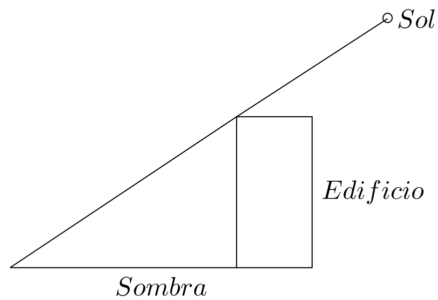
Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Geometría I.**
Práctica: IX.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Funciones trigonométricas

1. Cuando el sol está 20° encima del horizonte, ¿cuál es la longitud de la sombra proyectada por un edificio de 50 metros?

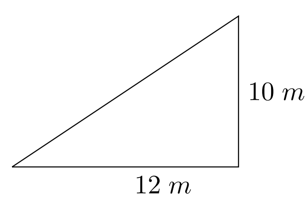
Respuesta.-



$$\tan 20° = \frac{50}{\overline{AB}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} = 137{,}38$$

2. Un árbol de 10 metros de altura proyecta una sombra de 12 metros. ¿Cuál es la altura angular del sol?

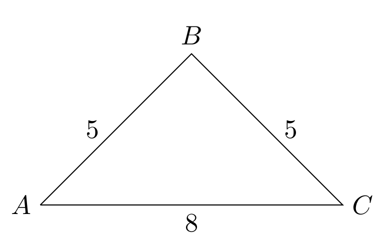
Respuesta.-



$$\tan\theta = \frac{10}{12} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 39{,}8°$$

3. Los lados de un triángulo ABC son los siguientes: $AB = 5$, $AC = 8$ y $BC = 5$. Determine el seno del ángulo $\widehat{A}$

Respuesta.-



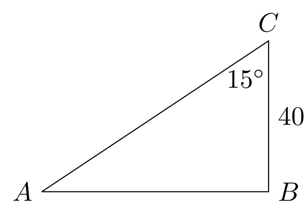
Por la ley de cosenos se tiene

$$\overline{AB} = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}^2\overline{BC}^2 \cos\widehat{C} \quad \Longrightarrow \quad \cos\widehat{C} = \frac{64}{80} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{C} = 36°87'$$

Como $\widehat{C} = \widehat{A}$ por ser triangulo isosceles, entonces $\sin\widehat{C} = \sin\widehat{A} = 0{,}6$

4. De la punta de un faro, 40 metros encima del nivel del mar, el farolero ve un barco en un ángulo (de depresión) de 15°. ¿Cuál la distancia del barco al faro?

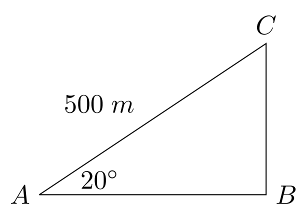
Respuesta.-



$$\tan\theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AC} = \tan 15° \cdot 40 = 10{,}72\ m$$

5. Un carro sube 500 metros sobre una pista recta de 20° de inclinación. ¿Cuántos metros el punto de llegada está por encima del punto de partida?

Respuesta.-



Aplicando la ley de senos se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} 90°}{500} = \frac{\operatorname{sen} 20°}{\overline{BC}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{BC} = 171\ m$$

6. En un triángulo ABC se tiene $\overline{AC} = 23$, $\widehat{A} = 20°$ y $\widehat{C} = 140°$. Determine la altura desde el vértice B.

Respuesta.- Este triángulo no existe. Lo que invalida la pregunta.

7. Las funciones secantes, cosecantes y cotangentes de un ángulo $\widehat{A}$ son definidas por $\sec\widehat{A} = 1/\cos\widehat{A}$, $\csc\widehat{A} = 1/\operatorname{sen}\widehat{A}$ y $ctan\ \widehat{A} = 1/\tan\widehat{A}$, siempre que $\cos\widehat{A}$, $\operatorname{sen}\widehat{A}$ y $\tan\widehat{A}$ estén definidas y sean distintas de cero. Pruebe que:

a) $1 + \tan^2\widehat{A} = \sec^2\widehat{A}$

Demostración.-

$$\sec^2\widehat{A} = \frac{1}{\cos^2\widehat{A}} = \frac{\operatorname{sen}^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{A}}{\cos^2\widehat{A}} = \frac{\operatorname{sen}^2\widehat{A}}{\cos^2\widehat{A}} + 1 = \tan^2\widehat{A} + 1$$

b) $1 + ctan^2\,\widehat{A} = \csc^2\,\widehat{A}$

Demostración.-

$$csec^2\,\widehat{A} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\widehat{A}} = \frac{\operatorname{sen}^2\widehat{A} + \operatorname{sen}^2\widehat{A}}{\operatorname{sen}^2\widehat{A}} = 1 + \frac{\cos^2\widehat{A}}{\operatorname{sen}^2\widehat{A}} = 1 + ctan^2\,\widehat{A} = 1 + \frac{1}{\tan^2 A}$$

Área

1. Determine el área de un triángulo equilátero de lado s.

Respuesta.- Partamos de $rea = \dfrac{s\cdot h}{2}$ por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$$

Remplazado tenemos

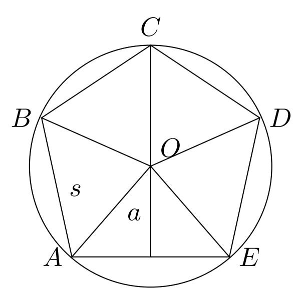
$$Area = \frac{s\cdot\dfrac{\sqrt{3}s}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2$$

2. ¿Qué relación satisfacen las áreas de dos triángulos rectángulos semejantes?

Respuesta.- La relación se denomina razón de las áreas de dos triángulos similares viene dada por el cuadrado de la razón de similitud entre ellos.

3. El radio del círculo inscrito en un polígono regular es llamado apotema del polígono regular. Pruebe que el área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro y su apotema.

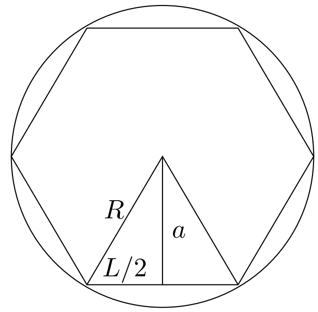
Demostración.- Sea,



Como se muestra en la figura al dibujar los radios que van hasta los vértices de un polígono de n lados y perímetro $p = ns$, se divide en n triángulos, cada uno de área $\frac{1}{2}as$. Como el área de un polígono regular es $n\left(\frac{1}{2}as\right) = \frac{1}{2}nsa = \frac{1}{2}pr$

4. Determine el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio R.

Respuesta.-



Sea $R^2 = \left(\dfrac{L}{2}\right)^2 + a^2$, si $L = R$ entonces $R^2 = \dfrac{R^2}{4} + a^2$ de donde $a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Luego Área= $\dfrac{P \cdot a}{2}$, por ser un hexágono se tiene $P = 6L = 6R$, por lo tanto Área= $\dfrac{3R^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

5. Pruebe que la razón entre las longitudes de dos círculos es igual a la razón entre sus radios.

Demostración.- Debemos probar que $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$ (1).
Sea $C_1 = 2\pi r_1$ y $C_2 = 2\pi r_2$. Remplazado a (1) tenemos que

$$\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \Longrightarrow \quad 2\pi = 2\pi$$

6. Pruebe que la razón entre las áreas de dos círculos es igual a la razón entre los cuadrados de sus radios.

Demostración.- Debemos demostrar que $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$.
Sea $S_1 = \pi r_1^2$ y $S_2 = \pi r_2^2$, entonces

$$\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \Longrightarrow \quad \pi = \pi$$

7. Si los diámetros de dos círculos son 3 y 6, ¿cuál la relación entre sus áreas?

Respuesta.-

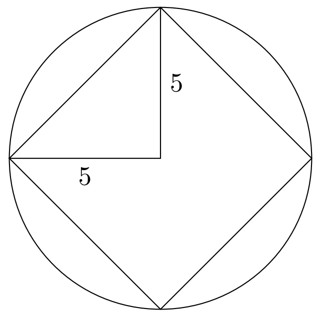
$$\begin{array}{r|l}
C_1 = 2\pi r_1 & C_2 = 2\pi r_2 \\
3 = 2\pi r_1 \Longrightarrow r_1 = \dfrac{3}{2\pi} & 6 = 2\pi r_2 \Longrightarrow r_2 = \dfrac{3}{\pi} \\
\hline
A_1 = \pi r_1^2 & A_2 = \pi r_2^2 \\
A_1 = \pi \left(\dfrac{3}{2\pi}\right)^2 & A_2 = \pi \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^2 \\
A_1 = \dfrac{9}{4\pi} & A_2 = \dfrac{9}{\pi}
\end{array}$$

De donde la relación viene dada por

$$4A_1 = A_2$$

8. ¿Cuál es el área de un cuadrado inscrito en un círculo cuyo radio mide 5 cm?

Respuesta.-



Por el problema (1) se tiene que el área de un triangulo isosceles es dado por $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5^2$ por lo tanto

$$Area = \sqrt{3} \cdot 5^2 = 43{,}3\ cm^2$$

9. Dos hexágonos regulares tienen lados de medida 2 cm y 3 cm. ¿Cuál es la relación entre sus áreas?

Respuesta.- Por el problema (4)

$$\begin{array}{r|l} A_1 = \dfrac{3 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}}{2} & A_2 = \dfrac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \\ A_1 = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} & A_2 = 6\sqrt{3} \\ \dfrac{2A_1}{27} = \sqrt{3} & \dfrac{A_2}{6} = \sqrt{3} \end{array}$$

Igualando se tiene que

$$12A_1 = 27A_2 \quad o \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{12}{27}$$

10. La longitud de un círculo vale dos veces la longitud de otro círculo. ¿Qué relación satisfacen sus áreas?

Respuesta.- Sea $L_1 = 2\pi r_1$ y $L_2 = \dfrac{2\pi r_2}{2} = \pi r_2 \implies r_1 = \dfrac{L_1}{2\pi}$ y $r_2 = \dfrac{L_2}{\pi}$ respectivamente. Luego $A_1 = \pi \cdot r_1^2$ y $A_2 = \pi \cdot r_2^2$ de donde $A_1 = \pi \dfrac{L_1^2}{4\pi^2}$ y $A_2 = \pi \dfrac{L_2^2}{\pi^2}$ por lo tanto

$$A_1 = \frac{L_1^2}{4\pi} \quad y \quad A_2 = \frac{L_2^2}{\pi}$$

Así la relación viene dada por

$$\frac{4A_1}{L_1^2} = \frac{A_2}{L_2^2}$$

11. El área de un círculo vale cinco veces el área de otro círculo. ¿Qué relación satisfacen sus radios?

Respuesta.-

12. ¿Cuánto papel seria necesario para cubrir la cara externa de una lata cilíndrica cuya altura es 15 cm y cuyo radio de la base es 5 cm?

Respuesta.-

13. Muestre que si dos triángulos son semejantes entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre los cuadrados de cualesquier dos de sus pares de lados correspondientes.

Demostración.-

14. Muestre que la razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual a la razón entre los cuadrados de cualesquier dos de sus lados correspondientes.

Demostración.-

15. Tres polígonos semejantes son construidos teniendo cada uno de ellos, como lado, unos de los lados de un triángulo rectángulo. Pruebe que el área del mayor de ellos es igual a la suma de las áreas de los dos menores.

Demostración.-

16. La región limitada por dos radios y un arco de un círculo es llamado sector del círculo. Muestre que el área de un sector es $\frac{1}{2}RS$ donde R es el radio del círculo y S es la longitud del arco.

Demostración.-

17.

18.

19.

20.

21. Otra prueba del Teorema de Pitágoras es sugerida por la figura siguiente. Determine el área del trapecio de dos maneras diferentes: directamente y como suma de áreas.

Demostración.- Trazamos una un segmento como se vera a continuación en la figura, obteniendo un trapezoide rectangular formado por los dos triángulos rectangulares iniciales (iguales) y otro triángulo que, como demostraremos, también es un triángulo rectangular.

22.

23.