

CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por:
FODE (Christian Limbert Paredes Aguilera)

Índice general

1. Límites	3
1.1. Problemas	6

Limites

Definición 1.1 La función f tiende hacia el límite l en a ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$) significa: para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x , si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.

Existe algún $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x para el cual es $0 < |x - a| < \delta$, pero no $|f(x) - l| < \epsilon$.

TEOREMA 1.1 Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a . En otros términos si f tiende hacia l en a , y f tiende hacia m en a , entonces $l = m$.

Demostración.- Puesto que f tiende hacia l en a , sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo x , si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.

Sabemos también, puesto que f tiende hacia m en a , que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que, para todo x , si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - m| < \epsilon$.

Hemos empleado dos números δ_1 y δ_2 , ya que no podemos asegurar que el δ que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon \text{ y } |f(x) - m| < \epsilon$$

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un $\epsilon > 0$ particular para el cual las dos condiciones $|f(x) - l| < \epsilon$ y $|f(x) - m| < \epsilon$ no puedan cumplirse a la vez si $l \neq m$

Si $l \neq m$, de modo que $|l - m| > 0$ podemos tomar como ϵ a $|l - m|/2$. Se sigue que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{|l - m|}{2} \text{ y } |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2}$$

Esto implica que para $0 < |x - a| < \delta$ tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2} + \frac{|l - m|}{2} = |l - m|$$

El cual es una contradicción.

LEMA 1.1 Si x está cerca de x_0 e y está cerca de y_0 , entonces $x+y$ estará cerca de x_0+y_0 , xy estará cerca de x_0y_0 y $1/y$ estará cerca de $1/y_0$.

(1) Si $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$ entonces $|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \epsilon$.

Demostración.-

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(2) Si $|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}\right)$ y $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)}$ entonces $|xy - x_0y_0| < \epsilon$.

Demostración.- Puesto que $|x - x_0| < 1$ se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1,$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

así pues

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |x(y - y_0) + y_0(x - x_0)| \\ &\leq |x| \cdot |y - y_0| + |y_0| \cdot |x - x_0| \\ &< (1 + |x_0|) \cdot \frac{\epsilon}{2(|x_0| + 1)} + |y_0| \cdot \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Notemos que $\frac{|y_0|}{|y_0| - 1} < 1$, por lo tanto $\frac{|y_0|}{|y_0| - 1} \cdot \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$.

(3) Si $y_0 \neq 0$ y $|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right)$ entonces $y \neq 0$ y $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \epsilon$.

Demostración.- Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

de modo que $-|y| < -\frac{|y_0|}{2} \implies |y| > |y_0|/2$. En particular. $y \neq 0$, y

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} = \frac{1}{|y|} \cdot \frac{|y_0 - y|}{|y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\epsilon|y_0|^2}{2} = \epsilon$$

TEOREMA 1.2 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, entonces

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + m$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = l \cdot m$$

Además, si $m \neq 0$, entonces

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}$$

Demostración.- La hipótesis significa que para todo $\epsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \epsilon$$

Esto significa (ya que después de todo, $\epsilon/2$ es también un número positivo) que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea ahora $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$ se cumplen las dos, de modo que es a la vez

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

pero según la parte (1) del lema anterior esto implica que $|(f + g)(x) - (l + m)| < \epsilon$.

Para demostrar (2) procedemos de la misma manera, después de consultar la parte (2) del lema. Si $\epsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m| + 1)}\right),$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2(|l| + 1)}$$

Pongamos de nuevo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$|f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m| + 1)}\right) \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\delta}{2(|l| + 1)}$$

Así pues, según el lema, $|(f \cdot g)(x) - l \cdot m| < \epsilon$, y esto demuestra (2).

Finalmente, si $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\epsilon|m|^2}{2}\right)$$

Pero según la parte (3) del lema, esto significa, en primer lugar que $g(x) \neq 0$, de modo que $(1/g)(x)$ tiene sentido, y en segundo lugar que

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \epsilon$$

Esto demuestra (3).

Definición 1.2 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

La condición $0 < x - a < \delta$ es equivalente a $0 < |x - a| < \delta$ y $x > a$

Definición 1.3 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

Definición 1.4 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un número N grande, que, para todo x ,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

1.1. Problemas

1. Hallar los siguientes limites (Estos limites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 2^2 + 4 + 4 = 12$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{3^3 - 8}{3 - 2} = 19$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow y} \frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = \\ = ny^{n-1}$$

$$(v) \lim_{y \rightarrow x} \frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = nx^{n-1}$$

$$(vi) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a+h})^2 - (\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2. Hallar los límites siguientes:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1^2 - (\sqrt{x})^2}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = 0$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}$$

3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un δ tal que, $|f(x) - l| < \epsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$

$$(i) f(x) = x^4; l = a^4$$

Respuesta.- Por la parte (2) del lema anterior se tiene

$$|x^2 - a^2| < \min \left(1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2 + 1)} \right).$$

Si aplicamos una vez mas la parte (2) del lema obtenemos

$$|x - a| < \min \left(1, \frac{\min \left(1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2 + 1)} \right)}{2(|a| + 1)} \right) = \min \left(1, \frac{\epsilon}{4(|a|^2 + 1)(|a| + 1)} \right) = \delta$$

$$(ii) f(x) = \frac{1}{x}; a = 1, l = 1$$

Respuesta.- Por la parte (3) del lema se tiene $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \epsilon$ por lo tanto $|y - 1| < \min \left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right)$

$$(iii) f(x) = x^4 + \frac{1}{x}; a = 1, l = 2$$

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene $\left| \left(x^4 + \frac{1}{x} \right) - (1 + 1) \right| < \epsilon$ de donde

$$|x^4 - 1| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego por el inciso (i) y (ii)

$$|x - 1| < \min \left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right) \quad y \quad |x - 1| < \min \left(1, \frac{\min \left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2(1+1)} \right)}{2(1+1)} \right) \Rightarrow |x - 1| < \min \left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{4}, 1, \frac{\epsilon}{32} \right)$$

y por lo tanto

$$|x - 1| < \min \left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{32} \right) = \delta$$

(iv) $f(x) = \frac{x}{1 + \sin^2 x}$; $a = 0$, $l = 0$

Respuesta.- Sea $\left| \frac{x}{1 + \sin^2 x} \right| < \epsilon$ y $|x| < \delta$ pero $\left| \frac{x}{1 + \sin^2 x} \right| \leq |x|$ por lo tanto

$$\left| \frac{x}{1 + \sin^2 x} \right| \leq |x| < \delta = \epsilon$$

(v) $f(x) = \sqrt{|x|}$; $a = 0$, $l = 0$

Respuesta.- Sea $\left| \sqrt{|x|} \right| < \epsilon$ entonces $|(|x|)^{1/2}| = \left(\sqrt{x^2} \right)^{1/2} = [(x^2)^{1/2}]^{1/2} = \sqrt{x} < \epsilon$, luego sabemos que la raíz cuadrada de x debe ser siempre mayor o igual a 0 por lo tanto $|x| < \epsilon^2$, de donde concluimos que $\delta = \epsilon^2$

(vi) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$, $l = 1$

Respuesta.-