1

Límites y continuidad

Definición 1.1 (La razón promedio de cambio) *de* $y = f(x)$ *con respecto a* x *en el intervalo* $[x_1, x_2]$ *sabiendo que* $\triangle x = x_2 - x_1 = h$ *es*

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

1.1. Ejercicios

Razones promedio de cambio

En los ejercicios 1 a 6, determine la razón promedio de cambio de la función en el intervalo o intervalos dados.

1. $f(x) = x^3 + 1$

a) $[2, 3]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(3^3 + 1) - (2^3 + 1)}{3 - 2} = 19$

b) $[-1, 1]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(1^3 + 1) - ((-1)^3 + 1)}{1 - (-1)} = 1$

2. $g(x) = x^2 - 2x$

a) $[1, 3]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{(3^2 - 2 \cdot 3) - (1^2 - 2 \cdot 1)}{3 - 1} = 2$

b) $[-2,4]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=\dfrac{(4^2-2\cdot 4)-((-2)^2-2\cdot(-2))}{4-(-2)}=0$

3. $h(t)=cot\ t$

(a) $[\pi/4,3\pi/4]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=\dfrac{cot(\pi/4)-cot(3\pi/4)}{\pi/4-3\pi/4}=\dfrac{1+1}{\dfrac{\pi-3\pi}{4}}=\dfrac{8}{-2\pi}$

(b) $[\pi/6,\pi/2]$

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=\dfrac{cot(\pi/6)-cot(\pi/2)}{\pi/6-\pi/2}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{\pi}$

4. $g(t)=2+\cos t$

(a) $[0,\pi]$

Respuesta.- $\dfrac{2+\cos\pi-(2+\cos 0)}{\pi-0}=-\dfrac{2}{\pi}$

(b) $[-\pi,\pi]$

Respuesta.- $\dfrac{2+\cos\pi-(2-\cos\pi)}{\pi+\pi}=\dfrac{3-3}{2\pi}=0$

5. $R(\theta)=\sqrt{4\theta+1};\ [0,2]$

Respuesta.- $\dfrac{\sqrt{4*2+1}+1-(\sqrt{4*0+1}+1)}{2-0}=\dfrac{2}{2}=1$

6. $P(\theta)=\theta^3-4\theta^2+5\theta;\ [1,2]$

Respuesta.- $\dfrac{2^3-4\cdot 2^2+5\cdot 2-(1^3-4^2+5)}{2-1}=0$

Pendiente de una curva en un punto

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar *a*) la pendiente de la curva en el punto P dado, y *b*) la ecuación de la recta tangente en P

7. $y=x^2-5,\quad P(2,-1)$

a) Iniciamos con una recta secante que pasa por el punto $(2,-1)$ y el punto cercano $(2+h,(2+h)^2-5)$, luego hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^2-5-(2^2-5)}{2+h-2}=\frac{4h+h^2}{h}=4+h$$

Luego aproximamos h a 0 siendo la pendiente $m=4$.

b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=4x+c$, luego reemplazamos $(2,-1)$, quedándonos $-1=4\cdot 2+c \implies c=-9$. Por lo tanto

$$y=4x-9$$

8. $y=7-x^2, \quad P(2,3)$

a) Sea la recta secante que pasa por el punto $P(2,3)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,7-(2+h)^2\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{7-(2+h)^2-(7-2^2)}{2+h-2}=\frac{7-(2+h)^2-3}{h}=\frac{h(-h-4)}{h}=-h-4$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $-h-4$ se aproxima a -4. Tomamos -4 como la pendiente de la parábola en P.

b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=-4x+c$, luego reemplazamos $(2,3)$, así $3=-4(2)+c \Longrightarrow c=11$. Por lo tanto

$$y=-4x+11$$

.

9. $y=x^2-2x-3, \quad P(2,-3)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2,-3)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,(2+h)^2-2(2+h)-3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^2-2(2+h)-3-(-3)}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=h+2$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h+2$ se aproxima a 2. Tomamos 2 como la pendiente de la parábola en P.

b) La ecuación de la recta tangente viene dado por $y=mx+c$ de donde $y=2x+c$, luego reemplazamos $(2,-3)$, así $-3=2(2)+c \Longrightarrow c=-7$. Por lo tanto

$$y=-2x-7$$

.

10. $y=x^2-4x, \quad P(1,-3)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1,-3)$ y el punto cercano $Q\left[1+h,(1+h)^2-4(1+h)\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(1+h)^2-4(1+h)-(-3)}{1+h-1}=\frac{h^2-2h}{h}=h-2$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h-2$ se aproxima a -2. Tomamos -2 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\implies y-y_1=m(x-x_1)\implies y=-2(x-1)+(-3)\implies y=-2x+2-3$$

por lo tanto

$$y=-2x-1$$

11. $y=x^3,\quad P(2,8)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2,8)$ y el punto cercano $Q\left[2+h,(2+h)^3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(2+h)^3-8}{2+h-2}=\frac{h^3+6h^2+12h}{h}=h^2+6h+12$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2+6h+12$ se aproxima a 12. Tomamos 12 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\implies y=m(x-x_1)+y_1\implies y=12(x-2)+8\implies y=12x-24+8$$

por lo tanto

$$y=12x-16$$

12. $y=2-x^3,\quad P(1,1)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1,1)$ y el punto cercano $Q\left[1+h,2-(1+h)^3\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{2-(1+h)^3-1}{1+h-1}=\frac{h^3+3h^2+3h}{h}=h^2+3h+3$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante h^2+3h+3 se aproxima a 3. Tomamos 3 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 3(x - 1) + 1 \implies y = 3x - 3 + 1$$

por lo tanto

$$y = 3x - 2$$

13. $y = x^3 - 12x, \quad P(1, -11)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(1, -11)$ y el punto cercano $Q\left[1 + h, (1 + h)^3 - 12(1 + h)\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(1 + h)^3 - 12(1 + h) + 11}{1 + h - 1} = \frac{h^3 + 3h^2 - 9h}{h} = h^2 + 3h - 12$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h - 9$ se aproxima a -9. Tomamos -9 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = -9(x - 1) - 11 \implies y = -9x + 9 - 11$$

por lo tanto

$$y = -9x - 2$$

14. $y = x^3 - 3x^2 + 4, \quad P(2, 0)$

a) Sea la recta secante que pasa por le punto $P(2, 0)$ y el punto cercano $Q\left[2 + h, (2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4\right]$, hallamos la pendiente de la secante,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(2 + h)^3 - 3(2 + h)^2 + 4 - 0}{2 + h - 2} = \frac{h^3 + 3h^2}{h} = h^2 + 3h$$

Con forme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h^2 + 3h$ se aproxima a 0. Tomamos 0 como la pendiente de la parábola en P.

b) Tenemos

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = m(x - x_1) + y_1 \implies y = 0(x - 2) - 0$$

por lo tanto

$$y = 0$$

Razones instantáneas de cambio

15. Rapidez de un automóvil. La siguiente figura muestra la gráfica tiempo-distancia de un automóvil deportivo que acelera desde el reposo.

a) Determine las pendientes de la secante PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(10, 220)$	$\dfrac{650-220}{20-10} = 43$
$Q_2(14, 380)$	$\dfrac{650-380}{20-14} = 45$
$Q_3(17, 480)$	$\dfrac{650-480}{20-16} = 43$
$Q_4(17, 550)$	$\dfrac{650-550}{20-18} = 50$

Los resultados anteriores son redondeados.

b) Después estime la rapidez del automóvil para el tiempo $t = 20s$.

Respuesta.- Tomamos el punto mas cercano a P, en este caso Q_4 de donde la velocidad vendrá dado aproximadamente por $50m/s$.

16. La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia de caída libre contra el tiempo para un objeto que cae desde un módulo espacial que se encuentra a una distancia de 80 m de la superficie de la Luna.

a) Estime las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

Respuesta.-

Q	PQ
$Q_1(5, 20)$	$\dfrac{80-20}{10-5} = 12$
$Q_2(7, 38)$	$\dfrac{80-38}{10-7} = 14$
$Q_3(8{,}5, 56)$	$\dfrac{80-56}{10-8{,}5} = 16$
$Q_4(9{,}5, 71)$	$\dfrac{80-71}{10-9{,}5} = 18$

b) ¿Cuál será la rapidez aproximada del objeto cuando choca con la superficie de la Luna?

Respuesta.- Será de $18m/s$.

17. En la siguiente tabla se registran las utilidades de una pequeña empresa en cada uno de sus primeros cinco años de operación:

a) Trace los puntos que representan las utilidades como una función del año, y únalos mediante una curva suave.

b) ¿Cuál es la razón promedio de incremento de las utilidades entre 2012 y 2014?

Respuesta.- $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{175-63}{2014-20112} = 56$

c) Use su gráfica para estimar la razón a la que cambiaron las utilidades en 2012.

Respuesta.- Sea $\dfrac{63-26}{2012-2011} = 37$ y $\dfrac{112-63}{2013-2012} = 49$ entonces $\dfrac{37+49}{2} = 43.$

18. Elabore una tabla de valores para la función $F(x) = (x+2)/(x-2)$ en los puntos $x = 1{,}2, x = 11/10, x = 101/100, x = 1001/1000, x = 10001/10000$ y $x = 1$

x	1,2	11/10	101/100	1001/1000	10001/10000	1
$F(x)$	-4	$-31/9$	$-301/99$	3001/999	30001/9999	-3

a) Determine la razón promedio de cambio de $F(x)$ en los intervalos $[1, x]$ para cada $x \neq 1$ de su tabla.

b) Si es necesario, amplíe su tabla para intentar determinar la razón de cambio de $F(x)$ en $x = 1$.

19. Sea $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$

a) Obtenga la razón promedio de cambio de $g(x)$ con respecto a x en los intervalos $[1, 2]$, $[1, 1{,}5]$, $[1, 1+h]$

Respuesta.- Para $[1, 2]$ se tiene $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1.$
Para $[1, 1{,}5]$ se tiene $\dfrac{\sqrt{1{,}5}-1}{1{,}5-1} = \dfrac{\sqrt{1{,}5}-1}{0{,}5}.$
Para $[1, 1+h]$ se tiene $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{1+h-1} = \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}.$

b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de g con respecto a x en el intervalo $[1, 1+h]$ para algunos valores de h cercanos a cero, digamos, $h = 0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$, $0{,}0001$, $0{,}00001$ y $0{,}000001$.

Respuesta.-

h	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0,488	0,4987	0,4998	0,49998	0,499998	0,4999998

c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de $g(x)$ con respecto a x en $x = 1$?

Respuesta.- 0.5

d) Calcule el límite, cuando h se aproxima a cero, de la razón promedio de cambio de $g(x)$ con respecto a x en el intervalo $[1, 1 + h]$.

Respuesta.- 0.5

20. Sea $f(t) = 1/t$ para $t \neq 0$.

a) Obtenga la razón promedio de cambio de f con respecto a t en los intervalos i. de $t = 2$ a $t = 3$, y ii. de $t = 2$ a $t = T$.

Respuesta.- Para i. se tiene $\dfrac{\triangle y}{triangle x} = \dfrac{1/3 - 1/2}{3-2} = -\dfrac{1}{6}$. Para ii. se tiene $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{1/T - 1/2}{T-2} = \dfrac{2-T}{2T(T-2)}$

b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de f con respecto a t en el intervalo $[2, T]$ para algunos valores de T cercanos a 2, digamos, $T = 2{,}1, 2{,}01, 2{,}001, 2{,}0001, 2{,}00001 y 2{,}000001$.

Respuesta.-

2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	2,000001
−0,238	−0,2487	−0,2498	−0,24998	−0,24999	−0,25

c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de f con respecto a t en $t = 2$?

Respuesta.- -0.25.

d) Calcule el límite, cuando T se aproxima a 2, de la razón promedio de cambio de f con respecto a t en el intervalo de 2 a T. Tendrá que hacer algo de álgebra antes de que pueda sustituir $T = 2$.

Respuesta.- Por la parte $a), ii.$ tenemos $\dfrac{2-T}{2T(T-2)}$ de donde $-\dfrac{1}{2T}$y por lo tanto $-\dfrac{1}{4}$.

21. La siguiente gráfica muestra la distancia total s, que recorre un ciclista después de t horas.

a) Estime la velocidad promedio del ciclista en los intervalos de tiempo $[0, 1], [1, 2{,}5] y [2{,}5, 3{,}5]$.

Respuesta.-

$[0, 1]$	$[1, 2{,}5]$	$[2{,}5, 3{,}5]$
15	3,33	10

b) Estime la velocidad instantánea del ciclista en los tiempos $t = \frac{1}{2}, t = 2$ y $t = 3$. Respuesta.-

1/2	2	3
12	0	4

c) Estime la velocidad máxima del ciclista y el tiempo específico en que ésta se registra.

Respuesta.- Tenemos la velocidad máxima dada por $\dfrac{30-20}{3{,}5-3} = 20$ en la hora 3,5.

22. La siguiente gráfica muestra la cantidad total de gasolina A en el tanque de un automóvil después de conducirlo t días.

a) Estime la razón promedio del consumo de gasolina en los intervalos de tiempo $[0,3], [0,5] y [7,10]$.

Respuesta.-

$[0,3]$	$[0,5]$	$[7,10]$
$-5/3$	$-2{,}24$	$0{,}5$

b) Estime la razón instantánea de consumo de gasolina en los tiempos $t = 1, t = 4$ y $t = 8$. Respuesta.-

1	4	8
-1	-4	$-1/2$

c) Estime la razón máxima de consumo de gasolina y el tiempo específico en que ésta se registra.

Respuesta.- con una razón de -4, en el día 4.

1.2. Límites de una función y leyes de los límites

Teorema 1.1 *Si L, M, c y k son números reales y*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \quad entonces$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = L + M$

2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x\to c} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$

4. *Regla del producto:* $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

5. *Regla del cociente:* $\lim_{x\to c} = \frac{L}{M},\ M \neq 0$

6. *Regla de la potencia:* $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = L^n$, *$n$ es un entero positivo*

7. *Regla de la raíz:* $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, *$n$ es un entero positivo.*

Teorema 1.2 (Límites de las funciones polinomiales) *Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ entonces,*

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + ... + a_0$$

.

Teorema 1.3 (Límites de las funciones racionales) *Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, y $Q(c) \neq 0$, entonces,*

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Teorema 1.4 (El teorema del sándwich) *Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en $x = c$. Suponga también que*

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Teorema 1.5 *Si $f(x) \leq g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$, y los límites de f y g cuando x se aproxima a c, entonces,*

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

1.2. Ejercicios

Límites a partir de gráficas

1. Para la función $g(x)$ cuya gráficas a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a) $\lim_{x \to 1} g(x)$.

Respuesta.- No existe. Cuando x se aproxima a 1 por la derecha, $g(x)$ se aproxima a 0. Cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, $g(x)$ se aproxima a 1. No hay un número único L para el que todos los valores de $g(x)$ estén arbitrariamente cerca cuando $x \to 1$.

b) $\lim_{x \to 2} g(x) = 2$.

c) $\lim_{x \to 3} g(x) = 0$.

d) $\lim_{x \to 2{,}5} g(x) = 0{,}5$.

2. Para la función $f(t)$ cuya gráfica aparece a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a) $\lim_{t \to -2} f(t) = 0$.

b) $\lim_{t \to -1} f(t) = -1$.

c) $\lim_{t \to 0} f(t) = 0$.

d) $\lim\limits_{t\to -0{,}5} f(t) = -1.$

3. ¿Cuáles de los siguientes enunciados acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.

Respuesta.- Verdadero.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Respuesta.- Verdadero.

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Respuesta.- Falso.

d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

Respuesta.- Falso.

e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

Respuesta.- Falso.

f) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos c en $(-1, 1)$

Respuesta.- Verdadero.

g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

Respuesta.- Verdadero.

4. ¿Cuáles de los siguientes enunciados acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

Respuesta.- Falso.

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

Respuesta.- Falso.

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

Respuesta.- Verdadero.

d) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos c en $(-1,1)$.

Respuesta.- Verdadero.

e) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos c en $(1,3)$.

Respuesta.- Verdadero.

Existencia de límites

En los ejercicios 5 y 6, explique por qué los límites no existen.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$.

Respuesta.- No existe ya que si x se aproxima a 1 por la derecha, $g(x)$ se aproxima a 0. Y cuando x se aproxima a 1 por la izquierda $g(x)$ se aproxima a 1. Por lo tanto no hay un número único L para que todos los valores de $g(x)$ estén arbitrariamente cerca cuando $x \to 1$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$

Respuesta.- De similar manera al anterior ejercicio se tiene $L=\infty$ cuando x se aproxima por la izquierda. Y $L=-\infty$ cuando x se aproxima por la derecha.

7. Suponga que una función $f(x)$ está definida para todos los valores reales de x, excepto para $x=c$. ¿Qué puede decirse con respecto a la existencia de $\lim\limits_{x\to c} f(x)$? Justifique su respuesta.

Respuesta.- El límite existe debido a que x se aproxima a c tanto por la parte derecha como por la parte izquierda lo más que pueda, esto siempre y cuando sea un único L.

8. Suponga que una función $f(x)$ está definida para toda x en $[-1,1]$. ¿Qué puede decirse con respecto a la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Justifique su respuesta.

Respuesta.- De similar forma al ejercicio anterior el límite existe.

9. Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$, ¿debe estar definida f en $x=1$? Si es así, ¿$f(1)$ debe ser igual a 5? ¿Es posible concluir algo con respecto a los valores de f en $x=1$? Explique.

Respuesta.- No necesariamente debe estar definida en $x=1$. No necesariamente debe ser igual a 5. No es posible concluir algo concreto.

10. Si $f(1) = 5$ ¿debe existir el $\lim_{x\to 1} f(x)$? Si es así. ¿$\lim_{x\to 1} f(x)$ debe ser igual a 5? ¿Es posible concluir algo respecto del $\lim_{x\to 1} f(x)$? Explique.

Respuesta.- Si debería existir. Si debería ser igual a 5. Se puede concluir que $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.

Cálculo de límites

En los ejercicios 11 a 22, encuentre los límites.

11. $\lim_{x\to -3}(x^2 - 13) = -4.$

12. $\lim_{t\to 2}(-x^2 + 5x - 2) = 12.$

13. $\lim_{t\to 6}(t-5)(t-7) = -1.$

14. $\lim_{x\to -2}(x^3 - 2x^2 + 4x + 8) = -16.$

15. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x+5}{11-x^3} = 3.$

16. $\lim_{s\to 2/3}(8-3s)(2s-1) = 2.$

17. $\lim_{x\to -1/2} 4x(3x+4)^2 = -\dfrac{25}{2}.$

18. $\lim_{y\to 2} \dfrac{y+2}{y^2+5y+6} = \dfrac{1}{5}.$

19. $\lim_{y\to -3}(5-y)^{4/3} = 16.$

20. $\lim_{z\to 4} \sqrt{z^2-10} = \sqrt{6}.$

21. $\lim_{h\to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h+1}+1} = \dfrac{3}{2}.$

22. $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{5h+4}+2}{\sqrt{5h+4}+2} = \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h\sqrt{5h+4}+2} = \frac{5}{4}.$$

Límites de cocientes Encuentre los límites en los ejercicios 23 a 42.

23. $$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25} \Longrightarrow \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \frac{1}{10}.$$

24. $$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3} \Longrightarrow \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{(x+3)(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

25. $$\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5} \Longrightarrow \lim_{x\to -5} \frac{(x+5)(x-2)}{x+5} = -7$$

26. $\lim\limits_{x\to 2} = \dfrac{x^2-7x+10}{x-2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-5)(x-2)}{x-2} = -3$

27. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2+t-2}{t^2-1} \Longrightarrow \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{(t+2)(t-1)}{(t+1)(t-1)} = \dfrac{3}{2}$

28. $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(t+2)(t+1)}{(t-2)(t+1)} = -\dfrac{1}{3}$

29. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2(x+2)}{x^2(x+2)} = -\dfrac{1}{2}$

30. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{5y^3+8^2}{3y^3-16y^2} \Longrightarrow \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^2(5y+8)}{y^2(3^2-16)} = -\dfrac{1}{2}$

31. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{-1}-1}{x-1} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{x+1}{x(x+1)} = -1$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x(x^2-1)} = -2$

33. $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3-1} \Longrightarrow \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{(u-1)(u+1)(u^2+1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \dfrac{4}{3}$

34. $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{u^3-8}{u^4-16} \Longrightarrow \lim\limits_{u\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \dfrac{3}{8}$

35. $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} \Longrightarrow \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{x}+3} \Longrightarrow \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{x-9}{(x-9)\sqrt{x}+3} = \dfrac{1}{4}$

36. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-x(x-4)}{2-\sqrt{x}} \cdot \dfrac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-x(x-4)(2+\sqrt{x})}{4-x} = -16$

37. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = 4$

38. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+8}+3}{\sqrt{x^2+8}+3} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = -\dfrac{1}{3}$

39. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+12}+4}{\sqrt{x^2+12}+4} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)} = \dfrac{1}{2}$

40. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{3}{2}$

41. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}\cdot\dfrac{2+\sqrt{x^2-5}}{2+\sqrt{x^2-5}} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-(x-3)(x+3)}{(x+3)(2+\sqrt{x^2-5})} = \dfrac{3}{2}$

42. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}\cdot\dfrac{5+\sqrt{x^2+9}}{5+\sqrt{x^2+9}} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(4-x)(5+\sqrt{x^2+9})}{(4-x)(x+4)} = \dfrac{5}{4}$

Límites con funciones trigonométricas En los ejercicios 43 a 50, encuentre los límites.

43. $\lim\limits_{x\to 0}(2\operatorname{sen} x - 1) = -1$

44. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}$

45. $\lim\limits_{x\to 0} \sec x = 1$

46. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \tan x = \sqrt{3}$

47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x+\operatorname{sen} x}{3\cos x} = \dfrac{1}{3}$

48. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)(2-\cos x) = -1$

49. $\lim\limits_{x\to -\pi} \sqrt{x+4}\cos(x+\pi) = \sqrt{4-\pi}$

50. $\lim\limits_{x\to 0} = \sqrt{7+\sec^2 x} = \sqrt{7+\dfrac{1}{\cos^2 0}} = \sqrt{8}$

Aplicaciones de las reglas de los límites.

51. Suponga que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -5$. Señale cuáles reglas del teorema 1 se emplean para obtener los pasos a), b) y c) del siguiente calculo.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}} &= \frac{\lim\limits_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+7)^{2/3}} && \text{regla del cociente.}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2f(x) - \lim\limits_{x\to 0} g(x)}{\left[\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+7)\right]^{2/3}} && \text{regla de diferencia y de potencia.}\\
&= \frac{2\lim\limits_{x\to 0} f(x) - \lim\limits_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x) + \lim\limits_{x\to 0} 7\right)^{2/3}} && \text{regla de la suma y múltiplo constante.}\\
&= \frac{2\cdot 1-(-5)}{(1+7)^{2/3}} = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

52. Sean $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to 1} p(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 1} r(x) = 2$. Señale cuáles reglas del teorema 1 se emplean para obtener los pasos a), b) y c) del siguiente cálculo.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} &= \frac{\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim\limits_{x\to 1} \{p(x)\,[4-r(x)]\}} && \text{regla del cociente.} \\
&= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 1} 5h(x)}}{\left[\lim\limits_{x\to 1} p(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to 1}(4-r(x))\right]} && \text{regla de la raíz y del producto.} \\
&= \frac{\sqrt{5\lim\limits_{x\to 1} h(x)}}{\left[\lim\limits_{x\to 1} p(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to 1} 4 - \lim\limits_{x\to 1} r(x)\right]} && \text{regla de la diferencia y múltiplo constante.} \\
&= \frac{\sqrt{5\cdot 5}}{1(4-2)} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

53. Suponga que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = -2$. Encuentre

a) $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) \lim\limits_{x\to c} g(x) = 5\cdot(-2) = -10$

b) $\lim\limits_{x\to c} 2f(x)g(x) \Longrightarrow 2\left(\lim\limits_{x\to c} f(x) \lim\limits_{x\to c} g(x)\right) = 2(-10) = -20$

c) $\lim\limits_{x\to c} (f(x)+3g(x)) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) + 3\lim\limits_{x\to c} g(x) = 5 + 3\cdot(-2) = -1.$

d) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)} \Longrightarrow \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{5}{5+2} = \dfrac{5}{7}.$

54. Suponga que $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = -3$. Encuentre

a) $\lim\limits_{x\to 4}(g(x)+3) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 4} g(x) + \lim\limits_{x\to 4} 3 = -3+3 = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to 4} xf(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 4} x \cdot \lim\limits_{x\to 4} f(x) = 4\cdot 0 = 0.$

c) $\lim\limits_{x\to 4}(g(x))^2 = (-3)^2 = 9$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x)-1} \Longrightarrow \dfrac{\lim\limits_{x\to 4} g(x)}{\lim\limits_{x\to 4} f(x) - \lim\limits_{x\to 4} 1} = \dfrac{-3}{0-1} = 1.$

55. Suponga que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 7$ y $\lim\limits_{x\to b} g(x) = -3$. Encuentre

a) $\lim\limits_{x\to b}(f(x)+g(x)) \implies \lim\limits_{x\to b} f(x) + \lim\limits_{g(x)} = 7+(-3)=4.$

b) $\lim\limits_{x\to b} f(x)\cdot g(x) \implies \lim\limits_{x\to b} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to b} g(x) = 7\cdot(-3) = -21.$

c) $\lim\limits_{x\to b} 4g(x) \implies \lim\limits_{x\to b} 4\cdot \lim\limits_{x\to b} g(x) = 4\cdot(-3) = -12$

d) $\lim\limits_{x\to b} f(x)/g(x) \implies \dfrac{\lim\limits_{x\to b} f(x)}{\lim\limits_{x\to b} g(x)} = -\dfrac{7}{3}.$

56. Suponga que $\lim\limits_{x\to -2} p(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to -2} r(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to -2} s(x) = -3$. Encuentre

a) $\lim\limits_{x\to -2}(p(x)+r(x)+s(x)) \implies \lim\limits_{x\to -2} p(x) + \lim\limits_{x\to -2} r(x) + \lim\limits_{x\to -2} s(x) = 4+0+(-3) = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x) \implies \lim\limits_{x\to -2} p(x)\cdot \lim\limits_{x\to -2} r(x)\cdot \lim\limits_{x\to -2} s(x) = 4\cdot 0\cdot(-3) = 0.$

c) $\lim\limits_{x\to -2}(-4p(x)+5r(x))/s(x) \implies \dfrac{-4\cdot \lim\limits_{x\to -2} p(x) + 5\lim\limits_{x\to -2} r(x)}{\lim\limits_{x\to -2} s(x)} = \dfrac{-4\cdot 4+5\cdot 0}{-3} = \dfrac{16}{3}.$

Límites de razones promedio de cambio.

Debido a la relación que existe entre rectas secantes, tangentes y razones instantáneas, límites de la forma

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

aparecen a menudo en cálculo. En los ejercicios 57 a 62, evalúe este límite para el valor de x y la función f dados.

57. $f(x)x^2, \quad x=1.$

Respuesta.- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} \implies \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1^2}{h} \implies \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2h+h)}{2} = 2$

58. $f(x)=x^2, \quad x=-2$

Respuesta.- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-2)^2-(-2)^2}{h} \implies \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-4h+4-4}{h} \implies \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-4)}{h} = -4.$

59. $f(x)=3x-4, \quad x=2$

Respuesta.- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)-4-(3x-4)}{h} \implies \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3x+3h-4-3x+4}{h} = 3.$

60. $f(x) = 1/x, \quad x = -2$

Respuesta.- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1/(x+h) - 1/x}{h} \Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} \Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{x^2+xh} = -\dfrac{1}{4}.$

61. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$

Respuesta.- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}.$

62. $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x = 0$

Respuesta.- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3(x+h)+1}-\sqrt{3x+1}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1}} \Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3x+3h+1-3x-1}{h\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1}} = \dfrac{3}{2}.$

Aplicación del teorema del sándwich.

63. Si $\sqrt{5-2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5-x^2}$ para $-1 \leq x \leq 1$, determine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Respuesta.- Sea $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{5-2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{5-2x^2} = \sqrt{5}$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \sqrt{5}$.

64. Si $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2\cos x$, determine $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

Respuesta.- Sea $\lim\limits_{x\to 0} 2 - x^2 = 2 = \lim\limits_{x\to 0} 2\cos x$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2$.

65. **a)** Es posible demostrar que las desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x} < 1$$

son válidas para todos los valores de x cercanos a cero. ¿Se puede decir algo acerca del

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x}?$$

justifique su respuesta.

Respuesta.- Si $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \dfrac{x^2}{6} = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ entonces por la ley del sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x} = 1$$

b) Dibuje en una misma gráfica $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x \operatorname{sen} x)/(2 - 2\cos x)$ e $y = 1$ para $-2 \leq x \leq 2$. Comente sobre el comportamiento de las gráficas cuando $x \to 0$.

Respuesta.- Cuando x tiende a 0 las tres funciones suscitada tienden a 1.

66. **(a)** Suponga que las desigualdades

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}<\frac{1-\cos x}{x^2}<\frac{1}{2}$$

Son válidas para los valores de x cercanos a cero. (Así sucede, como véra la sección 9.9). ¿Qué se puede decir, si acaso, acerca del del

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}?$$

Justifique su respuesta.

Respuesta.- Sea $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}=\frac{1}{2}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ entonces por la ley del sandwich se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

(b) Grafique juntas las ecuaciones $y=(1/2)-(x^2/24)$, $y=(1-\cos x)/x^2$, y $y=1/2$ para $-2\leq x\leq 2$. Comente sobre el comportamiento de las gráficas cuando $x\to 0$.

Respuesta.- Cuando x tiende a 0 las tres funciones tienden a $\frac{1}{2}$.

Estimación de límites.

67. Sea $f(x)=(x^2-9)/(x-3)$.

a) Elabore una tabla con los valores de f en los puntos $x=-3,1$, 3.01, -3.0001, y así hasta donde lo permita su calculadora. Después, estime $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$. ¿Qué estimación obtendrá si ahora evalúa f en $x=-2.9$, ,2.99, $-2.999...$?

Respuesta.-

x	-3.1	.3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
f(x)	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso a) graficando f cerca de $c=-3$ y empleando las funciones Zoom y Trace de su calculadora para estimar los valores y de la gráfica cuando $x\to -3$.

c) Determine $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ algebraicamente como en el ejemplo 7.

Respuesta.-

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x-3}\Longrightarrow\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=6$$

.

Los ejercicios 68 al 74 son similares al ejercicio 67.

Teoría y ejemplos.

75. Si $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ para x en $[-1, 1]$ y $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ para $x < -1$ y $x > 1$. ¿en qué puntos c conocemos automáticamente $\lim\limits_{x \to c} f(x)$? ¿Qué se puede decir sobre el valor del límite en esos puntos?.

Respuesta.- $c = 0, 1, -1$; el límite es 0 en $c = 0$, y 1 en $c = 1, -1$.

76. Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda $x \neq 2$, y suponga que

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} h(x) = -5$$

¿Puede concluirse algo acerca de los valores de f, g y h en $x = 2$? ¿Es posible que $f(2) = 0$? ¿Es posible que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$? Justifique sus respuestas.

Respuesta.- No se puede concluir nada acerca los valores de f, g, h en $x = 2$. Luego $f(2)$ podría ser 0. Luego por el teorema del sandwich se satisface $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -5 \neq 0$.

77. Si $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, determine $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Respuesta.- Se tiene,

$$1 = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 4} -5}{4 - 2} \implies \lim_{x \to 4} f(x) - 5 = 2 \implies \lim_{x \to 4} f(x) = 7.$$

78.