Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Geometría I.**
Práctica: IV.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Soluciones

1. Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero cuyos lados miden un centímetro.

Respuesta.- Para encontrar la altura, debemos usar el teorema de Pitágoras $A^2 = B^2 + C^2$. Sabemos que la hipotenusa (A) es el lado más grande que será 1 cm, y un lado será 0,5 de altura h ya que dividiremos el triángulo, transformando el triángulo equilátero en un triángulo rectángulo y la altura estará dado por:

$$1^2 = 0{,}5^2 + h2 \quad \Rightarrow \quad h = 0{,}86$$

2. En el triángulo ABC, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$ y $\overline{CA} = 13$. ¿Cuál es la medida del ángulo en $\widehat{B}$.

Respuesta.- Sea $CA^2 = BC^2 + AB^2$ entonces $169 = 169$ por lo tanto el ángulo con vértice en B mide 90° ya que el segmento CA es opuesto a B.

3. Muestre que los triángulos equiláteros siempre son semejantes.

Demostración.- Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dos triángulos equiláteros, las medidas de los ángulos $\widehat{A}, \widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son iguales a 60°, de la misma forma para los ángulos de triangulo DEF, entonces

$$\widehat{A} = \widehat{D} \qquad \widehat{B} = \widehat{E} \qquad \widehat{C} = \widehat{F}$$

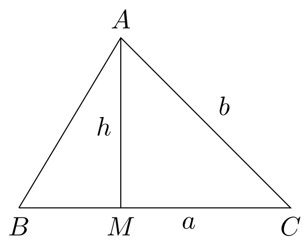
Luego por la razón de semejanza se tiene que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \alpha$ donde α es una constante. Por lo tanto Dos triángulos equiláteros son siempre semejantes.

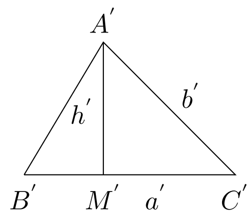
4. Muestre que son semejantes dos triángulos isósceles que tienen iguales los ángulos opuestos a su base.

Demostración.- Los ángulos $A\widehat{C}E = A\widehat{B}D$ son ángulos inscritos en la circunferencia con respecto a AD, por lo tanto $A\widehat{C}D = A\widehat{B}D$ Sea G el punto de intersección del segmento AC y la recta perpendicular al segmento AC que pasa por E. Entonces, el triángulo CEG y el rectángulo con ángulo recto en el vértice G. Como C, D y E son colineales y A C e G son colineales, por lo que $G\widehat{C}E = ACD$. Como CEG y rectángulo en ángulo recto en el vértice G y $G\widehat{C}E = A\widehat{C}D$, entonces $C\widehat{E}G = 90° - G\widehat{C}E = 90° - A\widehat{C}D$. Luego $C\widehat{E}G + C\widehat{E}B + B\widehat{E}F = 180°$, $C\widehat{E}G = 90°$ y $C\widehat{E}G = 90° - A\widehat{C}D$, de donde $B\widehat{E}F = A\widehat{C}D$. Luego $B\widehat{E}F = A\widehat{C}D$ y $A\widehat{C}D = A\widehat{B}D$, entonces $B\widehat{E}F = A\widehat{B}D$. Sea A, B y E colineales como también B, D y F, entonces $E\widehat{B}F = A\widehat{B}D$. Por último $B\widehat{E}F = A\widehat{B}D$ y $E\widehat{B}F = A\widehat{B}D$, entonces $B\widehat{E}F = E\widehat{B}F$ y luego el triángulo BEF es isosceles siendo los lados BF y EF congruentes. Los ángulos $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$ son ángulos inscritos en la circunferencia con respecto a BC, por lo tanto $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$.
Procediendo de manera completamente análoga lo que se hizo anteriormente, concluimos que $D\widehat{E}F = E\widehat{D}F$ y luego el triángulo DEF es isosceles, como los lados DF y EF siendo congruentes. Así los segmentos de la recta BF y EF son congruentes y los segmentos de la recta DF y EF también son congruentes. Entonces las rectas BF y DF son congruentes, luego F y el punto medio del segmento de la recta BD.

5. Pruebe que las alturas correspondientes en triángulos semejantes están en la misma razón que los lados correspondientes.

Demostración.-





Considerando dos triángulos rectángulos AMC y $A^{'}M^{'}C^{'}$ que tienen $\widehat{M} = \widehat{M'}$ y $\widehat{C} = \widehat{C'}$ ya que $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle A^{'}B^{'}C^{'}$. Resulta $\triangle AMC \sim \triangle A^{'}M^{'}C^{'}$, luego por definición de semejanza de triángulos $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{b}{b'}$ y como $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ por ser $\triangle ABC \sim \triangle A^{'}B^{'}C^{'}$ se tiene $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{a}{a'}$. Análogamente se demuestra que $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{b}{b'}$ y $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{c}{c'}$

6. Pruebe que, si un triángulo rectángulo tiene sus ángulos agudos de 30° y 60°, entonces su menor cateto mide la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Demostración-. Sea ABC un triángulo rectángulo con hipotenusa BC y angulos agudos $\widehat{C} = 30°$ y $\widehat{B} = 60°$. El Cateto más pequeño es AB, opuesto al ángulo interno más pequeño $\widehat{C}$. Luego sea $D \in S_{BA}$, tal que $\overline{DA} = \overline{AB}$, así trazamos un segmento DC. Como $DA = BA$, entonces por ángulos suplementarios $C\widehat{A}D = 90° = C\widehat{A}B$ y $AC = AC$, por LAL queda $ADC = ABC$. En particular, $A\widehat{D}C = A\widehat{B}C = 60^{'}$, $D\widehat{C}A = B\widehat{C}A = 30°$, esto es $D\widehat{C}B = 60°$ y el triángulo DBC es equilátero. Luego

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BD}}{2} = \overline{CB}$$

7. En la figura, D es el punto medio de AB y E el punto medio de AC. Muestre que los triángulos ADE y ABC son semejantes.

8. En la figura se tiene que $BDA \sim ABC$. Muestre que el triángulo BDA es isósceles.

9. Muestre que todo triángulo de lados $p^2 - q^2$, $2pq$ y $p^2 + q^2$ es un triángulo rectángulo. Aquí, p y q son números enteros positivos arbitrarios tal que $p > q$.

Demostración.- Si el triángulo es un rectángulo, debe valer el teorema de Pitágoras; de lo contrario, el triángulo no sería rectángulo. Demostraremos que este teorema es válido.

$$(p^2 + q^2)^2 = (2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2$$

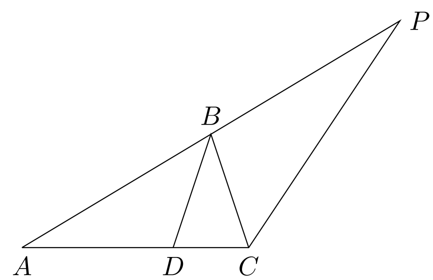
$$(p^2 + q^2)^2 = 4p^2q^2 + p^4 + q^4 - 2p^2q^2$$

$$(p^2 + q^2)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4$$

$$(p^2 + q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$$

10. Todos los triángulos indicados en la figura son rectángulos. Determine a, b, c, d y e.

11. Pruebe que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados. Esto es, si ABC es un triángulo y BD es la bisectriz del ángulo $\widehat{B}$ siendo D un punto del lado AC, entonces
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$
Demostración.- La gráfica se verá de la siguiente manera:



Siendo BD la bisectriz interna de $\widehat{B}$, tracemos una paralela que pase por el vértice C la bisectriz BD, donde se encontrará una extensión de BA en un punto P. Luego por el axioma de los paralelos, el triángulo BPC es isosceles es decir que uno de sus ángulos alterna internamente con una de las mitades del ángulo B y el otro correspondiente a la otra mitad. Por tanto según el teorema de Tales se sigue que $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{AP}$, como $BC = AP$ tenemos que

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

12. Enuncie y pruebe la recíproca del ejercicio anterior.

13. Demostración.- Sea x el cateto más pequeño y y, z los ángulos agudos y la medida de la hipotenusa. Tenemos $x = h/2$. Sabemos que en un triángulo la suma de los ángulos internos resulta en $180°.Entonces$:

$$90° + y + z = 180° \quad \Rightarrow \quad y + z = 90° \quad \Rightarrow \quad y = 90^{circ} - z$$

Suponga la medida del otro lado. Según el Teorema de Pitágoras, tenemos: $h^2 = (h/2)^2 + t^2 \quad \Rightarrow$ $h^2 = h^2/4 + t^2 \quad \Rightarrow \quad 4h^2 = h^2 + 4t^2 \quad \Rightarrow \quad t = (h\sqrt{3})/2$ Suponga t es lado opuesto de y. Entonces: $sen(y) = ((h\sqrt{3})/2)/h = \sqrt{3}/2 \quad \Rightarrow \quad y = 60°$ Luego hallar z: $y = 90° - z \quad \Rightarrow \quad z = 90° - 60° = 30°$ Para x lado opuesto de y, encuentre $y = 30^2$ y $z = 60°$.