1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27

1. Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?.

Два события А и В называются несовместными если их пересечение равно пустому множеству (АВ = 0).
Два события А и В называются независимыми если P(AB) = P(A) * P(B)

2. Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Обобщение классического определения на случай бесконечного пространства элементарных исходов. Пусть $\Omega \in R^n$, мера множества $\mu(\Omega)$ конечна (для n = 1, $\mu - \text{длина}$, 2- площадь, 3 - объем....), возможность принадлежности исхода эксперимента некоторому событию пропорциональна мере этого события и не зависит от формы и расположения внутри.

Тогда вероятностью осуществления события А называют число $P(A) \ = \ \mu(A)/\mu(\Omega)$.

3. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента, β- набор подмножеств мнножества Ω. Тогдаβназывается $\sigma - \text{алгеброй}$событий ,если

1) $\beta \neq \varnothing$
2) $A \in \beta => \neg A \in \beta$
3) $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \beta => A_1 + A_2 + ... + A_n + ... \in \beta$

Свойства:

- $\Omega \in \beta$; ($\beta \neq \varnothing => \exists A \in \beta => \neg A \in \beta => A + \neg A \in \beta => \Omega \in \beta$).
- $\varnothing \in \beta$; ($\Omega \in \beta => \neg\Omega \in \beta => \varnothing \in \beta$).
- $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \beta => A_1 * A_2 * ... * A_n * ... \in \beta$;(закон Деморгана)
- $A , B \in \beta => A \backslash B \in \beta$ (A\B = A * ¬B)

4. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента. В - σ-алгебра на Ω.
Вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение
$P: B \rightarrow R$ (событие из В -> число), обладающее следующими свойствами

1) Для любого А P(A)>= 0 (аксиома неотрицательности)
2) P(Ω) = 1 (аксиома нормированности)

3) Если A1, A2, ... , An, ... ,принадлежащие B,попарно несовместные события, то P(A1 + A2 + ... + An + ...) = P(A1) + P(A2) + ... + P(An) + ... (расширенная аксиома сложения)

Свойства:

- P(¬A) = 1 - P(A);
- P(∅) = 0;
- Если $A \subseteq B$, то P(A) <= P(B);
- Для любого A 0<=P(A)<= 1;
- P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);
- Для любого конечного набора событий Ai ∈B справедливо

  $$P(A1 + A2 + \dots + An) = \sum_{1 \le i \le n} P(Ai) - \sum_{1 \le i1 \le i2 \le n} P(Ai1 * Ai2) + \dots + (-1)^{n+1} P(Ai * \dots *$$

  формула включений исключений;

5. Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

расширенная аксиома сложения - Если A1, A2, ... , An, ... ,принадлежащие B, попарно несовместные события, то P(A1 + A2 + ... + An + ...) = P(A1) + P(A2) + ... + P(An) + ...

аксиома сложения - Если A1, A2, ... , An ,принадлежащие B, попарно несовместные события, то P(A1 + A2 + ... + An) = P(A1) + P(A2) + ... + P(An). Конечное число событий.

Аксиома непрерывности - Для любой неубывающей последовательности событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$справедливо

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A), \text{ где } A = A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

6. Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло событие B (P(B) != 0) называют число P(A) = P(AB)/P(B).

7. Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий

8. Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

9. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

10. Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

11. Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

12. Сформулировать теорему о формуле Байеса.

13. Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

14. Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k1 до k2 успехов.

----

15. Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно предсказать. Этот результат и называется элементарным исходом случайного эксперимента. Пространством элементарных исходов Ω называется множество всех элементарных исходов случайного эксперимента.
Классическое определение вероятности:

- Пусть Ω конеччно ($|\Omega| = N < \infty$)
- по условиям случайного эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход другим (то есть исходы равновозможны)
- Определено событие $A \in \Omega$, $|A| = N_a$.

Тогда Вероятностью осуществления события А называют число P(A) = Na/N.

Пример. Бросают игральную кость. Какова вероятность того, что выпадет четное число очков? ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{2, 4, 6\}$; $P(A) = 3/6 = 1/2$.

16. Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности.

Классическое определение вероятности:

- Пусть Ω конеччно ($|\Omega| = N < \infty$)
- по условиям случайного эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход другим (то есть исходы равновозможны)
- Определено событие $A \in \Omega$, $|A| = N_a$.

Тогда Вероятностью осуществления события А называют число P(A) = Na/N.
Свойства:

1) P(A) >= 0, так как Na >= 0, N > 0 (P(A) = Na/N)
2) P(Ω) = 1, так как P(Ω) = |Ω|/|Ω|= 1
3) Если A и B несовместны, то P(A+B) = P(A) + P(B)
   |A + B| = (|A∪B|) = |A| + |B| - |A∩B| = P(A) + P(B) - 0.
   $P(A + B) = \frac{|A+B|}{N} = \frac{|A|+|B|}{N} = \frac{|A|}{N} + \frac{|B|}{N} = P(A) + P(B)$.

17. Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

Пусть Ω- пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента. $A \subseteq \Omega$ - событие, связанное с этим экспериментом. Этот случайный эксперимент произведен N раз, при этом событие A произошло Na раз. Тогда статистической вероятностью осуществления события A называют эмпирический предел $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{Na}{N}$.

Недостатки: - никакой эксперимент невозможно осуществить бесконечное число раз; - с точки зрения математики это определение является архаизмом, так как не дает достаточной базы для развития теории.

18. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента, β- набор подмножеств мнножества Ω. Тогдаβназывается $\sigma - \text{алгеброй}$событий ,если

4) $\beta \neq \varnothing$
5) $A \in \beta => \neg A \in \beta$
6) $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \beta => A_1 + A_2 + ... + A_n + ... \in \beta$

Свойства:

- $\Omega \in \beta$; ($\beta \neq \varnothing => \exists A \in \beta => \neg A \in \beta => A + \neg A \in \beta => \Omega \in \beta$).
- $\varnothing \in \beta$; ($\Omega \in \beta => \neg\Omega \in \beta => \varnothing \in \beta$).
- $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \beta => A_1 * A_2 * ... * A_n * ... \in \beta$;(закон Деморгана)
- $A , B \in \beta => A \backslash B \in \beta$ (A\B = A * ¬B)

19. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента. B - σ-алгебра на Ω.
Вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение
$P: B \to R$ (событие из B -> число), обладающее следующими свойствами

4) Для любого A P(A)>= 0 (аксиома неотрицательности)
5) P(Ω) = 1 (аксиома нормированности)
6) Если A1, A2, ... , An, ... ,принадлежащие B,попарно несовместные события, то P(A1 + A2 + ... + An + ...) = P(A1) + P(A2) + ... + P(An) + ... (расширенная аксиома сложения)

Свойства:

- P(¬A) = 1 - P(A);
  A + ¬A = Ω=> ¬A = Ω - A;
  A*¬A = $\varnothing$ = > P(A + ¬A) = P(A) + P(¬A) =P(Ω) = 1;
- P($\varnothing$) = 0;
  P($\varnothing$) = P(¬Ω) = 1 - P(Ω) = 1 - 1 = 0;
- Если $A \subseteq B$, то P(A) <= P(B);
  B = A + (B\A) = они несовместны =>
  P(B) = P(A) + P(B\A);
  P (B\A) >= 0

20. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента. B - σ-алгебра на Ω.
Вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение
$P: B \to R$ (событие из B -> число), обладающее следующими свойствами

1) Для любого A P(A)>= 0 (аксиома неотрицательности)
2) P(Ω) = 1 (аксиома нормированности)

3) Если A1, A2, ... , An, ... ,принадлежащие B,попарно несовместные события, то P(A1 + A2 + ... + An + ...) = P(A1) + P(A2) + ... + P(An) + ... (расширенная аксиома сложения)

Свойства:

- P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);
  A + B = A + (B\A) несовсместные => P(A+B) = P(A) + P(B\A);
  B = B\A + AB несовместные => P(B) = P(B\A) + P(AB) => P(B\A) = P(B) - P(AB);
- Для любого конечного набора событий Ai ∈B справедливо

  $$P(A1 + A2 + \dots + An) = \sum_{1\le i\le n} P(Ai) - \sum_{1\le i1\le i2\le n} P(Ai1 * Ai2) + \dots + (-1)^{n+1} P(Ai * \dots *$$

  формула включений исключений;
  Является обобщением свойства 5 на случай N событий.

21. Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.

22. Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

23. Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

24. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

25. Доказать теорему о формуле полной вероятности.

26. Доказать теорему о формуле Байеса.

27. Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.