Universidad:	**Mayor de San Ándres.**
Asignatura:	**Geometría II.**
Ejercicio:	6.
Alumno:	**PARADES AGUILERA CHRISTIAN LIMBERT.**

Ejercicio 1. **Encontrar el punto final de $\vec{a} = (7,6)$ si el punto inicial es $P_0(2,-1)$.**

Respuesta.- Sea $\vec{a} = P_1 - P_0$ y $P_1 = (x,y)$, entonces podemos hallar los vectores de la siguiente manera,

$$x - 2 = 7 \quad ; \quad y + 1 = 6$$

de donde $x = 9$, $y = 5$ y por lo tanto

$$P_1 = (9,5)$$

Ejercicio 2. **Sean $\vec{u} = (1,3)$, $\vec{v} = (2,1)$ y $\vec{w} = (4,-1)$. Encontrar las componentes del vector $\vec{x}$ que satisfacen $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$.**

Respuesta.- Despejando $\vec{x}$ obtenemos

$$6\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \quad \Rightarrow \quad 6\vec{x} = (2,6) - (2,1) - (4,-1)$$

de donde

$$6\vec{x} = (0,5) - (4,-1) \quad \Rightarrow \quad 6\vec{x} = (-4,6) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

Ejercicio 3. **Demuéstrese que: $0\vec{x} = \vec{0}$ y $r\vec{0} = \vec{0}$.**

Demostración.- sea $\vec{x} \in V_n$ entonces $0\vec{x} = 0(x_1, x_2, ..., x_n)$, luego por la multiplicación de un número real por un vector tenemos,

$$0\vec{x} = (0 \cdot x_1, 0 \cdot x_2, ..., 0 \cdot x_n) = (0,0,...,0)$$

y por lo tanto se demuestra que $0\vec{x} = \vec{0}$. Por otro lado sea $r \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$r\vec{0} = r(0,0,...,0) = (r \cdot 0, r \cdot 0, ..., r \cdot) = (0,0,...,0)$$

de modo que

$$r\vec{0} = \vec{0}$$

Ejercicio 4. **Demuéstrese que:**

a) Si $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{c}$.

Demostración.- Sea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$, entonces por el inverso aditivo e hipótesis tenemos ,

$$\begin{array}{rcl|l} \vec{b} & = & (\vec{b} + \vec{a}) - \vec{a} & \\ & = & (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} & \\ & = & (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{a} & \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \\ & = & \vec{c} + (\vec{a} - \vec{a}) & \\ & = & \vec{c} & \end{array}$$

b) **Si** $r\vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad r = 0 \vee \vec{x} = \vec{0}$**.**

Demostración.- Será lo mismo demostrar $r\vec{x} = \vec{0} \wedge r \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{x} = \vec{0}$.

Sea $r \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in V_n$, entonces

$$r\vec{x} = 0 \text{ implica que } \vec{x} = \frac{\vec{0}}{r}, \text{ ya que } r \neq 0.$$

Luego se sigue que

$$\vec{x} = \vec{0}$$

c) **Si** $r\vec{x} = s\vec{x} \;\wedge\; \vec{x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r = s$**.**

Demostración.- Reescribiendo se tiene: Si $r\vec{x} = s\vec{x} \;\wedge\; r \neq s \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$.

De donde se tiene

$$\vec{x} = (r - s)\vec{x} \;\Rightarrow\; \vec{x} = r\vec{x} - s\vec{x} \text{ ya que } r \neq s,$$

por lo tanto

$$\vec{x} = r(\vec{x} - \vec{x}).$$

Aplicando la unicidad y existencia del inverso aditivo, se sigue

$$\vec{x} = r(0) \;\Rightarrow\; \vec{x} = 0.$$

Ejercicio 5. Demostrar que si $\vec{c} \neq 0$ y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos a $\vec{c}$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos. (Vectores paralelos a un mismo vector no nulo son paralelos entre sí).

Demostración.- Sea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$. Por definición de vectores paralelos se tiene

$$r_1\vec{a} = \vec{c} \quad \text{y} \quad r_2\vec{b} = \vec{c}$$

de donde

$$r_1\vec{a} = r_2\vec{b},$$

en vista de que $r_1 \cdot r_2 \neq 0$ entonces

$$\vec{b} = r_1 r_2^{-1}\vec{a},$$

por lo tanto se concluye que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos entre sí.

Ejercicio 6. Hallar todos los vectores ortogonales a:

a) $(\mathbf{3}, \mathbf{6})$

Respuesta.- Sea (r_1, r_1) un vector, entonces para hallar vectores paralelos a $(3, 6)$ utilizamos la definición como sigue,

$$\begin{array}{rcr} (3,6) \circ (r_1, r_2) & = & 0 \\ 3r_1 + 6r_2 & = & 0 \\ 3(r_1 + 2r_2) & = & 0 \\ r_1 + 2r_2 & = & 0 \\ r_1 & = & -2r_2 \end{array}$$

de donde tomamos valores para r_2, reemplazamos en (1) y obtendremos n vectores paralelos a $(3,6)$.

b) $(2,-1)$.

Respuesta.- Análogamente al inciso a) tenemos

$$\begin{array}{rcl} (2,-1)\circ(r_1,r_2) & = & 0 \\ 2r_1+(-r_2) & = & 0 \\ r_1 & = & \frac{1}{2}r_2 \end{array}$$

de igual forma al anterior inciso, tomamos valores para r_2, y hallamos n valores ortogonales a $(2,-1)$.

c) $(2,3,-1)$

Respuesta.- Sea (r_1,r_2,r_3) un vector en V_3, entonces,

$$\begin{array}{rcll} (2,3,-1)\circ(r_1,r_2,r_3) & = & 0 & \\ 2r_1+3r_2-r_3 & = & 0 & \\ r_1 & = & (r_3-3r_2)/2 & \qquad (1) \end{array}$$

luego reemplazamos valores a r_3 y r_2 en (1), de donde obtendremos vectores ortogonales a $(2,3,-1)$.

d) (a_1,a_2)

Respuesta.- Análogo a los anteriores incisos se tiene,

$$(a_1,a_2)\circ(r_1,r_2)=0 \quad \Rightarrow \quad a_1r_1+a_2r_2=0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1=-a_2r_2/r_1 \\ a_2=-a_1r_1/r_2 \\ r_1=-a_2r_2/a_1 \\ r_2=-a_1r_1/a_1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 7. Encontrar un vector que sea ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=-7i+3j+k, \quad \vec{v}=2i+4k$.

Respuesta.-

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}\times\vec{v} & = & \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{array}\right| i - \left|\begin{array}{cc} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{array}\right| j + \left|\begin{array}{cc} 7 & 3 \\ 2 & 0 \end{array}\right| k \\ & = & (3\cdot 4-1\cdot 0)i-(7\cdot 4-2\cdot 1)j+(7\cdot 0-3\cdot 2)k. \end{array}$$

Por lo tanto el vector que deseamos encontrar es

$$\vec{u}\times\vec{v}=(12,-26,-6)$$

b) $\vec{u} = (-1,-1,-1), \quad \vec{v} = (2,0,2)$

Respuesta.-

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

de donde

$$\vec{u} \times \vec{v} = -2i + 2k = (-2,0,2)$$

Ejercicio 8. Encontrar todos los vectores posibles de longitud 1 ortogonales tanto a $\vec{a} = (3,-2,1)$ como a $\vec{b} = (-2,1,-3)$.

Respuesta.- Partamos encontrando el producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5i + 7j - k = (5,7,-1).$$

Esto nos garantiza que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal tanto a $\vec{a}$, como a $\vec{b}$. Luego podemos encontrar cualquier vector de longitud 1 dividiendo el vector por su modulo. Es decir,

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = 1.$$

de donde,

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{(5,7,-1)}{\sqrt{5^2+7^2+1^2}} = \frac{(5,7,-1)}{5\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}}\right).$$

Por lo tanto los vectores de longitud 1 ortogonales a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$$

El segundo vector cumple con la condición, ya que es el vector contrario a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$.

Ejercicio 9. Sean $\vec{a} = ti + j$ y $\vec{b} = 4i + 3j$. Encontrar el valor de t tal que

a) $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$ **sean ortogonales.**

Respuesta.- Sea $\vec{a} = ti + j = (t,1)$ y $\vec{b} = 4i + 3j = (4,3)$, entonces por definición de ortogonalidad tenemos

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4t + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -3/4$$

b) El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/4$.

Respuesta.- Aplicando $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi/4)$ tenemos,

$$4t + 3 = \sqrt{t^2+1} \cdot \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad (4t^2+3)^2 = (t^2+1) \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

de donde,

$$7t^2 + 48 - 7 = 0.$$

Por lo tanto,

$$t = \frac{1}{7} \quad \text{o} \quad t = -7$$

c) El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/6$.

Respuesta.- Análoga al anterior ejercicio tenemos

$$4t + 3 = \sqrt{t^2+1} \cdot \sqrt{25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad (4t^2+3)^2 = (t^2+1) \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad -11t^2 + 96t - 39 = 0$$

de donde

$$t = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{11} \quad \text{o} \quad t = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$$

d) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos.

Respuesta.- Sea $\vec{a} = (t, 1)$ y $\vec{b} = (4, 3)$ entonces por definición de vectores paralelos tenemos que

$$\vec{a} = c\vec{b} \quad \Rightarrow \quad (t, 1) = c(4, 3) \quad \Rightarrow \quad (t, 1) = (4c, 3c)$$

de donde

$$t = 4c \qquad \text{y} \qquad 1 = 3c$$

por lo tanto $c = \dfrac{1}{3}$. Se sigue

$$t = \frac{4}{3}$$

Ejercicio 10. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de $60°$ con $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$. Determinar $\|\vec{a} - \vec{b}\|$ y $\|\vec{a} + \vec{b}\|$.

Respuesta.- Sea

$$\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \pm 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$$

entonces se tiene,

$$\|a \pm b\|^2 = 5^2 + 8^2 \pm 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos\left(60 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

por lo tanto

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = 7 \qquad y \qquad \|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{129}$$

Ejercicio 11. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de $30°$ con $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$. Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$.

Respuesta.- Primero calculemos

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\cos 30 = 1$$

Luego calculamos el ángulo α asociado a $\vec{a}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ de donde nos queda

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1^2+1^2-\sqrt{3}}{2}\right) = \arccos\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = 82.3$$

Sea $a+b$ la diagonal del paralelogramo formado por los lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de donde el ángulo de $a+b$ será $15°$. Por lo tanto $a+b$ y $a-b$ forman un ángulo de,

$$180 - 82.3 - 15 = 82.7$$

Ejercicio 12. Dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que satisfacen la condición $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ y sabiendo que $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 1, \|\vec{a}\| = 4$. Calcular $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Respuesta.- Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ entonces

$$0 = \|\vec{0}\|^2 = \|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2.$$

Luego

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\vec{c}) = 0$$

de donde se tiene,

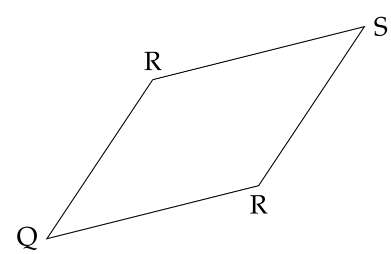
$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\vec{c} = 3^2+1^2+4^2 = 13.$$

Ejercicio 13. Dados los puntos $P(3,4)$, $Q(1,1)$ y $R(5,2)$, usar métodos vectoriales para encontrar las coordenadas del cuarto vértice del paralelogramo cuyo lados adyacentes son $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$.

Respuesta.- Sea S vértice a encontrar entonces por ser un paralelogramo se tiene que $\vec{QR} = vecPS$, por lo tanto

$$(1-1)-(5,2) = (3,4)-S \implies S = (3,4)-(-4,-1)$$
$$S = (7,5)$$

El gráfico corrobora el resultado.



Ejercicio 14. Demostrar que $(4,5,2), (4,7,9), (8,5,-6)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Respuesta.- Supongamos que las distancias entre A, B y C son iguales, lo que implica que $|A-B| = |B-C| = |B-C|$, de donde

$$\begin{array}{rclclcl} |A-B| & = & |(0,-2,-7)| & = & \sqrt{0^2+(-2)^2+(-7)^2} & = & \sqrt{53} \\ |A-C| & = & |(-4,0,8)| & = & \sqrt{(-4)^2+0^2+8^2} & = & \sqrt{80} \end{array}$$

ya que $|A-B| \neq |A-C|$ se concluye que los puntos dado no son los vertices de un triangulo equilátero.

Ejercicio 15. **Demostrar que**

a) $\mathbf{(2,1,6),(4,7,9)}$ **y** $\mathbf{(8,5,-6)}$ **son los vértices de un triángulo rectángulo.**

Respuesta.-

b) **¿En cuál de los vértices está el ángulo de 90°?.**

Respuesta.-

c) **Encontrar el área del triángulo.**

Respuesta.-

Ejercicio 16. **Sean** $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$**. Demuéstrese que** $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}^2 - \vec{b}\|^2 = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$**.**

Demostración.- Se tiene que

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}^2 - \vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}^2|\right) = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Ejercicio 17. **Demuéstrese que** $\vec{a}+\vec{b}$ **y** $\vec{a}-\vec{b}$ **son ortogonales si y sólo si** $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$**. ¿Cuál es la interpretación geométrica del problema?.**

Demostración.-

Ejercicio 18. **Demostrar que:**

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

Demostración.- Análogamente al ejercicio 16 se tiene,

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}^2| = 2|\vec{a}^2 + 2\|\vec{b}|^2$$

Ejercicio 19. **Demostrar que**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2.$$

Demostración.-

Ejercicio 20. **Supóngase que** $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$ **y que** $\vec{a} \neq 0$**. Es posible inferir que** $\vec{b} = \vec{c}$**?. Explicar la respuesta.**

Respuesta.- Esta proposición es falsa ya que si $A = (1,1,1)$, $B = (1,-1,0)$ y $C = (0,-1,1)$ entonces

$$A\cdot B = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 = 0,$$
$$A\cdot C = 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0$$

de donde $B \neq C$.

Ejercicio 21. Explicar por qué las expresiones siguientes no tienen sentido

a) $\vec{a} \circ \left(\vec{b} \circ \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) \circ \vec{c} l$.

Respuesta.-

b) $\|\vec{a} \circ \vec{b}\|$.

Respuesta.-

c) $(\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{c}$.

Respuesta.-

d) $k \circ \left(\vec{a} + \vec{b}.\right)$.

Respuesta.-

Ejercicio 22. Dado el punto fijo $A(1,3,5)$, el punto $P(x,y,z)$ y el vector $vecn = i - j + 2k$, utilice el producto escalar como ayuda para escribir una ecuación en x, y y z que diga lo siguiente: $\vec{n}$ y $\vec{AP}$ son perpendiculares. Simplifique entonces esta ecuación y dé una descripción geométrica del conjunto de tales puntos $P(x,y,z)$.

Respuesta.-

Ejercicio 23. Para $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ demuestre que:

a) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Respuesta.-

b) $\vec{a} \circ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$ **Respuesta.-**

c) $\vec{a} \times \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) = (\vec{a} \circ \vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right)\vec{c}$.

Respuesta.-

Ejercicio 24.

Ejercicio 25.

Ejercicio 26.

Ejercicio 27.

Ejercicio 28.

Ejercicio 29.

Ejercicio 30.

Ejercicio 31. Demostrar que $Comp_{\vec{b}}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right) = Comp_{\vec{b}}\vec{a}_1 + Comp_{\vec{b}}\vec{a}_2$

Demostración.- Por definición de la componente, al ser la norma del vector b un escalar y por propiedades del producto escalar se tiene,

$$Comp_{\vec{b}}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right) = \frac{(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \circ \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}_1 \circ \vec{b} + \vec{a}_2 \circ \vec{\vec{b}}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}_1 \circ \vec{b}}{\vec{b}} + \frac{\vec{a}_2 \circ \vec{\vec{b}}}{|\vec{b}|} = Comp_{\vec{b}}\vec{a}_1 + Comp_{\vec{b}}\vec{a}_2$$

Ejercicio 32.

Ejercicio 33.

Ejercicio 34.

Ejercicio 35.

Ejercicio 36.

Ejercicio 37.

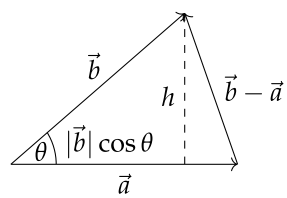
Ejercicio 38.

Ejercicio 39.

Ejercicio 40.

Ejercicio 41. **Demostrar vectorialmente la ley de cosenos.**

Demostración.- Supongamos que $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$ y,



entonces por el teorema de Pitágoras se tiene

$$h^2 = |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}| \cos\theta\Big)^2 \qquad y \qquad |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \Big(|\vec{b}| \cos\theta - |\vec{a}|\Big)^2 + h^2$$

de donde

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = \Big(|\vec{b}| \cos\theta - |\vec{a}|\Big)^2 + |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}| \cos\theta\Big)^2 = \Big(|\vec{b}| \cos\theta\Big)^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \Big(|\vec{b}| \cos\theta\Big)^2$$

por lo tanto,

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

Ejercicio 42.