1

Transformaciones lineales

1.1 Notación F, V, W.

- **F** denota **R** o **C**.
- V y W denota espacios vectoriales sobre **F**.

1.A El espacio vectorial de las Transformaciones lineales

Definición y ejemplos de Transformaciones lineales

1.2 Definición **Transformación lineal.**

Una **transformación lineal** de V en W es una función $T : V \to W$ con las siguientes propiedades:

- **Aditividad**
$$T(u + v) = Tu + Tv \text{ para todo } u, v \in V;$$
- **Homogeneidad**
$$T(\lambda v) = \lambda(Tv) \text{ para todo } \lambda \in \mathbf{F} \text{ y todo } v \in v.$$

1.3 Notación $\mathcal{L}(V, W.)$

El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se denota por $\mathcal{L}(V, W)$.

1.4 Teorema **Transformaciones lineales y bases del dominio.**

Suponga que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, \ldots, w_n \in W$. Entonces, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que
$$T(v_j) = w_j$$

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Demostración.- Primero demostremos la existencia de una transformación lineal T, con la propiedad deseada. Defina $T : V \to W$ por

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1w_1 + \cdots + c_nw_n.$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son elementos arbitrarios de $\mathbf{F}$. La lista $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, y por lo tanto, la ecuación anterior de hecho define una función T para V en W (porque cada elemento de V puede ser escrito de manera única en la forma $c_1v_1, \ldots, c_nv_n$). Para cada j, tomando $c_j = 1$ y las otras $c's$ igual a 0 demostramos la existencia de $T(v_j) = w_j$.
Si $u, v \in V$ con $u = a_1v_1, \ldots, a_nv_n$ y $v = c_1v_1, \ldots, c_nv_n$, entonces

$$\begin{aligned}
T(v+u) &= T\left[(a_1+c_1)v_1 + \ldots + (a_n+a_n)v_n\right] \\
&= (a_1+c_1)w_1 + \ldots + (a_n+c_n)w_n \\
&= (a_1w_1 + \ldots + a_nw_n) + (c_1w_1 + \ldots + c_nw_n) \\
&= T(u) + T(v).
\end{aligned}$$

Similarmente, si $\lambda \in \mathbf{F}$ y $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$, entonces

$$\begin{aligned}
T(\lambda v) &= T(\lambda c_1v_1 + \cdots + \lambda c_nv_n) \\
&= \lambda c_1w_1 + \cdots + \lambda c_nw_n \\
&= \lambda(c_1w_1 + \cdots + c_nw_n) \\
&= \lambda T(v).
\end{aligned}$$

Así, T es una transformación lineal para V en W.
Para probar que es único, suponga que $T \in \mathcal{L}(V,W)$ y que $T(v_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Sea $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{F}$. La Homogeneidad de T implica que $T(c_jv_j) = c_jw_j$ para $j = 1, \ldots, n$. La Aditividad de T implica que

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1w_1 + \cdots + c_nw_n.$$

Por lo tanto, T se determina de forma única en span$(v_1, \ldots, v_n)$ para la ecuación de arriba. Porque $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, esto implica que T es determinado únicamente en V. ■

Operaciones algebraicas en $\mathcal{L}(V, W)$

1.5 Definición **Adición y multiplicación escalar en $\mathcal{L}(V, W)$**

Suponga que $S, T \in \mathcal{L}(V,W)$ y $\lambda \in \mathbf{F}$. La **suma** $S + T$ y el **producto** λT son transformaciones lineales para V en W definida por

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v) \quad \text{y} \quad (\lambda T)(v) = \lambda(Tv)$$

para todo $v \in V$.