1

Tres teoremas fuertes

TEOREMA 1.1 *Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = 0$.*

Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto.

TEOREMA 1.2 *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a,b]$.*

Geométricamente, este teorema significa que la gráfica f queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal.

TEOREMA 1.3 *Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe algún número y en $[a,b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.*

Se dice que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo en dicho intervalo.

TEOREMA 1.4 *Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración.- Sea $g = f - c$. Entonces g es continua, y $g(a) + c < c < g(b) + c \implies g(a) < 0 < g(b)$. Por el teorema 1, existe algún x en $[a,b]$ tal que $g(x) = 0$. Pero esto significa que $f(x) = c$.

TEOREMA 1.5 *Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a,b]$ y $-f(a) < -c < -f(b)$. Por el teorema 4 existe algún x en $[a,b]$ tal que $-f(x) = -c$, lo que significa que $f(x) = c$.

Si una función continua en un intervalo toma dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre ellos; esta ligera generalización del teorema 1 recibe a menudo el nombre de **teorema de los valores**

intermedios.

TEOREMA 1.6 *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es acotada inferiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo x en $[a,b]$.*

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a,b]$, así por el teorema 2 existe un número M tal que $-f(x) \leq M$ para todo x en $[a,b]$. Pero esto significa que $f(x) \geq -M$ para todo x en $[a,b]$, así podemos poner $N = -M$.

Los teoremas 2 y 6 juntos muestran que una función continua f en $[a,b]$ son acotados en $[a,b]$, es decir, existe un número N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo x en $[a,b]$. En efecto, puesto que el teorema 2 asegura la existencia de un número N_1 tal que $f(x) \leq N$, para todo x de $[a,b]$ y el teorema 6 asegura la existencia de un número N_2 tal que $f(x) \geq N$, para todo x en $[a,b]$, podemos tomar $N = \text{máx}(|N_1|, |N_2|)$.

TEOREMA 1.7 *Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe algún y en $[a,b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.*

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a,b]$; por el teorema 3 existe algún y en $[a,b]$ tal que $-f(y) \geq -f(x)$ para todo x en $[a,b]$, lo que significa que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.

TEOREMA 1.8 *Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si $\alpha > 0$, entonces existe algún número x tal que $x^2 = \alpha$.*

Demostración.- Consideremos la función $f(x) = x^2$, el cual es ciertamente continuo. Notemos que la afirmación del teorema puede ser expresado en términos de f: "el número α posee una raíz cuadrada" significa que f toma el valor alpha. La demostración de este hecho acerca de f será una consecuencia fácil del teorema 4.
Existe, evidentemente, un número $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$; en efecto, si $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$, mientras que si $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Puesto que $f(0) < \alpha < f(b)$, el teorema 4 aplicado a $[0,b]$ implica que para algún x de $[0,b]$, tenemos $f(x) = \alpha$, es decir, $x^2 = \alpha$.

Precisamente el mismo raciocinio puede aplicarse para demostrar que todo número positivo tiene una raíz n-ésima, cualquiera que sea el número n. Si n es impar, se puede decir mas: todo número tiene una raíz n-ésima. Para demostrarlo basta observar que si el número positivo α tiene la raíz n-ésima x, es decir, si $x^n = \alpha$, entonces $(-x)^n = -\alpha$ (puesto que n es impar), de modo que α tiene una raíz n-ésima $-\alpha$. Afirmar que, para un n impar, cualquier número α tiene una raíz n-ésima equivale a afirmar que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

tiene una raíz si n es impar. El resultado expresado de este modo es susceptible de gran generalización.

TEOREMA 1.9 *Si n es impar, entonces cualquier ecuación*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

posee raíz.

Demostración.- Tendremos que considerar, evidentemente, la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

habría que demostrar que f es unas veces positiva y otras veces negativa. La idea intuitiva es que para un $|x|$ grande, la función se parece mucho más a $g(x) = x^n$ y puesto que n es impar, ésta función es positiva para x grandes positivos y negativos para x grandes negativos. Un poco de cálculo algebraico es todo lo que hace falta para dar formar a esta idea intuitiva.
Para analizar debidamente la función f conviene escribir

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

obsérvese que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \ldots + \frac{|a_0|}{|x^n|}$$

En consecuencia, si elegimos un x que satisfaga

$$|x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0| \qquad (*)$$

entonces $|x^k| > |x|$ y

$$\frac{|a_{n-k}}{x^k} < \frac{a_{n-k}}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}} = \frac{1}{2n}$$

de modo que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

expresado de otra forma,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x_n} \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x_n}..$$

Por lo tanto, si elegimos un $x_1 > 0$ que satisfaga $(*)$, entonces

$$\frac{x_1^n}{2} \leq x_1^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x_1)$$

así que $f(x_1) > 0$. Por otro lado, si $x_2 < 0$ satisface $(*)$, entonces $x_2^n < 0$ y

$$\frac{x_2^n}{2} \geq x_2^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \ldots + \frac{a_0}{x_2^n}\right) = f(x_2),$$

así $f(x_2) < 0$.
Ahora aplicando el teorema 1 para el intervalo $[x_2, x_1]$ llegamos a la conclusión de que existe un x en $[x_2, x_1]$ tal que $f(x) = 0$.

TEOREMA 1.10 *Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, entonces existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.*

Demostración.- *Lo mismo que en el teorema 9, si*

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|),$$

entonces para todo x con $|x| \geq M$, tenemos

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}$$

Al ser n par, $x^n \geq 0$ para todo x, de modo que

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

siempre que $|x| \geq M$. *Consideremos ahora el número* $f(0)$. *Sea* $b > 0$ *un número tal que* $b^n \geq 2f(0)$ *y también* $b > M$. *Entonces si* $x \geq b$, *tenemos*

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Análogamente, si $x \leq -b$, *entonces*

$$f(x) \geq \quad \geq \quad = \quad \geq f(0).$$

Resumiendo ahora el teorema 7 a la función f *en el intervalo* $[-b, b]$. *Se deduce que existe un número* y *tal que*

$$(1) \qquad si \ -b \leq x \leq b, \ entonce\ f(y) \leq f(x).$$

En particular, $f(y) \leq f(0)$. *De este modo*

$$(2) \qquad si\ x \leq -b\ o\ x \geq b, \ entonces\ f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Cambiando (1) y (2) vemos que $f(y) \leq f(x)$ *para todo* x.

TEOREMA 1.11 *Consideremos la ecuación*

$$(*) \qquad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = c,$$

y supongamos que n *es par. Entonces existe un número* m *tal que* $(*)$ *posee una solución para* $c \geq m$ *y no posee ninguna para* $c < m$.

Demostración.- *Sea* $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ *Según el teorema 10, existe un número* y *tal que* $f(y) \leq f(x)$ *para todo* x.
Sea $m = f(y)$. *Si* $c < m$ *entonces la ecuación* $(*)$ *no tiene, evidentemente, ninguna solución, puesto que el primer miembro tiene un valor* $\geq m$. *Si* $c = m$ *entonces* $(*)$ *tiene* y *como solución. Finalmente, supongamos* $c > m$. *Sea* b *un número tal que* $b > y$, $f(b) > c$. *Entonces* $f(y) = m < c < f(b)$. *En consecuencia, según el teorema 4, existe algún número* x *en* $[y, b]$ *tal que* $f(x) = c$, *con lo que* x *es una solución de* $(*)$.

1.1. Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles está acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo y mínimo.

(i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. El mínimo es 0 e no tiene máximo.

(ii) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. No tiene máximo ni mínimo

(iii) $f(x) = x^2$ en $\mathbf{R}$.

Respuesta.- No está acotado superior pero si inferiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(iv) $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$.

Respuesta.- Está acotada inferiormente pero no así superiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$

Respuesta.- Es acotado superior e inferiormente. Se entiende que $a > -1$ (de modo que $-a-1 < a+1$). Si $-1 < a \leq 1/2$, entonces $a < -a-1$, así $f(x) = a+2$ para todo x en $(-a-1, a+1)$, por lo tanto $a+2$ es el máximo y mínimo valor. Si $-1/2 < a \leq 0$, entonces f tiene el mínimo valor en a^2, y si $a \geq 0$, entonces f tiene un mínimo valor en 0. Ya que $a+2 > (a+1)^2$ solo para $[-1-\sqrt{5}]/2 < a < [1+\sqrt{5}]/2$, cuando $a \geq -1/2$ésta función f tiene un máximo valor solo para $a \leq [1+\sqrt{5}]/2$ (el máximo valor será $a+2$).

(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ en $[-a-1, a+1]$.

Respuesta.- Está acotado superior e inferiormente. Como en la parte (v), se asume que $a > -1$. Si $a \leq -1/2$ entonces f tiene el valor mínimo y un máximo $3/2$. Si $a \geq 0$, entonces f tiene un valor mínimo en 0, y un valor máximo $max(a^2, a+2)$. Si $-1/2 < a < 0$, entonces f tiene un máximo valor $3/2$ y no así con un valor mínimo.

(vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es 1.

(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El máximo es 1 y no existe un mínimo.

(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 0, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es -1 y el máximo es 1.

(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$ en $[0, a]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es a.

(xi) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x + \sqrt{1-a^2})$ en $[0, a^3]$.

Respuesta.- Ya que es continua f tiene máximo como también mínimo.

(xii) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es a.

2. Para cada una de las siguientes funcione polinómicas f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n+1$.

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.

Respuesta.- $n = -2$, ya que $f(-2) = (-2)^3 + 2 + 3 = -3 < 0 < 3 = (-1)^3 - (-1) + 3$

(ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.

Respuesta.- $n = -5$ ya que $f(-5) = -11 < 0 < f(-4)$.

(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.

Respuesta.- $n = -1$ ya que, $f(-1) = -1 < 0 f(0)$.

(iv) $4x^2 - 4x + 1$

Respuesta.- No existe un entero n tal que $f(x) = 0$.

3. Demostrar que existe algún número x tal que

(i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$.

Respuesta.- Si x^{179} y $\dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x}$, son continuas en $\mathbb{R}$ entonces $f(x) = x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x}$ es continua en $\mathbb{R}$ y $f(1) > 0$, mientras que $f(-2) < 0$, de modo que $f(x) = 0$ para algún x en $(-2, 1)$.

(ii) $\operatorname{sen} x = x - 1$.

Respuesta.- Sea $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$ entonces f es continua en $\mathbb{R}$ y $f(0) > 0$, mientras que $f(2) < 0$, así por el teoremas 4 se tiene que $f(x) = c$ para algún x en $(0, 2)$.

4. Este problema es una continuación del problema 3-7

(a) Si $n - k$ es par, y ≥ 0, hallar una función polinómica de grado n que tenga exactamente k raíces.

Respuesta.- Sea $l = (n - k)/2$ de donde

$$f(x) = (x^{2(n-k)/2} + 1)(x - 1)(x - 2) \cdots (x - k).$$

(b) Una raíz a de una función polinómica f se dice que tiene multiplicidad m si $f(x) = (x-a)^m g(x)$, donde g es una función polinómica que no tiene la raíz a. Sea f una función polinómica de grado n. Supóngase que f tiene k raíces, contando multiplicidades, es decir supóngase que k es la suma de las multiplicidades de todas las raíces. Demostrar que $n-k$ es par.

Demostración.- Por la condición dada, f es una función polinómica real de grado n tal que f tiene exactamente k raíces en $\mathbb{R}$ contando multiplicidades. Probaremos que $n-k$ es par. Para ello consideraremos los siguientes casos.

Caso 1.- Si $n = k$ es trivial decir que $n-k = 0$ de donde se sabe que es par.

Caso 2.- Si $n > k$, sea $x_1, x_2, \ldots, _m$ raíces reales de f con multiplicidades $k_1, k_2, \ldots, k_m$ respectivamente y por lo tanto,

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k.$$

Entonces f puede ser escrito como,

$$f(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m}p_1(x)p_2(x)\cdots p_i(x)$$

donde $p_i(x)$ son polinomios irreducibles en $\mathbb{R}$ tal que el grado de p_i suma $n-k$. Ahora recordemos que todo polinomio irreducible en $\mathbb{R}$ debe tener de grado un entero par. Esto se debe a que cada polinomio de orden impar tiene al menos una raíz real, esto por el teorema 9, por lo tanto $p_i(x)$ no puede ser irreducible en $\mathbb{R}$. Ahora observe que sin pérdida de generalidad hemos asumido que hay l polinomios irreducibles tales que la suma de sus grados $n-k$. Dado que cada uno de los l polinomios tienen grado par, entonces la suma de sus grados debe ser un entero par. Se sigue que $n-k$ es un entero par.

5. Supóngase que f es continua en $[a,b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?.

Respuesta.- f es constante, ya que si f tomara dos valores distintos, entonces f tomaría todos los valores intermedios, incluyendo valores irracionales, es decir, si no fuera constante, entonces existe dos números racionales r_1 y r_2 tal que para algún c, d se tiene $a \leq c < d \leq$, $f(c) = r_1$ y $f(d) = r_2$. Por el teorema 7.4 en el intervalo $[c,d]$, f toma todos los valores entre r_1 y r_2, donde se concluye que existe algún número irracional, contradiciendo el hecho de que f solo toma valores racionales.

6. Supóngase que f es una función continua en $[-1,1]$ tal que $x^2 + f^2(x) = 1$ para todo x. (Esto significa que $(x, f(x))$ siempre está sobre el circulo unidad.) Demostrar que o bien es $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para todo x, o bien $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ para todo x.

Demostración.- De lo contrario, f toma valores tanto positivos como negativos, por lo que f tendría el valor 0 en $(-1,1)$, lo cual es imposible, ya que $\sqrt{1-x^2} \neq 0$ para x en $(-1,1)$.

7. ¿Cuántas funciones continuas f existen satisfaciendo $f^2(x) = x^2$ para todo x?.

Respuesta.- Existen 4 funciones continuas que satisfacen la condición dada, es decir,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x \\ f(x) & = & -x \\ f(x) & = & |x| \\ f(x) & = & -|x| \end{array}$$

8.