Vzorové řešení zadání G

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Je-li f prostá funkce, potom není lichá. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = x$

b) $\left(\forall x \in \mathbb{R} : |x| > 0\right) \Rightarrow \left(\exists y \in \mathbb{R} : \sin y = \frac{\pi}{2}\right)$. ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

c) Je-li f spojitá a ohraničená na $\langle a,b \rangle$, potom $\exists x_0 \in \langle a,b \rangle : f(x_0) = 0$. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = 1, \langle a,b \rangle = \langle 0,1 \rangle$

2) Načrtněte graf funkce, pro kterou platí:

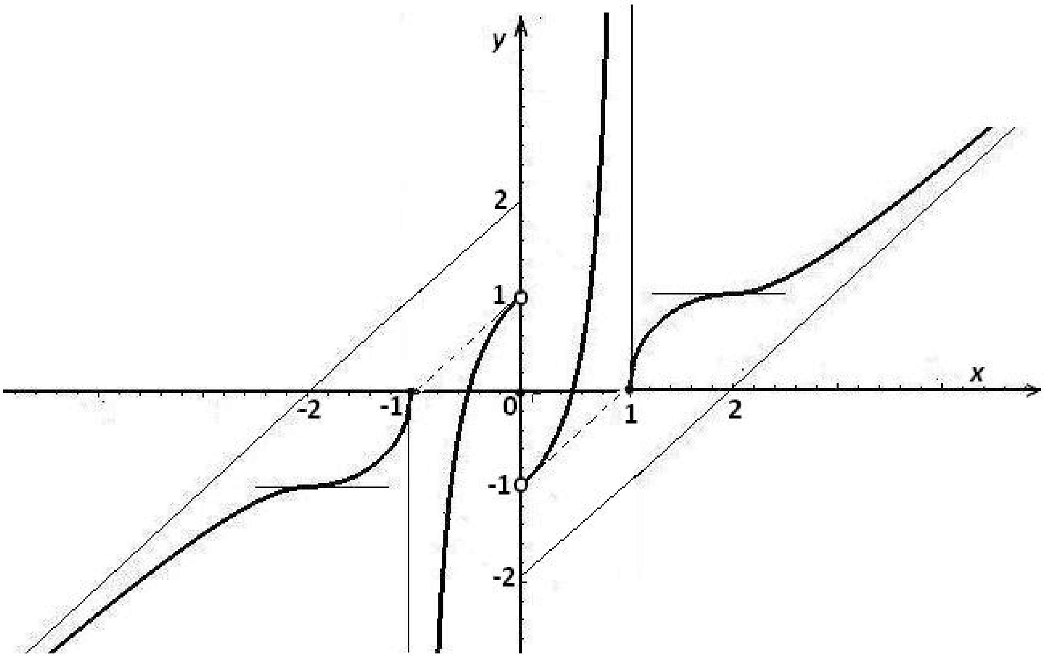
$D_f = \mathbb{R}$, je lichá, a pro $x \geq 0$ má tyto vlastnosti:

V $x = 0$ má nespojitost 1. druhu, v $x = 1$ má nespojitost 2. druhu,

$f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 1,\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \infty,\ f'(2) = 0$,

$f''(x) < 0$ pro $x \in (1,2)$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (0,1)$ a $x \in (2,\infty)$,

pro $x \to \infty$ má asymptotu $y = x - 2$.



3) Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)(x-4)^2}$.

$$f'(x) = \left(\left((2x+1)(x-4)^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2(x-4)^2 + (2x+1)\cdot 2(x-4)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}(x-4)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-4)\left(x-4+2x+1\right)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}(x-4)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot (x-1)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}(x-4)^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(x) = 0$ *pro* $x = 1$, $f'(x) \nexists$ *pro* $x = 4 \vee x = -\frac{1}{2}$.

Znaménko derivace:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & + & & + & & - & & + \\ \hline f'(x) & \nearrow & -\frac{1}{2} & \nearrow & 1 & \searrow & 4 & \nearrow \\ & & & & \text{max} & & \text{min} & \end{array}$$

Lokální maximum v $x = 1$, $f_{\max} = f(1) = 3$, lokální minimum v $x = 4$, $f_{\min} = f(4) = 0$.

4) Vypočítejte integrál $I = \int_2^\infty \left(\frac{1}{3x+1} - \frac{2}{6x-3} + \frac{2}{x^2+7} \right) dx$

$$I = \left[\frac{1}{3}\ln|3x+1| - \frac{1}{3}\ln|6x-3| + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} \right]_2^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3x+1}{6x-3}\right| + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} \right) - \frac{1}{3}\ln\frac{7}{9} - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3}\ln\frac{7}{9} - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{7}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln\frac{9}{14} + \frac{\sqrt{7}}{7}\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{7}}{7} \right)}}.$$

5) Vypočítejte s přesností na čtyři desetinná místa (tj. s chybou menší než 10^{-4}) integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ tak, že integrovanou funkci rozložíte do mocninné řady. Prověřte platnost podmínek, které tento postup umožňují.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \right) dx = \Big|$ řada konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$, můžeme integrovat v libovolných konečných mezích $\Big| = \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots$

$$5\cdot 5! = 600; \quad 7\cdot 7! = 35\,280 > 10^4 \Rightarrow \frac{1}{7\cdot 7!} < 10^{-4};$$

Chyba v alternující řadě je (v absolutní hodnotě) menší než absolutní hodnota prvního vynechaného členu, tedy

$\underline{\underline{I = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!}}} + R$, kde $|R| < 10^{-4}$.

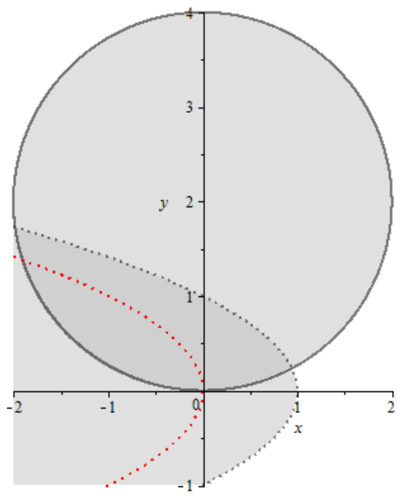
6) Určete a nakreslete definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4y - x^2 - y^2}}{\ln(1 - x - y^2)}$

$$D_f = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 4y - x^2 - y^2 \ge 0 \;\wedge\; 1 - x - y^2 > 0 \;\wedge\; 1 - x - y^2 \ne 1 \right\}$$

$4y - x^2 - y^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y \le 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 \le 4$ - kruh se středem $[0,2]$ a poloměrem 2

$1 - x - y^2 > 0 \Leftrightarrow y^2 < -(x-1)$ - „vnitřek" paraboly s vrcholem $[1,0]$ otevřené doleva

$1 - x - y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = -x$ - parabola s vrcholem v počátku otevřená doleva



Definiční obor je průnik kruhu $x^2 + (y-2)^2 \le 4$ s vnitřkem paraboly $y^2 < -(x-1)$, ze kterého jsou vyňaty body paraboly $y^2 = -x$