1

Funciones Continuas

Definición 1.1 *La función f es continua en a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$.
Pero en este caso, en que el límite es $f(a)$, la frase

$$0 < |x-a| < \delta$$

puede cambiarse por la condición más sencilla

$$|x-a| < \delta$$

puesto que si $x = a$ se cumple ciertamente que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

TEOREMA 1.1 *Si f y g son continuas en a, entonces*

$$\begin{array}{rl} (1) & f+g \text{ es continua en } a. \\ (2) & f \cdot g \text{ es continua en } a. \\ \text{Además, si } g(a) \neq 0, \text{ entonces } (3) & 1/g \text{ es continua en } a \end{array}$$

Demostración.- *Puesto que f y g son continuas en a,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que $f+g$ es continua en a.
Para $f \cdot g$ se tiene que

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = f(a) \cdot fg(a) = (f \cdot g)(a)$$

Por último para $1/g$ tenemos que

$$\lim_{x \to a} 1/g = 1/g(a), \qquad para\ g(a) \neq 0$$

TEOREMA 1.2 *Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.*

Demostración.- *Sea $\epsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x,*

$$\text{Si } |x-a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \epsilon, \text{ es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de f para estimar cómo de cerca tiene que estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que f es continua en $g(a)$, existe un $\delta^{'} > 0$ tal que para todo y,

$$\text{Si } |y - g(a)| < \delta^{'}, \text{ entonces } |f(y) - f(g(a))| < \epsilon. \qquad (1)$$

En particular, esto significa que

$$\text{Si } |g(x) - g(a)| < \delta^{'}, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon. \qquad (2)$$

Aplicamos ahora la continuidad de g para estimar cómo de cerca tiene que estar x de a para que se cumpla la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta^{'}$. El número $\delta^{'}$ es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar $\delta^{'}$ como el epsilon de la definición de continuidad de g en a. Deducimos que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \delta^{'}, \qquad (3)$$

combinando (2) y (3) vemos que para todo x,

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

Definición 1.2 *Si f es continua en x para todo x en (a,b), entonces se dice que f es continua en (a,b) si*

$$f \text{ es continua en } x \text{ para todo } x \text{ de } (a,b), \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b). \qquad (2)$$

TEOREMA 1.3 *Supóngase que f es continua en a, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x-a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) > 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x-a| < \delta$.*

Demostración.- *Considérese el caso $f(a) > 0$ puesto que f que es continua en a, si $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,*

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Puesto que $f(a) > 0$ podemos tomar a $f(a)$ como el epsilon. Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{Si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a)$$

Y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.
Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\epsilon = -f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$.

1.1. Problemas

1.