

Espacios vectoriales

1.1 Espacios vectoriales

Definición
1.1

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) consta de lo siguiente:

1. Un cuerpo F de escalares;
2. un conjunto V de objetos llamados vectores;
3. una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores α, β de V un vector $\alpha + \beta$ de V , que se llama suma de α y β , de tal modo que:
 - (a) La adición es conmutativa, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
 - (b) la adición es asociativa, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
 - (c) existe un único vector 0 de V , llamado vector nulo tal que $\alpha + 0 = \alpha$, para todo α de V ;
 - (d) para cada vector α de V existe un vector $-\alpha$ de V , tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$;
4. una regla (u operación) llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar c de F y cada vector α de V a un vector $c\alpha$ en V , llamado producto de c y α , de tal modo que:
 - (a) $1\alpha = \alpha$ para todo α de V ;
 - (b) $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$;
 - (c) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$;
 - (d) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

Ejemplo El **espacio de n-tuplas**, F_n . Sea F cualquier cuerpo y sea V el conjunto de todos los n-tuplas $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de escalares x_i de F . Si $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ con y_i de F , la suma de α y β se define por

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (1.1)$$

El producto de un escalar c y el vector α se define por

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n). \quad (1.2)$$

Que esta adición vectorial y multiplicación escalar cumplen las condiciones (3) y (4) es fácil de verificar, usando las propiedades semejantes de la adición y multiplicación de elementos de F . ■

Ejemplo 1.2 El espacio de matrices $m \times n$, $F^{m \times n}$. Sea F cualquier cuerpo y sean m y n enteros positivos. Sea $F^{m \times n}$ el conjunto de todas las matrices $m \times n$ sobre el cuerpo F . La suma de dos vectores A y B en $F^{m \times n}$ se define por

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \quad (1.3)$$

El producto de un escalar c y de la matriz A se define por

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}. \quad (1.4)$$

Obsérvese que $F^{i \times n} = F^n$. ■

Ejemplo 1.3 El espacio de funciones de un conjunto en un cuerpo. Sea F cualquier cuerpo y sea S cualquier conjunto no vacío. Sea V el conjunto de todas las funciones de S en F . La suma de dos vectores f y g de V es el vector $f + g$; es decir, la función de S en F definida por

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s). \quad (1.5)$$

El producto del escalar c y la función f es la función cf definida por

$$(cf)(s) = cf(s). \quad (1.6)$$

Para este tercer ejemplo se indica cómo se puede verificar que las operaciones definidas satisfacen las condiciones (3) y (4). Para la adición vectorial:

(a) Como la adición en F es conmutativa,

$$f(s) + g(s) = g(s) + f(s)$$

para todo s de S , luego las funciones $f + g$ y $g + f$ son idénticas.

(b) Como la adición en F es asociativa,

$$f(s) + [g(s) + h(s)] = [f(s) + g(s)] + h(s)$$

para todo s , luego $f + (g + h)$ es la misma función que $(f + g) + h$.

(c) El único vector nulo es la función cero, que asigna a cada elemento de S el escalar 0 de F .

(d) Para todo f de V , $(-f)$ es la función dada por

$$(-f) = -f(s).$$

El lector encontrará fácil verificar que la multiplicación escalar satisface las condiciones de (4), razonando como se hizo para la adición vectorial. ■

Ejemplo 1.4 El espacio de las funciones polinomios sobre el cuerpo F . Sea F un cuerpo y sea V el conjunto de todas las funciones f de F en F definidas en la forma

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad (1.7)$$

donde c_0, c_1, \dots, c_n son escalares fijos de F (independiente de x). Una función de este tipo se llama **función polinomio sobre F** . Sean la adición y la multiplicación escalar definidas sobre en el ejemplo 3. Se debe observar que si f y g son funciones polinomios y c está en F , entonces $f + g$ y cf son también funciones polinomios. ■

Ejemplo 1.5 El cuerpo C de los números complejos puede considerarse como un espacio vectorial sobre el cuerpo R de los números reales. En forma más general, sea F el cuerpo de los números reales y sea V el conjunto de los n -tuples $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ donde x_1, \dots, x_n son números complejos. Se define la adición vectorial y la multiplicación escalar por (2.1) y (2-2), como en el ejemplo 1. De este modo se obtiene un espacio vectorial sobre el cuerpo R que es muy diferente del espacio C^n y del espacio R_n . ■

Hay unos pocos hechos simples que se desprenden, casi inmediatamente, de la definición de espacio vectorial, y procederemos a derivarlos. Si c es un escalar y 0 es el vector nulo, entonces por 3(c) y 4(c)

$$c0 = c(0 + 0) = c0 + c0.$$

Sumando $-(c0)$ y por 3(d), se obtiene

$$c0 = 0. \quad (1.8)$$

Análogamente, para el escalar 0 y cualquier vector α se tiene que

$$0\alpha = 0. \quad (1.9)$$

Si c es un escalar no nulo y α un vector tal que $c\alpha = 0$, entonces por (2-8), $c^{-1}(c\alpha) = 0$. Pero

$$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1\alpha = \alpha$$

luego, $\alpha = 0$. Así se ve que si c es un escalar y α un vector tal que $c\alpha = 0$, entonces c es el escalar cero o α es el vector nulo.

Si α es cualquier vector de V , entonces

$$0 = 0\alpha = (1 - 1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = \alpha + (-1)\alpha$$

de lo que se sigue que

$$(-1)\alpha = -\alpha. \quad (1.10)$$

Finalmente, las propiedades asociativa y conmutativa de la adición vectorial implican que la suma de varios vectores es independiente de cómo se combinen estos vectores y de cómo se asocien. Por ejemplo, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ son vectores de V , entonces

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)] + \alpha_4$$

y tal suma puede ser escrita, sin confusión,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$