

# Espacios vectoriales de dimensión finita

## 1.A Span e independencia lineal

### 1.2 Notación Lista of vectores.

Por lo general, escribiremos listas de vectores sin paréntesis alrededor.

### Combinaciones lineales y generadores

### 1.3 Definición Combinación lineal.

Una **combinación lineal** de una lista  $v_1, \dots, v_m$  de vectores en  $V$  es un vector de la forma

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m,$$

donde  $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$ .

### 1.5 Definición Span o generador.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de una lista de vectores  $v_1, \dots, v_m$  en  $V$  se denomina **generador** de  $v_1, \dots, v_m$ , denotado por  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ . En otras palabras,

$$\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m : a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}\}.$$

El span de la lista vacía  $()$  es definida por  $\{0\}$ .

**1.7 Teorema** **Span es el subespacio más pequeño que lo contiene.** El **span** de una lista de vectores en  $V$  es el subespacio más pequeño de  $V$  que contiene todos los vectores de la lista.

Demostración.- Suponga que  $v_1, \dots, v_m$  es una lista de vectores en  $V$ . Primero demostraremos que  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$  es un subespacio de  $V$ . El 0 está en  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ , porque

$$0 = 0v_1 + \dots + 0v_m.$$

También,  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$  es cerrado bajo la suma, ya que

$$(a_1v_1 + \dots + a_mv_m) + (c_1v_1 + \dots + c_mv_m) = (a_1 + c_1)v_1 + \dots + (a_m + c_m)v_m.$$

Además,  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$  es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, dado que

$$\lambda(a_1v_1 + \dots + a_mv_m) = \lambda a_1v_1 + \dots + \lambda a_mv_m.$$

Por lo tanto,  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$  es un subespacio de  $V$ . Esto por 1.34.

Cada  $v_j$  es una combinación lineal de  $v_1, \dots, v_m$  (para mostrar esto, establezca  $a_j = 1$  y que las otras  $a$ 's en la definición de combinación lineal sean iguales a 0). Así, el  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$  contiene a cada  $v_j$ . Por otra parte, debido a que los subespacios están cerrados bajo la multiplicación de escalares y la suma, cada subespacio de  $V$  que contiene a cada  $v_j$  contiene a  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ . Por lo tanto,  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$  es el subespacio más pequeño de  $V$  que contiene todos los demás vectores  $v_1, \dots, v_m$ . ■

#### 1.8 Definición Spans.

Si  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$  es igual a  $V$ , decimos que  $v_1, \dots, v_m$  genera  $V$ .

#### 1.10 Definición Espacio vectorial de dimensión finita.

Un espacio vectorial se llama finito-dimensional si alguna lista de vectores en él genera el espacio.

#### 1.11 Definición Polinomio, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$

- Una función  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$  es llamado polinomio con coeficientes en  $\mathbf{F}$  si existe  $a_0, \dots, a_m \in \mathbf{F}$  tal que

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m$$

para todo  $z \in \mathbf{F}$ .

- $\mathcal{P}(\mathbf{F})$  es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en  $\mathbf{F}$ .

Con las operaciones usuales de adición y multiplicación escalar,  $\mathcal{P}(\mathbf{F})$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbf{F}$ . En otras palabras,  $\mathcal{P}(\mathbf{F})$  es un subespacio de  $\mathbf{F}^{\mathbf{F}}$ , el espacio vectorial de funciones de  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{F}$ .

Los coeficientes de un polinomio están determinados únicamente por el polinomio. Así, la siguiente definición define de manera única el grado de un polinomio.

### 1.12 Definición Grado de un polinomio, $\deg p$ .

- Un polinomio  $p \in \mathcal{P}(F)$  se dice que tiene **grado**  $m$  si existen escalares  $a_0, a_1, \dots, a_m \in F$  con  $a_m \neq 0$  tal que

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$$

para todo  $z \in F$ . Si  $p$  tiene grado  $m$ , escribimos  $\deg p = m$ .

- El polinomio que es idénticamente 0 se dice que tiene **grado**  $-\infty$ .

### 1.13 Definición $\mathcal{P}_m(F)$

Para  $m$  un entero no negativo,  $\mathcal{P}_m(F)$  denota el conjunto de todos los polinomios con coeficiente en  $F$  y grado no mayor a  $m$ .

Verifiquemos el siguiente ejemplo, tenga en cuenta que  $\mathcal{P}_m(F) = \text{span}(1, z, \dots, z^m)$ ; aquí estamos abusando ligeramente de la notación al permitir que  $z^k$  denote una función.

### 1.15 Definición Espacio vectorial de dimensión infinita.

Un espacio vectorial se llama **infinitamente-dimensional** si no es de dimensión finita.

### 1.16 Ejemplo Demuestre que $\mathcal{P}(F)$ es infinitamente-dimensional.

Demostración.- Considere cualquier lista de elementos de  $\mathcal{P}(F)$ . Sea  $m$  el grado más alto de los polinomios en esta lista. Entonces, cada polinomio en el generador (span) de esta lista tiene grado máximo  $m$ . Por lo tanto,  $z^{m+1}$  no está en el span de nuestra lista. Así, ninguna lista genera  $\mathcal{P}(F)$ . Concluimos que  $\mathcal{P}(F)$  es de dimensión infinita. ■

## Independencia lineal

Suponga  $v_1, \dots, v_m \in V$  y  $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ . Por la definición de span, existe  $a_1, \dots, a_m \in F$  tal que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

Considere la cuestión de si la elección de escalares en la ecuación anterior es única. Sea  $c_1, \dots, c_m$  otro conjunto de escalares tal que

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m.$$

Sustrayendo estas últimas ecuaciones, se tiene

$$0 = (a_1 - c_1)v_1 + \dots + (a_m - c_m)v_m.$$

Así, tenemos que escribir 0 como una combinación lineal de  $(v_1, \dots, v_m)$ . Si la única forma de hacer esto es la forma obvia (usando 0 para todos los escalares), entonces cada  $a_j - c_j$  es igual a 0, lo que significa que cada  $a_j$  es igual a  $c_j$  (y por lo tanto la elección de los escalares fue realmente única). Esta situación es tan importante que le damos un nombre especial, independencia lineal, que ahora definiremos.

**1.17 Definición Linealmente independiente.**

- Una lista  $v_1, \dots, v_m$  de vectores en  $V$  se llama linealmente independiente si la única posibilidad de que  $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$  tal que  $a_1v_1 + \dots + a_mv_m$  sea igual a 0 es  $a_1 = \dots = a_m = 0$ .
- La lista vacía  $()$  también se declara linealmente independiente.

El razonamiento anterior muestra que  $v_1, \dots, v_m$  es linealmente independiente si y sólo si cada vector en el  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$  tiene sólo una representación lineal en forma de combinación lineal de  $v_1, \dots, v_m$ .

**1.19 Definición Linealmente dependiente.**

- Una lista  $v_1, \dots, v_m$  de vectores en  $V$  se llama linealmente dependiente si no es linealmente independiente.
- En otras palabras, una lista  $v_1, \dots, v_m$  de vectores en  $V$  es linealmente dependiente si existe  $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$ , no todos 0, tal que  $a_1v_1 + \dots + a_mv_m = 0$ .

**1.21 Lema** Suponga  $v_1, \dots, v_m$  es una lista linealmente dependiente en  $V$ . Entonces, existen  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que se cumple lo siguiente:

- $v_j \in \text{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$ ;
- Si el  $j$ -ésimo término se elimina de  $v_1, \dots, v_m$ , el generador de la lista restante es igual a  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ .

Demostración.- Ya que la lista  $v_1, \dots, v_m$  es linealmente dependiente, existe números  $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$ , no todos 0, tal que

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m = 0.$$

Sea  $j$  el elemento más grande de  $\{1, \dots, m\}$  tal que  $a_j \neq 0$ . Entonces,

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \dots - \frac{a_{j-1}}{a_j}v_{j-1} \quad (1).$$

Lo que prueba (a).

Para probar (b), suponga  $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ . Entonces, existe números  $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{F}$  tal que

$$u = c_1v_1 + \dots + c_mv_m.$$

En la ecuación de arriba, podemos reemplazar  $v_j$  con el lado derecho de (1), lo que muestra que  $u$  está en el  $\text{span}$  de la lista obtenida al eliminar el  $j$ -ésimo término de  $v_1, \dots, v_m$ . Así (b) se cumple. ■

Elegir  $j = 1$  en el lema de dependencia lineal anterior, significa que  $v_1 = 0$ , porque si  $j = 1$  entonces la condición (a) anterior se interpreta como que  $v_1 \in \text{span}()$ . Recuerde que  $\text{span}() = \{0\}$ . Tenga en cuenta también que la demostración del inciso (b) debe modificarse de manera obvia si  $v_i = 0$  y  $j = 1$ .

Ahora llegamos a un resultado importante. Dice que ninguna lista linealmente independiente en  $V$  es más larga que una lista generadora en  $V$ .

### 1.23 Teorema La longitud de la lista linealmente independiente es $\leq$ que la longitud de la lista que genera.

En un espacio vectorial finito, la longitud de cada lista linealmente independiente de vectores es menor o igual que la longitud de cada lista de vectores.

Demostración.- Suponga  $u_1, \dots, u_m$  es linealmente independiente en  $V$ . Suponga también que  $w_1, \dots, w_n$  generan  $V$ . Necesitamos probar que  $m \leq n$ . Lo hacemos a través del proceso de pasos que se describe a continuación; tenga en cuenta que en cada paso agregamos una de las  $u$ 's y eliminamos una de las  $w$ 's.

**Paso 1.** Sea  $B$  la lista  $w_1, \dots, w_n$ , que abarca  $V$ . Por lo tanto, adjuntar cualquier vector en  $V$  a esta lista produce una lista linealmente dependiente (porque el nuevo vector adjunto se puede escribir como una combinación lineal de los otros vectores). En particular, la lista

$$u_1, w_1, \dots, w_n$$

es linealmente dependiente. Así, por el lema (2.21), podemos eliminar uno de las  $w$  para que la nueva lista  $B$  (de longitud  $n$ ) que consta de  $u_1$  y las  $w$  restantes abarquen  $V$ .

**Paso 2.** La lista  $B$  (de longitud  $n$ ) del paso  $j - 1$  genera  $V$ . Así, adjuntar cualquier vector a esta lista produce una lista linealmente dependiente. En particular, la lista de longitud  $(n + 1)$  obtenida al unir  $u_j$  a  $B$ , colocándola justo después de  $u_1, \dots, u_{j-1}$ , es linealmente dependiente. Por el lema de dependencia lineal (2.21) uno de los vectores de esta lista está en el lapso de los anteriores, y porque  $u_1, \dots, u_j$  es linealmente independientes, este vector es uno de los  $w$ 's, no uno de los  $u$ 's. Podemos eliminar esa  $w$  para la nueva lista  $B$  (de longitud  $n$ ) que consta de  $u_1, \dots, u_j$  y las  $w$ 's restantes generan  $V$ .

Después del paso  $m$ , hemos agregado todas las  $u$  y el proceso se detiene. En cada paso, a medida que agregamos un  $u$  a  $B$ , el lema de dependencia lineal implica que hay algo de  $w$  que eliminar. Por lo tanto, hay al menos tantas  $w$  como  $u$ . ■

### 1.26 Teorema Subespacio de dimensión finita.

Todo subespacio de un vector de dimensión finita es de dimensión finita.

Demostración.- Suponga que  $V$  es de dimensión finita y  $U$  es un subespacio de  $V$ . Necesitamos demostrar que  $U$  es de dimensión finita. Hacemos esto a través de la siguiente construcción de pasos.

**Paso 1.** Si  $U = \{0\}$ , entonces  $U$  es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si  $U \neq \{0\}$ , entonces elegimos un vector no nulo  $v_1 \in U$

**Paso 2.** Si  $U = \text{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$ , entonces  $U$  es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si  $U \neq \text{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$ , entonces elegimos un vector  $v_j \in U$  tal que

$$v_j \in \text{span}(v_1, \dots, v_{j-1}).$$

Después de cada paso, mientras continúa el proceso, hemos construido una lista de vectores tal que ningún vector en esta lista está en el generador de los vectores anteriores. Así, después de cada paso hemos construido una lista linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Esta lista linealmente independiente no puede ser más grande que cualquier lista de expansión de  $V$  (por 2.23). Por lo tanto, el proceso eventualmente termina, lo que significa que  $U$  es de dimensión finita. ■

## 1.A Ejercicios

1. Suponga  $v_1, v_2, v_3, v_4$  se extiende por  $V$ . Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

también se extiende por  $V$ .

Demostración.- Sea  $v \in V$ , entonces existe  $a_1, a_2, a_3, a_4$  tal que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4.$$

Que implica,

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 - a_1v_2 + a_1v_2 - a_1v_3 + a_1v_3 - a_2v_3 + a_2v_3 - a_1v_4 + a_1v_4 \\ &\quad - a_2v_4 + a_2v_4 - a_3v_4 + a_3v_4 \end{aligned}$$

De donde,

$$v = a_1(v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(v_3 - v_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)v_4.$$

Por lo tanto, cualquier vector en  $V$  puede ser expresado por una combinación lineal de

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4.$$

Así, esta lista se extiende por  $V$ .

## 2. Verifique las afirmaciones del Ejemplo 2.18.

- (a) Una lista  $v$  de un vector  $v \in V$  es linealmente independiente si y sólo si  $v \neq 0$ .

Demostración.- Demostremos que si  $v$  es linealmente independiente, entonces  $v \neq 0$ . Supongamos que  $v = 0$ . Sea un escalar  $a \neq 0$ . De donde,  $av = 0$  incluso cuando  $a \neq 0$ . Esto contradice la definición de independencia lineal. Por lo tanto,  $v$  debe ser linealmente dependiente. Esto es,  $v = 0$  implica que  $v$  es un vector linealmente dependiente. Por lo que, si  $v$  es linealmente independiente, entonces  $v$  es un vector distinto de cero.

Por otro lado, debemos demostrar que  $v \neq 0$  implica que  $v$  es linealmente independiente. Sea un escalar  $a$  tal que  $av = 0$ . Si  $a \neq 0$ , entonces  $av$  no puede ser 0. Por eso  $a$  debe ser 0. Por lo tanto,  $v \neq 0$  y  $av = 0$  implica que  $a = 0$ . Así,  $v$  es linealmente independiente.

- (b) Una lista de dos vectores en  $V$  es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

Demostración.- El enunciado siguiente es equivalente. Dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar de otro. Supongamos que  $v_1, v_2$  son dos vectores linealmente dependientes. Por lo que, existe escalares  $a_1, a_2$  tal que

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0$$

y no ambos escalares  $a_1, a_2$  son cero. Sea  $a_1 \neq 0$ , entonces la ecuación se podría reescribir como

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2$$

el cual prueba que  $v_1$  es un múltiplo escalar de  $v_2$ . Por otro lado, si  $a_2 \neq 0$ , entonces  $v_2 = -\frac{a_1}{a_2}v_1$  de aquí podemos afirmar que  $v_2$  es un múltiplo escalar de  $v_1$ .

Ahora supongamos que uno de los  $v_1$  o  $v_2$  es un múltiplo escalar del otro. Podemos decir, sin pérdida de generalidad, que  $v_1$  es un múltiplo escalar de  $v_2$ . Esto es,  $v_1 = cv_2$  para algún escalar  $c$ . Por lo tanto, la ecuación  $v_1 - cv_2 = 0$  se cumple, ya que el multiplicador de  $v_1$  es distintos de cero. Esto es precisamente lo que requerimos para la definición de dependencia lineal. Así,  $v_1$  y  $v_2$  son linealmente dependientes.

(c)  $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$  es linealmente independiente en  $\mathbf{F}^4$ .

Demostración.- Utilizaremos la definición de independencia lineal. Sean  $a, b, c$  escalares en  $\mathbf{F}$  tal que

$$a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$$

Entonces,

$$(a, b, c, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Lo que implica,

$$a, b, c = 0.$$

Esto demuestra que los tres vectores son linealmente independientes.

(d) La lista  $1, z, \dots, z^m$  es linealmente independiente en  $\mathcal{P}(\mathbf{F})$  para cada entero no negativo  $m$ .

Demostración.- Demostremos por contradicción. Supongamos que  $1, z, \dots, z^m$  es linealmente dependiente. Por lo que, existe un escalar  $a_0, a_1, \dots, a_m$  tal que

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m = 0.$$

Sea  $k$  el índice más grande tal que  $a_k \neq 0$ . Esto significa que los escalares desde  $a_{k+1}$  hasta  $a_m$  son cero. Entonces, se deduce que

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k = 0.$$

Reescribiendo se tiene

$$z^k = -\frac{a_0}{a_k} - \frac{a_1}{a_k} z - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_k} z^{k-1}.$$

Aquí, expresamos  $z^k$  como un polinomio de grado  $k-1$  el cual es absurdo. Por lo que  $1, z, z^2, \dots, z^m$  es un conjunto linealmente independiente.

3. Encuentre un número  $t$  tal que

$$(3, 1, 4), (2, -3, 5), (5, 9, t)$$

no es linealmente independiente en  $\mathbf{R}^3$ .

Respuesta.- Sea,

$$a(3, 1, 4) + b(2, -3, 5) + c(5, 9, t) = \mathbf{0}.$$

Si  $c = 0$ . Entonces,

$$a(3, 1, 4) + b(2, -3, 5) = \mathbf{0}.$$

Lo que implica

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= 0 \\ a - 3b &= 0 \\ 4a + 5b &= 0 \end{aligned}$$

De donde, resolviendo para  $a$  y  $b$  se tiene

$$a = 0 \quad y \quad b = 0.$$

Pero, no queremos que  $a, b, c$  sean cero. Así que debemos forzar que  $c \neq 0$ , como sigue:

$$a(3, 1, 4) + b(2, -3, 5) + c(5, 9, t) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (5, 9, t) = -\frac{a}{c}(3, 1, 4) - \frac{b}{c}(2, -3, 5).$$

Es decir, estamos expresando  $(5, 9, t)$  como una combinación lineal de los vectores restantes. Así, sea  $-\frac{a}{c} = x$ ,  $-\frac{b}{c} = y$  por lo que,

$$(5, 9, t) = x(3, 1, 4) + y(2, -3, 5).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x - 3y &= 9 \\ 4x + 5y &= t \end{aligned}$$

Resolviendo para  $x$  e  $y$  se tiene

$$x = 3 \quad y = -2.$$

Por lo tanto,

$$t = 2.$$

4. Verifique la afirmación en el segundo punto del Ejemplo 2.20. Es decir, la lista  $(2, 3, 1)$ ,  $(1, -1, 2)$ ,  $(7, 3, c)$  es linealmente dependientes en  $\mathbf{F}^3$  si y sólo si  $c = 8$ , como debes verificar.

Respuesta.- Sea los escalares  $a, b, c$  no todos cero tal que

$$r(2, 3, 1) + s(1, -1, 2) + t(7, 3, c) = (0, 0, 0)$$

De donde, podemos escribir como ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2r + s + 7t &= 0 \\ 3r - s + 3t &= 0 \\ r + 2s + ct &= 0 \end{aligned}$$

De la ecuación 1 y 2 se tiene

$$5r + 10t = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -2t.$$

Luego sustrayendo la ecuación 1 y 3,

$$2r + (c - 4)t = 0.$$

Así, tenemos que

$$2(-2t) + (c - 4)t = 0 \quad \Rightarrow \quad (c - 8)t = 0$$

Por lo que,

$$r = 0 \quad \text{o} \quad c - 8 = 0.$$

Si  $t = 0$ . Entonces,  $r = -2t = 0$ , y  $s = 0$ . Contradiciendo el hecho de que no todos los escalares son cero. Por lo tanto, los tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si  $c = 8$ .

5. (a) Demuestre que si pensamos en  $\mathbf{C}$  como un espacio vectorial sobre  $\mathbf{R}$ , entonces la lista  $(1 + i, 1 - i)$  es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares  $a, b \in \mathbf{R}$ , tal que

$$a(1 + i) + b(1 - i) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a + b) + (a - b)i = 0.$$

Entonces,

$$a + b = 0 \quad \text{y} \quad a - b = 0.$$



Igualando estas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} a + b &= a - b \Rightarrow 2b = 0 \\ &\Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Reemplazando en  $a + b = 0$ ,

$$a = 0.$$

Por lo tanto,  $(1 + i, 1 - i)$  es linealmente independiente sobre  $\mathbf{R}$ .

- (b) Demuestre que si pensamos en  $\mathbf{C}$  como un espacio vectorial sobre  $\mathbf{C}$ , entonces la lista  $(1 + i, 1 - i)$  es linealmente dependiente.

Demostración.- Sean los escalares  $i, 1 \in \mathbf{C}$ , tal que

$$i(1 + i) + 1(1 - i) = i + i^2 + 1 - i = 0 \Rightarrow (i - 1) + (1 - i) = (i - 1) - (i - 1) = 0.$$

Donde concluimos que  $(1 + i, 1 - i)$  es linealmente dependiente sobre  $\mathbf{C}$ .

6. Supongamos que  $v_1, v_2, v_3, v_4$  es linealmente independiente en  $V$ . Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

es también linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares  $a, b, c, d \in F$  tal que

$$a(v_1 - v_2) + b(v_2 - v_3) + c(v_3 - v_4) + d(v_4) = 0.$$

De donde,

$$av_1 - av_2 + bv_2 - bv_3 + cv_3 - cv_4 + dv_4 = 0.$$

Por lo que,

$$av_1 + (b - a)v_2 + (c - b)v_3 + (d - c)v_4 = 0$$

Ya que  $v_1, v_2, v_3, v_4$  es linealmente independiente, entonces

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b - a &= 0 \\ c - b &= 0 \\ d - c &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para  $a, b, c, d$  se tiene

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

Esto implica que

$$0(v_1 - v_2) + 0(v_2 - v_3) + 0(v_3 - v_4) + 0(v_4) = 0.$$

Por lo tanto, la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

es linealmente independiente.

7. Demostrar o dar un contraejemplo: Si  $v_1, v_2, \dots, v_m$  es una lista linealmente independiente de vectores en  $V$ , Entonces

$$5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \dots, v_m$$

es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares  $a_i \in \mathbf{F}$  tal que

$$a_1(5v_1 - 4v_2) + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_mv_m = 0$$

De donde,

$$5a_1v_1 + (a_2 - 4a_1)v_2 + a_3v_3 + \dots + a_mv_m = 0$$

Sabemos que la independencia lineal obliga a todos los escalares de  $v_i$  a ser cero. En particular,  $5a_1 = 0$  entonces  $a_1 = 0$  y  $a_2 - 4a_1 = 0$ , implica  $a_2 = 0$ . Por lo tanto,

$$0 \cdot v_1 + (0 - 0)v_2 + a_3v_3 + \dots + a_mv_m = 0$$

Dado que todos  $a_i$  son cero, entonces  $5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \dots, v_m$  es linealmente independiente.

8. Demostrar o dar un contraejemplo: Si  $v_1, v_2, \dots, v_m$  es una lista linealmente independiente de vectores en  $V$  y  $\gamma \in \mathbf{F}$  con  $\gamma \neq 0$ , Entonces  $\gamma v_1, \gamma v_2, \dots, \gamma v_m$  es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares  $a_i \in \mathbf{F}$  tal que

$$a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \dots + a_m\gamma v_m = 0.$$

De donde,

$$\gamma(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m) = 0.$$

Lo que,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = 0.$$

Ya que,  $v_1, v_2, \dots, v_m$  es linealmente independiente. Entonces, todos los  $a_i$ 's deben ser cero. Por lo tanto,  $a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \dots + a_m\gamma v_m = 0$  es linealmente independiente.

9. Demostrar o dar un contraejemplo: Si  $v_1, v_2, \dots, v_m$  y  $w_1, w_2, \dots, w_m$  son listas linealmente independientes de vectores en  $V$ , entonces  $v_1 + w_1, \dots, v_m + w_m$  es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares  $a_i, b_i \in \mathbf{F}$  tal que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = 0 \quad \text{y} \quad b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_mv_m = 0.$$

Entonces,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m + b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_mv_m = 0.$$

De donde,

$$(a_1 - b_1)(v_1 + w_1) + (a_2 - b_2)(v_2 + w_2) + \dots + (a_m - b_m)(v_m + w_m) = 0.$$

Supongamos  $c_i = a_i + b_i \in \mathbf{F}$ . Luego,

$$c_1(v_1 + w_1) + c_2(v_2 + w_2) + \dots + c_m(v_m + w_m) = 0.$$

Dado que  $a_i = b_i = 0$ , ya que  $v_1, v_2, \dots, v_m$  y  $w_1, w_2, \dots, w_m$  son linealmente independientes. Concluimos que,  $v_1 + w_1, \dots, v_m + w_m$  es linealmente independiente.

10. Suponga  $v_1, \dots, v_m$  es linealmente independiente en  $V$  y  $w \in V$ . Demostrar que si  $v_1 + w, \dots, v_m + w$  es linealmente dependiente, entonces  $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ .

Demostración.- Por definición de dependencia lineal. Existen  $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{F}$ , no todos 0, tal que

$$a_1(v_1 + w) + a_2(v_2 + w) + \dots + a_m(v_m + w) = 0.$$

De donde,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = -(a_1 + a_2 + \dots + a_m)w. \quad (1)$$

Dado que  $v_1, \dots, v_m$  es linealmente independiente, entonces existen escalares  $t_1, \dots, t_m \in \mathbf{F}$ ,  $\forall t_i = 0$ , de modo que

$$t_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_mv_m = 0$$

Es único. Así pues notemos, para  $a_i \neq 0$  que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m \neq 0$$

En consecuencia por (1)

$$-(a_1 + a_2 + \dots + a_m)w \neq 0.$$

Así,

$$w = -\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_m}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m) \in \text{span}(v_1, \dots, v_m).$$

11. Suponga  $v_1, \dots, v_m$  es linealmente independiente en  $V$  y  $w \in V$ . Demostrar que  $v_1, \dots, v_m, w$  es linealmente independiente si y sólo si

$$w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_m).$$

Demostración.- Supongamos que  $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ . Entonces,

$$w = a_1v_1 + \dots + a_mv_m.$$

De donde,

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m - w = 0 \Rightarrow a_1v_1 + \dots + a_mv_m + (-1)w = 0.$$

Por lo tanto,  $v_1, \dots, v_m, w$  es linealmente dependiente.

Por otro lado:  $v_1, \dots, v_m, w$  es linealmente independiente, entonces existe  $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbf{F}$ ,  $\forall a_i = 0$ , tal que

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m + bw = 0.$$

Dado que  $b = 0$ , no se puede escribir  $w$  como combinación lineal de  $v_1, \dots, v_m$ . Es decir,

$$w = \frac{1}{0}(a_1v_1 + \dots + a_mv_m),$$

lo que es imposible. De esta manera

$$w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_m).$$

12. Explique por qué no existe una lista de seis polinomios que sea linealmente independiente en  $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ .

Respuesta.- Notemos que  $1, z, z^2, z^3, z^4$  genera  $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ . Pero por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], la longitud de la lista linealmente independiente es menor o igual que la longitud de la lista que genera. Es decir, cualquier lista linealmente independiente no tiene más de 5 polinomios.

13. Explique por qué ninguna lista de cuatro polinomios genera  $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ .

Respuesta.- Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita. Si  $m$  vectores genera  $V$  y si tenemos un conjunto de  $n$  vectores linealmente independientes, entonces  $n \leq m$ . Es decir, el número de vectores en un conjunto linealmente independiente de  $V$ , no puede ser mayor que el número de vectores en un conjunto generador de  $V$ .

Por ejemplo, si cuatro polinomios podrían generar  $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ . Entonces, por la definición de arriba, cualquier conjunto de polinomios linealmente independientes en  $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$  podría tener como máximo cuatro vectores. Sin embargo, el conjunto  $1, z, z^2, z^3, z^4$  tiene cinco polinomios linealmente independientes en  $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ . Por lo tanto, es imposible que cualquier conjunto de cuatro polinomios genere  $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ .

14. Demuestre que  $V$  es de dimensión infinita, si y sólo si existe una secuencia  $v_1, v_2, \dots$ , de vectores en  $V$  tal que  $v_1, \dots, v_m$  es linealmente independiente para cada entero positivo  $m$ .

Demostración.- Supongamos que  $V$  es de dimensión infinita. Queremos producir una secuencia de vectores  $v_1, v_2, \dots$ , tal que  $v_1, v_2, \dots, v_m$  es linealmente independiente para cada  $m$ . Necesitamos mostrar que para cualquier  $k \in \mathbb{N}$  y un conjunto de vectores linealmente independientes  $v_1, v_2, \dots$  podemos definir un vector  $v_{k+1}$  tal que  $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$  es linealmente independiente. Si podemos probar esto, entonces significará que podemos continuar sumando vectores indefinidamente a conjuntos linealmente independientes de modo que los conjuntos resultantes también sean linealmente independientes. Esto nos dará una secuencia de vectores  $v_1, v_2, \dots$ , cuyo subconjunto finito es linealmente independiente.

Sea  $v_1, v_2, \dots, v_k$  un conjunto linealmente independiente en  $V$ . Ya que  $V$  es de dimensión finita, no puede ser generado por un conjunto finito de vectores. Por lo tanto,  $V \neq \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ . Sea  $v_{k+1}$  tal que  $v_{k+1} \notin \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ . Entonces, por el ejercicio 11 [Axler, Linear Algebra, que nos dice: Si  $v : 1, \dots, v_m$  es linealmente independiente en  $V$  y  $w \in V$ , el conjunto  $v_1, \dots, v_m, w$  es linealmente independiente si y sólo si  $w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ ]. El conjunto  $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$  es linealmente independiente.

Por otro lado, sea  $v_1, v_2, \dots, v_n$  un conjunto generador de  $V$ . Entonces, por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], cualquier conjunto de vectores linealmente independiente en  $V$  pueden tener por lo más  $n$  vectores. De esto modo, cualquier conjunto que tenga  $n + 1$  o más vectores es linealmente dependiente. Así, si  $V$  es de dimensión finita, entonces no podemos tener una secuencia de vectores  $v_1, v_2, \dots$  tal que, para cada  $m$ , el subconjunto  $v_1, v_2, \dots, v_m$  es linealmente independiente. Tomando su recíproca, podemos decir que si existe una secuencia de vectores  $v_1, v_2, \dots$  tal que el conjunto  $v_1, v_2, \dots, v_m$  es linealmente independiente para cada  $m$ . Entonces,  $V$  es de dimensión infinita. Lo que completa la demostración.

15. Demostrar que  $\mathbb{F}^\infty$  es de dimensión infinita.

Demostración.- Sea un elemento  $e_m \in \mathbb{F}^\infty$  como el elemento que tiene la coordenada  $m$ -ésima igual a 1 los demás elementos igual a 0. Es decir,

$$(0, 1, 0, \dots, 0)$$

Ahora, si varía  $m$  sobre el conjunto de los números naturales, entonces tenemos una secuencia  $e_1, e_2, \dots$  en  $\mathbb{F}^\infty$ , si y sólo si podemos probar que  $e_1, e_2, \dots, e_m$  es linealmente independiente para cada  $m$ . Con este fin, sea

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m = 0$$

De donde,

$$(a - 1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0)$$

Inmediatamente implica que  $a'_i s = 0$  y por lo tanto,  $e'_i s$  son linealmente independiente.

- 16.** Demostrar que el espacio vectorial real para todas las funciones de valor real continuas en el intervalo  $[0, 1]$  es de dimensión infinita.

Demostración.-