

Los conceptos del Cálculo Integral

1.3. Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman **Funciones de variable real** o funciones reales.

Definición 1.1 (Par ordenado) Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Definición 1.2 (Definición de función) Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primero elemento.

Debe cumplir las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

- (i) $\forall x \in D_f, \exists y / (x, y) \in f \text{ ó } y = f(x)$
- (ii) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

Definición 1.3 (Dominio y recorrido) Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el **dominio** de f . El conjunto de los segundos elementos y se denomina **recorrido** de f , o conjunto de valores de f .

TEOREMA 1.1 Dos funciones f y g son iguales si y sólo si

- (a) f y g tienen el mismo dominio, y
- (b) $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de f .

Demostración.- Sea f función tal que $x \in D_f, \exists y / y = f(x)$ es decir $(x, f(x))$, g una función tal que $\forall z \in D_g, \exists y / y = g(z)$ es decir $(z, g(z))$, entonces por definición de par ordenado tenemos que $(x, f(x)) = (z, g(z))$ si y sólo si $x = z$ y $f(x) = g(z)$

Definición 1.4 (Sumas, productos y cocientes de funciones) Sean f y g dos funciones reales que tienen el mismo dominio D . Se puede construir nuevas funciones a partir de f y g por adición, multiplicación o división de sus valores. La función u definida por,

$$u(x) = f(x) + g(x) \quad \text{si } x \in D$$

se denomina suma de f y g , se representa por $f + g$. Del mismo modo, el producto $v = f \cdot g$ y el cociente $w = f/g$ están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \quad \text{si } x \in D, \quad w(x) = f(x)/g(x) \quad \text{si } x \in D \text{ y } g(x) \neq 0$$

1.5. Ejercicios

1. Sea $f(x) = x + 1$ para todo real x . Calcular:

$$\blacksquare f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\blacksquare f(-2) = -2 + 1 = -1$$

$$\blacksquare -f(2) = -(2 + 1) = -3$$

$$\blacksquare f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\blacksquare \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{3}$$

$$\blacksquare f(a + b) = a + b + 1$$

$$\blacksquare f(a) + f(b) = (a + 1) + (b + 1) = a + b + 2$$

$$\blacksquare f(a) \cdot f(b) = (a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$$

2. Sean $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = 1 - x$ para todo real x . calcular:

$$\blacksquare f(2) + g(2) = (1 + 2) + (1 - 2) = 2$$

$$\blacksquare f(2) - g(2) = (1 + 2) - (1 - 2) = 4$$

$$\blacksquare f(2) \cdot g(2) = (1 + 2) \cdot (1 - 2) = 3 \cdot (-1) = -3$$

- $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$
- $f[g(2)] = f(1-2) = f(-1) = 1 + (-1) = 0$
- $g[f(2)] = f(1+2) = g(3) = 1-3 = -2$
- $f(a) + g(-a) = (1+a) + (1-a) = 2$
- $f(t) \cdot g(-t) = (1+t) \cdot (1+t) = 1+t+t+t^2 = t^2+2t+1 = (t+1)^2$

3. Sea $f(x) = |x-3| + |x-1|$ para todo real x . Calcular:

- $f(0) = |0-3| + |0-1| = 3+1 = 4$
- $f(1) = |1-3| + |1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3| + |2-1| = -1+1 = 2$
- $f(3) = |3-3| + |3-1| = 2$
- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4+2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5+3 = 8$

Determinar todos los valores de t para los que $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{aligned} |t+2-3| + |t+2-1| &= |t-3| + |t-1| \\ |t-1| + |t+1| &= |t-3| + |t-1| \\ |t+1| &= t-3 \end{aligned}$$

Por lo tanto $t = 1$

4. Sea $f(x) = x^2$ para todo real x . Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números reales x , y , t , etc., para los que la fórmula dada es válida.

(a) $f(-x) = f(x)$

Demostración.- Se tiene $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $f(y) - f(x) = (y-x)(y+x)$

Demostración.- $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x), \forall x, y \in \mathbb{R}$

(c) $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.- $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2, \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.- $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y), \forall y \in \mathbb{R}$

(e) $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.- $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

(f) $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.- $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

5. Sea $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de x , y , s y t son válidas.

(a) $g(-x) = g(x)$

Se tiene $g(-x) = \sqrt{2 - (-x)^2} = \sqrt{2 - (x)^2} = g(x),$ para $|x| \leq 2$

(b) $g(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4 - (2y)^2} = \sqrt{4(1 - y^2)} = 2\sqrt{1 - y^2},$ para $|y| \leq 1$ Se obtiene $|y| \leq 1$ de $\sqrt{1 - y^2}$ es decir $1 - y^2 \geq 0$ entonces $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$ y $|y| \leq 1$

(c) $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$

$g\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|},$ para $|t| \geq \frac{1}{2}$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar $\sqrt{4t^2 - 1}$. Es decir

$$4t^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow 4t^2 \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq \frac{1}{2^2} \Rightarrow |t| \geq \frac{1}{2}$$

(d) $g(a - 2) = \sqrt{4a - a^2}$

$g(a - 2) = \sqrt{4 - (a - 2)^2} = \sqrt{4a - a^2},$ para $0 \leq a \leq 4$. Basta probar $4a - a^2 \geq 0$

(e) $g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - s^2}$

$s\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16 - s^2}}{2},$ para $|s| \leq 4$. ya que solo basta comprobar que $\sqrt{16 - s^2} \geq 0$

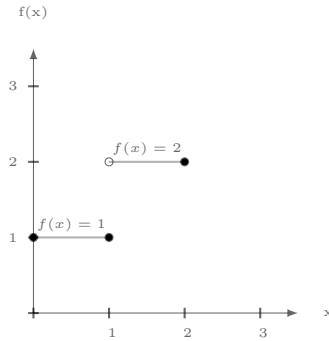
(f) $\frac{1}{2 + g(x)} = \frac{2 - g(x)}{x^2}$

$$\frac{1}{2+g(x)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-g(x)}{x^2} \text{ para } |x| \leq 2 \text{ y } x \neq 0$$

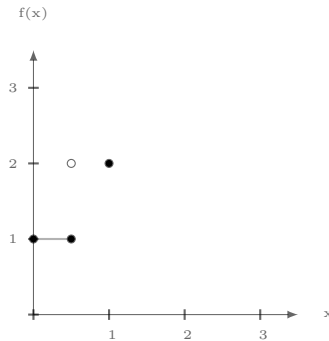
Evaluemos $\sqrt{4-x^2}$. Sea $4-x^2 \geq 0$ entonces $\sqrt{x^2} \leq 2$. Por otro lado tenemos que la función no puede ser 0 por $\frac{1}{x^2}$, por lo tanto debe ser $x^2 \neq 0$.

6. Sea f la función definida como sigue: $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ para $1 < x \leq 2$. La función no está definida si $x < 0$ ó si $x > 2$.

(a) Trazar la gráfica de f

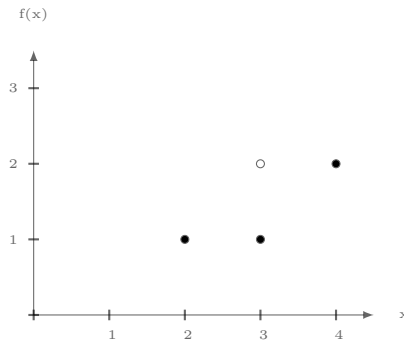


(b) Poner $g(x) = f(2x)$. Describir el dominio de g y dibujar su gráfica.



Debido a que $1 \leq 2x \leq 1$ y $1 < 2x \leq 2$ el dominio de $g(x)$ es $0 \leq x \leq 1$

(c) Poner $h(x) = f(x-2)$. Describir el dominio de h y dibujar su gráfica.

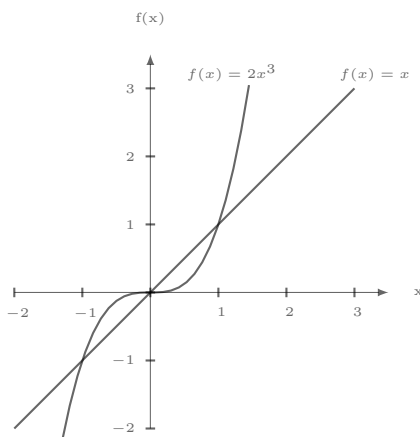


Debido a que $1 \leq x-2 \leq 1$ y $1 < x-2 \leq 2$ el dominio de $h(x)$ es $2 \leq x \leq 4$

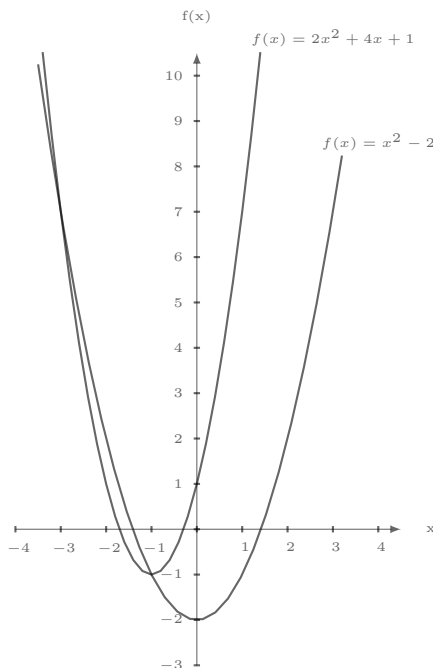
- (d) Poner $k(x) = f(2x) + f(x-2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.

El dominio está vacío ya $f(2x)$ que solo está definido para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x-2)$ solo está definido para $2 \leq x \leq 4$. Por lo tanto no hay ninguno x que satisfaga ambas condiciones.

7. Las gráficas de los dos polinomios $g(x) = x$ y $f(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.



8. Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.



9. Este ejercicio desarrolla ciertas propiedades fundamentales de los polinomios. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ un polinomio de grado n . Demostrar cada uno de los siguientes apartados:

- (a) Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, $f(x) = xg(x)$, siendo g un polinomio de grado $n-1$.

Para entender lo que nos quiere decir Apostol pongamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un polinomio donde $f(x) = 2x^2 + 3x - x$ entonces notamos que $f(x) = x(2x + 3 - 1)$ donde $g(x) = 2x + 3 - 1$, esto quiere decir que si $0 = f(0) = c_0 \Rightarrow c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = x(c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1})$ Así que debemos demostrar que $f(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $n \geq 1$ tal que $f(0) = 0$, entonces debe haber un polinomio de grado $n - 1$, $g(x)$, tal que $f(x) = xg(x)$

Demostración.- Sabemos que

$$f(0) = c_n \cdot 0^n + c_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \dots + c_1 \cdot 0 + c_0 = c_0,$$

como $f(0) = 0$ se concluye que $c_0 = 0$. Así tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k.$$

Ahora crearemos una función $g(x)$. Dada la función $f(x)$ como la anterior, definamos,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1}$$

Ahora crearé una función $g(x)$. Dada una función $f(x)$ como la anterior, definamos

$$g(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1}$$

donde c_k son los mismos que los dados por la función $f(x)$. Primero notemos que el grado de $g(x)$ es $n - 1$. Finalmente, tenemos que

$$xg(x) = x \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n c_k x^k = f(x).$$

(b) Para cada real a , la función p dada por $p(x) = f(x + a)$ es un polinomio de grado n .

Demostración.- Usando el teorema del binomio,

$$\begin{aligned} f(x+a) &= \sum_{k=0}^n (x+a)^k c_k \\ &= c_0 + (x+a)c_1 + (x+a)^2 c_2 + \dots + (x+a)^n c_n \\ &= c_0 + c_1 \left(\sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a^j x^{1-j} \right) + c_2 \left(\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} a^j x^{2-j} \right) + \dots + c_n \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j x^{n-j} \right) \\ &= (c_0 + ac_1 + a^2 c_2 + \dots + a^n c_n) + x(c_1 + 2ac_2 + \dots + na^{n-1} c_n) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(x^k \left(\sum_{j=k}^n \binom{j}{j-k} c_j a^{j-k} \right) \right) \end{aligned}$$

En la línea final reescribimos los coeficientes como sumas para verlos de manera más concisa. De cualquier manera, dado que todos los c_i son constantes, tenemos $\sum_{j=k}^n \binom{j}{j-k} c_j a^{j-k}$ es alguna constante para cada k , de d_k y tenemos,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k$$

- (c) Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para un cierto valor real a , entonces $f(x) = (x-a)h(x)$, siendo h un polinomio de grado $n-1$. (considérese $p(x) = f(x+a)$.)

Demostración.- Por la parte b) se sabe que $f(x)$ es un polinomio de grado n , entonces $p(x) = f(x+a)$ también es un polinomio del mismo grado. Ahora si $f(a) = 0$ entonces por hipótesis $p(0) = f(a) = 0$. Luego por la parte a), tenemos

$$p(x) = x \cdot g(x)$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. Así,

$$p(x-a) = f(x) = f(x) = (x-a) \cdot g(x-a)$$

ya que $p(x) = f(x+a)$. Pero, si $g(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, entonces por la parte b) nuevamente, también lo es $h(x) = g(x+(-a)) = g(x-a)$. Por lo tanto,

$$f(x) = (x-a) \cdot h(x)$$

para h un grado $n-1$ polinomial, según lo solicitado.

- (d) Si $f(x) = 0$ para $n+1$ valores reales de x distintos, todos los coeficientes c_k son cero y $f(x) = 0$ para todo real de x

Demostración.- La prueba se realizara por inducción. Sea $n = 1$, entonces $f(x) = c_0 + c_1x$. Dado que la hipótesis es que existen $n+1$ distintos x de tal manera que $f(x) = 0$, sabemos que existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a_1) = f(a_2) = 0, \quad a_1 \neq a_2,$$

Así,

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 a_1 &= 0 &\Rightarrow & c_1 a_1 - c_1 a_2 &= 0 \\ &&\Rightarrow & c_1 (a_1 - a_2) &= 0 \\ &&\Rightarrow & c_1 &= 0 \quad \text{ya que } a_1 \neq a_2 \\ &&\Rightarrow & c_0 &= 0 \quad \text{ya que } c_0 + c_1 a_1 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera. Suponga que es cierto para algunos $n = k \in \mathbb{Z}^+$. Luego Sea $f(x)$ un polinomio de grado $k+1$ con $k+2$ distintos de 0, a_1, \dots, a_{k+2} . ya que $f(a_{k+2}) = 0$, usando la parte c), tenemos,

$$f(x) = (x - a_{k+2})h(x)$$

donde $h(x)$ es un polinomio de grado k . Sabemos que hay $k+1$ valores distintos a_1, \dots, a_{k+1} tal que $h(a_i) = 0$. Dado que $f(a_i) = 0$ para $1 < i < k+2$ y $(x - a_{k+2}) \neq 0$ para $x = a_i$ con $1 < i < k+1$ ya que todos los a_i son distintos), por lo tanto, según la hipótesis de inducción, cada coeficiente de h es 0 y $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_{k+2})h(x) = (x - a_{k+2}) \cdot \sum_{j=0}^k c_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^k (x - a_{k+2})c_j x^j \\ &= c_k x^{k+1} + (c_{k-1} - a_{k+2}c_k)x^k + \dots + (c_1 - a_{k+2}c_0)x + a_{k+2}c_0 \end{aligned}$$

Pero dado que todos los coeficientes de $h(x)$ son cero y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la afirmación es verdadera para el caso $k+1$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

- (e) Sea $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ un polinomio de grado m , siendo $m \geq n$. Si $g(x) = f(x)$, para $m+1$ valores reales de x distintos, entonces $m = n$, $b_k = c_k$ para cada valor de k , y $g(x) = f(x)$ para todo real x

Demostración.- Sea

$$p(x) = g(x) - f(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k - \sum_{k=0}^n c_k x^k = \sum_{k=0}^m (b_k - c_k) x^k$$

donde $c_k = 0$ para $n < k \leq m$, cabe recordar que tenemos $m \geq n$.

Entonces, hay $m+1$ distintos reales x para los cuales $p(x) = 0$. Dado que hay $m+1$ valores reales distintos para lo cual $g(x) = f(x)$, así en cada uno de estos valores $p(x) = g(x) - f(x) = 0$. Por lo tanto, por la parte d), $b_k - c_k = 0$ para $k = 0, \dots, m$ y $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir

$$b_k - c_k = 0 \Rightarrow b_k = c_k \text{ para } k = 0, \dots, m$$

y

$$p(x) = 0 \Rightarrow g(x) - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Además desde $b_k - c_k = 0$ para $k = 0, \dots, m$ y por supuesto $c_k = 0$ para $k = n+1, \dots, m$, tenemos $b_k = 0$ para $k = n+1, \dots, m$. Pero entonces,

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + \sum_{k=n+1}^m 0 \cdot x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k$$

significa que $g(x)$ es un polinomio de grado n también.

- 10.** En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que satisfacen las condiciones dadas.

Sabemos que para un polinomio de grado ≤ 2 es:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- (a) $p(x) = p(1-x)$

Sea $f(x) = p(x) - 1$, entonces f es de grado como máximo 2 por la parte d) del problema 9 tenemos que todos los coeficientes de f son 0 y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así,

$$p(x) - 1 = 0 \Rightarrow p(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- (b) $p(x) = p(1+x)$

Tenemos $p(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ luego, $p(1) = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ y finalmente, con $c = 1$ y $b = -a$, tenemos: $p(2) = 2 \Rightarrow 4a - 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. por lo tanto

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x(x-1) + 1$$

(c) $p(x) = p(0) = p(1) = 1$

Una vez mas, desde $p(0) = 1$ tenemos: $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ así, $p(x) = ax^2 - ax + 1 = ax(x - 1) + 1$

(d) $p(0) = p(1)$

Simplemente sustituyendo estos valores que tenemos, $p(0) = p(1) \Rightarrow c = a + b + c \Rightarrow b = -a$ entonces,

$$p(x) = ax^2 - ax + c = ax(x - 1) + c$$

- 11.** En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que para todo real x satisfacen las condiciones que se dan. Como p es un polinomio de grado por lo mucho 2, podemos escribir

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R}$$

(a) $p(x) = p(1 - x)$

Sustituyendo se tiene $p(x) = p(1 - x) = ax^2 + bx + c = a(1 - x)^2 + b(1 - x) + c \Rightarrow a - 2ax + ax^2 + b - bx + c$ por lo tanto

$$ax^2 + (-2a - b)x + (a + b + c)$$

Así para $a = a$, $b = -2a - b \Rightarrow a = -b$, $c = a + b + c$ entonces

$$p(x) = -bx^2 + bx + c = bx(1 - x) + c$$

(b) $p(x) = p(x) = p(1 + x)$

Una vez más sustituyendo, $p(x) = p(1 + x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(1 + x)^2 + b(1 + x) + c = ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c)$. Luego, igualando como potencias de x , $a = a$, $b = 2a + b \Rightarrow a = 0$, $c = a + b + c \Rightarrow b = 0$. Por lo tanto $p(x) = c$ donde c es una constante arbitraria.

(c) $p(2x) = 2p(x)$

Sustituyendo, $p(2x) = 2p(x) \Rightarrow 4ax^2 + 2bx + c = 2ax^2 + 2bx + 2c$. Igualando a las potencias de x , $4a = 2a \Rightarrow a = 0$, $2b = 2b \Rightarrow b$ arbitrario, $c = 2c \Rightarrow c = 0$.

Así

$$p(x) = bx, \quad b \text{ arbitrario}$$

(d) $p(2x) = p(x + 3)$

Sustituyendo $p(2x) = p(x + 3) \Rightarrow 9ax^2 + 3bx + c = ax^2 + (6a + b)x + (9a + 3b + c)$. Igualando como potencias de x , $9a = a \Rightarrow a = 0$, $3b = 6a + b \Rightarrow b = 0$, $c = 9a + 3b + c = c \Rightarrow c$ arbitrario. Por lo tanto

$$p(x) = c \text{ para } c \text{ constante arbitrario.}$$

Corolario 1.1 *Probar que:*

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ para } x \neq 1$$

Demostración.- Usando propiedades de suma,

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n (x^k - x^{k+1}) = - \sum_{k=0}^n (x^{k+1} - x^k) = -(x^{n+1} - 1) = 1 - x^{n+1}$$

En la penultima igualdad se deriva de la propiedad telescópica, por lo tanto nos queda,

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Corolario 1.2 *Probar la identidad*

$$\prod_{k=1}^n (1+x^{2^{k-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}, \text{ para } x \neq 1$$

Demostración.- Para $n=1$ a la izquierda tenemos,

$$\prod_{k=1}^n (1+x^{2^{k-1}}) = \prod_{k=0}^1 (1+x^{2^k} = 1+x^{2^0} = 1+x)$$

Por otro lado a la derecha se tiene,

$$\frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x$$

Concluimos que la identidad se mantiene para $n=1$. Ahora supongamos que es válido para algunos $n=m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m+1} &= (1+x^{2^m}) \cdot \prod_{k=1}^m (1+x^{2^{k-1}}) \\ &= (1+x^{2^m}) \cdot \left(\frac{1-x^{2^m}}{1-x} \right) \\ &= \frac{(1+x^{2^m})(1-x^{2^m})}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera para $m+1$, y así para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

- 12.** Demostrar que las expresiones siguientes son polinomios poniéndolas en la forma $\sum_{k=0}^m a_k x^k$ para un valor de m conveniente. En cada caso n es entero positivo.

(a) $(1+x)^{2n}$

Demostración.- Usando el teorema binomial $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$, sea $m = 2n$ entonces

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k, \text{ por lo tanto } \sum_{k=0}^m c_k x^k \text{ si } c_k = \binom{m}{k} \text{ para cada } k.$$

(b) $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1$

Demostración.- Por el corolario anterior

$$\begin{aligned} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= \frac{(1-x)(1+x+\dots+x^n)}{1-x} \\ &= 1+x+\dots+x^n \\ &= \sum_{k=0}^n 1 \cdot x^k \end{aligned}$$

(c) $\prod_{k=0}^n (1+x^{2^k})$

Demostración.- Por el corolario anterior,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n (1+x^{2^k}) &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})}{1-x} \\ &= \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \left(\frac{1-x^{2^n}}{1-x} \right) (1+x^{2^n}) \\ &= (1+x+\dots+x^{2^n-1})(1+x^{2^n}) \\ &= (1+x+\dots+x^{2^n-1})(x^{2^n}+x^{2^n+1}+\dots+x^{2^{n+1}-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} 1 \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^m 1 \cdot x^k \text{ si } m = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Axioma .1 (Definición axiomática de área) Supongamos que existe una clase M de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto a , cuyo dominio es M , con las propiedades siguientes:

1. **Propiedad de no negatividad.** Para cada conjunto S de M , se tiene $a(S) \geq 0$
2. **Propiedad aditiva.** Si S y T pertenecen a M , también pertenecen a M , $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene

$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$$

3. **Propiedad de la diferencia.** Si S y T pertenecen a M siendo $S \subseteq T$ entonces $T - S$ está en M , y se tiene $a(T - S) = a(T) - a(S)$
4. **Invariancia por congruencia.** Si un conjunto S pertenece a M y T es congruente a S , también T pertenece a M y tenemos $a(S) = a(T)$
5. **Elección de escala** Todo rectángulo R pertenece a M . Si los lados de R tienen longitudes h y k , entonces $a(R) = hk$
6. **Propiedad de exhaustión.** Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T de modo que

$$S \subseteq Q \subseteq T.$$

Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades

$$a(S) \leq c \leq a(T)$$

para todas la regiones escalonadas S y T que satisfacen $S \subseteq Q \subseteq T$, entonces Q es medible y $a(Q) = c$

1.7. Ejercicios

1. Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es medible y tiene área nula:

- (a) Un conjunto que consta de un solo punto.

Demostración.- Un sólo punto se puede medir con un área 0, ya que un punto es un rectángulo con $h = k = 0$

- (b) El conjunto de un número finito de puntos.

Demostración.- Demostraremos por inducción en n , el número de puntos. Para el caso de $n = 1$ ya quedo demostrado en el anterior inciso. Supongamos que es cierto para algunos $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Entonces, tenemos un conjunto $S \in M$ de k puntos en el plano y $a(S) = 0$. Sea T un punto en el plano. Por (a) $T \in M$ y $a(T) = 0$, por tanto por la propiedad aditiva,

$$S \cup T \in M \text{ y } a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$

pero $S \cap T \subseteq S$, entonces

$$a(S \cap T) \leq a(S) \Rightarrow a(S \cap T) \leq 0 \Rightarrow a(S \cap T) = 0.$$

El axioma 1 nos garantiza que $a(S \cap T)$ no puede ser negativo. Por lo tanto, $a(S \cup T) = 0$. Por tanto, el enunciado es verdadero para $k + 1$ puntos en un plano y, por tanto, para todo $n \in \mathbf{Z}_{>0}$

- (c) La reunión de una colección finita de segmentos de recta en un plano.

Demostración.- Por inducción, sea n el número de segmentos en un plano. Para $n = 1$, dejamos S ser un conjunto con una línea en un plano. Dado que una línea es un rectángulo y todos los rectángulos son medibles, tenemos $S \in M$ además, $a(S) = 0$ ya que una línea es un rectángulo con $h = 0$ ó $k = 0$, y así en cualquier caso $hk = 0$. Por lo tanto, el enunciado es verdadero para una sola línea en el plano, el caso $n = 1$.

Asuma entonces que es cierto para $n = k \in \mathbf{Z}^+$. Sea S un conjunto de rectas en el plano. Luego, por la hipótesis de inducción, $S \in M$ y $a(S) = 0$. Sea T una sola línea en el plano. Por el caso $n = 1$ en $T \in M$ y $a(T) = 0$. Por lo tanto $S \cup T \in M$ y $a(S \cup T) = 0$ (ya que $a(S) = a(T)a(S \cap T) = 0$). Por tanto, la afirmación es verdadera para $k + 1$ líneas en un plano, y así para todos $n \in \mathbf{Z}^+$.

2. Toda región en forma de triángulo rectángulo es medible pues puede obtenerse como intersección de dos rectángulos. Demostrar que toda región triangular es medible y que su área es la mitad del producto de su base por su altura.

Demostración.- Dado que cada triángulo rectángulo es medible, por el axioma 2 del área su unión es medible, denotando los dos triángulos rectángulos A y B , y la región triangular T , tenemos

$$a(T) = a(A) + a(B)$$

ya que A y B son disjuntos $a(A \cap B) = 0$.

Dejando que la altitud de la región triangular se denote por h , y su base por b , tendremos,

$$a(A) = \frac{1}{2}(hb_1) \quad a(B) = \frac{1}{2}hb_2 \quad \text{con} \quad b_1 + b_2 = b,$$

entonces

$$a(T) = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2 = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}hb$$

3. Demostrar que todo trapezoide y todo paralelogramo es medible y deducir las fórmulas usuales para calcular su área.

Demostración.- Todo trapecio es medible ya que, la unión de un rectángulo y dos triángulos rectángulos (disjuntos por pares y cada uno de los cuales es medible por los axiomas y el ejercicio anterior.) Luego su área es la suma de las áreas de los triángulos rectángulos y el rectángulo (dado que están separados por pares, su intersección tiene un área cero). Para calcular esta área, especificamos las longitudes de los dos lados desiguales del trapezoide para que sean b_1 y b_2 . La altura está indicada por a . Entonces, el área del rectángulo es de $a \cdot b_1$. El área de los triángulos es $\frac{1}{2}a \cdot b_3$ y $\frac{1}{2}a \cdot b_4$ donde $b_1 + b_3 + b_4 = b_2$. Entonces, denotando el trapezoide por T , tenemos

$$a(T) = ab_1 + \frac{1}{2}ab_3 + \frac{1}{2}ab_4 = \frac{1}{2}ab_1 + \frac{1}{2}a(b_1 + b_3 + b_4) = \frac{1}{2}a(b_1 + b_2)$$

A continuación, un paralelogramo es solo un caso especial de un trapezoide, en el que $b_1 = b_2$; por lo tanto, por la fórmula anterior, y denotando el paralelogramo por P ,

$$a(P) = \frac{1}{2}a(2b) = ab$$

4. Un punto (x, y) en el plano se dice que es un punto de una red, si ambas coordenadas x e y son enteras. Sea P un polígono cuyos vértices son puntos de una red. El área de P es $I + \frac{1}{2}B - 1$ donde I es el número de puntos de la red interiores a P , y B el de los de la frontera.

- (a) Probar que esta fórmula es correcta para rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados.

Demostración.- Sea R un $h \times k$ rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas. Entonces, R es medible (ya que es un rectángulo) y $a(R) = hk$. A continuación, dado que los vértices están en puntos de celosía, $B = 2(h + 1) + 2(k + 1) - 4$ y $I = (h - 1)(k - 1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2}B - 1 &= (h - 1)(k - 1) + \frac{1}{2}[2(h + 1) + 2(k + 1) - 4] - 1 \\ &= hk - h - k + 1 + h + 1 + k + 1 - 2 - 1 \\ &= hk \end{aligned}$$

- (b) Probar que la fórmula es correcta para triángulos rectángulos y paralelogramos.

Demostración.- Sabemos que cualquier triángulo rectángulo puede encerrarse en un rectángulo con bordes cuyas longitudes sean iguales a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo. Además, este rectángulo está compuesto por dos triángulos rectángulos congruentes unidos a lo largo de su diagonal. Cada uno de estos triángulos rectángulos tiene un área la mitad de la del rectángulo y se cruzan a lo largo de la diagonal (que tiene un área cero (1.7, problema 1) ya que es una línea en el plano). Dado un triángulo rectángulo T , R sea tal rectángulo, y S sea el triángulo rectángulo que forma la otra mitad de R , entonces $S \cup T = R$.

Dado que R es un rectángulo, sabemos por la parte (a) que

$$a(R) = I_R + \frac{1}{2}B_R - 1.$$

Además, cualquier punto interior R será un punto interior de cualquiera S o T , o se acuesta sobre su frontera compartida. Por lo tanto,

$$I_R = I_S + I_T + H_P$$

donde H_P denota los puntos en la hipotenusa (compartida) de los dos triángulos rectángulos. Entonces, también tenemos para los puntos límite,

$$B_R = B_S + B_T - 2 - 2H_P.$$

Finalmente, dado que S y T son congruentes, conocemos $B_S = B_T$ y $I_S = I_T$. Entonces, poniendo todo esto junto, tenemos,

$$\begin{aligned} a(R) &= I_R + \frac{1}{2}B_R - 1 \\ &= 2I_S + H_P + \frac{1}{2}(2B_S - 2 - 2H_P) - 1 \\ &= 2(I_S + \frac{1}{2}B_S - 1) \end{aligned}$$

ó,

$$I_S + \frac{1}{2}B_S - 1 = \frac{1}{2}a(R).$$

Pero, sabemos que $\frac{1}{2}a(R) = a(S)$; por lo tanto,

$$a(S) = I_S + \frac{1}{2}B_S - 1.$$

Esto prueba el resultado para triángulos rectángulos con vértices en puntos de una red.

- (c) Emplear la inducción sobre el número de lados para construir una demostración para polígonos en general.

Respuesta.- Ya tenemos esto de la parte (b) ya que podemos realizar cualquier polígono simple como la unión de un número finito de triángulos rectángulos (es decir, cada polígono simple es triangularizable)

- 5.** Demostrar que un triángulo cuyos vértices son puntos de una red no puede ser equilátero.

Demostración.- Supongamos que existe tal triángulo equilátero T . Entonces,

$$T = A \cup B$$

Para dos triángulos rectángulos congruentes y disjuntos A, B . Dado que los vértices de T están en puntos de una red, sabemos que la altitud desde el vértice hasta la base debe pasar por h puntos de red (donde h es la altura de T). Por lo tanto, al denotar los puntos de red en esta altitud por $V_B = h + 1$, tenemos

$$B_T = B_A + B_B - V_B + 2, \quad I_T = I_A + I_B + V_B - 2.$$

Dado que T es un polígono con vértices de puntos de red, sabemos por el ejercicio anterior que $a(T) = I_T + \frac{1}{2}B_T - 1$. Además, por el problema 2, sabemos que $a(T) = \frac{1}{2}bh$. Así que,

$$\begin{aligned} I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &= (I_A + I_B + V_B - 2) + \frac{1}{2}(B_A + B_B - V_B + 2) \\ \Rightarrow I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &= 2I_A + B_A - 2 + \frac{1}{2}V_B && (B_A = B_B, I_A = I_B) \\ \Rightarrow I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &= 2I_A + B_A - 2 + \frac{1}{2}(h + 1) && (V_B = h + 1) \\ \Rightarrow I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 &= 2(a(A)) + \frac{1}{2}(h + 1) \end{aligned}$$

Pero, $\frac{1}{2}a(T) = a(A) = a(B)$ así,

$$I_T + \frac{1}{2}B_T - 1 = a(T) + \frac{1}{2}(h + 1) \quad \Rightarrow \quad a(T) = a(T) + \frac{1}{2}(h + 1)$$

Pero, $h > 0$ entonces esto es una contradicción. Por lo tanto, T no puede tener sus vértices en puntos de red y ser equilátero.

- 6.** Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y M la clase de todos los subconjuntos de A . (Son en número de 32 contando el mismo A y el conjunto vacío \emptyset .) Para cada conjunto S de M , representemos con $n(S)$ el número de

elemento distintos de S . Si $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y $T = \{3, 4, 5\}$, calcular $n(S \cup T)$, $n(S \cap T)$, $n(S - T)$ y $n(T - S)$. Demostrar que la función de conjunto n satisface los tres primeros axiomas del área.

Demostración.- Calculemos,

$$\begin{aligned} n(S \cup T) &= n(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 5 \\ n(S \cap T) &= n(\{3, 4\}) = 2 \\ &= n(\{1, 2\}) = 2 \\ &= n(\{5\}) = 1 \end{aligned}$$

Ahora demostremos que esto satisface los primeros tres axiomas de área.

Axioma 1. (Propiedad no negativa) Esto se satisface para cualquier conjunto, S ya que el número de elementos distintos en un conjunto no es negativo. Entonces, $n(S) \geq 0$ para todos S .

Axioma 2. (Propiedad aditiva) Primero, si $S, T \in \mathcal{M}$, luego $S \subseteq A$, $T \subseteq A$ por definición de \mathcal{M} . Entonces, para cualquiera $x \in S$ que tengamos $x \in A$ y para cualquiera $y \in T$, tenemos $y \in A$.

Así, si $x \in S \cup T$, entonces $x \in A$; por lo tanto $S \cup T \subseteq A$, entonces $S \cup T \in \mathcal{M}$.

Entonces, $S \cap T \subseteq S$ implica $S \cap T \subseteq A$ (desde $S \subseteq A$). Por lo tanto, $S \cap T \in \mathcal{M}$.

Entonces, para cualquiera $S, T \in \mathcal{M}$ que tengamos $S \cup T \in \mathcal{M}$, $S \cap T \in \mathcal{M}$.

Luego, debemos mostrar $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$. Para cualquier $x \in S \cup T$ tenemos $x \in S$, $x \in T$, ó $x \in S$ y T . Entonces, esto significa $x \in (S - T)$, ó $x \in (T - S)$ ó $x \in (S \cap T)$. Por lo tanto,

$$n(S \cup T) = n(S - T) + n(T - S) + n(S \cap T)$$

Del mismo modo observamos,

$$\begin{aligned} n(S) &= (S - T) + n(S \cap T) \Rightarrow n(S - T) = n(S) - n(S \cap T) \\ n(T) &= (T - S) + n(T \cap S) \Rightarrow n(T - S) = n(T) - n(S \cap T) \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} n(S \cup T) &= n(S) - n(S \cap T) + n(T) - n(S \cap T) + n(S \cap T) \\ &= n(S) + n(T) - n(S \cap T) \end{aligned}$$

Axioma 3 (Propiedades de la diferencia). Si $S, T \in \mathcal{M}$ y $S \subseteq T$, entonces desde arriba tenemos

$$n(T - S) = n(T) - n(T \cap S)$$

Pero porque $S \subseteq T$ sabemos $T \cap S = S$, entonces,

$$n(T - S) = n(T) - n(S)$$

1.8. Intervalos y conjuntos ordenados

Definición 1.5 (Intervalo cerrado) Si $a < b$, se indica por $[a, b]$ el conjunto de todos los x que satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq b$.

Definición 1.6 (Intervalo abierto) El intervalo abierto correspondiente, indicado por (a, b) es el conjunto de todos los x que satisfacen $a < x < b$

El intervalo abierto (a, b) se denomina también el interior de $[a, b]$

Definición 1.7 (Intervalo semiabiertos) Los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ que incluyen sólo un extremo están definidos por las desigualdades $a < x \leq b$ y $a \leq x < b$, respectivamente.

1.9. Particiones y funciones escalonadas

Definición 1.8 Un conjunto de puntos que satisfaga

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

se denomina una partición P de $[a, b]$, y se utiliza el símbolo:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

para designar tal partición, la partición P determina n subintervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

Definición 1.9 (Definición de función escalonada) Una función s cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a, b]$ se dice que es una función escalonada, si existe una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que s es constante en cada subintervalo abierto de P . Es decir, para cada $k = 1, 2, \dots, n$ existe un número real S_k tal que:

$$s(x) = S_k \quad \text{si} \quad x_{k-1} < x < x_k$$

A veces las funciones escalonadas se llaman funciones constantes a trozos.

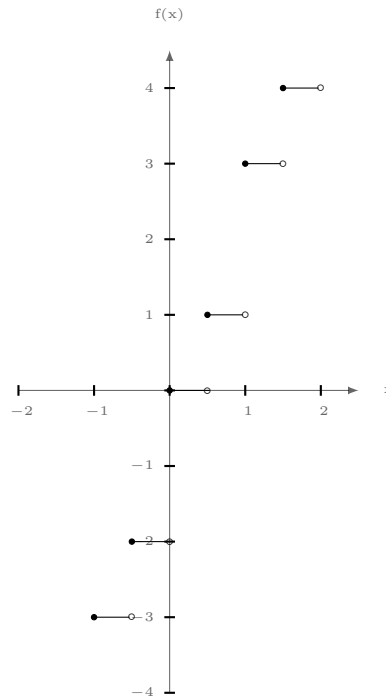
1.11. Ejercicios

En este conjunto de Ejercicios, $[x]$ representa el mayor entero $\leq x$ es decir, la parte entera de x .

1. Sean $f(x) = [x]$ y $g(x) = [2x]$ para todo real x . En cada caso, dibujar la gráfica de la función h definida en el intervalo $[-1, 2]$ por la fórmula que se da.

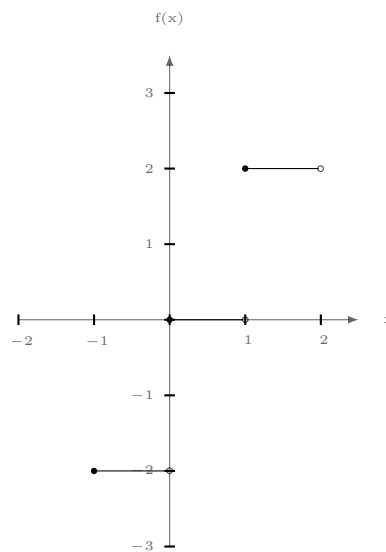
(a) $h(x) = f(x) + g(x)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] + [2x]$



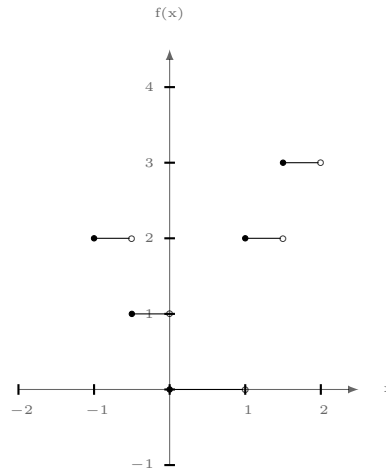
(b) $h(x) = f(x) + g(x/2)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] + [x] = 2[x]$



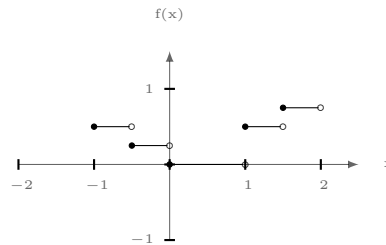
(c) $h(x) = f(x)g(x)$.

Respuesta.- $h(x) = [x] \cdot [2x]$



(d) $h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g(x/2)$.

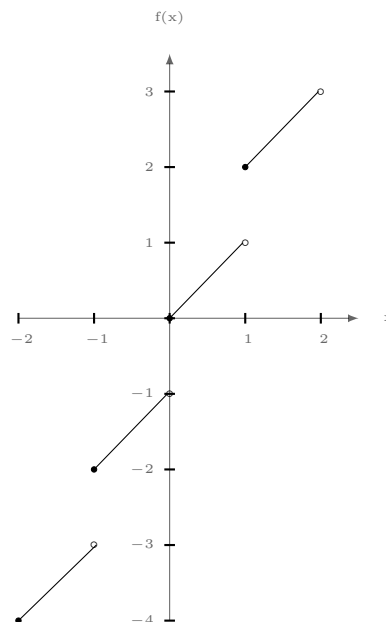
Respuesta.- $\frac{1}{4}[x][2x]$



2. En cada uno de los casos, f representa una función definida en el intervalo $[-2, 2]$ por la fórmula que se indica. Dibújense las gráficas correspondientes a cada una de las funciones f . Si f es una función escalonada, encontrar la partición P de $[-2, 2]$ tal que f es constante en los subintervalos abierto de P .

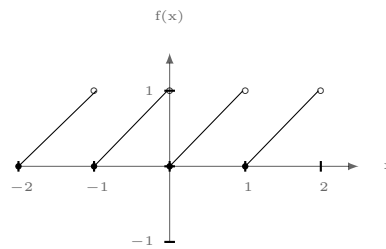
(a) $f(x) = x + [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



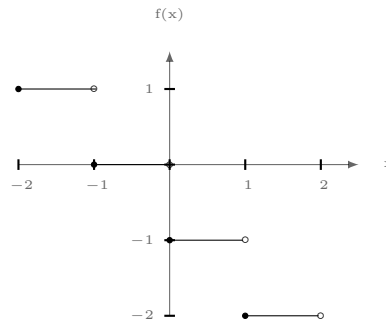
(b) $f(x) = x - [x]$

Respuesta.- No es una función escalonada.



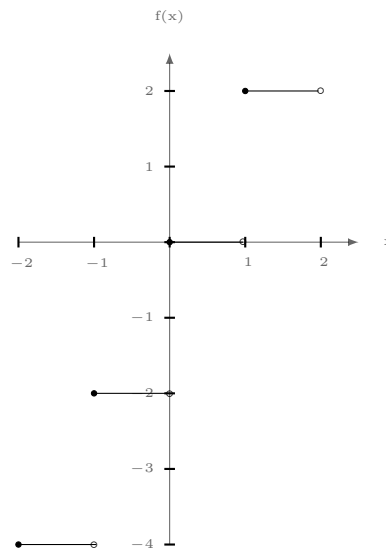
(c) $f(x) = [-x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



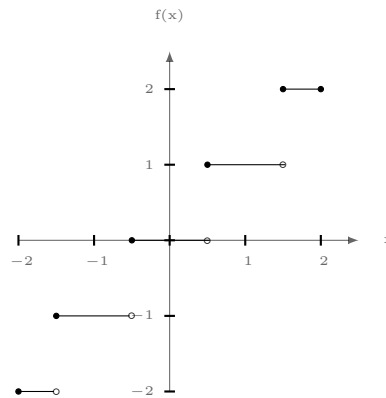
(d) $f(x) = 2[x]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



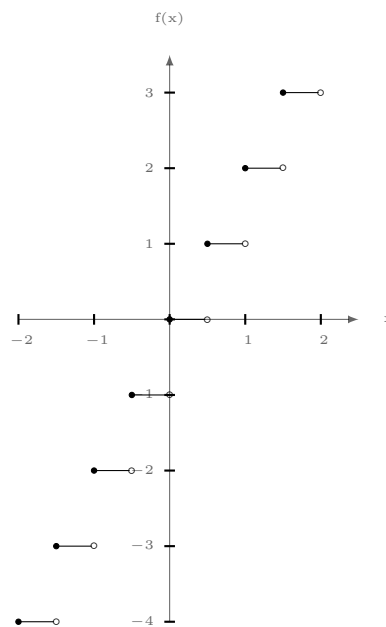
(e) $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$

Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de la partición, $P = \{-2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 2\}$



(f) $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

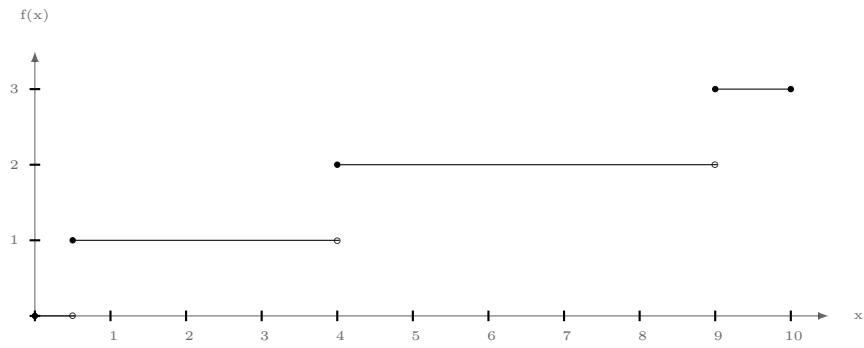
Respuesta.- Esta es una función de paso y es constante en los subintervalos abiertos de los partición, $P = \{-2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$



3. En cada caso, dibujar la gráfica de la función definida por la fórmula que se da.

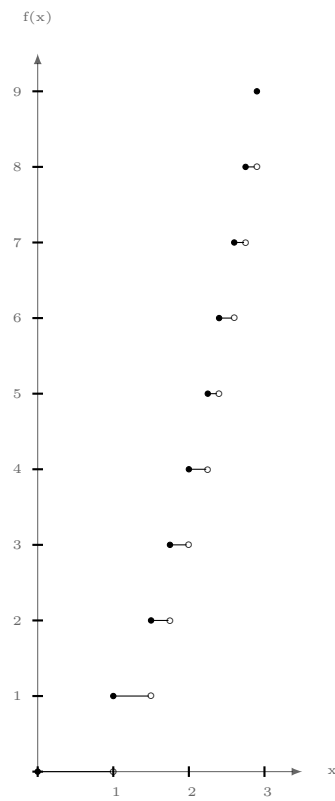
(a) $f(x) = [\sqrt{x}]$ para $0 \leq x \leq 10$

Respuesta.-



(b) $f(x) = [x^2]$

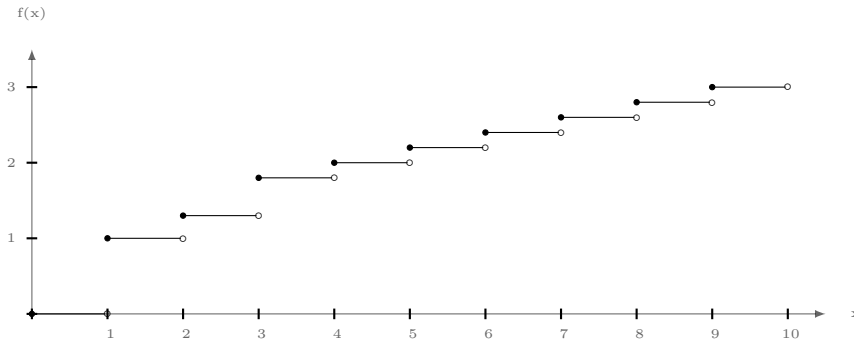
Respuesta.-



• ○

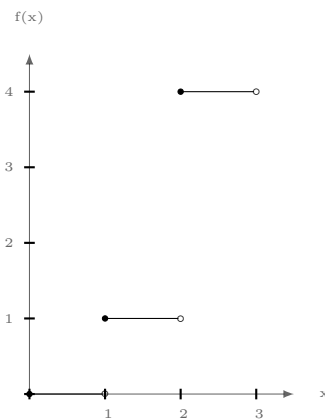
(c) $f(x) = \sqrt{[x]}$ para $0 \leq x \leq 10$.

Respuesta.-



(d) $f(x) = [x]^2$ para $0 \leq x \leq 3$.

Respuesta.-



4. demostrar que la función parte entera tiene las propiedades que se indican:

(a) $[x + n] = [x] + n$ para cada entero n .

Demostración.- Por definición sea $[x + n] = m$ para $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} m \leq x + n < m + 1 &\implies m - 1 \leq x < m - n + 1 \\ &\implies [x] = m - n \\ &\implies [x] + n = m \end{aligned}$$

(b) $[-x] = \begin{cases} -[x] & \text{si } x \text{ es entero} \\ -[x] - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Demostración.- Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $x = n$ para algunos $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $[x] = n$, luego

$$-x = -n \implies [-x] = -n \implies [-x] = -[x]$$

Por otro lado, si $x \notin \mathbb{Z}$, entonces $[x] = n$. Luego

$$n \leq x < n + 1 \implies -n - 1 < -x < -n \text{ ya que } n \neq x \implies [-x] = -n - 1 = -[x] - 1$$

(c) $[x + y] = [x] + [y]$ ó $[x] + [y] + 1$

Demostración.- Sea $[x] = m$ y $[y] = n$, luego,

$$m \leq x < m + 1 \quad y \quad n \leq y < n + 1$$

Entonces, sumando obtenemos

$$m + n \leq x + y < m + n + 2$$

por lo tanto

$$[x + y] = m + n = [x] + [y] \quad o \quad [x + y] = m + n + 1 = [x] + [y] + 1$$

Esto ya que si $x + y$ está entre $m + n$ y $m + n + 1$ entonces $[x + y] = [x] + [y]$ y cuando $x + y$ está entre $m + n + 1$ y $m + n + 2$ entonces $[x + y] = [x] + [y] + 1$.

(d) $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

Demostración.- Por la parte (c)

$$[2x] = [x + x] = [x] + [x] \quad ó \quad [x] + [x] + 1$$

Para $[2x] = [x] + [x]$, sea $[x] = n$, entonces

$$[2x] = 2n \implies 2n \leq 2x < 2n + 1$$

$$\implies n \leq x < n + \frac{1}{2}$$

$$\implies n \leq x + \frac{1}{2} < n + 1$$

$$\implies \left[x + \frac{1}{2} \right] = n$$

de donde, $[2x] = 2n = n + n = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right]$

Por otro lado, para $[2x] = [x] + [x] + 1$, sea $[x] = n$, entonces:

$$[2x] = 2n + 1 \implies 2n + 1 \leq 2x < 2n + 2$$

$$\implies n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$$

$$\implies n + 1 \leq x + \frac{1}{2} < n + 2$$

$$\implies \left[x + \frac{1}{2} \right] = n + 1$$

de donde $[2x] = n + n + 1 = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right]$

$$(e) \quad [3x] = [x] + [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{2}{3}]$$

Demostración.- Por la parte (c) tenemos

$$[3x] = [x+x+x] = [x+x] + [x] \quad \text{ó} \quad [x+x] + [x] + 1 \quad y \quad [x+x] = [x] + [x] \quad \text{ó} \quad [x] + [x] + 1$$

de donde al juntarlos obtenemos:

$$[3x] = [x] + [x] + [x] \quad \text{ó} \quad [x] + [x] + [x] + 1 \quad \text{ó} \quad [x] + [x] + [x] + 2$$

Para $3x = [x] + [x] + [x]$ sea $[x] = n$ entonces

$$3n \leq 3x < 3n + 1 \implies n \leq x < n + \frac{1}{3}$$

$$\implies n \leq x + \frac{1}{3} < n + 1 \quad y \quad n \leq x + \frac{2}{3} < n + 1$$

$$\implies [x] = \left[x + \frac{1}{3} \right] = \left[x + \frac{2}{3} \right] = n$$

Por lo tanto, $[x] = 3n = [x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right]$

Luego para $[3x] = [x] + [x] + [x] + 1$ sea $[x] = n$ entonces,

$$3n + 1 \leq 3x < 3n + 2 \implies n + \frac{1}{3} \leq x < n + \frac{2}{3}$$

$$\implies n + \frac{1}{3} \leq x + \frac{1}{3} < n + 1 \implies \left[x + \frac{1}{3} \right] = n$$

$$y \implies n + 1 \leq x + \frac{2}{3} < n + 2 \implies \left[x + \frac{2}{3} \right] = n + 1$$

Por lo tanto $[3x] = 3n + 1 \implies [3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right]$

Finalmente, para $[3x] = [x] + [x] + [x] + 2$ sea $[x] = n$ entonces

$$3x + 2 \leq 3x < 3x + 3 \implies n + \frac{2}{3} \leq x < n + 1$$

$$\implies n + 1 \leq x + \frac{1}{3} < n + 2 \quad y \quad n + 1 \leq x + \frac{2}{3} < n + 2$$

Así que $[3x] = 3n + 2 = [x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right]$

- 5.** Las fórmulas de los Ejercicios 4(d) y 4(c) sugieren una generalización para $[nx]$. Establecer y demostrar una generalización.

Demostración.- Se puede afirmar que:

$$[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right],$$

luego sea $[x] = m$, entonces

$$m \leq x < m+1 \implies nm \leq nx < nm+n$$

Por lo tanto existen algunos $j \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq j < n$ tales que

$$nm+j \leq nx < nm+j+1$$

ya que sabemos que para cualquier número nx está entre k y $k+1$ para un entero. Pero como $nm \leq nx$ es un número entero k donde está en algún lugar entre nm y nx , lo que significa que es $nm+j$ para algún número entero j . Entonces tenemos que nx está entre $nm+j$ y $nm+j+1$: Básicamente, solo decimos que conocemos $k \leq nx < k+1$ para algún entero k . Pero es mas conveniente escribirlo como $nm+j \leq nx < nm+j+1$.

Luego, $[nx] = nm+j$. y por lo tanto,

$$m + \frac{j}{n} \leq x < m + \frac{j+1}{n}$$

para cada $k \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq k < n-j$ tenemos

$$\begin{aligned} m + \frac{k+k}{n} &\leq x + \frac{k}{n} < m + \frac{j+k+1}{n} && \text{sumando } \frac{k}{n} \\ \implies m &\leq x + \frac{k}{n} < m+1 && \frac{j+k}{n} < 1 \text{ ya que } k < n-j \\ \implies \left[x + \frac{k}{n} = m = [x] \right] &&& \text{para } 0 \leq k < n-j \end{aligned}$$

por otro lado $n-j \leq k < n$, entonces

$$\begin{aligned} m + \frac{k+k}{n} &\leq x + \frac{k}{n} < m + \frac{j+k+1}{n} \\ \implies m+1 &\leq x + \frac{k}{n} < m+2 && \frac{j+k}{n} \geq 1 \text{ ya que } n-j \leq k \\ \implies \left[x + \frac{k}{n} = m+1 = [x] + 1 \right] &&& \text{para } n-j \leq k < n \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] &= \sum_{k=0}^{n-j-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] + \sum_{k=n-j}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] \\ &= (n-j)[x] + j([x] + 1) \\ &= n[x] + j \\ &= nm + j \\ &= [nx] \end{aligned}$$

- 6.** Recuérdesse que un punto de red (x, y) en el plano es aquel cuyas coordenadas son enteras. Sea f una función no negativa cuyo dominio es el intervalo $[a, b]$, donde a y b son enteros, $a < b$. Sea S el conjunto

de puntos (x, y) que satisfacen $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq f(x)$. Demostrar que el número de puntos de la red pertenecientes a S es igual a la suma

$$\sum_{n=a}^b [f(n)]$$

Demostración.- Sea $n \in \mathbb{Z}$ con $a \leq n < b$: Sabemos que tal n existe desde $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$. Entonces, el número de puntos de red S con el primer elemento n es el número de enteros y tales que $0 < y \leq f(n)$. Pero, por definición, esto es $[f(n)]$. Sumando todos los números enteros n . $a \leq n \leq b$ tenemos,

$$S = \sum_{n=a}^b [f(n)]$$

7. Si a y b son enteros positivos primos entre sí, se tiene la fórmula

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b} \right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Se supone que para $b = 1$ la suma del primer miembro es 0.

(a) Dedúzcase este resultado analíticamente contando los puntos de la red en un triángulo rectángulo.

Respuesta.- Sabemos por el ejercicio anterior que

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b} \right]$$

(puntos de red de un triángulo rectángulo con base b y altura a). Además del ejercicio 1,7n4 sabemos que

$$a(T) = I_t + \frac{1}{2}B_T - 1$$

donde I_T es el número de puntos de red interior y B_T es el número de puntos de red límite. También sabemos por la fórmula del área de un triángulo rectángulo que

$$a(T) = \frac{1}{2}(ab)$$

por lo tanto tenemos

$$I = \sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b} \right] = \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}B_T + 1$$

Luego para calcular B_T notamos que no hay puntos límite en la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo ya que a y b no tienen un factor común. Esto se deduce ya que si no fuera tal punto a continuación, $\frac{na}{b} \in \mathbb{Z}$ para algunos $n < b$, tendríamos que a divide a b , lo que contradice que no tienen ningún factor común. Por lo tanto $B_T = a + b + 1$, de donde,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b} \right] &= \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}(a + b + 1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(ab - a - b + 1) \\ &= \frac{1}{2}(a-1)(b-1) \end{aligned}$$

- (b) Dedúzcase este resultado analíticamente de la manera siguiente. Cambiando el índice de sumación, obsérvese que $\sum_{a=1}^{b-1} [na/b] = \sum_{n=1}^{b-1} [a(b-n)/b]$. Aplíquese luego los ejercicios 4(a) y (b) al corchete de la derecha.

Respuesta.- Sea

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b} \right] = \sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{a(b-n)}{b} \right]$$

entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{a(b-n)}{b} \right] &= \sum_{n=1}^{b-1} [a] - \sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b} \right] - \sum_{n=1}^{b-1} 1 \\ \Rightarrow 2 \sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{a(b-n)}{b} \right] &= \sum_{n=1}^{b-1} - \sum_{n=1}^{b-1} = (b-1)a - (b-1) \\ \sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b} \right] &= \frac{1}{2}(a-1)(b-1) \end{aligned}$$

8. Sea S un conjunto de puntos en la recta real. La función característica de S es, por definición, la función $Xs(x) = 1$ para todo x de S y $Xs(x) = 0$ para aquellos puntos que no pertenecen a S . Sea f una función escalonada que toma el valor constante c_k en el k -simo subintervalo I_k de una cierta partición de un intervalo $[a, b]$. Demostrar que para cada x de la reunión $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$ se tiene

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k X_{I_k}(x)$$

Esta propiedad se expresa diciendo que toda función escalonada es una combinación lineal de funciones características del intervalos.

Demostración.- Definimos una función característica, Xs , en un conjunto S de puntos en \mathbf{R} por

$$Xs(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Primero, observemos que los subintervalos abiertos de alguna partición de $[a, b]$ son necesariamente disjuntos desde $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Por lo tanto si $x \in I_1 \cup \dots \cup I_n$ entonces $x \in I_j$ exactamente por uno $j, 1 \leq j \leq n$. Por lo tanto,

$$XI_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } xj = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

para todos $1 \leq k \leq n$ y para cualquiera x . Además, por definición de f , sabemos $f(x) = c_k$ si $x \in I_k$. Así que,

$$\sum_{k=1}^n c_k XI_k(x) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_k \cdot 1 + \dots + c_n \cdot 0 = c_k = f(x)$$

para cada $x \in I_1 \cup \dots \cup I_n$

1.12. Definición de integral para funciones escalonadas

Definición 1.10 (Definición de integral de funciones escalonadas) La integral de s de a a b , que se designa por el símbolo $\int_a^b s(x)dx$, se define mediante la siguiente fórmula:

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^n s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Es decir, para obtener el valor de la integral, se multiplica cada valor s_k constante, por la longitud de intervalo k —simo correspondiente, formando el producto $s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ y se suman luego todos los productos obtenidos.

Definición 1.11 Si s es constante en el intervalo abierto (a, b) , es decir, $s(x) = c$ si $a < x < b$, se tiene entonces:

$$\int_a^b s(x)dx = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = c(b - a)$$

1.13. Propiedades de la integral de una función escalonada

TEOREMA 1.2 (Propiedad aditiva) $\int_a^b [s(x) + t(x)]dx = \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)dx$

TEOREMA 1.3 (Propiedad aditiva) $\int_a^b c \cdot s(x)dx = c \int_a^b s(x)dx$

TEOREMA 1.4 (Propiedad de la linealidad) $\int_a^b [c_1 s(x) + c_2 t(x)]dx = c_1 \int_a^b s(x)dx + c_2 \int_a^b t(x)dx$

TEOREMA 1.5 (Teorema de comparación) Si $s(x) < t(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces $\int_a^b s(x)dx < \int_a^b t(x)dx$

TEOREMA 1.6 (Aditividad respecto al intervalo de integración) $\int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx = \int_a^b s(x)dx$
si $a < c < b$

TEOREMA 1.7 (Invariancia frente a una traslación) $\int_a^b s(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)dx$ para todo real c

TEOREMA 1.8 (Dilatación o contracción del intervalo de integración) $\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx$ para todo $k > 0$

Es conveniente considerar integrales con el límite inferior mayor que el superior. Esto se logra definiendo:

$$\int_a^b s(x)dx = - \int_a^b s(x)dx \quad a < b$$

TEOREMA 1.9 (Propiedad de reflexión de la integral) $\int_a^b s(x)dx = \int_{-b}^{-a} s(-x)dx$

1.15. Ejercicios

1. Calcular el valor de cada una de las siguientes integrales. Se pueden aplicar los teoremas dados en la Sección 1,13 siempre que convenga hacerlo. La notación $[x]$ indica la parte entera de x .

(a) $\int_{-1}^3 [x]dx.$

Respuesta.- Sea $P = \{-1, 0, 1, 2\}$ ya que

$$[x] = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

entonces por definición $\int_{-1}^3 [x]dx = -1 \cdot [0 - (-1)] + 0 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (2 - 1) + 2(3 - 2) = 2$

(b) $\int_{-1}^3 \left[x + \frac{1}{2}\right] dx$

Respuesta.- La partición viene dada por $P = \{-1, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2\}$ ya que

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x + 1/2 < 0 \implies -3/2 \leq x < -1/2 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x + 1/2 < 1 \implies -1/2 \leq x < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x + 1/2 < 2 \implies 1/2 \leq x < 3/2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x + 1/2 < 3 \implies 3/2 \leq x < 5/2 \\ 3 & \text{si } 3 \leq x + 1/2 < 4 \implies 5/2 \leq x < 7/2 \end{cases}$$

entonces por definición $\int_{-1}^3 \left[x + \frac{1}{2}\right] dx = -1 \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + 0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) + 3 \left(3 - \frac{5}{2}\right) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 4$

(c) $\int_{-1}^3 ([x] + [x + 1/2])$

Respuesta.- Por la propiedad aditiva se tiene $\int_{-1}^3 [x]dx + \int_{-1}^3 \left[x + \frac{1}{2}\right] dx = 2 + 4 = 6$.

(d) $\int_{-1}^3 2[x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad homogénea se tiene $2 \cdot \int_{-1}^3 [x]dx = 2 \cdot 2 = 4$

(e) $\int_{-1}^3 [2x]dx$

Respuesta.- Por la propiedad de parte entera donde $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$ y (c) resulta que $\int_{-1}^3 [2x]dx = 6$

(f) $\int_{-1}^3 [-x]dx$

Respuesta.- Por propiedad de parte entera se tiene que $[-x] = -[x] - 1$ ya que el valor de los subintervalos no es entero, luego

$$\int_{-1}^3 -[x] - 1 = \int_{-1}^3 -[x] + \int_{-1}^3 = - \int_{-1}^3 [x] - \int_{-1}^3 1 = -2 - \{1 \cdot [3 - (-1)]\}$$

- 2.** Dar un ejemplo de función escalonada s definida en el intervalo cerrado $[0, 5]$, que tenga las siguientes propiedades $\int_0^2 s(x)dx = 5$, $\int_0^5 s(x)dx = 2$

Respuesta.- Existen infinitas funciones escalonadas que deben cumplir lo siguiente:

$$\int_2^5 s(x)dx = \int_0^5 s(x)dx - \int_0^2 s(x)dx = -3$$

- 3.** Probar que $\int_a^b [x] dx + \int_a^b [-x] dx = a - b$

Demostración.- Por propiedad de parte entera se tiene que $[-x] = -[x] - 1$ si x no es entero. Entonces $\int_a^b [x] dx + \int_a^b -[x] - 1 dx$ luego por la propiedad aditiva $\int_a^b -1 dx$, de donde por la propiedad dilatación $\int_b^a 1 dx$ y por lo tanto $a - b$.

- 4. (a)** Si n es un entero positivo, demostrar que $\int_0^n [t] dt = n(n-1)/2$.

Demostración.- Según la definición de la función de número entero mayor, $[t]$ es constante en los subintervalos abiertos, por lo que $[t] = k - 1$ si $k - 1 < t < k$ entonces

$$\int_0^n = \sum_{k=1}^n (k-1)(k - (k-1)) = \sum_{k=1}^n (k-1)$$

Luego sabemos que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ por lo tanto $\int_0^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

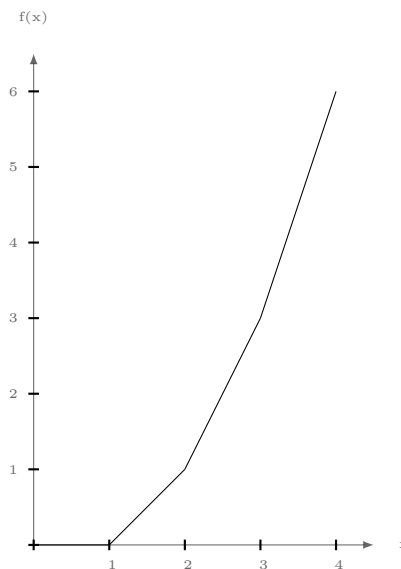
También se podría demostrar de la siguiente manera.

$$\int_0^n [t] dt = 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (2-1) + \dots + (n-1) \cdot (n - (n-1)) = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(b) Si $f(x) = \int_0^x [t] dt$ para $x \geq 0$, dibujar la gráfica de f sobre el intervalo $[0, 4]$.

Respuesta.- Ya que $x \in \mathbf{R}^+$ la gráfica será continua, pero por motivos prácticos dibujemos puntos en los números enteros del intervalo $[0, 4]$

- $f(0) = \int_0^0 [t] dt = 0(0-0) = 0$
- $f(1) = \int_0^1 [t] dt = 0(1-0) = 0$
- $f(2) = \int_0^2 [t] dt = 0(1-0) + 1(2-1) = 1$
- $f(3) = \int_0^3 [t] dt = 0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) = 3$
- $f(4) = \int_0^4 [t] dt = 0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) + 3(4-3) = 6$



5. (a) Demostrar que $\int_0^2 [t^2] dt = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Demostración.-

$$[t^2] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t^2 < 1 \Rightarrow 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t^2 < 2 \Rightarrow 1 \leq t < \sqrt{2} \\ 2 & \text{si } 2 \leq t^2 < 3 \Rightarrow \sqrt{2} \leq t < \sqrt{3} \\ 3 & \text{si } 3 \leq t^2 < 4 \Rightarrow \sqrt{3} \leq t < 2 \end{cases}$$

Vemos que la partición esta dada por $P = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$ y por lo tanto:

$$\int_0^2 [t^2] dt = \sum_{k=1}^5 s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0(1-0) + 1(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 3(2-\sqrt{3}) = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

(b) Calcular $\int_{-3}^3 [t^2] dt$

Respuesta.- Sea $\int_{-3}^3 [t^2] dx = \int_0^3 [t^2] dx + \int_{-3}^0 [t^2] dx = \int_0^3 [t^2] dx + \int_0^3 [(-t)^2] dx = 2 \int_0^3 [t^2] dx$
entonces:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 [t^2] dt &= 2 \cdot \int_0^3 [t^2] dt \\ &= 2 \cdot \left(\int_0^2 [t^2] dt + \int_2^3 [t^2] dt \right) \\ &= 2 \cdot (5 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 4(\sqrt{5} - 2) + 5(\sqrt{6} - \sqrt{5}) + 6(\sqrt{7} - \sqrt{6}) + 7(\sqrt{8} - \sqrt{7}) + 8(3 - \sqrt{8})) \\ &= 2(21 - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}\sqrt{6} - \sqrt{7}) \end{aligned}$$

6. (a) Si n es un entero positivo demostrar que $\int_0^n [t]^2 / dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

Demostración.- Sea $P = \{0, 1, \dots, n\}$. Entonces P es una partición de $[0, n]$ y $[t]^2$ es constante en los subintervalos abiertos de P . Además, $[t]^2 = (k-1)^2$ para $k-1 < t < k$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^n [t]^2 dt &= \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \cdot (k - (k-1)) \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\ &= \sum_{n-1}^{k=0} k^2 \\ &= \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$