1

Significado de la derivada

Definición 1.1 Sea f una función y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un punto máximo de f en A si
$$f(x) \geq f(y) \qquad \text{para todo } y \text{ de } A.$$
El número $f(x)$ se denomina el **valor máximo** de f en A (y también diremos que f alcanza su valor máximo en el punto x de A).

f tiene un **mínimo** en el punto x de A si $-f$ tiene un máximo en el punto x de A.

En general, nos interesará el caso en que A es un intervalo cerrado $[a,b]$; si f es continua, entonces el Teorema 7-3 garantiza que f alcanza realmente dicho valor máximo en $[a,b]$.

Ahora ya estamos en condiciones para enunciar un teorema que ni siquiera depende de la existencia de cotas superiores mínimas.

Teorema 1.1 Sea f cualquier función definida en (a,b). Si x es un punto máximo (o mínimo) de f en (a,b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x) = 0$. (Observemos que no hemos supuesto la diferenciabilidad, ni siquiera la continuidad, de f en otros puntos.)

Demostración.- Consideremos el caso en que f tiene un máximo en x. Si h es cualquier número tal que $x+h$ pertenece a (a,b), entonces
$$f(x) \geq f(x+h),$$
ya que f tiene un máximo en el punto x de (a,b). Esto significa que
$$f(x+h) - f(x) \leq 0.$$
De manera que, si $h > 0$ tenemos
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0,$$
y por tanto
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0.$$
Por otra parte, si $h < 0$, tenemos
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0,$$

o sea
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$
Por hipótesis, f es diferenciable en x, de manera que ambos límites deben ser iguales (de hecho son iguales a $f'(x)$). Esto significa que
$$f'(x) \leq 0 \quad \text{y} \quad f'(x) \geq 0,$$
de lo cual se deduce que $f'(x) = 0$.

■

Definición 1.2 Sea f una función, y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un **punto máximo [mínimo] local** de f en A si existe algún $\delta > 0$ tal que x es un punto máximo [mínimo] de f en $A \cap (x-\delta, x+\delta.)$

Teorema 1.2 Si x es un máximo o mínimo local de f en (a,b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x) = 0$.

Demostración.- Se trata de una aplicación del teorema 1 (capítulo 11, Spivak). ■

El recíproco del teorema 2 no es cierto; la condición $f'(0)$ no implica que x sea un punto máximo o mínimo local en f. Precisamente por esta razón, se ha adoptado una terminología especial para describir a aquellos números x que satisfacen la condición $f'(0)$.

Definición 1.3 Un **punto critico** de una función f es un número x tal que
$$f'(x) = 0.$$
Al número $f(x)$ se le denomina **valor critico** de f.

Consideremos en primer lugar el problema de hallar el máximo o el mínimo de f en un intervalo cerrado $[a,b]$. (En este caso, si f es continua, sabemos que dicho valor máximo y mínimo debe existir.) Para localizarlos, deben considerarse tres clases de puntos:

(1) Los puntos críticos de f en $[a,b]$.

(2) Los puntos extremos a y b.

(3) Aquellos puntos x de $[a,b]$ tales que f no es diferenciable en x.

Si x no pertenece al segundo no al tercer grupo entonces forzosamente debe pertenecer al primero.

Obs 1.1 En el capítulo 7 ya resolvimos el problema de este tipo cuando demostramos que si n es par, la función
$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$
tiene un valor mínimo en toda la recta real. Dicho valor mínimo se puede encontrar resolviendo la ecuación, si es posible, y comparando los valores de $f(x)$ en dichos x.

Teorema 1.3 **Teorema de Rolle.** Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a,b) tal que $f'(x) = 0$.

Demostración.- A partir de la continuidad en f en $[a,b]$ deducimos que f tiene valor máximo y mínimo en $[a,b]$. Supongamos primero que el valor máximo se presenta en un punto x de (a,b). Entonces $f'(x) = 0$ según el teorema 1, y la demostración queda completa. Supongamos ahora que el valor mínimo de f se presenta en algún punto x de (a,b). Entonces, de nuevo $f'(x) = 0$ según el teorema 1. Finalmente, supongamos que los valores máximo y mínimo se presentan ambos en los extremos del intervalo. Como $f(a) = f(b)$, dichos valores coinciden, de manera que f es una función constante, y en este caso se puede elegir cualquier valor x de (a,b). ∎

Teorema 1.4 **Teorema del valor medio.** Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), existe un número x en (a,b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demostración.- Sea

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a).$$

Evidentemente, h es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y

$$h(a) = f(a), \qquad h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](b-a) = f(a).$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle a la función h y deducir que existe algún x en (a,b) tal que

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

de modo que

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

∎

Corolario 1.1 Si f está definida en un intervalo y $f'(x) = 0$ en todo x del intervalo, entonces f es constante en dicho intervalo.

Demostración.- Sean a y b dos puntos del intervalo con $a \neq b$. Entonces existe algún x de (a,b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Pero $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, por tanto

$$0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

y por consiguiente $f(a) = f(b)$. Así pues, el valor de f en dos puntos cualesquiera del intervalo es el mismo, lo cual significa que f es constante en el intervalo.

∎

Corolario 1.2 Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún número c tal que $f = g + c$.

Demostración.- Para todo x del intervalo se verifica que $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, de manera que, según el corolario 1, existe un número c tal que $f - g = c$. ■

Definición 1.4 Una función es **creciente** en un intervalo si $f(a) < f(b)$ siendo a y b dos números del intervalo con $a < b$. La función f es **decreciente** en un intervalo si $f(a) > f(b)$ para todo a y b del intervalo con $a < b$. (A menudo se dice simplemente que f es creciente o decreciente, en cuyo caso se deduce que el intervalo es el dominio de f.)

Corolario 1.3 Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en dicho intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en dicho intervalo.

Demostración.- Consideremos el caso en que $f'(x) > 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún punto x en (a, b) que verifica

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), por tanto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Como $b - a > 0$ se deduce que $f(b) > f(a)$.

Consideremos ahora el caso en que $f'(x) < 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún punto x en (a, b) que verifica

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), por tanto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0.$$

De donde se deduce que $f(b) < f(a)$.

■

Podemos dar un esquema general para decidir si un punto crítico es un máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas:

(1) Si $f' > 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' < 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto máximo local.

(2) Si $f' < 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' > 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto mínimo local.

(3) Si f' tiene el mismo signo en algún intervalo a la izquierda de x que en algún intervalo a la derecha, entonces x no es ningún punto máximo ni mínimo local.

En varios problemas de este capítulo y de capítulos sucesivos se pide hacer una representación gráfica de funciones. En cada caso debe determinar

(1) los puntos críticos de f,

(2) el valor de f en los puntos críticos,

(3) el signo de f' en las regiones entre los puntos críticos (si esto no está claro ya),

(4) los números x tales que $f(x) = 0$ (si es posible),

(5) el comportamiento de $f(x)$ cuando x se hace grande o grande negativo (si es posible).

Existe un criterio popular para hallar los máximos y mínimos locales, que depende del comportamiento de la función sólo en los puntos críticos.

Teorema 1.5 Supongamos que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a; si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.

Demostración.- Por definición,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Como $f'(a) = 0$, esta igualdad puede escribirse como

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Supongamos ahora que $f''(a) > 0$. Entonces $\dfrac{f'(a+h)}{h}$ ha de ser positivo para valores suficientemente pequeños de h. Por tanto:

$f'(a+h)$ ha de ser positivo para valores de $h > 0$ suficientemente pequeños. Y $f'(a+h)$ ha de ser negativo para valores de $h < 0$ suficientemente pequeños.

Esto significa por el corolario 3 (Spivak, capitulo 11) que f es creciente en algún intervalo a la derecha de a y f es decreciente en algún intervalo a la izquierda de a. Por consiguiente, f tiene un mínimo local en a. La demostración es análoga en el caso de que $f''(a) < 0$.

■

Aunque el Teorema 5 es muy útil en el caso de funciones polinómicas, para muchas otras funciones la segunda derivada es tan complicada que es más fácil considerar el signo de la primera derivada. Además, si a es un punto crítico de f puede ocurrir que $f''(a) = 0$. En este caso, el Teorema 5 no proporciona información: es posible que a sea un punto máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas.

Teorema 1.6 Supongamos que $f''(a)$ existe. Si f tiene mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$; si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.

Demostración.- Supongamos que f tiene un mínimo local en a. Si $f''(a) < 0$, entonces f tendría también un máximo local en a, por el teorema 5. Es decir, f sería constante en algún intervalo que contiene a a, y por tanto $f''(a) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, debe verificarse que $f''(a) \geq 0$. El caso de un máximo loca se trata de manera análoga.

■

Teorema 1.7 Supongamos que f es continua en a y que $f'(x)$ existe para todo x de algún intervalo que contiene a a, excepto quizás en $x = a$. Supongamos, además, que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existe. Entonces $f'(a)$ también existe y

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

Demostración.- Por definición,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a)}{h}.$$

Para valores de $h > 0$ suficientemente pequeños, la función f es continua en $[a, a+h]$ y diferenciables en $(a, a+h)$ (lo mismo ocurre para valores de $h < 0$ suficientemente pequeños). Según el teorema del valor medio, existe un número α_h en $(a, a+h)$ tal que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(\alpha_h).$$

Además α_h tiende a a cuando h tiende a 0, ya que α_h pertenece al intervalo $(a, a+h)$; como $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe, se deduce que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\alpha_h) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

En otras palabras, sean $L = \lim_{x\to a} f'(x)$, por definición de límite se tiene

Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f'(x) - L| < \epsilon$.

Ahora, si $0 < |x-a| < \delta$ podríamos utilizar el teorema del valor medio para encontrar un punto c entre a y x que satisfaga,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c).$$

Notemos que c satisface también a $0 < |c-a| < \delta$, tal que $|f'(c) - L| < \epsilon$. Como consecuencia

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \right| < \epsilon.$$

Es decir,

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$f'(a) = L.$$

■

Incluso si f es una función diferenciable en todo punto, es posible que f' sea discontinua. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ahora veremos una generalización del teorema del valor medio.

Teorema 1.8 **Torema del valor medio de Cauchy.** Si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b), entonces existe un número x en (a,b) tal que

$$[f(b)-f(a)]g'(x)=[g(b)-g(a)]f'(x).$$

(Si $g(b)\neq g(a)$ y $g'(x)\neq 0$, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observemos que si $g(x)=x$ para todo x, entonces $g'(x)=1$, y se obtiene el teorema del valor medio. Por otra parte aplicando el Teorema del valor medio a f y a g por separado, se deduce que existen un x e y en (a,b) que verifican

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(y)};$$

pero no existe ninguna garantía de que los x e y hallados de esta manera sean iguales. Estas consideraciones pueden hacer pensar que el Teorema del Valor Medio de Cauchy es muy difícil de demostrar, pero en realidad basta aplicar uno de los artilugios más simples.)

Demostración.- Sea

$$h(x)=f(x)\left[g(b)-g(a)\right]-g(x)\left[f(b)-f(a)\right].$$

Entonces h es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y

$$h(a)=f(a)g(b)-g(a)f(b)=h(b).$$

Según el teorema de Rolle, $h'(x)=0$ para algún x de (a,b), lo que significa que

$$0=f'(x)\left[g(b)-g(a)\right]-f'(x)\left[f(b)-f(a)\right].$$

■

El Teorema del Valor Medio de Cauchy es la herramienta básica necesaria para demostrar un teorema que facilita el cálculo de límites de la forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

cuando

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}g(x)=0.$$

En este caso no es aplicable el Teorema 5.2.

Teorema 1.9 **Regla de L'Hopital.** Supongamos que

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}g(x)=0,$$

y supongamos también que $\lim\limits_{x\to a}f'(x)/g'(x)$ existe. Entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)/g(x)$ existe y

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Observe que el teorema 7 es un caso particular.)

Demostración.- La hipótesis de que el $\lim\limits_{x\to a}f'(x)/g'(x)$ existe contiene dos suposiciones implícitas:

(1) existe un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ tal que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen para todo x de $(a-\delta, a+\delta)$ excepto quizás para $x = a$,

(2) en este intervalo $g'(x) \neq 0$ excepto quizás, de nuevo, en $x = a$.

■

Por otra parte, no se supone ni siquiera que f y g estén definidas en el punto a. Si definimos $f(a) = g(a) = 0$ (cambiando, si es necesario, los valores previos de $f(a)$ y $g(a)$), entonces f y g son continuas en el punto a. Si $a < x < a+\delta$, puede aplicarse a f y a g el Teorema del Valor Medio y el Teorema del Valor Medio de Cauchy en el intervalo $[a, x]$ (y lo mismo ocurre en el caso de que $a-\delta < x < a$). Aplicando en primer lugar el Teorema del Valor Medio a g, vemos que $g(x) \neq 0$, ya que si $f(x) = 0$ entonces existiría algún x_1 en (a, x) tal que $g'(x_1) = 0$, lo que contradice (2). Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio de Cauchy a f y a g, vemos que existe un número α_x en (a, x) tal que

$$[f(x) - 0]\, g'(\alpha_x) = [g(x) - 0]\, f'(\alpha_x)$$

o

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Pero α_x se aproxima a a cuando x se aproxima a a, ya que α_x está en el intervalo (a, x); como estamos suponiendo que $\lim\limits_{y\to a} f'(y)/g'(y)$ existe, se deduce que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

1.1 Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones, halle los valores máximos y mínimos en los intervalos indicados, determinando aquellos puntos del intervalo en los que la derivada es igual a 0 y comparando los valores de la función en estos puntos con sus valores en los extremos del intervalo.

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{4}{3}$$

Ambos número $x_1 = 2$ y $x_2 = -\dfrac{4}{3}$ pertenecen al intervalo $[-2, 2]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -\frac{4}{3}$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-2, 2$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f(2) & = & 2^3-2^2-8\cdot 2+1 & = & -11. \\ f\left(-\frac{4}{3}\right) & = & \left(-\frac{4}{3}\right)^3-\left(-\frac{4}{3}\right)^2-8\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+1 & = & \frac{203}{27}. \\ f(-2) & = & -2^3-2^2-8\cdot(-2)+1 & = & 5. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por -11 y el máximo viene dado por $\dfrac{203}{27}$.

(ii) $f(x)=x^5+x+1$ en $[-1,1]$.

Respuesta.- Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x)=5x^4+1.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$5x^4+1=0 \quad\Rightarrow\quad x^4=-\frac{1}{5}.$$

El cual no es posible para ningún x real.

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-1,1$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f(1) & = & 1^5+1+1 & = & 3. \\ f(-1) & = & (-1)^5-1+1 & = & -1. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por -1 y el máximo viene dado por 3.

(iii) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}.\right]$

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x)=4x^3-24x^2+12x.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$12x^3-24x^2+12x=0 \quad\Rightarrow\quad x(x^2-2x+1)=0 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 1. \end{array}\right.$$

Sólo el número $x_1=0$ pertenece al intervalo $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es sólo el número:

$$x_1=0.$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f\left(-\frac{1}{2}\right) & = & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 & = & \frac{43}{16}. \\ f(0) & = & 3\cdot 0^4 - 8\cdot 0^3 + 6\cdot 0^2 & = & 0. \\ f\left(\frac{1}{2}\right) & = & 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 & = & \frac{11}{16}. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por 0 y el máximo viene dado por $\frac{43}{16}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = 5x^4 + 1.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$35x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\frac{1}{5}.$$

El cual no es posible para ningún x real.

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-\frac{1}{2}, 1$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{rcccl} f\left(-\frac{1}{2}\right) & = & \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1} & = & \frac{32}{15}. \\ f(1) & = & \dfrac{1}{1^5 + 1 + 1} & = & \frac{1}{3}. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por $\frac{32}{15}$ y el máximo viene dado por $\frac{1}{3}$.

(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2(x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$\frac{x^2+1-2(x+1)}{(x^2+1)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 &= -1+\sqrt{2} \\ x_2 &= -1-\sqrt{2}. \end{cases}$$

Sólo el número $x_1=-1+\sqrt{2}$ pertenece al intervalo $[-1,\frac{1}{2}]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es sólo el número:

$$x_1=-1+\sqrt{2}.$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$-1,\ \frac{1}{2}.$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{ccccc} f(-1) & = & \dfrac{-1+1}{(-1)^2+1} & = & 0. \\[2ex] f\left(1+\sqrt{2}\right) & = & \dfrac{\left(-1+\sqrt{2}\right)+1}{\left(-1+\sqrt{2}\right)^2+1} & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}+2\right)}. \\[2ex] f\left(\dfrac{1}{2}\right) & = & \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)+1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1} & = & \dfrac{6}{5}. \end{array}$$

Por lo tanto el mínimo viene dado por 0 y el máximo viene dado por $\dfrac{6}{5}$.

(vi) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ en $[0,5]$.

Respuesta.- Primeramente derivemos la función f.

$$f'(x)=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

Luego igualemos a cero para hallar el grupo de candidatos para localizar el o los puntos máximos y mínimos.

$$-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=-1.$$

El cual no es posible para ningún x real.

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo. Es decir,

$$0,\ 5$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. Por último calculamos

$$\begin{array}{ccccc} f(0) & = & \dfrac{0}{0^2-1} & = & 0. \\[2ex] f(5) & = & \dfrac{5}{5^2-1} & = & \dfrac{5}{24}. \end{array}$$

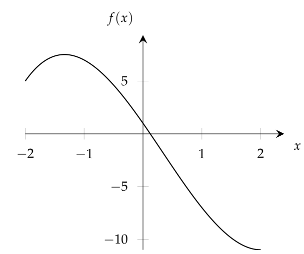
Por lo tanto el mínimo viene dado por 0 y el máximo viene dado por $\dfrac{5}{24}$.

2. Trace ahora la gráfica de cada una de las funciones del Problema 1 (Spivak, capítulo 11.) y halle todos los puntos máximos y mínimos locales.

Respuesta.-

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$$

De donde los puntos críticos están dados por:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x+4)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{4}{3}, \quad x_2 = 2.$$

Ya que f' existe, entonces podemos calcular f''.

$$f''(x) = 6x - 2.$$

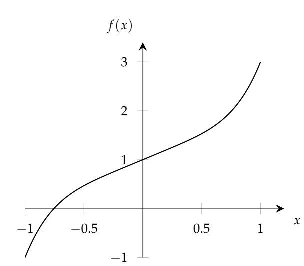
Luego, calculamos $f''\left(-\dfrac{4}{3}\right)$ y $f''(2)$.

$$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 6\left(-\frac{4}{3}\right) - 2 = -10 < 0 \quad ; \quad f''(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 10 > 0$$

Por lo tanto, $-\dfrac{4}{3}$ es un punto máximo local y 2 es un punto mínimo local.

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 5x^4 + 1.$$

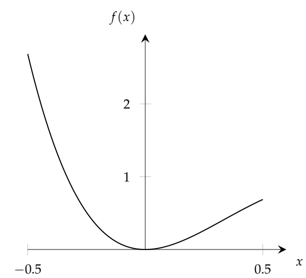
En este caso podemos ver que no existen puntos críticos, ya que

$$5x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = -\frac{1}{5}.$$

no tiene soluciones reales. Y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x.$$

De donde los puntos críticos están dados por:

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Ya que f' existe, entonces podemos calcular f''.

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12.$$

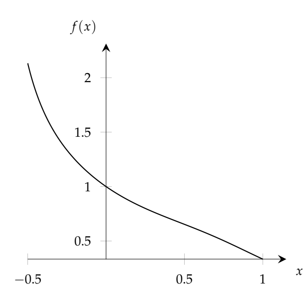
Luego, por el hecho de que $f''(1)$ no está contenido en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$ solo calcularemos $f''(0)$.

$$f''(0) = 36 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 12 = 12.$$

Por el teorema 11.6 de Spivak, vemos que $f'' = 12 \geq 0$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$, por lo tanto, 0 es un punto máximo local.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = -\frac{5x^4+1}{x^5+x+1}.$$

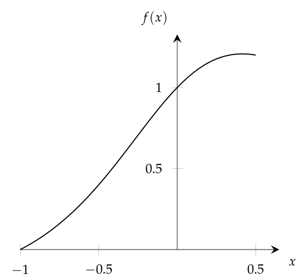
En este caso podemos ver que no existen puntos críticos, ya que

$$-\frac{5x^4+1}{x^5+x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^4+1=0.$$

no tiene soluciones en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

De donde los puntos críticos están dados por:

$$\frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2x-x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Ya que f' existe, entonces podemos calcular f''.

$$f''(x) = \frac{-2\left[(x^2+1)(x+1) + 2x(1-2x-x^2)\right]}{(1+x^2)^3}.$$

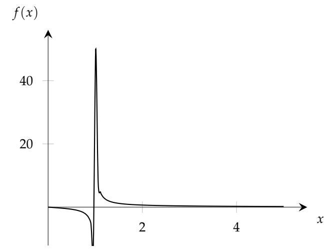
Luego, por el hecho de que $f''(-1-\sqrt{2})$ no está contenido en el intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}.\right]$ solo calcularemos $f''\left(-1+\sqrt{2}\right)$. Así, dado que

$$f''\left(-1+\sqrt{2}\right) < 0$$

Entonces $-1+\sqrt{2}$ es un máximo local.

(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ en $[0, 5]$.

Respuesta.-



Para calcular los puntos máximos y mínimos locales, primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

En este caso podemos ver que no existen puntos críticos, ya que

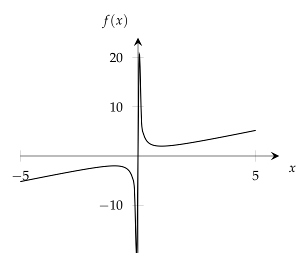
$$-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0.$$

no tiene soluciones reales. Y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

3. Trace las gráficas de las siguientes funciones:

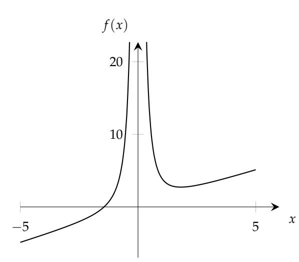
(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Respuesta.-



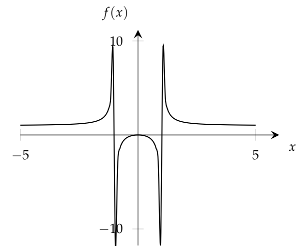
(ii) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$.

Respuesta.-



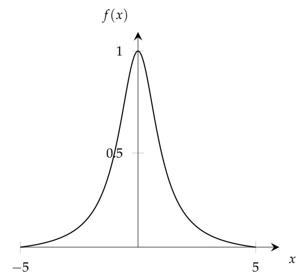
(iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Respuesta.-



(iv) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Respuesta.-



4. (a) Si $a_1 < \ldots < a_n$ halle el valor mínimo de $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$.

Respuesta.- Primero calculamos la derivada de f.

$$f'(x) = 2(x-a_1)\cdot 1 + 2(x-a_2)\cdot 1 + \ldots + 2(x-a_n)\cdot 1 = 2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

Luego encontremos los puntos críticos igualando $f'(x)$ cero.

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x-a_1)+(x-a_2)+\ldots+(x-a_n) = 0 \\ &\Rightarrow \quad nx = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i. \end{aligned}$$

Veamos ahora si este punto crítico es un mínimo o un máximo local. Para ello calculamos la segunda derivada de f.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2'\left[\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)\right] + 2\left[\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)\right]' \\ &= 2(1+1+\ldots+1) \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Ya que $2n > 0$, entonces podemos decir que el punto crítico $x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ es un mínimo local de f.

Por lo tanto,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_i)\right]^2.$$

(b) Halle ahora el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$. Este es un problema en el que el cálculo infinitesimal no nos puede ayudar. En los intervalos entre los a_i la función f es lineal, por tanto el valor mínimo se localiza en uno de los a_i, y estos son, precisamente, los puntos en los cuales la función f no es diferenciable. Sin embargo, la solución es fácil de encontrar si se considera como varía $f(x)$ al pasar de un intervalo a otro.

Respuesta.- Tomemos dos puntos a y b en $[a_{i-1}, a_i]$ y $[a_i, a_{i+1}]$ respectivamente. Tal que

$$|a - a_i| = |b - a_i|.$$

Notemos que

$$\begin{array}{rcll} |b - a_j| & = & |a - a_j| + |a - b| & \text{si } j \leq i - 1 \\ |b - a_j| & = & |a - a_j| - |a - b| & \text{si } j \geq i + 1 \end{array}$$

Luego, vemos que

$$\begin{array}{rcl} f(b) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |b - a_j| \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |b - a_j| + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} |b - a_j| \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \big(|a - a_j| + |a - b|\big) + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} \big(|a - a_j| - |a - b|\big) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |a - a_j| + (i-1)|a - b| + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} |a - a_j| - (n-i)|a - b| \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |a - a_j| + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} |a - a_j|(i-1) - (n-i)|a - b| \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |a - a_j| + |b - a_i| + \sum_{j=i+1}^{n} |a - a_j| + (2i - n - 1)|a - b| \end{array}$$

Se sigue que $f(b) \geq f(a)$ siempre que

$$2i - n - 1 \geq 0 \quad \text{o} \quad i \geq \frac{n+1}{2}.$$

Por otro lado, de manera similar, $f(b) \leq f(a)$ siempre que

$$2i - n - 1 \leq 0 \quad \text{o} \quad i \leq \frac{n+1}{2}.$$

Así, tenemos a f decreciente si $i \leq \dfrac{n+1}{2}$ y f creciente si $i \geq \dfrac{n+1}{2}$. De esta manera f alcanza su mínimo en $a_{\frac{n+1}{2}}$ si n es impar y está en el intervalo $\left[a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}\right]$. Por lo tanto, el valor mínimo de f es $f\left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)$ si n es impar y $f\left(a_{\frac{n}{2}}\right)$ si n es par.

(c) Sea $a > 0$. Demuestre que el valor máximo de

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

es $(2+a)/(1+a)$. (Puede hallarse por separado la derivada en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0), (0, a)$ y (a, ∞)).

Respuesta.- La función dada se puede escribir como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-x+a} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x+a} & \text{si} \quad 0 < x < a \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+x-a} & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

Notemos que f es diferenciable en cada intervalo $(-\infty, 0), (0, a)$ y (a, ∞). Por lo que podemos hallar sus respectivas derivadas,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1-x+a)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1-x+a)^2} & \text{si} \quad 0 < x < a \\[2ex] \dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+x-a)^2} & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

el cual demuestra que $f'(x) > 0$ si $(-\infty, 0)$ y $f'(x) < 0$ si (a, ∞), esto ya que $(1-x)^2$ y $(1 \pm x + a)^2$ son positivos. Además, vemos que

$$f(0) = 1 + \frac{1}{1+a} = f(a) > 0$$

ya que $a > 0$. Así, f es creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[a, \infty]$, donde se concluye que f en $\mathbb{R}$ alcanza su punto máximo en algún punto del intervalo $[0, a]$. Ahora, verificamos si el máximo de f se alcanza en algún punto en $(0, a)$. Si b es tal punto, entonces

$$-\frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1-b+a)^2} = 0,$$

el cual implica,

$$(1+x)^2 - (1-x+a)^2 = (2+a)(2b-a) = 0.$$

Así, $b = \dfrac{a}{2}$. Es más,

$$f(0) = f(a) = 1 + \frac{1}{1+a} = \frac{2+a}{1+a}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{a}{2}} = \frac{4}{2+a} < \frac{2+a}{1+a}$$

lo que muestra que $\dfrac{2+a}{1+a}$ es el máximo valor de f en $[0, a]$.

5. Para cada una de las siguientes funciones, halle todos los puntos máximos y mínimos locales.

(i)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3,5,7,9 \\ 5, & x = 3 \\ -3, & x = 5 \\ 9, & x = 7 \\ 7, & x = 9 \end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que todos los puntos locales máximo y mínimos deben estar en el conjunto $\{3,5,7,9\}$, ya que, aparte de estos puntos, f cumple la función identidad. Ahora vemos por la definición de f que

$$f(3) = 5 > 3 \text{ y } 5 > x, \text{ para todo } x \in (3-\delta, 3+\delta), \text{ para } 0 < \delta < 1.$$

Así, 3 es un punto máximo local.

Para $x = 5$ tenemos por la definición de f que

$$f(5) = -3 < x \text{ para todo } x \geq 0.$$

Así, 5 es un punto mínimo local.

También vemos por la definición de f que

$$f(7) = 9 > 7 \text{ y } 9 > x, \text{ para todo } x \in (7-\delta, 7+\delta), \text{ para } 0 < \delta < 1.$$

Así, 7 es un punto máximo local.

Para $x = 5$ tenemos por la definición de f que

$$f(9) = 7 < 9 \text{ y } 7 < x, \text{ para todo } x \in (9-\delta, 9+\delta), \text{ para } 0 < \delta < 1.$$

Así, 9 es un punto mínimo local.

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que cada número irracional x es un mínimo local de f ya que , en el caso de que $f(x) = 0$ y $f(y) = \dfrac{1}{q} > 0$, para cualquier racional $y = p/q$. Por otro lado, no existe un punto máximo local. De hecho, vemos por la definición de f que el máximo local sólo puede ocurrir para los números racionales. Pero para cualquier racional $x = p/q$, $f(x) = 1/q < p/q = x$ si $p > 0$ y $f(x) = 1/q > p/q = x$ si $p < 0$ pero $f(x) > 0 = f(y)$, para cualquier número racional y.

(iii)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, x & \text{irracional.} \end{cases}$$

Respuesta.- Observamos que todo número irracional positivo x es un mínimo local de f. Ya que, en este caso, $f(x) = 0$ y $f(y) = y > 0$, para cualquier racional $y \geq 0$. Por otro lado, para cualquier racional $y \leq 0$, tenemos $f(y) = y \leq 0$ y por lo tanto cualquier número irracional estrictamente negativo es un máximo local de f.

(iv)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}, 1/n$ es un punto local máximo a partir de la definición de f, $f(\frac{1}{n}) = 1$, y $f(x) = 0$. Similarmente, vemos que para cada número real tal que $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es un punto mínimo local, ya que en este conjunto f es idénticamente 0. Además si f es constante para cada número real tal que $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, entonces es un punto máximo y mínimo local a la vez, excepto el punto 0, ya que para cada $\epsilon > 0$, $(-\delta, \delta)$ contiene infinitos $1/n$, esto por la propiedad Arquimediana de los números reales.

(v)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ si el desarrollo decimal de } x \text{contiene un 5} \\ 0, & x \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Respuesta.- Notemos que para cada

$$x \in \{x \in \mathbb{R} : \text{el desarrollo decimal de } x \text{contiene a 5}\}$$

es un punto máximo local a partir de la definición de f. Es este caso, $f(x) = 1$ y f es 0. Similarmente, vemos que cada número real tal que,

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{el desarrollo decimal de } x \text{contiene a 5}\}$$

es un punto mínimo local, ya que en este conjunto f es idénticamente 0. Además, ya que f es constante, tenemos que cada número en el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{el desarrollo decimal de } x \text{contiene a 5}\}$$

es un punto máximo local y un punto mínimo local, excepto el punto 0, ya que para cada $\delta > 0$, $(-\delta, \delta)$ contiene infinitos puntos con al menos un 5 en su expansión decimal, esto por la propiedad Arquimediana de los números reales

6. Demuestre la siguiente propiedad (que se utiliza muchas veces de manera implícita): si f es creciente en (a, b) y continua en a y b, entonces f es creciente en $[a, b]$. En particular, si f es continua en $[a, b]$ y $f > 0$ en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.

Demostración.- Sea $x, y \in [a, b]$ tal que x<y. Ya que f es creciente en (a, b), entonces f es también creciente en (x, y). Por el teorema de valor medio, existe un $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0.$$

Si f es creciente en (x, y),

$$f'(c) \geq 0 \text{ para todo } c \in (x, y).$$

Por el hecho de que $y - x > 0$, entonces

$$f(x) < f(y).$$

De esta manera, x e y son número arbitrarios en $[a, b]$ y por lo tanto f es creciente en $[a, b]$.

7. Se traza una recta desde el punto $(0,a)$ hasta el eje horizontal y desde allí otra a $(1,b)$, tal como se indica en la Figura 23 (Spivak). Demuestre que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales. (Naturalmente, deberá entrar en juego una función: expresar la longitud en términos de x, donde $(x,0)$ es el punto del eje horizontal. La línea a trazos de la Figura 23 sugiere una demostración geométrica; tanto en un caso como en otro puede resolverse el problema sin necesidad de hallar el punto $(x,0)$.)

Demostración.- De la figura dada, encontramos que la longitud total del camino está dada por:

$$f(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(1-x)^2+b^2}.$$

Para la longitud más corta, obtenemos la primera derivada y la igualamos con cero

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+b^2}} = 0.$$

Reemplazando $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ con $\cos\alpha$ y $\dfrac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+b^2}}$ con $\cos\beta$, obtenemos

$$\cos\alpha - \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

8. (a) Sea (x_0, y_0) un punto del plano, y sea L la gráfica de la función $f(x) = mx+b$. Halle el punto $\overline{x}$ tal que la distancia de (x_0,y_0) a $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ sea mínima. [Observe que minimizar esta distancia equivale a minimizar su cuadrado. Esto puede simplificar, en cierta medida, los cálculos.]

Respuesta.- La distancia entre (x_0,y_0) y algún punto x que satisfaga $f(x) = mx+b$ es:

$$d^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - mx - b)^2$$

Derivando a ambos lados con respecto a x,

$$2dd' = -2\,(x_0 - x) + 2m\,(y_0 + mx - b)$$

Por la distancia más corta, entonces $d' = 0$. Luego,

$$-x_0 + x - my_0 + m^2x + bm = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_0 + my_0 - bm}{m^2+1}.$$

(b) Halle también $\overline{x}$ observando que la recta que va de $(x_0.y_0)$ a $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ es perpendicular a L.

Respuesta.- La distancia más corta ocurre cuando la linea de (x_0,y_0) es perpendicular a L,

$$x = \frac{x_0 + my_0 - bm}{m^2+1}.$$

(c) Halle la distancia de (x_0,y_0) de L. Es decir, la distancia de (x_0,y_0) a $(\overline{x}, f(\overline{x}))$. [Facilitará los cálculos suponer primero que $b=0$; luego aplicar el resultado a la gráfica de $f(x) = mx+b$ y el punto $(x_0, y_0 - b)$].

Respuesta.- Sea la ecuación dada en el inciso (a),

$$d = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - mx - b)^2}.$$

Supongamos $b=0$, entonces

$$d=\sqrt{x_0^2-2x_0x+x^2+y_0^2-2my_0x+m^2x^2} \quad \Rightarrow \quad d=\sqrt{\left(m^2+1\right)x^2-2\left(x_0+my_0\right)x+x_0^2+y_0^2}.$$

Reemplazando x con $\dfrac{x_0+my_0}{m^2+1}$,

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{\left(\frac{x_0+my_0}{m^2+1}\right)^2-2\frac{\left(x_0+my_0\right)^2}{m^2+1}+x_0^2+y_0^2}\\
&= \sqrt{-\frac{\left(x_0+my_0\right)^2}{m^2+1}+x_0^2+y_0^2}\\
&= \sqrt{\frac{-x_0^2-2mx_0y_0-m^2y_0^2+x_0^2m^2+y_0^2m^2+x_0^2+y_0^2}{m^2+1}}\\
&= \sqrt{\frac{\left(y_0-mx_0\right)^2}{m^2+1}}
\end{aligned}$$

Reemplazando y_0 con y_0-b, concluimos que,

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\left(y_0-b-mx_0\right)^2}{m^2+1}\\
&= \frac{y_0-b-mx_0}{\sqrt{m^2+1}}
\end{aligned}$$

(d) Considere una recta descrita mediante la ecuación $Ax+By+C=0$. Demuestre que la distancia de (x_0,y_0) a esta recta es $\left(Ax_0+By_0+C\right)/\sqrt{A^2+B^2}$.

Demostración.- Sea la ecuación:

$$Ax+By+C=0$$

de donde, encontrar la pendiente $m=-\dfrac{A}{B}$. Substituyendo en la ecuación de la parte (c), se tiene

$$d=\frac{y_0-b+\dfrac{A}{B}x_0}{\sqrt{\left(-\dfrac{A}{B}\right)^2+1}}$$

Luego, multiplicando ambos lados por $\dfrac{B}{B}$,

$$\begin{aligned}
d &= \frac{Ax_0+By_0-bB}{\sqrt{A^2+B^2}}\\
&= \frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{supongamos } bB=-C.
\end{aligned}$$

9. El problema anterior (8, Michael Spivak, capítulo 11) sugiere la siguiente cuestión: ¿cuál es la relación entre los puntos críticos de f y los de f^2?.

Respuesta.- Los puntos críticos de una función son los puntos en los que la función no es diferenciable o su primera derivada es cero. Sabemos que para definir los puntos críticos se iguala f' a cero y para los puntos críticos podemos igualar también $\left(f^2\right)'$ a cero, lo que implica

$$\left(f^2\right)' = 2ff'$$

Por lo tanto, los puntos críticos de f son subconjuntos de los puntos críticos de f^2.

10. Demuestre que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

Demostración.- Sean l el largo, a el ancho y p el perímetro del rectángulo. Entonces,

$$p = 2(l+a) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{p}{2} - l.$$

Sabemos que el área, llamémosla A, está dada por:

$$A = l \cdot a$$

De donde,

$$A = l\left(\frac{p}{2} - l\right) = \frac{p}{2}l - l^2.$$

Derivando con respecto a l, se tiene

$$A' = \frac{p}{2} - 2l.$$

Luego igualando a cero, se tiene

$$\frac{p}{2} - 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{p}{4}.$$

Por el corolario 11.3 y sabiendo que si $f' < 0$ en $\left(-\infty, \frac{p}{4}\right)$ y $f' > 0$ en $\left(\frac{p}{4}, \infty\right)$. Entonces, $\frac{p}{4}$ es un punto mínimo local.

Luego, reemplazando $l = \frac{p}{4}$ en $a = \frac{p}{2} - l$, se tiene

$$a = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = l.$$

Por lo tanto, el área del rectángulo es la más pequeña cuando su largo es igual a su ancho y se convierte en un cuadrado.

11. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, halle el de menor superficie (incluyendo las superficies de las caras superior e inferior como en la Figura 24, Spivak, capítulo 11.).

Respuesta.- El volumen V de un cilindro con radio r y altura h es:

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Luego, el área total A de un cilindro está dada por:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Reemplazado h en esta ecuación, se tiene

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Derivando con respecto a r, se tiene

$$A' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Luego igualando a cero,

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}.$$

Por el corolario 11.3 y sabiendo que si $f' < 0$ en $\left(-\infty, \dfrac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}\right)$ y $f' > 0$ en $\left(\dfrac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}, \infty\right)$.

Entonces, $\dfrac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}$ es un punto mínimo local.

Reemplazando r en $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, obtenemos

$$h = \frac{V}{\pi\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}.$$

Por lo tanto, el área superficial del cilindro es la más pequeña cuando su radio es $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ y su altero es $\dfrac{V}{\pi\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}$.

12. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a gira alrededor de uno de sus lados, generando un cono circular recto. Halle el volumen máximo que puede tener este cono.

Respuesta.- El volumen V de un cono con radio r y alguna altura h es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$a^2 = r^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Reemplazando en $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, se tiene

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{r^4 a^2 - r^6}.$$

Derivando con respecto a r,

$$V' = \frac{1}{3}\pi \frac{4r^3 a^2 - 6r^5}{\sqrt{r^4 a^2 - r^6}}.$$

Luego igualando a cero,

$$\frac{4r^3a^2 - 6r^5}{\sqrt{r^4a^2 - r^6}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 - 3r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Reemplazando r en $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, obtenemos

$$V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{4}{9}a^6 - \frac{8}{27}a^6} = \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{4}{27}a^6} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}a^3.$$

El cual es el mayor volumen.

13. Demuestre que la suma de un número positivo y de su recíproco es al menos 2.

Demostración.- Sean a un número positivo y $\frac{1}{a}$ para $a \neq 0$ es su reciproco. Definamos la suma sum de estos dos números, como sigue

$$sum = a + \frac{1}{a}.$$

Derivando con respecto a a,

$$sum' = 1 - \frac{1}{a^2}.$$

Luego igualando a cero,

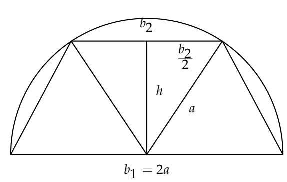
$$1 - \frac{1}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1.$$

Ya que a es un número positivo, solo se evaluará en $a = 1$. Por el corolario 11.3, y sabiendo que si $sum' < 0$ cuando $(0,1)$ y $sum' > 0$ cuando $(1,\infty)$. Es decir sum es decreciente cuando $(0,1)$ y creciente cuando $(1,\infty)$. Entonces a es un punto mínimo. Luego reemplazando a en $sum = a + \frac{1}{a}$ se tiene,

$$sum = 1 + 1 = 2.$$

14. Halle el trapezoide de mayor área que puede ser inscrito en un semicírculo de radio a, con una base situada a lo largo del diámetro.

Respuesta.- Tracemos primero una gráfica.



Por la esta figura, tenemos:

$$b_2 = 2\sqrt{a^2 - h^2}.$$

Sabemos que el área del trapezoide está dado por:

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h.$$

Reemplazando b_1 con $2a$ y b_2 con $2\sqrt{a^2-h^2}$, se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(2a+2\sqrt{a^2-h^2}\right)h \\ &= ah+\sqrt{a^2h^2-h^4}. \end{aligned}$$

Derivando con respecto a x,

$$\begin{aligned} A' &= a+\frac{2a^2h-4h^3}{2\sqrt{a^2h^2-h^4}} \\ &= \frac{a\sqrt{a^2h^2-h^4}+a^2h-2h^3}{\sqrt{a^2h^2-h^4}}. \end{aligned}$$

Luego igualando a cero,

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2h^2-h^4}+a^2h-2h^3 &= 0 \\ a\sqrt{a^2-h^2}+a^2-2h^2 &= 0 \\ a^2\left(a^2-h^2\right) &= 4h^4-4a^2h^2+a^4 \\ h &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{aligned}$$

Evaluando h en $A=ah+\sqrt{a^2h^2-h^4}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\sqrt{\frac{3}{4}a^4-\frac{9}{16}a^4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad . \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

15. Dos pasillos de anchuras a y b, forman un ángulo recto (Figura 25,Spivak, capítulo 11). ¿Cuál es la longitud máxima de una escalera que puede ser transportada horizontalmente alrededor de la esquina?.

Respuesta.- Por la figura dada, tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{b}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Y

$$\cos\theta=\frac{a}{L-x} \quad \Rightarrow \quad L-x=\frac{a}{\cos\theta}.$$

De donde, reemplazando la primera ecuación en la segunda, se tiene:

$$L=\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Derivando con respecto a θ,

$$\begin{aligned} L' &= \frac{a\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}-\frac{b\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \frac{a\operatorname{sen}^3\theta-b\cos^3\theta}{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}. \end{aligned}$$

Para la mayor longitud posible, igualamos L' a cero,

$$\begin{aligned}
a\,\mathrm{sen}^3\theta - b\cos^3\theta &= 0 \\
a\,\mathrm{sen}^3\theta &= b\cos^3\theta \\
\frac{\mathrm{sen}^3\theta}{\cos^3\theta} &= \frac{b}{a} \\
\tan^3\theta &= \frac{b}{a} \\
\tan\theta &= \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \\
\mathrm{sen}\,\theta &= \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2}} \\
\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2}}
\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de sen y cos en $L = \dfrac{a}{\cos\theta} + \dfrac{b}{\mathrm{sen}\,\theta}$, para obtener la mayor longitud posible, se tiene:

$$L = a\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2} + b\frac{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}.$$

16. Se diseña un jardín en forma de un sector circular (Figura 26, Spivak, capítulo 11), de radio R y ángulo central θ . El jardín debe tener un área fija A. ¿Para qué valor de R y θ (en radianes) será mínima la longitud de la valla alrededor del perímetro del jardín?.

Respuesta.- El área del jardín es:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2A}{r^2}.$$

Después, el perímetro del jardín está dado por:

$$P = r\theta + 2r.$$

Luego, reemplazando por $\theta = \dfrac{2A}{r^2}$:

$$P = \frac{2A}{r} + 2r.$$

Derivando con respecto a r,

$$P' = \frac{-2A}{r^2} + 2.$$

Para hallar el valor de r que minimiza P, igualamos P' a cero,

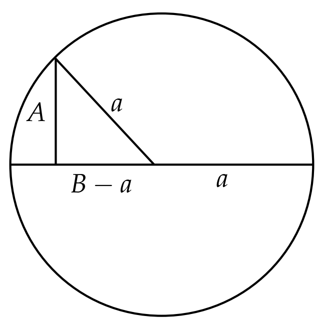
$$\begin{aligned} \frac{-2A}{r^2} + 2 &= 0 \\ \frac{2A}{r^2} &= -2 \\ r^2 &= A \\ r &= \sqrt{A}. \end{aligned}$$

Reemplazando en $\theta = \dfrac{2A}{r^2}$, se tiene:

$$\theta = \frac{2A}{(\sqrt{A})^2} = \frac{2A}{A} = 2.$$

17. Un ángulo recto se desplaza a lo largo del diámetro de un círculo de radio a, tal como se muestra en la Figura 27 (Spivak, Capítulo 11). ¿Cuál es la mayor longitud posible $(A+B)$ interceptada por el círculo sobre el ángulo?.

Respuesta.- Complementando el dibujo dado, podríamos construir:



Donde podemos definir lo siguiente:

$$A = \sqrt{a^2 - (B-a)^2} = \sqrt{2aB - B^2}$$

$$S = A + B = \sqrt{2aB - B^2} + B.$$

Derivando con respecto a B,

$$S' = \frac{2a - 2B}{\sqrt{2aB - B^2}} + 1.$$

Para la mayor longitud posible, igualamos S' a cero,

$$\begin{aligned}
\frac{2a-2B}{2\sqrt{2aB-B^2}} &= 0\\
B-a &= \sqrt{2aB-B^2}\\
B^2-2aB+a^2 &= 2aB-B^2\\
2B^2-4aB+a^2 &= 0\\
B &= \frac{4a\pm\sqrt{16a^2-4\cdot 2a^2}}{2\cdot 2}\\
B &= \frac{2a\pm\sqrt{2}a}{2} = \left(1+\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a.
\end{aligned}$$

Luego, sea $B = a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, entonces reemplazando en $A=\sqrt{2aB-B^2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{2a^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left[a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2}\\
A &= \frac{\sqrt{2}a}{2}.
\end{aligned}$$

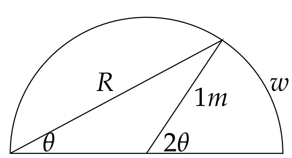
Sea ahora $B = a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, entonces reemplazando en $A=\sqrt{2aB-B^2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{2a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left[a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2}\\
A &= \frac{\sqrt{2}a}{2}.
\end{aligned}$$

18. El ecólogo Ed debe cruzar un lago circular de 1 milla de radio. Puede remar a través del lago a una velocidad de 2 millas por hora, o caminar alrededor del lago a una velocidad de 4 millas por hora; también puede remar un cierto trecho y completar el itinerario caminando (Figura 28, Spivak, capítulo 11). ¿Qué ruta debe tomar de manera que:

(i) pueda ver la mayor cantidad de paisaje posible?.

Respuesta.- Sea,



Sea R que representa la distancia que el hombre recorrerá y W la distancia que caminerá como se muestra en la figura anterior, de donde

$$W = 2r\theta = 2\theta$$

Y

$$R^2 = 1^2 + 1^2 = -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\pi - 2\theta).$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$,

$$R^2 = 2 + 2\cos(2\theta) \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{2 + 2\cos(2\theta)}.$$

Luego, la longitud D del camino total viene dada por:

$$D = R + W = 2\theta + \sqrt{2 + 2\cos(2\theta)}.$$

Derivando con respecto a θ,

$$D' = 2 - \frac{4\,\text{sen}(2\theta)}{2\sqrt{2 + 2\cos(2\theta)}}$$

Para hallar la mayor longitud posible, igualamos D' a cero,

$$\begin{aligned}
2 - \frac{4\,\text{sen}(2\theta)}{2\sqrt{2+2\cos(2\theta)}} &= 0 \\
\frac{\text{sen}(2\theta)}{\sqrt{2+2\cos(2\theta)}} &= 1 \\
\text{sen}(2\theta) &= \sqrt{2+2\cos(2\theta)} \\
\text{sen}^2(2\theta) &= 2 + 2\cos(2\theta) \\
1 - \cos^2(2\theta) - 2\cos(2\theta) + 1 &= 0 \qquad\qquad \text{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \\
\cos^2(2\theta) + 2\cos(2\theta) + 1 &= 0 \\
[\cos(2\theta) + 1]^2 &= 0 \\
\cos(2\theta) &= -1 \\
2\theta &= \pi \qquad\qquad 2\theta = \arccos(-1) \\
\theta &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Reemplazando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ en $W = 2\theta$ y $R = \sqrt{2 + 2\cos(2\theta)}$ se tiene

$$W = \pi \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{2 + 2\cos(\pi)} = 0.$$

(ii) pueda cruzar tan rápida como sea posible? Respuesta.- Aplicando la fórmula,

$$tiempo = \frac{distancia}{velocidad}$$

Se tiene que el tiempo total es:

$$T = \frac{W}{4} + \frac{R}{2}.$$

Reeemplazando W con 2θ y R con $\sqrt{2+2\cos(2\theta)}$,

$$T = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos(2\theta)}.$$

Derivando con respecto a θ,

$$T' = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{2+2\cos(2\theta)}}.$$

Para el tiempo mínimo, igualamos T' a cero,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{2+2\cos(2\theta)}} &= 0 \\
2\operatorname{sen}(2\theta) &= \sqrt{2+2\cos(2\theta)} \\
4\operatorname{sen}^2(2\theta) &= 2+2\cos(2\theta) \\
4-4\cos^2(2\theta)-2\cos(2\theta)-2 &= 0 \qquad\qquad \operatorname{sen}^2(\theta) = 1-\cos^2(\theta) \\
2\left[2-2\cos^2(2\theta)-\cos(2\theta)-1\right] &= 0 \\
\left[2\cos(2\theta)-1\right]\left[\cos(2\theta)+1\right] &= 0 \\
\cos(2\theta) = \frac{1}{2} \quad &\text{o} \quad \cos(2\theta) = -1 \\
2\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \quad &\text{o} \quad 2\theta = \arccos(-1) \\
\theta = \frac{\pi}{6} \quad &\text{o} \quad \theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{6}$,

$$W = \frac{\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}.$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$W = \pi \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{2+2\cos(\pi)} = 0.$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{\pi}{4}.$$

19. (a) Considere los puntos A y C de un círculo, con cetro O, formando un ángulo $\alpha = \angle AOC$ (figura 29, Spivak, capítulo 11). ¿Cómo debe elegirse el punto B de manera que la suma de las áreas del triángulo $\triangle AOB$ y del triángulo $\triangle BOC$ sea máxima? Indicación: Exprese todo en función de $\theta = \angle AOB$.

Respuesta.- La suma de las áreas de los dos triángulos es:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}(\alpha - \theta). \\ &= \frac{1}{2}r^2 \left[\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\alpha - \theta)\right]. \end{aligned}$$

Diferenciando con respecto a θ se tiene,

$$S' = \frac{1}{2}r^2 \left[\cos(\theta) - \cos(\alpha - \theta)\right].$$

Para que la suma de las áreas sea máxima, igualamos S' a cero,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) - \cos(\alpha - \theta) &= 0 \\ \cos(\theta) &= \cos(\alpha - \theta) \\ \theta &= \alpha - \theta \\ 2\theta &= \alpha \end{aligned}$$

Por lo que el área máxima se tendra que poner $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$.

(b) Demuestre que para $n \geq 3$, de todos los n-ágonos inscritos en un círculo, el n-ágono regular es el de área máxima.

Demostración.- Todo polígono inscrito en una circunferencia se puede dividir en triángulos isósceles como los del apartado (a) de este problema en el que probamos que el área máxima se da cuando los ángulos centrales son iguales.
Generalizando este resultado para cualquier número de triángulos, encontramos que para el área máxima, todos los ángulos de los vértices deben ser iguales, por lo tanto, las bases son iguales y el polígono es regular.

20. Se dobla la esquina inferior derecha de una página de manera que coincida con el margen izquierdo del papel, como se muestra en la Figura 30 (Spivak, capítulo 11). Si la anchura del papel es α y la página es muy larga, demuestre que la longitud mínima del pliegue es $3\sqrt{3}\alpha/4$.

Demostración.- Completando la figura 30, tenemos:

Sea θ la medida del ángulo BGF. Como $\triangle BGF$ tiene un ángulo recto en B, entonces $m\angle BFG = 90^\circ - \theta$. Luego, como $\triangle BGF$ es congruente con $\triangle EGF$, entonces $m\angle EFG = 90^\circ - \theta$. Se sigue,

$$\begin{aligned} m\angle AFE &= 180^\circ - m\angle BFG - m\angle EFG \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \theta) - (90^\circ - \theta) \\ &= 2\theta \end{aligned}$$

Después podemos hallar el $\cos(2\theta)$, y hallar la longitud L.

$$
\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \frac{AF}{EF} = \frac{\alpha - L\operatorname{sen}\theta}{L\operatorname{sen}\theta} \\
L\operatorname{sen}(\theta)\cos(2\theta) &= \alpha - L\operatorname{sen}(\theta) \\
L\operatorname{sen}(\theta) + L\operatorname{sen}(\theta)\cos(2\theta) &= \alpha - L\operatorname{sen}(\theta) + L\operatorname{sen}(\theta) \\
L\operatorname{sen}(\theta)\left[\cos(2\theta)+1\right] &= \alpha \\
\text{Aplicando el hecho de} \quad & \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow 1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) \\
2L\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta) &= \alpha \\
L &= \frac{\alpha}{2\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)}
\end{aligned}
$$

Ahora diferenciando con respecto a θ se tiene,

$$
\begin{aligned}
L' &= -\frac{2\alpha\left[\cos(\theta)\cos^2(\theta) - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\right]}{\left[2L\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\right]^2} \\
&= -\frac{2\alpha\left[\cos^3(\theta) - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\right]}{\left[2L\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\right]^2}
\end{aligned}
$$

Para que la longitud sea mínima, igualamos L' a cero,

$$
\begin{aligned}
-\frac{2\alpha\left[\cos^3(\theta) - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\right]}{\left[2L\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\right]^2} &= 0 \\
\cos^3 - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta) &= 0 \\
\cos^2(\theta) - 2\operatorname{sen}^2(\theta) &= 0 \\
1 - 3\operatorname{sen}^2\theta &= 0 \qquad \cos^2(\theta) = 1 + \operatorname{sen}^2(\theta) \\
\operatorname{sen}^2(\theta) &= \frac{1}{3} \\
\operatorname{sen}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Luego, para hallar $\cos^2(\theta)$ podemos utilizar la identidad trigonométrica, $\cos^2(\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2(\theta)$ y reemplazar $\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1}{3}$, tenemos

$$\cos^2(\theta) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Reemplazando en la expresión de L se tiene,

$$L = \frac{\alpha}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}\alpha}{4}.$$

21. La Figura 31 (Spivak, capítulo 11) muestra la gráfica de la derivada de f. Halle todos los puntos máximos y mínimos locales de f.

Respuesta.- Por la gráfica notemos que:

$$f'(1) = 0.$$

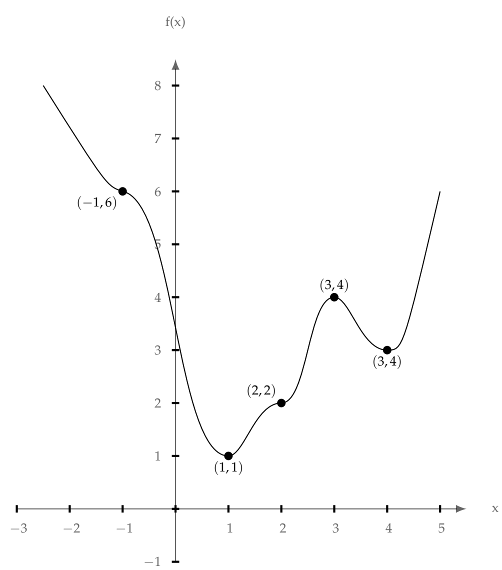
Por el corolario 11.3 y sus respectivas reglas de máximo y mínimo locales, podemos deducir que f' es positivo cuando $x < 1$ y negativo cuando $x > 1$. Entonces $f(x)$ tiene un máximo local en $x = 1$.
Por otro lado vemos que:

$$f'(3) = 0.$$

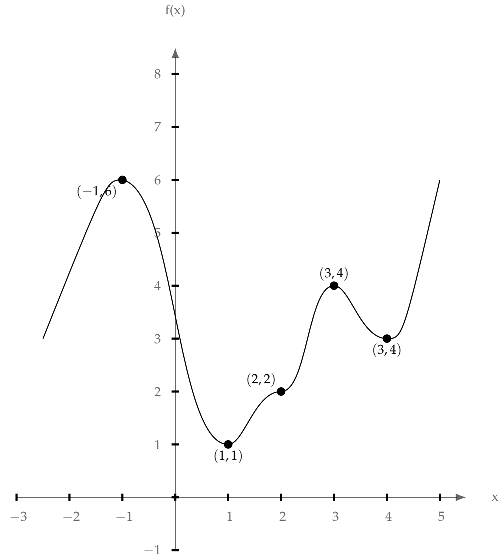
Ya que f' es negativa cuando $x < 3$ y positivo cuando $x > 3$. Entonces por el corolario 11.3 y sus respectivas reglas de máximo y mínimo f tiene un mínimo local en $x = 3$.

22. Supongamos que f es una función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ con puntos críticos $-1, 1, 2, 3, 4$ y sus correspondientes valores críticos $6, 1, 2, 4, 3$. Trace la gráfica distinguiendo los casos n par y n impar.

Respuesta.- Cuando n es par, se tiene

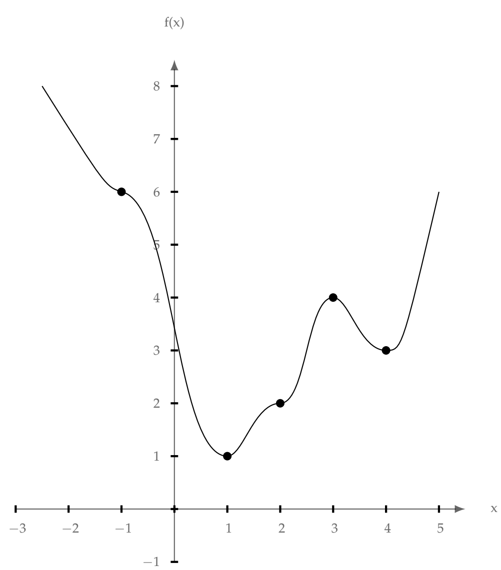


Para n impar, se tiene

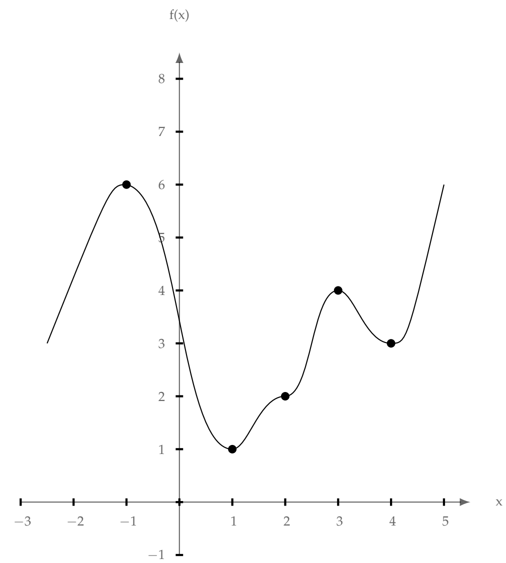


23. (a) Suponga que los puntos críticos de la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ son $-1, 1, 2, 3$ y que $f''(-1) = 0$, $f''(2) < 0$, $f''(3) = 0$. Trace la gráfica de f tan exacatamente como sea posible basándose en esta información.

Respuesta.- Ya que, la segunda derivada de $x = 1$ es positiva, entonces por el teorema 11.5 se tiene un mínimo local. Luego, como la segunda derivada en $x = 2$ es positiva, entonces por el teorema 11.5 es un máximo local. Los puntos x=-1 y -3 son puntos de inflexión. Cuando n es par, se tiene



Para n impar, se tiene



(b) ¿Existe una función polinómica con las propiedades anteriores, excepto que 3 no sea un punto crítico?.

Respuesta.- Si 3 no es uno de los puntos críticos, y $x = 2$ es el máximo, entonces la función decrecerá en el intervalo 3 hasta el infinito. Por lo tanto, la segunda derivada en 3 no puede ser cero. Así, no es posible que exista una función polinómica con las propiedades anteriores.

24. Describa la gráfica de una función racional (en términos muy generales, análogamente a la descripción del texto de la gráfica de una función polinómica).

Respuesta.- La gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 0$. La gráfica de $f(x) = \dfrac{ax^n + \ldots}{bx^m + \ldots}$ tiene una asíntota vertical en $x = a$ si el denominador es cero en y el numerador no es cero.

Si	$n < m$	entonces la eje x es la asíntota horizontal.
Si	$n = m$	entonces la linea $y = \dfrac{a}{b}$ es la asíntota horizontal.
Si	$n > m$	no habrá asíntotas horizontales.

25. (a) Demuestre que dos funciones polinómicas de grados m y n, respectivamente, se cortan a lo sumo en $\max(m,n)$ puntos.

Demostración.- Sean dos funciones polinómicas f de grado n y g de grado m tal que $m \geq n$. Es decir,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

para $a_n \neq 0$ y $a_m \neq 0$. Luego vemos que,

$$\begin{array}{rcl} (f-g)(x) & = & f(x) - g(x) \\ & = & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 - \left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right) \\ & = & a_n x^n + \ldots + a_{m+1}x^{m+1} - b_m x^m + (a_m - b_m)x^m + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 + b_0) \end{array}$$

Este último ya que $n \geq m$. Acá mostramos que $f - g$ es también un polinomio de grado $n = \max(m,n)$. Ahora, supongamos que a es un punto de intersección de f y g, si y sólo si, $f(a) = f(b)$. Podemos reescribir de la siguiente manera,

$$(f-g)(a) = 0.$$

De esto, podemos deducir que los puntos de intersección de f y g son los ceros de $f - g$. Así, por el problema 7 parte (c) del capitulo 3 de Spivak tenemos que $f - g$ puede tener por lo mucho n ceros. Como $n \geq m$, entonces $n = \max(m,n)$. Lo que demuestra que f y g se intersecan como máximo en $\max(m,n)$ puntos.

(b) Para cada m y n muestre dos funciones polinómicas de grados m y n que se corten $\max(m,n)$ veces.

Demostración.- Sea p un polinomio de grado n y $q(x) = x^m$ un polinomio de grado m con $n \geq m$. Supongamos otro polinomio $f = p + q$, de la parte (a) tenemos que el grado de f es n ya que $n \geq m$. Luego, observemos que $p = f - q$ y el grado de p es n. Así, $p = f - q$ pueden tener por lo mucho n raíces, esto es, f y q se intersecan por lo mucho en $n = \max(m,n)$ veces.

26. Suponga que f es una función polinómica de grado n con $f \geq 0$ (por tanto n debe ser par). Demuestre que $f + f' + f'' + \ldots + f^{(n)} \geq 0$.

Demostración.- Sea
$$h(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(n)}(x).$$
Diferenciando se tiene,
$$h'(x) = f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x).$$
Ya que, $f^{(n+1)}(x) = 0$, entonces
$$h'(x) = f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(n)}(x).$$
Luego, supongamos
$$g(x) = e^{-x}h(x).$$
Diferenciando se tiene,
$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & e^{-x}\left[h'(x) - h(x)\right] \\ & = & -e^{-x}\left[h(x) - h'(x)\right] \\ & = & -e^{-x}f(x) \leq 0. \end{array}$$
Entonces $g(x)$ es decreciente. Después, por el hecho de que $h(x)$ implica $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, tenemos $g(x) \geq 0$. Por lo tanto $h(x) \geq 0$.

27. (a) Suponga que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ tiene exactamente k puntos críticos y $f''(x) \neq 0$ para todos los puntos críticos x. Demuestre que $n - k$ es impar.

Demostración.- Supongamos que nos dan la función f con k raíces, o cuya multiplicidad total de toda las raíces es k. Por el problema 7.4 Spivak, se sabe que $n - k$ es par. También sabemos que, una vez dados n y k tales que $n - k$ es par, existe alguna función polinómica de grado n que tiene k raíces, o cuya multiplicidad total de todas las raíces es k. Sea

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Asumiendo que la función polinómica $f(x)$ tiene puntos críticos k para los cuales $f''(x) \neq 0$. Lo que significa que $f'(x)$ tiene k raíces únicas, (la unicidad se deduce del hecho de que $f''(x) \neq 0$). Ya que f tiene grado n, f' debería tener grado $n-1$. Luego por el hecho de que $f'(x)$ tiene k raíces, se sigue que $n-1-k$ es par. Por lo tanto, no es difícil deducir que $n-k$ tendría que ser impar.

(b) Para cada n, demuestre que existe una función polinómica f de grado n con k puntos críticos, en cada uno de los cuales f'' es distinta de cero si $n-k$ es impart.

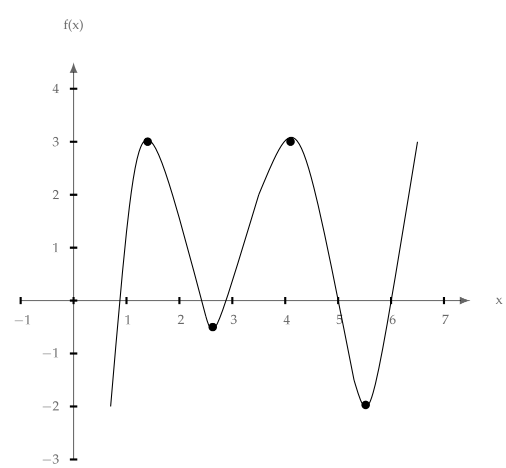
Demostración.- Supongamos que para algunos números naturales n y k, $n-k$ es impart. Esto significa que $n-k-1$ será par. De la parte discusión previa a la parte (a) se deduce que existe alguna función polinómica g de grado $n-1$ con exactamente k raíces. Sea f la función tal que $f' = g$. De donde no es difícil deducir que esta función f tiene grado n y k puntos críticos, que son en realidad raíces de la función g. Por lo tanto, la función f es la función requerida.

(c) Suponga que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ tiene k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales. Demuestre que $k_2 = k_1 + 1$ si n es par y $k_2 = k$; si n es impar.

Demostración.- Sea

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

un polinomio con k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales. Notemos que $k = k_1 + k_2$, que podemos ordenarlas en secuencias crecientes $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Como el coeficiente principal de los polinomios es positivo, tenemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Esto significa que la función es creciente a medida que tiende al infinito. Luego el punto crítico final a_k debe ser el mínimo local, ya que la función es creciente a la derecha del mismo. De aquí se deduce que la función será decreciente a la izquierda de a_k. Decimos que el penúltimo punto crítico a_{k-1} a k_1 será máximo local ya que la función disminuirá a la derecha de él, y por tanto aumentará a la izquierda del mismo. Repitiendo esta deducción podemos deducir que los máximos y los mínimos cambiarán periódicamente. Es decir, los mínimos y máximos locales se distribuirán como en el gráfico siguiente.



Ahora observaremos dos casos distintos, cuando n es par y es impar.

Caso 1. Supongamos que n es par. No es difícil deducir que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Si aplicamos la misma lógica que la anterior, podemos decir que a_1 será el mínimo local, ya que la función es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de a_1, así podremos deducir que a_2 será un máximo local. Por lo que es cierto que:

$$a_n = \begin{cases} \text{máximo local} & n = 2m \\ \text{mínimo local} & n = 2m+1. \end{cases}$$

Ya que a_k es un mínimo local, basado en el anterior análisis, se sigue que k es impar, es decir $k = 2m+1$. Por lo tanto, los mínimos locales son $a_1, a_3, \ldots, a_k$ mientras que los máximos locales son $a_2, a_4, \ldots, a_{k_1}$.

Caso 2. Supongamos que n es impar. No es difícil deducir que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. Si aplicamos la misma lógica que la anterior, podemos decir que a_1 será el máximo local, ya que la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha de a_1, así podremos deducir que a_2 será un mínimo local. Por lo que es cierto que:

$$a_n = \begin{cases} \text{máximo local} & n = 2m+1 \\ \text{mínimo local} & n = 2m. \end{cases}$$

Ya que a_k es un mínimo local, basado en el anterior análisis, se sigue que k es par, es decir $k = 2m$. Por lo tanto, los mínimos locales son $a_1, a_3, \ldots, a_{k_1}$ mientras que los máximos locales son $a_2, a_4, \ldots, a_k$.

(d) Queremos encontrar la función polinómica de grado n con k_1 mínimos locales y k_2 máximos locales, donde n, k_1, k_2 son números dados. Sean $k = k_1 + k_2$ y los números reales arbitrarios $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Luego observemos la función

$$g(x) = \prod_{i=i}^{k}(x - a_i)\left(1 + x^2\right)^m$$

donde $m = \frac{n-1-k}{2}$. No es difícil deducir que esta función tiene grado $n-1$. La razón por la que elegimos este tipo de funciones es porque $1 + x^2 > 0$ para todo número real x lo que implica que $(1+x^2)^m > 0$ y el signo de la función sólo depende del producto $\prod_{i=1}^{k}(x - a_i)$. Podemos notar que este producto es positivo siempre que $x \in (a_k, \infty) \cup (a_{k-1}, a_k) \cup (a_{k-3}, a_{k-2}) \cup \ldots$. Mientras que será negativo si $x \in (a_{k-2}, a_{k-1}) \cup (a_{k-4}, a_{k-3}) \cup \ldots$. Sea la función f tal que $f'(x) = g(x)$, de donde tenemos que $a_k, a_{k-2}, \ldots$ son mínimos locales mientras que $a_{k-1}, a_{k-3}, \ldots$ son máximos locales de la función f.

28. (a) Demuestre que si $f'(x) > M$ para todo x de $[a,b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.

Demostración.- Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a).$$

De donde notamos que h es una función continua en $[a,b]$ ya que ambos, f y $(x-a)$ son continuas. Además, h es diferenciable en (a,b), porque también f y $(x-a)$ lo son. Luego observemos que,

$$h(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](a - a) = f(a)$$

y

$$h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$$

Por lo que podemos utilizar el teorema de Rolle de la siguiente manera. Ya que h es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y $h(a)=h(b)$, entonces existe un número c en (a,b) tal que $h'(c)=0$. Es decir,

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-a\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ h'(x) &= f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ h'(c) &= f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0. \end{aligned}$$

Lo que implica por hipótesis que,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(c)\geq M \quad\Rightarrow\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq M.$$

Así,

$$f(b)\geq f(a)+M(b-a).$$

(b) Demuestre que si $f'(x)\leq M$ para todo x de $[a,b]$ entonces $f(b)\leq f(a)+M(b-a)$.

Demostración.- Sea $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ como sigue:

$$h(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a).$$

De donde notamos que h es una función continua en $[a,b]$ ya que ambos, f y $(x-a)$ son continuas. Además, h es diferenciable en (a,b), porque también f y $(x-a)$ lo son. Luego observemos que,

$$h(a)=f(a)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](a-a)=f(a)$$

y

$$h(b)=f(b)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](b-a)=f(b)-f(b)+f(a)=f(a).$$

Por lo que podemos utilizar el teorema de Rolle de la siguiente manera. Ya que h es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y $h(a)=h(b)$, entonces existe un número c en (a,b) tal que $h'(c)=0$. Es decir,

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-a\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ h'(x) &= f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ h'(c) &= f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0. \end{aligned}$$

Lo que implica por hipótesis que,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(c)\leq M \quad\Rightarrow\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M.$$

Así,

$$f(b)\leq f(a)+M(b-a).$$

(c) Formule un teorema análogo cuando $|f'(x)| \leq M$ para todo x en $[a,b]$.

Respuesta.- Para algún $M \in \mathbb{R}$, queremos hallar,

$$-M \leq f'(x) \leq M.$$

Usando la parte (a) y (b) deducimos que,

$$f(b) \geq f(a) - M(b-a) \quad \text{y} \quad f(b) \leq f(a) + M(b-a).$$

Lo que implica,

$$-M(b-a) \leq f(b) - f(a) \quad \text{y} \quad f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Así,

$$-M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Y por lo tanto,

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

29. Suponga que $f'(x) \geq M > 0$ para todo x de $[0,1]$. Demuestre que existe un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ en el cual $|f| \geq M/4$.

Demostración.- Ya que $f' > 0$ en $[0,1]$, entonces sabemos que es continuo y estrictamente creciente, y puede tomar el valor 0 como máximo una vez. Se sigue que $f(x) \geq 0$ en $[1/2, 1]$ o $f(x) \leq 0$ en $[0, 1/2]$. Lo primero ocurre si toma el valor 0 en algún punto menor que o igual a $1/2$; la segunda ocurre si toma el valor 0 en algún punto mayor que o igual a $1/2$; y si no toma nunca el valor 0, entonces o bien es siempre negativo en cuyo caso ocurre lo segundo, o siempre es positivo, en cuyo caso ocurre lo primero.
Luego, suponga que $f(x) \geq 0$ en $[1/2, 1]$, así por el teorema del valor medio,

$$\frac{f(3/4) - f(1/2)}{1/4} \geq M,$$

así $f(3/4) - f(1/2) \geq M/4$, y ya que $f(1/2) \leq 0$ se sigue que $-f(1/4) \geq M/4$ o $f(1/4) \leq -M/4$. Pero sabiendo que f es estrictamente creciente, tenemos $f(x) \leq -M/4$ para todo $x \in [0, 1/4]$, por lo tanto $|f| > M/4$ en un intervalo de longitud $1/4$.

30. (a) Suponga que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

Demostración.- Consideremos la función $h = f - g$, la cual es una función diferenciables. Ya que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, entonces $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, así $h'(x) > 0$ para todo x.
Sea $x > a$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(c) > 0,$$

de donde $h(x) > h(a)$. Por el hecho de que $f(a) = g(a)$, se tiene $h(a) = 0$, lo que implica $h(x) > 0$. Por lo tanto concluimos que $f(x) > g(x)$.
Por otro lado, sea $x < a$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (x, a)$ tal que

$$\frac{h(a) - h(x)}{a - x} = h'(c) > 0,$$

así $h(x) < h(a) = 0$ y $f(x) < g(x)$.

(b) Demuestre mediante un ejemplo que estas conclusiones no son válidas sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.

Demostración.- Sea $f(x) = 10x$, $g(x) = 5x + 100$ y tomemos $a = 0$. Tenemos,

$$f'(x)10 > 5 = g'(x), \ \forall x.$$

Pero no se cumple para todo x tal que $f(x) > g(x)$, ya que f comienza a ser mayor que g cuando $x = 20$.
De manera similar, se cumplirá que $f(x) < g(x)$ cuando $x = -20$.
No es posible encontrar un sólo ejemplo de un par de funciones f y g con un número a tal que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, ambos

$$f(x) > g(x), \ \forall x > a \qquad \text{y} \qquad f(x) < g(x), \ \forall x < a$$

siendo falsos. En su lugar, si $f(a) = g(a)$ entonces ambas afirmaciones son verdaderas. Si $f(a) > g(a)$, entonces repitiendo la primera parte de la prueba anterior, cuando se tenga $h(x) > h(a)$, tenemos $h(a) = f(a) - g(a) > 0$, y así, todavía $h(x) > 0$ o $f(x) > g(x)$ para $x > a$. Similarmente, si $f(a) < g(a)$ entonces por la segunda parte de la demostración anterior se tiene $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

(c) Suponga que $f(a) = g(a)$, que $f'(x) \geq g'(x)$ para todo x y que $f'(x_0) > g'(x_0)$ para algún $x_0 > a$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para todo $x \geq x_0$.

Demostración.- Si $f(x_0) = g(x_0)$, entonces la prueba nos será la misma que la parte (a), inmediatamente nos permite concluir que $f(x) > g(x)$ para todo $x > x_0$.
Si $f(x_0) > g(x_0)$, entonces por la parte final de (b) nos permite concluir que $f(x) > g(x)$ para todo $x > x_0$. Así, que terminaremos la demostración si podemos demostrar que $f(x_0) \geq g(x_0)$.
Aplicando el teorema del valor medio para h en $[a, x_0]$ tenemos

$$\frac{h(x_0) - h(a)}{x_0 - a} = h'(c) \geq 0,$$

así, $h(x_0) \geq h(a) = 0$, en efecto $f(x_0) \geq g(x_0)$.

31. Halle las funciones f tales que

(a) $f'(x) = \operatorname{sen} x$.

Respuesta.- Podemos considerar la función $f(x) = -\cos x + c$, para alguna c constante. Luego,

$$f'(x) = -(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x.$$

(b) $g''(x) = x^3$.

Respuesta.- Consideremos la función $g(x) = \dfrac{x^5}{15} + x + c$ para alguna c constante. Luego, tenemos la primera diferenciación como:

$$g'(x) = \frac{5x^4}{15} + 1 = \frac{x^4}{3} + 1$$

La segunda diferenciación será:

$$g''(x) = \frac{3x^3}{3} = x^3.$$

(c) $f'''(x) = x + x^2$.

Respuesta.- Podemos considerar la función $f(x) = \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{60} + x^2 + x + c$ para alguna c constante. Luego, tenemos la primera diferenciación como:

$$f'(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + x + 1.$$

La segunda diferenciación será:

$$f''(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 1.$$

Y la tercera diferenciación será:

$$f'''(x) = x + x^2.$$

32. Si bien es verdad que un peso que se suelta partiendo del reposo caerá $s(t) = 16r^2$ pies en t segundos, este hecho experimental no menciona el comportamiento de los pesos que son lanzados hacia arriba o hacia abajo. Por otra parte, la ley $s''(t) = 32$ se cumple siempre y tiene la ambigüedad suficiente para explicar el comportamiento de un peso soltado desde cualquier altura y con cualquier velocidad inicial. Para mayor sencillez convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo; en este caso las velocidades son positivas para cuerpos que se elevan y negativas para cuerpos que caen, y todos los cuerpos caen según la ley $s''(t) = -32$.

(a) Demuestre que s es de la forma $s(t) = -16t^2 + \alpha t + \beta$.

Demostración.- Se tiene,

$$\begin{array}{rcl} s''(t) & = & -32 \\ s'(t) & = & -32t + \alpha \\ s(t) & = & -16t^2 + \alpha t + \beta. \end{array}$$

(b) Haciendo $t = 0$ en la fórmula para s, y después en la fórmula para s', demuestre que $s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0$, donde s_0 es la altura desde la cual el cuerpo es soltado en el tiempo 0, y v_0 es la velocidad con el cual se suelta.

Demostración.- Reemplazando $t = 0$ en la ecuación para $s'(t)$ tenemos

$$s'(0) = v_0 = \alpha.$$

Luego, reemplazando $t = 0$ en la ecuación para $s(t)$ se tiene

$$s(0) = s_0 = \beta.$$

Substituyendo los valores de α y β en la ecuación para $s(t)$,

$$s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0.$$

(c) Se lanza un peso hacia arriba con una velocidad de v pies por segundo desde el nivel del suelo. ¿A qué altura llegará? (A qué altura significa ¿cuál es la máxima altura para todos los tiempos?) ¿Cuál es su velocidad en el momento en que alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la aceleración en dicho momento? ¿Cuándo llegará otra vez al suelo? ¿Cuál será su velocidad en el momento de alcanzar el suelo?.

Respuesta.- Sea $s_0 = 0$ y $v_0 = v$,

$$\begin{array}{rcl} s(t) & = & -16t^2 + vt \\ s'(t) & = & -32t + v. \end{array}$$

Para la altura máxima. Sea $s'(t) = 0$, de donde

$$\begin{array}{rcl} -32t + v = 0 & \Rightarrow & 32t = v \\ & \Rightarrow & t = \dfrac{v}{32}. \end{array}$$

Reemplazando $t = \dfrac{v}{32}$ en la ecuación para $s(t)$ conseguimos la distancia máxima,

$$\begin{array}{rcl} s\left(\dfrac{v}{32}\right) & = & -16\left(\dfrac{v}{32}\right)^2 + v\left(\dfrac{v}{32}\right) \\ & = & -\dfrac{v^2}{64} + \dfrac{v^2}{32} \\ & = & \dfrac{v^2}{64}. \end{array}$$

La velocidad en la altura máxima será:

$$s'\left(\frac{v}{32}\right) = -\frac{32v}{32} + v = 0.$$

La aceleración en la altura máxima será:

$$s''\left(\frac{v}{32}\right) = -32.$$

Para encontrar el momento en el que el peso vuelve a tocar el suelo, sea $s(t) = 0$, es decir

$$-16t^2 + vt = 0.$$

de donde,

$$t(-16t + v) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{v}{16}.$$

Por lo tanto el peso tocará el suelo de nuevo en

$$t = \frac{v}{16}.$$

33. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad v y según un ángulo a (Figura 32) de modo que su componente vertical de velocidad es $v \operatorname{sen} \alpha$ y la componente horizontal $v \cos \alpha$. Su distancia $s(t)$ sobre el nivel del suelo obedece a la ley $s(t) = -16t^2 + (v \operatorname{sen} \alpha)t$, mientras que su velocidad horizontal se mantiene con el valor constante $v \cos \alpha$.

(a) Demuestre que la trayectoria de la bala es una parábola (halle la posición para cada tiempo t, y demuestre que estos puntos están sobre una parábola).

Demostración.- Sea x el desplazamiento horizontal en el tiempo t, entonces

$$x = (v\cos\alpha)t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\alpha}.$$

Dado que la distancia vertical sobre el suelo es,

$$s(t9 = -16t^2 + (v\,\mathrm{sen}\,\alpha)t.$$

Reemplazando t con $\dfrac{x}{v\cos\alpha}$, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} s(t) & = & -16\left(\dfrac{x}{v\cos\alpha}\right)^2 + (v\,\mathrm{sen}\,\alpha)\left(\dfrac{x}{v\cos\alpha}\right) \\ & = & -\dfrac{16}{v^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x. \end{array}$$

El cual tiene la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

Lo que $-\dfrac{16}{v^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$ representa una parábola.

(b) Halle el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.

Respuesta.- La distancia horizontal x viene dado por:

$$x = (v\cos\alpha)t.$$

Diferenciando ambos lados con respecto a α, obtenemos:

$$x' = -(v\,\mathrm{sen}\,\alpha)t.$$

Para poder minimizar la distancia horizontal, igualemos $x' = 0$,

$$\begin{array}{rcl} -(v\,\mathrm{sen}\,\alpha)t & = & 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha & = & 0 \\ \alpha & = & 0. \end{array}$$

34. (a) Dé un ejemplo de una función f para la cual exista el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, pero no exista el $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

Respuesta.- Sea

$$f(x) = \frac{\mathrm{sen}\left(x^2\right)}{x}.$$

De donde,

$$\lim_{x\to infty} f(x) = 0,$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{2x^2\,\mathrm{sen}\left(x^2\right) - \mathrm{sen}\left(x^2\right)}{x^2} \\ & = & 2\,\mathrm{sen}\left(x^2\right) - \dfrac{\mathrm{sen}\left(x^2\right)}{x^2}. \end{array}$$

pero, $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ no existe.

(b) Demuestre que si existen el $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y el $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Demostración.- Sea f una función diferenciable tales que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existe. Entonces se tiene que mostrar que
$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$
Sea $\lim_{x\to\infty} f'(x) = a$. Entonces, por la definición de límite, tenemos que existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$
$$|f'(x) - a| < \frac{|a|}{2},$$
el cual es equivalente a
$$-\frac{|a|}{2} < f'(x) - a < \frac{|a|}{2}, \quad \text{para todo } n \geq N.$$
Ahora, sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > N$. Entonces usando el teorema del valor medio para f en el intervalo $[N, y]$ obtenemos que existe un número real $x_0 \in [N, y]$ tal que
$$f(y) - f(N) = f'(x_0)(y - N),$$
lo que implica que
$$f(y) = f(N) + f'(x_0)(y - N) > f(N) + \left(a - \frac{|a|}{2}\right)(y - N).$$
Ahora, la desigualdad anterior se cumple para todo $y > N$. Así, como $y \to \infty$, $f(y)$ se vuelve sin límites si $a \neq 0$. Por lo tanto, $\lim_{y\to\infty}$ no existe si $a \neq 0$. A partir de la hipótesis tenemos que $\lim_{y\to\infty} f(y)$ existe, de donde concluimos que $a = 0$. Lo que complementa la demostración.

(c) Demuestre que si existe el $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y existe el $\lim_{x\to\infty} f''(x)$, entonces el $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$. (Vea también el problema 20-22).

Demostración.- Sea f una función diferenciable tales que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f''(x)$ existe. Entonces, tenemos que demostrar que
$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0.$$
Luego, asumamos que
$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$
Por la parte (b) tenemos que existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$f'(x) > f'(N) + \left(a - \frac{|a|}{2}\right)(x - N), \text{ para todo } x > N.$$
Esto muestra que
$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty.$$
Si $a \neq 0$. Por el teorema del valor medio para f en el intervalo $[0, x]$ con $x \in \mathbb{R}$ y $x > N$ obtenemos
$$f(x) - f(0) = f'(x_0)x, \text{ para algún } x_0 \in [0, x].$$
Lo que implica,
$$f(x) = f(0) + f'(x_0)x, \text{ para algún } x_0 \in [0, x],$$

lo que a su vez se tiene

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + f'(x_0) \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

Pero esto contradice nuestra hipótesis en f'. Así tenemos que $a = 0$, lo que completa la demostración.

35. Suponga que f y g son dos funciones diferenciables que satisfacen $fg' - f'g = 0$. Demuestre que si $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo x de un intervalo alrededor de a. Indicación: Demuestre que en cualquier intervalo en el que f/g esté definida, es constante.

Demostración.- Para cualquier intervalo en el que se defina f/g, se tiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Por el hecho de que $fg' - f'g = 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = 0.$$

Por lo tanto, f/g es constante.

36. Suponga que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^n$ para $n > 1$. Demuestre que f es constante considerando f'. Compare con el problema 3.20.

Demostración.- Ya que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^n$ para $n > 1$, entonces

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^{n-1}, \text{ para } n > 1.$$

Lo que equivale a

$$0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^m \text{ para } m > 0.$$

Luego notemos que

$$\lim_{x\to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = 0.$$

Ya que, la función es continua, entonces

$$\left| \lim_{y\to x} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| = 0.$$

Lo que implica que

$$\lim_{y\to x} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = 0.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = 0.$$

37. Una función f es Lipschitz de orden α en x si existe una constante C tal que

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

para todo y de un intervalo alrededor de x. La función f de Lipschitz de orden α en un intervalo si $(*)$ se verifica para todo x e y del intervalo.

(a) Si f es Lipzchitz de orden $\alpha > 0$ en x, entonces f es continua en x.

Demostración.- Ya que f es una función de Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x. Por definición, existe un $\delta' > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \text{ para todo } y \in (x-\delta', x+\delta') \qquad (1)$$

para alguna constante $C \geq 0$ (dado que $|f(x) - f(y)|,\ |x-y| \geq 0$). Sea $\epsilon > 0$, entonces tomamos $0 < \delta < \frac{1}{2} \min \left\{ \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \delta' \right\}$. Por (1) ya que $\delta < \delta'$, tenemos en $y \in (x-\delta, x+\delta)$, que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}. \qquad (2)$$

Además, vemos que si $y \in (x-\delta, x+\delta)$, entonces

$$|x-y| < 2\delta < 2\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Por lo tanto, por (2) tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} < C\left[\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} = \epsilon.$$

Esto muestra que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ cuando } |x-y| < \delta.$$

Así, f es continua en x.

(b) Si f es Lipzchitz de orden $\alpha > 0$ en un intervalo, entonces f es uniformemente continua en este intervalo. (Vea el Capítulo 8, Apéndice.)

Demostración.- Sea $\epsilon > 0$. Entonces tomemos $0 < \delta < \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Ahora ya que f es Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en $[a,b]$ tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \text{ para todo } x, y \in [a,b]. \qquad (3)$$

Luego, sea x, y cualesquiera puntos en $[a,b]$ tal que $|x-y| < \delta$. Entonces, vemos por (3), que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} < C\delta^{\alpha} < C\left[\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} = \epsilon,$$

siempre que $|x-y| < \delta$. Así, f es uniformemente continua en $[a,b]$.

(c) Si f es diferenciable en x, entonces f es Lipzchitz de orden 1 en x. ¿Es cierta la recíproca?.

Demostración.- Como f es una función diferenciable en x. Entonces, por definición de diferenciabilidad

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = l, \text{ para algún } l \in \mathbb{R}.$$

Después, por definición de límite, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} - l \right| < \epsilon \text{ siempre que } |x-y| < \delta.$$

Luego, por la desigualdad triangular

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x)\right| \geq \left|\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| - |f'(x)|\right|.$$

Por tanto,

$$\left|\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| - |f'(x)|\right| < \epsilon \text{ siempre que } |x-y| < \delta.$$

De ello, se tiene que si $|x-y| < \delta$, entonces

$$\sqrt{\left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| - |f'(x)|\right)^2} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| - |f'(x)| < \sqrt{\epsilon^2} = |\epsilon| = \epsilon.$$

Lo que implica

$$|f(x)-f(y)| < \big(|f'(x)| + \epsilon\big)\,|x-y| \text{ siempre que } |x-y| < \delta.$$

Ahora, sea $C \geq (|f'(x)| + \epsilon)$, de donde

$$|f(x)-f(y)| < C|x-y| \text{ siempre que } |x-y| < \delta,$$

por lo tanto, f es Lipschitz de orden 1 en x.
El recíproco no es cierto. Por ejemplo se puede tomar la función $f(x) = |x|$. Entonces f es Lipschitz de orden 1 en cualquier punto x, ya que

$$|f(x)-f(y)| = ||x|-|y|| \leq |x-y|,$$

donde la última desigualdad se cumple a partir de la desigualdad triangular. Pero f no es diferenciable en 0.

(d) Si f es diferenciable en $[a,b]$. ¿es f Lipschiz de orden 1 en $[a,b]$?.

Respuesta.- Si f es diferenciable en $[a,b]$, entonces f puede no ser Lipschitz de orden 1 en $[a,b]$. Por ejemplo, sea

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}.$$

Podemos observar que f es diferenciable en $[0,1]$, pero no es Lipschitz de orden 1 en $[0,1]$.

(e) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en $[a,b]$, entonces f es constante en $[a,b]$.

Demostración.- Sea f una función Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en $[a,b]$. Entonces,tenemos que mostrar que f es constante en $[a,b]$. Por definición de función Lipschitz se tiene,

$$|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \text{ para todo } x,y \in [a,b]$$

con $C \geq 0$ constante. Como $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^\alpha$ para $\alpha > 1$ tenemos

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^{\alpha-1}, \text{ para } \alpha > 1$$

Que equivale a,

$$0 \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^\beta, \text{ para } \beta > 0.$$

Del problema 13 del capítulo 5 de Spivak,

$$\lim_{y\to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = 0.$$

De donde,

$$\left| \lim_{y\to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = 0,$$

lo que implica

$$\lim_{y\to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = 0$$

y f es una función constante.

38. Demuestre que si

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

entonces

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

para algún x de $(0,1)$.

Demostración.- Consideremos la función $f : (0,1) \to (0,1)$ definida por:

$$f(x) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Entonces, vemos que al ser una función polinomial f es diferenciable en $(0,1)$. Es más,

$$f(0) = 0 = f(1) = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1}.$$

Donde la última igualdad se cumple a partir de la hipótesis. Así, aplicando el teorema de Rolle a f en $(0,1)$ se tiene

$$f'(x) = 0$$

para algún $x \in (0,1)$. Ahora bien, calculamos que

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Lo que completa la demostración.

39. Demuestre que, cualquiera que sea m, la función polinómica $f_m(x) = x3 - 3x + m$ no tiene nunca dos raíces en $[0,1]$.(Esto es una consecuencia fácil del Teorema de Rolle. Resulta instructivo, una vez efectuada la demostración analítica, trace las gráficas de f_0 y f_1, y considerar la posición de la gráfica de f_m en relación con ellas.)

Demostración.- Supongamos que f_m tiene dos raíces in $[0,1]$, digamos x_0 y x_1 con $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$. Entonces se tiene,

$$f_m(x_0) = f_m(x_1) = 0.$$

Además, f_m es diferenciable en $[0,1]$. Aplicando el teorema de Rolle, vemos que existe $x \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f_m'(x) = 0.$$

Ya que, $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$ tenemos $x \in (0,1)$. Ahora, calculamos $f_m'(x)$ de donde,

$$f_m'(x) = 3x^2 - 2 = 3\left(x_2 - 1\right),$$

lo que implica que $f_m'(x) = 0$, si y sólo si $x = \pm 1$. Pero esto contradice la conclusión de que $x \in (0,1)$. Por lo tanto, la función polinómica $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene dos raíces en $[0,1]$.

40. Suponga que f es continua y diferenciable en $[0,1]$, que $f(x)$ está en $[0,1]$ para cada x, y que $f(x) \neq 1$ para todo x de $[0,1]$. Demuestre que existe exactamente un número x en $[0,1]$ tal que $f(x) = x$. (La mitad de este problema ya ha sido resuelta en el Problema 7-11.)

Demostración.- Suponga que existe dos números, x_1 y x_2, en $[0,1]$ tal que $f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = x_2$. Luego, consideremos la función $g : [0,1] \to [0,1]$ definido por la fórmula

$$g(x) = f(x) - x.$$

Entonces, vemos que g es también diferenciable en $[0,1]$, ya que, tanto la función identidad como f lo son. Además,

$$g(x_i) = f(x_i) - x_i = x_i - x_i = 0$$

para $i = 1,2$. Así, por el teorema de Rolle, existe un número $x \in (x_1, x_2)$ tal que

$$g'(x) = 0.$$

Pero, esto implica que

$$f'(x) = 1$$

como,

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

el cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, mostramos que existe exactamente un número $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

41. (a) Demuestre que la función $f(x) = x^2 - \cos x$ satisface $f(x) = 0$ para exactamente dos números x.

Demostración.- La función f tiene al menos dos ceros en $[-1,1]$, ya que $f(0) < 0$, mientras que $f(\pm 1) > 0$. Si f tuviese más de dos ceros, entonces f' podría tener al menos dos ceros. Pero

$$f'(x) = 2x + \operatorname{sen} x$$

es una función creciente, ya que

$$f''(x) = 2 + \cos x \geq 1$$

para todo x.

(b) Demuestre lo mismo para la función $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$.

Demostración.- La función f tiene al menos dos ceros ya que $f(0) < 0$ mientras $f(\pm) > 0$. Si f tiene más de dos ceros, entonces f' podría tener al menos dos ceros. Pero

$$f'(x) = 2x - x\cos x = x(2 - \cos x)$$

es 0 sólo para $x = 0$.

(c) Demuéstrelo también para la función $f(x) = 2x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos^2 x$. (Será útil hacer algunas estimaciones preliminares para restringir la posible localización de los ceros de f.)

Demostración.- Tenemos $f(0) < 0$, mientras $f(x)$ será > 0 para $|x|$ grande, ya que $|x \operatorname{sen} x|$ es pequeño en comparación con $2x^2$ y $|\cos^2 x| \leq 1$. De hecho, escribiendo

$$f(x) = 2x(2x - \operatorname{sen} x) - \cos^2 x,$$

y notando que $2x - \operatorname{sen} x > 1$ para $x > 1$, vemos que $f(x) > 0$ para $x > 1$, y también para $x < -1$, pues f es par. Así, f tiene por lo menos dos zeros en $[-1, 1]$, y sin ceros fuera de $[-1, 1]$. Si f tiene más de dos zeros, entonces f' podría tener dos ceros en $[-1, 1]$. Pero

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x - \operatorname{sen} x - x \cos x + 2 \cos x \operatorname{sen} x \\ &= 4x - \operatorname{sen} x - x \cos x + \operatorname{sen} 2x, \end{aligned}$$

lo que, es creciente en $[-1, 1]$, ya que

$$f''(x) = 4 - 2 \cos x + x \operatorname{sen} x + 2 \cos 2x$$

el cual, es ≥ 1 en $[-1, 1]$, donde $x \operatorname{sen} x > 0$ en $[-1, 1]$, mientras $|\cos x|, |\cos 2x| \leq 1$.

42. (a) Demuestre que si f es una función dos veces diferenciable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$, entonces $|f''(x)| \geq 4$ para algún x de $(0, 1)$. En términos más pintorescos: una partícula que recorre una distancia unidad en la unidad de tiempo,y empieza y termina con velocidad 0, tiene algún momento una aceleración ≥ 4. Indicación: Demuestre que o bien $f''(x) \geq 4$ para algún x de $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, o bien $f''(x) \leq -4$ para algún x de $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Demostración.- Suponga que $f''(x) < 4$ para todo $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Entonces, por el teorema de valor medio, para todo $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tenemos

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''\left(x'\right)$$

para algún $x' \in [0, x]$. Así $f'(x) < 4x$. Si establecemos $h(x) = 2x^2$, entonces $f(0) = h(0)$ y $f08x) < h'(x)$, y se sigue por el problema 30 que $f(x) < h(x)$ en $[0, \frac{1}{2}]$, por lo que $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$. El mismo tipo de análisis puede ser aplicado para f en $[\frac{1}{2}, 1]$, El cual mostraremos que si $f''(x) > -4$ en $[\frac{1}{2}, 1]$ entonces $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$, (o podemos considerar la función $f(x) = 1 - f(1 - x)$.). Es obvio que no podemos tener ambas posibilidades, por lo tanto $|f''(x)| \geq 4$ para $[0, 1]$.

(b) Demuestre que de hecho debe verificarse que $|f''(x)| > 4$ para algún x de $(0, 1)$.

Demostración.- Note primero que no podemos tener $f''(x) = 4$ para $0 < x < \frac{1}{2}$ y también $f''(x) = -4$ para $\frac{1}{2} < x \leq 1$, ya que esto podría implicar que $f'(x) = 4x$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $f'(x) = -4x$ para $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, en cuyo caso $f''(\frac{1}{2})$ podría no existir. Por otro lado, si tenemos $f''(x) \leq 4$ para todo x en $(0, \frac{1}{2})$ pero $f''(x) < 4$ para al menos un x, entonces tenemos $f'(x_0) < 3x_0$ para al menos un x_0, y en consecuencia $f(x) < 2x^2$ para todo $x \geq x_0$, así que $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$; si tuviéramos también $f''(x) \geq -4$ para todo x en $(\frac{1}{2}, 1)$, entonces $f(\frac{1}{2}) \geq \dfrac{1}{2}$, es una contrdicción.

43. Suponga que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y $f(1) = 0$. Demuestre que $f(xy) = f(x) - f(y)$ para todo $x, y > 0$. Indicación: Halle $g'(x)$ cuando $g(x) = f(xy)$.

Demostración.- Consideremos la función f definida como sigue:

$$g(x) = f(xy), \; y > 0.$$

Entonces, usando la regla de Leibniz vemos que

$$g'(x) = yf'(xy) = y\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} = f'(x).$$

Así, existe una constante c tal que

$$g(x) = f(x) + c$$

para todo $x > 0$. Luego, evaluamos en $x = 1$,

$$f(y) = g(1) = f(1) + c = c$$

Por lo tanto,

$$f(xy) = g(x) = f(x) + f(y)$$

para todo $x, y > 0$.

44. Suponga que f satisface

$$f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$$

para alguna función g. Demuestre que si f es 0 en dos puntos, entonces f es 0 en el intervalo entre ellos. Indicación: Utilice el teorema 6.

Demostración.- Por el teorema 6 (spivak, capítulo 11), si $x \in [x_0, y_1]$ es un máximo local, entonces $f''(x) = f(x) \leq 0$. Luego, si $x \in [x_0, x_1]$ es un mínimo local, entonces $f''8x) = f(x) \geq 0$, ya que $f'(x) = 0$. Ahora, suponga que existe un $x \in [x_0, x_1]$ tal que $f(x) \neq 0$. Entonces, $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$.

Caso 1. $[f(x) > 0]$ Observemos que si x no puede ser un punto máximo local. Esto implica que existe $x' \in [x_0, x_1)$ tal que x' es un máximo local y $f(x') > 0$ o existe $x'' \in (x, x_1]$ tal que x'' es un máximo local, y $f(x'') > 0$ ya que $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Pero no es posible, puesto que $f''(x') = f(x')$ y $f''(x'') = f(x'')$ por la ecuación dada. Por lo tanto, $f(x)$ no puede ser estrictamente positivo.

Caso 2. $[f(x) < 0]$ Similar al anterior caso, vemos que f no es estricamente negativa en $[x_0, x_1]$. Por cierto, vemos que x no puede ser un punto máximo local. Esto implica que que existe $x' \in [x_0, x)$ tal que x' es un mínimo local y $f(x') < 0$ o existe $x'' \in (x, x_1]$ tal que x'' es un mínimo local y $f(x'') < 0$, puesto que $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Pero no es posible, ya que $f''(x') = f(x')$ y $f''(x'') = f(x'')$, por la ecuación dada. Por lo tanto, $f(x)$ po es estrictamente positivo.

Así, $f(x) = 0$ para todo $x \in [x_0, x_1]$.

45. Suponga que f es continua en $[a, b]$, n-veces diferenciable en (a, b) y que $f(x) = 0$ para $n + 1$ puntos x diferentes de $[a, b]$. Demuestre que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x de (a, b).

Demostración.- Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ son los distintos $n + 1$ raíces de f en $[a, b]$. Entonces, notemos que

$$f(x_1) = 0, \quad x_i = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Ahora, consideremos que el conjunto de intervalos $\{[x, x_j] | 1 \leq i < j \leq n + 1\}$. Luego, f es diferenciable en todos los elementos del conjunto $\{[x_i, x_j] | 1 \leq i < j \leq n + 1\}$. Entonces, por el teorema del valor medio en cada intervalo $[x_i, x_j]$ para $1 \leq i < j \leq n+1$, existe un elemento $\alpha_i \in (x, x_j)$ para $1, 2, \ldots, n$ tal que

$$\frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} = f'(\alpha_i).$$

Se sigue que para cada intervalo $[x_i, x_j]$ existe α_i tal que

$$f'(\alpha_i) = 0, \text{ ya que } f(x_i) = 0 \text{ para cada } i.$$

Luego,

$$\alpha_i \in [a, b], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Este resulta que f' tiene n ceros distintos en $[a, b]$. De manera similar a lo anterior, supongamos que el conjunto de intervalo $\{[\alpha_i, \alpha_j] | 1 \leq i < j \leq n\}$. Entonces, por el teorema de valor medio en cada intervalo $[\alpha_i, \alpha_j]$ para $1 \leq i < j \leq n$, existe un elemento $\beta_i \in (\alpha_i, \alpha_j)$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ tal que

$$\frac{f'(\alpha_j) - f'(\alpha_i)}{\alpha_j - \alpha_i} = f''(\beta_i).$$

Se sigue que para cada intervalo $[\alpha_i, \alpha_j]$ existe β_i tal que

$$f''(\beta_i) = 0, \text{ ya que } f'(\alpha_i) = 0 \text{ para cada } i.$$

Luego,

$$\beta_i \in [a, b], \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Esto resulta que f'' tiene $n-1$ ceros distintos en $[a, b]$. Procediendo por dicho argumento hasta la derivada $n - sima$, de f, se sigue del principio de inducción que $f^{(n)}$ tiene al menos una raíz en $[a, b]$. Por el teorema del valor medio, se demuestra que

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ para algún } x \in [a, b].$$

46. Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ puntos arbitrarios del intervalo $[a, b]$, y sea

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i).$$

Suponga que f es una función $(n+1)$-veces diferenciable y que P es una función polinómica de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n+1$ (vea el problema 3-6). Demuestre que para cada x de $[a, b]$ existe un número c de (a, b) tal que

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indicación: Considere la función

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)].$$

Demuestre que F se anula en $n+2$ puntos diferentes de $[a, b]$ y utilices el problema 45.

Demostración.- Si x esta en x_i, entonces $f(x) - P(x) = Q(x)$, así podemos escoger cualquier c. Por otra parte, sea

$$F(t) = Q(x)\left[f(t) - P(t)\right] - Q(t)\left[f(x) - P(x)\right].$$

Entonces, para $i = 1, \ldots, n+1$ se tiene

$$F(x_i) = 0, \text{ ya que } f(x_i) - P_i = 0 \text{ y } Q(x_i) = 0,$$

como también

$$F(x) = 0.$$

Por el problema 45, tenemos $F^{(n+1)}(c) = 0$ para algún c en (a, b). Esto es,

$$0 = F^{(n+1)}(c) = Q(x)\left[f^{(n+1)}(c) - 0\right] - (n+1)!\,[f(x) - P(x)]\,.$$

47. Demuestre que

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$$

sin calcular con $\sqrt{66}$ con 2 cifras decimales.

Demostración.- Apliquemos el teorema del valor medio a $f(x) = \sqrt{x}$ en $[64, 66]$:

$$\frac{\sqrt{66} - \sqrt{64}}{66 - 64} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ para algún } x \text{ en } [64, 66].$$

Puesto que $64 < x < 81$, tenemos $0 < \sqrt{x} < 9$, por tanto

$$\frac{1}{2 \cdot 9} < \frac{\sqrt{66} - 8}{2} < \frac{1}{2 \cdot 8}.$$

48. Demuestre la siguiente generalización del Teorema del Valor Medio: si f es continua y diferenciable en (a, b) y $\lim\limits_{y \to a^+} f(y)$ y $\lim\limits_{y \to b^-} f(y)$ existen, entonces existe algún x de (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{\lim\limits_{y \to b^-} f(y) - \lim\limits_{y \to a^+} f(y)}{b - a}.$$

(La demostración debe empezar: esto es una consecuencia trivial del teorema del valor medio porque...).

Demostración.- Definamos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$g(y) = \begin{cases} \lim\limits_{y \to a^+} f(y) & \text{si} \quad y = a; \\ \\ f(y) & \text{si} \quad a < y < b; \\ \\ \lim\limits_{y \to b^-} f(y) & \text{si} \quad y = b. \end{cases}$$

Entonces, observamos que g es continua en $[a, b]$. En efecto, a partir de la definición de g tenemos que, para cualquier $\{y_n\}$ con $y_n \to a$, $g(y_n) \to g(a)$, y para cualquier secuencia $\{z_n\}$ con $z_n \to b$, $g(z_n) \to g(b)$. Por otro lado, si $y \in (a, b)$ entonces $g(y) = f(y)$ así g es continua en $[a, b]$. Además, como $g(y) = f(y)$ para todo $y \in (a, b)$, g es diferenciable en (a, b). Por lo tanto, por el teorema del valor medio existe un número $x \in (a, b)$ tal que

$$g'(x) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Pero, como $g(y) = f(y)$ para todo $y \in (a,b)$ tenemos por definición de $g(a)$ y $g(b)$ tenemos que

$$f'(x) = \frac{\lim\limits_{y\to b^-} f(y) - \lim\limits_{y\to a^+} f(y)}{b-a}.$$

49. Demuestre que la conclusión del teorema del Valor Medio de Cauchy puede escribirse en la forma

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo, además, que $g(b) \neq g(a)$ y que $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de (a,b).

Demostración.- Tenemos por el Teorema Medio de Cauchy que si f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b), entonces existe un número x tal que

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x) = [g(b)-g(a)]\,f'(x).$$

Ahora, si $g(b) \neq g(a)$ y $f'(x)$ y $g'(x)$ no son simultáneamente cero en (a,b), se sigue que ambos

$$\frac{1}{g(b)-g(a)} \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

están definidos. Así, por el teorema del valor medio tenemos podemos escribir,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Lo que completa la demostración.

50. Demuestre que si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b), y $g'(x) \neq 0$ para todo x de (a,b), entonces existe algún x en (a,b) con

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(b)-g(x)}.$$

Indicación: Multiplique en cruz para ver lo que esto realmente significa.

Respuesta.- Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$h(x) = f(x)g(b) + f(x)g(a) - f(x)g(x).$$

Entonces, por hipótesis, vemos que g es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Además

$$h(a) = f(a)g(b) + f(a)g(a) - f(a)g(a) = f(a)g(b),$$

y

$$f(b) = f(b)g(b) + f(b)g(a) - f(b)g(b) = f(a)g(b).$$

Así, $h(a) = h(b) = f(a)g(b)$. Luego, usando el teorema de Rolle para la función h, existe un número $x \in (a,b)$ tal que

$$h'(x) = 0.$$

Calculemos h':

$$h'(x) = f'(x)g(b) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$$

que implica,

$$f'(x)[g(b)-g(x)] = g'(x)[f(x)-f(a)].$$

Después, ya que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, se tiene que $g(b) \neq g(x)$ para $x \in (a,b)$. Por otro lado, si tenemos $x \in (a,b)$ tal que $g(x) = g(b)$ aplicando una vez más el teorema de Rolle, podría implicar que $g'(x) = 0$ para algún x in (x,b). Lo que contradice el hecho de que $g'(x) \neq 0$. Por lo que podemos escribir la ecuación de arriba como sigue,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(b)-g(x)}.$$

51. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la Regla de L'Hopital?:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

(El límite es, en realidad, -4).

Respuesta.- La regla de L'Hopital no es aplicable a la expresión

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2}$$

puesto que $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2+1 = 3+1 = 4 \neq 0$.

52. (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$.

Respuesta.- Dado que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1.$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Respuesta.-

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \\ &= -\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \\ &= -(2)^2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

53. Halle $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

y $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 17$.

Respuesta.- Ya que $g(0) = 0$ y g es diferenciable, vemos que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} h(x) = 0,$$

donde $h(x) = x$. Después, $h'(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{g'(x)}{h'(x)}$ existe. Luego, usando la regla de L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g'(0) = 0.$$

Por lo que, f es continua en 0. Ahora, calculemos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2}.$$

Sea $u(x) = x^2$, entonces

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} u(x) = 0.$$

De donde, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g'(x)}{u'(x)}$ existe ya que $u'(x) = 2x$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 0$. Una vez más usando la regla de L'Hopital, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x)}{2}.$$

La última igualdad se obtiene por la existencia de los $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, así como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g''(x)}{2}$. Por último, sabemos que $g''(0) = 17$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{g''(x)}{2} = \frac{17}{2}.$$

Así,

$$f'(0) = \frac{17}{2}.$$

54. Demuestre las siguientes formas de la Regla de L'Hopital (ninguna de ellas require un razonamiento esencialmente nuevo.)

(a) Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} = 0$ y $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ (y análogamente para límites por la izquierda).

Demostración.- Por la definición de límite notamos que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 \lim_{x\to a^+} g(x)$$

implica que:

i. existe un $\delta > 0$ tal que f' y g' existen en el intervalo $(a, a+\delta)$,
ii. además, $g'(x) \neq 0$ en $(a, a+\delta)$.

Supongamos, sin perdida de generalidad, que tanto f como g son continuas por la derecha en 0. De hecho, si f y g no fueran continuas en 0, entonces habríamos definido $f(a) = g(a) = 0$ cambiando los valores de $f(a)$ y $g(a)$ si fueran necesarios. Ahora aplicando los teoremas de valor medio y del valor medio de Cauchy para f y g en el intervalo $[a, x]$ para $x \in (a, a+\delta)$. Después notemos que $g(x) \neq 0$. Además, si $g(x) = 0$, entonces habría un número $x_1 \in (a, x)$ tal que $g'(x_1) = 0$ contradiciendo la propiedad ii. anterior. Luego aplicando el valor medio de Cauchy a f y g observamos que existe un número $c_x \in (a, x)$ tal que

$$[f(x) - f(a)]\, g'(c_x) = [g(x) - g(a)]\, f'(c_x),$$

que equivale a la ecuación

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Por último, vemos que a medida que x tiende a a también c_x tiende a a ya que $c_x \in (a, x)$. De lo que se deduce que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Así, tenemos

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{y\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

(b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (y análogamente para $-\infty$), o si se sustituye $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.

Demostración.- Demostremos que $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Por hipótesis se tiene,

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$$

implica que:

i. Existe un $\delta > 0$ tal que f' y g' existen en el intervalo $(a-\delta, a+\delta) | \{a\}$,
ii. además, en el mismo intervalo, es decir $(a-\delta, a+\delta) | \{a\}$, $g'(x) \neq 0$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que tanto f como g son continuas a la derecha en 0. De hecho si f y g no fueran continuas en 0, entonces habríamos definido $f(a) = g(a) = 0$ cambiando los valores de $f(a)$ y $g(a)$ si fuera necesario.
Ahora, aplicando el teorema de valor medio y el teorema del valor medio de Cauchy para f y g en el intervalo $[a, x]$ en $x \in (a, a+\delta)$. Notamos que $g(x) \neq 0$. Es más, si $g(x) = 0$, entonces podría existir un número $x_1 \in (a, x)$ tal que $g'(x_1) = 0$ contradiciendo la propiedad ii). Ahora aplicando el teorema de valor medio de Cauchy para f y g observamos que existe un número $c_x \in (a, x)$ tal que

$$[f(x) - f(a)]\, g'(c_x) = [g(x) - g(a)]\, f'(c_x)$$

lo que equivale a la ecuación

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Luego, vemos que como x tiende a a, c_x también tiende a a ya que $c_x \in (a, x)$. Entonces, se sigue que

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Así, tenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \infty.$$

Similarmente, tenemos para $x \in (a-\delta, a)$, que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \infty.$$

Esto completa la demostración de la primera parte. Ahora siguiendo el argumento de la parte (a), en este caso con $l = \infty$ uno puede obtener los otros casos.

(c) Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ (y análogamente para $-\infty$), Indicación: Considere $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right) g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Demostración.- Consideremos las funciones $\hat{f}(x)$ y $\hat{g}(x)$ definidas de la siguiente manera:

$$\hat{f}(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ y } \hat{g}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Notemos que como $x \to 0^+$, entonces $\dfrac{1}{x} \to \infty$. Así, tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \hat{f}(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} \hat{g}(x)$$

y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$ existe y es igual a l. Por lo tanto, aplicando la parte (a) para $\hat{f}$ y $\hat{g}$, se tiene

$$\lim_{x\to^+} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = l.$$

Lo que implica que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = l.$$

El caso para $-\infty$ es análogo.

(d) Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \infty$.

Demostración.- Consideremos las funciones $\hat{f}$ y $hatg$ definidas por:

$$\hat{f}(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{y} \quad \hat{g}(x) = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Entonces, notemos que $x \to 0^+$, por lo que $\dfrac{1}{x} \to \infty$. Así, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \hat{f}(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} \hat{g}(x)$$

y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\hat{f}'(x)}{\hat{g}'(x)} = \infty$. Por lo tanto, aplicando (b) a $\hat{f}$ y $\hat{g}$ se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \infty.$$

Lo que implica,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\hat{g}(x)}{\hat{f}(x)} = \infty.$$

55. Existe otra forma de la Regla de L'Hopital que exige más manipulaciones algebraicas: Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)(g'(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = l$. Demuéstrelo de la manera siguiente:

(a) Para todo $\epsilon > 0$ existe un número a tal que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \epsilon \quad \text{para } x > a.$$

Aplique el Teorema del Valor Medio de Cauchy a f y g en $[a, x]$ para demostrar que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| z\epsilon \quad \text{para } x > a.$$

Demostración.- Sea ϵ tal que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, existe un número positivo a de modo que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \epsilon \quad \text{para } x > a.$$

Ahora, sea $c \in (a, \infty)$. Entonces, tenemos $a < c < \infty$. Luego, notemos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x > a$. Por el teorema de valor medio se sigue que $g(x) \neq g(a)$ para todo $x > a$.
Consideremos la función $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$h(x) = \frac{1 - \dfrac{f(a)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(a)}{g(x}}, \quad \text{para } x \in [a, c].$$

Note que,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1 - \dfrac{f(a)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(a)}{g(x)}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Esto ya que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Por lo tanto, existe $d \in [a, c]$ tal que

$$1 - \epsilon < h(x) < 1 - \epsilon, \quad \forall x \in [a, c].$$

Se sigue que

$$\frac{1}{2} < h(x) < \frac{3}{2}, \quad \forall x \in [ac].$$

Después, vemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{1}{h(x)}, \quad \forall x \in [a, c].$$

Aplicando el teorema de valor medio de Cauchy a f y g en $[a, c]$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)}, \quad \text{para algún } X_x \in (a, c)$$

Sabemos que X_x depende de x. Así,

$$X_x \to \infty \text{ cuando } x \to \infty.$$

Dado que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} = l.$$

Por último, como c es arbitraria mayor a a, entonces por definición de limite tenemos que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l \right| < \epsilon, \quad \text{para } x > a.$$

(b) Escriba ahora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)}$$

(¿por qué se puede suponer que $f(x) - f(a) \neq 0$? para x grandes?) y deduzca que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < 2\epsilon \quad \text{para } x \text{ suficientemente grandes.}$$

Demostración.- Notemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Entonces, existe un número positivo M tal que

$$f(x) > M, \quad \forall x.$$

Recordemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} \cdot \frac{1}{h(x)}, \quad \forall x \in [a, c].$$

Dado que,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} \cdot \frac{1}{h(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{h(x)} \\
&= l,
\end{aligned}$$

ya que, $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(X_x)}{g'(X_x)} = l$. Entonces, por la definición de límite, para cada $\epsilon > 0$ tenemos

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < 2\epsilon, \quad \text{para cada } x \text{ grande.}$$

56. Para completar la orgía de variantes de la regla de L'Hópital, aplicar el Problema 55 para demostrar unos cuantos casos más de la siguiente proposición general (existen tantas posibilidades que el lector debe seleccionar aquellas, si las hay, que sean de su interés): Si $\lim\limits_{x\to[]} f(x) = \lim\limits_{x\to[]}$ y $\lim\limits_{x\to[]} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = ()$, entonces $\lim\limits_{x\to[]} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ()$. Aquí $[]$ puede ser a ó a^+ ó a^- ó $-\infty$, $\{\}$ puede ser 0 ó ∞ ó $-\infty$ y $()$ puede ser l ó ∞ ó $-\infty$.

Respuesta.- Si $\lim\limits_{x\to[\infty]} f(x) = \lim\limits_{x\to[\infty]}$ y $\lim\limits_{x\to[\infty]} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = (a)$, entonces $\lim\limits_{x\to[\infty]} \dfrac{f(x)}{g(x)} = (a)$.

57. Si f y g son diferenciables y existe el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ¿puede concluirse que también existe el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$? (se trata del recíproco de la Regla de L'Hopital).

Respuesta.- No, por ejemplo, sea $a = 0$, $g(x) = x$, de donde

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0. \end{array} \right.$$

58. Demuestre que si f' es creciente, entonces toda tangente de f corta a la gráfica de f una sola vez. (En particular, esto se cumple en el caso de la función $f(x) = x^n$ si n es par.)

Demostración.- La linea tangente a través de $(a, f(a))$ es la gráfica de

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & f'(a)(x-a) + f(a) \\ \\ & = & f'(a)x + f(a) + af'(a). \end{array}$$

Si $g(x_o) = f(x_o)$ para algún $x_0 \neq a$, entonces

$$0 = g'(x) - f'(x) = f'(a) - f'(x)$$

para algún x en (a, x_o) o (x_o, a). Lo que es imposible, ya que f' es creciente.

59. Resuelva otra vez el problema 10-18 (c) cuando

$$(f')^2 = f - \frac{1}{f^2}.$$

(¿Por qué está este problema en este capítulo?).

Respuesta.- Diferenciando la expresión se tiene

$$\begin{array}{rcl} (f')^2 & = & f - \dfrac{1}{f^2} \\ \\ 2f' \cdot f'' & = & f' - \dfrac{2}{f^3} \cdot f' \\ \\ f'' & = & \dfrac{f' - \dfrac{2}{f^3} \cdot f'}{2f'} \\ \\ f'' & = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{f^3}. \end{array}$$

para todo x donde $f'(x) \neq 0$. Luego, ya que $(f')^2 = \dfrac{f^3-1}{f^2}$, tenemos $f'(x) = 0$ solo para $f(x) = 1$. Pero el teorema 7 (aplicando f') implica que las formula vale en este caso, con $f''(x) = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$.

60. (a) Suponga que f es diferenciable en $[a,b]$. Demuestre que si el mínimo de f en $[a,b]$ se encuentra en el punto a, entonces $f'(a) \geq 0$, y si se encuentra en el punto b, entonces $f'(b) \leq 0$. (Deberá examinarse la mitad de la demostración del Teorema 1.)

Demostración.- Ya que f tiene un mínimo en a, tenemos para todo $h > 0$, que

$$f(a+h) - f(a) \geq 0$$

lo que equivale a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0.$$

De donde, tomamos el límite cuando $h \to 0^-$ y obtenemos

$$f'(a) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0.$$

Ya que f tiene un mínimo en b, tenemos para todo $h > 0$, que

$$f(b-h) - f(b) \leq 0$$

lo que equivale a

$$\frac{f(b-h)-f(b)}{h} \leq 0.$$

Por lo que tomando el límite cuando $h \to 0^+$ obtenemos

$$f'(b) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(b-h)-f(b)}{h} \leq 0.$$

(b) Suponga que $f'(a) < 0$ y que $f'(b) > 0$. Demuestre que $f'(x) = 0$ para algún x de (a,b). Indicación: Considere el mínimo de f en $[a,b]$; ¿por qué debe estar en algún punto de (a,b)?.

Demostración.- Ya que f es diferenciable en $[a,b]$, entonces f es diferenciable ahí. Por lo tanto, f tiene que estar acotado, lo que implica que hay un número $x \in [a,b]$ tal que $f(x)$ es el mínimo en $[a,b]$. Pero por la parte (a) vemos que f no puede tener un mínimo en a o b, de lo contrario contradice la hipótesis. Entonces, el mínimo de f debe estar en (a,b); es decir, existe un número $x \in (a,b)$ tal que $f(x)$ es el mínimo. Por lo que tenemos

$$f'(x) = 0.$$

(c) Demuestre que si $f'(a) < c < f'(b)$, entonces $f'(x) = c$ para algún x de (a,b). (Este resultado se conoce como el Teorema de Darboux. Advierta que no estamos suponiendo que f' sea continua). Indicación: Construya una función adecuada a la cual se pueda aplicar la parte (b).

Demostración.- Sea la función

$$g(t) = f(t) - ct,$$

Entonces, ya que f es diferenciable en $[a,b]$,

$$g'(t) = f'(t) - c.$$

Por lo tanto, se tiene
$$g'(a) = f(a) - c < 0 \quad \text{y} \quad g'(b)f'(b) - c > 0.$$
Ahora, aplicando la parte (b) para la función g, vemos que existe un número $x \in (a,b)$ tal que
$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) - c = 0.$$
Así, tenemos que $f'(x) = c$ para algún $x \in (a,b)$.

61. Suponga que f es diferenciable en algún intervalo que contiene a pero que f' es discontinua en a. Demuestre lo siguiente:

(a) Ambos límites laterales $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ no pueden existir. (Se trata de una pequeña variación del Teorema 7.)

Demostración.- Sea (x_1, x_2) alrededor de a donde f es diferenciable. Demostraremos que $\lim\limits_{x\to a^+}$ y $\lim\limits_{x\to a^-}$ no existen. Sean
$$\lim_{x\to a^-} f'(x) = l_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f'(x) = l_2.$$
Primero probaremos que $f'(a) = l_1$. Si es posible supongamos $l_1 \neq f'(a)$

Caso 1. Tomemos $l_1 < f'(a)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que
$$l_1 - \epsilon < f'(a).$$
Ya que, $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = l_1$ existe un $\delta > 0$ tal que
$$l_1 - \epsilon < f'(x) < l_1 + \epsilon, \quad \forall x \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2)$$
Luego, sea α un elemento de $x \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2)$. Entonces, tenemos
$$l_1 - \epsilon < f'(\alpha) < l_1 + \epsilon < f'(a).$$
Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un punto $\mathcal{X} \in (\alpha, a)$ de modo que
$$f'(\mathcal{X}) = l_1 + \epsilon.$$
Notemos que
$$\mathcal{X} \in (\alpha, a) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X} \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2).$$
Se sigue que
$$f'(\mathcal{X}) < l_1 + \epsilon.$$
Lo que es imposible. Por lo tanto, $l_1 = f'(a)$.

Caso 2. Tomemos $l_1 > f'(a)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que
$$l_1 - \epsilon > f'(a).$$
Ya que $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = l_1$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que
$$l_1 - \epsilon < f'(x) < l_1 + \epsilon, \quad \forall x \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2).$$
Luego, sea β un elemento de $x \in (a-\delta, a) \cap (x_1, x_2)$. Entonces, tenemos
$$f'(a) < l_1 - \epsilon < f'(\beta).$$

Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un punto $\mathcal{X} \in (\alpha, a)$ de modo que

$$f'(\mathcal{X}) = l_1 - \epsilon.$$

Notemos que

$$\mathcal{X} \in (\beta, a) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X} \in (a - \delta, a) \cap (x_1, x_2).$$

Se sigue que

$$f'(\mathcal{X}) > l_1 - \epsilon.$$

Lo que es imposible. Así, de los dos casos se sigue que

$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = f'(a) = l_1.$$

Ahora demostraremos que $f'(a) = l_2$. Supongamos $l_2 \neq f'(a)$.

Caso 1. Tomemos $l_2 < f'(a)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$l_2 + \epsilon < f'(a).$$

Ya que $\lim_{x \to a^+} f'(x) = l_2$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$l_2 - \epsilon < f'(x) < l_2 + \epsilon, \quad \forall x \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2).$$

Luego, sea α un elemento de $x \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2)$. Entonces, tenemos

$$l_2 - \epsilon < f'(\alpha) < l_2 + \epsilon < f'(a).$$

Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un punto $\mathcal{X} \in (a, \alpha)$ de modo que

$$f'(\mathcal{X}) = l_2 + \epsilon.$$

Pero, notemos que

$$\mathcal{X} \in (a, \alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X} \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2).$$

De donde, se sigue que

$$f'(\mathcal{X}) < l_2 + \epsilon.$$

Lo que es imposible. Por lo tanto, $l_2 < f'(a)$ es erróneo.

Caso 2. Tomemos $l_2 > f'(a)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$l_2 - \epsilon > f'(a).$$

Ya que $\lim_{x \to a^+} f'(x) = l_2$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$l_2 - \epsilon < f'(x) < l_2 + \epsilon, \quad \forall x \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2).$$

Luego, sea β un elemento de $x \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2)$. Entonces, tenemos

$$f'(a) < l_2 - \epsilon < f'(\beta).$$

Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un punto $\mathcal{X} \in (a, \beta)$ de modo que

$$f'(\mathcal{X}) = l_2 - \epsilon.$$

Pero, notemos que

$$\mathcal{X} \in (a, \beta) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X} \in (a, a + \delta) \cap (x_1, x_2).$$

De donde, se sigue que
$$f'(\mathcal{X}) > l_2 - \epsilon.$$
Lo que es imposible. Así, de los dos casos se sigue que
$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = f'(a) = l_2.$$
En consecuencia tenemos
$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = f'(a).$$
Se sigue que f' es continua en el punto a, lo que contradice la hipótesis. Así, nuestra suposición de que el límite de ambos lados existe es incorrecta . Que implica que $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ no existen.

(b) Ambos límites laterales no pueden existir incluso si se acepta que puedan tener valores iguales $a + \infty$ o $-\infty$. Indicación: Utilice el teorema de Darboux (Problema 60).

Demostración.- Supongamos que el límite de f' a ambos lados existe en el punto $a$si los valores se toman como infinitos; es decir, sin pérdida de generalidad. Supongamos
$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \infty \quad \text{y} \lim_{x\to a^-} f'(x) = -\infty.$$
y $f'(a) \neq 0$. Luego, sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe un $\delta > 0$ y un número positivo M tal que
$$\begin{array}{lcrl} f'(x) & > & M & \forall x \in (a, a+\delta) \\ f'(x) & < & -M & \forall x \in (a-\delta, a) \end{array}$$
Luego, consideremos dos elementos α y β de modo que
$$a \in (a, a+\delta) \quad \text{y} \quad \beta \in (a-\delta, a).$$
Entonces, se tiene
$$f'(a) > M \quad \text{y} \quad f'(\beta) < -M.$$
Después, sea $[\beta, \alpha]$ donde
$$f'(\beta) < 0 < f'(\alpha).$$
Por el teorema de Darboux (Problema 60). Existe un elemento $z \in [\beta, \alpha]$ de modo que
$$f'(z) = 0.$$
Pero, vemos que
$$\left|f'(x)\right| > 0 \; \forall x \in [\beta, \alpha] \text{ donde } f'(a) \neq 0.$$
Así, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, nuestra suposición de que tanto el límite lateral de f' en el punto a existe, está erróneo.

62. Es fácil encontrar una función f tal que $|f|$ sea diferenciable sin serlo f. Por ejemplo, podemos elegir $f(x) = 1$ para x racional y $f(x) = -1$ para x irracional. En este ejemplo f no es ni siquiera continua y esto no es una merca coincidencia. Demuestre que si $|f|$ es diferenciable en a y f es continua en a, entonces f es también diferenciable en a. Indicación: Basta considerar solamente a con $f(a) = 0$. ¿Por qué? En este caso, ¿cómo debe ser $|f|'(a)$?.

Demostración.- Sea a cualquier punto en el dominio de la definición de f. Entonces, también $f(a) = 0$ o $f(a) \neq 0$. Supongamos que $f(a) \neq 0$. Entonces, por continuidad de f tenemos que existe un $\delta > 0$

tal que en $(a-\delta, a+\delta)$, f es $|f|$ o $-|f|$. Ya que $|f|$ es diferenciable en ambos casos, f tiene que ser diferenciable. Así, tenemos que $f(a)=0$.
Ahora, si $f(a)=0$, entonces $|f|(a)=0$; lo que implica que a es el punto mínimo para $|f|$. Ya que $|f|$ es diferenciable tenemos
$$|f|'(a)=0.$$
Lo que implica por definición de diferenciablidad que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)|}{h} \qquad\qquad \text{ya que } f(a)=0 \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{h}. \end{aligned}$$

Luego, $f'(a)$ existe y es igual a cero.

63. (a) Sea $y\neq 0$ y sea n par. Demuestre que $x^n+y^n=(x+y)^n$ solamente cuando $x=0$. Indicación: Si $x_0^n+y^n=(x_0+y)^n$, aplicar el Teorema de Rolle a $f(x)=x^n+y^n-(x+y)^n$ en $[0,x_0]$.

Demostración.- Notemos que

$$f(0)=y^n+y^n=0, \text{ y } f(x_0)=x_0^n+y^n-(x+y)^n=0$$

donde se cumple la segunda ecuación de nuestra hipótesis. Además, f es diferenciable en $[0,x_0]$ o en $[x_0.0]$. Aplicando el Teorema de Rolle para la función f, tenemos que existe un número $x_1\in(0,x_0)$ o en $(x_0,0)$ tal que
$$f'(x_1)=0.$$
Calculando se tiene
$$f'(x)=nx^{n-1}-n(x+y)^{n-1}.$$
Por lo tanto, para x_1 se tiene

$$f'(x_1)=n\left[x_1^{n-1}-(x_1+y)^{n-1}\right]=0$$

lo que equivale a
$$x_1^{n-1}=(x_1+y)^{n-1}.$$
Pero como n es par, $n-1$ es impar, por lo que

$$x_1=x_1+y$$

lo que implica que $y=0$; esto contradice la hipótesis. Así, x tiene que ser 0 para que $X^n+y^n=(x+y)^n$.

(b) Demuestre que si $y\neq 0$ y n es impar, entonces $x^n+y^n=(x+y)^n$ sólo si $x=0$ ó $x=-y$.

Demostración.- Supongamos que $x\neq 0$ y

$$x^n+y^n=(x+y)^n.$$

Entonces, tenemos que demostrar que $x=-y$. Consideremos la función f definida en $[0,x_0]$, como sigue:
$$f(x)=x^n+y^n-(x+y)^n.$$

Por la parte (a), sabemos que $f(0) = 0$, $f(x_0) = 0$ y que

$$f(-y) = -y^n + y^n(y-y)^n = 0,$$

donde se cumple la segunda igualdad, ya que n es impar. Luego, aplicando el Teorema de Rolle para la función f tenemos que existen $x_1 \in (-y, 0)$ y $x_2 \in (0, x_0)$ tal que

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0.$$

Calculando se tiene

$$f'(x) = nx^{n-1} - n(x+y)^{n-1}.$$

Por lo tanto, para x_1 y x_2 se tiene

$$f'(x_1) = n\left[x_1^{n-1} - (x_1+y)^{n-1}\right] = 0$$

y

$$f'(x_2) = n\left[x_2^{n-1} - (x_2+y)^{n-1}\right] = 0.$$

Pero como n es impar, por el problema 6(d) del capítulo 1 tenemos que $x_j = x_j + y$ o $x_j = -(x_j + y)$ con $j = 1, 2$. Después, por el hecho de que $y \neq 0$, $x_j \neq x_j + y$; debemos tener $x_j = -(x_j + y)$ para $j = 1, 2$. Así, $x_1 = x_2$, lo que implica que $x_0 = -y$.

64. Suponga que $f(0) = 0$ y que f' es creciente. Demuestre que la función $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ es creciente en $(0, \infty)$. Indicación: Evidentemente hay que considerar a $g'(x)$. Demuestre que es positiva aplicando el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo adecuado (será útil recordar que la hipótesis $f(0) = 0$ es esencial, como la demuestra la función $f(x) = 1 + x^2$).

Demostración.- calculemos $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

Ahora, para cualquier $x \in (0, \infty)$, aplicando el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo $[0, x]$ tenemos que existe un número $c_x \in (0, x)$ tal que

$$f(x) - f(0) = xf'(c_x).$$

Pero, por hipótesis tenemos que $f(0) = 0$ de donde

$$f(x) = xf'(c_x) < xf'(x)$$

esto ya que f' es creciente, $c_x < x$ y $x > 0$. Esto demuestra que

$$f(x) = xf'(c_x) < xf'(x)$$

lo que implica que que $g'(x) > 0$. Así, demostramos que $g'(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$ y g es creciente es dicho intervalo.

65. Utilice derivadas para demostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad \text{para } -1 < x < 0 \text{ y } 0 < x.$$

(Observe que la igualdad se cumple para $x = 0$).

Demostración.- Consideremos la función $g(x) = (1+x)^n - (1+nx)$. Entonces, notemos que $g(0) = 0$. Además, calculando la derivada vemos que

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n\left[(1+x)^{n-1} - 1\right]$$

Ahora, ya que $n-1 \geq 0$ vemos que para $x > 0$,

$$(1+x)^{n-1} - 1 > 0,$$

esto es, $g'(x) > 0$ para $x > 0$. Por otro lado, si $-1 < x < 0$, entonces $(1+x) < 1$ y por lo tanto

$$(1+x)^{n-1} < 1$$

lo que muestra que $g'(x) < 0$ en $-1 < x < 0$. Así, tenemos que g es creciente para $x > 0$ y decreciente en $-1 < x < 0$. Pero sabemos que $g(0) = 0$. Por lo que tenemos $g(x) > 0$ en $(0, \infty)$ y $f(x) < 0$ en $-1 < x < 0$. Es decir,

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad \text{para } -1 < x < 0 \text{ y } 0 < x.$$

66. Sea $f(x) = x^4 \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{2}$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$.

(a) Demuestre que 0 es un punto mínimo local de f.

Demostración.- Sea f un función no constante. Esto es, $f(a') = f(b')$ para algún $a' < b'$ en $[a, b]$. Para ser especifico, $f(a') < f(b')$. Por el problema 8-4(b)m existe $a' \leq c < d \leq b'$ con $f(c) = f(a') < f(b') = f(d)$ y $f(c) < f(x) < f(d)$ para todo $x \in (c, d)$. De donde a' no es un mínimo local para f.

(b) Demuestre que $f'(x) = f''(0) = 0$.

Demostración.- Calculemos $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} x^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} x^3 \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} x^2 \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, para demostrar que $f''(0) = 0$, con $x \neq 0$, que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} - x^4 \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \\
&= 4x^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} + x^2 \operatorname{sen} \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x} + x^2 \operatorname{sen} \dfrac{2}{x}}{x} = 0$$

Así, $f''(0) = 0$.

Esta función constituye otro ejemplo demostrativo de que el Teorema 6 no puede ser mejorado. También ilustra una sutileza acerca de los máximos y mínimos que frecuentemente pasa desaperci bida: una función puede no ser creciente en ningún intervalo a la derecha de un punto mínimo local ni tampoco decreciente en ningún intervalo a la izquierda.

67. (a) Demuestre que si $f'(a) > 0$ y f' es continua en a, entonces f es creciente en algún intervalo que contiene a a.

El comportamiento de f para $\alpha \geq 1$, que es mucho más difícil de analizar, se discute en el problema siguiente.

Demostración.- Ya que f' es continua y $f'(a) > 0$. Entonces, existe un intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ al rededor de a tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Luego, usando el corolario 3 del teorema de valor medio, se tiene que f es creciente en $(a-\epsilon, a+\epsilon)$.

Las dos partes siguientes de este problema demuestran que la continuidad de f' es esencial.

(b) Si $g(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$, demuestre que existen números x tan próximos como se quiere a 0 con $g'(x) = 1$ y también con $g'(x) = -1$.

Demostración.- Primero calculamos la derivada de g para algún $x \neq 0$.

$$g'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Así, $g'(x) = 1$ cuando $\cos \dfrac{1}{x} = -1$, al mismo tiempo vemos que $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$. Por lo tanto, $g'(x) = -1$ cuando $\cos \dfrac{1}{x} = 1$.

(c) Suponga que $0 < \alpha < 1$. Sea $f(x) = \alpha x + x^2 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. Demuestre que f no es creciente en ningún intervalo abierto que contenga a 0, probando que cualquiera de estos intervalos existen puntos x con $f'(x) > 0$ y también puntos x con $f'(x) < 0$.

Demostración.- Ya que $x \neq 0$, tenemos

$$f'(x) = \alpha + g'(x).$$

Por la parte (b) vemos que existe un punto x cerca de 0 tal que $g'(x) = 1$ y $g'(x) = -1$. Se sigue que existe un punto cercano a 0 tal que

$$f'(x) = \alpha + 1 > 0,$$

Ya que $0 < \alpha < 1$. También existe un punto x cerca de 0 tal que

$$f'8x) = \alpha - 1 < 0.$$

El comportamiento de f para $\alpha \geq 1$, que es mucho más difícil de analizar, se discute en el problema siguiente.

68. Sea $f(x) = ax + x^2 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. Para hallar el signo de $f'(x)$ cuando $a \geq 1$ es necesario decidir si $2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x$ es < -1 para cualquier número x próximo a 0. Resulta algo más conveniente considerar la función $g(y) = 2(\operatorname{sen} y)/y - \cos y$ para $y \neq 0$; queremos saber si $g(y) < -1$ Para valores grandes y. Esta cuestión es muy delicada; la parte más importante de $g(y)$ es $-\cos y$ que alcanza el valor 1 , pero esto ocurre solamente cuando $\operatorname{sen} y = 0$, y no está claro en absoluto si la misma g puede tener valores < -1. La manera evidente de abordar este problema es hallar los valores mínimos locales de g. Por desgracia, es imposible resolver explícitamente la ecuación $g'(y) = 0$ de manera que debe aguzarse el ingenio para encontrar otra solución.

(a) Demuestre que si $g'(y) = 0$, entonces

$$\cos y = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2-y^2}{2y}\right),$$

y deduzca que

$$g(y) = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2+y^2}{2y}\right).$$

Demostración.- Sea,

$$g'(y) = \frac{2y\cos y - 2\operatorname{sen} y}{y^2} + \operatorname{sen} y.$$

De donde, para $g'(y) = 0$ tenemos

$$2y\cos y - 2\operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} y = 0.$$

Lo que implica,

$$\cos y = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2-y^2}{2y}\right).$$

Luego, sustituyendo la expresión $\cos y$ en $g(y)$ se tiene

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{2\operatorname{sen} y}{y} - (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2-y^2}{2y}\right) \\ &= (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2}{y} - \frac{2-y^2}{2y}\right) \\ &= (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2+y^2}{2y}\right). \end{aligned}$$

(b) Demuestre ahora que si $g'(y) = 0$, entonces

$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{4y^2}{4+y^4},$$

y deduzca que
$$|g(y)| = \frac{2+y^2}{\sqrt{4+y^4}}.$$

Demostración.- Por la parte (a) vemos que
$$\cos y = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2-y^2}{2y}\right).$$

De donde,
$$\cos^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - (\operatorname{sen} y)^2 \left(\frac{2-y^2}{2y}\right)^2.$$

Lo que implica que
$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{sen}^2 y + (\operatorname{sen} y)^2 \left(\frac{2-y^2}{2y}\right)^2 \\ &= \left(\operatorname{sen}^2 y\right)\left[1 + \left(\frac{2-y^2}{2y}\right)^2\right] \\ &= \left(\operatorname{sen}^2 y\right)\left(\frac{4-y^2}{4y^2}\right) \end{aligned}$$

Se sigue,
$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{4y^2}{4+y^4} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} y = \frac{2y}{\sqrt{4+y^4}}.$$

Ahora, calculemos $|g(y)|$. Por la parte (a) tenemos,
$$|g(y)| = |\operatorname{sen} y|\left|\frac{2+y^2}{2y}\right|.$$

Por lo tanto,
$$|g(y)| = \frac{|2y|}{\sqrt{4+y^4}}\frac{2+y^2}{|2y|} = \frac{2+y^2}{\sqrt{4+y^4}}.$$

(c) Utilizando el hecho de que $(2+y^2)/\sqrt{4+y^4} > 1$, demuestre que si $\alpha = 1$, entonces f no es creciente en ningún intervalo alrededor de 0.

Demostración.-

(d) Utilizando el hecho de que $\lim\limits_{y\to\infty}\left(2+y^2\right)/\sqrt{4+y^4} = 1$, demuestre que si $a > 1$, entonces f es creciente en algún intervalo alrededor de 0.

Demostración.-

69. Una función f es creciente en a si existe algún número $\delta > 0$ tal que
$$f(x) > f(a) \text{ si } a < x < a + \delta$$
y
$$f(x) < f(a) \text{ si } a - \delta < x < a.$$
Observe que esto no significa que f sea creciente en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$; por ejemplo, la función de la Figura 34 es creciente en 0, pero no es una función creciente en cualquier intervalo abierto que contenga 0.

(a) Suponga que f es continua en $[0,1]$ y que f es creciente en a para todo $(a-\delta, a+\delta)$. (El lector debe convencerse, en primer lugar, que hay algo que se debe demostrar). Indicación: Para $0<b<1$, demuestre que el mínimo de f en $[b,1]$ debe situarse en b.

Demostración.- Primero, sea $c \in (b,1]$ tal que $f(c)$ es el mínimo $[b,1]$. Entonces, para todo $x \in [b,1]$,

$$f(x) \geq f(c).$$

Lo que contradice el hecho de que f es creciente en c. Por lo que, podríamos decir que $f(b)$ es el mínimo en $[b,1]$.
Ahora, sean $a,b \in [a,b]$ tal que $a<b$. Entonces, tenemos que f tiene un mínimo en $a \in [a,1]$ y ya que $a<b$, $b \in [a,1]$. De lo que tenemos,

$$f(a) \leq f(b).$$

Además podemos decir que se tiene el mismo argumento para cualquier $a' \in (a, a+\delta)$, donde $\delta > 0$ tal que

$$f(a) < f(x), \text{ para todo } x \in (a, a+\delta).$$

Así,

$$f\left(a'\right) \leq f(b).$$

También, ya que f es creciente en a, se obtiene

$$f(a) < f\left(a'\right) \leq f(b).$$

Lo que que demuestra

$$f(a) < f(b).$$

(b) Demuestre la parte (a) sin suponer que f sea continua, considerando para cada b en $[0,1]$ el conjunto $S_b = \{x : f(y) \geq f(b)$ para todo y de $[b,x]\}$. (Esta parte del problema no hace falta para las demás partes). Indicación: Demuestre que $S_b = \{x : b \leq x \leq 1\}$ considerando $\sup S_b$.

Demostración.- Sea $S_b = \{x : f(y) \geq f(b),\ \forall y \in [b,x]\}$. De donde, afirmamos que

$$\sup S_b = 1.$$

Está claro que 1 es un límite superior de S_b. Suponga $\sup S_b = x_0 < 1$. Ya que f es creciente en x_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para $y \in (x_0 - \delta, x_0)$,

$$f(y) > f(x_0).$$

Ahora, como x_0 es el supremo de S_b, existe $y \in S_b$ tal que $y \in (x_0 - \delta, x_=)$. Se sigue que

$$f(b) \leq f(y) < f(x_0) < f(z)$$

para todo $z \in (x_0, x_0+\delta)$. Así, $z \in S_b$, lo que es imposible dado que $z > x_0$ y x_0 es el supremo de S_b. Por lo tanto, tiene que ser $\sup S_b = 1$.

(c) Si f es creciente en a y f es diferenciable en a, demuestre que $f'(a) \geq 0$ (esto es fácil).

Demostración.- Como f es creciente en a, por definición tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que,

$$f(x) < f(a),\ \forall x \in (a-\delta, a)$$

y

$$f(x) > f(a), \ \forall x \in (a, a+\delta).$$

De donde tenemos que para $h < 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0.$$

Luego, para $h > 0$, se tiene

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

Lo que demuestra que

$$f\left(a^{-}\right) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

y

$$f\left(a^{+}\right) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

Por lo tanto, ya que f es diferenciable en a, se tiene $f'(a) f'\left(a^{-}\right) = f'\left(a^{+}\right) > 0$.

(d) Si $f'(a) > 0$, demuestre que f es creciente en a (a partir de la definición de $f(a)$).

Demostración.- Ya que $f'(a) > 0$, por definición de derivada tenemos,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) > 0.$$

Luego, para $\epsilon < \dfrac{f'(a)}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon < \frac{f'(a)}{2}.$$

Lo que implica,

$$f'(a) - \frac{f'(a)}{2} < \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < f'(a) + \frac{f'(a)}{2}$$

Así,

$$\frac{f'(a)}{2} < \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < \frac{2f'(a)}{2}.$$

Ahora, dado que $f'(a) > 0$, entonces

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > .0$$

De donde, se sigue

$$f(a+h) - f(a) < 0 \text{ si } h < 0, \text{ y } f(a+h) - f(a) > 0 \text{ si } h > 0.$$

Lo que demuestra que f es creciente en a.

(e) Utilice las partes (a) y (d) para demostrar, sin hacer uso del Teorema del Valor Medio, que si f es continua en $[0,1]$ y $f'(a) > 0$ para todo a en $[0,1]$, entonces f es creciente en $[0,1]$.

Demostración.- Ya que $f'(a) > 0$ para todo a en $[0,1]$. Entonces, por la parte (d) tenemos que f es creciente para todo $a \in [0,1]$. Luego, por la parte (a) tenemos que f es creciente en $[0,1]$.

(f) Suponga que f es continua en $[0,1]$ y $f'(a) = 0$ para todo a de $(0,1)$. Aplique la parte (e) a la función $g(x) = f(x) + \epsilon x$ para demostrar que $f(1) - f(0) > -\epsilon$. Análogamente, demuestre que $f(1) - f(0) < \epsilon$ considerando $h(x) = \epsilon x - f(x)$. Concluya que $f(0) = f(1)$.

Demostración.- Sea f una función continua en $[0,1]$ y $f'(a) = 0$ para todo $a \in (0,1)$. Sea también g una función definida por

$$g(x) = f(x) + \epsilon x.$$

Entonces,

$$g'(x) + f'(x) + \epsilon.$$

Ya que, $f'(x) = 0$ para cualquier $x \in (0,1)$, se tiene

$$g'(x) = \epsilon > 0.$$

Así, por la parte (e) tenemos que g es creciente en $[0,1]$. Luego,

$$g(1) > g(0),$$

lo que implica

$$f(1) + \epsilon > f(0) \qquad \Rightarrow \quad f(1) - f(0) > -\epsilon.$$

Ahora, sea h una función definida por:

$$h(x) = \epsilon x - f(x).$$

Entonces,

$$h'(x) = \epsilon - f'(x).$$

Luego, dado que $f'(x) = 0$ para cualquier $x \in (0,1)$, tenemos

$$h'(x) = \epsilon > 0$$

Así, por la parte (e) tenemos que h es creciente en $[0,1]$. Por lo que,

$$h(1) > h(0).$$

Que implica

$$-f(1) + \epsilon > -f(0) \quad \Rightarrow \quad f(1) - f(0) < \epsilon.$$

Esta demostración particular de que una función con derivada nula debe ser constante coincide en muchos puntos con una demostración de H. A. Schwarz, la cual es posible que sea la primera demostración rigurosa que se haya dado de este hecho. Al menos su descubridor así parecía creerlo. Vea su exuberante carta en la referencia [54] de la bibliografía.

70. (a) Si f es una función constante, entonces cada punto es un máximo local de f. Esto puede ocurrir también aunque f no sea una función constante: por ejemplo, si $f(x) = 0$ para $x < 0$ y $f(x) = 1$ para $x \geq 0$. Demuestre, sin embargo, utilizando el Problema 8-4, que si f es continua en $[a, b]$ y cada punto de $[a, b]$ es un punto máximo local, entonces f es una función constante. Por supuesto, se verifica el mismo resultado si cada punto de $[a, b]$ es un punto mínimo local.

Demostración.- Supongamos que f no es una función constante. Entonces, existe $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Sin perdida de generalización, sean $x < y$ y $f(x) < f(y)$. Por el problema 8.4(b) tenemos que existe números $c, d \in [x, y]$ tal que

$$f(c) = f(x) < f(y) = f(d)$$

y

$$f(x) = f(c) < f(t) < f(d), \text{ para todo } t \in (c, d).$$

Lo que demuestra que x no es un mínimo local.

(b) Suponga ahora que cada punto es un punto máximo local o un punto mínimo local de la función continua f (aunque no excluimos la posibilidad de que algunos puntos sean máximos locales y otros mínimos locales). Demuestre que f es constante de la manera siguiente: suponga que $f(a_0) < f(b_0)$. Entonces se puede suponer que $f(a_0) < f(x) < f(b_0)$ para $a_0 < x < b_0$. (¿Por qué?) Utilizando el Teorema 1 del Apéndice del Capítulo 8, efectúe una partición de $[a_0, b_0]$ en intervalos en los que $\sup f - \inf f < (f(b_0) - fa_0))/2$; elija también las longitudes de dichos intervalos menores que $(b_0 - a_0)/2$. Entonces existe uno de estos intervalos $[a_1, b_1]$ con $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$ y $f(a_1) < f(b_1)$. (¿Por qué?) Continué inductivamente y utilice el Teorema de los Intervalos Encajados (Problema 8-14) para hallar un punto x que no pueda ser un máximo o un mínimo local.

Demostración.- Sea a_0 y b_0 dos puntos distintos en $[a, b]$ tal que $f(a_0) \neq f(b_0)$. Sin perdida de generalización podemos suponer que $f(a_0) < f(b_0)$. Luego por el problema 8.4(b), tenemos $f(a_0) < f(x) < f(b_0)$ para todo $x \in (a_0, b_0)$. Ahora, por el teorema 1 del apéndice del capítulo 8, existe algún $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{f(b_0) - f(a_0)}{2} \text{ para } |x - y| \leq \delta = \frac{b_0 - a_0}{k}.$$

Luego, sea $c_i = a_0 + i\delta$. Ya que

$$f(c_1) - f(a_0) < \frac{|f(b_0) - f(a_0)|}{2}$$

y

$$f(b_0) - f(c_{k-1}) < \frac{|f(b_0) - f(a_0)|}{2}$$

Entonces,

$$f(c_1) < f(c_{k-1}).$$

En consecuencia, existe algún i con $1 \leq i \leq k - 1$ tal que $f(c_i) < f(c_{i-1})$. Después, sea $c_i = a_1$ y $c_{i+1} = b_1$. Entonces, $a_0 < b_1 < b_0$ y $f(a_1) < f(b_1)$. Además, podemos ver que $f(a_1) < f(x) < f(b_1)$ para todo $x \in (a_1, b_1)$, esto por el problema 8.4(b).

Continuando de esta manera, tenemos que encontrar intervalos $[a_n, b_n]$ con $a_n < a_{n-1} < b_{n+1} < b_n$ y $f(a_n) < x < f(b_n)$ para $x \in (a_n, b_n)$. Es más, podemos suponer que $b_n - a_n < \dfrac{1}{n}$. Ahora, sea $x \in [a_n, b_n]$. Entonces, todo intervalo que contiene x también contiene algunos $[a_k, b_k]$ con

$f(a_k) < f(x) < f(b_k)$, lo que demuestra que x no es un máximo local.

71. (a) Un punto x se dice que es un punto estrictamente máximo de f en A si $f(x) > f(y)$ para todo y de A con $y \neq x$ (compare con la definición de un punto máximo ordinario). De una manera correspondiente se define un punto estrictamente máximo local. Halle todos los puntos estrictamente máximos locales de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{1}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

Respuesta.- No es difícil concluir que $f(x) \leq 1$ para cada x y $f(x) = 1$. Sí, y sólo si x es un entero. Si x es un entero, podemos elegir el intervalo $(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ donde el valor más alto es obtenido exactamente en x y este es igual a 1.
Para un número racional cualquiera, no entero de la forma p/q podemos definir el intervalo $(n, n+1)$ tal que $p/q \in (n, n+1)$. Vemos que existen varios racionales en este intervalo tal que sus denominadores son menores o iguales a q, as´i elegimos ϵ que para cada $x \in (p/q - \epsilon, p/q + \epsilon)$ distintos de p/q se tiene

$$f(x) < f(p/q),$$

Es decir, tendríamos el conjunto:

$$\epsilon = \min\{|p/q| - k/l| : k/l \neq p/q, k/l \in [n, n+1], \text{ y } l \leq q\}.$$

Usando, la definición obtenemos que cada número racional es un punto máximo estricto local.

Parece muy improbable que una función pueda tener un punto estrictamente máximo local para todo punto (aunque el ejemplo anterior podría inducir a pensar que es posible). Demuestre que no es posible de la manera siguiente:

(b) Suponga que todo punto es un punto estrictamente máximo local para f. Sea x_1 un número cualquiera y elija $a_1 < x_1 < b_1$ con $b_1 - a_1 < 1$ tales que $f(x_1) > f(x)$ para todo x de $[a_1, b_1]$. Sea $x_2 \neq x_1$ un punto cualquiera de (a_1, b_1) y elija $a_1 \leq a_2 < x_2 < b_2 \leq b_1$ con $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ tales que $f(x_2) > f(x)$ para todo x de $[a_2, b_2]$. Continué de esta manera y aplique el Teorema de los Intervalos Encajados (Problema 8-14) para obtener una contradicción.

Respuesta.- Por un punto arbitrario x_1 podemos elegir el intervalo $[a_1, b_1]$ tal que $a_1 < x_1 < b_1$, $b_1 - a_1 < 1$ y $f(x) < f(x_1)$ para cada $x \in [a_1, b_1]$. Además, consideremos algún punto $x_2 \in (a_1, b_1)$, $x_2 \neq x_1$. Ya que x_2 es el punto máximo estricto local, podemos elegir el intervalo $[a_2, b_2]$ tal que $a_1 \leq a_2 < x_2 < b_2 \leq b_1$, $b_2 - a_2 < 1/2$ y $f(x) < f(x_2)$ para cada $x \in [a_2, b_2]$. Siguiendo esta secuencia podemos crear el intervalo $[a_n, b_n]$ tal que $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ y $b_n - a_n < 1/2^{n-1}$. Usando el Teorema del Intervalo Anidado obtenemos que existe un único elemento y contenida en cada uno de estos intervalos.
La suposición de esta parte implica que y es un punto máximo estricto local, pero un intervalo arbitrario $y \in [a, b]$ contiene a_n, b_n para algunos n, y luego $f(x_n) < f(y)$. Por lo tanto, y no puede ser un punto máximo estricto local, por lo que tenemos una contradicción.

A

Convexidad y Concavidad

Definición A.1 Una función f es **convexa** en un intervalo, si para todo a y b del intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la gráfica de f.

La condición geométrica que aparece en la definición puede expresarse de forma analítica , la cual es, a veces más útil en las demostraciones. La recta entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es la gráfica de la función g definida mediante

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Esta recta se sitúa por encima de la gráfica de f en x si $g(x) > f(x)$, es decir, si

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) > f(x)$$

o bien

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) > f(x) - f(a)$$

es decir

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

con lo cual hemos obtenido una definición equivalente de convexidad.

Definición A.2 Una función f es **convexa** en un intervalo, si dados a, x y b del intervalo con $a < x < b$ se verifica que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si la palabra ”encima” de la definición 1 se sustituye por ”por debajo”, o equivalentemente, si la desigualdad de la definición 2 se sustituye por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

se obtiene la definición de una función **cóncava**. No es difícil comprobar que las funciones cóncavas son precisamente aquellas de la forma $-f$, siendo f una función convexa.

Teorema A.1 Sea f convexa. Si f es diferenciable en a, entonces la gráfica de f se sitúa por encima de la tangente a f en el punto $(a.f(a))$, excepto en el mismo punto de contacto $(a, f(a))$. Si $a < b$ y f es diferenciable en a y en b, entonces $f'(a) < f'(b)$.

Demostración.- Si $0 < h_1 < h_2$. Entonces, como se muestra en la figura 4 (Michael Spivak, capítulo 11, Apéndice),

$$\frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1} < \frac{f(a+h_2) - f(a)}{h_2}.$$

A partir de la definición 2 aplicada a los puntos $a < a + h_1 < a + h_2$, se obtiene una demostración de desigualdad sin basarse en ningún dibujo o esquema. Dicha desigualdad demuestra que los valores de

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

disminuyen cuando $h \to 0^+$. Por consiguiente,

$$f'(a) < \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ para } h > 0$$

(de hecho, la derivada $f'(a)$ es el ínfimo de todos estos valores). Pero esto significa que, para $h > 0$ la secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ tiene una pendiente mayor que la tangente, lo que implica que $(a + h, f(a + h))$ se sitúa por encima de la tangente (la traducción analítica de este hecho es inmediata).
En el caso de valores de h negativos, la situación es similar (Figura 5, Michael Spivak, capítulo 11, Apéndice): Si $h_2 < h_1 < 0$, entonces

$$\frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1} > \frac{f(a+h_2) - f(a)}{h_2}.$$

Esto demuestra que la pendiente de la tangente es mayor que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ para } h < 0$$

(de hecho, $f'(a)$ es el supremo de todos estos números), esto demuestra que $f(a + h)$ se sitúa por encima de la recta si $h < 0$. Queda demostrada pues la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que $a < b$. Entonces, como ya hemos visto (Figura 6 Michael Spivak, capítulo 11, Apéndice),

$$\begin{aligned}
f'(a) &< \frac{f(a+(b-a)) - f(a)}{b-a} && \text{ya que } b - a > 0 \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} && . \\
f'(b) &> \frac{f(b+(a-b)) - f(b)}{a-b} && \text{ya que } a - b < 0 \\
&= \frac{f(a) - f(b)}{a-b} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

Combinando estas desigualdades, obtenemos $f'(a) < f'(b)$. ■

Lema A.1 Supongamos que f es diferenciable y que f' es creciente. Si $a < b$ y $f(a) = f(b)$, entonces $f(x) < f(a) = f(b)$ para $a < x < b$.

Demostración.- Supongamos que $f(x) \geq f(a) = f(b)$ para algún x de (a, b). Entonces el máximo de f en $[a, b]$ se localiza en algún punto x_0 de (a, b) con $f(x_0) \geq f(a)$ y, por supuesto, $f'(x_0) = 0$. Por otra parte, aplicando el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[a, x_0]$, vemos que existe un x_1 tal que $a < x_1 < x_0$ y

$$f(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \geq 0,$$

lo que contradice el hecho de que f' sea creciente. ■

Teorema A.2 Si f es diferenciable y f' es creciente, entonces f es convexa.

Demostración.- Sea $a < b$. Definamos f mediante

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Es fácil comprobar que g' también es creciente; además, $g(a) = g(b) = f(a)$. Aplicando el lema a la función g deducimos que

$$g(x) < f(a) \quad \text{si} \quad a < x < b.$$

En otras palabras, si $a < x < b$, entonces

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) < f(a)$$

o

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

es decir f es convexa. ■

Teorema A.3 Si f es diferenciable y la gráfica de f se sitúa por encima de cada recta tangente excepto en el punto de contacto, entonces f es convexa.

Demostración.- Sea $a < b$. Como se puede observar en la figura 8 (Michael Spivak, Apendice, capítulo 11), si $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la tangente en $(a, f(a))$, y $(a, f(a))$ se sitúa por encima de la tangente en $(b, f(b))$, entonces la pendiente de la tangente en $(b, f(b))$ ha de ser mayor que la pendiente de la tangente en $(a, f(a))$. En el siguiente razonamiento se muestra analíticamente este hecho mediante ecuaciones.
Como la recta tangente en $(a, (f(a))$ queda definida por la gráfica de la función

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a),$$

y como $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la recta tangente, obtenemos

$$f(b) > f'(a)(b - a) + f(a).$$

Análogamente, como la recta tangente en $(b, f(b))$ queda definida por la gráfica de la función

$$h(x) = f'(b)(x - b) + f(b),$$

y $(a, f(a))$ se sitúa por encima de la tangente en $(v, f(b))$, obtenemos

$$f(a) > f'(b)(a - b) + f(b).$$

A partir de estas dos ecuaciones, podemos deducir que $f'(a) < f'(b)$, de manera que, según el teorema 2 f es convexa. ■

Teorema A.4 Si f es diferenciable en un intervalo y corta a cada una de sus rectas tangentes una sólo vez, entonces f es convexa o cóncava en dicho intervalo.

Demostración.- La demostración se desglosa en dos apartados.

a) Primero veamos que ninguna recta puede cortar a la gráfica de f en tres puntos diferentes. Supongamos, por el contrario, que alguna recta corta a la gráfica de f en los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$, con $a < b < c$ (Figura 11, Michael Spivak, capítulo 11 Apéndice). Entonces se verificaría que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Consideremos la función

$$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{para } x \text{ en } [b,c].$$

La ecuación de igualdad de arriba demuestra que $g(b) = g(c)$. Por tanto, según el Teorema de Rolle, existe algún número x en (b,c) en el que $0 = g'(x)$, y así

$$0 = (x-a)f'(x) - [f(x) - f(a)]$$

o sea

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Pero esto significa (Figura 12, Michael Spivak, capítulo 11 Apéndice) que la recta tangente en $(x, f(x))$ corta al punto $(a, f(a))$, lo que contradice a las hipótesis.

b) Supongamos ahora que $a_0 < b_0 < c_0$ y $a_1 < b_1 < c_1$ son puntos del intervalo. Sea

$$\begin{array}{rcl} x_t & = & (1-t)a_0 + ta_1 \\ y_t & = & (1-t)b_0 + tb_1 \qquad 0 \leq t \leq 1. \\ z_t & = & (1-t)c_0 + tc_1 \end{array}$$

Entonces, $x_0 = a_0$ y $x_1 = a_1$ y (Problema 4-2) los puntos x_t se sitúan entre a_0 y a_1, con resultados análogos para y_t y z_t. Además,

$$x_t < y_t < z_t \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Consideremos ahora la función

$$g(t) = \frac{f(t_t) - f(x_t)}{y_t - x_t} - \frac{f(z_t) - f(x_t 9}{z_t - x_t} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Según el apartado 1, $g(t) \neq 0$ para todo t en $[0,1]$. Por lo tanto, o bien $g(t)$ para todo t de $[0,1]$ o $g(t) < 0$ para todo t de $[0,1]$. Así, o bien f es convexa o f es cóncava.

■

A.1 Problemas

1. Dibuje las funciones del Problema 11-1, indicando las regiones de convexidad y concavidad y los puntos de inflexión (considere (iv) con doble asterisco).

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2,2]$

Respuesta.- Calculando la primera deriva, tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$$

Donde, los puntos críticos serán

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2, \quad x = -\frac{4}{3}.$$

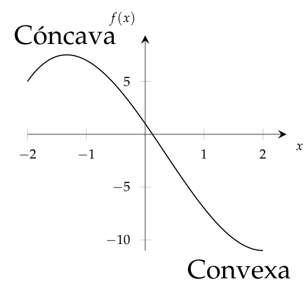
La segunda derivada estará dada por

$$f''(x) = 6x - 2$$

Donde, los puntos de inflexión estarán definidos por

$$6x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$$

Dado que $f'' < 0$, f es cóncava para $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$. Y será convexa para $\left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$, dado que $f'' > 0$.



(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1,1]$.

Respuesta.- Calculando la primera deriva, tenemos

$$f'(x) = 5x^4 + 1$$

Donde, no se tendrán puntos críticos, ya que

$$5x^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^4 + 1 = 0.$$

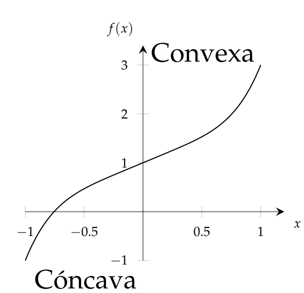
no tiene solución en los reales. Luego, la segunda derivada estará dada por

$$f''(x) = 20x^3.$$

Los puntos de inflexión estarán definidos por

$$20x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Dado que $f'' < 0$, f es cóncava para $(-\infty, 0)$. Y será convexa para $(0, \infty)$, dado que $f'' > 0$.



(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\right]$

Respuesta.- Calculando la primera deriva, tenemos

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

Donde, los puntos críticos serán

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = 1.$$

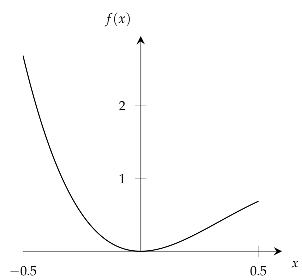
La segunda derivada estará dada por

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$$

Los puntos de inflexión estarán definidos por

$$36x^2 - 48x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, \quad x = \frac{1}{3}$$

Dado que $f'' < 0$, f es cóncava para $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$. Y será convexa para $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, dado que $f'' > 0$.



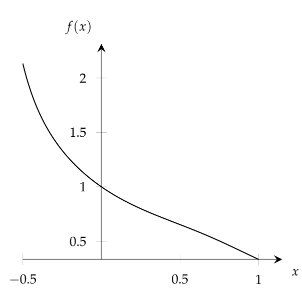
(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Respuesta.- Calculando la primera deriva, tenemos

$$f'(x) = -\frac{5x^4 + 1}{(x^5 + x + 1)^2}$$

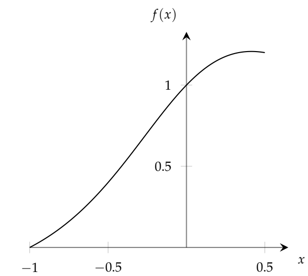
Donde, no existen puntos críticos. La segunda derivada estará dada por

$$f''(x) = \frac{2\left(15x^8 - 10x^3 + 1\right)}{(x^5 + x + 1)^3}$$



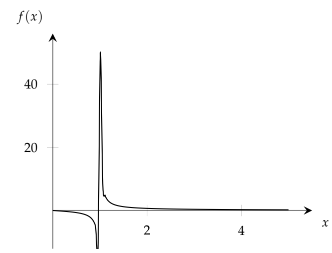
(v) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ en $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

Respuesta.-



(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ en $[0,5]$.

Respuesta.-



2. La Figura 30 del capítulo 11 muestra la gráfica de f'. Dibuje la gráfica de f.

Respuesta.- Entre los puntos 0 y 1, la f'(x) es positiva, por lo que debe ser creciente. Pero a medida que $f'(x)$ alcanza el punto 1, se desplaza hacia la zona negativa, por lo que $f(x)$ debe aumentar desde un valor negativo mayor y alcanzar su máximo local en el punto 1. Entre 1 y 2, la $f'(x)$ es negativa, sin embargo, tiene un mínimo entre 1 y 2, por lo que la forma de $f(x)$ cambiará de convexa a cóncava. Entre 2 y 3, nuevamente f'(x) es decreciente, entonces la forma cambia nuevamente a cóncava. Por último entre 2 y 3, $f(x)$ cambia a cóncava. El proceso se puede repetir de esta manera. Después del punto 4, $f'(x)$ aumenta a un valor positivo alto, por lo que la curva de $f(x)$ debería llegar al infinito a un ritmo mayor.

3. Demuestre que f es convexa en un intervalo si y sólo si para todo x e y del intervalo se verifica

$$f(tx + (1-t)y) < (1-t)f(y), \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Se trata solamente de otra expresión equivalente a la definición que hemos dado de función convexa, aunque muy útil muchos casos.

Demostración.- Sea $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ dos puntos de f. Entonces, la recta que une estos dos puntos estará dada por

$$\mathcal{L}_1(t) = [ty + (1-t)x, tf(y)] + (1-t)f(x), \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Por otro lado la linea que une x e y es

$$\mathcal{L}_2(t) = ty + (1-t)x.$$

Así, f es convexa si y sólo si

$$\mathcal{L}_1(t) > f\left[\mathcal{L}_2(t)\right],$$

para todo $t \in (0,1)$. Por lo tanto

$$f\left[ty + (1-t)x\right] < tf(y) + (1-t)f(x).$$

4. (a) Demuestre que si f y g son convexas y f es creciente, entonces $f \circ g$ es convexa. (La demostración es más sencilla si se utiliza el resultado del problema 3).

Demostración.- Sea f y g dos funciones convexas y f es creciente. Entonces, tenemos que mostrar que $f \circ g$ es convexa. Ya que f y g son convexas por el anterior ejercicio 3 se tiene, para $t \in (0,1)$ que

$$f\left[ty + (1-t)x\right] < tf(y) + (1-t)f(x) \qquad \text{y} \qquad g\left[ty + (1-t)x\right] < tg(y) + (1-t)g(x),$$

para todo x, y en el dominio de f y g. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (f \circ g)\left[ty + (1-t)x\right] &< f \circ \left[tg(y) + (1-t)g(x)\right] \\ &< t(f \circ g)(y) + (1-t)(f \circ g)(x), \end{aligned}$$

para cualquier x, y de g para que $g(x)$ y $g(y)$ estén en el dominio de $f \circ g$. Así, demuestra que $f \circ g$ es una función convexa, gracias al problema anterior.

(b) Dé un ejemplo de un caso en el que $g \circ f$ no sea convexa.

Respuesta.- Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$f(x) = x^2 + 1$$

y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

De donde, f es una función creciente convexa y g es una función convexa. Entonces,

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

el cual no es una función convexa.

Por ejemplo sea $y = 1$, $x = 2$ y $t = \dfrac{1}{2}$ por lo que

$$(f \circ g)\left[ty + (1-t)x\right] = \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{4}{9} > \frac{7}{20} = t(g \circ f)(y) + (1+t)(g \circ f)(x).$$

(c) Suponga que f y g son dos veces diferenciables. Dé otro demostración del resultado del apartado (a) considerando las derivadas segundas.

Demostración.- Sea f y g dos funciones convexas dos veces diferenciables y f creciente. Entonces, tenemos que demostrar que $f \circ g$ es convexa; es decir, necesitamos demostrar que

$$(f \circ g)'' > 0.$$

Notemos que

$$(f \circ g)'' = (f'' \circ g)g'^2 + (f' \circ g)g''$$

que es positivo siempre que f'', f' y g'' son todos positivos. Pero estos son positivos desde nuestra hipótesis ya que tanto f como g son convexos así como f es creciente.

5. (a) Suponga que f es diferenciable y convexa en un intervalo. Demuestre que o bien f es creciente, o bien f es decreciente, o sino que existe un número c tal que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c.

Demostración.- Supongamos primero que $f' \neq 0$. Ya que f es diferenciable y convexa, por el teorema 1 tenemos que para cualquier $x, y \in [a, b]$ con $x < y$,

$$f'(x) < f'(y).$$

Esto implica que f' es una función monótona en $[a, b]$. Por lo tanto, $f' > 0$ o $f' < 0$. Esto demuestra que f es creciente o decreciente en $[a, b]$.
Luego, sea $f'(c) = 0$. Entonces, por el teorema 1 tenemos que para cualquier $x \in [a, b]$ con $x < c$,

$$f'(x) < f'(c) = 0.$$

Por otro lado, para $c < y$,

$$0 = f'(c) < f'(y).$$

Es decir,

$$f'(x) < 0 < f'(y).$$

Lo que demuestra que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c.

(b) Utilice este hecho para dar otra demostración del resultado del problema 4(a), siendo f y g (una vez) diferenciables. (Hay que ir con cuidado al comparar $f'[g(x)]$ y $f'[g(y)]$ para $x < y$.)

Demostración.- Sean f y g dos funciones diferenciables y convexas en $[a, b]$. Podemos suponer que f es creciente. Entonces, tenemos que mostrar que $f \circ g$ es convexa. Para demostrar esto, demostraremos que $(f \circ g)'$ es creciente en $[a, b]$. Sea $x < y$ dos números en $[a, b]$, de lo que

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]\, g'(x) < (f \circ g)'(y) = f'[g(y)]\, g'(y).$$

Como g es diferenciable y convexo, por la parte (a) tenemos que o bien g es creciente, o bien es decreciente, o bien existe un punto $c \in [a, b]$ tal que g es decreciente a la izquierda de c y es creciente a la derecha de c.

Caso 1. g es creciente.- Tenemos que $g'(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, por el teorema 1 se tiene $g'(x) < g'(y)$ siempre que $x < y$. Además, ya que f es creciente se tiene que $f'(x) > 0$ y ya que f es convexa nuevamente por el teorema 1 $f'(x) < f'(y)$ siempre que $x > y$. Así, tenemos que

$$0 \leq g'(x) < g'(y), \quad \text{y} \quad 0 \leq f'(x) < f'(y)$$

para todo $x < y$ en $[a, b]$. En particular,

$$0 \leq g'(x) < g'(y), \quad \text{y} \quad 0 \leq f'[g(x)] < f'[g(y)]$$

donde se cumple la segunda desigualdad ya que $g(x) < g(y)$ como g es creciente. Esto implica que

$$f'[g(x)]\, g'(x) < f'[g(y)]\, g'(y)$$

para todo $x, y \in [a, b]$ con $x < y$. Por lo tanto, $f \circ g$ es también convexa.

Caso 2. g es decreciente.- En este caso, se tiene $g'(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$, por el teorema 1 tenemos que $g'(x) < g'(y)$ siempre que $x < y$. Además, ya que f es creciente se tiene $f'(x) > 0$ y ya que f es convexa nuevamente por el teorema 1 $f'8x) < f'(y)$ con $x < y$. Así, se tiene

$$g'(x) < g'(y) \leq 0 \text{ y } 0 \leq f'(x) < f'(y)$$

para todo $x < y$ en $[a, b]$. En particular,

$$g'(x) < g'(y) \leq 0 \text{ y } 0 \leq f'[g(x)] > f'[g(y)]$$

donde se cumple la segunda desigualdad ya que $g(x) > g(y)$ como g es decreciente. Esto implica que

$$f'[g(x)]\,g'(x) < f'[g(y)]\,g'(y)$$

para todo $x, y \in [a,b]$ con $x < y$. Por lo tanto, $f \circ g$ es también convexa.

Caso 3. g es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha de c.- Sea $x < y$ en $[a,b]$. Entonces se cumple que $x < y \leq c$, o $c \leq x < y$, o $x < c < y$. Ahora, observemos que los casos primero y segundo cubren la posibilidad de $x < y \leq c$ y $c \leq x < y$, respectivamente. Por lo que nos queda demostrar el caso $x < c < y$, como sigue:

$$f'[g(x)]\,g'(x) < f'[g(c)]\,g'(c) < f'[g(y)]\,g'(y).$$

donde donde la primera desigualdad ha sido probada en el caso 1 y la segunda en el caso II anterior. Así, tenemos que

$$f'[g(x)]\,g'(x) < f'[g(y)]\,g'(y)$$

siempre que $x < y$.

(c) Demuestre el resultado del apartado (a) sin suponer que f es diferenciable. Hay que tener en cuenta distintos casos, aunque no es necesario tener ideas particularmente luminosas. Comience demostrando que si $a < b$ y $f(a) < f(b)$, entonces f es creciente a la derecha de b; y si $f(a) > f(b)$, entonces f es decreciente a la izquierda de a.

6. Sea f una función dos veces diferenciable que posee las siguientes propiedades: $f(x) > 0$ para $x > 0$, f es decreciente y $f'(0) = 0$. Demuestre que $f''(x) = 0$ para algún $x > 0$ (de manera que, en casos razonables, f tendrá un punto de inflexión en x; considérese por ejemplo la función $f(x) = 1/(1+x^2)$). Cada hipótesis de este teorema es esencial, como lo demuestra el caso de la función $f(x) = 1 - x^2$, que no es positiva para todo x; también el caso de la función $f(x) = x^2$, que no es decreciente, y el caso de la función $f(x) = 1/(x+1)$, que no satisface la condición $f'(0) = 0$. Indicación: Elija $x_0 > 0$ con $f(x_0) < 0$. No es posible que $f'(y) \leq f'(x_0)$ para todo $y > x_0$. ¿Por qué? Por tanto, $f'(x_1) > f'(x_0)$ para algún $x_1 > x_0$. Considere f' en $[0, x_1]$.

Demostración.- Ya que f es decreciente, se tiene para $x \geq 0$ que $f(0) \geq f(x)$. Usando el teorema de valor medio, tenemos que

$$f(x) - f(0) = f'(x_0)x$$

para algún $0 \leq x_0 < x$. Esto implica que $f'(x_0) < 0$ ya que $f(0) \geq f(x)$. Esto afirma que existe un número $x \geq c_0$ tal que $f'(x) > f'(x_0)$.
Ahora, supongamos que para todo $y > x_0, f'(y) \leq f'(x_0)$. Usando una vez más la teorema del valor medio, para cualquier $x > x_0$,

$$f(x) - f(x_0) = f'(y)(x - x_0) < f'(x_0)(x - x_0).$$

Pero esto implica que existe $x > x_0$ tal que $f(x) < 0$ lo que contradice el hecho de que $f(x) > 0$ para $x \geq 0$. Luego, existe un número $x_1 \geq x_0$ tal que $f'(x_1) > f'(x_0)$. Entonces, vemos que f' debe tener un mínimo en el intervalo $[0, x_1]$. Por lo tanto, existe un número $x \in [0, x_1]$ tal que $f''(x) = 0$.

7. (a) Demuestre que si f es convexa entonces $f([x+y]/2) < [f(x) + f(y)]/2$.

Demostración.- Por el ejercicio 4, tenemos que una función f es convexa si y sólo si para todo x, y en el dominio de f y para todo t se tiene que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Ya que, f es convexa para $t=\frac{1}{2}$ tenemos

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(b) Suponga que f satisface dicha condición. Demuestre que $f(kx+(1-k)y) < kf(x)+(1-k)f(y)$ siendo k un número racional entre 0 y 1, de la forma $m/2^n$. Indicación: El apartado (a) constituye el caso especial $n=1$. Utilice el principio de inducción, empleando el apartado (a) en cada caso.

Demostración.- Sea x, y cualquier número denotado por

$$p_k = \frac{mx}{2^k} + \left(1-\frac{m}{2^k}\right)y$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$ con $m < 2^k$. Entonces, vemos que $p_k \in [x,y]$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Además, observamos que p_{k+1} es el punto medio de p_k e y. De hecho,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{mx}{2^k} + \left(1-\frac{m}{2^k}\right)y + y}{2} \\
&= \frac{mx}{2^{k+1}} + \left(1-\frac{m}{2^{k+1}}\right)y \\
&= p_{k+1}
\end{aligned}$$

Por lo que debemos demostrar por inducción que

$$f\left(p_n\right) < \frac{mx}{2^n}f(x) + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)f(y)$$

Ya que $n=1$ entonces m tiene que ser 1, por lo que se requiere mostrar que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

para todo x, y el cual es nuestra hipótesis.

Ahora, supongamos que se cumple para $n-1$. Es decir,

$$f\left[\frac{mx}{2^{n-1}} + \left(1-\frac{m}{2^{n-1}}\right)y\right] < \frac{mf(x)}{2^{n-1}} + \left(1-\frac{m}{2^{n-1}}\right)f(y)$$

Luego, veamos que

$$\begin{aligned}
f\left[\frac{mx}{2^n} + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)y\right] &= f(P_n) \\
&= f\left(\frac{p_{n-1}+y}{2}\right) \\
&< \frac{f(p_{n-1})+f(y)}{2} \\
&< \frac{\frac{mx}{2^{n-1}} + \left(1-\frac{m}{2^{n-1}}\right)f(y) + f(y)}{2} \\
&= \frac{mf(x)}{2^n} + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)f(y)
\end{aligned}$$

Lo que completa la prueba.

(c) Suponga que f satisface la condición del apartado (a) y que f es continua. Demuestre que f es convexa.

Demostración.- Suponga que f satisface las condiciones de la parte (a) y f es continua. Entonces, tenemos que demostrar que para cualquier x, y y $t \in (0,1)$

$$f\left[tx + (1-t)y\right] < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Podemos comenzar observando que el conjunto

$$A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N} \text{ con } m < 2^n \right\}$$

es un conjunto denso en $[0,1]$. Es decir, para cada $t \in [0,1]$ existe una secuencia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_n \in A$ para todo n tal que $a_n \to t$ como $n \to \infty$. Tomemos tal secuencia $\{a_n\} \subset A$ y por la parte (b), tenemos que para $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left[a_n x + (1-a_n)y\right] < a_n f(x) + (1-a_n)f(y)$$

Tomando el limite a ambos lados,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ f\left[a_n x + (1-a_n)y\right] \right\} \leq \lim_{n\to\infty} \left[a_n f(x) + (1-a_n)f(y)\right]$$

Ya que, $\lim_{n\to\infty} a_n = t$ implica que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

8. Para $n > 1$, sean $p_1, \ldots, p_n$ números positivos con $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

(a) Siendo $x_1, \ldots, x_n$ números cualesquiera, demuestre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ está situado entre el menor y el mayor de los x_i.

Demostración.- Sean x_{i_1} el menor y x_{i_2} el mayor de $x_1, \ldots, x_n$ para cualquier $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$. Donde notemos que

$$x_{i_1} = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right) x_{i_1} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right) x_{i_2} = x_{i_2}.$$

(b) Demuestre lo mismo para $(1/t) \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$, donde $t = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} p_i$.

Demostración.- Sean x_{i_1} el menor y x_{i_2} el mayor de $x_1, \ldots, x_n$ para algún $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, tenemos que

$$x_{i_1} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} p_i} \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \right) x_{i_1} \leq \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i \leq \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} p_i} \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \right) x_{i_2} = x_{i_2}.$$

(c) Demuestre *la desigualdad de Jensen*: si f es convexa, entonces $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i\right) < \sum\limits_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$. Indicación: Utilice el Problema 3, observando que $p_n = l - t$. (Se necesita el apartado (b) para demostrar que $(1/t)\sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i x_i$ Pertenece al dominio de f si $x_1, \ldots, x_n$ son puntos del dominio de f.).

Demostración.- Demostraremos la proposición por inducción. Primero vemos que se cumple para $n = 1$, ya que

$$f(x_1) \leq f(x_1).$$

Ahora, supongamos que es cierto para $n - 1$. Entonces, ya que $t = \sum_{i=1}^{n-1} p_i < 1$

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n-1} q_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i + p_n x_n\right) \\
&= f\left(\frac{1}{t} t \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i + p_n x_n\right) \\
&\leq t f\left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) + p_n f(x_n) \\
&\leq t \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i}{t} f(x_i) + p_n f(x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)
\end{aligned}$$

9. (a) Para cualquier función f, la derivada por la derecha, $łm_{h\to 0^-}[f(a+h) - f(a)/h$, se representa mediante $f'_+(a)$, y la deriva da por la izquierda por $f'_+(a)$. La demostración del Teorema 1 muestra realmente que $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ siempre existen si f es convexa en algún intervalo abierto que contenga al punto a. Compruebe dicha afirmación y demuestre que f'_+ y f'_- son crecientes; demuestre también que $f'_-(a) < f_+(a)$.

Demostración.-

(b) Recíprocamente,suponga que f es convexa en $[a, b]$ y que g es convexa en $[b, c]$, con $f(b) = g(b)$ y $f'_-(b) \leq g'_+(b)$ (Figura 13 (a)). Si definimos la función h en $[a, c]$ como aquélla que es igual a f en $[a, b]$, a g en $[b, c]$, demuestre que h es convexa en $[a, c]$. Indicación: Dados P y Q situados en lados opuestos de$O = (b, f(b))$, como se muestra en la Figura 13 (b), compare la pendiente de OQ con la pendiente de PO.

Demostración.-

(c) Demuestre que si f es convexa, entonces $f'_+(a) = f'_-(a)$ si y sólo si f'_+ es continua en a. (Por tanto, f es diferenciable precisamente cuando f'_+ es continua.) Indicación: $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ está próximo a $f'_-(a)$ para $b < a$ próximo a a, y $f'_+(b)$ es menor que este cociente.

Demostración.-

10. a) Demuestre que una función convexa definida en $\mathbb{R}$, o en cualquier intervalo abierto, debe ser continua.

Demostración.-

b) Dé un ejemplo de una función convexa en un intervalo cerrado que no sea continua y explique exactamente qué tipos de discontinuidades son posibles.

Respuesta.-

11. Una función f se denomina débilmente convexa en un intervalo, si para $a < b < c$ de dicho intervalo, se verifica que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(a) Demuestre que una función débilmente convexa es convexa si y sólo si su gráfica no contiene segmentos rectilíneos. (A veces, una función débilmente convexa se denomina simplemente "convexa", mientras que las funciones convexas en el sentido que las hemos definido en este libro se denominan "estrictamente convexas".)

(b) Reformule los teoremas de esta sección para el caso de funciones débilmente convexas.

12. Halle dos funciones convexas f y g tales que $f(x) = g(x)$ si y sólo si x es un entero. Indicación: Halle primero un caso en el que g sea sólo débilmente convexa y luego modifíquelo utilizando el resultado del Problema 9 como guía.

Respuesta.-

13. Un conjunto A de puntos del plano se denomina *convexo* si A contiene a cualquier segmento rectilíneo que une a dos puntos cualesquiera del conjunto (Figura 14). Dada una función f , sea A_f el conjunto de los puntos (x, y) con $y > f(x)$, de manera que A_f es el conjunto de los puntos situados en la gráfica o por encima de la gráfica de f . Demuestre que A_f es convexo si y sólo si f es débilmente convexa, según la terminología introducida en el problema anterior. En la referencia [18] de las Lecturas Aconsejadas, puede encontrarse más información referente a los conjuntos convexos.

Demostración.-