1. Сформулировать определение плоской квадрируемой фигуры. Сформулировать определение площади такой фигуры. Сформулировать критерий квадрируемости плоской фигуры (в терминах ее границы).

Область D называется квадрируемой, если существуют конечные значения $sup\, S(m)$ и $inf\, S(M)$ и они равны. Это значение называют площадью области D.
Где m - множество многоугольников, каждый из которых целиком содержится в область D. M - множество многоугольников, каждый из которых целиком содержит в себе D. sup - точная верхняя грань, inf - точная нижняя грань множества соответствующих площадей. S(m)/S(M) - площадь одного многоугольника взятого из множества.

Замкнутая плоская область квадрируема тогда и только тогда, когда площадь ее граница равна нулю.
Говорят что множество D точек плоскости имеет площадь нуль, если D можно целиком заключить в многоугольник сколь угодно малой площади

2. Задача о вычислении объема z-цилиндрического тела. Сформулировать определение двойного интеграла.

D - область определенная на Oxy
Функция $f\colon D \to R$ определенная на множестве D и $f(x, y) \geq 0$ при $x,\ y \in D$
Тело T ограничено плоскость Oxy, графиком некоторой функции $z = f(x, y)$ и цилиндрической поверхностью, направляющей которой совпадает с границей области D, а образующая параллельна Oz.

1) Разобьем область D на n непересекающихся малых областей.
   $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Di,\ int\, Di \cap int\, Dj = \varnothing$ при $i \neq j$.
2) Выберем точку $Mi \in Di$
3) Считая, что размеры Di малы получим
   $\Delta Vi \approx f(Mi) \times S(Di)$ - объем части тела, расположенного над областью Di

Тогда объем тела T $V = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta Vi \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(Mi\ )S(Di)$. Чем меньше области тем точнее

$V = \lim\limits_{max\, diam(Di) \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(Mi) \times S(Di)$. max diam - максимальная длина отрезка внутри области.

Пусть D - квадрируемая замкнутая область на плоскости Oxy, $f\colon D \to R$- функция двух переменных. Тогда двойным интегралом функции f по области D называют число

$I = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \lim\limits_{d(R) \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(Mi)S(Di)$, где

$R = \{D1, D2, \dots, Dn\}$- разбиение области D.

1) D - квадрируемая замкнутая плоская область
2) $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Di$
3) $int\, Di \cap int\, Dj = \varnothing$ при $i \neq j$
4) Di квадрируема

d(R) - диаметр разбиения R. $d(R) = max\, diam(Di),\ i = 1, n$
$Mi \in Di$ точка взятая на Di.

3. Задача о вычислении массы пластины. Сформулировать определение двойного интеграла.

Пусть пластина занимает область D на плоскости. А функция $f(x, y) \geq 0$поверхностная плотность материала в т. M(x, y).

Чтобы найти массу m этой пластины,

1) Разобьем область D на n непересекающихся частей Di: $D = \bigcup_{i=1}^{n} Di$.
   $int\ Di \cap int\ Dj = \varnothing$ при $i \neq j$.
2) Выберем точку Mi в области Di
3) Считая что области Di малы, можно принять что в пределах области плотность меняется незначительно, поэтому во всех точках области плотность $\approx f(Mi)$. Тогда $\Delta mi = f(Mi) \times S(Di)$.

Тогда $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m \approx \sum_{i=1}^{n} f(Mi)S(Di)$.

Уменьшаем Di, повышаем точность. Перейдем к пределу. $m = \lim_{maxdiam(Di) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(Mi)S(Di)$.

Пусть D - квадрируемая замкнутая область на плоскости Oxy, $f: D \to R$- функция двух переменных. Тогда двойным интегралом функции f по области D называют число

$I = \iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{d(R) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(Mi)S(Di)$, где

$R = \{D1, D2, \ldots , Dn\}$- разбиение области D.

1) D - квадрируемая замкнутая плоская область
2) $D = \bigcup_{i=1}^{n} Di$
3) $int\ Di \cap int\ Dj = \varnothing$ при $i \neq j$
4) Di квадрируема

d(R) - диаметр разбиения R. $d(R) = max\, diam(Di),\ i = 1, n$

$Mi \in Di$ точка взятая на Di.

4. Сформулировать свойства линейности и аддитивности двойного интеграла, сохранения двойным интегралом знака функции.

1) Линейность
   a) Если функции f, g - интегрируемы в области D (то есть для них существует соответствующий интеграл и он конечен), то f+g тоже интегрируема в D.
      $\iint_D (f \pm g)dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D g(x, y)dxdy$
   b) $\iint_D c \times f(x, y)\, dxdy = c \times \iint_D f(x, y)dxdy$, c = const
2) Аддитивность
   Пусть D1, D2 - плоские квадрируемые области, a - интегрируема в D1 и в D2, D1 и D2 не пересекаются. Тогда f - интегрируема в $D = D1 \cup D2$:
   $\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D1} f(x, y)dxdy + \iint_{D2} f(x, y)dxdy$.
3) Сохранение знака функции

Пусть f интегрируема в области D и неотрицательна в точках, принадлежащих D

Тогда $\iint\limits_D f(x, y)dxdy \ \geq 0$.

5. Сформулировать теоремы об оценке модуля двойного интеграла, об оценке двойного интеграла и следствие из нее, теорему о среднем значении для двойного интеграла.

1) Теорема об оценке модуля дв. интеграла
   Пусть f интегрируема в области D. Тогда |f| интегрируема в D. $|\iint\limits_D f(x, y)dxdy| \ \leq \ \iint\limits_D |f(x, y)|dxdy.$
2) Теорема об оценке дв. интеграла
   Пусть f, g - интегрируемы в D, $m \ \leq \ f(x, y) \ \leq M, \ g(x, y) \ \geq 0$ при $(x, y) \ \in D.$

   Тогда $m \ \times \ \iint\limits_D g(x, y)dxdy \ \leq \iint\limits_D f(x, y)g(x, y)dxdy \ \leq \ M \ \times \iint\limits_D g(x, y)dxdy$

   Сл: При $g(x,y) \ \equiv 1, \ m \ \times \ S(D) \ \leq \iint\limits_D f(x, y)dxdy \ \leq \ M \ \times S(D)$
3) Теорема о среднем значении
   Пусть D - линейно связная замкнутая область (то есть граница D является связным множеством) и f, g - непрерывны в D. g - знакопостоянная.

   Тогда $\exists\, Mo \ \in D$, такое что $\iint\limits_D f(x, y)g(x, y)dxdy \ = f(Mo) \times \iint\limits_D g(x, y)dxdy$

   Или при $g \equiv 1\colon \ f(Mo) \ = \ < f > \ = \frac{1}{S(D)} \times \iint\limits_D f(x, y)dxdy$

   Среднее значение функции f в области D

6. Сформулировать определение y-правильной области и теорему о вычислении двойного интеграла по произвольной y-правильной области.

Область D на плоскости Oxy называется y-правильной, если любая прямая, параллельная Oy, пересекает область не более чем в 2 точках или содержит участки границы области целиком.
$D \ = \ \{(x, y)\colon a \ \leq x \ \leq b, \ \varphi 1(x) \ \leq \ y \ \leq \ \varphi 2(x)\}$

Теорема: Пусть 1) $D \ = \ \{(x, y)\colon a \ \leq x \ \leq b, \ \varphi 1(x) \ \leq \ y \ \leq \ \varphi 2(x)\}$

2) $\exists \iint\limits_D f(x, y)dxdy \ = I$

3) $\forall\, x \in [a, b]\ \exists \int\limits_{\varphi 1(x)}^{\varphi 2(x)} f(x, y)dy \ = \ F(x)$

Тогда существует повторный интеграл

$In \ = \ \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi 1(x)}^{\varphi 2(x)} f(x, y)dy \ = \ \int\limits_a^b F(x)dx$ и $I \ = \ In$

7. Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле. Записать формулы перехода в двойном интеграле от декартовых координат к полярным и обобщенным полярным координатам. Дать геометрическую интерпретацию полярных координат.

Пусть 1) $Dxy \ = \ \Phi(Duv)$

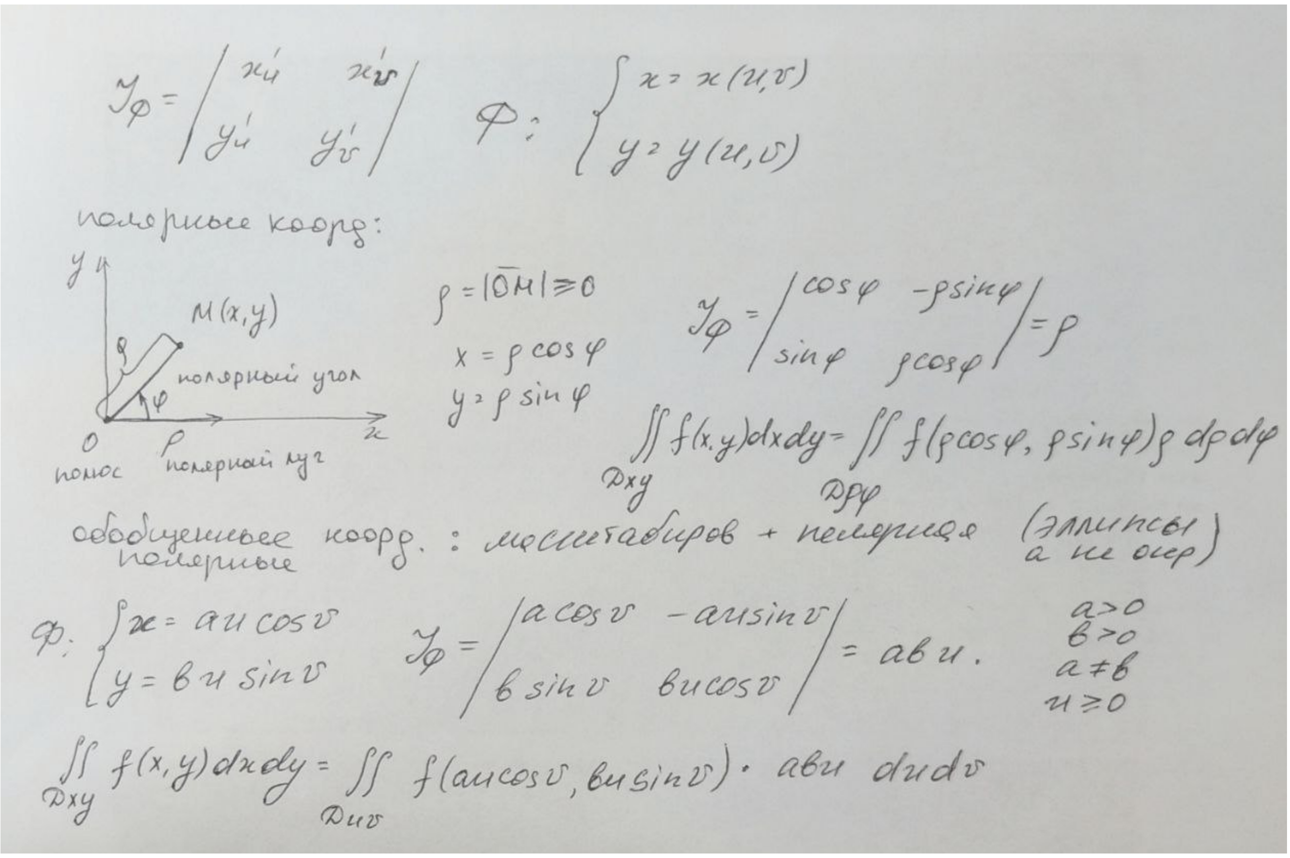
2) Ф- биективно, непрерывно и непрерывно дифференцируема в Duv

3) $J_Ф \neq 0$

4) f - интегрируема в D.

Тогда $f(x(u, v), y(u, v))$ - интегрируема в D и

$$\int\int_{Dxy} f(x, y)dxdy = \int\int_{Duv} f(x(u, v), y(u, v)) \times |J_Ф|dudv$$



8. Приложения двойного интеграла: записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, объема z-цилиндрического тела, массы пластины с использованием двойного интеграла.

$S = \int\int_D 1dxdy$; $M = \int\int_D m(x, y)dxdy$; $V = \int\int_D z(x, y)dxdy$ (Для ограничения Oxy снизу и функцией z(x,y) сверху) в общем виде: $V = \int\int_D [z2(x, y) - z1(x, y)]dxdy$, z1 - снизу, z2 - сверху.

9. Сформулировать определение кубируемого тела и объема кубируемого тела. Сформулировать критерий кубируемости тела (в терминах границы).

Область G $\subseteq R^3$ называется кубируемой, если существуют конечные значения $sup\, V(m)$ и $inf\, V(M)$ и они равны. Это значение называют объемом области G.

Где m - множество многогранников, каждый из которых целиком содержится в область G. M - множество многогранников, каждый из которых целиком содержит в себе G. sup - точная верхняя грань, inf - точная нижняя грань множества соответствующих объемов. V(m)/V(M) - объем одного многогранников взятого из множества.

Замкнутая область в R^3кубируема тогда и только тогда, когда ее граница имеет объем равный нулю.

Говорят, что множество G точек пространства имеет объем нуль, если G можно целиком заключить в многогранник сколь угодно малого объема.

10. Задача о вычислении массы тела. Сформулировать определение тройного интеграла.

Тело T занимает область G $\subseteq R^3$

Функция $f\colon G \to R$ определенная на множестве G и $f(x, y, z) \geq 0$ при $(x, y, z) \in G$ - значение плотности материала в точке

1) Разобьем область G на n непересекающихся малых областей.

   $G = \bigcup_{i=1}^{n} Gi,\ int\, Gi \cap int\, Gj = \varnothing$ при $i \neq j$.

2) Выберем точку $Mi \in Gi$
3) Считая, что размеры Gi малы получим

   $\Delta mi = m(Gi) \approx f(Mi) \times V(Di)$ - масса части тела, занимающего область Gii

Тогда масса тела T $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta mi \approx \sum_{i=1}^{n} f(Mi\ )V(Di)$. Чем меньше области тем точнее

$m = \lim_{max\, diam(Gi) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(Mi) \times V(Di)$. max diam - максимальная длина отрезка внутри области.

Пусть G - кубируемая замкнутая область, $f\colon G \to R$- функция трех переменных. Тогда тройным интегралом функции f по области G называют число

$I = \iiint_G f(x, y, z)dxdydz = \lim_{d(R) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(Mi)V(Di)$, где

$R = \{G1, G2, \dots, Gn\}$- разбиение области G.

1) G - квадрируемая замкнутая плоская область
2) $G = \bigcup_{i=1}^{n} Gi$
3) $int\, Gi \cap int\, Gj = \varnothing$ при $i \neq j$
4) Gi квадрируема

d(R) - диаметр разбиения R. $d(R) = max\, diam(Gi),\ i = 1, n$

$Mi \in Gi$ точка взятая в Gi.

11. Сформулировать свойства линейности и аддитивности тройного интеграла, сохранения тройным интегралом знака функции.

1) Линейность
   a) Если функции f, g - интегрируемы в области G (то есть для них существует соответствующий интеграл и он конечен), то f+g тоже интегрируема в G.

      $\iiint_G (f + g)dxdydz = \iiint_G f(x, y, z)dxdydz \pm \iiint_G g(x, y, z)dxdydz$

   b) $\iiint_G c \times f(x, y, z)\, dxdydz = c \times \iiint_G f(x, y, z)dxdydz$, c = const

2) Аддитивность

   Пусть G1 и G2 - кубируемые, непересекающиеся области и на них интегрируема функция f. Тогда f интегрируема в $G = G1 \cup G2$

   $\iiint_G f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{G1} f(x, y, z)dxdydz + \iiint_{G2} f(x, y, z)dxdydz.$

3) Сохранение знака функции

Пусть f интегрируема в области G и неотрицательна в точках, принадлежащих G

Тогда $\iiint_G f(x,\ y,z)dxdydz\ \geq 0$.

12. Сформулировать теоремы об оценке модуля тройного интеграла, об оценке тройного интеграла и следствие из нее, обобщенную теорему о среднем значении для тройного интеграла.

1) Теорема об оценке модуля тр. интеграла
   Пусть f интегрируема в области G. Тогда |f| интегрируема в G.
   $|\iiint_G f(x,\ y,z)dxdydz|\ \leq\ \iiint_G |f(x,\ y,z)|dxdydz.$
2) Теорема об оценке тр. интеграла
   Пусть f, g - интегрируемы в G, $m\ \leq\ f(x,\ y,z)\ \leq M,\ g(x,\ y,z)\ \geq 0$ при $(x,\ y,\ z)\ \in G.$
   Тогда $m\ \times\ \iiint_G g(x,\ y,z)dxdydz\ \leq \iiint_G f(x,\ y,z)g(x,\ y,\ z)dxdydz\ \leq\ M\ \times \iiint_G g(x,\ y,z)dxdydz$
   Сл: При $g(x,y,z)\ \equiv 1,\ m\ \times\ V(G)\ \leq \iiint_G f(x,\ y,z)dxdydz\ \leq\ M\ \times V(D)$
3) Теорема о среднем значении
   Пусть G - линейно связная замкнутая область и f, g - непрерывна в G. g - знакопостоянная.
   Тогда $\exists\ Mo\ \in D$, такое что $\iiint_G f(x,\ y,z)g(x,\ y,\ z)dxdydz\ = f(Mo)\ \times \iiint_G g(x,\ y,z)dxdydz$
   Или при $g\ \equiv 1$: $f(Mo)\ =\ \frac{1}{V(G)} \times \iiint_G f(x,\ y,z)dxdydz$

13. Сформулировать определение тройного интеграла и теорему о сведении тройного интеграла к повторному для z-правильной области.

Пусть G - кубируемая замкнутая область, $f\colon G\ \to R$- функция трех переменных. Тогда тройным интегралом функции f по области G называют число

$I\ = \iiint_G f(x,y,\ z)dxdydz\ =\ \lim\limits_{d(R)\to 0}\ \sum\limits_{i=1}^{n} f(Mi)V(Di)$, где

$R\ =\ \{G1, G2,\ \dots\ , Gn\}$- разбиение области G.

5) G - квадрируемая замкнутая плоская область
6) $G\ =\ \bigcup\limits_{i=1}^{n}\ Gi$
7) $int\ Gi\ \cap\ int\ Gj\ =\varnothing$ при $i\neq j$
8) Gi квадрируема

d(R) - диаметр разбиения R. $d(R)\ =\ max\ diam(Gi),\ \ i\ = 1, n$

$Mi\ \in\ Gi$ точка взятая в Gi.

Область G называется z-правильной, если любая прямая, параллельная Oz, пересекает область не более чем в 2 точках или содержит участки границы области целиком.

$G\ =\ \{(x,\ y,z)\colon\ (x,\ y)\ \in Dxy,\ z1(x,\ y)\ \leq\ z\ \leq z2(x,\ y)\}$

Теорема: Пусть 1) $G\ =\ \{(x,\ y,z)\colon\ (x,\ y)\ \in Dxy,\ z1(x,\ y)\ \leq\ z\ \leq z2(x,\ y)\}$ z-правильная

2) $\exists \iiint_G f(x,y,\ z)dxdydz\ = I$

3) $\forall(x,\ y)\ \in Dxy\ \exists \int\limits_{z1(x,y)}^{z2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz\ =\ F(x,\ y)$

Тогда существует повторный интеграл

$$In\ =\ \int\int\limits_{Dxy} dxdy \int\limits_{z1(x,y)}^{z2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz\ =\ \int\int\limits_{Dxy} F(x,\ y)dxdy \text{ и } I\ =\ In$$

14. Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле. Записать формулы перехода в тройном интеграле от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим координатам. Дать геометрическую интерпретацию цилиндрических и сферических координат.

Пусть 1) $Gxyz\ =\ \Phi(Guvw)$

2) Φ- биективно, непрерывно и непрерывно дифференцируема в $Guvw$

3) $J_{\Phi}\ \neq\ 0$

4) f - интегрируема в G.

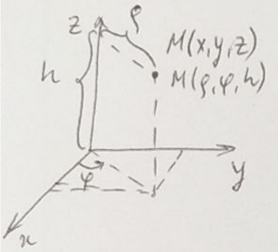
Тогда $f(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w))$ - интегрируема в G и

$$\int\int\limits_{Gxyz}\int f(x, y,\ z)dxdydz\ =\ \int\int\limits_{Guvw}\int f(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w))\ \times\ |J_{\Phi}|dudvdw$$

$\Phi: Guvw \to Gxyz$

$$\Phi: \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \qquad J_\varphi = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

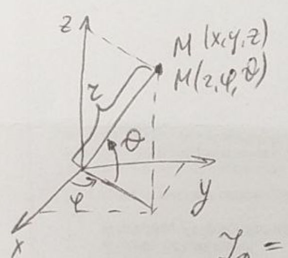
цилиндр:



$$\Phi: \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad J_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iiint\limits_{Dxyz} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D\rho\varphi h} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, h)\,\rho\, d\rho d\varphi dh \qquad \rho \geq 0$$

Сферическая.



$$\Phi: \begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases} \qquad J_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$J_\varphi = r^2\cos\theta$$

$$\iiint\limits_{Dxyz} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{Dr\varphi\theta} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)\, r^2|\cos\theta|\, drd\varphi d\theta.$$