

# Variables\_\_aleatorias\_\_continuas

Christian Limbert Paredes Aguilera

9/12/2021

## Variables aleatorias continuas definición

Notemos que si  $X$  es una v.a. con función de distribución continua se tiene que  $P(X = x_0) = F_X(x_0) - F(x_0^-) = 0$  por lo que no tiene sentido definir función de probabilidad

En general tendremos que  $P(X < x_0) = P(X \leq x_0)$

## Propiedades

Los sucesos del tipo  $\{X \leq x\}$  y  $\{X < x\}$  tendrán la misma probabilidad.

Dada una v.a. continua  $X$  se tiene que:

- $P(X \leq b) = P(X < b)$

Demostración.-  $P(X \leq b) = P(X < b) + P(X = b) = P(X < b)$

- $P(X < b) = P(X < a) + P(a < X < b)$

Demostración.- Sea  $\{X < a\} \cap \{a < X < b\} = \emptyset$  y  $\{X < a\} \cup \{a < X < b\} = \{X < b\}$  entonces,

$$\begin{aligned} P(X \leq b) &= P(\{X < a\} \cup \{a < X < b\}) \\ &= P(X < a) + P(a < X < b) \end{aligned}$$

- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$

Demostración.- Si reescribimos la igualdad dada nos queda,

$$P(X \leq b) = P(X < a) + P(a < X < b),$$

de donde por la primera y segunda propiedad queda demostrada la proposición.

## Propiedades de la función de distribución

Dada una variable aleatoria continua se tiene que:

- $F_X(b) = F_X(a) + P(a < X < b)$
- $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

## Función de densidad

Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de densidad sobre  $\mathbb{R}$  si cumple que

- $f_X(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$
- $f$  es continua salvo a lo más en una cantidad finita de puntos sobre cada intervalo acotado de  $\mathbb{R}$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

## Función de densidad de una variable aleatoria

Sea  $X$  una v.a. con función de distribución  $F_X$ . Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de densidad tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces  $X$  es una variable aleatoria continua y  $f_X$  es la densidad de v.a.  $X$

## Dominio de una variable aleatoria continua

El conjunto  $D_X = \{x \in \mathbb{R} | f_X(x) > 0\}$  recibe el nombre de soporte de la variable aleatoria continua y se interpreta su conjunto de resultados posible

## Densidad diana

$$f_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$$\text{Si } x \leq 0 \quad \text{entonces} \quad \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = 0$$

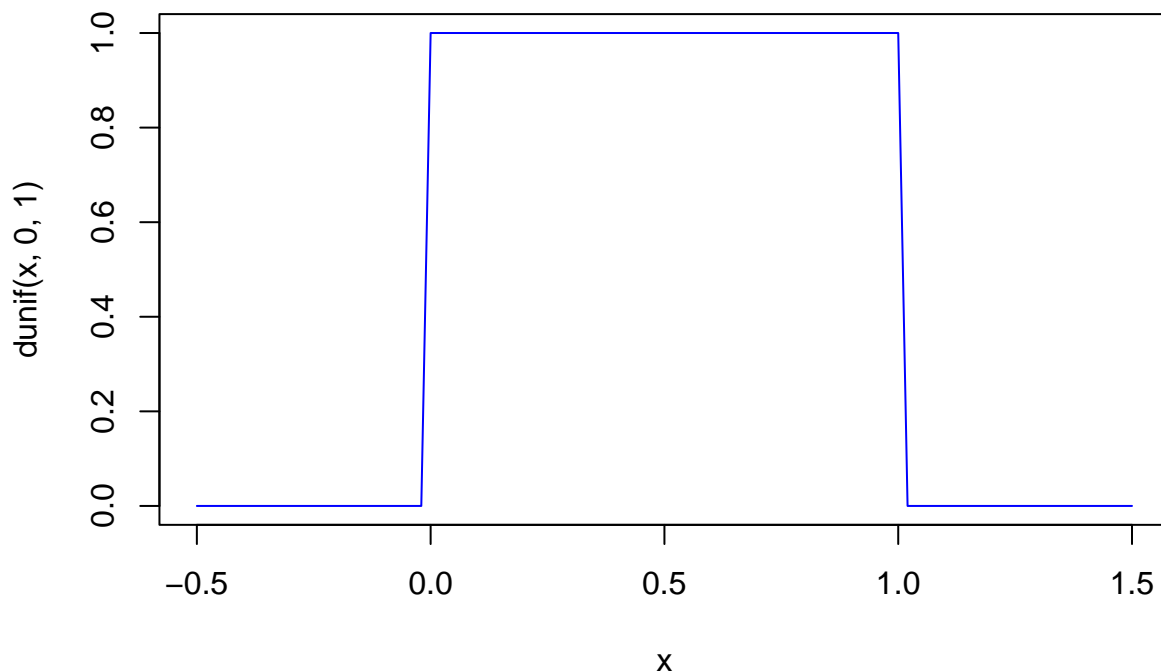
$$\text{Si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{entonces} \quad \int_{-\infty}^x f_X(t) dx = \int_0^x 1 dt = x$$

$$\text{Si } x \geq 1 \quad \text{entonces} \quad \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^1 1 dt = 1$$

$$\text{Por lo tanto} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

```
curve(dunif(x,0,1),xlim = c(-0.5,1.5),col="blue",  
      main="Densidad de la distribución uniforme en [0,1]")
```

## Densidad de la distribución uniforme en [0,1]



### Utilidad de la función de densidad

La función de densidad nos permite calcular diversas probabilidades

#### Propiedades

Sea  $X$  una v.a. continua con función de distribución  $F_X$  y de densidad  $f_X$  entonces

- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$
- Si  $A$  es un conjunto adecuado de  $\mathbb{R}$  entonces

$$P(X \in A) = \int_A f(X) dx = \int_{A \cap D_X} f(x) dx$$

#### Propiedades de la función de densidad

Sea  $X$  una v.a. continua con función de distribución  $F_X$  y de densidad  $f_X$  entonces

- Si  $f_X$  es continua en un punto  $x$ ,  $F_X$  es derivable en ese punto y  $F'_X(x) = f_X(x)$
- $P(X = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

### Esperanza y varianza para variables aleatorias continuas

#### Esperanza

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Su  $f(x)$  es una función de la variable  $X$  entonces:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

### Varianza

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$$

### Desviación típica

$$\sigma_X = +\sqrt{\sigma_X^2}$$

### Propiedades

- $\sigma_X^2 \geq 0$
- $Var(cte) = E(cte^2) - (E(cte))^2 = cte^2 - cte^2 = 0$
- $Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu_X^2$
- El mínimo de  $E[(X - C)^2]$  se alcanza cuando  $C = E(X)$  y es  $Var(X)$

### Proposición

Sea  $X$  una v.a. continua con  $E(X) = \mu_X$  y  $Var(X) = \sigma_X^2$  sea  $Y = a + bX$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  es una nueva v.a. continua obtenida mediante una transformación lineal de  $X$ . Se verifica las mismas propiedades que en el caso discreto:

- $E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X)$
- $Var(Y) = Var(a + bX) = b^2 Var(X)$

Demostración.-

$$Var(a + bX) = E(b^2 X^2) - [E(bX)]^2 = b^2 E(X^2) - b^2 [E(X)]^2 = b^2 [E(X^2) - E^2(X)] = b^2 Var(X)$$

- $\sigma_Y = |b| \sigma_X$
- $Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$  es una transformación lineal de  $X$  de forma que

$$E(Z) = 0 \quad y \quad Var(Z) = 1$$

Demostración.- Para la esperanza:

$$E(Z) = E\left[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right] = \frac{E(X) - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{\mu_X - \mu_X}{\sigma_X} = 0$$

Luego para la varianza se tiene:

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right) = Var\left(\frac{1}{\sigma_X} X - \frac{\mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1^2}{\sigma_X^2} Var(X) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1$$

## Transformaciones de variables aleatorias

### Propiedades

Sea  $X$  una v.a. continua cuya función de densidad es  $f_X$ . Sea  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación estrictamente monótona y derivable tal que  $h'(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Sea  $Y = h(X)$  la transformación de  $X$  por  $h$ . Entonces  $Y$  es una v.a. continua con función de densidad

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|h'(x)|} \Big|_{x=h^{-1}(y)}$$

### densidades de una transformación de una v.a. continua

Sea  $X$  una v.a. continua cuya función de densidad es  $f_X$ . Sea

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

una aplicación, no necesariamente monótona tal que:

- Sea derivable con derivada no nula.
- La ecuación  $h(x) = y$  tiene un número finito de soluciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entonces

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^n \frac{f_X(x)}{|h'(x)|} \Big|_{x=x_k}$$

### Desigualdad de Markov

Sea  $X$  una v.a. positiva con  $E(X)$  finita. Entonces

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \text{ para todo } a > 0.$$

Demostración.- Si  $X$  es continua y sólo toma valores positivos

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^a x f_X(x) dx + \int_a^{\infty} x f_X(x) dx \\ &\geq \int_a^{\infty} x f_X(x) dx \\ &\geq a \int_a^{\infty} f_X(x) dx \\ &= a \cdot P(X \geq a) \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

### Corolario

Sea  $X$  una v.a. con  $E(X)$  finita entonces para todo  $a > 0$

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} P(|X| \geq a) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^a |x| f_X(x) dx + \int_a^{\infty} |x| f_X(x) dx \\ &\geq \int_a^{\infty} |x| f_X(x) dx \\ &\leq \int_a^{\infty} \frac{|x|}{a} f_X(x) dx \\ &\leq \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx \\ &= \frac{E(|X|)}{a} \end{aligned}$$

### Desigualdad de Chebychev

Sea  $X$  una v.a. con  $E(X) = \mu$  y  $Var = \sigma^2$  entonces para todo  $a > 0$

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Demostración.-; Aplicamos la consecuencia de la desigualdad de Markov a la v.a. no negativa

$$Y^2 = (X - \mu)^2$$

entonces

$$P(Y^2 \geq a^2) \leq \frac{E(Y^2)}{a^2} = \frac{E[(X - \mu)^2]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Por otra parte

$$P(Y^2 \geq a^2) = P(|Y| \geq a) = P(|X - \mu| \geq a)$$

de donde

$$P(|X - \mu| \geq a) = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Si sustituimos  $a$  por  $a \cdot \sigma$  en la desigualdad de Chebychev nos queda

$$P(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(a\sigma)^2} = \frac{1}{a^2}$$

La desigualdad de Chebychev también se puede escribir de al menos dos maneras más:

$$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}$$

y tomando como  $a = k\sigma$

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$