CÁLCULO INFINITESIMAL

Michael Spivak

Resolución de problemas por:

FODE (Christian Limbert Paredes Aguilera)

Índice general

1

Limites

Definición 1.1 *La función f tiende hacia el límite l en a $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = l\right)$ significa: para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.*

Existe algún $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x para el cual es $0 < |x-a| < \delta$, pero no $|f(x) - l| < \epsilon$.

TEOREMA 1.1 *Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otros términos si f tiende hacia l en a, y f tiende hacia m en a, entonces $l = m$.*

Demostración.- Puesto que f tiende hacia l en a, sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.
Sabemos también, puesto que f tiende hacia m en a, que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - m| < \epsilon$.
Hemos empleado dos números $delta_1$ y δ_2, ya que no podemos asegurar que el δ que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon \text{ y } |f(x) - m| < \epsilon$$

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un $\epsilon > 0$ particular para el cual las dos condiciones $|f(x) - l| < \epsilon$ y $|f(x) - m| < \epsilon$ no puedan cumplirse a la vez si $l \neq m$
Si $l \neq m$, de modo que $|m - l| > 0$ podemos tomar como ϵ a $|l - m|/2$. Se sigue que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{|l-m|}{2} \text{ y } |f(x) - m| < \frac{|l-m|}{2}$$

Esto implica que para $0 < |x-a| < \delta$ tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{|l-m|}{2} + \frac{|l-m|}{2} = |l - m|$$

El cual es una contradicción.

LEMA 1.1 *Si x está cerca de x_0 e y está cerca de y_0, entonces $x+y$ estará cerca de x_0+y_0, xy estará cerca de x_0y_0 y $1/y$ estará cerca de $1/y_0$.*

(1) *Si* $|x-x_0|<\dfrac{\epsilon}{2}$ *y* $|y-y_0|<\dfrac{\epsilon}{2}$ *entonces* $|(x+y)-(x_0+y_0)|<\epsilon$.

Demostración.-

$$|(x+y)-(x_0+y_0)| = |(x-x_0)+(y-y_0)| \leq |x-x_0|+|y-y_0| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

(2) *Si* $|x-x_0|<\text{mín}\left(1,\dfrac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}\right)$ *y* $|y-y_0|<\dfrac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}$ *entonces* $|xy-x_0y_0|<\epsilon$.

Demostración.- Puesto que $|x-x_0|<1$ *se tiene*

$$|x|-|x_0|\leq |x-x_0|<1,$$

de modo que

$$|x|<1+|x_0|$$

así pues

$$\begin{aligned}
|xy-x_0y_0| &= |x(y-y_0)+y_0(x-x_0)| \\
&\leq |x|\cdot|y-y_0|+|y_0|\cdot|x-x_0| \\
&< (1+|x_0|)\cdot\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}+|y_0|\cdot\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)} \\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon
\end{aligned}$$

Notemos que $\dfrac{|y_0|}{|y_0|-1}<1$, *por lo tanto* $\dfrac{|y_0|}{|y_0|-1}\cdot\dfrac{\epsilon}{2}<\dfrac{\epsilon}{2}$.

(3) *Si* $y_0\neq 0$ *y* $|y-y_0|<\text{mín}\left(\dfrac{|y_0|}{2},\dfrac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right)$ *entonces* $y\neq 0$ *y* $\left|\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y_0}\right|<\epsilon$.

Demostración.- Se tiene

$$|y_0|-|y|<|y-y_0|<\frac{|y_0|}{2},$$

de modo que $-|y|<-\dfrac{|y_0|}{2}\Longrightarrow |y|>|y_0|/2$. *En particular.* $y\neq 0$, *y*

$$\frac{1}{|y|}<\frac{2}{|y_0|}$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0-y|}{|y|\cdot|y_0|} = \frac{1}{|y|}\cdot\frac{|y_0-y|}{|y_0|} < \frac{2}{|y_0|}\cdot\frac{1}{|y_0|}\cdot\frac{\epsilon|y_0|^2}{2}=\epsilon$$

TEOREMA 1.2 *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = m$, *entonces*

(1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l+m$

(2) $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l\cdot m$

Además, si $m \neq 0$, *entonces*

(3) $\lim_{x\to a}(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{m}$

Demostración.- La hipótesis significa que para todo $\epsilon > 0$ *existen* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que, para todo* x,

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \textit{ entonces } |f(x)-l| < \epsilon$$

$$y \quad \textit{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \textit{ entonces } |g(x)-m < \epsilon|$$

Esto significa (ya que después de todo, $\epsilon/2$ *es también un número positivo) que existen* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que, para todo* x,

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \textit{ entonces } |f(x)-l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$y \quad \textit{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \textit{ entonces } |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea ahora $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. *Si* $0 < |x-a| < \delta$, *entonces* $0 < |x-a| < \delta_1$ *y* $0 < |x-a| < \delta_2$ *se cumplen las dos, de modo que es a la vez*

$$|f(x)-l| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}$$

pero según la parte (1) *del lema anterior esto implica que* $|(f+g)(x)-(l+m)| < \epsilon$.

Para demostrar (2) *procedemos de la misma manera, después de consultar la parte* (2) *del lema. Si* $\epsilon > 0$ *existen* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que, para todo* x

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \textit{ entonces } |f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m|+1)}\right),$$

$$y \quad \textit{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \textit{ entonces } |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2(|l|)+1}$$

Pongamos de nuevo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. *Si* $0 < |x-a| < \delta$, *entonces*

$$|f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|m|+1)}\right) \qquad y \qquad |g(x)-m| < \frac{\delta}{2(|l|+1)}$$

Así pues, según el lema, $|(f\cdot g)(x) - l\cdot m| < \epsilon$, *y esto demuestra* (2).

Finalmente, si $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x,

$$\textit{si } 0 < |x-a| < \delta, \textit{ entonces } |g(x)-m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\epsilon|m|^2}{2}\right)$$

Pero según la parte (3) *del lema, esto significa, en primer lugar que* $g(x) \neq 0$, *de modo que* $(1/g)(x)$ *tiene sentido, y en segundo lugar que*

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \epsilon$$

Esto demuestra (3).

Definición 1.2 $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

La condición $0 < x - a < \delta$ *es equivalente a* $0 < |x - a| < \delta$ *y* $x > a$

Definición 1.3 $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

Definición 1.4 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un número* N *grande, que, para todo* x,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

1.1. Problemas

1. Hallar los siguientes limites (Estos limites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{1^2-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

(ii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = 2^2+4+4 = 12$

(iii) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{3^3-8}{3-2} = 19$

(iv) $\lim_{x\to y} \frac{x^n-y^n}{x-y} = \frac{(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})}{x-y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1} =$

$$= ny^{n-1}$$

(v) $\lim_{y\to x} \frac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1} = nx^{n-1}$

(vi) $\lim_{h\to 0} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a+h})^2-(\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2. Hallar los límites siguientes:

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1^2-(\sqrt{x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0$

(iii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}$

3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un δ tal que, $|f(x)-l|<\epsilon$ para todo x que satisface $0<|x-a|<\delta$

(i) $f(x)=x^4;\ l=a^4$

Respuesta.- Por la parte (2) del lema anterior se tiene

$$|x^2-a^2| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|a|^2+1)}\right).$$

Si aplicamos una vez mas la parte (2) del lema obtenemos

$$|x-a| < \min\left(1, \frac{\min\left(1, \dfrac{\epsilon}{2(|a|^2+1)}\right)}{2(|a|+1)}\right) = \min\left(1, \frac{\epsilon}{4(|a|^2+1)(|a|+1)}\right) = \delta$$

(ii) $f(x)=\dfrac{1}{x};\ a=1,\ l=1$

Respuesta.- Por la parte (3) del lema se tiene $\left|\dfrac{1}{x}-1\right|<\epsilon$ por lo tanto $|y-1|<\min\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\epsilon}{2}\right)$

(iii) $f(x)=x^4+\dfrac{1}{x};\ a=1,\ l=2$

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene $\left|\left(x^4+\dfrac{1}{x}\right)-(1+1)\right|<\epsilon$ de donde

$$|x^4-1|<\frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \left|\frac{1}{x}-1\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

Luego por el inciso (i) y (ii)

$$|x-1|<\min\left(\frac{1}{2},\frac{\frac{\epsilon}{2}}{2}\right) \quad y \quad |x-1|<\min\left(1, \frac{1,\min\left(\dfrac{\frac{\epsilon}{2}}{2(1+1)}\right)}{2(1+1)}\right) \implies |x-1|<\min\left(\frac{1}{2},\frac{\epsilon}{4},1,\frac{\epsilon}{32}\right)$$

y por lo tanto

$$|x-1|<\min\left(\frac{1}{2},\frac{\epsilon}{32}\right)=\delta$$

(iv) $f(x) = \dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$; $a = 0,\ l = 0$

Respuesta.- Sea $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| < \epsilon \quad y \quad |x| < \delta$ pero $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| \leq |x|$ por lo tanto $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| \leq |x| < \delta = \epsilon$

(v) $f(x) = \sqrt{|x|}$; $a = 0,\ l = 0$

Respuesta.- Sea $\left|\sqrt{|x|}\right| < \epsilon$ entonces $\left|(|x|)^{1/2}\right| = \left(\sqrt{x^2}\right)^{1/2} = \left[(x^2)^{1/2}\right]^{1/2} = \sqrt{x} < \epsilon$, luego sabemos que la raíz cuadrada de x debe ser siempre mayor o igual a 0 por lo tanto $|x| < \epsilon^2$, de donde concluimos que $\delta = \epsilon^2$

(vi) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1,\ l = 1$

Respuesta.- Si $\epsilon > 1$, póngase $\delta = 1$. Entonces $|x-1| < \delta$ implica que $0 < x < 2$ con lo que $0 < \sqrt{x} < 2$ y $|\sqrt{x}-1| < 1$. Si $\epsilon < 1$, entonces $(1-\epsilon)^2 < x < (1+\epsilon)^2$ implica que $|\sqrt{x}-1| < \epsilon$, de modo que podemos elegir un δ tal que $(1-\epsilon)^2 \leq 1-\delta$ y $1+\delta \leq (1-\epsilon)^2$. Podemos elegir, pues $\delta = 2\epsilon - \epsilon^2$

4. Para cada una de las funciones del problema $4-17$, decir para qué números a existe el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

(i) Existe el límite si a no es un entero, ya que en los puntos enteros la función tiene un salto.

(ii) Existe el límite si a no es un entero.

(iii) De la misma forma que el inciso (ii).

(iv) Existe para todo a.

(v) Existe para todo a si sólo si sea $a = 0$ y $a = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

(vi) El límite no existe para los puntos $|a| < 1\ y\ a \neq \dfrac{1}{n}$

5. **(a)** Hágase lo mismo para cada una de las funciones del problema $4-19$

(i) Existe para cualquier número que tenga la forma $n + \dfrac{k}{10},\ n, k \in \mathbb{Z}$

(ii) Existe para cualquier número que tenga la forma $n + \dfrac{k}{100},\ n, k \in \mathbb{Z}$

(iii) No es posible para ningún a.

(iv) De la misma forma que el anterior inciso.

(v) Existe para todo a excepto para los que terminan en 7999...

(vi) Existe para todo a excepto para los que terminan en 1999....

(b) El mismo problema usando decimales infinitos que terminen en una fila de ceros en lugar de los que terminan en una fila de nueves.

(i) De igual forma de la parte (a) inciso (i).

(ii) De igual forma de la parte (a) inciso (ii).

(iii) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).

(iv) De igual forma de la parte (a) inciso (iii).

(v) Existe para todo a excepto para los que terminan en 8000...

(vi) Existe para todo a excepto para los que terminan en 2000...

6. Supóngase que las funciones f y g tiene n la siguiente propiedad: Para todo $\epsilon > 0$ y todo x,

$$si\ 0 < |x-2| < \operatorname{sen}^2\left(\frac{\epsilon^2}{9}\right) + \epsilon,\ entonces\ |f(x)-2| < \epsilon,$$

$$si\ 0 < |x-2| < \epsilon^2,\ entonces\ |g(x)-4| < \epsilon.$$

Para cada $\epsilon > 0$ hallar un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

(i) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x)+g(x)-6| < \epsilon$.

Respuesta.- Por la primera parte del lema se tiene $|f(x)-2| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $|g(x)-4| < \dfrac{\epsilon}{2}$, luego remplazamos ϵ por $\epsilon/2$ de donde nos queda

$$0 < |x-2| < \operatorname{sen}^2\left[\frac{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}{9}\right] \quad y \quad |x-2| < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$$

Por último, solo hace verificar para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$. En este caso solo hace falta elegir

$$0 < |x-2| < \text{mín}\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\epsilon^2}{36}\right) + \epsilon, \frac{\epsilon^2}{4}\right] = \delta$$

(ii) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x)g(x) - 8| < \epsilon$

Respuesta.- Por la segunda parte del lema demostrado tenemos que

$$|f(x) - 2| < \text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{2(|4|+1)}\right) \quad y \quad |g(x) - 4| < \frac{\epsilon}{2(|2|+1)}$$

ya que $|f(x)g(x) - 2 \cdot 4| < \epsilon$.
Luego reemplazando en ϵ a cada parte obteniendo,

$$0 < |x-2| < \text{mín}\left\{ \text{sen}^2 \left[\frac{\text{mín}\left(\frac{\epsilon}{10}\right)^2}{9} \right] + \text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{10}\right), \left[\text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{6}\right)\right]^2 \right\} = \delta$$

(iii) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left| \dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{4} \right| < \epsilon$

Respuesta.- Por la tercera parte del lema se tiene que $|g(x) - 4| < \text{mín}\left(\dfrac{|4|}{2}, \dfrac{\epsilon|4|^2}{2}\right)$, luego remplazando en ϵ obtenemos

$$|x-2| < [\text{mín}\,(2, 8\epsilon)]^2 = \delta$$

.

(iv) Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2} \right| < \delta$

Respuesta.- Sea $\left| f(x)\dfrac{1}{g(x)} - 2dfrac14 \right|$ entonces

$$|f(x) - 2| < \text{mín}\left(1, \frac{\epsilon}{2(|1/4|+1)}\right) \quad y \quad \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4} < \frac{\epsilon}{2(|2|+1)}$$

, de donde

$$0 < |x-2|\, \text{mín}\left\{ \text{sen}^2 \left[\frac{(\text{mín}(1, 2\epsilon/5))^2}{9} \right] + \text{mín}(1, 2\epsilon/5), \left[\text{mín}\left(2, \frac{8\epsilon}{2(|2|+1)}\right)\right]^2 \right\} = \delta$$

7. Dese un ejemplo de una función f para la cual la siguiente proposición sea falsa: Si $|f(x) - l| < \epsilon$ cuando $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon/2$ cuando $0 < |x-a| < \delta/2$.

Respuesta.- Tomemos $a = 0$ y $l = 0$. Para $\epsilon > 0$, se tiene

$$|x - 0| < \epsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{|x|} - 0| < \epsilon$$

. Aquí $\delta = \epsilon^2$. Pero si

$$0 < |x-0| < \frac{\epsilon^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{|x|} - 0| < \frac{\epsilon^2}{4} = \delta.$$

El cual no se cumple la proposición buscada.

8. **(a)** Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿pueden existir $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ o $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$?

Respuesta.- Si. Por ejemplo considere

$$f(x)=\frac{1}{x}, \quad g(x)=1-\frac{1}{x}$$

Luego observe que $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existen, mientras que $f(x)+g(x)=1$ tiene un límite en $x=0$. De similar forma, si tomamos $f(x)=g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ entonces $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, mientras que $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{|x|^2}{x^2}$ es 1 y, por lo tanto, existe el límite en 0.

(b) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, ¿debe existir $\lim_{x\to a} g(x)$?

Respuesta.- Si, ya que

$$g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$$

(c) Si existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$ y no existe el límite $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?

Respuesta.- No, ya que es sólo otro modo de enunciar la parte (b).

(d) Si existe los límites $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, ¿se sigue de ello que existe $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?

Respuesta.- No, el razonamiento es análogo a la parte (b), ya que si $g=(f\cdot g)/f$ no será aplicable si $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

9. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)$.

Demostración.- Sea $\lim_{x\to a} f(x)$ y $g(h)f(a+h)$. Entonces para todo $\epsilon>0$ existe algún $\delta>0$, tal que, para todo x, si $0<|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-l|<\epsilon$. Ahora bien, si $0<|h-0|<delta$, entonces $|(h+a)-a|<\delta$, de modo que $|f(h+a)-l|<\epsilon$. Esta desigualdad puede escribirse $|g(x)-l|<\epsilon$. Así pues, $\lim_{h\to 0} g(h)=l$, lo cual puede escribirse también $\lim_{h\to 0} f(a+h)=l$. el mismo razonamiento demuestra que si $\lim_{h\to 0} f(a+h)=m$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)=m$. Así pues, existe uno cualquiera de los dos límites si existe el otro, y en este caso son iguales.

10. **(a)** Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x)=l$ si y sólo si $\lim_{x\to a}[f(x)-l]=0$

Demostración.- Por definición vemos que Para todo $\epsilon>0$ existe algún $\delta>0$ tal que, para todo x, si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-l|<\epsilon$. Esta último desigualdad se puede escribir como $|[f(x)-l]-0|<\epsilon$ de modo que $\lim_{x\to a}[f(x)-l]=0$. El razonamiento en sentido inverso es igual de simple e intuitivo.

(b) Demostrar que $\lim_{x\to 0} = \lim_{x\to a} f(x-a)$

Demostración.- Supóngase que $\lim_{x\to 0} f(x)=m$Queremos mostrar que $\lim_{x\to a} f(x-a)=m$. Para todo

$\epsilon > 0$ existen algún $\delta > 0$ tal que, para todo x con $0 < |x - 0| < \delta$, entonces $|f(x) - m| < \epsilon$ (1). Si $0 < |y - a| = |(y - a) - 0| < \delta$, entonces por (1) implica que $|f(y - a) - m| < \epsilon$, por lo tanto $\lim_{y \to a} f(y - a) = m$.
Por el contrario, supóngase $\lim_{x \to a} f(x - a) = m$, donde queremos demostrar $\lim_{x \to 0} f(x) = m$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo x con $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x - a) - m| < \epsilon$ (2). Si $0 < |y| = |(y + a) - a| < \delta$, luego por (2) implica que $|f(y) - m| = |f[(y + a) - a] - m| < \epsilon$, por lo tanto $\lim_{y \to 0} f(y) = m$.

(c) Demostrar que $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x^3)$.

Demostración.- Sea $\lim_{x \to 0} f(x) = l$. Para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$, tal que, para todo x, si $0 < |x| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$. Tomemos $0 < |x| < \text{mín}(1, \delta)$, entonces $0 < |x^3| < \delta$, para comprender mejor tomemos un número en particular, por ejemplo $x = 0{,}9$ donde $0 < |0{,}9| < \text{mín}(1, \delta)$ entonces se cumple que $0 < |0{,}9^3| < \delta$. Así pues $\lim_{x \to 0} f(x) = l$. Por otro lado, supongamos que $\lim_{x \to 0} f(x^3)$ existe, pongamos $\lim_{x \to 0} f(x^3) = m$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x^3) - m| < \delta$. Si $0 < |x| < \delta^3$, tenemos $0 < |\sqrt[3]{x}| < \delta$, de modo que $|f(\sqrt[3]{x^3}^3) - m| < \epsilon$. Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} f(x) = m$.

(d) Dar un ejemplo en el que exista $\lim_{x \to 0} f(x^2)$, pero no $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Respuesta.- Sea $f(x) = 1$ para $x \leq 0$ y $f(x) = -1$ para $x < 0$. Entonces $\lim_{x \to 0} f(x^2) = 1$, pero $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

11. Supóngase que existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ cuando $0 < |x - a| < \delta$. Demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$.

Demostración.- Asumamos que $\lim_{x \to a} f(x) = l$. Deseamos demostrar que $\lim_{x \to a} g(x) = l$. Sea $\epsilon > 0$, de donde existe algún $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$. Luego pongamos $\delta' = \text{mín}(\delta, \delta_1)$ que complace $0 < |x - a| < \delta'$, en virtud de como se define δ' sabemos que si $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta$ tal que $f(x) = g(x)$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$, de donde concluimos que $|g(x) - l| < \epsilon$.

12. **(a)** Supóngase que $f(x) \leq g(x)$ para todo x. Demostrar que $\lim_{x \to a} = \lim_{x \to a} g(x)$ siempre que estos existan.

Demostración.- Demostremos por reducción al absurdo. Supóngase que $l = \lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x) = m$. Luego sea $l - m > 0$, existe entonces un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $l - f(x) < \epsilon/2$ y $|m - g(x)| < \epsilon/2$. Así pues, para $0|x - a| < \delta$ tenemos

$$g(x) < m + \epsilon/2 = l - \epsilon/2 < f(x),$$

contrario a la hipótesis.

(b) ¿De qué modo puede obtenerse una hipótesis más débil?.

Respuesta.- Basta suponer que $f(x) \leq g(x)$ para todo x que satisfaga $0|x - a| < \delta$, para algún $\delta > 0$.

(c) Si $f(x) < g(x)$ para todo x. ¿Se sigue de ello necesariamente que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$?

Respuesta.- No necesariamente ya que si $f(x) = 0$ y $g(x) = |x|$ para $x \neq 0$, y $g(0) = 1$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$.

13. Supóngase que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Demostrar que existe $\lim_{x\to a} g(x)$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

Demostración.- Intuitivamente vemos que $g(x)$ esta entre $f(x)$ y $h(x)$ donde se aproximan a un mismo número. Sea $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|h(x) - l| < \epsilon$, como también para $|f(x) - l| < \epsilon$, así pues, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces

$$l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon$$

de modo que $|g(x) - l| < \epsilon$.

14. **(a)** Demostrar que si $\lim_{x\to 0} f(x)/x = l$ y $b \neq 0$, entonces $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = bl$.

Demostración.- Tengamos en cuenta que $x \to 0$ implica $bx \to 0$ siempre que b sea distinto de 0. Luego $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ de donde $\lim_{x\to a} g(x) = l$, así $\lim_{bx\to 0} g(bx) = l$, aclaremos que cuando $g(bx)$ solo ponemos un valor diferente sin alterar la función en si, es decir, sea $bx = y$ y $\lim_{bx\to 0} g(bx) = l$ entonces $\lim_{y\to 0} g(y) = l$ que es igual a nuestra hipótesis $\left(\lim_{x\to 0} g(x) = l\right)$. Por lo tanto tenemos,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(bx)}{x} = \lim_{x\to 0} b\frac{f(bx)}{bx} = b \lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} = bl$$

.

(b) ¿Qué ocurre si $b = 0$?

Respuesta.- Si $b = 0$ entonces $\dfrac{f(bx)}{bx} = \dfrac{f(0)}{0}$ el cual no esta definido, por lo tanto el límite no existe, a menos que $f(0) = 0$.

(c) La parte (a) nos permite hallar $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} 2x)/x$ en función de $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x$. Hallar este límite por otro procedimiento.

Respuesta.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{sen} x)(\cos x)}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \cos x \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2.$$

15. Calcular los límites siguientes en función del número $\alpha = \lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x$.

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2(\operatorname{sen} x)(\cos x)}{x} = 2\lim_{x\to 0} \cos x \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 2.$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} \cdot \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} bx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{x} \dfrac{1}{b \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = a\alpha \cdot \dfrac{1}{b\alpha} = \dfrac{a}{b}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} 2x \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \cdot 2\alpha = 0$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} \right)^2 = 4\alpha^2$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \cdot \dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+1)} = \dfrac{\alpha^2}{2}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x + 2x}{x + x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\tan^2 x + 2x}{x}}{1+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos^2 x} + 2}{1+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + 2 \right)}{1+x} = \alpha \cdot 0 + 2 = 2$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{2}{\alpha}$

(viii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$

Respuesta.- Se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

de donde por (v) concluimos que $\alpha \cos x$.

(ix) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

Respuesta.-

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\operatorname{sen}(x^2-1)}{(x+1)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1} \\
&= 2 \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1} \\
&= 2 \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} h}{h} && \text{Por la misma razón del problema } 14(a) \\
&= 2\alpha
\end{aligned}$$

(x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3+\operatorname{sen} x}{\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2} = \dfrac{3}{(1+\alpha)^2}$

(xi) $\lim_{x\to 1}(x^2-1)^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3 = 0$, ya que $|\operatorname{sen} 1/(x-1)^3| \leq 1$ para todo $x \neq 0$

16. **(a)** Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a} |f|(x) = |l|$.

Demostración.- Sabemos que $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$ por lo tanto para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \epsilon$ de donde $\lim_{x\to a} |f|(x) = |l|$

(b) Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces $\lim_{x\to a} \max(f,g)(x) = \max(l,m)$ y lo mismo para el mínimo.

Demostración.- ya que $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ y por (a) entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \max(f,g)(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \frac{\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} |f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \frac{l+m+|l-m|}{2} \\
&= \max(l,m)
\end{aligned}$$

De similar manera,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \min(f,g)(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \frac{\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} |f(x)-g(x)|}{2} \\
&= \frac{l+m-|l-m|}{2} \\
&= \min(l,m)
\end{aligned}$$

17. **(a)** Demostrar que $\lim_{x\to 0} 1/x$ no existe, es decir, demostrar que, cualquiera que sea l, $\lim_{x\to 0} 1/x = l$ es falso.

Demostración.- Supongamos que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = l$ entonces por definción se tiene

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \Longleftrightarrow si\ 0 < |x-0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

de donde $|x| > \dfrac{1}{\epsilon + |l|}$ el cual contradice la suposición de que x tiende a 0.

(b) Demostrar que $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ no existe.

Demostración.- Podemos aplicar el mismo criterio del anterior ejercicio.

18. Demostrar que si $\lim_{x \to a} f(x) = l$, entonces existe un número $\delta > 0$ y un número M tal que $|f(x)| < M$ si $0 < |x - a| < \delta$. (¿Cómo puede verse esto gráficamente?).

Demostración.- Por definición tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists delta > 0 \ / \ si \ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Tomemos $\epsilon = 1$ de donde $l - 1 < f(x) < l + 1$ de modo que podemos tomar $M > 1 + l$ y $-M < 1 - l$ por lo tanto $|f(x)| < M$.

19. Demostrar que si $f(x) = 0$ para x irracional y $f(x) = 1$ para x racional, entonces no existe $\lim_{x \to a} f(x)$ cualquiera que sea a.

Demostración.- Para cualquier $\delta > 0$ tenemos $f(x) = 0$ para algún x que satisface $0 < |x - a| < \delta$ y también $f(x) = 1$ para algún x que satisface $0 < |x - a| < \delta$. Significa esto que no podemos tener $|f(x) - l| < 1/2$ tenga l el valor que tenga.

20. Demostrar que si $f(x) = x$ para x racional y $f(x) = -x$ para x irracional, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe si $a \neq 0$.

Demostración.- Sea el caso $a > 0$. Al estar $f(x)$ cerca de a para todos los racionales x que están cerca de a, y al estar $f(x)$ cerca de $-a$ para todos los irracionales x que están cerca de a, no podemos tener a $f(x)$ próximo a ningún número fijo. Es decir, para cualquier $\delta > 0$ existe x con $0 < |x - a| < \delta$ y $f(x) > a/2$, así como x con $0 < |x - a| < \delta$ y $f(x) < -a/2$. Puesto que la distinta entre $a/2$ y $-a/2$ es a, esto significa que no podemos tener $|f(x) - l| < a$ para todos estos x, cualquiera que sea el valor de l.

21. **(a)** Demostrar que si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to 0} g(x) \operatorname{sen} 1/x = 0$.

Demostración.- En consecuencia de (b) y sabiendo que $|\operatorname{sen} 1/x| \leq 1$ para todo $x \neq 0$. Se tiene que el resultado esperado.

(b) Generalizar este hecho como sigue: Si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ y $|h(x)| \leq M$ para todo x, entonces $\lim_{x \to 0} g(x)h(x) = 0$

Demostración.- Por definición de límites y sea $M = 1$ se tiene $|g(x)| < \dfrac{\epsilon}{M} = \epsilon$, para todo x con $0 < |x| < \delta$. Entonces $|g(x)h(x)| < \epsilon$ ya que $|h(x)| \leq M$.

22. Considérese una función f con la siguiente propiedad: Si g es una función cualquiera para la cual no existe el $\lim_{x \to 0} g(x)$, entonces tampoco existe $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$. Demostrar que esto ocurre si y sólo si $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe.

Demostración.- Si $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, esta claro que $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ no existe cuando $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe, esto según el problema $8(b)$ y (c). Por otro lado, supongamos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, elija $g = -f$, entonces $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe, pero $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ existe.

23. Este problema es el análogo del problema 22 cuando $f+g$ se sustituye por $f \cdot g$. En este caso la situación es considerablemente más compleja y el análisis debe hacerse en varias etapas.

(a) Supóngase que existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y es $\neq 0$. Demostrar que si $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, entonces tampoco existe $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$.

Demostración.- Ya que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ entonces

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} f(x)g(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 0} f(x)}$$

Ponemos $\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha$, por lo cual

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x\to 0} f(x)g(x)$$

Por lo tanto si $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ no existe.

(b) Demostrar el mismo resultado si $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$.

Demostración.- Demostraremos que si $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$ y $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = l$ entonces $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.
Para entender mejor el problema veamos un ejemplo: Sea $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ y $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot x = 1$ entonces $\lim_{x\to 0} x = 0$. Ya mas claro el asunto, vayamos a la demostración.

Sea $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$, para cualquier $M > 0$ existe algún $\delta_M > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - 0| < \delta_M \text{ entonces } |f(x)| > M.$$

Luego, para $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = l$ nos dice que para cualquier $\epsilon > 0$ existe algún $\delta_l > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - 0| < \delta_l \text{ entonces } |f(x)g(x) - l| < \epsilon.$$

Ahora, para cualquier ϵ podemos establecer $M = \dfrac{\epsilon + |l|}{\epsilon}$ y escogemos $\delta_{min} = \text{mín}(\delta_M, \delta_l)$.
Así, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_{min} \text{ tenemos } |f(x)g(x) - l| < \epsilon \text{ y } |f(x)| > M = \frac{\epsilon + |l|}{\epsilon},$$

luego $|f(x)g(x)| - |l| \leq |f(x)g(x) - l| < \epsilon$, de donde $|f(x)g(x)| < |l| + \epsilon$, así

$$|g(x)| < \frac{|l| + \epsilon}{|f(x)|} < \frac{|l| + \epsilon}{M} = \frac{|l| + \epsilon}{M} = \frac{|l| + \epsilon}{\frac{|l|+\epsilon}{\epsilon}} = \epsilon$$

Por lo tanto, para cualquier $\epsilon > 0$ hay un $\delta_{\text{mín}}$ tal que para todo x si

$$0 < |x - 0| < \delta_{min} \text{ entonces } |g(x)| < \epsilon$$

ó

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

(c) Demostrar que si no se cumple ninguna de estas dos condiciones, entonces existe una función g tal que $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, pero existe $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$.

Demostración.- Demostraremos por casos.

1. Para todo $\epsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo x si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x)| > \epsilon$. Luego podemos definimos $g(x)$ para x como $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, aclaremos que para x pequeños el denominador es distinto de 0, de donde

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Así que el límite de $f(x)g(x)$ existe. Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$. Pero esto implicaría que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe, con lo que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe.
¿Cómo sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$ y por tanto se aplica a la parte a?. Supongamos $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, según nuestro definición del caso 1 tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Así para cualquier $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que para todo x si

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \epsilon$$

de donde $|f(x)| > \dfrac{1}{\epsilon}$y por lo tanto

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$$

Esto significa que $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = \infty$, contrario al inciso b.

2. A diferencia del caso 1, cuando x se acerca a 0, $f(x)$ se vuelve arbitrariamente pequeña para algún x. Es decir para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para x con $0 < |x| < \delta$y $|f(x)| < \epsilon$. Esto se parece mucho a la definición de límite; la diferencia clave es que aquí, $|f(x)| < \epsilon$ solo para algunas de las x en la región δ especificada, no para todas, y que siempre podemos encontrar tales x no importa lo pequeño que hagamos δ. En otras palabras, algunos valores de $f(x)$ parecen dirigirse hacia 0 para x muy pequeños y otros valores no. La idea es definir $g(x)$ de modo que $g(x)f(x) = f(x)$ para las x de buen comportamiento, y 0 para todo lo demás. Vea si puede hacer esto. Una vez que lo haga, verá que para su $g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe. Podría ser útil comenzar considerando un ejemplo concreto: $f(x) = sin(1x)$ Observe que cuando $x \to 0, f(x)$ fluctúa entre 1 y -1. $f(x) = 0$ cuando $x = \dfrac{1}{k\pi}$ donde k es un número entero. A medida que k crece, x se acerca cada vez más a 0 y $|f(x)| = 0$ una y otra vez. ¿Puedes definir una función g tal que $g(x)f(x)$ enfatiza estos puntos $x = \dfrac{1}{k\pi}$ y suaviza los otros?.