Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Geometría II.**
Práctica: 1.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Ejercicio 1. Encontrar el punto final de $\vec{a} = (7,6)$ si el punto inicial es $P_0(2,-1)$.

Respuesta.- Sea $\vec{a} = P_1 - P_0$ y $P_1 = (x,y)$, entonces podemos hallar los vectores de la siguiente manera,

$$x - 2 = 7 \quad ; \quad y + 1 = 6$$

de donde $x = 9,\ y = 5$ y por lo tanto

$$P_1 = (9,5)$$

Ejercicio 2. Sean $\vec{u} = (1,3)$, $\vec{v} = (2,1)$ y $\vec{w} = (4,-1)$. Encontrar las componentes del vector $\vec{x}$ que satisfacen $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$.

Respuesta.- Despejando $\vec{x}$ obtenemos

$$6\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad \Rightarrow \quad 6\vec{x} = (2,6) - (2,1) - (4,-1)$$

de donde

$$6\vec{x} = (0,5) - (4,-1) \quad \Rightarrow \quad 6\vec{x} = (-4,6) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

Ejercicio 3. Demuéstrese que: $0\vec{x} = \vec{0}$ y $r\vec{0} = \vec{0}$.

Demostración.- sea $\vec{x} \in V_n$ entonces $0\vec{x} = 0(x_1, x_2, ..., x_n)$, luego por la multiplicación de un número real por un vector tenemos,

$$0\vec{x} = (0 \cdot x_1, 0 \cdot x_2, ..., 0 \cdot x_n) = (0,0,...,0)$$

y por lo tanto se demuestra que $0\vec{x} = \vec{0}$. Por otro lado sea $r \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$r\vec{0} = r(0,0,...,0) = (r \cdot 0, r \cdot 0, ..., r\cdot) = (0,0,...,0)$$

de modo que

$$r\vec{0} = \vec{0}$$

Ejercicio 4. Demuéstrese que:

a) Si $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{c}$.

Demostración.- Sea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$, entonces por el inverso aditivo e hipótesis tenemos ,

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{b} & = & (\vec{b}+\vec{a})-\vec{a} \\ & = & (\vec{a}+\vec{b})-\vec{a} \\ & = & (\vec{a}+\vec{c})-\vec{a} \\ & = & \vec{c}+(\vec{a}-\vec{a}) \\ & = & \vec{c} \end{array}\right| \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$$

b) Si $r\vec{x}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad r=0 \vee \vec{x}=\vec{0}$.

Demostración.- Será lo mismo demostrar $r\vec{x}=\vec{0} \wedge r \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{x}=\vec{0}$.

Sea $r \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in V_n$, entonces

$$r\vec{x}=0 \text{ implica que } \vec{x}=\frac{\vec{0}}{r}, \text{ ya que } r \neq 0.$$

Luego se sigue que

$$\vec{x}=\vec{0}$$

c) Si $r\vec{x}=s\vec{x} \;\wedge\; \vec{x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r=s$.

Demostración.- Reescribiendo se tiene: Si $r\vec{x}=s\vec{x} \;\wedge\; r \neq s \;\Rightarrow\; \vec{x}=0$.

De donde se tiene

$$\vec{x}=(r-s)\vec{x} \;\Rightarrow\; \vec{x}=r\vec{x}-s\vec{x} \text{ ya que } r \neq s,$$

por lo tanto

$$\vec{x}=r(\vec{x}-\vec{x}).$$

Aplicando la unicidad y existencia del inverso aditivo, se sigue

$$\vec{x}=r(0) \;\Rightarrow\; \vec{x}=0.$$

Ejercicio 5. Demostrar que si $\vec{c} \neq 0$ y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos a $\vec{c}$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos. (Vectores paralelos a un mismo vector no nulo son paralelos entre sí).

Demostración.- Sea $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_n$. Por definición de vectores paralelos se tiene

$$r_1\vec{a}=\vec{c} \quad \text{y} \quad r_2\vec{b}=\vec{c}$$

de donde

$$r_1\vec{a}=r_2\vec{b},$$

en vista de que $r_1 \cdot r_2 \neq 0$ entonces

$$\vec{b}=r_1r_2^{-1}\vec{a},$$

por lo tanto se concluye que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos entre sí.

Ejercicio 6. Hallar todos los vectores ortogonales a:

a) $(3,6)$

Respuesta.- Sea (r_1, r_1) un vector, entonces para hallar vectores paralelos a $(3,6)$ utilizamos la definición como sigue,

$$\begin{array}{rcl} (3,6)\circ(r_1,r_2) & = & 0 \\ 3r_1+6r_2 & = & 0 \\ 3(r_1+2r_2) & = & 0 \\ r_1+2r_2 & = & 0 \\ r_1 & = & -2r_2 \end{array}$$

de donde tomamos valores para r_2, reemplazamos en (1) y obtendremos n vectores paralelos a $(3,6)$.

b) $(2,-1)$.

Respuesta.- Análogamente al inciso a) tenemos

$$\begin{array}{rcl} (2,-1)\circ(r_1,r_2) & = & 0 \\ 2r_1+(-r_2) & = & 0 \\ r_1 & = & \frac{1}{2}r_2 \end{array}$$

de igual forma al anterior inciso, tomamos valores para r_2, y hallamos n valores ortogonales a $(2,-1)$.

c) $(2,3,-1)$

Respuesta.- Sea (r_1,r_2,r_3) un vector en V_3, entonces,

$$\begin{array}{rcll} (2,3,-1)\circ(r_1,r_2,r_3) & = & 0 & \\ 2r_1+3r_2-r_3 & = & 0 & \\ r_1 & = & (r_3-3r_2)/2 & \quad (1) \end{array}$$

luego reemplazamos valores a r_3 y r_2 en (1), de donde obtendremos vectores ortogonales a $(2,3,-1)$.

d) (a_1,a_2)

Respuesta.- Análogo a los anteriores incisos se tiene,

$$(a_1,a_2)\circ(r_1,r_2)=0 \quad \Rightarrow \quad a_1r_1+a_2r_2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1=-a_2r_2/r_1 \\ a_2=-a_1r_1/r_2 \\ r_1=-a_2r_2/a_1 \\ r_2=-a_1r_1/a_1 \end{cases}$$

Ejercicio 7. Encontrar un vector que sea ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=-7i+3j+k, \quad \vec{v}=2i+4k$.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}\times\vec{v} & = & \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} k \\ & = & (3\cdot 4-1\cdot 0)i-(7\cdot 4-2\cdot 1)j+(7\cdot 0-3\cdot 2)k. \end{array}$$

Por lo tanto el vector que deseamos encontrar es

$$\vec{u} \times \vec{v} = (12, -26, -6)$$

b) $\vec{u} = (-1, -1, -1), \quad \vec{v} = (2, 0, 2)$

Respuesta.-

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

de donde

$$\vec{u} \times \vec{v} = -2i + 2k = (-2, 0, 2)$$

Ejercicio 8. Encontrar todos los vectores posibles de longitud 1 ortogonales tanto a $\vec{a} = (3, -2, 1)$ como a $\vec{b} = (-2, 1, -3)$.

Respuesta.- Partamos encontrando el producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5i + 7j - k = (5, 7, -1).$$

Esto nos garantiza que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal tanto a $\vec{a}$, como a $\vec{b}$. Luego podemos encontrar cualquier vector de longitud 1 dividiendo el vector por su modulo. Es decir,

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = 1.$$

de donde,

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{(5, 7, -1)}{\sqrt{5^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{(5, 7, -1)}{5\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right).$$

Por lo tanto los vectores de longitud 1 ortogonales a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right) \qquad \text{y} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$$

El segundo vector cumple con la condición, ya que es el vector contrario a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$.

Ejercicio 9. Sean $\vec{a} = ti + j$ y $\vec{b} = 4i + 3j$. Encontrar el valor de t tal que

a) **$\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.**

Respuesta.- Sea $\vec{a} = ti + j = (t, 1)$ y $\vec{b} = 4i + 3j = (4, 3)$, entonces por definición de ortogonalidad tenemos

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 4t + 3 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; t = -3/4$$

b) **El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/4$.**

Respuesta.- Aplicando $\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi/4)$ tenemos,

$$4t+3 = \sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{25}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad (4t^2+3)^2 = (t^2+1)\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

de donde,

$$7t^2+48-7=0.$$

Por lo tanto,

$$t=\frac{1}{7} \quad \text{o} \quad t=-7$$

c) **El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/6$.**

Respuesta.- Análoga al anterior ejercicio tenemos

$$4t+3 = \sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{25}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad (4t^2+3)^2 = (t^2+1)\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad -11t^2+96t-39=0$$

de donde

$$t=\frac{48+25\sqrt{3}}{11} \quad \text{o} \quad t=\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$$

d) **$\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos.**

Respuesta.- Sea $\vec{a}=(t,1)$ y $\vec{b}=(4,3)$ entonces por definición de vectores paralelos tenemos que

$$\vec{a}=c\vec{b} \quad\Rightarrow\quad (t,1)=c(4,3) \quad\Rightarrow\quad (t,1)=(4c,3c)$$

de donde

$$t=4c \qquad \text{y} \qquad 1=3c$$

por lo tanto $c=\dfrac{1}{3}$. Se sigue

$$t=\frac{4}{3}$$

Ejercicio 10. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de $60°$ con $\|\vec{a}\|=5$, $\|\vec{b}\|=8$. Determinar $||\vec{a}-\vec{b}\|$ y $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.

Respuesta.- Sea

$$\|\vec{a}\pm\vec{b}\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \pm 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

entonces se tiene,

$$\|a\pm b\|^2 = 5^2+8^2\pm 2\cdot5\cdot8\cos\left(60\cdot\frac{\pi}{180}\right)$$

por lo tanto

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|=7 \qquad y \qquad \|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{129}$$

Ejercicio 11. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 30° con $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$. Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$.

Respuesta.- Por el teorema de los cosenos, calculamos

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\cos 30 = 4 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a}-\vec{b}\| = 2.$$

Luego calculamos el ángulo α asociado a $\vec{a}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ de donde,

$$\cos\alpha = \frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}-\vec{b}\|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}-\vec{b}\|}\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60°.$$

Sea $a+b$ la diagonal del paralelogramo formado por los lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entonces, el ángulo de $a+b$ estará dado por 15°. Por lo tanto $a+b$ y $a-b$ forman un ángulo de,

$$180 - 60 - 15 = 105°.$$

Ejercicio 12. Dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que satisfacen la condición $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ y sabiendo que $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 1, \|\vec{a}\| = 4$. Calcular $\vec{a}\circ\vec{b} + \vec{b}\circ\vec{c} + \vec{a}\circ\vec{c}$

Respuesta.- Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$ entonces

$$0 = \|\vec{0}\|^2 = \|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2.$$

Luego,

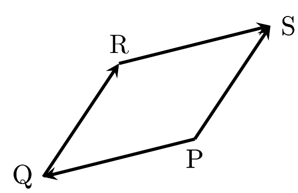
$$\begin{array}{rcl} 0 = \|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2 & = & \|\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\|^2 \\ & = & \|\vec{a}\|^2 + 2[\vec{a}\circ(\vec{b}+\vec{c})] + \|\vec{b}+\vec{c}\|^2 \\ & = & \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\circ\vec{b} + 2\vec{a}\circ\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{b}\circ\vec{c} + \|\vec{c}\|^2 \\ & = & \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a}\circ\vec{b} + \vec{a}\circ\vec{c} + \vec{b}\circ\vec{c}) \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a}\circ\vec{b} + \vec{a}\circ\vec{c} + \vec{b}\circ\vec{c} = -\frac{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2}{2} = -\frac{3^2+1^2+4^2}{2} = -13.$$

Ejercicio 13. Dados los puntos $P(3,4)$, $Q(1,1)$ y $R(5,2)$, usar métodos vectoriales para encontrar las coordenadas del cuarto vértice del paralelogramo cuyo lados adyacentes son $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$.

Respuesta.- Grafiquemos la idea.



Sea S el vértice a encontrar. Entonces, por las características de un paralelogramo tenemos

$$\vec{QR} = \vec{PS},$$

por lo tanto

$$(1-1)-(5,2)=(3,4)-S \quad \Rightarrow \quad S=(3,4)-(-4,-1)$$
$$S=(7,5).$$

Ejercicio 14. Demostrar que $(4,5,2),(4,7,9),(8,5,-6)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Respuesta.- Si $(4,5,2),(4,7,9),(8,5,-6)$ son los vértices de un triángulo equilátero, podemos hallar las longitudes de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccccl} \|\vec{a}\| &=& \|(4,7,9)-(4,5,2)\| &=& \|(0,2,7)\| &=& \sqrt{53}. \\ \|\vec{b}\| &=& \|(8,5,-6)-(4,7,9)\| &=& \|(4,-2,-15)\| &=& \sqrt{245}. \\ \|\vec{c}\| &=& \|(8,5,-6)-(4,5,2)\| &=& \|(4,0,-8)\| &=& \sqrt{80}. \end{array}$$

Luego, calculando el ángulo entre dos de los vectores encontrados, tenemos

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\frac{0\cdot 4+2\cdot(-2)+7\cdot(-15)}{\sqrt{53}\sqrt{245}} \quad \Rightarrow \quad \theta=\arccos\left(\frac{-109}{\sqrt{53}\sqrt{245}}\right)=163^\circ$$

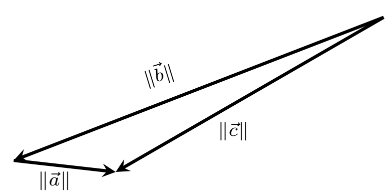
El cual contradice la proposición dada, ya que un triangulo equilatero tiene sus angulos igual a 60°.

Podemos refutar la proposición dada de otra forma.
Supongamos que las distancias entre A, B y C son iguales, lo que implica que

$$\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\|\vec{a}\|.$$

Ya que $\|\vec{a}\|\neq\|\vec{b}\|$ se concluye que los puntos dado no son los vertices de un triangulo equilátero.

Veamos este hecho gráficamente.



Ejercicio 15. Demostrar que

a) **$(2,1,6),(4,7,9)$ y $(8,5,-6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.**

Respuesta.- Para demostrar que los puntos dados son vértices de un triángulo rectángulo, primero hallemos los vectores asociados, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccl} \vec{a} &=& (4,7,9)-(2,1,6) &=& (2,6,3) \\ \vec{b} &=& (8,5,-6)-(4,7,9) &=& (4,-2,-15) \\ \vec{c} &=& (8,5,-6)-(2,1,6) &=& (6,4,-12) \end{array}$$

Luego, por definición de paralelismo de vectores, vemos que no existe un escalar $r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\vec{a} = r\vec{b}.$$

Es decir,

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2 & = & 4r \\ 1 & = & -2r \\ 6 & = & -15r \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} r & = & \frac{1}{2} \\ \\ r & = & -\frac{1}{2} \\ \\ r & = & -\frac{6}{15} \end{array}\right.$$

Así, podemos afirmar que los puntos dados corresponden a los vértices de un triángulo. Luego, para saber si este triángulo es rectángulo solo debemos hallar dos vectores ortogonales, como sigue:

$$\vec{a} \circ \vec{c} = (2,6,3) \circ (6,4,-12) = 2 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot (-12) = 0$$

Por lo tanto, los puntos dados son vértices de un triángulo rectángulo.

b) **¿En cuál de los vértices está el ángulo de 90°?.**

Respuesta.- Se encuentra en el vértice $(2,1,6)$. Esto por el desarrollo del anterior ejercicio.

c) **Encontrar el área del triángulo.**

Respuesta.- Se sabe que el área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del productos de sus catetos. Por lo tanto, el área del triángulo es igual a:

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{c}\|$$

De donde,

$$\|\vec{a} \times \vec{c}\| = \|\,[6 \cdot (-12) - 3 \cdot 4; 3 \cdot 6 - 2 \cdot (-12); 2 \cdot 4 - 6 \cdot 6]\,\| = \|-84, 42, -28\| = 98.$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{98}{2} = 49.$$

Ejercicio 16. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}^2 - \vec{b}\|^2 = 4\vec{a} \circ \vec{b}$.

Demostración.- Sabemos que

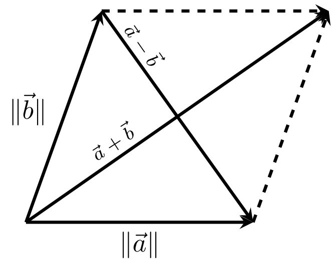
$$\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \pm 2\vec{a} \circ \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

Por lo tanto se tiene,

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}^2 - \vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} + |\vec{b}^2|\right) = 4\vec{a} \circ \vec{b}.$$

Ejercicio 17. Demuéstrese que $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$. ¿Cuál es la interpretación geométrica del problema?.

Demostración.- La interpretación geométrica viene dada por:



Por definición de vectores ortogonales tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0 &\Leftrightarrow (\vec{a}+\vec{b})\circ\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\circ(-\vec{b})\\
&\Leftrightarrow \vec{a}\circ\vec{a}+\vec{a}\circ(-\vec{b})+\vec{b}\circ\vec{a}+\vec{b}\circ(-\vec{b})\\
&\Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2-\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{b}-\|\vec{b}\|\\
&\Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2=0\\
&\Leftrightarrow \|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|.
\end{aligned}$$

Ejercicio 18. Demostrar que:

$$\boldsymbol{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2}$$

Demostración.- Similar al ejercicio 16 se tiene,

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\circ\vec{v}+\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\circ\vec{v}+\|\vec{v}^2\|\\
&= 2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2.
\end{aligned}$$

Ejercicio 19. Demostrar que

$$\boldsymbol{\vec{u}\circ\vec{v}=\frac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\frac{1}{4}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2.}$$

Demostración.- Partamos de la parte derecha de la igualdad,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\frac{1}{4}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \frac{1}{4}\left[(\vec{u}+\vec{v})\circ(\vec{u}+\vec{v})\right]-\frac{1}{4}\left[(\vec{u}-\vec{v})\circ(\vec{u}-\vec{v})\right]\\
&= \frac{1}{4}\left(\vec{u}\circ\vec{u}+\vec{u}\circ\vec{v}+\vec{v}\circ\vec{u}+\vec{v}\circ\vec{v}\right)\\
&- \frac{1}{4}\left(\vec{u}\circ\vec{u}-\vec{u}\circ\vec{v}-\vec{v}\circ\vec{u}+\vec{v}\circ\vec{v}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left[4\left(\vec{u}\circ\vec{v}\right)\right]\\
&= \vec{u}\circ\vec{v}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 20. Supóngase que $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{c}$ y que $\vec{a} \neq 0$. Es posible inferir que $\vec{b} = \vec{c}$?. Explicar la respuesta.

Respuesta.- Sean $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 0)$ y $C = (0, -1, 1)$. Entonces,

$$A \circ B = 1 \circ 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0,$$

$$A \circ C = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0.$$

Es decir,

$$A \circ B = A \circ C$$

Pero

$$B \neq C.$$

Por lo tanto, el supuesto no es suficiente para concluir que $B = C$ se cumpla todas las veces.

Ejercicio 21. Explicar por qué las expresiones siguientes no tienen sentido

a) $\vec{a} \circ \left(\vec{b} \circ \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) \circ \vec{c}.$

Respuesta.- Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$. Luego, ya que $\circ : V \times V \to F$. Entonces,

$$\vec{a} \circ (b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n) \quad = \quad (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \circ \vec{c}$$

Pero como, $F \times V_n$ con $F \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se concluye que no se puede definir el producto escalar de un vector y un escalar.

b) $\|\vec{a} \circ \vec{b}\|.$

Respuesta.- Sean $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$. Por definición de norma $(\circ : V \times V \to F)$ o módulo tenemos,

$$\|\vec{a} \circ \vec{b}\| = \sqrt{(a \circ b) \circ (a \circ b)}.$$

Dado que lo anterior es $F \times F \to F$, entonces no se tiene sentido definir la norma de dos escalar.

c) $(\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{c}.$

Respuesta.- Ya que $(\vec{a} \circ \vec{b})$ solo está definida para la suma de vectores de un mismo espacio. Entonces concluimos que $(\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{c}$ no tiene sentido.

d) $k \circ \left(\vec{a} + \vec{b}.\right).$

Respuesta.- Supongamos que $k \in F$. Por el hecho de que $\circ : V \times V \to F$ no podemos definir $k \circ \left(\vec{a} + \vec{b}.\right)$.

Ejercicio 22. Dado el punto fijo $A(1, 3, 5)$, el punto $P(x, y, z)$ y el vector $\vec{n} = i - j + 2k$, utilice el producto escalar como ayuda para escribir una ecuación en x, y y z que diga lo siguiente: $\vec{n}$ y $\vec{AP}$ son perpendiculares. Simplifique entonces esta ecuación y dé

una descripción geométrica del conjunto de tales puntos $P(x, y, z)$.

Respuesta.- Sean $\vec{n} = (1 - 1, 2)$ y el vector $\vec{AP} = (x-1, y-3, z-5)$. Entonces, la perpendicularidad de estos dos vectores estará dada por:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \circ \vec{AP} &= 0 \\
(1, -1, 2) \circ (x-1, y-3, z-5) &= 0 \\
1 \cdot (x-1) + (-1) \cdot (y-3) + 2 \cdot (z-5) &= 0 \\
x - 1 - y + 3 + 2z - 10 &= 0 \\
x - y + 2z - 8 &= 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 23. **Para $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ demuestre que:**

a) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Demostración.- Por definición de producto vectorial tenemos,

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{a} &= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) + (a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= (a_2a_2 - a_3a_3) + (a_3a_1 - a_1a_3) + (a_1a_2 - a_2a_1) \\
&= \left(a_2^2 - a_3^2\right) + \left(a_3^2 - a_1^2\right) + \left(a_1^2 - a_2^2\right) \\
&= \left(a_1^2 - a_1^2\right) + \left(a_2^2 - a_2^2\right) + \left(a_3^2 - a_2^3\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

b) $\vec{a} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$.

Demostración.- Por definición de producto escalar y producto vectorial tenemos,

$$\begin{aligned}
\vec{a} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= a \circ (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= a_1 (a_2b_3 - a_3b_2) + a_2 (a_3b_1 - a_1b_3) + a_3 (a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= (a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2) + (a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3) + (a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1) \\
&= (a_1a_2b_3 - a_1a_2b_3) + (a_2a_3b_1 - a_2a_3b_1) + (a_3a_1b_2 - a_3a_1b_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a} \circ \vec{c})\, \vec{b} - \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) \vec{c}$.

Demostración.- Calculemos $\vec{b} \times \vec{c}$.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1)$$

Luego, calculemos $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) &= \Big[\vec{a}_2\left(\vec{b}_1\vec{c}_2-\vec{b}_2\vec{c}_1\right)-\vec{a}_3\left(\vec{b}_3\vec{c}_1-\vec{b}_1\vec{c}_3\right)\ ,\ \vec{a}_3\left(\vec{b}_2\vec{c}_3-\vec{b}_3\vec{c}_2\right)-\vec{a}_1\left(\vec{b}_1\vec{c}_2-\vec{b}_2\vec{c}_1\right),\\
&\quad \vec{a}_1\left(\vec{b}_3\vec{c}_1-\vec{b}_1\vec{c}_3\right)-\vec{a}_2\left(\vec{b}_2\vec{c}_3-\vec{b}_3\vec{c}_2\right)\Big]\\
&= \Big(\vec{a}_2\vec{b}_1\vec{c}_2-\vec{a}_2\vec{b}_2\vec{c}_1-\vec{a}_3\vec{b}_3\vec{c}_1+\vec{a}_3\vec{b}_1\vec{c}_3\ ,\ \vec{a}_3\vec{b}_2\vec{c}_3-\vec{a}_3\vec{b}_3\vec{c}_2-\vec{a}_1\vec{b}_1\vec{c}_2+\vec{a}_1\vec{b}_2\vec{c}_1\\
&\quad \vec{a}_1\vec{b}_3\vec{c}_1-\vec{a}_1\vec{b}_1\vec{c}_3-\vec{a}_2\vec{b}_2\vec{c}_3+\vec{a}_2\vec{b}_3\vec{c}_2\Big). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Por otro lado calculamos $(\vec{a}\circ\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\vec{c}$.

$$\begin{aligned}
& (\vec{a}\circ\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\vec{c}\\
& (\vec{a}_1\vec{c}_1+\vec{a}_2\vec{c}_2+\vec{a}_3\vec{c}_3)(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)-(\vec{a}_1\vec{b}_1+\vec{a}_2\vec{b}_2+\vec{a}_3\vec{b}_3)(\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3)\\
= & (\vec{a}_1\vec{b}_1\vec{c}_1+\vec{a}_2\vec{b}_1\vec{c}_2+\vec{a}_3\vec{b}_1\vec{c}_3\ ,\ \vec{a}_1\vec{b}_2\vec{c}_1+\vec{a}_2\vec{b}_2\vec{c}_2+\vec{a}_3\vec{b}_2\vec{c}_3\ ,\ \vec{a}_1\vec{b}_3\vec{c}_1+\vec{a}_2\vec{b}_3\vec{c}_2+\vec{a}_3\vec{b}_3\vec{c}_3)\\
- & (\vec{a}_1\vec{b}_1\vec{c}_1+\vec{a}_2\vec{b}_2\vec{c}_1+\vec{a}_3\vec{b}_3\vec{c}_1\ ,\ \vec{a}_1\vec{b}_1\vec{z}_2+\vec{a}_2\vec{b}_2\vec{c}_2+\vec{a}_3\vec{b}_3\vec{c}_2\ ,\ \vec{a}_1\vec{b}_1\vec{c}_3+\vec{a}_2\vec{b}_2\vec{c}_3+\vec{a}_3\vec{b}_3\vec{c}_3)\\
= & (\vec{a}_2\vec{b}_1\vec{c}_2+\vec{a}_3\vec{b}_1\vec{c}_3-\vec{a}_2\vec{b}_2\vec{c}_1-\vec{a}_3\vec{b}_3\vec{c}_1\ ,\ \vec{a}_1\vec{b}_2\vec{c}_2+\vec{a}_3\vec{b}_2\vec{c}_3-\vec{a}_1\vec{b}_1\vec{c}_2-\vec{a}_3\vec{b}_3\vec{z}_2,\\
= & \vec{a}_1\vec{b}_3\vec{c}_1+\vec{a}_2\vec{b}_3\vec{c}_2-\vec{a}_1\vec{b}_1\vec{c}_3-\vec{a}_2\vec{b}_2\vec{c}_3). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Igualando (1) y (2) concluimos que,

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=(\vec{a}\circ\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\vec{c}.$$

Ejercicio 24. Suponga que los tres vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ son perpendiculares entre si. Demuestre que $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=0$.

Demostración.- Dado que,

$$\vec{a}\circ\vec{c}=0 \quad \text{y} \quad \vec{a}\circ\vec{b}=0.$$

Por el ejercicio anterior sabemos que,

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=(\vec{a}\circ\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\vec{c}.$$

Por lo tanto,

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=(\vec{a}\circ\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\vec{c}=0\cdot\vec{b}-0\cdot\vec{c}=0.$$

Ejercicio 25. Encuentre vectores distintos de cero $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$, pero $\vec{b}\neq\vec{c}$.

Respuesta.- Ya que cada lado de la igualdad es un vector de V_3. Se tiene,

$$\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=0.$$

Después, por la propiedad distributiva,

$$\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=0.$$

Sabemos que $\vec{a} \parallel (\vec{b}-\vec{c}) \Leftrightarrow \vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=0$. De donde,

$$\vec{a}=r(b-c) \quad \text{para algún } r\in\mathbb{R}.$$

Así, los vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tal que $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ serán de la forma:

$$\vec{a}=r(\vec{b}-\vec{c}), \qquad \vec{b}=\frac{\vec{a}-r\vec{c}}{r}, \qquad \vec{c}=\frac{r\vec{b}-\vec{a}}{r}, \qquad \vec{b}\neq\vec{c}.$$

De hecho, sólo hará falta encontrar un vector que cumpla la condición $\vec{a}=r(\vec{b}-\vec{c})$.

Ejercicio 26. Supóngase que $\vec{u}\circ(\vec{v}\times\vec{w})=3$. Encontrar

a) $\boldsymbol{\vec{u}\circ(\vec{w}\times\vec{v})}$**.**

Respuesta.- Por la propiedad anticonmutativa para el producto vectorial, tenemos que

$$\vec{u}\circ(-\vec{w}\times\vec{v})=3$$

Luego, Por las propiedades de multiplicación por un escalar nos queda,

$$-\vec{u}\circ(\vec{w}\times\vec{v})=3 \quad\Rightarrow\quad \vec{u}\circ(\vec{w}\times\vec{v})=-3.$$

b) $\boldsymbol{(\vec{v}\times\vec{w})\circ\vec{u}}$**.**

Respuesta.- Por la propiedad conmutativa para el producto escalar, tenemos que

$$(\vec{v}\times\vec{w})\circ\vec{u}=\vec{u}\circ(\vec{v}\times\vec{w})=3.$$

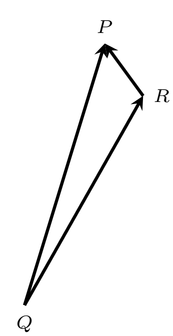
c) $\boldsymbol{\vec{w}\circ(\vec{u}\times\vec{v})}$**.**

Respuesta.- Por defininción de producto vectorial y escalar, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{w}\circ(\vec{u}\times\vec{v}) &= \vec{w}\circ(\vec{u}_2\vec{v}_3-\vec{u}_3\vec{v}_2,\vec{u}_3\vec{v}_1-\vec{u}_1\vec{v}_3,\vec{u}_1\vec{v}_2-\vec{u}_2\vec{v}_1)\\ &= \vec{w}_1\vec{u}_2\vec{v}_3-\vec{w}_1\vec{u}_3\vec{v}_2+\vec{w}_2\vec{u}_3\vec{v}_1-\vec{w}_2\vec{u}_1\vec{v}_3+\vec{w}_3\vec{u}_1\vec{v}_2-\vec{w}_3\vec{u}_2\vec{v}_1\end{aligned}$$

Ejercicio 27. Encontrar el área del triángulo que tiene vértices $\boldsymbol{P(1,5,-2),Q(0,0,0),R(3,5,1)}$.

Respuesta.- Grafiquemos.



Podemos calcular el área de dicho triángulo mediante la fórmula siguiente,

$$A(\triangle) = \frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\| \tag{1}$$

Calculemos los vectores asociados al triangulo.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= P - Q = (1,5,-2) - (0,0,0) = (1,5,-2). \\ \vec{b} &= R - Q = (3,5,1) - (0,0,0) = (3,5,1). \end{aligned}$$

Aplicando (1), tenemos

$$\begin{aligned} A(\triangle) &= \frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\| \\ &= \frac{1}{2}\| (5 \cdot 1 - 5 \cdot (-2), -2 \cdot 3 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 5 - 5 \cdot 3) \| \\ &= \frac{1}{2}\|15, -7, -10\| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{15^2 + (-7)^2 + (-10)^2} \\ &= \frac{\sqrt{374}}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 28. Encontrar el volumen del paralelepípedo de lados $\vec{a} = (2,-6,2), \vec{b} = (0,4,-2), \vec{c} = (2,2,-4)$.

Respuesta.- Podemos ver que un paralelepípedo viene dado por:

$$V = |\vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b})|$$

Primero calculemos $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (-6 \cdot (-2) - 2 \cdot 4, 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2), 2 \cdot 4 - (-6) \cdot 0) \\ &= (4,4,8). \end{aligned}$$

Luego, calculemos $\vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b})$

$$|c \circ (\vec{a} \times \vec{b})| = (2,2,-4) \circ (4,4,8) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + (-4) \cdot 8 = |-16| = 16.$$

Ejercicio 29. Determinar si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ están en el mismo plano.

(a) **$\vec{u} = (1,-2,1), (3,0,-2), \vec{w} = (5,-4,0)$.**

Respuesta.- Esperamos que los tres vectores estén en un plano. Por lo tanto no podrían formar un volumen. Esto significa que el producto triple tendría que ser igual a cero. Es decir,

$$\begin{aligned}
\vec{a} \circ \|\vec{b} \times \vec{c}\| &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 1\left[0 \cdot 0 - (-2) \cdot (-4)\right] - 2(-2 \cdot 5 - 3 \cdot 0) + 1\left[3 \cdot (-4) - 0 \cdot 5\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto los tres vectores están en el mismo plano.

(b) $\boldsymbol{\vec{u} = 5i - 2j + k, \vec{v} = 4i - j + k, \vec{w} = i - j.}$

Respuesta.- La misma lógica del inciso (a).

$$\begin{aligned}
\vec{a} \circ \|\vec{b} \times \vec{c}\| &= \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 5\left[-1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)\right] - 2(1 \cdot 1 - 4 \cdot 0) + 1\left[4 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto los tres vectores están en el mismo plano.

Ejercicio 30. Es un teorema de geometría tridimensional que el volumen de un tetraedro es 1/3 (área de la base)· (altura). Usar este resultado para demostrar que el volumen de un tetraedro cuyos lados son los vectores $\boldsymbol{\vec{a}, \vec{b}}$ y $\boldsymbol{\vec{c}}$ es $\boldsymbol{\frac{1}{6}\left|\vec{a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|}$.

Respuesta.- Vemos que la base de un tetraedro es un triángulo, de donde podemos hallar el área de la siguiente manera,

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\|.$$

Sabemos que el volumen de un sólido es: el área de la base por la altura como se dijo en el enunciado. Y dado que el volumen de un tetraedro equivale a la tercera parte del volumen del prisma. Entonces,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{c} \circ \|\vec{a} \times \vec{b}\|\right) = \frac{1}{6}\vec{c} \circ \|\vec{a} \times \vec{b}\|.$$

Ejercicio 31. Demostrar que $\boldsymbol{Comp_{\vec{b}}\left(\vec{a_1} + \vec{a_2}\right) = Comp_{\vec{b}}\vec{a_1} + Comp_{\vec{b}}\vec{a_2}}$

Demostración.- Por definición de la componente, al ser la norma del vector b un escalar y por propiedades del producto escalar se tiene,

$$\text{Comp}_{\vec{b}}\left(\vec{a_1} + \vec{a_2}\right) = \frac{(\vec{a_1} + \vec{a_2}) \circ \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a_1} \circ \vec{b} + \vec{a_2} \circ \vec{\vec{b}}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a_1} \circ \vec{b}}{\vec{b}} + \frac{\vec{a_2} \circ \vec{\vec{b}}}{|\vec{b}|} = \text{Comp}_{\vec{b}}\,\vec{a_1} + \text{Comp}_{\vec{b}}\,\vec{a_2}$$

Ejercicio 32. Mostrar que si $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ son vectores paralelos no nulos, entonces $\text{Proy}_{\vec{b}_1}\, \vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}_2}\, \vec{a}$.

Demostración.- Sea $\vec{b}_1 \parallel \vec{b}_2 \Rightarrow \vec{b}_1 = r\vec{b}_2$ $r \in V$. Luego por definición de proyección y las propiedades escalares de producto escalar y norma (modulo) tenemos,

$$\text{Proy}_{\vec{b}_1}\, \vec{a} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}_1}{\|b_1\|\|b_1\|}\vec{b}_1 = \frac{\vec{a} \circ r\vec{b}_2}{\|r\vec{b}_2\|\|r\vec{b}_2\|} r\vec{b}_2 = \frac{r^2\left(\vec{a} \circ \vec{b}_2\right)}{r^2\left(\|\vec{b}_2\|\|\vec{b}_2\|\right)}\vec{b}_2 = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|\|\vec{b}_2\|}\vec{b}_2 = \text{Proy}_{\vec{b}_2}\, \vec{a}.$$

Ejercicio 33. Mostrar que si $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ están en direcciones opuestas, entonces $\text{Comp}_{\vec{b}_1}\, \vec{a} = -\,\text{Comp}_{\vec{b}_2}\, \vec{a}$.

Demostración.- Por hipótesis se tiene que $b_1 = -b_2$, de donde se tiene,

$$\text{Comp}_{\vec{b}_1}\, \vec{a} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|\|\vec{b}_1\|} = \frac{\vec{a} \circ (-\vec{b}_2)}{\|-\vec{b}_2\|\|-\vec{b}_2\|} = \frac{-\left(\vec{a} \circ \vec{b}_2\right)}{\left(-\|\vec{b}_2\|\right)\left(-\|\vec{b}_2\|\right)} = -\frac{\vec{a} \circ \vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|\|\vec{b}_2\|} = -\,\text{Comp}_{\vec{b}_2}\, \vec{a}.$$

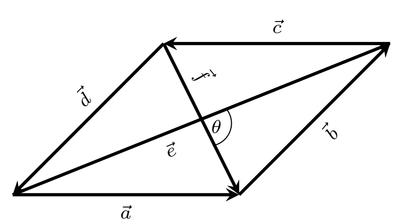
Ejercicio 34. ¿ Que condiciones sobre $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ nos aseguran que $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son los lados de un triángulo?.

Respuesta.- Para que $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ sean los lados de un triángulo, se debe cumplir que

$$\vec{a} < \vec{b} + \vec{c} \quad \text{y} \quad \vec{a} > \vec{b} - \vec{c}.$$

Ejercicio 35. Demostrar que las diagonales de un rombo son ortogonales entre si.

Demostración.- Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \in V_n$. De donde gráficamente se tiene:



Así,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{e} \circ \vec{f}}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|} \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left[\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{d} + \vec{a})}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right].$$

Luego, ya que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ forman un rombo. Es decir, un paralelogramo de lados iguales, entonces $\vec{d} = -\vec{b}$, por lo que:

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \circ (-\vec{b} + \vec{a})}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right].$$

Por las propiedades de producto interno y $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$,

$$\begin{aligned}
\theta &= \cos^{-1}\left[\frac{\vec{a}\circ(-\vec{b})+\vec{b}\circ(-\vec{b})+\vec{a}\circ\vec{a}+\vec{b}\circ\vec{a}}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right] \\
&= \cos^{-1}\left[\frac{-(\vec{a}\circ\vec{b})-(\vec{b}\circ\vec{b})+\vec{a}\circ\vec{a}+\vec{a}\circ\vec{b}}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right] \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\circ\vec{a}-\vec{b}\circ\vec{b}}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{0}{\|\vec{e}\|\|\vec{f}\|}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\vec{e}\perp\vec{f}.$$

Ejercicio 36. Demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados del paralelogramo.

Demostración.- Sean $\vec{a},\vec{b}\in V_n$. Mostraremos que,

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2+\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2+2\|\vec{b}\|^2.$$

Dado que $\|\vec{v}\|^2=\vec{v}\circ\vec{v}$, y por propiedades de producto interno o escalar. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}+\vec{b}\|^2+\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 &= \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}-\vec{b}\right) \\
&= \vec{a}\circ\vec{a}+\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{b}\circ\vec{a}+\vec{b}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{a}-\vec{a}\circ\vec{b}-\vec{b}\circ\vec{a}+\vec{b}\circ\vec{b} \\
&= 2\vec{a}\circ\vec{a}+2\vec{b}\circ\vec{b} \\
&= 2\|\vec{a}\|^2+2\|\vec{b}\|^2.
\end{aligned}$$

Ejercicio 37. Si las diagonales de un paralelogramo son ortogonales, entonces demostrar que el paralelogramo es un rombo.

Demostración.- Sean $\vec{a},\vec{b}\in V_n$. Debemos que encontrar que la longitud de los cuatro lados de un paralelogramo es igual. Es decir, demostraremos que

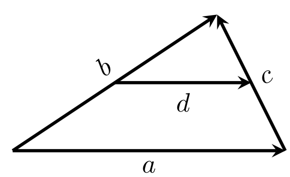
$$(a+b)\circ(a-b)=0 \quad\Rightarrow\quad \|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|.$$

Por las propiedades de producto interno o escalar y por el hecho de que $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \circ \vec{v}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \circ \left(\vec{a} - \vec{b}\right) &= 0 \\
\vec{a} \circ \left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{b} \circ \left(\vec{a} - \vec{b}\right) &= 0 \\
\vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} &= 0 \\
\|\vec{a}\|^2 - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{b} - \|\vec{b}\|^2 &= 0 \\
\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 &= 0 \\
\|\vec{a}\|^2 &= \|\vec{b}\|^2
\end{aligned}$$

Ejercicio 38. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Demostración.- Consideremos el siguiente gráfico. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$



de donde podemos deducir las siguientes ecuaciones:

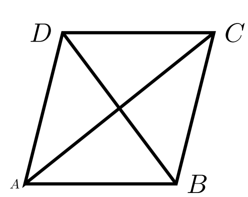
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - d &= 0 \\ a + \frac{c}{2} - d - \frac{b}{2} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{c}{2} &= \frac{b}{2} - a \\ \frac{c}{2} &= d + \frac{b}{2} - a \end{aligned} \right.$$

Entonces $a = 2d$ si y sólo si $a \parallel d$. Así tomando la norma nos queda:

$$\|a\| = \|2d\| \quad \Rightarrow \quad \|d\| = \frac{1}{2}\|a\|.$$

Ejercicio 39. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

Demostración.- Necesitamos mostrar que las dos diagonales se cortan en sus puntos medios mutuos. Dicho de otra manera, necesitamos mostrar que los puntos medios de AC y BD son, de hecho, el mismo punto.



Sea M_1 el punto medio entre AC y M_2 el punto medio entre BD. Demostraremos que $\vec{AM_1} = \vec{AM_2}$.
Sabemos que,

$$\vec{AM_1} = \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

Luego, necesitamos usar el hecho que $ABDC$ es un paralelogramo. De donde,

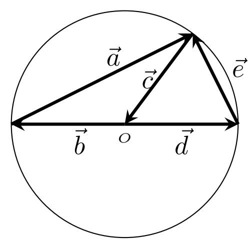
$$\vec{AB} = \vec{DC} \;\Rightarrow\; \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{DC}.$$

Usamos eso para escribir $\vec{AM_2}$ en términos de A, B, C, D.

$$\vec{AM_2} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{BD} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DC}\right) = \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{AM_1}.$$

Ejercicio 40. Mostrar que el triángulo cuyos vértices están en los extremos de un diámetro de una circunferencia y sobre la circunferencia es triángulo rectángulo.

Demostración.- Representamos la idea con la siguiente gráfica.



Donde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e} \in \mathbb{R}^n$ y O el centro de la circunferencia, por lo tanto los vectores $\vec{b}, \vec{d}, \vec{c}$ son iguales e inscritos en una semicircunferencia. Debemos demostrar que $\vec{a} \circ \vec{e} = 0$.

Sean

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}, \quad \vec{e} = \vec{c} + \vec{d} \quad \text{y} \quad \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = \|\vec{d}\|$$

Entonces por las propiedades de producto interno tenemos,

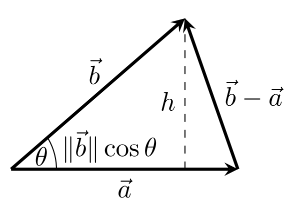
$$\vec{a} \circ \vec{e} = \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c} + \vec{d} = \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c} + \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{d} = \vec{c} \circ \vec{c} + \vec{c} \circ \vec{b} + \vec{c} \circ \vec{d} + \vec{b} \circ \vec{d}.$$

Ya que $x \circ x = \|x\|^2$ y $b = -d$, nos queda:

$$a \circ e = \|c\|^2 - c \circ d + c \circ d - \|d\|^2 = 0.$$

Ejercicio 41. Demostrar vectorialmente la ley de cosenos.

Demostración.- Supongamos que $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$ y,



Entonces por el teorema de Pitágoras se tiene

$$h^2 = |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}|\cos\theta\Big)^2 \qquad y \qquad |\vec{b}-\vec{a}|^2 = \Big(|\vec{b}|\cos\theta - |\vec{a}|\Big)^2 + h^2$$

de donde

$$\begin{aligned} \|\vec{b}-\vec{a}\|^2 &= \Big(\|\vec{b}\|\cos\theta - \|\vec{a}|\Big)^2 + \|\vec{b}\|^2 - \Big(\|\vec{b}\|\cos\theta\Big)^2 \\ &= \Big(\|\vec{b}\|\cos\theta\Big)^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta + \|\vec{a}|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \Big(\|\vec{b}\|\cos\theta\Big)^2 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\|\vec{b}-\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

Ejercicio 42. Hay cinco estudiantes en un grupo. Sus calificaciones a mitad del curso (sobre 100 pts) están dados por el vector $\mathbf{(73, 80, 91, 65, 84)}$ y el final por $\mathbf{(82, 79, 88, 70, 92)}$. Si la calificación final vale el doble que la del medio curso, encuentre un vector que indique las calificaciones totales de los estudiantes (como porcentaje).

Respuesta.- Sean $\vec{a} = (73, 80, 91, 65, 84)$ y $\vec{b} = (82, 79, 88, 70, 92)$. Ya que la nota final es dos veces la primera, entonces

$$NOTA = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \;\Rightarrow\; NOTA = (79, 79.33, 89, 68.33, 89.33).$$