1. Сформулировать определения случайной величины и функции распределения вероятностей случайной величины. Записать основные свойства функции распределения.

Случайной величиной называется отображение $X: \Omega \rightarrow R$ такое, что $\forall\, x \in R: \{w:\ X(w) < x\} \in B$.
Функции распределения вероятностей случайной величины X называется отображение $F:\ R \rightarrow R$, определенное правилом$F: x \rightarrow P\{X < x\}$. $F(x) = P\{X < x\}$
Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. неубывающая $x1 \le x2 \Rightarrow F(x1) \le F(x2)$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $P\{x1 \le X \le x2\} = F(x2) - F(x1)$
5. $\lim\limits_{x \to x_{o-}} F(x) = F(x_0)$ в каждой точке функция непрерывна слева

2. Сформулировать определение дискретной случайной величины; понятие ряда распределения. Сформулировать определение непрерывной случайной величины и функции плотности распределения вероятностей.

Случайная величина называется дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно.
Рядом распределения вероятности случайной дискретной величины называют таблицу, в первой строке значение, под ними вероятность принятия сл. Вел. Этого значения. X | P{X = xi}.
Случайная величина называется непрерывной если $\exists\, f:\ R \rightarrow R$ такая что $\forall\, x \in R: F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$
Где $F(x)$ - функция распределения. При этом f называется функцией плотности распределения вероятности случайной величины.

3. Сформулировать определение непрерывной случайной величины. Записать основные свойства функции плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Случайная величина называется непрерывной если $\exists\, f:\ R \rightarrow R$ такая что $\forall\, x \in R: F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$
Где $F(x)$ - функция распределения.
Свойства функции плотности:

1. $\forall\, x \in R:\ f(x) \ge 0$
2. $P\{x1 \le X < x2\} = \int\limits_{x1}^{x2} f(x)dx$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ условие нормировки
4. $P\{x \le X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$; x_0 —точка непрерывности f.
5. $P\{X = x_0\} =$ 0 для любого наперед заданного x0

4. Сформулировать определения случайного вектора и его функции распределения вероятностей. Записать свойства функции распределения двумерного случайного вектора.

Пусть $(\Omega,\ B,\ P)$- вероятностное пространство и $X_1,\ X_2,\ \dots\ ,\ X_n$- случайные величины, заданные на этом пространстве. Тогда случайным вектором размерности n называется кортеж $(X_1,\ X_2,\ \dots\ ,\ X_n)$, составленный из этих случайных величин.

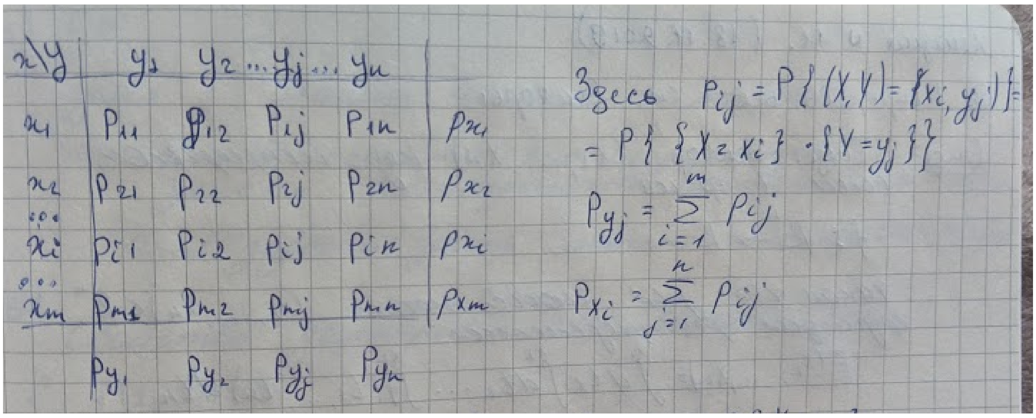
Функцией распределения вероятностей случайного вектора $(X_1,\ X_2,\ \dots\ ,\ X_n)$ называется отображение $F\colon\ R^n\colon \to R$, определенное правилом$F\colon (x_1,\ \dots\ ,\ x_n) \to P\{X_1 < x_1,\ \dots\ ,\ X_n <\ x_n\}$. $F(x_1,\ \dots\ ,\ x_n)\ =\ P\{X_1 < x_1,\ \dots\ ,\ X_n <\ x_n\}$.

Свойства функции распределения двумерного случайного вектора:

1. $0\ \le F(x_1,\ x_2) \le\ 1$
2. При фиксировании одной из компоненты вектора, F(x1, x2) как функция одной переменной является неубывающей.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,\ y)\ =\ 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(y,\ x)\ =\ 0$; где y = const
4. $\lim\limits_{x,\,y\to+\infty} F(x,\ y)\ =\ 1$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,\ y)\ =\ F_y(y)$; $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,\ y)\ =\ F_x(x)$
6. $P\{a1\ \le X_1 \le b1,\ a2\ \le X_2 \le b2\}\ =\ F(b1,\ b2)\ -\ F(a1, b2)\ -\ F(a2, b1)\ +\ F(a1, a2)$
7. При фиксировании одной из компоненты вектора, F(x1, x2) как функция одной переменной непрерывна слева в каждой точке.

5. Сформулировать определение дискретного случайного вектора; понятие таблицы распределения двумерного случайного вектора. Сформулировать определения непрерывного случайного вектора и его функции плотности распределения вероятностей.

Случайный вектор называется дискретным, если каждая его компонента - дискретная случайная величина.



x\y	y_1	y_2 ... y_j ...	y_n	
x_1	p_{11}	p_{12} p_{1j}	p_{1n}	p_{x_1}
x_2	p_{21}	p_{22} p_{2j}	p_{2n}	p_{x_2}
...				
x_i	p_{i1}	p_{i2} p_{ij}	p_{in}	p_{x_i}
...				
x_m	p_{m1}	p_{m2} p_{mj}	p_{mn}	p_{x_m}
	p_{y_1}	p_{y_2} p_{y_j}	p_{y_n}	

Здесь $p_{ij} = P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\} = P\{\{X=x_i\}\cdot\{Y=y_j\}\}$

$p_{y_j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$

$p_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$

Случайный вектор называется непрерывным если $\exists\, f\colon\ R^n \to R$ такая, что $\forall\ (x1,\ x2,\ \dots\ ,\ xn)\ \in R^n\colon\ F(x1,\ x2,\ \dots\ ,\ xn)\ =\ \int\limits_{-\infty}^{x1} dt1 \int\limits_{-\infty}^{x2} dt2 \dots \int\limits_{-\infty}^{xn} f(t1, t2,\ \dots\ ,\ tn)\, dtn.$ При этом предполагается что интеграл сходится, а функция f - называется функцией плотности распределения вероятности случайного вектора.

6. Сформулировать определения непрерывного случайного вектора и его функции плотности распределения вероятностей. Записать основные свойства функции плотности распределения двумерных случайных векторов.

Случайный вектор называется непрерывным если $\exists f\colon R^n \to R$ такая, что $\forall (x1,\ x2,\ \dots,\ xn)\ \in R^n\colon F(x1,\ x2,\ \dots,\ xn)\ =\ \int\limits_{-\infty}^{x1} dt1 \int\limits_{-\infty}^{x2} dt2 \dots \int\limits_{-\infty}^{xn} f(t1, t2,\ \dots,\ tn)\, dtn.$ При этом предполагается что интеграл сходится, а функция f - называется функцией плотности распределения вероятности случайного вектора.

Свойства функции плотности:

1. $f(x1,\ x2)\ \geq\ 0$
2. $P\{a1\ \leq\ X1\ \leq\ b1,\ a2\ \leq\ X2\ \leq\ b2\}\ =\ \int\limits_{a1}^{b1} dx1 \int\limits_{a2}^{b2} f(x1,\ x2)\, dx1dx2$
3. $P\{(x1,\ x2)\ \in D\}\ =\ \iint\limits_{D} f(x1, x2)\, dx1dx2$
4. $\iint\limits_{R^2} f(x1, x2)\, dx1dx2\ =\ 1$
5. $P\{x1\ <\ X1 < x1\ +\ \Delta x1,\ x2\ <\ X2 <\ x2\ +\ \Delta x2\}\ \approx f(x1,\ x2)\Delta x1\Delta x2$
6. Для любого наперед заданого значения $P\{(x1,\ x2)\ =\ (x_0,\ y_0)\}\ =\ 0$
7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x1,\ x2)dx2\ =\ f_{x1}(x1)$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x1,\ x2)dx1\ =\ f_{x2}(x2)$

7. Сформулировать определение независимых случайных величин. Сформулировать свойства независимых случайных величин. Сформулировать определение попарно независимых случайных величин и случайных величин, независимых в совокупности.

Случайные величины называются независимыми если $F(x,\ y)\ =\ F_X(x)\ \times F_Y(y)$

Свойства независимых величин:

1. X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall\ x,\ y$ события $\{X\ <\ x\}$ и $\{Y\ <\ y\}$независимые
2. X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall\ x1, x2,\ y1,\ y2$ события $\{x1\ \leq X\ <\ x2\}$ и $\{y1\ \leq\ Y <\ y2\}$ независимые
3. X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall$ промежутков в R $M1,\ M2$ события $\{X\ \in\ M1\}$ и $\{Y\ \in M2\}$ независимые
4. Пусть (X, Y) - дискретный случайный вектор; $p_{ij} = P\{(X,\ Y)\ =\ (xi,\ xj)\}$; $p_{xi} = P\{X\ =\ xi\}$; $P_{yj}\{Y\ =\ yj\}; (i\ =\ 1,\ n;\ j\ =\ 1,\ m)$. Тогда X и Y независимы $\Leftrightarrow$ $p_{ij} = p_{xi} \times P_{yj}$
5. Пусть (X, Y) - непрерывный случайный вектор. Тогда X и Y независимы $\Leftrightarrow$ $f(x, y)\ =\ f_X(x)\ \times f_Y(y)$

Случайные величины $X1,\ \dots,\ Xn$ называются попарно независимыми если $i\ \neq j$: X_i и X_j независимы. Независимыми в совокупности, если $F(x1,\ \dots,\ xn)\ =\ F_{X1}(x1)\ \times\ \dots\ \times F_{Xn}(xn)$.

8. Понятие условного распределения. Доказать формулу для вычисления условного ряда распределения одной компоненты двумерного дискретного случайного вектора при

условии, что другая компонента приняла определенное значение. Записать формулу для вычисления условной плотности распределения одной компоненты двумерного непрерывного случайного вектора при условии, что другая компонента приняла определенное значение.

Условным распределением компоненты X двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) при условии, что случайная величина Y приняла значение y0 называется набор чисел $\pi_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{yj}}$, где $p_{ij} = P\{(X, Y) = (xi, yj)\}$; $p_{xi} = P\{X = xi\}$;$p_{yj} = P\{Y = yj\}$. Аналогично определяется условное распределение компоненты Y при условии что X=x0. $\tau_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{xi}}$.

9. Сформулировать определение независимых случайных величин. Сформулировать критерий независимости двух случайных величин в терминах условных распределений.

Две случайные величины называются независимыми если $F(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$.

Пусть (X, Y) - двумерный случайный массив. Тогда следующие три условия эквивалентны

1. X и Y независимы
2. $F_X(x) \equiv F_X(x|Y = y)$ Для люого y, для которого определена $F_X(x|Y = y)$
3. $F_Y(y) \equiv F_Y(X = x| y)$Для любого x, для которого определена $F_Y(X = x| y)$

10. Понятие функции случайной величины. Указать способ построения ряда распределения функции дискретной случайной величины. Сформулировать теорему о плотности распределения функции от непрерывной случайной величины.

11. Понятие скалярной функции случайного векторного аргумента. Доказать формулу для нахождения значения функции распределения случайной величины Y , функционально зависящей от случайных величин X1 и X2.

12. Сформулировать и доказать теорему о формуле свертки.

13. Сформулировать определение математического ожидания случайной величины (дискретный и непрерывный случаи). Записать формулы для вычисления математического ожидания функции от случайной величины. Сформулировать свойства математического ожидания. Механический смысл математического ожидания.

14. Сформулировать определение дисперсии случайной величины. Записать формулы для вычисления дисперсии в дискретном и непрерывном случае. Сформулировать свойства дисперсии. Механический смысл дисперсии.

15. Сформулировать определения начального и центрального моментов случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия как моменты. Сформулировать определение квантили и медианы случайной величины.

16. Сформулировать определение ковариации случайных величин. Записать формулы для вычисления