哈爾濱工業大學

第9章 频率特性和谐振现象

主讲教师 齐超

http://www.hitce.net

提要 通过正弦电流电路和非正弦周期电流电路的学习得知，感抗和容抗与频率分别成正比和反比关系。故电路特性与电源频率密切相关。本章研究网络函数及其频率特性的概念，滤波的含义，典型电路的串联谐振与并联谐振的条件、特点及一般分析方法等。

本章目次

基本要求：掌握网络函数的定义、幅频特性和相频特性以及低通、高通、带通和带阻等概念。

电路如图9.1所示，当 $u_i=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos 10t+\sqrt{2}\cos 100t+\sqrt{2}\cos 1000t\ (\mathrm{V})$

$R=100\Omega,\ C=100\mu\mathrm{F}\ .\ u_C=?$

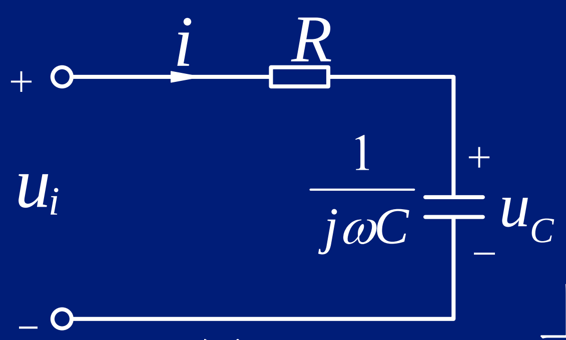


图 9.1

$$\begin{aligned}u_C=&\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 0.995\cos(10t-5.71^\circ)+\\&\sqrt{2}\times 0.707\cos(100t-45^\circ)+\\&\sqrt{2}\times 0.099\cos(1000t-84.29^\circ)\end{aligned}$$

上述结果表明：该电路对信号

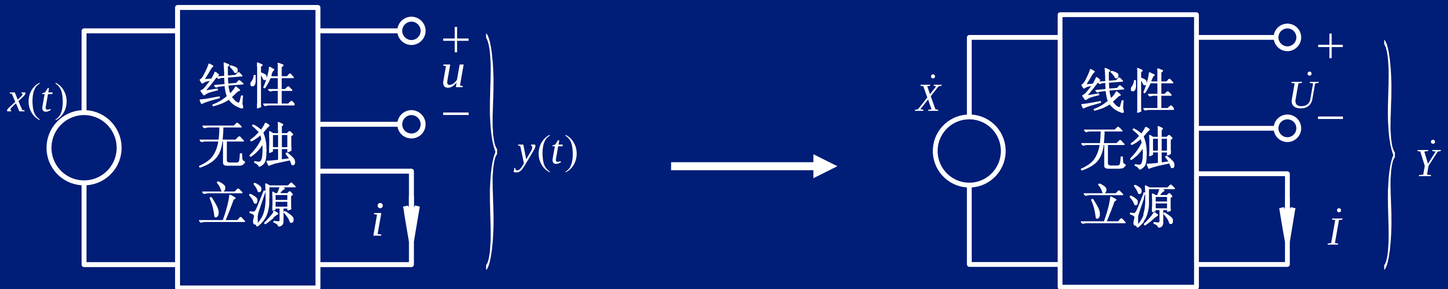
$\omega<10\ \mathrm{rad/s}(\omega=10\ \mathrm{rad/s})$ 几乎没有衰减和相移；

而对信号 $\omega=1000\ \mathrm{rad/s}(\omega>1000\ \mathrm{rad/s})$ 衰减较大且相移较多。

从第五章可知，对单一频率，响应是激励同频率的正弦量；而工程中常遇到的更多是非单一频率激励，由此我们要分析网络的**频率特性**，它是由**网络函数**表征的。

1. 网络函数

图9.2 (a)所示时域电路模型　　图9.2 (b)所示频域电路模型



(a)　　(b)

图 9.2

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}}\overset{\text{def}}{=}\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_i}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR}$$

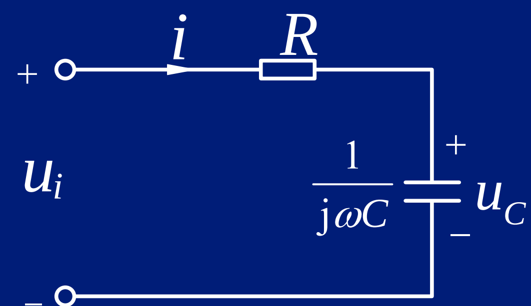


图 9.1

网络函数随电源频率的变化而变化

2．网络函数的类型

激励和响应属于同一端口：

等效输入阻抗

等效输入导纳

激励和响应属于不同端口：

激励	响应	转移网络函数
电流	电压	转移阻抗
电压	电流	转移导纳
电流	电流	转移电流比
电压	电压	转移电压比

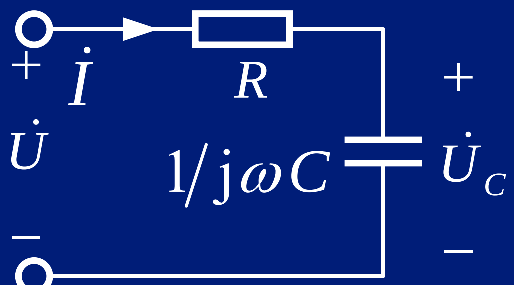


图 9.1 (b)

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_i}=\frac{1/\,\mathrm{j}\omega C}{R+1/\,\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR}$$

影响网络函数的因素：

1) 电路结构；**2)** 元件参数；**3)** 电源频率.

频域分析

研究网络函数或响应随频率变动的规律称为电路的频域分析。

将网络函数写成极坐标形式得 $H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\angle\theta(\omega)$

$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 为网络函数的模，称为网络函数的幅频特性，反映响应与激励有效值之比与频率的关系；

$\theta(\omega)$ 为网络函数的辐角，称为网络函数的相频特性， 反映响应越前于激励 的相位差与频率的关系。

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_i}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR}$$

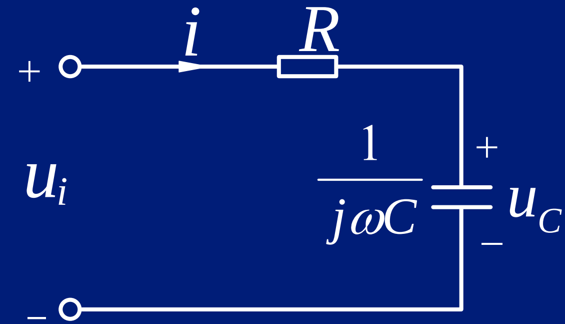


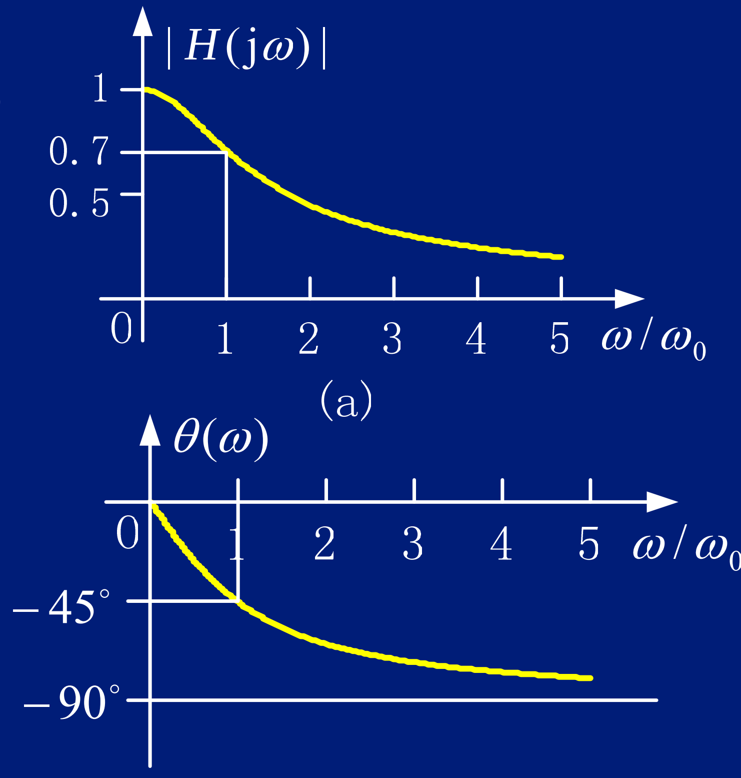
图 9.1

令 $\omega_0=1/RC$（**RC电路的固有频率**）

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}\angle-\mathrm{arctg}(\omega/\omega_0)$$

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} \qquad \theta(\omega)=-\mathrm{arctg}(\omega/\omega_0)$$

ω/ω_0	$\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert$	$\theta(\omega)$
$\omega/\omega_0=0$	$\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert=1$	$\theta(\omega)=0$
$\omega/\omega_0=1$	$\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert=1/\sqrt{2}$	$\theta(\omega)=-45^\circ$
$\omega/\omega_0=2$	$\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert=1/\sqrt{5}$	$\theta(\omega)\approx-78.69^\circ$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\omega/\omega_0=\infty$	$\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert=0$	$\theta(\omega)=-90^\circ$

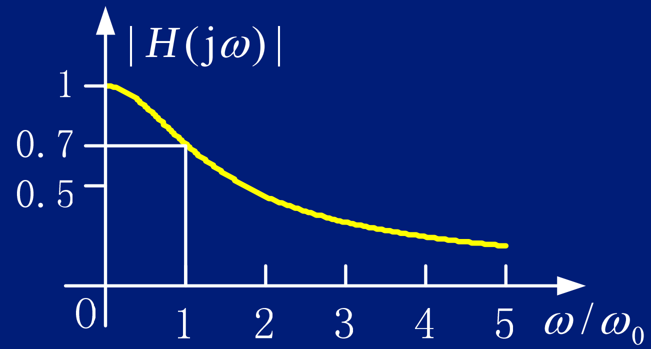


(a)

(b)

图 9.3

幅频和相频特性曲线如图9.3(a)(b)所示



(a)

RC低通网络的截止频率为

$$\omega_c = \omega_0 = 1/RC。$$

通带： $0 \sim \omega_c$

阻带： $\omega_c \sim \infty$

几个相关概念

低通网络：当输入电压有效值保持不变的情况下，频率越低，$|H(j\omega)|$ 越大，响应越高；频率越高，$|H(j\omega)|$ 越小，响应越低，可以认为此网络允许低频信号通过，而对高频信号产生较大的衰减，称为低通网络。

高通网络：

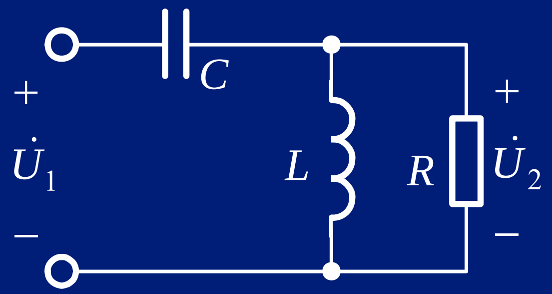
带通网络：

带阻网络：

截止频率：网络函数的模下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时所对应的频率，记为 ω_c。

例题 9.1

求图9.1所示电路的网络函数 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_2/\dot{U}_1$

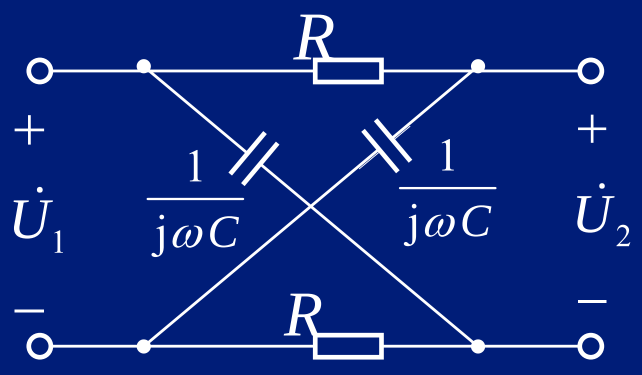


解

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\dfrac{\mathrm{j}\omega L\times R}{\mathrm{j}\omega L+R}}{\dfrac{\mathrm{j}\omega L\times R}{\mathrm{j}\omega L+R}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$$

$$=\frac{-\omega^2}{-\omega^2+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{RC}+\dfrac{1}{LC}}$$

[补充9.1]求图示电路的转移电压比 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_2/\dot{U}_1$ ($\dot{U}_2$ 为开路电压),写出其幅频特性和相频特性,指出电压 $\dot{U}_2$ 的相位随频率变化的范围。



[解] 由分压公式得:

$$\dot{U}_2=\left(\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}-\frac{R}{R+1/\mathrm{j}\omega C}\right)\dot{U}_1$$

整理得 $$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{1-\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

故有 $$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\sqrt{1^2+(\omega RC)^2}}{\sqrt{1^2+(\omega RC)^2}}=1$$

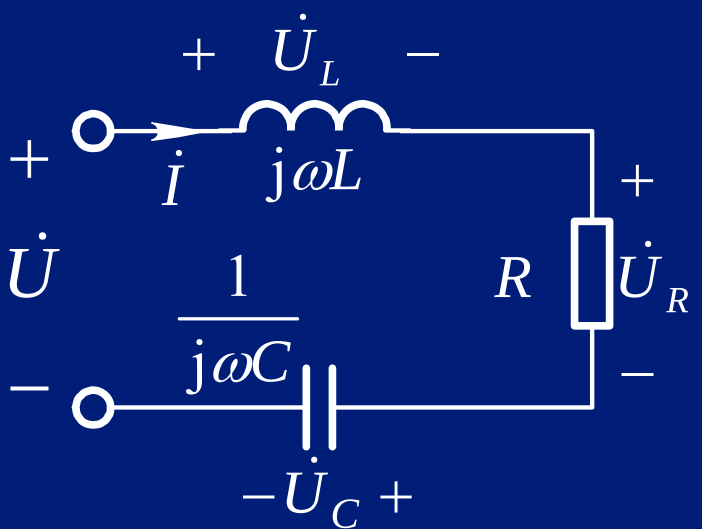
$$\varphi(\omega)=-2\mathrm{arctg}(\omega RC)$$

$$\omega:\quad 0\rightarrow\infty$$

$$\varphi(\omega):\ 0\rightarrow-\pi$$

基本要求：了解谐振的定义；明确串联谐振条件； 掌握RLC串联谐振特点，并熟练应用。

1. 考察*RLC*串联电路的频率特性。



***RLC*串联电路**

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+\mathrm{j}[\omega L-1/(\omega C)]$$

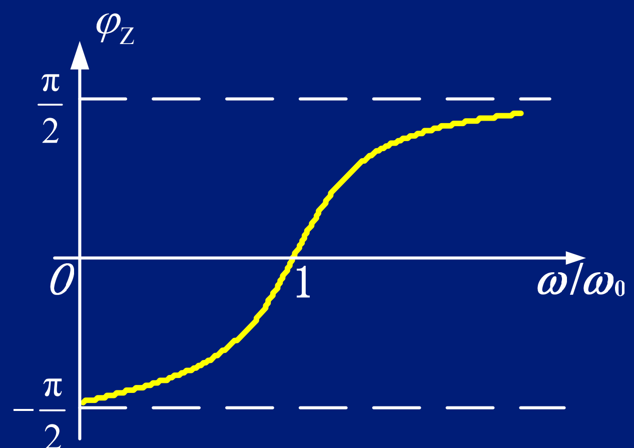
$$=|H(\mathrm{j}\omega)|\angle\varphi_{\mathrm{H}}(\omega)=Z(\mathrm{j}\omega)$$

$$|Z(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{R^2+[\omega L-1/(\omega C)]^2}$$

$$\varphi_z(\omega)=\mathrm{arctg}\,\frac{\omega L-1/(\omega C)}{R}$$

一般情况下，无源一端口网络，阻抗模和阻抗角都是激励频率的函数。

$$X = \omega L - 1/\omega C$$



RLC 串联电路相频特性

ω :	0	$\rightarrow$	∞	$\omega = \omega_0$
X :	$-\infty$	$\rightarrow$	$+\infty$	$X = 0$
φ_Z :	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$+\dfrac{\pi}{2}$	$\varphi_Z = 0$
端口特性:	容性	$\rightarrow$	感性	阻 性

对于任何含有电感和电容的一端口电路，在一定条件下，其端口电压与端口电流同相位，全电路呈电阻性，称此一端口网络处于**谐振状态**。

2．发生串联谐振的条件及方法

条件 $\omega L = 1/\omega C$

方法

a) 当L、C给定时，改变电源频率，使 $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

(ω_0 称为*RLC*串联电路的**谐振角频率**）

b) 当 ω 、L一定时，通过调节电容，使 $C = 1/\omega_0^2 L$

c) 当 ω 、C一定时，通过调节电感，使 $L = 1/\omega_0^2 C$

- **3．*RLC*串联电路在谐振时，有如下的特点：**

1）谐振时的阻抗

$$Z = R + \mathrm{j}(\omega_0 L - 1/\omega_0 C) = R = Z_{\min}$$

阻抗角 $\varphi_z = 0$

$$\omega_0 L = 1/\omega_0 C = \rho = \sqrt{L/C}\Big|_{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$$

***RLC*串联电路的特性阻抗**

***RLC*电路串联谐振时，阻抗最小，等于电阻值，阻抗角为零。**

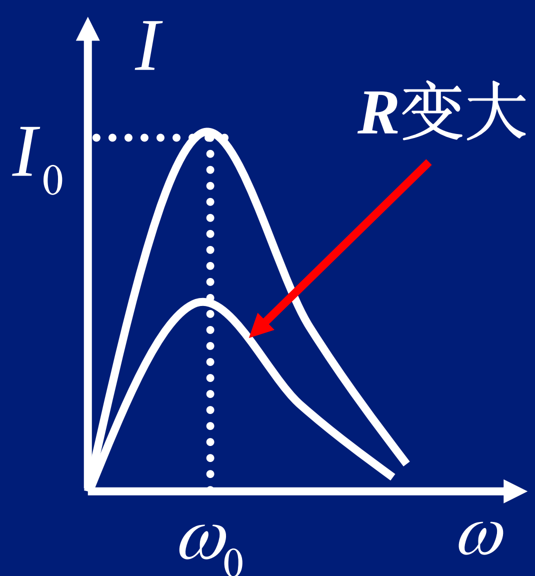
● 2）谐振时的电流

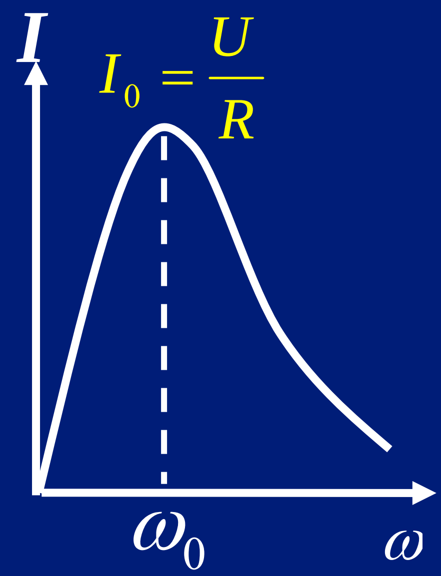
$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U\angle\varphi_u}{Z_{\min}} = \frac{U\angle 0^\circ}{R} = I_{\max}$$

当端口电压一定时，谐振端口电流最大，其值只与电阻值有关，与电感、电容值不直接相关。

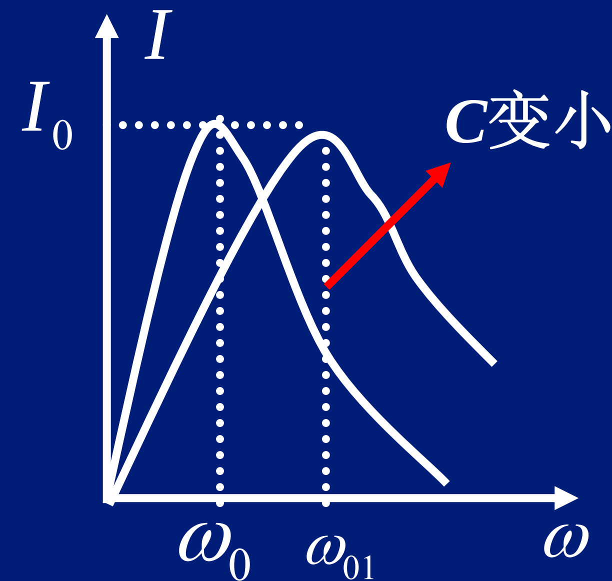
电路参数对谐振曲线的影响

(a) *R*变大





(b) *L*或*C* 变小



(a) ω_0不变， I_0变小。

(b) I_0不变，ω_0变大。

- **3)谐振时电阻、电感、电容元件上的电压**

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_0 = R\frac{\dot{U}}{R} = \dot{U}$$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega_0 L\dot{I}_0 = \mathrm{j}\omega_0 L\frac{\dot{U}}{R} = \mathrm{j}\frac{\rho}{R}\dot{U} = \mathrm{j}Q\dot{U}$$

***RLC*串联电路的品质因数**

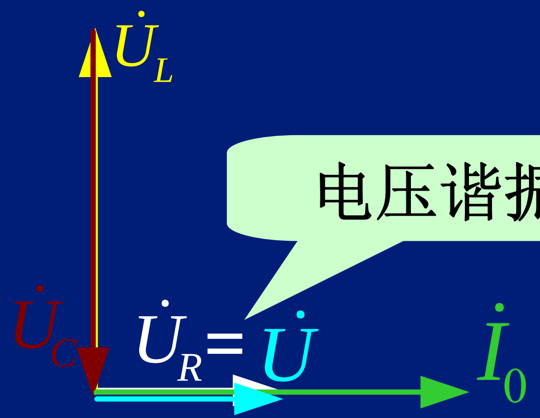
$$\dot{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\dot{I}_0 = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 C}\frac{\dot{U}}{R} = -\mathrm{j}\frac{\rho}{R}\dot{U} = -\mathrm{j}Q\dot{U}$$

$$\dot{U}_X = \dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$$ (可见*L*、*C*串联谐振部分相当于短路)

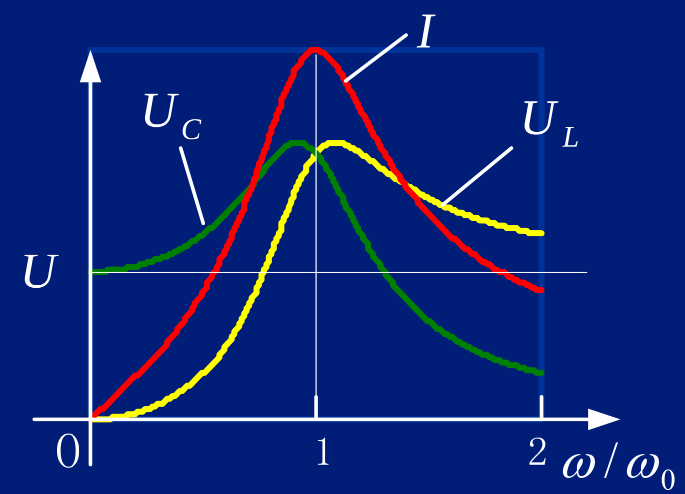
注 $U_X = 0$ 但$U_L \neq 0, U_C \neq 0$ $U_L = U_C = QU$

$Q >> 1 \rightarrow U_L(U_C) >> U$ 使电气设备受损害，应避免

4）相量图及频率特性曲线



***RLC*串联电路谐振相量图**



***RLC*串联电路频率特性曲线**

5）谐振时端口吸收的有功功率和无功功率

$$P = UI\cos\varphi_Z = UI = RI^2 = P_R$$

$$Q = UI\sin\varphi_Z = 0$$

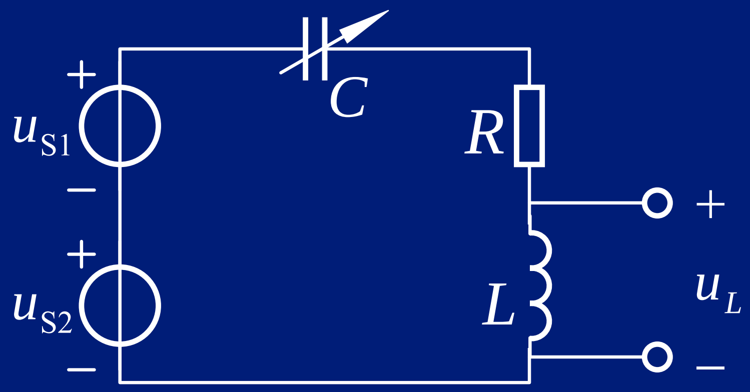
[补充9.2] 某收音机接收等效电路如图所示。已知

$R=6\Omega$ ，$L=300\mu\text{H}$, 两广播电台信号分别为

$U_{S1}=1.5\text{mV}$, $f_1=540\text{kHz}$; $U_{S2}=1.5\text{mV}$, $f_2=600\text{kHz}$.

（1）要接收 u_{S1}信号, 求电容C 值和品质因数 Q ；

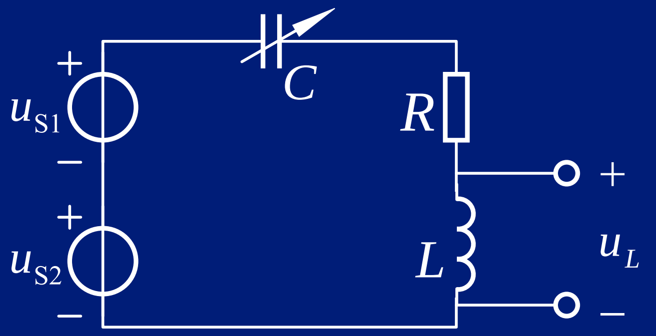
（2）保持C 值不变，分别计算 u_{S1}和 u_{S2} 单独作用时的电流值及在电感L上的输出电压值。



[解]（1）

$$C=\frac{1}{(2\pi f_1)^2 L}=\frac{1}{(2\times 3.14\times 540\times 10^3)^2\times 300\times 10^{-6}}=290\text{pF}$$

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{2\times 3.14\times 540\times 10^3\times 300\times 10^{-6}}{6}=169.6$$



$R=6\Omega, L=300\mu\mathrm{H}, C=290\mathrm{pF};$

$U_{S1}=1.5\mathrm{mV}, f_1=540\mathrm{kHz};$

$U_{S2}=1.5\mathrm{mV}, f_2=600\mathrm{kHz}.$

（2）当信号 u_{S1}作用时谐振，故

$$I_1=250\,\mu\mathrm{A}\,;U_{L1}=254.4\mathrm{mV}$$

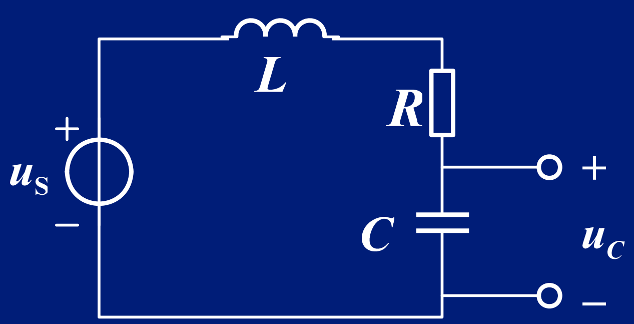
当信号u_{S2}作用时，电路处于失谐状态，故

$$I_2=6.93\,\mu\mathrm{A}\,;U_{L2}=7.84\mathrm{mV}$$

串联谐振电路是选择接收信号和获取高频电压的一种常用电路

例题 9.3

一个线圈与电容相串联，线圈电阻、电感分别为 $R=16.2\Omega, L=0.26\text{mH}$ 当把电容调节到100pF时发生串联谐振。(1)求谐振频率和品质因数；(2)设外加电压为 $10\mu\text{V}$，其频率等于电路的谐振频率，求电路中的电流和电容电压；(3)若外加电仍为 $10\mu\text{V}$ 但其频率比谐振频率高10%，再求电容电压。



解 等效电路如图

(1)求谐振频率和品质因数

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.26\times10^{-3}\text{H}\times100\times10^{-12}\text{F}}}=990\times10^{3}\text{Hz}$$

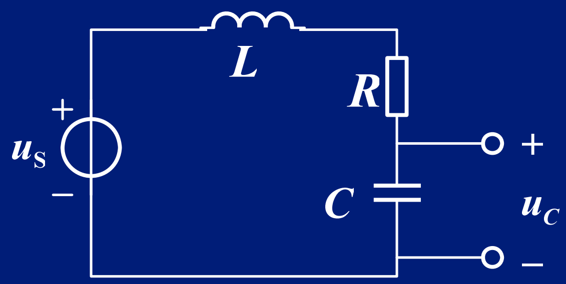
$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{2\pi f_0 L}{R}=\frac{2\pi\times990\times10^{3}\text{s}^{-1}\times0.26\times10^{-3}\text{H}}{16.2\Omega}=100$$

(2) 谐振时的电流和电容电压为

$$I_0=\frac{U}{R}=\frac{10\times10^{-6}\text{V}}{16.2\Omega}=0.617\mu\text{A};\quad X_C=-\frac{1}{\omega_0 C}=-\frac{1}{(2\pi\times990\times10^{3})\text{s}^{-1}\times100\times10^{-12}\text{F}}=-1620\Omega$$

$$U_C=|X_C|I_0=1620\Omega\times0.617\times10^{-6}\text{A}=1\text{mV}$$ 或 $$U_C=QU=100\times10\times10^{-6}\text{V}=1\text{mV}$$

3)外加电仍为 10μV 但其频率比谐振频率高10%，再求电容电压.



$R=16.2\Omega$,
$L=0.26\text{mH}$,
C=100pF

(3) 电源频率比电路谐振频率高10%时，电路处于失谐状态，故

$$f'=(1+0.1)f_0=1.1\times 990\times 10^3\,\text{Hz}=1089\times 10^3\,\text{Hz}$$

$$X_L'=\omega' L=(2\pi\times 1089\times 10^3)\text{s}^{-1}\times 0.26\times 10^{-3}\,\text{H}=1780\Omega$$

$$X_C'=-\frac{1}{\omega' C}=-\frac{1}{(2\pi\times 1089\times 10^3)\text{s}^{-1}\times 100\times 10^{-12}\,\text{F}}=-1460\Omega$$

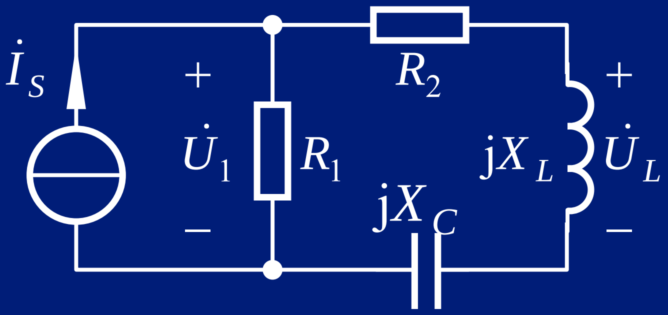
$$|Z'|=\sqrt{R^2+(X_L'+X_C')^2}=\sqrt{(16.2)^2+(1780-1460)^2}\,\Omega=320\Omega$$

$$U_C'=\frac{U}{|Z'|}\times|X_C'|=\frac{10\times 10^{-6}\,\text{V}}{320\Omega}\times 1460\Omega=0.046\text{mV}$$

比较U_C'与U_C可见，对于偏离电路谐振频率的信号源，其响应显著下降。

[补充9.3] 设图示电路处于谐振状态，其中

$I_S = 1\text{A}, U_1 = 50\text{V}, R_1 = |X_C| = 100\Omega$. 求电压$\boldsymbol{U_L}$和电阻$\boldsymbol{R_2}$。



解：因为电路处于谐振状态，说明电感串电容相当于短路，即有

$$R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_1}{I_S} = 50\Omega$$

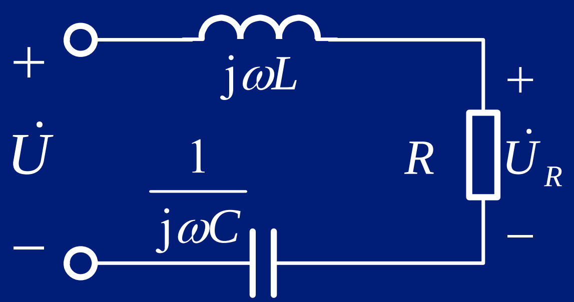
代入 $R_1 = 100\Omega$ 解得 $R_2 = 100\Omega$

又 $\because$ 电路处于谐振状态，

$$\therefore \quad X_L = |X_C| = 100\Omega$$

故有 $U_L = \dfrac{1}{2} I_S X_L = 50\text{V}$

电阻作为响应的频率特性



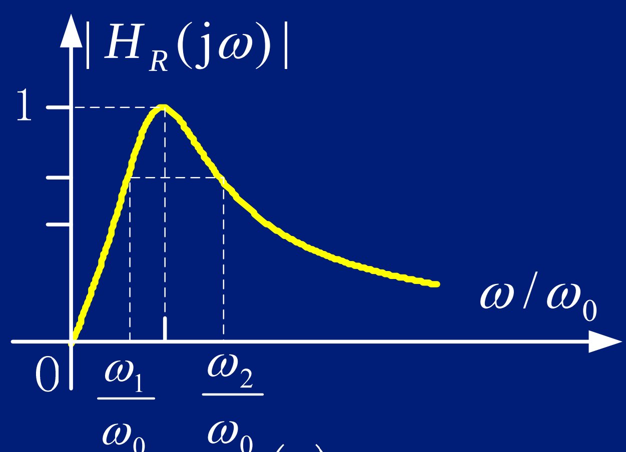
$$H_R(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot U_R}{\dot U}=\frac{R}{R+\mathrm{j}(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}$$

$$|H_R(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{R^2}\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

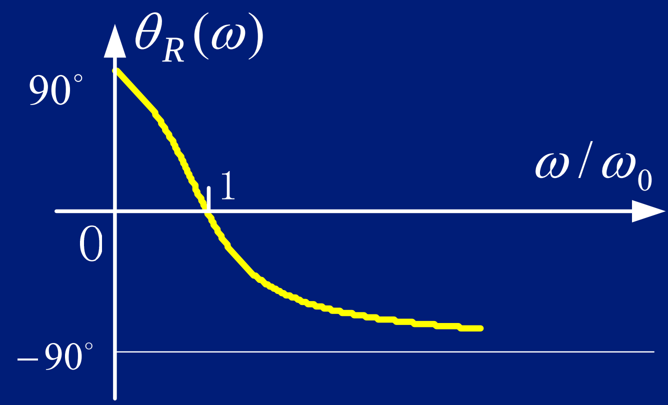
将谐振角频率 ω_0 和品质因数**Q**代入

$$\theta_R(\omega)=-arctgQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

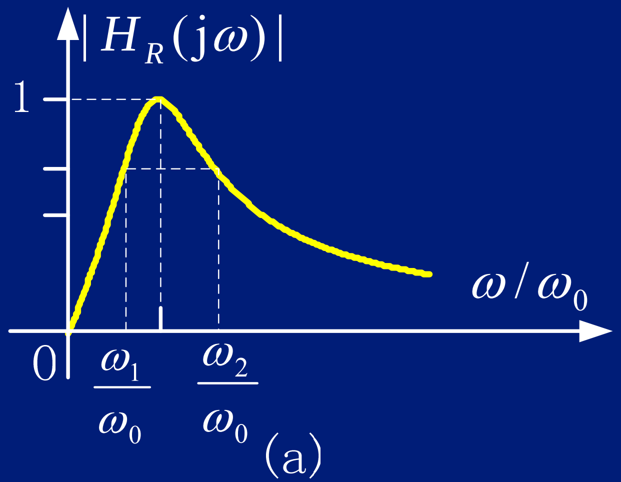
RLC带通滤波器的频率特性

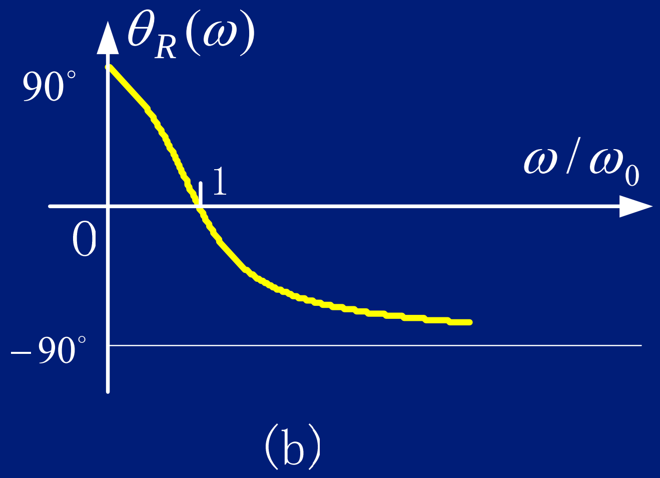


(a)



(b)





两个截止频率

$$\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

解得

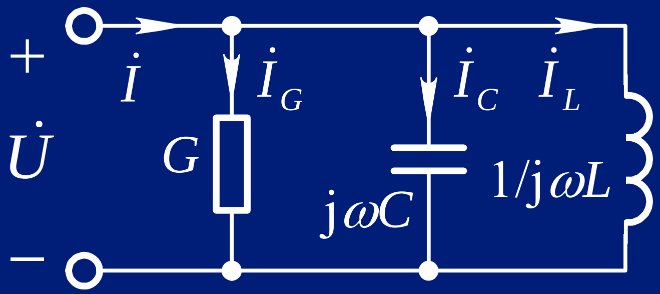
$$\omega_{c1}=(-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1})\,\omega_0 \quad 和 \quad \omega_{c2}=(\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1})\,\omega_0$$

通带宽度为

$$\Delta_\omega=\omega_{c2}-\omega_{c1}=\omega_0/Q$$

基本要求：掌握GCL并联谐振特点，并熟练应用；会分析实际并联谐振电路。

1 GCL并联电路



GCL并联电路的导纳

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - 1/\omega L) = G + \mathrm{j}B$$

实现谐振的条件是导纳的虚部为零

$$\omega C - 1/\omega L = 0$$

谐振角频率 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

特性导纳 $\rho' = \omega_0 C = \dfrac{1}{\omega_0 L}$

品质因数 $Q' = \dfrac{\rho'}{G}$

2 GCL并联谐振电路特点

谐振时的端口导纳 $Y = Y_0 = G = Y_{\min}$

谐振时的端口电压 $\dot{U} = \dot{I}/Y = \dot{I}/G$

谐振时的电流 $\dot{I}_0 = Y_0\dot{U} = Y_0\dot{I}/Y = \dot{I} = \dot{I}_G$

$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega_0 C\dot{U} = \mathrm{j}\omega_0 C\,\dot{I}/G = \mathrm{j}Q'\dot{I}_0$$

$$\dot{I}_L = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}\dot{U} = -\mathrm{j}Q'\dot{I}_0$$

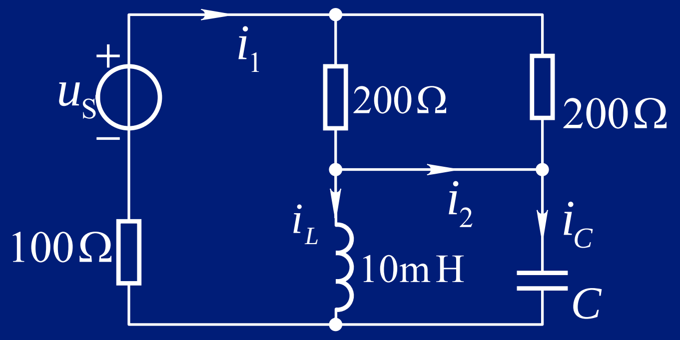
$\dot{I}_B = \dot{I}_C + \dot{I}_L = 0$ **C、L并联部分相当于短路**

$$I_L = I_C = Q^{'}I$$

可见若 $Q^{'} >> 1$ ，即 $\omega_0 L >> R$ 则线圈支路和电容支路所产生的电流很可能远远大于激励源电流。

[补充9.4] 已知图示电路处于谐振状态， $u_S = 10\sqrt{2}\cos\omega t\ \mathrm{V}$

ω**=10⁴ rad/s。试求电流和** i_1**、**i_2**、**i_L**和**i_C **。**



[解] 因为电路处于并联谐振状态，所以电感、电容并联部分相当于开路

有 $i_1 = 0$

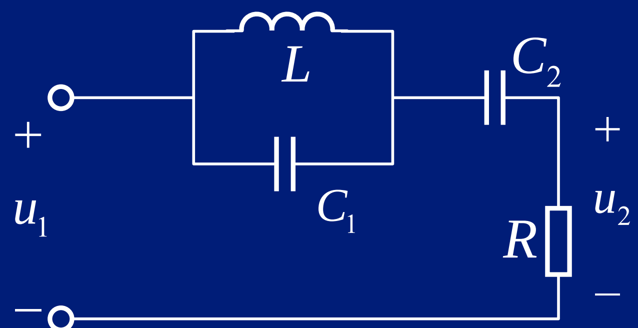
$$X_L = X_C = \omega L = 100\,\Omega$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_S}{-\mathrm{j}X_C} = \frac{10\angle 0°}{100\angle -90°} = 0.1\angle 90°\ \mathrm{A}$$

$$i_2 = i_C = 0.1414\cos(\omega t + 90°)\ \mathrm{A}$$

$$i_L = -i_C = 0.1414\cos(\omega t - 90°)\ \mathrm{A}$$

[补充9.5] 图示电路中$u_1=U_{1m}\cos\omega t+U_{3m}\cos 3\omega t$ V，L=0.12H，ω=314rad/s，若要使$u_2=U_{1m}\cos\omega t$ V，问C_1=？C_2=？



[解] 依题意，输出不含三次谐波，说明并联电路对三次谐波发生谐振，应有

$$3\omega L=\frac{1}{3\omega C_1}$$

解得 $$C_1=\frac{1}{9\omega^2 L}\approx 9.39\mu\text{F} \qquad (1)$$

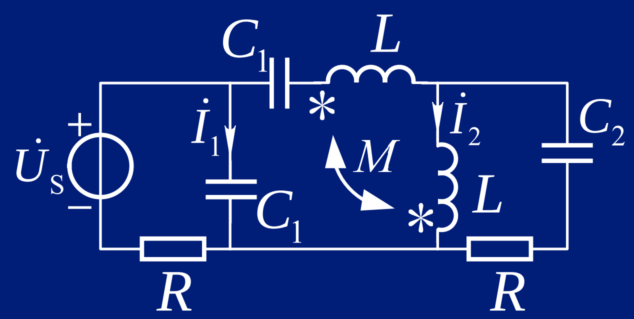
基波作用时，由$u_2=U_{1m}\cos\omega t$ V可知，整个电路对基波发生串联谐振，即

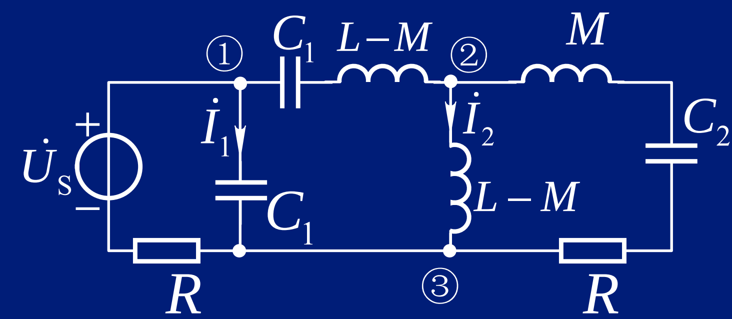
$$\frac{\mathrm{j}\omega L/\mathrm{j}\omega C_1}{\mathrm{j}\omega L+1/\mathrm{j}\omega C_1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}=0$$

整理得 $$1-\omega^2 L\,(C_1+C_2)=0 \qquad (2)$$

将（1）式代入（2）式解得 $C_2=8C_1=75.12\mu$ F

[补充9.6] 图示正弦交流电路中，已知R=40Ω，ωL=60Ω，ωM=20Ω，$1/\omega C_1$=40Ω，$1/\omega C_2$=20Ω，$\dot{U}_S=80\angle 0°$ V，求 $\dot{I}_1$ 及 $\dot{I}_2$





(b)

[解] 消互感的等效电路见图 (b)，此时 $\omega M=1/\omega C_2$

说明M与C_2发生串联谐振，又因为 $\mathrm{j}\omega(L-M)-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C_1}=\mathrm{j}(60-20-40)=0$

说明 ①②支路电容电感串联谐振， 等效为一条导线

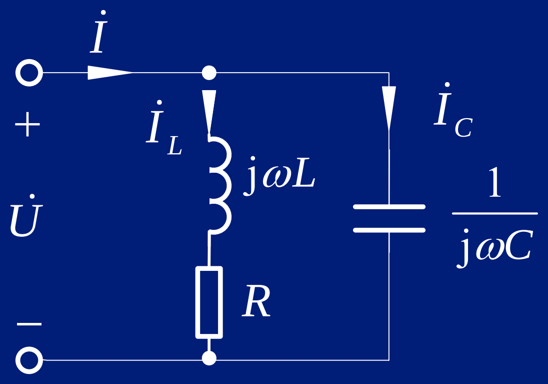
剩余①③支路间电容C_1与②③支路间电感$(L-M)$ 发生并联谐振，

故有 $$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S/2}{-\mathrm{j}/\omega C_1}=\frac{40\angle 0°}{-\mathrm{j}40}=\mathrm{j}1\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2=-\dot{I}_1=-\mathrm{j}1\ \mathrm{A}$$

实际并联谐振电路

由于实际的电感线圈都有电阻，故有如下的实际并联电路



线圈与电容器并联电路

端口导纳

$$Y=\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+\mathrm{j}[\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}]$$

产生谐振的条件是导纳的虚部为零

$$\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}=0$$

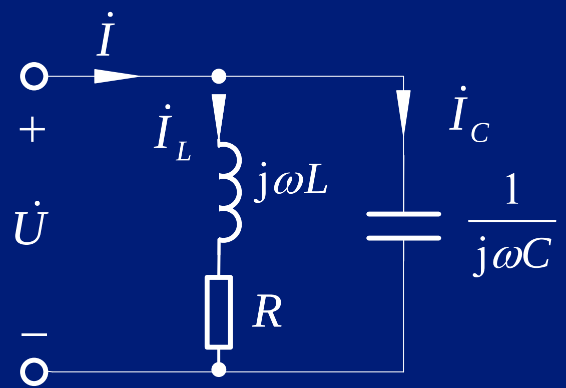
谐振方法 $a)\quad C_0=\frac{L}{R^2+(\omega L)^2}$

$$b)\quad \omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}$$

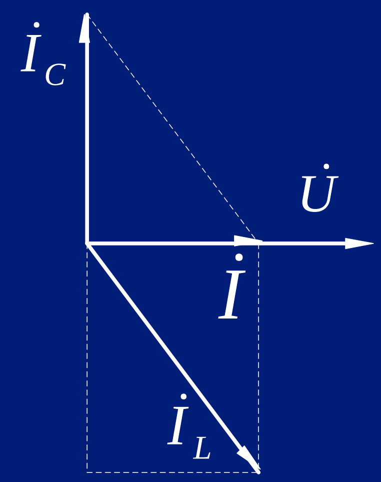
→谐振角频率（当 $R<\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时存在）

$$c)\quad L_0=\frac{1\pm\sqrt{1-4\omega^2C^2R^2}}{2\omega^2C}$$

（当 $R<1/2\omega C$ 时存在）



线圈与电容器并联电路



谐振相量图

$\dot I_C+\dot I_L=\dot I$， $\dot I_L$在虚轴上投影与 $\dot I_C$ 相等，端口$\dot U$、$\dot I$ 同相位；若电阻R较大，$\dot U$一定时，$\dot I_L$在虚轴分量较小，不足以抵消$\dot I_C$不能发生并联谐振。 $\because\ \dot I_L=\dfrac{\dot U}{R+\mathrm{j}\omega L}=\dfrac{R-\mathrm{j}\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\dot U$

谐振时其等效阻抗为一个电阻

$$R_0=\frac{R^2+(\omega_0 L)^2}{R}\qquad \omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}\qquad R_0=R+\frac{L^2}{R}\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}\right)=\frac{L}{RC}$$

当 $R=0$ $\quad R_0\to\infty$ 理想电感与电容并联谐振

例题 9.4

一个电感为0.25mH，电阻为25Ω的线圈与85pF的电容器接成并联电路，试求该并联电路的谐振频率和谐振时的阻抗。

解 谐振角频率和谐振频率分别为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}=\sqrt{\frac{1}{0.25\times10^{-3}\,\mathrm{H}\times85\times10^{-12}\,\mathrm{F}}-\frac{(25\Omega)^2}{(0.25\times10^{-3}\,\mathrm{H})^2}}$$

$$\approx 6.86\times10^6\,\mathrm{rad/s}$$

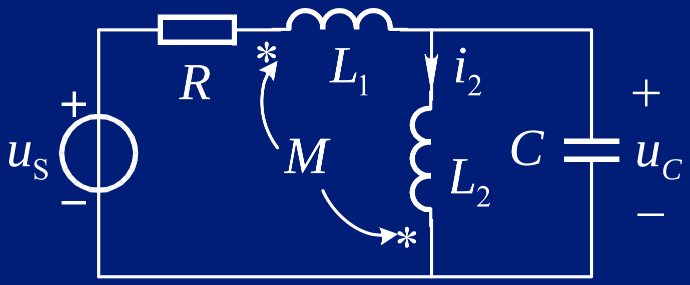
$$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{(6.86\times10^6)\mathrm{s}^{-1}}{2\pi}\approx 1092\mathrm{kHz}$$

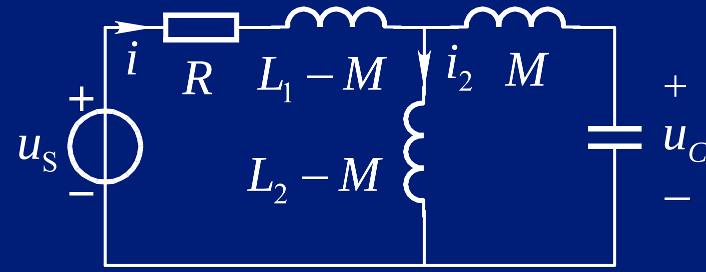
谐振时阻抗 $$Z=\frac{R^2+(\omega_0L)^2}{R}=\frac{(25\Omega)^2+(6.86\times10^6\times0.25\times10^{-3}\,\Omega)^2}{25\Omega}=118\mathrm{k}\Omega$$

或直接由 $$Z=R_0=\frac{L}{RC}=\frac{0.25\times10^{-3}\,\mathrm{H}}{25\Omega\times85\times10^{-12}\,\mathrm{F}}=118\mathrm{k}\Omega$$

谐振时阻抗与线圈电阻之比 $R_0/R=4720$

[补充9.7]图示非正弦电路 $u_S = [80 + 60\sqrt{2}\cos(\omega t) + 80\sqrt{2}\cos(2\omega t)]\text{V}$,$R = 80\Omega$
$\omega L_1 = 60\Omega, \omega L_2 = 80\Omega, \omega M = 20\Omega, 1/(\omega C) = 80\Omega$，求电压 u_C 和电流 i_2 的瞬时值以及电压源发出的平均功率。





(b)

[解] 当直流 $U_{S(0)} = 80\text{V}$ 单独作用时，电感短路，电容开路。

$$I_{(0)} = I_{2(0)} = \frac{U_{S(0)}}{R} = \frac{80}{80} = 1\text{A} \qquad U_{C(0)} = 0$$

当基波 $\dot{U}_{S(1)} = 60\angle 0°\text{V}$ 单独作用时，消互感等效电路如图(b)所示。

$$\omega(L_2 - M) = 60\Omega \qquad \omega M - 1/(\omega C) = -60\Omega$$

等效电路中并联部分发生并联谐振，并联部分相当于开路。

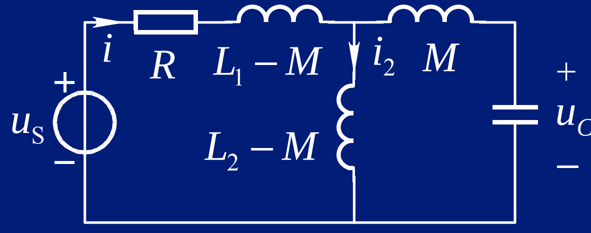
$$\dot{I}_{2(1)} = \frac{\dot{U}_{S(1)}}{\text{j}\omega(L_2 - M)} = \frac{60\angle 0°}{\text{j}60} = 1\angle -90°\text{A}$$

$$\dot{U}_{C(1)} = \frac{-\text{j}/\omega C}{\text{j}\omega M - \text{j}/\omega C} \times \dot{U}_{S(1)} = \frac{-\text{j}80}{\text{j}20 - \text{j}80} \times 60\angle 0° = 80\angle 0°\text{V}$$

$u_S = [80 + 60\sqrt{2}\cos(\omega t) + 80\sqrt{2}\cos(2\omega t)]\text{V}$, $R = 80\Omega$

$\omega L_1 = 60\Omega, \omega L_2 = 80\Omega, \omega M = 20\Omega, 1/(\omega C) = 80\Omega,$

求 u_C 、i_2 及电压源发出的平均功率。



$\dot{I}_{(0)} = \dot{I}_{2(0)} = 1\text{A}$，$U_{C(0)} = 0\text{V}$；

$\dot{I}_{2(1)} = 1\angle -90°\text{A}, \dot{U}_{C(1)} = 80\angle 0°\text{V}$;

$\dot{I}_{(1)} = 0\text{A}$

当二次谐波 $\dot{U}_{S(2)} = 80\angle 0°\text{V}$ 单独作用时

$2\omega(M) = 40\Omega \qquad 1/(2\omega C) = 40\Omega$

等效电路中M 和 C 发生串联谐振，相当于短路

$$\dot{I}_{2(2)} = 0 \qquad \dot{I}_{(2)} = \frac{\dot{U}_{S(2)}}{R + \text{j}2\omega(L_1 - M)} = \frac{80\angle 0°}{80 + \text{j}80} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle -45°\text{A}$$

$$\dot{U}_{C(2)} = \dot{I}_{(2)} \times (-\text{j}/2\omega C) = 0.5\sqrt{2}\angle -45° \times (-\text{j}40) = 20\sqrt{2}\angle -135°\text{V}$$

电压 $\quad u_C = [80\sqrt{2}\cos\omega t + 40\cos(2\omega t - 135°)]\text{V}$

电流 $\quad i_2 = [1 + \sqrt{2}\cos(\omega t - 90°)]\text{A}$

电压源发出的平均功率等于电阻吸收的功率，为

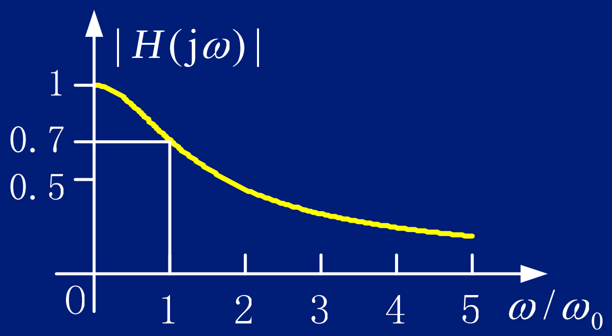
$$P = I_{(0)}^2 \times R + I_{(2)}^2 \times R = 1^2 \times 80 + (0.5\sqrt{2})^2 \times 80 = 120\text{W}$$

或端口i = $[1 + \cos(2\omega t - 45°)]\text{A}$ 平均功率 $P = 80 \times 1 + 80 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \cos 45^{\circ} = 120\text{W}$

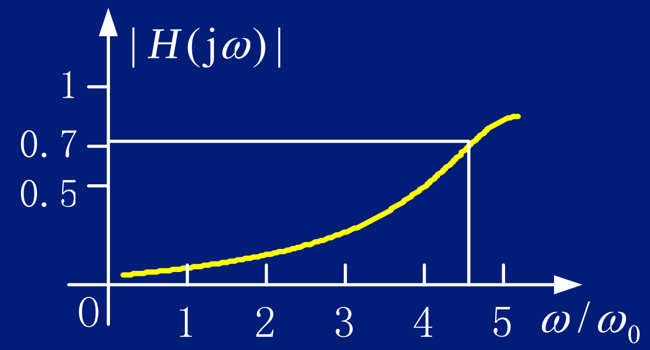
本 章 小 结

1 网络函数：在只有一个激励的正弦电流电路中响应相量与激励相量成正比，其比例系数称为网络函数，记为

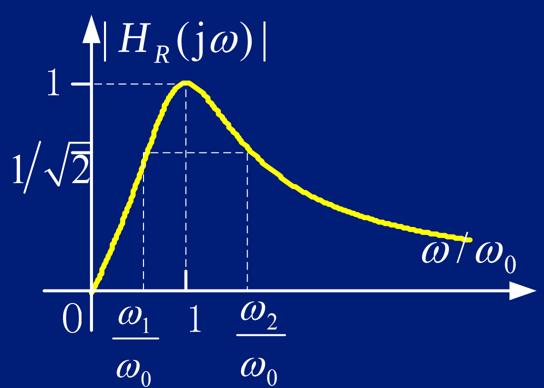
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}}=|H(\mathrm{j}\omega)|\angle\theta(\omega)$$



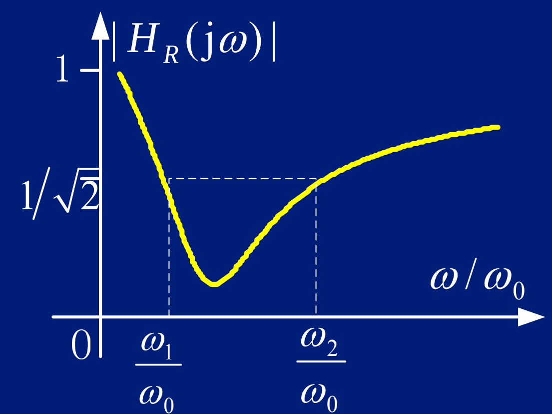
低 通 滤 波



高 通 滤 波



带 通 滤 波



带 阻 滤 波

2 谐振：含有电感和电容的无独立电源一端口网络，其端口电压和端口电流同相位的现象称为谐振。发生谐振的条件是输入阻抗的虚部等于零或输入导纳的虚部等于零。

3 RLC串联电路谐振特点

1) $Z = R = Z_{min}$ 阻抗角 $\varphi_z = 0$

2) $\dot{I}_0 = \dfrac{\dot{U}}{Z} = \dfrac{U\angle 0^\circ}{R} = I_{max}$

3) $\dot{U}_R = \dot{U}$ $\dot{U}_L = \mathrm{j}Q\dot{U}$ $\dot{U}_C = -\mathrm{j}Q\dot{U}$

$Q = \omega_0 L/R = 1/(\omega_0 CR)$ $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

4 GCL并联电路谐振的特点与**RLC**串联谐振的情形存在对偶关系

5 线圈与电容器并联电路谐振

谐振角频率 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}}$ 阻抗为 $R_0 = L/(RC)$

当线圈的品质因数 $Q = \omega_0 L/R$ 较高时，线圈电流和电容器电流的有效值近似相等，等于端口电流的Q倍。

谢 谢！