1

Espacios Vectoriales

1.1. R^n y C^n

Definición 1.1 (Números complejos)

- *Un número complejo es un par ordenado (a, b), donde $a, b \in \mathbb{R}$, pero lo escribimos como $a + bi$.*
- *El conjunto de todos los números complejos es denotado por $\mathbb{C}$:*

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- *La adición y la multiplicación en $\mathbb{C}$ esta definida por:*

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Propiedades de la aritmética compleja

Conmutatividad

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{y} \quad \alpha\beta = \beta\alpha \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$

Asociatividad

$$(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda) \quad \text{para todo } \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C};$$

Inverso aditivo

$$\text{Para cada } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ existe un único } \beta \in \mathbb{C} \text{ tal que } \alpha + \beta = 0;$$

Inverso multiplicativo

$$\text{Para cada } \alpha \in \mathbb{C} \text{ con } \alpha \neq 0, \text{ existe un único } \beta \in \mathbb{C} \text{ tal que } \alpha\beta = 1;$$

Propiedad distributiva

$$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta \quad \text{para todo } \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

TEOREMA 1.1 (Conmutatividad) *Muestre que $\alpha\beta = \beta\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

Demostración.- Supóngase $\alpha = a + bi$ y $\beta = c + di$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces la definición de multiplicación de números complejos muestra que

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

y

$$\beta\alpha = (c + di)(a + bi) = (ca - db) + (cb + da)i$$

Por lo tanto $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Definición 1.2 ($-\alpha$, sustracción, $1/\alpha$) *Sea* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

- *Sea* $-\alpha$ *que denota el inverso aditivo de* α. *Por lo tanto* $-\alpha$ *es el único número complejo tal que*

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

- ***Sustracción*** *en* $\mathbb{C}$ *es definido por:*

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

- *Para* $\alpha \neq 0$, *sea* $1/\alpha$ *denotado por el inverso multiplicativo de* α. *Por lo tanto* $1/\alpha$ *es el único número complejo tal que*

$$\alpha(1/\alpha) = 1.$$

- ***División*** *en* $\mathbb{C}$ *es definido por:*

$$\beta/\alpha = \beta(1/\alpha).$$

1.1.1. Listas

Definición 1.3 (Listas, longitud) *Supóngase que* n *es un entero no negativo. Una lista de longitud* n *es una colección ordenada de* n *elementos (el cual podría ser números, otras listas, o mas entidades abstractas) separadas por comas y cerradas por paréntesis. Una lista de longitud* n *se muestra de la siguiente manera:*

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

Dos listas son iguales si y sólo si tienen la misma longitud y los mismos elementos en el mismo orden.

Las listas difieren de los conjuntos de dos maneras: en las listas, el orden importa y las repeticiones tienen significado; en conjuntos, el orden y las repeticiones son irrelevantes.

1.1.2. F^n

Definición 1.4 (Listas, longitud) $\mathbb{F}^n$ *es el conjunto de todas las listas de longitud* n *de elementos de* $\mathbb{F}$

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_j \in \mathbb{F} \text{ para cada } j = 1, \ldots, n\}.$$

Para $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}$ *y* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *decimos que* x_j *es la* j*-enesima coordenada de* $(x_1, \ldots, x_n)$.

Definición 1.5 (Adición en $\mathbb{F}^n$) *La adición en* F^n *es definido añadiendo las correspondientes coordenadas:*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

TEOREMA 1.2 *Si $x, y \in F^n$, entonces $x + y = y + x$.*

Demostración.- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *y* $y = (y_1, \ldots, y_n)$. *Entonces*

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \ldots, y_n x_n) \\ &= (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) \\ &= y + x \end{aligned}$$

Definición 1.6 (0) *Sea 0 la lista de longitud n cuyas coordenadas son todas 0:*

$$0 = (0, \ldots, 0)$$

Definición 1.7 (Inverso aditivo en $\mathbb{F}^n$) *Para $x \in \mathbb{F}^n$, el inverso aditivo de x, denota por $-x$, es el vector $-x \in \mathbb{F}^n$ tal que*

$$x + (-x) = 0$$

En otras palabras, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Definición 1.8 (Multiplicación scalar en $\mathbb{F}^n$) *El producto de un número λ y un vector en $\mathbb{F}^n$ es calculado por la multiplicación de cada coordenada del vector por λ:*

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

donde $\lambda \in \mathbb{F}$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$.

1.1.3. Ejercicios

1.2. Definición de espacio vectorial

La motivación para la definición de un espacio vectorial proviene de las propiedades de la suma y la multiplicación escalar en $\mathbb{F}^n$: la suma es conmutativa, asociativa y tiene una identidad. Todo elemento tiene un inverso aditivo. La multiplicación escalar es asociativa. La multiplicación escalar por 1 actúa como se esperaba. La suma y la multiplicación escalar están conectadas por propiedades distributivas. Definiremos un espacio vectorial como un conjunto V con una suma y una multiplicación escalar en V que satisfagan las propiedades del párrafo anterior.

Definición 1.9 (Adición y multiplicación escalar)

- *Una adición en un conjunto V es una función que asigna un elemento $u + v \in V$ para cada par de elementos $u, v \in V$.*
- *Una multiplicación escalar en un conjunto V es una función que asigna un elemento $\lambda v \in V$ para cada $\lambda \in \mathbb{F}$ y cada $v \in V$.*

Definición 1.10 (Espacio vectorial) *Un espacio vectorial es un conjunto V junto con una suma en V y una multiplicación escalar en V tal que se cumplen las siguientes propiedades:*

- ***Conmutatividad***
$$u + v = v + u \text{ para todo } u, v \in V;$$
- ***Asociatividad***
$$(u + v) + w = u + (v + w) \text{ y } (ab)v = a(bv) \text{ para todo } u, v, w \in V \text{ y todo } a, b \in \mathbb{F};$$
- ***Identidad aditiva***
$$\text{Existe un elemento } 0 \in V \text{ tal que } v + 0 = v \text{ para todo } v \in V;$$
- ***Inverso aditivo***
$$\text{Para cada } v \in V, \text{ existe } w \in V \text{ tal que } v + w = 0;$$
- ***Identidad Multiplicativa***
$$1v = v \text{ para todo } v \in V$$
- ***Propiedad distributiva***
$$a(u + v) = au + av \text{ y } (a + b)v = av + bv \text{ para todo } a, b \in \mathbb{F} \text{ y todo } u, v \in V.$$

Definición 1.11 (Vector, punto) *Elementos de un espacio vectorial son llamados vectores o puntos.*

Definición 1.12 (Vector, punto)

- *Un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es llamado un espacio vectorial real.*
- *Un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ es llamado un espacio vectorial complejo.*