1

Límites y continuidad

Definición 1.1 (La razón promedio de cambio) *de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ sabiendo que $\triangle x = x_2 - x_1 = h$ es*

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

1.1. Ejercicios

Razones promedio de cambio

En los ejercicios 1 a 6, determine la razón promedio de cambio de la función en el intervalo o intervalos dados.

1. $f(x) = x^3 + 1$

a) $[2, 3]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(3^3 + 1) - (2^3 + 1)}{3 - 2} = 19$

b) $[-1, 1]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(1^3 + 1) - ((-1)^3 + 1)}{1 - (-1)} = 1$

2. $g(x) = x^2 - 2x$

a) $[1, 3]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(3^2 - 2 \cdot 3) - (1^2 - 2 \cdot 1)}{3 - 1} = 2$

b) $[-2, 4]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(4^2 - 2\cdot 4) - ((-2)^2 - 2\cdot(-2))}{4-(-2)} = 0$

3. $h(t) = cot\ t$

(a) $[\pi/4, 3\pi/4]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{cot(\pi/4) - cot(3\pi/4)}{\pi/4 - 3\pi/4} = \dfrac{1+1}{\dfrac{\pi - 3\pi}{4}} = \dfrac{8}{-2\pi}$

(b) $[\pi/6, \pi/2]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{cot(\pi/6) - cot(\pi/2)}{\pi/6 - \pi/2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{\pi}$

4. $g(t) = 2 + \cos t$

(a) $[0, \pi]$

Respuesta.- $\dfrac{2 + \cos\pi - (2 + \cos 0)}{\pi - 0} = -\dfrac{2}{\pi}$

(b) $[-\pi, \pi]$

Respuesta.- $\dfrac{2 + \cos\pi - (2 - \cos\pi)}{\pi + \pi} = \dfrac{3-3}{2\pi} = 0$

5. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1};\ [0, 2]$

Respuesta.- $\dfrac{\sqrt{4*2+1} + 1 - (\sqrt{4*0+1} + 1)}{2-0} = \dfrac{2}{2} = 1$

6. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta;\ [1, 2]$

Respuesta.- $\dfrac{2^3 - 4\cdot 2^2 + 5\cdot 2 - (1^3 - 4^2 + 5)}{2-1} = 0$

Pendiente de una curva en un punto

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar *a*) la pendiente de la curva en el punto P dado, y *b*) la ecuación de la recta tangente en P

7. $y = x^2 - 5, \quad P(2, -1)$

a) Iniciamos con una recta secante que pasa por el punto $(2,-1)$ y el punto cercano $(2+h,(2+h)^2-5)$, luego hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^2-5-(2^2-5)}{2+h-2}=\frac{4h+h^2}{h}=4+h$$

Luego aproximamos h a 0 siendo la pendiente $m=4$.

b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=4x+c$, luego reemplazamos $(2,-1)$, quedándonos $-1=4\cdot 2+c \implies c=-9$. Por lo tanto

$$y=4x-9$$

8. $y=7-x^2, \quad P(2,3)$

a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2,3)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,7-(2+h)^2\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{7-(2+h)^2-(7-2^2)}{2+h-2}=\frac{7-(2+h)^2-3}{h}=\frac{h(-h-4)}{h}=-h-4$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $-h-4$ se aproxima a -4. Tomamos -4 como la pendiente de la parábola en P.

b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=-4x+c$, luego reemplazamos $(2,3)$, así $3=-4(2)+c \Longrightarrow c=11$. Por lo tanto

$$y=-4x+11$$

.

9. $y=x^2-2x-3, \quad P(2,-3)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2,-3)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,(2+h)^2-2(2+h)-3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^2-2(2+h)-3-(-3)}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=h+2$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h+2$ se aproxima a 2. Tomamos 2 como la pendiente de la parábola en P.

b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=2x+c$, luego reemplazamos $(2,-3)$, así $-3=2(2)+c \Longrightarrow c=-7$. Por lo tanto

$$y=-2x-7$$

.

10. $y=x^2-4x, \quad P(1,-3)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1,-3)$ y el punto cercano $Q\left[1+h,(1+h)^2-4(1+h)\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(1+h)^2-4(1+h)-(-3)}{1+h-1}=\frac{h^2-2h}{h}=h-2$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h-2$ se aproxima a -2. Tomamos -2 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\implies y-y_1=m(x-x_1)\implies y=-2(x-1)+(-3)\implies y=-2x+2-3$$

por lo tanto

$$y=-2x-1$$

11. $y=x^3,\quad P(2,8)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2,8)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,(2+h)^3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^3-8}{2+h-2}=\frac{h^3+6h^2+12h}{h}=h^2+6h+12$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2+6h+12$ se aproxima a 12. Tomamos 12 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\implies y=m(x-x_1)+y_1\implies y=12(x-2)+8\implies y=12x-24+8$$

por lo tanto

$$y=12x-16$$

12. $y=2-x^3,\quad P(1,1)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1,1)$ y el punto cercano $Q\left[1+h,2-(1+h)^3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{2-(1+h)^3-1}{1+h-1}=\frac{h^3+3h^2+3h}{h}=h^2+3h+3$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante h^2+3h+3 se aproxima a 3. Tomamos 3 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 3(x-1)+1 \implies y = 3x - 3 + 1$$

por lo tanto

$$y = 3x - 2$$

13. $y = x^3 - 12x, \quad P(1, -11)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1,-11)$ y el punto cercano $Q\left[1+h, (1+h)^3 - 12(1+h)\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(1+h)^3 - 12(1+h) + 11}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 - 9h}{h} = h^2 + 3h - 12$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h - 9$ se aproxima a -9. Tomamos -9 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = -9(x-1) - 11 \implies y = -9x + 9 - 11$$

por lo tanto

$$y = -9x - 2$$

14. $y = x^3 - 3x^2 + 4, \quad P(2, 0)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2,0)$ y el punto cercano $Q\left[2+h, (2+h)^3 - 3(2+h)^2 + 4\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(2+h)^3 - 3(2+h)^2 + 4 - 0}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 3h^2}{h} = h^2 + 3h$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h$ se aproxima a 0. Tomamos 0 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 0(x-2) - 0$$

por lo tanto

$$y = 0$$

Razones instantáneas de cambio

15.