

Tres teoremas fuertes

TEOREMA 1.1 Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto.

TEOREMA 1.2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a, b]$.

Geométricamente, este teorema significa que la gráfica f queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal.

TEOREMA 1.3 Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe algún número y en $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Se dice que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo en dicho intervalo.

TEOREMA 1.4 Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Demostración.- Sea $g = f - c$. Entonces g es continua, y $g(a) + c < c < g(b) + c \implies g(a) < 0 < g(b)$. Por el teorema 1, existe algún x en $[a, b]$ tal que $g(x) = 0$. Pero esto significa que $f(x) = c$.

TEOREMA 1.5 Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a, b]$ y $-f(a) < -c < -f(b)$. Por el teorema 4 existe algún x en $[a, b]$ tal que $-f(x) = -c$, lo que significa que $f(x) = c$.

Si una función continua en un intervalo toma dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre ellos; esta ligera generalización del teorema 1 recibe a menudo el nombre de **teorema de los valores**

intermedios.

TEOREMA 1.6 Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es acotada inferiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo x en $[a, b]$.

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a, b]$, así por el teorema 2 existe un número M tal que $-f(x) \leq M$ para todo x en $[a, b]$. Pero esto significa que $f(x) \geq -M$ para todo x en $[a, b]$, así podemos poner $N = -M$.

Los teoremas 2 y 6 juntos muestran que una función continua f en $[a, b]$ son acotados en $[a, b]$, es decir, existe un número N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo x en $[a, b]$. En efecto, puesto que el teorema 2 asegura la existencia de un número N_1 tal que $f(x) \leq N_1$, para todo x de $[a, b]$ y el teorema 6 asegura la existencia de un número N_2 tal que $f(x) \geq N_2$, para todo x en $[a, b]$, podemos tomar $N = \max(|N_1|, |N_2|)$.

TEOREMA 1.7 Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún y en $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Demostración.- La función $-f$ es continua en $[a, b]$; por el teorema 3 existe algún y en $[a, b]$ tal que $-f(y) \geq -f(x)$ para todo x en $[a, b]$, lo que significa que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

TEOREMA 1.8 Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si $\alpha > 0$, entonces existe algún número x tal que $x^2 = \alpha$.

Demostración.- Consideremos la función $f(x) = x^2$, el cual es ciertamente continuo. Notemos que la afirmación del teorema puede ser expresado en términos de f : "el número α posee una raíz cuadrada" significa que f toma el valor α . La demostración de este hecho acerca de f será una consecuencia fácil del teorema 4.

Existe, evidentemente, un número $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$; en efecto, si $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$, mientras que si $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Puesto que $f(0) < \alpha < f(b)$, el teorema 4 aplicado a $[0, b]$ implica que para algún x de $[0, b]$, tenemos $f(x) = \alpha$, es decir, $x^2 = \alpha$.

Precisamente el mismo raciocinio puede aplicarse para demostrar que todo número positivo tiene una raíz n -ésima, cualquiera que sea el número n . Si n es impar, se puede decir mas: todo número tiene una raíz n -ésima. Para demostrarlo basta observar que si el número positivo α tiene la raíz n -ésima x , es decir, si $x^n = \alpha$, entonces $(-x)^n = -\alpha$ (puesto que n es impar), de modo que α tiene una raíz n -ésima $-x$. Afirmar que, para un n impar, cualquier número α tiene una raíz n -ésima equivale a afirmar que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

tiene una raíz si n es impar. El resultado expresado de este modo es susceptible de gran generalización.

TEOREMA 1.9 Si n es impar, entonces cualquier ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

posee raíz.

Demostración.- Tendremos que considerar, evidentemente, la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

habría que demostrar que f es unas veces positiva y otras veces negativa. La idea intuitiva es que para un $|x|$ grande, la función se parece mucho más a $g(x) = x^n$ y puesto que n es impar, ésta función es positiva para x grandes positivos y negativos para x grandes negativos. Un poco de cálculo algebraico es todo lo que hace falta para dar forma a esta idea intuitiva.

Para analizar debidamente la función f conviene escribir

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

obsérvese que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \dots + \frac{|a_0|}{|x^n|}$$

En consecuencia, si elegimos un x que satisfaga

$$|x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_0| \quad (*)$$

entonces $|x^k| > |x|$ y

$$\frac{|a_{n-k}|}{x^k} < \frac{|a_{n-k}|}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n}$$

de modo que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right| \leq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

expresado de otra forma,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Por lo tanto, si elegimos un $x_1 > 0$ que satisfaga $(*)$, entonces

$$\frac{x_1^n}{2} \leq x_1^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \dots + \frac{a_0}{x_1^n}\right) = f(x_1)$$

así que $f(x_1) > 0$. Por otro lado, si $x_2 < 0$ satisface $(*)$, entonces $x_2^n < 0$ y

$$\frac{x_2^n}{2} \geq x_2^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \dots + \frac{a_0}{x_2^n}\right) = f(x_2),$$

así $f(x_2) < 0$.

Ahora aplicando el teorema 1 para el intervalo $[x_2, x_1]$ llegamos a la conclusión de que existe un x en $[x_2, x_1]$ tal que $f(x) = 0$.

TEOREMA 1.10 Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, entonces existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x .

Demostración.- Lo mismo que en el teorema 9, si

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_0|),$$

entonces para todo x con $|x| \geq M$, tenemos

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}$$

Al ser n par, $x^n \geq 0$ para todo x , de modo que

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

siempre que $|x| \geq M$. Consideremos ahora el número $f(0)$. Sea $b > 0$ un número tal que $b^n \geq 2f(0)$ y también $b > M$. Entonces si $x \geq b$, tenemos

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Análogamente, si $x \leq -b$, entonces

$$f(x) \geq \geq = \geq f(0).$$

Resumiendo ahora el teorema 7 a la función f en el intervalo $[-b, b]$. Se deduce que existe un número y tal que

$$(1) \quad \text{si } -b \leq x \leq b, \text{ entonces } f(y) \leq f(x).$$

En particular, $f(y) \leq f(0)$. De este modo

$$(2) \quad \text{si } x \leq -b \text{ o } x \geq b, \text{ entonces } f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Cambiando (1) y (2) vemos que $f(y) \leq f(x)$ para todo x .

TEOREMA 1.11 Consideremos la ecuación

$$(*) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = c,$$

y supongamos que n es par. Entonces existe un número m tal que $(*)$ posee una solución para $c \geq m$ y no posee ninguna para $c < m$.

Demostración.- Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$. Según el teorema 10, existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x .

Sea $m = f(y)$. Si $c < m$ entonces la ecuación $(*)$ no tiene, evidentemente, ninguna solución, puesto que el primer miembro tiene un valor $\geq m$. Si $c = m$ entonces $(*)$ tiene y como solución. Finalmente, supongamos $c > m$. Sea b un número tal que $b > y$, $f(b) > c$. Entonces $f(y) = m < c < f(b)$. En consecuencia, según el teorema 4, existe algún número x en $[y, b]$ tal que $f(x) = c$, con lo que x es una solución de $(*)$.

1.1. Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles está acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo y mínimo.

(i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. El mínimo es 0 e no tiene máximo.

(ii) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$.

Respuesta.- Se encuentra acotada superior como inferiormente. No tiene máximo ni mínimo

(iii) $f(x) = x^2$ en \mathbf{R} .

Respuesta.- No está acotado superior pero si inferiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(iv) $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$.

Respuesta.- Está acotada inferiormente pero no así superiormente. Su mínimo es 0 y no tiene máximo.

(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$

Respuesta.- Es acotado superior e inferiormente. Se entiende que $a > -1$ (de modo que $-a-1 < a+1$). Si $-1 < a \leq 1/2$, entonces $a < -a-1$, así $f(x) = a+2$ para todo x en $(-a-1, a+1)$, por lo tanto $a+2$ es el máximo y mínimo valor. Si $-1/2 < a \leq 0$, entonces f tiene el mínimo valor en a^2 , y si $a \geq 0$, entonces f tiene un mínimo valor en 0. Ya que $a+2 > (a+1)^2$ solo para $[-1-\sqrt{5}]/2 < a < [1+\sqrt{5}]/2$, cuando $a \geq -1/2$ esta función f tiene un máximo valor solo para $a \leq [1+\sqrt{5}]/2$ (el máximo valor será $a+2$).

(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ en $[-a-1, a+1]$.

Respuesta.- Está acotado superior e inferiormente. Como en la parte (v), se asume que $a > -1$. Si $a \leq -1/2$ entonces f tiene el valor mínimo y un máximo $3/2$. Si $a \geq 0$, entonces f tiene un valor mínimo en 0, y un valor máximo $\max(a^2, a+2)$. Si $-1/2 < a < 0$, entonces f tiene un máximo valor $3/2$ y no así con un valor mínimo.

(vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es 1.

(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El máximo es 1 y no existe un mínimo.

(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 0, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es -1 y el máximo es 1.

(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$ en $[0, a]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es a .

(xi) $f(x) = \sin^2(\cos x + \sqrt{1-a^2})$ en $[0, a^3]$.

Respuesta.- Ya que es continua f tiene máximo como también mínimo.

(xii) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.

Respuesta.- Acotada superior e inferiormente. El mínimo es 0 y el máximo es a .

- 2.** Para cada una de las siguientes funcione polinómicas f , hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n + 1$.

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.

Respuesta.- $n = -2$, ya que $f(-2) = (-2)^3 + 2 + 3 = -3 < 0 < 3 = (-1)^3 - (-1) + 3$

(ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.

Respuesta.- $n = -5$ ya que $f(-5) = -11 < 0 < f(-4)$.

(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.

Respuesta.- $n = -1$ ya que, $f(-1) = -1 < 0 < f(0)$.

(iv) $4x^2 - 4x + 1$

Respuesta.- No existe un entero n tal que $f(x) = 0$.

- 3.** Demostrar que existe algún número x tal que

(i) $x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 119$.

Respuesta.- Si x^{179} y $\frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x}$, son continuas en \mathbb{R} entonces $f(x) = x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x}$ es continua en \mathbb{R} y $f(1) > 0$, mientras que $f(-2) < 0$, de modo que $f(x) = 0$ para algún x en $(-2, 1)$.

(ii) $\sin x = x - 1$.

Respuesta.- Sea $f(x) = \sin x - x + 1$ entonces f es continua en \mathbb{R} y $f(0) > 0$, mientras que $f(2) < 0$, así por el teoremas 4 se tiene que $f(x) = c$ para algún x en $(0, 2)$.

- 4.** Este problema es una continuación del problema 3-7

- (a) Si $n - k$ es par, y ≥ 0 , hallar una función polinómica de grado n que tenga exactamente k raíces.

Respuesta.- Sea $l = (n - k)/2$ de donde

$$f(x) = (x^{2(n-k)/2} + 1)(x - 1)(x - 2) \cdots (x - k).$$

- (b) Una raíz a de una función polinómica f se dice que tiene multiplicidad m si $f(x) = (x - a)^m g(x)$, donde g es una función polinómica que no tiene la raíz a . Sea f una función polinómica de grado n . Supóngase que f tiene k raíces, contando multiplicidades, es decir supóngase que k es la suma de las multiplicidades de todas las raíces. Demostrar que $n - k$ es par.

Demostración.- Por la condición dada, f es una función polinómica real de grado n tal que f tiene exactamente k raíces en \mathbb{R} contando multiplicidades. Probaremos que $n - k$ es par. Para ello consideraremos los siguientes casos.

Caso 1.- Si $n = k$ es trivial decir que $n - k = 0$ de donde se sabe que es par.

Caso 2.- Si $n > k$, sea x_1, x_2, \dots, x_m raíces reales de f con multiplicidades k_1, k_2, \dots, k_m respectivamente y por lo tanto,

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = k.$$

Entonces f puede ser escrito como,

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m} p_1(x) p_2(x) \dots p_l(x)$$

donde $p_i(x)$ son polinomios irreducibles en \mathbb{R} tal que el grado de p_i suma $n - k$. Ahora recordemos que todo polinomio irreducible en \mathbb{R} debe tener de grado un entero par. Esto se debe a que cada polinomio de orden impar tiene al menos una raíz real, esto por el teorema 9, por lo tanto $p_i(x)$ no puede ser irreducible en \mathbb{R} . Ahora observe que sin pérdida de generalidad hemos asumido que hay l polinomios irreducibles tales que la suma de sus grados $n - k$. Dado que cada uno de los l polinomios tienen grado par, entonces la suma de sus grados debe ser un entero par. Se sigue que $n - k$ es un entero par.

5. Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f ?

Respuesta.- f es constante, ya que si f tomara dos valores distintos, entonces f tomaría todos los valores intermedios, incluyendo valores irracionales, es decir, si no fuera constante, entonces existe dos números racionales r_1 y r_2 tal que para algún c, d se tiene $a \leq c < d \leq b$, $f(c) = r_1$ y $f(d) = r_2$. Por el teorema 7.4 en el intervalo $[c, d]$, f toma todos los valores entre r_1 y r_2 , donde se concluye que existe algún número irracional, contradiciendo el hecho de que f solo toma valores racionales.

6. Supóngase que f es una función continua en $[-1, 1]$ tal que $x^2 + f^2(x) = 1$ para todo x . (Esto significa que $(x, f(x))$ siempre está sobre el círculo unidad.) Demostrar que o bien es $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para todo x , o bien $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ para todo x .

Demostración.- De lo contrario, f toma valores tanto positivos como negativos, por lo que f tendría el valor 0 en $(-1, 1)$, lo cual es imposible, ya que $\sqrt{1 - x^2} \neq 0$ para x en $(-1, 1)$.

7. ¿Cuántas funciones continuas f existen satisfaciendo $f^2(x) = x^2$ para todo x ?

Respuesta.- Existen 4 funciones continuas que satisfacen la condición dada, es decir,

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f(x) &= -x \\ f(x) &= |x| \\ f(x) &= -|x| \end{aligned}$$

8. Supóngase que f y g son continuas, que $f^2 = g^2$, y que $f(x) \neq 0$ para todo x . Demostrar que o bien $f(x) = g(x)$ para todo x , o bien $f(x) = -g(x)$ para todo x .

Demostración.- Si no fuera así, entonces $f(x) = g(x)$ para algún x y $f(y) = -g(y)$ para algún y . Pero ya que $f(x) \neq 0 \forall x$, entonces será o bien siempre positiva o bien siempre negativa. Así pues, $g(x)$ y $g(y)$ tendría distinto signo. Esto implicaría que $g(z) = 0$ para algún z , lo cual es imposible, ya que $0 \neq f(z) = \pm g(z)$.

9. (a) Supóngase que f es continuo, que $f(x) = 0$ solo para $x = a$, y que $f(x) > 0$ tanto para algún $x > a$, así como para algún $x < a$. ¿Que puede decirse acerca de $f(x)$ para todo $x \neq a$?

Respuesta.- Por hipótesis, existe algún $x_1 \in (a, \infty)$ tal que $f(x_1) > 0$. Ahora si existe algún $y_1 \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$, entonces debe existir $z_1 \in (a, \infty)$ entre x_1 y y_1 tal que $f(z_1) = 0$. Pero esto contradice que f es cero solo en $x = a$. Por lo tanto, no existe algún $y_1 \in (a, \infty)$ con $f(y_1) < 0$.

Esto es, $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, \infty)$. Similarmente, $f(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, a)$. Por lo tanto podemos decir que $f(x) > 0$ para todo $x \neq a$.

(b)