1

Espacios Vectoriales

1.A R^n y C^n

1.1 Definición **Números complejos.**

- Un número complejo es un par ordenado (a, b), donde $a, b \in \mathbf{R}$, pero lo escribimos como $a + bi$.
- El conjunto de todos los números complejos es denotado por $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbf{R}\}.$$

- La adición y la multiplicación en $\mathbf{C}$ esta definida por:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Si $a \in \mathbf{R}$, identificamos $a + 0i$ con el número real a. Por lo que podemos decir que $\mathbf{R}$ es un subconjunto de $\mathbf{C}$.

1.3 Definición **Propiedades aritmeticas de los complejos.**

- **Conmutatividad:** $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{y} \quad \alpha\beta = \beta\alpha \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbf{C}$;
- **Asociatividad:** $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$ y $(\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$ para todo $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbf{C}$;
- **Identidad:** $\lambda + 0 = \lambda$ y $\lambda 1 = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbf{C}$
- **Inverso aditivo:** Para cada $\alpha \in \mathbf{C}$, existe un único $\beta \in \mathbf{C}$ tal que $\alpha + \beta = 0$;
- **Inverso multiplicativo:** Para cada $\alpha \in \mathbf{C}$ con $\alpha \neq 0$, existe un único $\beta \in \mathbf{C}$ tal que $\alpha\beta = 1$;
- **Propiedad distributiva:** $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$ para todo $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$

1.4 Teorema Demostrar que $\alpha\beta = \beta\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Demostración.- Por la definición de multiplicación de números complejos se muestra que

$$\alpha\beta = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

y

$$\beta\alpha = (c+di)(a+bi) = (ca-db)+(ad+bc)i.$$

Las ecuaciones anteriores, la conmutatividad para la suma y la multiplicación y propiedades de números reales muestran que

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

■

Ejemplo 1.1 Demostrar que $\lambda + 0 = \lambda$ y $\lambda 1 = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbf{C}$.

Demostración.- Sean $\lambda = (a+bi)$ y $0 = (0+0i)$, para $a, b \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lambda + 0 &= (a+bi)+(0+0i) \\ &= (a+0)+(b+0)i \\ &= a+bi \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Luego sea $1 = (1+0i)$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda 1 &= (a+bi)(1+0i) \\ &= (a1-b0)+(a0+b1)i \\ &= (1a+1bi) \\ &= (a+bi) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

■

1.5 Definición

Definición $-\alpha$, sustracción, $1/\alpha$ división

Sea $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$

- Sea $-\alpha$ que denota el inverso aditivo de α. Por lo tanto $-\alpha$ es el único número complejo tal que

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

- **Sustracción** en **C** es definido por:

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

- Para $\alpha \neq 0$, sea $1/\alpha$ denotado por el inverso multiplicativo de α. Por lo tanto $1/\alpha$ es el único número complejo tal que

$$\alpha(1/\alpha) = 1.$$

- **División** en **C** es definido por:

$$\beta/\alpha = \beta(1/\alpha).$$

1.6 Notación **F**

F significa cualquier **R** o **C**.

Los elementos de **F** son llamados **escalares.**

Listas

1.8 Definición **Listas, longitud.** Supóngase que n es un entero no negativo. Una lista de longitud n es una colección ordenada de n elementos (el cual podría ser números, otras listas, o mas entidades abstractas) separadas por comas y cerradas por paréntesis. Una lista de longitud n se muestra de la siguiente manera:

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

Dos listas son iguales si y sólo si tienen la misma longitud y los mismos elementos en el mismo orden.

Las listas difieren de los conjuntos de dos maneras: en las listas, el orden importa y las repeticiones tienen significado; en conjuntos, el orden y las repeticiones son irrelevantes.

$\boldsymbol{F^n}$

1.10 Definición $\mathbf{F}^n$ es el conjunto de todas las listas de longitud n de elementos de **F**

$$\mathbf{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\ :\ x_j \in \mathbf{F} \text{ para cada } j = 1, \ldots, n\}.$$

Para $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{F}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, decimos que x_j es la j-enesima coordenada de $(x_1, \ldots, x_n)$.

1.12 Definición **Adición en $\mathbf{F}^n$.** La adición en $\mathbf{F}^n$ es definido añadiendo las correspondientes coordenadas:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

1.13 Teorema **Conmutatividad para la adición en $\mathbf{F}^n$.** Si $x, y \in \mathbf{F}^n$, entonces $x + y = y + x$.

Demostración.- Suponga $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Entonces por la defինción de adición e $\mathbf{F}^n$,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \ldots, y_n x_n) \\ &= (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) \\ &= y + x \end{aligned}$$

donde la segunda y cuarta igualdades anteriores se cumplen debido a la definición de suma en $\mathbf{F}^n$ y la tercera igualdad se cumple debido a la conmutatividad habitual de la suma en **F**. ∎

Si $x \in \mathbf{F}^n$, entonces hacer que x sea igual a $(x_1, \ldots, x_n)$ es una buena notación, como se muestra en la demostración anterior.

1.14 Definición 0**.** Sea 0 la lista de longitud n cuyas coordenadas son todas 0:

$$0 = (0, \ldots, 0)$$

1.16 Definición **Inverso aditivo en $\mathbf{F}^n$.** Para $x \in \mathbf{F}^n$, el inverso aditivo de x, denota por $-x$, es el vector $-x \in \mathbf{F}^n$ tal que

$$x + (-x) = 0$$

En otras palabras, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

1.17 Definición **Multiplicación scalar en $\mathbf{F}^n$.** El producto de un número λ y un vector en $\mathbf{F}^n$ es calculado por la multiplicación de cada coordenada del vector por λ:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

donde $\lambda \in \mathbf{F}$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{F}^n$.

Digresión sobre campos

Un campo es un conjunto que contiene al menos dos elementos distintos llamados 0 y 1, junto con operaciones de suma y multiplicación que satisfacen todas las propiedades enumeradas en 1.3. Por lo tanto, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$ son campos, como lo es el conjunto de números racionales junto con las operaciones habituales de suma y multiplicación. Otro ejemplo de campo es el conjunto $\{0, 1\}$ con las operaciones habituales de suma y multiplicación excepto que $1 + 1$ se define como igual a 0.

1.A Ejercicios

1. Supongase a y b números reales, no ambos 0. Encuentre números reales c y d tales que

$$\frac{1}{(a+bi)} = c + di.$$

Respuesta.- Supongamos $\alpha = a + bi$ y $\beta = c + di$ con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\alpha\beta = (a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = (1 + 0i) = 1.$$

Luego, por el hecho de que dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes reales e imaginarias son iguales, entonces

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ac - db & = & 1 \\ ad + bc & = & 0 \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación tenemos, $d = -\dfrac{bc}{a}$ y reemplazando en la ecuación 1,

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Luego,

$$d = -\frac{bc}{a} = \frac{b \cdot \frac{a}{a^2+b^2}}{a} = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

2. Demostrar que
$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
es una raíz cúbica de 1 (significa que su cubo es igual a 1).

Demostración.- Algebraicamente queremos demostrar que,
$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \sqrt[3]{1} \quad \text{o} \quad \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1$$

Por las propiedades de números complejos, sabemos que
$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

Luego, por el binomio al cubo podemos deducir que
$$\begin{aligned}
\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^3 &= \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}i}{2} + 3\cdot\frac{-1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^3 \\
&= \frac{-1}{8} + \frac{3\sqrt{3}i}{8} + \frac{-3(\sqrt{3})^2(\sqrt{-1})^2}{8} + \frac{(\sqrt{3})^2\sqrt{3}(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}}{8} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}i}{8} + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}i}{8} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. Encuentre dos raíces cuadradas distintas de i.

Respuesta.- Queremos encontrar raíces distintas de i tal que
$$x^2 = i.$$

Supongamos que $x = a + bi$ para $a, b \in \mathbf{R}$. Resolvemos la ecuación cuadrática, se tiene
$$x^2 = (a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + (ab + ba)i = (a^2 - b^2) + (2ab)i.$$

Luego, ya que $x^2 = i = 0 + 1i$, entonces
$$x^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i = (0 + 1i) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 &=& 0 \\ 2ab &=& 1 \end{array} \right.$$

para a y b números reales. Resolvamos este sistema de ecuaciones, se tiene
$$\left\{ \begin{array}{rcl} b &=& \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \\[2ex] a &=& \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Luego, ya que $x^2 = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) - 2abi = i$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}i &= i \\
\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}\right)i &= i \\
\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}i &\neq i \\
\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)i &\neq i
\end{aligned}$$

De las que solo satisface $x^2 = i$ las dos primeras ecuaciones. Por lo tanto, las dos raíces distintas de i son:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

4. Demostrar que $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ para todo $\alpha,\beta \in \mathbf{C}$.

Demostración.- Supóngase $\alpha = a+bi$ y $\beta = c+di$, donde $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. Entonces por definición de suma de números complejos se muestra que

$$\alpha+\beta = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i = (c+a)+(d+b)i = \beta+\alpha.$$

5. Demuestre que $(\alpha+\beta)+\lambda = \alpha+(\beta+\lambda)$ para todo $\alpha,\beta,\lambda \in \mathbf{C}$.

Demostración.- Sean,

$$\begin{aligned}
\alpha &= a+bi \\
\beta &= c+di \\
\lambda &= e+fi
\end{aligned}$$

para $a,b,c,d,e,f \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)+\lambda &= [(a+bi)+(c+di)]+(e+fi) \\
&= [(a+c)+(b+d)i]+(e+fi) \\
&= [(a+c)+e]+[(b+d)+f]\,i \\
&= [a+(c+e)]+[b+(d+f)]\,i \\
&= (a+bi)+[(c+e)+(d+e)i] \\
&= (a+bi)+[(c+di)+(e+di)] \\
&= \alpha+(\beta+\lambda).
\end{aligned}$$

6. Demostrar que $(\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$ para todo $\alpha,\beta,\lambda \in \mathbf{C}$.

Demostración.- Sean,

$$\begin{aligned}
\alpha &= a+bi \\
\beta &= c+di \\
\lambda &= e+fi
\end{aligned}$$

para $a,b,c,d,e,f \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl}
(\alpha\beta)\lambda & = & [(a+bi)(c+di)]\,(e+fi) \\
& = & [(ac-bd)+(ad+bc)i]\,(e+fi) \\
& = & [(ac-bd)e-(ad+bc)f]+[(ac-bd)f+(ad+bc)e]\,i \\
& = & [(ac)e-(bd)e-(ad)f-(bc)f]+[(ac)f-(bd)f+(ad)e+(bc)e]\,i \\
& = & [a(ce)-a(df)-b(cf)-b(de)]+[a(cf)+a(de)+b(ce)-b(df)]\,i \\
& = & [a(ce-df)-b(cf+de)]+[a(cf+de)+b(ce-df)]\,i \\
& = & (a+bi)\,[(ce-df)+(cf+de)i] \\
& = & (a+bi)\,[(c+di)(e+fi)] \\
& = & \alpha(\beta\lambda).
\end{array}$$

7. Demostrar que para cada $\alpha \in \mathbf{C}$, existe un único $\beta \in \mathbf{C}$ tal que $\alpha+\beta=0$.

Demostración.- Sean $\alpha=(a+bi)$ y $\beta=(c+di)$ para $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. Por las propiedades de números reales, a y b tienen inversa, las llamaremos c y d respectivamente tales que $a+c=0$ y $b+d=0$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl}
\alpha+\beta & = & (a+bi)+(c+di) \\
& = & (a+c)+(b+d)i \\
& = & 0+0i \\
& = & 0
\end{array}$$

Ahora demostremos la unicidad. Sean β y β' con $c',d' \in \mathbf{R}$ tales que $\alpha+\beta=0$ y $\alpha+\beta'=0$. Igualando estas ecuaciones se tiene,

$$\begin{array}{rcl}
\alpha+\beta & = & \alpha+\beta' \\
(a+bi)+(c+di) & = & (a+bi)+(c'+d'i) \\
(a+c)+(b+d)i & = & (a+c')+(b+d')i
\end{array}$$

Supongamos $c=c'$ y $d=d'$. Entonces,

$$(b+d)i=(b+d')i$$

Dada que la igualdad $\alpha+\beta=\alpha+\beta'$ se cumple siempre que $c=c'$ y $d=d'$, concluimos que,

$$(c+di)=(c'+d'i) \quad \Rightarrow \quad \beta=\beta'.$$

8. Demostrar que para cada $\alpha \in \mathbf{C}$ con $\alpha \neq 0$, existe un único $\beta \in \mathbf{C}$ tal que $\alpha\beta=1$.

Demostración.- Sean $\alpha=a+bi$ y $\beta=c+di$ con $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i=(1+0i)$$

Supongamos que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ac-db & = & 1 \\ ad+bc & = & 0 \end{array}\right.$$

De la segunda ecuación tenemos, $d=-\dfrac{bc}{a}$ y reemplazando en la ecuación 1,

$$c=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Luego,

$$d=-\frac{bc}{a}=\frac{b\cdot\frac{a}{a^2+b^2}}{a}=-\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Por lo tanto, existe un β tal que,

$$\beta = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-bi}{a^2+b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+bi}.$$

Ahora, demostremos la unicidad. Sean $\beta = c+di$ y $\beta' = c'd'i$ tales que, $(a+bi)(c+di) = 1$ y $(a+bi)(c'+d'i) = 1$. Entonces, por las propiedades de conmutatividad y asociatividad,

$$c+di = (c+di)\cdot 1 = (c+di)\cdot(a+bi)(c'+d'i) = [(a+bi)(c+di)]\,(c'+d'i) = c'+d'i.$$

Por lo que queda demostrado que $\beta = \beta'$. Y así concluimos que α tiene inverso multiplicativo.

9. Demostrar que $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$.

Demostración.- Sean $\alpha = a+bi$, $\beta = c+di$ y $\gamma = e+fi$ con $a,b,c,d,e,f \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl}
\alpha(\beta+\gamma) & = & (a+bi)\,[(c+e)+(d+f)i] \\
& = & [a(c+e)-b(d+f)] + [a(d+f)+b(c+e)]\,i \\
& = & [ac+ae-bd-bf] + [ad+af+bc+be]\,i \\
& = & ac+ae-bd-bf+adi+afi+bci+bei \\
& = & [(ac-bd)+(ad+bc)i] + [(ae-bf)+(af+be)i] \\
& = & (a+bi)(c+di)+(a+bi)(e+fi) \\
& = & \alpha\beta+\alpha\gamma.
\end{array}$$

10. Encuentre $x \in \mathbf{R}^4$ tal que

$$(4,-3,1,7) + 2x = (5,9,-6,8).$$

Respuesta.- Sea $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ con $x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbf{R}$. Por definición de adición y multiplicación por un escalar en $\mathbf{F}$ propiedades Entonces,

$$\begin{array}{rcl}
(4,-3,1,7)+2(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & (5,9,-6,8) \\
(4,-3,1,7)+(2x_1,2x_2,2x_3,2x_4) & = & (5,9,-6,8) \\
(4+2x_1,-3+2x_2,1+2x_3,7+2x_4) & = & (5,9,-6,8)
\end{array}$$

Por la igualdad dada, podemos formar un sistema de ecuaciones como sigue:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr}
4 & + & 2x_1 & = & 5 \\
-3 & + & 2x_2 & = & 9 \\
1 & + & 2x_3 & = & -6 \\
7 & + & 2x_4 & = & 8
\end{array}\right.$$

Resolviendo, obtenemos

$$x = (x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

11. Explique porque no existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tal que

$$\lambda(2-3i, 5+4i, -6+7i) = (12-5i, 7+22i, -32-9i).$$

Respuesta.- Sean $\lambda = a + bi,\ \ a, b \in \mathbf{R}$ y $x = (12 - 5i, 7 + 22i, -32 - 9i)$. Entonces, por definición de multiplicación por un escalar en $\mathbf{C}$ y las propiedades de número complejos,

$$\begin{array}{rcl}
\lambda(2-3i, 5+4i, -6+7i) & = & x \\
[\lambda(2-3i), \lambda(5+4i), \lambda(-6+7i)] & = & x \\
[(a+bi)(2-3i), (a+bi)(5+4i), (a+bi)(-6+7i)] & = & x \\
\{[2a-(-3)b] + (-(3)a+2b]\, i, (5a-4b)+(4a+5b)i, [(-6)a-7b]+[7a+(-6)b]\, i\} & = & x \\
[(2a+3b)+(-3a+2b)\, i, (5a-4b)+(4a+5b)i, (-6a-7b)+(7a-6b)\, i] & = & x
\end{array}$$

Dado que,

$$[(2a+3b)+(-3a+2b)\, i, (5a-4b)+(4a+5b)i, (-6a-7b)+(7a-6b)\, i] = (12-5i, 7+22i, -32-9i)$$

Entonces, por la igualdad tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr}
(2a+3b) & + & (-3a+2b)i & = & 12-5i \\
(5a-4b) & + & (4a+5b)i & = & 7+22i \\
(-6a-7b) & + & (7a-6b)i & = & -32-9i
\end{array}\right.$$

Que implica,

$$\left\{\begin{array}{rcr}
2a+3b & = & 12 \\
-3a+2b & = & -5 \\
5a-4b & = & 7 \\
4a+5b & = & 22 \\
-6a-7b & = & -32 \\
7a-6b & = & -9
\end{array}\right.$$

Resolviendo este último sistema,

$$3(2a+3b)+2(-3a+2b) = 3\cdot 12 + 2(-5) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{26}{11}.$$

De donde b estará dado por:

$$2a+3b = 12 \quad \Rightarrow \quad 2a + 3\cdot\frac{26}{11} = 12 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{27}{11}.$$

Sabemos que a y b debe satisfacer cada una de las ecuaciones del último sistema, Por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl}
5a-4b & = & 7 \\
5\cdot\frac{27}{11} - 4\cdot\frac{26}{11} & = & 7 \\
\frac{21}{11} = 7. & &
\end{array}$$

Claramente,

$$\frac{21}{11} \neq 7,$$

lo que significa que no podemos encontrar números a y b para satisfacer las ecuaciones del último sistema.

12. Demostrar que $(x+y)+z = x+(y+z)$ para todo $x, y, z \in \mathbf{F}^n$.

Demostración.- Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Entonces por definición de adición en $\mathbf{F}^n$ y los axiomas de números reales,

$$\begin{array}{rcl}
(x+y)+z & = & [(x_1+\ldots+x_n)+(y_1+\ldots+y_n)] + (z_1, \ldots, z_n) \\
& = & (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) + (z_1+\ldots, z_n) \\
& = & [(x_1+y_1)+y_1, \ldots, (x_n+y_n)+z_n] \\
& = & [x_1+(y_1+y_1), \ldots, x_n+(y_n+z_n)] \\
& = & (x_1, \ldots, x_n) + [(y_1+z_1, \ldots, y_n+z_n)] \\
& = & (x_1, \ldots, x_n) + [(y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)] \\
& = & x+(y+z).
\end{array}$$

13. Demostrar que $(ab)x = a(bx)$ para todo $x \in \mathbf{F}^n$ y todo $a, b \in \mathbf{F}$.

Demostración.- Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $a, b \in \mathbf{F}$. Entonces por definición de multiplicación escalar en $\mathbf{F}^n$ y los axiomas de números reales,

$$\begin{array}{rcl} (ab)x & = & (ab)(x_1, \ldots, x_n) \\ & = & [(ab)x_1, \ldots, (ab)x_n)] \\ & = & [a(bx_1), \ldots, a(bx_n)] \\ & = & a\,[(bx_1), \ldots, (bx_n)] \\ & = & a\,[b(x_1, \ldots, x_n)] \\ & = & a(bx) \end{array}$$

14. Demostrar que $1x = x$ para todo $x \in \mathbf{F}^n$.

Demostración.- Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Entonces, por definición de multiplicación escalar en $\mathbf{F}^n$ y por el hecho de que $1a = a$ para $a \in \mathbf{F}$

$$\begin{array}{rcl} 1x & = & 1(x_1, \ldots, x_n) \\ & = & [1x_1, \ldots, 1x_n] \\ & = & [x_1, \ldots, x_n] \\ & = & x. \end{array}$$

15. Demostrar que $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ para todo $\lambda \in \mathbf{F}$ y todo $x, y \in \mathbf{F}^n$.

Demostración.- Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $\lambda \in \mathbf{F}$. Entonces, por definición de adición y multiplicación escalar en $\mathbf{F}^n$

$$\begin{array}{rcl} \lambda(x+y) & = & \lambda\,[(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)] \\ & = & \lambda\,[(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)] \\ & = & [\lambda(x_1 + y_1), \ldots, \lambda(x_n + y_n)] \\ & = & [\lambda x_1 + \lambda y_1, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n] \\ & = & [\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n] + [\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n] \\ & = & \lambda x + \lambda y. \end{array}$$

16. Demostrar que $(a+b)x = ax + bx$ para todo $a, b \in \mathbf{F}$ y todo $x \in \mathbf{F}^n$.

Demostración.- Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $a, b \in \mathbf{F}$. Entonces, por definición de multiplicación escalar en $\mathbf{F}^n$

$$\begin{array}{rcl} (a+b)x & = & (a+b)(x_1, \ldots, x_n) \\ & = & [(a+b)x_1, \ldots, (a+b)x_n] \\ & = & [(ax_1 + bx_1), \ldots, (ax_n + bx_n)] \\ & = & [ax_1, \ldots, ax_n] + [bx_1, \ldots, bx_n] \\ & = & ax + bx. \end{array}$$

1.B Definición de espacio vectorial

La motivación para la definición de un espacio vectorial proviene de las propiedades de la suma y la multiplicación escalar en $\mathbf{F}^n$: la suma es conmutativa, asociativa y tiene una identidad. Todo elemento tiene un inverso aditivo. La multiplicación escalar es asociativa. La multiplicación escalar por 1 actúa como se esperaba. La suma y la multiplicación escalar están conectadas por propiedades distributivas. Definiremos un espacio vectorial como un conjunto V con una suma y una multiplicación escalar en V que satisfagan las propiedades del párrafo anterior.

1.18 Definición **Adición y multiplicación escalar.**

- Una adición en un conjunto V es una función que asigna un elemento $u + v \in V$ para cada par de elementos $u, v \in V$.
- Una multiplicación escalar en un conjunto V es una función que asigna un elemento $\lambda v \in V$ para cada $\lambda \in \mathbf{F}$ y cada $v \in V$.

1.19 Definición **Espacio vectorial.** Un espacio vectorial es un conjunto V junto con una suma en V y una multiplicación escalar en V tal que se cumplen las siguientes propiedades:

- **Conmutatividad**
$$u + v = v + u \text{ para todo } u, v \in V;$$
- **Asociatividad**
$$(u + v) + w = u + (v + w) \text{ y } (ab)v = a(bv) \text{ para todo } u, v, w \in V \text{ y todo } a, b \in \mathbf{F};$$
- **Identidad aditiva**
$$\text{Existe un elemento } 0 \in V \text{ tal que } v + 0 = v \text{ para todo } v \in V;$$
- **Inverso aditivo**
$$\text{Para cada } v \in V, \text{ existe } w \in V \text{ tal que } v + w = 0;$$
- **Identidad Multiplicativa**
$$1v = v \text{ para todo } v \in V$$
- **Propiedad distributiva**
$$a(u + v) = au + av \text{ y } (a + b)v = av + bv \text{ para todo } a, b \in \mathbf{F} \text{ y todo } u, v \in V.$$

1.20 Definición **Vector, punto.** Elementos de un espacio vectorial son llamados vectores o puntos.

1.21 Definición **Espacio vectorial real, espacio vectorial complejo.**

- Un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ es llamado un espacio vectorial real.
- Un espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$ es llamado un espacio vectorial complejo.

El espacio vectorial más simple contiene sólo un punto. En otras palabras, $\{0\}$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.22 F^{∞} está definido como el conjunto de todas las secuencias de elementos de F:

$$F^{\infty} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) : x_j \in \mathbf{F} \text{ para } j = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Demostración.- La adición y multiplicación escalar en F^{∞} se definen por:

$$\begin{array}{rcl} (x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) & = & (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) \\ \lambda(x_1, x_2, \ldots) & = & (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) \end{array}$$

Con estas definiciones, $\mathbf{F}^{\infty}$ se convierte en un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$, La identidad aditiva en este espacio vectorial es la secuencia de todos los ceros.

■

1.23 Notación $\mathbf{F}^S$.

- Si S es un conjunto, entonces $\mathbf{F}^S$ se denota como el conjunto de funciones de S para $\mathbf{F}$.
- Para $f, g \in \mathbf{F}^S$, la suma $f + g \in \mathbf{F}^S$ es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

  para todo $x \in S$
- Para $\lambda \in \mathbf{F}$ y $f \in \mathbf{F}^S$, el producto $\lambda f \in \mathbf{F}^S$ es una función definida por

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

  para todo $x \in S$.

La definición de un espacio vectorial requiere que tenga una identidad aditiva. El siguiente resultado establece que esta identidad es única.

1.25 Teorema **Identidad aditiva única.**

Un espacio vectorial tiene una única identidad aditiva.

Demostración.- Supóngase 0 y $0'$ ambos identidades aditivas para algún espacio vectorial V entonces,

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

donde se cumple la primera igualdad porque 0 es una identidad aditiva, la segunda igualdad viene de la conmutatividad, y la tercera igualdad se cumple porque $0'$ es una identidad aditiva. Por lo tanto $0' = 0$ y queda probado que V tiene una sola identidad aditiva. ■

Cada elemento v en un espacio vectorial tiene un inverso aditivo, un elemento w en el espacio vectorial tal que $v + w = 0$. El siguiente resultado muestra que cada elemento en un espacio vectorial tiene solo un inverso aditivo.

1.26 Teorema **Inverso aditivo único.**

Cada elemento en un espacio vectorial tiene un único inverso aditivo.

Demostración.- Supóngase que V es un espacio vectorial. Sea $v \in V$, w y $w^{'}$ inversos aditivos de v. Entonces
$$w = w + 0 = w + (v + w^{'}) = (w + v) + w^{'} = 0 + w^{'} = w^{'}$$
Así $w = w^{'}$. ■

1.27 Notación **-v,w-v.**

Sea $v, w \in V$. Entonces

- $-v$ se denota como el inverso aditivo de v;
- $w - v$ es definido como $w + (-v)$.

1.28 Notación **V.**

Por el resto del libro, V se define como el espacio vectorial sobre F.

1.29 Teorema **El número 0 por un vector.**

$0v = 0$ para cada $v \in V$.

Demostración.- Para $v \in V$, tenemos
$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$
Luego añadiendo el inverso aditivo de $0v$ para ambos lados de la ecuación de arriba tenemos $0 = 0v$. ■

Ahora establecemos que el producto de cualquier escalar y el vector 0 es igual al vector 0.

1.30 Teorema **Un número por el vector 0.**

$a0 = 0$ para cada $a \in \mathbf{F}$.

Demostración.- Para $a \in \mathbf{F}$, tenemos
$$a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$$
Luego añadiendo el inverso aditivo de $a0$ para ambos lados de la ecuación de arriba tenemos $0 = a0$. ■

Ahora mostramos que si un elemento de V se multiplica por el escalar -1, entonces el resultado es el inverso aditivo del elemento de V.

1.31 Teorema El número -1 por un vector.

$(-1)v = -v$ para cada $v \in V$.

Demostración.- Para $v \in V$, tenemos

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = [1 + (-1)]v = 0v = 0.$$

Esta ecuación nos dice que $(-1)v$, cuando se suma a v da 0. Así $(-1)v$ es el inverso aditivo de v. ■

1.B Ejercicio

1. Demostrar que $-(-v) = v$ para cada $v \in V$.

Demostración.- Ya que $(-1)v = -v$ para cada $v \in V$ (apartado 1.31, Axler, Linear algebra), $(-a)(-a) = a, \forall a \in \mathbf{R}$ y la identidad multiplicativa de espacio vectorial tenemos que

$$\begin{aligned} v &= 1v \\ &= (-1)(-1)v \\ &= (-1)(-v) \\ &= -(-v) \end{aligned}$$

2. Supóngase $a \in \mathbf{F}$, $v \in V$ y $av = 0$. Demostrar que $a = 0$ o $v = 0$.

Demostración.- Por propiedades de lógica ($p \Rightarrow q \vee r \equiv p \wedge \sim q \Rightarrow r$). Entonces será suficiente demostrar que,

$$av = 0 \wedge a \neq 0 \Rightarrow v = 0 \qquad a \in \mathbf{F}, v \in V.$$

Sea $av = 0$. Dado que $a \neq 0$ y $a \in \mathbf{F}$, podemos multiplicar ambos lados por $\dfrac{1}{a}$,

$$\frac{1}{a}(av) = 0\frac{1}{a}.$$

Luego por propiedades en $\mathbf{F}$ tenemos que

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) v = 0 \quad \Rightarrow \quad 1v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

3. Supóngase $v, w \in V$. Explique porque existe un único $x \in V$ tal que $v + 3x = w$.

Respuesta.- Supongamos $x = \dfrac{1}{3}(w - v)$. Dado $v + (-w) \in V$, entonces por la asociatividad de espacio vectorial, tenemos

$$\begin{aligned} v + 3\left[\frac{1}{3}(w - v)\right] &= v + \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)(w - v) \\ &= v + (w - v) \\ &= w \end{aligned}$$

Por lo que demostramos su existencia. Ahora, demostremos la unicidad. Sea $x, x' \in V$ tales que $v + 3x = w$ y $v + 3x' = w$. Por el inverso aditivo,

$$w + (-w) = 0 \quad \Rightarrow w - w = 0.$$

Reemplazando tenemos,

$$\begin{array}{rcl} v + 3x - (v + 3x') & = & 0 \\ (v - v) + 3x - 3x' & = & 0 \\ 0 + 3(x - x') & = & 0 \\ x - x' & = & 0 \end{array}$$

Veamos que esta última igualdad se cumplirá si y sólo si $x = x'$. Por lo tanto queda demostrado el ejercicio.

4. El conjunto vacío no es un espacio vectorial. El conjunto vacío deja de satisfacer solo uno de los requisitos enumerados en 1.19. ¿Cuál?.

Respuesta.- Por la identidad aditiva, existe un elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo v. Lo que significa que V no puede estar vacío. Por lo tanto, el conjunto vació no es un espacio vectorial.

5. Demuestre que en la definición de un espacio vectorial (1.19), la condición inversa aditiva se puede sustituir por la condición de que

$$0v = 0 \text{ para todo } v \in V.$$

Aquí, el 0 del lado izquierdo es el número 0, y el 0 en el lado derecho es la identidad aditiva de V. (La frase " una condición puede ser sustituida " en una definición significa que la colección de objetos que satisfacen la definición no cambia si la condición original se sustituye con la nueva condición).

Demostración.- El teorema 1.29 (Axler, Linear algebra, capítulo 1), nos dice que $0v = 0$ para todo $v \in V$, satisface la definición 1.19. Por lo tanto, debemos demostrar que esta propiedad junto con todas las demás que componen la Definición 1.19, excepto la condición inversa aditiva, implican la condición inversa aditiva. Es decir, debemos demostrar que para todo $v \in V$, existe $w \in V$ tal que $v + w = 0$.
Suponemos que v es algún vector arbitrario en V. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 0v \\ & = & (-1+1)v \\ & = & (-1)v + 1v \\ & = & (-1)v + v \end{array}$$

Pongamos $w = (-1)v$ para cualquier vector $v \in V$, donde vemos que existe un vector w que satisface la ecuación $v + w = 0$, demostrando nuestro resultado.

6. Sea ∞ y $-\infty$ dos objetos distintos, ninguno de los cuales está en $\mathbf{R}$. Definir una suma y una multiplicación escalar en $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ como se puede adivinar la notación. Específicamente, la suma y el producto de dos números reales son los habituales, y para $t \in \mathbf{R}$ definir

$$t\infty = \left\{ \begin{array}{rcl} -\infty & \text{si} & t < 0, \\ 0 & \text{si} & t = 0, \\ \infty & \text{si} & t > 0 \end{array} \right. , \qquad t(-\infty) = \left\{ \begin{array}{rcl} \infty & \text{si} & t < 0, \\ 0 & \text{si} & t = 0, \\ -\infty & \text{si} & t > 0 \end{array} \right.$$

$$t+\infty=\infty+t=\infty, \qquad t+(-\infty)=(-\infty)+t=-\infty, \qquad \infty+\infty=\infty,$$

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty, \qquad \infty+(-\infty)=0.$$

Es $\mathbf{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$?. Explique.

Respuesta.- Para que $\mathbf{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ se convierta en un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$, debe satisfacer todas las propiedades dadas en la definición 1.19. Ahora bien, este conjunto satisface algunas de estas propiedades. Por ejemplo, la adición es conmutativa en este conjunto. Sin embargo, no las satisface todas.
Una propiedad que no se cumple es la asociatividad de la suma. Por ejemplo, observe que $1,\infty$ y $-\infty$ son todos vectores en $\mathbf{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ y por tanto deberíamos tener lo siguiente:

$$1+[\infty+(-\infty)]=(1+\infty)+(-\infty)$$

Sin embargo, cuando evaluamos los lados izquierdo y derecho de esta ecuación usando las definiciones dadas en el enunciado del ejercicio, encontramos que

$$\begin{aligned} 1+[\infty+(-\infty)] &= (1+\infty)+(-\infty) \\ 1+0 &= \infty+(-\infty) \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

Pero esto es claramente falso. Así que nuestra suposición de que $1+[\infty+(-\infty)]=(1+\infty)+(-\infty)$ también es falsa y, por tanto, este conjunto no satisface la asociatividad aditiva.

1.C Subespacios

1.32 Definición **Subespacio.**
Un subconjunto U de V es llamado un subespacio de V si U es también un espacio vectorial (Usando la misma adición y multiplicación escalar como en V).

El siguiente resultado brinda la forma más fácil de verificar si un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio.

1.34 Teorema **Condiciones para un subespacio.**

Un subconjunto U de V es un subespacio de V si y sólo si U satisface las siguientes tres condiciones:

- **Identidad aditiva.**
$$0\in U;$$
- **Cerrado por adición.**
$$u,w\in U \text{ implica } u+w\in U;$$
- **Cerrado por multiplicación escalar.**
$$a\in F \text{ y } u\in U \text{ implica } au\in U;$$

Demostración.- Si U es un subespacio de V, entonces U satisface las tres condiciones de arriba por la definición de espacio vectorial.
A la inversa, suponga que U satisface las tres condiciones anteriores. La primera condición anterior asegura que la identidad aditiva de V está en U. La segunda condición de arriba asegura que la adición tenga sentido en U. La tercera condición asegura que la multiplicación escalar tenga sentido en U.
Si $u \in U$, entonces $-u$ [el cual es igual a $(-1)u$ por 1.31] es también en U por la tercera condición de arriba. Por lo tanto cada elemento de U tiene un inverso aditivo en U.
Las otras partes de la definición de un espacio vectorial,como la asociatividad y conmutatividad, se satisfacen automáticamente para U porque sostienen el espacio más grande de V. Así U es un espacio vectorial y por ende es un subespacio de V. ■

Suma de subespacios

La unión de subespacios rara vez es un subespacio (ver Ejercicio 12), por lo que solemos trabajar con sumas en lugar de uniones.

1.36 Definición **Suma de subespacios.**

Supóngase $U_1, \ldots, U_m$ son subconjuntos de V. La suma de $U_1, \ldots, U_m$, denotado por $U_1 + \ldots + U_m$, es el conjunto de todas los posibles sumas de elementos de $U_1, \ldots, U_m$. Más precisamente,

$$U_1 + \ldots + U_m = \{u_1 + \ldots + u_m \ : \ u_1 \in U_1, \ldots, u_m \in U_m\}$$

El siguiente resultado afirma que la suma de subespacios es un subespacio, y es de hecho el subespacio más pequeño que contiene todos los sumandos.

1.39 Teorema **La suma de subespacios es el subespacio más pequeño que lo contiene.**

Supóngase que $U_1, \ldots, U_m$ son subespacios de V. Entonces $U_1 + \ldots + U_m$ es el subespacio más pequeño de V que contiene $U_1, \ldots, U_m$.

Demostración.- Es fácil ver que $0 \in U_1 + \ldots + U_m$ y que $U_1 + \ldots + U_m$ es cerrado por la adición y la multiplicación escalar, es decir, por las tres condiciones dadas anteriormente podemos afirmar que $U_1 + \ldots + U_m$ es un subespacio de V.
Claramente $U_1, \ldots, U_m$ están todos contenidos en $U_1 + \ldots + U_m$ (para ver esto, considere las sumas $u_1 + \ldots + u_m$ donde todas menos una de las $u's$ son 0). A la vez, cada subespacio de V que contenga $U_1, \ldots, U_m$ contiene $U_1 + \ldots + U_m$ (porque los subespacios deben contener todas las sumas finitas de sus elementos). Por lo tanto $U_1 + \ldots + U_m$ es el subespacio más pequeño de V que contiene a $U_1, \ldots, U_m$.
Esta segunda parte, podríamos demostrarla también de la siguiente manera: Supongamos que $W \subseteq V$ es algún subespacio que contiene a $U_1, \ldots, U_n$, para todo $u_1, \ldots, u_n \in W$. Ya que W es un subespacio se sigue también $u_1 + \ldots + u_n \in W$ (porque W es cerrado por la suma finita). Por lo tanto

$$U_1 + \ldots + U_n = \{u_i + \ldots + u_n : u_1 \in U_i, \ldots, u_n \in U_n\} \subseteq W.$$

■

Las sumas de subespacios en la teoría de espacios vectoriales son análogas a las uniones de subconjuntos en la teoría de conjuntos. Dados dos subespacios de un espacio vectorial, el subespacio más pequeño que los contiene es su suma. Análogamente, dados dos subconjuntos de un conjunto, el subconjunto más pequeño que los contiene es su unión.

Sumas directas

1.40 Definición **Suma directa.**

Supóngase que $U_1, \ldots, U_m$ son subespacios de V.

- La suma $U_1 + \ldots + U_m$ es llamada una suma directa si cada elemento de $U_1 + \ldots + U_m$ se puede escribir de una sola manera como una suma $u_1 + \ldots + u_m$ donde cada u_j esta en U_j.
- Si $U_1 + \ldots + U_m$ es una suma directa, entonces $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ denota $U_1 + \ldots + U_m$ con la notación $\oplus$ sirviendo como una indicación de que se trata de una suma directa.

La definición de suma directa requiere que cada vector de la suma tenga una representación única como suma adecuada. El siguiente resultado muestra que al decidir si una suma de subespacios es una suma directa, sólo tenemos que considerar si 0 puede escribirse de forma única como una suma correspondiente.

1.44 Teorema **Condición para una suma directa.**

Supóngase que $U_1, \ldots, U_m$ son subespacios de V. Entonces $U_1 + \ldots + U_m$ es una suma directa si y sólo si la única manera de escribir 0 como una suma $u_1 + \ldots + u_m$, donde cada u_j está en U_j, es tomando cada u_j igual a 0.

Demostración.- Supóngase que $U_1 + \ldots + U_m$ es una suma directa. Entonces la definición de suma directa implica que la única manera de escribir 0 como una suma $u_1 + \ldots + u_m$, donde cada u_j está en U_j, es tomando cada u_j igual a 0. Para mostrar que $U_1 + \ldots + U_m$ es una suma directa, sea $u \in U_1 + \ldots + U_m$. Podemos escribir:

$$u = u_1 + \ldots + u_m$$

para algún $u_1 \in U_1, \ldots, u_m \in U_m$. Para mostrar que esta representación es única, supongamos que también tenemos

$$v = v_1 + \ldots + v_m$$

donde $v_1 \in U_1, \ldots, v_m \in U_m$. Restando estas dos ecuaciones, tenemos,

$$0 = (u_1 - v_1) + \ldots + (u_m - v_m).$$

Porque $u_1 - v_1 \in U_1, \ldots U_m$, la ecuación dada implica que cada $u_j - v_j$ es igual a 0. Por lo tanto $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_m = v_m$. ■

El siguiente resultado da una condición simple para probar qué pares de subespacios dan una suma directa.

1.45 Teorema **Suma directa de dos subespacios.**

Supóngase que U y W son subespacios de V. Entonces $U+W$ es una suma directa si y sólo si $U \cap W = \{0\}$.

Demostración.- Primero supóngase que $U+W$ es una suma directa. Si $v \in U \cap W$, entonces $0 = v + (-v)$, donde $v \in U$ y $-v \in W$. Por la única representación de 0 como la suma de un vector en U y un vector en W, tenemos $v = 0$. ■

1.C Ejercicios

1. Para cada de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{F}^3$, determinar si es un subespacio de $\mathbf{F}^3$:

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

Respuesta.- Por las condiciones de un subespacio 1.34 se tiene,

- Identidad aditiva.- Sea $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$. Entonces,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0.$$

- Cerrado por adición.- Sean

$$a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3) \in \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\right\}.$$

Es decir,

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 0.$$

Para probar que la adición se cumple, pongamos $a+b$ tal que $x1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$, como sigue

$$a + b = (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) + 3(a_3 + b_3) = 0$$

Si $(x_1, x_2, x_3) = [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)]$. Entonces,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Así, el conjunto dado es un subespacio de $\mathbf{F}^3$.

- Cerrado por multiplicación escalar.- Sea $k \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$k\,(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = k \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad k\,(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = 0.$$

Por lo tanto, el conjunto dado es un subespacio de $\mathbf{F}^3$.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$.

Respuesta.- Sea $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$. Entonces,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \neq 0.$$

Ya que no cumple la primera condición de 1.34, decimos que el conjunto dado no es un subespacio.

(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1x_2x_3 = 0\}$.

Respuesta.- Vemos que no se cumple la condición de adición. Observemos que $a = (1,1,0)$ y $b = (0,1,1)$, están en el conjunto dado. Es decir, se cumple la condición establecida:

$$1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Pero no así, para $a + b = (1,1,0) + (0,1,1) = (1,2,1)$, ya que

$$1 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0.$$

(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 = 5x_3\}$.

Respuesta.- Por las condiciones de un subespacio 1.34 se tiene,

- Identidad aditiva.- Sea $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$. Entonces,

$$x_1 = 5x_3 \quad \Rightarrow \quad 0 = 5 \cdot 0.$$

- Cerrado por adición.- Sean

$$a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3) \in \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 = 5x_3\right\}.$$

Pongamos $x_1 = (a_1 + b_1)$ y $x_3 = (a_3 + b_3)$. Por lo tanto,

$$a_1 + b_1 = 5(a_3 + b_3) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5x_3.$$

- Cerrado por multiplicación escalar.- Sean $k \in \mathbf{F}$ y $a \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 = 5x_3\}$. Entonces,

$$k\,(a_1) = k\,(5a_3) \quad \Rightarrow \quad ka_1 = 5\,(ka_3)\,.$$

Pongamos $x_1 = ka_1$ y $x_3 = ka_3$, por lo que

$$x_1 = 5x_3.$$

Así, el conjunto dado es un subespacio de $\mathbf{F}^3$.

2. Verificar todas las afirmaciones del ejemplo 1.35.

(a) Si $b \in \mathbf{F}$, entonces

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\right\}.$$

es un subespacio de $\mathbf{F}^4$ si y sólo si $b = 0$.

Demostración.- Supongamos que

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\right\}.$$

es un subespacio de $\mathbf{F}^4$. Entonces por la primera condición del teorema 1.34, sabemos que $(0,0,0,0)$ es un elemento del conjunto dado, por lo tanto

$$0 = 5 \cdot 0 + b$$

de donde,

$$b = 0.$$

Ahora supongamos que $b = 0$. Tendremos que verificar que se cumple las condiciones del teorema 1.34 para

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\right\}.$$

- Identidad aditiva.- Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$. Entonces,

$$x_3 = 5x_4 + 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 5 \cdot 0.$$

- Cerrado por adición.- Sean $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ y $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ do vectores en el conjunto dado. Sabemos que

$$\begin{array}{rcl} u_3 & = & 5u_4 \\ v_3 & = & 5v_4 \end{array}$$

  Entonces, sumando estas dos ecuaciones tenemos,

$$\begin{array}{rcl} u_3 + v_3 & = & 5u_4 + 5v_4 \\ u_3 + v_3 & = & 5(u_4 + v_4). \end{array}$$

  Que es exactamente la afirmación de que

$$u + v = (u_1, u_2, u_3, u_4) + (v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4).$$

  Es un elemento del conjunto. Por lo tanto, el conjunto es cerrado bajo la suma de vectores.

- Cerrado por la multiplicación escalar.- Sea $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ un vector en el conjunto dado y sea $k \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$u_3 = 5u_4$$

  Multiplicando por k tenemos,

$$\begin{array}{rcl} k(u_3) & = & k(5u_4) \\ (ku_3) & = & 5(ku_4). \end{array}$$

  Por lo tanto, vemos que se cumple la condición de multiplicación escalar.

(b) El conjunto de funciones continuas de valor real en el intervalo $[0, 1]$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{[0,1]}$.

Demostración.-

- Identidad aditiva.- El vector cero en $\mathbf{R}^{[0,1]}$ es una función que asigna cada número a cero, esto es

$$O(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

  Como es una función constante y todas las funciones constantes son continuas, es un elemento del conjunto de funciones continuas de valor real en $[0, 1]$.
- Cerrado por adición.- Por el cálculo elemental, sabemos que la suma de dos funciones continuas es también continua. Por lo tanto, el conjunto de funciones continuas de valor real en $[0, 1]$ es cerrado bajo adición de vectores.
- Cerrado por multiplicación escalar.- Por el cálculo elemental, sabemos que si f es una función continua, entonces kf es también una función continua para todos los números reales k. Por lo tanto, el conjunto de funciones continuas de valor real en $[0, 1]$ es cerrado bajo la multiplicación escalar.

Por lo tanto este conjunto es un subespacio de $\mathbf{R}^{[0,1]}$.

(c) El conjunto de funciones diferenciables de valor real en $\mathbf{R}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Demostración.-

- Identidad aditiva.- El vector cero en $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ es una función que asigna cada número a cero, esto es
$$O(x) = x \text{ para todo } x \in \mathbf{R}.$$
Como es una función constante y todas las funciones constantes son continuas, es un elemento del conjunto de funciones continuas de valor real en $\mathbf{R}$.
- Cerrado por adición.- Por el cálculo elemental, sabemos que la suma de dos funciones diferenciables es diferenciable. Por lo tanto, el conjunto de funciones diferenciables de valor real en $\mathbf{R}$ es cerrado bajo adición de vectores.
- Cerrado por multiplicación escalar.- Por cálculo elemental, sabemos que si f es una función diferenciable, entonces kf es también una función diferenciable para todos los números reales k. Por lo tanto, el conjunto de funciones diferenciables de valor real en $\mathbf{R}$ es cerrado bajo la multiplicación escalar.

(d) El conjunto de funciones diferenciables de valor real f en el intervalo $[0,3]$ tal que $f'(2) = b$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{(0,3)}$ si y sólo si $b = 0$.

Demostración.- Si $b = 0$, entonces consideremos el conjunto de todas las funciones diferenciables de valor real f en el intervalo $(0,3)$ tales que $f'(2) = b = 0$.
$O(x)$ es un elemento de este conjunto, ya que es diferenciable en este intervalo y su derivada es la misma, por lo tanto $O'(2) = 0$. Luego suponga que f y g son elementos de este conjunto. Ya sabemos que la suma de dos funciones diferenciables es de nuevo diferenciables, por lo que $f+g$ es una función diferenciable. Notemos que $(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 0 + 0 = 0$, así el conjunto es cerrado por adición de vectores.
Ahora, suponga que f es un elemento de este conjunto y k es algún número real. Sabemos que cualquier múltiplo escalar de una función diferenciable es diferenciable, por lo que kf es diferenciable. Es decir, $(kf)'(2) = k\,[f'(2)] = k \cdot 0 = 0$. Así el conjunto es cerrado por la multiplicación escalar. Así $b = 0$, implica que el conjunto de funciones diferenciables de valor real en el intervalo $(0,3)$ tal que $f'(2) = 0$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{(0,3)}$.
Por otro lado, suponga que el conjunto de funciones diferenciables de valor real f en el intervalo $(0,3)$ tal que $f'(2) = b$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{(0,3)}$. Por el teorema 1.34 sabemos que este conjunto debe contener el vector cero en $\mathbf{R}^{(0,3)}$. Esto es, debe contener la función $O(x)$. Pero sabemos que
$$O'(x) - O(x) = 0$$
para todos los valores de x en $(0,3)$. En particular $O'(2) = 0$. Por tanto, b debe ser igual a 0.

(e) El conjunto de todas las secuencias de número complejos con límite 0 es un subespacio de $\mathbf{C}^{\infty}$.

Demostración.-

- Identidad aditiva.- El vector cero en $\mathbf{C}^{\infty}$ es la secuencia $O_n = (0,0,\ldots,0)$. Por lo que
$$\lim_{n\to\infty} = 0.$$
Ya que O_n es un elemento del conjunto de todas las secuencias de número complejos con límite 0.

- Cerrado por adición.- Sean a_n y b_n dos elementos del conjunto dado. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} = 0.$$

Por el calculo elemental, sabemos que si $c_n \to L$ y $d_n \to M$ con $n \to \infty$, entonces $c_n + d_n \to L + M$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = 0 + 0 = 0$$

Así, $a_n + b_n$ es un elemento del conjunto dado. Por lo que es cerrado por la suma de vectores.

- Cerrado por multiplicación escalar.- Sean a_n un elemento del conjunto dado y $k \in \mathbf{C}$. Lo que significa que,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Por el calculo elemental, sabemos que si $c_n \to L$ con $n \to \infty$, entonces $kc_n \to kL$ para $n \to \infty$. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = k \cdot 0 = 0.$$

Así, ka_n es un elemento del conjunto dado. Por lo que es cerrado por la multiplicación escalar. Concluimos por el teorema 1.34, que este conjunto es un subespacio de $\mathbf{C}^\infty$.

3. Demuestre que el conjunto de funciones diferenciables de valores reales f en el intervalo $(-4,4)$ tal que $f'(-1) = 3f(2)$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{(-4,4)}$.

Demostración.- Sea A el conjunto de funciones diferenciables de valores reales f en $(-4,4)$ tal que $f'(-1) = 3f(2)$. Para demostrar la identidad aditiva, podemos escoger una función constante, $f = 0$ tal que

$$f'(-1) = 3f(2) \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

Por lo tanto, $0 \in A$. Para demostrar la cerradura por adición, sean $f, g \in A$. Entonces por definición

$$f'(-1) = 3f(2) \qquad \text{y} \qquad g'(-1) = 3g(2).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f'(-1) + g'(-1) &= 3\,[f(2) + g(2)] \\ (f+g)'(-1) &= 3(f+g)(2) \end{aligned}$$

Lo que implica que,

$$(f+g) \in A.$$

Por último demostremos la cerradura por multiplicación escalar. Sean $k \in \mathbf{F}$, tal que

$$kf'(-1) = k3f(2),$$

por lo que

$$(kf)'(-1) = 3(kf)(2).$$

Por lo tanto $(kf) \in A$. Así, A es un subespacio de $\mathbf{R}^{(-4,4)}$.

4. Suponga $b \in \mathbf{R}$. Demuestre que el conjunto de funciones continuas de valores reales f en el intervalo $[0,1]$ tal que $\int_0^1 f = b$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{[0,1]}$ si y sólo si $b = 0$.

Demostración.- Primero demostremos que si el conjunto es un subespacio, entonces $b = 0$. Notemos que este conjunto contiene la función cero el cual es definido por $f_0(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$. Porque es un subespacio y f_0 es la identidad aditiva. Entonces, debe ser:

$$b = \int_0^1 f_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Ahora, sea $b = 0$ probaremos que el conjunto dado es un subespacio. Como la primera parte del ejercicio, tenemos que $\int_0^1 f_0 = 0$, así f_0 esta en el conjunto descrito y por lo tanto queda demostrado la identidad aditiva. Luego, sean f y g funciones continuas de valor real en $[0, 1]$, tal que

$$\int_0^1 f = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^1 g = 0.$$

Entonces,

$$\int_0^1 (f + g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g = 0 + 0 = 0.$$

Así, $f + g$ se cumple para el conjunto dado y por lo tanto, queda demostrado la cerradura por adición. Por último, sea $k \in \mathbf{F}$, con f y g definida arriba, entonces

$$\int_0^1 kf = k \int_0^1 f = c \cdot 0 = 0.$$

Así, kf también está en el conjunto descrito y por lo tanto se cumple la cerradura por multiplicación escalar. Por lo que podemos concluir que el conjunto es un subespacio.

5. Es $\mathbf{R}^2$ un subespacio del espacio vectorial complejo $\mathbf{C}^2$.

Demostración.- Si $\mathbf{R}^2$ es subespacio de $\mathbf{C}$, entonces $\mathbf{R}^2$ es cerrado por la multiplicación escalar. Verifiquemos esta afirmación. Sea k un escalar en $\mathbf{C}$. Si $k = i$ y tenemos $(1, 0) \in \mathbf{R}$, por lo que $i(1, 0) = (i, 0)$, el cual no pertenece a $\mathbf{R}^2$. De hecho se puede tomar cualquier $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tal que $x_1 \neq 0$ o $x_2 \neq 0$, de donde podemos demostrar que $i(x_1, x_2) = (ix_1, ix_2)$ el cual no pertenece en $\mathbf{R}^2$. Concluimos que $\mathbf{R}^2$ no es un subespacio de $\mathbf{C}^2$.

6. (a) ¿Es $\left\{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 : a^3 = b^3\right\}$ un subespacio de $\mathbf{R}^3$?.

Respuesta.- Por las condiciones de un subespacio 1.34 se tiene,

- Identidad aditiva: Sea $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Entonces,

$$0^3 = 0^3 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

  Por lo tanto, se cumple la identidad aditiva.

- Cerradura por adición: Sea (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) elementos del conjunto dado. Entonces,

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2).$$

  Luego,

$$(a_1 + a_2)^3 = (b_1 + b_2)^3.$$

Sean $a = a_1 + b_1$ y $b = b_1 + b_2$. Por la asociatividad de la suma en $\mathbf{R}$,

$$a^3 = b^3.$$

Por lo tanto, se cumple la cerradura por adición.

- Cerradura por multiplicación escalar: Sea $k \in \mathbf{R}$ y $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbf{R}^3$. Entonces,

$$k(a_1, b_1, c_1) = (ka_1, kb_1, kc_1).$$

Luego,

$$(ka_1)^3 = (kb_1)^3.$$

Sean $ka_1 = a$ y kb_1. Por la asociatividad de la multiplicación en $\mathbf{R}$,

$$a^3 = b^3.$$

Por lo tanto, se cumple la cerradura por multiplicación escalar.
Así, el conjunto dado es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(b) ¿Es $\left\{(a, b, c) \in \mathbf{C}^3 : a^3 = b^3\right\}$ un subespacio de $\mathbf{C}^3$?.

Respuesta.- Sea W el conjunto definido. Entonces, W no es un subespacio de $\mathbf{C}^3$. Consideremos $x = (1, 1, 0) \in \mathbf{C}^3$ y $y\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1, 0\right) \in \mathbf{C}^3$. Por lo que claramente $x + y \notin W$ ya que,

$$\left[1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^3 = -1 \neq 2^3 = (1+1)^3.$$

7. Dé un ejemplo de un subconjunto no vacío U de $\mathbf{R}^2$ tal que U sea cerrado bajo adición y bajo la medida de inversos aditivos (es decir, $-u \in U$ siempre que $u \in U$), pero U no es un subespacio de $\mathbf{R}^2$.

Respuesta.- Denote que $U = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x, y \in \mathbf{Z}\right\}$ para U es un conjunto no vacío. Si $(x_1, y_1) \in A$ y $(x_2, y_2) \in A$. Entonces, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$, ya que $x_1 + x_2$ y $y_1 + y_2$ son enteros. Esto significa $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$. Es decir, U es cerrado por adición. Del mismo modo, ya que $(-x_1, -y_2) \in U$, resulta que U es cerrado bajo inverso aditivo. Sin embargo U no es cerrado bajo la multiplicación escalar, esto por el hecho de que $(1, 1) \in A$ mientras que $\frac{1}{2}(1, 1) \notin U$. Por lo tanto, U no es un subespacio de $\mathbf{R}^2$.

8. Dé un ejemplo de un subconjunto no vacío U de $\mathbf{R}^2$ tal que U es cerrado bajo la multiplicación escalar, pero U no es un subespacio de $\mathbf{R}^2$.

Respuesta.- Denota que $U = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\right\}$, luego U no está vacío. Si $(x, 0) \in U$, entonces para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$, tenemos

$$\lambda(x, 0) = (\lambda x, 0) \in U.$$

Similarmente, $\lambda(0, y) \in U$, por lo que U es cerrada bajo la multiplicación escalar. Sin embargo, $(1, 0), (0, 1) \in U$ mientras que $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin U$. Esto implica que U no es cerrado bajo la adición. Por lo tanto, no es subespacio de $\mathbf{R}^2$.

9. Una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es llamado **periódica** si existe un número positivo p tal que $f(x) = f(x+p)$ para todo $x \in \mathbf{R}$. ¿Es el conjunto de funciones periodicas $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?. Explique.

Respuesta.- No, el conjunto de las funciones periódicas $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ no es un espacio vectorial de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Por ejemplo, la función $h(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}x\right) + \cos x$ no es periódica aunque $f(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}x\right)$ y $g(x) = \cos x$ lo son. Suponga que existe un número positivo p tal que $h(x) = h(x+p)$ para todo $x \in \mathbf{R}$, entonces $1 = h(0) = h(p) = h(-p)$. Es equivalente a decir,

$$1 = \cos p + \operatorname{sen}\sqrt{2}p = \cos p - \operatorname{sen}\sqrt{2}p,$$

que implica $\operatorname{sen}\sqrt{2}p = 0$ y $\cos p = 1$. De este último podemos deducir que $p = 2k\pi$ para $k \in \mathbf{Z}$. Sin embargo, $\operatorname{sen}\sqrt{2}p = 0$ implica $\sqrt{2}p = l\pi$ para $l \in \mathbf{Z}$. De donde,

$$\sqrt{2} = \frac{l\pi}{2k\pi} = \frac{l}{2k} \in \mathbf{Q},$$

lo cual es imposible.

10. Suponga U_1 y U_2 son subespacios de V. Demostrar que la intersección $U_1 \cap U_2$ es un subespacio de V.

Demostración.- Por las condiciones de un subespacio 1.34 se tiene

- Identidad aditiva.- Por definición $0 \in U_1$ y $0 \in U_2$, entonces $0 \in U_1 \cap U_2$.
- Cerrado bajo adición.- Si $x \in U_1 \cap U_2$ e $y \in U_1 \cap U_2$, luego $x \in U_1$ e $y \in U_1$, de donde $x + y \in U_1$. Similarmente, $x + y \in U_2$. Por lo tanto $x + y \in U_1 \cap U_2$.
- Cerrado bajo adición.- Si $x \in U_1 \cap U_2$, entonces $x \in U_1$. Luego, para algún $\lambda \in \mathbf{F}$, se tiene $\lambda x \in U_1$. Similarmente $\lambda x \in U_2$. Por lo tanto $\lambda x \in U_1 \cap U_2$.

11. Demostrar que la intersección de toda colección de subespacios de V es un subespacio de V.

Demostración.- Sea $\{V_i : i \in I\}$ es una colección de subespcios de V. Queremos probar que

$$\bigcap_{i \in I} V_i$$

es un subespacio de V. Primero, para todo V_i subespacios de V, entonces $0 \in V_i$. Así,

$$V_i \in I \Rightarrow 0 \in \bigcap_{i \in I} V_i.$$

Luego, sea $x, y \in \cap_{i \in I} V_i$. Entonces $x, y \in V_i, \; \forall i \in I$. Para todo V_i son subespacios de V, donde $x + y \in V_i, \; \forall i \in I$. Por lo tanto

$$x + y \in \bigcap_{i \in I} V_i.$$

Por último, para $x \in \cap_{i \in I} V_i$ y un escalar α, entonces $x \in V_i, \; \forall i \in I$. Para todo V_i son subespacios de V. Se sigue que $\alpha x \in V_i$, así

$$\forall i \in I \quad \Rightarrow \quad \alpha x \in \bigcap_{i \in I} V_i.$$

Por lo tanto, $\cap_{i \in I} V_i$ es un subespacio de V.

12. Demostrar que la unión de dos subespacios de V es un subespacio de V si y sólo si uno de los subespacios está contenido en el otro.

Demostración.- Supongamos que $U_1 \not\subseteq U_2$ y $U_2 \not\subseteq U_1$. Elegimos un $v \in U_1$ tal que $v \in U_2$. Ya que v es un subespacio de U_1, entonces $(-v)$ también debe serlo, por definición. Del mismo modo $U_2 \not\subseteq U_1$. Luego, elegimos un $u \in U_2$ tal que $u \in U_1$. Como u está en el subespacio U_2, entonces (-u) también debe serlo, por defincíón.
Si $v + u \in U_1 \cup U_2$, entonces $v + u$ está en U_1 o U_2. Pero,

$$v + u \in U_1 \Rightarrow v + u + (-v) \in U_1 \Rightarrow u \in U_1.$$

De la misma manera,

$$v + u \in U_2 \Rightarrow v + u + (-u) \in U_2 \Rightarrow v \in U_2.$$

Lo que contradice el hecho de que cada elemento fue definido para no estar en estos subespacios.
Por otro lado, sea $U_1 \subseteq U_2$. Lo que implica $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_2$. Luego, ya que U_2 es un susbespacio, $U_1 \cap U_2$ también lo es.

13. Demostrar que la unión de tres subespacios de V es un subespacio de V si y sólo si uno de los subespacios contiene a los otros dos. [Este ejercicio es sorprendentemente más difícil que el anterior, posiblemente porque este ejercicio no es cierto si sustituimos F por un campo que contenga sólo dos elementos].

Demostración.- Sean U_1, U_2, U_3 subespacios de V y $E = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ un subespacio de V. Primero, suponga que ningún subespacio es un subconjunto de ninguno de los otros dos. Entonces, podemos elegir $w \in U_1$, con $w \notin U_2$ y $x \in U_2$ con $x \notin U_1$. Como $x, w \in E$, sabemos que $(w + x) \in E$ y $(w - x) \in E$, es un subespacio. Si $(w + x) \in U_1$, entonces $(w + x) - w = x \in U_1$, que es una contradicción. Si $(w + x) \in U_2$, entonces $(w + x) - x = w \in U_2$, también vemos que es un contradicción. Así, debemos tener $w + x \in U_3$.
Por otro lado, si $w - x \in U_1$, entonces $(w - x) - w = -x \in U_1$, lo que es imposible. Si $w - x \in U_2$, entonces $(w - x) + x = w \in U_2$, también es imposible. Así, $(w - x) \in U_3$. Pero $(w - x) + (w + x) = 2w \in U_3$, que implica $w \in I_3$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, este caso es imposible y al menos un subespacio debe ser un subconjunto de otro.
Si $U_1 \subseteq U_2$, entonces $U_1 \cup U_2 = U_2$ es un subespacio, esto por el ejercicio anterior y ya que $E = U_1 \cup U_2 \cup U_3 = u_2 \cup U_3$ es un subespacio, ya que U_2, o $U_3 \subseteq U_2$ (por el ejercicio anterior.) E el primer caso, U_1 y U_2 son un subconjunto de U_3 y en el segundo caso U_1 y U_3 son un subconjunto de U_2.
Por el contrario, suponga que $U_1 \cup U_2 \subseteq U_3$. Entonces $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = U_3$, y la unión es un subespacio.

14. Verifique la afirmación del ejemplo 1.38.

Demostración.- Está claro que U y W son subespacios de de $\mathbf{F}^4$. Luego supongamos que

$$(x_1, x_1, y_1, y_i) \in U \text{ y } (x_2, x_2, x_2, y_2) \in W.$$

Entonces,

$$(x_1, x_1, y_1, y_1) + (x_2, x_2, x_2, y_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, y_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \{(x, x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{F}\},$$

ya que $U + W \subset \{(x, x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{F}^4\}$. Luego, para cualquier $x, y, z \in \mathbf{F}$, tenemos $(0, 0, y - x, y - x) \in U$ y $(x, x, x, z + x - y) \in W$. Sin embargo,

$$(x, x, y, z) = (0, 0, y - x, y - x) + (x, x, x, z + x - y) \in U + W,$$

por lo tanto $\{x, x, y, z : x, y, z \in \mathbf{F}^4\} \subset U + W$. Combinando esto con el argumento anterior, se sigue que $U + W = \{(x, x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{F}\}$.

15. Supongamos que U es un subespacio de V. ¿Qué es $U + U$?.

Respuesta.- Sea,

$$U + U = \{u + v : u, v \in U\}.$$

Esto significa que $U \subset U + U$, ya que $u \in U$ y u es igual $u + 0$. Luego, podríamos expresar u como una suma de 2 elementos de U. Por otro lado, $U + U \subset U$ ya que la suma de los dos elementos de U podrían ser un elemento de U. Por lo tanto, $U + U = U$.

16. ¿La operación de adición en los subespacios de V es conmutativa? En otras palabras, si U y W son subespacios de V, ¿es $U + W = W + U$?.

Respuesta.- Sea $x \in U$ e $y \in W$. Ya que la adición en V es conmutativa, tenemos $x + y = y + e \in W + U$. Esto implica que $U + W \subset W + U$. Similarmente tenemos que $W + U \subset U + W$. Por lo tanto $U + W = W + U$.

17. ¿La operación de adición en los subespacios de Ves asociativa? En otras palabras, si U_1, U_2, U_3 son subespacios de V, ¿eso

$$(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)?.$$

Demostración.- Sea $v \in (U_1 + U : 2) + U_3$, entonces existe $U_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ y $u_3 \in U_3$ tal que:

$$v = (v_1 + v_2) + v_3.$$

Ya que, es asociativa a la suma en V, tenemos:

$$v = u_1 + (u_2 + u_3) \in U_1 + (U_2 + U_3).$$

Así, $(U_1 + U_2) + U_3 \subset U_1 + (U_2 + U_3)$. Del mismo modo, podemos probar que $U_1 + (U_2 + U_3) \subset (U_1 + U_2) + U_3$. Sea $v \in U_1 + (U_2 + U_3)$. Después, existe $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ y $u_3 \in U_3$ tal que:

$$v = u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3 \in (U_1 + U_2) + U_3,$$

ya que, $U_1 + (U_2 + U_3) \subset (U_1 + U_2) + U_3$. Por lo que concluimos que

$$U_1 + (U_2 + U_3) = (U_1 + U_2) + U_3.$$

18. ¿Tiene la operación de adición en los subespacios de V una identidad aditiva? ¿Qué subespacios tienen inversos aditivos?.

Respuesta.- Si. El subespacio que buscamos es $\{0\}$. Si U es un subespacio de V, entonces

$$U + \{0\} = \{0\} + U = U.$$

Por otro lado, si U y W son subespacios de V, tal que $U + W = \{0\}$, entonces se sigue que, ambos, U y W están contenidos en $U + W$, esto sólo es posible si $U = W = \{0\}$.

19. Demuestre o dé un contraejemplo: Si U_1, U_2, W son subespacios de V tales que

$$U_1 + W = U_2 + W,$$

entonces $U_1 = U_2$.

Demostración.- Daremos un contraejemplo. Sean

$$\begin{array}{rcl} V = U_1 & = & \left\{(a,b) \in \mathbf{R}^2 : a,b \in \mathbf{R}\right\} \\ U_2 & = & \left\{(a,0) \in \mathbf{R}^2 : a \in \mathbf{R}\right\} \\ W & = & \left\{(0,b) \in \mathbf{R}^2 : b \in \mathbf{R}\right\}. \end{array}$$

Entonces, es fácil ver que $U_1 + W = U_2 + W$, pero $U_1 \neq U_2$.

20. Suponga

$$U = \left\{(x,x,y,y) \in \mathbf{F}^4 : x,y \in \mathbf{F}\right\}.$$

Encuentre un subespacio W de $\mathbf{F}^4$ tal que $\mathbf{F}^4 = U \oplus W$.

Respuesta.- Tome $W = \left\{(0,z,0,w) \in \mathbf{R}^4 : z,w \in \mathbf{F}\right\}$. Para cualquier $(x,y,z,w) \in \mathbf{F}^4$, de donde tenemos

$$(x,y,z,w) = (x,x,z,z) + (0,y-x,0,w-z) \in U + W.$$

De donde, obtenemos $\mathbf{F}^4 = U + W$. Además, si $(x,y,z,w) \in U \cap W$, entonces debemos tener $x = y$ y $z = w$, ya que $(x,y,x,w) \in U$. Del mismo modo, puesto que $(x,y,z,w) \in W$, tenemos $x = 0$ y $z = 0$. Por lo tanto, $x = y = 0$ y $z = w = 0$, que implica $(x,t,z,w) = (0,0,0,0)$. Resulta por 1.45 que $U \cap W = \{0\}$. Así, $F = U \oplus W$.

21. Suponga

$$U = \left\{(x,y,x+y,x-y,2x) \in \mathbf{F}^5 : x,y \in \mathbf{F}\right\}.$$

Encuentre un subespacio W de $\mathbf{F}^5$ tal que $\mathbf{F}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.- Sea $W = \left\{(0,0,z,w,s) \in \mathbf{F}^5 : x,y \in \mathbf{F}\right\}$. Si $(x,y,z,w,s) \in U \cap W$, ya que $(x,y,z,w,s) \in W$ entonces $x = y = 0$. Además, tenemos $z = x+y, w = x-y, s?2x$, esto porque $(x,t,z,w,s) \in U$. Por lo tanto $z = w = s = 0$, por lo que $U \cap W = \{0\}$. Del mismo modo, para cualquier $(x,y,z,w,s) \in \mathbf{F}^5$. Puesto que $(x,y,x+y,2x) \in U$ y $(0,0,z-x-y,w-x+y,s-2x) \in W$, se tiene

$$(x,y,z,w,s) = (x,y,x+y,x-y,2x) + (0,0,z-x-y,w-x+y,s-2x) \in U + W.$$

Por lo tanto, $\mathbf{F}^5 = U + W$. Ya que, $U \cap W = 0$ de 1.45 se sigue que $\mathbf{F}^5 = U \oplus W$.

22. Suponga

$$U = \{(x,y,x+y,x-y,2x)\} \in \mathbf{F}^5 : x,y \in \mathbf{F}.$$

Encuentre tres subespacios W_1, W_2, W_3 de $\mathbf{F}^5$, ninguno de los cuales es igual a $\{0\}$, tal que $\mathbf{F}^5 = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

Respuesta.- Sean $W_1 = \{(0,0,0,z,0) : x,y \in \mathbf{F}\}$, $W_2 = \left\{(0,0,0,z,0) \in \mathbf{F}^5 : x,y \in \mathbf{F}\right\}$ y $W_3 = \left\{(0,0,0,0,z) \in \mathbf{F}^5 : x,y\right.$
Por el mismo argumento del problema anterior (21), se tiene

$$\mathbf{F}^5 = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3.$$

23. Demostrar o dar un contraejemplo: Si U_1, U_2, W son subespacios de V tales que

$$V = U_1 \oplus W \quad \text{u} \quad V = U_2 \oplus W,$$

Entonces, $U_1 = U_2$.

Demostración.- Daremos un contraejemplo. Sean, $V = \mathbf{R}^2$, $U_1 = \left\{(x,0) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\right\}$, $U_2 = \left\{(0,y) \in \mathbf{R}^2 : y \in \mathbf{R}\right\}$ y $W = \left\{(z,z) \in \mathbf{R}^2 : z \in \mathbf{R}\right\}$. Por el mismo argumento del problema 21, se tiene

$$V = U_1 \oplus W \quad \text{y} \quad V = U_2 \oplus W,$$

sin embargo, $U_1 \neq U_2$.

24. Una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es llamado par si

$$f(-x) = f(x)$$

para todo $x \in \mathbf{R}$. Sea U_e el conjunto de funciones pares de valor real sobre $\mathbf{R}$ y sea U_o el conjunto de funciones impares de valor real sobre $\mathbf{R}$. Demuestre que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = U_e \oplus U_o$.

Demostración.- Para cada función de variable real f sabemos que $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Sea $g(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ y $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, así

$$f(x) = f(x) - h(x)$$

. Probaremos que g es par y h es impar.
Para demostrar que g es par, tenemos

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f\left[-(-x)\right]}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x).$$

Luego, para demostrar que h es impar, tenemos

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f\left[-(-x)\right]}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x).$$

Ahora, debemos demostrar que $U_e \cap U_o = \{0\}$. Sea $z \in U_e \cap U_o$, de donde $z(-x) = z(x)$. Después, si $z \in U_o$ entonces $z(-x) = -z(x)$. Concluimos que

$$z(x) = -z(x) \quad \Rightarrow \quad 2z(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad z(x) = 0$$

y que

$$U_e \cap U_o = \{0\}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = U_e \oplus U_o$.

2

Espacios vectoriales de dimensión finita

2.D Span e independencia lineal

2.2 Notación **Lista of vectores.**

Por lo general, escribiremos listas de vectores sin paréntesis alrededor.

Combinaciones lineales y generadores

2.3 Definición **Combinación lineal.**

Una **combinación lineal** de una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es un vector de la forma

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m,$$

donde $a_1, \ldots a_m \in \mathbf{F}$.

2.5 Definición **Span o generador.**

El conjunto de todas las combinaciones lineales de una lista de vectores $v_1, \ldots, v_m$ en V se denomina **generador** de $v_1, \ldots, v_m$, denotado por $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$. En otras palabras,

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m : a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}\}.$$

El span de la lista vacía $()$ es definida por $\{0\}$.

2.7 Teorema **Span es el subespacio más pequeño que lo contiene.** El **span** de una lista de vectores en V es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los vectores de la lista.

Demostración.- Suponga que $v_1, \ldots, v_m$ es una lista de vectores en V. Primero demostraremos que $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es un subespacio de V. El 0 está en $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$, porque

$$0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m.$$

También, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es cerrado bajo la suma, ya que

$$(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) + (c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = (a_1 + c_1)v_1 + \cdots + (a_m + c_m)v_m.$$

Además, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, dado que

$$\lambda(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = \lambda a_1v_1 + \cdots + \lambda a_mv_m.$$

Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es un subespacio de V. Esto por 1.34.

Cada v_j es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$ (para mostrar esto, establezca $a_j = 1$ y que las otras a's en la definición de combinación lineal sean iguales a 0). Así, el $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ contiene a cada v_j. Por otra parte, debido a que los subespacios están cerrados bajo la multiplicación de escalares y la suma, cada subespacio de V que contiene a cada v_j contiene a $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Por lo tanto, $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los demás vectores $v_1, \ldots, v_m$. ■

2.8 Definición **Spans.**

Si $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ es igual a V, decimos que $v_1, \ldots, v_m$ genera V.

2.10 Definición **Espacio vectorial de dimensión finita.**

Un espacio vectorial se llama finito-dimensional si alguna lista de vectores en él genera el espacio.

2.11 Definición **Polinomio, $\mathcal{P}$ (F)**

- Una función $p : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ es llamado polinomio con coeficientes en **F** si existe $a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_mz^m$$

  para todo $z \in \mathbf{F}$.
- $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en **F**.

Con las operaciones usuales de adición y multiplicación escalar, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un espacio vectorial sobre **F**. En otras palabras, $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es un subespacio de $\mathbf{F}^{\mathbf{F}}$, el espacio vectorial de funciones de **F** en **F**.

Los coeficientes de un polinomio están determinados únicamente por el polinomio. Así, la siguiente definición define de manera única el grado de un polinomio.

2.12 Definición **Grado de un polinomio,** $deg\ p$**.**

- Un polinomio $p \in \mathcal{P}(F)$ se dice que tiene **grado** m si existen escalares $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ con $a_m \neq 0$ tal que
$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$
para todo $z \in \mathbf{F}$. Si p tiene grado m, escribimos $deg\ p = m$.
- El polinomio que es identicamente 0 se dice que tiene **grado** $-\infty$.

2.13 Definición $\mathcal{P}_m$ **(F)**

Para m un entero no negativo, $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficiente en $\mathbf{F}$ y grado no mayor a m.

Verifiquemos el siguiente ejemplo, tenga en cuenta que $\mathcal{P}_m(\mathbf{F}) = \text{span}\,(1, z, \ldots, z^m)$; aquí estamos abusando ligeramente de la notación al permitir que z^k denote una función.

2.15 Definición **Espacio vectorial de dimensión infinita.**

Un espacio vectorial se llama **infinitamente-dimensional** si no es de dimensión finita.

2.16 Ejemplo Demuestre que $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es infinitamente-dimensional.

Demostración.- Considere cualquier lista de elementos de $\mathcal{P}(\mathbf{F})$. Sea m el grado más alto de los polinomios en esta lista. Entonces, cada polinomio en el generador (span) de esta lista tiene grado máximo m. Por lo tanto, z^{m+1} no está en el span de nuestra lista. Así, ninguna lista genera $\mathcal{P}(\mathbf{F})$. Concluimos que $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ es de dimensión infinita. ■

Independencia lineal

Suponga $v_1, \ldots, v_m \in V$ y $v \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Por la definición de span, existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m.$$

Considere la cuestión de si la elección de escalares en la ecuación anterior es única. Sea $c_1, \ldots, c_m$ otro conjunto de escalares tal que
$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m.$$
Sustrayendo estas últimas ecuaciones, se tiene

$$0 = (a_1 - c_1)v_1 + \cdots + (a_m - c_m)v_m.$$

Así, tenemos que escribir 0 como una combinación lineal de $(v_1, \ldots, v_m)$. Si la única forma de hacer esto es la forma obvia (usando 0 para todos los escalares), entonces cada $a_j - c_j$ es igual a 0, lo que significa que cada a_j es igual a c_j (y por lo tanto la elección de los escalares fue realmente única). Esta situación es tan importante que le damos un nombre especial, independencia lineal, que ahora definiremos.

2.17 Definición **Linealmente independiente.**

- Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V se llama linealmente independiente si la única posibilidad de que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$ sea igual a 0 es $a_1 = \cdots = a_m = 0$.
- La lista vacía $()$ también se declara linealmente independiente.

El razonamiento anterior muestra que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente si y sólo si cada vector en el $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$ tiene sólo una representación lineal en forma de combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$.

2.19 Definición **Linealmente dependiente.**

- Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V se llama linealmente dependiente si no es linealmente independiente.
- En otras palabras, una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es linealmente dependiente si existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$.

2.21 Lema Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es una lista linealmente dependiente en V. Entonces, existen $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que se cumple lo siguente:

(a) $v_j \in \text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$;

(b) Si el j-ésimo término se elimina de $v_1, \ldots, v_m$, el generador de la lista restante es igual a $\text{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Demostración.- Ya que la lista $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente dependiente, existe números $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que

$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0.$$

Sea j el elemento más grande de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $a_j \neq 0$. Entonces,

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \cdots - \frac{a_{j-1}}{a_j}v_{j-1} \qquad (1).$$

Lo que prueba (a).
Para probar (b), suponga $u \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Entonces, existe números $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m.$$

En la ecuación de arriba, podemos reemplazar v_j con el lado derecho de (1), lo que muestra que u está en el span de la lista obtenida al eliminar el j-ésimo término de $v_1, \ldots, v_m$. Así (b) se cumple. ■

Eligir $j = 1$ en el lema de dependencia lineal anterior, significa que $v_1 = 0$, porque si $j = 1$ entonces la condición (a) anterior se interpreta como que $v_1 \in \text{span}()$. Recuerde que $\text{span}() = \{0\}$. Tenga en cuenta también que la demostración del inciso (b) debe modificarse de manera obvia si $v_i = 0$ y $j = 1$.

Ahora llegamos a un resultado importante. Dice que ninguna lista linealmente independiente en V es más extensa que una lista generadora en V.

2.23 Teorema **La longitud de una lista linealmente independiente es $\leq$ a la longitud de la lista generadora.**

En un espacio vectorial de dimensión finita, la longitud de cada lista linealmente independiente de vectores es menor o igual que la longitud de cada lista generadora de vectores (longitud=n de vectores).

Demostración.- Suponga $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente en $\mathbf{V}$. Suponga también que $w_1, \ldots, w_n$ generan V. Necesitamos probar que $m \leq n$. Lo hacemos a través del proceso de pasos que se describe a continuación; tenga en cuenta que en cada paso agregamos una de las $u's$ y eliminamos una de las $w's$.

Paso 1. Sea B la lista $w_1, \ldots, w_n$, que genera V. Por lo tanto, añadir cualquier vector en V a esta lista produce una lista linealmente dependiente (porque el nuevo vector añadido se puede escribir como una combinación lineal de los otros vectores). En particular, la lista

$$u_1, w_1, \ldots, w_n$$

es linealmente dependiente. Así, por el lema (2.21), podemos eliminar un de las w para que la nueva lista B (de longitud n) que consta de u_1 y las $w's$ restantes generen V.

Paso j. La lista B (de longitud n) del paso $j-1$ genera V. Así, añadir cualquier vector a esta lista produce una lista linealmente dependiente. En particular, la lista de longitud $(n+1)$ obtenida al unir u_j a B, colocándola justo después de $u_1, \ldots, u_{j-1}$, es linealmente dependiente. Por el lema de dependencia lineal (2.21), uno de los vectores de esta lista está en el generador de los anteriores, y ya que $u_1, \ldots, u_j$ es linealmente independientes, este vector es uno de los $w's$, no uno de los $u's$. Podemos eliminar esa w para la nueva lista B (de longitud n) que consta de $u_1, \ldots, u_j$ y las $w's$ restantes generan V.

Después del paso m, hemos agregado todas las u y el proceso se detiene. En cada paso, a medida que agregamos un u a B, el lema de dependencia lineal implica que hay algo de w que eliminar. Por lo tanto, hay al menos tantas w como u. ■

Aclaremos esto con dos ejemplos.

2.24 Ejemplo Demuestre que la lista $(1,2,3),(4,5,8),(9,6,7),(-3,2,8)$ no es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$.

Demostración.- La lista $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ genera $\mathbf{R}^3$. Por lo tanto, ninguna lista de longitud superior a 3 es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$. ■

2.25 Ejemplo Demostrar que la lista $(1,2,3,-5),(4,5,8,3),(9,6,7,-1)$ no genera $\mathbf{R}^4$.

Demostración.- La lista $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ es linealmente independiente en $\mathbf{R}^4$. Por lo tanto, ninguna lista de longitud inferior a 4 genera $\mathbf{R}^4$. ■

2.26 Teorema **Subespacio de dimensión finita.**

Todo subespacio de un vector de dimensión finita es de dimensión finita.

Demostración.- Suponga que V es de dimensión finita y U es un subespacio de V. Necesitamos demostrar que U es de dimensión finita. Hacemos esto a través de la siguiente construcción de pasos.

Paso 1. Si $u = \{0\}$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \{0\}$, entonces elegimos un vector no nulo $v_1 \in U$

Paso 2. Si $U = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, entonces U es de dimensión finita por lo que hemos terminado. Si $U \neq \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, entonces elegimos un vector $v_j \in U$ tal que

$$v_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1}).$$

Después de cada paso, mientras continúa el proceso, hemos construido una lista de vectores tal que ningún vector en esta lista está en el generador de los vectores anteriores. Así, después de cada paso hemos construido una lista linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Esta lista linealmente independiente no puede ser más grande que cualquier lista de expansión de V (por 2,23). Por lo tanto, el proceso eventualmente termina, lo que significa que U es de dimensión finita. ■

2.A Ejercicios

1. Suponga v_1, v_2, v_3, v_4 se extiende por V. Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

también se extiende por V.

Demostración.- Sea $v \in V$, entonces existe a_1, a_2, a_3, a_4 tal que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4.$$

Que implica,

$$\begin{array}{rcl} v & = & a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 - a_1v_2 + a_1v_2 - a_1v_3 + a_1v_3 - a_2v_3 + a_2v_3 - a_1v_4 + a_1v_4 \\ & - & a_2v_4 + a_2v_4 - a_3v_4 + a_3v_4 \end{array}$$

De donde,

$$v = a_1(v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(v_3 - v_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)v_4.$$

Por lo tanto, cualquier vector en V puede ser expresado por una combinación lineal de

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4.$$

Así, esta lista se extiende por V.

2. Verifique las afirmaciones del Ejemplo 2.18.

(a) Una lista v de un vector $v \in V$ es linealmente independiente si y sólo si $v \neq 0$.

Demostración.- Demostremos que si v es linealmente independiente, entonces $v \neq 0$. Supongamos que $v = 0$. Sea un escalar $a \neq 0$. De donde, $av = 0$ incluso cuando $a \neq 0$. Esto contradice la definición de independencia lineal. Por lo tanto, v debe ser linealmente dependiente. Esto es, $v = 0$ implica que v es un vector linealmente dependiente. Por lo que, si v es linealmente independiente, entonces v es un vector distinto de cero.
Por otro lado, debemos demostrar que $v \neq 0$ implica que v es linealmente independiente. Sea un escalar a tal que $av = 0$. Si $a \neq 0$, entonces av no puede ser 0. Por eso a debe ser 0. Por lo tanto, $v \neq 0$ y $av = 0$ implica que $a = 0$. Así, v es linealmente independiente.

(b) Una lista de dos vectores en V es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

Demostración.- El enunciado siguiente es equivalente. Dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar de otro. Supongamos que v_1, v_2 son dos vectores linealmente dependientes. Por lo que, existe escalares a_1, a_2 tal que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

y no ambos escalares a_1, a_2 son cero. Sea $a_1 \neq 0$, entonces la ecuación se podría reescribir como

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$$

el cual prueba que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Por otro lado, si $a_2 \neq 0$, entonces $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$ de aquí podemos afirmar que v_2 es un múltiplo escalar de v_1.
Ahora supongamos que que uno de los v_1 o v_2 es un múltiplo escalar del otro. Podemos decir, sin perdida de generalidad, que v_1 es un múltiplo escalar de v_2. Esto es, $v_1 = cv_2$ para algún escalar c. Por lo tanto, la ecuación $v_1 - cv_2 = 0$ se cumple, ya que el multiplicador de v_1 es distintos de cero. Esto es precisamente lo que requerimos para la definición de dependencia lineal. Así, v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

(c) $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ es linealmente independiente en $\mathbf{F}^4$.

Demostración.- Utilizaremos la definición de independencia lineal. Sean a, b, c escalares en $\mathbf{F}$ tal que

$$a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) = \mathbf{0} = (0,0,0,0)$$

Entonces,

$$(a,b,c,0) = (0,0,0,0)$$

Lo que implica,

$$a, b, c = 0.$$

Esto demuestra que los tres vectores son linealmente independientes.

(d) La lista $1, z, \ldots, z^m$ es linealmente independiente en $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ para cada entero no negativo m.

Demostración.- Demostremos por contradicción. Supongamos que $1, z, \ldots, z^m$ es linealmente dependiente. Por lo que, existe un escalar $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tal que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m = 0.$$

Sea k el indice más grande tal que $a_k \neq 0$. Esto significa que los escalares desde a_{k+1} hasta a_m son cero. Entonces, se deduce que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k = 0.$$

Reescribiendo se tiene

$$z_k = -\frac{a_0}{a_k} - \frac{a_1}{a_k} z - \cdots - \frac{a_{k-1}}{a_k} z^{k-1}.$$

Aquí, expresamos z^k como un polinomio de grado $k - 1$ el cual es absurdo. Por lo que $1, z, z^2, \ldots, z^m$ es un conjunto linealmente independiente.

3. Encuentre un número t tal que
$$(3,1,4),(2,-3,5),(5,9,t)$$
no es linealmente independiente en $\mathbf{R}^3$.

Respuesta.- Sea,
$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)+c(5,9,t)=0.$$
Si $c=0$. Entonces,
$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)=0.$$
Lo que implica
$$\begin{array}{rcl} 3a+2b &=& 0\\ a-3b &=& 0\\ 4a+5b &=& 0 \end{array}$$
De donde, resolviendo para a y b se tiene
$$a=0 \quad \text{y} \quad b=0.$$
Pero, no queremos que a,b,c sean cero. Así que debemos forzar que $c\neq 0$, como sigue:
$$a(3,1,4)+b(2,-3,5)+c(5,9,t)=0 \quad \Rightarrow \quad (5,9,t)=-\frac{a}{c}(3,1,4)-\frac{b}{c}(2,-3,5).$$
Es decir, estamos expresando $(5,9,t)$ como una combinación lineal de los vectores restantes. Así, sea $-\dfrac{a}{c}=x$, $-\dfrac{b}{c}=y$ por lo que,
$$(5,9,t)=x(3,1,4)+y(2,-3,5).$$
Así, tenemos que
$$\begin{array}{rcl} 3x+2y &=& 5\\ x-3y &=& 9\\ 4x+5y &=& t \end{array}$$
Resolviendo para x e y se tiene
$$x=3 \quad \text{y} \quad y=-2.$$
Por lo tanto,
$$t=2.$$

4. Verifique la afirmación en el segundo punto del Ejemplo 2.20. Es decir, la lista $(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,c)$ es linealmente dependientes en $\mathbf{F}^3$ si y sólo si $c=8$, como debes verificar.

Respuesta.- Sea los escalares a,b,c no todos cero tal que
$$r(2,3,1)+s(1,-1,2)+t(7,3,c)=(0,0,0)$$
De donde, podemos escribir como ecuaciones lineales
$$\begin{array}{rcl} 2r+s+7t &=& 0\\ 3r-s+3t &=& 0\\ r+2s+ct &=& 0 \end{array}$$
De la ecuación 1 y 2 se tiene
$$5r+10t=0 \quad \Rightarrow \quad r=-2t.$$
Luego sustrayendo la ecuación 1 y 3,
$$2r+(c-4)t=0.$$

Así, tenemos que

$$2(-2t) + (c-4)t = 0 \quad \Rightarrow \quad (c-8)t = 0$$

Por lo que,

$$r = 0 \quad \text{o} \quad c - 8 = 0.$$

Si $t = 0$. Entonces, $r = -2t = 0$, y $s = 0$. Contradiciendo el hecho de que no todos los escalares son cero. Por lo tanto, los tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si $c = 8$.

5. (a) Demuestre que si pensamos en **C** como un espacio vectorial sobre **R**, entonces la lista $(1+i, 1-i)$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a, b \in \mathbf{R}$, tal que

$$a(1+i) + b(1-i) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a+b) + (a-b)i = 0.$$

Entonces,

$$a + b = 0 \quad \text{y} \quad a - b = 0.$$

Igualando estas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} a + b = a - b \quad &\Rightarrow \quad 2b = 0 \\ &\Rightarrow \quad b = 0. \end{aligned}$$

Reemplazando en $a + b = 0$,

$$a = 0.$$

Por lo tanto, $(1+i, 1-i)$ es linealmente independiente sobre **R**.

(b) Demuestre que si pensamos en **C** como un espacio vectorial sobre **C**, entonces la lista $(1+i, 1-i)$ es linealmente dependiente.

Demostración.- Sean los escalares $i, 1 \in \mathbf{C}$, tal que

$$i(1+i) + 1(1-i) = i + i^2 + 1 - i = 0 \quad \Rightarrow \quad (i-1) + (1-i) = (i-1) - (i-1) = 0.$$

Donde concluimos que $(1+i, 1-i)$ es linealmente dependiente sobre **C**.

6. Supongamos que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente en V. Demostrar que la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

es también linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a, b, c, d \in F$ tal que

$$a(v_1 - v_2) + b(v_2 - v_3) + c(v_3 - v_4) + d(v_4) = 0.$$

De donde,

$$av_1 - av_2 + bv_2 - bv_3 + cv_3 - cv_4 + dv_4 = 0.$$

Por lo que,

$$av_1 + (b-a)v_2 + (c-b)v_3 + (d-c)v_4 = 0$$

Ya que v_1, v_2, v_3, v_4 es linealmente independiente, entonces

$$\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b-a & = & 0 \\ c-b & = & 0 \\ d-c & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo para a, b, c, d se tiene

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

Esto implica que

$$0(v_1 - v_2) + 0(v_2 - v_3) + 0(v_3 - v_4) + 0(v_4) = 0.$$

Por lo tanto, la lista

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

es linealmente independiente.

7. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V, Entonces

$$5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \ldots, v_m$$

es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i\mathbf{F}$ tal que

$$a_1(5v_1 - 4v_2) + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

De donde,

$$5a_1v_1 + (a_2 - 4a_1)v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

Sabemos que la independencia lineal obliga a todos los escalares de v_i a ser cero. En particular , $5a_1 = 0$ entonces $a_1 = 0$ y $a_2 - 4a_1 = 0$, implica $a_2 = 0$. Por lo tanto,

$$0 \cdot v_1 + (0 - 0)v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_mv_m = 0$$

Dado que todos a_i son cero, entonces $5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \ldots, v_m$ es linealmente independiente.

8. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V y $\gamma \in \mathbf{F}$ con $\gamma \neq 0$, Entonces $\gamma v_1, \gamma v_2, \ldots, \gamma v_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Por definición de independencia lineal. Sean los escalares $a_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \ldots + a_m\gamma v_m = 0.$$

De donde,

$$\gamma\left(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m\right) = 0.$$

Lo que,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = 0.$$

Ya que, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente. Entonces, todos los $a_i's$ deben ser cero. Por lo tanto, $a_1\gamma v_1 + a_2\gamma v_2 + \ldots + a_m\gamma v_m = 0$. es linealmente independiente.

9. Demostrar o dar un contraejemplo: Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son listas linealmente independientes de vectores en V, entonces $v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sean los escalares $a_i, b_i \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1v_1 + a_1v_2 + \ldots + a_mv_m = 0 \quad \text{y} \quad b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mv_m = 0.$$

Entonces,

$$a_1v_1 + a_1v_2 + \ldots + a_mv_m + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mv_m = 0.$$

De donde,

$$(a_1 - b_1)(v_1 + w_1) + (a_2 - b_2)(v_2 + w_2) + \ldots + (a_m - b_m)(v_m + w_m) = 0.$$

Supongamos $c_i = a_i + b_i \in F$. Luego,

$$c_1(v_1 + w_1) + c_2(v_2 + w_2) + \ldots + c_m(v_m + w_m) = 0.$$

Dado que $a_i = b_i = 0$, ya que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son linealmente independientes. Concluimos que, $v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m$ es linealmente independiente.

10. Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $W \in V$. Demostrar que si $v_1 + w, \ldots, v_m + w$ es linealmente dependiente, entonces $w \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Demostración.- Por definición de dependencia lineal. Existen $a_1, \ldots a_m \in \mathbf{F}$, no todos 0, tal que

$$a_1(v_1 + w) + a_2(v_2 + w) + \ldots + a_m(v_m + w) = 0.$$

De donde,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)w. \tag{1}$$

Dado que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente, entonces existen escalares $t_i, \ldots, t_m \in \mathbf{F}$, $\forall t_i = 0$, de modo que

$$t_1v_1 + t_2v_2 + \ldots + t_mv_m = 0$$

Es único. Así pues notemos, para $a_i \neq 0$ que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m \neq 0$$

En consecuencia por (1)

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)w \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$w = -\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m) \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

11. Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$. Demostrar que $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente independiente si y sólo si

$$w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

Demostración.- Supongamos que $w \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Entonces,

$$w = a_1v_1 + \ldots + a_mv_m.$$

De donde,
$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m - w = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + (-1)w = 0.$$
Por lo tanto, $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente dependiente.

Por otro lado: $v_1, \ldots, v_m, w$ es linealmente independiente, entonces existe $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbf{F}$, $\forall a_i = 0$, tal que
$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + bw = 0.$$
Dado que $b = 0$, no se puede escribir w como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$. Es decir,
$$w = \frac{1}{0}(a_1v_1 + \ldots + a_mv_m),$$
lo que es imposible. De esta manera
$$w \neq \text{span}(v_1, \ldots, v_m).$$

12. Explique por qué no existe una lista de seis polinomios que sea linealmente independiente en $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Notemos que $1, z, z^2, z^3, z^4$ genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$. Pero por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], la longitud de la lista linealmente independiente es menor o igual que la longitud de la lista que genera. Es decir, cualquier lista linealmente independiente no tiene más de 5 polinomios.

13. Explique por qué ninguna lista de cuatro polinomios genera $\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.

Respuesta.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si m vectores genera V y si tenemos un conjunto de n vectores linealmente independientes, entonces $n \leq m$. Es decir, el número de vectores en un conjunto linealmente independiente de V, no puede se mayor que el número de vectores en un conjunto generador de V.
Por ejemplo, si cuatro polinomios podrían generar $P_4(\mathbf{F})$. Entonces, por la definición de arriba, cualquier conjunto de polinomios linealmente independientes en $P_4(\mathbf{F})$ podría tener cómo máximo cuatro vectores. Sin embargo, el conjunto $1, z, z^2, z^3, z^4$ tiene cinco polinomio linealmente independientes en $P_4(\mathbf{F})$. Por lo tanto, es imposible que cualquier conjunto de cuatro polinomios genere $P_4(\mathbf{F})$.

14. Demuestre que V es de dimensión infinita, si y sólo si existe una secuencia $v_1, v_2, \ldots,$ de vectores en V tal que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada entero positivo m.

Demostración.- Supongamos que V es de dimensión infinita. Queremos producir una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots,$ tal que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ es linealmente independiente para cada m. Necesitamos mostrar que para cualquier $k \in \mathbf{N}$ y un conjunto de vectores linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots$ podemos definir un vector v_{k+1} tal que $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ es linealmente independiente. Si podemos probar esto, entonces significará que podemos continuar sumando vectores indefinidamente a conjuntos linealmente independientes de modo que los conjuntos resultantes también sean linealmente independientes. Esto nos dará una secuencia de vectores $v_1, v_2, \ldots$, cuyo subconjunto finito es linealmente independiente.

Sea $v_1, v_2, \ldots, v_k$ un conjunto linealmente independiente en V. Ya que V es de dimensión finita, no puede generado por un conjunto finito de vectores. Por lo tanto, $V \neq \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Sea v_{k+1} tal que $v_{k+1} \notin \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Entonces, por el ejercicio 11 [Axler, Linear Algebra, que nos dice: Si $v:1,\ldots,v_m$ es linealmente independiente en V y $w \in V$, el conjunto $v_1,\ldots,v_m,w$ es linealmente independiente si y sólo si $w \neq \text{span}(v_1,\ldots,v_m)$]. El conjunto $v_1,v_2,\ldots,v_{k+1}$ es linealmente independiente.

Por otro lado, sea $v_1,v_2,\ldots,v_n$ un conjunto generador de V. Entonces, por el teorema 1.23 [Axler, Linear Algebra], cualquier conjunto de vectores linealmente independiente en V pueden tener por lo más n vectores. De esto modo, cualquier conjunto que tenga $n+1$ o más vectores es linealmente dependiente. Así, si V es de dimensión finita, entonces no podemos tener una secuencia de vectores $v_1,v_2,\ldots$ tal que, para cada m, el subconjunto $v_1,v_2,\ldots,v_m$ es linealmente independiente. Tomando su recíproca, podemos decir que si existe una secuencia de vectores $v_1,v_2,\ldots$ tal que el conjunto $v_1,v_2,\ldots,v_m$ es linealmente independiente para cada m. Entonces, V es de dimensión infinita. Lo que completa de demostración.

15. Demostrar que $\mathbf{F}^\infty$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Sea un elemento $e_m \in \mathbf{F}^\infty$ como el elemento que tiene la coordenada m-ésima igual a 1 los demás elementos iguala a 0. Es decir,

$$(0,1,0,\ldots,0)$$

Ahora, si varía m sobre el conjunto de los números naturales, entonces tenemos una secuencia $e_1,e_2,\ldots$ en $\mathbf{F}^\infty$, si y sólo si podemos probar que $e_1,e_2,\ldots,e_m$ es linealmente independiente para cada m. Con este fin, sea

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_me_m = 0$$

De donde,

$$(a-1,a_2,\ldots,a_m,0,0,\ldots,0) = (0,0,\ldots,0)$$

Inmediatamente implica que $a_i's = 0$ y por lo tanto, $e_i's$ son linealmente independiente.

16. Demostrar que el espacio vectorial real para todos las funciones de valor real continuas en el intervalo $[0,1]$ es de dimensión infinita.

Demostración.- Por el ejercicio 14 (Axler, Linear Algebra, 2A), tenemos que encontrar una secuencia linealmente independiente de funciones continuas en $[0,1]$. Observe que los monomiales $1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots$ son funciones continuas en $[0,1]$. Ahora, debemos demostrar que $1,x,x^2,\ldots,x^m$ es linealmente independiente en cada m. Para ello, sea $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m = 0$, donde 0 es el cero polinomial. Lo que significa que $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m = 0$ toma el valor cero en todo el intervalo $[0,1]$. Esto implica que cada punto en $[0,1]$ es una raíz del polinomio. Pero, ya que cada polinomio no trivial tiene como máximo un número finito de raíces, esto es imposible a menos que todos los a_i's sean cero. Lo que muestra que $1,x,x^2,\ldots,x^m$ es linealmente independiente para cada $m \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, el conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ es de dimensión infinita.

17. Suponga $p_0,p_1,\ldots,p_m$ son polinomios en $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ tal que $p_j(2) = 0$ para cada j. Demostrar que $p_0,p_1,\ldots,p_m$ no es linealmente independiente en $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Demostración.- Supondremos que $p_0,p_1,\ldots.p_m$ es linealmente independiente. Demostraremos que esto implica que $p_0,p_1,\ldots,p_m$ genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$. Y que esto a su vez conducirá a una contradicción al construir explícitamente un polinomio que no está en este generador. Notemos que la lista $1,z,\ldots,z^{m+1}$ genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ y tiene longitud $m+1$. Por lo tanto, cada lista linealmente independiente debe tener una longitud $m+1$ o menos (2.23). Si $\text{span}(p_0,p_1,\ldots,p_m) \neq \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$, existe algún

$p \notin \text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m)$, de donde la lista $p_0, p_1, \ldots, p_m, p$ es linealmente independiente de longitud $m+2$, lo que es una contradicción. Por lo que $\text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m) = \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.
Ahora definamos el polinomio $q = 1$. Entonces $q \in \text{span}(p_0, p_1, \ldots, p_m)$, de donde existe $a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ tal que

$$q = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_m P_m,$$

lo que implica

$$q(2) = a_0 p_0(2) + a_1 p_1(2) + \cdots + a_m P_m(2).$$

Pero esto es absurdo, ya que $1 = 0$. Por lo tanto, $p_0, p_1, \ldots, p_m$ no puede ser linealmente independiente.

2.B Bases

2.27 Definición **Base.**

Una base de V es una lista de vectores en V que es linealmente independiente y genera V.

2.28 Teorema **Criterio de base.**

Una lista $v_1, \ldots, v_n$ de vectores en V es una base de V si y sólo si cada $v \in V$ puede escribirse unívocamente de la forma

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$.

Demostración.- Primero suponga que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V. Ya que, $v_1, \ldots, v_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

se cumple. Para mostrar que esta representación es única, sean $c_1, \ldots, c_n$ escalares tales que, también tenemos

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Sustrayendo la primera ecuación de la segunda, tenemos

$$0 = (a_1 - c_1) v_1 + \cdots + (a_n - c_n) v_n.$$

Esto implica que cada $a_j - c_j$ es igual a cero. (Ya que, $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente). Por lo tanto $a_1 = c_1, \ldots, a_n = c_n$. Así, tenemos la unicidad deseada.

Por otro lado, suponga que cada $v \in V$ puede ser escrita de manera única como la forma $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Claramente esto implica que $v_1, \ldots, v_n$ genera V. Para demostrar que $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente, suponga que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ son tales que

$$0 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

La unicidad de la representación de $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ (tomando $v = 0$) implica que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Así, $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente y por tanto es una base de V. ■

Una lista generadora en un espacio vectorial puede no ser una base, ya que no es linealmente independiente. Nuestro próximo resultado dice que dada cualquier lista generadora, algunos (posiblemente ninguno) de los vectores en ella pueden descartarse para que la lista restante sea linealmente independiente y aún genere el espacio vectorial.

2.31 Teorema **La lista generadora contiene un base.**

Cada lista generadora en un espacio vectorial se puede reducir a una base del espacio vectorial.

Demostración.- Suponga que $v_1, \ldots, v_n$ genera V. Queremos eliminar algunos de los vectores de $v_1, \ldots, v_n$ para que los vectores restantes formen una base de V. Sea $B = v_1, \ldots, v_n$, de donde realizamos un bucle con las siguientes condiciones:

Paso 1. Si $v_1 = 0$, eliminamos v_1 de B. Si $v_1 \neq 0$ entonces no cambiamos B.

Paso J. Si v_j esta en $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, eliminamos v_j de B. Si v_j no está en $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)$, entonces no cambiamos B (lema 2.21).

Paramos el proceso después del paso n, obteniendo una lista B. Esta lista B genera V, ya que nuestra lista original generó V y hemos descartado solo los vectores que ya estaban en el generador de los vectores anteriores. El proceso garantiza que ningún vector de B está en el generador de los anteriores. Así pues, B es linealmente independiente, por el lema de dependencia lineal (2.21). Por tanto, B es una base de V. ■

Nuestro siguiente resultado, un corolario fácil del resultado anterior, nos dice que todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

2.32 Corolario **Base del espacio vectorial de dimensión finita.**

Cada espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

Demostración.- Por definición, un espacio vectorial de dimensión finita tiene una lista generadora. El resultado anterior nos dice que cada lista generadora puede ser reducida a una base. ■

Nuestro siguiente resultado es en cierto sentido un derivado de 2.31, que decía que toda puede reducirse a una base. Ahora mostramos que dada cualquier lista linealmente independiente, podemos unir algunos vectores adicionales (esto incluye la posibilidad de no unir ningún vector adicional) de modo que la lista ampliada siga siendo linealmente independiente pero que también genere el espacio.

2.33 Teorema **Una lista linealmente independiente se extiende a una base.**

Cada lista linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial se puede extender a una base del espacio vectorial.

Demostración.- Suponga $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente en un espacio vectorial V de dimensión finita. Sea $w_1, \ldots, w_n$ una base de V. Por lo que la lista

$$u_1, \ldots, u_m, \ w_1, \ldots . w_n$$

genera V. Aplicando el procedimiento de la prueba de 2.31 para reducir esta lista a una base de V se obtiene una base formada por los vectores $u_1, \ldots, u_m$ (ninguna de las $u's$ se elimina en este procedimiento porque $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente) y algunos de los w'. ■

Como aplicación del resultado anterior, mostramos ahora que cada subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita puede emparejarse con otro subespacio para formar una suma directa de todo el espacio.

2.34 Teorema Cada subespacio de V forma parte de una suma directa igual a V.

Suponga V es de dimensión finita y U es un subespacio de V. Entonces, existe un subespacio W de V tal que $U \oplus W = V$.

Demostración.- Ya que V es de dimensión finita, también lo es U por 2.26. Por lo que, existe una base $u_1, \ldots, u_m$ de U esto por 2.32. Por su puesto $u_1, \ldots, u_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V. Por lo tanto, esta lista puede extenderse a una base $u_1, \ldots, u_n$ de V esto por 2.33. Sea $W = \text{span}(w_1, \ldots, w_n)$. Para probar que $V = U \oplus W$, por 1.45, solo necesitamos demostrar que

$$V = U + W \quad \text{y} \quad U \cap W = \{0\}.$$

Para probar la primera ecuación, suponga $v \in V$. Entonces, ya que la lista $u_1, \ldots, u_m$, $w_1, \ldots, w_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m + b_1w_1 + \cdots + b_nw_n.$$

En otras palabras, tenemos $v = u + w$, donde $u \in U$ y $w \in W$ fueron definidas anteriormente. Así, $v \in U + W$, completando la prueba de $V = W + W$.
Para demostrar que $U \cap W = \{0\}$, suponga $v \in U \cap W$. Entonces, existe escalares $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$v = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m = b_1w_1 + \cdots + b_nw_n.$$

Por lo tanto,

$$a_1u_1 + \cdots + a_mu_m - b_1w_1 - \cdots - b_nw_n = 0.$$

Esto, ya que $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ son linealmente independientes, esto implica que $a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_n = 0$. Así, $v = 0$, de donde $U \cap W = \{0\}$. ■

2.B Ejercicios

1. Halle todos los espacios vectoriales que tienen exactamente una base.

Respuesta.- Afirmamos que solo el espacio vectorial trivial tiene exactamente una base. Para ello demostraremos que para espacios vectorial de dimensión finita e infinita se tiene más de una base. Consideremos un espacio vectorial de dimensión finita. Sea V un espacio vectorial no trivial con base $v_1, \ldots, v_n$. Decimos que para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista $cv_1, \ldots, cv_n$ es también una base. Es decir, la lista es aún linealmente independiente, y es aún generador de V. Luego, sea $u \in V$ ya que $v_1, \ldots, v_n$ genera V, existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c}(cv_1) + \cdots + \frac{a_n}{c}(cv_n)$$

y así $cv_1, \ldots, cv_n$ genera también V. Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión finita.
Por otro lado. Sea W un espacio vectorial de dimensión infinita con base $w_1, w_2, \ldots$. Para cualquier $c \in \mathbf{F}$, la lista $cw_1, cw_2, \ldots$ es también una base. Claramente la lista es linealmente independiente, y también genera V. Luego, sea $u \in V$, ya que $w_1, w_2, \ldots$ genera W, existe $a_1, a_2, \ldots \in \mathbf{F}$ tal que

$$u = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots$$

De donde, podemos escribir

$$u = \frac{a_1}{c}cw_1 + \frac{a_2}{c}cw_2 + \cdots$$

y así $cw_1, cw_2, \ldots$ genera también W. Por lo tanto, tendremos más de una base para todo espacio vectorial de dimensión infinita.

2. Verifique todas las afirmaciones del ejemplo 2.28.

(a) La lista $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$, ..., $(0,\ldots,0,1)$ es una base de $\mathbf{F}^n$, llamado la base estándar de $\mathbf{F}^n$.

Respuesta.- Primero demostraremos que la lista genera $\mathbf{F}^n$. Sea, los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $\mathbf{F}$. Podemos escribir

$$x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + x_n(0,\ldots,0,1) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Donde, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector cualquier en $\mathbf{F}^n$. Esta expresión es una combinación lineal de los n vectores. Por definición, esta lista genera $\mathbf{F}^n$.
Ahora, demostraremos que la lista es linealmente independiente. Para ello, aplicaremos la definición. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + a_n(0,\ldots,0,1) = 0.$$

Esto implica que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0,0,\ldots,0).$$

Por lo que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Así, la lista es linealmente independiente.

(b) La lista $(1,2), (2,5)$ es una base de $\mathbf{F}^2$.

Respuesta.- Sea $(a,b) \in \mathbf{F}^2$. Buscaremos escalares c_1, c_2 tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 = (a,b).$$

que implica,

$$c_1(1,2) + c_2(3,5) = (a,b) \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 3c_2, 2c_1 + 5c_2) = (a,b)$$

De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 3c_2 & = & a \\ 2c_1 + 5c_2 & = & b \end{array}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$c_2 = 2a - b$$

Luego, reemplazándola a la primera ecuación, se tiene

$$c_1 = -5a + 3b.$$

Por lo tanto, para cada vector $(a,b) \in \mathbf{F}^2$ podemos encontrar c_1, c_2 en función de a y b tal que $c_1v_1 + c_2v_2$ es una combinación lineal el cual genera $\mathbf{F}^2$.
Después, sólo nos haría falta reemplazar en

$$c_2 = 2a - b \quad \text{y} \quad c_1 = -5a + 3b$$

$(a,b) = (0,0)$. De donde,

$$c_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0.$$

Esto implica que $(1,2)$ y $(2,5)$ son linealmente dependientes. Por lo que concluimos que la lista dada es una base de $\mathbf{F}^2$.

(c) La lista $(1,2,-4)$, $(7,-5,6)$ es linealmente independiente en $\mathbf{F}^3$ pero no es una base en $\mathbf{F}^3$, ya que no genera $\mathbf{F}^3$.

Respuesta.- Sean los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1(1,2,-4) + c_2(7,-5,6) = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (0,0,0)$$

Por lo que, podemos construir un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + 7c_2 &= 0 \\ 2c_1 - 5c_2 &= 0 \\ -4c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación y sumando la tercera tenemos

$$c_2 = 0$$

Luego, sustituyendo en la primera ecuación,

$$c_1 = 0$$

Esto implica que los vectores dados son linealmente independientes.
Ahora, demostraremos que la lista no genera $\mathbf{F}^3$, con un contraejemplo. Supongamos que $(1,2,-4), (7,-5,6)$ puede generar $(1,0,0)$ el cual está en $\mathbf{F}^3$. Sea los escalares $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$, entonces

$$c_1(1,2,-4) + c_2(7,-5,6) = (1,0,0) \quad \Rightarrow \quad (c_1 + 7c_2, 2c_1 - 5c_2, -4c_1 + 6c_2) = (1,0,0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{aligned} c_1 + 7c_2 &= 1 \\ 2c_1 - 5c_2 &= 0 \\ -4c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}$$

De las ecuaciones 2 y 3 se tiene que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Reemplazando en la primera ecuación,

$$0 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1.$$

Lo que es un absurdo, por lo tanto $(1,2,-4)$, $(7,-5,6)$ no genera $\mathbf{F}^3$.

(d) La lista $(1,2), (3,5), (4,13)$ genera $\mathbf{F}^2$ pero no es una base de $\mathbf{F}^2$, ya que no es linealmente independiente.

Respuesta.- Demostremos que la lista no es linealmente independiente. Sea $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$, entonces

$$a_1(1,2) + a_2(3,5) + a_3(4,13) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_1 + 3a_2 + 4a_3, 2a_1 + 5a_2 + 13a_3) = (0,0).$$

Construimos un sistema de ecuaciones, como sigue

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & 3a_2 & + & 4a_3 & = & 0 \\ 2a_1 & + & 5a_2 & + & 13a_3 & = & 0 \end{array}$$

Multiplicando por dos la primera ecuación y luego restando la segunda, tenemos

$$a_2 = 5a_3.$$

Remplazando en la primera ecuación,

$$a_1 = -19a_3.$$

Sea, $a_3 = 1$, entonces

$$a_1 = -19 \quad \text{y} \quad a_2 = 5.$$

Por lo tanto, $(1,2),(3,5),(4,13)$ no es linealmente independiente.

Ahora, demostraremos que la lista $(1,2),(3,5),(4,13)$ genera $\mathbf{F}^2$. Sean $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{F}$ tal que

$$a_1(1,2) + a_2(3,5) + a_3(4,13) = 0$$

Sabiendo que esta lista es linealmente dependiente, podemos reescribimos la ecuación de modo que $(1,2),(3,5)$ genera $(4,13)$:

$$(4,13) = \frac{a_1}{a_3}(1,2) - \frac{a_2}{a_3}(3,5)$$

Por el lema 2.21 (Axler, Linear Algebra), vemos que el generador de $(1,2),(3,5)$ es igual al generador de $(1,2),(3,5),(4,13)$. Sólo nos faltaría demostrar que $(1,2),(3,5)$ genera $\mathbf{F}^2$. Para ello, sea $(x_1, x_2) \in \mathbf{F}^2$, de modo que

$$a_1(1,2) + a_2(3,5) = (x_1, x_2)$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} a_1 + 3a_2 & = & x_1 \\ 2a_1 + 5a_2 & = & x_2 \end{array}$$

Multiplicando la segunda ecuación por dos y restando la primera, tenemos

$$a_1 = 2x_1 - x_2.$$

Remplazando en la primera ecuación,

$$a_2 = -(5x_1 + 3x_2).$$

Por lo tanto, podemos hallar a_1 y a_2 en términos de x_1 y x_2 tal que $a_1(1,2) + a_2(3,5) = (x_1, x_2)$ es una combinación lineal que genera $\mathbf{F}^2$.

Siendo más prácticos podemos usar el teorema 2.23. Para saber que $(1,2),(3,5),(4,13)$ no es linealmente independiente pero genera $\mathbf{F}^2$.

(e) La lista $(1,1,0),(0,0,1)$ es una base de $\{(x,x,y) \in \mathbf{F}^3 \ : \ x,y \in \mathbf{F}\}$.

Respuesta.- Está claro que la lista es linealmente independiente. Ya que, la única forma de que se cumpla

$$c_1(1,1,0) + c_2(0,0,1) = 0$$

es que c_1, c_2 sean igual a cero.
Ahora demostraremos que la lista dada genera $\{(x,x,y) \in \mathbf{F}^3 \ : \ x,y \in \mathbf{F}\}$. Sea $c_1, c_2 \in \mathbf{F}$ tal que

$$c_1(1,1,0) + c_2(0,0,1) = (x,x,y).$$

De donde, podemos construir un sistema de ecuaciones como sigue:

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 0 & = & x \\ c_1 + 0 & = & x \\ 0 + c_2 & = & y \end{array}$$

Por lo que, cualquier $\mathbf{F}^3$ puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores $(1,1,0),(0,0,1)$ y por lo tanto generan $\mathbf{F}^3$.

(f) La lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es una base de

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbf{F}^3\ :\ x+y+z=0\right\}.$$

Respuesta.- Si $x+y+z=0$ para $x,y,z\in\mathbf{F}$, entonces podemos escribir

$$x=-y-z.$$

Por lo que,

$$\begin{array}{rcl}(x,y,z) & = & (-y-z,y-z)\\ & = & (-y,y-0)+(-z,0z)\\ & = & -y(1,-1,0)-z(1,0,-1).\end{array}$$

Debido a que y,z son escalares, implica que podemos expresar cualquier $(x,y,z)\in\mathbf{F}^3$ como una combinación lineal de los vectores $(1,-1,0),(1,0,-1)$.

Es fácil ver que que la lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es linealmente independiente. Dado que, si $c_1,c_2\in\mathbf{F}^n$, entonces

$$\begin{array}{rcl}c_1(1,-1,0)+c_2(1,0,-1) & = & 0\\ (c_1+c_2,-c_1,-c_2) & = & 0.\end{array}$$

De donde,

$$c_1=c_2=0.$$

Así, la lista $(1,-1,0),(1,0,-1)$ es linealmente independiente. Por lo tanto,$(1,-1,0),(1,0,-1)$ es una base de $\mathbf{F}^3$

(g) La lista $1,z,\ldots,z^m$ es una base de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Respuesta.- El elemento general de $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ es una combinación lineal de $1,z,z^2,\ldots,z^m$ de la forma:

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m$$

donde $a_i\in\mathbf{F}$ para $1\le i\le m$. Lo que demuestra que genera $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$.

Para demostrar que la lista es linealmente independiente, suponemos que la combinación lineal de estos elementos es igual a cero; es decir,

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m=0.$$

Donde el **0** es un polinomio. Esto implica que el polinomio del lado izquierdo toma valor cero para todo los valore de z. Esto es posible sólo cuando todos los $a_i's$ son cero, ya que cualquier polinomio no trivial tiene un número finito de raíces. Por lo tanto la lista $1,z,z^2,\ldots,z^m$ es base de $\mathcal{F}_m(\mathbf{F})$.

3. a). Sea U el subespacio de $\mathbf{R}^5$ definido por

$$U=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{F}^5\ :\ x_1=3x_2 \text{ y } x_3=7x_4\right\}.$$

Encuentre una base de U.

Respuesta.- Dado que se tiene la condición $x_1=3x_2$ y $x_3=7x_4$. Podemos escribir el vector general, como sigue

$$\begin{array}{rcl}(3x_2,x_2,7x_4,x_4,x_5) & = & (3x_2,x_2,0,0,0)+(0,0,7x_4,x_4,0)+(0,0,0,0,x_5)\\ & = & x_2(3,1,0,0,0)+x_4(0,0,7,1,0)+x_5(0,0,0,0,1).\end{array}$$

Supongamos que $(3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1)$ es una base de $\mathbf{R}^5$. Podemos demostrar fácilmente que estos vectores generar U, ya que U puede expresarse como una combinación lineal de estos tres vectores. Ahora, demostremos que son linealmente independiente. Sea $c_1,c_2,c_3 \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$c_1(3,1,0,0,0)+c_2(0,0,7,1,0)+c_3(0,0,0,0,1)=0$$

De donde,

$$(3c_1,c_2,7c_2,c_2,c_3)=(0,0,0,0,0).$$

Igualando cada componente, tenemos que $c_1=c_2=c_3=0$. Así des demuestra que estos tres vectores son linealmente independientes. Por lo tanto, $(3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1)$ es una base de U.

b). Extienda la base de la parte (a) a una base de $\mathbf{R}^5$.

Respuesta.- Sean $v_1=(3,1,0,0,0)$, $v_2=(0,0,7,1,0)$, $v_3=c_3(0,0,0,0,1)$. Por el ejercicio 11 del apartado 2A (Axler, Linear Algebra), se sabe que si tenemos $v_4 \notin \operatorname{span}(v_1,v_2,v_3)$ entonces v_1,v_2,v_3,v_4 son linealmente independientes. Nos preguntamos, ¿que clase de vectores no pueden ser generados por v_1,v_2,v_3?. Observemos que las primeras dos coordenadas de v_2 y v_3 son cero. Por lo que no pueden aportar a otras dos primeras coordenadas de cualquier combinación lineal que consideremos. De hecho, estas coordenadas deben provenir de v_1.
Si $av_1+bv_2+cv_3$ es una combinación lineal, entonces las dos primeras coordenadas son $3a$ y a. Luego, si escogemos un vector donde sus primeras dos coordenada no son de la forma $3a$ y a para cualquier escalar a, entonces no será generados por v_1,v_2,v_3. Por ejemplo podemos escoger el vector

$$v_4=(0,1,0,0,0)$$

Ahora, encontremos un v_5 tal que $v_5 \notin \operatorname{span}(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Observemos que las coordenadas cuatro y cinco de los vectores $v_1.v_2,v_3$ y v_4 son cero. Por lo que ambas coordenadas deben provenir de v_2.
Si $av_1+bv_2+cv_3+dv_4$ es una combinación lineal, entonces las coordenadas cuatro y cinco son de la forma $7b$ y b, para cualquier escalar b. Por ejemplo podemos escoger el vector,

$$v_5=(0,0,0,1,0).$$

Por último, demostremos que esta lista es base de $\mathbf{F}^5$. Por el teorema 2.23 sabemos que, si m vectores generan un espacio vectorial, entonces cualquier lista linealmente independiente en V no puede tener más de m vectores. Así, queda demostrada la independencia lineal de v_1,v_2,v_3,v_4,v_5.

Por otro lado, demostremos que esta lista genera $\mathbf{F}^5$. Nuestro objetivo será hallar una combinación lineal que incluya a v_1,v_2,v_3,v_4 y v_5 para $a,b,c,d,e \in \mathbf{F}$ tales que

$$a(1,0,0,0,0)+b(0,0,1,0,0)+c(0,0,0,0,1)+d(0,1,0,0,0)+e(0,0,0,1,0)=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5).$$

Para ello, notemos que ya se tiene $v_3=(0,0,0,0,5)$, $v_4=(0,1,0,0,0)$ y $v_5=(0,0,0,1,0)$. Ahora, generemos los restantes $(1,0,0,0,0)$ y $(0,0,1,0,0)$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(v_1-v_4) &= (1,0,0,0,0)\\
\frac{1}{7}(v_2-v_5) &= (0,0,1,0,0).
\end{aligned}$$

Dado que se incluye a v_1 y v_2 en combinación lineal con v_4 y v_5, entonces

$$\begin{array}{rcl} a &=& x_1 \\ b &=& x_2 \\ c &=& x_3 \\ d &=& x_4 \\ e &=& x_5. \end{array}$$

Encontrando los respectivos escalares a, b, c, d, e en términos de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Decimos que la lista v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 genera $\mathbf{F}^5$. Por lo tanto es una base de $\mathbf{F}^5$.

c). Encuentre un subespacio W de $\mathbf{F}^5$ tal que $\mathbf{R}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.- Por 1.45 (Axler, Lineal Algebra), demostraremos que $\mathbf{R}^5 = U + W$ y que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in \mathbf{R}^5$, ya que v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 es una base de $\mathbf{F}^5$, por el criterio de base (2.28, Axler, Lineal algebra) podemos escribir

$$\begin{array}{rcl} v &=& c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + c_5v_5 \\ &=& (c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) + (c_4v_4 + c_5v_5). \end{array}$$

Luego, sean $u = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ y $w = c_4v_4 + c_5v_5$. Entonces, $u \in U$ y $w \in W$. Está claro que u y w generan U y W respectivamente. De este modo, cada vector en $\mathbf{R}^5$ puede ser expresado como una suma de vectores en U y W. Esto prueba que $\mathbf{R}^5 = U + W$.

Ahora demostremos que $U \cap W = \{0\}$. Sea $v \in U \cap W$, ya que $v \in U$ entonces para algunos escalares $a, b, c \in \mathbf{F}$ se tiene

$$v = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Lo mismo pasa con $v \in W$, para algunos escalares $d, e \in \mathbf{F}$; es decir,

$$v = dv_4 + ev_5.$$

Dado que queremos encontrar $U \cap W$, se tiene

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = dv_4 + ev_5 \quad \Rightarrow \quad av_1 + bv_2 + cv_3 - dv_4 - ev_5 = 0$$

Por el hecho de que U y W son linealmente independiente, lo que implica $a = b = c = d = e = 0$, entonces $v = 0$, así $U \cap W = \{0\}$. Concluimos que

$$\mathbf{R}^5 = U \oplus W.$$

4. (a) Sea U el subespacio de $\mathbf{C}^5$ definida por

$$U = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbf{C}^5 \ : \ 6z_1 = z_2 = z_2 \text{ y } z_3 + 2z_4 + 3z_5 = 0 \right\}.$$

Encuentre una base de U.

Respuesta.-

(b) Extienda la base en la parte (a) para una base de $\mathbf{C}^5$.

Respuesta.-

(c) Encuentre un subespacio W de $\mathbf{C}^5$ tal que $\mathbf{C}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.-