

Calculo diferencial e integral tomo 1  
Nikolai Piskunov

Resolución de problemas por FODE

---

# Índice general

<b>1. Número, variable y función</b>	<b>3</b>
1.1. Números reales. Representación de número reales por medio de puntos en el eje numérico . .	3
1.2. Valor absoluto del número real . . . . .	4
1.4. Campo de variación de la magnitud variable . . . . .	5
1.5. Variable ordenada. Variable crecientes y decrecientes , variable acotada . . . . .	5
1.6. Función . . . . .	5
1.8. Funciones elementales fundamentales . . . . .	6
1.9. Ejercicios para el capítulo 1 . . . . .	6

## Número, variable y función

### 1.1. Números reales. Representación de número reales por medio de puntos en el eje numérico

**Definición 1.1** El número racional puede expresarse como la razón  $\frac{p}{q}$  de dos números enteros  $p$  y  $q$ .

El número entero  $p$  se puede considerar como la razón de dos números enteros  $\frac{p}{1}$ .

**Definición 1.2** Los números en forma de fracciones decimales indefinidas no periódicas, se denominan números irracionales.

**Definición 1.3** Para cualquier par de números reales  $x$  e  $y$  existen una correlación, y sólo una, de las siguientes:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

**Teorema 1.1** Todo número irracional  $\alpha$  se puede expresar con cualquier grado de precisión por medio de números racionales.

*Demostración.-* En efecto, siendo el número irracional  $\alpha > 0$ , calculamos  $\alpha$  con un error no mayor de  $\frac{1}{n}$  (por ejemplo, de  $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ , etc.)

Cualquiera que sea el número  $\alpha$ , está comprendido entre dos números enteros consecutivos  $N$  y  $N + 1$ . Dividamos el segmento comprendido entre  $N$  y  $N + 1$  en  $n$  partes, entonces el número  $\alpha$  resulta comprendido entre los números racionales  $N + \frac{m}{n}$  y  $N + \frac{m+1}{n}$ . Dado que la diferencia entre estos números es  $\frac{1}{n}$ , cada uno de ellos expresa  $\alpha$  con un grado de precisión predeterminado: El primero por defecto y el segundo por exceso.

## 1.2. Valor absoluto del número real

**Definición 1.4** Un número real no negativo, que satisface las condiciones:

$$|x| = x, \text{ si } x \geq 0;$$

$$|x| = -x, \text{ si } x < 0$$

se llama valor absoluto (o módulo) de un número real  $x$ .

**Propiedad 1.1** El valor absoluto de la suma algebraica de varios números reales no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

*Demostración.-* Sea  $x + y \geq 0$ , entonces:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

(ya que  $x \leq |x|$  e  $y \leq |y|$ ).

Supongamos ahora que  $x + y < 0$ , entonces:

$$|x + y| = -/x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|,$$

como se trataba de demostrar.

**Propiedad 1.2** El valor absoluto de la diferencia de dos números no es mejor que la diferencia de los valores absolutos del minuendo y sustraendo:

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

*Demostración* Supongamos que  $x - y = x$ . Entonces  $x = y + z$ , y según lo demostrado anteriormente, se tiene:

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |z| + |x - y|,$$

de donde

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

como se trataba de demostrar.

**Propiedad 1.3** El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores:

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

**Propiedad 1.4** El valor absoluto del cociente es igual al cociente de dividir el valor absoluto del dividendo por el del divisor:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

## 1.4. Campo de variación de la magnitud variable

**Definición 1.5** El conjunto de todos los valores numéricos de la magnitud variable se denomina campo de variación de la variable.

## 1.5. Variable ordenada. Variable crecientes y decrecientes, variable acotada

**Definición 1.6** La variable se denomina creciente, si cada valor posterior es mayor que el anterior. Por el contrario, si cada valor posterior es menor que el anterior, la variable se denomina decreciente.

**Definición 1.7** La variable  $x$  se denomina magnitud acotada, si existe un número constante  $M > 0$  tal que, a partir de cierto valor, todos los posteriores satisfagan la condición.

$$-M \leq x \leq M, \quad \text{es decir,} \quad |x| \leq M$$

## 1.6. Función

**Definición 1.8** Si a cada valor de la variable  $x$ , perteneciente a cierto campo, le corresponde un sólo valor determinado de otra variable  $y$ , entonces ésta será función de  $x$ , y podemos escribir simbólicamente:

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad \text{etc.}$$

La dependencia que existe entre las variables  $x$  e  $y$  se llaman funcional.

**Definición 1.9** El conjunto de los valores de  $x$  para los cuales se terminan los valores de la función  $y$ , en virtud de la ley  $f(x)$ , se llama **dominio de definición de la función**

**Definición 1.10** La función  $y = f(x)$  se llama creciente, cuando a un mayor valor del argumento  $x$  corresponde un mayor valor de la función. De modo análogo se define la función decreciente.

## 1.8. Funciones elementales fundamentales

**Definición 1.11** La función  $y = f(x)$  se denomina periódica, si existe un número constante  $C$  tal que, al sumario (o restario) al argumento  $x$ , el valor de la función no se altere,  $f(x + C) = f(x)$ . El valor mínimo de este número constante se denomina periodo de la función.

**Definición 1.12** La función que puede ser dada por la fórmula de la forma  $y = f(x)$ , donde el segundo miembro de la igualdad está compuesto de funciones elementales fundamentales y constantes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y función de función, se llama **función elemental**.

La función que no es algebraica se llama transcendentales:  $y = \cos x$   $y = 10^x$

## 1.9. Ejercicios para el capítulo 1

1. Dada la función  $f(x) = x^2 + 6x - 4$ . Comprobar que  $f(1) = 3$ ,  $f(3) = 23$ .

Repuesta.-

- $f(1) = 1^2 + 6 \cdot 1 - 4 = 3$ .
- $f(3) = 3^2 + 6 \cdot 3 - 4 = 9 + 18 - 4 = 23$ .

2.  $f(x) = x^2 + 1$ . Calcular los valores.

a)  $f(4) = 16 + 1 = 17$

b)  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 + 1$

c)  $f(a + 1) = (a + 1)^2 + 1 = a^2 + 2a + 1 + 1 = a^2 + 2a + 2$

d)  $f(a) + 1 = a^2 + 1 + 1 = a^2 + 2$

e)  $f(a^2) = a^4 + 1$

f)  $f[f(a)]^2 = (a^2 + 1)^2 = a^4 + 2a^2 + 1$

g)  $f(2a) = (2a)^2 + 1 = 4a^2 + 1$

3.  $p(x) = \frac{x-1}{3x+5}$ . Escribir las expresiones  $p\left(\frac{1}{x}\right)$  y  $\frac{1}{p(x)}$

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad p\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\frac{1}{x} - 1}{3\frac{1}{x} + 5} = \frac{1 - x}{5x + 3} \\ \blacksquare \quad \frac{1}{p(x)} &= \frac{1}{\frac{x-1}{3x+5}} = \frac{3x+5}{x-1} \end{aligned}$$

4.