Universidad: **Mayor de San Ándres.**
Asignatura: **Cálculo diferencial e integral II.**
Práctica: 1.
Alumno: **PAREDES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Problema 1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ **con** $x, y \neq 0$. **Si** $\|x\| = \|y\|$**, entonces hallar la medida del ángulo entre** $\frac{1}{2}(x+y)$ **e** $y - x$**.**

Respuesta.- Ya que $x, y \neq 0$ y por el teorema de los cosenos se tiene,

$$\left\langle \frac{1}{2}(x+y), y-x \right\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta \qquad (1)$$

Por definición de producto interno y la parte izquierda de (1),

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(x_i+y_i)\cdot(y_i-x_i)\right] = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i^2\right) = -\frac{1}{2}\left(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle\right).$$

Así (1) quedará de la siguiente manera,

$$\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = -2\|x\|\|y\|\cos\theta.$$

Ya que $\|x\| = \|y\|$ y el teorema de cosenos. Entonces,

$$\|x\|\|x\|\cos\theta + \|y\|\|y|\cos\theta = -2\|x\|\|x\|\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta\,(3\|x\|\|x\| + \|y\|\|y|) = 0$$

Por lo tanto,

$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos(0) \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 2. **Demuestre que si** $x + y$ **y** $x - y$ **son ortogonales, entonces los vectores** x **e** y **deben tener la misma longitud.**

Demostración.- Sea $x.y \in \mathbb{R}^n$. Por definición de ortogonalidad, se tiene

$$\langle x+y, x-y\rangle = 0.$$

Luego por definición de producto interno,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i+y_i)(x_i-y_i)\right] &= 0\\
\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}y_i^2 &= 0\\
\langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle &= 0\\
\sqrt{\langle x, x\rangle} &= \sqrt{\langle y, y\rangle}\\
\|x\| &= \|y\|
\end{aligned}$$

Ya que la norma mide el tamaño del vector entonces x e y tienen la misma longitud.

Problema 3. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si, y solamente si, x e y son ortogonales.

Demostración.- Sea $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. Como $\langle x, y\rangle = 0$, entonces

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Problema 4. Demuestre, y dé una interpretación geométrica de, la ley del paralelogramo: Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Demostración.- Ya que $x, y \in \mathbb{R}^3$ y por definición de norma, entonces

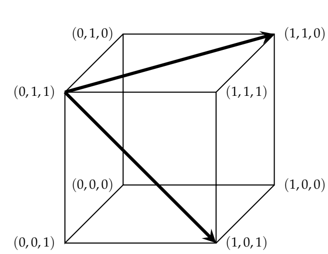
$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \left(\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i+y_i)(x_i+y_i)\right] + \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-y_i)(x_i-y_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2\right) \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{i=1}^{3} y_i^2\right) = 2\left(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle\right) \\
&= 2\left[\left(\sqrt{\langle x, x\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2\right] \\
&= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).
\end{aligned}$$

Otra manera de demostrar sería:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Problema 5. Calcule el ángulo formado por los diagonales de dos caras consecutivas de un cubo de arista igual a a.

Demostración.- Ya que se tiene un cubo. Entonces,



Luego se tiene al vector $x = (1,0,1) - (0,1,1) = (1,-1,0)$ y $y = (1,1,0) - (0,1,1) = (1,0,-1)$, por lo tanto el angulo será:

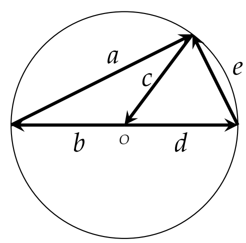
$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\langle(1,-1,0),(1,0,-1)\rangle}{\|(1,-1,0)\|\|(1,0,-1)\|} \\ &= \frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Problema 6. **Demuestre que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.**

Demostración.- Representamos la idea con la siguiente gráfica.



Donde $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}^n$ y O el centro de la circunferencia, por lo tanto los vectores b,d,c son iguales e inscritos en una semicircunferencia. Debemos demostrar que $\langle a,e\rangle = 0$.

Sean

$$a = c+b, \quad e = c+d \quad \text{y} \quad \|b\| = \|c\| = \|d\|$$

Entonces por las propiedades de producto interno tenemos,

$$\langle a,e\rangle = \langle c+b, c+d\rangle = \langle c+b,c\rangle + \langle c+b,d\rangle = \langle c,c\rangle + \langle c,b\rangle + \langle c,d\rangle + \langle b,d\rangle.$$

Ya que $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$ y $b = -d$, nos queda:

$$\langle a,e\rangle = \|c\|^2 - \langle c,d\rangle + \langle c,d\rangle - \|d\|^2 = 0.$$

Problema 7. **Demuestre que uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo.**

Demostración.-

Problema 8. **Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vertices.**

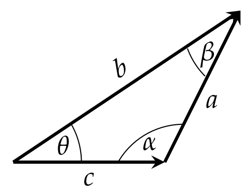
Demostración.-

Problema 9. Demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Demostración.-

Problema 10. Pruebe la ley de senos utilizando vectores.

Demostración.- Considere el siguiente triangulo.



Sea $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Notemos que $b = c + a$ por lo que utilizaremos la proposición

$$\|x \times y\| = \|x\| \|y\| \operatorname{sen}(\theta)$$

de la siguiente manera. Sea $x \times x = 0$ entonces,

- $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{\|b \times c\|}{\|b\|\|c\|} = \dfrac{\|(c+a) \times c\|}{\|b\|\|c\|} = \dfrac{\|c \times c + a \times c\|}{\|b\|\|c\|} = \dfrac{\|a \times c\|}{\|b\|\|c\|}$. Entonces,

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\|a\|} = \frac{\|a \times c\|}{\|a\|\|b\|\|c\|}$$

- $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\|c \times a\|}{\|a\|\|c\|} = \dfrac{\|(b-a) \times a\|}{\|a\|\|c\|} = \dfrac{\|a \times b - a \times a\|}{\|a\|\|c\|} = \dfrac{\|a \times b\|}{\|a\|\|c\|}$. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\|b\|} = \frac{\|a \times c\|}{\|a\|\|b\|\|c\|}$$

- $\operatorname{sen}(\beta) = \dfrac{\|b \times a\|}{\|a\|\|b\|} = \dfrac{\|(c+a) \times a\|}{\|a\|\|b\|} = \dfrac{\|c \times a - a \times a\|}{\|a\|\|b\|} = \dfrac{\|a \times c\|}{\|a\|\|b\|}$. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\|c\|} = \frac{\|a \times c\|}{\|a\|\|b\|\|c\|}$$

Por lo tanto,

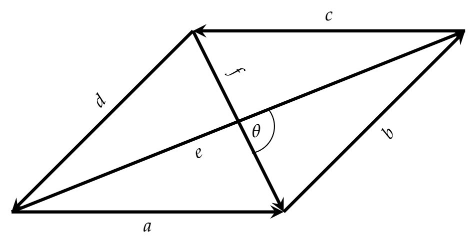
$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\|a\|} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\|b\|} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\|c\|}.$$

Problema 11. Muestre que las medianas de un triángulo se cortan en un punto a un tercio de cada mediana.

Demostración.-

Problema 12. Demuestre que las diagonales de un rombo son ortogonales entre si.

Demostración.- Sea $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^n$., se tiene:



De donde,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle e, f\rangle}{\|e\|\|f\|} \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle a+b, d+a\rangle}{\|e\|\|f\|}\right).$$

Luego, ya que a, b, c, d es un rombo. Es decir, un paralelogramo de lados iguales, entonces $d = -b$ y $\|a\| = \|b\|$ así:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle a+b, -b+a\rangle}{\|e\|\|f\|}\right).$$

Por las propiedades de producto interno,

$$\begin{aligned}
\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\langle a, -b\rangle + \langle b, -b\rangle + \langle a, a\rangle + \langle b, a\rangle}{\|e\|\|f\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{-\langle a, b\rangle - \langle b, b\rangle + \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle}{\|e\|\|f\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\langle a, a\rangle - \langle b, b\rangle}{\|e\|\|f\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\|a\|^2 - \|b\|^2}{\|e\|\|f\|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{0}{\|e\|\|f\|}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e \perp f.$$

Problema 13. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:

$$x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z.$$

Demostración.- La demos

Problema 14. Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ con $x, y \neq 0$. Si $\dfrac{\|x \times y\|}{\|x\|^3} = 3$, entonces hallar $\dfrac{\|\langle x, x\rangle y - \langle x, y\rangle x\|}{\|x\|^4}$.

Demostración.-

Problema 15. Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2.$$

Demostración.-

Problema 16. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, entonces demostrar que:

$$\boldsymbol{x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.}$$

Demostración.- Por el problema 13, sabemos que $x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$. Por lo tanto,

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z + \langle y, x \rangle z - \langle y, z \rangle x + \langle z, y \rangle x - \langle z, x \rangle y.$$

Luego, por la propiedad de conmutatividad concluimos que:

$$\langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z + \langle x, y \rangle z - \langle y, z \rangle x + \langle y, z \rangle x - \langle x, z \rangle y = 0.$$