

# Funciones Continuas

**Definición 1.1** La función  $f$  es continua en  $a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ .  
Pero en este caso, en que el límite es  $f(a)$ , la frase

$$0 < |x - a| < \delta$$

puede cambiarse por la condición más sencilla

$$|x - a| < \delta$$

puesto que si  $x = a$  se cumple ciertamente que  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ .

**TEOREMA 1.1** Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$ , entonces

- (1)  $f + g$  es continua en  $a$ .
- (2)  $f \cdot g$  es continua en  $a$ .
- Además, si  $g(a) \neq 0$ , entonces (3)  $1/g$  es continua en  $a$

*Demostración.-* Puesto que  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que  $f + g$  es continua en  $a$ .  
Para  $f \cdot g$  se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$$

Por último para  $1/g$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} 1/g = 1/g(a), \quad \text{para } g(a) \neq 0$$

**TEOREMA 1.2** Si  $g$  es continua en  $a$ , y  $f$  es continua en  $g(a)$ , entonces  $f \circ g$  es continua en  $a$ .

*Demostración.-* Sea  $\epsilon > 0$ . Queremos hallar un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \epsilon, \text{ es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de  $f$  para estimar cómo de cerca tiene que estar  $g(x)$  de  $g(a)$  para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que  $f$  es continua en  $g(a)$ , existe un  $\delta' > 0$  tal que para todo  $y$ ,

$$\text{Si } |y - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(y) - f(g(a))| < \epsilon. \quad (1)$$

En particular, esto significa que

$$\text{Si } |g(x) - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon. \quad (2)$$

Aplicamos ahora la continuidad de  $g$  para estimar cómo de cerca tiene que estar  $x$  de  $a$  para que se cumpla la desigualdad  $|g(x) - g(a)| < \delta'$ . El número  $\delta'$  es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar  $\delta'$  como el epsilon de la definición de continuidad de  $g$  en  $a$ . Deducimos que existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \delta', \quad (3)$$

combinando (2) y (3) vemos que para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

**Definición 1.2** Si  $f$  es continua en  $x$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces se dice que  $f$  es continua en  $(a, b)$  si

$$f \text{ es continua en } x \text{ para todo } x \text{ de } (a, b), \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b). \quad (2)$$

**TEOREMA 1.3** Supóngase que  $f$  es continua en  $a$ , y  $f(a) > 0$ . Entonces existe un número  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x$  que satisface  $|x - a| < \delta$ . Análogamente, si  $f(a) < 0$ , entonces existe un número  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < 0$  para todo  $x$  que satisface  $|x - a| < \delta$ .

*Demostración.-* Considérese el caso  $f(a) > 0$  puesto que  $f$  es continua en  $a$ , si  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Puesto que  $f(a) > 0$  podemos tomar a  $f(a)$  como el epsilon. Así, pues, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$ ,

$$\text{Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a)$$

Y esta última igualdad implica  $f(x) > 0$ .

Puede darse una demostración análoga en el caso  $f(a) < 0$ ; tómese  $\epsilon = -f(a)$ . O también se puede aplicar el primer caso a la función  $-f$ .

## 1.1. Problemas

1. ¿para cuáles de las siguientes funciones  $f$  existe una función  $F$  de dominio  $R$  tal que  $F(x) = f(x)$  para todo  $x$  del dominio de  $f$ ?

(i)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Respuesta.- Sabiendo que el límite cuando  $x$  tiende a 2 existe, entonces existe una función  $F$  de dominio  $R$  tal que  $F(x) = f(x)$  para todo  $x$  del dominio de  $f$ .

(ii)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Respuesta.- No existe  $F$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  no existe.

(iii)  $f(x) = 0$ ,  $x$  irracional.

Respuesta.- Existe  $F$  de dominio  $R$  tal que  $F(x) = f(x)$  para todo  $x$  del dominio de  $f$ .

(iv)  $f(x) = 1/q$ ,  $x = p/q$  racional en fracción irreducible. Respuesta.- No existe  $F$ , ya que  $F(a)$  tendría que ser 0 para los  $a$  irracionales, y entonces  $F$  no podría ser continua en  $a$  si  $a$  es racional.

2. ¿En qué puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?

Respuesta.- Problema 4-17.

Para (i), (ii) y (iii) son continuas para todos los puntos menos para los enteros. Para (iv) es continua en todos los puntos. Para (v) es entera para todos los puntos excepto para 0 y  $1/n$  para  $n$  en los enteros.

Problema 4-19.

(i) todos los puntos que no sean de la forma  $n + k/10$  para todos los enteros  $k$  y  $n$ . El (ii) para todo los puntos que no sea de la forma  $n + k/100$  para todos los enteros  $k$  y  $n$ . (iii) y (iv) para ningún punto. (v) para todos los puntos que el decimal no termine en 7999... Y (vi) para todos los puntos que el decimal contenga al menos un 1.

3. (a) Supóngase que  $f$  es una función que satisface  $|f(x)| \leq |x|$  para todo  $x$ . Demostrar que  $f$  es continua en 0. [Observe que  $f(0)$  debe ser igual a 0.]

Demostración.- Supongamos que  $|f(x)| \leq |x|$ . afirmamos que,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . De hecho dado  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \epsilon$ . Si  $|x| < \delta$  entonces  $|f(x)| \leq |x| < \delta = \epsilon$ . Esto prueba que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Para concluir que  $f$  es constante en 0, tenga en cuenta que, como se señala en la pregunta, aplicar  $|f(x)| \leq |x|$  para todo  $x$ , en  $x = 0$  se da  $|f(0)| \leq 0$  y en consecuencia  $f(0) = 0$ . Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  implica que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , así  $f$  es constante en 0.

- (b) Dar un ejemplo de una función  $f$  que no sea continua en ningún  $a \neq 0$ .

Respuesta.- Sea  $f(x) = 0$  para  $x$  irracional, y  $f(x) = x$  para  $x$  racional.

- (c) Supóngase que  $g$  es continua en 0,  $g(0) = 0$ , y  $|f(x)| \leq |g(x)|$ . Demostrar que  $f$  es continua en 0.

Demostración.- La condición  $|f(x)| \leq |g(x)|$  para todo  $x$  y  $g(0) = 0$  implica que  $ff(0) = 0$ , así que sólo tenemos que demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

Sea  $\epsilon > 0$ , luego ya que  $g$  es continua en 0, existe un  $\delta > 0$  tal que  $|x| < \delta$  entonces  $|g(x) - g(0)| = |g(x)| < \epsilon$ . Usando  $|f(x)| \leq |g(x)|$  para todo  $x$ , vemos que  $|x| < \delta$  implica  $|f(x)| \leq |g(x)| < \epsilon$ . Por lo tanto esto demuestra que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

4. Dar un ejemplo de una función  $f$  que no sea continua en ningún punto, pero tal que  $|f|$  sea continua en todos los puntos.

Respuesta.- Sea  $f(x) = 1$  para  $x$  racional, y  $f(x) = -1$  para  $x$  irracional.

5. Para todo número  $a$ , hallar la función que sea continua en  $a$ , pero no lo sea en ningún otro punto.

Respuesta.- Sea  $f(x) = a$  para  $x$  irracional, y  $f(x) = x$  para  $x$  racional.

6. (a) Hallar una función  $f$  que sea discontinua en  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ , pero continua en todos los demás puntos.

Respuesta.- Define  $f$  como sigue,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

- (b) Hallar una función  $f$  que sea discontinua en  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ , y en 0, pero sea continua en ningún otro punto.

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

7. Supóngase que  $f$  satisface  $(x + y) = f(x) + f(y)$ , y que  $f$  es continua en 0. Demostrar que  $f$  es continua en  $a$  para todo  $a$ .

Demostración.- Sea  $f(x+0) = f(x) + f(0)$ , por lo tanto  $f(0) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + f(h) - f(a) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(h) - f(0) = 0\end{aligned}$$

8. Supóngase que  $f$  es continua en  $a$  y  $f(a) = 0$ . Demostrar que si  $\alpha \neq 0$ , entonces  $f + \alpha$  es distinta de 0 en algún intervalo abierto que contiene a  $a$ .

Demostración.- Sabiendo que  $(f + \alpha)(a) \neq 0$ , entonces por el teorema 3,  $f + \alpha$  es distinto de cero en algún intervalo que contiene a  $a$ .

9. (a) Supóngase que  $f$  no es continua en  $a$ . Demostrar que para algún  $\epsilon > 0$  existen números  $x$  tan próximos como se quiere de  $a$  con  $|f(x) - f(a)| > \epsilon$ .

Demostración.- Lógicamente equivalente a la definición de continuidad se tiene

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x |x - a| < \delta \text{ y } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|f(x) - f(a)| > \epsilon$ . Luego sea  $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$ , entonces tenemos  $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon > \epsilon'$ .

- (b) Dedúzcase que para algún  $\epsilon > 0$ , o bien existen números  $x$  tan próximos como se quiera de  $a$  con  $f(x) < f(a) - \epsilon$  o bien existen números  $x$  tan próximos como se quiera de  $a$  con  $f(x) > f(a) + \epsilon$ .

Demostración.- La demostración es directa aplicando la reciproca de la definicion de continuidad. Como se vio en el inciso a.

10. (a) Demostrar que si  $f$  es continua en  $a$ , entonces también lo es  $|f|$ .

Demostración.- Ya que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l|$  como se vio en el problema 5-16, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |f(a)| = |f|(a).$$

- (b) Demostrar que toda función continua  $f$  puede escribirse en la forma  $f = E + O$ , donde  $E$  es par y continua y  $O$  es impar y continua.

Demostración.- Por el problema 13 del capítulo 3 (funciones) mostramos que  $E$  y  $O$  son continuas si  $f$  lo es.

- (c) Demostrar que si  $f$  y  $g$  son continuas, también lo son  $\max(f, g)$  y  $\min(f, g)$ .

Demostración.- Por la parte a) y sabiendo que

$$\begin{aligned}\max(f, g) &= \frac{f + g + |f - g|}{2} \\ \min(f, g) &= \frac{f + g - |f - g|}{2}\end{aligned}$$

- (d) Demostrar que toda función continua  $f$  puede escribirse en la forma  $f = g - h$ , donde  $g$  y  $h$  son no negativas y continuas.

Demostración.- Por el problema 15 del capítulo 3 (funciones) podemos comprobar que  $f = g - h$  siempre que  $f$  sea continua.

- 11.** Demostrar el teorema 1(3) aplicando el teorema 2 y la continuidad de la función  $f(x) = 1/x$ .

Demostración.- Sea  $f \circ g = \frac{1}{g}$  y  $f$  es continua en  $g(a)$  para  $g(a) \neq 0$ , entonces por el teorema 2, se tiene que  $\frac{1}{g}$  es continua en  $a$  para  $g(a) \neq 0$ .

- 12.** (a) Demostrar que si  $f$  es continua en  $l$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(l)$ .

Demostración.- Sea

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

entonces  $G$  es continua en  $a$ , ya que  $G(a) = l = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} G(x)$ . Así  $f \circ G$  es continua en  $a$  esto por el teorema 2. Luego

$$f(l) = f(G(a)) = (f \circ G)(a) = \lim_{x \rightarrow a} = \lim_{x \rightarrow a} (f \circ G)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)).$$

- (b) Demostrar que si no se supone la continuidad de  $f$  en  $l$ , entonces no se cumple, por lo general, que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

Demostración.- Sea  $g(x) = l + x - a$  y

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ , así  $f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(l) = l$ , pero  $g(x) \neq l$  para  $x \neq a$ , por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$ .

**13.**