Cap 2: Axiomas sobre medición de segmentos

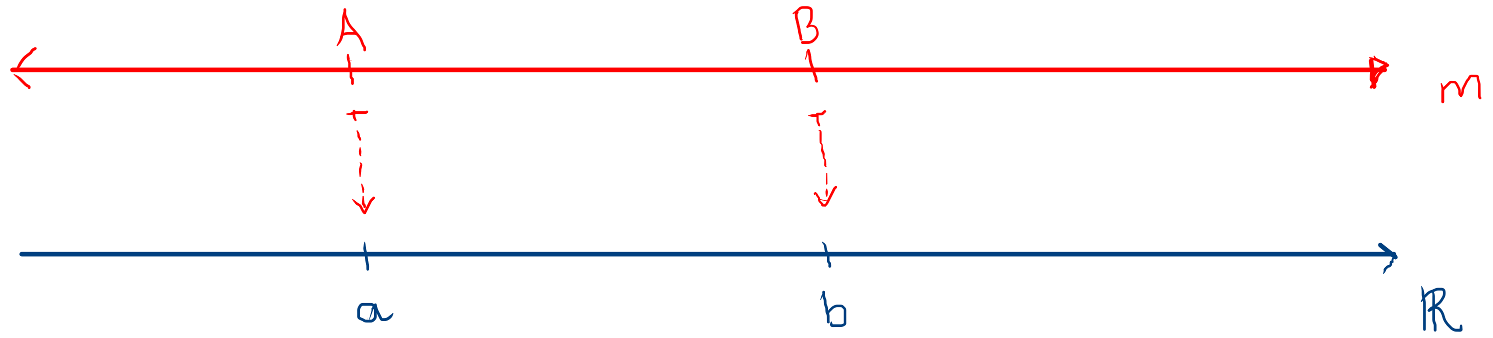
Axioma III, A todo par de puntos del plano corresponde un número mayor o igual que cero. Este número es cero si y solo si los puntos son coincidentes.

OBS: Se establece la correspondencia:

A, B del plano $\longmapsto$ $\underbrace{AB}_{\text{distancia entre A y B o longitud del segmento AB.}} \geq 0$ o $\overline{AB}$

Si $A = B \overset{\text{Axioma}}{\Rightarrow} AB = 0$.

Axioma $\underline{\text{III}}_2$ Los puntos de una recta pueden ser siempre colocados en correspondencia biunívoca con los números reales, de modo que la diferencia entre esos números sea la distancia entre los puntos correspondientes.



[correspondencia biunívoca :

- A cada $A \in m$, le corresponde un único número real a.
- A cada $a \in \mathbb{R}$, le corresponde un único punto $A \in m$.

- distancia entre A y B es $b-a$ siempre que $b \geq a$, $a-b$ si $a < b$. En resumen, $AB = |b-a|$.

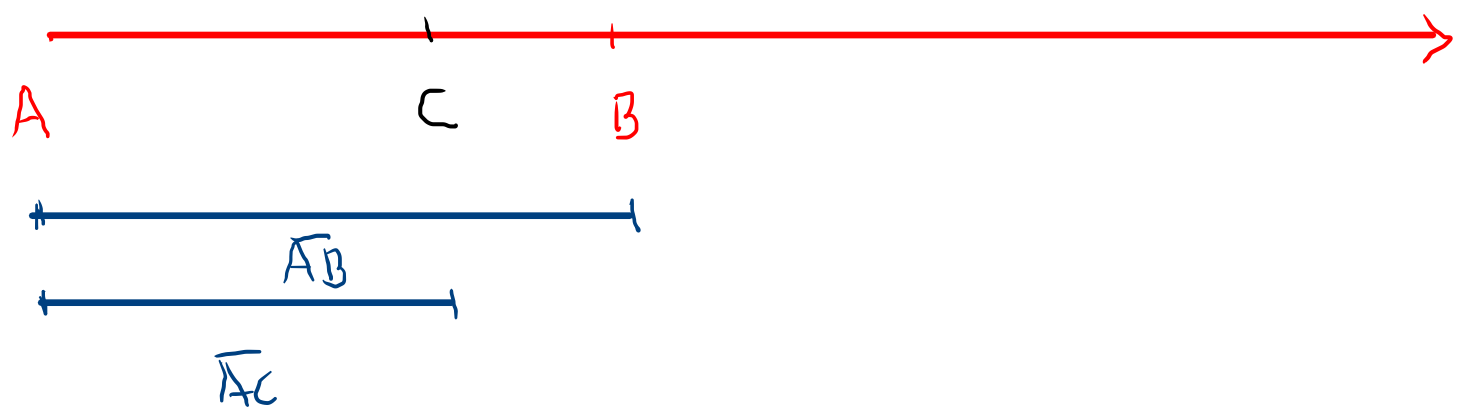
Axioma III_3 Si el punto C se encuentra entre A y B entonces

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

Proposición Si en una semirecta S_{AB}, tomamos un segmento AC con

$$\overline{AC} < \overline{AB}$$

$\Rightarrow$ C está entre A y B



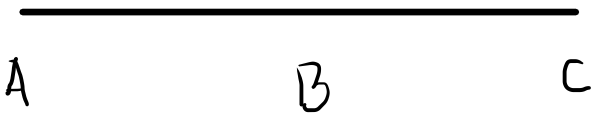
Dem: Se tienen tres posibilidades:

1 - A está entre B y C,
2 - B esta entre A y C
3 - C esta entre A y B !

1) no es posible, ya que $B, C \in S_{AB}$

Si pasa 2), tenemos

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AB}$ $\Rightarrow\Leftarrow$

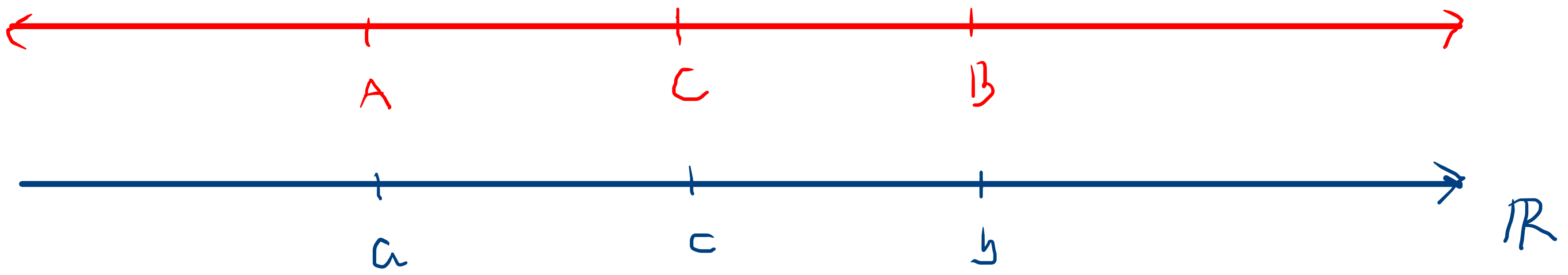


pues

$\overline{AC} < \overline{AB}$

Como 1) y 2) son imposibles $\Rightarrow$ C está entre A y B.

Teorema: Sean A, B, C puntos colineales, cuyas coordenadas son $a, b, c \in \mathbb{R}$.
El punto C está entre A y B $\Leftrightarrow$ c está entre a y b $\quad (a < c < b \text{ o } b < c < a)$



Dem: $\Rightarrow$) Suponemos que C está entre A y B.
Por el axioma III_3,

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Luego,

$$|a-b| = |c-a| + |b-c|. \quad (1)$$

Si $\boxed{a<b}$ $\Rightarrow$ $b-a = |c-a| + |b-c|$

$\Rightarrow$ $|c-a| < b-a$, $|b-c| < b-a$

$\Rightarrow$ $c-a < b-a$, $b-c < b-a$

$\overset{*}{\Rightarrow}$ $c < b$, $c > a$ $\Rightarrow$ $a < c < b$.

$*$ $x \leq |x|$

$-c < -a \Rightarrow c > a$

Si $\boxed{b<a}$ $\Rightarrow$ de 1) $\quad a-b = |c-a| + |b-c|$

$$\Rightarrow \quad |c-a| < a-b \quad , \quad |b-c| < a-b$$

$$\Rightarrow \quad a-c < a-b \quad , \quad c-b < a-b$$

$$\Rightarrow \quad c > b \quad , \quad c < a \quad \Rightarrow \quad b < c < a \quad //$$

$-x \leq |x|$

Por tanto, c está entre a y b.

$\Leftarrow$) Supongamos que c está entre a y b.

Luego, $|b-a| = |c-b| + |a-c|$, de donde $\overline{AB} = \overline{CB} + \overline{AC}$.

Por tanto, 1) $\overline{AC} < \overline{AB}$ y $\overline{CB} < \overline{AB}$. 2)

Como C está en la recta AB y la recta AB es $S_{AB} \cup S_{BA}$, entonces $C \in S_{AB}$ o $C \in S_{BA}$.

Si $C \in S_{AB}$, de 1) se tiene C entre A y B (ver prop. anterior).

Si $C \in S_{BA}$, 2) dice $\overline{BC} < \overline{BA}$, de donde C está entre A y B.

Por tanto, C está entre A y B. $\square$

Def: Llamamos punto medio del segmento AB al punto C de este segmento que satisface

$$\overline{AC} = \overline{CB}.$$

Teorema: Un segmento tiene exactamente un punto medio.

(existencia y unicidad del punto medio)

Dem: (Existencia) Consideremos el segmento AB. Sean a, b las coordenadas de A y B respectivamente. Claramente existe $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Es claro que c está entre a y b.

Si $a<b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2} = \frac{a+a-a+b}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{b-a}{2}$

$$= a + \frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow c = a + \frac{b-a}{2} \Rightarrow \underline{c > a} \,//$$

$$\Rightarrow c = b - \frac{b-a}{2} = \frac{2b-b+a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow c + \frac{b-a}{2} = b \Rightarrow b > c \,//$$

Si $a > b \Rightarrow a > c > b$

Por el axioma III_2, existe en la recta AB un punto C cuya coordenada es c. Del teorema, tenemos que C está entre A y B. Además,

$$\overline{AC} = |a-c| = \left| a - \frac{a+b}{2} \right| = \left| \frac{2a-a-b}{2} \right| = \left| \frac{a-b}{2} \right|,$$

$$\overline{CB} = |c-b| = \left| \frac{a+b}{2} - b \right| = \left| \frac{a+b-2b}{2} \right| = \left| \frac{a-b}{2} \right|$$

$$\therefore \quad \overline{AC} = \overline{CB}.$$

Por tanto, C es punto medio de AB.

(Unicidad) Sea C el punto obtenido en la primera parte. Sea C' otro punto medio de AB. Luego,

$$\overline{AC'} = \overline{BC'}$$ y C' está entre A y B.

Sean a, b, c' las coordenadas de A, B, C' (respectivamente). Tenemos que c' está entre a y b.

i) Si $a < c' < b \Rightarrow |a - c'| = |b - c'|$

$$\Rightarrow c' - a = b - c'$$

$$\Rightarrow 2c' = a + b \Rightarrow c' = \frac{a+b}{2}$$

ii) Si $b < c' < a \Rightarrow c' - b = a - c' \Rightarrow 2c' = a + b$

$$\Rightarrow c' = \frac{a+b}{2}$$

Por tanto, $c = c'$ (coordenadas). Luego, $C = C'$. $\boxtimes$

Def: Sea A un punto del plano y $r>0$. El círculo, de centro A y radio r es el conjunto de puntos B tales que $\overline{AB} = r$.