

# Ejercicios Capitulo 7

Christian Limbert Paredes Aguilera

2022-11-21

## Ejercicios capitulo 7

### 7.1

Una forma de mercadotecnia envía un cuestionario a 1000 residentes de cierto suburbio de una ciudad para determinar sus preferencias como compradores. De los 1000 residentes, 80 responden el cuestionario. ¿Lo anterior constituye una muestra aleatoria? Discutir los méritos de este procedimiento para obtener una muestra aleatoria.

### 7.2

En una planta de armado automotriz se seleccionarán 50 de los primeros 1000 automóviles de un nuevo modelo para ser inspeccionados por el departamento de control de calidad. El gerente de la planta decide inspeccionar un automóvil cada vez que terminan de armarse 20. ¿Este proceso dará como resultado una muestra aleatoria? Comente.

Respuesta.- Dado que el experimento se repite bajo las mismas condiciones, con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Podemos decir que este experimento podría ser sin sesgo.

### 7.3

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  constituye una muestra aleatoria, obtener las funciones de verosimilitud de las siguientes distribuciones:

a)

De Poisson, con parámetro  $\lambda$ ;

Respuesta.- Sea  $p(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$  para  $x = 0, 1, 2, \dots$ , entonces la función de verosimilitud será

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_2}}{x_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}, \quad x = 1, 2, \dots$$

b)

Hipergeométrica, con parámetro  $p$ ;

Respuesta.- Si  $p = k/N$ , puede escribirse la función de probabilidad hipergeométrica como una función de probabilidad binomial y dado que el único parámetro es  $p$  entonces,  $p(x, n, p) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$

c)

Uniforme en el intervalo  $(a, b)$ ;

Respuesta.- Sea  $\frac{1}{b-a}$  para  $a \leq x \leq b$  una función de densidad de probabilidad uniforme. Entonces, la función de verosimilitud será:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{b-a} \cdots \frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}$$

d)

$N(\mu, \sigma)$

Respuesta.- Sea  $f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ , la función de densidad de probabilidad. Entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\sum \left[ \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]} \end{aligned}$$

## 7.4

Repetir el ejercicio 7.3 para las siguientes distribuciones:

a)

Gama con parámetro  $\alpha$  y  $\theta$ .

Respuesta.- Sea,  $\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}$  la distribución de densidad gama, entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha, \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_i/\theta} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_1/\theta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_2/\theta} \cdots \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x_n/\theta} \\ &= \left( \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \right)^n \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta}}. \end{aligned}$$

b)

Weibull con parámetro  $\alpha$  y  $\theta$ .

Respuesta.- Sea  $f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\theta)^\alpha}$  la distribución de densidad de probabilidad Weibull, entonces la función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \dots x_n; \alpha, \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_i^{\alpha-1} e^{-(x_i/\theta)^\alpha} \\
&= \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_1^{\alpha-1} e^{-(x_1/\theta)^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_2^{\alpha-1} e^{-(x_2/\theta)^\alpha} \dots \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x_n^{\alpha-1} e^{-(x_n/\theta)^\alpha} \\
&= \left( \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \cdot e^{\left[ - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\theta} \right)^\alpha \right]}.
\end{aligned}$$

**7.5**