ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

1η Σειρά γραπτών ασκήσεων

Ο φοιτητής Σωτήρου Θεόδωρος 03118209

Αθήνα 7/11/2022

Άσκηση 1: Πλησιέστερο Ζεύγος Σημείων

- Divide: Σχεδίασε ένα επίπεδο ώστε περίπου τα μισά σημεία να βρίσκονται σε κάθε μεριά του επιπέδου (χβγ το επίπεδο αυτό είναι της μορφής x = a).
- Conquer: Βρες το κοντινότερο ζεύγος σε κάθε πλευρά
- Combine: Βρες το κοντινότερο ζεύγος με 1 σημείο σε κάθε πλευρά. Έστω δ η μικρότερη απόσταση σημείων από τις δύο πλευρές. Αρκεί να ψάξουμε σημεία που απέχουν το πολύ δ από το επίπεδο, δημιουργούμε δηλαδή δυο lanes. Σόρταρε τα σημεία στις λωρίδες με βάση τους άξονες y και z (σε δυο ξεχωριστούς πίνακες). Μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει B τέτοιο ώστε αν δυο σημεία απέχουν B (περίπου 30) καβάκια αποκλείεται να έχουν απόσταση ≤ δ
- Επέστρεψε την καλύτερη από τις τρείς λύσεις.

Ο αλγόριθμος χωρίζει να σημεία σε δύο μέρη και έπειτα τα κάνει merge. Άρα έχουμε $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n\log n)$ και άρα από το Master Theorem έχουμε $T(n) = \Theta(n\log^2 n)$.

Άσκηση 2: Πόρτες Ασφαλείας Στο Κάστρο

1. Ξεκίνα θέτοντας τους διακόπτες στην κάτω θέση
2. Μέχρι να βρεις όλες τις αντιστοιχίσεις πόρτα-διακόπτη εκτέλεσε τα παρακάτω βήματα
   2.1 Περπάτα μέχρι την πρώτη κλειστή πόρτα
   2.2 Αν στο σύνολο υπάρχει μόνο ένας διακόπτης άλλαξε τον και περπάτα μέχρι να βρεις την πόρτα που άλλαξε κατάσταση. Η πόρτα αυτή θα αντιστοιχίζεται με αυτόν τον διακόπτη. Άνοιξε την πόρτα και αγνόησε αυτόν τον διακόπτη από αυτούς που ψάχνεις. Αν δεν υπάρχουν άλλοι μη αντιστοιχισμένοι διακόπτες τελείωσες. Αλλιώς πήγαινε στο 2.1
   2.3 Άλλαξε τους πρώτους μισούς διακόπτες και περπάτα μέχρι την πρώτη κλειστή πόρτα.

2.4 Αν η πρώτη κλειστή πόρτα είναι διαφορετική από αυτήν στο βήμα 2.1 πήγαινε στο 2.2 με σύνολο διακοπτών αυτούς που άλλαξες.
2.5 Αν η πόρτα δεν άλλαξε κατάσταση πήγαινε στο 2.2 με σύνολο διακοπτών εκείνους που δεν άλλαξες.
2.6 Αν όλες οι πόρτες άνοιξαν τότε δοκίμασε τους διακόπτες που έμειναν περπατώντας κάθε φορά.

Ο παραπάνω αλγόριθμος εφαρμόζει δυαδική αναζήτηση για να αντιστοιχίσει τους διακόπτες με τις πόρτες. Όταν δεις ποια είναι η πρώτη κλειστή πόρτα μπορείς να την αναζητήσεις. Κατά την διάρκεια αναζήτησης μεταβάλλονται οι μισοί διακόπτες με αποτέλεσμα να δημιουργούνται οι εξής περιπτώσεις: Δεν έκλεισε κάποια πόρτα πριν από αυτή που αρχικά βρήκες η οποία έμεινε κλειστή. Τότε ξέρεις ότι η πόρτα αυτή είναι στο δεύτερο μισό (διακόπτες που δεν άλλαξαν) και μπορείς να την αναζητήσεις εκεί με τον ίδιο τρόπο. Έκλεισε κάποια πόρτα πριν από αυτή που αρχικά βρήκες ή άνοιξε η αρχική. Τότε μπορείς να αναζητήσεις αυτή που έκλεισε ή την αρχική πόρτα στο πρώτο μισό των διακοπτών (διακόπτες που άλλαξαν θέση). Εφόσον μπορείς να βλέπεις πάντα την πόρτα για την οποία αναζητάς αντιστοίχηση ο αλγοριθμός βρίσκει λύση. Έτσι θα πρέπει να δοκιμάσουμε nlogn διαμορφώσεις για να τελειώσουμε την αντιστοίχηση.

Άσκηση 3: Φόρτιση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

- Δημιούργησε τον πίνακα Αφίξεις μήκους T που αναπαριστά τον αριθμό των αφίξεων σε κάθε χρονική στιγμή i.
- Αρχικοποίηση του s=0.
- Για i από 1 έως T:
  Αν Αφίξεις[i] > s*d:
    Δώσε στο s την μικρότερη τιμή ώστε να μην ισχύει η παραπάνω ανίσωση(Δηλαδή s= Αφίξεις[i] div b + 1).

  Αφίξεις[i+1] += max(0,Αφίξεις[i] - s)

- Επέστρεψε το s.

Αιτιολόγηση: Στον παραπάνω αλγόριθμο ελέγχουμε κάθε φορά αν υπάρχει δυνατότητα να εξυπηρετηθούν τα αμάξια που έρχονται σε μια χρονική στιγμή δεδομένου του s και του d. Αν όχι τότε αυξάνουμε το s. Έπειτα όσα αυτοκίνητα δεν εξυπηρετήθηκαν εκείνη την χρονική στιγμή πρέπει να εξυπηρετηθούν μαζί με αυτά που ήρθαν την επόμενη. Η πολυπλοκότητα είναι $\Theta(n^2)$.

Άσκηση 4: Παραλαβή Πακέτων

1. Μόνο ένας υπάλληλος O(nlogn)

Για i από 1 έως n

Υπολόγισε τον λόγο $r_i = w_i/p_i$

Δρομολόγησε τους πελάτες με βάση τον λόγο αυτόν σε φθίνουσα σειρά

2. 2 υπάλληλοι

Εκφράζουμε τον συνολικό βεβαρυμμένο χρόνο T με την χρήση δυναμικού προγραμματισμού. Η αρχή βελτιστότητας είναι πάλι ο πίνακας r_i. Έτσι προκύπτει η αναδρομική εξίσωση που περιγράφει την τιμή της βέλτιστης λύσης.

$$T(i,t_1) = min\begin{cases} T(i-1,t_1-p_i)+w_it_1 \\ T(i-1,t_1)+\ w_i(\sum_{j=1}^{i} p_j -\ t_1) \end{cases}$$

όπου t_1 το άθροισμα των χρόνων των πελατών που εξυπηρετούνται από τον πρώτο υπάλληλο. Σε περίπτωση περισσότερων υπαλλήλων θα εκφράζαμε τον χρόνο αυτό ως συνάρτηση περισσότερων παραμέτρων δηλαδή $T(i, t_1, t_2, \ldots)$.

Άσκηση 5: Ελάχιστη Διαταραχή Ακολουθίας

1. Έστω ότι το τελευταίο στοιχείο της βέλτιστης ακολουθίας β^* δεν είναι ούτε το μέγιστο ούτε το ελάχιστο της δεδομένης ακολουθίας α. Θα δείξουμε ότι για κάθε τέτοια βέλτιστη ακολουθία υπάρχει μια αναδιάταξη των στοιχείων, και επομένως άλλη ακολουθία β^{**} για την οποία ισχύει

$$\mathrm{D}(\beta^{**}) < \mathrm{D}(\beta^{*})$$

και συνεπώς η β^* δεν είναι βέλτιστη.

Έστω λοιπόν για την β^* το μέγιστο στοιχείο της είναι το β_p και το ελάχιστο το β_m με $1 \leq m,p \leq n-1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε επιπλέον ότι $m < p$. Τότε

$$\forall \kappa \geq \mathrm{p}: \mathrm{D}(\beta^*_\kappa) = \beta_p - \beta_m = \mathrm{D}_{max}$$

Άρα συνολικά έχουμε

$$\mathrm{D}(\beta^*) = \sum_{\kappa=2}^{\mathrm{p}-1} \mathrm{D}(\beta^*_\kappa) + (\mathrm{n}-\mathrm{p}+1)\mathrm{D}_{max}$$

Μετακινώντας όμως το β_p στο τέλος της διάταξης προκύπτει νέα ακολουθία β^{**} με

$$\mathrm{D}(\beta^{**}) = \sum_{\kappa=2}^{p-1} \mathrm{D}(\beta^{**}_\kappa) + \sum_{\kappa=p}^{n-1} \mathrm{D}(\beta^{**}_\kappa) + \mathrm{D}_{max}$$

Προφανώς $\mathrm{D}(\beta^{**}) < \mathrm{D}(\beta^*)$ και άρα η β^* δεν μπορεί να είναι βέλτιστη αφού πάντα υπάρχει κάποια καλύτερη.

2. Από το παραπάνω ερώτημα παρατηρούμε ότι η βέλτιστη ακολουθία β^* όπως και κάθε υπακολουθία της θα έχει ως τελευταίο στοιχείο είτε το ελάχιστο είτε το μέγιστο. Έτσι σορτάρωντας τα στοιχεία της ακολουθίας μπορούμε να εκφράσουμε μια αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό της διαταραχής.

$$D(\beta^*) = Max - Min + \min\begin{cases} D(\beta^* - \{Max\}) \\ D(\beta^* - \{Min\}) \end{cases}$$

Γενικότερα αν ο πίνακας με τα σορταρισμένα στοιχεία είναι ο s τότε προκύπτει η παρακάτω σχέση.

$$d(i,j) = s_j - s_i + min\begin{cases} d(i+1,j) \\ d(i,j-1) \end{cases}, j > i$$

Αυτή η σχέση εκφράζει ότι η διαταραχή ανάμεσα στα σημεία i και j του σορταρισμένου πίνακα είναι ίση με την διαφορά των sj, si που είναι τα Max και Min αντίστοιχα συν την ελάχιστη διαταραχή που προκύπτει αφαιρώντας είτε το στοιχείο i είτε το j από την ακολουθία. Για να βρούμε την λύση του προβλήματός μας αρκεί να υπολογίσουμε το d(1,n). Η πολυπλοκότητα του προβλήματος είναι $\Theta(n^2)$.