

Universidad: **Mayor de San Andrés.**
 Asignatura: **Geometría II.**
 Ejercicio: 6.
 Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Ejercicio 1. Encontrar el punto final de $\vec{a} = (7, 6)$ si el punto inicial es $P_0(2, -1)$.

Respuesta.- Sea $\vec{a} = P_1 - P_0$ y $P_1 = (x, y)$, entonces podemos hallar los vectores de la siguiente manera,

$$x - 2 = 7 \quad ; \quad y + 1 = 6$$

de donde $x = 9$, $y = 5$ y por lo tanto

$$P_1 = (9, 5)$$

Ejercicio 2. Sean $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1)$ y $\vec{w} = (4, -1)$. Encontrar las componentes del vector \vec{x} que satisfacen $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$.

Respuesta.- Despejando \vec{x} obtenemos

$$6\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad \Rightarrow \quad 6\vec{x} = (2, 6) - (2, 1) - (4, -1)$$

de donde

$$6\vec{x} = (0, 5) - (4, -1) \quad \Rightarrow \quad 6\vec{x} = (-4, 6) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

Ejercicio 3. Demuéstrese que: $0\vec{x} = \vec{0}$ y $r\vec{0} = \vec{0}$.

Demostración.- sea $\vec{x} \in V_n$ entonces $0\vec{x} = 0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, luego por la multiplicación de un número real por un vector tenemos,

$$0\vec{x} = (0 \cdot x_1, 0 \cdot x_2, \dots, 0 \cdot x_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

y por lo tanto se demuestra que $0\vec{x} = \vec{0}$. Por otro lado sea $r \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$r\vec{0} = r(0, 0, \dots, 0) = (r \cdot 0, r \cdot 0, \dots, r \cdot 0) = (0, 0, \dots, 0)$$

de modo que

$$r\vec{0} = \vec{0}$$

Ejercicio 4. Demuéstrese que:

a) Si $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{c}$.

Demostración.- Sea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$, entonces por el inverso aditivo e hipótesis tenemos ,

$$\begin{aligned}
 \vec{b} &= (\vec{b} + \vec{a}) - \vec{a} \\
 &= (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} \\
 &= (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{a} \\
 &= \vec{c} + (\vec{a} - \vec{a}) \\
 &= \vec{c}
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \right.$$

b) Si $r\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow r = 0 \vee \vec{x} = \vec{0}$.

Demostración.- Será lo mismo demostrar $r\vec{x} = \vec{0} \wedge r \neq 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Sea $r \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in V_n$, entonces

$$r\vec{x} = \vec{0} \text{ implica que } \vec{x} = \frac{\vec{0}}{r}, \text{ ya que } r \neq 0.$$

Luego se sigue que

$$\vec{x} = \vec{0}$$

c) Si $r\vec{x} = s\vec{x} \wedge \vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow r = s$.

Demostración.- Reescribiendo se tiene: Si $r\vec{x} = s\vec{x} \wedge r \neq s \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

De donde se tiene

$$\vec{x} = (r - s)\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = r\vec{x} - s\vec{x} \text{ ya que } r \neq s,$$

por lo tanto

$$\vec{x} = r(\vec{x} - \vec{x}).$$

Aplicando la unicidad y existencia del inverso aditivo, se sigue

$$\vec{x} = r(\vec{0}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

Ejercicio 5. Demostrar que si $\vec{c} \neq \vec{0}$ y si \vec{a} y \vec{b} son paralelos a \vec{c} , entonces \vec{a} y \vec{b} son paralelos. (Vectores paralelos a un mismo vector no nulo son paralelos entre sí).

Demostración.- Sea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$. Por definición de vectores paralelos se tiene

$$r_1\vec{a} = \vec{c} \text{ y } r_2\vec{b} = \vec{c}$$

de donde

$$r_1\vec{a} = r_2\vec{b},$$

en vista de que $r_1 \cdot r_2 \neq 0$ entonces

$$\vec{b} = r_1 r_2^{-1} \vec{a},$$

por lo tanto se concluye que \vec{a} y \vec{b} son paralelos entre sí.

Ejercicio 6. Hallar todos los vectores ortogonales a:

a) $(3, 6)$

Respuesta.- Sea (r_1, r_2) un vector, entonces para hallar vectores paralelos a $(3, 6)$ utilizamos la definición como sigue,

$$\begin{aligned} (3, 6) \circ (r_1, r_2) &= 0 \\ 3r_1 + 6r_2 &= 0 \\ 3(r_1 + 2r_2) &= 0 \\ r_1 + 2r_2 &= 0 \\ r_1 &= -2r_2 \end{aligned}$$

de donde tomamos valores para r_2 , reemplazamos en (1) y obtendremos n vectores paralelos a $(3, 6)$.

b) $(2, -1)$.

Respuesta.- Análogamente al inciso a) tenemos

$$\begin{aligned}(2, -1) \circ (r_1, r_2) &= 0 \\ 2r_1 + (-r_2) &= 0 \\ r_1 &= \frac{1}{2}r_2\end{aligned}$$

de igual forma al anterior inciso, tomamos valores para r_2 , y hallamos n valores ortogonales a $(2, -1)$.

c) $(2, 3, -1)$

Respuesta.- Sea (r_1, r_2, r_3) un vector en V_3 , entonces,

$$\begin{aligned}(2, 3, -1) \circ (r_1, r_2, r_3) &= 0 \\ 2r_1 + 3r_2 - r_3 &= 0 \\ r_1 &= (r_3 - 3r_2)/2\end{aligned}\quad (1)$$

luego reemplazamos valores a r_3 y r_2 en (1), de donde obtendremos vectores ortogonales a $(2, 3, -1)$.

d) (a_1, a_2)

Respuesta.- Análogo a los anteriores incisos se tiene,

$$(a_1, a_2) \circ (r_1, r_2) = 0 \Rightarrow a_1 r_1 + a_2 r_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -a_2 r_2 / r_1 \\ a_2 = -a_1 r_1 / r_2 \\ r_1 = -a_2 r_2 / a_1 \\ r_2 = -a_1 r_1 / a_1 \end{cases}$$

Ejercicio 7. Encontrar un vector que sea ortogonal tanto a \vec{u} como a \vec{v} .

a) $\vec{u} = -7i + 3j + k$, $\vec{v} = 2i + 4k$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} k \\ &= (3 \cdot 4 - 1 \cdot 0)i - (7 \cdot 4 - 2 \cdot 1)j + (7 \cdot 0 - 3 \cdot 2)k.\end{aligned}$$

Por lo tanto el vector que deseamos encontrar es

$$\vec{u} \times \vec{v} = (12, -26, -6)$$

b) $\vec{u} = (-1, -1, -1), \quad \vec{v} = (2, 0, 2)$

Respuesta.-

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

de donde

$$\vec{u} \times \vec{v} = -2i + 2k = (-2, 0, 2)$$

Ejercicio 8. Encontrar todos los vectores posibles de longitud 1 ortogonales tanto a $\vec{a} = (3, -2, 1)$ como a $\vec{b} = (-2, 1, -3)$.

Respuesta.- Partamos encontrando el producto vectorial de los vectores \vec{a} y \vec{b} .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5i + 7j - k = (5, 7, -1).$$

Esto nos garantiza que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal tanto a \vec{a} , como a \vec{b} . Luego podemos encontrar cualquier vector de longitud 1 dividiendo el vector por su modulo. Es decir,

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = 1.$$

de donde,

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{(5, 7, -1)}{\sqrt{5^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{(5, 7, -1)}{5\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right).$$

Por lo tanto los vectores de longitud 1 ortogonales a \vec{a} y \vec{b} , son

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$$

El segundo vector cumple con la condición, ya que es el vector contrario a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$.

Ejercicio 9. Sean $\vec{a} = ti + j$ y $\vec{b} = 4i + 3j$. Encontrar el valor de t tal que

a) \vec{a} y \vec{b} sean ortogonales.

Respuesta.- Sea $\vec{a} = ti + j = (t, 1)$ y $\vec{b} = 4i + 3j = (4, 3)$, entonces por definición de ortogonalidad tenemos

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = -3/4$$

b) El ángulo entre \vec{a} y \vec{b} sea $\pi/4$.

Respuesta.- Aplicando $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi/4)$ tenemos,

$$4t + 3 = \sqrt{t^2 + 1} \cdot \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (4t + 3)^2 = (t^2 + 1) \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

de donde,

$$7t^2 + 48 - 7 = 0.$$

Por lo tanto,

$$t = \frac{1}{7} \quad \text{o} \quad t = -7$$

c) El ángulo entre \vec{a} y \vec{b} sea $\pi/6$.

Respuesta.- Análoga al anterior ejercicio tenemos

$$4t + 3 = \sqrt{t^2 + 1} \cdot \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (4t^2 + 3)^2 = (t^2 + 1) \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow -11t^2 + 96t - 39 = 0$$

de donde

$$t = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{11} \quad \text{o} \quad t = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$$

d) \vec{a} y \vec{b} sean paralelos.

Respuesta.- Sea $\vec{a} = (t, 1)$ y $\vec{b} = (4, 3)$ entonces por definición de vectores paralelos tenemos que

$$\vec{a} = c\vec{b} \Rightarrow (t, 1) = c(4, 3) \Rightarrow (t, 1) = (4c, 3c)$$

de donde

$$t = 4c \quad \text{y} \quad 1 = 3c$$

por lo tanto $c = \frac{1}{3}$. Se sigue

$$t = \frac{4}{3}$$

Ejercicio 10. Los vectores \vec{a} y \vec{b} forman un ángulo de 60° con $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$. Determinar $\|\vec{a} - \vec{b}\|$ y $\|\vec{a} + \vec{b}\|$.

Respuesta.- Sea

$$\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \pm 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

entonces se tiene,

$$\|a \pm b\|^2 = 5^2 + 8^2 \pm 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos\left(60 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

por lo tanto

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = 7 \quad \text{y} \quad \|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{129}$$

Ejercicio 11. Los vectores \vec{a} y \vec{b} forman un ángulo de 30° con $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$. Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.

Respuesta.- Por el teorema de los cosenos, calculamos

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\cos 30 = 4 \Rightarrow \|\vec{a} - \vec{b}\| = 2.$$

Luego calculamos el ángulo α asociado a \vec{a} y $\vec{a} - \vec{b}$ de donde,

$$\cos \alpha = \frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{a} - \vec{b}\|} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{a} - \vec{b}\|} \right) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Sea $a + b$ la diagonal del paralelogramo formado por los lados \vec{a} y \vec{b} entonces, el ángulo de $a + b$ estará dado por 15° . Por lo tanto $a + b$ y $a - b$ forman un ángulo de,

$$180 - 60 - 15 = 105^\circ.$$

Ejercicio 12. Dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que satisfacen la condición $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ y sabiendo que $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 1, \|\vec{c}\| = 4$. Calcular $\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Respuesta.- Si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ entonces

$$0 = \|\vec{0}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2.$$

Luego,

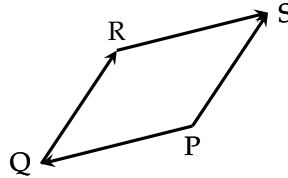
$$\begin{aligned} 0 = \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2 &= \|\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})\|^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2[\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c})] + \|\vec{b} + \vec{c}\|^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + 2\vec{a} \circ \vec{c} + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{b} \circ \vec{c} + \|\vec{c}\|^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c} = -\frac{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2}{2} = -\frac{3^2 + 1^2 + 4^2}{2} = -13.$$

Ejercicio 13. Dados los puntos $P(3,4)$, $Q(1,1)$ y $R(5,2)$, usar métodos vectoriales para encontrar las coordenadas del cuarto vértice del paralelogramo cuyo lados adyacentes son \vec{PQ} y \vec{QR} .

Respuesta.- Grafiquemos la idea.



Sea S el vértice a encontrar. Entonces, por las características de un paralelogramo tenemos

$$\vec{QR} = \vec{PS},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} (1-1) - (5,2) &= (3,4) - S \Rightarrow S = (3,4) - (-4,-1) \\ S &= (7,5). \end{aligned}$$

Ejercicio 14. Demostrar que $(4, 5, 2), (4, 7, 9), (8, 5, -6)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Respuesta.- Si $(4, 5, 2), (4, 7, 9), (8, 5, -6)$ son los vértices de un triángulo equilátero, podemos hallar las longitudes de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\| &= \|(4, 7, 9) - (4, 5, 2)\| = \|(0, 2, 7)\| = \sqrt{53}. \\ \|\vec{b}\| &= \|(8, 5, -6) - (4, 7, 9)\| = \|(4, -2, -15)\| = \sqrt{245}. \\ \|\vec{c}\| &= \|(8, 5, -6) - (4, 5, 2)\| = \|(4, 0, -8)\| = \sqrt{80}.\end{aligned}$$

Luego, calculando el ángulo entre dos de los vectores encontrados, tenemos

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{0 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 7 \cdot (-15)}{\sqrt{53} \sqrt{245}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-109}{\sqrt{53} \sqrt{245}}\right) = 163^\circ$$

El cual contradice la proposición dada, ya que un triángulo equilátero tiene sus ángulos igual a 60° .

Podemos refutar la proposición dada de otra forma.

Supongamos que las distancias entre A, B y C son iguales, lo que implica que

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\|.$$

Ya que $\|\vec{a}\| \neq \|\vec{b}\|$ se concluye que los puntos dados no son los vértices de un triángulo equilátero.

Ejercicio 15. Demostrar que

a) $(2, 1, 6), (4, 7, 9)$ y $(8, 5, -6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Respuesta.- Para demostrar que los puntos dados son vértices de un triángulo rectángulo, primero hallemos los vectores asociados, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (4, 7, 9) - (2, 1, 6) = (2, 6, 3) \\ \vec{b} &= (8, 5, -6) - (4, 7, 9) = (4, -2, -15) \\ \vec{c} &= (8, 5, -6) - (2, 1, 6) = (6, 4, -12)\end{aligned}$$

Luego, por definición de paralelismo de vectores, vemos que no existe un escalar $r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\vec{a} = r\vec{b}.$$

Es decir,

$$\begin{cases} 2 = 4r \\ 1 = -2r \\ 6 = -15r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ r = -\frac{1}{2} \\ r = -\frac{6}{15} \end{cases}$$

Así, podemos afirmar que los puntos dados corresponden a los vértices de un triángulo. Luego, para saber si este triángulo es rectángulo solo debemos hallar dos vectores ortogonales, como sigue:

$$\vec{a} \circ \vec{c} = (2, 6, 3) \circ (6, 4, -12) = 2 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot (-12) = 0$$

Por lo tanto, los puntos dados son vértices de un triángulo rectángulo.

b) ¿En cuál de los vértices está el ángulo de 90° ?

Respuesta.- Se encuentra en el vértice $(2, 1, 6)$. Esto por el desarrollo del anterior ejercicio.

c) Encontrar el área del triángulo.

Respuesta.- Se sabe que el área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del producto de sus catetos. Por lo tanto, el área del triángulo es igual a:

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{c}\|$$

De donde,

$$\|\vec{a} \times \vec{c}\| = \|[6 \cdot (-12) - 3 \cdot 4; 3 \cdot 6 - 2 \cdot (-12); 2 \cdot 4 - 6 \cdot 6]\| = \|-84, 42, -28\| = 98.$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{98}{2} = 49.$$

Ejercicio 16. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 4\vec{a} \circ \vec{b}$.

Demostración.- Sabemos que

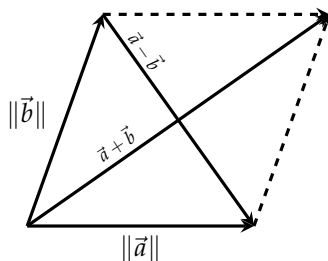
$$\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \pm 2\vec{a} \circ \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

Por lo tanto se tiene,

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} + |\vec{b}|^2) = 4\vec{a} \circ \vec{b}.$$

Ejercicio 17. Demuéstrese que $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$. ¿Cuál es la interpretación geométrica del problema?

Demostración.- La interpretación geométrica viene dada por:



Por definición de vectores ortogonales tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) &= 0 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \circ (-\vec{b}) \\
 &\Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{a} + \vec{a} \circ (-\vec{b}) + \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ (-\vec{b}) \\
 &\Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{b} - \|\vec{b}\|^2 \\
 &\Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 18. Demostrar que:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

Demostración.- Similar al ejercicio 16 se tiene,

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \circ \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \circ \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\
 &= 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 19. Demostrar que

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \frac{1}{4}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Demostración.- Partamos de la parte derecha de la igualdad,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \frac{1}{4}[(\vec{u} + \vec{v}) \circ (\vec{u} + \vec{v})] - \frac{1}{4}[(\vec{u} - \vec{v}) \circ (\vec{u} - \vec{v})] \\
 &= \frac{1}{4}(\vec{u} \circ \vec{u} + \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{v} \circ \vec{u} + \vec{v} \circ \vec{v}) \\
 &\quad - \frac{1}{4}(\vec{u} \circ \vec{u} - \vec{u} \circ \vec{v} - \vec{v} \circ \vec{u} + \vec{v} \circ \vec{v}) \\
 &= \frac{1}{4}[4(\vec{u} \circ \vec{v})] \\
 &= \vec{u} \circ \vec{v}.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 20. Supóngase que $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{c}$ y que $\vec{a} \neq 0$. Es posible inferir que $\vec{b} = \vec{c}$?. Explicar la respuesta.

Respuesta.- Sean $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 0)$ y $C = (0, -1, 1)$. Entonces,

$$A \circ B = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0,$$

$$A \circ C = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0.$$

Es decir,

$$A \circ B = A \circ C$$

Pero

$$B \neq C.$$

Por lo tanto, el supuesto no es suficiente para concluir que $B = C$ se cumpla todas las veces.

Ejercicio 21. Explicar por qué las expresiones siguientes no tienen sentido

a) $\vec{a} \circ (\vec{b} \circ \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{b}) \circ \vec{c}.$

Respuesta.-

b) $\|\vec{a} \circ \vec{b}\|.$

Respuesta.-

c) $(\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{c}.$

Respuesta.-

d) $k \circ (\vec{a} + \vec{b}).$

Respuesta.-

Ejercicio 22. Dado el punto fijo $A(1, 3, 5)$, el punto $P(x, y, z)$ y el vector $\vec{n} = i - j + 2k$, utilice el producto escalar como ayuda para escribir una ecuación en x, y y z que diga lo siguiente: \vec{n} y \vec{AP} son perpendiculares. Simplifique entonces esta ecuación y dé una descripción geométrica del conjunto de tales puntos $P(x, y, z)$.

Respuesta.-

Ejercicio 23. Para $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ demuestre que:

a) $\vec{a} \times \vec{a} = 0.$

Respuesta.-

b) $\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ **Respuesta.-**

c) $\vec{a} \times (\vec{a} \circ \vec{b}) = (\vec{a} \circ \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c}.$

Respuesta.-

Ejercicio 24.

Ejercicio 25.

Ejercicio 26.

Ejercicio 27.

Ejercicio 28.

Ejercicio 29.

Ejercicio 30.

Ejercicio 31. Demostrar que $Comp_{\vec{b}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = Comp_{\vec{b}}\vec{a}_1 + Comp_{\vec{b}}\vec{a}_2$

Demostración.- Por definición de la componente, al ser la norma del vector b un escalar y por propiedades del producto escalar se tiene,

$$Comp_{\vec{b}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \frac{(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \circ \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}_1 \circ \vec{b} + \vec{a}_2 \circ \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}_1 \circ \vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{a}_2 \circ \vec{b}}{|\vec{b}|} = Comp_{\vec{b}}\vec{a}_1 + Comp_{\vec{b}}\vec{a}_2$$

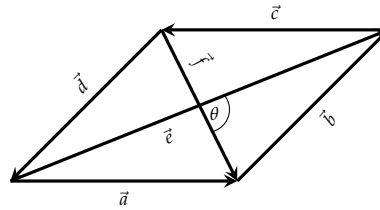
Ejercicio 32.

Ejercicio 33.

Ejercicio 34.

Ejercicio 35. Demostrar que las diagonales de un rombo son ortogonales entre si.

Demostración.- Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \in V_n$. De donde gráficamente se tiene:



Así,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{e} \circ \vec{f}}{\|\vec{e}\| \|\vec{f}\|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left[\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{d} + \vec{a})}{\|\vec{e}\| \|\vec{f}\|} \right].$$

Luego, ya que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ forman un rombo. Es decir, un paralelogramo de lados iguales, entonces $\vec{d} = -\vec{b}$, por lo que:

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \circ (-\vec{b} + \vec{a})}{\|\vec{e}\| \|\vec{f}\|} \right].$$

Por las propiedades de producto interno y $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$,

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left[\frac{\vec{a} \circ (-\vec{b}) + \vec{b} \circ (-\vec{b}) + \vec{a} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{a}}{\|\vec{e}\| \|\vec{f}\|} \right] \\ &= \cos^{-1} \left[\frac{-(\vec{a} \circ \vec{b}) - (\vec{b} \circ \vec{b}) + \vec{a} \circ \vec{a} + \vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{e}\| \|\vec{f}\|} \right] \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b}}{\|\vec{e}\| \|\vec{f}\|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2}{\|\vec{e}\| \|\vec{f}\|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{0}{\|\vec{e}\| \|\vec{f}\|} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

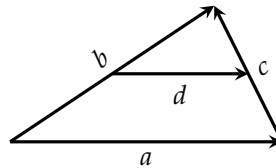
$$\vec{e} \perp \vec{f}.$$

Ejercicio 36.

Ejercicio 37.

Ejercicio 38. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Demostración.- Consideremos el siguiente gráfico. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$



de donde podemos deducir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - d = 0 \\ a + \frac{c}{2} - d - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{2} = \frac{b}{2} - a \\ \frac{c}{2} = d + \frac{b}{2} - a \end{cases}$$

Entonces $a = 2d$ si y sólo si $a \parallel d$. Así tomando la norma nos queda:

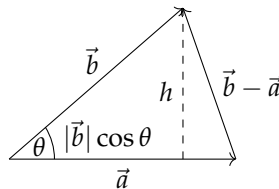
$$\|a\| = \|2d\| \Rightarrow \|d\| = \frac{1}{2}\|a\|.$$

Ejercicio 39.

Ejercicio 40.

Ejercicio 41. Demostrar vectorialmente la ley de cosenos.

Demostración.- Supongamos que $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$ y,



entonces por el teorema de Pitágoras se tiene

$$h^2 = |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{b}| \cos \theta\right)^2 \quad y \quad |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \left(|\vec{b}| \cos \theta - |\vec{a}|\right)^2 + h^2$$

de donde

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = \left(|\vec{b}| \cos \theta - |\vec{a}|\right)^2 + |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{b}| \cos \theta\right)^2 = \left(|\vec{b}| \cos \theta\right)^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{b}| \cos \theta\right)^2$$

por lo tanto,

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Ejercicio 42.