1

Algunas aplicaciones de la integración

1.1. Aplicación de la integración al concepto del trabajo

Propiedad .1 (Propiedades fundamentales del trabajo) *Designemos con $W_a(f)$ el trabajo realizado por una función fuerza f al mover una partícula desde a hasta b. Entonces el trabajo tiene las siguientes propiedades:*

1. *Propiedad aditiva. Si $a < c < b$. Entonces $W_a^c(f) + W_c^b(f)$.*
2. *Propiedad monótona. Si $f \leq g$ en $[a, b]$, entonces $W_a^b(f) \leq W_a^b(g)$. Esto es una mayor fuerza realiza un mayor trabajo.*
3. *Fórmula elemental. Si f es constante, $f(x) = c$ para todo x in el intervalo abierto (a, b), entones $W_a^b(f) = cdot(b - a)$.*

La propiedad aditiva puede extenderse por inducción para cualquier número infinito del intervalo. Esto es, si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, tenemos,

$$W_a^b(f) = \sum_{k=1}^{n} W_k$$

Donde W_k es el trabajo realizado por f desde x_{k-1} a x_k. En particular, si la fuerza es una función escalonada s que toma un valor constante s_k en el intervalo abierto $(x_{k-1} - x_k)$ la propiedad 3 establece que $W_k = s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$, con lo que

$$W_a^b(s) = \sum_{k=0} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b s(x)\, dx$$

Así pues, para funciones escalonadas, el trabajo se expresa como una integral. Es fácil demostrar que esto es cierto en casos más generales.

TEOREMA 1.1