2022-2023-01-概率统计辅导（二）

Dulbert 2023.02.02

5：中心极限

6：样本（均、方、标准差）、

7：假设检验、估计（后一道）

北 京 交 通 大 学

2021-2022-1 《概率论与数理统计 B》期末考试

一、单选题（每道小题 3 分）

$X \sim B(3, \frac{2}{100})$

3次，每次有$\frac{2}{100}$概率

1、图书馆新进 3 批新书，每批 100 本，其中每批都有 2 本概率论教材．现从 3 批新书中各抽取一本，这三本书恰有一本概率论教材的概率为【 B 】.

n重伯努利

（A） 0.02×0.98^2 （B） $3\times0.02\times0.98^2$

（C） $0.02^2\times0.98$ （D） $3\times0.02^2\times0.98$．

解：（B）．

$C_3^1 \cdot (\frac{2}{100})(\frac{98}{100})^2$

2、篮球游戏中，甲、乙两人投篮的命中率分别为 0.6 和 0.5．现两人各投球两次，每投中 1 次得 1 分．设甲得分多于乙得分的概率为 $\boxed{p}$，则有【 B 】．

（A） $0 \le p < 0.25$　　（B） $0.25 \le p < 0.5$

（C） $0.5 \le p < 0.75$　　（D） $0.75 \le p \le 1$．

解：（B）．

甲	乙	
2	1	0
1	0	

$(0.6)^2 \cdot 2 \cdot 0.5 \times 0.5$

$(0.6)^2 \cdot (0.5)^2$

$2 \times 0.6 \times 0.4 \times (0.5)^2$

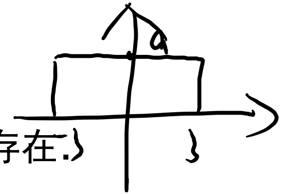
0.39

甲	乙
1	2
2	0

甲	乙
2	1

奇hs

3、在矩形区域 $D:-3\le x\le 3, 0\le y\le a$ 上，若使 $f(x,y)=\dfrac{xy}{1+y^2}$ 构成均匀分布的概率密度函数，则正数 a 的值【 】.



（A） $a=\dfrac{1}{2}$ （B） $a=\dfrac{1}{3}$ （C） $a=\dfrac{1}{6}$ （D） a 不存在.

解：（D）.

因为 $f(x,y)$ 在矩形 $D:-3\le x\le 3, 0\le y\le a$ 上，是关于 x 的奇函数，因此

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{a} f(x,y)dydx=\int_{-3}^{3}xdx\int_{0}^{a}\frac{y}{1+y^2}dy=0$$，所以，不存在满足条件的正数 a .

密度的积分为1

成正比 = k倍

4、一批机器零件的寿命 X 在区间（0，40）上服从密度函数为 $f(x)$ 的连续分布，其中 $f(x)$ 与 $(10+x)^{-2}$ 成正比，则该批零件寿命小于 5 的概率为【 B 】.

（A）$\dfrac{3}{10}$ （B）$\dfrac{5}{12}$ （C）$\dfrac{7}{12}$ （D）$\dfrac{7}{10}$.

$f(x) = k(10+x)^{-2}$

$\int_0^{40} f(x)\,dx = 1$

$k = \dfrac{25}{2}$

解：设概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{(10+x)^2}, & x\in(0,\ 40)\\ 0, & otherwise\end{cases}$，

则由 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{40}\frac{A}{(10+x)^2}dx=\left.\frac{-A}{10+x}\right|_0^{40}=A\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{50}\right)=\frac{2}{25}A=1$，

得 $A=\dfrac{25}{2}$，即 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{25}{2(10+x)^2}, & x\in(0,\ 40)\\ 0, & otherwise\end{cases}$

$f(x) = k(10+x)^{-2}$

因此，$P(X<5)=\int_0^5 \frac{25}{2(10+x)^2}dx=-\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{10+x}\bigg|_0^5=\frac{25}{2}(\frac{1}{10}-\frac{1}{15})=\frac{5}{12}$.

$$\left(\frac{5-1}{50}\right)k=\frac{2}{25}k=1$$

$$k\int_0^{40}\frac{1}{(10+x)^2}dx=1$$

$$k=\frac{25}{2}$$

$$\left[-k\,\frac{1}{10+x}\right]_0^{40}=1$$

$$\frac{-k}{50}+\frac{k}{10}=1$$

记

5、设随机变量 X 和 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$，则随机变量 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 $F(u)=$【 C 】.

（A） $\max\{F_1(u),F_2(u)\}$ （B） $\min\{1-F_1(u),1-F_2(u)\}$

（C） $F_1(u)F_2(u)$ （D） $1-[1-F_1(u)][1-F_2(u)]$. ← min{X,Y}

解：（C）.

由 X 和 Y 相互独立，知 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F(u)=\mathrm{P}\{U\le u\}=\mathrm{P}\{\max(X,Y)\le u\}$$

$$=\mathrm{P}\{X\le u,Y\le u\}=\mathrm{P}\{X\le u\}\mathrm{P}\{Y\le u\}=F_1(u)F_2(u).$$

$$\frac{3\times(-2)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}}=\frac{-6}{6}$$

6、设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.7，令 $U = 3X + 1$, $V = 5 - 2Y$，则 U 和 V 的相关系数等于

【　　】.

$\rho_{XY} = 0.7 = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} =$

（A）-0.7　　（B）0.7　　（C）-0.3　　（D）0.3.

解：（A）.

$\frac{cov(3X+1, 5-2Y)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$

由公式 $\rho(aX + b, cY + d) = \frac{ac}{|ac|}\rho(X, Y)$，

所以，$\rho(3X + 1, -2Y + 5) = -\rho(X, Y) = -0.7$.

$\frac{-6\,cov(X, Y)}{\sqrt{36}\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0.7$　$\frac{x-6}{\sqrt{36}} = -0.7$

7．设随机变量 $X \sim E(1)$，$Y \sim B(2, \frac{1}{3})$，则 $P(XY \le 2\ln 2) =$【 】.

指数分布

离散型

（A）$\frac{1}{2}$ （B）$\frac{2}{3}$ （C）$\frac{3}{4}$ （D）$\frac{5}{6}$.

解：（D）.

e^{-x}

$$P(XY \le 2\ln 2) = P(Y=0)P(XY \le 2\ln 2 \mid Y=0) + P(Y=1)P(XY \le 2\ln 2 \mid Y=1) + P(Y=2)P(XY \le 2\ln 2 \mid Y=2)$$

$$= P(Y=0) + P(Y=1)P(X \le 2\ln 2) + P(Y=2)P(X \le \ln 2)$$

$$= (1-\frac{1}{3})^2 + 2\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})\times(1-e^{-2\ln 2}) + (\frac{1}{3})^2\times(1-e^{-\ln 2}) = \frac{5}{6}.$$

$P(XY \mid Y=0) = \frac{P(XY)P(Y=0)}{P(XY)}$

条件概公式

$P(Y=0)\cdot P(XY \le 2\ln 2 \mid Y=0)$

$+P(Y=1)\cdot P(XY \le 2\ln 2 \mid Y=1)$

$=2\times(\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}\times$

$(\frac{2}{3})^2$

$\int_0^{2\ln 2} e^{-x}dx$ $-2\ln 2+1$

$(-e^{-x})_0^{2\ln 2}$

8、对于任意随机变量 X 和 Y，如果 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则【 D 】.

考过

（A） X 和 Y 独立 （B） X 和 Y 不独立

（C） $DXY = DX\,DY$ （D） $EXY = EX\,EY$.

$DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y) = DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)$

解：（D）.

$\operatorname{cov}(X,Y)=0 = EXY-EXEY=0$

由 $\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}(X-Y)$，可知

$$\mathrm{D}X+\mathrm{D}Y+2\operatorname{cov}(X,Y)=\mathrm{D}X+\mathrm{D}Y-2\operatorname{cov}(X,Y);$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\mathrm{E}XY-\mathrm{E}Y\mathrm{E}Y=0; \quad \mathrm{E}XY=\mathrm{E}Y\mathrm{E}Y .$$

$np(1-p) = 0.1 \cdot 6n$ $0.16n$ $D(X) = 12$

$n = \ldots$

9、随机变量 X 服从二项分布 $X \sim B(n, 0.8)$，c 为任意实数，若 $E[(X-c)^2]$ 的最小值为 12，则 n 与以下哪一个数最接近【　　】.

$EX = np$

$DX = np(1-p)$

c是期望

（A）16　　（B）32　　（C）75　　（D）96.

可以展开成c的二次函数

$c^2 - 2EX \cdot c + E(X^2)$

解：（C）.

为方差　　(中心矩)

$\boxed{E[(X-c)^2]}$ 的最小值，就是 X 的方差.

而 $D(X) = n \times 0.8 \times 0.2 = 0.16n = 12$，则 $n = 75$.

可以理解为，减去均值时候的差平方和最稳定(小)

则刚好为方差.

$np(1-p) = 0.16n = 12$

$n = 75$

均匀分布

10、设 $X \sim N(0,3)$， $Y \sim \boxed{U}(0,\ 3)$， 且 $D(X-Y)=3$， 则 $\rho_{X,Y}=$ 【 A 】.

（A） $\frac{1}{4}$ （B） $\frac{1}{3}$ （C） $\frac{1}{2}$ （D） 1.

解：（A）.

显然，有 $EX=0$， $DX=3$， $EY=\frac{3}{2}$， $DY=\frac{3}{4}$， 故由

$$D(X-Y)=DX+DY-2\,\mathrm{cov}(X,Y)=3+\frac{3}{4}-2\,\mathrm{cov}(X,Y)=3$$

得 $\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{3}{8}$， 于是 $\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{4}$.

$EX=0$

$DX=3$

$EY=\frac{1}{3}$

$DY=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{3}{4}$

$DX+DY-2\,\mathrm{cov}(X,Y)=3$

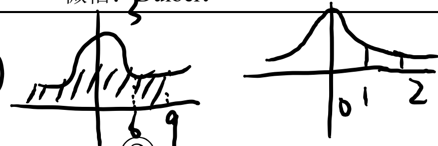
$\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{3+\frac{3}{4}-3}{2}$

$=\frac{3}{8}$

$\frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{4}$

二、还是单选题（每道小题 4 分）

①



11、设 $X \sim N(3,9)$，以下论述① $P(X \le 9) = \Phi(2)$；② $P(0 < X \le 6) = 2\Phi(1) - 1$；③ $P(X > 0) = \Phi(1)$；④ $P(|X-3| \ge 6) = 2 - 2\Phi(2)$ 中，错误的个数是【　　】.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3．

解：（A）.

标准正态分布 $X \sim N(0,1)$，$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$，$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$，$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$．

因此，有 $P(X \le a) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \le \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$；

$$P(X \ge a) = 1 - \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P(|X-\mu| \le a) = \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1;$$

$$P(|X-\mu| > a) = 1 - P(|X-\mu| \le a) = 2\left(1 - \Phi(\frac{a}{\sigma})\right).$$

12、随机变量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{10}$ 独立同分布，且方差存在．$\underbrace{\boldsymbol{U}=\cancel{\boldsymbol{X}_1+\cdots+}\boldsymbol{X}_5+\boldsymbol{X}_6}_{6b}$ 和 $\underbrace{\boldsymbol{V}=\boldsymbol{X}_5+\boldsymbol{X}_6\cancel{+\cdots+\boldsymbol{X}_{10}}}_{6b}$，则相关系数 $\rho_{U,V}=$【 B 】.

（A）$\dfrac{1}{4}$ （B）$\dfrac{1}{3}$ （C）$\dfrac{1}{2}$ （D）1．

解：（B）.

记 $\mathbf{E}X_i=a$，$\mathbf{D}X_i=b(i=1,2,\cdots,10)$．

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 独立，可见($X_1,\cdots,X_6$)和($X_7,\cdots,X_{10}$)独立，

以及($X_1,\cdots,X_4$)和(X_5,X_6)独立．因此

$$
\begin{aligned}
\mathbf{cov}(U,V) &= \mathbf{cov}(X_1+\cdots+X_6, X_5+\cdots+X_{10}) \\
&= \mathbf{cov}(X_1+\cdots+X_6, X_5+X_6) \\
&= \mathbf{cov}(X_5+X_6, X_5+X_6) \\
&= \mathbf{D}(X_5+X_6) = \mathbf{D}X_5+\mathbf{D}X_6 = 2b.
\end{aligned}
$$

于是，由 $\mathrm{D}U=\mathrm{D}V=6b$，因此 $\rho=\dfrac{2b}{\sqrt{\mathbf{D}U\,\mathbf{D}V}}=\dfrac{2b}{6b}=\dfrac{1}{3}$.

13、设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，为使$D=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$成为总体方差$\sigma^2$的无偏估计量，应取$k=$【　　】

（A）$\frac{1}{n-1}$　（B）$\frac{1}{n}$　（C）$\frac{1}{2(n-1)}$　（D）$\frac{1}{2n}$.

$E(D)=6^2$

解：（C）.

由已知$\boxed{EX^2=\sigma^2+\mu^2}$．假设统计量$D$是总体方差$\sigma^2$的无偏估计量，

$D(X)=EX^2-(EX)^2$

$EX^2=6^2+M^2$

则$\mathrm{E}D=k\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{E}(X_{i+1}-X_i)^2=k\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{E}\left(X_{i+1}^2+X_i^2-2X_iX_{i+1}\right)$

$$=k\sum_{i=1}^{n-1}\left(2\sigma^2+2\mu^2-2\mu^2\right)=2k(n-1)\sigma^2=\sigma^2.$$ 故$k=\frac{1}{2(n-1)}$.

14、设总体 X 的概率分布为 $P(X=1)=\frac{1-\theta}{2}$，$P(X=2)=P(X=3)=\frac{1+\theta}{4}$，利用来自总体的样本值 $1,3,2,2,1,3,1,2$，可得 θ 的最大似然估计值为【　　】.

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{3}{8}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{5}{8}$.

解：（A）.

构造似然函数 $L(\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5=\frac{(1-\theta)^3(1+\theta)^5}{2^{13}}$.

则 $\ln L(\theta)=3\ln(1-\theta)+5\ln(1+\theta)-13\ln 2$，

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta-1}+\frac{5}{\theta+1}=\frac{8\theta-2}{(\theta-1)(\theta+1)}=0$，得 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{3} \leftarrow \overline{X}^2-2\overline{X}S^2+(S^2)^2>1$

15、设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $X \sim N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，

则 $E[(\overline{X} - S^2)^2] =$ 【　　】.

$\bar{X}$、S^2 相互独立

(A) $\frac{7}{3}$　　(B) 3　　(C) $\frac{16}{3}$　　(D) $\frac{25}{3}$.

5个公式

解：(A).

$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

易：$E(S^2) = \sigma^2$

易知，$\overline{X} \sim N(0, \frac{1}{3})$，$2S^2 \sim \chi^2(2)$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，

因此，$E[(\overline{X} - S^2)^2] = E[(\overline{X}^2 - 2\overline{X} \cdot S^2 + (S^2)^2]$

对 $X \sim \chi^2(n)$，$EX = n$，$DX = 2n$

$= E(\overline{X}^2) - 2E(\overline{X}) \cdot E(S^2) + E[(S^2)^2]$

$\therefore E(2S^2) = 2$

$= D(\overline{X}) - 0 + D(S^2) + E[(S^2)^2] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} D(2S^2) + 1 = \frac{7}{3}$.

$=0$　　$\frac{1}{2}E(2S^2)$

常数　$D(常数) = 0$

$E(S^2) = 1$

三、（满分 10 分） X 和 Y 分别表示甲、乙两公司 2021 年上半年度的利润（亿元）. 某金融机构通过对 X 和 Y 的相关数据进行建模，获得如下函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{18}, & 0\le x\le 3, 0\le y\le 2\\ 0, & \textit{otherwise}\end{cases}$$

(1) $\int_0^3\int_0^2 f(x,y)\,dx\,dy \overset{?}{=} 1$

1）证明 $f(x,y)$ 是概率密度函数.

(2) $P(X>2, Y>1)$

$\int_2^3\int_1^2 \quad dx\,dy$

2）计算甲公司利润大于 2，乙公司利润大于 1 的概率.

3）计算乙公司利润大于 1 的概率.

(3) $P(Y>1)$

$\int_0^3\int_1^2 \quad dx\,dy$

解：1）因为 $f(x,y)\ge 0$，且

$$\int_0^3\int_0^2 f(x,y)dydx=\int_0^3\int_0^2\frac{x^2y}{18}dydx=\int_0^3\frac{x^2}{36}\left(y^2\right)_0^2dx=\int_0^3\frac{x^2}{9}dx=\underline{1},$$ 归一性

所以，$f(x,y)$ 是一个概率密度函数. --4 分

2） $P(X>2,Y>1)=\int_2^3\int_1^2\frac{x^2y}{18}dydx$

$$=\int_2^3\frac{x^2}{36}\left(y^2\right)_1^2dx=\int_2^3\frac{3x^2}{36}dx=\frac{27-8}{36}=\frac{19}{36}.$$ --7 分

3） $P(Y>1)=\int_0^3\int_1^2\frac{x^2y}{18}dydx=\int_0^3\frac{x^2}{36}\left(y^2\right)_1^2dx=\int_0^3\frac{3x^2}{36}dx=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}.$ --10 分

四、（满分 10 分） 平面区域 D 由直线 $y=x$，$y=0$，$x=1$，$x=2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 服从区域 D 上的均匀分布.

$\frac{1}{D}$

$=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

1） 求二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,\ y)$.

2） 求随机变量 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$.

3） 求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

解：1） 区域 D 的面积为 $A=\int_1^2 x dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2=\frac{3}{2}$，

所以，而为随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{2}{3} & (x,\ y)\in D\\ 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}.$$ --3 分

2）当$0<y\le 1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dx=\int_{1}^{2}\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}$，

当$1<y<2$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dx=\int_{y}^{2}\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}(2-y)$，

所以，随机变量Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{3} & 0<y\le 1\\ \frac{2}{3}(2-y) & 1<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}.$$ --6 分

3）当$0<y\le 1$时，$f_Y(y)=\frac{2}{3}>0$，此时条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\quad y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}.$$

当$1<y<2$**时，** $f_Y(y)=\frac{2}{3}(2-y)>0$**，此时条件密度函数为**

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\quad y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2-y} & y<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ --10 分

$n=\cdots$

$\Phi(n\cdots)\geq 95\%$

$X_k\sim B(1,0.04)$

$P(X\leq n)=P\left(\frac{X-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leq\frac{n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\Phi(\cdots)$

五、（满分 10 分） 某公司有 260 台电话分机．每台分机独立工作，且都有 4%的概率请求外部通信信道．利用中心极限定理，估计该公司应配备多少外部通信信道，以使信道请求得到满足的概率超过 95%．

解：设 X_k 表示第 k 台分机请求外部通信信道（$k=1,2,\ldots,260$）．

一次 X_k

多次 $X=\sum_{k=1}^{260} X_k$

$\sigma^2=$

则 $X_k \sim B(1,\ 0.04)$，因此， $E(X_k)=0.04$， $D(X_k)=0.0384$， 而 $\boxed{X=\sum_{k=1}^{260} X_k}$，

由独立分布的中心极限定理，随机变量

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{n}\cdot\sigma}$$

$$\frac{X-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}=\frac{\sum_{k=1}^{260} X_k-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}$$

--4 分

题中所问个数

则 $$P(X\le n)=P\left(\frac{X-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}\le\frac{n-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{n-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}\right)\ge 0.95 .$$ --8 分

即 $\frac{n-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}\ge 1.645$，解，$n\ge 15.5978$，即 $n\ge 16$. --10 分

六、（满分 10 分） 设来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，总体 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$$，其中 $0<\theta<1$．分别以 ν_1, ν_2 表示 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中 1，2 出现的次数，试求：

1）未知参数 θ 的最大似然估计量．

2）未知参数 θ 的矩估计量．

3）当样本值为（1,1,2,1,3,2）时的最大似然估计值和矩估计值．

解：(1) 求参数θ的最大似然估计量．样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$中 1，2 和 3 出现次数分别为

ν_1,ν_2和$n-\nu_1-\nu_2$，则似然函数和似然方程为

$$L(\theta)=\theta^{2\nu_1}\left[2\theta(1-\theta)\right]^{\nu_2}(1-\theta)^{2(n-\nu_1-\nu_2)}=2^{\nu_2}\theta^{2\nu_1+\nu_2}(1-\theta)^{2n-2\nu_1-\nu_2},$$

$$\ln L(\theta)=2^{\nu_2}+(2\nu_1+\nu_2)\ln\theta+(2n-2\nu_1-\nu_2)\ln(1-\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{2\nu_1+\nu_2}{\theta}-\frac{2n-2\nu_1-\nu_2}{1-\theta}=0.$$

似然方程的惟一解，就是参数θ的最大似然估计量：$\hat{\theta}=\dfrac{2\nu_1+\nu_2}{2n}$．　　--4 分

(2) 求参数θ的矩估计量．总体$\boldsymbol{X}$的数学期望为

$$\mathbf{E}X=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2.$$

在上式中用样本均值 $\overline{X}$ 估计数学期望 EX ，可得 θ 的矩估计量：

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}(3-\overline{X}).$$ --8 分

(3) 对于样本值（1, 1, 2, 1, 3, 2），由上述一般公式，可得最大似然估计值

$$\hat{\theta}=\frac{2v_1+v_2}{2n}=\frac{2\times 3+2}{12}=\frac{2}{3};$$

矩估计值 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}(3-\overline{X})=\frac{3}{2}-\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$. --10 分

七、(满分 10 分) 某批矿砂的镍含量（单位：%）的测定总值x服从正态分布，从中任意抽取 5 个样品，测得镍含量为：3.29，3.28，3.25，3.28，3.27．据此样本值，能否认为这批矿砂的镍含量均值为 3.25%（取显著性水平$\alpha=0.01$．且$t_{0.005}(4)=4.6041$，$t_{0.005}(5)=4.0322$，$t_{0.005}(6)=3.7074$，$t_{0.01}(4)=3.7469$，$t_{0.01}(5)=3.3649$，$t_{0.01}(6)=3.1427$）.

解：由题意，可知本问题是在σ^2未知的情况下，均值μ的假设检验问题.

$$H_0:\mu=\mu_0=3.25,\quad H_1:\mu\neq\mu_0\,.$$ --2 分

取检验统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$. --4 分

$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

则当显著性水平$\alpha=0.01$，检验的拒绝域为

$$W=\{|T|>t_{\alpha/2}(n-1)\}.$$ --6 分

其中，$t_{0.005}(4)=4.6041$， $n=5, \overline{X}=3.274, S^2=2.3\times10^{-4}, S=0.0152$.

将样本值代入算出统计量 T 的值

$$|t|=\frac{3.274-3.25}{0.0152/\sqrt{5}}\approx 0.3531<4.6041.$$ --8 分

因此，应接受 $H_0:\mu=\mu_0=3.25$，

可以认为这批矿砂的镍含量的均值为 3.25%. --10 分