1

Algunas aplicaciones de la integración

1.2. El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

TEOREMA 1.1 *Supongamos que f y g son integrables y que satisfacen $f \leq q$ en $[a,b]$. La región S entre sus gráficas es medible y su área $a(S)$ viene dada por la integral*

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Demostración.- *Demostración.-* *Supongamos primero que f y g son no negativas,. Sean F y G los siguientes conjuntos:*

$$F = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x), \quad G = (x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x).$$

Esto es, G es el conjunto de ordenadas de g, y F el de f, menos la gráfica de f. La región S es la diferencia $G-F$. Según los teoremas 1.10 y 1.11, F y G son ambos medibles. Puesto que $F \subseteq G$ la diferencia $S = G-F$ es también medible, y se tiene

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Consideremos ahora el caso general cuando $f \leq q$ en $[a,b]$, pero no son necesariamente no negativas. Este caso lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada encima del eje x. Esto es, elegimos un número positivo c suficientemente grande que asegure que $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$ para todo x en $[a,b]$. Por lo ya demostrado la nueva región T entre las gráficas de $f+c$ y $g+c$ es medible, y su parea viene dad por la integral

$$a(T) = \int_a^b [(g(x)+c) - (f(x)+c)] = \int_[g(x) - f(x)]\, dx$$

Pero siendo T congruente a S, ésta es también medible y tenemos

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

Esto completa la demostración.

Nota 1.1 *En los intervalos $[a,b]$ puede descomponerse en un número de subintervalos en cada uno de los cuales $f \leq g$ o $g \leq f$ la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma*

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$$

LEMA 1.1 (Área de un disco circular) *Demostrar que $A(r) = r^2 A(1)$. Esto es, el área de un disco de radio r es igual al producto del área de un disco unidad (disco de radio 1) por r^2.*

Demostración.- *Ya que $g(x) - f(x) = 2g(x)$, el teorema 2.1 nos da*

$$A(r) = \int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

En particular, cuando $r = 1$, se tiene la fórmula

$$A(1) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Cambiando la escala en el eje x, y utilizando el teorema 1.19 con $k = 1/r$, se obtiene

$$A(r) = 2\int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} g(rx)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - (rx)^2}\, dx = 2r^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = r^2 A(1)$$

Esto demuestra que $A(r) = r^2 A(1)$, como se afirmó.

Definición 1.1 *Se define el número π como el área de un disco unidad.*

La formula que se acaba de demostrar establece que $A(r) = \pi r^2$

Generalizando el anterior lema se tiene

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x)\, dx = k\int_{ka}^{kb} f(x/k)\, dx = k^2\int_a^b f(x)\, dx$$

TEOREMA 1.2 *Para $a > 0$, $b > 0$ y n entero positivo, se tiene*

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{b^{1-1/n} - a^{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Demostración.- *Sea $\int_0^a x^{\frac{1}{n}}$. El rectángulo de base a y altura $a^{\frac{1}{n}}$ consta de dos componentes: el conjuntos de ordenadas de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ a a y el conjuntos de ordenadas $g(y) = y^n$ a $a^{\frac{1}{n}}$. Por lo tanto,*

$$a \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}} = \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\, dx + \int_0^{a^{\frac{1}{n}}} y^n\, dy \implies \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\, dx = a^{1+\frac{1}{n}} - \left.\frac{y^{n+1}}{n+1}\right|_0^{a^{\frac{1}{n}}} = a^{1+\frac{1}{n}} - \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{a^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Análogamente se tiene

$$\int_0^b x^{\frac{1}{n}}\ dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

Luego notemos que

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\ dx = \int_0^b x^{\frac{1}{n}}\ dx - \int_0^a x^{\frac{1}{n}}\ dx$$

por lo tanto

$$\int_a^b x^{\frac{1}{n}}\ dx = \frac{b^{1+\frac{1}{n}} - b^{1+\frac{1}{n}}}{1+1/n}$$

1.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, calcular el área de la región S entre las gráficas de f y g para el intervalo $[a,b]$ que en cada caso se especifica. Hacer un dibujo de las dos gráficas y sombrear S.

1. $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 0, \quad a = -2, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [4 - x^2 - 0]\ dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 4(2 - (-2)) - \left(\frac{2^3 - (-2)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

2. $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 8 - 2x^2, \quad a = -2, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_{-2}^{2} [8 - 2x^2 - (4 - x^2)]\ dx = \int_{-2}^{2} 4 - x^2\ dx = \frac{32}{3}\ (por\, ejercicio\ 1)$$

3. $f(x) = x^3 + x^2, \quad g(x) = x^3 + 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^{1} x^3 + 1 - (x^3 + x^2)\ dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\ dx = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{1 - (-1)}{3} = \frac{4}{3}$$

4. $f(x) = x - x^2, \quad g(x) = -x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\int_0^2 x - x^2 - (-x)\ dx = \int_0^2 2x - x^2 = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{2}$$

5. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 1$

Respuesta.-

$$\int_0^1 x^{1/3} - x^{1/2}\, dx = \left.\frac{x^{1+1/3}}{1+1/3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

6. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 1, \quad b = 2.$

Respuesta.-

$$\int_1^2 x^{1/2} - x^{1/3}\, dx = \left.\frac{x^{1/2+1}}{1+1/2}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{1/3}+1}{1+1/3}\right|_1^2 = \frac{2^{1/2+1}-1}{1+1/2} - \frac{2^{1/3+1}}{1+1/3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12}$$

7. $f(x) = x^{1/3}, \quad g(x) = x^{1/2}, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Sea

$$\int_0^1 |x^{1/3} - x^{1/2}|\, dx + \int_1^2 |x^{1/3} - x^{1/2}|\, dx$$

por los problemas 5 y 6 se tiene

$$\frac{1}{12} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{6}$$

8. $f(x) = x^{1/2}, \quad g(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{1/2} - x^2\, dx + \int_1^2 x^2 - x^{1/2}\, dx &= \left(\left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \right) + \left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}\right|_1^2 \right) \\
&= \left(\frac{1}{1+1/2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2^3-1}{3} - \frac{2^{1+1/2}-1}{1+1/2} \right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \\
&= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

9. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x+1, \quad a = -1, \quad b = (1+\sqrt{5})/2$

Respuesta.

$$\int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - (x+1)\, dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} (x+1) - x^2\, dx - \ =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} x^2 - x - 1\,dx + \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} x + 1 - x^2\,dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-1}^{(1-\sqrt{5})/2} + \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{6} \\
&= \frac{5\sqrt{5}-3}{4}
\end{aligned}$$

10. $f(x) = x(x^2-1), \quad g(x) = x, \quad a = -1, \quad b = \sqrt{2}$

Respuesta.-

$$\int_{-1}^{0} x(x^2-1) - x\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} x - [x(x^2-1)]\,dx = \int_{-1}^{0} x^3 - 2x\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} -x^3 + 2x\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} + 1 + (-1+2) = \frac{7}{4}$$

11. $f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad a = -1, \quad b = 1$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x \in [-1, 0) \\ x & si \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} -x - x^2 + 1\,dx + \int_{0}^{1} x - x^2 + 1\,dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

12. $f(x) = |x+1|, \quad g(x) = x^2 - 2x, \quad a = 0, \quad b = 2$

Respuesta.- Definamos f de la siguiente manera:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} -(x+1) & si \quad x \in [0, 1) \\ x+1 & si \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)-g(x)\,dx &= \int_0^1 -(x-1)-x^2+2x\,dx+\int_1^2 x-1-x^2+2x\,dx\\
&= \int_0^1 -x^2+x+1\,dx+\int_1^2 -x^2+3x-1\,dx\\
&= \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2\\
&= \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{8}{3}+6-2+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1\right)\\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

13. $f(x)=2|x|, \quad g(x)=1-3x^3, \quad a=-\sqrt{3}/3, \quad b=\dfrac{1}{3}$

Respuesta.- Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x & si \quad x\in[-\sqrt{3}/3,0)\\ x & si \quad x\in[0,1/3]\end{cases}$$

de donde se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)-f(x)\,dx &= \int_{-\frac{-\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} g(x)\,dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx\\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}} 1-3x^3\,dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0} -2x\,dx-\int_0^{\frac{1}{3}} 2x\,dx\\
&= \left(x-\frac{3}{4}x^4\right)\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{1}{3}}+x^2\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0}-x^2\Big|_0^{\frac{1}{3}}\\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{108}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{12}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}\\
&= \frac{9\sqrt{3}-1}{27}
\end{aligned}$$

14. $f(x)=|x|+|x-1|, \quad g(x)=0, \quad a=-1, \quad b=2$

Respuesta.- En este problema $f(x)\geq g(x)$ en el intervalo $[-1,2]$, por lo tanto

$$\int_{-1}^2 f(x)-g(x)\,dx=\int_{-1}^2 |x|+|x+1|\,dx=\int_{-1}^2 |x|\,dx+\int_{-1}^2 |x-1|\,dx$$

Definimos cada función por separado,

$$|x|=\begin{cases} -x & si \quad x\in[-1,0)\\ x & si \quad x\in[0,2]\end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases} -(x-1) & si \quad x\in[-1,1)\\ x-1 & si \quad x\in[1,2]\end{cases}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} |x|\ dx + \int_{-1}^{2} |x-1|\ dx &= \int_{-1}^{0} -x\ dx + \int_{0}^{2} x\ dx + \int_{-1}^{1} -(x-1)\ dx + \int_{1}^{2} x-1\ dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2} + \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} + (x)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} + (-x)\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

15.