Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Информатика и системы управления

КАФЕДРА Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Отчет по лабораторной работе №3

По курсу “Моделирование”

Тема: “цепи Маркова”

Студент Лучина Е.Д

Группа ИУ7-71Б

Преподаватель Рудаков И.В.

Москва

2020 г.

Задание лабораторной работы

Реализовать программу для вычисления среднего времени нахождения сложной системы S в каждом из своих состояний при стационарном режиме работы. Система S имеет не более десяти состояний.

Теоретическая часть

Случайный процесс, протекающий в системе S, называется марковским, если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени $t0$ вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние. Вероятностью i-го состояния называется вероятность $_i()$ того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии e_i . Для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице.

$$\sum_{i=0}^{N} p_i(t) = p_0(t) + p_1(t) + \ \dots\ + p_N(t) = 1 \qquad (1)$$

где N - количество состояний

При моделировании системы как марковской цепи задают множество ее состояний E и матрицу переходных вероятностей p. Для изучения системы необходимо также иметь исходное распределение вероятностей - распределение вероятностей нахождения системы в каждом из своих состояний в некоторый момент времени t_0 (можно описать как вектор-строку q_o).

$$E = \{e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_N\}$$

$$p = \begin{matrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \dots & \lambda_{0N} \\ \lambda_{i0} & \lambda_{ij} & \dots & \lambda_{iN} \\ \lambda_{N0} & \lambda_{N1} & \dots & \lambda_{NN} \end{matrix}$$

$$q_0 = (p_1(t_0),\ p_2(t_0),\ \dots,\ p_N(t_0))$$

Стационарное распределение цепи Маркова — это такое распределение вероятности, которое не меняется с течением времени. Основная теорема о стационарных распределениях гласит, что цепь Маркова с дискретным пространством состояний имеет единственное стационарное распределение тогда и только тогда, когда она неразложима (то есть если можно достичь любого состояния из любого другого состояния) и положительно возвратна (с конечным ожидаемым временем возврата в покинутое состояние). Если цепь к тому же является апериодической (т.е. наибольший общий делитель всех возможных длин путей возврата k = 1), тогда, какими бы ни были исходные вероятности, распределение вероятностей цепи сходится к стационарному при стремлении времени к бесконечности: говорят, что цепь имеет предельное распределение.

Предельная вероятность состояния показывает среднее время пребывания системы в этом состоянии. Например, если предельная вероятность состояния e_0 равна 0.5, т.е $p_0 = 0.5$, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии e_0.

Предельные вероятности $p_{\text{пр}_i}$ находят с помощью уравнений Колмогорова.

$$P'_{\text{пр}_i} = \sum_{j=0}^{N} (\lambda_{ji} P_{\text{пр}_j}) - P_{\text{пр}_i} \sum_{j=0}^{N} \lambda_{ij}$$

Пример для системы, имеющей 3 состояния и матрицу интенсивностей вида

$$p = \begin{matrix} 0 & \lambda_{01} & \lambda_{02} \\ \lambda_{10} & 0 & \lambda_{12} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & 0 \end{matrix}$$

$$P'_{\text{пр}_0} = \lambda_{10} P_{\text{пр}_1} + \lambda_{20} P_{\text{пр}_2} - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) P_{\text{пр}_0}$$
$$P'_{\text{пр}_1} = \lambda_{01} P_{\text{пр}_0} + \lambda_{21} P_{\text{пр}_2} - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) P_{\text{пр}_1}$$
$$P'_{\text{пр}_2} = \lambda_{02} P_{\text{пр}_0} + \lambda_{12} P_{\text{пр}_1} - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) P_{\text{пр}_2}$$

Так как предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмогорова их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим. Для поиска решения добавим уравнение нормировки (1).

$$(\lambda_{01} + \lambda_{02}) P_{\text{пр}_0} = \lambda_{10} P_{\text{пр}_1} + \lambda_{20} P_{\text{пр}_2}$$
$$(\lambda_{01} + \lambda_{02}) P_{\text{пр}_1} = \lambda_{01} P_{\text{пр}_0} + \lambda_{21} P_{\text{пр}_2}$$
$$(\lambda_{01} + \lambda_{02}) P_{\text{пр}_2} = \lambda_{02} P_{\text{пр}_0} + \lambda_{12} P_{\text{пр}_1}$$
$$P_{\text{пр}_0} + P_{\text{пр}_1} + P_{\text{пр}_2} = 1$$

Результаты работы

Ниже приведены примеры работы программы для систем с количеством состояний равным 3, 5, 7.

Введите количество состояний системы: 3

	e1	e2	e3
e1	0.4449	0.6592	0.296
e2	0.1226	0.6111	0.4809
e3	0.2057	0.3454	0.9586

Состояния	Предельные вероятности
e1	0.1476
e2	0.4128
e3	0.4395

Введите количество состояний системы: 5

	e1	e2	e3	e4	e5
e1	0.2592	0.9256	0.648	0.8297	0.467
e2	0.6472	0.5351	0.8224	0.1425	0.4538
e3	0.0432	0.5698	0.3912	0.4679	0.4702
e4	0.4185	0.8714	0.2452	0.321	0.8457
e5	0.3329	0.5674	0.0091	0.0167	0.4212

Состояния	Предельные вероятности
e1	0.1128
e2	0.2418
e3	0.1923
e4	0.0941
e5	0.359

Введите количество состояний системы: 7

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
e1	0.7237	0.7278	0.0387	0.6785	0.2793	0.786	0.453
e2	0.9595	0.5788	0.6698	0.5156	0.4887	0.9033	0.2623
e3	0.1733	0.9339	0.0195	0.7551	0.2776	0.4723	0.8502
e4	0.3343	0.2585	0.7218	0.1828	0.6008	0.1026	0.4572
e5	0.5326	0.9491	0.4701	0.5289	0.8517	0.4078	0.8204
e6	0.5781	0.5036	0.7688	0.1435	0.8833	0.8767	0.3353
e7	0.9443	0.9125	0.3134	0.7607	0.3143	0.0449	0.4644

Состояния	Предельные вероятности
e1	0.1648
e2	0.1519
e3	0.1252
e4	0.1875
e5	0.113
e6	0.1236
e7	0.134

Можно отметить что сумма предельных вероятностей равна единице, что соответствует условию нормировки.

```
Введите количество состояний системы: 5
+----+-----+-----+-----+-----+-----+
|    |  e1 |  e2 |  e3 |  e4 |  e5 |
+----+-----+-----+-----+-----+-----+
| e1 | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| e2 | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| e3 | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| e4 | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| e5 | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
+----+-----+-----+-----+-----+-----+
+-----------+-----------------------+
| Состояния | Предельные вероятности |
+-----------+-----------------------+
|     e1    |          -0.0         |
|     e2    |          0.1          |
|     e3    |          0.2          |
|     e4    |          0.3          |
|     e5    |          0.4          |
+-----------+-----------------------+
```

В данном примере, как и ожидалось, большее количество (40%) времени система проводит в состоянии e_5, вероятность перехода в которое из любого состояния максимальна.