Variables_aleatorias_continuas

Christian Limbert Paredes Aguilera

9/12/2021

Variables aleatorias continuas definición

Notemos que si X es una v.a. con función de distribución continua se tiene que $P(X = x_0) = F_X(x_0) - F(x_0^-) = 0$ por lo que no tiene sentido definir función de probabilidad

En general tendremos que $P(X < x_0) = P(X \leq x_0)$

Propiedades

Los sucesos del tipo $\{X \leq x\}$ y $\{X < x\}$ tendrán la misma probabilidad.

Dada una v.a. continua X se tiene que:

- $P(X \leq b) = P(X < b)$

  Demostración.- $P(X \leq b) = P(X < b) + P(X = b) = P(X < b)$

- $P(X < b) = P(X < a) + P(a < X < b)$

  Demostración.- Sea $\{X < a\} \cap \{a < X < b\} = \emptyset$ y $\{X < a\} \cup \{a < X < b\} = \{X < b\}$ entonces,

$$\begin{aligned} P(X \leq b) &= P\left(\{X < a\} \cup \{a < X < b\}\right) \\ &= P(X < a) + P(a < X < b) \end{aligned}$$

- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$

  Demostración.- Si reescribimos la igualdad dada nos queda,

$$P(X \leq b) = P(X < a) + P(a < X < b),$$

  de donde por la primera y segunda propiedad queda demostrada la proposición.

Propiedades de la función de distribución

Dada una variable aleatoria contina se tiene que:

- $F_X(b) = F_X(a) + P(a < X < b)$
- $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = FX_(b) - F_X(a)$

Función de densidad

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de densidad sobre $\mathbb{R}$ si cumple que

- $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- f es continua salvo a lo más en una cantidad finita de puntos sobre cada intervalo acotado de $\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$

Función de densidad de una variable aleatoria

Sea X una v.a. con función de distribución F_X. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de desidad tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Entonces X es una variable aleatoria continua y f_X es la densidad de v.a. X

Dominio de una variable aleatoria continua

El conjunto $D_X = \{x \in \mathbb{R} | f_X(x) > 0\}$ recibe el nombre de soporte de la variable eleatoria continua y se interpreta su conjunto de resultados posible

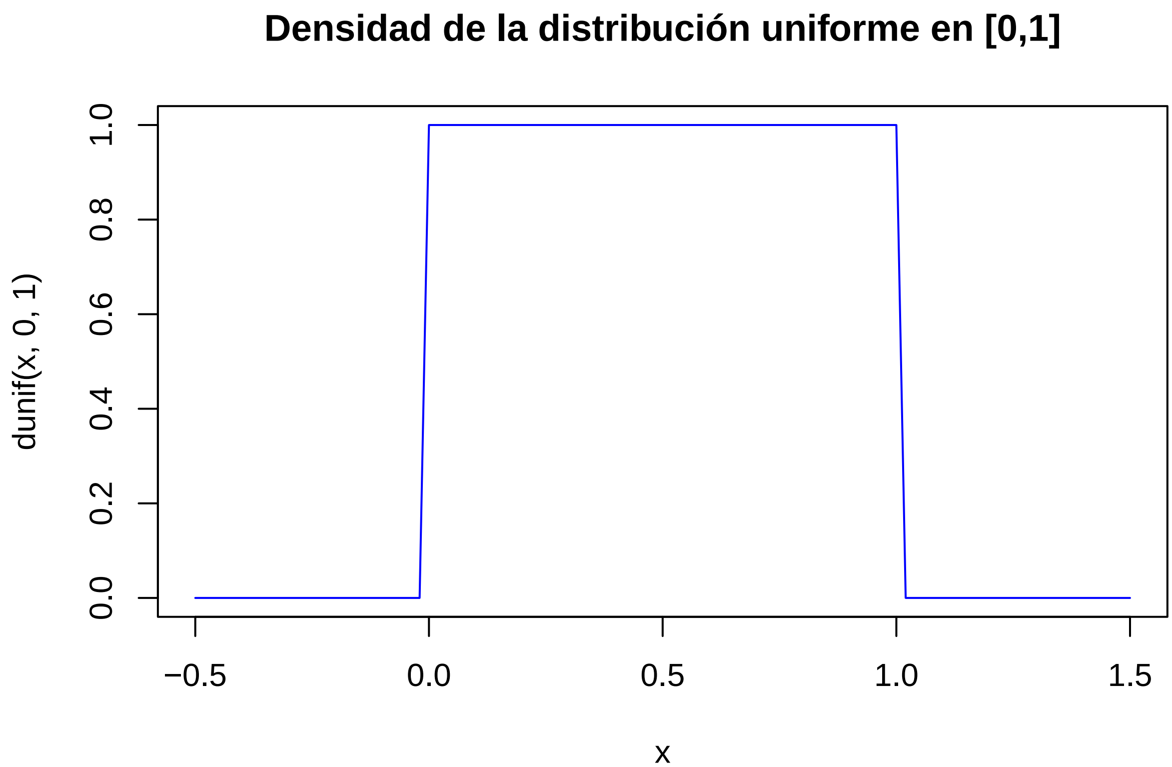
Densidad diana

$$f_X(x) \begin{cases} = & 0 & si & x \leq 0 \\ & 1 & si & 0 < x < 1 \\ & 0 & si & 1 \leq x \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrll} Si & x \leq 0 & entonces & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = 0 \\ Si & 0 \leq x \leq 1 & entonces & \displaystyle\int_{\infty}^{x} f_X(t)\, dx = \int_{0}^{x} 1\, dt = x \\ Si & x \geq 1 & entonces & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} F_X(t)\, dt = \int_{0}^{1} 1\, dt = 1 \end{array}$$

$$\text{Por lo tanto} \quad \int_{\infty}^{x} f_X(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

```r
curve(dunif(x,0,1),xlim = c(-0.5,1.5),col="blue",
      main="Densidad de la distribución uniforme en [0,1]")
```



Utilidad de la función de densidad

La función de densidad nos permite calcular diversas probabilidades

Propiedades

Sea X una v.a. continua con función de distribución F_X y de densidad f_X entonces

- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$
- Si A es un conjunto adecuado de $\mathbb{R}$ entonces

$$P(X \in A) = \int_A f(X)\,dx = \int_{A\cap D_X} f(x)\,dx$$

Propiedades de la función de densidad

Sea X una v.a. continua con función de distribución F_X y de densidad f_X entonces

- Si f_X es continua en un punto x, F_X es derivable en ese punto y $F_X'(x) = f_X(x)$
- $P(X = x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Esperanza y varianza para variables aleatorias continuas

Esperanza

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

Su $f(x)$ es una función de la variable X entonces:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

Varianza

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\, dx$$

Desviación típica

$$\sigma_X = +\sqrt{\sigma_X^2}$$

Propiedades

- $\sigma_X^2 \geq 0$
- $Var(cte) = E(cte^2) - (E(cte))^2 = cte^2 - cte^2 = 0$
- $Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \mu_X^2$
- El mínimo de $E\left[(X-C)^2\right]$ se alcanza cuando $C = E(X)$ y es $Var(X)$

Proposición

Sea X una v.a. continua con $E(X) = \mu_X$ y $Var(X) = \sigma_X^2$ sea $Y = a + bX$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ es una nueva v.a. continua obtenida mediante una transformación lineal de X. Se verifica las mismas propiedades que en el caso discreto:

- $E(Y) = E(a+bX) = a + bE(X)$
- $Var(Y) = Var(a+bX) = b^2 Var(X)$

  Demostración.-

  $$Var(a+bX) = E(b^2X^2) - [E(bX)]^2 = b^2E(X) - b^2\left[E(X)\right]^2 = b^2\left[E(X^2) - E^2(X)\right] = b^2 Var(X)$$

- $\sigma_Y = |b|\sigma_X$

  Demostración.-
- $Z = \dfrac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ es una transformación lineal de X de forma que

  $$E(Z) = 0 \qquad y \qquad Var(Z) = 1$$

  Demostración.- Para la esperanza:

  $$E(Z) = E\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right] = \frac{E(X)-\mu_X}{\sigma_X} = \frac{\mu_X-\mu_X}{\sigma_X} = 0$$

  Luego para la varianza se tiene:

  $$Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right) = Var\left(\frac{1}{\sigma_X}X - \frac{\mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1^2}{\sigma_X^2}Var(X) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1$$

Transformaciones de variables aleatorias

Propiedades

Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es f_X. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación estrictamente monótona y derivable tal que $h^{'}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $Y = h(X)$ la transformación de X por h. Entonces Y es una v.a. continua con función de densidad

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|h^{'}(x)|}\bigg|_{x=h^{-1}(y)}$$

densidades de una transformación de una v.a. continua

Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es f_X. Sea

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

una aplicación, no necesariamente monótona tal que:

- Sea derivable con derivada no nula.
- La ecuación $h(x) = y$ tiene un número finito de soluciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entonces

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_X(x)}{|h^{'}(x)|}\bigg|_{x=x_k}$$

Desigualdad de Markov

Sea X una v.a. positiva con $E(X)$ finita. Entonces

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \text{ para todo } a > 0.$$

Demostración.- Si X es continua y sólo toma valores positivos

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x f_X(x)\, dx \\
&= \int_{0}^{a} x f_X(x)\, dx + \int_{a}^{\infty} x f_X(x)\, dx \\
&\geq \int_{a}^{\infty} x f_X(x)\, dx \\
&\geq a \int_{a}^{\infty} f_X(x)\, dx \\
&= a \cdot P(X \geq a)
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Corolario

Sea X una v.a. con $E(X)$ finita entonces para todo $a > 0$

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
P(|X| \geq a) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{a} |x| f_X(x)\, dx + \int_{a}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx \\
&\geq \int_{a}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx \\
&\leq \int_{a}^{\infty} \frac{|x|}{a} f_X(x)\, dx \\
&\leq \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx \\
&= \frac{E(|X|)}{a}
\end{aligned}$$

Desigualdad de Chebychev

Sea X una v.a. con $E(X) = \mu$ y $Var = \sigma^2$ entonces para todo $a > 0$

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Demostración.-; Aplicamos la consecuencia de la desigualdad de Markov a la v.a. no negativa

$$Y^2 = (X - \mu)^2$$

entonces

$$P(Y^2 \geq a^2) \leq \frac{E(Y^2)}{a^2} = \frac{E\left[(X-\mu)^2\right]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Por otra parte

$$P(Y^2 \geq a^2) = P(|Y| \geq a) = P(|X - \mu| \geq a)$$

de donde

$$P(|X - \mu| \geq a) = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Si substituimos a por $a \cdot \sigma$ en la desigualdad de Chebychev nos queda

$$P(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(a\sigma)^2} = \frac{1}{a^2}$$

La desigualdad de Chebychev también se puede escribir de al menos dos maneras más:

$$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}$$

y tomando como $a = k\sigma$

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$