Ejercicios capítulo 6

Christian Limbert Paredes Aguilera

2022-08-12

Ejercicios Capítulo 6

6.1.

Se seleccionaron, aleatoriamente, 60 personas y se le preguntó su preferencia con respecto a tres marcas, A, B y C. Estas fueron de $27, 18$ y 15 respectivamente. ¿Qué tan probable es este resultado si no existen otras marcas en el mercado y la preferencia se comparte por igual entre las tres?.

Respuesta.- Ya que las preferencias son iguales entonces, se utilizará la función de distribución multinomial, comos se verá a continuación:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}; n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

De donde

$$p(27, 18, 15; 60, 1/3, 1/3, 1/3) = \frac{60!}{27!18!15!} \left(\frac{1}{3}\right)^{27} \left(\frac{1}{3}\right)^{18} \left(\frac{1}{3}\right)^{15} = 0.002153159.$$

```r
factorial(60)/(factorial(27)*factorial(18)*factorial(15))*(1/3)^(27)*(1/3)^(18)*(1/3)^(15)
```

```
## [1] 0.002153159
```

```r
dmultinom(c(27,18,15),60,c(1/3,1/3,1/3))
```

```
## [1] 0.002153159
```

6.2.

Supóngase que de un proceso de producción se seleccionan, de manera aleatoria, 25 artículos. Este proceso de producción por lo general produce un 90% de artículos listos para venderse y un 7% reprocesables. ¿Cuál es la probabilidad de que 22 de los 25 artículos estén listos para venderse y que dos sean reprocesables?.

Respuesta.- Sea la función de distribución trinomial

$$p(x, y; n, p_i, p_2) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^{n-x-y}.$$

Entonces,

$$p(22, 2; 25, 0.9, 0.07) = \frac{25!}{22!2!(25-22-2)!} 0.9^{22} 0.07^2 (1 - 0.9 - 0.07)^{25-22-2} = 0.09988531.$$

```
(factorial(25)/(factorial(22)*factorial(2)*factorial(25-22-2))*
   0.9^(22)*0.07^(2)*(1-0.9-0.07)^(25-22-2))
```

```
## [1] 0.09988531
```

6.3.

Sean X y Y dos variables aleatorisa continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x-y}{5} & 1 < x < 2, \quad 1 < y < 3, \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Obtener la función de distribución conjunta acumulativa.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u-v}{5}\right) dvdu = \int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u}{5} - \frac{v}{5}\right) dvdu \\ &= \int_1^x \left(\frac{3u}{5}v - \frac{v^2}{10}\right)\Bigg|_1^y du = \int_1^x \frac{3uy}{5} - \frac{3u}{5} - \frac{y^2}{10} + \frac{1}{10}\, du \\ &= \left(\frac{3u^2y}{10} - \frac{3u^2}{10} - \frac{y^2u}{10} - \frac{u}{10}\right)\Bigg|_1^x \\ &= \frac{3x^2y}{10} - \frac{3y}{10} - \left(\frac{3x^2}{10} - \frac{3}{10}\right) - \left(\frac{y^2x}{10} - \frac{y^2}{10}\right) + \frac{x}{10} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{3x^2y - xy^2 - 3x^2 + x - 3y + y^2 + 2}{10} \end{aligned}$$

b)

¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $X < 3/2$ e $Y < 2$?.

Respuesta.- Ya que $\displaystyle\int_1^x \int_1^y \left(\frac{3u-v}{5}\right) dvdu = \frac{3x^2y - xy^2 - 3x^2 + x - 3y + y^2 + 2}{10}$, entonces

$$\begin{aligned} P(X < 3/2, Y < 2) &= \int_1^{3/2} \int_1^2 \left(\frac{3u-v}{5}\right) dvdu \\ &= \frac{3\cdot(3/2)^2\cdot 2 - (3/2)\cdot 2^2 - 3(3/2)^2 + 3/2 - 3\cdot 2 + 2^2 + 2}{10} \\ &= 0.225. \end{aligned}$$

```
x=3/2
y=2
(3*x^2*y-3*y-3*x^2+x-3*y+y^2+2)/10
```

```
## [1] 0.225
```

c)

Mediante el empleo de sus respuesta a la parte a, obtener las distribuciones acumulativas marginales de X e Y.

Respuesta.- Dado que 2 y 3 son los límite superior para x e y respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) &= F_X(x) = F(x,3) \\
&= \frac{3x^2 \cdot 3 - x \cdot 3^2 - 3x^2 + x - 3 \cdot 3 + 3^2 + 2}{10} \\
&= \frac{9x^2 - 9x - 3x^2 + x - 9 + 9 + 2}{10} \\
&= \frac{3x^2 - 4x + 1}{5}, \quad 1 < x < 2.
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= F_Y(y) = F(2,y) \\
&= \frac{3 \cdot 2^2 y - 2 \cdot y^2 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 3y + y^2 + 2}{10} \\
&= \frac{12y - 2y^2 - 12 + 2 - 3y + y^2 + 2}{10} \\
&= \frac{9y - y^2 - 8}{10}, \qquad 1 < y < 3.
\end{aligned}$$

d)

Obtener las funciones de densidad marginales de X y de Y.

Respuesta.- Sea $F(x,3) = P(X \leq x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{5}$, entonces

$$f_X(x) = \frac{\partial F(x,3)}{\partial x} = \frac{(6x^2 - 4)5}{5^2} = \frac{6x^2 - 4}{5}.$$

Y para $F(2,y) = P(Y \leq y) = \dfrac{9y - y^2 - 8}{10}$, se tiene

$$f_Y(y) = \frac{\partial F(2,y)}{\partial y} = \frac{(9 - 2y)10}{10^2} = \frac{9 - 2y}{10}.$$

6.4.

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x, y > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Demostrar que $f(x,y)$ es una función de densidad conjunta de probabilidad.

Respuesta.-; Ya que $x,y>0$ entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-xy-x}\;dy\;dx &= \int_0^\infty xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}\;dy\;dx \\
&= \int_0^\infty xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}\left(\frac{-x}{-x}\right)\;dy\;dx \\
&= \int_0^\infty -e^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}(-x)\;dy\;dx \\
&= \int_0^\infty -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)\Big|_0^\infty\;dx \\
&= \int_0^\infty -e^{-x}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)\;dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\;dx = e^{-x}\Big|_0^\infty \\
&= 1.
\end{aligned}$$

```r
integrate(function(y) {
  sapply(y, function(y) {
    integrate(function(x) x*exp(-x*(y+1)), 0, Inf)$value
   })
 }, 0, Inf)$value
```

```
## [1] 0.9999956
```

b) ¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $X<2$ e $Y<1$?.

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_0^1 xe^{-xy-x}\,dy\,dx &= \int_0^2 xe^{-x}\int_0^1 e^{-xy}\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)\Big|_0^1\;dx \\
&= \int_0^2 -e^{-x}\left(e^{-x}-e^{0}\right)\;dx \\
&= \int_0^2 e^{-3x}\;dx = -\frac{1}{3}\int_0^2 e^{-3x}(-3)\;dx \\
&= -\frac{1}{3}\left(e^{-3x}\right)\Big|_0^2 = -\frac{1}{3}\left(e^{-6}-1\right) \\
&= 0.3738225
\end{aligned}$$

```
integrate(function(y) {
  sapply(y, function(y) {
    integrate(function(x) x*exp(-x*(y+1)), 0, 2)$value
   })
 }, 0, 1)$value
```

```
## [1] 0.3738225
```

c)

Obtener las funciones de densidad marginal de X y de Y.

Respuesta.- La densidad marginal para x está dada por:

$$f_X(x) = \int_0^\infty xe^{-xy-x}\,dy = xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}\,dy = -e^{-x}\left(e^{-xy}\right)\Big|_0^\infty = e^{-x}$$

La densidad marginal para y está dada por:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty xe^{-xy-x}\,dx \\
&= \left(\frac{x}{-y-1}e^{-xy-x} - \frac{1}{-y-1}\int_0^\infty e^{-xy-x}\,dx\right)\Bigg|_0^\infty \\
&= 0 - \frac{1}{(-y-1)^2}e^{xy-x}\Bigg|_0^\infty \\
&= -\frac{1}{(-y-1)^2}\left(e^\infty - e^0\right) \\
&= -\frac{1}{(-y-1)^2}(0-1) \\
&= \frac{1}{(-y-1)^2}.
\end{aligned}$$

d)

¿Son X e Y estadísticamente independientes?.

Respuesta.- por el hecho de que,

$$xe^{-x(y-1)} \neq e^{-x}\frac{1}{(-y-1)^2} = \frac{e^{-x}}{(-y-1)^2}$$

Diremos que X e Y no son estadísticamente independientes.

6.5.

Sean X e Y dos variables aleatorias discretas en donde los posibles valores que estas pueden tomar son -1, 0 y 1. En la siguiente tabla se dan las probabilidades conjuntas para todos los posibles valores de X e Y.

		X		
		-1	0	1
	-1	$1/16$	$3/16$	$1/16$
Y	0	$3/16$	0	$3/16$
	1	$1/16$	$3/16$	$1/16$

a)

Obtener las funciones de probabilidad marginal $p_X(X)$ y $P_Y(y)$.

Respuesta.- Para $p_X(x)$ se tiene al sumar las tres columnas de la tabla. Lo propio con $p_Y(y)$.

$$p_X(x) = p_Y(y) = \frac{5}{16}, \frac{6}{16}, \frac{5}{16}, \; x = y = -1, 0, 1.$$

b)

¿Las variables aleatorias X e Y son estadísticamente independientes?

Respuesta.- No, ya que $p_{XY}(x, y) \neq p_X(x)p_X(y)$.

c)

Obtener $Cov(X, Y)$

Respuesta.-

```
(-1*-1*1/16+-1*1*1/16+1*-1*1/16+1/16)-(5/16*-1+6/16*0+5/16*1)*2
```

```
## [1] 0
```

6.6.

Para las funciones de densidad conjuntas de probabilidad del ejercicio 6.3., obtener $Cov(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

Respuesta.- Para poder hallar la covarianza y el coeficiente de correlación tenemos que hallar $E(X), E(Y), E\left(X^2\right), E\left(Y^2\right)$ y $E(XY)$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_1^2 \int_1^3 x\left(\frac{3x-y}{5}\right)\, dy\, dx = \int_1^2 \frac{x}{5}\left(3xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^3\, dx \\
&= \frac{1}{5}\int_1^2 6x^2 - 4x\; dx = \frac{1}{5}\left(\frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{5}(16 - 2 - 8 + 2) = \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

```
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) x*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 1.6
```

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_1^2 \int_1^3 y\left(\frac{3x-y}{5}\right)\, dy\, dx = \frac{1}{5}\int_1^2 \int_1^3 3xy - y^2\, dy\, dx \\
&= \frac{1}{5}\int_1^2 \left(\frac{3xy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 dx = \frac{1}{5}\int_1^2 12x - \frac{26}{3}\, dx \\
&= \frac{1}{5}\left(6x^2 - \frac{26x}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{28}{15}.
\end{aligned}
$$

```
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) y*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 1.866667
```

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \int_1^2 \int_1^3 x^2\left(\frac{3x-y}{5}\right)\, dy\, dx = \frac{1}{5}\int_1^2 x^2\left(3xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 \\
&= \frac{1}{5}\int_1^2 6x^3 - 8x^2\, dx = \frac{1}{5}\left(\frac{3x^4}{2} - \frac{8x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{79}{30}.
\end{aligned}
$$

```
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) x^2*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 2.633333
```

$$
\begin{aligned}
E\left(Y^2\right) &= \int_1^2 \int_1^3 y^2\left(\frac{3x-y}{5}\right)\, dy\, dx = \frac{1}{5}\int_1^2 \left(xy^3 - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^3 dx \\
&= \frac{1}{5}\int_1^2 26x - 20\, dx = \frac{1}{5}\left(13x^2 - 20x\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{19}{5}.
\end{aligned}
$$

```
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) y^2*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 3.8
```

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_1^2 \int_1^3 xy\left(\frac{3x-y}{5}\right)\,dy\,dx = \frac{1}{5}\int_1^2 x\left(\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^3\,dx \\
&= \frac{1}{5}\int_1^2 12x^2-\frac{26x}{3}\,dx = \frac{1}{5}\left(4x^3-\frac{13x^2}{3}\right)\Big|_1^2 \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

```
integrate(function(x) {
  sapply(x, function(x) {
    integrate(function(y) x*y*((3*x-y)/5), 1, 3)$value
   })
 }, 1, 2)$value
```

```
## [1] 3
```

La covarianza viene dado por:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - \frac{8}{5}\cdot\frac{28}{15} = \frac{1}{75} = 0.01333333.$$

Dado que:

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{79}{30} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{11}{150}.$$

y

$$Var(Y) = E\left(Y^2\right) - E^2(Y) = \frac{19}{5} - \left(\frac{28}{15}\right)^2 = \frac{71}{225}.$$

El coeficiente de correlación es:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\frac{1}{75}}{\sqrt{\frac{11}{150}\cdot\frac{71}{225}}} = 0.08764963.$$

```
cov = 3-(8/5)*(28/15)
cov
```

```
## [1] 0.01333333
```

```
varX = 79/30-(8/5)^2
varY = 19/5 - (28/15)^2
cov/(sqrt(varX*varY))
```

```
## [1] 0.08764963
```

6.7.

Un función de su prioridad, un programa para computadora espera en la fila de entrada cierto tiempo, después del cual lo ejecuta el procesador central en un lapso dado. La función de densidad conjunta para los tiempos de espera y ejecución se determina por

$$f(t_1,t_2)=\begin{cases} 2e^{-\left(\frac{t_1}{5}+10t^2\right)} & t_1,t_2>0,\\ 0 & \text{para cualquier otro valor.}\end{cases}$$

Dada la distribución conjunta acumulativa:

$$F(t_1,t_2)=\begin{cases} \left[1-e^{\left(\frac{-t_1}{5}\right)}\right]\left[1-e^{-10t^2}\right] & t_1,t_2>0\\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.}\end{cases}$$

a)

Obtener la probabilidad conjunta de que el tiempo de espera no sea mayor de ocho minutos y el de ejecución no sea mayor de 12 segundos.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} P(X\le 8, Y\le 0.2)=\int_0^8\int_0^{0.2} 2e^{-\left(\frac{t_1}{5}+10t_2\right)}\,dt_2\,dt_1 &= 2\int_0^8\left[\frac{e^{-\left(\frac{t_1}{5}+10t_2\right)}}{-10}\right]\Bigg|_0^{0.2}\,dt_1\\ &= -\frac{1}{5}\int_0^8 e^{-\left(\frac{t_1}{5}+2\right)}-e^{-\frac{t_1}{5}}\,dt_1\\ &= -\frac{1}{5}\left[\frac{e^{-\left(\frac{t_1}{5}+2\right)}}{-\frac{1}{5}}\right]\Bigg|_0^8+\frac{1}{5}\left(\frac{e^{-\frac{t_1}{5}}}{-\frac{1}{5}}\right)\Bigg|_0^8\\ &= e^{-\left(\frac{t_1}{5}+2\right)}\Big|_0^8-e^{-\frac{t_1}{5}}\Big|_0^8\\ &= e^{-\frac{18}{5}}-e^{-2}-e^{-\frac{8}{5}}+e^0\\ &= 0.6900919. \end{aligned}$$

```
integrate(function(t1) {
  sapply(t1, function(t1) {
    integrate(function(t2) 2*exp(-(t1/5+10*t2)), 0, 0.2)$value
   })
 }, 0, 8)$value
```

```
## [1] 0.6900919
```

Podemos encontrar el resultado mediante la distribución conjunta acumulativa:

$$F(8,0.2)=\left[1-e^{-\frac{8}{5}}\right]\left[1-e^{-10\cdot 0.2}\right]=0.6900919.$$

```
t1=8
t2=0.2
(1-exp(-t1/5))*(1-exp(-10*t2))
```

```
## [1] 0.6900919
```

b)

Obtener las funciones de densidad marginal y deducir que estos lapsos son variables aleatorias independientes.

Respuesta.- Sea $F(x,y) = \left[1 - e^{\left(\frac{-t_1}{5}\right)}\right]\left[1 - e^{-10t^2}\right]$, entonces

$$F(t_1, \infty) = \left[1 - e^{\left(\frac{-t_1}{5}\right)}\right]\left[1 - e^{-10\cdot\infty}\right] = 1 - e^{\left(\frac{-t_1}{5}\right)}. \quad \Rightarrow \quad f_{T_1}(t_2) = \frac{\partial F(\infty, t_2)}{\partial y} = -\left(-\frac{1}{5}\right)e^{\frac{-t_1}{5}} = \frac{1}{5}e^{\frac{-t_1}{5}}$$

$$F(\infty, t_2) = \left[1 - e^{\left(\frac{-\infty}{5}\right)}\right]\left[1 - e^{-10t_2}\right] = 1 - e^{-10t_2} \quad \Rightarrow \quad f_{T_2}(t_1) = \frac{\partial F(t_1, \infty)}{\partial x} = 10e^{-10t_2}.$$

Por último, comprobemos la independencia. Sea $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, entonces en lo particular:

$$f(t_1, t_2) = f_{T_1}(t_1)\cdot f_{T_2}(t_2) \quad \Rightarrow \quad 2e^{-\left(\frac{t_1}{5}+10t^2\right)} = \frac{1}{5}e^{\frac{-t_1}{5}}\cdot 10e^{-10t_2}.$$

Por lo tanto, se comprueba que estos lapsos son variables aleatorias independientes.

6.8.

Las variables aleatorias X e Y representan las proporciones de los mercados correspondientes a dos productos distintos fabricados por la misma compañia y cuya función de densidad conjunta de probabilidad está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a)

Obtener las funciones de densidad marginal de X e Y.

Respuesta.-

b)

¿Las variables aleatorias X e Y son estadísticamente independientes?.

Respuesta.-

c)

Si $X = 0.2$, obtener la función de densidad de probabilidad condicional de Y.

Respuesta.-