1

Espacios vectoriales de dimensión finita

1.A Span e independencia lineal

1.2 Notación **Lista of vectores.**

Por lo general, escribiremos listas de vectores sin paréntesis alrededor.

Combinaciones lineales y generadores

1.3 Definición **Combinación lineal.**

Una **combinación lineal** de una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es un vector de la forma

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m,$$

donde $a_1, \ldots a_m \in \mathbf{F}$.

1.5 Definición **Span o generador.**

El conjunto de todas las combinaciones lineales de una lista de vectores $v_1, \ldots, v_m$ en V se denomina **generador** de $v_1, \ldots, v_m$, denotado por $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$. En otras palabras,

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m : a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}\}.$$

El span de la lista vacía $()$ es definida por $\{0\}$.

1.7 Teorema **Span es el subespacio más pequeño que lo contiene.** El **span** de una lista de vectores en V es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los vectores de la lista.

Demostración.- Suponga que $v_1, \ldots, v_m$ es una lista de vectores en V. Primero demostraremos que $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es un subespacio de V. El 0 está en $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$, porque

$$0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m.$$

También, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es cerrado bajo la suma, ya que

$$(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) + (c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = (a_1 + c_1)v_1 + \cdots + (a_m + c_m)v_m.$$

Además, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, dado que

$$\lambda(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = \lambda a_1v_1 + \cdots + \lambda a_mv_m.$$

Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es un subespacio de V. Esto por 1.34.

Cada v_j es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$ (para mostrar esto, establezca $a_j = 1$ y que las otras a's en la definición de combinación lineal sean iguales a 0). Así, el $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ contiene a cada v_j. Por otra parte, debido a que los subespacios están cerrados bajo la multiplicación de escalares y la suma, cada subespacio de V que contiene a cada v_j contiene a $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los demás vectores $v_1, \ldots, v_m$. ■

1.8 Definición **Spans.**

Si $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es igual a V, decimos que $v_1, \ldots, v_m$ genera V.

1.10 Definición **Espacio vectorial de dimensión finita.**

Un espacio vectorial se llama finito-dimensional si alguna lista de vectores en él genera el espacio.

1.11 Definición **Polinomio, $\mathcal{P}$ (F)**

- Una función $p : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ es llamado polinomio con coeficientes en $\mathbf{F}$ si existe $a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_mz^m$$

  para todo $z \in \mathbf{F}$.
- $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbf{F}$.

Con las operaciones usuales de adición y multiplicación escalar, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$. En otras palabras, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un subespacio de $\mathbf{F}^{\mathbf{F}}$, el espacio vectorial de funciones de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{F}$.

Los coeficientes de un polinomio están determinados únicamente por el polinomio. Así, la siguiente definición define de manera única el grado de un polinomio.

1.12 Definición **Grado de un polinomio,** $deg\ p$**.**

- Un polinomio $p \in \mathcal{P}(F)$ se dice que tiene **grado** m si existen escalares $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ con $a_m \neq 0$ tal que
$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$
para todo $z \in \mathbf{F}$. Si p tiene grado m, escribimos $deg\ p = m$.
- El polinomio que es identicamente 0 se dice que tiene **grado** $-\infty$.

1.13 Definición $\mathcal{P}_m$ **(F)**

Para m un entero no negativo, $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficiente en $\mathbf{F}$ y grado no mayor a m.

Verifiquemos el siguiente ejemplo, tenga en cuenta que $\mathcal{P}_m(\mathbf{F}) = \text{span}\,(1, z, \ldots, z^m)$; aquí estamos abusando ligeramente de la notación al permitir que z^k denote una función.

1.15 Definición **Espacio vectorial de dimensión infinita.**

Un espacio vectorial se llama **infinitamente-dimensional** si no es de dimensión finita.

1.16 Ejemplo Demuestre que $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es infinitamente-dimensional.

Demostración.- Considere cualquier lista de elementos de $\mathcal{P}(\mathbf{F})$. Sea m el grado más alto de los polinomios en esta lista. Entonces, cada polinomio en el generador (span) de esta lista tiene grado máximo m. Por lo tanto, z^{m+1} no está en el span de nuestra lista. Así, ninguna lista genera $\mathcal{P}(\mathbf{F})$. Concluimos que $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es de dimensión infinita. ■

Independencia lineal

Suponga $v_1, \ldots, v_m \in V$ y $v \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Por la definición de span, existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m.$$

Considere la cuestión de si la elección de escalares en la ecuación anterior es única. Sea $c_1, \ldots, c_m$ otro conjunto de escalares tal que
$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m.$$
Sustrayendo estas últimas ecuaciones, se tiene

$$0 = (a_1 - c_1)v_1 + \cdots + (a_m - c_m)v_m.$$

Así, tenemos que escribir 0 como una combinación lineal de $(v_1, \ldots, v_m)$. Si la única forma de hacer esto es la forma obvia (usando 0 para todos los escalares), entonces cada $a_j - c_j$ es igual a 0, lo que significa que cada a_j es igual a c_j (y por lo tanto la elección de los escalares fue realmente única). Esta situación es tan importante que le damos un nombre especial, independencia lineal, que ahora definiremos.

1.17 Definición **Linealmente independiente.**

- Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V se llama linealmente independiente si la única posibilidad de que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$ sea igual a 0 es $a_1 = \cdots = a_m = 0$.
- La lista vacía $()$ también se declara linealmente independiente.

El razonamiento anterior muestra que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente si y sólo si cada vector en el $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ tiene sólo una representación lineal en forma de combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$.

1.19 Definición **Linealmente dependiente.**

- Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V se llama linealmente dependiente si no es linealmente independiente.
- En otras palabras, una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es linealmente dependiente si existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$.

1.21 Lema Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es una lista linealmente dependiente en V. Entonces, existen $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que se cumple lo siguente:

(a) $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$;

(b) Si el j-ésimo término se elimina de $v_1, \ldots, v_m$, el generador de la lista restante es igual a $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Demostración.- Ya que la lista $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente dependiente, existe números $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que

$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0.$$

Sea j el elemento más grande de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $a_j \neq 0$. Entonces,

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \cdots - \frac{a_{j-1}}{a_j}v_{j-1} \qquad (1).$$

Lo que prueba (a).
Para probar (b), suponga $u \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Entonces, existe números $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m.$$

En la ecuación de arriba, podemos reemplazar v_j con el lado derecho de (1), lo que muestra que u está en el span de la lista obtenida al eliminar el j-ésimo término de $v_1, \ldots, v_m$. Así (b) se cumple. ∎

Eligir $j = 1$ en el lema de dependencia lineal anterior, significa que $v_1 = 0$, porque si $j = 1$ entonces la condición (a) anterior se interpreta como que $v_1 \in \operatorname{span}()$. Recuerde que $\operatorname{span}() = \{0\}$. Tenga en cuenta también que la demostración del inciso (b) debe modificarse de manera obvia si $v_i = 0$ y $j = 1$.

Ahora llegamos a un resultado importante. Dice que ninguna lista linealmente independiente en V es más extensa que una lista generadora en V.

1.23 Teorema **La longitud de una lista linealmente independiente es $\leq$ a la longitud de la lista generadora.**

En un espacio vectorial de dimensión finita, la longitud de cada lista linealmente independiente de vectores es menor o igual que la longitud de cada lista generadora de vectores (longitud=n de vectores).

Demostración.- Suponga $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente en $\mathbf{V}$. Suponga también que $w_1, \ldots, w_n$ generan V. Necesitamos probar que $m \leq n$. Lo hacemos a través del proceso de pasos que se describe a continuación; tenga en cuenta que en cada paso agregamos una de las $u's$ y eliminamos una de las $w's$.

Paso 1. Sea B la lista $w_1, \ldots, w_n$, que genera V. Por lo tanto, añadir cualquier vector en V a esta lista produce una lista linealmente dependiente (porque el nuevo vector añadido se puede escribir como una combinación lineal de los otros vectores). En particular, la lista

$$u_1, w_1, \ldots, w_n$$

es linealmente dependiente. Así, por el lema (2.21), podemos eliminar un de las w para que la nueva lista B (de longitud n) que consta de u_1 y las $w's$ restantes generen V.

Paso j. La lista B (de longitud n) del paso $j-1$ genera V. Así, añadir cualquier vector a esta lista produce una lista linealmente dependiente. En particular, la lista de longitud $(n+1)$ obtenida al unir u_j a B, colocándola justo después de $u_1, \ldots, u_{j-1}$, es linealmente dependiente. Por el lema de dependencia lineal (2.21), uno de los vectores de esta lista está en el generador de los anteriores, y ya que $u_1, \ldots, u_j$ es linealmente independientes, este vector es uno de los $w's$, no uno de los $u's$. Podemos eliminar esa w para la nueva lista B (de longitud n) que consta de $u_1, \ldots, u_j$ y las $w's$ restantes generan V.

Después del paso m, hemos agregado todas las u y el proceso se detiene. En cada paso, a medida que agregamos un u a B, el lema de dependencia lineal implica que hay algo de w que eliminar. Por lo tanto, hay al menos tantas w como u. ■

Aclaremos esto con dos ejemplos.

1.24 Ejemplo Demuestre que la lista $(1,2,3),(4,5,8),(9,6,7),(-3,2,8)$ no es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$.

Demostración.- La lista $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ genera $\mathbf{R}^3$. Por lo tanto, ninguna lista de longitud superior a 3 es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$. ■

1.25 Ejemplo Demostrar que la lista $(1,2,3,-5),(4,5,8,3),(9,6,7,-1)$ no genera $\mathbf{R}^4$.

Demostración.- La lista $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ es linealmente independiente en $\mathbf{R}^4$. Por lo tanto, ninguna lista de longitud inferior a 4 genera $\mathbf{R}^4$. ■

1.26 Teorema **Subespacio de dimensión finita.**

Todo subespacio de un vector de dimensión finita es de dimensión finita.

Demostración.- Suponga que V es de dimensión finita y U es un subespacio de V. Necesitamos demostrar que U es de dimensión finita. Hacemos esto a través de la siguiente construcción de pasos.

Paso 1. Si $u = \{0\}$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \{0\}$, entonces elegimos un vector no nulo $v_1 \in U$

Paso 2. Si $U = \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, entonces elegimos un vector $v_j \in U$ tal que

$$v_j \in \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1}).$$

Después de cada paso, mientras continúa el proceso, hemos construido una lista de vectores tal que ningún vector en esta lista está en el generador de los vectores anteriores. Así, después de cada paso hemos construido una lista linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Esta lista linealmente independiente no puede ser más grande que cualquier lista de expansión de V (por 2,23). Por lo tanto, el proceso eventualmente termina, lo que significa que U es de dimensión finita. ■

1.A Ejercicios

1. Suponga v_1, v_2, v_3, v_4 se extiende por V. Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

también se extiende por V.

Demostración.- Sea $v \in V$, entonces existe a_1, a_2, a_3, a_4 tal que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4.$$

Que implica,

$$\begin{array}{rcl} v & = & a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 - a_1v_2 + a_1v_2 - a_1v_3 + a_1v_3 - a_2v_3 + a_2v_3 - a_1v_4 + a_1v_4 \\ & - & a_2v_4 + a_2v_4 - a_3v_4 + a_3v_4 \end{array}$$

De donde,

$$v = a_1(v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(v_3 - v_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)v_4.$$

Por lo tanto, cualquier vector en V puede ser expresado por una combinación lineal de

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4.$$

Así, esta lista se extiende por V.

2. Verifique las afirmaciones del Ejemplo 2.18.

(a) Una lista v de un vector $v \in V$ es linealmente independiente si y sólo si $v \neq 0$.

Demostración.- Demostremos que si v es linealmente independiente, entonces $v \neq 0$. Supongamos que $v = 0$. Sea un escalar $a \neq 0$. De donde, $av = 0$ incluso cuando $a \neq 0$. Esto contradice la definición de independencia lineal. Por lo tanto, v debe ser linealmente dependiente. Esto es, $v = 0$ implica que v es un vector linealmente dependiente. Por lo que, si v es linealmente independiente, entonces v es un vector distinto de cero.
Por otro lado, debemos demostrar que $v \neq 0$ implica que v es linealmente independiente. Sea un escalar a tal que $av = 0$. Si $a \neq 0$, entonces av no puede ser 0. Por eso a debe ser 0. Por lo tanto, $v \neq 0$ y $av = 0$ implica que $a = 0$. Así, v es linealmente independiente.

(b) Una lista de dos vectores en V es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

Demostración.- El enunciado siguiente es equivalente. Dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar de otro. Supongamos que v_1, v_2 son dos vectores linealmente dependientes. Por lo que, existe escalares a_1, a_2 tal que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

y no ambos escalares a_1, a_2 son cero. Sea $a_1 \neq 0$, entonces la ecuación se podría reescribir como

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$$

el cual prueba que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Por otro lado, si $a_2 \neq 0$, entonces $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$ de aquí podemos afirmar que v_2 es un múltiplo escalar de v_1.
Ahora supongamos que que uno de los v_1 o v_2 es un múltiplo escalar del otro. Podemos decir, sin perdida de generalidad, que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Esto es, $v_1 = cv_2$ para algún escalar c. Por lo tanto, la ecuación $v_1 - cv_2 = 0$ se cumple, ya que el multiplicador de v_1 es distintos de cero. Esto es precisamente lo que requerimos para la definición de dependencia lineal. Así, v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

(c) $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ es linealmente independiente en $\mathbf{F}^4$.

Demostración.- Utilizaremos la definición de independencia lineal. Sean a, b, c escalares en $\mathbf{F}$ tal que

$$a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) = \mathbf{0} = (0,0,0,0)$$

Entonces,

$$(a,b,c,0) = (0,0,0,0)$$

Lo que implica,

$$a, b, c = 0.$$

Esto demuestra que los tres vectores son linealmente independientes.

(d) La lista $1, z, \ldots, z^m$ es linealmente independiente en $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ para cada entero no negativo m.

Demostración.- Demostremos por contradicción. Supongamos que $1, z, \ldots, z^m$ es linealmente dependiente. Por lo que, existe un escalar $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tal que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m = 0.$$

Sea k el indice más grande tal que $a_k \neq 0$. Esto significa que los escalares desde a_{k+1} hasta a_m son cero. Entonces, se deduce que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k = 0.$$

Reescribiendo se tiene

$$z_k = -\frac{a_0}{a_k} - \frac{a_1}{a_k} z - \cdots - \frac{a_{k-1}}{a_k} z^{k-1}.$$

Aquí, expresamos z^k como un polinomio de grado $k-1$ el cual es absurdo. Por lo que $1, z, z^2, \ldots, z^m$ es un conjunto linealmente independiente.

3. Encuentre un número t tal que
$$(3,1,4),(2,-3,5),(5,9,t)$$
no es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$.

Respuesta.- Sea,
$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)+c(5,9,t)=0.$$
Si $c=0$. Entonces,
$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)=0.$$
Lo que implica
$$\begin{array}{rcl} 3a+2b & = & 0 \\ a-3b & = & 0 \\ 4a+5b & = & 0 \end{array}$$
De donde, resolviendo para a y b se tiene
$$a=0 \quad \text{y} \quad b=0.$$
Pero, no queremos que a,b,c sean cero. Así que debemos forzar que $c\neq 0$, como sigue:
$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)+c(5,9,t)=0 \quad \Rightarrow \quad (5,9,t)=-\frac{a}{c}(3,1,4)-\frac{b}{c}(2,-3,5).$$
Es decir, estamos expresando $(5,9,t)$ como una combinación lineal de los vectores restantes. Así, sea $-\dfrac{a}{c}=x$, $-\dfrac{b}{c}=y$ por lo que,
$$(5,9,t)=x(3,1,4)+y(2,-3,5).$$
Así, tenemos que
$$\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 5 \\ x-3y & = & 9 \\ 4x+5y & = & t \end{array}$$
Resolviendo para x e y se tiene
$$x=3 \quad \text{y} \quad y=-2.$$
Por lo tanto,
$$t=2.$$

4. Verifique la afirmación en el segundo punto del Ejemplo 2.20. Es decir, la lista $(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,c)$ es linealmente dependientes en $\mathbf{F}^3$ si y sólo si $c=8$, como debes verificar.

Respuesta.- Sea los escalares a,b,c no todos cero tal que
$$r(2,3,1)+s(1,-1,2)+t(7,3,c)=(0,0,0)$$
De donde, podemos escribir como ecuaciones lineales
$$\begin{array}{rcl} 2r+s+7t & = & 0 \\ 3r-s+3t & = & 0 \\ r+2s+ct & = & 0 \end{array}$$
De la ecuación 1 y 2 se tiene
$$5r+10t=0 \quad \Rightarrow \quad r=-2t.$$
Luego sustrayendo la ecuación 1 y 3,
$$2r+(c-4)t=0.$$

Así, tenemos que

$$2(-2t) + (c-4)t = 0 \quad \Rightarrow \quad (c-8)t = 0$$

Por lo que,

$$r = 0 \quad \text{o} \quad c - 8 = 0.$$

Si $t = 0$. Entonces, $r = -2t = 0$, y $s = 0$. Contradiciendo el hecho de que no todos los escalares son cero. Por lo tanto, los tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si $c = 8$.

5. (a) Demuestre que si pensamos en **C** como un espacio vectorial sobre **R**, entonces la lista $(1+i, 1-i)$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a, b \in \mathbf{R}$, tal que

$$a(1+i) + b(1-i) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a+b) + (a-b)i = 0.$$

Entonces,

$$a + b = 0 \quad \text{y} \quad a - b = 0.$$

Igualando estas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} a + b = a - b \quad &\Rightarrow \quad 2b = 0 \\ &\Rightarrow \quad b = 0. \end{aligned}$$

Reemplazando en $a + b = 0$,

$$a = 0.$$

Por lo tanto, $(1+i, 1-i)$ es linealmente independiente sobre **R**.

(b) Demuestre que si pensamos en **C** como un espacio vectorial sobre **C**, entonces la lista $(1+i, 1-i)$ es linealmente dependiente.

Demostración.- Sean los escalares $i, 1 \in \mathbf{C}$, tal que

$$i(1+i) + 1(1-i) = i + i^2 + 1 - i = 0 \quad \Rightarrow \quad (i-1) + (1-i) = (i-1) - (i-1) = 0.$$

Donde concluimos que $(1+i, 1-i)$ es linealmente dependiente sobre **C**.

6. Supongamos que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente en V. Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

es también linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a, b, c, d \in F$ tal que

$$a(v_1 - v_2) + b(v_2 - v_3) + c(v_3 - v_4) + d(v_4) = 0.$$

De donde,

$$av_1 - av_2 + bv_2 - bv_3 + cv_3 - cv_4 + dv_4 = 0.$$

Por lo que,

$$av_1 + (b-a)v_2 + (c-b)v_3 + (d-c)v_4 = 0$$

Ya que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente, entonces

$$\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b-a & = & 0 \\ c-b & = & 0 \\ d-c & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo para a, b, c, d se tiene

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

Esto implica que

$$0(v_1 - v_2) + 0(v_2 - v_3) + 0(v_3 - v_4) + 0(v_4) = 0.$$

Por lo tanto, la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

es linealmente independiente.

7. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V, Entonces

$$5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \ldots, v_m$$

es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i\mathbf{F}$ tal que

$$a_1(5v_1 - 4v_2) + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

De donde,

$$5a_1v_1 + (a_2 - 4a_1)v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

Sabemos que la independencia lineal obliga a todos los escalares de v_i a ser cero. En particular , $5a_1 = 0$ entonces $a_1 = 0$ y $a_2 - 4a_1 = 0$, implica $a_2 = 0$. Por lo tanto,

$$0 \cdot v_1 + (0-0)v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

Dado que todos a_i son cero, entonces $5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \ldots, v_m$ es linealmente independiente.

8. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V y $\gamma \in \mathbf{F}$ con $\gamma \neq 0$, Entonces $\gamma v_1, \gamma v_2, \ldots, \gamma v_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \ldots + a_m\gamma v_m = 0.$$

De donde,

$$\gamma\left(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m\right) = 0.$$

Lo que,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = 0.$$

Ya que, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente. Entonces, todos los $a_i's$ deben ser cero. Por lo tanto, $a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \ldots + a_m\gamma v_m = 0$. es linealmente independiente.

9. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son listas linealmente independientes de vectores en V, entonces $v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a_i, b_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1v_1 + a_1v_2 + \ldots + a_mv_m = 0 \quad \text{y} \quad b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mv_m = 0.$$

Entonces,

$$a_1v_1 + a_1v_2 + \ldots + a_mv_m + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mv_m = 0.$$

De donde,

$$(a_1 - b_1)(v_1 + w_1) + (a_2 - b_2)(v_2 + w_2) + \ldots + (a_m - b_m)(v_m + w_m) = 0.$$

Supongamos $c_i = a_i + b_i \in F$. Luego,

$$c_1(v_1 + w_1) + c_2(v_2 + w_2) + \ldots + c_m(v_m + w_m) = 0.$$

Dado que $a_i = b_i = 0$, ya que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son linealmente independientes. Concluimos que, $v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

10. Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $W \in V$. Demostrar que si $v_1 + w, \ldots, v_m + w$ es linealmente dependiente, entonces $w \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Demostración.- Por definición de dependencia lineal. Existen $a_1, \ldots a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que

$$a_1(v_1 + w) + a_2(v_2 + w) + \ldots + a_m(v_m + w) = 0.$$

De donde,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)w. \tag{1}$$

Dado que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente, entonces existen escalares $t_i, \ldots, t_m \in \mathbf{F}$, $\forall t_i = 0$, de modo que

$$t_1v_1 + t_2v_2 + \ldots + t_mv_m = 0$$

Es único. Así pues notemos, para $a_i \neq 0$ que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m \neq 0$$

En consecuencia por (1)

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)w \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$w = -\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m) \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

11. Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$. Demostrar que $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente independiente si y sólo si

$$w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

Demostración.- Supongamos que $w \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Entonces,

$$w = a_1v_1 + \ldots + a_mv_m.$$

De donde,

$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m - w = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + (-1)w = 0.$$

Por lo tanto, $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente dependiente.

Por otro lado: $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente independiente, entonces existe $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbf{F}$, $\forall a_i = 0$, tal que

$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + bw = 0.$$

Dado que $b = 0$, no se puede escribir w como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$. Es decir,

$$w = \frac{1}{0}(a_1v_1 + \ldots + a_mv_m),$$

lo que es imposible. De esta manera

$$w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

12. Explique por qué no existe una lista de seis polinomios que sea linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Notemos que $1, z, z^2, z^3, z^4$ genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Pero por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], la longitud de la lista linealmente independiente es menor o igual que la longitud de la lista que genera. Es decir, cualquier lista linealmente independiente no tiene más de 5 polinomios.

13. Explique por qué ninguna lista de cuatro polinomios genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si m vectores genera V y si tenemos un conjunto de n vectores linealmente independientes, entonces $n \leq m$. Es decir, el número de vectores en un conjunto linealmente independiente de V, no puede se mayor que el número de vectores en un conjunto generador de V.
Por ejemplo, si cuatro polinomios podrían generar $P_4(\mathbf{F})$. Entonces, por la definición de arriba, cualquier conjunto de polinomios linealmente independientes en $P_4(\mathbf{F})$ podría tener cómo máximo cuatro vectores. Sin embargo, el conjunto $1, z, z^2, z^3, z^4$ tiene cinco polinomio linealmente independientes en $P_4(\mathbf{F})$. Por lo tanto, es imposible que cualquier conjunto de cuatro polinomios genere $P_4(\mathbf{F})$.

14. Demuestre que V es de dimensión infinita, si y sólo si existe una secuencia $v_1, v_2, \ldots,$ de vectores en V tal que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada entero positivo m.

Demostración.- Supongamos que V es de dimensión infinita. Queremos producir una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots,$ tal que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada m. Necesitamos mostrar que para cualquier $k \in \mathbf{N}$ y un conjunto de vectores linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots$ podemos definir un vector v_{k+1} tal que $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ es linealmente independiente. Si podemos probar esto, entonces significará que podemos continuar sumando vectores indefinidamente a conjuntos linealmente independientes de modo que los conjuntos resultantes también sean linealmente independientes. Esto nos dará una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots$, cuyo subconjunto finito es linealmente independiente.

Sea $v_1, v_2, \ldots, v_k$ un conjunto linealmente independiente en V. Ya que V es de dimensión finita, no puede generado por un conjunto finito de vectores. Por lo tanto, $V \neq \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Sea v_{k+1} tal que $v_{k+1} \notin \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Entonces, por el ejercicio 11 [Axler, Linear Algebra, que nos dice: Si $v: 1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$, el conjunto $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente independiente si y sólo si $w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$]. El conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ es linealmente independiente.

Por otro lado, sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un conjunto generador de V. Entonces, por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], cualquier conjunto de vectores linealmente independiente en V pueden tener por lo más n vectores. De esto modo, cualquier conjunto que tenga $n+1$ o más vectores es linealmente dependiente. Así, si V es de dimensión finita, entonces no podemos tener una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots$ tal que, para cada m, el subconjunto $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente. Tomando su recíproca, podemos decir que si existe una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots$ tal que el conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada m. Entonces, V es de dimensión infinita. Lo que completa de demostración.

15. Demostrar que $\mathbf{F}^\infty$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Sea un elemento $e_m \in \mathbf{F}^\infty$ como el elemento que tiene la coordenada m-ésima igual a 1 los demás elementos iguala a 0. Es decir,

$$(0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Ahora, si varía m sobre el conjunto de los números naturales, entonces tenemos una secuencia $e_1, e_2, \ldots$ en $\mathbf{F}^\infty$, si y sólo si podemos probar que $e_1, e_2, \ldots, e_m$ es linealmente independiente para cada m. Con este fin, sea

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_m e_m = 0$$

De donde,

$$(a-1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0)$$

Inmediatamente implica que $a_i's = 0$ y por lo tanto, $e_i's$ son linealmente independiente.

16. Demostrar que el espacio vectorial real para todos las funciones de valor real continuas en el intervalo $[0, 1]$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Por el ejercicio 14 (Axler, Linear Algebra, 2A), tenemos que encontrar una secuencia linealmente independiente de funciones continuas en $[0, 1]$. Observe que los monomiales $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ son funciones continuas en $[0, 1]$. Ahora, debemos demostrar que $1, x, x^2, \ldots, x^m$ es linealmente independiente en cada m. Para ello, sea $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = 0$, donde 0 es el cero polinomial. Lo que significa que $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = 0$ toma el valor cero en todo el intervalo $[0, 1]$. Esto implica que cada punto en $[0, 1]$ es una raíz del polinomio. Pero, ya que cada polinomio no trivial tiene como máximo un número finito de raíces, esto es imposible a menos que todos los a_i's sean cero. Lo que muestra que $1, x, x^2, \ldots, x^m$ es linealmente independiente para cada $m \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, el conjunto de funciones continuas en $[0, 1]$ es de dimensión infinita.

17. Suponga $p_0, p_1, \ldots, p_m$ son polinomios en $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ tal que $p_j(2) = 0$ para cada j. Demostrar que $p_0, p_1, \ldots, p_m$ no es linealmente independiente en $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Demostración.- Supondremos que $p_0, p_1, \ldots . p_m$ es linealmente independiente. Demostraremos que esto implica que $p_0, p_1, \ldots, p_m$ genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$. Y que esto a su vez conducirá a una contradicción al construir explícitamente un polinomio que no está en este generador. Notemos que la lista $1, z, \ldots, z^{m+1}$ genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ y tiene longitud $m+1$. Por lo tanto, cada lista linealmente independiente debe tener una longitud $m+1$ o menos (2.23). Si $\text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m) \neq \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$, existe algún

$p \notin \operatorname{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m)$, de donde la lista $p_0, p_1, \ldots, p_m, p$ es linealmente independiente de longitud $m+2$, lo que es una contradicción. Por lo que $\operatorname{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m) = \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.
Ahora definamos el polinomio $q = 1$. Entonces $q \in \operatorname{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m)$, de donde existe $a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$q = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_m P_m,$$

lo que implica

$$q(2) = a_0 p_0(2) + a_1 p_1(2) + \cdots + a_m P_m(2).$$

Pero esto es absurdo, ya que $1 = 0$. Por lo tanto, $p_0, p_1, \ldots, p_m$ no puede ser linealmente independiente.

1.B Bases

1.27 Definición **Base.**

Una base de V es una lista de vectores en V que es linealmente independiente y genera V.

1.28 Teorema **Criterio de base.**

Una lista $v_1, \ldots, v_n$ de vectores en V es una base de V si y sólo si cada $v \in V$ puede escribirse unívocamente de la forma

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$.

Demostración.- Primero suponga que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V. Ya que, $v_1, \ldots, v_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ tal que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ se cumple. Para mostrar que esta representación es única, sean $c_1, \ldots, c_n$ escalares tales que, también tenemos

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Sustrayendo la primera ecuación de la segunda, tenemos

$$0 = (a_1 - c_1) v_1 + \cdots + (a_n - c_n) v_n.$$

Esto implica que cada $a_j - c_j$ es igual a cero. (Ya que, $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente). Por lo tanto $a_1 = c_1, \ldots, a_n = c_n$. Así, tenemos la unicidad deseada.

Por otro lado, suponga que cada $v \in V$ puede ser escrita de manera única como la forma $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Claramente esto implica que $v_1, \ldots, v_n$ genera V. Para demostrar que $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente, suponga que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ son tales que

$$0 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

La unicidad de la representación de $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ (tomando $v = 0$) implica que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Así, $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente y por tanto es una base de V. ■

Una lista generadora en un espacio vectorial puede no ser una base, ya que no es linealmente independiente. Nuestro próximo resultado dice que dada cualquier lista generadora, algunos (posiblemente ninguno) de los vectores en ella pueden descartarse para que la lista restante sea linealmente independiente y aún genere el espacio vectorial.

1.31 Teorema **La lista generadora contiene un base.**

Cada lista generadora en un espacio vectorial se puede reducir a una base del espacio vectorial.

Demostración.- Suponga que $v_1, \ldots, v_n$ genera V. Queremos eliminar algunos de los vectores de $v_1, \ldots, v_n$ para que los vectores restantes formen una base de V. Sea $B = v_1, \ldots, v_n$, de donde realizamos un bucle con las siguientes condiciones:

Paso 1. Si $v_1 = 0$, eliminamos v_1 de B. Si $v_1 \neq 0$ entonces no cambiamos B.

Paso J. Si v_j esta en $\text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, eliminamos v_j de B. Si v_j no está en $\text{span}(v_1, \ldots, v_j)$, entonces no cambiamos B (lema 2.21).

Paramos el proceso después del paso n, obteniendo una lista B. Esta lista B genera V, ya que nuestra lista original generó V y hemos descartado solo los vectores que ya estaban en el generador de los vectores anteriores. El proceso garantiza que ningún vector de B está en el generador de los anteriores. Así pues, B es linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Por tanto, B es una base de V. ■

Nuestro siguiente resultado, un corolario fácil del resultado anterior, nos dice que todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

1.32 Corolario **Base del espacio vectorial de dimensión finita.**

Cada espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

Demostración.- Por definición, un espacio vectorial de dimensión finita tiene una lista generadora. El resultado anterior nos dice que cada lista generadora puede ser reducida a una base. ■

Nuestro siguiente resultado es en cierto sentido un derivado de 2.31, que decía que toda puede reducirse a una base. Ahora mostramos que dada cualquier lista linealmente independiente, podemos unir algunos vectores adicionales (esto incluye la posibilidad de no unir ningún vector adicional) de modo que la lista ampliada siga siendo linealmente independiente pero que también genere el espacio.

1.33 Teorema **Una lista linealmente independiente se extiende a una base.**

Cada lista linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial se puede extender a una base del espacio vectorial.

Demostración.- Suponga $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente en un espacio vectorial V de dimensión finita. Sea $w_1, \ldots, w_n$ una base de V. Por lo que la lista

$$u_1, \ldots, u_m,\ w_1, \ldots .w_n$$

genera V. Aplicando el procedimiento de la prueba de 2.31 para reducir esta lista a una base de V se obtiene una base formada por los vectores $u_1, \ldots, u_m$ (ninguna de las $u's$ se elimina en este procedimiento porque $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente) y algunos de los w'. ■

Como aplicación del resultado anterior, mostramos ahora que cada subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita puede emparejarse con otro subespacio para formar una suma directa de todo el espacio.

1.34 Teorema Cada subespacio de V forma parte de una suma directa igual a V.

Suponga V es de dimensión finita y U es un subespacio de V. Entonces, existe un subespacio W de V tal que $U \oplus W = V$.

Demostración.- Ya que V es de dimensión finita, también lo es U por 2.26. Por lo que, existe una base $u_1, \ldots, u_m$ de U esto por 2.32. Por su puesto $u_1, \ldots, u_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V. Por lo tanto, esta lista puede extenderse a una base $u_1, \ldots, u_n$ de V esto por 2.33. Sea $W = \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_n)$. Para probar que $V = U \oplus W$, por 1.45, solo Necesitamos demostrar que

$$V = U + W \quad \text{y} \quad U \cap W = \{0\}.$$

Para probar la primera ecuación, suponga $v \in V$. Entonces, ya que la lista $u_1, \ldots, u_m$, $w_1, \ldots, w_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m + b_1w_1 + \cdots + b_nw_n.$$

En otras palabras, tenemos $v = u + w$, donde $u \in U$ y $w \in W$ fueron definidas anteriormente. Así, $v \in U + W$, completando la prueba de $V = W + W$.
Para demostrar que $U \cap W = \{0\}$, suponga $v \in U \cap W$. Entonces, existe escalares $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m = b_1w_1 + \cdots + b_nw_n.$$

Por lo tanto,

$$a_1u_1 + \cdots + a_mu_m - b_1w_1 - \cdots - b_nw_n = 0.$$

Esto, ya que $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ son linealmente independientes, esto implica que $a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_n = 0$. Así, $v = 0$, de donde $U \cap W = \{0\}$. ■

1.B Ejercicios

1. Halle todos los espacios vectoriales que tienen exactamente una base.

Respuesta.- Afirmamos que solo el espacio vectorial trivial tiene exactamente una base. Para ello demostraremos que para espacios vectorial de dimensión finita e infinita se tiene más de una base. Consideremos un espacio vectorial de dimensión finita. Sea V un espacio vectorial no trivial con base $v_1, \ldots, v_n$. Decimos que para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista $cv_1, \ldots, cv_n$ es también una base. Es decir, la lista es aún linealmente independiente, y es aún generador de V. Luego, sea $u \in V$ ya que $v_1, \ldots, v_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c}(cv_1) + \cdots + \frac{a_n}{c}(cv_n)$$

y así $cv_1, \ldots, cv_n$ genera también V. Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión finita.
Por otro lado. Sea W un espacio vectorial de dimensión infinita con base $w_1, w_2, \ldots$. Para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista $cw_1, cw_2, \ldots$ es también una base. Claramente la lista es linealmente independiente, y también genera V. Luego, sea $u \in V$, ya que $w_1, w_2, \ldots$ genera W, existe $a_1, a_2, \ldots \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c}cw_1 + \frac{a_2}{c}cw_2 + \cdots$$

y así $cw_1, cw_2, \ldots$ genera también W. Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión infinita.

2. Verifique todas las afirmaciones del ejemplo 2.28.

(a) La lista $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$, ..., $(0,\ldots,0,1)$ es una base de $\mathbf{F}^n$, llamado la base estándar de $\mathbf{F}^n$.

Respuesta.- Primero demostraremos que la lista genera $\mathbf{F}^n$. Sea, los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $\mathbf{F}$. Podemos escribir

$$x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + x_n(0,\ldots,0,1) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Donde, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector cualquier en $\mathbf{F}^n$. Esta expresión es una combinación lineal de los n vectores. Por definición, esta lista genera $\mathbf{F}^n$.
Ahora, demostraremos que la lista es linealmente independiente. Para ello, aplicaremos la definición. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + a_n(0,\ldots,0,1) = 0.$$

Esto implica que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0,0,\ldots,0).$$

Por lo que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Así, la lista es linealmente independiente.

(b) La lista $(1,2), (2,5)$ es una base de $\mathbf{F}^2$.

Respuesta.- Sea $(a,b) \in \mathbf{F}^2$. Buscaremos escalares c_1, c_2 tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 = (a,b).$$

que implica,

$$c_1(1,2) + c_2(3,5) = (a,b) \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 3c_2, 2c_1 + 5c_2) = (a,b)$$

De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= a \\ 2c_1 + 5c_2 &= b \end{aligned}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$c_2 = 2a - b$$

Luego, reemplazándola a la primera ecuación, se tiene

$$c_1 = -5a + 3b.$$

Por lo tanto, para cada vector $(a,b) \in \mathbf{F}^2$ podemos encontrar c_1, c_2 en función de a y b tal que $c_1v_1 + c_2v_2$ es una combinación lineal el cual genera $\mathbf{F}^2$.
Después, sólo nos haría falta reemplazar en

$$c_2 = 2a - b \quad \text{y} \quad c_1 = -5a + 3b$$

$(a,b) = (0,0)$. De donde,

$$c_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0.$$

Esto implica que $(1,2)$ y $(2,5)$ son linealmente dependientes. Por lo que concluimos que la lista dada es una base de $\mathbf{F}^2$.

(c) La lista $(1,2,-4)$, $(7,-5,6)$ es linealmente independiente en $\mathbf{F}^3$ pero no es una base en $\mathbf{F}^3$, ya que no genera $\mathbf{F}^3$.

Respuesta.- Sean los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1(1,2,-4) + c_2(7,-5,6) = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (0,0,0)$$

Por lo que, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + 7c_2 &= 0 \\ 2c_1 - 5c_2 &= 0 \\ -4c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación y sumando la tercera tenemos

$$c_2 = 0$$

Luego, sustituyendo en la primera ecuación,

$$c_1 = 0$$

Esto implica que los vectores dados son linealmente independientes.
Ahora, demostraremos que la lista no genera $\mathbf{F}^3$, con un contraejemplo. Supongamos que $(1,2,-4),(7,-5,6)$ puede generar $(1,0,0)$ el cual está en $\mathbf{F}^3$. Sea los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$, entonces

$$c_1(1,2,-4) + c_2(7,-5,6) = (1,0,0) \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (1,0,0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{aligned} c_1 + 7c_2 &= 1 \\ 2c_1 - 5c_2 &= 0 \\ -4c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}$$

De las ecuaciones 2 y 3 se tiene que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Reemplazando en la primera ecuación,

$$0 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1.$$

Lo que es un absurdo, por lo tanto $(1,2,-4)$, $(7,-5,6)$ no genera $\mathbf{F}^3$.

(d) La lista $(1,2),(3,5),(4,13)$ genera $\mathbf{F}^2$ pero no es una base de $\mathbf{F}^2$, ya que no es linealmente independiente.

Respuesta.- Demostremos que la lista no es linealmente independiente. Sea $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1,2) + a_2(3,5) + a_3(4,13) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_1 + 3a_2 + 4a_3, 2a_1 + 5a_2 + 13a_3) = (0,0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & 3a_2 & + & 4a_3 & = & 0 \\ 2a_1 & + & 5a_2 & + & 13a_3 & = & 0 \end{array}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$a_2 = 5a_3.$$

Remplazando en la primera ecuación,

$$a_1 = -19a_3.$$

Sea, $a_3 = 1$, entonces

$$a_1 = -19 \quad \text{y} \quad a_2 = 5.$$

Por lo tanto, $(1,2),(3,5),(4,13)$ no es linealmente independiente.

Ahora, demostraremos que la lista $(1,2),(3,5),(4,13)$ genera $\mathbf{F}^2$. Sean $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1(1,2) + a_2(3,5) + a_3(4,13) = 0$$

Sabiendo que esta lista es linealmente dependiente, podemos reescribimos la ecuación de modo que $(1,2),(3,5)$ genera $(4,13)$:

$$(4,13) = \frac{a_1}{a_3}(1,2) - \frac{a_2}{a_3}(3,5)$$

Por el lema 2.21 (Axler, Linear Algebra), vemos que el generador de $(1,2),(3,5)$ es igual al generador de $(1,2),(3,5),(4,13)$. Sólo nos faltaría demostrar que $(1,2),(3,5)$ genera $\mathbf{F}^2$. Para ello, sea $(x_1,x_2) \in \mathbf{F}^2$, de modo que

$$a_1(1,2) + a_2(3,5) = (x_1,x_2)$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} a_1 + 3a_2 & = & x_1 \\ 2a_1 + 5a_2 & = & x_2 \end{array}$$

Multiplicando la segunda ecuación por dos y restando la primera, tenemos

$$a_1 = 2x_1 - x_2.$$

Remplazando en la primera ecuación,

$$a_2 = -(5x_1 + 3x_2).$$

Por lo tanto, podemos hallar a_1 y a_2 en términos de x_1 y x_2 tal que $a_1(1,2) + a_2(3,5) = (x_1,x_2)$ es una combinación lineal que genera $\mathbf{F}^2$.

Siendo más prácticos podemos usar el teorema 2.23. Para saber que $(1,2),(3,5),(4,13)$ no es linealmente independiente pero genera $\mathbf{F}^2$.

(e) La lista $(1,1,0),(0,0,1)$ es una base de $\{(x,x,y) \in \mathbf{F}^3 \,:\, x,y \in \mathbf{F}\}$.

Respuesta.- Está claro que la lista es linealmente independiente. Ya que, la única forma de que se cumpla

$$c_1(1,1,0) + c_2(0,0,1) = 0$$

es que c_1, c_2 sean igual a cero.
Ahora demostraremos que la lista dada genera $\{(x,x,y) \in \mathbf{F}^3 \,:\, x,y \in \mathbf{F}\}$. Sea $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1(1,1,0) + c_2(0,0,1) = (x,x,y).$$

De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones como sigue:

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 0 & = & x \\ c_1 + 0 & = & x \\ 0 + c_2 & = & y \end{array}$$

Por lo que, cualquier $\mathbf{F}^3$ puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores $(1,1,0),(0,0,1)$ y por lo tanto generan $\mathbf{F}^3$.

(f) La lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es una base de

$$\left\{(x,y,z)\in \mathbf{F}^3 \ : \ x+y+z=0\right\}.$$

Respuesta.- Si $x+y+z=0$ para $x,y,z\in\mathbf{F}$, entonces podemos escribir

$$x=-y-z.$$

Por lo que,

$$\begin{array}{rcl}(x,y,z) & = & (-y-z,y-z)\\ & = & (-y,y-0)+(-z,0z)\\ & = & -y(1,-1,0)-z(1,0,-1).\end{array}$$

Debido a que y,z son escalares, implica que podemos expresar cualquier $(x,y,z)\in\mathbf{F}^3$ como una combinación lineal de los vectores $(1,-1,0),(1,0,-1)$.

Es fácil ver que que la lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es linealmente independiente. Dado que, si $c_1,c_2\in\mathbf{F}^n$, entonces

$$\begin{array}{rcl}c_1(1,-1,0)+c_2(1,0,-1) & = & 0\\ (c_1+c_2,-c_1,-c_2) & = & 0.\end{array}$$

De donde,

$$c_1=c_2=0.$$

Así, la lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es linealmente independiente. Por lo tanto,$(1,-1,0),(1,0,-1)$ es una base de $\mathbf{F}^3$

(g) La lista $1,z,\ldots,z^m$ es una base de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Respuesta.- El elemento general de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ es una combinación lineal de $1,z,z^2,\ldots,z^m$ de la forma:

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m$$

donde $a_i\in\mathbf{F}$ para $1\le i\le m$. Lo que demuestra que genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Para demostrar que la lista es linealmente independiente, suponemos que la combinación lineal de estos elementos es igual a cero; es decir,

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m=0.$$

Donde el $\mathbf{0}$ es un polinomio. Esto implica que el polinomio del lado izquierdo toma valor cero para todo los valore de z. Esto es posible sólo cuando todos los $a_i's$ son cero, ya que cualquier polinomio no trivial tiene un número finito de raíces. Por lo tanto la lista $1,z,z^2,\ldots,z^m$ es base de $\mathcal{F}_m(\mathbf{F})$.

3. a). Sea U el subespacio de $\mathbf{R}^5$ definido por

$$U=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{F}^5 \ : \ x_1=3x_2 \text{ y } x_3=7x_4\right\}.$$

Encuentre una base de U.

Respuesta.- Dado que se tiene la condición $x_1=3x_2$ y $x_3=7x_4$. Podemos escribir el vector general, como sigue

$$\begin{array}{rcl}3x_2,x_2,7x_4,x_4,x_5 & = & (3x_2,x_2,0,0,0)+(0,0,7x_4,x_4,0)+(0,0,0,0,x_5)\\ & = & x_2(3,1,0,0,0)+x_4(0,0,7,1,0)+x_5(0,0,0,0,1).\end{array}$$

Supongamos que $(3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1)$ es una base de $\mathbf{R}^5$. Podemos demostrar fácilmente que estos vectores generar U, ya que U puede expresarse como una combinación lineal de estos tres vectores. Ahora, demostremos que son linealmente independiente. Sea $c_1,c_2,c_3 \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$c_1(3,1,0,0,0)+c_2(0,0,7,1,0)+c_3(0,0,0,0,1)=0$$

De donde,

$$(3c_1,c_2,7c_2,c_2+c_3)=(0,0,0,0,0).$$

Igualando cada componente, tenemos que $c_1=c_2=c_3=0$. Así des demuestra que estos tres vectores son linealmente independientes. Por lo tanto, $(3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1)$ es una base de U.

b). Extienda la base de la parte (a) a una base de $\mathbf{R}^5$.

Respuesta.-

c). Encuentre un subespacio W de $\mathbf{F}^5$ tal que $\mathbf{R}^5 = U \uplus W$.

Respuesta.-