

Algunas distribuciones continuas de probabilidad

1.1. La distribución normal

Definición 1.1. se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \end{matrix}$$

Si se obtienen las dos primeras derivadas de $f(x; \mu, \sigma)$ con respecto a x y se igualan a cero, se tiene que el valor máximo de $f(x; \mu, \sigma)$ ocurre cuando $x = \mu$, y los valores $x = \mu \pm \sigma$ son las abscisas de los dos puntos de inflexión de la curva.

Demostrar que la definición 5.1 es una función de densidad de probabilidad.

Demostración.- El que la función sea no negativa se satisface, ya que $f(x; \mu, \sigma) > 0$ para $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$. Para demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x; \mu, \sigma) dx = 1.$$

Sea

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

el valor de la integral y aplíquese la transformación lineal $y = (x - \mu)/\sigma$ de manera tal que $x = \sigma y + \mu$ y $dx = \sigma dy$. Esto da como resultado:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

Si puede demostrarse que $I^2 = 1$, puede deducirse que $I = 1$ puesto que $f(x; \mu, \sigma)$ tiene un valor positivo. De acuerdo con lo anterior:

$$I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y^2+z^2)}{2}} dy dz,$$

en donde se ha escrito el producto de las dos integrales como una doble integral ya que las funciones de z son contantes con respecto a y como también de manera viceversa. Al cambiar de coordenadas rectangulares representadas por x e y , a coordenadas polares r y θ , en donde $y = r \cos \theta$ y $z = r \sin \theta$. Esto

es:

$$y^2 + z^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

y el elemento de área $dydz$, en coordenadas rectangulares se reemplaza por $rdrd\theta$ en coordenadas polares. Dado que los límites $(-\infty, \infty)$ tanto para y como para z generan el plano completo yz , el plano correspondiente a r y a θ se genera mediante el empleo de los límites $(0, 2\pi)$ para θ y $(0, \infty)$ para r . De esta forma se tiene:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr = \frac{\theta}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} \cdot [-e^{-r^2/2}] \Big|_0^\infty = 1.$$

La media de una variable aleatoria distribuida normalmente se encuentra definida por:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Se pretende demostrar que $E(X) = \mu$. Supóngase que a $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ se suma y se resta

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

La identidad se mantiene, pero después de reacomodar términos se tiene

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^\infty (x - \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x (x - \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu \end{aligned}$$

dado que el valor de la segunda integral es uno. Al afectar un cambio de variable de integración de manera tal que $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$, $x = \sigma y + \mu$ y $dx = \sigma dy$, se tiene:

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty y e^{-y^2/2} dy + \mu = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \Big|_{-\infty}^\infty + \mu = \mu.$$

El lector recordará de sus cursos de cálculo que la última integral es cero porque el integrando es una función impar y la integración se lleva a cabo sobre un intervalo simétrico alrededor de cero.

Si el valor máximo de la función de densidad de probabilidad normal ocurre cuando $x = \mu$ este es la media, la mediana y la moda de cualquier variable aleatoria distribuida aleatoriamente.

Para encontrar los demás momentos, se determinará la función generadora de momentos. Por definición:

$$m_{X-\mu}(t) = E[e^{t(X-\mu)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{t(x-\mu)} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu)]} dx.$$

de donde se completa el cuadrado en el interior del paréntesis rectangular y se tiene:

$$(x - \mu)^2 - 2\sigma^2 t(x - \mu) = (x - \mu)^2 - 2\sigma^2 t(x - \mu) + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2 = (x - \mu - \sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2.$$

Por lo que,

$$m_{X-\mu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{-\frac{(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

dado que el integrando junto con el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ es una función de densidad de probabilidad normal con parámetros $\mu + \sigma^2 t$ y σ .

Al desarrollar $e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ en serie de potencias se tiene:

$$m_{X-\mu}(t) = 1 + \frac{(\sigma t)^2}{2} + \frac{(\sigma t)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{(\sigma t)^6}{8 \cdot 3!} + \frac{(\sigma t)^8}{16 \cdot 4!} + \dots$$

Cuando las potencias impares de t no se encuentran presentes, todos los momentos centrales de X de orden impar son cero, de esta forma se asegura la simetría de la curva.

La segunda derivada de $m_{X-\mu}(t)$ evaluada en $t = 0$ es **la varianza** y está dada por:

$$Var(X) = \left. \frac{d^2 m_{X-\mu}(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \sigma^2 + \frac{12t^2\sigma^4}{4 \cdot 2!} + \frac{30t^4\sigma^6}{8 \cdot 3!} + \dots \Big|_{t=0} = \sigma^2;$$

De esta manera **la desviación estándar es σ** . De manera similar, la cuarta derivada de $m_{X-\mu}(t)$ evaluada en $t = 0$ es el cuarto momento central, el cual es:

$$\mu_4 = \left. \frac{d^4 m_{X-\mu}(t)}{dt^4} \right|_{t=0} = 3\sigma^4 + \frac{360t^2\sigma^6}{8 \cdot 3!} + \dots \Big|_{t=0} = 3\sigma^4$$

De acuerdo con lo anterior, para cualquier distribución normal el coeficiente de asimetría es $\alpha_3(X) = 0$, mientras que la curtosis relativa es $\alpha_4(X) = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$. Para momentos alrededor del cero, puede determinarse la función generadora de momentos centrales o viceversa. Dado que

$$m_{X-\mu}(t) = E \left[e^{t(X-\mu)} \right] = e^{-\mu t} E \left[e^{tX} \right] = e^{-\mu t} m_X(t),$$

para una distribución normal

$$e^{-\mu t} m_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

y

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

La probabilidad de que una variable aleatoria normalmente distribuida X sea menor o igual a un valor específico, x está dada por **función de distribución acumulativa**

$$P(X \leq x) = F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Sea Z una variable aleatoria definida por la siguiente relación:

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

en donde μ y σ son la media y la desviación estándar de X , respectivamente. De acuerdo con lo anterior, Z es una variable aleatoria estandarizada con media cero y desviación estándar uno. Así,

$$P(X \leq x) = P[X \leq (x - \mu)/\sigma] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{\frac{-z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{\frac{-z^2}{2}} dz.$$

El integrando junto con el factor $1/\sqrt{2\pi}$ es la **función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria normal estandarizada Z**. De donde

$$F_X(x; \mu, \sigma) = F_Z(z; 0, 1)$$

Para cualquier valor específico de z , el correspondiente valor en la tabla es la probabilidad de que la variable aleatoria normal estándar Z sea menor o igual a z ; esto es

$$P(Z \leq z) = F_Z(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

La notación $X \sim N(\mu, \sigma)$ denotará que la variable X se encuentra distribuida normalmente con media μ y desviación estándar σ .

Determinaremos la probabilidad de que un valor de X se encuentre entre a y b , si $X \sim N(\mu, \sigma)$. Por definición:

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

pero, mediante el empleo de $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x (x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu$ se tiene:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}; 0, 1\right) - F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}; 0, 1\right)$$

Teorema 1.1. Sea X una variable aleatoria binomial con media np y desviación estándar $\sqrt{np(1-p)}$. La distribución de la variable aleatoria tiende a la normal

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

estándar conforme el número de ensayos independientes $n \rightarrow \infty$.

Demostración.- La demostración que aquí se presenta se basa en el hecho de que una función generadora de momentos define, de manera única, a una distribución. Se demostrará que la función generadora de momentos de Y tiende a una distribución normal conforme $n \rightarrow \infty$. X es una variable aleatoria binomial:

$$m_X(t) = [(1-p) + pe^t]^n$$

Entonces:

$$m_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left[e^{\frac{t(X-np)}{\sqrt{np(1-p)}}}\right] = e^{\frac{np t}{\sqrt{np(1-p)}}} \cdot E\left[e^{\frac{tX}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]$$

donde $E\left[e^{\frac{tX}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]$ es la función generadora de momentos de X con argumento $\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}$. De esta forma se tiene:

$$m_Y(t) = e^{\frac{-np t}{\sqrt{np(1-p)}}} \left[(1-p) + pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]^n;$$

pero:

$$e^{-\frac{np t}{\sqrt{np(1-p)}}} = \left(e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^n$$

y:

$$m_Y(t) = \left[(1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}} - \frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]^n = \left[(1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{\frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right]^n.$$

En la última expresión, al expandir ambas funciones exponenciales en una serie de potencias, se tiene:

$$\begin{aligned} (1-p)e^{-\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}}} &= (1-p) - \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)p^2t^2}{2np(1-p)} + \text{términos en } (-1)^k \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, k=3,4,\dots \\ &= (1-p) - \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{pt^2}{2n} + \text{términos en } (-1)^k \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, k=3,4,\dots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} pe^{-\frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}}} &= p + \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)pt^2}{2np(1-p)} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, k=3,4,\dots \\ &= p + \frac{(1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{(1-p)t^2}{2n} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2}, k=3,4,\dots \end{aligned}$$

Al sustituir los resultados anteriores en $m_Y(t)$ y agrupar términos,

$$m_Y(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{k/2} \right]^n, k=3,4,\dots$$

Dado que todos los términos que contiene a $(1/n)^{k/2}$, $k=3,4,\dots$, tienen exponentes mayores que uno, puede factorizarse el término $1/n$. De esta forma se tiene que:

$$m_Y(t) = \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{t^2}{2} + \text{términos en } \left(\frac{1}{n}\right)^{(k-2)/2} \right) \right]^n, k=3,4,\dots$$

Por definición:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u}{n} \right)^n = e^u$$

entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, la última expresión para $m_Y(t)$ es idéntica a esta forma, con u representando a todo lo que se encuentra entre paréntesis de esta expresión. Pero conforme $n \rightarrow \infty$, todos los términos de u , excepto el primero, tienen un valor de cero, dado que todos tienen potencias positivas de n en sus denominadores. De acuerdo con lo anterior.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_Y(t) = e^{t^2/2},$$

que es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar.

La aproximación del teorema anterior es adecuada tanto como $np > 5$ cuando $p \leq 1/2$, o cuando $n(1-p) > 5$ para $p > 1/2$. Esto es

$$P(a \leq X_B \leq b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_N \leq \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

en donde Z_N es $N(0, 1)$. Como también

$$P(X_B = x) \approx P\left(\frac{x - np - 1/2}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_N \leq \frac{x - np + 1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

por lo que se puede modificar la expresión de desigualdad de la siguiente manera:

$$P(a \leq X_B \leq b) = P\left(\frac{a - np - 0.5}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_N \leq \frac{b - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

1.2. La distribución uniforme

Definición 1.2. Se dice que una variable aleatoria X está distribuida uniformemente sobre el intervalo (a, b) si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

La función de distribución acumulativa se determina de manera fácil y está dada por

$$P(X \leq x) = F_{x;a,b} = \frac{1}{b-a} \int_a^x dt = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

Se sigue entonces que para cualquier subintervalo (a_1, b_1) interior a (a, b) :

$$P(a_1 \leq X \leq b_1) = F(b_1; a, b) - F(a_1; a, b) = \frac{b_1 - a_1}{b - a}.$$

Este resultado ilustra que la probabilidad de que X tome valores del subintervalo (a_1, b_1) , es $\frac{1}{b-a}$ por la longitud del subintervalo y de esta forma, igual a la probabilidad de que X tome un valor en cualquier otro subintervalo de la misma longitud.

El **valor esperado** de una variable aleatoria distribuida de manera uniforme es

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

Para obtener los momentos superiores de X , es más fácil trabajar con la variable aleatoria $Y = X - \frac{a+b}{2}$, que desplaza la media a cero, dado que $E(Y) = E(X) - \frac{a+b}{2}$. De esta forma:

$$f(y; \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad -\frac{\theta}{2} \leq y \leq \frac{\theta}{2},$$

en donde $\theta = b - a$. De acuerdo con lo anterior, el r -ésimo momento central de Y es igual al r -ésimo momento central alrededor del cero, esto es:

$$\mu_r(Y) = \mu'_r(Y) = \theta^{-1} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} y^r dy = \left(\frac{1}{\theta} \right) \frac{y^{r+1}}{r+1} \Big|_{-\theta/2}^{\theta/2} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es impar} \\ \theta^r / [(r+1)2^r] & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$$

Dado que ni la varianza ni los factores de forma se ven afectados por el cambio de localización, la varianza, el coeficiente de asimetría y la curtosis relativa de la variable aleatoria distribuida uniformemente se encuentran a partir de $\begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es impar} \\ \theta^r / [(r+1)2^r] & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$ y están determinadas por:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\alpha_3(X) = 0$$

$$\alpha_4(X) = \frac{\frac{(b-a)^4}{80}}{\left[\frac{(b-a)^2}{12}\right]^2} = \frac{9}{5}.$$

Puede emplearse $f(y; \theta) = \frac{1}{\theta}$, $-\frac{\theta}{2} \leq y \leq \frac{\theta}{2}$, para determinar la **desviación media** de la siguiente manera:

$$E|Y| = \theta^{-1} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} y \, dy = 2\theta^{-1} \int_0^{\theta/2} y \, dy = \frac{\theta}{4} = \frac{b-a}{4}.$$

No tiene moda y su **mediana** es igual a la media. Los valores cuantiles x_q , correspondientes a la proporción acumulativa q , son de manera tal que:

$$F(x_q, a, b) = q$$

Los que por $\begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$ son:

$$x_q = a + (b-a)q.$$

1.3. La distribución beta

Definición 1.3. Se dice que una variable aleatoria X posee una distribución beta si su función de densidad está dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1, \quad \alpha, \beta > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Recordemos que $\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du$, $n > 0$.

Si tanto α como β son menores que uno, la distribución beta tiene un perfil en forma de U . Si $\alpha < 1$ y $\beta \geq 1$, la distribución tiene un perfil de J transpuesta, y si $\beta < 1$ y $\alpha \geq 1$, el perfil es una J . Finalmente cuando $\alpha = \beta$ la distribución es simétrica. Nótese que si en la definición se reemplaza por $x-1$, se obtiene la siguiente relación de simetría:

$$f(1-x; \beta, \alpha) = f(x; \alpha, \beta)$$

El nombre de esta distribución proviene de su asociación con la función beta que se encuentra definida por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Puede demostrarse que las funciones beta y gama se encuentran relacionadas por la expresión

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Mediante el empleo de estas últimas fórmulas, es obvio que la definición es una función de densidad de probabilidad. Esto es:

$$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) = 1,$$

y puesto que $f(x; \alpha, \beta)$ es no negativa, entonces la definición es una función de densidad de probabilidad.

La **función de distribución acumulativa** se encuentra definida por:

Definición 1.4.

$$F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt & 0 < x < 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$