

Universidad: **Mayor de San Andrés.**
 Asignatura: **Álgebra Lineal I**
 Ejercicio: **Práctica 1.**
 Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Ejercicio 1. Demostrar que si dos sistemas homogéneos de ecuaciones lineales con dos incógnitas tienen las mismas soluciones, son equivalentes.

Demostración.- Consideremos los dos sistemas homogéneos con dos incógnitas (x_1, x_2) .

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{array}{lcl} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 & = & 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 & = & 0 \\ \vdots & & \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Sean los escalares c_1, c_2, \dots, c_m . De donde multiplicamos k ecuaciones del primer sistema por c_k y sumamos por columnas,

$$(c_1a_{11} + \dots + c_ma_{m1})x_1 + (c_1a_{12} + \dots + c_ma_{m2})x_2 = 0$$

Luego comparando esta ecuación con todas las ecuaciones del segundo sistema y utilizando también el hecho de que ambos sistemas tienen las mismas soluciones, obtenemos

$$c_1a_{11} + c_2a_{21} + \dots + c_ma_{m1} = b_{11}, b_{21}, \dots, b_{m1}$$

y

$$c_1a_{12} + c_2a_{22} + \dots + c_ma_{m2} = b_{12}, b_{22}, \dots, b_{m2}.$$

Lo que demuestra que el segundo sistema es una combinación lineal del primer sistema.

De manera similar podemos demostrar que el primer sistema es una combinación lineal del segundo sistema. Sean los escalares c_1, c_2, \dots, c_m , entonces

$$(c_1b_{11} + \dots + c_mb_{m1})x_1 + (c_1b_{12} + \dots + c_mb_{m2})x_2 = 0$$

Después, se tiene

$$c_1b_{11} + c_2b_{21} + \dots + c_mb_{m1} = a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$$

y

$$c_1b_{12} + c_2b_{22} + \dots + c_mb_{m2} = a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}.$$

Así concluimos que ambos sistemas son equivalentes.

Ejercicio 2. Demostrar que todo subcuerpo del cuerpo de los números complejos contiene a todo número racional.

Demostración.- Sea F un subcampo en \mathbb{C} . De donde tenemos $0 \in F$ y $1 \in F$. Luego ya que F es un subcampo y cerrado bajo la suma, se tiene

$$1 + 1 + \dots + 1 = n \in F.$$

De este modo $\mathbb{Z} \subseteq F$. Ahora, sabiendo que F es un subcampo, todo elemento tiene un inverso multiplicativo, por lo tanto $\frac{1}{n} \in F$. Por otro lado vemos también que F es cerrado bajo la multiplicación. Es decir, para $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ tenemos

$$m \cdot \frac{1}{n} \in F \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} \in F.$$

Así, concluimos que $\mathbb{Q} \subseteq F$.

Ejercicio 3. Si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar todas las soluciones de $AX = 0$ reduciendo A por filas.

Respuesta.- Se efectuará una sucesión finita de operaciones elementales de filas en A , indicando el tipo de operación realizada.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{8}{7}R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos: $\frac{6}{7}x_3 = 0$, $7x_2 + x_3 = 0$ y $x_1 - 3x_2 = 0$. De donde

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Ejercicio 4. Si

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hallar todas las soluciones de $AX = 2X$ y todas las soluciones de $AX = 3X$ (el símbolo cX representa la matriz, cada elemento de la cual es c veces el correspondiente elemento de X).

Demostración.- Sea $AX = 2X$, entonces

$$AX = 2X \quad \Rightarrow \quad AX - 2X = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)X = 0.$$

De donde,

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo tenemos,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \quad R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 + \frac{1}{4}R_1 \rightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
& \quad R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, las soluciones estarán dadas por,

$$-x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 \quad \text{y} \quad 4x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Por lo tanto,

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

Por otro lado si $AX = 3X$, entonces

$$AX = 3X \Rightarrow AX - 3X = 0 \Rightarrow (A - 3I)X = 0.$$

De donde,

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo tenemos,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \quad R_1 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 + 4R_1 \rightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \\
& \quad R_3 + 3R_1 \rightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 - \frac{4}{5}R_2 \rightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $0x_3 = 0 \Rightarrow x_3 \in \mathbb{R}$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ por lo tanto,

$$x_3 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = 0.$$

Ejercicio 5. Sea

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es una matriz 2×2 con elementos complejos. Supóngase que A es reducida por filas y también que $a + b + c + d = 0$. Demostrar que existen exactamente tres de estas matrices.

Demostración.- Ya que A es dado como una matriz reducida por filas, entonces se presentan los siguientes casos.

Caso i. Sea $a = b = c = d = 0$ por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso ii. Sea $c = d = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ con $a = 1$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otra posibilidad podría ser que la fila 1 sea cero. Es decir, $a = b = 0 \Rightarrow c + d = 0 \Rightarrow d = -c$ de donde tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Caso iii. Dos filas distintas de cero. Es decir, $a \neq 0, d \neq 0, c = b = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$, de donde A al ser reducido por fila implicará $a = 1 \rightarrow d = -1$. Pero d es la entrada principal distinto de cero de la fila 2 por lo tanto debe ser igual a uno. Así este caso no existe.

De donde concluimos que existe dos matrices que satisfacen la condición dada.

Ejercicio 6. Demostrar que el intercambio de dos filas en una matriz puede hacerse por medio de un número finito de operaciones elementales con filas de los otros tipos.

Demostración.- Consideremos la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que se necesita el intercambio de las filas 1 y 3, entonces se puede realizar la siguiente secuencia para hacerlo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & R_1 \rightarrow R_1 + R_3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & R_3 \rightarrow R_3 - R_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & & R_3 \rightarrow -R_3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & R_1 \rightarrow R_1 - R_3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Generalizando obtenemos que para realizar el intercambio de R_i y R_j , la secuencia de operaciones elementales de los otros tipos es:

- $R_j \rightarrow R_j - R_i$. Restar fila i de la fila j , que da como resultado una fila j como el negativo de la fila original i .
- $R_j \rightarrow -R_j$. Fila negativa j lo que resultará en la fila j cambiando a fila i .
- $R_j \rightarrow R_i - R_j$. Restar fila j de la fila i que resultará en la fila i cambiando a la fila original j .

Ejercicio 7. Hallar, mediante reducción por filas de la matriz de coeficientes todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -4x_1 &+ 5x_3 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 13x_3 &= 0 \\ -\frac{7}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{8}{3}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Respuesta.- Consideremos la matriz de la forma $AX = 0$ para la respectiva reducción por filas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} & 3R_1 \rightarrow R_1 & \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} R_2 + 4R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 + 3R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4 + \frac{7}{3}R_1 \rightarrow R_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 24 & -67 \\ 0 & 24 & -67 \\ 0 & 16 & -\frac{134}{3} \end{bmatrix} \\
 & & & & \\
 & & \begin{array}{l} \frac{1}{24}R_2 \rightarrow R_2 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -\frac{67}{24} \\ 0 & 24 & -67 \\ 0 & 16 & -\frac{134}{3} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} R_1 - 6R_2 \rightarrow R_1 \\ R_3 - 24R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 - 16R_2 \rightarrow R_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -\frac{67}{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

De donde

$$\begin{aligned}
 x_1 - \frac{5}{4}x_3 = 0 & \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4}x_3 \\
 x_2 - \frac{67}{24}x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 = \frac{67}{24}x_3
 \end{aligned}$$

Por lo que la solución está dado por $\left\{ \left(\frac{5}{4}, \frac{67}{24}, 1 \right) t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

Ejercicio 8. Hallar una matriz escalón reducida por filas que sea equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}$$

¿Cuales son las soluciones de $AX = 0$?

Respuesta.- Por la eliminación Gaussiana se tiene,

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix} & \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - iR_1 \rightarrow R_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2+2i \\ 0 & i \end{bmatrix} & \frac{1}{i}R_3 \rightarrow R_3 & \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2+2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & & & & \\
 & \begin{array}{l} R_1 + iR_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 - (2+2i)R_3 \rightarrow R_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & R_2 \leftrightarrow R_3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Que es la matriz escalonada reducida por filas equivalente a A . Por lo tanto la solución esta dada por,

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Ejercicio 9. Dar un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tengan solución.

Respuesta.- Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 = 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 = 3 \end{array}$$

Luego el sistema no tiene solución ya que,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 2(x_1 + x_2) \\ &= 2 \cdot 1 \\ &= 2 \neq 3. \end{aligned}$$

Ejercicio 10. Mostrar que el sistema

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & - & x_4 & = & 3 \end{array}$$

No tiene solución.

Demostración.- Se tiene la matriz

$$AX = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & 3 \end{array} \right] & \begin{array}{l} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 2 \end{array} \right] \\ & & \begin{array}{l} \frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 2 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1 \\ R_3 - 9R_2 \rightarrow R_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Que es la forma escalonada reducida por filas del sistema. De la última fila, obtenemos $0 = -1$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, el sistema dado no tiene solución.

Ejercicio 11. Hallar todas las soluciones de

$$\begin{array}{rclclcl} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 5x_4 & + & 2x_5 & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & -2 \\ 2x_1 & & & - & 4x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & + & 6x_4 & + & 2x_5 & = & -7 \end{array}$$

Respuesta.- Sea la matriz,

$$AX = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 & -7 \end{array} \right] & \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 & -7 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4 - R_1 \rightarrow R_4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 1 & -6 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 1 & -6 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} R_1 - \frac{3}{2}R_2 \rightarrow R_1 \\ R_3 - 3R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 - \frac{7}{2}R_2 \rightarrow R_4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} R_1 - R_3 \rightarrow R_1 \\ R_4 - R_3 \rightarrow R_4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto las soluciones estarán dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 & \Rightarrow x_1 = 1 + 2x_3 - x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 & \Rightarrow x_2 = 2 - x_3 + x_4 \\ x_5 & = 1. \end{aligned}$$

Sea $x_3 = s \in \mathbb{R}$ y $x_4 = t \in \mathbb{R}$ donde el conjunto de soluciones estará dado por:

$$\{(1, 2, 0, 0, 1) + (2, -1, 1, 0, 0)s + (-1, 1, 0, 1, 0)t \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejercicio 12. Sea

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Para cuáles ternas (y_1, y_2, y_3) tiene una solución el sistema $AX = Y$?

Respuesta.- Sea el sistema $AX = Y$ de donde,

$$\begin{array}{ccc}
\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & y_1 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 1 & -3 & 0 & y_3 \end{array} \right] & R_1 \leftrightarrow R_3 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & y_3 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 3 & -1 & 2 & y_1 \end{array} \right] \\
R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 & & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & y_3 \\ 0 & 7 & 1 & y_2 - 2y_3 \\ 0 & 8 & 2 & y_1 - 3y_3 \end{array} \right] \\
R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 & & \\
\frac{1}{7}R_2 \rightarrow R_2 & & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & y_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{y_2 - 2y_3}{7} \\ 0 & 8 & 2 & y_1 - 3y_3 \end{array} \right] \\
R_1 + 3R_2 \rightarrow R_1 & & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{y_3 + 3y_2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{y_2 - 2y_3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{7y_1 - 8y_2 - 5y_3}{7} \end{array} \right] \\
R_3 + 8R_2 \rightarrow R_3 & & \\
\frac{7}{6}R_3 \rightarrow R_3 & & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{y_3 + 3y_2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{y_2 - 2y_3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7y_1 - 8y_2 - 5y_3}{6} \end{array} \right]
\end{array}$$

Por la forma reducida tenemos $Rango(A) = Rango(A/y)$, así el sistema tiene una única solución $y \in \mathbb{R}^3$.