1

Funciones Continuas

Definición 1.1 *La función f es continua en a si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$.
Pero en este caso, en que el límite es $f(a)$, la frase

$$0 < |x-a| < \delta$$

puede cambiarse por la condición más sencilla

$$|x-a| < \delta$$

puesto que si $x = a$ se cumple ciertamente que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

TEOREMA 1.1 *Si f y g son continuas en a, entonces*

$$\begin{array}{rl} (1) & f+g \text{ es continua en } a. \\ (2) & f\cdot g \text{ es continua en } a. \\ \text{Además, si } g(a)\neq 0, \text{ entonces } (3) & 1/g \text{ es continua en } a \end{array}$$

Demostración.- *Puesto que f y g son continuas en a,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que $f+g$ es continua en a.
Para $f\cdot g$ se tiene que

$$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = f(a)\cdot fg(a) = (f\cdot g)(a)$$

Por último para $1/g$ tenemos que

$$\lim_{x\to a} 1/g = 1/g(a), \qquad para\ g(a)\neq 0$$

TEOREMA 1.2 *Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.*

Demostración.- *Sea $\epsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x,*

$$Si\ |x-a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \epsilon, \text{ es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de f para estimar cómo de cerca tiene que estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que f es continua en $g(a)$, existe un $\delta^{'} > 0$ tal que para todo y,

$$Si\ |y - g(a)| < \delta^{'}, \text{ entonces } |f(y) - f(g(a))| < \epsilon. \qquad (1)$$

En particular, esto significa que

$$Si\ |g(x) - g(a)| < \delta^{'}, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon. \qquad (2)$$

Aplicamos ahora la continuidad de g para estimar cómo de cerca tiene que estar x de a para que se cumpla la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta^{'}$. El número $\delta^{'}$ es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar $\delta^{'}$ como el epsilon de la definición de continuidad de g en a. Deducimos que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$Si\ |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \delta^{'}, \qquad (3)$$

combinando (2) y (3) vemos que para todo x,

$$Si\ |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

Definición 1.2 *Si f es continua en x para todo x en (a,b), entonces se dice que f es continua en (a,b) si*

$$f \text{ es continua en } x \text{ para todo } x \text{ de } (a,b), \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b). \qquad (2)$$

TEOREMA 1.3 *Supóngase que f es continua en a, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) > 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$.*

Demostración.- *Considérese el caso $f(a) > 0$ puesto que f que es continua en a, si $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,*

$$Si\ |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Puesto que $f(a) > 0$ podemos tomar a $f(a)$ como el epsilon. Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$Si\ |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a)$$

Y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.
Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\epsilon = -f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$.

1.1. Problemas

1. ¿para cuáles de las siguientes funciones f existe una función F de dominio R tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f?

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Respuesta.- Sabiendo que el límite cuando x tiende a 2 existe, entonces existe una función F de dominio R tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f.

(ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

Respuesta.- No existe F, ya que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

(iii) $f(x) = 0,\ x$ irracional.

Respuesta.- Existe F de dominio R tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f.

(iv) $f(x) = 1/q,\ x = p/q$ racional en fracción irreducible. Respuesta.- No existe F, ya que $F(a)$ tendría que ser 0 para los a irracionales, y entonces F no podría ser continua en a si a es racional.

2. ¿En qué puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?.

Respuesta.- Problema 4-17.
Para (i), (ii) y (iii) son continuas para todos los puntos menos para los enteros. Para (iv) es continua en todos los puntos.Para (v) es entera para todos los puntos excepto para 0 y $1/n$ para n en los enteros.

Problema 4-19.
(i) todos los puntos que no sean de la forma $n + k/10$ para todos los enteros k y n. El (ii) para todo los puntos que no sea de la forma $n + k/100$ para todos los enteros k y n. (iii) y (iv) para ningún punto. (v) para todos los puntos que el decimal no termine en $7999\ldots$. Y (vi) para todos los puntos que el decimal contenga al menos un 1.

3. (a) Supóngase que f es una función que satisface $|f(x)| \le |x|$ para todo x. Demostrar que f es continua en 0.[Observe que $f(0)$ debe ser igual a 0.]

Demostración.- Supongamos que $|f(x)| \le |x|$. afirmamos que, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. De hecho dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \epsilon$. Si $|x| < \delta$ entonces $|f(x)| \le |x| < \delta = \epsilon$. Esto prueba que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Para concluir que f es constante en 0, tenga en cuenta que, como se señala en la pregunta, aplicar $|f(x)| \le |x|$ para todo x, en $x = 0$ se da $|f(0)| \le 0$ y en consecuencia $f(0) = 0$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ implica que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, así f es constante en 0.

(b) Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún $a \neq 0$.

Respuesta.- Sea $f(x) = 0$ para x irracional, y $f(x) = x$ para x racional.

(c) Supóngase que g es continua en 0, $g(0)=0$, y $|f(x)|\leq|g(x)|$. Demostrar que f es continua en 0.

Demostración.- La condición $|f(x)|\leq|g(x)|$ para todo x y $g(0)=0$ implica que $ff(0)=0$, así que sólo tenemos que demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.
Sea $\epsilon>0$, luego ya que g es continua en 0, existe un $\delta>0$ tal que $|x|<\delta$ entonces $|g(x)-g(0)|=|g(x)|<\epsilon$. Usando $|f(x)|\leq|g(x)|$ para todo x, vemos que $|x|<\delta$ implica $|f(x)|\leq|g(x)|<\epsilon$. Por lo tanto esto demuestra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

4. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos lo puntos.

Respuesta.- Sea $f(x)=1$ para x racional, y $f(x)=-1$ para x irracional.

5. Para todo número a, hallar la función que sea continua en a, pero no lo sea en ningún otro punto.

Respuesta.- Sea $f(x)=a$ para x irracional, y $f(x)=x$ para x racional.

6. **(a)** Hallar una función f que sea descontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.

Respuesta.- Define f como sigue,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 0 \\ \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0<x\leq 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$$

(b) Hallar una función f que sea descontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, y en 0, pero sea continua en ningún en todos los demás puntos.

Respuesta.- Sea

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x\leq 0 \\ \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0<x\leq 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$$

7. Supóngase que f satisface $(x+y)=f(x)+f(y)$, y que f es continua en 0. Demostrar que f es continua en a para todo a.

Demostración.- Sea $f(x+0)=f(x)+f(0)$, por lo tanto $f(0)=0$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a) &= \lim_{h\to 0} f(a)+f(h)-f(a)\\
&= \lim_{h\to 0} f(h)\\
&= \lim_{h\to 0} f(h)-f(0)=0
\end{aligned}$$

8. Supóngase que f es continua en a y $f(a)=0$. Demostrar que si $\alpha\neq 0$, entonces $f+\alpha$ es distinta de 0 en algún intervalo abierto que contiene a.

Demostración.- Sabiendo que $(f+\alpha)(a)\neq 0$, entonces por el teorema 3, $f+\alpha$ es distinto de cero en algún intervalo que contiene a a.

9. **(a)** Supóngase que f no es continua en a. Demostrar que para algún $\epsilon>0$ existen números x tan próximos como se quiere de a con $|f(x)-f(a)|>\epsilon$.

Demostración.- Lógicamente equivalente a la definición de continuidad se tiene

$$\exists\,\epsilon>0, \forall\delta>0, \exists\,x|x-a|<\delta \; y \; |f(x)-f(a)|\geq\epsilon$$

Existe $\epsilon>0$ tal que $|f(x)-f(a)|>\epsilon$. Luego sea $\epsilon^{'}=\dfrac{1}{2}\epsilon$, entonces tenemos $|f(x)-f(a)|\geq\epsilon>\epsilon^{'}$.

(b) Dedúzcase que para algún $\epsilon>0$, o bien existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x)<f(a)-\epsilon$ o bien existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x)>f(a)+\epsilon$.

Demostración.- La demostración es directa aplicando la reciproca de la definicion de continuidad. Como se vio en el inciso a.

10. **(a)** Demostrar que si f es continua en a, entonces también lo es $|f|$.

Demostración.- Ya que $\lim_{x\to a} f(x)=l \implies \lim_{x\to a}|f|(x)=|l|$ como se vio en el problema 5-16, entonces

$$\lim_{x\to a}|f|(x)=\left|\lim_{x\to a} f(x)\right|=|f(a)|=|f|(a).$$

(b) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f=E+O$, donde E es par y continua y O es impar y continua.

Demostración.- Por el problema 13 del capítulo 3 (funciones) mostramos que E y O son continuas si f lo es.

(c) Demostrar que si f y g son continuas, también lo son $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$.

Demostración.- Por la parte a) y sabiendo que

$$\begin{aligned} \max(f,g) &= \frac{f+g+|f-g|}{2} \\ \min(f,g) &= \frac{f+g-|f-g|}{2} \end{aligned}$$

(d) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = g - h$, donde g y h son no negativas y continuas.

Demostración.- Por el problema 15 del capítulo 3 (funciones) podemos comprobar que $f = g - h$ siempre que f sea continua.

11. Demostrar el teorema 1(3) aplicando el teorema 2 y la continuidad de la función $f(x) = 1/x$.

Demostración.- Sea $f \circ g = \dfrac{1}{g}$ y f es continua en $g(a)$ para $g(a) \neq 0$, entonces por el teorema 2, se tiene que $\dfrac{1}{g}$ es continua en a para $g(a) \neq 0$.

12. **(a)** Demostrar que si f es continua en l, y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ entonces $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(l)$.

Demostración.- Sea

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \neq a \\ \\ l & si \quad x = a \end{cases}$$

entonces G es continua en a, ya que $G(a) = l = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} G(x)$. Así $f \circ G$ es continua en a esto por el teorema 2. Luego

$$f(l) = f(G(a)) = (f \circ G)(a) = \lim_{x \to a} = \lim_{x \to a} (f \circ G)(x) = \lim_{x \to 0} f(g(x)).$$

(b) Demostrar que si no se supone la continuidad de f en l, entonces no se cumple, por lo general, que $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right)$.

Demostración.- Sea $g(x) = l + x - a$ y

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Luego $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, así $f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right) = f(l) = l$, pero $g(x) \neq l$ para $x \neq a$, por lo tanto $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = \lim\limits_{x \to a} = 0$.

13. **(a)** Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una función g el cual es contuna en $\mathbb{R}$ y que satisface a $g(x) = f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Demostración.-

(b) Hágase ver con un ejemplo que ésta afirmación es falsa si se sustituye $[a, b]$ por (a, b).

Respuesta.- Definimos $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ en el intervalo $(-1, 1)$. Es continuo, pero no existe $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Ahora, para que f se extienda a una función g que sea constante en toda la línea real, es necesario que existan tanto $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ como $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$, lo que requiere $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ para existir. Entonces f no se puede extender a una función que sea constante en toda la línea real.

14. (a) Supóngase que g y h son continuos en a, y que $g(a) = h(a)$, Defínase $f(x)$ como $g(x)$ si $x \geq a$ y $h(x)$ si $x \leq a$. Demuestre que f es continua en a.

Demostración.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \geq a \\ h(x) & si \quad x \leq a \end{cases}$$

Luego se tiene

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a) \quad y \quad \lim_{x\to a} h(x) = h(a)$$

de donde

$$g(a) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad h(a) = \lim_{x\to a^-} h(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

(b) Supóngase que g es continuo en $[a, b]$ y h es continuo en $[b, c]$ y $g(b) = h(b)$. Sea $f(x)$ igual $g(x)$ para x en $[a, b]$ y $h(x)$ para x en $[b, c]$. Demuestre que f es continuo en $[a, c]$. (Así pues, las funciones continuas pueden ser "pegados juntos").

Demostración.- la continuidad de f en $[a, b)$ y en $(b, c]$ es evidente. En $[a, b)$ f es igual a g y g es continuo para todo los puntos del intervalo.
Ahora para la continuidad en b, si g es continuo en b, entonces $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = g(b)$, y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$. Similarmente, $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$, aquí tenemos que usar $g(b) = h(b) = f(b)$. Luego ya que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ y $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$ concluimos que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$, es decir f es también continuo en b.

15. (a)