

Espacios Vectoriales

1.A \mathbf{R}^n y \mathbf{C}^n

1.1 Definición Números complejos.

- Un número complejo es un par ordenado (a, b) , donde $a, b \in \mathbf{R}$, pero lo escribimos como $a + bi$.
- El conjunto de todos los números complejos es denotado por \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbf{R}\}.$$

- La adición y la multiplicación en \mathbf{C} esta definida por:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Si $a \in \mathbf{R}$, identificamos $a + 0i$ con el número real a . Por lo que podemos decir que \mathbf{R} es un subconjunto de \mathbf{C} .

1.3 Definición Propiedades aritmeticas de los complejos.

- **Conmutatividad:** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ y $\alpha\beta = \beta\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$;
- **Asociatividad:** $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$ y $(\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$ para todo $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbf{C}$;
- **Identidad:** $\lambda + 0 = \lambda$ y $\lambda 1 = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbf{C}$
- **Inverso aditivo:** Para cada $\alpha \in \mathbf{C}$, existe un único $\beta \in \mathbf{C}$ tal que $\alpha + \beta = 0$;
- **Inverso multiplicativo:** Para cada $\alpha \in \mathbf{C}$ con $\alpha \neq 0$, existe un único $\beta \in \mathbf{C}$ tal que $\alpha\beta = 1$;
- **Propiedad distributiva:** $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$ para todo $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$

1.4 Teorema Demostrar que $\alpha\beta = \beta\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Demostración.- Por la definición de multiplicación de números complejos se muestra que

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

y

$$\beta\alpha = (c + di)(a + bi) = (ca - db) + (ad + bc)i.$$

Las ecuaciones anteriores, la conmutatividad para la suma y la multiplicación y propiedades de números reales muestran que

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

■

Ejemplo Demostrar que $\lambda + 0 = \lambda$ y $\lambda 1 = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbf{C}$.

1.1

Demostración.- Sean $\lambda = (a + bi)$ y $0 = (0 + 0i)$, para $a, b \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\lambda + 0 &= (a + bi) + (0 + 0i) \\ &= (a + 0) + (b + 0)i \\ &= a + bi \\ &= \lambda\end{aligned}$$

Luego sea $1 = (1 + 0i)$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda 1 &= (a + bi)(1 + 0i) \\ &= (a1 - b0) + (a0 + b1)i \\ &= (1a + 1bi) \\ &= (a + bi) \\ &= \lambda\end{aligned}$$

■

1.5 Definición Definición $-\alpha$, sustracción, $1/\alpha$ división

Sea $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$

- Sea $-\alpha$ que denota el inverso aditivo de α . Por lo tanto $-\alpha$ es el único número complejo tal que

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

- **Sustracción** en \mathbf{C} es definido por:

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

- Para $\alpha \neq 0$, sea $1/\alpha$ denotado por el inverso multiplicativo de α . Por lo tanto $1/\alpha$ es el único número complejo tal que

$$\alpha(1/\alpha) = 1.$$

- **División** en \mathbf{C} es definido por:

$$\beta/\alpha = \beta(1/\alpha).$$

1.6 Notación F

F significa cualquier \mathbf{R} o \mathbf{C} .

Los elementos de \mathbf{F} son llamados **escalares**.

Listas

1.8 Definición Listas, longitud. Supóngase que n es un entero no negativo. Una lista de longitud n es una colección ordenada de n elementos (el cual podría ser números, otras listas, o mas entidades abstractas) separadas por comas y cerradas por paréntesis. Una lista de longitud n se muestra de la siguiente manera:

$$(x_1, \dots, x_n)$$

Dos listas son iguales si y sólo si tienen la misma longitud y los mismos elementos en el mismo orden.

Las listas difieren de los conjuntos de dos maneras: en las listas, el orden importa y las repeticiones tienen significado; en conjuntos, el orden y las repeticiones son irrelevantes.

\mathbf{F}^n

1.10 Definición \mathbf{F}^n es el conjunto de todas las listas de longitud n de elementos de \mathbf{F}

$$\mathbf{F}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbf{F} \text{ para cada } j = 1, \dots, n\}.$$

Para $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}^n$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, decimos que x_j es la j -ésima coordenada de (x_1, \dots, x_n) .

1.12 Definición Adición en \mathbf{F}^n . La adición en \mathbf{F}^n es definido añadiendo las correspondientes coordenadas:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

1.13 Teorema Conmutatividad para la adición en \mathbf{F}^n . Si $x, y \in \mathbf{F}^n$, entonces $x + y = y + x$.

Demostración.- Suponga $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$. Entonces por la definición de adición en \mathbf{F}^n ,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) \\ &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\ &= y + x \end{aligned}$$

donde la segunda y cuarta igualdades anteriores se cumplen debido a la definición de suma en \mathbf{F}^n y la tercera igualdad se cumple debido a la conmutatividad habitual de la suma en \mathbf{F} . ■

Si $x \in \mathbf{F}^n$, entonces hacer que x sea igual a (x_1, \dots, x_n) es una buena notación, como se muestra en la demostración anterior.

1.14 Definición Sea 0 la lista de longitud n cuyas coordenadas son todas 0 :

$$0 = (0, \dots, 0)$$

1.16 Definición **Inverso aditivo en \mathbf{F}^n .** Para $x \in \mathbf{F}^n$, el inverso aditivo de x , denota por $-x$, es el vector $-x \in \mathbf{F}^n$ tal que

$$x + (-x) = 0$$

En otras palabras, si $x = (x_1, \dots, x_n)$, entonces $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$.

1.17 Definición **Multiplicación scalar en \mathbf{F}^n .** El producto de un número λ y un vector en \mathbf{F}^n es calculado por la multiplicación de cada coordenada del vector por λ :

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

donde $\lambda \in \mathbf{F}$ y $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}^n$.

Digresión sobre campos

Un campo es un conjunto que contiene al menos dos elementos distintos llamados 0 y 1 , junto con operaciones de suma y multiplicación que satisfacen todas las propiedades enumeradas en 1.3. Por lo tanto, \mathbf{R} y \mathbf{C} son campos, como lo es el conjunto de números racionales junto con las operaciones habituales de suma y multiplicación. Otro ejemplo de campo es el conjunto $\{0, 1\}$ con las operaciones habituales de suma y multiplicación excepto que $1 + 1$ se define como igual a 0 .

1.A Ejercicios

1. Supongase a y b números reales, no ambos 0 . Encuentre números reales c y d tales que

$$\frac{1}{(a + bi)} = c + di.$$

Respuesta.- Supongamos $\alpha = a + bi$ y $\beta = c + di$ con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = (1 + 0i)$$

Luego, por el hecho de que dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes reales e imaginarias son iguales, entonces

$$\begin{cases} ac - bd &= 1 \\ ad + bc &= 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos, $d = -\frac{bc}{a}$ y reemplazando en la ecuación 1,

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Luego,

$$d = -\frac{bc}{a} = \frac{b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2}}{a} = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

2. Demostrar que

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

es una raíz cúbica de 1 (significa que su cubo es igual a 1).

Demostración.- Algebraicamente queremos demostrar que,

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \sqrt[3]{1} \quad \text{o} \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^3 = 1$$

Por las propiedades de números complejos, sabemos que

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

Luego, por el binomio al cubo podemos deducir que

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right)^3 &= \left(\frac{-1}{2} \right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}i}{2} + 3 \cdot \frac{-1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} \right)^3 \\ &= \frac{-1}{8} + \frac{3\sqrt{3}i}{8} + \frac{-3(\sqrt{3})^2(\sqrt{-1})^2}{8} + \frac{(\sqrt{3})^2\sqrt{3}(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}}{8} \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}i}{8} + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}i}{8} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. Encuentre dos raíces cuadradas distintas de i .

Respuesta.- Queremos encontrar raíces distintas de i tal que

$$x^2 = i.$$

Supongamos que $x = a + bi$ para $a, b \in \mathbf{R}$. Resolvemos la ecuación cuadrática, se tiene

$$x^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + (ab + ba)i = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

Luego, ya que $x^2 = i = 0 + 1i$, entonces

$$(a^2 - b^2) + 2abi = (0 + 1i) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

para a y b números reales. Resolvamos este sistema de ecuaciones, se tiene

$$\begin{cases} b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Ya que, $x^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) - 2abi = i$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} i &= i \\ \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \right) i &= i \\ \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} i &\neq i \\ \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \right) i &\neq i \end{aligned}$$

De las que solo satisface $x^2 = i$ las dos primeras ecuaciones. Por lo tanto, las dos raíces distintas de i son:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \quad y \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

4. Demostrar que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Demostración.- Supóngase $\alpha = a + bi$ y $\beta = c + di$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces por definición de suma de números complejos se muestra que

$$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = \beta + \alpha.$$

5. Demuestre que $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$ para todo $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración.- Sean,

$$\begin{aligned} \alpha &= a + bi \\ \beta &= c + di \\ \lambda &= e + fi \end{aligned}$$

para $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \lambda &= [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) \\ &= [(a + c) + (b + d)i] + (e + fi) \\ &= [(a + c) + e] + [(b + d) + f]i \\ &= [a + (c + e)] + [b + (d + f)]i \\ &= (a + bi) + [(c + e) + (d + f)i] \\ &= (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)] \\ &= \alpha + (\beta + \lambda). \end{aligned}$$

6. Demostrar que $(\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$ para todo $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración.- Sean,

$$\begin{aligned} \alpha &= a + bi \\ \beta &= c + di \\ \lambda &= e + fi \end{aligned}$$

para $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 (\alpha\beta)\lambda &= [(a+bi)(c+di)](e+fi) \\
 &= [(ac-bd) + (ad+bc)i](e+fi) \\
 &= [(ac-bd)e - (ad+bc)f] + [(ac-bd)f + (ad+bc)e]i \\
 &= [(ac)e - (bd)e - (ad)f - (bc)f] + [(ac)f - (bd)f + (ad)e + (bc)e]i \\
 &= [a(ce) - a(df) - b(cf) - b(de)] + [a(cf) + a(de) + b(ce) - b(df)]i \\
 &= [a(ce-df) - b(cf+de)] + [a(cf+de) + b(ce-df)]i \\
 &= (a+bi)[(ce-df) + (cf+de)i] \\
 &= (a+bi)[(c+di)(e+fi)] \\
 &= \alpha(\beta\lambda).
 \end{aligned}$$

7. Demostrar que para cada $\alpha \in \mathbf{C}$, existe un único $\beta \in \mathbf{C}$ tal que $\alpha + \beta = 0$.

Demostración.- Sean $\alpha = (a+bi)$ y $\beta = (c+di)$ para $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Por las propiedades de números reales, a y b tienen inversa, las llamaremos c y d respectivamente tales que $a + c = 0$ y $b + d = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta &= (a+bi) + (c+di) \\
 &= (a+c) + (b+d)i \\
 &= 0 + 0i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora demostremos la unicidad. Sean β y β' con $c', d' \in \mathbf{R}$ tales que $\alpha + \beta = 0$ y $\alpha + \beta' = 0$. Igualando estas ecuaciones se tiene,

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta &= \alpha + \beta' \\
 (a+bi) + (c+di) &= (a+bi) + (c'+d'i) \\
 (a+c) + (b+d)i &= (a+c') + (b+d')i
 \end{aligned}$$

Supongamos $c = c'$ y $d = d'$. Entonces,

$$(b+d)i = (b+d')i$$

Dada que la igualdad $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ se cumple siempre que $c = c'$ y $d = d'$, concluimos que,

$$(c+di) = (c'+d'i) \Rightarrow \beta = \beta'.$$

8. Demostrar que para cada $\alpha \in \mathbf{C}$ con $\alpha \neq 0$, existe un único $\beta \in \mathbf{C}$ tal que $\alpha\beta = 1$.

Demostración.- Sean $\alpha = a+bi$ y $\beta = c+di$ con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\alpha\beta = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i = (1+0i)$$

Supongamos que:

$$\begin{cases} ac - db &= 1 \\ ad + bc &= 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos, $d = -\frac{bc}{a}$ y reemplazando en la ecuación 1,

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Luego,

$$d = -\frac{bc}{a} = \frac{b \cdot \frac{a}{a^2+b^2}}{a} = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Por lo tanto, existe un β tal que,

$$\beta = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-bi}{a^2 + b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a + bi}.$$

Ahora, demostremos la unicidad. Sean $\beta = c + di$ y $\beta' = c' + d'i$ tales que, $(a + bi)(c + di) = 1$ y $(a + bi)(c' + d'i) = 1$. Entonces, por las propiedades de conmutatividad y asociatividad,

$$c + di = (c + di) \cdot 1 = (c + di) \cdot (a + bi)(c' + d'i) = [(a + bi)(c + di)](c' + d'i) = c' + d'i.$$

Por lo que queda demostrado que $\beta = \beta'$. Y así concluimos que α tiene inverso multiplicativo.

9. Demostrar que $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$.

Demostración.- Sean $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ y $\gamma = e + fi$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha(\beta + \gamma) &= (a + bi)[(c + e) + (d + f)i] \\ &= [a(c + e) - b(d + f)] + [a(d + f) + b(c + e)]i \\ &= [ac + ae - bd - bf] + [ad + af + bc + be]i \\ &= ac + ae - bd - bf + adi + afi + bci + bei \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(ae - bf) + (af + be)i] \\ &= (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi) \\ &= \alpha\beta + \alpha\gamma. \end{aligned}$$

10. Encuentre $x \in \mathbf{R}^4$ tal que

$$(4, -3, 1, 7) + 2x = (5, 9, -6, 8).$$

Respuesta.- Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ con $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$. Por definición de adición y multiplicación por un escalar en \mathbf{F} propiedades Entonces,

$$\begin{aligned} (4, -3, 1, 7) + 2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (5, 9, -6, 8) \\ (4, -3, 1, 7) + (2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4) &= (5, 9, -6, 8) \\ (4 + 2x_1, -3 + 2x_2, 1 + 2x_3, 7 + 2x_4) &= (5, 9, -6, 8) \end{aligned}$$

Por la igualdad dada, podemos formar un sistema de ecuaciones como sigue:

$$\begin{cases} 4 + 2x_1 = 5 \\ -3 + 2x_2 = 9 \\ 1 + 2x_3 = -6 \\ 7 + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

Resolviendo, obtenemos

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

11. Explique porque no existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tal que

$$\lambda(2 - 3i, 5 + 4i, -6 + 7i) = (12 - 5i, 7 + 22i, -32 - 9i).$$

Respuesta.- Sean $\lambda = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$ y $x = (12 - 5i, 7 + 22i, -32 - 9i)$. Entonces, por definición de multiplicación por un escalar en \mathbf{C} y las propiedades de número complejos,

$$\begin{aligned}\lambda(2 - 3i, 5 + 4i, -6 + 7i) &= x \\ [\lambda(2 - 3i), \lambda(5 + 4i), \lambda(-6 + 7i)] &= x \\ [(a + bi)(2 - 3i), (a + bi)(5 + 4i), (a + bi)(-6 + 7i)] &= x \\ \{[2a - (-3)b] + (-3)a + 2b i, (5a - 4b) + (4a + 5b)i, [(-6)a - 7b] + [7a + (-6)b] i\} &= x \\ [(2a + 3b) + (-3a + 2b) i, (5a - 4b) + (4a + 5b)i, (-6a - 7b) + (7a - 6b) i] &= x\end{aligned}$$

Dado que,

$$[(2a + 3b) + (-3a + 2b) i, (5a - 4b) + (4a + 5b)i, (-6a - 7b) + (7a - 6b) i] = (12 - 5i, 7 + 22i, -32 - 9i)$$

Entonces, por la igualdad tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (2a + 3b) + (-3a + 2b)i = 12 - 5i \\ (5a - 4b) + (4a + 5b)i = 7 + 22i \\ (-6a - 7b) + (7a - 6b)i = -32 - 9i \end{cases}$$

Que implica,

$$\begin{cases} 2a + 3b = 12 \\ -3a + 2b = -5 \\ 5a - 4b = 7 \\ 4a + 5b = 22 \\ -6a - 7b = -32 \\ 7a - 6b = -9 \end{cases}$$

Resolviendo este último sistema,

$$3(2a + 3b) + 2(-3a + 2b) = 3 \cdot 12 + 2(-5) \Rightarrow b = \frac{26}{11}.$$

De donde b estará dado por:

$$2a + 3b = 12 \Rightarrow 2a + 3 \cdot \frac{26}{11} = 12 \Rightarrow a = \frac{27}{11}.$$

Sabemos que a y b debe satisfacer cada una de las ecuaciones del último sistema, Por ejemplo:

$$\begin{aligned}5a - 4b &= 7 \\ 5 \cdot \frac{27}{11} - 4 \cdot \frac{26}{11} &= 7 \\ \frac{21}{11} &= 7.\end{aligned}$$

Claramente, $\frac{21}{11} \neq 7$, lo que significa que no podemos encontrar números a y b para satisfacer las ecuaciones del último sistema.

12. Demostrar que $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in \mathbf{F}^n$.

Demostración.- Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $z = (z_1, \dots, z_n)$. Entonces por definición de adición en \mathbf{F}^n y los axiomas de números reales,

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= [(x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n)] + (z_1, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n) \\ &= [(x_1 + y_1) + y_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n] \\ &= [x_1 + (y_1 + y_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)] \\ &= (x_1, \dots, x_n) + [(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)] \\ &= (x_1, \dots, x_n) + [(y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)] \\ &= x + (y + z).\end{aligned}$$

13. Demostrar que $(ab)x = a(bx)$ para todo $x \in \mathbf{F}^n$ y todo $a, b \in \mathbf{F}$.

Demostración.- Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $a, b \in \mathbf{F}$. Entonces por definición de multiplicación escalar en \mathbf{F}^n y los axiomas de números reales,

$$\begin{aligned} (ab)x &= (ab)(x_1, \dots, x_n) \\ &= [(ab)x_1, \dots, (ab)x_n] \\ &= [a(bx_1), \dots, a(bx_n)] \\ &= a[(bx_1), \dots, (bx_n)] \\ &= a[b(x_1, \dots, x_n)] \\ &= a(bx) \end{aligned}$$

14. Demostrar que $1x = x$ para todo $x \in \mathbf{F}^n$.

Demostración.- Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$. Entonces, por definición de multiplicación escalar en \mathbf{F}^n y por el hecho de que $1a = a$ para $a \in \mathbf{F}$

$$\begin{aligned} 1x &= 1(x_1, \dots, x_n) \\ &= [1x_1, \dots, 1x_n] \\ &= [x_1, \dots, x_n] \\ &= x. \end{aligned}$$

15. Demostrar que $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ para todo $\lambda \in \mathbf{F}$ y todo $x, y \in \mathbf{F}^n$.

Demostración.- Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $\lambda \in \mathbf{F}$. Entonces, por definición de adición y multiplicación escalar en \mathbf{F}^n

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] \\ &= \lambda[(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)] \\ &= [\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)] \\ &= [\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n] \\ &= [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n] + [\lambda y_1, \dots, \lambda y_n] \\ &= \lambda x + \lambda y. \end{aligned}$$

16. Demostrar que $(a + b)x = ax + bx$ para todo $a, b \in \mathbf{F}$ y todo $x \in \mathbf{F}^n$.

Demostración.- Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $a, b \in \mathbf{F}$. Entonces, por definición de multiplicación escalar en \mathbf{F}^n

$$\begin{aligned} (a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) \\ &= [(a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n] \\ &= [(ax_1 + bx_1), \dots, (ax_n + bx_n)] \\ &= [ax_1, \dots, ax_n] + [bx_1, \dots, bx_n] \\ &= ax + bx. \end{aligned}$$

1.B Definición de espacio vectorial

La motivación para la definición de un espacio vectorial proviene de las propiedades de la suma y la multiplicación escalar en \mathbf{F}^n : la suma es conmutativa, asociativa y tiene una identidad. Todo elemento

tiene un inverso aditivo. La multiplicación escalar es asociativa. La multiplicación escalar por 1 actúa como se esperaba. La suma y la multiplicación escalar están conectadas por propiedades distributivas. Definiremos un espacio vectorial como un conjunto V con una suma y una multiplicación escalar en V que satisfagan las propiedades del párrafo anterior.

1.18 Definición Adición y multiplicación escalar.

- Una adición en un conjunto V es una función que asigna un elemento $u + v \in V$ para cada par de elementos $u, v \in V$.
- Una multiplicación escalar en un conjunto V es una función que asigna un elemento $\lambda v \in V$ para cada $\lambda \in \mathbf{F}$ y cada $v \in V$.

1.19 Definición Espacio vectorial. Un espacio vectorial es un conjunto V junto con una suma en V y una multiplicación escalar en V tal que se cumplen las siguientes propiedades:

- **Conmutatividad**

$$u + v = v + u \text{ para todo } u, v \in V;$$

- **Asociatividad**

$$(u + v) + w = u + (v + w) \text{ y } (ab)v = a(bv) \text{ para todo } u, v, w \in V \text{ y todo } a, b \in \mathbf{F};$$

- **Identidad aditiva**

$$\text{Existe un elemento } 0 \in V \text{ tal que } v + 0 = v \text{ para todo } v \in V;$$

- **Inverso aditivo**

$$\text{Para cada } v \in V, \text{ existe } w \in V \text{ tal que } v + w = 0;$$

- **Identidad Multiplicativa**

$$1v = v \text{ para todo } v \in V$$

- **Propiedad distributiva**

$$a(u + v) = au + av \text{ y } (a + b)v = av + bv \text{ para todo } a, b \in \mathbf{F} \text{ y todo } u, v \in V.$$

1.20 Definición Vector, punto. Elementos de un espacio vectorial son llamados vectores o puntos.

1.21 Definición Espacio vectorial real, espacio vectorial complejo.

- Un espacio vectorial sobre \mathbf{R} es llamado un espacio vectorial real.
- Un espacio vectorial sobre \mathbf{C} es llamado un espacio vectorial complejo.

El espacio vectorial más simple contiene sólo un punto. En otras palabras, $\{0\}$ es un espacio vectorial.

1.23 Notación \mathbf{F}^S .

- Si S es un conjunto, entonces \mathbf{F}^S se denota como el conjunto de funciones de S para \mathbf{F} .
- Para $f, g \in \mathbf{F}^S$, la suma $f + g \in \mathbf{F}^S$ es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para todo $x \in S$

- Para $\lambda \in \mathbf{F}$ y $f \in \mathbf{F}^S$, el producto $\lambda f \in \mathbf{F}^S$ es una función definida por

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo $x \in S$.

La definición de un espacio vectorial requiere que tenga una identidad aditiva. El siguiente resultado establece que esta identidad es única.

1.25 Teorema **Identidad aditiva única.** Un espacio vectorial tiene una única identidad aditiva.

Demostración.- Supóngase 0 y $0'$ ambas identidades aditivas para algún espacio vectorial V entonces,

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

donde se cumple la primera igualdad porque 0 es una identidad aditiva, la segunda igualdad viene de la conmutatividad, y la tercera igualdad se cumple porque $0'$ es una identidad aditiva. Por lo tanto $0' = 0$ y queda probado que V tiene una sola identidad aditiva. ■

Cada elemento v en un espacio vectorial tiene un inverso aditivo, un elemento w en el espacio vectorial tal que $v + w = 0$. El siguiente resultado muestra que cada elemento en un espacio vectorial tiene solo un inverso aditivo.

1.26 Teorema Cada elemento en un espacio vectorial tiene un único inverso aditivo.

Demostración.- Supóngase que V es un espacio vectorial. Sea $v \in V$, w y w' inversos aditivos de v . Entonces

$$w = w + 0 = w + (v + w') = (w + v) + w' = 0 + w' = w'$$

Así $w = w'$. ■

1.27 Notación $-v, w-v$.

Sea $v, w \in V$. Entonces

- $-v$ se denota como el inverso aditivo de v ;
- $w - v$ es definido como $w + (-v)$.

1.28 Notación V .

Por el resto del libro, V se define como el espacio vectorial sobre F .

1.29 Teorema El número 0 por un vector. $0v = 0$ para cada $v \in V$.

Demostración.- Para $v \in V$, tenemos

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

Luego añadiendo el inverso aditivo de $0v$ para ambos lados de la ecuación de arriba tenemos $0 = 0v$. ■

Ahora establecemos que el producto de cualquier escalar y el vector 0 es igual al vector 0.

1.30 Teorema Un número por el vector 0. $a0 = 0$ para cada $a \in F$.

Demostración.- Para $a \in F$, tenemos

$$a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$$

Luego añadiendo el inverso aditivo de $a0$ para ambos lados de la ecuación de arriba tenemos $0 = a0$. ■

Ahora mostramos que si un elemento de V se multiplica por el escalar -1 , entonces el resultado es el inverso aditivo del elemento de V .

1.31 Teorema El número -1 por un vector. $(-1)v = -v$ para cada $v \in V$.

Demostración.- Para $v \in V$, tenemos

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = [1 + (-1)]v = 0v = 0.$$

Esta ecuación nos dice que $(-1)v$, cuando se suma a v da 0. Así $(-1)v$ es el inverso aditivo de v . ■

1.B Ejercicio

1. Demostrar que $-(-v) = v$ para cada $v \in V$.

Demostración.- Ya que $(-1)v = -v$ para cada $v \in V$ (apartado 1.31, Axler, Linear algebra), $(-a)(-a) = a, \forall a \in \mathbf{R}$ y la identidad multiplicativa de espacio vectorial tenemos que

$$\begin{aligned} v &= 1v \\ &= (-1)(-1)v \\ &= (-1)(-v) \\ &= -(-v) \end{aligned}$$

2. Supóngase $a \in \mathbf{F}$, $v \in V$ y $av = 0$. Demostrar que $a = 0$ o $v = 0$.

Demostración.- Por propiedades de lógica ($p \Rightarrow q \vee r \equiv p \wedge \sim q \Rightarrow r$). Entonces será suficiente demostrar que,

$$av = 0 \wedge a \neq 0 \Rightarrow v = 0 \quad a \in \mathbf{F}, v \in V.$$

Sea $av = 0$. Dado que $a \neq 0$ y $a \in \mathbf{F}$, podemos multiplicar ambos lados por $\frac{1}{a}$,

$$\frac{1}{a}(av) = 0 \frac{1}{a}.$$

Luego por propiedades en \mathbf{F} tenemos que

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right)v = 0 \Rightarrow 1v = 0 \Rightarrow v = 0.$$

3. Supóngase $v, w \in V$. Explique porque existe un único $x \in V$ tal que $v + 3x = w$.

Respuesta.- Supongamos $x = \frac{1}{3}(w - v)$. Dado $v + (-w) \in V$, entonces por la asociatividad de espacio vectorial, tenemos

$$\begin{aligned} v + 3 \left[\frac{1}{3}(w - v) \right] &= v + \left(3 \cdot \frac{1}{3} \right) (w - v) \\ &= v + (w - v) \\ &= w \end{aligned}$$

Por lo que demostramos su existencia. Ahora, demostremos la unicidad. Sea $x, x' \in V$ tales que $v + 3x = w$ y $v + 3x' = w$. Por el inverso aditivo,

$$w + (-w) = 0 \Rightarrow w - w = 0.$$

Reemplazando tenemos,

$$\begin{aligned} v + 3x - (v + 3x') &= 0 \\ (v - v) + 3x - 3x' &= 0 \\ 0 + 3(x - x') &= 0 \\ x - x' &= 0 \end{aligned}$$

Veamos que esta última igualdad se cumplirá si y sólo si $x = x'$. Por lo tanto queda demostrado el ejercicio.

4. El conjunto vacío no es un espacio vectorial. El conjunto vacío deja de satisfacer solo uno de los requisitos enumerados en 1.19. ¿Cuál?.

Respuesta.- Un espacio vectorial debe contener la identidad aditiva 0, el cual no está presente en el conjunto vacío.

5. Demuestre que en la definición de un espacio vectorial (1.19), la condición inversa aditiva se puede sustituir por la condición de que

$$0v = 0 \text{ para todo } v \in V.$$

Aquí, el 0 del lado izquierdo es el número 0, y el 0 en el lado derecho es la identidad aditiva de V . (La frase "una condición puede ser sustituida" en una definición significa que la colección de objetos que satisfacen la definición no cambia si la condición original se sustituye con la nueva condición).

Demostración.- El teorema 1.29 (Axler, Linear algebra, capítulo 1), nos dice que $0v = 0$ para todo $v \in V$, satisface la definición 1.19. Por lo tanto, debemos demostrar que esta propiedad junto con todas las demás que componen la Definición 1.19, excepto la condición inversa aditiva, implican la condición inversa aditiva. Es decir, debemos demostrar que para todo $v \in V$, existe $w \in V$ tal que $v + w = 0$.

Suponemos que v es algún vector arbitrario en V . Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= 0v \\ &= (-1 + 1)v \\ &= (-1)v + 1v \\ &= (-1)v + v \end{aligned}$$

Pongamos $w = (-1)v$ para cualquier vector $v \in V$, donde vemos que existe un vector w que satisface la ecuación $v + w = 0$, demostrando nuestro resultado.

6. Sea ∞ y $-\infty$ dos objetos distintos, ninguno de los cuales está en \mathbf{R} . Definir una suma y una multiplicación escalar en $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ como se puede adivinar la notación. Específicamente, la suma y el producto de dos números reales son los habituales, y para $t \in \mathbf{R}$ definir

$$t\infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ \infty & \text{si } t > 0 \end{cases}, \quad t(-\infty) = \begin{cases} \infty & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -\infty & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$t + \infty = \infty + t = \infty, \quad t + (-\infty) = (-\infty) + t = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty,$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad \infty + (-\infty) = 0.$$

Es $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ un espacio vectorial sobre \mathbf{R} ? Explique.

Respuesta.- Para que $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ se convierta en un espacio vectorial sobre \mathbf{R} , debe satisfacer todas las propiedades dadas en la definición 1.19. Ahora bien, este conjunto satisface algunas de estas propiedades. Por ejemplo, la adición es conmutativa en este conjunto. Sin embargo, no las satisface todas.

Una propiedad que no se cumple es la asociatividad de la suma. Por ejemplo, observe que $1, \infty$ y $-\infty$ son todos vectores en $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ y por tanto deberíamos tener lo siguiente:

$$1 + [\infty + (-\infty)] = (1 + \infty) + (-\infty)$$

Sin embargo, cuando evaluamos los lados izquierdo y derecho de esta ecuación usando las definiciones dadas en el enunciado del ejercicio, encontramos que

$$\begin{aligned} 1 + [\infty + (-\infty)] &= (1 + \infty) + (-\infty) \\ 1 + 0 &= \infty + (-\infty) \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

Pero esto es claramente falso. Así que nuestra suposición de que $1 + [\infty + (-\infty)] = (1 + \infty) + (-\infty)$ también es falsa y, por tanto, este conjunto no satisface la asociatividad aditiva.

1.C Subespacios

1.32 Definición Subespacio.

Un subconjunto U de V es llamado un subespacio de V si U es también un espacio vectorial (Usando la misma adición y multiplicación escalar como en V).

El siguiente resultado brinda la forma más fácil de verificar si un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio.

1.34 Teorema Condiciones para un subespacio.

Un subconjunto U de V es un subespacio de V si y sólo si U satisface las siguientes tres condiciones:

- **Identidad aditiva.**

$$0 \in U;$$

- **Cerrado por adición.**

$$u, w \in U \text{ implica } u + w \in U;$$

- **Cerrado por multiplicación escalar.**

$$a \in F \text{ y } u \in U \text{ implica } au \in U;$$

Demostración.- Si U es un subespacio de V , entonces U satisface las tres condiciones de arriba por la definición de espacio vectorial.

A la inversa, suponga que U satisface las tres condiciones anteriores. La primera condición anterior asegura que la identidad aditiva de V está en U . La segunda condición de arriba asegura que la adición tenga sentido en U . La tercera condición asegura que la multiplicación escalar tenga sentido en U .

Si $u \in U$, entonces $-u$ [el cual es igual a $(-1)u$ por 1.31] es también en U por la tercera condición de arriba. Por lo tanto cada elemento de U tiene un inverso aditivo en U .

Las otras partes de la definición de un espacio vectorial, como la asociatividad y conmutatividad, se satisfacen automáticamente para U porque sostienen el espacio más grande de V . Así U es un espacio vectorial y por ende es un subespacio de V . ■

Suma de subespacios

La unión de subespacios rara vez es un subespacio (ver Ejercicio 12), por lo que solemos trabajar con sumas en lugar de uniones.

1.36 Definición Suma de subespacios.

Supóngase U_1, \dots, U_m son subconjuntos de V . La suma de U_1, \dots, U_m , denotado por $U_1 + \dots + U_m$, es el conjunto de todas las posibles sumas de elementos de U_1, \dots, U_m . Más precisamente,

$$U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_m : u_1 \in U_1, \dots, u_m \in U_m\}$$

El siguiente resultado afirma que la suma de subespacios es un subespacio, y es de hecho el subespacio más pequeño que contiene todos los sumandos.

1.39 Teorema La suma de subespacios es el subespacio más pequeño que lo contiene.

Supóngase que U_1, \dots, U_m son subespacios de V . Entonces $U_1 + \dots + U_m$ es el subespacio más pequeño de V que contiene U_1, \dots, U_m .

Demostración.- Es fácil ver que $0 \in U_1 + \dots + U_m$ y que $U_1 + \dots + U_m$ es cerrado por la adición y la multiplicación escalar, es decir, por las tres condiciones dadas anteriormente podemos afirmar que $U_1 + \dots + U_m$ es un subespacio de V .

Claramente U_1, \dots, U_m están todos contenidos en $U_1 + \dots + U_m$ (para ver esto, considere las sumas $u_1 + \dots + u_m$ donde todas menos una de las u_i son 0). A la vez, cada subespacio de V que contenga U_1, \dots, U_m contiene $U_1 + \dots + U_m$ (porque los subespacios deben contener todas las sumas finitas de sus elementos). Por lo tanto $U_1 + \dots + U_m$ es el subespacio más pequeño de V que contiene a U_1, \dots, U_m .

Esta segunda parte, podríamos demostrarla también de la siguiente manera: Supongamos que $W \subseteq V$ es algún subespacio que contiene a U_1, \dots, U_m , para todo $u_1, \dots, u_m \in W$. Ya que W es un subespacio se sigue también $u_1 + \dots + u_m \in W$ (porque W es cerrado por la suma finita). Por lo tanto

$$U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_m : u_1 \in U_1, \dots, u_m \in U_m\} \subseteq W.$$

■

Las sumas de subespacios en la teoría de espacios vectoriales son análogas a las uniones de subconjuntos en la teoría de conjuntos. Dados dos subespacios de un espacio vectorial, el subespacio más pequeño que los contiene es su suma. Análogamente, dados dos subconjuntos de un conjunto, el subconjunto más pequeño que los contiene es su unión.

Sumas directas

1.40 Definición Suma directa.

Supóngase que U_1, \dots, U_m son subespacios de V .

- La suma $U_1 + \dots + U_m$ es llamada una suma directa si cada elemento de $U_1 + \dots + U_m$ se puede escribir de una sola manera como una suma $u_1 + \dots + u_m$ donde cada u_j está en U_j .
- Si $U_1 + \dots + U_m$ es una suma directa, entonces $U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ denota $U_1 + \dots + U_m$ con la notación \oplus sirviendo como una indicación de que se trata de una suma directa.

La definición de suma directa requiere que cada vector de la suma tenga una representación única como suma adecuada. El siguiente resultado muestra que al decidir si una suma de subespacios es una suma directa, sólo tenemos que considerar si 0 puede escribirse de forma única como una suma correspondiente.

1.44 Teorema Condición para una suma directa.

Supóngase que U_1, \dots, U_m son subespacios de V . Entonces $U_1 + \dots + U_m$ es una suma directa si y sólo si la única manera de escribir 0 como una suma $u_1 + \dots + u_m$, donde cada u_j está en U_j , es tomando cada u_j igual a 0.

Demostración.- Supóngase que $U_1 + \dots + U_m$ es una suma directa. Entonces la definición de suma directa implica que la única manera de escribir 0 como una suma $u_1 + \dots + u_m$, donde cada u_j está en U_j , es tomando cada u_j igual a 0. Para mostrar que $U_1 + \dots + U_m$ es una suma directa, sea $v \in U_1 + \dots + U_m$. Podemos escribir:

$$v = u_1 + \dots + u_m$$

para algún $u_1 \in U_1, \dots, u_m \in U_m$. Para mostrar que esta representación es única, supongamos que también tenemos

$$v = v_1 + \dots + v_m$$

donde $v_1 \in U_1, \dots, v_m \in U_m$. Restando estas dos ecuaciones, tenemos,

$$0 = (u_1 - v_1) + \dots + (u_m - v_m).$$

Porque $u_1 - v_1 \in U_1, \dots, u_m - v_m \in U_m$, la ecuación dada implica que cada $u_j - v_j$ es igual a 0. Por lo tanto $u_1 = v_1, \dots, u_m = v_m$. ■

El siguiente resultado da una condición simple para probar qué pares de subespacios dan una suma directa.

1.45 Teorema Suma directa de dos subespacios.

Supóngase que U y W son subespacios de V . Entonces $U + W$ es una suma directa si y sólo si $U \cap W = \{0\}$.

Demostración.- Primero supóngase que $U + W$ es una suma directa. Si $v \in U \cap W$, entonces $0 = v + (-v)$, donde $v \in U$ y $-v \in W$. Por la única representación de 0 como la suma de un vector en U y un vector en W , tenemos $v = 0$. ■

1.C Ejercicios

1. Para cada de los siguientes subconjuntos de \mathbf{F}^3 , determinar si es un subespacio de \mathbf{F}^3 :

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

Respuesta.- Por las condiciones de un subespacio 1.34 se tiene,

- Identidad aditiva.- Sea $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Entonces,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0.$$

- Cerrado por adición.- Sean

$$a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

Es decir,

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \Rightarrow b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 0.$$

Para probar que la adición se cumple, pongamos $a + b$ tal que $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$, como sigue

$$a + b = (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) + 3(a_3 + b_3) = 0$$

Si $(x_1, x_2, x_3) = [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)]$. Entonces,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Así, el conjunto dado es un subespacio de \mathbf{F}^3 .

- Cerrado por multiplicación escalar.- Sea $k \in \mathbf{F}$. Entonces,

$$k(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = k \cdot 0 \Rightarrow k(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = 0.$$

Por lo tanto, el conjunto dado es un subespacio de \mathbf{F}^3 .

- (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$.

Respuesta.- Sea $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Entonces,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \neq 0.$$

Ya que no cumple la primera condición de 1.34, decimos que el conjunto dado no es un subespacio.

- (c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$.

Respuesta.- Vemos que no se cumple la condición de adición. Observemos que $a = (1, 1, 0)$ y $b = (0, 1, 1)$, están en el conjunto dado. Es decir, se cumple la condición establecida:

$$1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Pero no así, para $a + b = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (1, 2, 1)$, ya que

$$1 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0.$$

- (d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 = 5x_3\}$.

Respuesta.- Por las condiciones de un subespacio 1.34 se tiene,

- Identidad aditiva.- Sea $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Entonces,

$$x_1 = 5x_3 \Rightarrow 0 = 5 \cdot 0.$$

- Cerrado por adición.- Sean

$$a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 = 5x_3\}.$$

Pongamos $x_1 = (a_1 + b_1)$ y $x_3 = (a_3 + b_3)$. Por lo tanto,

$$a_1 + b_1 = 5(a_3 + b_3) \Rightarrow x_1 = 5x_3.$$

- Cerrado por multiplicación escalar.- Sean $k \in \mathbf{F}$ y $a \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 = 5x_3\}$. Entonces,

$$k(a_1) = k(5a_3) \Rightarrow ka_1 = 5(ka_3).$$

Pongamos $x_1 = ka_1$ y $x_3 = ka_3$, por lo que

$$x_1 = 5x_3.$$

Así, el conjunto dado es un subespacio de \mathbf{F}^3 .

2. Verificar todas las afirmaciones del ejemplo 1.35.

- (a) Si $b \in \mathbf{F}$, entonces

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\}.$$

es un subespacio de \mathbf{F}^4 si y sólo si $b = 0$.

Demostración.- Supongamos que

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\}.$$

es un subespacio de \mathbf{F}^4 . Entonces por la primera condición del teorema 1.34, sabemos que $(0, 0, 0, 0)$ es un elemento del conjunto dado, por lo tanto

$$0 = 5 \cdot 0 + b$$

de donde,

$$b = 0.$$

Ahora supongamos que $b = 0$. Tendremos que verificar que se cumple las condiciones del teorema 1.34 para

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\}.$$

- Identidad aditiva.- Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$. Entonces,

$$x_3 = 5x_4 + 0 \Rightarrow 0 = 5 \cdot 0.$$

- Cerrado por adición.- Sean $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ y $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ donde vectores en el conjunto dado. Por la adición sabemos que $u + v \in \mathbf{F}^4$, así

$$u + v = (u_1, u_2, u_3, u_4) + (v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4).$$

Y por lo tanto,

$$(u_3 + v_3) = 5(u_4 + v_4).$$

- Sea $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ un vector en el conjunto dado y sea $k \in \mathbf{F}$. Entonces, por multiplicación escalar en \mathbf{F}^n se tiene,

$$ku = (ku_1, ku_2, ku_3, ku_4)$$

Por lo tanto, vemos que se cumple la condición de multiplicación escalar, ya que

$$ku_3 = 5(ku_4).$$

Así el conjunto dado es un subespacio de \mathbf{F}^4 si y sólo si $b = 0$.

- (b) El conjunto de funciones continuas de valor real en el intervalo $[0, 1]$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{[0,1]}$.

Demostración.-

- Identidad aditiva.- El vector cero en $\mathbf{R}^{[0,1]}$ es una función que asigna cada número a cero, esto es

$$O(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Como es una función constante y todas las funciones constantes son continuas, es un elemento del conjunto de funciones continuas de valor real en $[0, 1]$.

- Cerrado por adición.- Por el cálculo elemental, sabemos que la suma de dos funciones continuas es también continua. Por lo tanto, el conjunto de funciones continuas de valor real en $[0, 1]$ es cerrado bajo adición de vectores.
- Cerrado por multiplicación escalar.- Por cálculo elemental, sabemos que si f es una función continua, entonces kf es también una función continua para todos los números reales k . Por lo tanto, el conjunto de funciones continuas de valor real en $[0, 1]$ es cerrado bajo la multiplicación escalar.

Por lo tanto este conjunto es un subespacio de $\mathbf{R}^{[0,1]}$.

- (c) El conjunto de funciones diferenciables de valor real en \mathbf{R} es un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Demostración.-

- Identidad aditiva.- El vector cero en $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ es una función que asigna cada número a cero, esto es

$$O(x) = x \text{ para todo } x \in \mathbf{R}.$$

Como es una función constante y todas las funciones constantes son continuas, es un elemento del conjunto de funciones continuas de valor real en \mathbf{R} .

- Cerrado por adición.- Por el cálculo elemental, sabemos que la suma de dos funciones diferenciables es diferenciable. Por lo tanto, el conjunto de funciones diferenciables de valor real en \mathbf{R} es cerrado bajo adición de vectores.
- Cerrado por multiplicación escalar.- Por cálculo elemental, sabemos que si f es una función diferenciable, entonces kf es también una función diferenciable para todos los números reales k . Por lo tanto, el conjunto de funciones diferenciables de valor real en \mathbf{R} es cerrado bajo la multiplicación escalar.

- (d) El conjunto de funciones diferenciables de valor real f en el intervalo $[0, 3]$ tal que $f'(2) = b$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{(0,3)}$ si y sólo si $b = 0$.

Demostración.- Si $b = 0$, entonces consideremos el conjunto de todas las funciones diferenciables de valor real f en el intervalo $(0, 3)$ tales que $f'(2) = b = 0$.

$O(x)$ es un elemento de este conjunto, ya que es diferenciable en este intervalo y su derivada es la misma, por lo tanto $O'(2) = 0$. Luego suponga que f y g son elementos de este conjunto. Ya sabemos que la suma de dos funciones diferenciables es de nuevo diferenciable, por lo que $f + g$ es una función diferenciable. Notemos que $(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 0 + 0 = 0$, así el conjunto es cerrado por adición de vectores.

Ahora, suponga que f es un elemento de este conjunto y k es algún número real. Sabemos que cualquier múltiplo escalar de una función diferenciable es diferenciable, por lo que kf es diferenciable. Es decir, $(kf)'(2) = k[f'(2)] = k \cdot 0 = 0$. Así el conjunto es cerrado por la multiplicación escalar. Así $b = 0$, implica que el conjunto de funciones diferenciables de valor real en el intervalo $(0, 3)$ tal que $f'(2) = 0$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{(0,3)}$.

Por otro lado, suponga que el conjunto de funciones diferenciables de valor real f en el intervalo $(0, 3)$ tal que $f'(2) = b$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{(0,3)}$. Por el teorema 1.34 sabemos que este

conjunto debe contener el vector cero en $\mathbf{R}^{(0,3)}$. Esto es, debe contener la función $O(x)$. Pero sabemos que

$$O'(x) - O(x) = 0$$

para todos los valores de x en $(0, 3)$. En particular $O'(2) = 0$. Por tanto, b debe ser igual a 0.

(e) El conjunto de todas las secuencias de número complejos con límite 0 es un subespacio de \mathbf{C}^∞ .

Demostración.-

- Identidad aditiva.- El vector cero en \mathbf{C}^∞ es la secuencia $O_n = (0, 0, \dots, 0)$. Por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = 0.$$

Ya que O_n es un elemento del conjunto de todas las secuencias de número complejos con límite 0.

- Cerrado por adición.- Sean a_n y b_n dos elementos del conjunto dado. Esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Por el calculo elemental, sabemos que si $c_n \rightarrow L$ y $d_n \rightarrow M$ con $n \rightarrow \infty$, entonces $c_n + d_n \rightarrow L + M$. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = 0 + 0 = 0$$

Así, $a_n + b_n$ es un elemento del conjunto dado. Por lo que es cerrado por la suma de vectores.

- Cerrado por multiplicación escalar.- Sean a_n un elemento del conjunto dado y $k \in \mathbf{C}$. Lo que significa que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Por el calculo elemental, sabemos que si $c_n \rightarrow L$ con $n \rightarrow \infty$, entonces $kc_n \rightarrow kL$ para $n \rightarrow \infty$. Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k \cdot 0 = 0.$$

Así, ka_n es un elemento del conjunto dado. Por lo que es cerrado por la multiplicación escalar. Concluimos por el teorema 1.34, que este conjunto es un subespacio de \mathbf{C}^∞ .

3. Demuestre que el conjunto de funciones diferenciables de valores reales f en el intervalo $(-4, 4)$ tal que $f'(-1) = 3f(2)$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{(-4,4)}$.

Demostración.- Sea A el conjunto de funciones diferenciables de valores reales f en $(-4, 4)$ tal que $f'(-1) = 3f(2)$. Para demostrar la identidad aditiva, podemos escoger una función constante, $f = 0$ tal que

$$f'(-1) = 3f(2) \Rightarrow 0 = 0.$$

Por lo tanto, $0 \in A$. Para demostrar la cerradura por adición, sean $f, g \in A$. Entonces por definición

$$f'(-1) = 3f(2) \quad \text{y} \quad g'(-1) = 3g(2).$$

Entonces,

$$f'(-1) + g'(-1) = 3[f(2) + g(2)]$$

$$(f + g)'(-1) = 3(f + g)(2)$$

Lo que implica que,

$$(f + g) \in A.$$

Por último demosmos la cerradura por multiplicación escalar. Sean $k \in \mathbf{F}$, tal que

$$kf'(-1) = k3f(2),$$

por lo que

$$(kf)'(-1) = 3(kf)(2).$$

Por lo tanto $(kf) \in A$. Así, A es un subespacio de $\mathbf{R}^{(-4,4)}$.

4. Suponga $b \in \mathbf{R}$. Demuestre que el conjunto de funciones continuas de valores reales f en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\int_0^1 f = b$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{[0,1]}$ si y sólo si $b = 0$.

Demostración.- Primero demosmos que si el conjunto es un subespacio, entonces $b = 0$. Notemos que este conjunto contiene la función cero el cual es definido por $f_0(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$. Porque es un subespacio y f_0 es la identidad aditiva. Entonces, debe ser:

$$b = \int_0^1 f_0 = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Ahora, sea $b = 0$ probaremos que el conjunto dado es un subespacio. Como la primera parte del ejercicio, tenemos que $\int_0^1 f_0 = 0$, así f_0 esta en el conjunto descrito y por lo tanto queda demostrado la identidad aditiva. Luego, sean f y g funciones continuas de valor real en $[0, 1]$, tal que

$$\int_0^1 f = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^1 g = 0.$$

Entonces,

$$\int_0^1 (f + g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g = 0 + 0 = 0.$$

Así, $f + g$ se cumple para el conjunto dado y por lo tanto, queda demostrado la cerradura por adición. Por último, sea $k \in \mathbf{F}$, con f y g definida arriba, entonces

$$\int_0^1 kf = k \int_0^1 f = k \cdot 0 = 0.$$

Así, kf también está en el conjunto descrito y por lo tanto se cumple la cerradura por multiplicación escalar. Por lo que podemos concluir que el conjunto es un subespacio.

5. Es \mathbf{R}^2 un subespacio del espacio vectorial complejo \mathbf{C}^2 .

Demostración.- Si \mathbf{R}^2 es subespacio de \mathbf{C} , entonces \mathbf{R}^2 es cerrado por la multiplicación escalar. Verifiquemos esta afirmación. Sea k un escalar en \mathbf{C} . Si $k = i$ y tenemos $(1, 0) \in \mathbf{R}^2$, por lo que $i(1, 0) = (i, 0)$, el cual no pertenece a \mathbf{R}^2 . De hecho se puede tomar cualquier $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tal que $x_1 \neq 0$ o $x_2 \neq 0$, de donde podemos demostrar que $i(x_1, x_2) = (ix_1, ix_2)$ el cual no pertenece en \mathbf{R}^2 . Concluimos que \mathbf{R}^2 no es un subespacio de \mathbf{C}^2 .

6. (a) ¿Es $\{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 : a^3 = b^3\}$ un subespacio de \mathbf{R}^3 ?

Respuesta.- Por las condiciones de un subespacio 1.34 se tiene,

- Identidad aditiva: Sea $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Entonces,

$$0^3 = 0^3 \Rightarrow 0 = 0.$$

Por lo tanto, se cumple la identidad aditiva.

- Cerradura por adición: Sea (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) elementos del conjunto dado. Entonces,

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2).$$

Luego,

$$(a_1 + a_2)^3 = (b_1 + b_2)^3.$$

Sean $a = a_1 + b_1$ y $b = b_1 + b_2$. Por la asociatividad de la suma en \mathbf{R} ,

$$a^3 = b^3.$$

Por lo tanto, se cumple la cerradura por adición.

- Cerradura por multiplicación escalar: Sea $k \in \mathbf{R}$ y $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbf{R}^3$. Entonces,

$$k(a_1, b_1, c_1) = (ka_1, kb_1, kc_1).$$

Luego,

$$(ka_1)^3 = (kb_1)^3.$$

Sean $ka_1 = a$ y $kb_1 = b$. Por la asociatividad de la multiplicación en \mathbf{R} ,

$$a^3 = b^3.$$

Por lo tanto, se cumple la cerradura por multiplicación escalar. Así, el conjunto dado es un subespacio de \mathbf{R}^3 .

- (b) ¿Es $\{(a, b, c) \in \mathbf{C}^3 : a^3 = b^3\}$ un subespacio de \mathbf{C}^3 ?

Respuesta.- Sea W el conjunto definido. Entonces, W no es un subespacio de \mathbf{C}^3 . Consideremos $x = (1, 1, 0) \in \mathbf{C}^3$ y $y = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1, 0\right) \in \mathbf{C}^3$. Por lo que claramente $x + y \notin W$ ya que,

$$\left[1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^3 = -1 \neq 2^3 = (1 + 1)^3.$$

7. Dé un ejemplo de un subconjunto no vacío U de \mathbf{R}^2 tal que U sea cerrado bajo adición y bajo la medida de inversos aditivos (es decir, $-u \in U$ siempre que $u \in U$), pero U no es un subespacio de \mathbf{R}^2 .

Respuesta.- Denote que $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x, y \in \mathbf{Z}\}$ para U es un conjunto no vacío. Si $(x_1, y_1) \in A$ y $(x_2, y_2) \in A$. Entonces, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$, ya que $x_1 + x_2$ y $y_1 + y_2$ son enteros. Esto significa $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$. Es decir, U es cerrado por adición. Del mismo modo, ya que $(-x_1, -y_2) \in U$, resulta que U es cerrado bajo inverso aditivo. Sin embargo U no es cerrado bajo la multiplicación escalar, esto por el hecho de que $(1, 1) \in A$ mientras que $\frac{1}{2}(1, 1) \notin U$. Por lo tanto, U no es un subespacio de \mathbf{R}^2 .

8. Dé un ejemplo de un subconjunto no vacío U de \mathbf{R}^2 tal que U es cerrado bajo la multiplicación escalar, pero U no es un subespacio de \mathbf{R}^2 .

Respuesta.- Denota que $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$, luego U no está vacío. Si $(x, 0) \in U$, entonces para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$, tenemos

$$\lambda(x, 0) = (\lambda x, 0) \in U.$$

Similarmente, $\lambda(0, y) \in U$, por lo que U es cerrada bajo la multiplicación escalar. Sin embargo, $(1, 0), (0, 1) \in U$ mientras que $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin U$. Esto implica que U no es cerrado bajo la adición. Por lo tanto, no es subespacio de \mathbf{R}^2 .

9. Una función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es llamado **periódica** si existe un número positivo p tal que $f(x) = f(x + p)$ para todo $x \in \mathbf{R}$. ¿Es el conjunto de funciones periódicas \mathbf{R} a \mathbf{R} un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$? Explique.

Respuesta.- No, el conjunto de las funciones periódicas \mathbf{R} a \mathbf{R} no es un espacio vectorial de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Por ejemplo, la función $h(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \cos x$ no es periódica aunque $f(x) = \sin(\sqrt{2}x)$ y $g(x) = \cos x$ lo son. Suponga que existe un número positivo p tal que $h(x) = h(x + p)$ para todo $x \in \mathbf{R}$, entonces $1 = h(0) = h(p) = h(-p)$. Es equivalente a decir,

$$1 = \cos p + \sin \sqrt{2}p = \cos p - \sin \sqrt{2}p,$$

que implica $\sin \sqrt{2}p = 0$ y $\cos p = 1$. De este último podemos deducir que $p = 2k\pi$ para $k \in \mathbf{Z}$. Sin embargo, $\sin \sqrt{2}p = 0$ implica $\sqrt{2}p = l\pi$ para $l \in \mathbf{Z}$. De donde,

$$\sqrt{2} = \frac{l\pi}{2k\pi} = \frac{l}{2k} \in \mathbf{Q},$$

lo cual es imposible.

10. Suponga U_1 y U_2 son subespacios de V . Demostrar que la intersección $U_1 \cap U_2$ es un subespacio de V .

Demostración.- Por las condiciones de un subespacio 1.34 se tiene

- Identidad aditiva.- Por definición $0 \in U_1$ y $0 \in U_2$, entonces $0 \in U_1 \cap U_2$.
- Cerrado bajo adición.- Si $x \in U_1 \cap U_2$ e $y \in U_1 \cap U_2$, luego $x \in U_1$ e $y \in U_1$, de donde $x + y \in U_1$. Similarmente, $x + y \in U_2$. Por lo tanto $x + y \in U_1 \cap U_2$.
- Cerrado bajo adición.- Si $x \in U_1 \cap U_2$, entonces $x \in U_1$. Luego, para algún $\lambda \in \mathbf{F}$, se tiene $\lambda x \in U_1$. Similarmente $\lambda x \in U_2$. Por lo tanto $\lambda x \in U_1 \cap U_2$.

11. Demostrar que la intersección de toda colección de subespacios de V es un subespacio de V .

Demostración.- Sea $\{V_i : i \in I\}$ es una colección de subespacios de V . Queremos probar que

$$\bigcap_{i \in I} V_i$$

es un subespacio de V . Primero, para todo V_i subespacios de V , entonces $0 \in V_i$. Así,

$$V_i \in I \Rightarrow 0 \in \bigcap_{i \in I} V_i.$$

Luego, sea $x, y \in \cap_{i \in I} V_i$. Entonces $x, y \in V_i, \forall i \in I$. Para todo V_i son subespacios de V , donde $x + y \in V_i, \forall i \in I$. Por lo tanto

$$x + y \in \bigcap_{i \in I} V_i.$$

Por último, para $x \in \cap_{i \in I} V_i$ y un escalar α , entonces $x \in V_i, \forall i \in I$. Para todo V_i son subespacios de V . Se sigue que $\alpha x \in V_i$, así

$$\forall i \in I \Rightarrow \alpha x \in \bigcap_{i \in I} V_i.$$

Por lo tanto, $\cap_{i \in I} V_i$ es un subespacio de V .

12. Demostrar que la unión de dos subespacios de V es un subespacio de V si y sólo si uno de los subespacios está contenido en el otro.

Demostración.- Supongamos que $U_1 \not\subseteq U_2$ y $U_2 \not\subseteq U_1$. Elegimos un $v \in U_1$ tal que $v \notin U_2$. Ya que v es un subespacio de U_1 , entonces $(-v)$ también debe serlo, por definición. Del mismo modo $U_2 \not\subseteq U_1$. Luego, elegimos un $u \in U_2$ tal que $u \notin U_1$. Como u está en el subespacio U_2 , entonces $(-u)$ también debe serlo, por definición.

Si $v + u \in U_1 \cup U_2$, entonces $v + u$ está en U_1 o U_2 . Pero,

$$v + u \in U_1 \Rightarrow v + u + (-v) \in U_1 \Rightarrow u \in U_1.$$

De la misma manera,

$$v + u \in U_2 \Rightarrow v + u + (-u) \in U_2 \Rightarrow v \in U_2.$$

Lo que contradice el hecho de que cada elemento fue definido para no estar en estos subespacios. Por otro lado, sea $U_1 \subseteq U_2$. Lo que implica $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1$. Luego, ya que U_2 es un subespacio, $U_1 \cap U_2$ también lo es.

13. Demostrar que la unión de tres subespacios de V es un subespacio de V si y sólo si uno de los subespacios contiene a los otros dos. [Este ejercicio es sorprendentemente más difícil que el anterior, posiblemente porque este ejercicio no es cierto si sustituimos F por un campo que contenga sólo dos elementos].

Demostración.- Sean U_1, U_2, U_3 subespacios de V y $E = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ un subespacio de V . Primero, suponga que ningún subespacio es un subconjunto de ninguno de los otros dos. Entonces, podemos elegir $w \in U_1$, con $w \notin U_2$ y $x \in U_2$ con $x \notin U_1$. Como $x, w \in E$, sabemos que $(w + x) \in E$ y $(w - x) \in E$, es un subespacio. Si $(w + x) \in U_1$, entonces $(w + x) - w = x \in U_1$, que es una contradicción. Si $(w + x) \in U_2$, entonces $(w + x) - x = w \in U_2$, también vemos que es una contradicción. Así, debemos tener $w + x \in U_3$.

Por otro lado, si $w - x \in U_1$, entonces $(w - x) - w = -x \in U_1$, lo que es imposible. Si $w - x \in U_2$, entonces $(w - x) + x = w \in U_2$, también es imposible. Así, $(w - x) \in U_3$. Pero $(w - x) + (w + x) = 2w \in U_3$, que implica $w \in U_3$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, este caso es imposible y al menos un subespacio debe ser un subconjunto de otro.

Si $U_1 \subseteq U_2$, entonces $U_1 \cup U_2 = U_2$ es un subespacio, esto por el ejercicio anterior y ya que $E = U_1 \cup U_2 \cup U_3 = U_2 \cup U_3$ es un subespacio, ya que $U_2, U_3 \subseteq U_2$ (por el ejercicio anterior.) E el primer caso, U_1 y U_2 son un subconjunto de U_3 y en el segundo caso U_1 y U_3 son un subconjunto de U_2 .

Por el contrario, suponga que $U_1 \cup U_2 \subseteq U_3$. Entonces $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = U_3$, y la unión es un subespacio.

14. Verifique la afirmación del ejemplo 1.38.

Demostración.- Está claro que U y W son subespacios de \mathbf{F}^4 . Luego supongamos que

$$(x_1, x_1, y_1, y_1) \in U \text{ y } (x_2, x_2, x_2, y_2) \in W.$$

Entonces,

$$(x_1, x_1, y_1, y_1) + (x_2, x_2, x_2, y_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, y_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \{(x, x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{F}\},$$

ya que $U + W \subset \{(x, x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{F}^4\}$. Luego, para cualquier $x, y, z \in \mathbf{F}$, tenemos $(0, 0, y - x, y - x) \in U$ y $(x, x, x, z + x - y) \in W$. Sin embargo,

$$(x, x, y, z) = (0, 0, y - x, y - x) + (x, x, x, z + x - y) \in U + W,$$

por lo tanto $\{(x, x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{F}^4\} \subset U + W$. Combinando esto con el argumento anterior, se sigue que $U + W = \{(x, x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{F}\}$.

15. Supongamos que U es un subespacio de V . ¿Qué es $U + U$?

Respuesta.- Sea,

$$U + U = \{u + v : u, v \in U\}.$$

Esto significa que $U \subset U + U$, ya que $u \in U$ y u es igual $u + 0$. Luego, podríamos expresar u como una suma de 2 elementos de U . Por otro lado, $U + U \subset U$ ya que la suma de los dos elementos de U podrían ser un elemento de U . Por lo tanto, $U + U = U$.

16. ¿La operación de adición en los subespacios de V es conmutativa? En otras palabras, si U y W son subespacios de V , ¿es $U + W = W + U$?

Respuesta.- Sea $x \in U$ e $y \in W$. Ya que la adición en V es conmutativa, tenemos $x + y = y + x \in W + U$. Esto implica que $U + W \subset W + U$. Similarmente tenemos que $W + U \subset U + W$. Por lo tanto $U + W = W + U$.

17. ¿La operación de adición en los subespacios de V es asociativa? En otras palabras, si U_1, U_2, U_3 son subespacios de V , ¿eso

$$(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)?$$

Demostración.- Sea $v \in (U_1 + U_2) + U_3$, entonces existe $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ y $u_3 \in U_3$ tal que:

$$v = (u_1 + u_2) + u_3.$$

Ya que, es asociativa a la suma en V , tenemos:

$$v = u_1 + (u_2 + u_3) \in U_1 + (U_2 + U_3).$$

Así, $(U_1 + U_2) + U_3 \subset U_1 + (U_2 + U_3)$. Del mismo modo, podemos probar que $U_1 + (U_2 + U_3) \subset (U_1 + U_2) + U_3$. Sea $v \in U_1 + (U_2 + U_3)$. Después, existe $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ y $u_3 \in U_3$ tal que:

$$v = u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3 \in (U_1 + U_2) + U_3,$$

ya que, $U_1 + (U_2 + U_3) \subset (U_1 + U_2) + U_3$. Por lo que concluimos que

$$U_1 + (U_2 + U_3) = (U_1 + U_2) + U_3.$$

18. ¿Tiene la operación de adición en los subespacios de V una identidad aditiva? ¿Qué subespacios tienen inversos aditivos?

Respuesta.- Si. El subespacio que buscamos es $\{0\}$. Si U es un subespacio de V , entonces

$$U + \{0\} = \{0\} + U = U.$$

Por otro lado, si U y W son subespacios de V , tal que $U + W = \{0\}$, entonces se sigue que, ambos, U y W están contenidos en $U + W$, esto sólo es posible si $U = W = \{0\}$.

19. Demuestre o dé un contraejemplo: Si U_1, U_2, W son subespacios de V tales que

$$U_1 + W = U_2 + W,$$

entonces $U_1 = U_2$.

Demostración.- Daremos un contraejemplo. Sean

$$\begin{aligned} V = U_1 &= \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 : a, b \in \mathbf{R}\} \\ U_2 &= \{(a, 0) \in \mathbf{R}^2 : a \in \mathbf{R}\} \\ W &= \{(0, b) \in \mathbf{R}^2 : b \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Entonces, es fácil ver que $U_1 + W = U_2 + W$, pero $U_1 \neq U_2$.

20. Suponga

$$U = \{(x, x, y, y) \in \mathbf{F}^4 : x, y \in \mathbf{F}\}.$$

Encuentre un subespacio W de \mathbf{F}^4 tal que $\mathbf{F}^4 = U \oplus W$.

Respuesta.- Tome $W = \{(0, z, 0, w) \in \mathbf{F}^4 : z, w \in \mathbf{F}\}$. Para cualquier $(x, y, z, w) \in \mathbf{F}^4$, de donde tenemos

$$(x, y, z, w) = (x, x, z, z) + (0, y - x, 0, w - z) \in U + W.$$

De donde, obtenemos $\mathbf{F}^4 = U + W$. Además, si $(x, y, z, w) \in U \cap W$, entonces debemos tener $x = y$ y $z = w$, ya que $(x, y, x, w) \in U$. Del mismo modo, puesto que $(x, y, z, w) \in W$, tenemos $x = 0$ y $z = 0$. Por lo tanto, $x = y = 0$ y $z = w = 0$, que implica $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$. Resulta por 1.45 que $U \cap W = \{0\}$. Así, $\mathbf{F}^4 = U \oplus W$.

21. Suponga

$$U = \{(x, y, x + y, x - y, 2x) \in \mathbf{F}^5 : x, y \in \mathbf{F}\}.$$

Encuentre un subespacio W de \mathbf{F}^5 tal que $\mathbf{F}^5 = U \oplus W$.

Respuesta.- Sea $W = \{(0, 0, z, w, s) \in \mathbf{F}^5 : z, w, s \in \mathbf{F}\}$. Si $(x, y, z, w, s) \in U \cap W$, ya que $(x, y, z, w, s) \in W$ entonces $x = y = 0$. Además, tenemos $z = x + y, w = x - y, s = 2x$, esto porque $(x, y, z, w, s) \in U$. Por lo tanto $z = w = s = 0$, por lo que $U \cap W = \{0\}$. Del mismo modo, para cualquier $(x, y, z, w, s) \in \mathbf{F}^5$. Puesto que $(x, y, x + y, x - y, 2x) \in U$ y $(0, 0, z - x - y, w - x + y, s - 2x) \in W$, se tiene

$$(x, y, z, w, s) = (x, y, x + y, x - y, 2x) + (0, 0, z - x - y, w - x + y, s - 2x) \in U + W.$$

Por lo tanto, $\mathbf{F}^5 = U + W$. Ya que, $U \cap W = \{0\}$ de 1.45 se sigue que $\mathbf{F}^5 = U \oplus W$.

22. Suponga

$$U = \{(x, y, x + y, x - y, 2x)\} \in \mathbf{F}^5 : x, y \in \mathbf{F}.$$

Encuentre tres subespacios W_1, W_2, W_3 de \mathbf{F}^5 , ninguno de los cuales es igual a $\{0\}$, tal que $\mathbf{F}^5 = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

Respuesta.- Sean $W_1 = \{(0, 0, 0, z, 0) : x, y \in \mathbf{F}\}$, $W_2 = \{(0, 0, 0, z, 0) \in \mathbf{F}^5 : x, y \in \mathbf{F}\}$ y $W_3 = \{(0, 0, 0, 0, z) \in \mathbf{F}^5 : x, y \in \mathbf{F}\}$. Por el mismo argumento del problema anterior (21), se tiene

$$\mathbf{F}^5 = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3.$$

23. Demostrar o dar un contraejemplo: Si U_1, U_2, W son subespacios de V tales que

$$V = U_1 \oplus W \quad \text{u} \quad V = U_2 \oplus W,$$

Entonces, $U_1 = U_2$.

Demostración.- Daremos un contraejemplo. Sean, $V = \mathbf{R}^2$, $U_1 = \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\}$, $U_2 = \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 : y \in \mathbf{R}\}$ y $W = \{(z, z) \in \mathbf{R}^2 : z \in \mathbf{R}\}$. Por el mismo argumento del problema 21, se tiene

$$V = U_1 \oplus W \quad \text{y} \quad V = U_2 \oplus W,$$

sin embargo, $U_1 \neq U_2$.

24. Una función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es llamado par si

$$f(-x) = f(x)$$

para todo $x \in \mathbf{R}$. Sea U_e el conjunto de funciones pares de valor real sobre \mathbf{R} y sea U_o el conjunto de funciones impares de valor real sobre \mathbf{R} . Demuestre que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = U_e \oplus U_o$.

Demostración.- Para cada función de variable real f sabemos que $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Sea $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ y $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, así

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

. Probaremos que g es par y h es impar.

Para demostrar que g es par, tenemos

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f[-(-x)]}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x).$$

Luego, para demostrar que h es impar, tenemos

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f[-(-x)]}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x).$$

Ahora, demostraremos que $U_e \cap U_o = \{0\}$. Sea $z \in U_e \cap U_o$. De donde, $z(-x) = z(x)$. Después, si $z \in U_o$ entonces $z(-x) = -z(x)$. Concluimos que

$$z(x) = -z(x) \quad \Rightarrow \quad 2z(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad z(x) = 0$$