CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por FODE

Índice general

1

Funciones

Definición 1.1 *El conjunto de los números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de* ***dominio*** *de la función.*

Definición 1.2 *Si* f *y* g *son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función* $f+g$ *denominada* ***suma*** *de* $f+g$ *mediante la ecuación:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los x *que están a la vez en el dominio de* f *y en el dominio de* g, *es decir:*

$$\textit{dominio } (f+g) = \textit{dominio } f \ \cap \ \textit{dominio } g$$

Definición 1.3 *El dominio de* $f \cdot g$ *es dominio* $f \cap$ *dominio* g

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Definición 1.4 *Se expresa por dominio* $f \cap$ *dominio* $g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definición 1.5 (Función constante)

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

TEOREMA 1.1 $(f+g)+h = f+(g+h)$

Demostración.- ***La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio.*** *Obsérvese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:*

$$\begin{array}{rcl} [(f+g)+h](x) & = & (f+g)(x)+h(x) \\ & = & [f(x)+g(x)]+h(x) \\ & & \\ & y & \\ & & \\ [f+(g+h)](x) & = & f(x)+(g+h)(x) \\ & = & f(x)+[g(x)+h(x)] \end{array}$$

Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de $(f+g)+h$ *y el de* $f+(g+h)$ *es evidentemente dominio* $f \cap$ *dominio* $g \cap$ *dominio* h. *Nosotros escribimos, naturalmente* $f+g+h$ *por* $(f+g)+h = f+(g+h)$

TEOREMA 1.2 *Es igual fácil demostrar que* $(f \cdot g) \cdot g = f \cdot (g \cdot h)$ *y ésta función se designa por* $f \cdot g \cdot h$. *Las ecuaciones* $f+g = g+f \quad y \quad f \cdot g = g \cdot f$ *no deben presentar ninguna dificultad.*

Definición 1.6 (Composición de función)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ *es* $\{\ x : x$ *está en el dominio de* $g \quad y \quad g(x)$ *está en el dominio de* $f\ \}$

$$D_{f \circ g} = \{x \ / \ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

Propiedad 1.1 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ *La demostración es una trivalidad.*

Definición 1.7 *Una* ***función*** *es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si* $(a,b) \quad y \quad (a,c)$ *pertenecen ambos a la colección, entonces* $b = c$; *en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.*

Definición 1.8 *Si* f *es una función, el* ***dominio*** *de* f *es el conjunto de todos los* a *para los que existe algún* b *tal que* (a,b) *está en* f. *Si* a *está en el dominio de* f, *se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número* b *único tal que* (a,b) *está en* f. *Este* b *único se designa por* $f(a)$.

1.1. Problemas

1. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Interpretar lo siguiente:

(i) $f(f(x))$ (¿Para que x tiene sentido?)

Respuesta.- Sea $f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ entonces $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$, por lo tanto $\dfrac{1-x}{x+2}$ de donde llegamos a la conclusión de que x se cumple para todo número real de 1 y -2

(ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$ por lo tanto se cumple para todo $x \neq -1, 0$

(iii) $f(cx)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+cx}$ donde se cumple para todo $x \neq -1$ si $c \neq 0$

(iv) $f(x+y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x+y}$ donde se cumple para todo $x+y \neq -1$

(v) $f(x)+f(y)$

Respuesta.- $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$ siempre y cuando $x \neq -1$ y $y \neq -1$

(vi) ¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?

Respuesta.- Para todo c ya que $f(c \cdot 0) = f(0)$

(vii) ¿Para que números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos x?

Respuesta.- Solamente $c = 1$ ya que $f(x) = f(cx)$ implica que $x = cx$, y esto debe cumplirse por lo menos para un $x \geq 1$

2. Sea $g(x) = x^2$ y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ } racional \\ 1, & x \text{ } irracional \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?

Respuesta-. Se cumple para $y \geq 0$ si y es racional, o para todo $y \geq 1$

(ii) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?

Respuesta-. Para $-1 \leq y \leq 1$ siempre que y sea racional y para todo y tal que $|y| \leq 1$

(iii) ¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?

Respuesta-.

$$g(h(z)) = \begin{cases} 0, & z^2 \; racional \\ 1, & z^2 \; irracional \end{cases}$$

Por lo tanto el resultado es 0

(iv) ¿Para cuáles w es $g(w) \leq w$?

Respuesta-. Para todo w tal que $0 \leq w \leq 1$

(v) ¿Para cuáles ϵ es $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$?

Respuesta-. Para $-1, 0, 1$

3. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Respuesta.- Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene $1 - x^2 \geq 0$ entonces $x^2 \leq 1$ por lo tanto el dominio son todos los x tal que $|x| \leq 1$

(ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Respuesta.- Se observa claramente que el dominio es $-1 \leq x \leq 1$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

Respuesta.- Operando un poco tenemos

$$f(x) = \frac{2x - 3}{(x-1)(x-2)},$$

sabemos que el denominador no puede ser 0 por lo tanto el $D_f = \{x \;/\; x \neq 1, \; x \neq 2\}$

(iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Respuesta.- Claramente notamos que el dominio de f son -1 y 1 ya que si se toma otros números daría un número imaginario.

(v) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$

Respuesta.- Notamos que no se cumple para ningún x ya que si $0 \leq x \leq 1$ entonces no se cumple para $\sqrt{x-2}$ y si $x \geq 2$ no se cumple para $\sqrt{1-x}$

4. Sean $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$ y $s(x) = senx$. Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.

(i) $(S \circ P)(y)$

Respuesta.- Por definición se tiene que $(S \circ P)(y) = S(P(y))$ entonces $S(2^y) = 2^{2y}$ siempre y cuando $D_{S \circ P} = \{y/y \in D_P \wedge P(y) \in D_S\}$

(ii) $(S \circ s)(y)$

Respuesta.- Por definición tenemos que $(S \circ s)(y) = S(s(y))$ entonces $S(\operatorname{sen} y) = \operatorname{sen}^2 y$ siempre y cuando $D_{S \circ s} = \{y/y \in D_s \wedge S(y) \in D_S\}$

(iii) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Respuesta.- $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S((P \circ s)(t)) + s(P(t)) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\operatorname{sen} t)) + s(2^t) = S(2^{\operatorname{sen} t}) + \operatorname{sen} 2^t = 2^{2 \operatorname{sen} t} + \operatorname{sen} 2^t$

(iv) $s(t^3)$

Respuesta.- $s(t^3) = \operatorname{sen} t^3$

5. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s usando solamente $+, \cdot, \circ$

(i) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

Respuesta.- Claramente vemos que $P \circ s$

(ii) $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$

Respuesta.- $s \circ P$

(iii) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

Respuesta.- $s \circ S$

(iv) $f(x) = \operatorname{sen} x$

Respuesta.- $S \circ s$

(v) $f(t) = 2^{2t}$

Respuesta.- $P \circ P$

(vi) $f(u) = \operatorname{sen}(2^u + 2^{u^2})$

Respuesta.- $s \circ (P + P \circ S)$

(vii) $f(y) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2^{2^{2^{\operatorname{sen} y}}})))$

Respuesta.- $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$

(viii) $f(a) = 2^{\operatorname{sen}^2 a} + \operatorname{sen}(a^2) + 2^{sen(a^2 + \operatorname{sen} a)}$

Respuesta.- $P \circ S \circ s + s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

6. **(a)** Si $x_1, ..., x_n$ son números distintos, encontrar una función polinómica f_i de grado $n-1$ que tome el valor 1 en x_i y 0 en x_j para $j \neq i$. Indicación: El producto de todos los $(x - x_j)$ para $j \neq i$ es 0 en x_j si $j \neq i$. Este producto es designado generalmente por

$$\prod_{j=1_{j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

donde el símbolo $\prod$ (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que $\sum$ para sumas.

Respuesta.- Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija n y elegir un conjunto de distintas $x_1, x_2, ..., x_n$. Por ejemplo supongamos que elegimos $n = 3$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$, pero $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$. Es decir, F_1 es un cuadrático que tiene ceros en $x = 2$ y $x = 3$, pero es igual a 1 en $x = 1$. Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x-2)(x-3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante a. Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con $x = 1$, debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x-2)(x-3) = 2a,$$

por lo tanto $a = 1/2$ y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio $f_2(x)$ tal que $f_2(2) = 1$ con raíces en $x = 1, 3$ tendríamos que resolver la ecuación $1 = a(2-1)(2-3)$, lo que da $a = -1$ por lo tanto $f_2(x) = -(x-1)(x-3)$

Ahora veamos el caso general. El polinomio $f_i(x)$ satisface $f_i(x_i)$ y $f_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$, entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j\neq i}(x - x_j)$$

Para alguna constante a. Para encontrar esta constante, aplicamos $x = x_1$:

$$f_i(x_i) = 1 = a \prod_{j \neq i} (x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

(b) Encontrar ahora una función polinómica de grado $n - 1$ tal que $f(x_1) = a_1$, donde $a_1, ..., a_n$ son números dados. (Utilícense las Funciones f_1 de la parte (a).) La fórmula que se obtenga es la llamada **Fórmula de interpolación de Lagrange**

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i f_i(x)$$

entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

7. (a) Demostrar que para cualquier función polinómica f y cualquier número a existe función polinómica g y un número b tales que $f(x) = (x - a)g(x) + b$ para todo x. (La idea es esencialmente dividir $f(x)$ por $(x - a)$ mediante la división larga hasta encontrar un resto constante.)
Demostración.- Si el grado de f es 1, entonces f es de la forma

$$f(x) = cx + d = cx + d + ac - ac = c(x - a) + (d + ac)$$

de tal modo que $g(x) = c$ y $b = d + ac$. Por inducción supongamos que el resultado es válido para polinomios de grado $\leq k$. Si f tiene grado $k + 1$, entonces f tiene la forma

$$f(x) = a_{k+1} x^{k+1} + ... + a_1 x + a_0$$

luego para grados $\leq k$ se tiene

$$f(x) - a_{k+1} x^{k+1} = (x - a)g(x) + b$$

así

$$f(x) = (x - a) \left[g(x) + a_{k+1} (x - a)^k \right] + b$$

(b) Demostrar que si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x - a)g(x)$ para alguna función polinómica g. (La reciproca es evidente)

Demostración.- Por la parte (a), podemos poner que $f(x) = (x - a)g(x) + b$, entonces

$$0 = f(a) = (a - a)g(a) + b = b$$

de modo que $f(x) = (x-a)g(x)$

(c) Demostrar que si f es una función polinómica de grado n, entonces f tiene a lo sumo n raíces, es decir, existen a lo sumo n números a tales que $f(a) = 0$

Demostración.- Supóngase que f tiene n raíces $a_1, ..., a_n$. Entonces según la parte (b) podemos poner $f(x)(x-a)g_1(x)$ donde el grado de $g_1(x)$ es $n-1$. Pero

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)g_1(a_2)$$

de modo que $g_1(a_2) = 0$, ya que $a_2 \neq a_1$. Podemos pues escribir

$$f(x)(x-a_2)g_2(x),$$

donde el grado de g_2 es $n-2$. Prosiguiendo de esta manera, obtenemos que

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2) \cdot ... \cdot (x-a_n)c$$

para algún número $c \neq 0$. Está claro que $f(a) \neq 0$ si $a \neq a_1, ..., a_n$. Así pues, f puede tener a lo sumo n raíces.

(d) Demostrar que para todo n existe una función polinómica de grado n con raíces. Si n es par, encontrar una función polinómica de grado n sin raíces, y si n es impar, encontrar una con una sola raíz

Demostración.- Si $f(x) = (x-1)(x-2) \cdot ... \cdot (x-n)$, entonces f tiene n raíces. Si n es par, entonces $f(x) = x^n + 1$ no tiene raíces. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ tiene una raíz única, que es 0.

8. ¿Para qué números a, b, c y d la función

$$f(x) = \frac{ax+d}{cx+b}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo x?

Respuesta.- Si

$$x = f(f(x)) = \frac{a\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+d}$$

para todo x, entonces

$$x = \frac{a^2x + ab + bcx + bd}{acx + bc + cdx + d^2}$$

y por lo tanto

$$(ac+cd)\,x^2 + \left(d^2 - a^2\right)x - ab - bd = 0$$

para todo x, de modo que

$$\begin{array}{rcl} ac + cd & = & 0 \\ ab + bd & = & 0 \\ d^2 - a^2 & = & 0 \end{array}$$

Se sigue que $a = d$ ó $a = -d$. Una posibilidad es $a = d = 0$, en cuyo caso $f(x) = \dfrac{b}{cx}$ que satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq 0$. Si $a = d \neq 0$, entonces $b = c = 0$ con lo que $f(x) = x$. La tercera posibilidad es $a + d = 0$, de modo que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, la cual satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq \dfrac{a}{c}$ la cual satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq \dfrac{a}{c}$. Estrictamente hablando, podemos añadir la condición $f(x) \neq \dfrac{a}{c}$ para $x \neq \dfrac{a}{c}$, lo que significa que

$$\frac{ax+b}{cx-a} \neq \frac{a}{c}, \text{ ó } a^2 + bc \neq 0.$$

9. **(a)** Si A es un conjunto cualquiera de números reales, defínase una función C_A como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & si \text{ x } está\ en \text{ A} \\ 0, & si \text{ x } no\ está\ en \text{ A} \end{cases}$$

Encuéntrese expresiones para $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ y $C_{\mathbb{R}-A}$, en términos de C_A y C_B.

Respuesta.- Según la definición de teoría de conjunto tenemos,

$$\begin{array}{rcl} C_{A\cap B} & = & C_A \cdot C_B \\ C_{A\cup B} & = & C_A + C_B - C_A \cdot C_B \\ C_{\mathbb{R}-A} & = & 1 - C_A \end{array}$$

(b) Supóngase que f es una función tal que $f(x) = 0$ o 1 para todo x. Demostrar que existe un conjunto A tal que $f = C_A$

Demostración.- Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$, entonces $f = C_A$.

(c) Demostrar que $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A

Demostración.- Sea $f = f^2$, entonces para cada real x, $f(x) = f[f(x)]^2$, así $f(x) = 0$ó $f(x) = 1$, luego por la parte b), $f = C_A$ para algún A.
Por otro lado sea $f = C_A$ para algún A. Entonces si $x \in A$, $f(x) = 1 = 1^2 = f(x)^2$, mientras si $x \notin A$, $f(x) = 0 = 0^2 = f(x)^2$, así en cualquier caso $f(x) = [f(x)]^2$ y $f = f^2$

10. **(a)** ¿Para qué funciones f existe una función g tal que $f = g^2$?

Respuesta.- Debido a que algún número elevado al cuadrado siempre será no negativo podemos afirmar que las funciones f satisfacen a todo x tal que $f(x) \geq 0$

(b) ¿Para qué función f existe una función g tal que $f = 1/g$?

Respuesta.- Dado a que un número divido entre cero es indeterminado se ve claramente que satisfacen a todo x tal que $f(x) \neq 0$

(c) ¿Para qué funciones b y c podemos encontrar una función x tal que

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

para todos los números t?

Respuesta.- Por teorema se observa que para las funciones b y c que satisfacen $(b(t))^2 - 4c(t) \geq 0$ para todo t

(d) ¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones a y b si ha de existir una función x tal que

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

para todos los números t? ¿Cuántas funciones x de éstas existirán?

Respuesta.- Es facil notar que $b(t)$ tiene que ser igual a 0 siempre que $a(t) = 0$. Si $a(t) \neq 0$ para todo t, entonces existe una función única con esta condición, que es $x(t) = a(t)/b(t)$. Si $a(t) = 0$ para algún t, entonces puede elegirse arbitrariamente $x(t)$, de modo que existen infinitas funciones que satisfacen la condición.

11. **(a)** Supóngase que H es una función e y un número tal que $H(H(y)) = y$. ¿Cuál es el valor de

$$H(H(H...(H(y))))?$$

Respuesta.- Si aplicamos la hipótesis, tendremos que aplicar 78 veces la función, luego 76 y así, hasta llegar a 2, donde la función sera $H(H(y))$, y una vez más por hipótesis tenemos como resultado y.

(b) La misma pregunta sustituyendo 80 por 81

Respuesta.- Sea $H(H(y))$ la $78ava$ vez de la función, entonces la $81ava$ vez será $H(H(H(y))$, por lo tanto queda como resultado $H(y)$.

(c) La misma pregunta si $H(H(y)) = H(y)$

Respuesta.- Análogamente a la parte a) si la $80ava$ vez es y entonces por hipótesis nos queda $H(y)$.

(d) Encuéntrese una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todos los números x y tal que $H(1) = 36$, $H(2) = \dfrac{\pi}{3}$, $H(13) = 47$, $H(36)36$, $H(\pi/3)\dfrac{\pi}{3}$, $H(47) = 47$

Respuesta.- Dar a $H(l)$, $H(2)$, $H(13)$, $H(36)$, $H(\pi/3)$, y $H(47)$ los valores especificados y hágase $H(x) = 0$ para $x \neq 1, 2, 13, 36, \pi/3, 47$. Al ser, en particular, $H(0) = 0$, la condición $H(H(x)) = H(x)$ se cumple para todo x.

(e) Encontrar una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todo x y tal que $H(1) = 7$, $H(17) = 18$

Respuesta.- Hágase $H(1) = 7$, $H(7) = 7$, $H(17) = 18$, $H(18) = 18$, y $H(x) = 0$ para $x \neq l, 7, 17, 18$.

12. Una función f es par si $f(x) = f(-x)$, e impar si $f(x) = -f(-x)$. Por ejemplo, f es par si $f(x) = x^2$ ó $f(x) = |x|$ ó $f(x) = \cos x$, mientras que f es impar si $f(x) = x$ ó $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(a) Determinar si $f + g$ es par, impar o no necesariamente ninguna de las dos cosas, en los cuatro casos obtenidos al tomar f par o impar y g par o impar. (Las soluciones pueden ser convenientemente dispuestas en una tabla 2 x 2)

Respuesta.- Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$ entonces $f(-x) + g(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x) + g(x)$ por lo tanto par y par es par.
Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$ entonces $-f(-x) + (-g(-x)) = -(-x) + [-x(-x)] = x + x = f(x) + g(x)$, por lo tanto impar e impar es impar.
Los otros dos últimos se prueba fácilmente y se llega a la conclusión de que ni uno ni lo otro.

	Par	**Par**
Par	Par	Ninguno
Par	Ninguno	Par

(b) Hágase lo mismo para $f \cdot g$

Respuesta.- Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$, entonces $f(-x) \cdot g(-x) = x^2 \cdot |x| = f(x) \cdot g(x)$, por lo tanto se cumple para par y par.
Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$, entonces $-f(-x) \cdot -g(-x) = -(-x) \cdot -(-x) = x \cdot x = f(x) \cdot g(x)$, por lo tanto impar impar da impar
Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$, podemos crear otra función llamada h que contiene a $x^2 \cdot x$ por lo tanto $h(x) = x^3 = -(-x)^2$ y así demostramos que par e impar es impar.
De igual forma al anterior se puede probar que impar y par es impar.

	Par	**Par**
Par	Par	Impar
Par	Impar	Par

(c) Hágase lo mismo para $f \circ g$

Respuesta.- Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x$, luego $h(x) = (f \circ g)(x)$ entonces $h(x) = x$ luego $-f(-x) = x$, por lo tanto impar e impar da impar.
De similar manera se puede encontrar para los demás problemas y queda:

	Par	**Par**
Par	Par	Par
Par	Par	Impar

(d) Demostrar que para toda función par f puede escribirse $f(x) = g(|x|)$, para una infinidad de funciones g.

Demostración.- Sea $g(x) = f(x)$ sabemos que f es par si $f(x) = f(-x)$, de donde $g(x) = f(-x)$, luego por definición de valor absoluto se tiene $g(|x|) = f(|-x|)$, y por lo tanto $f(x) = g(|x|)$

13. **(a)** Demostrar que para toda función f con dominio $\mathbf{R}$ puede ser puesta en la forma $f = E + O$, con E par y O impar.

Demostración.- Por la parte (b) y resolviendo en $E(x)$ y $O(x)$ se tiene

$$E(x)\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad O(x)\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

(b) Demuéstrese que esta manera de expresar f es única. (Si se intenta resolver primero la parte (b) despejando E y O, se encontrará probablemente la solución a la parte (a))

Demostración.- Si $f = E + O$, siendo E par y O impar, entonces

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

$$f(-x) = E(x) - O(x)$$

14. Si f es una función cualquiera, definir una nueva función $|f|$ mediante $|f|(x) = |f(x)|$. Si f y g son funciones, definir dos nuevas funciones, $max(f,g)$ y $min(f,g)$ mediante

$$max(f,g)(x) = max(f(x), g(x)),$$

$$min(f,g)(x) = min(f(x), g(x))$$

Encontrar una expresión para $max(f,g)$ y $min(f,g)$ en términos de $||$.

Respuesta.- Por problema 1,13 se tiene que

$$max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2};$$

$$min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

15. **(a)** Demostrar que $f = max(f,0) + min(f,0)$. Esta manera particular de escribir f es bastante usada; las funciones $max(f,0)$ y $min(f,0)$ se llaman respectivamente parte positiva y parte negativa de f

Demostración.- Esta proposición mostrará que se puede dividir una función en sus partes no negativas y no positivas. Es decir para todo los elementos x de algún dominio, es cierto que el valor de la función f en un punto x es igual a la suma dada, que consiste en la parte no negativa de $max(f(x),0)$ y la parte no positiva de f, $min(f(x),0)$.
Para probarlo, lo dividiremos en dos casos. Sabemos que ó $f(x) \geq 0$ ó $f(x) \leq 0$. Si $f(x) \geq 0$ entonces

$max(f(x),0) = f(x)$ y $min(f(x),0) = 0$ por lo que nuestra ecuación se reduce a $f(x) = f(x) + 0$. Por otro lado si $f(x) \leq 0$, entonces $max(f(x),0) = 0$ y $min(f(x),0) = f(x)$, por lo que nuestra ecuación se reduce a $f(x) = 0 + f(x)$.
En cualquier caso, nuestro lado derecho se reduce a $f(x)$ y sabemos que al menos uno de estos dos casos es verdadero; por lo tanto concluimos que $\forall x, f(x) = max(f(x),0) + min(f(x),0)$ ó $f = max(f,0) + min(f,0)$

(b) Una función f se dice que es no negativa si $f(x) \geq 0$ para todo x. Demostrar que para cualquier función f puede ponerse $f = g - h$ de infinitas maneras con g y h no negativas. (La manera corriente es $g = max(f,0)$ y $h = -min(f,0)$. Cualquier número puede ciertamente expresarse de infinitas maneras como diferencia de dos números no negativos.)

Demostración.- Comenzamos con la observación de que, para cualquier número real no negativo r, hay infinitos números reales no negativos s, t tales que

$$r = s - t$$

De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $s_n = 2r + n$ y $t_n = r + n$. Entonces, dado que $r \geq 0$, tanto s_n como t_n son no negativos. Además,

$$s_n = t_n = 2r + n - r - n = r$$

Ahora, para cada número real x, tenemos que $f(x) \geq 0$. Por lo tanto, a partir de la observación anterior, vemos que hay infinitos números reales no negativos s_x y t_x tales que

$$f(x) = s_x - t_x$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Así que definimos funciones no negativas g y h como sigue

$$g(x) = s_x \;\; y \;\; h(x) = t_x$$

. Entonces hemos demostrado que hay infinitas opciones de tales funciones. Además, tenemos que

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

. Por lo tanto, hemos demostrado que hay infinitas funciones no negativas g y h tales que

$$f = g - h$$

16. Supongase que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y.

(a) Demostrar que $f(x_1, +... + x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n)$

Demostración.- El resultado se cumple para $n = 1$, $f(x_1) = f(x_1)$. Luego si $f(x_1 + ... + x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n)$ para todo $x_1, ..., x_n$, entonces

$$\begin{array}{rcll} f(x_1 + ... + x_{n+1}) & = & f([x_1 + ... + x_n] + x_{n+1}) & \\ & = & f(x_1 + ... + x_n) + f(x_{n+1}) & \text{por hipótesis} \\ & = & f(x_1) + ... + f(n) + f(x_{n+1}) & \end{array}$$

(b) Demostrar que existe algún número c tal que $f(x) = cx$ para todos los números racionales x (en este punto no intentamos decir nada acerca de $f(x)$ cuando x es irracional). Indicación: Piénsese primero en cómo debe ser c. Demostrar luego que $f(x) = cx$, primero cuando x es un entero, después cuando

x es el reciproco de un entero, y finalmente para todo racional x.

Demostración.- Sea $c = f(1)$. Luego para cualquier número natural n y el inciso (a),

$$f(n) = f(1 + ... + 1) = f(1) + ... + f(1) = n \cdot f(1) = cn \quad (1)$$

Al ser

$$f(x) + f(0) = f(x + 0) = f(x),$$

entonces $f(0) = 0$. Ahora, puesto que

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0,$$

resulta que $f(-x) = -f(x)$. En particular, para cualquier número natural n y por (1),

$$f(-n) = -f(n) = -cn = c \cdot (-n)$$

Además

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = c$$

de modo que,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n},$$

y en consecuencia

$$f\left(\frac{1}{-n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) = -c \cdot \frac{1}{n} = c\left(\frac{1}{n}\right)$$

Por último, cualquier número racional puede escribirse en la forma m/n, siendo m un número natural y n un entero;

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right) = mc \cdot \frac{1}{n} = c \cdot \frac{m}{n}$$

17. Si $f(x) = 0$ para todo x, entonces f satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y también $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo x e y. Supóngase ahora que f satisface estas dos propiedades, pero que $f(x)$ no es siempre 0. Demostrar que

(a) Demostrar que $f(1) = 1$

Demostración.- Al ser $f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) \cdot f(1)$ y $f(a) \neq 0$ para algún a, resulta ser $f(1) = 1$

(b) Demostrar que $f(x) = x$ si x es racional

Demostración.- Por el problema 16, $f(x) = f(1) \cdot x = x$ para todo número racional x.

(c) Demostrar que $f(x) > 0$ si $x > 0$. (Esta parte es artificiosa, pero habiendo puesto atención a las observaciones filosóficas que van con los problemas de los dos últimos capítulos, se sabrá lo que hacer.)

Demostración.- Si $c > 0$ entonces $c = d^2$ para algún d, de modo que $f(c) = f(d^2) = (f(d))^2 \geq 0$. Por otro lado, no podemos tener $f(c) = 0$, ya que esto implicaría que

$$f(a) = f\left(c \cdot \frac{a}{c}\right) = f(c) \cdot f\left(\frac{a}{c}\right) = 0 \qquad \textit{para todo } a$$

(d) Demostrar que $f(x) > f(y)$ si $x > y$

Demostración.- Si $x > y$, entonces $x - y > 0$, luego por la parte (c) tenemos que $f(x) - f(y) > 0$.

(e) Demostrar que $f(x) = x$ para todo x. Indicación: Hágase uso del hecho de que entre dos números calesquiera existe un número racional

Demostración.- Sea $f(x) > x$ para algún x. Elíjase un número racional r con $x < r < f(x)$. Entonces, según las partes (b) y (d),

$$f(x) < f(r) = r < f(x),$$

lo cual constituye una contradicción. Análogamente, es imposible que $f(x) < x$ ya que si $f(x) < r < x$ entonces

$$f(x) < r = f(r) < f(x).$$

18. ¿Qué condiciones precisas deben satisfacer f, g, h y k para que $f(x)g(y) = h(x)k(y)$ para todo x e y?

Respuesta.- Se satisface la ecuación si $f = 0$ ó $g = 0$ y $h = 0$ ó $k = 0$. De no ocurrir esto, existirá algún x con $f(x) \neq 0$ y algún y con $g(y) \neq 0$, entonces $0 \neq ff(x)g(y) = h(x)k(y)$, de modo que también se tendrá $h(x) \neq 0$ y $k(y) \neq 0$. Haciendo $\alpha = h(x)/f(x)$, tenemos también $h(x^{'} = \alpha f(x^{'}$ para todo $x^{'}$ para todo $x^{'}$. Tenemos pues. que $g = \alpha k$ y $h = \alpha f$ para cierto número $\alpha = 0$.

19. **(a)** Demostrar que no existen funciones f y g con alguna de las propiedades siguientes:

(i) $f(x) + g(y) = xy$ para todo x e y.

Demostración.- Si $f(x) + g(y) = xy \ \forall x, y$ entonces para $y = 0$ tenemos $f(x) + g(0) = 0 \ \forall x.$, de donde $f(x) = -g(0)$, e implica que f es una función constante. Luego

$$xy = f(x) + g(y) = -g(0) + g(y) \ \forall y$$

porque $f(x)$ es constante para cualquier x. Por otro lado sabemos que $g(0)$ es una constante y $g(y)$ no depende de x, sin embargo su diferencia está dada por $g(y) - g(0) = xy$. Y finalmente sea $x = 0$ entonces $g(y) = g(0) \ \forall y$, por lo tanto se concluye que

$$xy = f(x) + g(x) = -g(0) + g(0) = 0 \ \forall x, y$$

ya que si tomamos $x = y = 1$ implica que $1 = 0$ donde llegamos a un absurdo.

(ii) $f(x) \cdot g(y) = x + y$ para todo x e y.

Demostración.- Sea $y = 0$, obtenemos $f(x) = x/g(0)$. De la misma forma si $x = 0$, entonces $g(y) = y/f(0)$. Por lo tanto

$$f(x) \cdot g(y) = x + y \Longrightarrow \frac{x}{g(0)} \cdot \frac{y}{f(0)} = x + y \qquad \forall x, \ e \ \forall y$$

Supongamos que $y = 0$, entonces $\dfrac{x}{g(0)} \cdot \dfrac{0}{f(0)} = x \quad \forall x \Longrightarrow 0 = x \quad \forall x$, lo cual es absurdo.

(b) Hallar funciones f y g tales que $f(x+y) = g(xy)$ para todo x e y.

Respuesta.- Sean f y g la misma función constante. Argumentos similares a los utilizados en la parte (a) muestran que estas son las únicas opciones posibles.

20. (a) Hallar una función f que no sea constante y tal que $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$.

Respuesta.- Podemos ver que la función $f(x) = x$ satisface la condición $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$

(b) Supóngase que $f(y) - f(x) \leq (y-x)^2$ para todo x e y. (¿ Por qué esto implica $|f(y)-f(x)| \leq (y-x)^2$?) Demostrar que f es una constante. Indicación: Divídase el intervalo $[x, y]$ en n partes iguales.

Demostración.- Supongamos, que puede probar que la siguiente desigualdad es cierta para todos $x, y \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{(y-x)^2}{n}$$

Ahora mantengamos los valores de x e y constantes. Podemos suponer $x \neq y$ (porque si $x = y$ entonces $f(x) = f(y)$ y así terminaríamos la demostración). Entonces, en el lado derecho, el numerador $(y-x)^2$ es distinto de 0, y mayor a cero. Por lo tanto, podemos dividir por $(y-x)^2$, de donde:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{(y-x)^2} \leq \frac{1}{n}$$

En el lado izquierdo tenemos un número no negativo que es constante (ya que x e y se mantienen constantes, el numerador no es negativo y el denominador es positivo). Este número es menor que cada fracción $\dfrac{1}{n}$ para todos los números naturales $n \geq 1$. Esto implica que el lado izquierdo es igual a cero:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{(y-x)^2} = 0$$

una vez mas multiplicamos por $(y-x)^2$ entonces

$$|f(y) - f(x)| = 0,$$

de donde

$$|f(y) - f(x)| = 0 \Longrightarrow f(y) = f(x)$$

Dado que esto es cierto para todos los valores x, y terminamos la demostración.

21. Demostrar o dar un contraejemplo de las siguientes proposiciones:

(a) $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.

Demostración.- Esto es falso en general ya que si designamos a g y h la función identidad y f sea x^2 entonces

$$[f \circ (g+h)](x) = f\,(g+h)\,(x) = f\,[g(x) + h(x)] = f(x+x) = f(2x) = 4x^2.$$

luego por la parte derecha de la ecuación se tendra:

$$[(f \circ g) + (f \circ h)]\,(x) = (f \circ g)\,(x) + (f \circ h)\,(x) = f\,[g\,(x)] + f\,[h\,(x)] = f\,(x) + g\,(x) = x^2 + x$$

De donde $4x^2 \neq x^2 + x$

(b) $(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$.

Demostración.- Por definición de composición de función tenemos

$$\begin{array}{rcll} [(g+h)\circ f](x) & = & (g+h)[f(x)] & \\ & = & g[f(x)] + h[f(x)] & \text{por definición} \\ & = & (g\circ f)(x) + (h\circ f)(x) & \\ & = & [(g\circ f) + (h\circ f)](x) & \end{array}$$

Así $(g+h)\circ f = (g\circ f) + (h\circ f)$

(c) $\dfrac{1}{f\circ g} = \dfrac{1}{f}\circ g$.

Demostración.- Por definición se tiene,

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{1}{f\circ g}\right)(x) & = & \dfrac{1}{(f\circ g)(x)} \\ & = & \dfrac{1}{f[g(x)]} \\ & = & \left(\dfrac{1}{f}\right)[g(x)] \\ & = & \left(\dfrac{1}{f}\circ g\right)(x) \end{array}$$

Así, $1/(f\circ g) = (1/f)\circ g$

(d) $\dfrac{1}{f\circ g} = f\circ\left(\dfrac{1}{g}\right)$.

Demostración.- Esto es falso ya que si consideramos $f(x) = x+1$ y $g(x) = x^2$, entonces

$$\left(\frac{1}{f\circ g}\right)(x) = \frac{1}{(f\circ g)(x)} = \frac{1}{f[g(x)]} = \frac{1}{f(x^2)} = \frac{1}{x^2+1}$$

y por otro lado

$$\left[f\circ\left(\frac{1}{g}\right)\right](x) = f\left[\left(\frac{1}{g}\right)(x)\right] = f\left(\frac{1}{g(x)}\right) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}+1$$

de donde $\dfrac{1}{x^2+1} \neq \dfrac{1}{x^2}+1$

22.