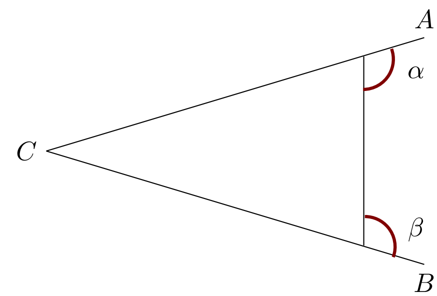
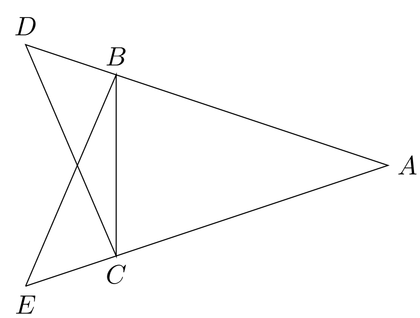
Universidad:	**Mayor de San Ándres.**
Asignatura:	**Geometría I.**
Práctica:	IV.
Alumno:	**PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

1. En la figura, los ángulos α y β son iguales. Muestre que $AC = BC$



Demostración.- Considere la figura anterior y observe que α es el suplemento $B\widehat{A}C$ y β es el suplemento $A\widehat{B}C$, entonces: $\alpha + ABC = 180°$ e $\beta + ABC = 180°$ haciendo $\alpha = 180° - B\widehat{A}C$ y $\beta = 180° - A\widehat{B}C$, cómo $\alpha = \beta$ tenemos $180° - B\widehat{A}C = 180° - A\widehat{B}C$ entonces $B\widehat{A}C = A\widehat{B}C$
Como todo triángulo isósceles tiene ángulos de base congruentes y viceversa, queda demostrado.

2. En la figura, se tiene $AB = AC$ y $BD = CE$. Muestre que.



a) $ACD = ABE$

Demostración.- Por hipótesis $AB = AC$ luego $\triangle ABC$ isósceles y ángulos $A\widehat{B}C$ y $A\widehat{C}B$. Como $\triangle DBC$ y $\triangle ECB$ comparten el lado BC y por hipótesis $BD = EC$ en el caso $LAL \triangle DBC$ y congruente con $\triangle ECB$ lo que implica, $C\widehat{B}E = B\widehat{C}D$ así:

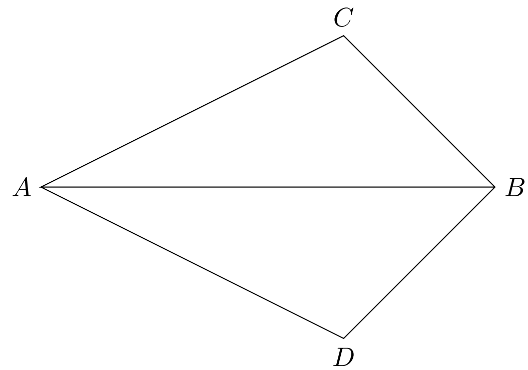
$$A\widehat{C}D = A\widehat{B}C + C\widehat{B}E = A\widehat{C}B + B\widehat{C}D = A\widehat{B}E$$

$$ACD = ABE$$

b) $BCD = CBE$

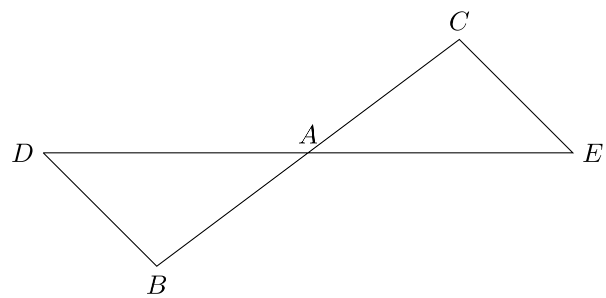
Demostración.- Podemos demostrar similar a la parte $a)$

3. En la figura, $AC = AD$ y AB es la bisectriz del ángulo $C\widehat{A}D$. Pruebe que los triángulos ACB y ADB son congruentes.



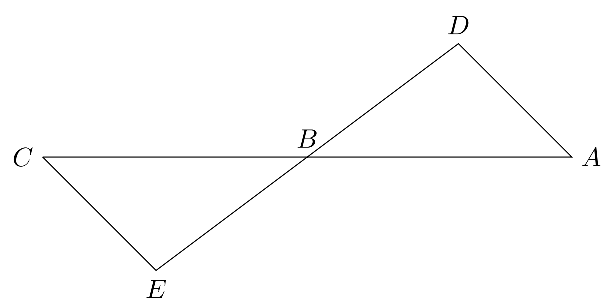
Demostración.- Si AB es bisectriz de CAD entonces $CAB = BAD$. Como $CA = AD$ y AB es común tanto para $\triangle ADB$ como para $\triangle CAB$, entonces, en el caso LAL, $\triangle ACB = \triangle ADB$.

4. En la figura, el punto A es el punto medio de los segmentos CB y DE. Pruebe que los triángulos ABD y ACE son congruentes.



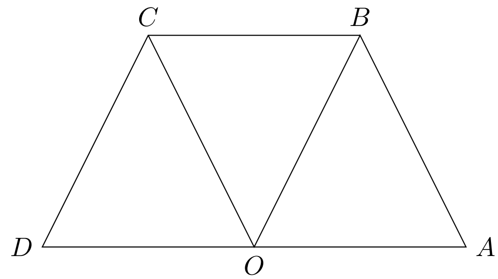
Demostración.- Los ángulos $C\widehat{A}E = D\widehat{A}B$ porque son opuestos por el vértice. En cuanto a la hipótesis $CA = BA$ y $DA = AE$ para el caso LAL, $\triangle ABD = \triangle ACE$.

5. En la figura, los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ son rectos y el segmento DE corta CA en el punto medio B de CA. Muestre que $DA = CE$.



Demostración.- Los ángulos $D\widehat{B}A = C\widehat{B}E$ porque están opuestos por el vértice y como $CA = BA$ por hipótesis, entonces por el caso ALA, $\triangle ABD = \triangle CEB$ que implica $DA = CE$.

6. En la figura, se sabe que $AC = OB$, $OD = OA$ y $B\widehat{O}D = C\widehat{O}A$. Muestre que $CD = BA$.

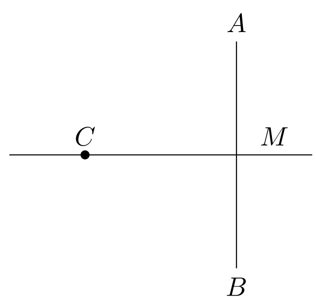


Pro hipótesis $BOD = COA$ con,

$$B\widehat{O}D = B\widehat{O}D + C\widehat{O}A = C\widehat{O}D + B\widehat{O}A \ \ (1)$$

y por el esquema $C\widehat{O}B = C\widehat{O}D$, luego por el caso LAL, $\triangle BOA = \triangle COD$ que implica $CD = BA$.

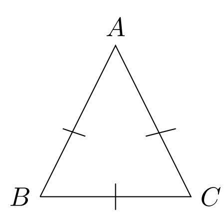
7. En la figura, $C\widehat{M}A$ es un ángulo recto y M el punto medio de AB. Muestre que $CA = CB$.



Sea $B\widehat{M}C$ y el suplemento $C\widehat{M}A$, luego $C\widehat{M}A + B\widehat{M}C = 180°$. Como $C\widehat{M}A = 90°$ tenemos $B\widehat{M}C = 180° - 90° = 90°$, entonces $CMA = BMC$ como M y el punto medio de AB, tenemos $AM = MB$. Dado que CM es un lado común de $\triangle AMC$ y $\triangle BMC$ para el caso LAL, entonces $\triangle AMC = \triangle BMC$, lo que implica $CA = CB$.

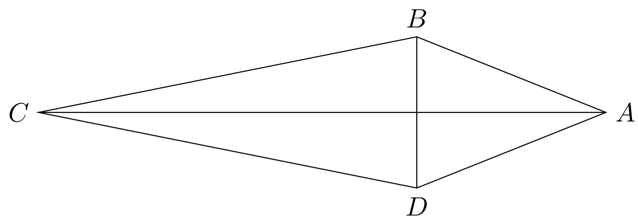
8. Muestre que, si en un triángulo los tres lados son congruentes, entonces tiene también los tres ángulos congruentes.

Demostración.- Considere el siguiente gráfico.



Si $\triangle ABC$ es equilátero, entonces también es isósceles de la base BC y, por lo tanto, los ángulos de su base serán congruentes, esto es: $\widehat{B} = \widehat{C}$. Ahora, tomando AB como base, por la misma razón tendremos $\widehat{A} = \widehat{C}$, lo que implica $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.

9. En la figura, ABD y BCD son triángulos isósceles con base DB. Pruebe que los ángulos $A\widehat{B}C$ y $A\widehat{D}C$ son congruentes.



Demostración.- Como $A\widehat{B}D = B\widehat{D}A$ y $D\widehat{B}C = B\widehat{D}C$ ya que son ángulos de la base de triángulos isósceles, entonces:

$$A\widehat{B}D + D\widehat{B}C = A\widehat{D}B + B\widehat{D}C$$

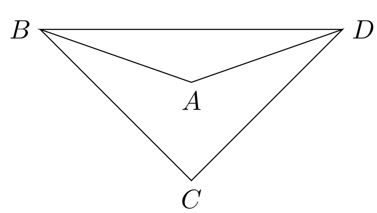
Que implica:

$$A\widehat{B}C = A\widehat{D}C$$

10. Usando la figura anterior, muestre que también la recta AC es bisectriz de $B\widehat{A}D$ y es perpendicular a DB.

Demostración.- Los triángulos ABC y ADC son congruentes en el caso de LAL, se sigue $C\widehat{A}B = C\widehat{A}D$. Entonces, por definición, AC es la bisectriz de $B\widehat{A}D$.

11. En la figura, ABD y BCD son triángulos isósceles con base BD. Pruebe que $A\widehat{B}C = A\widehat{D}C$ y que AC es bisectriz del ángulo $B\widehat{C}D$.

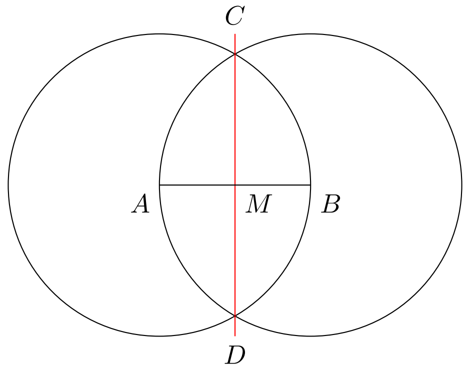


Demostración.- Dado que el triángulo BCD es isósceles, entonces $C\widehat{B}D = B\widehat{D}C$. Cómo $C\widehat{B}D = D\widehat{B}A +$ $\widehat{B}C$ y $B\widehat{D}C = B\widehat{D}A + A\widehat{D}C$ entonces:

$$D\widehat{B}A + A\widehat{B}C = B\widehat{D}A + A\widehat{D}C$$

Cómo $D\widehat{B}A = B\widehat{D}A$ porque $\triangle BDC$ es isósceles, entonces $A\widehat{B}C = A\widehat{D}C$. Y por el criterio LAL tenemos que $\triangle BAC = \triangle ADC$ lo que implica que AC es bisectriz.

12. Justifique el siguiente procedimiento para determinar el punto medio de un segmento. ıSea AB un segmento. Con un compás centrado en A, construya un círculo de radio AB. Construya otro círculo del mismo radio y centro en B. Estos dos círculos se intersectan en dos puntos. Trace la recta que une estos puntos. La intersección de esta recta con el segmento AB será el punto medio de AB.ȷ



Respuesta.- Donde notamos que $CB = CA = BD = DA =$ *radio*. Entonces $\triangle CBA = \triangle BDA$ y $\triangle CAD = \triangle CBD$. Según los criterios de coincidencia $\triangle CBM = \triangle CMA = \triangle BDM = \triangle MDA$, entonces $BM = MA$ y la línea r interseca el segmento BA en el punto medio.

13. ¿En la construcción anterior, es realmente necesario que los dos círculos tengan radio $\overparen{AB}$?

Respuesta.-

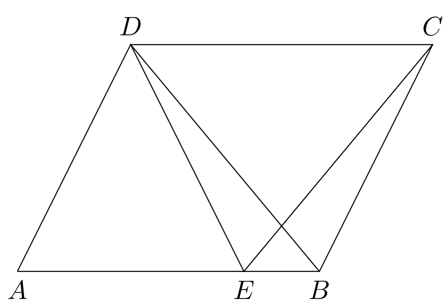
14. Muestre que en la construcción descrita en el problema 12, la recta que determina el punto medio de AB es perpendicular a AB.

Demostración.-

15. Utilice la idea de la construcción descrita en el problema 12 y proponga un método de construcción de una perpendicular a una recta dada pasando por un punto de esta recta.

Respuesta.-

16. En la figura, se tiene $AD = DE$, $\widehat{A} = D\widehat{E}C$ y $A\widehat{D}E = B\widehat{D}C$. Muestre que los triángulos ADB y EDC son congruentes.



Demostración.- Como $AD = DE$, tenemos un triángulo isósceles. De esta forma, los ángulos de la base son congruentes. $\widehat{E} = \widehat{A}$. DE es común para los dos triángulos ADE y DEC, que también es un triángulo isósceles. $AD = DE$ son congruentes como se indica por tanto, los ángulos A y D son congruentes y sus bases son iguales. $AD = DE$. Asimismo, los ángulos A y E son congruentes, D y E son congruentes y A B son congruentes. Por la proporcionalidad de las bases y la congruencia de los ángulos, podemos decir que los triángulos ADB y EDC son congruentes.

17. Mostrar que en un triángulo isósceles ABC, con base BC, la bisectriz a la base es una mediana.

Demostración.-