1

Cálculo diferencial

1.1 Aplicación del teorema del valor medio a propiedades geométricas de las funciones

Teorema 1.1. Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y que admite derivada en cada punto de un intervalo abierto (a, b). Tenemos entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente creciente en $[a, b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

c) Si $f'(x) = 0$ para algún x de (a, b), entonces f es constante en $[a, b]$.

Demostración.- Para probar a) tenemos que demostrar que $f(x) < f(y)$ siempre que $a \leq x < y \leq b$. Por consiguiente, supongamos $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio al intervalo cerrado $[x, y]$. Obtenemos

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x), \quad \text{donde} \quad x < c < y.$$

Puesto que $f'(c)$ e $y - x$ son positivos, lo mismo le ocurre a $f(y) - f(x)$, y esto significa $f(x) < f(y)$, como se afirmó. La demostración de b) es parecida. Para demostrar c), utilizamos la igualdad dada haciendo $x = a$. Ya que $f'(c) = 0$, tenemos $f(y) = f(a)$ para todo y en $[a, b]$, con lo que f es constante en $[a, b]$.

Este teorema podemos emplearlo para demostrar que se presenta un extremo siempre que la derivada cambia de signo.

Teorema 1.2. Supongamos f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que existe la derivada f' en todo punto del intervalo abierto (a, b), excepto posiblemente en un punto c.

a) Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y negativa para todo $x > c$, f tiene un máximo relativo en c.

b) Si, por otra parte, $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$, y positiva para todo $x > c$, f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración.- En el caso a), el teorema 4.7 nos dice que f es estrictamente creciente en $[a, c]$ y estrictamente decreciente en $[c, b]$. Luego $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ en (a, b), con lo que f tiene un máximo relativo en c. Esto demuestra a) y la demostración de b) es completamente análoga.

1.2 Criterio de la derivada segunda para los extremos

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, el teorema de los valores extremos nos dice que tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en algún punto de $[a,b]$. Si f tiene derivada en cada punto interior, entonces los únicos puntos en los que pueden presentarse los extremos son:

1) En los extremos del intervalo a y b;

2) en aquellos puntos interiores x en los que $f'(x) = O$.

Los puntos del tipo 2) se llaman con frecuencia puntos críticos de f. Para decidir si en un punto crítico c existe un máximo o un mínimo (o ni uno ni otro), necesitamos más información acerca de la función f. Ordinariamente el comportamiento de f en un punto crítico puede determinarse a partir del signo algebraico de la derivada en las proximidades de c. El teorema que sigue hace ver que un estudio del signo de la derivada segunda en las cercanías de e puede también sernos de utilidad.

Teorema 1.3 (Criterio de la derivada segunda para extremos en un punto crítico)**.** Sea c un punto crítico de f en un intervalo abierto (a,b); esto es, supongamos $a < c < b$ y que $f'(c) = 0$. Supongamos también que exista la derivada segunda f'' en (a,b). Tenemos entonces:

a) Si f'' es negativa en (a,b), f tiene un máximo relativo en c.

b) Si f'' es positiva en (a,b), f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración.- Consideremos el caso a), $f'' < 0$ en (a,b). Según el teorema 4.7 Tom Apostol (aplicado a f'), la función f' es estrictamente decreciente en (a,b). Pero $f'(c) = 0$, con lo que f' cambia su signo de positivo a negativo en c. Luego, según el teorema 4.8 Tom Apostol, f tiene un máximo relativo en c. La demostración en el caso b) es completamente análoga.

El signo de la derivada segunda también está relacionado con la concavidad o la convexidad de f. El siguiente teorema demuestra que la función es convexa en los intervalos en los que f'' es positiva, f es cóncava ya que f'' es negativa. Basta discutir tan sólo el caso de la convexidad, ya que si f es convexa, $-f$ es cóncava.

Teorema 1.4 (Criterio de la derivada para la convexidad)**.** Supongamos f continua en $[a,b]$ y que tenga derivada en el intervalo abierto (a,b). Si f' es creciente en (a,b) entonces f es convexa en $[a,b]$. En particular, f es convexa si f'' existe y es no negativa en (a,b).

Demostración.- Consideremos $x < y$ en $[a,b]$ y pongamos $z = \alpha y + (1-\alpha)x$, donde $0 < \alpha < 1$. Queremos demostrar que $f(z) \le \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$. Puesto que $f(z) = \alpha f(z) + (1-\alpha)f(z)$, esto es lo mismo que demostrar que

$$(1-\alpha)[f(z) - f(x)] \le \alpha[f(y) - f(z)].$$

Según el teorema del valor medio (aplicando dos veces), existen puntos c y d que satisfacen $x < c < z$ y $z < d < y$ tales que

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z-x), \quad \text{y} \quad f(y) - f(z) = f'(d)(y-z).$$

Puesto que f' es creciente, tenemos $f'(c) \le f'(d)$. Así mismo, tenemos $(1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$, de modo que podemos escribir

$$(1-\alpha)[f(z) - f(x)] = (1-\alpha)f'(c)(z-x) \le \alpha f'(d)(y-z) = \alpha[f(y) - f(z)],$$

lo que demuestra la desigualdad exigida por la convexidad.

1.19 Ejercicios

En los siguientes Ejercicios, a) hallar todos los puntos x tales que $f'(x) = 0$; b) examinar el signo de f' y determinar aquellos intervalos en los que f es monótona; c) examinar el signo de f'' y determinar aquellos intervalos en los que f' es monótona; d) construir un boceto de la gráfica de f. En cada caso, la función está definida para todos los x para los cuales tiene sentido $f(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Respuesta.-

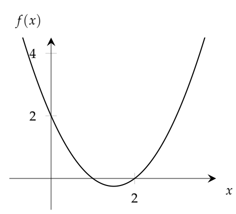
(a) Derivando $f(x)$, tenemos $f'(x) = 2x - 3$. Luego igualando a 0,

$$2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que f' es creciente si $x > \dfrac{3}{2}$ y decreciente si $x < \dfrac{3}{2}$.

(c) Sea $f''(x) = 2$. Ya que $2 > 0$, entonces por el mismo criterio del teorema 4.7 (tom Apostol, capítulo 4) f' es creciente para todo x.

(d)



2. $f(x) = x^3 - 4x$.

Respuesta.-

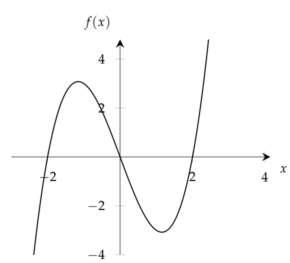
(a) Derivando $f(x)$, tenemos $f'(x) = 3x^2 - 4$. Luego igualando a 0,

$$3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que f' es creciente si $|x| > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y decreciente si $|x| < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(c) Sea $f''(x) = 6x$. Por lo tanto, f' es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$.

(d)



3. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos

$$f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = 3(x^2-1)$$

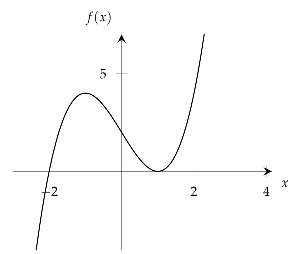
Luego igualando a 0,

$$3(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que f' es creciente si $|x| > 1$ y decreciente si $|x| < -1$.

(c) Sea $f''(x) = 6x$. Por lo tanto, f' es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$.

(d)



4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

Luego igualando a 0,

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:

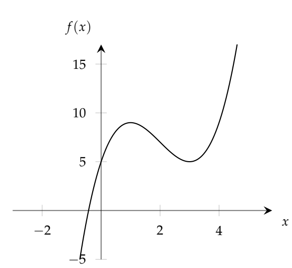
$$\begin{array}{lcccccl} \text{Si} & x < 1 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & 1 < x < 3 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > 3 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = 2x - 4$. Entonces,

$$2x - 4 > 0 \;\Rightarrow\; x > 2 \qquad \text{y} \qquad 2x - 4 < 0 \;\Rightarrow\; x < 2.$$

Por lo tanto por el mismo criterio del teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), se tiene que f' es creciente si $x > 2$ y decreciente si $x < 2$.

(d)



5. $f(x) = 2 + (x-1)^4$.

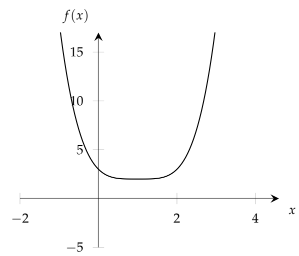
Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = 4(x-1)^3.$$
Luego igualando a 0,
$$(x-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:
$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x < 1 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > 1 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = 12(x-1)^2$. Ya que $(x-1)^2 > 0$. Por lo tanto por el mismo criterio del teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), se tiene que f' es creciente para todo x.

(d)



6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

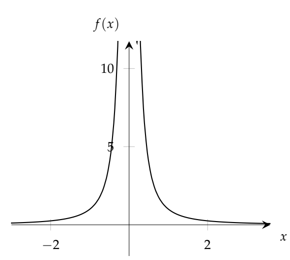
Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = -\frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$
Luego igualando a 0,
$$-\frac{2}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \text{ es nunca cero.}$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:
$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x < 0 & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > 0 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$. Por lo tanto f' es decreciente para todo $x \neq 0$ y $x = 0$ no está definido.

(d)



7. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$.

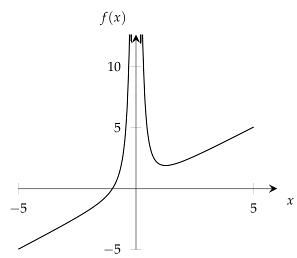
Respuesta.-

(a) Derivando $f(x)$, tenemos
$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^3}.$$
Luego igualando a 0,
$$1 + \frac{2}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

(b) Por el teorema 4.7 (Tom Apostol, capítulo 4), podemos señalar que:
$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & x < 0 & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \\ \text{Si} & 1 < x < \sqrt[3]{2} & \Rightarrow & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ es decreciente.} \\ \text{Si} & x > \sqrt[3]{2} & \Rightarrow & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ es creciente.} \end{array}$$

(c) Sea $f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$. Entonces, f' es creciente para todo $x \neq 0$ y $x = 0$ no está definido.

(d)



8. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$.

Respuesta.-

9. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Respuesta.-

10. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$.

Respuesta.-

11. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Respuesta.-

12. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$.

Respuesta.-

13. $f(x) = x + \cos x$.

Respuesta.-

14. $f(x) = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{12}\cos 2x$.

Respuesta.-