 3$, entonces

$$5 = 2\pi 3 r'$$

Luego dividimos ambos lados por 6π, de donde

$$r' = \frac{5}{6\pi}.$$

Sustituyendo el valor de r y r' nos queda

$$V'8t) = 4\pi r^2 r'(t) \quad \Rightarrow \quad V' = 4\pi \cdot 3^2 \cdot \frac{5}{6\pi} = 30.$$

8. El área entre dos círculos concéntricos variables vale siempre $9\pi\ cm^2$. La tasa de cambio del área del círculo mayor es de $10\pi\ cm^2/seg$. ¿A qué velocidad varía la circunferencia del círculo pequeño cuando su área es de $16\pi cm^2$?.

Respuesta.- Sea r_1 y r_2 que representa el radio de de los círculos más pequeños y más grandes respectivamente. El área entre los dos círculos está dada por:

$$A = \pi\left[(r_2)^2 - (r_1)^2\right]$$

Reemplacemos A con 9π, de donde

$$9\pi = \pi\left[(r_2)^2 - (r_1)^2\right] \quad \Rightarrow \quad (r_2)^2 - (r_1)^2 = 9$$

Derivando tenemos,

$$2r_2 r'^2 - 2r_1 r_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2' = \frac{r_1}{r_2} r_1' \qquad (1)$$

Por otro lado el área del circulo mayor es dado por,

$$A_2 = \pi(r_2)^2$$

Derivando se tiene,

$$A_2' = 2\pi r_2 r_2'$$

Dada que la tasa de cambio del área del circulo más grande es 10π, entonces

$$10\pi = 2\pi r_2 r_2' \quad \Rightarrow \quad r_2' = \frac{5}{r_2} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2),

$$\frac{5}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} r_1' \quad \Rightarrow \quad r_1' = \frac{5}{r_1}.$$

El área del circulo pequeño es dada por,

$$A_1 = \pi (r_1)^2$$

reemplazando A_1 con 16π,

$$16\pi = \pi (r_1)^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 4$$

Por lo tanto

$$r_1' = \frac{5}{4}.$$

Así la circunferencia del circulo pequeño es,

$$C' = 2\pi r_1' \quad \Rightarrow \quad C' = 2\pi \frac{5}{4} = \frac{5}{2}\pi.$$

9. Una partícula A se desplaza a lo largo del eje horizontal positivo, y una partícula B a lo largo de la gráfica de $f(x) = -\sqrt{3}x,\ x \leq 0$. En un momento dado, A se encuentra en el punto $(5,0)$ y se desplaza a una velocidad de 3 unidades del origen y se desplaza a una velocidad de 4 unidades/seg. ¿Cuál es la tasa de variación de la distancia entre A y B?.

Respuesta.- Sean x_1 la coordenada el eje x de A y x_2 representa el eje x de B en el momento t y el eje y de B en el momento t es $-\sqrt{3}x_2$.
La distancia d entre A y B puede ser calculado usando el teorema de Pitágoras como,

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (-\sqrt{3}x_2)^2$$

Derivando con respecto t es,

$$2d \cdot d' = 2(x_1 - x_2)(x_1' - x_2') + 2(-\sqrt{3}x_2)x_2' \quad \Rightarrow \quad d \cdot d' = (x_1 - x_2)(x_1' - x_2') + (-\sqrt{3}x_2)x_2' \tag{1}$$

La distancia entre B y el origen es

$$s = \sqrt{x_2^2 + (-\sqrt{3}x_2)^2} = 2x_2$$

Derivando con respecto t es,

$$s' = 2x_2' \quad \Rightarrow \quad x_2' = \frac{1}{2}s'.$$

En el momento dado cuando B es 3 unidades desde el origen se tiene $3 = 2x_2$. Ya que $x_2 \leq 0$, entonces

$$x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Reemplazando $x_1 = 5$, $x_2 = -\dfrac{3}{2}$, $x_1' = 3$, $x_2' = \dfrac{1}{2}$, $s' = -2$ y $d = \sqrt{(5 + \frac{3}{2})^2 + (-\sqrt{3}\frac{3}{2})^2} = 7$ en (1) se tiene,

$$7d' = \left(5 + \frac{3}{2}\right)(3+2) + \left(-\sqrt{3}\frac{-3}{2}\right)(-2) = 27.3 \quad \Rightarrow \quad d' = 3.9.$$

10. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Supongamos también que h y k son dos funciones tales que

$$h'(x) = \operatorname{sen}^2 [\operatorname{sen}(x+1)] \qquad k'(x) = f(x+1)$$
$$h(0) = 3 \qquad k(0) = 0$$

Halle

(i) $(f \circ h)'(0)$.

Respuesta.- Se tiene,

$$\begin{aligned} (f \circ h)'(0) &= f'[h(0)]\, h'(0) = f'(3)h'(0) \\ &= \left[2 \cdot 3 \operatorname{sen} \frac{1}{3} + 3^2 \cos \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3^2}\right)\right] \cdot \operatorname{sen}^2 [\operatorname{sen}(0+1)] \\ &= \left(6 \operatorname{sen} \frac{1}{3} - \cos \frac{1}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}^2 [\operatorname{sen}(1)] \end{aligned}$$

(ii) $(k \circ f)'(0)$.

Respuesta.- Sea $f(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} (k \circ f)'(0) &= k'[f(0)] \cdot f'(0) \\ &= f(0+1) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(iii) $\alpha'\left(x^2\right)$, donde $\alpha(x) = h\left(x^2\right)$. Ir con mucho cuidado en la resolución de este apartado.

Respuesta.- Sea

$$\alpha'(x) = \left[h\left(x^2\right)\right]' = h'\left(x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' = \operatorname{sen}^2\left[\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)\right] \cdot 2x$$

Así, para $\alpha'\left(x^2\right)$ se tiene,

$$\alpha'\left(x^2\right) = 2x^2 \operatorname{sen}^2 \left\{\operatorname{sen}\left[\left(x^2\right)^2 + 1\right]\right\} = 2x^2 \operatorname{sen}^2 \left[\operatorname{sen}\left(x^4+1\right)\right].$$

11. Halle $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

y

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

Respuesta.- Por definición se tiene,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{h}.$$

Ya que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 0} g(x) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0 = f'(0).$$

12. Utilizando la derivada de $f(x) = 1/x$, tal como se ha hallado en el problema 9-1, calcule $(1/g)'(x)$ mediante la regla de la cadena.

Respuesta.- Sea $\dfrac{1}{g} = f[g] = f \circ g$, por la regla de la cadena se tiene,

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = \frac{-1}{[g(x)]^2} \cdot g'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

13. (a) Aplicando el problema 9-3, halle $f'(x)$ para $-1 < x < 1$, si $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Respuesta.- Sabiendo que $f(x) = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ y la regla de la cadena se tiene,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(b) Demuestre que la tangente a la gráfica de f en $\left(a, \sqrt{1 - a^2}\right)$ corta a la gráfica solamente en este punto (y así demuestre que la definición geométrica de tangente coincide con la nuestra).

Demostración.- La pendiente de la tangente a $\left(a, \sqrt{1 - a^2}\right)$ es,

$$f'(a) = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Después, la ecuación de la tangente viene dado por,

$$y = mx + c = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}} x + c$$

Luego ya que la tangente pasa a través de los puntos $\left(a, \sqrt{1 - a^2}\right)$, entonces

$$\sqrt{1 - a^2} = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}} a + c \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{1 - a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}},$$

de donde la tangente se convertirá en,

$$y = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}} x + \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Por último sea $f(x) = \sqrt{1-a^2} = y$, entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(1-a^2)(1-x^2)} = -ax+1 \\
&\Rightarrow \quad 1-a^2-x^2+a^2x^2 = a^2x^2 - 2ax + 1 \\
&= \quad x^2 - 2ax + a^2 = 0 \\
&= \quad x = a.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la curva y la tangente se cortan en un sólo punto $\left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$

14. Demuestre análogamente que las tangentes a una elipse o a una hipérbola cortan a las gráficas correspondientes solamente una vez.

Demostración.- La ecuación general de la elipse es,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \Rightarrow \quad y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}. \tag{1}$$

Tomando la derivada de la elipse se tiene,

$$y' = \frac{-\dfrac{b2x}{a^2}}{2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} = \frac{-bx}{a^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}$$

por lo que la pendiente de la tangente será con respecto de k estará dada por,

$$\frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}}$$

Por otro lado, la ecuación de la tangente es,

$$y = \frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}}x + c$$

Reemplazando x por k e y con $b\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}$,

$$b\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}} = \frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}}k + c,$$

de donde

$$c = b\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}} + \frac{bk^2}{a^2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}} = \frac{a^2b\left(\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}\right)^2 - bk^2}{a^2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}} = \frac{b}{\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}}$$

Por lo tanto la ecuación de la tangente viene dada por,

$$y = \frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}}x + \frac{b}{\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}} \qquad (2)$$

De (1) y (2), se tiene,

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{-bk}{a^2\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}}x + \frac{b}{\sqrt{1-\dfrac{k^2}{a^2}}} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2kx + k^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x-k)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = k.$$

15. Si $f+g$ es diferenciable en a, ¿son f y g necesariamente diferenciables en a? Si $f \cdot g$ y f son diferenciables en a, ¿qué condiciones debe cumplir f para que g sea diferenciable en a?.

Respuesta.- Supongamos que f no es diferenciable en ninguna parte. Sea $g = -f$, entonces

$$(f+g)(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Esta función cero, es diferenciable en cualquier parte.

Por otro lado, supongamos que $f \cdot g$ y f son diferenciables en a. Por el teorema 8 (Si f y g son diferenciables en a y $f(a) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en a), la condición que debe cumplir f para que g sea diferenciable en a será,

$$g = \frac{f \cdot g}{f}.$$

16. (a) Demuestre que si f es diferenciable en a, entonces $|f|$ también es diferenciable en a, si $f(a) \neq 0$.

Demostración.- Al ser f derivable en a es continua en a. Luego al ser $f(a) \neq 0$, se sigue que $f(x) \neq 0$ para todos los x de un intervalo entorno de a. Así pues, $f = |f|$ o $-f = |f|$ en este intervalo, con lo que $|f|'(a) = f'(a)$ o $|f|'(a) = -f'(a)$. Se puede hacer uso también de la regla de la cadena y del hecho que si $f(x) = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Sea $|f| = \sqrt{f^2}$ con lo que

$$|f|'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)^2}} \cdot 2f(x)f'(x) = f'(x) \cdot \frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

(b) Dé un contraejemplo si $f(a) = 0$.

Respuesta.- Sea $f(x) = x$, entonces $f(0) = 0$ y $|f|(x) = |x|$. De donde sabemos que $|f|$ no es diferenciable en 0.

(c) Demuestre que si f y g son diferenciables en a, entonces las funciones $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son diferenciables en a, si $f(a) \neq g(a)$.

Demostración.- Sea $r > 0$ para cualquier $x \in (a-r, a+r)$ y sea $f(x) > g(x)$, dados por $f(x) = \max f, g(x) = f(x)$ y $\min f, g(x) = g(x)$. entonces por definición de diferenciabilidad existen $f'(a)$ y $g'(a)$ tal que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{y} \quad g'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

Luego por definición de límites se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta_1 > 0$ de donde

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| < \epsilon \text{ siempre que} |h| < \delta_1$$

y sea $\epsilon > 0$ con $\delta_2 > 0$,

$$\left|\frac{g(a+h)-g(a)}{h} - g'(a)\right| < \epsilon \text{ siempre que} |h| < \delta_2$$

Pongamos a $\delta' = \dfrac{\min \delta_1, \delta_2, r}{2}$, entonces para cualquier $x \in (a-\delta', a+\delta')$, tenemos $\max f, g(x) = f(x)$ y $\min f - g(x) = g(x)$ de la siguiente forma,

$$\left|\frac{\max f, g(a+h) - \max f, g(a)}{h} - f'(a)\right| < \epsilon \text{ siempre que } |h| < \delta'$$

y

$$\left|\frac{\min f, g(a+h) - \min f, g(a)}{h} - g'(a)\right| < \epsilon \text{ siempre que } |h| < \delta'.$$

Pero ya que $\max f, g(a+h) = f(a+h)$ y $\min f, g(a+h) = g(a+h)$ para $|h| < \delta'$, entonces $\max f, g$ y $\min f, g$ son diferenciables en a.

(d) Dé un contraejemplo si $f(a) = g(a)$.

Respuesta.- Sean $f(x) = x$ y $g(x) = 0$ de donde $f(0) = g(0)$, entonces

$$\max f, g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \min f, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Derivando la parte derecha $\max f, g(x) = x$ para 0 se tiene 1, la derivada $\max f, g(x) = 0$ para 0 es 0. Con respecto a la parte izquierda se tiene las derivada de $\min f, g(x) = 0$ y $\min f, g(x) = x$ cuando tiende a 0 como 0 y 1 respectivamente. Por lo que se demuestra que $\max f, g$ y $\min f, g$ no son diferenciales en $a = 0$.

17. De un ejemplo de funciones f y g tales que g toma todos los valores, y $f \circ g$ y g son diferenciables, pero f no es diferenciable. ((El problema es trivial si no se exige que g tome todos los valores; en este caso g podría ser una función constante, o una función que sólo tomara valores de un intervalo (a, b), en cuyo caso el comportamiento de f fuera de (a, b) sería irrelevante.).

Respuesta.- Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no diferenciable en $x = 0$. Y sea $g(x) = x^3$ diferenciable en $x = 0$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g)(x) = f\left(x^3\right) = \sqrt[3]{(x^3)^2} = \sqrt[3]{x^6} = x^2.$$

donde $(f \circ g)(x)$ es diferenciable en $x = 0$.

18. (a) Si $g = f^2$ halle una fórmula para g' (que incluya a f').

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$g' = 2f \cdot f'.$$

(b) Si $g = (f')^2$, halle una fórmula para g' (que incluya a f'').

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$g' = 2f' \cdot f''.$$

(c) Suponga que la función $f > 0$ verifica que

$$(f')^2 = f + \frac{1}{f^3}.$$

Halle una fórmula para f'' en función de f. (En este apartado, además de cálculos sencillos, es necesario tener cuidado.)

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena a los dos lados, tenemos

$$2f' \cdot f'' = f' + \frac{-3}{f^4}\dot{f'} \quad \Rightarrow \quad f'' = \frac{1}{2} - \frac{3}{2f^4}.$$

19. Si f es tres veces diferenciable y $f'(x) \neq 0$, la **derivada de Schwarz** de f en x se define mediante

$$\mathscr{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

(a) Demuestre que $\mathscr{D}(f \circ g) = [\mathscr{D}f \circ g] \cdot g'^2 \mathscr{D}g$.

Demostración.- Primeramente calculemos $(f \cdot g)'$, $(f \cdot g)''$ y $(f \cdot g)'''$.

$$\begin{array}{rcl}
(f \circ g)'(x) & = & f'[g(x)] \cdot g'(x). \\
(f \circ g)''(x) & = & \{f'[g(x)] \cdot g'(x)\}' \\
& = & f''[g(x)]\, g'(x)^2 + f'[g(x)]\, g''(x) \\
(f \circ g)'''(x) & = & \{f''[g(x)]\, g'(x)^2 + f'[g(x)]\, g''(x)\} \\
& = & f'''[g(x)]\, g'(x)^3 + 2f''[g(x)]\, g''(x)g'(x) + f''[g(x)]\, g''(x)g'(x) + f'[g(x)]\, g'''(x) \\
& = & f'''[g(x)]\, g'(x)^3 + 3f''[g(x)]\, g''(x)g'(x) + f'[g(x)]\, g'''(x).
\end{array}$$

Por último calculamos la derivada de Schwarz para $f \circ g$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}(f\circ g)(x) &= \frac{(f\circ g)'''(x)}{(f\circ g)'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{(f\circ g)''(x)}{(f\circ g)'(x)}\right]^2 \\
&= \frac{f'''[g(x)]\,g'(x)^3}{f'[g(x)]\cdot g'(x)} + \frac{2f''[g(x)]\,g''(x)g'(x)}{f'[g(x)]\cdot g'(x)} + \frac{f'[g(x)]\,g'''(x)}{f'[g(x)]\cdot g'(x)} \\
&- \frac{3}{2}\left\{\frac{f''[g(x)]\,g'(x)^2}{f'[g(x)]\cdot g'(x)} + \frac{f'[g(x)]\,g''(x)}{f'[g(x)]\cdot g'(x)}\right\}^2 \\
&= \frac{f'''[g(x)]\,g'(x)^2}{f'[g(x)]} + \frac{2f''[g(x)]\,g''(x)}{f'[g(x)]} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''[g(x)]\,g'(x)}{f'[g(x)]} + \frac{g''(x)}{g'(x)}\right]^2 \\
&= \frac{f'''[g(x)]\,g'(x)^2}{f'[g(x)]} + \frac{2f''[g(x)]\,g''(x)}{f'[g(x)]} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} \\
&- \frac{2}{3}\left\{\frac{f''[g(x)]\,g'(x)}{f'[g(x)]}\right\}^2 - 3\frac{f''[g(x)]\,g''(x)}{f'[g(x)]} - \frac{3}{2}\left[\frac{g''(x)}{g'(x)}\right]^2 \\
&= \left[\frac{f'''}{f'}\circ g(x) - \frac{3}{2}\frac{(f''\circ g)(x)}{(f'\circ g)(x)}\right]\cdot g'(x)^2 + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\frac{g''(x)}{g'(x)} \\
&= [\mathscr{D}f\circ g(x)]\cdot g'(x)^2 + \mathscr{D}g(x).
\end{aligned}$$

(b) Demuestre que si $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $ad-bc \neq 0$, entonces $\mathscr{D}f = 0$. Por consiguiente, $\mathscr{D}(f\circ g) = \mathscr{D}g$.

Demostración.- Usando la regla de la cadena de Leibniz se tiene,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \\
f''(x) &= -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3} \\
f'''(x) &= \frac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}
\end{aligned}$$

Luego utilizamos la definición de la derivada de Schwarz, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}f(x) &= \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2 = \frac{\dfrac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}}{\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}} - \frac{3}{2}\left[-\frac{\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx-d)^3}}{\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}}\right]^2 \\
&= \frac{6c^2}{(cx+d)^2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{2c}{cx+d}\right)^2 = \frac{6c^2}{(cx+d)^2} - \frac{6c^2}{(cx+d)^2} = 0.
\end{aligned}$$

Sea $[\mathscr{D}f\circ g(x)]\cdot g'(x)^2 + \mathscr{D}g(x)$, entonces $\mathscr{D}(f\circ g) = \mathscr{D}g$.

20. Suponga que existen $f^{(n)}(a)$ y $g^{(n)}(a)$. Demuestre la **fórmula de Leibniz**:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a).$$

Demostración.- Demostraremos por inducción matemática. Sea $n = 1$, entonces

$$(f \cdot g)'(a) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(1-k)}(a) = \binom{1}{0} f(a) \cdot g'(a) + \binom{1}{1} f'(a) \cdot g(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

El cual se cumple para $n = 1$. Luego la hipótesis de inducción estará dada por,

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a),$$

que es cierta para n y por no tanto $f^{(n+1)}(a)$ y $g^{(n+1)}(a)$ existen. Así,

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)}(a) &= (f \cdot g)^{(n)}(a)(f \cdot g)'(a) \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)\right] \left[f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)}(a)g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}g^{(n+1-k)}(a)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a)
\end{aligned}$$

Ya que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. Entonces,

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(a) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a)g^{[(n+1)-k]}(a).$$

21. Demuestre que si $f^{(n)}[g(a)]$ y $g^{(n)}(a)$ existen ambas, entonces también existe $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Con un poco de práctica el lector debería convencerse que no es sensato tratar de encontrar una fórmula para $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Para demostrar que $(f \circ g)^{(n)}(a)$ existe, es necesario, por tanto, encontrar una proposición razonable acerca de $(f \circ g)^{(n)}(a)$ que pueda ser demostrada por inducción. Se puede intentar algo como: existe $(f \circ g)^{(n)}(a)$ y es una suma de términos, cada uno de los cuales es un producto de términos de la forma ....

Demostración.- La fórmulas,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= f'[g(x)] \cdot g'(x) \\
(f \circ g)''(x) &= f''[g(x)] \cdot g'(x) + f'[g(x)] \cdot g''(x) \\
(f \circ g)'''(x) &= f'''[g(x)] \cdot g'(x)^3 + 3f''[g(x)] \cdot g'(x)g''(x) + f'[g(x)]\, g'''(x),
\end{aligned}$$

Llevan a la siguiente conjetura: Si $f^{(n)}[g(a)]$ y $g^{(a)}(a)$ existen, entonces también existe $(f \circ g)^{(n)}(a)$ y es una suma de términos de la forma

$$c \cdot \left[g'(a)\right]^{m_1} \cdots \left[g^{(n)}(a)\right]^{m_n} \cdot f^{(k)}\left[g(a)\right],$$

para algún número c, enteros no negativos $m_1, \ldots, m_n$ y un número natural $k \leq n$. Para probar esta proposición utilizaremos el método de inducción, de donde notamos que es verdadero para $n = 1$ con $a = m_1 = k = 1$. Ahora supóngase que para un cierto n, es cierto para todo número a tal que $f^{(n)}[g(a)]$ y $g^{(n)}(a)$ existan. Supóngase también que $f^{(n+1)}[g(a)]$ y $g^{(n+1)}(a)$ existen. Entonces $g^{(k)}(x)$ podría existe para todo $k \leq n$ y todo x en algún intervalo alrededor de a, y $f^{(k)}(y)$ debe existe para todo $k \leq n$ y todo y en algún intervalo alrededor de $g(a)$. Ya que g es continua en a, esto implica que $f^{(k)}[g(x)]$ exista para todo x en algún intervalo alrededor de a. Así la proposición es verdadera para todo x, esto es, $(f \circ g)^{(n)}$ es una suma de términos de la forma:

$$c\left[g'(x)\right]^{m_1} \cdots \left[g^{(n)}(x)\right]^{m_n} \cdot f^{(k)}[g(a)], \quad m_1, \ldots, m_n \geq 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Como consecuencia, $(f \circ g)^{(n+1)}(a)$ es una suma de términos de la forma

$$c \cdot m_\alpha \left[g'(x)\right]^{m_1} \cdot \ldots \cdot \left[g^{(n)}(x)\right]^{m_\alpha - 1} \cdot \ldots \cdot \left[g^{(n)}(a)\right]^{m_n} \cdot f^{(k)}[g(a)] \qquad m_\alpha > 0$$

o de la forma

$$c\left[g'(x)\right]^{m_1+1} \cdot \ldots \cdot \left[g^{(n)}(x)\right]^{m_n} \cdot f^{(k+1)}[g(a)].$$

Para un número c.

22. (a) Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, halle una función g tal que $g' = f$. Encuentre otra.

Respuesta.- Sea

$$g(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x.$$

Derivando g tenemos,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{a_n}{n+1}(n+1)x^n + \frac{a_{n-1}}{n} \cdot nx^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{2}2x + a_0 \\ &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Otro g_1 tal que $g_1' = f$ sería,

$$g_1(x) = g(x) + c.$$

(b) Si

$$f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}$$

halle una función g que verifique $g' = f$.

Respuesta.- Sea

$$g(x) = -\left[\frac{b_2}{x} + \frac{b_3}{2x^2} + \ldots + \frac{b_m}{(m-1)x^{m-1}}\right].$$

Derivando g tenemos,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\left[-\frac{b_2}{x^2} - \frac{2b_3x}{2x^4} + \ldots + \frac{b_m(m-1)x^{m-2}}{(m-1)x^{2(m-1)}}\right] \\ &= \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots + \frac{b_m}{x^m} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

(c) ¿Existe una función

$$f(x) = a_nx^n + \ldots + a_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}$$

tal que $f'(x) = 1/x$?.

Respuesta.- No, ya que la derivada de f es

$$f'(x) = na_nx^{n-1} + \ldots + a_1 - \frac{b_1}{x^2} - \frac{2b_2}{x_3} - \ldots - \frac{mb_m}{x^{m+1}}.$$

23. Demuestre que existe una función polinómica f de grado n tal que

(a) $f'(x) = 0$ para exactamente $n-1$ números x.

Demostración.- Ya que para todo n existe una función polinómica de grado n. Es decir, existe g una función polinómica de grado $n-1$ con $n-1$ raíces. Entonces para $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, de grado n existe una función g tal que $g = f'$. Esto por el problema 7(b) capítulo 3 Spivak y por el problema 22 (a) capítulo 10, Spivak.

(b) $f'(x) = 0$ para ningún x, si n es impar.

Demostración.- Sea n impar que implica $n-1$ es par. Si g es una función polinómica de grado $n-1$ sin raíces (Capítulo 3, problema 7, Spivak). Entonces, existe un polinomio f de grado n tal que $f' = g$ (Capítulo 10, problema 22(a), Spivak). Por lo tanto g no tiene raíces, así $f'(0) = 0$ no tiene raíces.

(c) $f'(x) = 0$ para exactamente un x, si n es par.

Demostración.- Sea n par que implica $n-1$ par. Por el capítulo 3, problema 7, Spivak, existe un polinomio g de grado $n-1$ con exactamente una raíz. Luego por el capítulo 10, problema 22(a), spivak. Existe una función polinómica f de grado n tal que $f' = g$. Por lo tanto g tiene una sola raíz, así $f'(x) = 0$ tiene exactamente una raíz.

(d) $f'(x) = 0$ para exactamente k números x, si $n-k$ es impar.

Demostración.- Sea $n-k$ impar que implica $n-k-1$ es par. Por el capítulo 3, problema 7, Spivak, existe un polinomio g de grado $n-k-1$ con exactamente k raíces. Luego por el capítulo

10, problema 22(a), spivak, existe una función polinómica f de grado n tal que $f' = g$. Por lo tanto g tiene k raíces, así $f'(0) = 0$ para exactamente k números x.

24. (a) El número a se denomina una raíz doble de la función polinómica f si $f(x) = (x-a)^2 g(x)$ para alguna función polinómica g. Demuestre que a es una raíz doble de f si y sólo si a es una raíz de f y de f'.

Demostración.- Primero demostremos que $f = f' = 0$. Para f tenemos,

$$f(a) = (a-a)^2 g(x) = 0.$$

Luego por la regla de la cadena para f' obtenemos,

$$f'(a) = 2(a-a)g(a) + (a-a)^2 g'(a) = 0.$$

Por lo tanto a es una raíz doble de f.

Demostramos ahora que si $f(a) = f'(a) = 0$, entonces, a es una raíz doble de f si

$$f(x) = (x-a)^2 g(x)$$

para alguna función polinómica g. Ya que f es un polinomio y $f(a) = 0$, entonces por la división polinomial, existe una función polinómica g_1 tal que

$$f(x) = (x-a)g_1(x). \tag{1}$$

Luego calculamos la derivada de esta función,

$$f'(x) = g(x) + (x-a)g'(x),$$

Se sigue $f'(a) = 0$ implica que $g_1(a) = 0$. Luego, por el hecho de que g_1 es un polinomio, podemos utilizar la división polinomial para construir otro polinomio, como sigue:

$$g_1(x) = (x-a)g_2(x).$$

Luego reemplazamos en (1), de donde

$$f(x) = (x-a)^2 g_1(x) g_2(x).$$

Ya que g_1 y g_2 son polinomios, ponemos $g = g_1 \cdot g_2$, Por lo tanto

$$f(x)(x-a)^2 g(x).$$

(b) ¿Cuándo tiene $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ una raíz doble? ¿Cuál es la interpretación geométrica de esta condición?.

Respuesta.- Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función polinómica con $a \neq 0$ e y una raíz doble de f. Entonces por la parte (a) debemos encontrar $f(y) = f'(y) = 0$ como sigue:

$$f'(y) = 2ay + b = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{b}{2a}, \quad a \neq 0.$$

Por otro lado, ya que $f(y)$ también es cero, la condición que se requerirá será:

$$a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 4ac - b^2 = 0$$

Geométrica, significa que la gráfica de f toca al eje horizontal en el punto $-\dfrac{b}{2a}$.

25. Si f es diferenciable en a, sea $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Halle $d'(a)$.

Respuesta.- Podemos ver que

$$d'(a) = f'(a) - f'(a)(a-a) - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

26. Este problema es parecido al problema 3-6 (spivak). Sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ números dados.

(a) Si $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos, demuestre que existe una función polinómica f de grado $2n-1$, tal que $f\left(x_j\right) = f'\left(x_j\right) = 0$ para $j \neq i$, y $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$.

Demostración.- Notemos que f tiene la forma siguiente,

$$f(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j)^2 g(x)$$

para alguna función polinómica g (cada x_j, $j \neq i$ es una raíz doble según el problema 24, capítulo 10, Spivak). Ahora, ya que f es de grado $2n-1$ entonces g es de grado 1. Por lo tanto, g tiene que ser de la forma $g(x) = ax + b$ para algún $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo que se tiene

$$f(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j)^2 (ax+b) = h(x)(ax+b)$$

donde $h(x) = \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j)^2$. Luego, usando la regla de la cadena se tiene,

$$f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x).$$

se sigue que

$$f(x_i) = h(x_i)(ax_i + b) = a_i \quad \text{y} \quad f'(x_i) = h'(x_i)(ax_i + b) + h(x_i)a = b_i$$

de donde, se tiene

$$\begin{array}{rcl} [h(x_i)x_i]\, a + h(x_i)b & = & a_i \\ [h'(x_i)x_i + h(x_i)]\, a + h'(x_i)b & = & b_i \end{array}$$

Será siempre posible resolver estas ecuaciones, ya que

$$[h(x_i)x_i]\, h'(x_i) - \left[h'(x_i)x_i + h(x_i)\right] h(x_i) = [-h(x_i)]^2 \neq 0.$$

Es decir, se mantiene la última desigualdad desde $h(x_i) = \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i} (x_i - x_j)^2 \neq 0$. Por lo tanto las ecuaciones lineales tienen solución, digamos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces existe tal g por lo que terminamos la prueba.

(b) Demuestre que existe una función polinómica f de grado $2n-1$ con $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$ para todo i.

Demostración.- Para $\leq i \leq n$ sea f_i una función polinomial como se construyo en la parte (a). Entonces para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$f_(x_i) \quad \text{y} \quad f_i'(x_i) = b_i$$

como también $f_j(x_i) = f_j(x_i) = 0$ para $j \neq i$. Ahora definamos la función polinomial

$$f = f_1 + \ldots f_n.$$

Dado que dos funciones polinómicas también es una función polinomial entonces

$$f(x_i) = f_1(x_i) + \ldots + f_n(x_i) = f_i(x_i) = a_i$$

Para $j \neq i$ donde se cumple la penúltima igualdad ya que $f_j(x_i) = 0$, tanto como

$$f(x_i) = f_1'(x_i) + \ldots + f_n'(x_i) = f_i'(x_i) = b_i,$$

también se cumple la penúltima igualdad ya que $f'(x_i) = 0$. Por lo que se completa la prueba.

27. Suponga que a y b son dos raíces consecutivas de una función polinómica f, pero que a y b no son raíces dobles, de manera que podemos escribir $f(x) = (x-a)(x-b)g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$.

Este teorema fue demostrado por el matemático francés Rolle, en relación con el problema de la aproximación de raíces de polinomios, pero el resultado no se definió en un principio en términos de derivadas. De hecho, Rolle fue uno de los matemáticos que nunca aceptó las nuevas ideas del cálculo infinitesimal. Su actitud no debe juzgarse como demasiado obstinada, ya que durante un período de cien años nadie fue capaz de definir los límites en otros términos que no fueran los que lindaban con la mística, pero en general la historia ha sido particularmente benévola con Rolle; su nombre se ha vinculado con un resultado mucho más general que aparecerá en el próximo capítulo y que constituye la base de los resultados teóricos más importantes del cálculo infinitesimal.

(a) Demuestre que $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo. (Recuerde que a y b son raíces consecutivas.)

Demostración.- Ya que $f(x)$ no tiene raíces en (a,b), por ende $g(x)$ no tiene raíces en (a,b) y por el hecho de que $g(a), g(b) \neq 0$, que implica que no tendrá raíces en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces $g(x)$ será positivo o negativa en $[a,b]$ y por lo tanto $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo.

(b) Demuestre que existe algún número x con $a < x < b$ y $f'(x) = 0$. (Dibuje un esquema para lustrar este hecho.)

Demostración.- Derivando f tenemos

$$f'(x) = (x-b)g(x) + (x-a)g(x) + (x-a)(x-b)g'(x),$$

con lo que

$$\begin{aligned} f'(a) &= (a-b)g(a), \\ f'(b) &= (b-a)g(b). \end{aligned}$$

Por el inciso a) sabemos que $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo, pero $f'(a)$ y $f'(b)$ tendrán signos distintos. Así pues, $f'(x) = 0$ para algún x de (a,b) ya que f' es una función continua.

(c) Demuestre ahora el mismo hecho, incluso si a y b son raíces múltiples. Indicación: Si $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$, considere la función polinómica $h(x) = f'(x)/(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}$.

Demostración.- Similar al inciso b) Puesto que,

$$f'(x) = m(x-a)^{m-1}(x-b)^n g(x) + (x-a)^m n(x-b)^{n-1} g(x) + (x-a)^m (x-b)^n g'(x).$$

De donde tenemos

$$h(a) = m(a-b)g(a),$$

$$h(b) = n(a-b)g(a),$$

con lo que $h(a)$ y $h(b)$ tienen signos distintos y por lo tanto $h(x) = 0$ para algún x de (a,b), lo cual implica que $f'(x) = 0$.

28. Supóngase que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0. Demuestre que f es diferenciable en 0, y halle $f'(0)$ en función de g.

Demostración.- Por la definición de diferenciabilidad de f en 0 se tiene,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)g(x+h) - xg(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)g(0+h) - 0g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} = \frac{hg(h)}{h} = g(0).$$

Luego debido a que g es continuo en 0. Demostramos que f es diferenciable en 0 tal que

$$f'(0) = g(0).$$

29. Supongase que f es diferenciable en 0 y que $f(0) = 0$. Demuestre que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0. Indicación: ¿Qué ocurre si intenta escribir $g(x) = f(x)/x$?.

Demostración.- Definamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \\ f'(0) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Notemos que g está bien definida. Luego g es continua en 0, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0).$$

donde se cumple la última igualdad ya que f es diferenciable en 0 y $f(0) = 0$, así pues por el hecho de que $g = (0) = f'(0)$ concluimos que g es continuo en 0.

30. Si $f(x) = x^{-n}$ para n en $\mathbb{N}$, demuestre que

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} x^{-n-k} = (-1)^k k! \binom{n+k-1}{k} x^{-n-k}, \quad \text{para } x \neq 0.$$

Demostración.- Primero sacamos la derivada de $f(x) = x^{-n}$,

$$f'(x) = -nx^{-n-1}.$$

Demostremos por inducción. Para $k = 1$ tenemos que

$$f(x) = (-1)\frac{(n+1-1)!}{(n-1)!} x^{-n-1} = (-1)\frac{n(n-1)!}{(n-1)!} x^{-n-1} = -nx^{-n-1}.$$

Definamos la hipótesis de inducción para $k \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$,

$$f^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} x^{-n-k}.$$

Entonces, derivando una vez más tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} f^{(k+1)} & = & (-1)^k(-n-k)\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}x^{-n-k-1} \\ \\ & = & (-1)^k(-1)(n+k)\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}x^{-n-k-1} \\ \\ & = & (-1)^{k+1}(n+k)\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}x^{-n-k-1} \\ \\ & = & (-1)^{k+1}\dfrac{(n+k)!}{(n-1)!}x^{-n-(k+1)} \\ \\ & = & (-1)^{k+1}\dfrac{(k+1)!}{(k+1)!}\dfrac{(n+k)!}{(n+1)!}x^{-n-(k+1)} \\ \\ & = & (-1)^{k+1}(k+1)!\dfrac{(n+k)!}{(k+1)!(n+1)!}x^{-n-(k+1)} \\ \\ & = & (-1)^{k+1}(k+1)!\dbinom{n+k}{k+1}x^{-n-(k+1)}, \qquad \text{para } x \neq 0. \end{array}$$

31. Demuestre que es imposible expresar $x = f(x)g(x)$ donde f y g son diferenciables y $f(0) = g(0) = 0$. Indicación: Derive.

Demostración.- Derivando por la regla de la cadena se tiene,

$$1 = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ya que $f(0) = g(0) = 0$, entonces

$$1 = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 0.$$

Lo cual es absurdo. Por lo tanto es imposible escribir $x = f(x)g(x)$ para f y g diferenciables tal que $f(0) = g(0) = 0$.

32. ¿Qué es $f^{(k)}$ si

(a) $f(x) = 1/(x-a)^n$?.

Respuesta.- Observamos que f es diferenciable en todas sus derivadas de orden superior. Por lo que podemos utilizar la regla de la cadena. Sea $g(x) = (x-a)$, para $x \neq a$. Entonces g es una función diferenciable. Es más, $g'(x) = 1$ y $g^{(k)}(x) = 0$ para todo $k \geq 2$. Consideremos la función $h(x) = x^{-n}$ para $x \neq 0$. Por lo que vemos que $f(x) = h[g(x)]$ para $x \neq a$.
Se sigue que $(h \circ g)^{(n)}(a) = c \circ [g'(a)]^{m_1} \ldots \left[g^{(n)}(a)\right]^{m_n} \cdot h^{(k)}[g(a)]$ (Problema 21 Spivak, chapter 10, v 4), para algún c, enteros no negativos $m_1, \ldots, m_n$ para $k \leq n$. Ahora sabiendo que $g'(x) = 1$

y $g^{(k)} = 0$ para todo $k \geq 2$ se tiene que $(h \circ g)^{(n)}(x)$ es suma de la forma $c \cdot h^{(k)}[g(x)]$ para $x \neq a$. Por último usamos el problema 30, Spivak , capitulo 10, v4. Se tiene:

$$f^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x-a)^{-n-k}.$$

(b) $f(x) = 1/(x^2-1)$?.

Respuesta.- Observemos que,

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Por lo que,

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left[g^{(k)}(x) - h^{(k)}(x)\right]$$

donde $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Usando la parte (a) se tiene,

$$g^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x-1)^{-n-k} \qquad \text{y} \qquad h^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x+1)^{-n-k}.$$

Así, tenemos que,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{1}{2}\left[(-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x-1)^{-n-k} - (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(x+1)^{-n-k}\right] \\ &= \frac{1}{2}(-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\left[(x-1)^{-n-k} - (x+1)^{-n-k}\right]. \end{aligned}$$

33. Sea $f(x) = x^{2n} \operatorname{sen} 1/x$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Demuestre que existe $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ y que $f^{(n)}$ no es continua en 0. (Se encontrará la misma dificultad básica en el problema 21.)

Demostración.- Encontraremos las primeras tres derivadas de la función dada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2nx^{2n-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - x^{2n-2}\cos\frac{1}{x}. \\ f''(x) &= \left[2n(2n-1)x^{2n-2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - 2nx^{2n-3}\cos\frac{1}{x}\right] - \left[(2n-2)x^{2n-3}\cos\frac{1}{x} - x^{2n-4}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right] \\ f''(x) &= 2n(2n-1)e^{2n-2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + (2-4n)x^{2n-3}\cos\frac{1}{x} - x^{2n-4}\operatorname{sen}\frac{1}{x}. \\ f'''(x) &= 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - 2n(2n-1)x^{2n-4}\cos\frac{1}{x} + (2n-3)(2-4n)x^{2n-4}\cos\frac{1}{x} \\ &+ (2-4n)x^{2n-5}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - (2n-4)x^{2n-4}x^{2n-5}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^{2n-6}\cos\frac{1}{x}. \\ f'''(x) &= 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + \left[-2n(2n-1) + (2n-3)(2-4n)\right]x^{2n-4}\cos\frac{1}{x} \\ &+ \left[(2-4n) - (2n-4)\right]x^{2n-5}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^{2n-6}\cos\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

En general, para el k-esima derivada se tiene,

$$f^{(k)}(x) = ax^{2n-k}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + \sum_{l=k+1}^{2k-1}\left(a_l x^{2n-l}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + b_l x^{2n-(l+1)}\cos\frac{1}{x}\right) \pm \begin{cases} x^{2n-2k}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & k \text{ par} \\[2ex] x^{2n-2k}\cos\dfrac{1}{x}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

para a, a_l, b_l constantes.

Ahora cuando k es menor que n (hasta $n-1$), la expresión general de $f^{(k)}(x)$ muestra que, tendrá un término de al menos x^2,

$$x^{2n-2(n-1)} = x^2$$

El término con esto es $\operatorname{sen} 1/x$, que está acotado en el intervalo alrededor de 0.

Después encontremos las dos primeras derivadas en 0.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 g(h)}{h} = 0. \\ f''(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 g(h)}{h} = 0. \end{aligned}$$

El proceso puede repetirse hasta $k = n$,

$$f^{(n)}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1}(h)-f^{n-1}(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1}(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 g(h)}{h} = 0.$$

Por lo tanto por la primera parte se prueba que

$$f'(0) = f''(0) = f^{(n)} = 0.$$

Así, encontramos que para $k < n$, todas las derivadas tienen un término de x^2. Sin embargo para $k = n$, no se tiene el termino x^2, también teniendo términos de $\cos 1/x$ o $\operatorname{sen} 1/x$, esto hace que la función sea discontinua en $x = 0$.

34. Sea $f(x) = x^{2n+1}\operatorname{sen} 1/x$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Demuestre que existe $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ es continua en 0, y que $f^{(n)}$ no es diferenciable en 0.

Demostración.- Encontraremos las primeras tres derivadas de la función dada.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2nx^{2n-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - x^{2n-2}\cos\frac{1}{x}.\\
f''(x) &= \left[2n(2n-1)x^{2n-2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - 2nx^{2n-3}\cos\frac{1}{x}\right] - \left[(2n-2)x^{2n-3}\cos\frac{1}{x} - x^{2n-4}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right]\\
f''(x) &= 2n(2n-1)e^{2n-2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + (2-4n)x^{2n-3}\cos\frac{1}{x} - x^{2n-4}\operatorname{sen}\frac{1}{x}.\\
f'''(x) &= 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - 2n(2n-1)x^{2n-4}\cos\frac{1}{x} + (2n-3)(2-4n)x^{2n-4}\cos\frac{1}{x}\\
&+ (2-4n)x^{2n-5}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - (2n-4)x^{2n-4}x^{2n-5}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^{2n-6}\cos\frac{1}{x}.\\
f'''(x) &= 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + \left[-2n(2n-1) + (2n-3)(2-4n)\right]x^{2n-4}\cos\frac{1}{x}\\
&+ \left[(2-4n) - (2n-4)\right]x^{2n-5}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^{2n-6}\cos\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

En general, para el k-esima derivada se tiene,

$$
f^{(k)}(x) = ax^{2n-k}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + \sum_{l=k+1}^{2k-1}\left(a_l x^{2n-l}\operatorname{sen}\frac{1}{x} + b_l x^{2n-(l+1)}\cos\frac{1}{x}\right) \pm \begin{cases} x^{2n-2k}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & k \text{ par}\\[2ex] x^{2n-2k}\cos\dfrac{1}{x}, & k \text{ impar}\end{cases}
$$

para a, a_l, b_l constantes.

Ahora cuando k es menor que n (hasta $n-1$), la expresión general de $f^{(k)}(x)$ muestra que, tendrá un término de al menos x^2,

$$x^{2n-2(n-1)} = x^2$$

El término con esto es $\operatorname{sen} 1/x$, que está acotado en el intervalo alrededor de 0.

Después encontremos las dos primeras derivadas en 0.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 g(h)}{h} = 0.\\
f''(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 g(h)}{h} = 0.
\end{aligned}
$$

El proceso puede repetirse hasta $k = n$,

$$f^{(n)}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1}(h) - f^{n-1}(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1}(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 g(h)}{h} = 0.$$

Por lo tanto por la primera parte se prueba que

$$f'(0) = f''(0) = f^{(n)} = 0.$$

Encontramos que hasta que k es igual a n, todas las derivadas tienen un término de x^2 con términos de $\cos 1/x$ o $\operatorname{sen} 1/x$. Esto hace que la función sea continua en $x = 0$ pero no diferenciable.

35. Con la notación de Leibniz la Regla de la Cadena debería escribirse:

$$\frac{df\left[g(x)\right]}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}.$$

En vez de esto, se suele encontrar generalmente la siguiente proposición: Sea $y = g(x)$ y $z = f(y)$. Entonces

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Observe que z en dz/dx denota la función compuesta $f \circ g$, mientras que la z de dz/dy denota la función f; se sobreentiende también que dz/dy será una expresión que incluye y y de que en la solución final $g(x)$ debe sustituir por y. En cada de los siguientes casos halle dz/dx aplicando esta fórmula, después compare el resultado con el problema 1.

(i) $z = \operatorname{sen} y, \quad y = x + x^2.$

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena tenemos,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \cos y \cdot (1 - 2x) \quad \Rightarrow \quad \left[\cos\left(x + x^2\right)\right](1 + 2x).$$

(ii) $z = \operatorname{sen} y, \quad y = \cos x.$

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena tenemos,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \cos y \cdot (-\operatorname{sen} x) \quad \Rightarrow \quad \left[\cos\left(\cos x\right)\right](\operatorname{sen} x).$$

(iii) $z = \operatorname{sen} u, \quad u = \operatorname{sen} x.$

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena tenemos,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \cos u \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad \left[\cos\left(\operatorname{sen} x\right)\right](\cos x).$$

(iv) $z = \operatorname{sen} v, \quad v = \cos u, \quad u = \operatorname{sen} x.$

Respuesta.- Aplicando la regla de la cadena tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \cos v \cdot (-\operatorname{sen} u) \cdot \cos x \\
&\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\left[\cos\left(\cos u\right)\right] \cdot \operatorname{sen} u \cos x \\
&\Rightarrow \quad \left[\cos\left(\cos\left(\operatorname{sen} x\right)\right)\right](\operatorname{sen} x).
\end{aligned}$$

11

Significado de la derivada

Definición 11.1 Sea f una función y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un punto máximo de f en A si

$$f(x) \geq f(y) \qquad \text{para todo } y \text{ de } A.$$

El número $f(x)$ se denomina el **valor máximo** de f en A (y también diremos que f alcanza su valor máximo en el punto x de A).

f tiene un **mínimo** en el punto x de A si $-f$ tiene un máximo en el punto x de A.

En general, nos interesará el caso en que A es un intervalo cerrado $[a, b]$; si f es continua, entonces el Teorema 7-3 garantiza que f alcanza realmente dicho valor máximo en $[a, b]$.

Ahora ya estamos en condiciones para enunciar un teorema que ni siquiera depende de la existencia de cotas superiores mínimas.

Teorema 11.1 Sea f cualquier función definida en (a, b). Si x es un punto máximo (o mínimo) de f en (a, b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x) = 0$. (Observemos que no hemos supuesto la diferenciabilidad, ni siquiera la continuidad, de f en otros puntos.)

Demostración.- Consideremos el caso en que f tiene un máximo en x. Si h es cualquier número tal que $x + h$ pertenece a (a, b), entonces

$$f(x) \geq f(x + h),$$

ya que f tiene un máximo en el punto x de (a, b). Esto significa que

$$f(x + h) - f(x) \leq 0.$$

De manera que, si $h > 0$ tenemos

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0,$$

y por tanto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Por otra parte, si $h < 0$, tenemos

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

o sea

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Por hipótesis, f es diferenciable en x, de manera que ambos límites deben ser iguales (de hecho son iguales a $f'(x)$). Esto significa que

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{y} \quad f'(x) \geq 0,$$

de lo cual se deduce que $f'(x) = 0$.

■

Definición 11.2 Sea f una función, y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un **punto máximo [mínimo] local** de f en A si existe algún $\delta > 0$ tal que x es un punto máximo [mínimo] de f en $A \cap (x-\delta, x+\delta.)$

Teorema 11.2 Si x es un máximo o mínimo local de f en (a,b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x) = 0$.

Demostración.- Se trata de una aplicación del teorema 1 (capítulo 11, Spivak). ■

El recíproco del teorema 2 no es cierto; la condición $f'(0)$ no implica que x sea un punto máximo o mínimo local en f. Precisamente por esta razón, se ha adoptado una terminología especial para describir a aquellos números x que satisfacen la condición $f'(0)$.

Definición 11.3 Un **punto critico** de una función f es un número x tal que

$$f'(x) = 0.$$

Al número $f(x)$ se le denomina **valor critico** de f.

Consideremos en primer lugar el problema de hallar el máximo o el mínimo de f en un intervalo cerrado $[a,b]$. (En este caso, si f es continua, sabemos que dicho valor máximo y mínimo debe existir.) Para localizarlos, deben considerarse tres clases de puntos:

(1) Los puntos críticos de f en $[a,b]$.

(2) Los puntos extremos a y b.

(3) Aquellos puntos x de $[a,b]$ tales que f no es diferenciable en x.

Si x no pertenece al segundo no al tercer grupo entonces forzosamente debe pertenecer al primero.

Obs 11.1 En el capítulo 7 ya resolvimos el problema de este tipo cuando demostramos que si n es par, la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

tiene un valor mínimo en toda la recta real. Dicho valor mínimo se puede encontrar resolviendo la ecuación, si es posible, y comparando los valores de $f(x)$ en dichos x.

Teorema 11.3 **Teorema de Rolle.** Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a,b) tal que $f'(x) = 0$.

Demostración.- A partir de la continuidad en f en $[a,b]$ deducimos que f tiene valor máximo y mínimo en $[a,b]$. Supongamos primero que el valor máximo se presenta en un punto x de (a,b). Entonces $f'(x) = 0$ según el teorema 1, y la demostración queda completa. Supongamos ahora que el valor mínimo de f se presenta en algún punto x de (a,b). Entonces, de nuevo $f'(x) = 0$ según el teorema 1. Finalmente, supongamos que los valores máximo y mínimo se presentan ambos en los extremos del intervalo. Como $f(a) = f(b)$, dichos valores coinciden, de manera que f es una función constante, y en este caso se puede elegir cualquier valor x de (a,b). ■

Teorema 11.4 **Teorema del valor medio.** Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), existe un número x en (a,b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración.- Sea

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a).$$

Evidentemente, h es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y

$$h(a) = f(a), \qquad h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](b - a) = f(a).$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle a la función h y deducir que existe algún x en (a,b) tal que

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de modo que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Corolario 11.1 Si f está definida en un intervalo y $f'(x) = 0$ en todo x del intervalo, entonces f es constante en dicho intervalo.

Demostración.- Sean a y b dos puntos del intervalo con $a \neq b$. Entonces existe algún x de (a,b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, por tanto

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

y por consiguiente $f(a) = f(b)$. Así pues, el valor de f en dos puntos cualesquiera del intervalo es el mismo, lo cual significa que f es constante en el intervalo.

■

Corolario 11.2 Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún número c tal que $f = g + c$.

Demostración.- Para todo x del intervalo se verifica que $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, de manera que, según el corolario 1, existe un número c tal que $f - g = c$. ■

Definición 11.4 Una función es **creciente** en un intervalo si $f(a) < f(b)$ siendo a y b dos números del intervalo con $a < b$. La función f es **decreciente** en un intervalo si $f(a) > f(b)$ para todo a y b del intervalo con $a < b$. (A menudo se dice simplemente que f es creciente o decreciente, en cuyo caso se deduce que el intervalo es el dominio de f.)

Corolario 11.3 Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en dicho intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en dicho intervalo.

Demostración.- Consideremos el caso en que $f'(x) > 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún punto x en (a, b) que verifica

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), por tanto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Como $b - a > 0$ se deduce que $f(b) > f(a)$.

Consideremos ahora el caso en que $f'(x) < 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún punto x en (a, b) que verifica

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), por tanto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0.$$

De donde se deduce que $f(b) < f(a)$.

■

Podemos dar un esquema general para decidir si un punto crítico es un máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas:

(1) Si $f' > 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' < 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto máximo local.

(2) Si $f' < 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' > 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto mínimo local.

(3) Si f' tiene el mismo signo en algún intervalo a la izquierda de x que en algún intervalo a la derecha, entonces x no es ningún punto máximo ni mínimo local.

En varios problemas de este capítulo y de capítulos sucesivos se pide hacer una representación gráfica de funciones. En cada caso debe determinar

(1) los puntos críticos de f,

(2) el valor de f en los puntos críticos,

(3) el signo de f' en las regiones entre los puntos críticos (si esto no está claro ya),

(4) los números x tales que $f(x) = 0$ (si es posible),

(5) el comportamiento de $f(x)$ cuando x se hace grande o grande negativo (si es posible).

Existe un criterio popular para hallar los máximos y mínimos locales, que depende del comportamiento de la función sólo en los puntos críticos.

Teorema 11.5 Supongamos que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a; si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.

Demostración.- Por definición,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Como $f'(a) = 0$, esta igualdad puede escribirse como

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Supongamos ahora que $f''(a) > 0$. Entonces $\dfrac{f'(a+h)}{h}$ ha de ser positivo para valores suficientemente pequeños de h. Por tanto:

$f'(a+h)$ ha de ser positivo para valores de $h > 0$ suficientemente pequeños. Y $f'(a+h)$ ha de ser negativo para valores de $h < 0$ suficientemente pequeños.

Esto significa por el corolario 3 (Spivak, capitulo 11) que f es creciente en algún intervalo a la derecha de a y f es decreciente en algún intervalo a la izquierda de a. Por consiguiente, f tiene un mínimo local en a. La demostración es análoga en el caso de que $f''(a) < 0$.

■

Aunque el Teorema 5 es muy útil en el caso de funciones polinómicas, para muchas otras funciones la segunda derivada es tan complicada que es más fácil considerar el signo de la primera derivada. Además, si a es un punto crítico de f puede ocurrir que $f''(a) = 0$. En este caso, el Teorema 5 no proporciona información: es posible que a sea un punto máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas.

Teorema 11.6 Supongamos que $f''(a)$ existe. Si f tiene mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$; si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.

Demostración.- Supongamos que f tiene un mínimo local en a. Si $f''(a) < 0$, entonces f tendría también un máximo local en a, por el teorema 5. Es decir, f sería constante en algún intervalo que contiene a a, y por tanto $f''(a) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, debe verificarse que $f''(a) \geq 0$. El caso de un máximo loca se trata de manera análoga.

■

Teorema 11.7 Supongamos que f es continua en a y que $f'(x)$ existe para todo x de algún intervalo que contiene a a, excepto quizás en $x = a$. Supongamos, además, que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existe. Entonces $f'(a)$ también existe y

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

Demostración.- Por definición,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a)}{h}.$$

Para valores de $h > 0$ suficientemente pequeños, la función f es continua en $[a, a+h]$ y diferenciables en $(a, a+h)$ (lo mismo ocurre para valores de $h < 0$ suficientemente pequeños). Según el teorema del valor medio, existe un número α_h en $(a, a+h)$ tal que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(\alpha_h).$$

Además α_h tiende a a cuando h tiende a 0, ya que α_h pertenece al intervalo $(a, a+h)$; como $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe, se deduce que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\alpha_h) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

En otras palabras, sean $L = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$, por definición de límite se tiene

Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f'(x) - L| < \epsilon$.

Ahora, si $0 < |x-a| < \delta$ podríamos utilizar el teorema del valor medio para encontrar un punto c entre a y x que satisfaga,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c).$$

Notemos que c satisface también a $0 < |c-a| < \delta$, tal que $|f'(c) - L| < \epsilon$. Como consecuencia

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \right| < \epsilon.$$

Es decir,

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$f'(a) = L.$$

■

Incluso si f es una función diferenciable en todo punto, es posible que f' sea discontinua. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ahora veremos una generalización del teorema del valor medio.

Teorema 11.8 **Torema del valor medio de Cauchy.** Si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b), entonces existe un número x en (a,b) tal que

$$[f(b)-f(a)]g'(x) = [g(b)-g(a)]f'(x).$$

(Si $g(b)\neq g(a)$ y $g'(x)\neq 0$, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observemos que si $g(x)=x$ para todo x, entonces $g'(x)=1$, y se obtiene el teorema del valor medio. Por otra parte aplicando el Teorema del valor medio a f y a g por separado, se deduce que existen un x e y en (a,b) que verifican

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(y)};$$

pero no existe ninguna garantía de que los x e y hallados de esta manera sean iguales. Estas consideraciones pueden hacer pensar que el Teorema del Valor Medio de Cauchy es muy difícil de demostrar, pero en realidad basta aplicar uno de los artilugios más simples.)

Demostración.- Sea

$$h(x) = f(x)\left[g(b)-g(a)\right] - g(x)\left[f(b)-f(a)\right].$$

Entonces h es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Según el teorema de Rolle, $h'(x)=0$ para algún x de (a,b), lo que significa que

$$0 = f'(x)\left[g(b)-g(a)\right] - f'(x)\left[f(b)-f(a)\right].$$

■

El Teorema del Valor Medio de Cauchy es la herramienta básica necesaria para demostrar un teorema que facilita el cálculo de límites de la forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

cuando

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

En este caso no es aplicable el Teorema 5.2.

Teorema 11.9 **Regla de L'Hopital.** Supongamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

y supongamos también que $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existe. Entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ existe y

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Observe que el teorema 7 es un caso particular.)

Demostración.- La hipótesis de que el $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existe contiene dos suposiciones implícitas:

(1) existe un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ tal que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen para todo x de $(a-\delta, a+\delta)$ excepto quizás para $x = a$,

(2) en este intervalo $g'(x) \neq 0$ excepto quizás, de nuevo, en $x = a$.

■

Por otra parte, no se supone ni siquiera que f y g estén definidas en el punto a. Si definimos $f(a) = g(a) = 0$ (cambiando, si es necesario, los valores previos de $f(a)$ y $g(a)$), entonces f y g son continuas en el punto a. Si $a < x < a+\delta$, puede aplicarse a f y a g el Teorema del Valor Medio y el Teorema del Valor Medio de Cauchy en el intervalo $[a, x]$ (y lo mismo ocurre en el caso de que $a-\delta < x < a$). Aplicando en primer lugar el Teorema del Valor Medio a g, vemos que $g(x) \neq 0$, ya que si $f(x) = 0$ entonces existiría algún x_1 en (a, x) tal que $g'(x_1) = 0$, lo que contradice (2). Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio de Cauchy a f y a g, vemos que existe un número α_x en (a, x) tal que

$$[f(x)-0]\, g'(\alpha_x) = [g(x)-0]\, f'(\alpha_x)$$

o

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Pero α_x se aproxima a a cuando x se aproxima a a, ya que α_x está en el intervalo (a, x); como estamos suponiendo que $\lim\limits_{y\to a} f'(y)/g'(y)$ existe, se deduce que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{y\to a}\frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

11.1 Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones, halle los valores máximos y mínimos en los intervalos indicados, determinando aquellos puntos del intervalo en los que la derivada es igual a 0 y comparando los valores de la función en estos puntos con sus valores en los extremos del intervalo.

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{4}{3}$$

Ambos número $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{4}{3}$ pertenecen al intervalo $[-2, 2]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -\frac{4}{3}$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-2, 2$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f(2) & = & 2^3 - 2^2 - 8\cdot 2 + 1 & = & -11. \\ f\left(-\dfrac{4}{3}\right) & = & \left(-\dfrac{4}{3}\right)^3 - \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 - 8\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right) + 1 & = & \dfrac{203}{27}. \\ f(-2) & = & -2^3 - 2^2 - 8\cdot(-2) + 1 & = & 5. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por -11 y el máximo viene dado por $\dfrac{203}{27}$.

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$.

Respuesta.- Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 5x^4 + 1.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$5x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = -\frac{1}{5}.$$

El cual no es posible para ningún x real.

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-1, 1$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f(1) & = & 1^5 + 1 + 1 & = & 3. \\ f(-1) & = & (-1)^5 - 1 + 1 & = & -1. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por -1 y el máximo viene dado por 3.

(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 12x.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 1. \end{array} \right.$$

Sólo el número $x_1 = 0$ pertenece al intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es sólo el número:

$$x_1 = 0.$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}.$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f\left(-\frac{1}{2}\right) & = & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 & = & \frac{43}{16}. \\ f(0) & = & 3\cdot 0^4 - 8\cdot 0^3 + 6\cdot 0^2 & = & 0. \\ f\left(\frac{1}{2}\right) & = & 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 & = & \frac{11}{16}. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por 0 y el máximo viene dado por $\frac{43}{16}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 5x^4 + 1.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$35x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\frac{1}{5}.$$

El cual no es posible para ningún x real.

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-\frac{1}{2},\ 1$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f\left(-\frac{1}{2}\right) & = & \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1} & = & \frac{32}{15}. \\ f(1) & = & \dfrac{1}{1^5 + 1 + 1} & = & \frac{1}{3}. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por $\frac{32}{15}$ y el máximo viene dado por $\frac{1}{3}$.

(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2(x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$\frac{x^2+1-2(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -1+\sqrt{2} \\ x_2 & = & -1-\sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Sólo el número $x_1=-1+\sqrt{2}$ pertenece al intervalo $[-1,\frac{1}{2}]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es sólo el número:

$$x_1=-1+\sqrt{2}.$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-1,\ \frac{1}{2}.$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f(-1) & = & \dfrac{-1+1}{(-1)^2+1} & = & 0. \\[2ex] f\left(1+\sqrt{2}\right) & = & \dfrac{\left(-1+\sqrt{2}\right)+1}{\left(-1+\sqrt{2}\right)^2+1} & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}+2\right)}. \\[2ex] f\left(\dfrac{1}{2}\right) & = & \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)+1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1} & = & \dfrac{6}{5}. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por 0 y el máximo viene dado por $\dfrac{6}{5}$.

(vi) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ en $[0,5]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x)=-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=-1.$$

El cual no es posible para ningún x real.

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$0,\ 5$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f(0) & = & \dfrac{0}{0^2-1} & = & 0. \\[2ex] f(5) & = & \dfrac{5}{5^2-1} & = & \dfrac{5}{24}. \end{array}$$

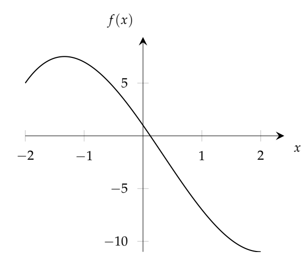
Por lo tanto el mínimo viene dado por 0 y el máximo viene dado por $\dfrac{5}{24}$.

2. Trace ahora la gráfica de cada una de las funciones del Problema 1 (Spivak, capítulo 11.) y halle todos los puntos máximos y mínimos locales.

Respuesta.-

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$$

De donde los puntos críticos están dados por:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x+4)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{4}{3}, \quad x_2 = 2.$$

Ya que f' existe, entonces podemos calcular f''.

$$f''(x) = 6x - 2.$$

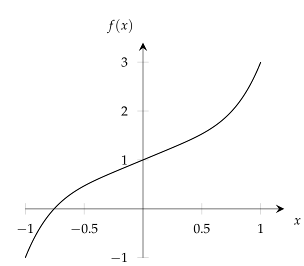
Luego, calculamos $f''\left(-\dfrac{4}{3}\right)$ y $f''(2)$.

$$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 6\left(-\frac{4}{3}\right) - 2 = -10 < 0 \quad ; \quad f''(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 10 > 0$$

Por lo tanto, $-\dfrac{4}{3}$ es un punto máximo local y 2 es un punto mínimo local.

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 5x^4 + 1.$$

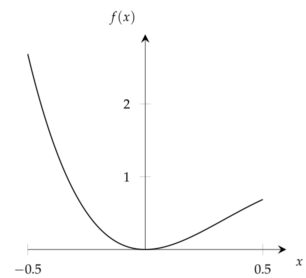
En este caso podemos ver que no existen puntos críticos, ya que

$$5x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = -\frac{1}{5}.$$

no tiene soluciones reales. Y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x.$$

De donde los puntos críticos están dados por:

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Ya que f' existe, entonces podemos calcular f''.

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12.$$

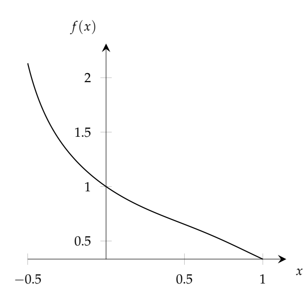
Luego, por el hecho de que $f''(1)$ no está contenido en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$ solo calcularemos $f''(0)$.

$$f''(0) = 36 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 12 = 12.$$

Por el teorema 11.6 de Spivak, vemos que $f'' = 12 \geq 0$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$, por lo tanto, 0 es un punto máximo local.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = -\frac{5x^4+1}{x^5+x+1}.$$

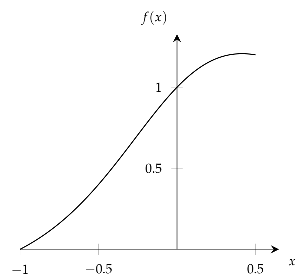
En este caso podemos ver que no existen puntos críticos, ya que

$$-\frac{5x^4+1}{x^5+x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^4+1=0.$$

no tiene soluciones en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

De donde los puntos críticos están dados por:

$$\frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2x-x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1\pm\sqrt{2}.$$

Ya que f' existe, entonces podemos calcular f''.

$$f''(x) = \frac{-2\left[(x^2+1)(x+1)+2x(1-2x-x^2)\right]}{(1+x^2)^3}.$$

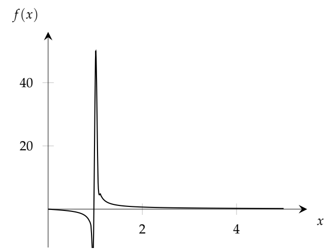
Luego, por el hecho de que $f''(-1-\sqrt{2})$ no está contenido en el intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}.\right]$ solo calcularemos $f''\left(-1+\sqrt{2}\right)$. Así, dado que

$$f''\left(-1+\sqrt{2}\right) < 0$$

Entonces $-1+\sqrt{2}$ es un máximo local.

(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ en $[0,5]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

En este caso podemos ver que no existen puntos críticos, ya que

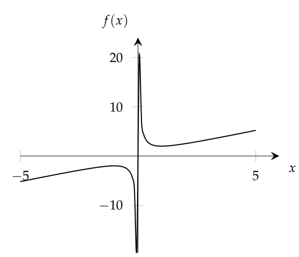
$$-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-1=0.$$

no tiene soluciones reales. Y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

3. Trace las gráficas de las siguientes funciones:

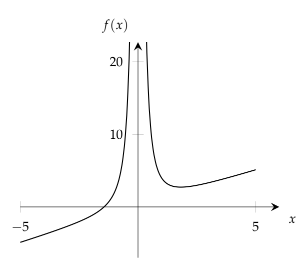
(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Respuesta.-



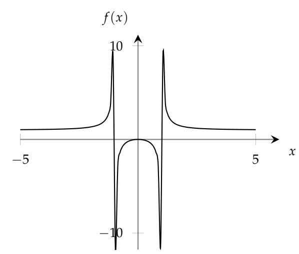
(ii) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$.

Respuesta.-



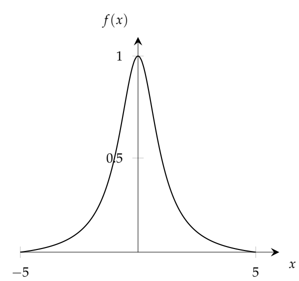
(iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Respuesta.-



(iv) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Respuesta.-



4. (a) Si $a_1 < \ldots < a_n$ halle el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$.

Respuesta.- Primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 2(x - a_1) \cdot 1 + 2(x - a_2) \cdot 1 + \ldots + 2(x - a_n) \cdot 1 = 2 \sum_{i=1}^{n} (x - a_i).$$

Luego encontremos los puntos críticos igualando $f'(x)$ cero.

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n}(x - a_i) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x - a_1) + (x - a_2) + \ldots + (x - a_n) = 0 \\ &\Rightarrow \quad nx = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i. \end{aligned}$$

Veamos ahora si este punto crítico es un mínimo o un máximo local. Para ello calculamos la segunda derivada de f.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2' \left[\sum_{i=1}^{n} (x - a_i) \right] + 2 \left[\sum_{i=1}^{n} (x - a_i) \right]' \\ &= 2(1 + 1 + \ldots + 1) \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Ya que $2n > 0$, entonces podemos decir que el punto crítico $x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ es un mínimo local de f.

Por lo tanto,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i) \right]^2.$$

(b) Halle ahora el valor mínimo de $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x - a_i|$. Este es un problema en el que el cálculo infinitesimal no nos puede ayudar. En los intervalos entre los a_i la función f es lineal, por tanto el valor mínimo se localiza en uno de los a_i, y estos son, precisamente, los puntos en los cuales la función f no es diferenciable. Sin embargo, la solución es fácil de encontrar si se considera como varía $f(x)$ al pasar de un intervalo a otro.

Respuesta.- Tomemos dos puntos a y b en $[a_{i-1}, a_i]$ y $[a_i, a_{i+1}]$ respectivamente. Tal que

$$|a - a_i| = |b - a_i|.$$

Notemos que

$$\begin{array}{rcll} |b - a_j| & = & |a - a_j| + |a - b| & \text{si } j \leq i - 1 \\ |b - a_j| & = & |a - a_j| - |a - b| & \text{si } j \geq i + 1 \end{array}$$

Luego, vemos que

$$\begin{array}{rcl} f(b) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |b - a_j| \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |b - a_j| + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} |b - a_j| \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \big(|a - a_j| + |a - b|\big) + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} \big(|a - a_j| - |a - b|\big) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |a - a_j| + (i-1)|a - b| + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} |a - a_j| - (n-i)|a - b| \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |a - a_j| + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} |a - a_j|(i-1) - (n-i)|a - b| \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |a - a_j| + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} |a - a_j| + (2i - n - 1)|a - b| \end{array}$$

Se sigue que $f(b) \geq f(a)$ siempre que

$$2i - n - 1 \geq 0 \quad \text{o} \quad i \geq \frac{n+1}{2}.$$

Por otro lado, de manera similar, $f(b) \leq f(a)$ siempre que

$$2i - n - 1 \leq 0 \quad \text{o} \quad i \leq \frac{n+1}{2}.$$

Así, tenemos a f decreciente si $i \leq \dfrac{n+1}{2}$ y f creciente si $i \geq \dfrac{n+1}{2}$. De esta manera f alcanza su mínimo en $a_{\frac{n+1}{2}}$ si n es impar y está en el intervalo $\left[a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}\right]$. Por lo tanto, el valor mínimo de f es $f\left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)$ si n es impar y $f\left(a_{\frac{n}{2}}\right)$ si n es par.

(c) Sea $a > 0$. Demuestre que el valor máximo de

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

es $(2+a)/(1+a)$. (Puede hallarse por separado la derivada en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ y (a, ∞)).

Respuesta.- La función dada se puede escribir como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-x+a} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x+a} & \text{si} \quad 0 < x < a \\ \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+x-a} & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

Notemos que f es diferenciable en cada intervalo $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ y (a, ∞). Por lo que podemos hallar sus respectivas derivadas,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1-x+a)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1-x+a)^2} & \text{si} \quad 0 < x < a \\ \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+x-a)^2} & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

el cual demuestra que $f'(x) > 0$ si $(-\infty, 0)$ y $f'(x) < 0$ si (a, ∞), esto ya que $(1-x)^2$ y $(1 \pm x + a)^2$ son positivos. Además, vemos que

$$f(0) = 1 + \frac{1}{1+a} = f(a) > 0$$

ya que $a > 0$. Así, f es creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[a, \infty]$, donde se concluye que f en $\mathbb{R}$ alcanza su punto máximo en algún punto del intervalo $[0, a]$. Ahora, verificamos si el máximo de f se alcanza en algún punto en $(0, a)$. Si b es tal punto, entonces

$$-\frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1-b+a)^2} = 0,$$

el cual implica,

$$(1+x)^2 - (1-x+a)^2 = (2+a)(2b-a) = 0.$$

Así, $b = \dfrac{a}{2}$. Es más,

$$f(0) = f(a) = 1 + \frac{1}{1+a} = \frac{2+a}{1+a}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{a}{2}} = \frac{4}{2+a} < \frac{2+a}{1+a}$$

lo que muestra que $\dfrac{2+a}{1+a}$ es el máximo valor de f en $[0, a]$.

5. Para cada una de las siguientes funciones, halle todos los puntos máximos y mínimos locales.

(i)

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 3,5,7,9\\ 5, & x=3\\ -3, & x=5\\ 9, & x=7\\ 7, & x=9\end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que todos los puntos locales máximo y mínimos deben estar en el conjunto $\{3,5,7,9\}$, ya que, aparte de estos puntos, f cumple la función identidad. Ahora vemos por la definición de f que

$$f(3)=5>3 \text{ y } 5>x, \text{ para todo } x\in(3-\delta,3+\delta), \text{ para } 0<\delta<1.$$

Así, 3 es un punto máximo local.

Para $x=5$ tenemos por la definición de f que

$$f(5)=-3<x \text{ para todo } x\geq 0.$$

Así, 5 es un punto mínimo local.

También vemos por la definición de f que

$$f(7)=9>7 \text{ y } 9>x, \text{ para todo } x\in(7-\delta,7+\delta), \text{ para } 0<\delta<1.$$

Así, 7 es un punto máximo local.

Para $x=5$ tenemos por la definición de f que

$$f(9)=7<9 \text{ y } 7<x, \text{ para todo } x\in(9-\delta,9+\delta), \text{ para } 0<\delta<1.$$

Así, 9 es un punto mínimo local.

(ii)

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ irracional}\\ 1/q, & x=p/q \text{ fracción irreducible.}\end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que cada número irracional x es un mínimo local de f ya que , en el caso de que $f(x)=0$ y $f(y)=\dfrac{1}{q}>0$, para cualquier racional $y=p/q$. Por otro lado, no existe un punto máximo local. De hecho, vemos por la definición de f que el máximo local sólo puede ocurrir para los números racionales. Pero para cualquier racional $x=p/q$, $f(x)=1/q<p/q=x$ si $p>0$ y $f(x)=1/q>p/q=x$ si $p<0$ pero $f(x)>0=f(y)$, para cualquier número racional y.

(iii)

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ racional}\\ 0, x & \text{irracional.}\end{cases}$$

Respuesta.- Observamos que todo número irracional positivo x es un mínimo local de f. Ya que, en este caso, $f(x)=0$ y $f(y)=y>0$, para cualquier racional $y\geq 0$. Por otro lado, para cualquier racional $y\leq 0$, tenemos $f(y)=y\leq 0$ y por lo tanto cualquier número irracional estrictamente negativo es un máximo local de f.

(iv)
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}, 1/n$ es un punto local máximo a partir de la definición de f, $f(\frac{1}{n}) = 1$, y $f(x) = 0$. Similarmente, vemos que para cada número real tal que $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es un punto mínimo local, ya que en este conjunto f es idénticamente 0. Además si f es constante para cada número real tal que $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, entonces es un punto máximo y mínimo local a la vez, excepto el punto 0, ya que para cada $\epsilon > 0$, $(-\delta, \delta)$ contiene infinitos $1/n$, esto por la propiedad Arquimediana de los números reales.

(v)
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ si el desarrollo decimal de } x \text{contiene un 5} \\ 0, & x \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que para cada

$$x \in \{x \in \mathbb{R} : \text{el desarrollo decimal de } x \text{contiene a 5}\}$$

es un punto máximo local a partir de la definición de f. Es este caso, $f(x) = 1$ y f es 0. Similarmente, vemos que cada número real tal que,

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{el desarrollo decimal de } x \text{contiene a 5}\}$$

es un punto mínimo local, ya que en este conjunto f es idénticamente 0. Además, ya que f es constante, tenemos que cada número en el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{el desarrollo decimal de } x \text{contiene a 5}\}$$

es un punto máximo local y un punto mínimo local, excepto el punto 0, ya que para cada $\delta > 0$, $(-\delta, \delta)$ contiene infinitos puntos con al menos un 5 en su expansión decimal, esto por la propiedad Arquimediana de los números reales

6. Demuestre la siguiente propiedad (que se utiliza muchas veces de manera implícita): si f es creciente en (a, b) y continua en a y b, entonces f es creciente en $[a, b]$. En particular, si f es continua en $[a, b]$ y $f > 0$ en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.

Demostración.- Sea $x, y \in [a, b]$ tal que x<y. Ya que f es creciente en (a, b), entonces f es también creciente en (x, y). Por el teorema de valor medio, existe un $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0.$$

Si f es creciente en (x, y),
$$f'(c) \geq 0 \text{ para todo } c \in (x, y).$$

Por el hecho de que $y - x > 0$, entonces

$$f(x) < f(y).$$

De esta manera, x e y son número arbitrarios en $[a, b]$ y por lo tanto f es creciente en $[a, b]$.

7. Se traza una recta desde el punto $(0,a)$ hasta el eje horizontal y desde allí otra a $(1,b)$, tal como se indica en la Figura 23 (Spivak). Demuestre que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales. (Naturalmente, deberá entrar en juego una función: expresar la longitud en términos de x, donde $(x,0)$ es el punto del eje horizontal. La línea a trazos de la Figura 23 sugiere una demostración geométrica; tanto en un caso como en otro puede resolverse el problema sin necesidad de hallar el punto $(x,0)$.)

Demostración.- De la figura dada, encontramos que la longitud total del camino está dada por:

$$f(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(1-x)^2+b^2}.$$

Para la longitud más corta, obtenemos la primera derivada y la igualamos con cero

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+b^2}} = 0.$$

Reemplazando $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ con $\cos\alpha$ y $\dfrac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+b^2}}$ con $\cos\beta$, obtenemos

$$\cos\alpha - \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

8. (a) Sea (x_0, y_0) un punto del plano, y sea L la gráfica de la función $f(x) = mx + b$. Halle el punto $\overline{x}$ tal que la distancia de (x_0, y_0) a $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ sea mínima. [Observe que minimizar esta distancia equivale a minimizar su cuadrado. Esto puede simplificar, en cierta medida, los cálculos.]

Respuesta.- La distancia entre (x_0, y_0) y algún punto x que satisfaga $f(x) = mx + b$ es:

$$d^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - mx - b)^2$$

Derivando a ambos lados con respecto a x,

$$2dd' = -2(x_0 - x) + 2m(y_0 + mx - b)$$

Por la distancia más corta, entonces $d' = 0$. Luego,

$$-x_0 + x - my_0 + m^2x + bm = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_0 + my_0 - bm}{m^2+1}.$$

(b) Halle también $\overline{x}$ observando que la recta que va de $(x_0.y_0)$ a $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ es perpendicular a L.

Respuesta.- La distancia más corta ocurre cuando la linea de (x_0, y_0) es perpendicular a L,

$$x = \frac{x_0 + my_0 - bm}{m^2+1}.$$

(c) Halle la distancia de (x_0, y_0) de L. Es decir, la distancia de (x_0, y_0) a $(\overline{x}, f(\overline{x}))$. [Facilitará los cálculos suponer primero que $b = 0$; luego aplicar el resultado a la gráfica de $f(x) = mx + b$ y el punto $(x_0, y_0 - b)$].

Respuesta.- Sea la ecuación dada en el inciso (a),

$$d = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - mx - b)^2}.$$

Supongamos $b=0$, entonces

$$d=\sqrt{x_0^2-2x_0x+x^2+y_0^2-2my_0x+m^2x^2} \quad\Rightarrow\quad d=\sqrt{\left(m^2+1\right)x^2-2\left(x_0+my_0\right)x+x_0^2+y_0^2}.$$

Reemplazando x con $\dfrac{x_0+my_0}{m^2+1}$,

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(\frac{x_0+my_0}{m^2+1}\right)^2-2\frac{\left(x_0+my_0\right)^2}{m^2+1}+x_0^2+y_0^2} \\ &= \sqrt{-\frac{\left(x_0+my_0\right)^2}{m^2+1}+x_0^2+y_0^2} \\ &= \sqrt{\frac{-x_0^2-2mx_0y_0-m^2y_0^2+x_0^2m^2+y_0^2m^2+x_0^2+y_0^2}{m^2+1}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(y_0-mx_0\right)^2}{m^2+1}} \end{aligned}$$

Reemplazando y_0 con y_0-b, concluimos que,

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left(y_0-b-mx_0\right)^2}{m^2+1} \\ &= \frac{y_0-b-mx_0}{\sqrt{m^2+1}} \end{aligned}$$

(d) Considere una recta descrita mediante la ecuación $Ax+By+C=0$. Demuestre que la distancia de (x_0,y_0) a esta recta es $\left(Ax_0+By_0+C\right)/\sqrt{A^2+B^2}$.

Demostración.- Sea la ecuación:

$$Ax+By+C=0$$

de donde, encontrar la pendiente $m=-\dfrac{A}{B}$. Substituyendo en la ecuación de la parte (c), se tiene

$$d=\frac{y_0-b+\dfrac{A}{B}x_0}{\sqrt{\left(-\dfrac{A}{B}\right)^2+1}}$$

Luego, multiplicando ambos lados por $\dfrac{B}{B}$,

$$\begin{aligned} d &= \frac{Ax_0+By_0-bB}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{supongamos } bB=-C. \end{aligned}$$

9. El problema anterior (8, Michael Spivak, capítulo 11) sugiere la siguiente cuestión: ¿cuál es la relación entre los puntos críticos de f y los de f^2?.

Respuesta.- Los puntos críticos de una función son los puntos en los que la función no es diferenciable o su primera derivada es cero. Sabemos que para definir los puntos críticos se iguala f' a cero y para los puntos críticos podemos igualar también $\left(f^2\right)'$ a cero, lo que implica

$$\left(f^2\right)' = 2ff'$$

Por lo tanto, los puntos críticos de f son subconjuntos de los puntos críticos de f^2.

10. Demuestre que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

Demostración.- Sean l el largo, a el ancho y p el perímetro del rectángulo. Entonces,

$$p = 2(l+a) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{p}{2} - l.$$

Sabemos que el área, llamémosla A, está dada por:

$$A = l \cdot a$$

De donde,

$$A = l\left(\frac{p}{2} - l\right) = \frac{p}{2}l - l^2.$$

Derivando con respecto a l, se tiene

$$A' = \frac{p}{2} - 2l.$$

Luego igualando a cero, se tiene

$$\frac{p}{2} - 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{p}{4}.$$

Por el corolario 11.3 y sabiendo que si $f' < 0$ en $\left(-\infty, \frac{p}{4}\right)$ y $f' > 0$ en $\left(\frac{p}{4}, \infty\right)$. Entonces, $\frac{p}{4}$ es un punto mínimo local.

Luego, reemplazando $l = \frac{p}{4}$ en $a = \frac{p}{2} - l$, se tiene

$$a = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = l.$$

Por lo tanto, el área del rectángulo es la más pequeña cuando su largo es igual a su ancho y se convierte en un cuadrado.

11. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, halle el de menor superficie (incluyendo las superficies de las caras superior e inferior como en la Figura 24, Spivak, capítulo 11.).

Respuesta.- El volumen V de un cilindro con radio r y altura h es:

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Luego, el área total A de un cilindro está dada por:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Reemplazado h en esta ecuación, se tiene

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Derivando con respecto a r, se tiene

$$A' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Luego igualando a cero,

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}.$$

Por el corolario 11.3 y sabiendo que si $f' < 0$ en $\left(-\infty, \dfrac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}\right)$ y $f' > 0$ en $\left(\dfrac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}, \infty\right)$.

Entonces, $\dfrac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}$ es un punto mínimo local.

Reemplazando r en $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, obtenemos

$$h = \frac{V}{\pi\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}.$$

Por lo tanto, el área superficial del cilindro es la más pequeña cuando su radio es $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ y su altero es $\dfrac{V}{\pi\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}$.

12. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a gira alrededor de uno de sus lados, generando un cono circular recto. Halle el volumen máximo que puede tener este cono.

Respuesta.- El volumen V de un cono con radio r y alguna altura h es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$a^2 = r^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Reemplazando en $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, se tiene

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{a^2 - r^2} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{r^4 a^2 - r^6}.$$

Derivando con respecto a r,

$$V' = \frac{1}{3}\pi\frac{4r^3a^2 - 6r^5}{\sqrt{r^4a^2 - r^6}}.$$

Luego igualando a cero,

$$\frac{4r^3a^2 - 6r^5}{\sqrt{r^4a^2 - r^6}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 - 3r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Reemplazando r en $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, obtenemos

$$V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{4}{9}a^6 - \frac{8}{27}a^6} = \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{4}{27}a^6} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}a^3.$$

El cual es el mayor volumen.

13. Demuestre que la suma de un número positivo y de su recíproco es al menos 2.

Demostración.- Sean a un número positivo y $\frac{1}{a}$ para $a \neq 0$ es su reciproco. Definamos la suma sum de estos dos números, como sigue

$$sum = a + \frac{1}{a}.$$

Derivando con respecto a a,

$$sum' = 1 - \frac{1}{a^2}.$$

Luego igualando a cero,

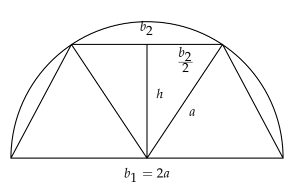
$$1 - \frac{1}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1.$$

Ya que a es un número positivo, solo se evaluará en $a = 1$. Por el corolario 11.3, y sabiendo que si $sum' < 0$ cuando $(0,1)$ y $sum' > 0$ cuando $(1,\infty)$. Es decir sum es decreciente cuando $(0,1)$ y creciente cuando $(1,\infty)$. Entonces a es un punto mínimo. Luego reemplazando a en $sum = a + \frac{1}{a}$ se tiene,

$$sum = 1 + 1 = 2.$$

14. Halle el trapezoide de mayor área que puede ser inscrito en un semicírculo de radio a, con una base situada a lo largo del diámetro.

Respuesta.- Tracemos primero una gráfica.



Por la esta figura, tenemos:

$$b_2 = 2\sqrt{a^2 - h^2}.$$

Sabemos que el área del trapezoide está dado por:

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h.$$

Reemplazando b_1 con $2a$ y b_2 con $2\sqrt{a^2-h^2}$, se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(2a+2\sqrt{a^2-h^2}\right)h \\ &= ah+\sqrt{a^2h^2-h^4}. \end{aligned}$$

Derivando con respecto a x,

$$\begin{aligned} A' &= a+\frac{2a^2h-4h^3}{2\sqrt{a^2h^2-h^4}} \\ &= \frac{a\sqrt{a^2h^2-h^4}+a^2h-2h^3}{\sqrt{a^2h^2-h^4}}. \end{aligned}$$

Luego igualando a cero,

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2h^2-h^4}+a^2h-2h^3 &= 0 \\ a\sqrt{a^2-h^2}+a^2-2h^2 &= 0 \\ a^2\left(a^2-h^2\right) &= 4h^4-4a^2h^2+a^4 \\ h &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{aligned}$$

Evaluando h en $A=ah+\sqrt{a^2h^2-h^4}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\sqrt{\frac{3}{4}a^4-\frac{9}{16}a^4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad . \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

15. Dos pasillos de anchuras a y b, forman un ángulo recto (Figura 25,Spivak, capítulo 11). ¿Cuál es la longitud máxima de una escalera que puede ser transportada horizontalmente alrededor de la esquina?.

Respuesta.- Por la figura dada, tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{b}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Y

$$\cos\theta=\frac{a}{L-x} \quad \Rightarrow \quad L-x=\frac{a}{\cos\theta}.$$

De donde, reemplazando la primera ecuación en la segunda, se tiene:

$$L=\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Derivando con respecto a θ,

$$\begin{aligned} L' &= \frac{a\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}-\frac{b\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \frac{a\operatorname{sen}^3\theta-b\cos^3\theta}{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}. \end{aligned}$$

Para la mayor longitud posible, igualamos L' a cero,

$$\begin{aligned}
a \operatorname{sen}^3\theta - b\cos^3\theta &= 0\\
a \operatorname{sen}^3\theta &= b\cos^3\theta\\
\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^3\theta} &= \frac{b}{a}\\
\tan^3\theta &= \frac{b}{a}\\
\tan\theta &= \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\\
\operatorname{sen}\theta &= \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2}}\\
\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2}}
\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de sen y cos en $L = \dfrac{a}{\cos\theta} + \dfrac{b}{\operatorname{sen}\theta}$, para obtener la mayor longitud posible, se tiene:

$$L = a\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2} + b\frac{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}.$$

16. Se diseña un jardín en forma de un sector circular (Figura 26, Spivak, capítulo 11), de radio R y ángulo central θ . El jardín debe tener un área fija A. ¿Para qué valor de R y θ (en radianes) será mínima la longitud de la valla alrededor del perímetro del jardín?.

Respuesta.- El área del jardín es:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2A}{r^2}.$$

Después, el perímetro del jardín está dado por:

$$P = r\theta + 2r.$$

Luego, reemplazando por $\theta = \dfrac{2A}{r^2}$:

$$P = \frac{2A}{r} + 2r.$$

Derivando con respecto a r,

$$P' = \frac{-2A}{r^2} + 2.$$

Para hallar el valor de r que minimiza P, igualamos P' a cero,

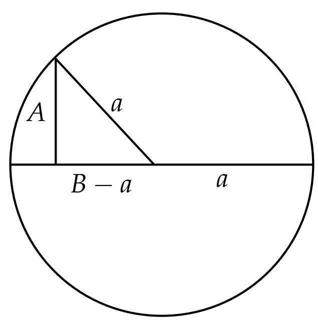
$$\begin{aligned} \frac{-2A}{r^2} + 2 &= 0 \\ \frac{2A}{r^2} &= -2 \\ r^2 &= A \\ r &= \sqrt{A}. \end{aligned}$$

Reemplazando en $\theta = \dfrac{2A}{r^2}$, se tiene:

$$\theta = \frac{2A}{(\sqrt{A})^2} = \frac{2A}{A} = 2.$$

17. Un ángulo recto se desplaza a lo largo del diámetro de un círculo de radio a, tal como se muestra en la Figura 27 (Spivak, Capítulo 11). ¿Cuál es la mayor longitud posible $(A + B)$ interceptada por el círculo sobre el ángulo?.

Respuesta.- Complementando el dibujo dado, podríamos construir:



Donde podemos definir lo siguiente:

$$A = \sqrt{a^2 - (B-a)^2} = \sqrt{2aB - B^2}$$

$$S = A + B = \sqrt{2aB - B^2} + B.$$

Derivando con respecto a B,

$$S' = \frac{2a - 2B}{\sqrt{2aB - B^2}} + 1.$$

Para la mayor longitud posible, igualamos S' a cero,

$$\begin{aligned}
\frac{2a-2B}{2\sqrt{2aB-B^2}} &= 0 \\
B-a &= \sqrt{2aB-B^2} \\
B^2-2aB+a^2 &= 2aB-B^2 \\
2B^2-4aB+a^2 &= 0 \\
B &= \frac{4a\pm\sqrt{16a^2-4\cdot 2a^2}}{2\cdot 2} \\
B &= \frac{2a\pm\sqrt{2}a}{2} = \left(1+\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a.
\end{aligned}$$

Luego, sea $B = a\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, entonces reemplazando en $A=\sqrt{2aB-B^2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{2a^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left[a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2} \\
A &= \frac{\sqrt{2}a}{2}.
\end{aligned}$$

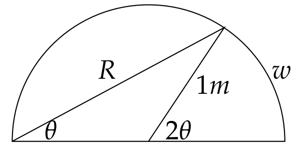
Sea ahora $B = a\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, entonces reemplazando en $A=\sqrt{2aB-B^2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{2a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left[a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2} \\
A &= \frac{\sqrt{2}a}{2}.
\end{aligned}$$

18. El ecólogo Ed debe cruzar un lago circular de 1 milla de radio. Puede remar a través del lago a una velocidad de 2 millas por hora, o caminar alrededor del lago a una velocidad de 4 millas por hora; también puede remar un cierto trecho y completar el itinerario caminando (Figura 28, Spivak, capítulo 11). ¿Qué ruta debe tomar de manera que:

(i) pueda ver la mayor cantidad de paisaje posible?.

Respuesta.- Sea,



Sea R que representa la distancia que el hombre recorrerá y W la distancia que caminerá como se muestra en la figura anterior, de donde

$$W = 2r\theta = 2\theta$$

Y

$$R^2 = 1^2 + 1^2 = -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\pi - 2\theta).$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$,

$$R^2 = 2 + 2\cos(2\theta) \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{2 + 2\cos(2\theta)}.$$

Luego, la longitud D del camino total viene dada por:

$$D = R + W = 2\theta + \sqrt{2 + 2\cos(2\theta)}.$$

Derivando con respecto a θ,

$$D' = 2 - \frac{4\,\mathrm{sen}(2\theta)}{2\sqrt{2 + 2\cos(2\theta)}}$$

Para hallar la mayor longitud posible, igualamos D' a cero,

$$\begin{array}{rcll}
2 - \dfrac{4\,\mathrm{sen}(2\theta)}{2\sqrt{2+2\cos(2\theta)}} & = & 0 & \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{sen}(2\theta)}{\sqrt{2+2\cos(2\theta)}} & = & 1 & \\[2ex]
\mathrm{sen}(2\theta) & = & \sqrt{2+2\cos(2\theta)} & \\[1ex]
\mathrm{sen}^2(2\theta) & = & 2 + 2\cos(2\theta) & \\[1ex]
1 - \cos^2(2\theta) - 2\cos(2\theta) + 1 & = & 0 & \qquad \mathrm{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \\[1ex]
\cos^2(2\theta) + 2\cos(2\theta) + 1 & = & 0 & \\[1ex]
[\cos(2\theta) + 1]^2 & = & 0 & \\[1ex]
\cos(2\theta) & = & -1 & \\[1ex]
2\theta & = & \pi & \qquad 2\theta = \arccos(-1) \\[1ex]
\theta & = & \dfrac{\pi}{2} &
\end{array}$$

Reemplazando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ en $W = 2\theta$ y $R = \sqrt{2 + 2\cos(2\theta)}$ se tiene

$$W = \pi \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{2 + 2\cos(\pi)} = 0.$$

(ii) pueda cruzar tan rápida como sea posible? Respuesta.- Aplicando la fórmula,

$$tiempo = \frac{distancia}{velocidad}$$

Se tiene que el tiempo total es:

$$T = \frac{W}{4} + \frac{R}{2}.$$

Reeemplazando W con 2θ y R con $\sqrt{2+2\cos(2\theta)}$,

$$T = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos(2\theta)}.$$

Derivando con respecto a θ,

$$T' = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{2+2\cos(2\theta)}}.$$

Para el tiempo mínimo, igualamos T' a cero,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{2+2\cos(2\theta)}} &= 0 \\
2\operatorname{sen}(2\theta) &= \sqrt{2+2\cos(2\theta)} \\
4\operatorname{sen}^2(2\theta) &= 2+2\cos(2\theta) \\
4 - 4\cos^2(2\theta) - 2\cos(2\theta) - 2 &= 0 \qquad\qquad \operatorname{sen}^2(\theta) = 1-\cos^2(\theta) \\
2\left[2 - 2\cos^2(2\theta) - \cos(2\theta) - 1\right] &= 0 \\
[2\cos(2\theta) - 1]\,[\cos(2\theta)+1] &= 0 \\
\cos(2\theta) = \frac{1}{2} \quad &\text{o} \quad \cos(2\theta) = -1 \\
2\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \quad &\text{o} \quad 2\theta = \arccos(-1) \\
\theta = \frac{\pi}{6} \quad &\text{o} \quad \theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{6}$,

$$W = \frac{\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}.$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$W = \pi \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{2+2\cos(\pi)} = 0.$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{\pi}{4}.$$

19. (a) Considere los puntos A y C de un círculo, con cetro O, formando un ángulo $\alpha = \angle AOC$ (figura 29, Spivak, capítulo 11). ¿Cómo debe elegirse el punto B de manera que la suma de las áreas del triángulo $\triangle AOB$ y del triángulo $\triangle BOC$ sea máxima? Indicación: Exprese todo en función de $\theta = \angle AOB$.

Respuesta.- La suma de las áreas de los dos triángulos es:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}(\alpha - \theta). \\ &= \frac{1}{2}r^2 \left[\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\alpha - \theta)\right]. \end{aligned}$$

Diferenciando con respecto a θ se tiene,

$$S' = \frac{1}{2}r^2 \left[\cos(\theta) - \cos(\alpha - \theta)\right].$$

Para que la suma de las áreas sea máxima, igualamos S' a cero,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) - \cos(\alpha - \theta) &= 0 \\ \cos(\theta) &= \cos(\alpha - \theta) \\ \theta &= \alpha - \theta \\ 2\theta &= \alpha \end{aligned}$$

Por lo que el área máxima se tendra que poner $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$.

(b) Demuestre que para $n \geq 3$, de todos los n-ágonos inscritos en un círculo, el n-ágono regular es el de área máxima.

Demostración.- Todo polígono inscrito en una circunferencia se puede dividir en triángulos isósceles como los del apartado (a) de este problema en el que probamos que el área máxima se da cuando los ángulos centrales son iguales.
Generalizando este resultado para cualquier número de triángulos, encontramos que para el área máxima, todos los ángulos de los vértices deben ser iguales, por lo tanto, las bases son iguales y el polígono es regular.

20. Se dobla la esquina inferior derecha de una página de manera que coincida con el margen izquierdo del papel, como se muestra en la Figura 30 (Spivak, capítulo 11). Si la anchura del papel es α y la página es muy larga, demuestre que la longitud mínima del pliegue es $3\sqrt{3}\alpha/4$.

Demostración.- Completando la figura 30, tenemos:

Sea θ la medida del ángulo BGF. Como $\triangle BGF$ tiene un ángulo recto en B, entonces $m\angle BFG = 90^\circ - \theta$. Luego, como $\triangle BGF$ es congruente con $\triangle EGF$, entonces $m\angle EFG = 90^\circ - \theta$. Se sigue,

$$\begin{aligned} m\angle AFE &= 180^\circ - m\angle BFG - m\angle EFG \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \theta) - (90^\circ - \theta) \\ &= 2\theta \end{aligned}$$

Después podemos hallar el $\cos(2\theta)$, y hallar la longitud L.

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \frac{AF}{EF} = \frac{\alpha - L\operatorname{sen}\theta}{L\operatorname{sen}\theta} \\
L\operatorname{sen}(\theta)\cos(2\theta) &= \alpha - L\operatorname{sen}(\theta) \\
L\operatorname{sen}(\theta) + L\operatorname{sen}(\theta)\cos(2\theta) &= \alpha - L\operatorname{sen}(\theta) + L\operatorname{sen}(\theta) \\
L\operatorname{sen}(\theta)\left[\cos(2\theta)+1\right] &= \alpha \\
\text{Aplicando el hecho de} & \quad \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow 1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) \\
2L\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta) &= \alpha \\
L &= \frac{\alpha}{2\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)}
\end{aligned}$$

Ahora diferenciando con respecto a θ se tiene,

$$\begin{aligned}
L' &= -\frac{2\alpha\left[\cos(\theta)\cos^2(\theta) - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\right]}{\left[2L\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\right]^2} \\
&= -\frac{2\alpha\left[\cos^3(\theta) - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\right]}{\left[2L\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\right]^2}
\end{aligned}$$

Para que la longitud sea mínima, igualamos L' a cero,

$$\begin{aligned}
-\frac{2\alpha\left[\cos^3(\theta) - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\right]}{\left[2L\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\right]^2} &= 0 \\
\cos^3 - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta) &= 0 \\
\cos^2(\theta) - 2\operatorname{sen}^2(\theta) &= 0 \\
1 - 3\operatorname{sen}^2\theta &= 0 \qquad \cos^2(\theta) = 1 + \operatorname{sen}^2(\theta) \\
\operatorname{sen}^2(\theta) &= \frac{1}{3} \\
\operatorname{sen}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Luego, para hallar $\cos^2(\theta)$ podemos utilizar la identidad trigonométrica, $\cos^2(\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2(\theta)$ y reemplazar $\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1}{3}$, tenemos

$$\cos^2(\theta) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Reemplazando en la expresión de L se tiene,

$$L = \frac{\alpha}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}\alpha}{4}.$$

21. La Figura 31 (Spivak, capítulo 11) muestra la gráfica de la derivada de f. Halle todos los puntos máximos y mínimos locales de f.

Respuesta.- Por la gráfica notemos que:

$$f'(1) = 0.$$

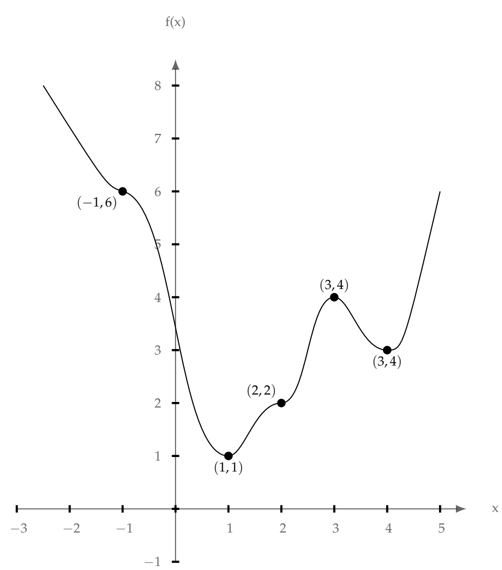
Por el corolario 11.3 y sus respectivas reglas de máximo y mínimo locales, podemos deducir que f' es positivo cuando $x < 1$ y negativo cuando $x > 1$. Entonces $f(x)$ tiene un máximo local en $x = 1$.
Por otro lado vemos que:

$$f'(3) = 0.$$

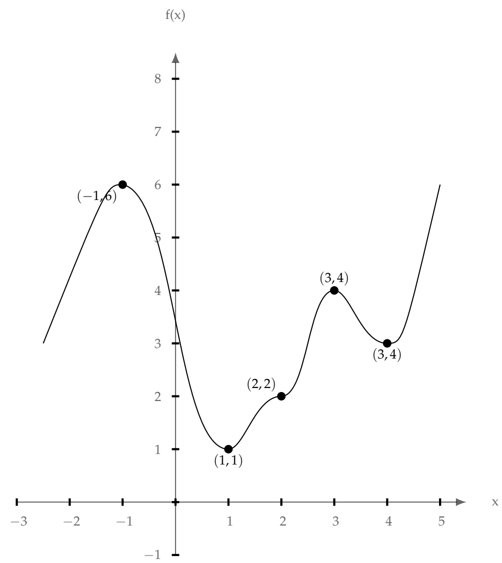
Ya que f' es negativa cuando $x < 3$ y positivo cuando $x > 3$. Entonces por el corolario 11.3 y sus respectivas reglas de máximo y mínimo f tiene un mínimo local en $x = 3$.

22. Supongamos que f es una función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ con puntos críticos $-1, 1, 2, 3, 4$ y sus correspondientes valores críticos $6, 1, 2, 4, 3$. Trace la gráfica distinguiendo los casos n par y n impar.

Respuesta.- Cuando n es par, se tiene

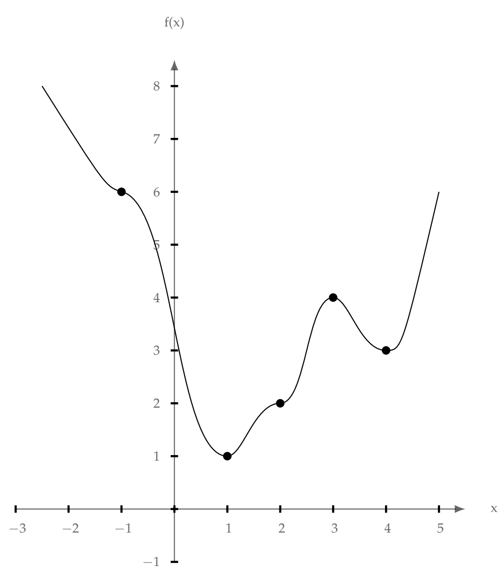


Para n impar, se tiene

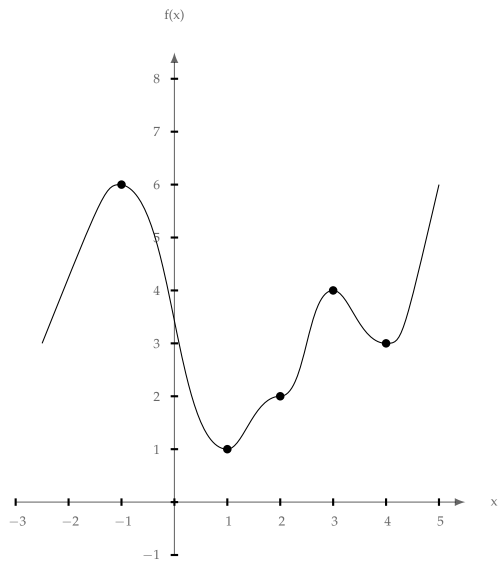


23. (a) Suponga que los puntos críticos de la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ son $-1, 1, 2, 3$ y que $f''(-1) = 0$, $f''(2) < 0$, $f''(3) = 0$. Trace la gráfica de f tan exacatamente como sea posible basándose en esta información.

Respuesta.- Ya que, la segunda derivada de $x = 1$ es positiva, entonces por el teorema 11.5 se tiene un mínimo local. Luego, como la segunda derivada en $x = 2$ es positiva, entonces por el teorema 11.5 es un máximo local. Los puntos x=-1 y -3 son puntos de inflexión. Cuando n es par, se tiene



Para n impar, se tiene



(b) ¿Existe una función polinómica con las propiedades anteriores, excepto que 3 no sea un punto crítico?.

Respuesta.- Si 3 no es uno de los puntos críticos, y $x = 2$ es el máximo, entonces la función decrecerá en el intervalo 3 hasta el infinito. Por lo tanto, la segunda derivada en 3 no puede ser cero. Así, no es posible que exista una función polinómica con las propiedades anteriores.

24. Describa la gráfica de una función racional (en términos muy generales, análogamente a la descripción del texto de la gráfica de una función polinómica).

Respuesta.- La gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 0$. La gráfica de $f(x) = \dfrac{ax^n + \ldots}{bx^m + \ldots}$ tiene una asíntota vertical en $x = a$ si el denominador es cero en y el numerador no es cero.

Si	$n < m$	entonces la eje x es la asíntota horizontal.
Si	$n = m$	entonces la linea $y = \dfrac{a}{b}$ es la asíntota horizontal.
Si	$n > m$	no habrá asíntotas horizontales.

25. (a) Demuestre que dos funciones polinómicas de grados m y n, respectivamente, se cortan a lo sumo en $\max(m, n)$ puntos.

Demostración.- Sean dos funciones polinómicas f de grado n y g de grado m tal que $m \geq n$. Es decir,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

para $a_n \neq 0$ y $a_m \neq 0$. Luego vemos que,

$$\begin{array}{rcl} (f-g)(x) & = & f(x) - g(x) \\ & = & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 - \left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right) \\ & = & a_n x^n + \ldots + a_{m+1}x^{m+1} - b_m x^m + (a_m - b_m)x^m + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 + b_0) \end{array}$$

Este último ya que $n \geq m$. Acá mostramos que $f - g$ es también un polinomio de grado $n = \max(m, n)$. Ahora, supongamos que a es un punto de intersección de f y g, si y sólo si, $f(a) = f(b)$. Podemos reescribir de la siguiente manera,

$$(f - g)(a) = 0.$$

De esto, podemos deducir que los puntos de intersección de f y g son los ceros de $f - g$. Así, por el problema 7 parte (c) del capitulo 3 de Spivak tenemos que $f - g$ puede tener por lo mucho n ceros. Como $n \geq m$, entonces $n = \max(m, n)$. Lo que demuestra que f y g se intersecan como máximo en $\max(m, n)$ puntos.

(b) Para cada m y n muestre dos funciones polinómicas de grados m y n que se corten $\max(m, n)$ veces.

Demostración.- Sea p un polinomio de grado n y $q(x) = x^m$ un polinomio de grado m con $n \geq m$. Supongamos otro polinomio $f = p + q$, de la parte (a) tenemos que el grado de f es n ya que $n \geq m$. Luego, observemos que $p = f - q$ y el grado de p es n. Así, $p = f - q$ pueden tener por lo mucho n raíces, esto es, f y q se intersecan por lo mucho en $n = \max(m, n)$ veces.

26. Suponga que f es una función polinómica de grado n con $f \geq 0$ (por tanto n debe ser par). Demuestre que $f + f' + f'' + \ldots + f^{(n)} \geq 0$.

Demostración.- Sea

$$h(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(n)}(x).$$

Diferenciando se tiene,

$$h'(x) = f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x).$$

Ya que, $f^{(n+1)}(x) = 0$, entonces

$$h'(x) = f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(n)}(x).$$

Luego, supongamos

$$g(x) = e^{-x}h(x).$$

Diferenciando se tiene,

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-x}\left[h'(x) - h(x)\right] \\ &= -e^{-x}\left[h(x) - h'(x)\right] \\ &= -e^{-x}f(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces $g(x)$ es decreciente. Después, por el hecho de que $h(x)$ implica $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, tenemos $g(x) \geq 0$. Por lo tanto $h(x) \geq 0$.

27. (a) Suponga que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ tiene exactamente k puntos críticos y $f''(x) \neq 0$ para todos los puntos críticos x. Demuestre que $n - k$ es impar.

Demostración.- Supongamos que nos dan la función f con k raíces, o cuya multiplicidad total de toda las raíces es k. Por el problema 7.4 Spivak, se sabe que $n - k$ es par. También sabemos que, una vez dados n y k tales que $n - k$ es par, existe alguna función polinómica de grado n que tiene k raíces, o cuya multiplicidad total de todas las raíces es k. Sea

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Asumiendo que la función polinómica $f(x)$ tiene puntos críticos k para los cuales $f''(x) \neq 0$. Lo que significa que $f'(x)$ tiene k raíces únicas, (la unicidad se deduce del hecho de que $f''(x) \neq 0$). Ya que f tiene grado n, f' debería tener grado $n-1$. Luego por el hecho de que $f'(x)$ tiene k raíces, se sigue que $n-1-k$ es par. Por lo tanto, no es difícil deducir que $n-k$ tendría que ser impar.

(b) Para cada n, demuestre que existe una función polinómica f de grado n con k puntos críticos, en cada uno de los cuales f'' es distinta de cero si $n-k$ es impart.

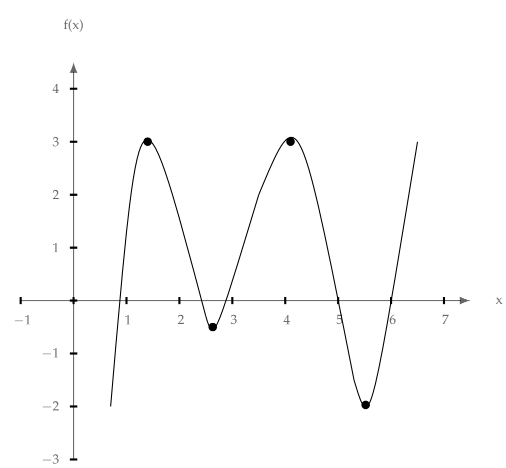
Demostración.- Supongamos que para algunos números naturales n y k, $n-k$ es impart. Esto significa que $n-k-1$ será par. De la parte discusión previa a la parte (a) se deduce que existe alguna función polinómica g de grado $n-1$ con exactamente k raíces. Sea f la función tal que $f' = g$. De donde no es difícil deducir que esta función f tiene grado n y k puntos críticos, que son en realidad raíces de la función g. Por lo tanto, la función f es la función requerida.

(c) Suponga que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ tiene k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales. Demuestre que $k_2 = k_1 + 1$ si n es par y $k_2 = k$; si n es impar.

Demostración.- Sea

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

un polinomio con k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales. Notemos que $k = k_1 + k_2$, que podemos ordenarlas en secuencias crecientes $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Como el coeficiente principal de los polinomios es positivo, tenemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Esto significa que la función es creciente a medida que tiende al infinito. Luego el punto crítico final a_k debe ser el mínimo local, ya que la función es creciente a la derecha del mismo. De aquí se deduce que la función será decreciente a la izquierda de a_k. Decimos que el penúltimo punto crítico a_{k-1} a k_1 será máximo local ya que la función disminuirá a la derecha de él, y por tanto aumentará a la izquierda del mismo. Repitiendo esta deducción podemos deducir que los máximos y los mínimos cambiarán periódicamente. Es decir, los mínimos y máximos locales se distribuirán como en el gráfico siguiente.



Ahora observaremos dos casos distintos, cuando n es par y es impar.

Caso 1. Supongamos que n es par. No es difícil deducir que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Si aplicamos la misma lógica que la anterior, podemos decir que a_1 será el mínimo local, ya que la función es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de a_1, así podremos deducir que a_2 será un máximo local. Por lo que es cierto que:

$$a_n = \begin{cases} \text{máximo local} & n = 2m \\ \text{mínimo local} & n = 2m+1. \end{cases}$$

Ya que a_k es un mínimo local, basado en el anterior análisis, se sigue que k es impar, es decir $k = 2m+1$. Por lo tanto, los mínimos locales son $a_1, a_3, \ldots, a_k$ mientras que los máximos locales son $a_2, a_4, \ldots, a_{k_1}$.

Caso 2. Supongamos que n es impar. No es difícil deducir que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Si aplicamos la misma lógica que la anterior, podemos decir que a_1 será el máximo local, ya que la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha de a_1, así podremos deducir que a_2 será un mínimo local. Por lo que es cierto que:

$$a_n = \begin{cases} \text{máximo local} & n = 2m+1 \\ \text{mínimo local} & n = 2m. \end{cases}$$

Ya que a_k es un mínimo local, basado en el anterior análisis, se sigue que k es par, es decir $k = 2m$. Por lo tanto, los mínimos locales son $a_1, a_3, \ldots, a_{k_1}$ mientras que los máximos locales son $a_2, a_4, \ldots, a_k$.

(d) Queremos encontrar la función polinómica de grado n con k_1 mínimos locales y k_2 máximos locales, donde n, k_1, k_2 son números dados. Sean $k = k_1 + k_2$ y los números reales arbitrarios $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Luego observemos la función

$$g(x) = \prod_{i=i}^{k}(x - a_i)\left(1 + x^2\right)^m$$

donde $m = \frac{n-1-k}{2}$. No es difícil deducir que esta función tiene grado $n-1$. La razón por la que elegimos este tipo de funciones es porque $1 + x^2 > 0$ para todo número real x lo que implica que $(1+x^2)^m > 0$ y el signo de la función sólo depende del producto $\prod_{i=1}^{k}(x - a_i)$. Podemos notar que este producto es positivo siempre que $x \in (a_k, \infty) \cup (a_{k-1}, a_k) \cup (a_{k-3}, a_{k-2}) \cup \ldots$. Mientras que será negativo si $x \in (a_{k-2}, a_{k-1}) \cup (a_{k-4}, a_{k-3}) \cup \ldots$. Sea la función f tal que $f'(x) = g(x)$, de donde tenemos que $a_k, a_{k-2}, \ldots$ son mínimos locales mientras que $a_{k-1}, a_{k-3}, \ldots$ son máximos locales de la función f.

28. (a) Demuestre que si $f'(x) > M$ para todo x de $[a,b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.

Demostración.- Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a).$$

De donde notamos que h es una función continua en $[a,b]$ ya que ambos, f y $(x-a)$ son continuas. Además, h es diferenciable en (a,b), porque también f y $(x-a)$ lo son. Luego observemos que,

$$h(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](a - a) = f(a)$$

y

$$h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$$

Por lo que podemos utilizar el teorema de Rolle de la siguiente manera. Ya que h es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y $h(a)=h(b)$, entonces existe un número c en (a,b) tal que $h'(c)=0$. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} h(x) & = & f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x-a\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \\ h'(x) & = & f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \\ h'(c) & = & f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0. \end{array}$$

Lo que implica por hipótesis que,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(c)\geq M \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq M.$$

Así,

$$f(b)\geq f(a)+M(b-a).$$

(b) Demuestre que si $f'(x)\leq M$ para todo x de $[a,b]$ entonces $f(b)\leq f(a)+M(b-a)$.

Demostración.- Sea $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ como sigue:

$$h(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a).$$

De donde notamos que h es una función continua en $[a,b]$ ya que ambos, f y $(x-a)$ son continuas. Además, h es diferenciable en (a,b), porque también f y $(x-a)$ lo son. Luego observemos que,

$$h(a)=f(a)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](a-a)=f(a)$$

y

$$h(b)=f(b)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](b-a)=f(b)-f(b)+f(a)=f(a).$$

Por lo que podemos utilizar el teorema de Rolle de la siguiente manera. Ya que h es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y $h(a)=h(b)$, entonces existe un número c en (a,b) tal que $h'(c)=0$. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} h(x) & = & f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x-a\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \\ h'(x) & = & f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \\ h'(c) & = & f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0. \end{array}$$

Lo que implica por hipótesis que,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(c)\leq M \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M.$$

Así,

$$f(b)\leq f(a)+M(b-a).$$

(c) Formule un teorema análogo cuando $|f'(x)| \leq M$ para todo x en $[a,b]$.

Respuesta.- Para algún $M \in \mathbb{R}$, queremos hallar,

$$-M \leq f'(x) \leq M.$$

Usando la parte (a) y (b) deducimos que,

$$f(b) \geq f(a) - M(b-a) \quad \text{y} \quad f(b) \leq f(a) + M(b-a).$$

Lo que implica,

$$-M(b-a) \leq f(b) - f(a) \quad \text{y} \quad f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Así,

$$-M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Y por lo tanto,

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

29. Suponga que $f'(x) \geq M > 0$ para todo x de $[0,1]$. Demuestre que existe un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ en el cual $|f| \geq M/4$.

Demostración.- Ya que $f' > 0$ en $[0,1]$, entonces sabemos que es continuo y estrictamente creciente, y puede tomar el valor 0 como máximo una vez. Se sigue que $f(x) \geq 0$ en $[1/2,1]$ o $f(x) \leq 0$ en $[0,1/2]$. Lo primero ocurre si toma el valor 0 en algún punto menor que o igual a $1/2$; la segunda ocurre si toma el valor 0 en algún punto mayor que o igual a $1/2$; y si no toma nunca el valor 0, entonces o bien es siempre negativo en cuyo caso ocurre lo segundo, o siempre es positivo, en cuyo caso ocurre lo primero.
Luego, suponga que $f(x) \geq 0$ en $[1/2,1]$, así por el teorema del valor medio,

$$\frac{f(3/4) - f(1/2)}{1/4} \geq M,$$

así $f(3/4) - f(1/2) \geq M/4$, y ya que $f(1/2) \leq 0$ se sigue que $-f(1/4) \geq M/4$ o $f(1/4) \leq -M/4$. Pero sabiendo que f es estrictamente creciente, tenemos $f(x) \leq -M/4$ para todo $x \in [0,1/4]$, por lo tanto $|f| > M/4$ en un intervalo de longitud $1/4$.

30. (a) Suponga que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

Demostración.- Consideremos la función $h = f - g$, la cual es una función diferenciables. Ya que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, entonces $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, así $h'(x) > 0$ para todo x.
Sea $x > a$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (a,x)$ tal que

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(c) > 0,$$

de donde $h(x) > h(a)$. Por el hecho de que $f(a) = g(a)$, se tiene $h(a) = 0$, lo que implica $h(x) > 0$. Por lo tanto concluimos que $f(x) > g(x)$.
Por otro lado, sea $x < a$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (x,a)$ tal que

$$\frac{h(a) - h(x)}{a - x} = h'(c) > 0,$$

así $h(x) < h(a) = 0$ y $f(x) < g(x)$.

(b) Demuestre mediante un ejemplo que estas conclusiones no son válidas sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.

Demostración.- Sea $f(x) = 10x$, $g(x) = 5x + 100$ y tomemos $a = 0$. Tenemos,

$$f'(x)10 > 5 = g'(x), \ \forall x.$$

Pero no se cumple para todo x tal que $f(x) > g(x)$, ya que f comienza a ser mayor que g cuando $x = 20$.
De manera similar, se cumplirá que $f(x) < g(x)$ cuando $x = -20$.
No es posible encontrar un sólo ejemplo de un par de funciones f y g con un número a tal que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, ambos

$$f(x) > g(x), \ \forall x > a \qquad \text{y} \qquad f(x) < g(x), \ \forall x < a$$

siendo falsos. En su lugar, si $f(a) = g(a)$ entonces ambas afirmaciones son verdaderas. Si $f(a) > g(a)$, entonces repitiendo la primera parte de la prueba anterior, cuando se tenga $h(x) > h(a)$, tenemos $h(a) = f(a) - g(a) > 0$, y así, todavía $h(x) > 0$ o $f(x) > g(x)$ para $x > a$. Similarmente, si $f(a) < g(a)$ entonces por la segunda parte de la demostración anterior se tiene $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

(c) Suponga que $f(a) = g(a)$, que $f'(x) \geq g'(x)$ para todo x y que $f'(x_0) > g'(x_0)$ para algún $x_0 > a$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para todo $x \geq x_0$.

Demostración.- Si $f(x_0) = g(x_0)$, entonces la prueba nos será la misma que la parte (a), inmediatamente nos permite concluir que $f(x) > g(x)$ para todo $x > x_0$.
Si $f(x_0) > g(x_0)$, entonces por la parte final de (b) nos permite concluir que $f(x) > g(x)$ para todo $x > x_0$. Así, que terminaremos la demostración si podemos demostrar que $f(x_0) \geq g(x_0)$.
Aplicando el teorema del valor medio para h en $[a, x_0]$ tenemos

$$\frac{h(x_0) - h(a)}{x_0 - a} = h'(c) \geq 0,$$

así, $h(x_0) \geq h(a) = 0$, en efecto $f(x_0) \geq g(x_0)$.

31. Halle las funciones f tales que

(a) $f'(x) = \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Podemos considerar la función $f(x) = -\cos x + c$, para alguna c constante. Luego,

$$f'(x) = -(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x.$$

(b) $g''(x) = x^3$.

Respuesta.- Consideremos la función $g(x) = \dfrac{x^5}{15} + x + c$ para alguna c constante. Luego, tenemos la primera diferenciación como:

$$g'(x) = \frac{5x^4}{15} + 1 = \frac{x^4}{3} + 1$$

La segunda diferenciación será:

$$g''(x) = \frac{3x^3}{3} = x^3.$$

(c) $f'''(x) = x + x^2$.

Respuesta.- Podemos considerar la función $f(x) = \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{60} + x^2 + x + c$ para alguna c constante. Luego, tenemos la primera diferenciación como:

$$f'(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + x + 1.$$

La segunda diferenciación será:

$$f''(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 1.$$

Y la tercera diferenciación será:

$$f'''(x) = x + x^2.$$

32. Si bien es verdad que un peso que se suelta partiendo del reposo caerá $s(t) = 16r^2$ pies en t segundos, este hecho experimental no menciona el comportamiento de los pesos que son lanzados hacia arriba o hacia abajo. Por otra parte, la ley $s''(t) = 32$ se cumple siempre y tiene la ambigüedad suficiente para explicar el comportamiento de un peso soltado desde cualquier altura y con cualquier velocidad inicial. Para mayor sencillez convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo; en este caso las velocidades son positivas para cuerpos que se elevan y negativas para cuerpos que caen, y todos los cuerpos caen según la ley $s''(t) = -32$.

(a) Demuestre que s es de la forma $s(t) = -16t^2 + \alpha t + \beta$.

Demostración.- Se tiene,

$$\begin{array}{rcl} s''(t) & = & -32 \\ s'(t) & = & -32t + \alpha \\ s(t) & = & -16t^2 + \alpha t + \beta. \end{array}$$

(b) Haciendo $t = 0$ en la fórmula para s, y después en la fórmula para s', demuestre que $s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0$, donde s_0 es la altura desde la cual el cuerpo es soltado en el tiempo 0, y v_0 es la velocidad con el cual se suelta.

Demostración.- Reemplazando $t = 0$ en la ecuación para $s'(t)$ tenemos

$$s'(0) = v_0 = \alpha.$$

Luego, reemplazando $t = 0$ en la ecuación para $s(t)$ se tiene

$$s(0) = s_0 = \beta.$$

Substituyendo los valores de α y β en la ecuación para $s(t)$,

$$s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0.$$

(c) Se lanza un peso hacia arriba con una velocidad de v pies por segundo desde el nivel del suelo. ¿A qué altura llegará? (A qué altura significa ¿cuál es la máxima altura para todos los tiempos?) ¿Cuál es su velocidad en el momento en que alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la aceleración en dicho momento? ¿Cuándo llegará otra vez al suelo? ¿Cuál será su velocidad en el momento de alcanzar el suelo?.

Respuesta.- Sea $s_0 = 0$ y $v_0 = v$,

$$\begin{array}{rcl} s(t) & = & -16t^2 + vt \\ s'(t) & = & -32t + v. \end{array}$$

Para la altura máxima. Sea $s'(t) = 0$, de donde

$$\begin{array}{rl} -32t + v = 0 & \Rightarrow \quad 32t = v \\ & \Rightarrow \quad t = \dfrac{v}{32}. \end{array}$$

Reemplazando $t = \dfrac{v}{32}$ en la ecuación para $s(t)$ conseguimos la distancia máxima,

$$\begin{array}{rcl} s\left(\dfrac{v}{32}\right) & = & -16\left(\dfrac{v}{32}\right)^2 + v\left(\dfrac{v}{32}\right) \\ & = & -\dfrac{v^2}{64} + \dfrac{v^2}{32} \\ & = & \dfrac{v^2}{64}. \end{array}$$

La velocidad en la altura máxima será:

$$s'\left(\frac{v}{32}\right) = -\frac{32v}{32} + v = 0.$$

La aceleración en la altura máxima será:

$$s''\left(\frac{v}{32}\right) = -32.$$

Para encontrar el momento en el que el peso vuelve a tocar el suelo, sea $s(t) = 0$, es decir

$$-16t^2 + vt = 0.$$

de donde,

$$t(-16t + v) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{v}{16}.$$

Por lo tanto el peso tocará el suelo de nuevo en

$$t = \frac{v}{16}.$$

33. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad v y según un ángulo a (Figura 32) de modo que su componente vertical de velocidad es $v \operatorname{sen} \alpha$ y la componente horizontal $v \cos \alpha$. Su distancia $s(t)$ sobre el nivel del suelo obedece a la ley $s(t) = -16t^2 + (v \operatorname{sen} \alpha)t$, mientras que su velocidad horizontal se mantiene con el valor constante $v \cos \alpha$.

(a) Demuestre que la trayectoria de la bala es una parábola (halle la posición para cada tiempo t, y demuestre que estos puntos están sobre una parábola).

Demostración.- Sea x el desplazamiento horizontal en el tiempo t, entonces

$$x = (v\cos\alpha)t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\alpha}.$$

Dado que la distancia vertical sobre el suelo es,

$$s(t9 = -16t^2 + (v\,\text{sen}\,\alpha)t.$$

Reemplazando t con $\dfrac{x}{v\cos\alpha}$, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} s(t) & = & -16\left(\dfrac{x}{v\cos\alpha}\right)^2 + (v\,\text{sen}\,\alpha)\left(\dfrac{x}{v\cos\alpha}\right) \\ & = & -\dfrac{16}{v^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x. \end{array}$$

El cual tiene la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

Lo que $-\dfrac{16}{v^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$ representa una parábola.

(b) Halle el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.

Respuesta.- La distancia horizontal x viene dado por:

$$x = (v\cos\alpha)t.$$

Diferenciando ambos lados con respecto a α, obtenemos:

$$x' = -(v\,\text{sen}\,\alpha)t.$$

Para poder minimizar la distancia horizontal, igualemos $x' = 0$,

$$\begin{array}{rcl} -(v\,\text{sen}\,\alpha)t & = & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & = & 0 \\ \alpha & = & 0. \end{array}$$

34. (a) Dé un ejemplo de una función f para la cual exista el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, pero no exista el $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \frac{\text{sen}\,(x^2)}{x}.$$

De donde,

$$\lim_{x\to infty} f(x) = 0,$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{2x^2\,\text{sen}\,(x^2) - \text{sen}\,(x^2)}{x^2} \\ & = & 2\,\text{sen}\,(x^2) - \dfrac{\text{sen}\,(x^2)}{x^2}. \end{array}$$

pero, $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ no existe.

(b) Demuestre que si existen el $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y el $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Demostración.- Sea f una función diferenciable tales que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existe. Entonces se tiene que mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

Sea $\lim_{x\to\infty} f'(x) = a$. Entonces, por la definición de límite, tenemos que existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$

$$|f'(x) - a| < \frac{|a|}{2},$$

el cual es equivalente a

$$-\frac{|a|}{2} < f'(x) - a < \frac{|a|}{2}, \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Ahora, sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > N$. Entonces usando el teorema del valor medio para f en el intervalo $[N, y]$ obtenemos que existe un número real $x_0 \in [N, y]$ tal que

$$f(y) - f(N) = f'(x_0)(y - N),$$

lo que implica que

$$f(y) = f(N) + f'(x_0)(y - N) > f(N) + \left(a - \frac{|a|}{2}\right)(y - N).$$

Ahora, la desigualdad anterior se cumple para todo $y > N$. Así, como $y \to \infty$, $f(y)$ se vuelve sin límites si $a \neq 0$. Por lo tanto, $\lim_{y\to\infty}$ no existe si $a \neq 0$. A partir de la hipótesis tenemos que $\lim_{y\to\infty} f(y)$ existe, de donde concluimos que $a = 0$. Lo que complementa la demostración.

(c) Demuestre que si existe el $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y existe el $\lim_{x\to\infty} f''(x)$, entonces el $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$. (Vea también el problema 20-22).

Demostración.- Sea f una función diferenciable tales que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f''(x)$ existe. Entonces, tenemos que demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0.$$

Luego, asumamos que

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

Por la parte (b) tenemos que existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f'(x) > f'(N) + \left(a - \frac{|a|}{2}\right)(x - N), \text{ para todo } x > N.$$

Esto muestra que

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty.$$

Si $a \neq 0$. Por el teorema del valor medio para f en el intervalo $[0, x]$ con $x \in \mathbb{R}$ y $x > N$ obtenemos

$$f(x) - f(0) = f'(x_0)x, \text{ para algún } x_0 \in [0, x].$$

Lo que implica,

$$f(x) = f(0) + f'(x_0)x, \text{ para algún } x_0 \in [0, x],$$

lo que a su vez se tiene

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + f'(x_0) \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

Pero esto contradice nuestra hipótesis en f'. Así tenemos que $a = 0$, lo que completa la demostración.

35. Suponga que f y g son dos funciones diferenciables que satisfacen $fg' - f'g = 0$. Demuestre que si $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo x de un intervalo alrededor de a. Indicación: Demuestre que en cualquier intervalo en el que f/g esté definida, es constante.

Demostración.- Para cualquier intervalo en el que se defina f/g, se tiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Por el hecho de que $fg' - f'g = 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = 0.$$

Por lo tanto, f/g es constante.

36. Suponga que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^n$ para $n > 1$. Demuestre que f es constante considerando f'. Compare con el problema 3.20.

Demostración.- Ya que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^n$ para $n > 1$, entonces

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^{n-1}, \text{ para } n > 1.$$

Lo que equivale a

$$0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^m \text{ para } m > 0.$$

Luego notemos que

$$\lim_{x\to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = 0.$$

Ya que, la función es continua, entonces

$$\left| \lim_{y\to x} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| = 0.$$

Lo que implica que

$$\lim_{y\to x} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = 0.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = 0.$$

37. Una función f es Lipschitz de orden α en x si existe una constante C tal que

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

para todo y de un intervalo alrededor de x. La función f de Lipschitz de orden α en un intervalo si $(*)$ se verifica para todo x e y del intervalo.

(a) Si f es Lipzchitz de orden $\alpha > 0$ en x, entonces f es continua en x.

Demostración.- Ya que f es una función de Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x. Por definición, existe un $\delta' > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \text{ para todo } y \in (x - \delta', x + \delta') \qquad (1)$$

para alguna constante $C \geq 0$ (dado que $|f(x) - f(y)|,\ |x-y| \geq 0$). Sea $\epsilon > 0$, entonces tomamos $0 < \delta < \frac{1}{2}\min\left\{\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \delta'\right\}$. Por (1) ya que $\delta < \delta'$, tenemos en $y \in (x-\delta, x+\delta)$, que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}. \qquad (2)$$

Además, vemos que si $y \in (x-\delta, x+\delta)$, entonces

$$|x-y| < 2\delta < 2\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Por lo tanto, por (2) tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} < C\left[\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} = \epsilon.$$

Esto muestra que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ cuando } |x-y| < \delta.$$

Así, f es continua en x.

(b) Si f es Lipzchitz de orden $\alpha > 0$ en un intervalo, entonces f es uniformemente continua en este intervalo. (Vea el Capítulo 8, Apéndice.)

Demostración.- Sea $\epsilon > 0$. Entonces tomemos $0 < \delta < \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Ahora ya que f es Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en $[a,b]$ tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \text{ para todo } x, y \in [a,b]. \qquad (3)$$

Luego, sea x, y cualesquiera puntos en $[a,b]$ tal que $|x-y| < \delta$. Entonces, vemos por (3), que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} < C\delta^{\alpha} < C\left[\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} = \epsilon,$$

siempre que $|x-y| < \delta$. Así, f es uniformemente continua en $[a,b]$.

(c) Si f es diferenciable en x, entonces f es Lipzchitz de orden 1 en x. ¿Es cierta la recíproca?.

Demostración.- Como f es una función diferenciable en x. Entonces, por definición de diferenciabilidad

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = l, \text{ para algún } l \in \mathbb{R}.$$

Después, por definición de límite, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y} - l\right| < \epsilon \text{ siempre que } |x-y| < \delta.$$

Luego, por la desigualdad triangular

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x)\right| \geq \left|\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| - |f'(x)|\right|.$$

Por tanto,

$$\left|\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| - |f'(x)|\right| < \epsilon \text{ siempre que } |x-y| < \delta.$$

De ello, se tiene que si $|x-y| < \delta$, entonces

$$\sqrt{\left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| - |f'(x)|\right)^2} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| - |f'(x)| < \sqrt{\epsilon^2} = |\epsilon| = \epsilon.$$

Lo que implica

$$|f(x)-f(y)| < \big(|f'(x)| + \epsilon\big)\, |x-y| \text{ siempre que } |x-y| < \delta.$$

Ahora, sea $C \geq (|f'(x)| + \epsilon)$, de donde

$$|f(x)-f(y)| < C|x-y| \text{ siempre que } |x-y| < \delta,$$

por lo tanto, f es Lipschitz de orden 1 en x.
El recíproco no es cierto. Por ejemplo se puede tomar la función $f(x) = |x|$. Entonces f es Lipschitz de orden 1 en cualquier punto x, ya que

$$|f(x)-f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x-y|,$$

donde la última desigualdad se cumple a partir de la desigualdad triangular. Pero f no es diferenciable en 0.

(d) Si f es diferenciable en $[a,b]$. ¿es f Lipschiz de orden 1 en $[a,b]$?.

Respuesta.- Si f es diferenciable en $[a,b]$, entonces f puede no ser Lipschitz de orden 1 en $[a,b]$. Por ejemplo, sea

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}.$$

Podemos observar que f es diferenciable en $[0,1]$, pero no es Lipschitz de orden 1 en $[0,1]$.

(e) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en $[a,b]$, entonces f es constante en $[a,b]$.

Demostración.- Sea f una función Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en $[a,b]$. Entonces,tenemos que mostrar que f es constante en $[a,b]$. Por definición de función Lipschitz se tiene,

$$|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \text{ para todo } x,y \in [a,b]$$

con $C \geq 0$ constante. Como $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{\alpha}$ para $\alpha > 1$ tenemos

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^{\alpha-1}, \text{ para } \alpha > 1$$

Que equivale a,

$$0 \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^{\beta}, \text{ para } \beta > 0.$$

Del problema 13 del capítulo 5 de Spivak,

$$\lim_{y\to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = 0.$$

De donde,

$$\left| \lim_{y\to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = 0,$$

lo que implica

$$\lim_{y\to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = 0$$

y f es una función constante.

38. Demuestre que si

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

entonces

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

para algún x de $(0,1)$.

Demostración.- Consideremos la función $f:(0,1)\to(0,1)$ definida por:

$$f(x) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Entonces, vemos que al ser una función polinomial f es diferenciable en $(0,1)$. Es más,

$$f(0) = 0 = f(1) = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1}.$$

Donde la última igualdad se cumple a partir de la hipótesis. Así, aplicando el teorema de Rolle a f en $(0,1)$ se tiene

$$f'(x) = 0$$

para algún $x\in(0,1)$. Ahora bien, calculamos que

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Lo que completa la demostración.

39. Demuestre que, cualquiera que sea m, la función polinómica $f_m(x) = x3 - 3x + m$ no tiene nunca dos raíces en $[0,1]$.(Esto es una consecuencia fácil del Teorema de Rolle. Resulta instructivo, una vez efectuada la demostración analítica, trace las gráficas de f_0 y f_1, y considerar la posición de la gráfica de f_m en relación con ellas.)

Demostración.- Supongamos que f_m tiene dos raíces in $[0,1]$, digamos x_0 y x_1 con $0\leq x_0 < x_1 \leq 1$. Entonces se tiene,

$$f_m(x_0) = f_m(x_1) = 0.$$

Además, f_m es diferenciable en $[0,1]$. Aplicando el teorema de Rolle, vemos que existe $x\in(x_0,x_1)$ tal que

$$f_m'(x) = 0.$$

Ya que, $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$ tenemos $x \in (0,1)$. Ahora, calculamos $f_m'(x)$ de donde,

$$f_m'(x) = 3x^2 - 2 = 3\,(x_2 - 1)\,,$$

lo que implica que $f_m'(x) = 0$, si y sólo si $x = \pm 1$. Pero esto contradice la conclusión de que $x \in (0,1)$. Por lo tanto, la función polinómica $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene dos raíces en $[0,1]$.

40. Suponga que f es continua y diferenciable en $[0,1]$, que $f(x)$ está en $[0,1]$ para cada x, y que $f(x) \neq 1$ para todo x de $[0,1]$. Demuestre que existe exactamente un número x en $[0,1]$ tal que $f(x) = x$. (La mitad de este problema ya ha sido resuelta en el Problema 7-11.)

Demostración.- Suponga que existe dos números, x_1 y x_2, en $[0,1]$ tal que $f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = x_2$. Luego, consideremos la función $g : [0,1] \to [0,1]$ definido por la fórmula

$$g(x) = f(x) - x.$$

Entonces, vemos que g es también diferenciable en $[0,1]$, ya que, tanto la función identidad como f lo son. Además,

$$g(x_i) = f(x_i) - x_i = x_i - x_i = 0$$

para $i = 1, 2$. Así, por el teorema de Rolle, existe un número $x \in (x_1, x_2)$ tal que

$$g'(x) = 0.$$

Pero, esto implica que

$$f'(x) = 1$$

como,

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

el cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, mostramos que existe exactamente un número $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

41. (a) Demuestre que la función $f(x) = x^2 - \cos x$ satisface $f(x) = 0$ para exactamente dos números x.

Demostración.- La función f tiene al menos dos ceros en $[-1,1]$, ya que $f(0) < 0$, mientras que $f(\pm 1) > 0$. Si f tuviese más de dos ceros, entonces f' podría tener al menos dos ceros. Pero

$$f'(x) = 2x + \operatorname{sen} x$$

es una función creciente, ya que

$$f''(x) = 2 + \cos x \geq 1$$

para todo x.

(b) Demuestre lo mismo para la función $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$.

Demostración.- La función f tiene al menos dos ceros ya que $f(0) < 0$ mientras $f(\pm) > 0$. Si f tiene más de dos ceros, entonces f' podría tener al menos dos ceros. Pero

$$f'(x) = 2x - x\cos x = x(2 - \cos x)$$

es 0 sólo para $x = 0$.

(c) Demuéstrelo también para la función $f(x) = 2x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos^2 x$. (Será útil hacer algunas estimaciones preliminares para restringir la posible localización de los ceros de f.)

Demostración.- Tenemos $f(0) < 0$, mientras $f(x)$ será > 0 para $|x|$ grande, ya que $|x \operatorname{sen} x|$ es pequeño en comparación con $2x^2$ y $|\cos^2 x| \leq 1$. De hecho, escribiendo

$$f(x) = 2x(2x - \operatorname{sen} x) - \cos^2 x,$$

y notando que $2x - \operatorname{sen} x > 1$ para $x > 1$, vemos que $f(x) > 0$ para $x > 1$, y también para $x < -1$, pues f es par. Así, f tiene por lo menos dos zeros en $[-1, 1]$, y sin ceros fuera de $[-1, 1]$. Si f tiene más de dos zeros, entonces f' podría tener dos ceros en $[-1, 1]$. Pero

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x - \operatorname{sen} x - x \cos x + 2 \cos x \operatorname{sen} x \\ &= 4x - \operatorname{sen} x - x \cos x + \operatorname{sen} 2x, \end{aligned}$$

lo que, es creciente en $[-1, 1]$, ya que

$$f''(x) = 4 - 2\cos x + x \operatorname{sen} x + 2\cos 2x$$

el cual, es ≥ 1 en $[-1, 1]$, donde $x \operatorname{sen} x > 0$ en $[-1, 1]$, mientras $|\cos x|, |\cos 2x| \leq 1$.

42. (a) Demuestre que si f es una función dos veces diferenciable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$, entonces $|f''(x)| \geq 4$ para algún x de $(0, 1)$. En términos más pintorescos: una partícula que recorre una distancia unidad en la unidad de tiempo,y empieza y termina con velocidad 0, tiene algún momento una aceleración ≥ 4. Indicación: Demuestre que o bien $f''(x) \geq 4$ para algún x de $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, o bien $f''(x) \leq -4$ para algún x de $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Demostración.- Suponga que $f''(x) < 4$ para todo $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Entonces, por el teorema de valor medio, para todo $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tenemos

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''\left(x'\right)$$

para algún $x' \in [0, x]$. Así $f'(x) < 4x$. Si establecemos $h(x) = 2x^2$, entonces $f(0) = h(0)$ y $f08x) < h'(x)$, y se sigue por el problema 30 que $f(x) < h(x)$ en $[0, \frac{1}{2}]$, por lo que $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$.
El mismo tipo de análisis puede ser aplicado para f en $[\frac{1}{2}, 1]$, El cual mostraremos que si $f''(x) > -4$ en $[\frac{1}{2}, 1]$ entonces $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$, (o podemos considerar la función $f(x) = 1 - f(1 - x)$.). Es obvio que no podemos tener ambas posibilidades, por lo tanto $|f''(x)| \geq 4$ para $[0, 1]$.

(b) Demuestre que de hecho debe verificarse que $|f''(x)| > 4$ para algún x de $(0, 1)$.

Demostración.- Note primero que no podemos tener $f''(x) = 4$ para $0 < x < \frac{1}{2}$ y también $f''(x) = -4$ para $\frac{1}{2} < x \leq 1$, ya que esto podría implicar que $f'(x) = 4x$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $f'(x) = -4x$ para $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, en cuyo caso $f''(\frac{1}{2})$ podría no existir. Por otro lado, si tenemos $f''(x) \leq 4$ para todo x en $(0, \frac{1}{2})$ pero $f''(x) < 4$ para al menos un x, entonces tenemos $f'(x_0) < 3x_0$ para al menos un x_0, y en consecuencia $f(x) < 2x^2$ para todo $x \geq x_0$, así que $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$; si tuviéramos también $f''(x) \geq -4$ para todo x en $(\frac{1}{2}, 1)$, entonces $f(\frac{1}{2}) \geq \dfrac{1}{2}$, es una contrdicción.

43. Suponga que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y $f(1) = 0$. Demuestre que $f(xy) = f(x) - f(y)$ para todo $x, y > 0$. Indicación: Halle $g'(x)$ cuando $g(x) = f(xy)$.

Demostración.- Consideremos la función f definida como sigue:

$$g(x) = f(xy), \; y > 0.$$

Entonces, usando la regla de Leibniz vemos que

$$g'(x) = yf'(xy) = y\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} = f'(x).$$

Así, existe una constante c tal que

$$g(x) = f(x) + c$$

para todo $x > 0$. Luego, evaluamos en $x = 1$,

$$f(y) = g(1) = f(1) + c = c$$

Por lo tanto,

$$f(xy) = g(x) = f(x) + f(y)$$

para todo $x, y > 0$.

44. Suponga que f satisface

$$f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$$

para alguna función g. Demuestre que si f es 0 en dos puntos, entonces f es 0 en el intervalo entre ellos. Indicación: Utilice el teorema 6.

Demostración.- Por el teorema 6 (spivak, capítulo 11), si $x \in [x_0, y_1]$ es un máximo local, entonces $f''(x) = f(x) \leq 0$. Luego, si $x \in [x_0, x_1]$ es un mínimo local, entonces $f''8x) = f(x) \geq 0$, ya que $f'(x) = 0$. Ahora, suponga que existe un $x \in [x_0, x_1]$ tal que $f(x) \neq 0$. Entonces, $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$.

Caso 1. $[f(x) > 0]$ Observemos que si x no puede ser un punto máximo local. Esto implica que existe $x' \in [x_0, x_1)$ tal que x' es un máximo local y $f(x') > 0$ o existe $x'' \in (x, x_1]$ tal que x'' es un máximo local, y $f(x'') > 0$ ya que $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Pero no es posible, puesto que $f''(x') = f(x')$ y $f''(x'') = f(x'')$ por la ecuación dada. Por lo tanto, $f(x)$ no puede ser estrictamente positivo.

Caso 2. $[f(x) < 0]$ Similar al anterior caso, vemos que f no es estricamente negativa en $[x_0, x_1]$. Por cierto, vemos que x no puede ser un punto máximo local. Esto implica que que existe $x' \in [x_0, x)$ tal que x' es un mínimo local y $f(x') < 0$ o existe $x'' \in (x, x_1]$ tal que x'' es un mínimo local y $f(x'') < 0$, puesto que $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Pero no es posible, ya que $f''(x') = f(x')$ y $f''(x'') = f(x'')$, por la ecuación dada. Por lo tanto, $f(x)$ po es estrictamente positivo.

Así, $f(x) = 0$ para todo $x \in [x_0, x_1]$.

45. Suponga que f es continua en $[a, b]$, n-veces diferenciable en (a, b) y que $f(x) = 0$ para $n + 1$ puntos x diferentes de $[a, b]$. Demuestre que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x de (a, b).

Demostración.- Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ son los distintos $n + 1$ raíces de f en $[a, b]$. Entonces, notemos que

$$f(x_1) = 0, \quad x_i = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Ahora, consideremos que el conjunto de intervalos $\{[x, x_j] | 1 \leq i < j \leq n + 1\}$. Luego, f es diferenciable en todos los elementos del conjunto $\{[x_i, x_j] | 1 \leq i < j \leq n + 1\}$. Entonces, por el teorema del valor medio en cada intervalo $[x_i, x_j]$ para $1 \leq i < j \leq n+1$, existe un elemento $\alpha_i \in (x, x_j)$ para $1, 2, \ldots, n$ tal que

$$\frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} = f'(\alpha_i).$$

Se sigue que para cada intervalo $[x_i, x_j]$ existe α_i tal que

$$f'(\alpha_i) = 0, \text{ ya que } f(x_i) = 0 \text{ para cada } i.$$

Luego,

$$\alpha_i \in [a, b], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Este resulta que f' tiene n ceros distintos en $[a, b]$. De manera similar a lo anterior, supongamos que el conjunto de intervalo $\left\{[\alpha_i, \alpha_j] | 1 \leq i < j \leq n\right\}$. Entonces, por el teorema de valor medio en cada intervalo $[\alpha_i, \alpha_j]$ para $1 \leq i < j \leq n$, existe un elemento $\beta_i \in (\alpha_i, \alpha_j)$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ tal que

$$\frac{f'(\alpha_j) - f'(\alpha_i)}{\alpha_j - \alpha_i} = f''(\beta_i).$$

Se sigue que para cada intervalo $[\alpha_i, \alpha_j]$ existe β_i tal que

$$f''(\beta_i) = 0, \text{ ya que } f'(\alpha_i) = 0 \text{ para cada } i.$$

Luego,

$$\beta_i \in [a, b], \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Esto resulta que f'' tiene $n-1$ ceros distintos en $[a, b]$. Procediendo por dicho argumento hasta la derivada $n - sima$, de f, se sigue del principio de inducción que $f^{(n)}$ tiene al menos una raíz en $[a, b]$. Por el teorema del valor medio, se demuestra que

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ para algún } x \in [a, b].$$

46. Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ puntos arbitrarios del intervalo $[a, b]$, y sea

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i).$$

Suponga que f es una función $(n+1)$-veces diferenciable y que P es una función polinómica de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n+1$ (vea el problema 3-6). Demuestre que para cada x de $[a, b]$ existe un número c de (a, b) tal que

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indicación: Considere la función

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)].$$

Demuestre que F se anula en $n+2$ puntos diferentes de $[a, b]$ y utilices el problema 45.

Demostración.- Si x esta en x_i, entonces $f(x) - P(x) = Q(x)$, así podemos escoger cualquier c. Por otra parte, sea

$$F(t) = Q(x)\left[f(t) - P(t)\right] - Q(t)\left[f(x) - P(x)\right].$$

Entonces, para $i = 1, \ldots, n+1$ se tiene

$$F(x_i) = 0, \text{ ya que } f(x_i) - P_i = 0 \text{ y } Q(x_i) = 0,$$

como también

$$F(x) = 0.$$

Por el problema 45, tenemos $F^{(n+1)}(c) = 0$ para algún c en (a, b). Esto es,

$$0 = F^{(n+1)}(c) = Q(x)\left[f^{(n+1)}(c) - 0\right] - (n+1)!\left[f(x) - P(x)\right].$$

47. Demuestre que

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$$

sin calcular con $\sqrt{66}$ con 2 cifras decimales.

Demostración.- Apliquemos el teorema del valor medio a $f(x) = \sqrt{x}$ en $[64, 66]$:

$$\frac{\sqrt{66} - \sqrt{64}}{66 - 64} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ para algún } x \text{ en } [64, 66].$$

Puesto que $64 < x < 81$, tenemos $0 < \sqrt{x} < 9$, por tanto

$$\frac{1}{2 \cdot 9} < \frac{\sqrt{66} - 8}{2} < \frac{1}{2 \cdot 8}.$$

48. Demuestre la siguiente generalización del Teorema del Valor Medio: si f es continua y diferenciable en (a, b) y $\lim\limits_{y \to a^+} f(y)$ y $\lim\limits_{y \to b^-} f(y)$ existen, entonces existe algún x de (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{\lim\limits_{y \to b^-} f(y) - \lim\limits_{y \to a^+} f(y)}{b - a}.$$

(La demostración debe empezar: esto es una consecuencia trivial del teorema del valor medio porque...).

Demostración.- Definamos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$g(y) = \begin{cases} \lim\limits_{y \to a^+} f(y) & \text{si} \quad y = a; \\ \\ f(y) & \text{si} \quad a < y < b; \\ \\ \lim\limits_{y \to b^-} f(y) & \text{si} \quad y = b. \end{cases}$$

Entonces, observamos que g es continua en $[a, b]$. En efecto, a partir de la definición de g tenemos que, para cualquier $\{y_n\}$ con $y_n \to a$, $g(y_n) \to g(a)$, y para cualquier secuencia $\{z_n\}$ con $z_n \to b$, $g(z_n) \to g(b)$. Por otro lado, si $y \in (a, b)$ entonces $g(y) = f(y)$ así g es continua en $[a, b]$. Además, como $g(y) = f(y)$ para todo $y \in (a, b)$, g es diferenciable en (a, b). Por lo tanto, por el teorema del valor medio existe un número $x \in (a, b)$ tal que

$$g'(x) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Pero, como $g(y) = f(y)$ para todo $y \in (a,b)$ tenemos por definición de $g(a)$ y $g(b)$ tenemos que

$$f'(x) = \frac{\lim_{y\to b^-} f(y) - \lim_{y\to a^+} f(y)}{b-a}.$$

49. Demuestre que la conclusión del teorema del Valor Medio de Cauchy puede escribirse en la forma

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo, además, que $g(b) \neq g(a)$ y que $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de (a,b).

Demostración.- Tenemos por el Teorema Medio de Cauchy que si f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b), entonces existe un número x tal que

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x) = [g(b)-g(a)]\,f'(x).$$

Ahora, si $g(b) \neq g(a)$ y $f'(x)$ y $g'(x)$ no son simultáneamente cero en (a,b), se sigue que ambos

$$\frac{1}{g(b)-g(a)} \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

están definidos. Así, por el teorema del valor medio tenemos podemos escribir,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Lo que completa la demostración.

50. Demuestre que si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b), y $g'(x) \neq 0$ para todo x de (a,b), entonces existe algún x en (a,b) con

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(b)-g(x)}.$$

Indicación: Multiplique en cruz para ver lo que esto realmente significa.

Respuesta.- Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$h(x) = f(x)g(b) + f(x)g(a) - f(x)g(x).$$

Entonces, por hipótesis, vemos que g es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Además

$$h(a) = f(a)g(b) + f(a)g(a) - f(a)g(a) = f(a)g(b),$$

y

$$f(b) = f(b)g(b) + f(b)g(a) - f(b)g(b) = f(a)g(b).$$

Así, $h(a) = h(b) = f(a)g(b)$. Luego, usando el teorema de Rolle para la función h, existe un número $x \in (a,b)$ tal que

$$h'(x) = 0.$$

Calculemos h':

$$h'(x) = f'(x)g(b) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$$

que implica,

$$f'(x)[g(b) - g(x)] = g'(x)[f(x) - f(a)].$$

Después, ya que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, se tiene que $g(b) \neq g(x)$ para $x \in (a,b)$. Por otro lado, si tenemos $x \in (a,b)$ tal que $g(x) = g(b)$ aplicando una vez más el teorema de Rolle, podría implicar que $g'(x) = 0$ para algún x in (x,b). Lo que contradice el hecho de que $g'(x) \neq 0$. Por lo que podemos escribir la ecuación de arriba como sigue,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(b) - g(x)}.$$

51. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la Regla de L'Hopital?:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

(El límite es, en realidad, -4).

Respuesta.- La regla de L'Hopital no es aplicable a la expresión

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2}$$

puesto que $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 + 1 = 3 + 1 = 4 \neq 0$.

52. (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$.

Respuesta.- Dado que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1.$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \\
&= -\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \\
&= -(2)^2 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

53. Halle $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

y $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 17$.

Respuesta.- Ya que $g(0) = 0$ y g es diferenciable, vemos que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} h(x) = 0,$$

donde $h(x) = x$. Después, $h'(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{g'(x)}{h'(x)}$ existe. Luego, usando la regla de L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g'(0) = 0.$$

Por lo que, f es continua en 0. Ahora, calculemos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2}.$$

Sea $u(x) = x^2$, entonces

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} u(x) = 0.$$

De donde, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g'(x)}{u'(x)}$ existe ya que $u'(x) = 2x$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 0$. Una vez más usando la regla de L'Hopital, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x)}{2}.$$

La última igualdad se obtiene por la existencia de los $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, así como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g''(x)}{2}$. Por último, sabemos que $g''(0) = 17$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{g''(x)}{2} = \frac{17}{2}.$$

Así,

$$f'(0) = \frac{17}{2}.$$

54. Demuestre las siguientes formas de la Regla de L'Hopital (ninguna de ellas require un razonamiento esencialmente nuevo.)

(a) Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} = 0$ y $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ (y análogamente para límites por la izquierda).

Demostración.- Por la definición de límite notamos que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 \lim_{x\to a^+} g(x)$$

implica que:

i. existe un $\delta > 0$ tal que f' y g' existen en el intervalo $(a, a+\delta)$,
ii. además, $g'(x) \neq 0$ en $(a, a+\delta)$.

Supongamos, sin perdida de generalidad, que tanto f como g son continuas por la derecha en 0. De hecho, si f y g no fueran continuas en 0, entonces habríamos definido $f(a) = g(a) = 0$ cambiando los valores de $f(a)$ y $g(a)$ si fueran necesarios. Ahora aplicando los teoremas de valor medio y del valor medio de Cauchy para f y g en el intervalo $[a, x]$ para $x \in (a, a+\delta)$. Después notemos que $g(x) \neq 0$. Además, si $g(x) = 0$, entonces habría un número $x_1 \in (a, x)$ tal que $g'(x_1) = 0$ contradiciendo la propiedad ii. anterior. Luego aplicando el valor medio de Cauchy a f y g observamos que existe un número $c_x \in (a, x)$ tal que

$$[f(x) - f(a)]\, g'(c_x) = [g(x) - g(a)]\, f'(c_x),$$

que equivale a la ecuación

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Por último, vemos que a medida que x tiende a a también c_x tiende a a ya que $c_x \in (a, x)$. De lo que se deduce que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Así, tenemos

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

(b) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (y análogamente para $-\infty$), o si se sustituye $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.

Demostración.- Demostremos que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Por hipótesis se tiene,

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$$

implica que:

i. Existe un $\delta > 0$ tal que f' y g' existen en el intervalo $(a-\delta, a+\delta) | \{a\}$,
ii. además, en el mismo intervalo, es decir $(a-\delta, a+\delta) | \{a\}$, $g'(x) \neq 0$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que tanto f como g son continuas a la derecha en 0. De hecho si f y g no fueran continuas en 0, entonces habríamos definido $f(a) = g(a) = 0$ cambiando los valores de $f(a)$ y $g(a)$ si fuera necesario.
Ahora, aplicando el teorema de valor medio y el teorema del valor medio de Cauchy para f y g en el intervalo $[a, x]$ en $x \in (a, a+\delta)$. Notamos que $g(x) \neq 0$. Es más, si $g(x) = 0$, entonces podría existir un número $x_1 \in (a, x)$ tal que $g'(x_1) = 0$ contradiciendo la propiedad ii). Ahora aplicando el teorema de valor medio de Cauchy para f y g observamos que existe un número $c_x \in (a, x)$ tal que

$$[f(x) - f(a)]\, g'(c_x) = [g(x) - g(a)]\, f'(c_x)$$

lo que equivale a la ecuación

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Luego, vemos que como x tiende a a, c_x también tiende a a ya que $c_x \in (a, x)$. Entonces, se sigue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Así, tenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \infty.$$

Similarmente, tenemos para $x \in (a-\delta, a)$, que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \infty.$$

Esto completa la demostración de la primera parte. Ahora siguiendo el argumento de la parte (a), en este caso con $l = \infty$ uno puede obtener los otros casos.

(c) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ (y análogamente para $-\infty$),

Indicación: Considere $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Demostración.- Consideremos las funciones $\hat{f}(x)$ y $\hat{g}(x)$ definidas de la siguiente manera:

$$\hat{f}(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ y } \hat{g}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Notemos que como $x \to 0^+$, entonces $\frac{1}{x} \to \infty$. Así, tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \hat{f}(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} \hat{g}(x)$$

y $\lim_{x\to 0^+} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$ existe y es igual a l. Por lo tanto, aplicando la parte (a) para $\hat{f}$ y $\hat{g}$, se tiene

$$\lim_{x\to^+} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = l.$$

Lo que implica que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = l.$$

El caso para $-\infty$ es análogo.

(d) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \infty$.

Demostración.- Consideremos las funciones $\hat{f}$ y $hatg$ definidas por:

$$\hat{f}(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{y} \quad \hat{g}(x) = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Entonces, notemos que $x \to 0^+$, por lo que $\frac{1}{x} \to \infty$. Así, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \hat{f}(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} \hat{g}(x)$$

y $\lim_{x\to 0^+} \frac{\hat{f}'(x)}{\hat{g}'(x)} = \infty$. Por lo tanto, aplicando (b) a $\hat{f}$ y $\hat{g}$ se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \infty.$$

Lo que implica,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\hat{g}(x)}{\hat{f}(x)} = \infty.$$

55. Existe otra forma de la Regla de L'Hopital que exige más manipulaciones algebraicas: Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)(g'(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = l$. Demuéstrelo de la manera siguiente:

(a) Para todo $\epsilon > 0$ existe un número a tal que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \epsilon \quad \text{para } x > a.$$

Aplique el Teorema del Valor Medio de Cauchy a f y g en $[a,x]$ para demostrar que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| z\epsilon \quad \text{para } x > a.$$

Demostración.- Sea ϵ tal que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, existe un número positivo a de modo que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \epsilon \quad \text{para } x > a.$$

Ahora, sea $c \in (a,\infty)$. Entonces, tenemos $a < c < \infty$. Luego, notemos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x > a$. Por el teorema de valor medio se sigue que $g(x) \neq g(a)$ para todo $x > a$.
Consideremos la función $h : [a,c] \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$h(x) = \frac{1 - \dfrac{f(a)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(a)}{g(x}}, \quad \text{para } x \in [a,c].$$

Note que,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1 - \dfrac{f(a)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(a)}{g(x)}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Esto ya que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Por lo tanto, existe $d \in [a,c]$ tal que

$$1 - \epsilon < h(x) < 1 - \epsilon, \quad \forall x \in [a,c].$$

Se sigue que

$$\frac{1}{2} < h(x) < \frac{3}{2}, \quad \forall x \in [ac].$$

Después, vemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{1}{h(x)}, \quad \forall x \in [a,c].$$

Aplicando el teorema de valor medio de Cauchy a f y g en $[a,c]$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)}, \quad \text{para algún } X_x \in (a,c)$$

Sabemos que X_x depende de x. Así,

$$X_x \to \infty \text{ cuando } x \to \infty.$$

Dado que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} = l.$$

Por último, como c es arbitraria mayor a a, entonces por definición de limite tenemos que

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l \right| < \epsilon, \quad \text{para } x > a.$$

(b) Escriba ahora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \cdot \frac{f(x)}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{g(x)}$$

(¿por qué se puede suponer que $f(x) - f(a) \neq 0$? para x grandes?) y deduzca que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < 2\epsilon \quad \text{para } x \text{ suficientemente grandes.}$$

Demostración.- Notemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Entonces, existe un número positivo M tal que

$$f(x) > M, \quad \forall x.$$

Recordemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} \cdot \frac{1}{h(x)}, \quad \forall x \in [a, c].$$

Dado que,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} \cdot \frac{1}{h(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{h(x)} \\
&= l,
\end{aligned}$$

ya que, $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} = l$. Entonces, por la definición de límite, para cada $\epsilon > 0$ tenemos

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < 2\epsilon, \quad \text{para cada } x \text{ grande.}$$

56. Para completar la orgía de variantes de la regla de L'Hópital, aplicar el Problema 55 para demostrar unos cuantos casos más de la siguiente proposición general (existen tantas posibilidades que el lector debe seleccionar aquellas, si las hay, que sean de su interés): Si $\lim_{x\to[]} f(x) = \lim_{x\to[]}$ y $\lim_{x\to[]} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = ()$, entonces $\lim_{x\to[]} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ()$. Aquí $[]$ puede ser a ó a^+ ó a^- ó $-\infty$, $\{\}$ puede ser 0 ó ∞ ó $-\infty$ y $()$ puede ser l ó ∞ ó $-\infty$.

Respuesta.- Si $\lim_{x\to[\infty]} f(x) = \lim_{x\to[\infty]}$ y $\lim_{x\to[\infty]} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = (a)$, entonces $\lim_{x\to[\infty]} \dfrac{f(x)}{g(x)} = (a)$.

57. Si f y g son diferenciables y existe el $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ¿puede concluirse que también existe el $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$? (se trata del recíproco de la Regla de L'Hopital).

Respuesta.- No, por ejemplo, sea $a = 0$, $g(x) = x$, de donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

58. Demuestre que si f' es creciente, entonces toda tangente de f corta a la gráfica de f una sola vez. (En particular, esto se cumple en el caso de la función $f(x) = x^n$ si n es par.)

Demostración.- La linea tangente a través de $(a, f(a))$ es la gráfica de

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & f'(a)(x-a) + f(a) \\ \\ & = & f'(a)x + f(a) + af'(a). \end{array}$$

Si $g(x_o) = f(x_o)$ para algún $x_0 \neq a$, entonces

$$0 = g'(x) - f'(x) = f'(a) - f'(x)$$

para algún x en (a, x_o) o (x_o, a). Lo que es imposible, ya que f' es creciente.

59. Resuelva otra vez el problema 10-18 (c) cuando

$$(f')^2 = f - \frac{1}{f^2}.$$

(¿Por qué está este problema en este capítulo?).

Respuesta.- Diferenciando la expresión se tiene

$$\begin{array}{rcl} (f')^2 & = & f - \dfrac{1}{f^2} \\ \\ 2f' \cdot f'' & = & f' - \dfrac{2}{f^3} \cdot f' \\ \\ f'' & = & \dfrac{f' - \dfrac{2}{f^3} \cdot f'}{2f'} \\ \\ f'' & = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{f^3}. \end{array}$$

para todo x donde $f'(x) \neq 0$. Luego, ya que $(f')^2 = \dfrac{f^3-1}{f^2}$, tenemos $f'(x) = 0$ solo para $f(x) = 1$. Pero el teorema 7 (aplicando f') implica que las formula vale en este caso, con $f''(x) = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$.

60. (a) Suponga que f es diferenciable en $[a,b]$. Demuestre que si el mínimo de f en $[a,b]$ se encuentra en el punto a, entonces $f'(a) \geq 0$, y si se encuentra en el punto b, entonces $f'(b) \leq 0$. (Deberá examinarse la mitad de la demostración del Teorema 1.)

Demostración.- Ya que f tiene un mínimo en a, tenemos para todo $h > 0$, que

$$f(a+h) - f(a) \geq 0$$

lo que equivale a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0.$$

De donde, tomamos el límite cuando $h \to 0^-$ y obtenemos

$$f'(a) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0.$$

Ya que f tiene un mínimo en b, tenemos para todo $h > 0$, que

$$f(b-h) - f(b) \leq 0$$

lo que equivale a

$$\frac{f(b-h)-f(b)}{h} \leq 0.$$

Por lo que tomando el límite cuando $h \to 0^+$ obtenemos

$$f'(b) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(b-h)-f(b)}{h} \leq 0.$$

(b) Suponga que $f'(a) < 0$ y que $f'(b) > 0$. Demuestre que $f'(x) = 0$ para algún x de (a,b). Indicación: Considere el mínimo de f en $[a,b]$; ¿por qué debe estar en algún punto de (a,b)?.

Demostración.- Ya que f es diferenciable en $[a,b]$, entonces f es diferenciable ahí. Por lo tanto, f tiene que estar acotado, lo que implica que hay un número $x \in [a,b]$ tal que $f(x)$ es el mínimo en $[a,b]$. Pero por la parte (a) vemos que f no puede tener un mínimo en a o b, de lo contrario contradice la hipótesis. Entonces, el mínimo de f debe estar en (a,b); es decir, existe un número $x \in (a,b)$ tal que $f(x)$ es el mínimo. Por lo que tenemos

$$f'(x) = 0.$$

(c) Demuestre que si $f'(a) < c < f'(b)$, entonces $f'(x) = c$ para algún x de (a,b). (Este resultado se conoce como el Teorema de Darboux. Advierta que no estamos suponiendo que f' sea continua). Indicación: Construya una función adecuada a la cual se pueda aplicar la parte (b).

Demostración.- Sea la función

$$g(t) = f(t) - ct,$$

Entonces, ya que f es diferenciable en $[a,b]$,

$$g'(t) = f'(t) - c.$$

Por lo tanto, se tiene
$$g'(a) = f(a) - c < 0 \quad \text{y} \quad g'(b)f'(b) - c > 0.$$
Ahora, aplicando la parte (b) para la función g, vemos que existe un número $x \in (a,b)$ tal que
$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) - c = 0.$$
Así, tenemos que $f'(x) = c$ para algún $x \in (a,b)$.

61. Suponga que f es diferenciable en algún intervalo que contiene a pero que f' es discontinua en a. Demuestre lo siguiente:

(a) Ambos límites laterales $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ no pueden existir. (Se trata de una pequeña variación del Teorema 7.)

Demostración.- Sea (x_1, x_2) alrededor de a donde f es diferenciable. Demostraremos que $\lim\limits_{x\to a^+}$ y $\lim\limits_{x\to a^-}$ no existen. Sean
$$\lim_{x\to a^-} f'(x) = l_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f'(x) = l_2.$$
Primero probaremos que $f'(a) = l_1$. Si es posible supongamos $l_1 \neq f'(a)$

Caso 1. Tomemos $l_1 < f'(a)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que
$$l_1 - \epsilon < f'(a).$$
Ya que, $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = l_1$ existe un $\delta > 0$ tal que
$$l_1 - \epsilon < f'(x) < l_1 + \epsilon, \quad \forall x \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2)$$
Luego, sea α un elemento de $x \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2)$. Entonces, tenemos
$$l_1 - \epsilon < f'(\alpha) < l_1 + \epsilon < f'(a).$$
Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un punto $\mathcal{X} \in (\alpha, a)$ de modo que
$$f'(\mathcal{X}) = l_1 + \epsilon.$$
Notemos que
$$\mathcal{X} \in (\alpha, a) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X} \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2).$$
Se sigue que
$$f'(\mathcal{X}) < l_1 + \epsilon.$$
Lo que es imposible. Por lo tanto, $l_1 = f'(a)$.

Caso 2. Tomemos $l_1 > f'(a)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que
$$l_1 - \epsilon > f'(a).$$
Ya que $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = l_1$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que
$$l_1 - \epsilon < f'(x) < l_1 + \epsilon, \quad \forall x \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2).$$
Luego, sea β un elemento de $x \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2)$. Entonces, tenemos
$$f'(a) < l_1 - \epsilon < f'(\beta).$$

Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un punto $\mathcal{X} \in (\alpha, a)$ de modo que

$$f'(\mathcal{X}) = l_1 - \epsilon.$$

Notemos que

$$\mathcal{X} \in (\beta, a) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X} \in (a - \delta, a) \cap (x_1, x_2).$$

Se sigue que

$$f'(\mathcal{X}) > l_1 - \epsilon.$$

Lo que es imposible. Así, de los dos casos se sigue que

$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = f'(a) = l_1.$$

Ahora demostraremos que $f'(a) = l_2$. Supongamos $l_2 \neq f'(a)$.

Caso 1. Tomemos $l_2 < f'(a)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$l_2 + \epsilon < f'(a).$$

Ya que $\lim_{x \to a^+} f'(x) = l_2$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$l_2 - \epsilon < f'(x) < l_2 + \epsilon, \quad \forall x \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2).$$

Luego, sea α un elemento de $x \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2)$. Entonces, tenemos

$$l_2 - \epsilon < f'(\alpha) < l_2 + \epsilon < f'(a).$$

Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un punto $\mathcal{X} \in (a, \alpha)$ de modo que

$$f'(\mathcal{X}) = l_2 + \epsilon.$$

Pero, notemos que

$$\mathcal{X} \in (a, \alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X} \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2).$$

De donde, se sigue que

$$f'(\mathcal{X}) < l_2 + \epsilon.$$

Lo que es imposible. Por lo tanto, $l_2 < f'(a)$ es erróneo.

Caso 2. Tomemos $l_2 > f'(a)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$l_2 - \epsilon > f'(a).$$

Ya que $\lim_{x \to a^+} f'(x) = l_2$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$l_2 - \epsilon < f'(x) < l_2 + \epsilon, \quad \forall x \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2).$$

Luego, sea β un elemento de $x \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2)$. Entonces, tenemos

$$f'(a) < l_2 - \epsilon < f'(\beta).$$

Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un punto $\mathcal{X} \in (a, \beta)$ de modo que

$$f'(\mathcal{X}) = l_2 - \epsilon.$$

Pero, notemos que

$$\mathcal{X} \in (a, \beta) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X} \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2).$$

De donde, se sigue que
$$f'(\mathcal{X}) > l_2 - \epsilon.$$
Lo que es imposible. Así, de los dos casos se sigue que
$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = f'(a) = l_2.$$
En consecuencia tenemos
$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = f'(a).$$
Se sigue que f' es continua en el punto a, lo que contradice la hipótesis. Así, nuestra suposición de que el límite de ambos lados existe es incorrecta . Que implica que $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ no existen.

(b) Ambos límites laterales no pueden existir incluso si se acepta que puedan tener valores iguales $a + \infty$ o $-\infty$. Indicación: Utilice el teorema de Darboux (Problema 60).

Demostración.- Supongamos que el límite de f' a ambos lados existe en el punto $a$si los valores se toman como infinitos; es decir, sin pérdida de generalidad. Supongamos
$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \infty \quad \text{y} \lim_{x\to a^-} f'(x) = -\infty.$$
y $f'(a) \neq 0$. Luego, sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe un $\delta > 0$ y un número positivo M tal que
$$\begin{array}{lcrl} f'(x) & > & M & \forall x \in (a, a+\delta) \\ f'(x) & < & -M & \forall x \in (a-\delta, a) \end{array}$$
Luego, consideremos dos elementos α y β de modo que
$$a \in (a, a+\delta) \quad \text{y} \quad \beta \in (a-\delta, a).$$
Entonces, se tiene
$$f'(a) > M \quad \text{y} \quad f'(\beta) < -M.$$
Después, sea $[\beta, \alpha]$ donde
$$f'(\beta) < 0 < f'(\alpha).$$
Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un elemento $z \in [\beta, \alpha]$ de modo que
$$f'(z) = 0.$$
Pero, vemos que
$$\left|f'(x)\right| > 0 \; \forall x \in [\beta, \alpha] \text{ donde } f'(a) \neq 0.$$
Así, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, nuestra suposición de que tanto el límite lateral de f' en el punto a existe, está erróneo.

62. Es fácil encontrar una función f tal que $|f|$ sea diferenciable sin serlo f. Por ejemplo, podemos elegir $f(x) = 1$ para x racional y $f(x) = -1$ para x irracional. En este ejemplo f no es ni siquiera continua y esto no es una merca coincidencia. Demuestre que si $|f|$ es diferenciable en a y f es continua en a, entonces f es también diferenciable en a. Indicación: Basta considerar solamente a con $f(a) = 0$. ¿Por qué? En este caso, ¿cómo debe ser $|f|'(a)$?.

Demostración.- Sea a cualquier punto en el dominio de la definición de f. Entonces, también $f(a) = 0$ o $f(a) \neq 0$. Supongamos que $f(a) \neq 0$. Entonces, por continuidad de f tenemos que existe un $\delta > 0$

tal que en $(a-\delta, a+\delta)$, f es $|f|$ o $-|f|$. Ya que $|f|$ es diferenciable en ambos casos, f tiene que ser diferenciable. Así, tenemos que $f(a)=0$.
Ahora, si $f(a)=0$, entonces $|f|(a)=0$; lo que implica que a es el punto mínimo para $|f|$. Ya que $|f|$ es diferenciable tenemos

$$|f|'(a)=0.$$

Lo que implica por definición de diferenciablidad que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)|}{h} && \text{ya que } f(a)=0 \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{h}. \end{aligned}$$

Luego, $f'(a)$ existe y es igual a cero.

63. (a) Sea $y\neq 0$ y sea n par. Demuestre que $x^n+y^n=(x+y)^n$ solamente cuando $x=0$. Indicación: Si $x_0^n+y^n=(x_0+y)^n$, aplicar el Teorema de Rolle a $f(x)=x^n+y^n-(x+y)^n$ en $[0,x_0]$.

Demostración.- Notemos que

$$f(0)=y^n+y^n=0, \text{ y } f(x_0)=x_0^n+y^n-(x+y)^n=0$$

donde se cumple la segunda ecuación de nuestra hipótesis. Además, f es diferenciable en $[0,x_0]$ o en $[x_0.0]$. Aplicando el Teorema de Rolle para la función f, tenemos que existe un número $x_1\in(0,x_0)$ o en $(x_0,0)$ tal que

$$f'(x_1)=0.$$

Calculando se tiene

$$f'(x)=nx^{n-1}-n(x+y)^{n-1}.$$

Por lo tanto, para x_1 se tiene

$$f'(x_1)=n\left[x_1^{n-1}-(x_1+y)^{n-1}\right]=0$$

lo que equivale a

$$x_1^{n-1}=(x_1+y)^{n-1}.$$

Pero como n es par, $n-1$ es impar, por lo que

$$x_1=x_1+y$$

lo que implica que $y=0$; esto contradice la hipótesis. Así, x tiene que ser 0 para que $X^n+y^n=(x+y)^n$.

(b) Demuestre que si $y\neq 0$ y n es impar, entonces $x^n+y^n=(x+y)^n$ sólo si $x=0$ ó $x=-y$.

Demostración.- Supongamos que $x\neq 0$ y

$$x^n+y^n=(x+y)^n.$$

Entonces, tenemos que demostrar que $x=-y$. Consideremos la función f definida en $[0,x_0]$, como sigue:

$$f(x)=x^n+y^n-(x+y)^n.$$

Por la parte (a), sabemos que $f(0) = 0$, $f(x_0) = 0$ y que

$$f(-y) = -y^n + y^n(y-y)^n = 0,$$

donde se cumple la segunda igualdad, ya que n es impar. Luego, aplicando el Teorema de Rolle para la función f tenemos que existen $x_1 \in (-y, 0)$ y $x_2 \in (0, x_0)$ tal que

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0.$$

Calculando se tiene

$$f'(x) = nx^{n-1} - n(x+y)^{n-1}.$$

Por lo tanto, para x_1 y x_2 se tiene

$$f'(x_1) = n\left[x_1^{n-1} - (x_1+y)^{n-1}\right] = 0$$

y

$$f'(x_2) = n\left[x_2^{n-1} - (x_2+y)^{n-1}\right] = 0.$$

Pero como n es impar, por el problema 6(d) del capítulo 1 tenemos que $x_j = x_j + y$ o $x_j = -(x_j + y)$ con $j = 1, 2$. Después, por el hecho de que $y \neq 0$, $x_j \neq x_j + y$; debemos tener $x_j = -(x_j + y)$ para $j = 1, 2$. Así, $x_1 = x_2$, lo que implica que $x_0 = -y$.

64. Suponga que $f(0) = 0$ y que f' es creciente. Demuestre que la función $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ es creciente en $(0, \infty)$. Indicación: Evidentemente hay que considerar a $g'(x)$. Demuestre que es positiva aplicando el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo adecuado (será útil recordar que la hipótesis $f(0) = 0$ es esencial, como la demuestra la función $f(x) = 1 + x^2$).

Demostración.- calculemos $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

Ahora, para cualquier $x \in (0, \infty)$, aplicando el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo $[0, x]$ tenemos que existe un número $c_x \in (0, x)$ tal que

$$f(x) - f(0) = xf'(c_x).$$

Pero, por hipótesis tenemos que $f(0) = 0$ de donde

$$f(x) = xf'(c_x) < xf'(x)$$

esto ya que f' es creciente, $c_x < x$ y $x > 0$. Esto demuestra que

$$f(x) = xf'(c_x) < xf'(x)$$

lo que implica que que $g'(x) > 0$. Así, demostramos que $g'(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$ y g es creciente es dicho intervalo.

65. Utilice derivadas para demostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad \text{para } -1 < x < 0 \text{ y } 0 < x.$$

(Observe que la igualdad se cumple para $x = 0$).

Demostración.- Consideremos la función $g(x) = (1+x)^n - (1+nx)$. Entonces, notemos que $g(0) = 0$. Además, calculando la derivada vemos que

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n\left[(1+x)^{n-1} - 1\right]$$

Ahora, ya que $n - 1 \geq 0$ vemos que para $x > 0$,

$$(1+x)^{n-1} - 1 > 0,$$

esto es, $g'(x) > 0$ para $x > 0$. Por otro lado, si $-1 < x < 0$, entonces $(1+x) < 1$ y por lo tanto

$$(1+x)^{n-1} < 1$$

lo que muestra que $g'(x) < 0$ en $-1 < x < 0$. Así, tenemos que g es creciente para $x > 0$ y decreciente en $-1 < x < 0$. Pero sabemos que $g(0) = 0$. Por lo que tenemos $g(x) > 0$ en $(0, \infty)$ y $f(x) < 0$ en $-1 < x < 0$. Es decir,

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad \text{para } -1 < x < 0 \text{ y } 0 < x.$$

66. Sea $f(x) = x^4 \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{2}$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$.

(a) Demuestre que 0 es un punto mínimo local de f.

Demostración.- Sea f un función no constante. Esto es, $f(a') = f(b')$ para algún $a' < b'$ en $[a, b]$. Para ser especifico, $f(a') < f(b')$. Por el problema 8-4(b)m existe $a' \leq c < d \leq b'$ con $f(c) = f(a') < f(b') = f(d)$ y $f(c) < f(x) < f(d)$ para todo $x \in (c, d)$. De donde a' no es un mínimo local para f.

(b) Demuestre que $f'(x) = f''(0) = 0$.

Demostración.- Calculemos $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} x^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} x^3 \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} x^2 \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, para demostrar que $f''(0) = 0$, con $x \neq 0$, que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} - x^4 \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \\
&= 4x^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} + x^2 \operatorname{sen} \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x} + x^2 \operatorname{sen} \dfrac{2}{x}}{x} = 0$$

Así, $f''(0) = 0$.

Esta función constituye otro ejemplo demostrativo de que el Teorema 6 no puede ser mejorado. También ilustra una sutileza acerca de los máximos y mínimos que frecuentemente pasa desaperci bida: una función puede no ser creciente en ningún intervalo a la derecha de un punto mínimo local ni tampoco decreciente en ningún intervalo a la izquierda.

67. (a) Demuestre que si $f'(a) > 0$ y f' es continua en a, entonces f es creciente en algún intervalo que contiene a a.

El comportamiento de f para $\alpha \geq 1$, que es mucho más difícil de analizar, se discute en el problema siguiente.

Demostración.- Ya que f' es continua y $f'(a) > 0$. Entonces, existe un intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ al rededor de a tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Luego, usando el corolario 3 del teorema de valor medio, se tiene que f es creciente en $(a-\epsilon, a+\epsilon)$.

Las dos partes siguientes de este problema demuestran que la continuidad de f' es esencial.

(b) Si $g(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$, demuestre que existen números x tan próximos como se quiere a 0 con $g'(x) = 1$ y también con $g'(x) = -1$.

Demostración.- Primero calculamos la derivada de g para algún $x \neq 0$.

$$g'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Así, $g'(x) = 1$ cuando $\cos \dfrac{1}{x} = -1$, al mismo tiempo vemos que $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$. Por lo tanto, $g'(x) = -1$ cuando $\cos \dfrac{1}{x} = 1$.

(c) Suponga que $0 < \alpha < 1$. Sea $f(x) = \alpha x + x^2 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. Demuestre que f no es creciente en ningún intervalo abierto que contenga a 0, probando que cualquiera de estos intervalos existen puntos x con $f'(x) > 0$ y también puntos x con $f'(x) < 0$.

Demostración.- Ya que $x \neq 0$, tenemos

$$f'(x) = \alpha + g'(x).$$

Por la parte (b) vemos que existe un punto x cerca de 0 tal que $g'(x) = 1$ y $g'(x) = -1$. Se sigue que existe un punto cercano a 0 tal que

$$f'(x) = \alpha + 1 > 0,$$

Ya que $0 < \alpha < 1$. También existe un punto x cerca de 0 tal que

$$f'8x) = \alpha - 1 < 0.$$

El comportamiento de f para $\alpha \geq 1$, que es mucho más difícil de analizar, se discute en el problema siguiente.

68. Sea $f(x) = ax + x^2 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. Para hallar el signo de $f'(x)$ cuando $a \geq 1$ es necesario decidir si $2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x$ es < -1 para cualquier número x próximo a 0. Resulta algo más conveniente considerar la función $g(y) = 2(\operatorname{sen} y)/y - \cos y$ para $y \neq 0$; queremos saber si $g(y) < -1$ Para valores grandes y. Esta cuestión es muy delicada; la parte más importante de $g(y)$ es $-\cos y$ que alcanza el valor 1 , pero esto ocurre solamente cuando $\operatorname{sen} y = 0$, y no está claro en absoluto si la misma g puede tener valores < -1. La manera evidente de abordar este problema es hallar los valores mínimos locales de g. Por desgracia, es imposible resolver explícitamente la ecuación $g'(y) = 0$ de manera que debe aguzarse el ingenio para encontrar otra solución.

(a) Demuestre que si $g'(y) = 0$, entonces

$$\cos y = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2 - y^2}{2y}\right),$$

y deduzca que

$$g(y) = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2 + y^2}{2y}\right).$$

Demostración.- Sea,

$$g'(y) = \frac{2y\cos y - 2\operatorname{sen} y}{y^2} + \operatorname{sen} y.$$

De donde, para $g'(y) = 0$ tenemos

$$2y\cos y - 2\operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} y = 0.$$

Lo que implica,

$$\cos y = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2 - y^2}{2y}\right).$$

Luego, sustituyendo la expresión $\cos y$ en $g(y)$ se tiene

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{2\operatorname{sen} y}{y} - (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2 - y^2}{2y}\right) \\ &= (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2}{y} - \frac{2 - y^2}{2y}\right) \\ &= (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2 + y^2}{2y}\right). \end{aligned}$$

(b) Demuestre ahora que si $g'(y) = 0$, entonces

$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{4y^2}{4 + y^4},$$

y deduzca que
$$|g(y)| = \frac{2+y^2}{\sqrt{4+y^4}}.$$

Demostración.- Por la parte (a) vemos que
$$\cos y = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2-y^2}{2y}\right).$$

De donde,
$$\cos^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - (\operatorname{sen} y)^2 \left(\frac{2-y^2}{2y}\right)^2.$$

Lo que implica que
$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{sen}^2 y + (\operatorname{sen} y)^2 \left(\frac{2-y^2}{2y}\right)^2 \\ &= \left(\operatorname{sen}^2 y\right)\left[1 + \left(\frac{2-y^2}{2y}\right)^2\right] \\ &= \left(\operatorname{sen}^2 y\right)\left(\frac{4-y^2}{4y^2}\right) \end{aligned}$$

Se sigue,
$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{4y^2}{4+y^4} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} y = \frac{2y}{\sqrt{4+y^4}}.$$

Ahora, calculemos $|g(y)|$. Por la parte (a) tenemos,
$$|g(y)| = |\operatorname{sen} y|\left|\frac{2+y^2}{2y}\right|.$$

Por lo tanto,
$$|g(y)| = \frac{|2y|}{\sqrt{4+y^4}}\frac{2+y^2}{|2y|} = \frac{2+y^2}{\sqrt{4+y^4}}.$$

(c) Utilizando el hecho de que $(2+y^2)/\sqrt{4+y^4} > 1$, demuestre que si $\alpha = 1$, entonces f no es creciente en ningún intervalo alrededor de 0.

Demostración.-

(d) Utilizando el hecho de que $\lim\limits_{y\to\infty}\left(2+y^2\right)/\sqrt{4+y^4} = 1$, demuestre que si $a > 1$, entonces f es creciente en algún intervalo alrededor de 0.

Demostración.-

69. Una función f es creciente en a si existe algún número $\delta > 0$ tal que
$$f(x) > f(a) \text{ si } a < x < a+\delta$$
y
$$f(x) < f(a) \text{ si } a-\delta < x < a.$$
Observe que esto no significa que f sea creciente en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$; por ejemplo, la función de la Figura 34 es creciente en 0, pero no es una función creciente en cualquier intervalo abierto que contenga 0.

(a) Suponga que f es continua en $[0,1]$ y que f es creciente en a para todo $(a-\delta, a+\delta)$. (El lector debe convencerse, en primer lugar, que hay algo que se debe demostrar). Indicación: Para $0 < b < 1$, demuestre que el mínimo de f en $[b,1]$ debe situarse en b.

Demostración.- Primero, sea $c \in (b,1]$ tal que $f(c)$ es el mínimo $[b,1]$. Entonces, para todo $x \in [b,1]$,

$$f(x) \geq f(c).$$

Lo que contradice el hecho de que f es creciente en c. Por lo que, podríamos decir que $f(b)$ es el mínimo en $[b,1]$.
Ahora, sean $a, b \in [a,b]$ tal que $a < b$. Entonces, tenemos que f tiene un mínimo en $a \in [a,1]$ y ya que $a < b$, $b \in [a,1]$. De lo que tenemos,

$$f(a) \leq f(b).$$

Además podemos decir que se tiene el mismo argumento para cualquier $a' \in (a, a+\delta)$, donde $\delta > 0$ tal que

$$f(a) < f(x), \text{ para todo } x \in (a, a+\delta).$$

Así,

$$f\left(a'\right) \leq f(b).$$

También, ya que f es creciente en a, se obtiene

$$f(a) < f\left(a'\right) \leq f(b).$$

Lo que que demuestra

$$f(a) < f(b).$$

(b) Demuestre la parte (a) sin suponer que f sea continua, considerando para cada b en $[0,1]$ el conjunto $S_b = \{x : f(y) \geq f(b) \text{ para todo } y \text{ de } [b,x]\}$. (Esta parte del problema no hace falta para las demás partes). Indicación: Demuestre que $S_b = \{x : b \leq x \leq 1\}$ considerando $\sup S_b$.

Demostración.- Sea $S_b = \{x : f(y) \geq f(b),\ \forall y \in [b,x]\}$. De donde, afirmamos que

$$\sup S_b = 1.$$

Está claro que 1 es un límite superior de S_b. Suponga $\sup S_b = x_0 < 1$. Ya que f es creciente en x_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para $y \in (x_0 - \delta, x_0)$,

$$f(y) > f(x_0).$$

Ahora, como x_0 es el supremo de S_b, existe $y \in S_b$ tal que $y \in (x_0 - \delta, x_=)$. Se sigue que

$$f(b) \leq f(y) < f(x_0) < f(z)$$

para todo $z \in (x_0, x_0 + \delta)$. Así, $z \in S_b$, lo que es imposible dado que $z > x_0$ y x_0 es el supremo de S_b. Por lo tanto, tiene que ser $\sup S_b = 1$.

(c) Si f es creciente en a y f es diferenciable en a, demuestre que $f'(a) \geq 0$ (esto es fácil).

Demostración.- Como f es creciente en a, por definición tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que,

$$f(x) < f(a),\ \forall x \in (a-\delta, a)$$

y

$$f(x) > f(a), \ \forall x \in (a, a+\delta).$$

De donde tenemos que para $h < 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0.$$

Luego, para $h > 0$, se tiene

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

Lo que demuestra que

$$f\left(a^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

y

$$f\left(a^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

Por lo tanto, ya que f es diferenciable en a, se tiene $f'(a)f'\left(a^-\right) = f'\left(a^+\right) > 0$.

(d) Si $f'(a) > 0$, demuestre que f es creciente en a (a partir de la definición de $f(a)$).

Demostración.- Ya que $f'(a) > 0$, por definición de derivada tenemos,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) > 0.$$

Luego, para $\epsilon < \dfrac{f'(a)}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon < \frac{f'(a)}{2}.$$

Lo que implica,

$$f'(a) - \frac{f'(a)}{2} < \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < f'(a) + \frac{f'(a)}{2}$$

Así,

$$\frac{f'(a)}{2} < \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < \frac{2f'(a)}{2}.$$

Ahora, dado que $f'(a) > 0$, entonces

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > .0$$

De donde, se sigue

$$f(a+h) - f(a) < 0 \text{ si } h < 0, \text{ y } f(a+h) - f(a) > 0 \text{ si } h > 0.$$

Lo que demuestra que f es creciente en a.

(e) Utilice las partes (a) y (d) para demostrar, sin hacer uso del Teorema del Valor Medio, que si f es continua en $[0,1]$ y $f'(a) > 0$ para todo a en $[0,1]$, entonces f es creciente en $[0,1]$.

Demostración.- Ya que $f'(a) > 0$ para todo a en $[0,1]$. Entonces, por la parte (d) tenemos que f es creciente para todo $a \in [0,1]$. Luego, por la parte (a) tenemos que f es creciente en $[0,1]$.

(f) Suponga que f es continua en $[0,1]$ y $f'(a) = 0$ para todo a de $(0,1)$. Aplique la parte (e) a la función $g(x) = f(x) + \epsilon x$ para demostrar que $f(1) - f(0) > -\epsilon$. Análogamente, demuestre que $f(1) - f(0) < \epsilon$ considerando $h(x) = \epsilon x - f(x)$. Concluya que $f(0) = f(1)$.

Demostración.- Sea f una función continua en $[0,1]$ y $f'(a) = 0$ para todo $a \in (0,1)$. Sea también g una función definida por
$$g(x) = f(x) + \epsilon x.$$
Entonces,
$$g'(x) + f'(x) + \epsilon.$$
Ya que, $f'(x) = 0$ para cualquier $x \in (0,1)$, se tiene
$$g'(x) = \epsilon > 0.$$
Así, por la parte (e) tenemos que g es creciente en $[0,1]$. Luego,
$$g(1) > g(0),$$
lo que implica
$$f(1) + \epsilon > f(0) \qquad \Rightarrow \quad f(1) - f(0) > -\epsilon.$$
Ahora, sea h una función definida por:
$$h(x) = \epsilon x - f(x).$$
Entonces,
$$h'(x) = \epsilon - f'(x).$$
Luego, dado que $f'(x) = 0$ para cualquier $x \in (0,1)$, tenemos
$$h'(x) = \epsilon > 0$$
Así, por la parte (e) tenemos que h es creciente en $[0,1]$. Por lo que,
$$h(1) > h(0).$$
Que implica
$$-f(1) + \epsilon > -f(0) \quad \Rightarrow \quad f(1) - f(0) < \epsilon.$$

Esta demostración particular de que una función con derivada nula debe ser constante coincide en muchos puntos con una demostración de H. A. Schwarz, la cual es posible que sea la primera demostración rigurosa que se haya dado de este hecho. Al menos su descubridor así parecía creerlo. Vea su exuberante carta en la referencia [54] de la bibliografía.

70. (a) Si f es una función constante, entonces cada punto es un máximo local de f. Esto puede ocurrir también aunque f no sea una función constante: por ejemplo, si $f(x) = 0$ para $x < 0$ y $f(x) = 1$ para $x \geq 0$. Demuestre, sin embargo, utilizando el Problema 8-4, que si f es continua en $[a, b]$ y cada punto de $[a, b]$ es un punto máximo local, entonces f es una función constante. Por supuesto, se verifica el mismo resultado si cada punto de $[a, b]$ es un punto mínimo local.

Demostración.- Supongamos que f no es una función constante. Entonces, existe $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Sin perdida de generalización, sean $x < y$ y $f(x) < f(y)$. Por el problema 8.4(b) tenemos que existe números $c, d \in [x, y]$ tal que

$$f(c) = f(x) < f(y) = f(d)$$

y

$$f(x) = f(c) < f(t) < f(d), \text{ para todo } t \in (c, d).$$

Lo que demuestra que x no es un mínimo local.

(b) Suponga ahora que cada punto es un punto máximo local o un punto mínimo local de la función continua f (aunque no excluimos la posibilidad de que algunos puntos sean máximos locales y otros mínimos locales). Demuestre que f es constante de la manera siguiente: suponga que $f(a_0) < f(b_0)$. Entonces se puede suponer que $f(a_0) < f(x) < f(b_0)$ para $a_0 < x < b_0$. (¿Por qué?) Utilizando el Teorema 1 del Apéndice del Capítulo 8, efectúe una partición de $[a_0, b_0]$ en intervalos en los que $\sup f - \inf f < (f(b_0) - fa_0))/2$; elija también las longitudes de dichos intervalos menores que $(b_0 - a_0)/2$. Entonces existe uno de estos intervalos $[a_1, b_1]$ con $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$ y $f(a_1) < f(b_1)$. (¿Por qué?) Continué inductivamente y utilice el Teorema de los Intervalos Encajados (Problema 8-14) para hallar un punto x que no pueda ser un máximo o un mínimo local.

Demostración.- Sea a_0 y b_0 dos puntos distintos en $[a, b]$ tal que $f(a_0) \neq f(b_0)$. Sin perdida de generalización podemos suponer que $f(a_0) < f(b_0)$. Luego por el problema 8.4(b), tenemos $f(a_0) < f(x) < f(b_0)$ para todo $x \in (a_0, b_0)$. Ahora, por el teorema 1 del apéndice del capítulo 8, existe algún $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{f(b_0) - f(a_0)}{2} \text{ para } |x - y| \leq \delta = \frac{b_0 - a_0}{k}.$$

Luego, sea $c_i = a_0 + i\delta$. Ya que

$$f(c_1) - f(a_0) < \frac{|f(b_0) - f(a_0)|}{2}$$

y

$$f(b_0) - f(c_{k-1}) < \frac{|f(b_0) - f(a_0)|}{2}$$

Entonces,

$$f(c_1) < f(c_{k-1}).$$

En consecuencia, existe algún i con $1 \leq i \leq k - 1$ tal que $f(c_i) < f(c_{i-1})$. Después, sea $c_i = a_1$ y $c_{i+1} = b_1$. Entonces, $a_0 < b_1 < b_0$ y $f(a_1) < f(b_1)$. Además, podemos ver que $f(a_1) < f(x) < f(b_1)$ para todo $x \in (a_1, b_1)$, esto por el problema 8.4(b).

Continuando de esta manera, tenemos que encontrar intervalos $[a_n, b_n]$ con $a_n < a_{n-1} < b_{n+1} < b_n$ y $f(a_n) < x < f(b_n)$ para $x \in (a_n, b_n)$. Es más, podemos suponer que $b_n - a_n < \dfrac{1}{n}$. Ahora, sea $x \in [a_n, b_n]$. Entonces, todo intervalo que contiene x también contiene algunos $[a_k, b_k]$ con

$f(a_k) < f(x) < f(b_k)$, lo que demuestra que x no es un máximo local.

71. (a) Un punto x se dice que es un punto estrictamente máximo de f en A si $f(x) > f(y)$ para todo y de A con $y \neq x$ (compare con la definición de un punto máximo ordinario). De una manera correspondiente se define un punto estrictamente máximo local. Halle todos los puntos estrictamente máximos locales de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{1}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

Respuesta.- No es difícil concluir que $f(x) \leq 1$ para cada x y $f(x) = 1$. Sí, y sólo si x es un entero. Si x es un entero, podemos elegir el intervalo $(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ donde el valor más alto es obtenido exactamente en x y este es igual a 1.
Para un número racional cualquiera, no entero de la forma p/q podemos definir el intervalo $(n, n+1)$ tal que $p/q \in (n, n+1)$. Vemos que existen varios racionales en este intervalo tal que sus denominadores son menores o iguales a q, as´i elegimos ϵ que para cada $x \in (p/q - \epsilon, p/q + \epsilon)$ distintos de p/q se tiene

$$f(x) < f(p/q),$$

Es decir, tendríamos el conjunto:

$$\epsilon = \min\left\{|p/q| - k/l| : k/l \neq p/q, k/l \in [n, n+1], \text{ y } l \leq q\right\}.$$

Usando, la definición obtenemos que cada número racional es un punto máximo estricto local.

Parece muy improbable que una función pueda tener un punto estrictamente máximo local para todo punto (aunque el ejemplo anterior podría inducir a pensar que es posible). Demuestre que no es posible de la manera siguiente:

(b) Suponga que todo punto es un punto estrictamente máximo local para f. Sea x_1 un número cualquiera y elija $a_1 < x_1 < b_1$ con $b_1 - a_1 < 1$ tales que $f(x_1) > f(x)$ para todo x de $[a_1, b_1]$. Sea $x_2 \neq x_1$ un punto cualquiera de (a_1, b_1) y elija $a_1 \leq a_2 < x_2 < b_2 \leq b_1$ con $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ tales que $f(x_2) > f(x)$ para todo x de $[a_2, b_2]$. Continué de esta manera y aplique el Teorema de los Intervalos Encajados (Problema 8-14) para obtener una contradicción.

Respuesta.- Por un punto arbitrario x_1 podemos elegir el intervalo $[a_1, b_1]$ tal que $a_1 < x_1 < b_1$, $b_1 - a_1 < 1$ y $f(x) < f(x_1)$ para cada $x \in [a_1, b_1]$. Además, consideremos algún punto $x_2 \in (a_1, b_1)$, $x_2 \neq x_1$. Ya que x_2 es el punto máximo estricto local, podemos elegir el intervalo $[a_2, b_2]$ tal que $a_1 \leq a_2 < x_2 < b_2 \leq b_1$, $b_2 - a_2 < 1/2$ y $f(x) < f(x_2)$ para cada $x \in [a_2, b_2]$. Siguiendo esta secuencia podemos crear el intervalo $[a_n, b_n]$ tal que $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ y $b_n - a_n < 1/2^{n-1}$. Usando el Teorema del Intervalo Anidado obtenemos que existe un único elemento y contenida en cada uno de estos intervalos.
La suposición de esta parte implica que y es un punto máximo estricto local, pero un intervalo arbitrario $y \in [a, b]$ contiene a_n, b_n para algunos n, y luego $f(x_n) < f(y)$. Por lo tanto, y no puede ser un punto máximo estricto local, por lo que tenemos una contradicción.

Convexidad y Concavidad

Definición 11.5 Una función f es **convexa** en un intervalo, si para todo a y b del intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la gráfica de f.

La condición geométrica que aparece en la definición puede expresarse de forma analítica , la cual es, a veces más útil en las demostraciones. La recta entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es la gráfica de la función g definida mediante

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Esta recta se sitúa por encima de la gráfica de f en x si $g(x) > f(x)$, es decir, si

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) > f(x)$$

o bien

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) > f(x) - f(a)$$

es decir

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

con lo cual hemos obtenido una definición equivalente de convexidad.

Definición 11.6 Una función f es **convexa** en un intervalo, si dados a, x y b del intervalo con $a < x < b$ se verifica que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si la palabra "encima" de la definición 1 se sustituye por "por debajo", o equivalentemente, si la desigualdad de la definición 2 se sustituye por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

se obtiene la definición de una función **cóncava**. No es difícil comprobar que las funciones cóncavas son precisamente aquellas de la forma $-f$, siendo f una función convexa.

Teorema 11.10 Sea f convexa. Si f es diferenciable en a, entonces la gráfica de f se sitúa por encima de la tangente a f en el punto $(a.f(a))$, excepto en el mismo punto de contacto $(a, f(a))$. Si $a < b$ y f es diferenciable en a y en b, entonces $f'(a) < f'(b)$.

Demostración.- Si $0 < h_1 < h_2$. Entonces, como se muestra en la figura 4 (Michael Spivak, capítulo 11, Apéndice),

$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} < \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}.$$

A partir de la definición 2 aplicada a los puntos $a < a+h_1 < a+h_2$, se obtiene una demostración de desigualdad sin basarse en ningún dibujo o esquema. Dicha desigualdad demuestra que los valores de

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

disminuyen cuando $h \to 0^+$. Por consiguiente,

$$f'(a) < \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ para } h > 0$$

(de hecho, la derivada $f'(a)$ es el ínfimo de todos estos valores). Pero esto significa que, para $h > 0$ la secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ tiene una pendiente mayor que la tangente, lo que implica que $(a+h, f(a+h))$ se sitúa por encima de la tangente (la traducción analítica de este hecho es inmediata).
En el caso de valores de h negativos, la situación es similar (Figura 5, Michael Spivak, capítulo 11, Apéndice): Si $h_2 < h_1 < 0$, entonces

$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} > \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}.$$

Esto demuestra que la pendiente de la tangente es mayor que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ para } h < 0$$

(de hecho, $f'(a)$ es el supremo de todos estos números), esto demuestra que $f(a+h)$ se sitúa por encima de la recta si $h < 0$. Queda demostrada pues la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que $a < b$. Entonces, como ya hemos visto (Figura 6 Michael Spivak, capítulo 11, Apéndice),

$$\begin{aligned}
f'(a) &< \frac{f(a+(b-a))-f(a)}{b-a} && \text{ya que } b-a > 0 \\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} && . \\
f'(b) &> \frac{f(b+(a-b))-f(b)}{a-b} && \text{ya que } a-b < 0 \\
&= \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

Combinando estas desigualdades, obtenemos $f'(a) < f'(b)$. ■

Lema 11.1 Supongamos que f es diferenciable y que f' es creciente. Si $a < b$ y $f(a) = f(b)$, entonces $f(x) < f(a) = f(b)$ para $a < x < b$.

Demostración.- Supongamos que $f(x) \geq f(a) = f(b)$ para algún x de (a, b). Entonces el máximo de f en $[a, b]$ se localiza en algún punto x_0 de (a, b) con $f(x_0) \geq f(a)$ y, por supuesto, $f'(x_0) = 0$. Por otra parte, aplicando el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[a, x_0]$, vemos que existe un x_1 tal que $a < x_1 < x_0$ y

$$f(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \geq 0,$$

lo que contradice el hecho de que f' sea creciente. ■

Teorema 11.11 Si f es diferenciable y f' es creciente, entonces f es convexa.

Demostración.- Sea $a < b$. Definamos f mediante

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Es fácil comprobar que g' también es creciente; además, $g(a) = g(b) = f(a)$. Aplicando el lema a la función g deducimos que

$$g(x) < f(a) \quad \text{si} \quad a < x < b.$$

En otras palabras, si $a < x < b$, entonces

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) < f(a)$$

o

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

es decir f es convexa. ■

Teorema 11.12 Si f es diferenciable y la gráfica de f se sitúa por encima de cada recta tangente excepto en el punto de contacto, entonces f es convexa.

Demostración.- Sea $a < b$. Como se puede observar en la figura 8 (Michael Spivak, Apendice, capítulo 11), si $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la tangente en $(a, f(a))$, y $(a, f(a))$ se sitúa por encima de la tangente en $(b, f(b))$, entonces la pendiente de la tangente en $(b, f(b))$ ha de ser mayor que la pendiente de la tangente en $(a, f(a))$. En el siguiente razonamiento se muestra analíticamente este hecho mediante ecuaciones.
Como la recta tangente en $(a, (f(a))$ queda definida por la gráfica de la función

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a),$$

y como $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la recta tangente, obtenemos

$$f(b) > f'(a)(b - a) + f(a).$$

Análogamente, como la recta tangente en $(b, f(b))$ queda definida por la gráfica de la función

$$h(x) = f'(b)(x - b) + f(b),$$

y $(a, f(a))$ se sitúa por encima de la tangente en $(v, f(b))$, obtenemos

$$f(a) > f'(b)(a - b) + f(b).$$

A partir de estas dos ecuaciones, podemos deducir que $f'(a) < f'(b)$, de manera que, según el teorema 2 f es convexa. ■

Teorema 11.13 Si f es diferenciable en un intervalo y corta a cada una de sus rectas tangentes una sólo vez, entonces f es convexa o cóncava en dicho intervalo.

Demostración.- La demostración se desglosa en dos apartados.

a) Primero veamos que ninguna recta puede cortar a la gráfica de f en tres puntos diferentes. Supongamos, por el contrario, que alguna recta corta a la gráfica de f en los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$, con $a < b < c$ (Figura 11, Michael Spivak, capítulo 11 Apéndice). Entonces se verificaría que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Consideremos la función

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{para } x \text{ en } [b, c].$$

La ecuación de igualdad de arriba demuestra que $g(b) = g(c)$. Por tanto, según el Teorema de Rolle, existe algún número x en (b, c) en el que $0 = g'(x)$, y así

$$0 = (x - a)f'(x) - [f(x) - f(a)]$$

o sea

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pero esto significa (Figura 12, Michael Spivak, capítulo 11 Apéndice) que la recta tangente en $(x, f(x))$ corta al punto $(a, f(a))$, lo que contradice a las hipótesis.

b) Supongamos ahora que $a_0 < b_0 < c_0$ y $a_1 < b_1 < c_1$ son puntos del intervalo. Sea

$$\begin{array}{rcl} x_t & = & (1-t)a_0 + ta_1 \\ y_t & = & (1-t)b_0 + tb_1 \qquad 0 \leq t \leq 1. \\ z_t & = & (1-t)c_0 + tc_1 \end{array}$$

Entonces, $x_0 = a_0$ y $x_1 = a_1$ y (Problema 4-2) los puntos x_t se sitúan entre a_0 y a_1, con resultados análogos para y_t y z_t. Además,

$$x_t < y_t < z_t \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Consideremos ahora la función

$$g(t) = \frac{f(t_t) - f(x_t)}{y_t - x_t} - \frac{f(z_t) - f(x_t9}{z_t - x_t} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Según el apartado 1, $g(t) \neq 0$ para todo t en $[0, 1]$. Por lo tanto, o bien $g(t)$ para todo t de $[0, 1]$ o $g(t) < 0$ para todo t de $[0, 1]$. Así, o bien f es convexa o f es cóncava.

■

11.2 Problemas

1. Dibuje las funciones del Problema 11-1, indicando las regiones de convexidad y concavidad y los puntos de inflexión (considere (iv) con doble asterisco).

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$

Respuesta.- Calculando la primera deriva, tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$$

Donde, los puntos críticos serán

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2, \quad x = -\frac{4}{3}.$$

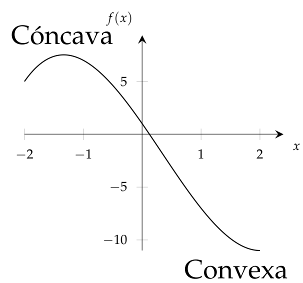
La segunda derivada estará dada por

$$f''(x) = 6x - 2$$

Donde, los puntos de inflexión estarán definidos por

$$6x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$$

Dado que $f'' < 0$, f es cóncava para $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$. Y será convexa para $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, dado que $f'' > 0$.



(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$.

Respuesta.- Calculando la primera deriva, tenemos

$$f'(x) = 5x^4 + 1$$

Donde, no se tendrán puntos críticos, ya que

$$5x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^4 + 1 = 0.$$

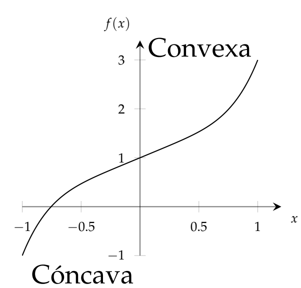
no tiene solución en los reales. Luego, la segunda derivada estará dada por

$$f''(x) = 20x^3.$$

Los puntos de inflexión estarán definidos por

$$20x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Dado que $f'' < 0$, f es cóncava para $(-\infty, 0)$. Y será convexa para $(0, \infty)$, dado que $f'' > 0$.



(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$

Respuesta.- Calculando la primera deriva, tenemos

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

Donde, los puntos críticos serán

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = 1.$$

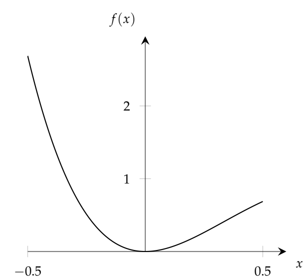
La segunda derivada estará dada por

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$$

Los puntos de inflexión estarán definidos por

$$36x^2 - 48x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, \quad x = \frac{1}{3}$$

Dado que $f'' < 0$, f es cóncava para $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$. Y será convexa para $\left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$, dado que $f'' > 0$.



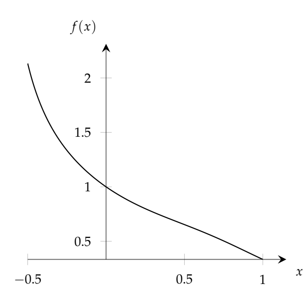
(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Respuesta.- Calculando la primera deriva, tenemos

$$f'(x) = -\frac{5x^4 + 1}{(x^5 + x + 1)^2}$$

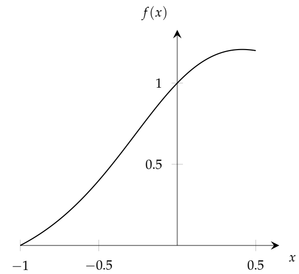
Donde, no existen puntos críticos. La segunda derivada estará dada por

$$f''(x) = \frac{2\left(15x^8 - 10x^3 + 1\right)}{(x^5 + x + 1)^3}$$



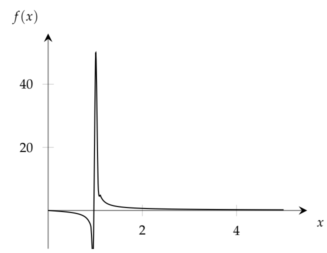
(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$.

Respuesta.-



(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ en $[0, 5]$.

Respuesta.-



2. La Figura 30 del capítulo 11 muestra la gráfica de f'. Dibuje la gráfica de f.

Respuesta.- Entre los puntos 0 y 1, la f'(x) es positiva, por lo que debe ser creciente. Pero a medida que $f'(x)$ alcanza el punto 1, se desplaza hacia la zona negativa, por lo que $f(x)$ debe aumentar desde un valor negativo mayor y alcanzar su máximo local en el punto 1. Entre 1 y 2, la $f'(x)$ es negativa, sin embargo, tiene un mínimo entre 1 y 2, por lo que la forma de $f(x)$ cambiará de convexa a cóncava. Entre 2 y 3, nuevamente f'(x) es decreciente, entonces la forma cambia nuevamente a cóncava. Por último entre 2 y 3, $f(x)$ cambia a cóncava. El proceso se puede repetir de esta manera. Después del punto 4, $f'(x)$ aumenta a un valor positivo alto, por lo que la curva de $f(x)$ debería llegar al infinito a un ritmo mayor.

3. Demuestre que f es convexa en un intervalo si y sólo si para todo x e y del intervalo se verifica

$$f(tx + (1-t)y) < (1-t)f(y), \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Se trata solamente de otra expresión equivalente a la definición que hemos dado de función convexa, aunque muy útil muchos casos.

Demostración.- Sea $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ dos puntos de f. Entonces, la recta que une estos dos puntos estará dada por

$$\mathcal{L}_1(t) = [ty + (1-t)x, tf(y)] + (1-t)f(x), \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Por otro lado la linea que une x e y es

$$\mathcal{L}_2(t) = ty + (1-t)x.$$

Así, f es convexa si y sólo si

$$\mathcal{L}_1(t) > f[\mathcal{L}_2(t)],$$

para todo $t \in (0, 1)$. Por lo tanto

$$f[ty + (1-t)x] < tf(y) + (1-t)f(x).$$

4. (a) Demuestre que si f y g son convexas y f es creciente, entonces $f \circ g$ es convexa. (La demostración es más sencilla si se utiliza el resultado del problema 3).

Demostración.- Sea f y g dos funciones convexas y f es creciente. Entonces, tenemos que mostrar que $f \circ g$ es convexa. Ya que f y g son convexas por el anterior ejercicio 3 se tiene, para $t \in (0,1)$ que

$$f[ty + (1-t)x] < tf(y) + (1-t)f(x) \qquad \text{y} \qquad g[ty + (1-t)x] < tg(y) + (1-t)g(x),$$

para todo x, y en el dominio de f y g. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} (f \circ g)[ty + (1-t)x] & < & f \circ [tg(y) + (1-t)g(x)] \\ & < & t(f \circ g)(y) + (1-t)(f \circ g)(x), \end{array}$$

para cualquier x, y de g para que $g(x)$ y $g(y)$ estén en el dominio de $f \circ g$. Así, demuestra que $f \circ g$ es una función convexa, gracias al problema anterior.

(b) Dé un ejemplo de un caso en el que $g \circ f$ no sea convexa.

Respuesta.- Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$f(x) = x^2 + 1$$

y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

De donde, f es una función creciente convexa y g es una función convexa. Entonces,

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

el cual no es una función convexa.

Por ejemplo sea $y = 1$, $x = 2$ y $t = \dfrac{1}{2}$ por lo que

$$(f \circ g)[ty + (1-t)x] = \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{4}{9} > \frac{7}{20} = t(g \circ f)(y) + (1+t)(g \circ f)(x).$$

(c) Suponga que f y g son dos veces diferenciables. Dé otro demostración del resultado del apartado (a) considerando las derivadas segundas.

Demostración.- Sea f y g dos funciones convexas dos veces diferenciables y f creciente. Entonces, tenemos que demostrar que $f \circ g$ es convexa; es decir, necesitamos demostrar que

$$(f \circ g)'' > 0.$$

Notemos que

$$(f \circ g)'' = (f'' \circ g)g'^2 + (f' \circ g)g''$$

que es positivo siempre que f'', f' y g'' son todos positivos. Pero estos son positivos desde nuestra hipótesis ya que tanto f como g son convexos así como f es creciente.

5. (a) Suponga que f es diferenciable y convexa en un intervalo. Demuestre que o bien f es creciente, o bien f es decreciente, o sino que existe un número c tal que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c.

Demostración.- Supongamos primero que $f' \neq 0$. Ya que f es diferenciable y convexa, por el teorema 1 tenemos que para cualquier $x, y \in [a, b]$ con $x < y$,

$$f'(x) < f'(y).$$

Esto implica que f' es una función monótona en $[a, b]$. Por lo tanto, $f' > 0$ o $f' < 0$. Esto demuestra que f es creciente o decreciente en $[a, b]$.
Luego, sea $f'(c) = 0$. Entonces, por el teorema 1 tenemos que para cualquier $x \in [a, b]$ con $x < c$,

$$f'(x) < f'(c) = 0.$$

Por otro lado, para $c < y$,

$$0 = f'(c) < f'(y).$$

Es decir,

$$f'(x) < 0 < f'(y).$$

Lo que demuestra que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c.

(b) Utilice este hecho para dar otra demostración del resultado del problema 4(a), siendo f y g (una vez) diferenciables. (Hay que ir con cuidado al comparar $f'[g(x)]$ y $f'[g(y)]$ para $x < y$.)

Demostración.- Sean f y g dos funciones diferenciables y convexas en $[a, b]$. Podemos suponer que f es creciente. Entonces, tenemos que mostrar que $f \circ g$ es convexa. Para demostrar esto, demostraremos que $(f \circ g)'$ es creciente en $[a, b]$. Sea $x < y$ dos números en $[a, b]$, de lo que

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]\, g'(x) < (f \circ g)'(y) = f'[g(y)]\, g'(y).$$

Como g es diferenciable y convexo, por la parte (a) tenemos que o bien g es creciente, o bien es decreciente, o bien existe un punto $c \in [a, b]$ tal que g es decreciente a la izquierda de c y es creciente a la derecha de c.

Caso 1. g es creciente.- Tenemos que $g'(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, por el teorema 1 se tiene $g'(x) < g'(y)$ siempre que $x < y$. Además, ya que f es creciente se tiene que $f'(x) > 0$ y ya que f es convexa nuevamente por el teorema 1 $f'(x) < f'(y)$ siempre que $x > y$. Así, tenemos que

$$0 \leq g'(x) < g'(y), \quad \text{y} \quad 0 \leq f'(x) < f'(y)$$

para todo $x < y$ en $[a, b]$. En particular,

$$0 \leq g'(x) < g'(y), \quad \text{y} \quad 0 \leq f'[g(x)] < f'[g(y)]$$

donde se cumple la segunda desigualdad ya que $g(x) < g(y)$ como g es creciente. Esto implica que

$$f'[g(x)]\, g'(x) < f'[g(y)]\, g'(y)$$

para todo $x, y \in [a, b]$ con $x < y$. Por lo tanto, $f \circ g$ es también convexa.

Caso 2. g es decreciente.- En este caso, se tiene $g'(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$, por el teorema 1 tenemos que $g'(x) < g'(y)$ siempre que $x < y$. Además, ya que f es creciente se tiene $f'(x) > 0$ y ya que f es convexa nuevamente por el teorema 1 $f'8x) < f'(y)$ con $x < y$. Así, se tiene

$$g'(x) < g'(y) \leq 0 \text{ y } 0 \leq f'(x) < f'(y)$$

para todo $x < y$ en $[a, b]$. En particular,

$$g'(x) < g'(y) \leq 0 \text{ y } 0 \leq f'[g(x)] > f'[g(y)]$$

donde se cumple la segunda desigualdad ya que $g(x) > g(y)$ como g es decreciente. Esto implica que

$$f'[g(x)]\,g'(x) < f'[g(y)]\,g'(y)$$

para todo $x, y \in [a, b]$ con $x < y$. Por lo tanto, $f \circ g$ es también convexa.

Caso 3. g es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha de c.- Sea $x < y$ en $[a, b]$. Entonces se cumple que $x < y \leq c$, o $c \leq x < y$, o $x < c < y$. Ahora, observemos que los casos primero y segundo cubren la posibilidad de $x < y \leq c$ y $c \leq x < y$, respectivamente. Por lo que nos queda demostrar el caso $x < c < y$, como sigue:

$$f'[g(x)]\,g'(x) < f'[g(c)]\,g'(c) < f'[g(y)]\,g'(y).$$

donde donde la primera desigualdad ha sido probada en el caso 1 y la segunda en el caso II anterior. Así, tenemos que

$$f'[g(x)]\,g'(x) < f'[g(y)]\,g'(y)$$

siempre que $x < y$.

(c) Demuestre el resultado del apartado (a) sin suponer que f es diferenciable. Hay que tener en cuenta distintos casos, aunque no es necesario tener ideas particularmente luminosas. Comience demostrando que si $a < b$ y $f(a) < f(b)$, entonces f es creciente a la derecha de b; y si $f(a) > f(b)$, entonces f es decreciente a la izquierda de a.

6. Sea f una función dos veces diferenciable que posee las siguientes propiedades: $f(x) > 0$ para $x > 0$, f es decreciente y $f'(0) = 0$. Demuestre que $f''(x) = 0$ para algún $x > 0$ (de manera que, en casos razonables, f tendrá un punto de inflexión en x; considérese por ejemplo la función $f(x) = 1/(1 + x^2)$). Cada hipótesis de este teorema es esencial, como lo demuestra el caso de la función $f(x) = 1 - x^2$, que no es positiva para todo x; también el caso de la función $f(x) = x^2$, que no es decreciente, y el caso de la función $f(x) = 1/(x + 1)$, que no satisface la condición $f'(0) = 0$. Indicación: Elija $x_0 > 0$ con $f(x_0) < 0$. No es posible que $f'(y) \leq f'(x_0)$ para todo $y > x_0$. ¿Por qué? Por tanto, $f'(x_1) > f'(x_0)$ para algún $x_1 > x_0$. Considere f' en $[0, x_1]$.

Demostración.- Ya que f es decreciente, se tiene para $x \geq 0$ que $f(0) \geq f(x)$. Usando el teorema de valor medio, tenemos que

$$f(x) - f(0) = f'(x_0)x$$

para algún $0 \leq x_0 < x$. Esto implica que $f'(x_0) < 0$ ya que $f(0) \geq f(x)$. Esto afirma que existe un número $x \geq c_0$ tal que $f'(x) > f'(x_0)$.
Ahora, supongamos que para todo $y > x_0, f'(y) \leq f'(x_0)$. Usando una vez más la teorema del valor medio, para cualquier $x > x_0$,

$$f(x) - f(x_0) = f'(y)(x - x_0) < f'(x_0)(x - x_0).$$

Pero esto implica que existe $x > x_0$ tal que $f(x) < 0$ lo que contradice el hecho de que $f(x) > 0$ para $x \geq 0$. Luego, existe un número $x_1 \geq x_0$ tal que $f'(x_1) > f'(x_0)$. Entonces, vemos que f' debe tener un mínimo en el intervalo $[0, x_1]$. Por lo tanto, existe un número $x \in [0, x_1]$ tal que $f''(x) = 0$.

7. (a) Demuestre que si f es convexa entonces $f([x + y]/2) < [f(x) + f(y)]/2$.

Demostración.- Por el ejercicio 4, tenemos que una función f es convexa si y sólo si para todo x, y en el dominio de f y para todo t se tiene que

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Ya que, f es convexa para $t = \frac{1}{2}$ tenemos

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(b) Suponga que f satisface dicha condición. Demuestre que $f(kx+(1-k)y) < kf(x)+(1-k)f(y)$ siendo k un número racional entre 0 y 1, de la forma $m/2^n$. Indicación: El apartado (a) constituye el caso especial $n = 1$. Utilice el principio de inducción, empleando el apartado (a) en cada caso.

Demostración.- Sea x, y cualquier número denotado por

$$p_k = \frac{mx}{2^k} + \left(1 - \frac{m}{2^k}\right) y$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$ con $m < 2^k$. Entonces, vemos que $p_k \in [x, y]$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Además, observamos que p_{k+1} es el punto medio de p_k e y. De hecho,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{mx}{2^k} + \left(1 - \frac{m}{2^k}\right) y + y}{2} \\
&= \frac{mx}{2^{k+1}} + \left(1 - \frac{m}{2^{k+1}}\right) y \\
&= p_{k+1}
\end{aligned}$$

Por lo que debemos demostrar por inducción que

$$f(p_n) < \frac{mx}{2^n} f(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) f(y)$$

Ya que $n = 1$ entonces m tiene que ser 1, por lo que se requiere mostrar que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

para todo x, y el cual es nuestra hipótesis.

Ahora, supongamos que se cumple para $n-1$. Es decir,

$$f\left[\frac{mx}{2^{n-1}} + \left(1 - \frac{m}{2^{n-1}}\right) y\right] < \frac{mf(x)}{2^{n-1}} + \left(1 - \frac{m}{2^{n-1}}\right) f(y)$$

Luego, veamos que

$$\begin{aligned}
f\left[\frac{mx}{2^n} + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) y\right] &= f(P_n) \\
&= f\left(\frac{p_{n-1}+y}{2}\right) \\
&< \frac{f(p_{n-1}) + f(y)}{2} \\
&< \frac{\frac{mx}{2^{n-1}} + \left(1 - \frac{m}{2^{n-1}}\right) f(y) + f(y)}{2} \\
&= \frac{mf(x)}{2^n} + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) f(y)
\end{aligned}$$

Lo que completa la prueba.

(c) Suponga que f satisface la condición del apartado (a) y que f es continua. Demuestre que f es convexa.

Demostración.- Suponga que f satisface las condiciones de la parte (a) y f es continua. Entonces, tenemos que demostrar que para cualquier x, y y $t \in (0,1)$

$$f\left[tx + (1-t)y\right] < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Podemos comenzar observando que el conjunto

$$A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N} \text{ con } m < 2^n \right\}$$

es un conjunto denso en $[0,1]$. Es decir, para cada $t \in [0,1]$ existe una secuencia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_n \in A$ para todo n tal que $a_n \to t$ como $n \to \infty$. Tomemos tal secuencia $\{a_n\} \subset A$ y por la parte (b), tenemos que para $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left[a_n x + (1-a_n)y\right] < a_n f(x) + (1-a_n)f(y)$$

Tomando el limite a ambos lados,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ f\left[a_n x + (1-a_n)y\right] \right\} \le \lim_{n\to\infty} \left[a_n f(x) + (1-a_n)f(y)\right]$$

Ya que, $\lim_{n\to\infty} a_n = t$ implica que

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

8. Para $n > 1$, sean $p_1, \ldots, p_n$ números positivos con $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

(a) Siendo $x_1, \ldots, x_n$ números cualesquiera, demuestre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ está situado entre el menor y el mayor de los x_i.

Demostración.- Sean x_{i_1} el menor y x_{i_2} el mayor de $x_1, \ldots, x_n$ para cualquier $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$. Donde notemos que

$$x_{i_1} = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) x_{i_1} \le \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) x_{i_2} = x_{i_2}.$$

(b) Demuestre lo mismo para $(1/t) \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$, donde $t = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} p_i$.

Demostración.- Sean x_{i_1} el menor y x_{i_2} el mayor de $x_1, \ldots, x_n$ para algún $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, tenemos que

$$x_{i_1} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} p_i} \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i\right) x_{i_1} \le \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i \le \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} p_i} \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i\right) x_{i_2} = x_{i_2}.$$

(c) Demuestre *la desigualdad de Jensen*: si f es convexa, entonces $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i\right) < \sum\limits_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$. Indicación: Utilice el Problema 3, observando que $p_n = l - t$. (Se necesita el apartado (b) para demostrar que $(1/t)\sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i x_i$ Pertenece al dominio de f si $x_1, \ldots, x_n$ son puntos del dominio de f.).

Demostración.- Demostraremos la proposición por inducción. Primero vemos que se cumple para $n = 1$, ya que

$$f(x_1) \leq f(x_1).$$

Ahora, supongamos que es cierto para $n - 1$. Entonces, ya que $t = \sum_{i=1}^{n-1} p_i < 1$

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n-1} q_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i + p_n x_n\right) \\
&= f\left(\frac{1}{t} t \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i + p_n x_n\right) \\
&\leq tf\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) + p_n f(x_n) \\
&\leq t\sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i}{t} f(x_i) + p_n f(x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración.

9. (a) Para cualquier función f, la derivada por la derecha, $\lim\limits_{h\to 0^-} [f(a+h) - f(a)]/h$, se representa mediante $f'_+(a)$, y la deriva da por la izquierda por $f'_+(a)$. La demostración del Teorema 1 muestra realmente que $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ siempre existen si f es convexa en algún intervalo abierto que contenga al punto a. Compruebe dicha afirmación y demuestre que f'_+ y f'_- son crecientes; demuestre también que $f'_-(a) < f_+(a)$.

Demostración.- Recordemos que para una función $f(x)$ convexa u un a cualquiera que pertenece a algún intervalo, la función

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

es decreciente cuando h^+ tiende a 0. Por lo que,

$$f'_+ 8a) = \lim_{h\to 0} g(h)$$

existe, ya que $g(h)$ es decreciente y acotado con $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para cualquier $h < 0$. Así deducimos que,

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} g(h) = \inf\left\{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}, h > 0\right\}$$

Por otro lodo, $g(h)$ es creciente cuando h^- tiende a 0. Por lo que,

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} g(h)$$

existe, ya que $g(h)$ es creciente y acotado con $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para cualquier $h > 0$. Deducimos que

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} g(h) = \sup\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, h < 0\right\}.$$

Dado que f es convexa, podemos afirmar que

$$\frac{f(a+k)-f(a)}{k} < \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

donde $k < 0$ y $h > 0$. Así,

$$f'_-(a) \leq f'_+(a).$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} f'_-(a) & \leq & f'_+(a) \\ & < & \dfrac{f[a+(a+h)]-f(a)}{b-a} \\ & = & \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ & = & \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \\ & = & \dfrac{f\,[b+(a-b)]}{a-b} \\ & < & f'_+(b) \geq f'_-(b) \end{array}$$

Se sigue que f'_- y f'_+ son funciones crecientes.

(b) Recíprocamente,suponga que f es convexa en $[a,b]$ y que g es convexa en $[b,c]$, con $f(b) = g(b)$ y $f'_-(b) \leq g'_+(b)$ (Figura 13 (a)). Si definimos la función h en $[a,c]$ como aquélla que es igual a f en $[a,b]$, a g en $[b,c]$, demuestre que h es convexa en $[a,c]$. Indicación: Dados P y Q situados en lados opuestos de$O = (b, f(b))$, como se muestra en la Figura 13 (b), compare la pendiente de OQ con la pendiente de PO.

Demostración.- Para probar que la función h es convexa, probemos que para cualesquiera puntos $x_1, x_2 < x_3$ que pertenece al intervalo $[a,c]$, la inecuación

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

es verdadera. En nuestro caso es suficiente elegir el punto medio para $x_2 = b$. Esto ya que, la función h es convexa en los intervalos $[a,b]$ y $[b,c]$. Por lo tanto, solo debemos probar la convexidad cuando un punto pertenece al intervalo $[a,b]$ y al intervalo $[b,c]$ y el punto medio es $x_2 = b$. Sean $x \in [a,b]$ y $y \in [b,c]$. Luego, por (a) se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} & < & f'_+(b) \\ \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & > & g'_-(b). \end{array}$$

Por lo tanto, no es difícil deducir usando desigualdades previamente obtenidas que:

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} < f'_+ \leq g'_-(b) < \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$$

En otras palabras,

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} < \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$$

lo que prueba que la función h es convexa en el intervalo $[a,c]$.

(c) Demuestre que si f es convexa, entonces $f'_+(a) = f'_-(a)$ si y sólo si f'_+ es continua en a. (Por tanto, f es diferenciable precisamente cuando f'_+ es continua.) Indicación: $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ está próximo a $f'_-(a)$ para $b<a$ próximo a a, y $f'_+(b)$ es menor que este cociente.

Demostración.- Primeramente, supongamos que $f'_+(x)$ una función continua en $x=a$. Luego, sea b un número real arbitrario tal que $b<a$. Se sigue de los segmentos anteriores que

$$f'_+ < f'_- \leq f'_+(a).$$

Ya que f'_+ es continua en $x=a$, se tiene que:

$$\lim_{b\to a} f'_+(b) = f'_+(a).$$

Se sigue que,

$$f'_-(a) = f'_+(a).$$

Para probar la recíproca, supongamos que $f'_-(a) = f'_+(a)$. Para esto, debemos primero probar que f'_+ es continua por la derecha. En otras palabras, probaremos que

$$\lim_{b\to a^+} f'_+(b) = f'_+(a).$$

Sea $\epsilon > 0$ un número real arbitrario. Recordemos por el segmento (a), la función $g(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es decreciente cuando $h>0$ y tiende a 0. Por lo que, podemos deducir que ϵ existirá para algún x tal que $x>a$ y

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'_+(a) + \epsilon \qquad (1)$$

Ahora, sabemos que f'_+ existe, y $\lim\limits_{b\to a^+} f(b) = f(a)$. En otras palabras, si podemos elegir b cerca de a, entonces $f(b)$ podría estar cerca de $f(a)$. Así, para ϵ podemos elegir algún b tal que

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} < \frac{f(x)-f(a)}{c-a} + \epsilon \qquad (2)$$

Por (1) y (2) se tiene,

$$\begin{aligned} f'_+(a) &< f'_+(b) \\ &< \frac{f(x)-f(b)}{c-b} + \epsilon \\ &< \frac{f(x)-f(a)}{c-a} + \epsilon < f'_+ + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Dado que b está cerca de a obtenemos que $f'_+(b)$ está cerca de $f'_+(a)$. Es decir, f'_+ es continua por la derecha a a. Queda por demostrar que f'_+ es continua por la izquierda en a. Otra vez, sea $\epsilon > 0$ y $y<a$ tal que

$$f'_+(a) - \epsilon = f'_-(a) < \frac{f(a)-f(y)}{a-y}.$$

Para un número real b de manera que $c < b < a$, entonces

$$\begin{aligned} f'_{-}(a) - \epsilon &< \frac{f(a)-f(c)}{a-c} \\ &< \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \\ &< f'_{+}(b) < f'_{+}(a). \end{aligned}$$

Así, $\lim\limits_{b\to a^-} f'_{+}(b) = f_{+}(a)$. Por lo tanto, f'_{+} es continua por ambos lados en a. Lo que significa que f'_{+} es continua en a.

10. a) Demuestre que una función convexa definida en $\mathbb{R}$, o en cualquier intervalo abierto, debe ser continua.

Demostración.- Sean $c \in (a,b)$ cualquier punto y $\epsilon > 0$. Entonces, tenemos que definir $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-f(c)| < \epsilon, \text{ siempre que } |x-c| < \delta.$$

Ahora, sea $x_1, c_2 \in (a,b)$ con $x_1 < c < x_2$. Además, tenemos la siguiente combinación convexa,

$$x = \frac{c-x_1}{x_1-x_1}x_2 + \left(1 - \frac{c-x_1}{x_2-x_1}\right)x_1, \quad 0 < \frac{c-x_1}{x_2-x_1} < 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} (x_2-x_1)f(c) &\leq (c-x_1)f(x_2) + (x_2-c)f(x_1) \\ &\leq (c-x_1)f(c) + (x_2-x_1+x_1-c)f(x_1) \\ &\leq (c-x_1)\left[f(x_2)-f(x_1)\right] + (x_2-x_1+x_1-c)f(x_1). \end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} (x_2-x_1)f(c) &\leq (c-x_1)f(x_2) + (x_2-c)f(x_1) \\ &\leq (c-x_2+x_2-x_1)f(x_2) + (x_2-c)f(x_1) \\ &\leq (x_2-c)\left[f(x_1)-f(x_2)\right] + (x_2-x_1)f(x_2). \end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}. \qquad (2)$$

Así, por (1) y (2) para $x_1, x_2, c \in (a,b)$ tal que $x_1 < c < x_2$, tenemos que

$$\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}. \qquad (3)$$

Ahora, para dos puntos cualesquiera $c, d \in [x_1, x_2]$, podemos asumir sin perdida de generalidad que $d < c$. Ya que (a,b) es abierto, existe $x_0, x_3 \in (a,b)$ de modo que $x_0 < x_1 < d < c < x_2 < x_3$. Entonces, por (3), para $d < c < x_3$ y $c < x_2 < x_3$ se tiene

$$\frac{f(c)-f(d)}{c-d} \leq \frac{f(x_3)-f(d)}{x_3-d} \leq \frac{f(x_3)-f(c)}{x_3-c},$$

y

$$\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c} \le \frac{f(x_3)-f(c)}{x_3-c} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

respectivamente.
Por lo tanto,

$$\frac{f(c)-f(d)}{c-d} \le \frac{f(x_3)-f(d)}{x_3-d} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \qquad (4)$$

Similar a lo de arriba, si $x_0 < x_1 < d$ y $x_1 < d < c$. Entonces,

$$\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} \ge \frac{f(c)-f(x_0)}{c-x_0} \ge \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

y

$$\frac{f(c)-f(d)}{c-d} \ge \frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_0} \ge \frac{f(d)-f(x_1)}{d-x_1},$$

respectivamente. De esta manera:

$$\frac{f(c)-f(d)}{c-d} \ge \frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} \ge \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}. \qquad (5)$$

Así, por (4) y (5) para $c, d \in [x_1, x_2]$,

$$\frac{f(c)-f(d)}{c-d} \le M = \max\left\{\frac{|f(x_1)|-f(x_0)}{x_1-x_0}, \frac{|f(x_3)-f(x_2)|}{x_3-x_2}\right\}.$$

Por último, dado $\epsilon > 0$ tomemos $0 < \delta < \min\left\{\frac{\epsilon}{M}, \frac{x_2-x_1}{2}\right\}$. Entonces, para $x \in (c_\delta, c+\delta)$

$$|f(c)-f(x)| \le |c-x|M < \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Por lo tanto, f es continua en (a,b).

b) Dé un ejemplo de una función convexa en un intervalo cerrado que no sea continua y explique exactamente qué tipos de discontinuidades son posibles.

Respuesta.- Si tuviéramos un intervalo cerrado en lugar de un intervalo abierto en la parte (a), la función f podría no ser continua. Por ejemplo, consideremos al función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 1, \\ 5 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Claramente f es convexa en $[0,1]$.

11. Una función f se denomina débilmente convexa en un intervalo, si para $a < b < c$ de dicho intervalo, se verifica que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(a) Demuestre que una función débilmente convexa es convexa si y sólo si su gráfica no contiene segmentos rectilíneos. (A veces, una función débilmente convexa se denomina simplemente "convexa", mientras que las funciones convexas en el sentido que las hemos definido en este libro se denominan "estrictamente convexas".) Demostración.- Claramente f es débilmente convexa en un intervalo si y sólo si para todo a y b en el intervalo, el segmento que une $(a,, f(a))$ y $(b, f(b))$ se encuentra por encima o sobre la gráfica de f. Si f es convexa, entonces es claro que no contiene segmentos de recta.Por otro lado, supongamos que f es débilmente convexa y el gráfico no contiene segmentos de recta. Para probar que f es convexa, tenemos que mostrar que el segmento de lineal que une $(a, f(a))$ y $(v, f(b))$ no puede contener ni un punto $(x, f(x))$ para $a < x < b$. Supongamos que si contiene un punto. Ya que el gráfico de f no contiene todo el segmento de de $(x, f(x))$ a $(b, f(b))$, existe por lo mucho algún $x' \in (x, b)$ tal que el punto $(x', f(x'))$ se encuentra por debajo de esta segmento de linea. Ahora, es fácil ver que $(x, f(x))$ está por encima del segmento de linea de $(a, f(a))$ a $(x', f(x'))$, contradiciendo el hecho de que f es débilmente conexa.

(b) Reformule los teoremas de esta sección para el caso de funciones débilmente convexas. Respuesta.-

Teorema 1: sea f una función débilmente conexa, diferenciable en algún punto a. Entonces, el gráfico de f se encuentra por encima o sobre la recta tangente en $(a, f(a))$. Si $a < b$ y f es diferenciable en a y b, Entonces $f'(a) \leq f'(b)$.

Lema: Sea f diferenciable y f' no decreciente. Si $a < b$ y $f(a) = f(b)$. Entonces, $f'(x) \leq f(a) = f(b)$, para cualquier $a < x < b$.

Teorema 2: Sea f diferenciable y f' no decreciente. Entonces, f es débilmente convexa.

Teorema 3: El gráfico de f se encuentra por encima o sobre la renta tangente en cada punto. Entonces, f es débilmente convexa.

Teorema 4: Si f es diferenciable e interseca su recta tangente en cada punto de un subintervalo, entonces f es débilmente convexa o débilmente cóncava en ese subintervalo.

12. Halle dos funciones convexas f y g tales que $f(x) = g(x)$ si y sólo si x es un entero. Indicación: Halle primero un caso en el que g sea sólo débilmente convexa y luego modifíquelo utilizando el resultado del Problema 9 como guía.

Respuesta.- Para hacer que la función $g(x)$ sea convexa, debemos reemplazar los segmentos de línea recta por la curva adecuada. La curva debe ser tal que para cada entero k, la derivada de la izquierda de la curva (de $k-1$ a k) siempre es menor que la derivada de la derecha (de k a $k+1$)
Dado que tanto f como g son convexas, una solución simple es sacar el promedio de estas funciones. Esto asegura que f y g sean iguales en puntos enteros, y ambos permanecerán convexos también.

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) + f(x)\right].$$

13. Un conjunto A de puntos del plano se denomina *convexo* si A contiene a cualquier segmento rectilíneo que une a dos puntos cualesquiera del conjunto (Figura 14). Dada una función f , sea A_f el conjunto de los puntos (x, y) con $y > f(x)$, de manera que A_f es el conjunto de los puntos situados en la gráfica o por encima de la gráfica de f . Demuestre que A_f es convexo si y sólo si f es débilmente convexa, según la terminología introducida en el problema anterior. En la referencia [18] de las Lecturas Aconsejadas, puede encontrarse más información referente a los conjuntos convexos.

Demostración.- Sea f una función y A_f el conjunto definido como:

$$A_f = \{(x, y) : y \geq f(x)\}.$$

Entonces, tenemos que demostrar que f es débilmente convexa si y sólo si A_f es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$.
Suponga que A_f es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$. Entonces, por la definición de convexidad, tenemos que la recta que une cualesquiera dos puntos en A_f debe estar en A_f. Sea $(x_i, f(x_i))$, para

$i = 1, 2$, dos puntos en el gráfico de f. Entonces, por la definición de A_f vemos que $(x_i, f(x_i) \in A_f)$, para $i = 1, 2$. Ya que A_f es convexa se tiene que la recta que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ está en A_f. Pero esto implica que, para $t \in [0, 1]$,

$$[(1-t)x_1 + tx_2, (1-t)f(x_1) + tf(x_2)] \in A_f$$

de donde

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f\left[(1-t)x_1 + tx_2\right].$$

Ahora, para cualquier $x_1 < c < c_2$, se tiene

$$x = \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}x_2 + \left(1 - \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}\right)x_1, \qquad 0 < \frac{c - x_1}{x_2 - x_1} < 1.$$

En particular para $t = \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}$, obtenemos

$$f(c) \leq \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) + \left(1 - \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}\right)f(x_1).$$

Reescribiendo la ecuación,

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_1)f(c) &\leq (c - x_1)f(x_2) + (x_2 - c)f(x_1) \\
&\leq (c - x_1)f(x_2) + (x_2 - x_1 + x_1 - c)f(x_1) \\
&\leq (c - x_1)\left[f(x_2) - f(x_1)\right] + (x_2 - x_1)f(x_1).
\end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Ya que x_1, x_2 y c fueron elegidos arbitrariamente, tenemos que f es débilmente convexa.

Por otro lado, supongamos que f es débilmente convexa. Entonces, tenemos que mostrar que A_f es convexa. Comencemos notando que, para cualesquiera puntos (a_1, b_1), (a_1, b_2) y (c_1, d_1), c_1, d_2. Si $d_1 \geq b_1$ y $d_2 \geq b_2$. Entonces, la recta que une los puntos (c_1, d_1), c_1, d_2 debe estar arriba o sobre la recta que une (a_1, b_1), (a_1, b_2). Así, para cualquier par de puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en A_f, ya que $y_i \geq f(x_i), i = 1, 2$ la recta que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) debe estar encima o sobre la recta que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Es suficiente mostrar que la recta que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ está contenido en A_f. Pero ya que f es débilmente convexa, se tiene que para cualesquiera puntos $x_1 < c < x_2$,

$$\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Esto implica que,

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f\left[(1-t)x_1 + tx_2\right],$$

para cualquier $t \in [0, 1]$. Se sigue que la recta que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ està contenido en A_f. De esta manera completamos la demostración.

12

Funciones inversas