

Funciones continuas

1.3. Definición de límite de una función

La continuidad existe si existe continuidad por la izquierda y por la derecha.

Definición 1.1 (Definición de entorno de un punto) *Cualquier intervalo abierto que contenga un punto p como su punto medio se denomina entorno de p .*

Notación.- Designemos los entornos con $N(p)$, $N_1(p)$, $N_2(p)$, etc. Puesto que un entorno $N(p)$ es un intervalo abierto simétrico respecto a p , consta de todos los números reales x que satisfagan $p - r < x < p + r$ para un cierto $r > 0$. El número positivo r se llama radio del entorno. En lugar de $N(p)$ ponemos $N(p; r)$ si deseamos especificar su radio. Las desigualdades $p - r < x < p + r$ son equivalentes a $-r < x - p < r$, y a $|x - p| < r$. Así pues, $N(p; r)$ consta de todos los puntos x , cuya distancia a p es menor que r .

En la definición que sigue suponemos que A es un número real y que f es una función definida en un cierto entorno de un punto p (excepción hecha acaso del mismo p). La función puede estar definida en p pero esto no interviene en la definición.

Definición 1.2 (Definición de límite de una función) *El simbolismo*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \quad [o \ f(x) \rightarrow A \quad x \rightarrow p]$$

significa que para todo entorno $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \text{ siempre que } x \in N_2(p) \text{ y } x \neq p$$

El entorno $N_2(p)$ se cita en primer lugar, e indica cuán próximo queremos que sea $f(x)$ a su límite A . El segundo entorno, $N_1(A)$, nos indica lo próximo que debe estar x de p para que $f(x)$ sea interior al primer entorno $N_1(A)$. El entorno $N_2(p)$ dependerá del $N_1(A)$ elegido. Un entorno $N_2(p)$ que sirva para un $N_1(A)$ determinado servirá también, naturalmente, para cualquier $N_1(A)$ mayor, pero puede no ser útil para todo $N_1(A)$ más pequeño.

Decir que $f(x) \in N_1(A)$ es equivalente a la desigualdad $|f(x) - A| < \epsilon$ y poner que $x \in N_2(p)$, $x \neq p$ es lo mismo que escribir $0 < |x - p| < \delta$. Por lo tanto, la definición de límite puede también expresarse así:

El símbolo $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta.$$

Observamos que las tres desigualdades,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow p} (f(x) - A) = 0, \lim_{x \rightarrow p} [f(x) - A] = 0$$

Son equivalentes. También son equivalentes las desigualdades,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A, \lim_{h \rightarrow 0} f(p + h) = A.$$