

# Limites

**Definición 1.1** La función  $f$  tiende hacia el límite  $l$  en  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ) significa: para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Existe algún  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe algún  $x$  para el cual es  $0 < |x - a| < \delta$ , pero no  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

**TEOREMA 1.1** Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en  $a$ . En otros términos si  $f$  tiende hacia  $l$  en  $a$ , y  $f$  tiende hacia  $m$  en  $a$ , entonces  $l = m$ .

*Demostración.-* Puesto que  $f$  tiende hacia  $l$  en  $a$ , sabemos que para todo  $\epsilon > 0$  existe algún número  $\delta_1 > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta_1$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Sabemos también, puesto que  $f$  tiende hacia  $m$  en  $a$ , que existe algún  $\delta_2 > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta_2$ , entonces  $|f(x) - m| < \epsilon$ .

Hemos empleado dos números  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , ya que no podemos asegurar que el  $\delta$  que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon \text{ y } |f(x) - m| < \epsilon$$

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un  $\epsilon > 0$  particular para el cual las dos condiciones  $|f(x) - l| < \epsilon$  y  $|f(x) - m| < \epsilon$  no puedan cumplirse a la vez si  $l \neq m$

Si  $l \neq m$ , de modo que  $|l - m| > 0$  podemos tomar como  $\epsilon$  a  $|l - m|/2$ . Se sigue que existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{|l - m|}{2} \text{ y } |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2}$$

Esto implica que para  $0 < |x - a| < \delta$  tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2} + \frac{|l - m|}{2} = |l - m|$$

El cual es una contradicción.

**LEMA 1.1** Si  $x$  está cerca de  $x_0$  e  $y$  está cerca de  $y_0$ , entonces  $x+y$  estará cerca de  $x_0+y_0$ ,  $xy$  estará cerca de  $x_0y_0$  y  $1/y$  estará cerca de  $1/y_0$ .

(1) Si  $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$  y  $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$  entonces  $|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \epsilon$ .

*Demostración.-*

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(2) Si  $|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}\right)$  y  $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)}$  entonces  $|xy - x_0y_0| < \epsilon$ .

*Demostración.-* Puesto que  $|x - x_0| < 1$  se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1,$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

así pues

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |x(y - y_0) + y_0(x - x_0)| \\ &\leq |x| \cdot |y - y_0| + |y_0| \cdot |x - x_0| \\ &< (1 + |x_0|) \cdot \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)} + |y_0| \cdot \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Notemos que  $\frac{|y_0|}{|y_0| - 1} < 1$ , por lo tanto  $\frac{|y_0|}{|y_0| - 1} \cdot \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$ .

(3) Si  $y_0 \neq 0$  y  $|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right)$  entonces  $y \neq 0$  y  $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \epsilon$ .

*Demostración.-* Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

de modo que  $-|y| < -\frac{|y_0|}{2} \implies |y| > |y_0|/2$ . En particular.  $y \neq 0$ , y

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} = \frac{1}{|y|} \cdot \frac{|y_0 - y|}{|y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\epsilon|y_0|^2}{2} = \epsilon$$

**TEOREMA 1.2** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ , entonces

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + m$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = l \cdot m$$

Además, si  $m \neq 0$ , entonces

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}$$

*Demostración.- La hipótesis significa que para todo  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$ ,*

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \epsilon$$

*Esto significa (ya que después de todo,  $\epsilon/2$  es también un número positivo) que existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$ ,*

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

*Sea ahora  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $0 < |x - a| < \delta_1$  y  $0 < |x - a| < \delta_2$  se cumplen las dos, de modo que es a la vez*

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

*pero según la parte (1) del lema anterior esto implica que  $|(f + g)(x) - (l + m)| < \epsilon$ .*

*Para demostrar (2) procedemos de la misma manera, después de consultar la parte (2) del lema. Si  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$*

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m| + 1)}\right),$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2(|l| + 1)}$$

*Pongamos de nuevo  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces*

$$|f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m| + 1)}\right) \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\delta}{2(|l| + 1)}$$

*Así pues, según el lema,  $|(f \cdot g)(x) - l \cdot m| < \epsilon$ , y esto demuestra (2).*

*Finalmente, si  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,*

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\epsilon|m|^2}{2}\right)$$

*Pero según la parte (3) del lema, esto significa, en primer lugar que  $g(x) \neq 0$ , de modo que  $(1/g)(x)$  tiene sentido, y en segundo lugar que*

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \epsilon$$

*Esto demuestra (3).*

**Definición 1.2**  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

La condición  $0 < x - a < \delta$  es equivalente a  $0 < |x - a| < \delta$  y  $x > a$

**Definición 1.3**  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

**Definición 1.4**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un número  $N$  grande, que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

## 1.1. Problemas

1. Hallar los siguientes límites (Estos límites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 2^2 + 4 + 4 = 12$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{3^3 - 8}{3 - 2} = 19$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow y} \frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = ny^{n-1}$$

$$(v) \lim_{y \rightarrow x} \frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = nx^{n-1}$$

$$(vi) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a+h})^2 - (\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

**2.** Hallar los límites siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1^2 - (\sqrt{x})^2}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \\
 \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = 0 \\
 \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

**3.** En cada uno de los siguientes casos, encontrar un  $\delta$  tal que,  $|f(x) - l| < \epsilon$  para todo  $x$  que satisface  $0 < |x - a| < \delta$

(i)  $f(x) = x^4$ ;  $l = a^4$

Respuesta.- Por la parte (2) del lema anterior se tiene

$$|x^2 - a^2| < \min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2 + 1)} \right).$$

Si aplicamos una vez mas la parte (2) del lema obtenemos

$$|x - a| < \min \left( 1, \frac{\min \left( 1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2 + 1)} \right)}{2(|a| + 1)} \right) = \min \left( 1, \frac{\epsilon}{4(|a|^2 + 1)(|a| + 1)} \right) = \delta$$

(ii)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $a = 1$ ,  $l = 1$

Respuesta.- Por la parte (3) del lema se tiene  $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \epsilon$  por lo tanto  $|y - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right)$

(iii)  $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$ ;  $a = 1$ ,  $l = 2$

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene  $\left| \left( x^4 + \frac{1}{x} \right) - (1 + 1) \right| < \epsilon$  de donde

$$|x^4 - 1| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego por el inciso (i) y (ii)

$$|x - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right) \quad y \quad |x - 1| < \min \left( 1, \frac{\min \left( \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2(1+1)} \right)}{2(1+1)} \right) \implies |x - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{4}, 1, \frac{\epsilon}{32} \right)$$

y por lo tanto

$$|x - 1| < \min \left( \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{32} \right) = \delta$$

(iv)  $f(x) = \frac{x}{1 + \sin^2 x}$ ;  $a = 0$ ,  $l = 0$

Respuesta.- Sea  $\left| \frac{x}{1 + \sin^2 x} \right| < \epsilon$  y  $|x| < \delta$  pero  $\left| \frac{x}{1 + \sin^2 x} \right| \leq |x|$  por lo tanto  
 $\left| \frac{x}{1 + \sin^2 x} \right| \leq |x| < \delta = \epsilon$

(v)  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ;  $a = 0$ ,  $l = 0$

Respuesta.- Sea  $|\sqrt{|x|}| < \epsilon$  entonces  $|(x)^{1/2}| = (\sqrt{x^2})^{1/2} = [(x^2)^{1/2}]^{1/2} = \sqrt{x} < \epsilon$ , luego sabemos que la raíz cuadrada de  $x$  debe ser siempre mayor o igual a 0 por lo tanto  $|x| < \epsilon^2$ , de donde concluimos que  $\delta = \epsilon^2$

(vi)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $a = 1$ ,  $l = 1$

Respuesta.- Si  $\epsilon > 1$ , póngase  $\delta = 1$ . Entonces  $|x - 1| < \delta$  implica que  $0 < x < 2$  con lo que  $0 < \sqrt{x} < 2$  y  $|\sqrt{x} - 1| < 1$ . Si  $\epsilon < 1$ , entonces  $(1 - \epsilon)^2 < x < (1 + \epsilon)^2$  implica que  $|\sqrt{x} - 1| < \epsilon$ , de modo que podemos elegir un  $\delta$  tal que  $(1 - \epsilon)^2 \leq 1 - \delta$  y  $1 + \delta \leq (1 + \epsilon)^2$ . Podemos elegir, pues  $\delta = 2\epsilon - \epsilon^2$

**4.** Para cada una de las funciones del problema 4 – 17, decir para qué números  $a$  existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

(i) Existe el límite si  $a$  no es un entero, ya que en los puntos enteros la función tiene un salto.

(ii) Existe el límite si  $a$  no es un entero.

(iii) De la misma forma que el inciso (ii).

(iv) Existe para todo  $a$ .

(v) Existe para todo  $a$  si sólo si sea  $a = 0$  y  $a = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ .

(vi) El límite no existe para los puntos  $|a| < 1$  y  $a \neq \frac{1}{n}$

**5. (a)** Hágase lo mismo para cada una de las funciones del problema 4 – 19

(i) Existe para cualquier número que tenga la forma  $n + \frac{k}{10}$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$

(ii) Existe para cualquier número que tenga la forma  $n + \frac{k}{100}$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$

- (iii) No es posible para ningún  $a$ .
  - (iv) De la misma forma que el anterior inciso.
  - (v) Existe para todo  $a$  excepto para los que terminan en 7999...
  - (vi) Existe para todo  $a$  excepto para los que terminan en 1999....
- (b) El mismo problema usando decimales infinitos que terminen en una fila de ceros en lugar de los que terminan en una fila de nueves.
- (i) De igual forma de la parte (a) inciso (i).
  - (ii) De igual forma de la parte (a) inciso (ii).
  - (iii) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).
  - (iv) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).
  - (v) Existe para todo  $a$  excepto para los que terminan en 8000...
  - (vi) Existe para todo  $a$  excepto para los que terminan en 2000...

**6.** Supóngase que las funciones  $f$  y  $g$  tienen la siguiente propiedad: Para todo  $\epsilon > 0$  y todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \sin^2 \left( \frac{\epsilon^2}{9} \right) + \epsilon, \text{ entonces } |f(x) - 2| < \epsilon,$$

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \epsilon^2, \text{ entonces } |g(x) - 4| < \epsilon.$$

Para cada  $\epsilon > 0$  hallar un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

- (i) Si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $|f(x) + g(x) - 6| < \epsilon$ .

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene  $|f(x) - 2| < \frac{\epsilon}{2}$  y  $|g(x) - 4| < \frac{\epsilon}{2}$ , luego reemplazamos  $\epsilon$  por  $\epsilon/2$  de donde nos queda

$$0 < |x - 2| < \sin^2 \left[ \frac{\left( \frac{\epsilon}{2} \right)^2}{9} \right] \quad \text{y} \quad |x - 2| < \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^2$$

Por último, solo hace verificar para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$ . En este caso solo hace falta elegir

$$0 < |x - 2| < \min \left[ \sin^2 \left( \frac{\epsilon^2}{36} \right) + \epsilon, \frac{\epsilon^2}{4} \right] = \delta$$

(ii) Si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $|f(x)g(x) - 8| < \epsilon$

Respuesta.- Por la segunda parte del lema demostrado tenemos que

$$|f(x) - 2| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|4| + 1)}\right) \quad y \quad |g(x) - 4| < \frac{\epsilon}{2(|2| + 1)}$$

ya que  $|f(x)g(x) - 2 \cdot 4| < \epsilon$ .

Luego reemplazando en  $\epsilon$  a cada parte obteniendo,

$$0 < |x - 2| < \min\left\{\sin^2\left[\frac{\min\left(\frac{\epsilon}{10}\right)^2}{9}\right] + \min\left(1, \frac{\epsilon}{10}\right), \left[\min\left(1, \frac{\epsilon}{6}\right)\right]^2\right\} = \delta$$

(iii) Si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4}\right| < \epsilon$

Respuesta.- Por la tercera parte del lema se tiene que  $|g(x) - 4| < \min\left(\frac{|4|}{2}, \frac{\epsilon|4|^2}{2}\right)$ , luego reemplazando en  $\epsilon$  obtenemos

$$|x - 2| < [\min(2, 8\epsilon)]^2 = \delta$$

(iv) Si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{2}\right| < \delta$

Respuesta.- Sea  $\left|f(x)\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{2}\right| < \delta$  entonces

$$|f(x) - 2| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|1/4| + 1)}\right) \quad y \quad \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4} < \frac{\epsilon}{2(|2| + 1)}$$

, de donde

$$0 < |x - 2| < \min\left\{\sin^2\left[\frac{(\min(1, 2\epsilon/5))^2}{9}\right] + \min(1, 2\epsilon/5), \left[\min\left(2, \frac{8\epsilon}{2(|2| + 1)}\right)\right]^2\right\} = \delta$$

**7.** Dese un ejemplo de una función  $f$  para la cual la siguiente proposición sea falsa: Si  $|f(x) - l| < \epsilon$  cuando  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon/2$  cuando  $0 < |x - a| < \delta/2$ .

Respuesta.- Tomemos  $a = 0$  y  $l = 0$ . Para  $\epsilon > 0$ , se tiene

$$|x - 0| < \epsilon^2 \implies |\sqrt{|x|} - 0| < \epsilon$$

. Aquí  $\delta = \epsilon^2$ . Pero si

$$0 < |x - 0| < \frac{\epsilon^2}{2} \implies |\sqrt{|x|} - 0| < \frac{\epsilon^2}{4} = \delta.$$

El cual no se cumple la proposición buscada.



- 8. (a)** Si no existen los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , ¿pueden existir  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$  o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ ?

Respuesta.- Si. Por ejemplo considere

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Luego observe que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existen, mientras que  $f(x) + g(x) = 1$  tiene un límite en  $x = 0$ . De similar forma, si tomamos  $f(x) = g(x) = \frac{|x|}{x}$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe, mientras que  $f(x) \cdot g(x) = \frac{|x|^2}{x^2}$  es 1 y, por lo tanto, existe el límite en 0.

- (b)** Si existen los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ , ¿debe existir  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ?

Respuesta.- Si, ya que

$$g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$$

- (c)** Si existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y no existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , ¿puede existir  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ ?

Respuesta.- No, ya que es sólo otro modo de enunciar la parte (b).

- (d)** Si existe los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ , ¿se sigue de ello que existe  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ ?

Respuesta.- No, el razonamiento es análogo a la parte (b), ya que si  $g = (f \cdot g)/f$  no será aplicable si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

- 9.** Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$ .

Demostración.- Sea  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$ , tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Ahora bien, si  $0 < |h - 0| < \delta$ , entonces  $|(h + a) - a| < \delta$ , de modo que  $|f(h + a) - l| < \epsilon$ . Esta desigualdad puede escribirse  $|g(h) - l| < \epsilon$ . Así pues,  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = l$ , lo cual puede escribirse también  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = l$ . el mismo razonamiento demuestra que si  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = m$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m$ . Así pues, existe uno cualquiera de los dos límites si existe el otro, y en este caso son iguales.

- 10. (a)** Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - l] = 0$

Demostración.- Por definición vemos que Para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Esta último desigualdad se puede escribir como  $|[f(x) - l] - 0| < \epsilon$  de modo que  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - l] = 0$ . El razonamiento en sentido inverso es igual de simple e intuitivo.

- (b)** Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x - a)$

Demostración.- Supóngase que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = m$  Queremos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x - a) = m$ . Para todo

$\epsilon > 0$  existen algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$  con  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - m| < \epsilon$  (1).  
Si  $0 < |y - a| = |(y - a) - 0| < \delta$ , entonces por (1) implica que  $|f(y - a) - m| < \epsilon$ , por lo tanto  $\lim_{y \rightarrow a} f(y - a) = m$ .

Por el contrario, supóngase  $\lim_{x \rightarrow a} f(x - a) = m$ , donde queremos demostrar  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = m$ . Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$  con  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x - a) - m| < \epsilon$  (2).  
Si  $0 < |y| = |(y + a) - a| < \delta$ , luego por (2) implica que  $|f(y) - m| = |f[(y + a) - a] - m| < \epsilon$ , por lo tanto  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = m$ .

(c) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ .

Demostración.- Sea  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ . Para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$ , tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x| < \delta$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Tomemos  $0 < |x| < \min(1, \delta)$ , entonces  $0 < |x^3| < \delta$ , para comprender mejor tomemos un número en particular, por ejemplo  $x = 0.9$  donde  $0 < |0.9| < \min(1, \delta)$  entonces se cumple que  $0 < |0.9^3| < \delta$ . Así pues  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ . Por otro lado, supongamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$  existe, pongamos  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = m$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x| < \delta$ , entonces  $|f(x^3) - m| < \delta$ . Si  $0 < |x| < \delta^3$ , tenemos  $0 < |\sqrt[3]{x}| < \delta$ , de modo que  $|f(\sqrt[3]{x^3}) - m| < \epsilon$ . Por lo tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = m$ .

(d) Dar un ejemplo en el que exista  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ , pero no  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Respuesta.- Sea  $f(x) = 1$  para  $x \leq 0$  y  $f(x) = -1$  para  $x < 0$ . Entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = 1$ , pero  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.

**11.** Supóngase que existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) = g(x)$  cuando  $0 < |x - a| < \delta$ . Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

Demostración.- Asumamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Deseamos demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ . Sea  $\epsilon > 0$ , de donde existe algún  $\delta_1 > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta_1$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Luego pongamos  $\delta' = \min(\delta, \delta_1)$  que complace  $0 < |x - a| < \delta'$ , en virtud de como se define  $\delta'$  sabemos que si  $0 < |x - a| < \delta_1$  y  $0 < |x - a| < \delta$  tal que  $f(x) = g(x)$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ , de donde concluimos que  $|g(x) - l| < \epsilon$ .

**12. (a)** Supóngase que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x$ . Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  siempre que estos existan.

Demostración.- Demostremos por reducción al absurdo. Supóngase que  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ . Luego sea  $l - m > 0$ , existe entonces un  $\delta > 0$  tal que, si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $l - f(x) < \epsilon/2$  y  $|m - g(x)| < \epsilon/2$ . Así pues, para  $0 < |x - a| < \delta$  tenemos

$$g(x) < m + \epsilon/2 = l - \epsilon/2 < f(x),$$

contrario a la hipótesis.

(b) ¿De qué modo puede obtenerse una hipótesis más débil?

Respuesta.- Basta suponer que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x$  que satisfaga  $0 < |x - a| < \delta$ , para algún  $\delta > 0$ .

(c) Si  $f(x) < g(x)$  para todo  $x$ . ¿Se sigue de ello necesariamente que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ?

Respuesta.- No necesariamente ya que si  $f(x) = 0$  y  $g(x) = |x|$  para  $x \neq 0$ , y  $g(0) = 1$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

**13.** Supóngase que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  y que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Demostrar que existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  y que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ .

Demostración.- Intuitivamente vemos que  $g(x)$  esta entre  $f(x)$  y  $h(x)$  donde se aproximan a un mismo número. Sea  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|h(x) - l| < \epsilon$ , como también para  $|f(x) - l| < \epsilon$ , así pues, si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces

$$l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon$$

de modo que  $|g(x) - l| < \epsilon$ .

**14. (a)** Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = l$  y  $b \neq 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(bx)/x = bl$ .

Demostración.- Tengamos en cuenta que  $x \rightarrow 0$  implica  $bx \rightarrow 0$  siempre que  $b$  sea distinto de 0. Luego  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  de donde  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ , así  $\lim_{bx \rightarrow 0} g(bx) = l$ , aclaremos que cuando  $g(bx)$  solo ponemos un valor diferente sin alterar la función en si, es decir, sea  $bx = y$  y  $\lim_{bx \rightarrow 0} g(bx) = l$  entonces  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = l$  que es igual a nuestra hipótesis  $\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = l\right)$ . Por lo tanto tenemos,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} b \frac{f(bx)}{bx} = b \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = bl$$

(b) ¿Qué ocurre si  $b = 0$ ?

Respuesta.- Si  $b = 0$  entonces  $\frac{f(bx)}{bx} = \frac{f(0)}{0}$  el cual no esta definido, por lo tanto el límite no existe, a menos que  $f(0) = 0$ .

(c) La parte (a) nos permite hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)/x$  en función de  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$ . Hallar este límite por otro procedimiento.

Respuesta.-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x)(\cos x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2.$$

**15.** Calcular los límites siguientes en función del número  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$ .

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x)(\cos x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} \frac{1}{b \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = a\alpha \cdot \frac{1}{b\alpha} = \frac{a}{b}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} 2x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \cdot 2\alpha = 0$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \right)^2 = 4\alpha^2$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + 1)} = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x + 2x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan^2 x + 2x}{x}}{1 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos^2 x} + 2}{1 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + 2 \right)}{1 + x} = \alpha \cdot 0 + 2 = 2$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2}{\alpha}$$

$$(viii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

Respuesta.- Se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

de donde por (v) concluimos que  $\alpha \cos x$ .

$$(ix) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1}$$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1) \operatorname{sen}(x^2 - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1) \operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

Por la misma razón del problema 14(a)

$$(x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \operatorname{sen} x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \operatorname{sen} x}{\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2} = \frac{3}{(1 + \alpha)^2}$$

$$(xi) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)^2 \sin \left( \frac{1}{x-1} \right)^3 = 0, \text{ ya que } |\sin 1/(x-1)^3| \leq 1 \text{ para todo } x \neq 1$$

**16. (a)** Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$ .

Demostración.- Sabemos que  $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$  por lo tanto para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \epsilon$  de donde  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$

**(b)** Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \max(f, g)(x) = \max(l, m)$  y lo mismo para el mínimo.

Demostración.- ya que  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  y por (a) entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \max(f, g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - g(x)|}{2} \\ &= \frac{l + m + |l - m|}{2} \\ &= \max(l, m) \end{aligned}$$

De similar manera,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \min(f, g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - g(x)|}{2} \\ &= \frac{l + m - |l - m|}{2} \\ &= \min(l, m) \end{aligned}$$

**17. (a)** Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$  no existe, es decir, demostrar que, cualquiera que sea  $l$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x = l$  es falso.

Demostración.- Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = l$  entonces por definición se tiene

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \iff \text{si } 0 < |x - 0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

de donde  $|x| > \frac{1}{\epsilon + |l|}$  el cual contradice la suposición de que  $x$  tiende a 0.

**(b)** Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$  no existe.

Demostración.- Podemos aplicar el mismo criterio del anterior ejercicio.

- 18.** Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , entonces existe un número  $\delta > 0$  y un número  $M$  tal que  $|f(x)| < M$  si  $0 < |x - a| < \delta$ . (¿Cómo puede verse esto gráficamente?).

Demostración.- Por definición tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \text{ si } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Tomemos  $\epsilon = 1$  de donde  $l - 1 < f(x) < l + 1$  de modo que podemos tomar  $M > 1 + l$  y  $-M < l - 1$  por lo tanto  $|f(x)| < M$ .

- 19.** Demostrar que si  $f(x) = 0$  para  $x$  irracional y  $f(x) = 1$  para  $x$  racional, entonces no existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  cualquiera que sea  $a$ .

Demostración.- Para cualquier  $\delta > 0$  tenemos  $f(x) = 0$  para algún  $x$  que satisface  $0 < |x - a| < \delta$  y también  $f(x) = 1$  para algún  $x$  que satisface  $0 < |x - a| < \delta$ . Significa esto que no podemos tener  $|f(x) - l| < 1/2$  tenga  $l$  el valor que tenga.

- 20.** Demostrar que si  $f(x) = x$  para  $x$  racional y  $f(x) = -x$  para  $x$  irracional, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe si  $a \neq 0$ .

Demostración.- Sea el caso  $a > 0$ . Al estar  $f(x)$  cerca de  $a$  para todos los racionales  $x$  que están cerca de  $a$ , y al estar  $f(x)$  cerca de  $-a$  para todos los irracionales  $x$  que están cerca de  $a$ , no podemos tener a  $f(x)$  próximo a ningún número fijo. Es decir, para cualquier  $\delta > 0$  existe  $x$  con  $0 < |x - a| < \delta$  y  $f(x) > a/2$ , así como  $x$  con  $0 < |x - a| < \delta$  y  $f(x) < -a/2$ . Puesto que la distancia entre  $a/2$  y  $-a/2$  es  $a$ , esto significa que no podemos tener  $|f(x) - l| < a$  para todos estos  $x$ , cualquiera que sea el valor de  $l$ .

- 21. (a)** Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \sin 1/x = 0$ .

Demostración.- En consecuencia de (b) y sabiendo que  $|\sin 1/x| \leq 1$  para todo  $x \neq 0$ . Se tiene que el resultado es esperado.

- (b)** Generalizar este hecho como sigue: Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  y  $|h(x)| \leq M$  para todo  $x$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)h(x) = 0$

Demostración.- Por definición de límites y sea  $M = 1$  se tiene  $|g(x)| < \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$ , para todo  $x$  con  $0 < |x| < \delta$ . Entonces  $|g(x)h(x)| < \epsilon$  ya que  $|h(x)| \leq M$ .

- 22.** Considérese una función  $f$  con la siguiente propiedad: Si  $g$  es una función cualquiera para la cual no existe el  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , entonces tampoco existe  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$ . Demostrar que esto ocurre si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe.

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe, es claro que  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$  no existe cuando  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, esto según el problema 8(b) y (c). Por otro lado, supongamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe, elija  $g = -f$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, pero  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$  existe.

**23.** Este problema es el análogo del problema 22 cuando  $f + g$  se sustituye por  $f \cdot g$ . En este caso la situación es considerablemente más compleja y el análisis debe hacerse en varias etapas.

(a) Supóngase que existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y es  $\neq 0$ . Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, entonces tampoco existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ .

Demostración.- Ya que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}$$

Ponemos  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha$ , por lo cual

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$$

Por lo tanto si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$  no existe.

(b) Demostrar el mismo resultado si  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$ .

Demostración.- Demostraremos que si  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = l$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

Para entender mejor el problema veamos un ejemplo: Sea  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot x = 1$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ . Ya mas claro el asunto, vayamos a la demostración.

Sea  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$ , para cualquier  $M > 0$  existe algún  $\delta_M > 0$  tal que para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - 0| < \delta_M \text{ entonces } |f(x)| > M.$$

Luego, para  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = l$  nos dice que para cualquier  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta_l > 0$  tal que para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - 0| < \delta_l \text{ entonces } |f(x)g(x) - l| < \epsilon.$$

Ahora, para cualquier  $\epsilon$  podemos establecer  $M = \frac{\epsilon + |l|}{\epsilon}$  y escogemos  $\delta_{min} = \min(\delta_M, \delta_l)$ .

Así, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_{min} \text{ tenemos } |f(x)g(x) - l| < \epsilon \text{ y } |f(x)| > M = \frac{\epsilon + |l|}{\epsilon},$$

luego  $|f(x)g(x) - l| \leq |f(x)g(x) - l| < \epsilon$ , de donde  $|f(x)g(x)| < |l| + \epsilon$ , así

$$|g(x)| < \frac{|l| + \epsilon}{|f(x)|} < \frac{|l| + \epsilon}{M} = \frac{|l| + \epsilon}{M} = \frac{|l| + \epsilon}{\frac{|l| + \epsilon}{\epsilon}} = \epsilon$$

Por lo tanto, para cualquier  $\epsilon > 0$  hay un  $\delta_{min}$  tal que para todo  $x$  si

$$0 < |x - 0| < \delta_{min} \text{ entonces } |g(x)| < \epsilon$$

ó

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

(c) Demostrar que si no se cumple ninguna de estas dos condiciones, entonces existe una función  $g$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, pero existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ .

Demostración.- Demostraremos por casos.

**Caso 1.** Para algún  $\epsilon > 0$ , existe algún  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  si  $0 < |x| < \delta$ , entonces  $|f(x)| > \epsilon$ . Luego podemos definir  $g(x)$  para  $x$  como  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ , aclaremos que para  $x$  pequeños el denominador es distinto de 0, de donde

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Así que el límite de  $f(x)g(x)$  existe. Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$ . Pero esto implicaría que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe, con lo que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe.

¿Cómo sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$  y por tanto se aplica a la parte a?. Supongamos  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , según nuestra definición del caso 1 tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Así para cualquier  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  si

$$0 < |x| < \delta \implies \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \epsilon$$

de donde  $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$  y por lo tanto

$$0 < |x| < \delta \implies |f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$$

Esto significa que  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$ , contrario al inciso b.

**Caso 2.** Elijase  $x_n$  según se indica. Defínase  $g(x) = 0$  para  $x \neq x_n$  y  $g(x) = 1$  para  $x = x_n$ . Entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, pero  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ .

**24.** Supóngase que, para todo número natural  $n$ ,  $A_n$  es un conjunto finito de números en  $[0, 1]$ , y que  $A_n$  y  $A_m$  carecen de elementos comunes si  $m \neq n$ . Defínase  $f$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x \text{ está en } A_n \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en } A_n \text{ para ningún } n \end{cases}$$

Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  para todo  $a$  de  $[0, 1]$ .

Demostración.- Dado  $\epsilon > 0$ , elíjase  $n$  con  $1/n < \epsilon$  y hágase  $\delta$  igual a la distancia mínima desde  $a$  a todos los puntos de  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , excepto a sí mismo en el caso en que  $a$  sea uno de estos puntos. Entonces  $0 < |x - a| < \delta$  implica que  $x$  no está en  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , de modo que  $f(x) = 0$  o  $1/m$  para  $m > n$ , o sea que  $|f(x)| < \delta$ .

**25.** Explíquese por qué son correctas las siguientes definiciones de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ : Para todo  $\delta > 0$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $x$ ,

(i) Si  $0 < |x - a| < \epsilon$ , entonces  $|f(x) - l| < \delta$ .

Respuesta.- Ésta es la definición en si, llamando simplemente a los números  $\delta$  como  $\epsilon$  y viceversa.



- (ii) Si  $0 < |x - a| < \epsilon$  entonces  $|f(x) - l| \leq \delta$ .

Respuesta.- Si la condición se cumple para todos los  $\delta > 0$ , entonces se puede aplicar a  $\delta/2$ , de modo que existe un  $\epsilon > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \epsilon$ , entonces  $|f(x) - l| \leq \delta/2 < \delta$ .

- (iii) Si  $0 < |x - a| < \epsilon$  entonces  $|f(x) - l| < 5\delta$ .

Respuesta.- Aplíquese a  $5\delta$  para obtener (i).

- (iv) Si  $0 < |x - a| < \epsilon/10$  entonces  $|f(x) - l| < \delta$ .

Respuesta.- Dice lo mismo que (i), ya que  $\epsilon/10 > 0$ , y es solamente la existencia de algún  $\delta > 0$  lo que está en litigio.

**26.** Póngase ejemplos para demostrar que las siguientes definiciones de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  no son correctos.

- (a) Para todo  $\delta > 0$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Respuesta.- Aunque se es verdad que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$ , no es verdad que para todo  $\delta > 0$  exista un  $\delta > 0$  con  $|1/x - 1| < \delta$  para  $0 < |x - 1| < \delta$ . En efecto, si  $\delta = 1$ , no existe un  $\epsilon$ , ya que  $1/x$  puede ser tan grande como se quiera, siendo  $0 < x - 1 < 1$ .

- (b) Para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|f(x) - l| < \epsilon$  entonces  $0 < |x - a| < \delta$ .

Respuesta.- Si  $f$  es una función constante  $f(x) = c$ , esta condición no se cumple, puesto que  $|f(x) - c| < 1$  no implica ciertamente que  $0 < |x - a| < \delta$ , para algún  $\delta$ . Además, la función  $f(x) = x$ , satisface esta condición cualquiera que sea  $a$  y  $l$ .

**27.** Para cada una de las funciones del problema 4-17 indíquese para qué números  $a$  existen los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

- (i) Los dos límites existen para todo  $a$ .

- (ii) Los dos límites existen para todo  $a$ .

- (iii) Los dos límites existen para todo  $a$ .

- (iv) Los dos límites existen para todo  $a$ .

- (v) Los dos límites laterales existen, para  $a \neq 0$ , y ninguno de los dos existe para  $a = 0$ .

(vi) Los dos límites laterales existen para todo  $a$  con  $|a| < 1$ .

**28. (a)** (i) Los dos límites existen para todo  $a$ .

(ii) Los dos límites existen para todo  $a$ .

(iii) Ninguno de los dos límites laterales existe, cualquiera que sea  $a$ .

(iv) Ninguno de los dos límites laterales existe, cualquiera que sea  $a$ .

(v) Los dos límites laterales existen para todo  $a$ .

(vi) Los dos límites laterales existen para todos los  $a$  cuyo desarrollo decimal contenga por lo menos un 1; además, el límite por la derecha existe para todo  $a$  cuyo desarrollo decimal no contenga ningún 1, pero que termine en 0999....

(b) Las respuestas son las mismas que para la parte (a).

**29.** Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que, para todo  $x$ ,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{si } 0 < a - x < \delta_2, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

de donde

$$\text{si } a < x < a + \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{si } a - \delta_2 < x < a, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

Sea  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces o bien  $a - \delta_2 < a - \delta < x < a$ , o bien  $a < x < a + \delta < a + \delta_1$ , de modo que  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Se puede escribir también como sigue. Sea  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces o bien  $0 < x - a < \delta < \delta_1$  o bien  $0 < a - x < \delta < \delta_2$ , de modo que  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

**30.** Demostrar que

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x).$$

Demostración.- Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $0 < x - 0 < \delta$ , luego si  $-\delta < x - 0 < 0$ , entonces  $0 < 0 - x < \delta$ , de modo que  $|f(-x) - l| < \epsilon$ . Así pues,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x) = l$ .

La demostración recíproca es análoga.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $0 < x < \delta$ . De donde  $0 < |x| < |\delta|$  pero como  $\delta > 0$  entonces  $0 < |x| < \delta$ , así  $|f(|x|) - l| < \delta$ . Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = l$ .

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $0 < x < \delta_1$  de donde  $0 < x^2 < \delta_1$ , como  $|x^2| = x^2$  y  $\delta = \delta_1^2$ , se tiene  $0 < |x^2| < \delta$ , de modo que  $|f(x^2) - l| < \delta$ . Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = l$ .

- 31.** Supóngase que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . (Ilústrese esta proposición con un dibujo.) Demostrar que existe algún  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < f(y)$  siempre que  $x < a < y$ ,  $|x - a| < \delta$  e  $|y - a| < \delta$ . ¿Se cumple la recíproca?.

Demostración.- Sea  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m$ . Al ser  $m - l > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - l| < \frac{m - l}{2} \text{ cuando } 0 < a - x < \delta$$

$$|f(y) - m| < \frac{m - l}{2} \text{ cuando } 0 < y - a < \delta$$

Esto implica,

$$f(x) < l + \frac{m - l}{2} = m - \frac{m - l}{2} < f(y).$$

la recíproca es falsa como lo demuestra  $f(t) = t$  y cualquier  $a$ . Por ello se concluye que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

- 32.** Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + \dots + a_0) / (b_m x^m + \dots + b_0)$  existe si y sólo si  $m \geq n$ . ¿Cuál es el límite cuando  $m = n$ ? ¿Y cuándo  $m > n$ ? Indicación: El límite fácil es  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^k = 0$ .

Demostración.- Supongamos que  $a_n \neq 0$  y  $b_m \neq 0$ . Si  $x \neq 0$ , entonces si dividimos todo por  $x^n$  nos queda,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{\frac{b_m}{x^{n-m}} + \dots + \frac{b_0}{x^n}}$$

Si  $m < n$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a_n$  pero  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Esto implica que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  no existe. Por el contrario si  $m > n$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

Por otro lado si  $m \geq n$ , entonces si dividimos por  $x^m$  se tiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \frac{\frac{a_n}{x^{m-n}} + \dots + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \dots + \frac{b_0}{x^m}}$$

Entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  si  $m > n$  y  $a_n$  si  $m = n$ , mientras que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b_m$ .

Así pues, si  $m > n$  implica  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$  si  $m = n$ .

**33.** Hallar los límites siguientes

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin^3 x}{5x + 6} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x + \sin^3 x}{x}}{\frac{5x + 6}{x}} = \frac{1}{5}$$

$$(ii) \text{ Respuesta.- } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 5} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{5}{x}} \cdot \sin x = 0 \quad \text{ya que } 1/\infty \text{ tiende a } 0 \text{ y } |\sin x| \leq 1$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \sin^2 x)}{(x + \sin x)^2}$$

Respuesta.- El límite no existe ya que  $\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^2$  se aproxima a 1, pero  $1 + \sin^2 x$  no se aproxima a  $x \rightarrow \infty$ .

**34.** Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $N$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $x > N$ , y evidentemente podemos suponer que  $N > 0$ . Ahora bien, si  $0 < x < 1/N$  entonces  $1/x > N$  de modo que  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x) = l$ . La demostración recíproca es parecida.

**35.** Hallar los límites siguientes en función del número  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Respuesta.- Ya que  $|\sin x| \leq 1$  para todo  $x$  entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

**36.** Definir "  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ".

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  significa que para todo  $\epsilon > 0$ , hay algún  $N$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para algún  $x < -N$ .

- (a) Hallar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + \dots + a_0) / (b_m x^m + \dots + b_0)$

Respuesta.- La respuesta ya se dio en el problema 32 cuando  $x \rightarrow \infty$ .

- (b) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x)$ .

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  para algún  $N$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $x > N$ . Luego por propiedades de números reales se tiene  $-x > N$ , por lo tanto  $|f(-x) - l| < \epsilon$ . Así  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = l$ .

- (c) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(1/x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

Demostración.- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para  $x < N$ , de donde asumimos que  $N < 0$ . Luego  $1/N < x < 0$  se sigue  $1/x < N$ , así  $|f(1/x) - l| < \epsilon$ .

- 37.** Definamos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  en el sentido de que para todo  $N$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $f(x) > N$ .

- (a) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 3} 1/(x - 3)^2 = \infty$ .

Demostración.- Sabiendo que  $N > 0$  y sea  $\delta = 1/\sqrt{N}$ , entonces  $0 < |x - 3| < \delta$  implica que  $(x - 3)^2 < 1/N$ , de donde  $1/(x - 3)^2 > N$ .

- (b) Demostrar que si  $f(x) > \epsilon > 0$  para todo  $x$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \infty$$

Demostración.- Dado  $N > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|g(x)| < \frac{\epsilon}{N}$ , luego

$$0 < |x - a| < \delta \implies \frac{f(x)}{|g(x)|} > \frac{\epsilon}{\frac{\epsilon}{N}} = N,$$

luego ya que  $N$  es un número grande, queda demostrada la proposición.

- 38.** (a)

- (b)