Ejercicios capítulo 5

Christian Limbert Paredes Aguilera

6/6/2022

```
#library
library(ggplot2)
```

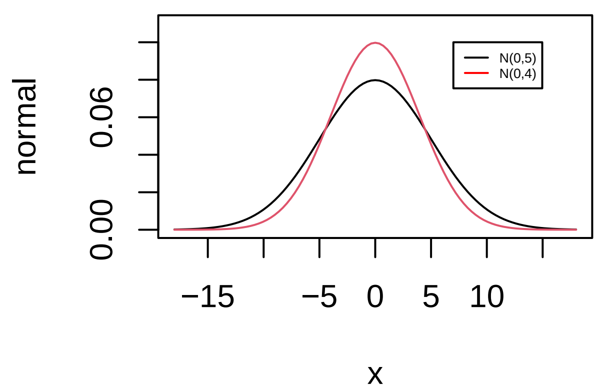
Ejercicios Capítulo 5

5.1.

En la misma gráfica, dibujar las distribuciones normales $N(0,5)$ y $N(0,4)$

Respuesta.-

```
curve(dnorm(x, mean=0, sd=5), ylim =c(0,.11) ,from = -18, to = 18, ylab = "normal")
curve(dnorm(x, mean=0, sd=4),  add = TRUE, col = 2)
legend(7, .1, legend=c("N(0,5)", "N(0,4)"),
       col=c("black", "red"), lty=1:1, cex=0.4)
```



5.2.

Sea $X \sim N(50,10)$. Determinar las siguientes probabilidades

a)

$P(X < 40)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z < (40-50)/10] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{40-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = 0.1586553.$$

```
pnorm(40,50,10)
```

```
## [1] 0.1586553
```

```r
integrate(function(x) (1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2),-Inf,(40-50)/10)
```

```
## 0.1586553 with absolute error < 4.8e-07
```

```r
1/(sqrt(2*pi))*(-exp(-((-1)^2/2)) + exp(-(-Inf)^2/2))
```

```
## [1] -0.2419707
```

b)

$P(X < 65)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z < (65 - 50)/10] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{65-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}} \, dz = 0.9331928$$

```r
pnorm(65,50,10)
```

```
## [1] 0.9331928
```

```r
integrate(function(x) (1/sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2),-Inf,(65-50)/10)
```

```
## 0.9331928 with absolute error < 1.1e-07
```

c)

$P(X > 55)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z > (55 - 50)/10] = 1 - P[Z \leq (55 - 50)/10] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{55-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}} \, dz = 0.3085375$$

```r
pnorm(55,50,10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3085375
```

d)

$P(X > 35)$

Respuesta.-

$$P(X < 40) = P[Z > (35 - 50)/10] = 1 - P[Z \leq (35 - 50)/10] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{35-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}} \, dz = 0.93319285$$

```r
pnorm(35,50,10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.9331928
```

e)

$P(40 < X < 45)$

Respuesta.-

$$P(40 < X < 45) = P\left(\frac{40-50}{10} < Z < \frac{45-50}{10}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{45-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}} \, dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{40-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}} \, dz = 0.1498823.$$

```r
pnorm(45,50,10) - pnorm(40,50,10)
```

```
## [1] 0.1498823
```

f)

$P(38 < X < 62)$

Respuesta.-

$$P(38 < X < 62) = P\left(\frac{38-50}{10} < Z < \frac{62-50}{10}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{62-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{38-50}{10}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 0.7698607.$$

```r
pnorm(62,50,10) - pnorm(38,50,10)
```

```
## [1] 0.7698607
```

5.3.

Sea $X \sim N(200, 20)$. Determinar las siguientes probabilidades:

a)

P(185<X<210)

Respuesta.-

$$P\left(\frac{185-200}{20} < Z < \frac{210-200}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{210-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{185-210}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 0.4648351.$$

```r
pnorm(210,200,20)-pnorm(185,200,20)
```

```
## [1] 0.4648351
```

b)

P(215<X<250)

Respuesta.-

$$P\left(\frac{215-200}{20} < Z < \frac{250-200}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{250-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{215-210}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 0.2204177.$$

```r
pnorm(250,200,20)-pnorm(215,200,20)
```

```
## [1] 0.2204177
```

c)

P(X>240)

Respuesta.-

$$P\left(Z > \frac{240-200}{20}\right) = P1 - \left(Z \leq \frac{240-200}{20}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{240-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 0.02275013.$$

```r
pnorm(240,200,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02275013
```

d)

P(X>178)

Respuesta.-

$$P\left(Z > \frac{178-200}{20}\right) = P1 - \left(Z \leq \frac{178-200}{20}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{178-200}{20}} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = 0.8643339.$$

```r
pnorm(178,200,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.8643339
```

5.4.

Sea $X \sim N(-25, 10)$. Encontrar los valores de x que corresponden a las siguientes probabilidades:

a)

$P(X < x) = 0.1251$. Respuesta.- Viendo la tabla z tenemos

$$z = \frac{x+25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = -1.15 \cdot 10 - 25 = -35.5$$

```r
qnorm(0.1251)*10-25
```

```
## [1] -36.49864
```

b)

$P(X < x) = 0.9382$ Respuesta.-

$$z = \frac{x+25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 1.54 \cdot 10 - 25 = -9.6$$

```r
qnorm(0.9382)*10-25
```

```
## [1] -9.601626
```

c)

$P(X > x)00.3859$ Respuesta.-

$$z = \frac{x+25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = -0.29 \cdot 10 - 25 = -27.9$$

```r
qnorm(0.3859)*10-25
```

```
## [1] -27.90021
```

d)

$P(X > x)00.8340$ Respuesta.-

$$z = \frac{x + 25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 0.97 \cdot 10 - 25 = .15.3$$

```
qnorm(0.8340)*10-25
```

```
## [1] -15.29907
```

5.5.

Sea $X \sim N(10, 5)$. Encontrar los valores de x que corresponden a las siguientes probabilidades:

a)

$P(X < x) = 0.05$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -1.645 \cdot 5 + 10 = 1.775$$

```
qnorm(0.05)*5+10
```

```
## [1] 1.775732
```

b)

$P(X < x) = 0.95$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 1.645 \cdot 5 + 10 = 18.225$$

```
qnorm(0.95)*5+10
```

```
## [1] 18.22427
```

c)

$P(X < x) = 0.99$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 2.33 \cdot 5 + 10 = 21.65$$

```
qnorm(0.99)*5+10
```

```
## [1] 21.63174
```

d)

$P(X < x) = 0.01$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -2.33 \cdot 5 + 10 = -1.65$$

```
qnorm(0.01)*5+10
```

```
## [1] -1.631739
```

e)

$P(X < x) = 0.025$ Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -1.96 \cdot 5 + 10 = 0.2$$

```
qnorm(0.025)*5+10
```

```
## [1] 0.2001801
```

f)

$P(X < x) = 0.975$

Respuesta.-

$$z = \frac{x - 10}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 1.96 \cdot 5 + 10 = 19.8$$

```
qnorm(0.975)*5+10
```

```
## [1] 19.79982
```

5.6.

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$. Determinar la media y la varianza de X si los cuantiles son $x_{0.4} = 50$ y $x_{0.8} = 100$.

Respuesta.- Sea $z_1 = \dfrac{x_{0.4} - \mu}{\sigma} \qquad z_2 = \dfrac{z_{0.8} - \mu}{\sigma}$, entonces

$$\frac{50 - \mu}{z_1} = \frac{100 - \mu}{z_2}$$

Así,

$$\mu = \frac{100z_1 - 50z_2}{z_1 - z_2} = \frac{100 \cdot (-0.225) - 50 \cdot 0.845}{-0.225 - 0.845} = 60.51402$$

Luego reemplazamos μ en z_1 para hallar σ,

$$\sigma = \frac{x_{0.4} - \mu}{z_1} = \frac{50 - 60.51402}{-0.225} = 46.72898$$

```
mu = (100*qnorm(0.4)-50*qnorm(0.8))/(qnorm(0.4)-qnorm(0.8))
mu
```

```
## [1] 61.5687
```

```
(50-mu)/qnorm(0.4)
```

```
## [1] 45.66342
```

5.7.

Una universidad espera recibir, para el siguiente año escolar, 16000 solicitudes de ingreso el primer año de licenciatura. Se supone que las calificaciones obtenidas por los aspirantes en la prueba SAT se pueden calcular, de manera adecuada, por una distribución normal con media 950 y desviación estándar 100. Si la universidad decide admitir al 25% de todos los aspirantes que obtengan las calificaciones más altas en la prueba SAT, ¿cuál es la mínima calificación que es necesario obtener en esta prueba, para ser admitido por la universidad?

Respuesta.- Sea $P(X > x_{0.25})$ entonces $P(X < x_{0.75}) = -1.96$ así

$$x_{0.75} = 0.675 * 100 + 950 = 1017.5 \simeq 1018$$

```
qnorm(0.75)*100+950
```

```
## [1] 1017.449
```

5.8.

Una fábrica produce pistones cuyos diámetros se encuentran adecuadamente clasificados por una distribución normal con un diámetro promedio de 5 cm y una desviación estándar igual a 0.001 cm. Para que un pistón sirva, su diámetro debe encontrarse entre 4.998 y 5.002 cm. Si el diámetro del pistón es menor que 4.998 se desecha; si es mayor que 5.002 el pistón puede reprocesarse. ¿Qué porcentaje de pistones servirá? ¿Qué porcentaje será desechado? ¿Qué porcentaje será reprocesado?.

Respuesta.- Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ de donde, el porcentaje que servirá vendrá dado por

$$P\left(\frac{4.998-5}{0.001} \leq Z \leq \frac{5.002-5}{0.001}\right)$$

entonces,

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = F_Z(2, 0, 1) - F_Z(-2, 0, 1) = 0.9772 - 0.0228 = 0.9544.$$

```
pnorm((5.002-5)/0.001)-pnorm((4.998-5)/0.001)
```

```
## [1] 0.9544997
```

El porcentaje que será desechado viene dado por:

$$P(Z \leq -2) = F_Z(-2; 0, 1) = 0.0228.$$

```
pnorm((4.998-5)/0.001)
```

```
## [1] 0.02275013
```

El porcentaje que será reprocesado está dado por:

$$P(Z \geq 2) = 1 - F_Z(2; 0, 1) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

```
pnorm((5.002-5)/0.001, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02275013
```

5.9.

La demanda mensual de cierto producto A tiene una distribución normal con una media de 200 unidades y desviación estándar igual a 40 unidades. La demanda de otro producto B también tiene una distribución normal con media de 500 unidades y desviación estándar igual a 80 unidades. Un comerciante que vende estos productos tiene en su almacén 280 unidades de A y 650 de B al comienzo de un mes, ¿cuál es la probabilidad de que, en el mes, se vendan todas las unidades de ambos productos? Puede suponerse independencia entre ambos eventos.

Respuesta.- Sea $z_A = \dfrac{280-200}{40} = 2$ y $z_B = \dfrac{650-500}{80} = 1.875$, entonces para hallar la probabilidad de que se vendan ambos productos estará dado por

$$P(Z_A \geq 2) \cdot P(Z_B \geq 1.875) = [1 - F_{Z_A}(2; 0, 1)] \cdot [1 - F_{Z_B}(1.875; 0, 1)] = (1 - 0.9772)(1 - 0.9696) = 0.00069312$$

```
pnorm((280-200)/40,lower.tail = FALSE)*pnorm((650-500)/80,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0006915212
```

5.10.

El peso de cereal que contiene una caja se aproxima a una distribución normal con una media de 600 gramos. El proceso de llenado de las cajas está diseñado para que de entre 100 cajas, el peso de una se encuentre fuera del intervalo 590-610 gramos. ¿Cuál es el valor máximo de la desviación estándar para alcanzar este requerimiento?

Respuesta.- Si una caja de entre 100 (1/100) queda fuera del intervalo $590 - 610$ entonces lo que queda dentro estará dado por $(99/100) = 0.99$. Sabemos que la distribución Normal estandarizada es simétrica respecto al 0, por lo que,

$$P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right)$$

Luego, ya que

$$P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right)$$

entonces,

$$P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.99 \quad \Rightarrow \quad P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.495$$

Pero $P(Z \geq 0) = -F_Z(Z \leq 0) = -0.5$ de donde

$$P\left(Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) - 0.5 \geq 0.495 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.995$$

Así,

$$z \geq 2.58 \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{\sigma} \geq 2.58 \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq 3.876.$$

Por lo que el valor máximo de σ para alcanzar el requerimiento estará dado por 3.876.

5.11

En una tienda de descuento la demanda diaria de acumuladores para automóvil se calcula mediante una distribución normal con una media de 50 acumuladores que tienen una desviación estándar de 10. En dos días consecutivos se venden 80 y 75 acumuladores respectivamente. Si estos días son típicos, ¿qué tan probable es, bajo las suposiciones dadas, vender 80 o más y 75 o más acumuladores?

Respuesta.- Sea $X \sim N(50, 10)$ entonces

$$\begin{aligned}
P(X_1 \geq 80) \cdot P(X_2 \geq 75) &= \left(Z_1 \geq \frac{80 - 50}{10}\right) \cdot P\left(Z_2 \geq \frac{75 - 50}{10}\right) \\
&= [1 - F_{Z_1}(3; 0, 1)] \cdot [1 - F_{Z_2}(2.5; 0, 1)] \\
&= (1 - 0.9987) \cdot (1 - 0.9938) \\
&= 0.00000806.
\end{aligned}$$

```r
pnorm((80-50)/10,lower.tail = FALSE) * pnorm((75-50)/10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 8.382415e-06
```

5.12-

Un fabricante de aviones desea obtener remaches para montar los propulsores de sus aviones. El esfuerzo a la tensión mínimo necesario de cada remache es de 25000 lb. Se pide a tres fabricantes de remaches (A,B y C) que proporcionen toda la información pertinente con respecto a los remaches que producen. Los tres fabricantes aseguran que la resistencia a la tensión de sus remaches se encuentran distribuida, de manera aproximada, normalmente con un valor medio de $28000, 30000$ y 29000 lb, respectivamente.

a)

¿Tiene el fabricante la suficiente información para hacer una selección?

Respuesta.- No, ya qua no se definio la desviación estándar.

b)

Supóngase que las desviaciones estándar para A, B y C son $1000, 1800$ y 1200, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que un remache producido ya sea por A, B o C no reúna los requisitos mínimos?

Respuesta.- Para $X_A \sim N(28000, 1000)$ se tiene

$$P(X_A \leq 25000) = P\left(Z_A \leq \frac{25000 - 28000}{1000}\right) = F_{Z_A}(-3; 0, 1) = 0.0013.$$

```r
pnorm((25000-28000)/1000)
```

```
## [1] 0.001349898
```

Para $X_B \sim N(30000, 1800)$ se tiene

$$P(X_B \leq 25000) = P\left(Z_B \leq \frac{25000 - 30000}{1800}\right) = F_{Z_B}(-2.78; 0, 1) = 0.0027$$

```r
pnorm((25000-30000)/1800)
```

```
## [1] 0.002736602
```

Para $X_C \sim N(29000, 1200)$ se tiene

$$P(X_C \leq 25000) = P\left(Z_C \leq \frac{25000 - 29000}{1200}\right) = F_{Z_C}(-3.33; 0, 1) = 0.0004$$

```r
pnorm((25000-29000)/1200)
```

```
## [1] 0.0004290603
```

c)

Si usted fuera el fabricante de aviones, ¿podría elegir entre A, B y C, con base a sus respuesta al inciso b)? ¿Por qué?.

Respuesta.- Escogería a C ya que tiene la probabilidad más baja de que se rompa un remache.

5.13.

Un fabricante de escapes para automóviles desea garantizar su producto durante un periodo igual al de la duración del vehículo. El fabricante supone que el tiempo de duración de su producto es una variable aleatoria con una distribución normal, con una vida promedio de tres años y una desviación estándar de seis meses. Si el costo de reemplazo por unidad es de \$10, ¿cuál puede ser el costo total de reemplazo para los primeros dos años, si se instalan 1000000 unidades?

Respuesta.- Sea $\mu = 3$ y $\sigma = 0.5$, entonces

$$P(X \leq 2) = P(Z \leq \frac{2-3}{0.5}) = P(Z \leq -2) = F_Z(-2; 0, 1) = 0.0228.$$

Ahora ya que el costo de reemplazo es de %10, de donde sólo el 2.28% de 1000000 será cambiado entonces el costo total de reemplazo estará dado por:

$$1000000 * 0.0228 * 10 = 228000.$$

```
pnorm((2-3)/0.5)*1000000*10
```

```
## [1] 227501.3
```

5.14.

El tiempo necesario para armar cierta unidad es una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 30 minutos y desviación estándar igual a dos minutos. Determinar el tiempo de armado de manera tal que la probabilidad de exceder este sea de 0.02.

Respuesta.- Sea $\mu = 30$ y $\sigma = 2$, entonces

$$P\left(Z \geq \frac{T-30}{2}\right) = 0.02 \;\Rightarrow\; 1 - F_Z(T) = 0.02 \;\Rightarrow\; F_Z(T) = 0.98 \;\Rightarrow\; \frac{T-30}{2} = 2.06 \;\Rightarrow\; T = 34.12.$$

```
2*qnorm(0.02,lower.tail = FALSE)+30
```

```
## [1] 34.1075
```

5.15.

Un periódico llevó a cabo una encuesta entre 400 personas seleccionadas aleatoriamente, en un estado, sobre el control de armas. De las 400 personas, 220 se pronunciaron en favor de un estricto control.

a)

¿Qué tan probable resulta el hecho de tener 220 o más personas a favor del control de armas, si la población en este estado se encuentra dividida en opinión de igual manera?.

Respuesta.- Sea, $p = 0.5$, $\mu = np = 400 \cdot 0.5 = 200$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 10$, entonces

$$P\left(Z \geq \frac{220-200}{10}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - F_Z(2; 0, 1) = 0.0228.$$

```
pnorm((220-200)/10,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.02275013
```

b)

Supóngase que se encuesta a 2000 personas teniendo la misma proporción de estas a favor del control de armas, que la del inciso anterior. ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso a)?.

Respuesta.- Sea, $p = 0.5$, $\mu = np = 2000 \cdot 0.5 = 1000$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2000 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \sqrt{500}$, entonces dado que la proporción es de $220/400 = 0.55$

$$P(X \geq 1100) = P\left(Z \geq \frac{1100-1000}{\sqrt{500}}\right) = P(Z \geq 4.47) = 1 - F_Z(4.47; 0, 1) = 0$$

```
pnorm((1100-1000)/sqrt(500),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 3.872108e-06
```

c)

Si el número de personas encuestadas es de 10000, ¿cuál es la probabilidad de tener una ocurrencia diferente al del inciso b)?.

Respuesta.- Sea, $p = 0.5$, $\mu = np = 10000 \cdot 0.5 = 5000$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10000 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 50$, entonces dado que la proporción es de $220/400 = 0.55$

$$P(X \geq 5500) = P\left(Z \geq \frac{5500-5000}{50}\right) = P(Z \geq 10) = 1 - F_Z(10; 0, 1) = 0$$

```
pnorm((5500-5000)/50,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 7.619853e-24
```

5.16.

Una prueba de opción múltiple contiene 25 preguntas y cada una de estas cinco opciones. ¿Cuál es la probabilidad de que, al contestar de manera aleatoria cada pregunta, más de la mitad de las respuetas sea incorrecta?

Respuesta.- Sea $p = 4/5$ la probabilidad de contestar una pregunta mal y dado que $\mu = np = 25 \cdot \dfrac{4}{5} = 20$ y $\sigma = \sqrt{25 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{5}} = 2$, entonces

$$P(X \geq 13) = P\left(Z \geq \frac{13-20}{2}\right) = 1 - F_Z(-3.5) = 1 - 0.0002 = 0.9998$$

```
pnorm((13-20)/2,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.9997674
```

5.17.

Una organización llevó a cabo una encuesta entre 1600 personas, seleccionadas de manera aleatoria de toda la población del país, para conocer su opinión con respecto a la seguridad en las plantas de energía nuclear. De este grupo, el 60% opinó que las plantas de energía nuclear tienen muy poca seguridad. Con base en estos resultados ¿existe alguna razón para dudar que la población en general tiene una opinión neutral con respecto a este asunto?.

Respuesta.- Sea $\mu = 1600 \cdot 0.6 = 960$ y $\sigma = \sqrt{1600 * 0.4 * (1 - 0.4)} = \sqrt{384}$, entonces

$$P(X \leq 800) = P\left(Z \leq \frac{800-960}{\sqrt{384}}\right) = P(-160/\sqrt{384}; 0, 1) = 0.$$

```
pnorm((800-1600*0.6)/sqrt(1600*0.4*(1-0.4)))
```

```
## [1] 1.607631e-16
```

Si existe ya que la probabilidad es prácticamente 0.

5.18.

Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente.

a)

Para $n = 15,\ p = 0.25$ y $n = 15$ y $p = 0.5$, calcular las siguientes probabilidades:

Respuesta.-

P(X=8)

$$P(X = 8) = p(8; 15, 0.25) = \binom{15}{8} \cdot 0.25^8 \cdot (1-0.25)^{15-8} = 0.01310682$$

```
choose(15,8)*0.25^(8)*(1-0.25)^(15-8)
```

```
## [1] 0.01310682
```

```
dbinom(8,15,0.25)
```

```
## [1] 0.01310682
```

$$P(X = 8) = p(8; 15, 0.5) = \binom{15}{8} \cdot 0.5^8 \cdot (1-0.5)^{15-8} = 0.1963806$$

```
choose(15,8)*0.5^(8)*(1-0.5)^(15-8)
```

```
## [1] 0.1963806
```

```
dbinom(8,15,0.5)
```

```
## [1] 0.1963806
```

P(X<=3)

$$P(X \leq 3) = F(3; 15, 0.25) = \sum_{i=0}^{3} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0.4612869$$

```
pbinom(3,15,0.25)
```

```
## [1] 0.4612869
```

$$P(X \leq 3) = F(3; 15, 0.5) = \sum_{i=0}^{3} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.01757813$$

```
pbinom(3,15,0.5)
```

```
## [1] 0.01757813
```

P(X<=7)

$$P(X \leq 7) = F(7;15,0.25) = \sum_{i=0}^{7} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0.9827002$$

```
pbinom(7,15,0.25)
```

```
## [1] 0.9827002
```

$$P(X \leq 7) = F(8;15,0.5) = \sum_{i=0}^{7} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.5$$

```
pbinom(7,15,0.5)
```

```
## [1] 0.5
```

P(X>=9)

$$P(X \geq 9) = 1-P(X<9) = 1-P(X \leq 8) = 1-F(8;15,0.25) = 1-\sum_{i=0}^{8} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0.004193014$$

```
pbinom(8,15,0.25,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.004193014
```

$$P(X \geq 9) = F(9;15,0.5) = 1-P(X<9) = 1-P(X \leq 8) = 1-\sum_{i=0}^{8} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.3036194$$

```
pbinom(8,15,0.5,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3036194
```

P(X>=12)

$$P(X \geq 12) = 1-P(X<12) = 1-P(X \leq 11) = 1-F(11;15,0.25) = 1-\sum_{i=0}^{11} \binom{15}{i} \cdot 0.25^i \cdot (1-0.25)^{15-i} = 0$$

```
pbinom(12,15,0.25,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 9.229407e-07
```

$$P(X \geq 12) = F(12;15,0.5) = 1-P(X<12) = 1-P(X \leq 11) = 1-\sum_{i=0}^{11} \binom{15}{i} \cdot 0.5^i \cdot (1-0.5)^{15-i} = 0.01757813$$

```
pbinom(11,15,0.5,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.01757813
```

b)

Aproxímense los valores de las probabilidades anteriores mediante el empleo de la distribución normal.

P(X=8)

$$P(X=8) = P\left(Z = \frac{8-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot (1-0.25)}}\right) = p(2.53;0,1) = 0$$

```
dnorm((8-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))))
```

```
## [1] 0.01608208
```

$$P(X=8) = P\left(Z = \frac{8-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot (1-0.5)}}\right) = p(2.25;0,1) = 0$$

P(X<=3)

$$P(X\leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot (1-0.25)}}\right) = p(-0.447;0,1) = 0.328$$

```
pnorm((3-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))))
```

```
## [1] 0.3273604
```

$$P(X\leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot (1-0.5)}}\right) = p(-2.32;0,1) = 0.0102$$

```
pnorm((3-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))))
```

```
## [1] 0.01006838
```

P(X<=7)

$$P(X\leq 7) = P\left(Z \leq \frac{7-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot (1-0.25)}}\right) = p(1.937;0,1) = 0.9735$$

```
pnorm((7-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))))
```

```
## [1] 0.9736838
```

$$P(X\leq 7) = P\left(Z \leq \frac{7-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot (1-0.5)}}\right) = p(-0.258;0,1) = 0.397$$

```
pnorm((7-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))))
```

```
## [1] 0.3981267
```

P(X>=9)

$$P(X\geq 9) = 1-P\left(Z \leq \frac{9-15\cdot 0.25}{\sqrt{15\cdot 0.25\cdot (1-0.25)}}\right) = 1-p(3.13;0,1) = 0$$

```
pnorm((9-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.0008725593
```

$$P(X\leq 9) = 1-P\left(Z \leq \frac{9-15\cdot 0.5}{\sqrt{15\cdot 0.5\cdot (1-0.5)}}\right) = 1-p(0.77;0,1) = 1-0.7794 = 0.2206$$

```
pnorm((9-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.219289
```

P(X>=12)

$$P(X \geq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9 - 15 \cdot 0.25}{\sqrt{15 \cdot 0.25 \cdot (1 - 0.25)}}\right) = 1 - p(4.91; 0, 1) = 0$$

```
pnorm((12-15*0.25)/(sqrt(15*0.25*(1-0.25))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 4.341614e-07
```

$$P(X \leq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9 - 15 \cdot 0.5}{\sqrt{15 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = 1 - p(2.32; 0, 1) = 1 - 0.9898 = 0.0102$$

```
pnorm((12-15*0.5)/(sqrt(15*0.5*(1-0.5))),lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.01006838
```

5.19.

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (a, b)

a)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre a una desviación estándar de la media?

Respuesta.- Sea $\sigma = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$ la desviación estándar de una distribución uniforme. Cabe mencionar que σ es la longitud de del subintervalo que queremos calcular. Dado que existe σ a la derecha y a la izquierda se tiene,

$$P(\sigma^- \leq X \leq \sigma^+) = 2 \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773503$$

```
punif(1/(sqrt(3)))
```

```
## [1] 0.5773503
```

b)

¿Puede tomar X un valor que se encuentre a dos desviaciones estándar de la media?

Repuesta.- No puedo, dado que tendríamos que multiplicar $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ por 4 el cual es mayor a 1.

5.20

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (a, b). ¿Cuál es la máxima distancia, en términos de la desviación estándar, a la que puede encontrarse un valor X a partir de la media?

Respuesta.- Sea x la máxima distnacia en terminos de la desviación estándar, entonces como se vio en el anterior ejercicio se tiene,

$$x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{3}$$

donde la distnacia máxima estará dada por $2\sqrt{3}$.

5.21

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intrevalo (a, b). Si $E(X) = 10$ y $Var(X) = 12$, encontrar los valores de a y de b.

Respuesta.- Sean $E(X) = \dfrac{a+b}{2} = 10$ y $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, entonces

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{a+b}{2} & = & 10 \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} & = & 12 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 20 \\ b-a & = & 12 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad a = 4, \quad b = 16.$$

5.22

Supóngase que la concentración de cierto contaminante se encuentra distribuida de manera uniforme en el intervalo de 4 a 20 ppm (partes por millón). Si se considera como tóxica una concentración de 15 ppm o más ¿Cuál es la probabilidad de que al tomarse una muestra la concentración de ésta sea tóxica?

Respuesta.- Sea $a = 4$ y $b = 20$ entonces,

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - F(15; 3, 20) = 1 - \frac{15-4}{20-4} = 0.3125$$

```
punif(15,4,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.3125
```

5.23

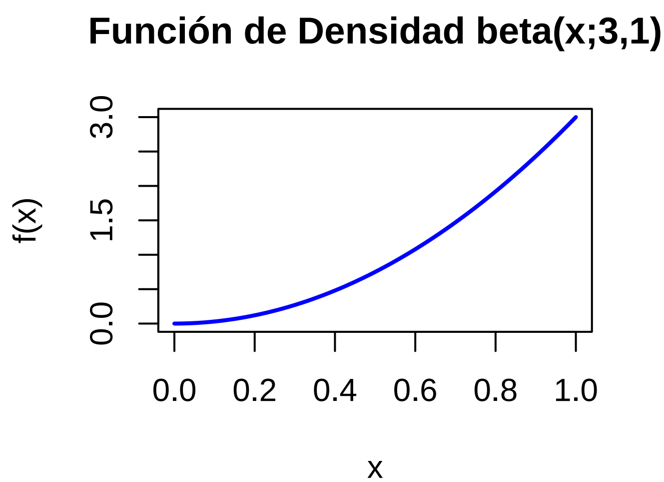
Sea X una variable aleatoria con distribución beta y parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 1$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad.

Respuesta.-

```
curve(dbeta(x,3,1),xlim=c(0,1),col="blue",lwd=2,
      xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad beta(x;3,1)")
```



b)

Obtener la media, la varianza, la desviación media, el coeficiente de asimetría y a curtosis relativa.

Respuesta.- La media de la distribución beta viene dada por

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+1} = 0.75$$

La varianza viene dada por

$$Var(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{3\cdot 1}{(3+1)^2(3+1+1)} = 0.0375$$

```r
alpha=3
beta = 1
alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1))
```

```
## [1] 0.0375
```

Coeficiente de asimetría.

$$\alpha_3(X) = \frac{2(\beta-\alpha)\sqrt{\alpha+\beta+1}}{\sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta+2)} = \frac{2(1-3)\sqrt{3+1+1}}{\sqrt{3\cdot 1}(3+1+2)} = -0.860663.$$

```r
alpha=3
beta = 1
(2*(beta-alpha)*sqrt(alpha+beta+1))/(sqrt(alpha*beta)*(alpha+beta+2))
```

```
## [1] -0.860663
```

Curtosis relativa

$$\alpha_3(X) = \frac{3(\alpha+\beta+1)\left[2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta(\alpha+\beta-6)\right]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} = \frac{3(3+1+1)\left[2(3+1)^2+3\cdot 1(3+1-6)\right]}{3\cdot 1(3+1+2)(3+1+3)} = 3.095238.$$

```r
alpha=3
beta = 1
(3*(alpha+beta+1)*(2*(alpha+beta)^2+alpha*beta*(alpha+beta-6)))/
  (alpha*beta*(alpha+beta+2)*(alpha+beta+3))
```

```
## [1] 3.095238
```

c)

¿Cual es la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre dentro de una desviación estándar a partir de la media? ¿A dos desviaciónes estándar?

Respuesta.- Sean $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\sqrt{Var(x)} = \sqrt{\frac{3\cdot 1}{(3+1)^2(3+1+1)}} = \sqrt{0.0375}$ y $= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+1} = 0.75$, entonces

$$
\begin{aligned}
P\left(0.75-\sqrt{0.0375} \leq X \leq 0.75+\sqrt{0.0375}\right) &= F\left(0.75+\sqrt{0.0375};3,1\right) - F\left(0.75-\sqrt{0.0375};3,1\right) \\
&= \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} \int_0^{0.75+\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\, dt \\
&- \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} \int_0^{0.75-\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\, dt \\
&= 0.6680896
\end{aligned}
$$

```
pbeta(sqrt(0.0375)+0.75,3,1) - pbeta(0.75-sqrt(0.0375),3,1)
```

```
## [1] 0.6680896
```

$$
\begin{aligned}
P\left(0.75-2\sqrt{0.0375} \leq X \leq 0.75+2\sqrt{0.0375}\right) &= F\left(0.75+2\sqrt{0.0375};3,1\right) - F\left(0.75-2\sqrt{0.0375};3,1\right) \\
&= \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} \int_0^{0.75+2\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\, dt \\
&- \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} \int_0^{0.75-2\sqrt{0.0375}} t^{3-1}(1-t)^{1-1}\, dt \\
&= 0.9522857.
\end{aligned}
$$

```
pbeta(2*sqrt(0.0375)+0.75,3,1) - pbeta(0.75-2*sqrt(0.0375),3,1)
```

```
## [1] 0.9522857
```

5.24.

Si los parámetros de la distribución beta son enteros, puede demostrarse que la función de distribución acumulativa beta se encuentra relacionada con la distribución binomial en la siguiente forma:

$$P(X<p) = I_p(\alpha,\beta) = \sum_{y=\alpha}^{n} \frac{n!}{(n-y)!y!} p^y (1-p)^{n-y},$$

en donde $n = \alpha+\beta-1$ y $0<p<1$. Si X es una variable aleatoria con una distribución beta con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, emplear la relación anterior para obtener $P(X<0.1)$, $P(X<0.25)$ y $P(X<0.5)$.

Respuesta.- Sea $n = 2+3-1 = 4$ entonces

Para P(X<0.1)

$$P(X<0.1) = I_{0.1}(\alpha,\beta) = \sum_{y=2}^{4} \frac{4!}{(4-2)2!} 0.1^2 (1-0.1)^{n-2} = 0.0523.$$

```
a=2
b=3
n=a+b-1
p = 0.1
```

```
sum=0
for(y in a:n){
  sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
sum
```

```
## [1] 0.0523
```

```
pbeta(p,a,b)
```

```
## [1] 0.0523
```

Para P(X<0.25)

$$P(X<0.1)=I_{0.25}(\alpha,\beta)=\sum_{y=2}^{4}\frac{n!}{(n-2)2!}0.25^2(1-0.25)^{n-2}=0.267188.$$

```
a=2
b=3
n=a+b-1
p = 0.25
sum=0
for(y in a:n){
  sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
sum
```

```
## [1] 0.2617188
```

```
pbeta(p,a,b)
```

```
## [1] 0.2617188
```

Para P(X<0.5)

$$P(X<0.1)=I_{0.5}(\alpha,\beta)=\sum_{y=2}^{4}\frac{n!}{(n-2)2!}0.5^2(1-0.5)^{n-2}=0.6875.$$

```
a=2
b=3
n=a+b-1
p = 0.5
sum=0
for(y in a:n){
  sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
sum
```

```
## [1] 0.6875
```

```
pbeta(p,a,b)
```

```
## [1] 0.6875
```

5.25.

Tomando como referencia el ejercicio anterior, determinar la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre dentro de un intervalo igual a una desviación estándar de la media y posteriormente, de un intervalo igual a dos desviaciones estándar.

Respuesta.- Sean $n = 3+2-1 = 4$ y

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+2} = 0.6$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{3\cdot 2}{(3+2)^2(3+2+1)} = 0.04, \qquad \sqrt{Var(X)} = 0.2$$

```
alpha = 3
beta = 2
sqrt(alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1)))
```

```
## [1] 0.2
```

$$\begin{aligned} P(0.6-0.2 < X < 0.6+0.2) &= I_{0.8}(3,2) - I_{0.4}(3,2) \\ &= \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.8^2(1-0.8)^{n-2} - \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.4^2(1-0.4)^{n-2} \\ &= 0.64. \end{aligned}$$

```
beta=function(p,a,b){
  sum=0
  n=a+b-1
  for(y in a:n){
    sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
  return(sum)
}
beta(0.8,3,2)-beta(0.4,3,2)
```

```
## [1] 0.64
```

```
pbeta(0.8,3,2)-pbeta(0.4,3,2)
```

```
## [1] 0.64
```

Y para dos desviaciones estándar se tiene,

$$\begin{aligned} P(0.6-2\cdot 0.2 < X < 0.6+2\cdot 0.2) &= I_{1}(3,2) - I_{0.2}(3,2) \\ &= \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 1^2(1-1)^{n-2} - \sum_{y=2}^{4} \frac{n!}{(n-2)2!} 0.2^2(1-0.2)^{n-2} \\ &= 0.9728. \end{aligned}$$

```r
beta=function(p,a,b){
  sum=0
  n=a+b-1
  for(y in a:n){
    sum = sum + ( factorial(n) / (factorial(n-y)*factorial(y) )*p^(y)*(1-p)^(n-y))
}
  return(sum)
}
beta(1,3,2)-beta(0.2,3,2)
```

```
## [1] 0.9728
```

```r
pbeta(1,3,2)-pbeta(0.2,3,2)
```

```
## [1] 0.9728
```

5.26.

La proporción de unidades defectuosas en un proceso de fabricación es una variable aleatoria que se encuentra aproximada por una distribución beta con $\alpha = 1$ y $\beta = 20$.

a)

¿Cuál es el valor de la media y de la desviación estándar?

Respuesta.-

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{1+20} = 0.04761905$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1\cdot 20}{(1+20)^2(1+20+1)} = 0.002061431, \qquad \sqrt{Var(X)} = 0.04540298$$

```r
alpha = 1
beta = 20
sqrt(alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1)))
```

```
## [1] 0.04540298
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de artículos defectuosos sea mayor que un 10%? ¿Mayor que un 15?.

Respuesta.-

Mayor que un 10%

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 0.1) &= 1 - F(x;\alpha,\beta) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt} \\
&= 1 - F(0.1;1,20) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^{0.1} t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt} = 0.1215767.
\end{aligned}
$$

```r
bx = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,0.1)
b = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,1)
1-bx$value/b$value
```

```
## [1] 0.1215767
```

```r
pbeta(0.1,1,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1215767
```

Mayor a 15%

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 0.1) &= 1 - F(x;\alpha,\beta) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt} \\
&= 1 - F(0.15;1,20) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^{0.15} t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{20-1}\,dt} = 0.03875953.
\end{aligned}
$$

```r
bx = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,0.15)
b = integrate(function(x) x^{1-1}*(1-x)^{20-1},0,1)
1-bx$value/b$value
```

```
## [1] 0.03875953
```

```r
pbeta(0.15,1,20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.03875953
```

5.27.

Aproxime su respuesta al inciso b) del ejercicio anterior mediante el empleo de la aproximación normal dada por la expresión

$$F(x;\alpha,\beta) = F_N(x_u,0,1) - F_N(z_t;0,1)$$

tal que

$$z_u = \frac{[\beta] - 0.5 - (\alpha+\beta-1)(1-x)}{[x(\alpha+\beta-1)(1-x)]^{1/2}},$$

$$z_t = -\frac{(\alpha+\beta-1)(1-x)+0.5}{[x(\alpha+\beta-1)(1-x)]^{1/2}},$$

y $[\beta]$ denota el entero más grande que no excesa a β.

Respuesta.- Sean $p = 0.1$,

$$z_u = \frac{[20]-0.5-(1+20-1)(1-0.1)}{[0.1(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} = 1.118034$$

y

$$z_t = -\frac{(1+20-1)(1-0.1)+0.5}{[0.1(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} - 13.78909$$

$$\begin{array}{rcl} P(X \geq 1) & = & 1 - F(x;1,20) \\ & = & 1 - F_N(1.118034;0,1) - F_N(-13.78909,0,1) \\ & = & 0.1317762 \end{array}$$

```
a = 1
b = 20
x = 0.1
zu = (floor(b)-0.5-(a+b-1)*(1-x)) / ((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
zt = -((a+b-1)*(1-x)+0.5)/((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
1-(pnorm(zu)-pnorm(zt))
```

```
## [1] 0.1317762
```

Sean $p = 0.15$,

$$z_u = \frac{[20]-0.5-(1+20-1)(1-0.15)}{[0.15(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} = 1.565561$$

y

$$z_t = -\frac{(1+20-1)(1-0.1)+0.5}{[0.1(1+20-1)(1-0.1)]^{1/2}} = -10.95893$$

$$\begin{array}{rcl} P(X \geq 1) & = & 1 - F(x;1,20) \\ & = & 1 - F_N(1.565561;0,1) - F_N(-10.95893,0,1) \\ & = & 0.05872575. \end{array}$$

```
a = 1
b = 20
x = 0.15
zu = (floor(b)-0.5-(a+b-1)*(1-x)) / ((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
zt = -((a+b-1)*(1-x)+0.5)/((x*(a+b-1)*(1-x))^(1/2))
1-(pnorm(zu)-pnorm(zt))
```

```
## [1] 0.05872575
```

5.28.

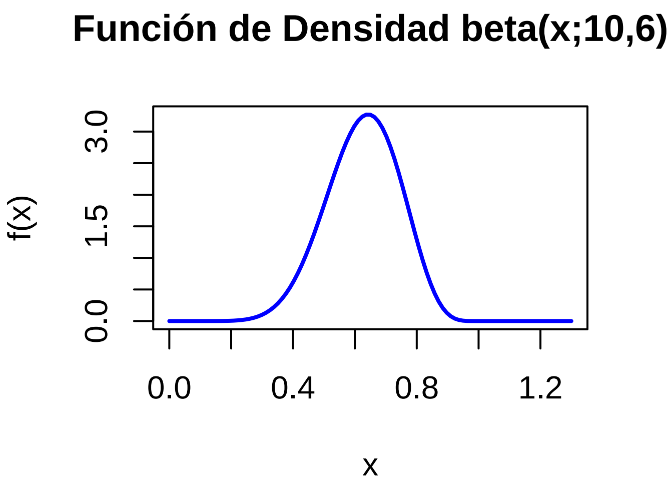
La comptencia en el mercado de una compañia de computadoras varía de manera aleatoria de acuerdo con una distribución beta con $\alpha = 10$ y $\beta = 6$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad

Respuesta.-

```
curve(dbeta(x,10,6),xlim=c(0,1.3),col="blue",lwd=2,
xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad beta(x;10,6)")
```



b)

Encontrar la media y la desviación estándar.

Respuesta.-

$$= E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{10}{10+6} = 0.625$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{10\cdot 6}{(10+6)^2(10+6+1)} = 0.01378676, \qquad \sqrt{Var(X)} = 0.1174171.$$

```
alpha = 10
beta = 6
sqrt(alpha*beta/((alpha+beta)^2*(alpha+beta+1)))
```

```
## [1] 0.1174171
```

c)

Obtener la probabilidad de que la competencia en el mercado sea menor que la media.

Respuesta.-

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 0.625) &= F(x;\alpha,\beta) = \frac{\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt} \\
&= F(0.625;10,6) = \frac{\displaystyle\int_0^{0.625} t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt} = 0.4826844.
\end{aligned}
$$

```r
bx = integrate(function(x) x^{10-1}*(1-x)^{6-1},0,0.625)
b = integrate(function(x) x^{10-1}*(1-x)^{6-1},0,1)
bx$value/b$value
```

```
## [1] 0.4826844
```

```r
pbeta(0.625,10,6)
```

```
## [1] 0.4826844
```

d)

Encontrar la probabilidad de que la competencia en el mercado se encuentre dentro de una desviación estándar de la media, y posteriormente de un intervalo igual a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Para una desviación estándar se tiene, $\sqrt{Var(X)} = 0.1174171$ entonces

$$
\begin{aligned}
P(0.625 - 0.1174171 \leq X \leq 0.625 + 0.1174171) &= F(X \leq 0.7424171;10,6) - F(X \leq 0.5075829;10,6) \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{0.7424171} t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt} \\
&+ \frac{\displaystyle\int_0^{0.5075829} t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 t^{10-1}(1-t)^{6-1}\,dt} \\
&= 0.6692339.
\end{aligned}
$$

```r
pbeta(0.7424171,10,6) - pbeta(0.5075829,10,6)
```

```
## [1] 0.6692339
```

5.29.

Sea X una variable aleatoria con distribución gama con $\alpha = 2$ y $\beta = 50$

a)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor menor al valor de la media?

Respuesta.- La media viene dada por $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 50 = 100$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(X \leq E(X)) = P(X \leq 50 * 2) &= F(x;\alpha,\theta) = F(100,2,50) \\ &= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma(100/50;2)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du} = \frac{\displaystyle\int_0^{2} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\ &= 0.5939942. \end{aligned}$$

```
alpha=2
theta=50
x = 100
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.5939942
```

```
pgamma(100,2,scale = 50)
```

```
## [1] 0.5939942
```

b)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor mayor de dos desviaciones estándar con respecto a la media?

Respuesta.- Sean $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 50 = 100$ y $2\sqrt{Var(X)} = 2\sqrt{\alpha\theta^2} = 2 \cdot 50\sqrt{2} = 100\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned} P(X \geq E(X) + 2\sqrt{Var(X)}) &= P(X \geq 100 + 100\sqrt{2}) \\ &= F(x;\alpha,\theta) \\ &= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma\left(\frac{100+100\sqrt{2}}{50};2\right)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{100+100\sqrt{2}}{50}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\ &= 0.04662213. \end{aligned}$$

```
alpha=2
theta=50
```

```r
x = 100+2*sqrt(2)*50
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
1-gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.04662213
```

```r
pgamma(100+2*sqrt(2)*50,2,scale = 50,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.04662213
```

c)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor menor al de su moda?

Respuesta.- La moda viene dado por $(\alpha-1)\theta=(2-1)50=50$, de donde

$$\begin{aligned}
P(X\leq Moda)=P(X\leq 50) &= F(x;\alpha,\theta)=F(50,2,50)\\
&= \frac{\gamma(x/\theta;\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\gamma(50/50;2)}{\Gamma(2)}\\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}=\frac{\displaystyle\int_0^{1} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du}\\
&= 0.2642411.
\end{aligned}$$

```r
alpha=2
theta=50
x = (alpha-1)*theta
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.2642411
```

```r
pgamma((2-1)*50,2,scale=50)
```

```
## [1] 0.2642411
```

5.30.

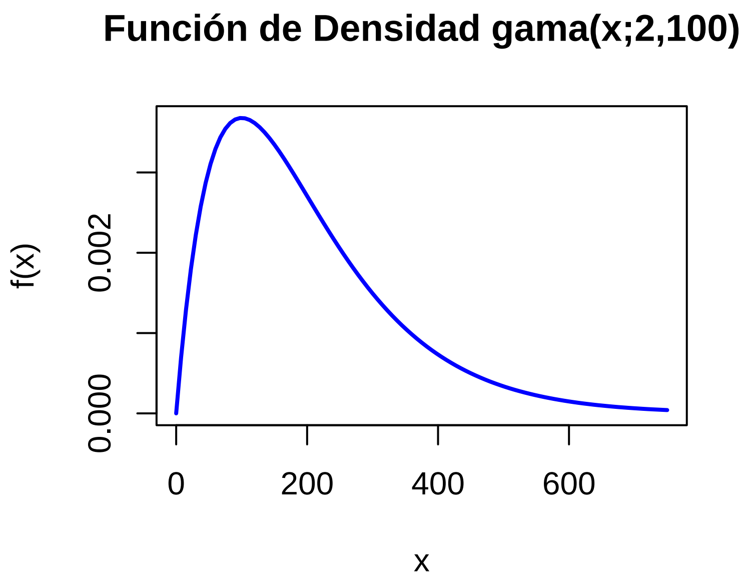
Sea X una variable aleatoria con distribución gama y $\alpha=2$ y $\theta=100$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad.

Respuesta.-

```r
curve(dgamma(x,2,scale = 100),xlim=c(0,750),col="blue",lwd=2,
xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad gama(x;2,100)")
```



b)

Encontrar la probabilidad de que, primero, X tome un valor dentro de un intervalo igual a una desviación estándar de la media y, posteriormente, de un intervalo igual a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Sean $E(X) = \alpha\theta = 2 \cdot 100 = 200$ y $\sqrt{Var(X)} = \theta\sqrt{\alpha} = 100\sqrt{2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
P\left(200 - 100\sqrt{2} \leq X \leq 200 + 100\sqrt{2}\right) &= F\left(200 + 100\sqrt{2}; 2, 100\right) - F\left(200 - 100\sqrt{2}; 2, 100\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{200 + 100\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{200 - 100\sqrt{2}}{100}; 2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200+100\sqrt{2}}{100}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200-100\sqrt{2}}{100}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.7375188.
\end{aligned}
$$

```
pgamma(2*100+100*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*100-100*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.7375188
```

Por otro lado sea $2\sqrt{Var(X)} = 200\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(200-200\sqrt{2} \leq X \leq 200+200\sqrt{2}\right) &= F\left(200+200\sqrt{2};2,100\right) - F\left(200-200\sqrt{2},2,100\right)\\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{200+200\sqrt{2}}{100};2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{200-200\sqrt{2}}{100};2\right)}{\Gamma(2)}\\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200+200\sqrt{2}}{100}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{200-200\sqrt{2}}{100}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du}\\
&= 0.9533779.
\end{aligned}$$

```r
pgamma(2*100+200*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*100-200*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.9533779
```

c)

¿Cómo cambiarian sus respuestas a la parte b) si $\theta = 200$?

Respuesta.- Sean $E(X) = \alpha\theta = 2\cdot 200 = 400$ y $\sqrt{Var(X)} = \theta\sqrt{\alpha} = 200\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(400-200\sqrt{2} \leq X \leq 400+200\sqrt{2}\right) &= F\left(400+200\sqrt{2};2,200\right) - F\left(400-200\sqrt{2};2,200\right)\\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{400+200\sqrt{2}}{200};2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{400-200\sqrt{2}}{200};2\right)}{\Gamma(2)}\\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400+200\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400-200\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du}\\
&= 0.6644504.
\end{aligned}$$

```r
pgamma(2*200+200*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*200-200*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.6644504
```

Por otro lado sea $2\sqrt{Var(X)} = 400\sqrt{2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
P\left(400-400\sqrt{2} \leq X \leq 400+400\sqrt{2}\right) &= F\left(400+400\sqrt{2};2,200\right) - F\left(400-400\sqrt{2};2,200\right) \\
&= \frac{\gamma\left(\dfrac{400+400\sqrt{2}}{200};2\right)}{\Gamma(2)} - \frac{\gamma\left(\dfrac{400-400\sqrt{2}}{200};2\right)}{\Gamma(2)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400+400\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} - \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{400-400\sqrt{2}}{200}} u^{2-1}e^{-u}\,du}{\displaystyle\int_0^{\infty} u^{2-1}e^{-u}\,du} \\
&= 0.9993181.
\end{aligned}
$$

```
pgamma(2*200+400*sqrt(2),2,scale = 100) - pgamma(2*200-400*sqrt(2),2,scale = 100)
```

```
## [1] 0.9993181
```

5.31.

La edad a la que un hombre contrae matrimonio por primera vez es una variable aletoria con distribución gama. Si la edad promedio es de 30 años y lo más común es que el hombre se case a los 22 años, encontrar los valores de los parámetros α y θ, apra esta distribución.

Respuesta.- Sea $E(X) = \alpha\theta = 30$ y $moda = (\alpha - 1)\theta$, entonces

$$
\left\{\begin{array}{rcl} \alpha\beta &=& 30 \\ (\alpha-1)\beta &=& 22 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{30}{8}, \qquad \beta = 8
$$

3.32.

La información que a continuación se presenta es una tabulación parcial de la función gama incompleta tal como se encuentra definida por $I(u,p) = F(x;\alpha,\theta)$ para $\alpha = 16$

u	$I(u,15)$
2.0	0.0082
2.5	0.0487
3.0	0.1556
3.5	0.3306
4.0	0.5333
4.5	0.7133
5.0	0.8435
5.5	0.9231
6.0	0.9656
6.5	0.9858
7.0	0.9946

Para $\theta = 10$, comparar estas probabilidades con las que se proporcionaron al emplear una aproximación normal.

Respuestas.- Sean $\mu = E(X) = 16 \cdot 10 = 160$, $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{16 \cdot 10^2} = 40$ y $u = \dfrac{x}{\theta\sqrt{\alpha}} \;\Rightarrow\; x = u \cdot \theta\sqrt{\alpha}$, entonces

```
u = c(2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5,6,6.5,7)
for(i in u){
  x=i*10*sqrt(16)
  print(pnorm(x,160,40))
}
```

```
## [1] 0.02275013
## [1] 0.0668072
## [1] 0.1586553
## [1] 0.3085375
## [1] 0.5
## [1] 0.6914625
## [1] 0.8413447
## [1] 0.9331928
## [1] 0.9772499
## [1] 0.9937903
## [1] 0.9986501
```

u	$I(u, 15)$	$F(x; \mu, \sigma)$
2.0	0.0082	0.02275013
2.5	0.0487	0.0668072
3.0	0.1556	0.1586553
3.5	0.3306	0.3085375
4.0	0.5333	0.5
4.5	0.7133	0.6914625
5.0	0.8435	0.8413447
5.5	0.9231	0.9331928
6.0	0.9656	0.9772499
6.5	0.9858	0.9937903
7.0	0.9946	0.9986501

5.33.

Mediante el empleo de la función generadora de momentos de la distribución gama, encontrar expresiones para la media y la varianza.

Respuesta.-; La función generadora de momentos para la variable aleatoria gama X está dada por:

$$E[e^{tX}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-\frac{1-\theta t}{\theta}}\ dx.$$

Sea $u = \frac{(1-\theta t)x}{\theta}$, $x = \dfrac{u\theta}{1-\theta t}$ y $dx = \left[\dfrac{\theta}{1-\theta t}\right]\ du$, entonces:

$$\begin{aligned}
E\left[e^{tX}\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\theta} \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}\theta^{\alpha-1}}{(1-\theta t)^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{\theta}{1-\theta t}\ du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\theta t)^\alpha} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-y}\ du \\
&= (1-\theta t)^{-\alpha}, \quad 0 \le t < \frac{1}{\theta}.
\end{aligned}$$

Sacando la primera y segunda derivada tenemos

$$\left.\frac{dE[e^{tX}]}{dt}\right|_{t=0} = -\alpha(1-\theta t)^{-\alpha-1}\cdot(-\theta)\Big|_{t=0} = \alpha\theta = E[X].$$

$$\left.\frac{d^2E[e^{tX}]}{dt^2}\right|_{t=0} = -\alpha(-\alpha-1)(1-\theta t)^{-\alpha-2}(-\theta)(-\theta)\Big|_{t=0} = \alpha^2\theta^2+\alpha\theta^2 = E[X^2]$$

Por lo tanto ya que $\sigma = Var(X) = E[X^2]-E[X]^2$, entonces

$$Var(X) = \alpha^2\theta^2+\alpha\theta^2-(\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2.$$

5.34.

La duración de cierto componente es una variable aleatoria con distribución gama y parámetro $\alpha = 2$.

a)

Obtener la función de confiabilidad.

Respuesta.- La función es está dada por

$$R(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\lambda^2}{\Gamma(2)}\int_t^\infty t^{2-1}e^{-\lambda t}\,dt$$

b)

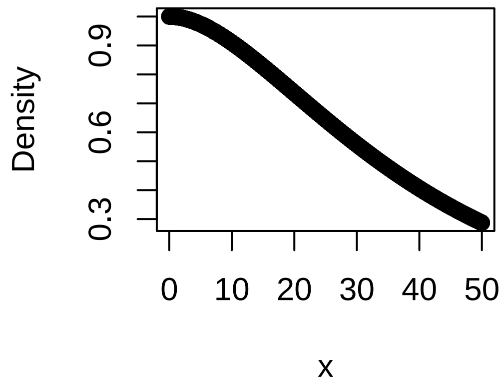
Para $\theta = 20$, obtener la frecuencia de falla y graficarla como una función de t.

Respuesta.- Sea $\lambda = \dfrac{1}{\theta} = \dfrac{1}{20}$, entonces

$$R(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\frac{1}{20^2}}{\Gamma(2)}\int_t^\infty t^{2-1}e^{-\frac{1}{20}t}\,dt = \frac{1}{20^2\Gamma(2)}\int_t^\infty t^{2-1}e^{-\frac{1}{20}t}\,dt$$

```
F <- function(a) {
        return((1/(20^2*integrate(function(x) (x)^{alpha-1}*exp(-x),
                                 lower = 0,
                                 upper = Inf)$value))*integrate(function (x) x^(2-1)*exp(-1/20*x),a,Inf
               }
x<-c()
for (i in seq(0,50,.01)) {
  x<-c(x,F(i))
}

plot(seq(0,50,.01),x,xlab = "x", ylab="Density")
```



c)

Si $\theta = 20$. ¿Cuál es la confianza del componente en $t = 80$?

Respuesta.-

$$R(t) = \frac{\frac{1}{20^2}}{\Gamma(2)} \int_{20}^{\infty} 20^{2-1} e^{-\frac{1}{20}t}\, dt$$

5.35 Para armar un artículo se necesita cuatro etapas. Si el tiempo total necesario para armar un artículo en horas, es una variable aleatoria con distribución gama y parámetro de escala $\theta = 2$. ¿Cuál es la probabilidad de armar un artículo en menos de 15 horas?

Respuesta.- Sea $\alpha = 4$, entonces

$$\begin{aligned}
P(X \leq 15) &= \; = F(15, 4, 2) \\
&= \frac{\gamma(x/\theta; \alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\gamma(15/2; 4)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{\int_0^{x/\theta} u^{\alpha-1} e^{-u}\, du}{\int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u}\, du} = \frac{\int_0^{\frac{15}{2}} u^{4-1} e^{-u}\, du}{\int_0^{\infty} u^{4-1} e^{-u}\, du} \\
&= 0.2642411.
\end{aligned}$$

```r
alpha=4
theta=2
x = 15
gammaI = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = x/theta)
gamma = integrate(function(u) (u)^{alpha-1}*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
gammaI$value/gamma$value
```

```
## [1] 0.9408545
```

```r
pgamma(15,4,scale=2)
```

```
## [1] 0.9408545
```

5.36.

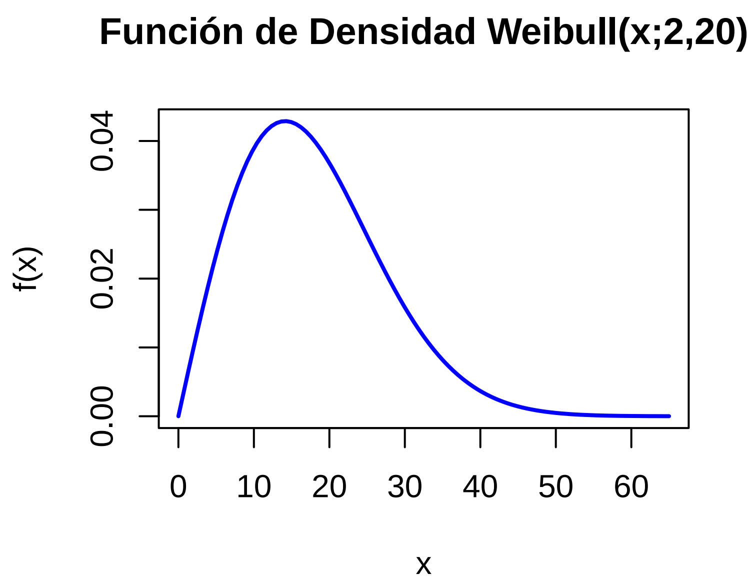
Sea X una variable aleatoria con distribución de Weibull y parámetros $\alpha = 2$ y $\theta = 20$.

a)

Graficar la función de densidad de probabilidad.

Respuesta.-

```
curve(dweibull(x,2,scale = 20),xlim=c(0,65),col="blue",lwd=2,
xlab="x",ylab="f(x)",main="Función de Densidad Weibull(x;2,20)")
```



b)

Obtener la probabilidad de que X tome un valor mayor que la media.

Respuesta.- Sea la media

$$E(X) = \theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 20\int_0^{\infty} u^{1/2}e^{-u}\, du = 17.72453$$

```
int = integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
20*int$value
```

```
## [1] 17.72453
```

Entonces,

$$P(X \geq E(X)) = 1 - P(X \leq E(X)) = 1 - F(E(X); \alpha, \theta) = 1 - \left[1 - e^{-(E(X)/\theta)^{\alpha}}\right] = e^{-(E(X)/\theta)^{\alpha}}$$

$$P(X \geq 17.72453) = e^{-(17.72453/20)^2} = 0.4559385.$$

```
int = integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
EX=20*int$value
exp(-(EX/20)^2)
```

```
## [1] 0.4559385
```

```
pweibull(EX,2,scale = 20,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.4559385
```

c)

Obtener la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre en un intervalo igual a una desviación estándar y después en un intervalo a dos desviaciones estándar de la media.

Respuesta.- Sea la la desviación estándar como se detalla a continuación

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{20^2 \left[\int_0^\infty u^{2/2} e^{-u}\, du - \int_0^\infty u^{1/2} e^{-u}\, du \right]} = 9.265045.$$

```
int = integrate(function(u) u^(2/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
int1 = integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u),lower = 0, upper = Inf)
sqrt(20^2*(int$value-(int1$value)^2))
```

```
## [1] 9.265045
```

Entonces,

$$P(X \le 9.265045) = F(9.265045; 2, 20) = 1 - e^{-(9.265045/20)^2} = 0.193138.$$

```
1-exp(-(9.265045/20)^2)
```

```
## [1] 0.193138
```

Luego sean $E(X) = 17.72453$ y $2\sqrt{Var(X)} = 2 * 0.193138 = 0.386276$, entonces

$$\begin{aligned} P(17.72453 - 0.386276 \le X \le 17.72453 + 0.386276) &= F(17.63158; 2, 20) - F(16.85902; 2, 20) \\ &= 1 - e^{-(17.63158/20)^2} - \left[1 - e^{(16.85902/20)^2} \right] \\ &= 0.03166598. \end{aligned}$$

```
1-exp(-(17.63158/20)^2)-(1-exp(-(16.85902/20)^2))
```

```
## [1] 0.03166598
```

```
pweibull(17.63158,2,scale=20) - pweibull(16.85902,2,scale=20)
```

```
## [1] 0.03166598
```

5.37.

El tiempo de duración de un sistema se encuentra aproximado por una distribución Wiebull con $\alpha = 2$ y $\theta = 50$.

a)

Obtener la media y los deciles de esta distribución.

Respuesta.- Sea $E(X) = \theta\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)$, entonces

$$E(X) = 50\int_0^\infty u^{1+\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,du = 50\int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}}e^{-u}\,du = 44.31132.$$

```
50*integrate(function(u) u^(1/2)*exp(-u), lower = 0, upper = Inf)$value
```

```
## [1] 44.31132
```

Los deciles estan dados por $x_q = \theta\left[\ln\left(\dfrac{1}{1-q}\right)\right]^{1-\alpha}$, entonces

$$x_{0.1} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.1}\right)\right]^{1/2} = 16.22964.$$

```
50*((log(1/(1-0.1))))^(1/2)
```

```
## [1] 16.22964
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.2}\right)\right]^{1/2} = 23.61904.$$

```
50*((log(1/(1-0.2))))^(1/2)
```

```
## [1] 23.61904
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.3}\right)\right]^{1/2} = 29.86113.$$

```
50*((log(1/(1-0.3))))^(1/2)
```

```
## [1] 29.86113
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.4}\right)\right]^{1/2} = 35.73603.$$

```
50*((log(1/(1-0.4))))^(1/2)
```

```
## [1] 35.73603
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.5}\right)\right]^{1/2} = 41.62773.$$

```
50*((log(1/(1-0.5))))^(1/2)
```

```
## [1] 41.62773
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.6}\right)\right]^{1/2} = 47.86154.$$

```r
50*((log(1/(1-0.6))))^(1/2)
```

```
## [1] 47.86154
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.7}\right)\right]^{1/2} = 54.86285.$$

```r
50*((log(1/(1-0.7))))^(1/2)
```

```
## [1] 54.86285
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.8}\right)\right]^{1/2} = 63.43181.$$

```r
50*((log(1/(1-0.8))))^(1/2)
```

```
## [1] 63.43181
```

$$x_{0.2} = 50\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.9}\right)\right]^{1/2} = 75.87136.$$

```r
50*((log(1/(1-0.9))))^(1/2)
```

```
## [1] 75.87136
```

b)

Obtener la confiabilidad de este sistema en $t = 75$.

Respuesta.-

$$P(X \geq 75) = 1 - (1 - e^{-(x/\theta)^{\alpha}}) = 1 - (1 - e^{-(75/50)^2}) = 0.1053992.$$

```r
exp(-(75/50)^2)
```

```
## [1] 0.1053992
```

```r
pweibull(75,2,scale=50,lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1053992
```

5.38.

Un sistema está formado por dos componentes independientes A y B. El sistema permanecerá operando mientras uno o ambos componentes funcionen. Si el tiempo de vida de la componente A es una variable aleatoria de Weibull con $\alpha = 1/2$ y $\theta = 10$, y si el tiempo de vida de B es también una variable de Weibull con $\alpha = 2$ y $\theta = 12$. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema trabaje más de 20 horas?.

Respuesta.- Sabiendo que A y B son independientes entonces,

$$P_A(X \geq 20) + P_B(X \geq 20) = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{20}{10}\right)^{1/2}}\right] + 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{20}{12}\right)^2}\right] = e^{-\left(\frac{20}{10}\right)^{1/2}} + e^{-\left(\frac{20}{12}\right)^2} = 0.3052933.$$

```r
exp(-(20/10)^(1/2))+exp(-(20/12)^2)
```

```
## [1] 0.3052933
```

```r
pweibull(20,1/2,scale=10,lower.tail=FALSE) + pweibull(20,2,scale=12,lower.tail=FALSE)
```

```
## [1] 0.3052933
```

5.39.

Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor mayor que la media?

Respuesta.- La media viene dado por $E(X) = \theta$, de donde la probabilidad de que X tome un valor mayor a la media vendrá dado por,

$$P(X \geq E(X)) = F(\theta; \theta) = 1 - \left(1 - e^{-\theta/\theta}\right) = e^{-1} = 0.3678794.$$

```r
exp(-1)
```

```
## [1] 0.3678794
```

b)

¿Cuáles son las probabilidades de que X tome un valor que se encuentre en un intervalo igual a una desviación estándar, primero y en un intervalo igual a dos desviación estándar de la media?

Respuesta.- Sea $E(X) = \theta$ y $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{\theta^2} = \theta$, entonces

$$P(\theta - \theta \leq X \leq \theta + \theta) = F(2; X) - F(0; X) = 1 - e^{-2\theta/\theta} - \left(1 - e^{-0/\theta}\right) = -e^{-2} + e^{-1} = 0.2325442.$$

```r
exp(-1)-exp(-2)
```

```
## [1] 0.2325442
```

5.40.

Si la frecuencia con que falla un componente es constante y la confiabilidad de este tiene un valor en $t = 55$ de 0.4,

a)

Obtener la función de densidad de probabilidad

Respuesta.- Sean la función de confiabilidad $R(55) = 0.4$ y la frecuencia de falla $h(t) = \dfrac{1}{\theta}$, entonces la función de densidad será,

$$f(55) = \frac{1}{\theta} \cdot 0.4 = \frac{0.4}{\theta}.$$

b)

Obtener la confiabilidad del componente para $t = 100$.

Respuesta.- Sea $R(t) = e^{-t/\theta} = 0.4$ y sea $t = 55$, entonces

$$\theta = \frac{-55}{\ln(0.4)} = 60.02.$$

De donde la confiabilidad vendrá dada por

$$P(T > 100) = 1 - F(100) = 1 - \left(1 - e^{-100/60.02}\right) = 0.1889805.$$

```
exp(-100/60.02)
```

```
## [1] 0.1889805
```

5.41.

Un dispositivo tiene una frecuencia de falla constante $h(t) = 10^{-2}$ por hora.

a)

¿Cuál es la confiabilidad del dispositivo para $t = 200$ horas?

Respuesta.- Sea $h(t) = \dfrac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \dfrac{1}{10^{-2}} = 100$, entonces la función de densidad de probabilidad viene dada por,

$$f(t) = \frac{1}{100}e^{-200/100} = 0.001353353.$$

Así la confiabilidad del dispositivo será,

$$R(t) = f(t)/h(t) = 0.001353353/10^{-2} = 0.1353353.$$

b)

Si 500 de estos dispositivos fallan de manera independiente, ¿cuál es el número esperado de fallas entre estos, después de 200 horas?

Respuesta.-; Estará dado por: $500(1 - 0.1353353) = 432.3324 = 433$.

5.42.

El compresor de una unidad de aire acondicionado tiene una frecuencia de falla $h(t) = 2 \cdot 10^{-8}t$ por hora.

a)

¿Cuál es la función de confiabilidad del compresor?

Respuesta.- Sea la función de confiabilidad $R(t) = f(t)/h(t)$, de donde

$$f(t) = h(t)e^{-\int_0^t h(t)\,dt} = 2 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8}t\,dx}$$

entonces,

$$R(t) = \frac{2 \cdot 10^{-8}e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8}t\,dx}}{2 \cdot 10^{-8}} = e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8}t\,dx}.$$

b)

¿Cuál es la confiabilidad del compresor para $t = 15000$ horas?

Respuesta.-

$$R(t) = e^{-\int_0^t 2\cdot 10^{-8} t \; dx} = e^{-\int_0^{15000} 2\cdot 10^{-8} 15000 \; dx} = e^{-6\cdot 10^{-4}} = 0.9994002.$$

c)

¿Cuál es la vida media del compresor?

Respuesta.- Sea la frecuencia de falla $h(x) = \dfrac{1}{\theta}$, y sabiendo que $E(X) = \theta$, entonces

$$E(X) = \theta = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{2\cdot 10^{-8}} = 5\cdot 10^7.$$

d)

¿Cuál es la mediana de su duración?

Respuesta.- La mediana viene dada por el valor cuantil con $\alpha = 1$,

$$x_{0.5} = \theta\left[\ln\left(\frac{1}{1-q}\right)\right]^{1/\alpha} = 5\cdot 10^7\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.5}\right)\right]^1 = 34657359.$$

```
5*10^7 * (log(1/(1-0.5)))
```

```
## [1] 34657359
```

5.43.

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Demostrar que la variable aleatoria $Y = -2\ln(X)$ tiene distribución chi-cuadrado con dos grados de libertad.

Respuesta.- Notemos que $y = -2\ln(x)$ es una función decreciente en el intrevalo $[0,1]$. Luego la relación inversa es,

$$x = e^{-y/2}$$

De donde el Jacobiano estará dado por

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|-\frac{1}{2}e^{-y/2}\right| = \frac{1}{\Gamma(2/2)\cdot 2^{\frac{2}{2}}}y^{\frac{2}{2}-1}e^{-y/2}$$

Así,

$$f_Y(y;a,b) = f_X\left(e^{-y/2},b,a\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{1-0}\cdot\frac{1}{\Gamma(2/2)\cdot 2^{2/2}}y^{2/2-1}e^{-y/2} = \frac{1}{\Gamma(2/2)\cdot 2^{2/2}}y^{2/2-1}e^{-y/2}$$

5.44.

Si X es una variable aleatoria con una distribución exponencial y parámetros θ, obtener la distribución de $Y = \dfrac{X-\theta}{\theta}$.

Respuesta.- Sea $f(x;\theta) = \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$ una distribución exponencial. De donde

$$f_Y\,(y;\theta) = f_X\left[g^{-1}(y);\theta\right]\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Por hipotesis

$$y = \frac{x-\theta}{\theta} \quad \Rightarrow \quad x = \theta y + \theta.$$

y

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \theta$$

Por lo tanto

$$f_Y(y;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\theta y+\theta}{\theta}} \cdot \theta = e^{-\frac{\theta y + \theta}{\theta}}.$$

5.45.

Si X es una variable aleatoria con una distribución de Weibull y parámetros α y θ obtener la distribución de $Y = X^{\alpha}$.

Respuesta.- Sea $\dfrac{\alpha}{\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-(x/\theta)^{\alpha}}$ la distribución de Weibull. De donde

$$f_Y\,(y;\alpha,\theta) = f_X\left[g^{-1}(y);\alpha,\theta\right]\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Por hipótesis,

$$y = x^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad x = y^{1/2}$$

y

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2} y^{-1/2}$$

Por lo tanto,

$$f_Y(y;\alpha,\theta) = \frac{\alpha}{\theta} y^{(1/2)^{\alpha-1}} e^{-\left[\left(y^{1/2}\right)/\theta\right]^{\alpha}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2}$$

5.46.

Seleccione una distribución de probabilidad discreta y una continua de la sección 5.9 y generar dos muestras aleatorias de 50 números aleatorios cada una. Para cada caso agrupe los datos y obtenga las frecuencias relativas. Calcule la media y la desviación estándar de cada una de las muestras y compare los resultados con los que se obtienen de manera teórica.

Respuesta.- La función de densidad de probabilidad de una distribución Weibull es:

$$f(x;\alpha,\theta) = \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-(x/\theta)^{\alpha}}, \qquad x > 0.$$

Para generar números aleatorios de Weibull $x > 0$, se resuelve la ecuación

$$\frac{\alpha}{\theta^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-(t/\theta)^\alpha}\,dt = u \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\alpha}{\theta^\alpha}\right)\left(-\frac{\theta^\alpha}{\alpha}\right)e^{-(x/\theta)^\alpha} = u$$

$$o \qquad 1 - e^{-(x/\theta)^\alpha} = u, \qquad y \qquad x = \theta\left[\ln\left(\frac{1}{1-u}\right)\right]^{1/\alpha}.$$

Dado que para $\alpha = 1$, la distribución de Weibull se reduce a la exponencial, donde pueden generarse números aleatorios para una distribución.

$$E(X) = \theta$$
$$Var(X) = \theta^2$$

```r
u=runif(50,min=0,max=1)
theta=4
alpha=1
x = c()
for (i in u){
  x=c(x,theta*(log(1/(1-i)))^(1/alpha))
}
freq = transform(table(cut(x, breaks = 7)))
freq["Frec_rel"] = freq$Freq/length(x)
freq
```

```
##              Var1 Freq Frec_rel
## 1 (0.00576,3.42]   30     0.60
## 2    (3.42,6.82]   12     0.24
## 3    (6.82,10.2]    5     0.10
## 4    (10.2,13.6]    2     0.04
## 5      (13.6,17]    0     0.00
## 6      (17,20.4]    0     0.00
## 7    (20.4,23.8]    1     0.02
```

```r
mean(x)
```

```
## [1] 3.698658
```

```r
sd(x)
```

```
## [1] 4.142045
```