

Teoría elemental de la probabilidad

Sea E una colección de elementos ξ, η, ζ, \dots , que llamaremos sucesos elementales, y \mathfrak{F} un conjunto de subconjuntos de E ; los elementos del conjunto \mathfrak{F} se llamarán eventos aleatorios.

Axioma .1 \mathfrak{F} es un campo de conjuntos. (Un sistema de conjuntos se denomina campo si la suma, el producto y la diferencia de dos conjuntos del sistema también pertenecen al mismo sistema).

Axioma .2 \mathfrak{F} contiene el conjunto E .

Axioma .3 A cada conjunto A en \mathfrak{F} se le asigna un número real no negativo $P(A)$. Este número $P(A)$ se llama probabilidad del evento A .

Axioma .4 $P(E)$ es igual a 1.

Axioma .5 Si A y B no tienen ningún elemento en común, entonces

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

1.4. Corolarios inmediatos de los axiomas; Probabilidades condicionales; teorema de Bayes

De $A + \bar{A} = E$ y los axiomas IV y V se sigue que,

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (1.4.1)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (1.4.2)$$

Ya que $\bar{E} = 0$, en particular se tiene,

$$P(0) = 0. \quad (1.4.3)$$

Si A, B, \dots, N son incompatibles, entonces por el Axioma V se sigue la fórmula (**teorema de la suma**),

$$P(A + B + \dots + N) = P(A) + P(B) + \dots + P(N) \quad (1.4.4)$$

Si $P(A) > 0$, entonces el cociente

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1.4.5)$$

Es definida como la probabilidad condicional del evento B bajo la condición A .

Luego por (.5) se sigue que,

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \quad (1.4.6)$$

Y por inducción obtenemos la fórmula general (**el teorema de la multiplicación**)

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) \dots P_{A_1A_2\dots A_{n-1}}(A_n) \quad (1.4.7)$$

Los siguientes teoremas se siguen fácilmente,

$$P_A(B) \geq 0, \quad (1.4.8)$$

$$P_A(E) = 1, \quad (1.4.9)$$

$$P_A(B + C) = P_A(B) + P_A(C). \quad (1.4.10)$$

$$P_A(A) = 1. \quad (1.4.11)$$

Por (.6) y la fórmula análoga

$$P(AB) = P(B)P_B(A)$$

obtenemos la fórmula,

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}, \quad (1.4.12)$$

que contiene el esencia el **teorema de bayes**

Teorema 1.1 (Teorema de la probabilidad total) Sea $A_1 + A_2 + \dots + A_n = E$ (Sea asume que los eventos A_1, A_2, \dots, A_n son mutuamente excluyentes) y sea X arbitrario. Entonces

$$P(X) = P(A_1)P_{A_1}(X) + P(A_2)P_{A_2}(X) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(X); \quad (1.4.13)$$

Prueba.- Sea

$$X = A_1X + A_2X + \dots + A_nX;$$

Usando (.4) tenemos,

$$P(X) = P(A_1X) + P(A_2X) + \dots + P(A_nX)$$

y según (.6) tenemos al mismo tiempo

$$P(A_iX) = P(A_i)P_{A_i}(X)$$

Teorema 1.2 (Teorema de Bayes) Sea $A_1 + A_2 + \dots + A_n = E$ y X sea arbitrario, entonces

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(X)}{P(A_1)P_{A_1}(X) + P(A_2)P_{A_2}(X) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(X)}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.4.14)$$

Prueba.- De (.12) se tiene,

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(X)}{P(X)}$$

Para obtener la fórmula (.14) solo queda sustituir la probabilidad $P(X)$ por su valor derivado de (.13) aplicando el teorema de la probabilidad total.

1.5. Independencia

Pasemos a la definición de la independencia. Dado n experimentos $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \dots, \mathfrak{U}^{(n)}$, es decir, n descomposiciones

$$E = A_1^i + A_2^i + \dots + A_{r_i}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

del conjunto básico E . Entonces es posible asignar $r = r_1 r_2 \dots r_n$ probabilidades (en el caso general).

$$P_{q_1 q_2 \dots q_n} = P(A_{q_1}^1 A_{q_2}^2 \dots A_{q_n}^n) \geq 0$$

que son completamente arbitrarios excepto por la condición única que,

$$\sum_{q_1, q_2, \dots, q_n} P_{q_1 q_2 \dots q_n} = 1. \quad (1.5.1)$$

Definición 1.1 n experimentos $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \dots, \mathfrak{U}^{(n)}$ son llamados mutuamente independientes, si para cualquier q_1, q_2, \dots, q_n la siguientes ecuación es cierta

$$P(A_{q_1}^{(1)}, A_{q_2}^{(2)} \dots A_{q_n}^{(n)}) = P(A_{q_1}^{(1)}) P_{q_2}(A_{q_2}^{(2)}) \dots P(A_{q_n}^{(n)}). \quad (1.5.2)$$

Teorema 1.3