1

Cálculo diferencial

1.1 Regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas

Teorema 1.1 (Regla de la cadena)**.** Sea f la función compuesta de dos funciones u y v, expresado por $f = u \circ v$. Suponga que ambas derivadas $v'(x)$ y $u'(y)$ existen, donde $y = v(x)$, entonces la derivada $f'(x)$ también existe y es dado por la fórmula

$$f'(x) = u'(y) \cdot v'(x) \quad \text{o} \quad f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x) \quad \text{o} \quad (u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v' \quad \text{o} \quad u(v)' = u'(v) \circ v'.$$

Dicho de otro modo, para calcular la derivada de $u \circ v$ respecto a x se calcula primero la derivada de u en el punto y donde $y = v(x)$, y se multiplica ésta por $v'(x)$.

Demostración.- Se trata aquí de demostrar $f'(x) = u'(v) \cdot v'(x)$. Se supone que v tiene derivada en x y u tiene derivada en $v(x)$ y se trata de demostrar que f tiene derivada en x dada por el producto $u'[v(x)] \cdot v'(x)$. El cociente de diferencia para f es:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u\left[v(x+h)\right] - y\left[v(x)\right]}{h}$$

Ahora es conveniente introducir la siguiente notación: Sean $y = v(x)$ y sea $k = v(x+h) - v(x)$. Es importante poner de manifiesto que k depende de h. Entonces se tiene $v(x+h) = y + k$, por lo que el cociente de diferencias de f se transforma en:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{h}$$

El segundo miembro sería el cociente de diferencias cuyo límite define $u'(y)$, si en el denominador en vez de h apareciera k. Si $k \neq 0$ se completa fácilmente la demostración multiplicando el numerador y el denominador por k toma la forma:

$$\frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

Cuando $h \to 0$ el último cociente del segundo miembro tiende a $v'(x)$. Puesto que $k = v(x+h) - v(x)$ y v es continua en x, al tender $h \to 0$ también $k \to 0$; por tanto, el primer cociente del segundo miembro tiende a $u'(y)$ cuando $h \to 0$.
Aunque el razonamiento precedente parece el camino más natural para la demostración, sin embargo no es completamente general. Como $k = v(x+h) - v(x)$, puede ocurrir que $k = 0$ para infinitos valores de h cuando $h \to 0$, en cuyo caso pasar a $\dfrac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \dfrac{k}{h} = \dfrac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}$ no es válido.
Para soslayar esta dificultad es necesario modificar ligeramente la demostración.
Volviendo a la ecuación $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{u(y+k) - u(y)}{h}$ se expresa el cociente del segundo miembro

de manera que no aparezca k en el denominador, para lo cual se introduce la diferencia entre la derivada $u'(y)$ y el cociente de diferencias cuyo límite es $u'(y)$. Es decir, se define una nueva función g como sigue:

$$g(t) = \frac{u(y+t)}{t} - u'(y) \text{ si } t \neq 0.$$

Esta ecuación define $g(t)$ sólo si $t \neq 0$. Multiplicando por t y transponiendo términos, se puede escribir en la forma:

$$u(y+t) - u(y) = t[g(t) + u'(y)].$$

Aunque esta última forma se había deducido en la hipótesis de ser $t \neq 0$, es válida también para $t = 0$ mientras se asigne algún valor definido a $g(0)$. El valor que se asigne a $g(0)$ no tiene importancia para esta demostración, pero ya que $g(t) \to 0$ cuando $t \to 0$ parece natural definir $g(0)$ igual a 0. Si ahora se sustituye t por k, donde $k = v(x+h) - v(x)$ y se sustituye el segundo miembro de $u(y+t) - u(y) = t[g(t) + u'(y)]$ en $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{u(y+k) - u(y)}{h}$ se obtiene:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{k} = \frac{k}{h}[g(k) + u'(y)]$$

fórmula que es válida aun cuando $k = 0$. Si $h \to 0$ el cociente $k/h \to v'(x)$ y $g(k) \to 0$; por lo tanto el segundo miembro tiende al límite $u'(y) \cdot v'(x)$. Queda pues completada la demostración de la regla de la cadena.

1.2 Aplicaciones de la regla de cadena. Coeficientes de variación ligados y derivación implícita

Introducimos los símbolos

$$y = v(x) \qquad \text{y} \qquad z = u(y).$$

Y designando con dy/dx la derivada $v'(x)$ y con dz/dy la de $u(y)$, la formación de la función compuesta queda indicada por:

$$z = u(y) = u[v(x)] = f(x),$$

siguiente lo notación de Leibniz, dz/dx designa la derivada $f'(x)$, la regla de la cadena tal como estaba expresada se presenta ahora en la forma:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Si $y = v(x)$ y $z = f(x)$, entonces $z = y^n$, $dz/dx = f'(x)$ y la regla de la cadena da:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = ny^{n-1}v'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x).$$

Ejemplo 1.1. Si $f(x) = [v(x)]^n$ donde n es un entero positivo, calcular $f'(x)$ en función de $v(x)$ y $v'8x)$.

Respuesta.- La solución f es una composición, $f(x) = u[v(x)]$, donde $y(x) = x^n$. Puesto que $u'(x) = nx^{n-1}$, se tiene $u'[v(x)]$ $u'[v(x)] = n[v(x)]^{n-1}v'(x)$. Y la regla de la cadena da:

$$f'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x).$$

Si se omite la referencia a x y se escribe como una igualdad entre funciones, se obtiene la importante fórmula:

$$(v^n)' = nv^{n-1}v'$$

que indica cómo se deriva la potencia n-ésima de v cuando v' existe. La fórmula es también válida para las potencias racionales si v^n y v^{n-1} están definidas.

1.3 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 14, determinar la derivada $f'(x)$. En cada caso se sobrentiende que x toma sólo los valores para los que $f(x)$ tiene sentido.

1. $f(x)\cos 2x - 2\operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = (-\operatorname{sen} 2x)2 - (0\cdot \operatorname{sen} x + 2\cos x) = -2\operatorname{sen} 2x - 2\cos x.$$

2. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. $f(x) = (2-x^2)\cos x^2 + 2x\operatorname{sen} x^3$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -2x\cos x^2 + (2-x^2)(-2x\operatorname{sen} x^2) + 2\operatorname{sen} x^3\cdot 2\operatorname{sen} x^3 + 2x\cdot 3x^3\cdot\cos x^3 \\ & = & (2x^3-4x)\operatorname{sen} x^2 - 2x\cos x^2 + 2\operatorname{sen} x^2 + 6x^3\cos x^3. \end{array}$$

4. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x)\cdot\cos(\operatorname{sen}^2 x)$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \cos\left(\cos^2 x\right)\left(-2\cos x\operatorname{sen} x\right)\cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right)\left[-\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right]2\operatorname{sen} x\cos x \\ & = & \left(-2\operatorname{sen} x\cos x\right)\left[\cos\left(\cos^2 x\right)\cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right] \\ & = & -\operatorname{sen}(2x)\left[\cos\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)\right] \\ & = & -\operatorname{sen}(2x)\cos\left(\cos 2x\right). \end{array}$$

5. $f(x) = \operatorname{sen}^n x\cdot\cos nx$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

$$f'(x) = n\left(\operatorname{sen}^{n-1} x\right)$$

6. $f(x) = \operatorname{sen}[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)]$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

7. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

8. $f(x) = \tan \dfrac{x}{2} - \cot \dfrac{x}{2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

9. $f(x) = \sec^2 x + csx^2 x$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

10. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

11. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

12. $f(x) = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

14. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

Respuesta.- Usando las reglas de derivación tenemos,

15.