哈爾濱工業大學

第3章 电路定理

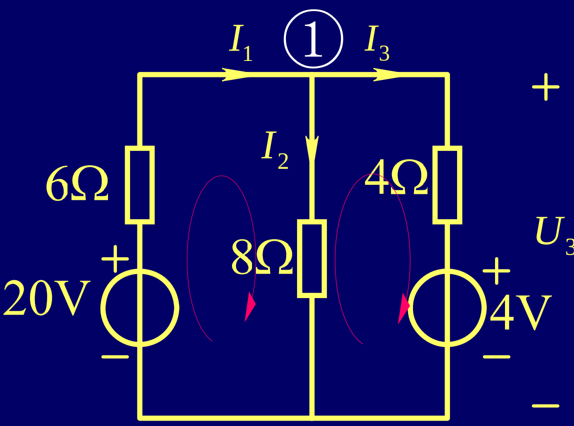
主讲教师 刘洪臣

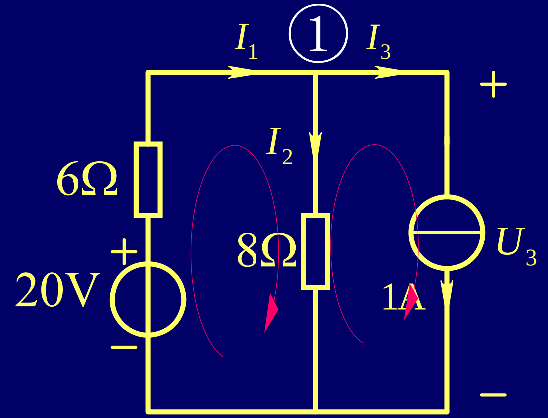
提要 本章介绍电路理论中的几个常用定理。首先介绍置换定理；然后介绍齐性定理和叠加定理；它们是体现线性电路特点的重要定理，是线性方程的齐次性和可加性在电路中的体现；其次介绍戴维南定理和诺顿定理，它们是化简线性一端口电路的有效方法；最后介绍与基尔霍夫定律同样适用的特勒根定理，并以此证明互易定理。

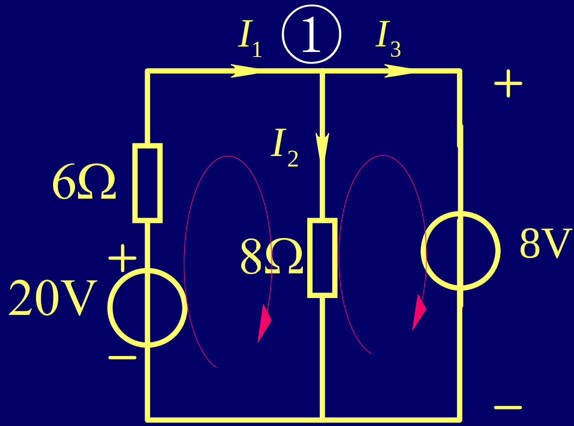
本章目次

基本要求：理解置换定理的原理和内容，并能正确应用置换定理。

引例：求电流I_1，I_2，I_3和电压U_3







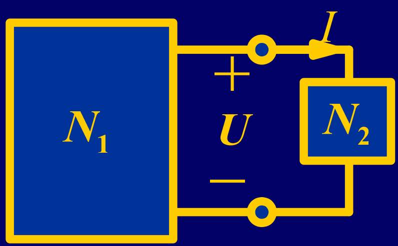
$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ 6\Omega \times I_1 + 8\Omega \times I_2 = 20\text{V} \\ -8\Omega \times I_2 + U_3 = 0 \\ U_3 = 4\Omega \times I_3 + 4\text{V} \\ I_1 = 2\text{A}, I_2 = 1\text{A} \\ I_3 = 1\text{A}, U_3 = 8\text{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + 1\text{A} = 0 \\ 6\Omega \times I_1 + 8\Omega \times I_2 = 20\text{V} \\ -8\Omega \times I_2 + U_3 = 0 \\ \\ I_1 = 2\text{A}, I_2 = 1\text{A} \\ I_3 = 1\text{A}, U_3 = 8\text{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ 6\Omega \times I_1 + 8\Omega \times I_2 = 20\text{V} \\ -8\Omega \times I_2 + 8\text{V} = 0 \\ \\ I_1 = 2\text{A}, I_2 = 1\text{A} \\ I_3 = 1\text{A}, U_3 = 8\text{V} \end{cases}$$

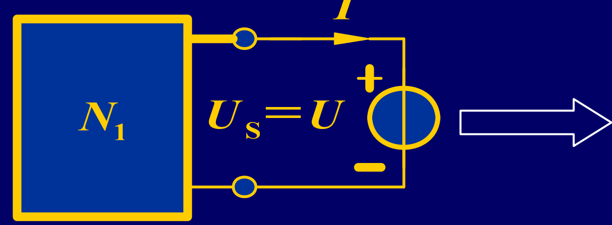
置换定理： 在任意线性和非线性电路中，若某一端口的电压和电流为U和I，则可用$U_S=U$的电压源或$I_S=I$的电流源来置换此一端口，而不影响电路中其它部分的电流和电压。

证明

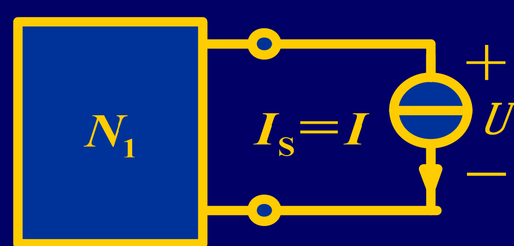


（a） 置换定理图示

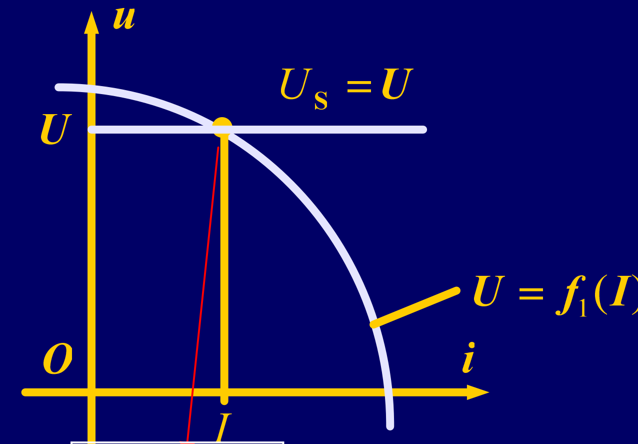
设$N1$和$N2$的端口电压、电流关系分别为$U=f_1(I)$和$U=f_2(I)$，则此时电路的解为：



（b） 置换定理图示

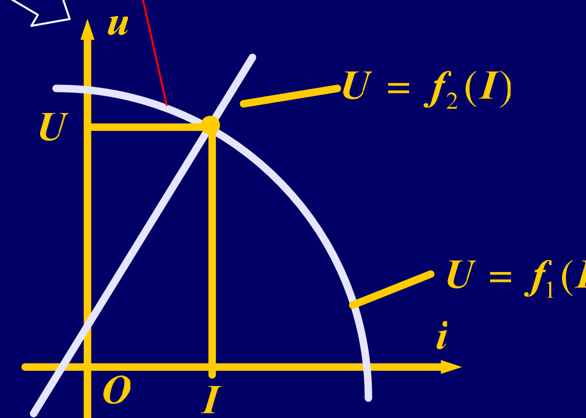


（c） 置换定理图示



解不变

置换定理的证明



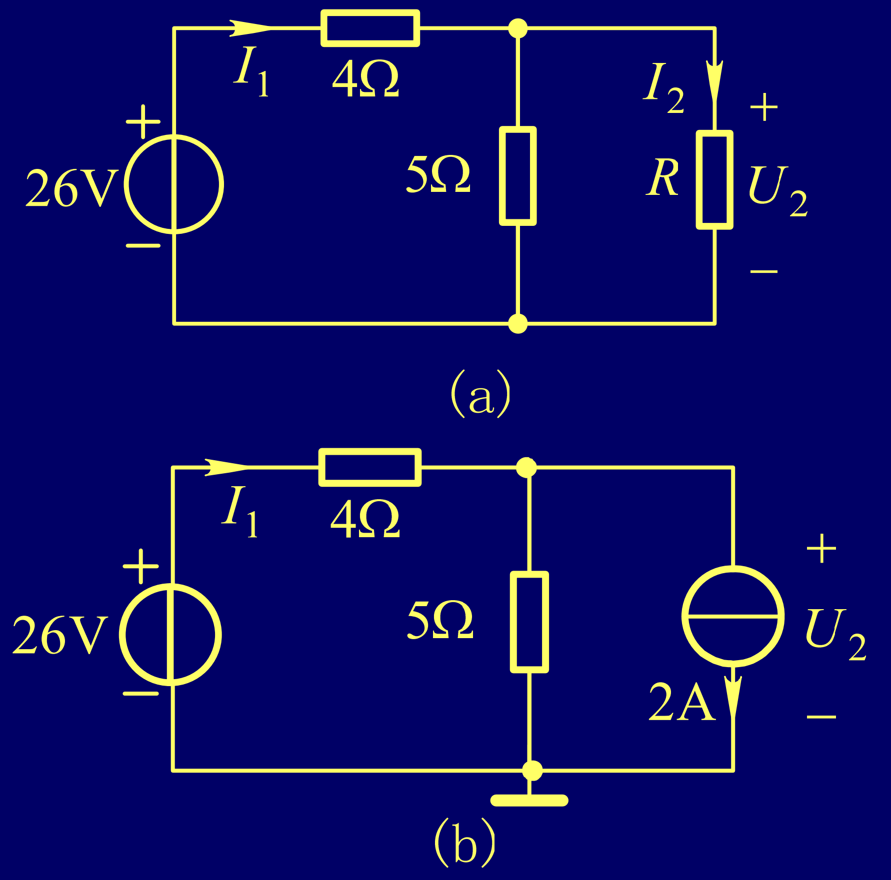
置换定理的证明

例题 3.1

图(a)所示电路，已知I_2=2A，求电阻R和电流I_1。

解

根据置换定理，用2A电流源置换电阻 R 得图(b)所示电路。列节点电压方程：



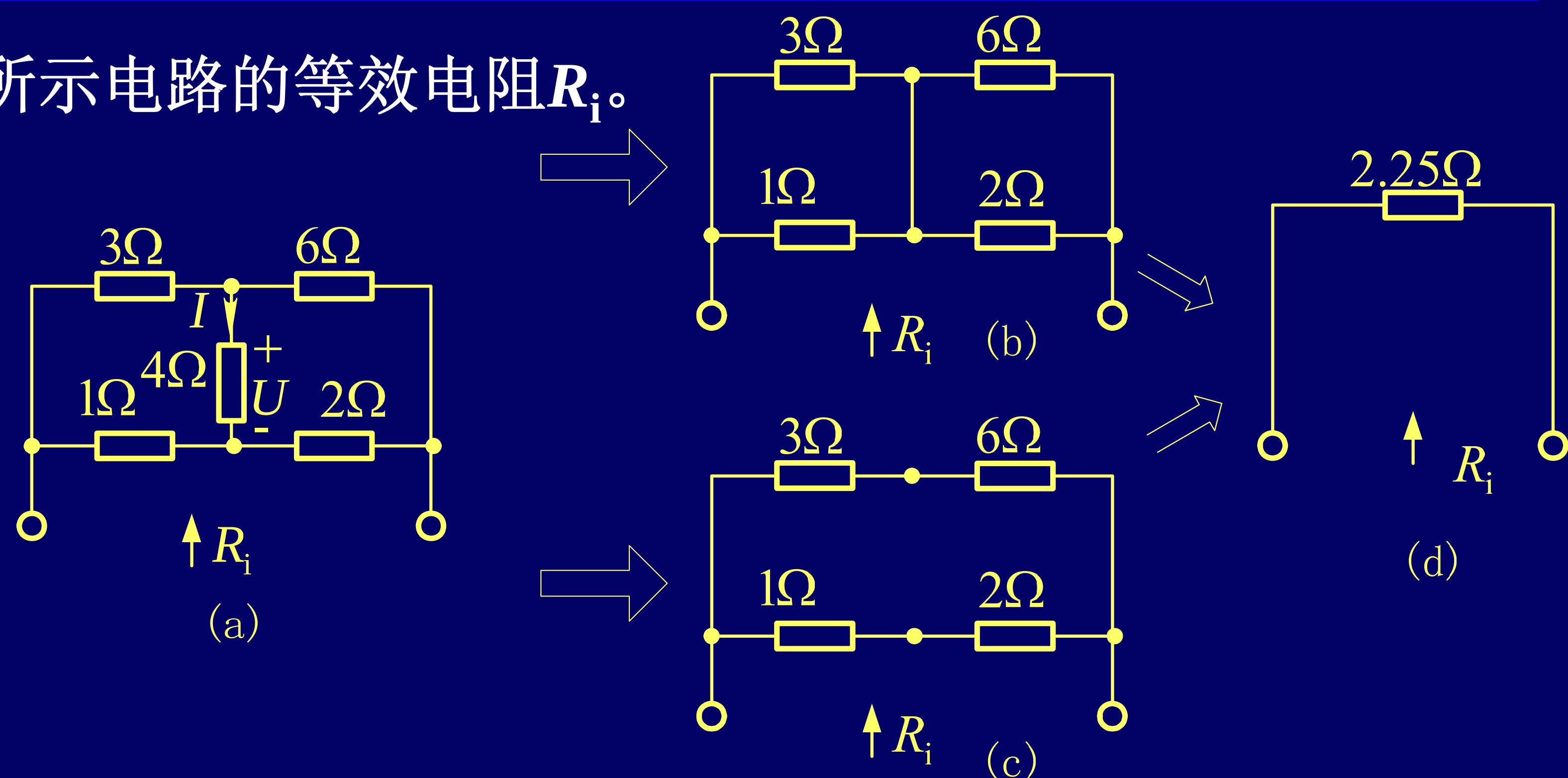
$$\left(\frac{1}{4\Omega}+\frac{1}{5\Omega}\right)U_2=\frac{26\text{V}}{4\Omega}-2\text{A}$$

$$\Rightarrow \quad U_2=10\text{V}$$

$$\Rightarrow \quad R=\frac{U_2}{I_2}=5\Omega$$

$$\Rightarrow \quad I_1=\frac{26\text{V}-U_2}{4\Omega}=4\text{A}$$

求图(a)所示电路的等效电阻R_i。



分析： 图(a)电路满足电桥平衡条件，所以4 Ω 电阻电流和电压均为零。根据置换定理，可用量值为零的电压源(即短路线)或者用量值为零的电流源(即断路)置换该电阻。做上述置换后，便可容易求出等效电阻。

$$R_i = \frac{1\times 3}{1+3}\Omega + \frac{2\times 6}{2+6}\Omega = 2.25\Omega \qquad R_i = \frac{(1+2)\times(3+6)}{(1+2)+(3+6)}\Omega = 2.25\Omega$$

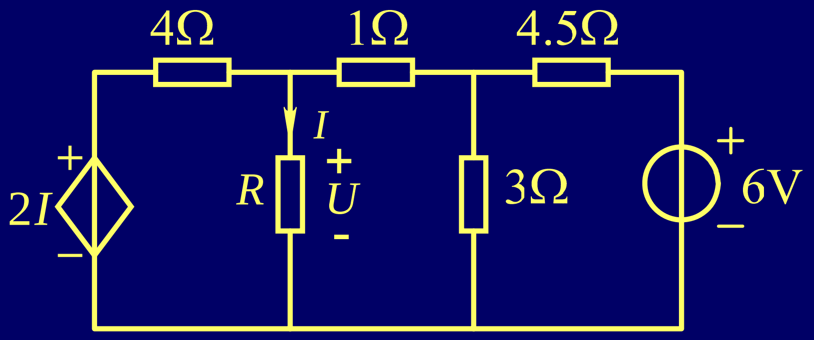
说明：(1)置换定理要求置换后的电路有惟一解；

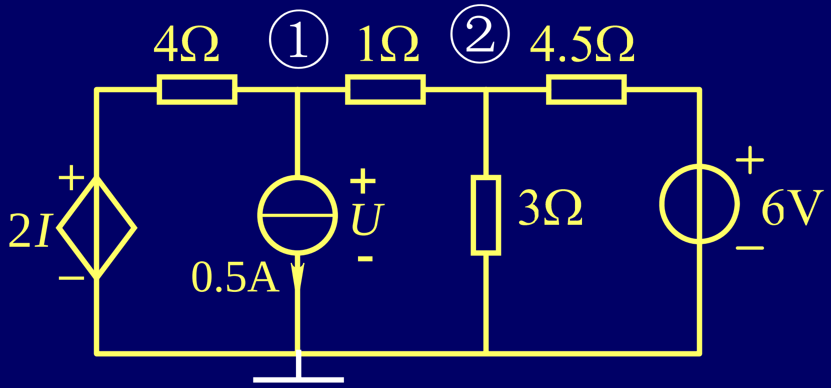
(2)除被置换部分发生变化外，其余部分在置换前后必须保持完全相同；

(3)若电路中某两点间电压为零，则可将量值为零的电压源接于该 两点间，相当于将该两点短路；若电路中某支路电流为零，则可将量值为零的电流源串接于该支路，相当于将该支路断开。

[补充3.1] 已知***I***=0.5A，求电阻***R***

[解]





$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{4\Omega}+\dfrac{1}{2\Omega}\right)U_{n1}-\dfrac{1}{1\Omega}U_{n2}=\dfrac{2I}{4\Omega}-0.5\text{A} \\ -\dfrac{1}{1\Omega}U_{n1}+\left(\dfrac{1}{1\Omega}+\dfrac{1}{3\Omega}+\dfrac{1}{4.5\Omega}\right)U_{n2}=\dfrac{6\text{V}}{4.5\Omega} \end{cases}$$

$$I=0.5\text{A}\Rightarrow U_{n1}=1\text{V}$$

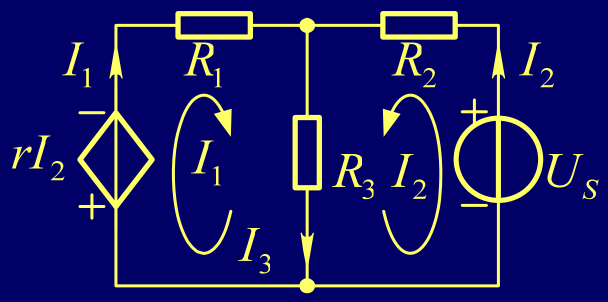
$$R=\frac{U_{n1}}{I}=2\Omega$$

3.2 齐性定理和叠加定理

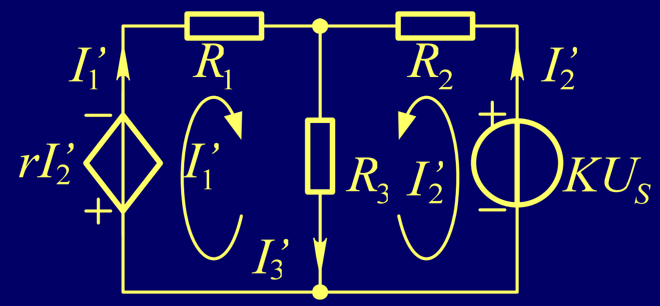
基本要求：透彻理解并熟练应用齐性定理和叠加定理。

一 齐性定理

引例：求图示电路的支路电流I_1和 I_2



齐性定理示例



齐性定理示例

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_3)I_1+(R_3+r)I_2=0\\ R_3I_1+(R_2+R_3)I_2=U_S\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_3)I_1'+(R_3+r)I_2'=0\\ R_3I_1'+(R_2+R_3)I_2'=KU_S\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_3)(KI_1)+(R_3+r)(KI_2)=0\\ R_3(KI_1)+(R_2+R_3)(KI_2)=KU_S\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}R_1+R_3 & R_3+r\\ R_3 & R_2+R_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1'\\ I_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ KU_S\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}R_1+R_3 & R_3+r\\ R_3 & R_2+R_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}KI_1\\ KI_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ KU_S\end{bmatrix}$$

$$I_1'=KI_1, I_2'=KI_2$$

齐性定理（**homogeneity theorem**）：在只有一个激励X作用的线性电路中，设任一响应为Y，记作$Y=f(X)$，若将该激励乘以常数K，则对应的响应Y'也等于原来响应乘以同一常数，即$Y'=f(KX)=Kf(X)=KY$。

直观表述为：若电路中只有一个激励，则响应与激励成正比

比例系数取决于电路的结构和参数，与激励源无关

$$I_1 = -\frac{R_3 + r}{R_1R_2 + R_3(R_1 + R_3 - r)}U_S = A_1U_S$$

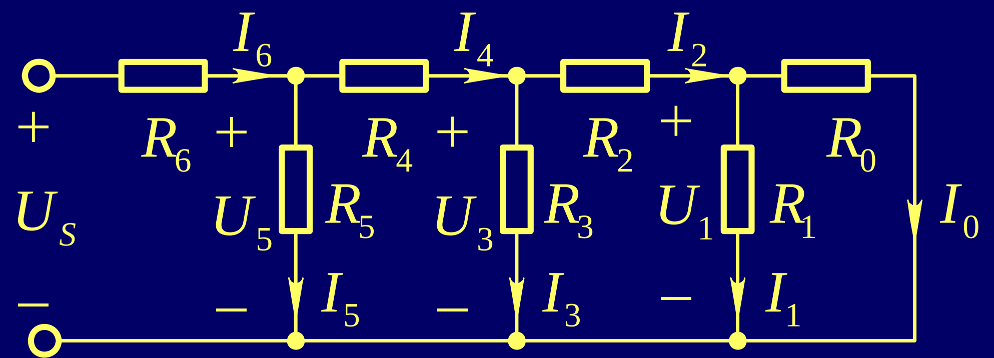
$$I_2 = \frac{R_1 + R_3}{R_1R_2 + R_3(R_1 + R_3 - r)}U_S = A_2U_S$$

A_1与电源无关，由电路的结构和参数决定，与电源呈线性关系

A_2与电源无关，由电路的结构和参数决定，与电源呈线性关系

例题 3.3

图示电路中电阻$R_0=R_2=R_4=R_6=4\,\Omega$，$R_1=R_3=R_5=8\,\Omega$。(1)若使$I_0=1\text{A}$，求 U_S的值。(2)若 $U_S=66\text{V}$，求各支路电流。



解

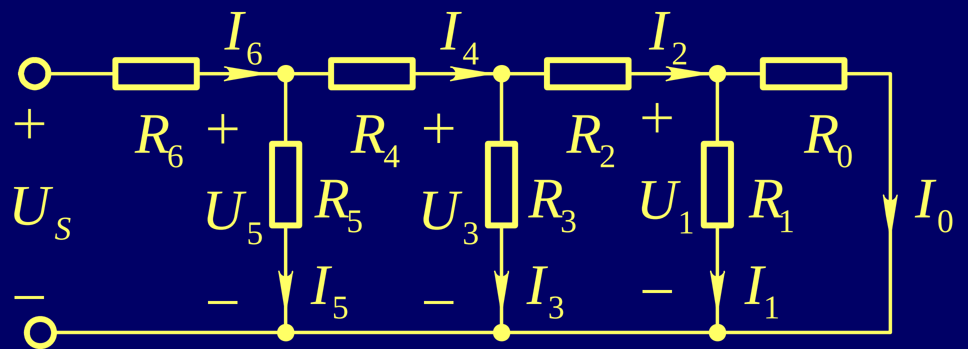
$$I_0=1\text{A}\ \Longrightarrow\ I_1=\frac{U_1}{R_1}=\frac{R_0I_0}{R_1}=0.5\text{A}\ \Longrightarrow\ I_2=I_1+I_0=1.5\text{A}$$

$$\Longrightarrow\ I_3=\frac{U_3}{R_3}=\frac{R_2I_2+R_1I_1}{R_3}=1.25\text{A}\ \Longrightarrow\ I_4=I_2+I_3=2.75\text{A}$$

$$\Longrightarrow\ I_5=\frac{U_5}{R_5}=\frac{R_4I_4+R_3I_3}{R_5}=2.625\text{A}\ \Longrightarrow\ I_6=I_4+I_5=5.375\text{A}$$

$$\Longrightarrow U_S=R_6I_6+R_5I_5=42.5\text{V}$$

U_S = 66V 时是42.5V的1.553倍，所以电路中所有的电压、电流均应该增大1.553倍，据此可以求出电路中其它各处电压电流。



$$k = \frac{66\text{V}}{42.5\text{V}} = 1.553$$

$$I_4' = kI_4 = 4.27\text{A}$$

$$I_1' = kI_1 = 1.553 \times 0.5 = 0.776\text{A}$$

$$I_5' = kI_5 = 4.08\text{A}$$

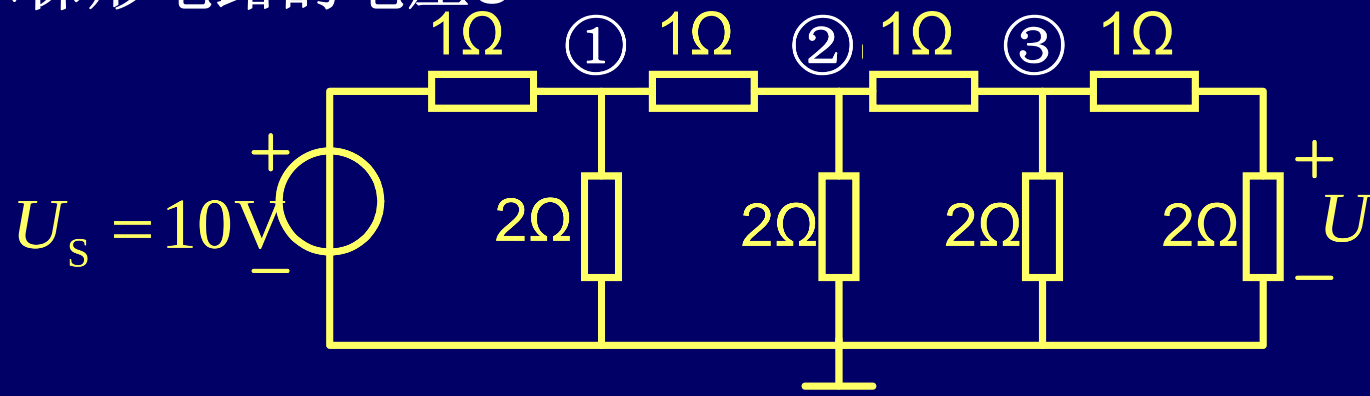
$$I_2' = kI_2 = 1.553 \times 1.5 = 2.33\text{A}$$

$$I_6' = kI_6 = 8.35\text{A}$$

$$I_3' = kI_3 = 1.94\text{A}$$

[补充3.2] 求图示梯形电路的电压U

[解]



先假设电压 U' 为某值（尽可能使运算简单），

然后计算电源电压 U'_S

根据齐性定理有 $\dfrac{U_S}{U'_S} = \dfrac{U}{U'} \Rightarrow U = \dfrac{U_S}{U'_S} \times U'$

假设 $U' = 2V$ 则 $U'_3 = 3V$　$U'_2 = (1 + \dfrac{3}{2})A \times 1\Omega + 3V = \dfrac{11}{2}V$

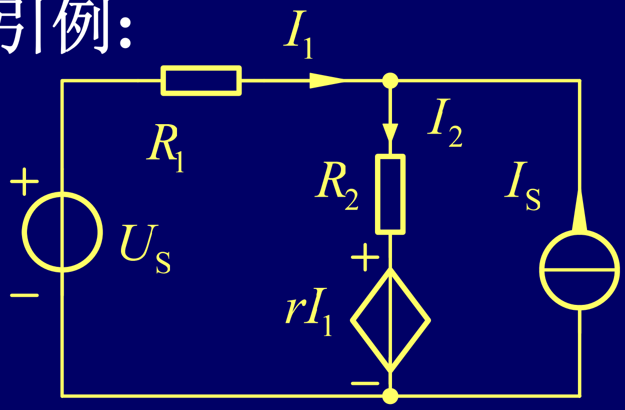
$$U'_1 = \left(\frac{5}{2} + \frac{\frac{11V}{2}}{2\Omega}\right) \times 1\Omega + U'_2 = \frac{43}{4}V$$

$$U'_S = \left(\frac{21}{4} + \frac{43}{8}\right)A \times 1\Omega + U'_1 = \frac{171}{8}V$$

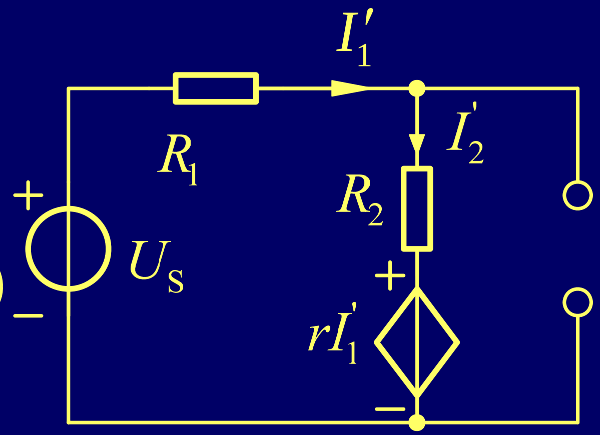
$$U = \frac{U_S}{U'_S}U' = \frac{10V \times 2V}{\frac{171}{8}V} = \frac{160}{171}V = 0.936V$$

2 叠加定理

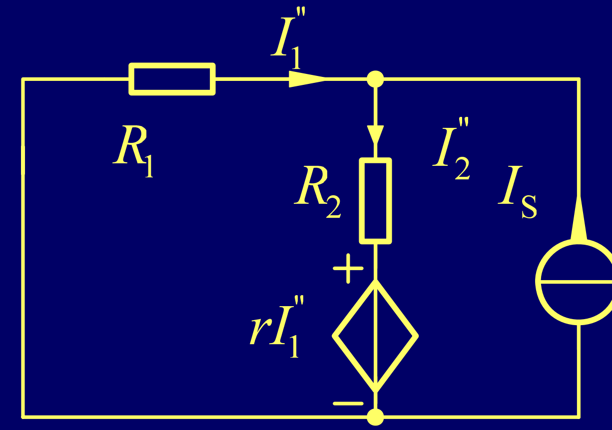
引例:



(a)



(b)



(c)

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 = I_S \\ (R_1 + r)I_1 + R_2 I_2 = U_S \end{cases}$$

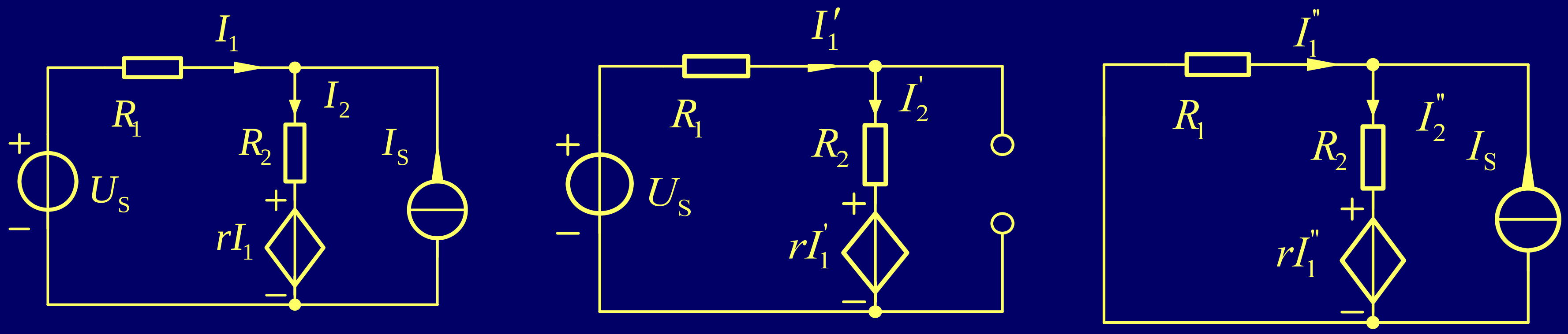
$$\begin{cases} -I_1' + I_2' = 0 \\ (R_1 + r)I_1' + R_2 I_2' = U_S \end{cases}$$

$$\begin{cases} -I_1'' + I_2'' = I_S \\ (R_1 + r)I_1'' + R_2 I_2'' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-R_2}{R_1 + R_2 + r} I_S + \frac{1}{R_1 + R_2 + r} U_S \\ I_2 &= \frac{R_1 + r}{R_1 + R_2 + r} I_S + \frac{1}{R_1 + R_2 + r} U_S \end{aligned} = \begin{aligned} I_1' &= \frac{1}{R_1 + R_2 + r} U_S \\ I_2' &= \frac{1}{R_1 + R_2 + r} U_S \end{aligned} + \begin{aligned} I_1'' &= \frac{-R_2}{R_1 + R_2 + r} I_S \\ I_2'' &= \frac{R_1 + r}{R_1 + R_2 + r} I_S \end{aligned}$$

注：电路中各处电压、电流为独立电源的线性组合，而系数与独立电源无关，所以*I*，*U* 等于$k_1U_S+k_2I_S$，其中系数k_i由电路的结构和参数决定。

叠加定理：在线性电路中，由几个独立电源共同作用产生的响应等于各个独立电源单独作用时产生相应响应的代数叠加。



(a) (b) (c)

注：

1 叠加定理只适合于线性电路，不适用于非线性电路；

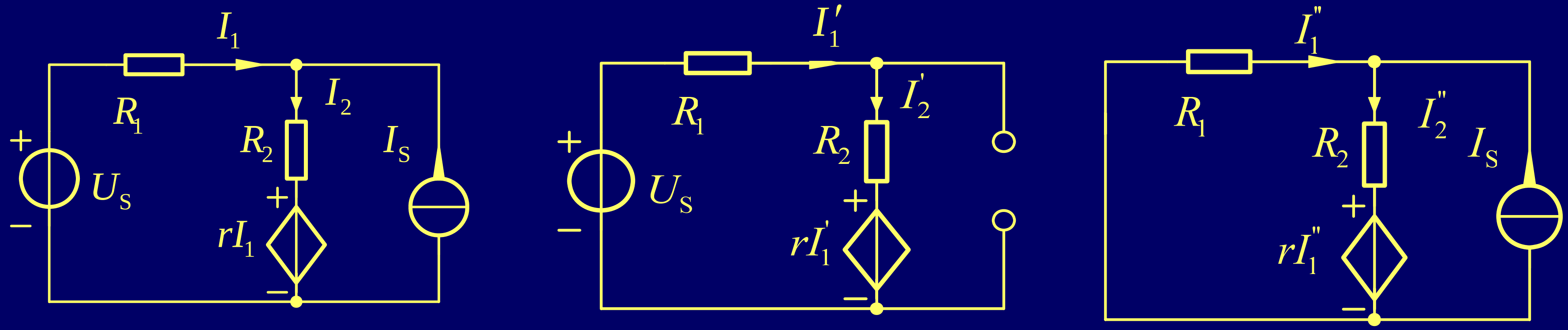
2 电压、电流叠加时要注意方向；

3 功率不是激励的线性函数，因此不能用每个独立电源作用时的功率叠加来求得总功率；

$$P = R_1 I_1^2 \quad I_1 = I_1' + I_1'' \quad P_1 = R_1 I_1'^2 \quad P_2 = R_1 I_1''^2 \quad P \overset{?}{=} P_1 + P_2$$

$$P = R_1 I_1^2 = R_1 (I_1' + I_1'')^2 \neq R I_1'^2 + R I_1''^2$$

4 叠加定理只是对独立电源而言，在独立电源单独作用时，受控源要保留在电路中，其控制量就是电路中相对应的电压和电流



(a) (b) (c)

5 各独立电源“单独作用”，即每个独立电源逐个作用一次。各个独立电源也可以分组作用各一次，但必须保证每个独立电源只能参与叠加一次，不能多次作用，也不能一次也不作用。也可以将某个电源的激励值分成若干个不同的激励值作用多次，只要各次激励值之和等于总激励值即可。

6 某个（组）独立源作用，同时意味着其它独立电源不起作用，不作用的电压源用短路线代替，不作用的电流源用开路代替

7 线性直流电路的任一响应是该电路中所有独立电源的线性组合。$X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n$

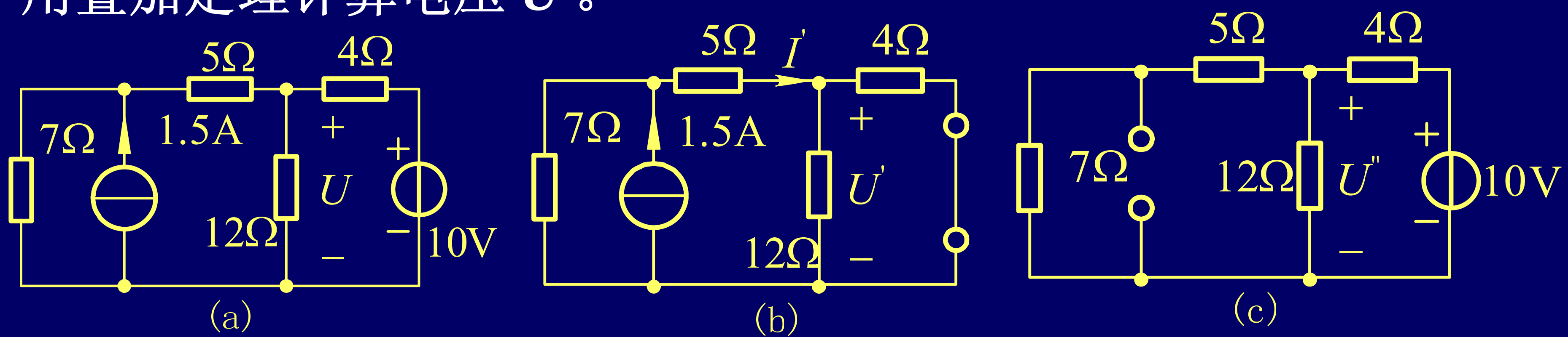
$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

$$Y = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_n X_n$$

例题 3.4

用叠加定理计算电压 U 。



解

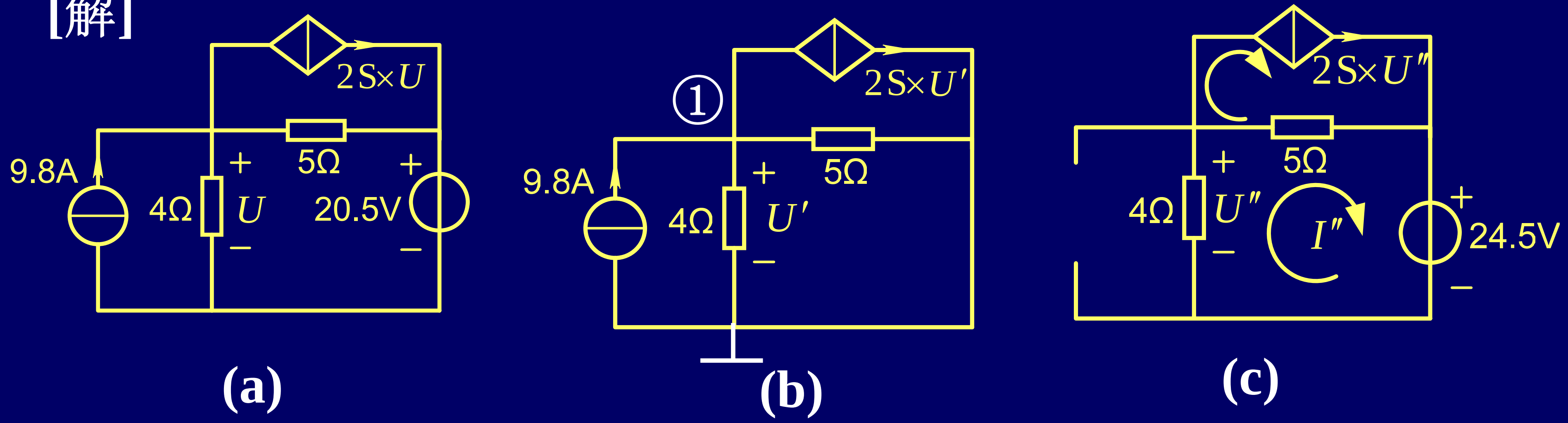
$$I' = \frac{7\Omega \times 1.5\mathrm{A}}{(4 \| 12)\Omega + (5+7)\Omega} = 0.7\mathrm{A}$$

$$U' = (4 \| 12)\Omega \times I' = 2.1\mathrm{V} \quad + \quad U'' = \frac{(5+7) \| 12}{(5+7) \| 12 + 4} \times 10\mathrm{V} = 6\mathrm{V}$$

$$U = U' + U'' = 8.1\mathrm{V}$$

[补充3.3] 用叠加定理计算电压U

[解]



电流源单独作用 $\left(\dfrac{1}{4\Omega}+\dfrac{1}{5\Omega}\right)U'=9.8\text{A}-2\text{S}\times U' \quad \Rightarrow U'=4\text{V}$

电压源单独作用 $(4\Omega+5\Omega)I''-5\Omega\times 2\text{S}U''=-24.5\text{V}$

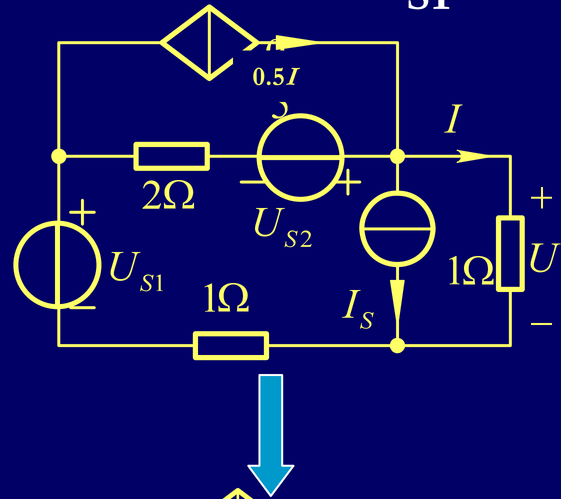
$U''=-4\Omega\times I''$

$\Rightarrow I''=-0.5\text{A} \quad U''=-4\Omega I''=2\text{V}$

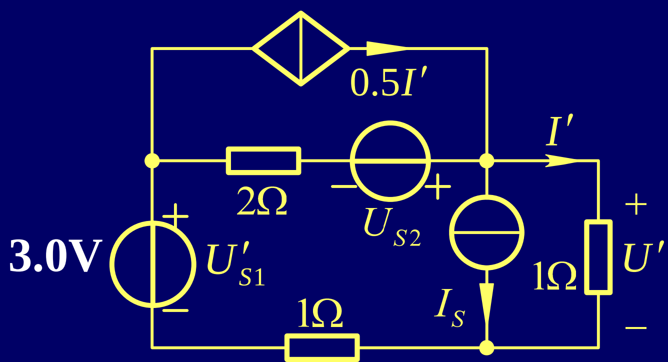
根据叠加定理 $U=U'+U''=6\text{V}$

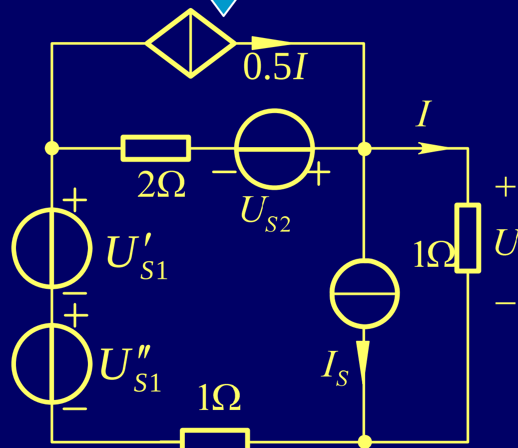
例题 3.5

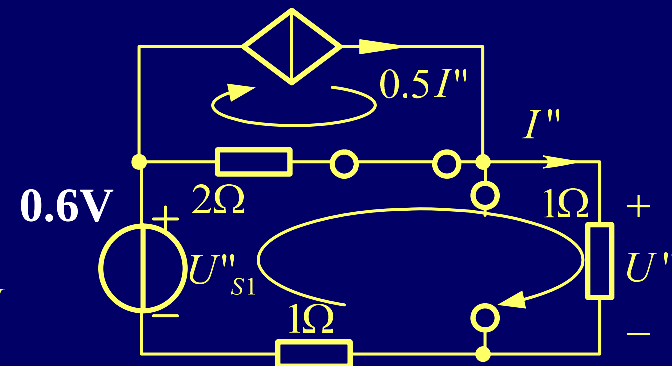
已知当U_{S1}=3V时，电压U=4V。求当U_{S1}=3.6V，其它条件不变时电压 U 的值。



解







$$U' = 4\text{V}$$

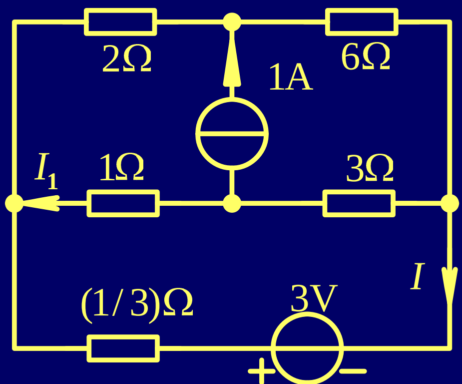
$$(1+2+1)\Omega \times I'' - 2\Omega \times 0.5I'' = 0.6\text{V}$$

$$I'' = 0.2\text{A}$$

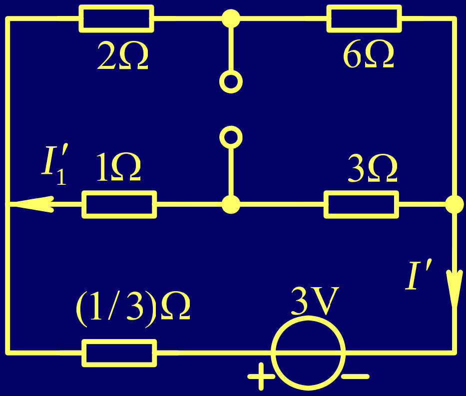
$$U'' = 1\Omega \times I'' = 0.2\text{V}$$

$$U = U' + U'' = 4.2\text{V}$$

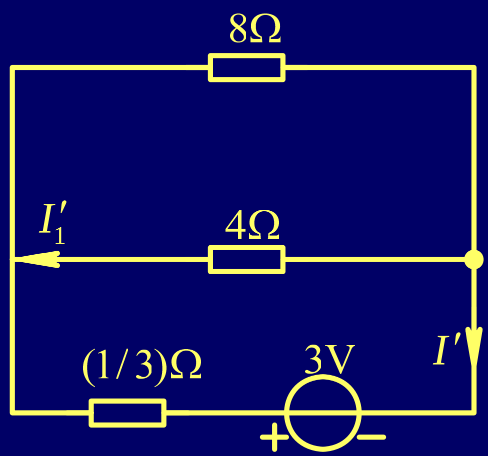
[补充3.4] 用叠加定理求图示电路的电流I及1 Ω 电阻消耗的功率



(a) 题3.4



(b) 电压源作用



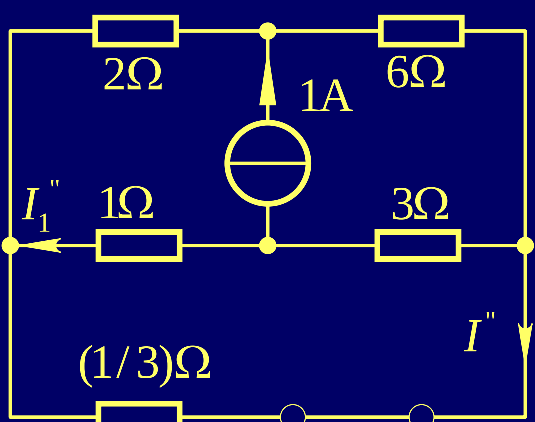
(c) 电压源作用

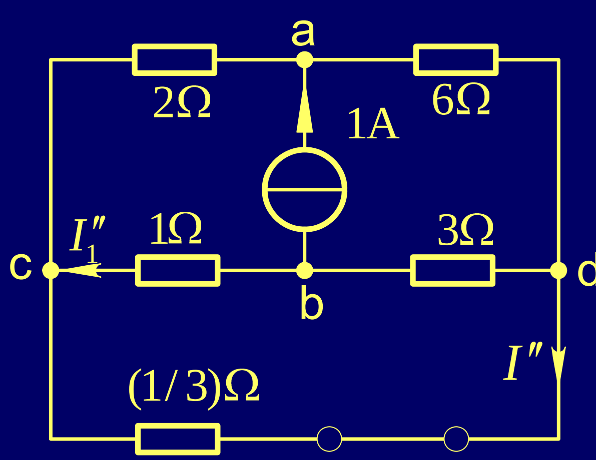
[解] 本题考虑到电桥平衡，再利用叠加定理，计算非常简单。

3V电压源单独作用

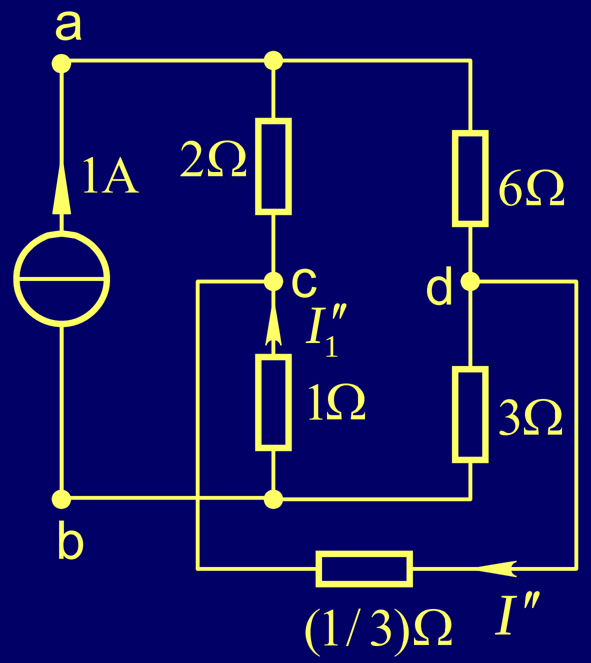
$$I' = \frac{3\text{V}}{\frac{1}{3}\Omega + \frac{4\times 8}{4+8}\Omega} = 1\text{A} \qquad I_1' = -I' \times \frac{8\Omega}{4\Omega + 8\Omega} = -\frac{2}{3}\text{A}$$

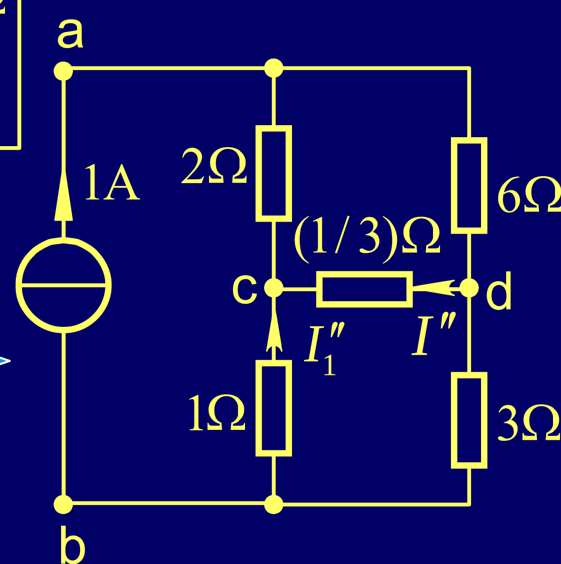
1A电流源单独作用





(d) 电流源作用





考虑到电桥平衡 $I''=0$

在由分流公式得：$I_1''=-1\text{A}\times\dfrac{3}{1+3}=-\dfrac{3}{4}\text{A}$

叠加 $I=I'+I''=1\text{A}$ $I_1=I_1'+I_1''=-17/12\text{A}$

功率 $P_{1\Omega}=1\Omega\times I_1^{\ 2}=2.007\text{W}$

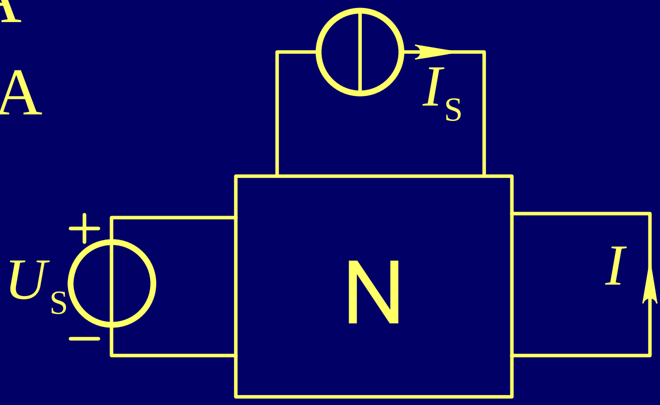
注释：不能用各独立源单独作用时电阻消耗的功率之和来计算电阻在电路中消耗的功率。

[补充3.5]　图示电路，网络N中没有独立电源，当

$U_S = 8\text{V}$　$I_S = 12\text{A}$ 时，测得 $I = 8\text{A}$

$U_S = -8\text{V}$　$I_S = 4\text{A}$ 时，测得 $I = 0\text{A}$

求当 $U_S = 9\text{V}$　$I_S = 10\text{A}$ 时，电流 $I = ?$



[解]　$I = I' + I'' = k_1 I_S + k_2 U_S$

$$\begin{cases} 8\text{A} = 12\text{A}\times k_1 + 8\text{V}\times k_2 \\ 0\text{A} = 4\text{A}\times k_1 - 8\text{V}\times k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0.5 \\ k_2 = 0.25\text{S} \end{cases}$$

$$I = 0.5\times I_S + 0.25\text{S}\times U_S$$

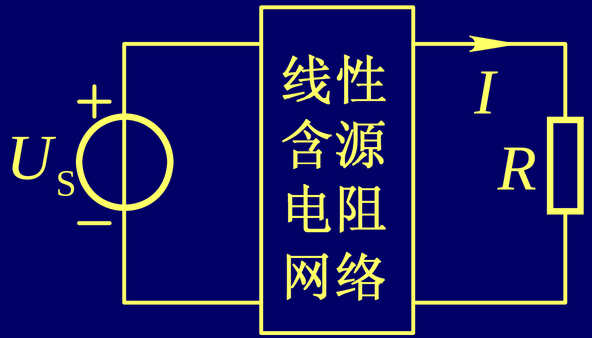
当 $U_S = 9\text{V}, I_S = 10\text{A}$ 得 $I = 0.5\times 10\text{A} + 0.25\text{S}\times 9\text{V}$

$= 7.25\text{A}$

[补充3.6]　图示电路，当 $U_S = 10\text{V}$ 时 $I = 6\text{A}$

$U_S = 15\text{V}$ 时 $I = 7\text{A}$

$I = 10\text{A}$ 时 $U_S = ?$



[解]　根据齐性定理和叠加定理

$$I = I' + I'' = I' + kU_S$$

$$\begin{cases} 6\text{A} = I' + k \times 10\text{V} \\ 7\text{A} = I' + k \times 15\text{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0.2\text{S} \\ I' = 4\text{A} \end{cases}$$

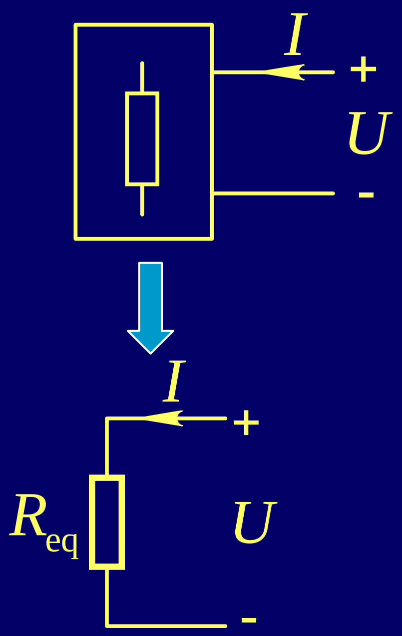
$$I = 4\text{A} + 0.2\text{S} \times U_S$$

当 $I = 10\text{A}$ 得 $U_S = 30\text{V}$

3.3 等效电源定理

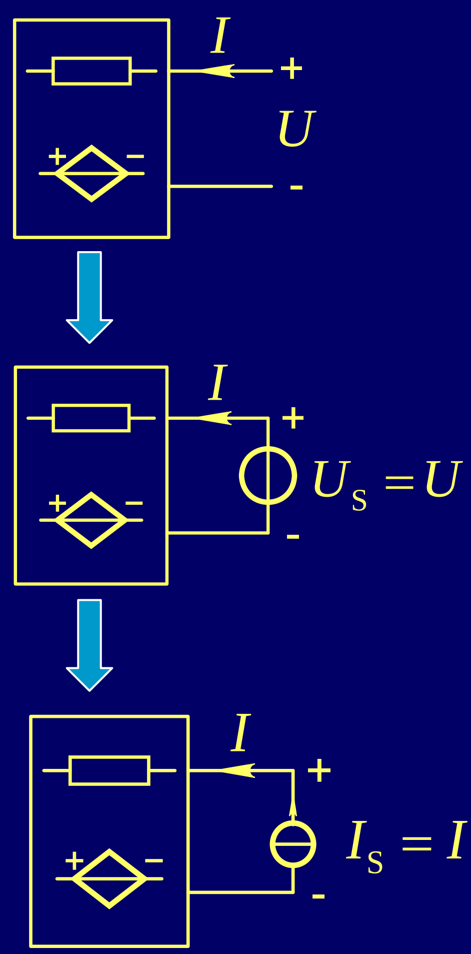
基本要求：理解等效电源定理的原理和内容，熟练应用等效电源定理。

1 电阻网络



$$U = R_{eq} I \Rightarrow R_{eq} = \frac{U}{I}$$

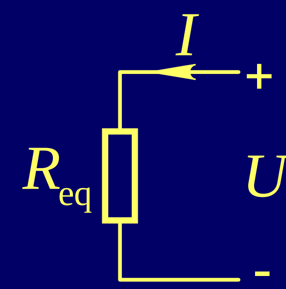
2 电路中存在受控源



$$\begin{cases} I = G_i U \\ U = R_i I \end{cases}$$

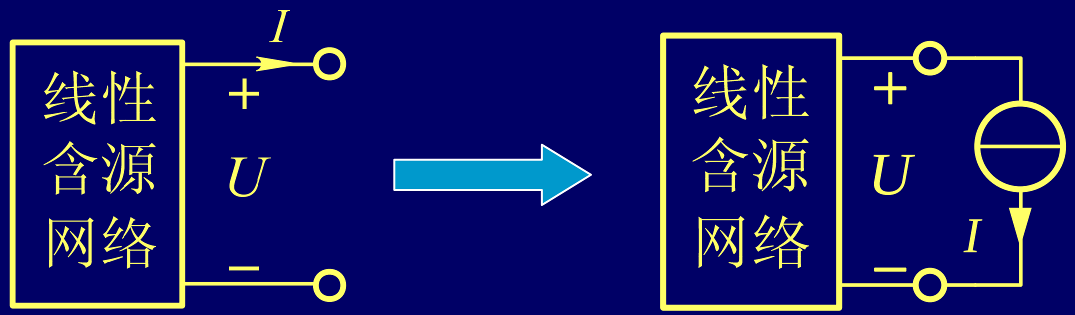
$$R_i = \frac{1}{G_i} = \frac{U}{I}$$

输入电阻和输入电导



结论：不含独立源的一端口网络对外可以等效成一个电阻。

3 电路中存在独立电源

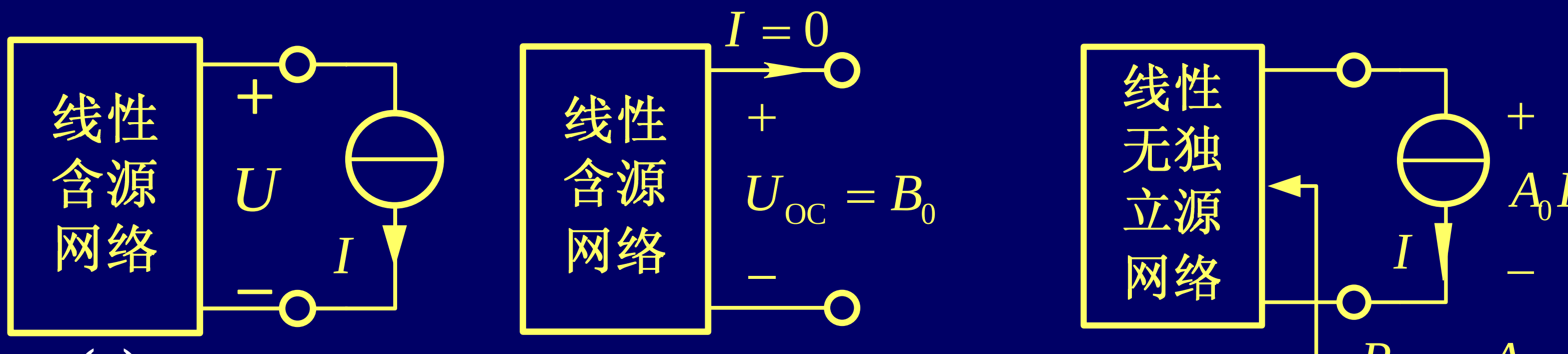


根据齐性定理与叠加定理，响应U是电流源I和网络内部各独立电源激励的线性组合，即

$$U = A_0 I + \sum A_k X_k$$

式中A_0、A_k是由电路结构和参数决定的系数，它们与各独立源的量值无关；X_k表示网络内部第k个独立电源（电压源电压或电流源电流），是确定的。因此，$\sum A_k X_k$是一确定电压，与电流I无关，用B_0来表示。于是得到一端口网络的电压、电流关系

$$U = A_0 I + B_0$$



(a) (b) (c)

$$U = A_0 I + B_0$$

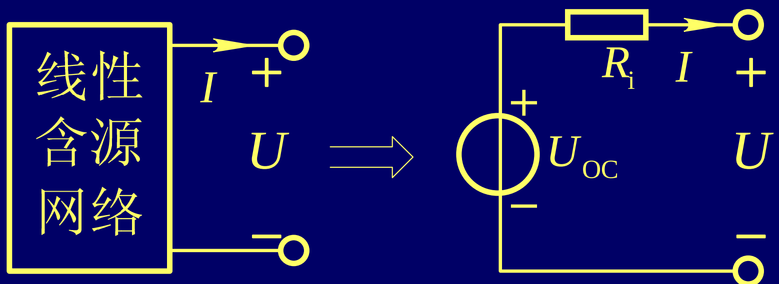
(a)令端口所接电流源不作用，即I=0，如图 (b)，可见B_0是a，b两端 开路时的电压，记作

$$B_0 = U_{OC}$$

(b) 令一端口内部各独立电源不作用，即X_k=0，如(c)，故B_0=0，A_0=U/I是当网络内部全部独立电源置零时，从端口处看进去的等效电阻的负值，记作

$$A_0 = \frac{U}{I} = -R_i$$

$$U = U_{OC} - R_i I$$

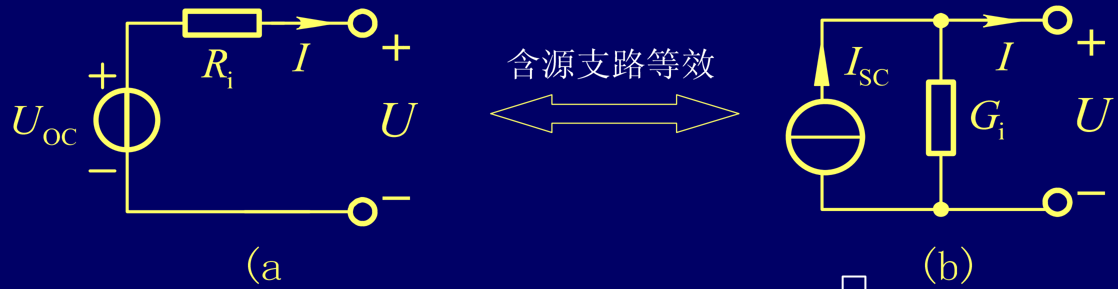


(a) (b)

1 戴维南定理

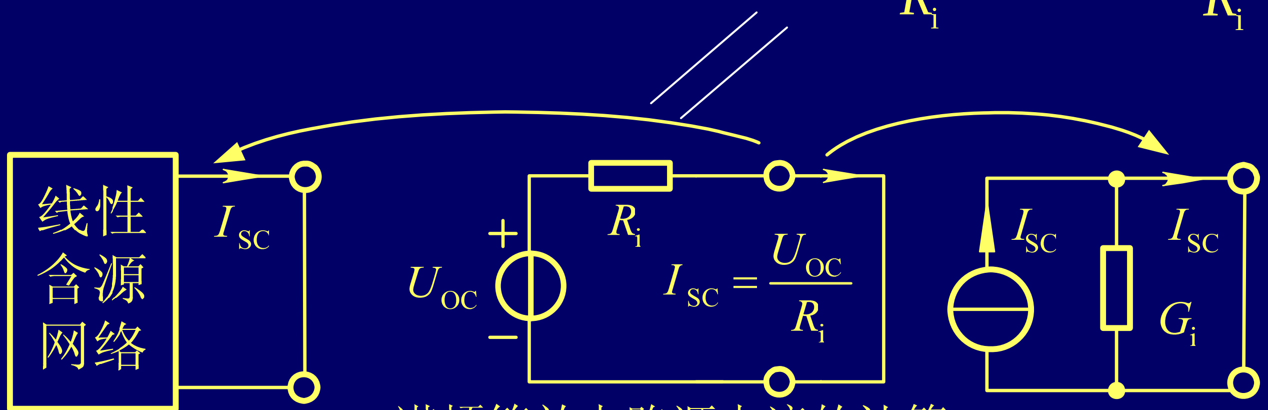
定理： 线性含源一端口网络的对外作用可以用一个电压源串联电阻的电路来等效代替。其中电压源的电压等于此一端口网络的**开路电压**，而电阻等于此一端口网络内部各独立电源置零后所得无独立源一端口网络的**等效电阻**。

2 诺顿定理



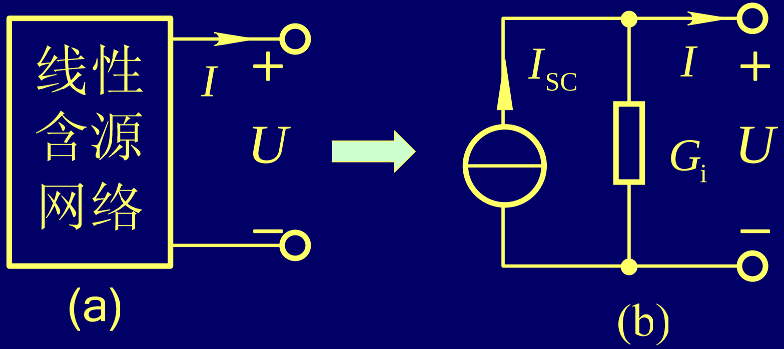
短路电流

$$I_{SC}=\frac{U_{OC}}{R_i}\qquad G_i=\frac{1}{R_i}$$



诺顿等效电路源电流的计算

定理：线性含源一端口网络的对外作用可以用一个电流源并联电导的电路来等效代替，其中电流源的源电流等于此一端口网络的**短路电流**，而电导等于此一端口网络内部各独立源置零后所得无独立源一端口网络的**等效电导**。这一定理称为诺顿定理，所得电路称为诺顿等效电路。



诺顿定理图示

注：1 被等效部分与未被等效部分之间应无耦合（无受控源联系）；

2 可能只存在一种等效电路：G_i=0时只存在诺顿等效电路；R_i=0时只存在戴维南等效电路；

3 （开路、短路或接任意负载）对外电路作用相同。

等效电路的计算方法

(1) 计算开路电压U_{OC}或短路电流I_{SC}

令一端口开路或短路，根据电路的特点，选择某种列方程的方法求出开路电压U_{OC}或短路电流I_{SC}

(2) 计算等效电阻R_i，常用的方法概括如下：

① 对不含受控源的简单一端口网络，令内部独立电源为零，通过电阻的串并联或星形-三角形化简得到等效电阻，

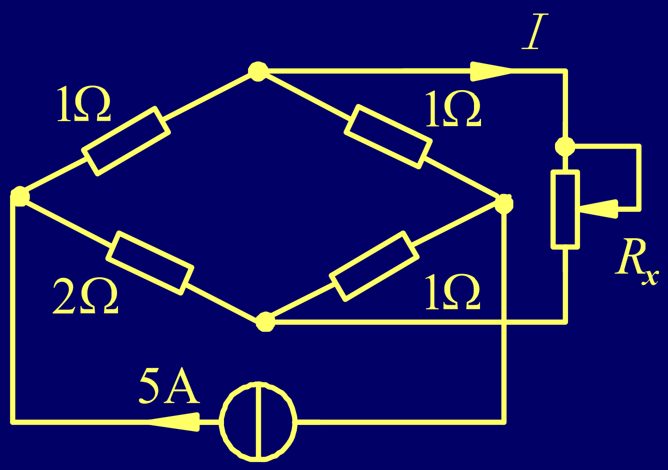
② 对复杂的或含受控源的一端口网络，令内部独立电源为零，在端口处加一独立电压源或独立电流源，利用端口处电压和电流之比得到等效电阻，$R_i = U/I$。

③ 求出含源一端口网络的开路电压U_{OC}和短路电流I_{SC}，二者之比即为等效电阻

$$I_{SC} = \frac{U_{OC}}{R_i} \quad \Longrightarrow \quad G_i = 1/R_i = I_{SC}/U_{OC}$$

例题 3.6

计算电桥中R_x分别等于0 Ω、0.4 Ω、0.8 Ω、1.2 Ω、1.6 Ω、2.0 Ω时，该支路的电流和功率。



解

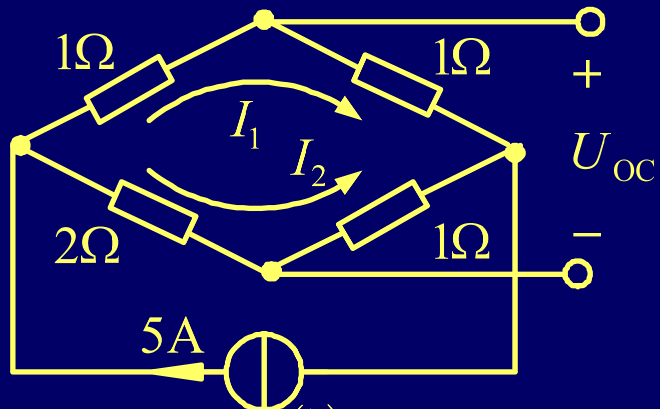
用戴维南定理化简电路中的不变部分。

(1) 求开路电压U_{OC}。将R_X支路断开时，电路如图(b)所示。

$$I_1 = \frac{(2+1)\Omega}{(2+1)\Omega + (1+1)\Omega} \times 5A = 3A$$

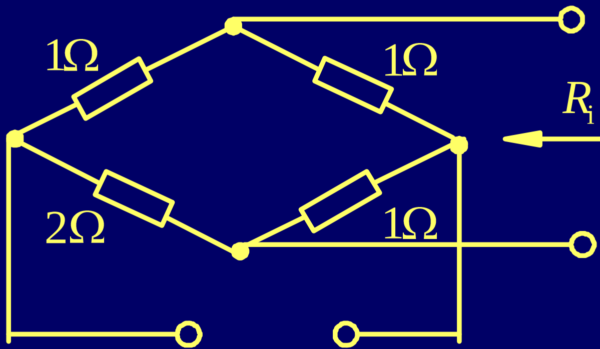
$$I_2 = 5A - I_1 = 2A$$

$$U_{OC} = (1\Omega \times I_1 - 1\Omega \times I_2) = 1V$$



(b)

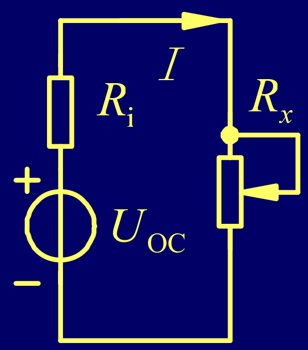
(2) 求等效电阻R_i。将电流源用开路代替，电路如图(c)所示。



(c)

$$R_i = [(1+2)//(1+1)]\Omega = 1.2\Omega$$

(3) 戴维南等效电路如图(d)所示。



(d)

$$I = \frac{U_{OC}}{R_i + R_X} = \frac{1V}{1.2\Omega + R_X} \qquad P = I^2 R_X$$

(4) R_X的电流和功率。

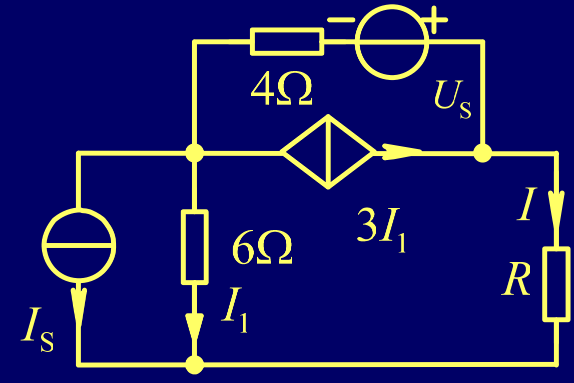
R_X (Ω)	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
I(A)	0.83	0.63	0.5	0.42	0.36	0.31
P(W)	0	0.6	0.2	0.21	0.207	0.18

(5) 负载 R_X获得最大功率的条件及最大功率值。

当$R_X = R_i$时，负载可获得最大功率， $P_{max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_X}$

例题 3.7

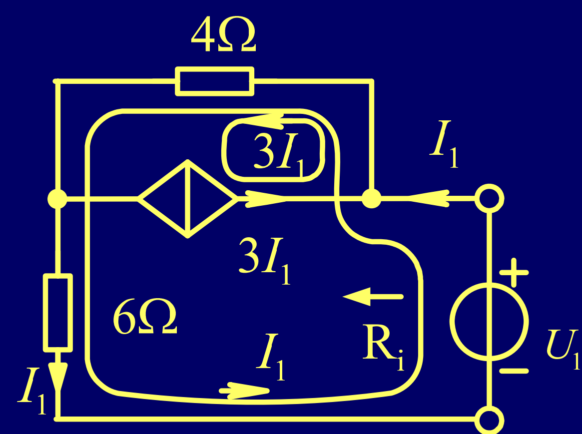
如图所示电路。已知R=8 Ω 时，I＝1A。求R为何值时I＝0.5A？



解

(1)为求该电路的戴维南等效电 路，首先求该电路的等效内阻；

$$(4+6)\Omega \times I_1 + 4\Omega \times 3I_1 = U_1 \Rightarrow R_i = \frac{U_1}{I_1} = 22\Omega$$

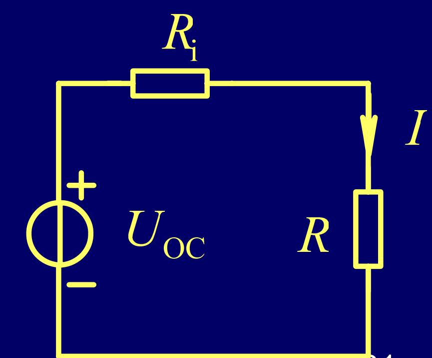


(2) 根据已知条件求开路电压；

$$U_{OC} = (R_i + R)I = (22+8)\Omega \times 1\text{A} = 30\text{V}$$

(3) 求R为何值时I＝0.5A

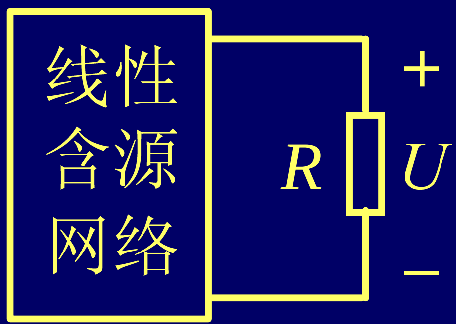
$$I = \frac{U_{OC}}{R_i + R} = \frac{30\text{V}}{22\Omega + R} = 0.5\text{A} \Rightarrow R = 38\Omega$$

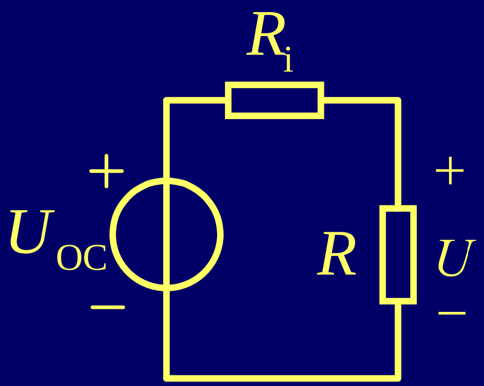


[补充3.7] 图示电路，已知 $R=10\Omega$ 时 $U=15\text{V}$

$R=20\Omega$ 时 $U=20\text{V}$

求 $R=30\Omega$ 时 $U=?$





戴维南等效电路

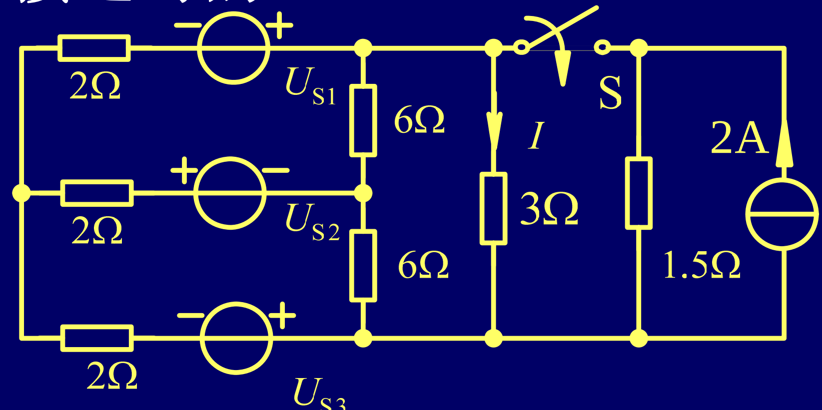
[解]

$$U=\frac{R\times U_{\text{OC}}}{R+R_{\text{i}}}$$

$$\begin{cases} 15\text{V}=\dfrac{10\Omega\times U_{\text{OC}}}{R_{\text{i}}+10\Omega} \\ 20\text{V}=\dfrac{20\Omega\times U_{\text{OC}}}{R_{\text{i}}+20\Omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{\text{OC}}=30\text{V} \\ R_{\text{i}}=10\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow U=\frac{R\times U_{\text{OC}}}{\text{R}+10\Omega} \Rightarrow \begin{cases} \text{当 } R=30\Omega \text{ 时} \\ U=\dfrac{30\Omega\times 30\text{V}}{30\Omega+10\Omega}=22.5\text{V} \end{cases}$$

[补充3.8] 已知 S断开时，I=5A，求S接通时的I。



(a)

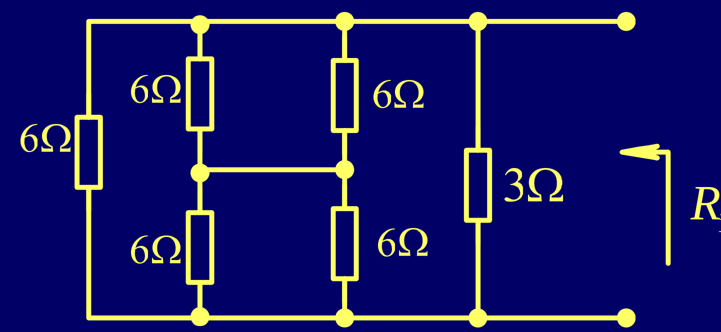
[解]

(1) 求开路电压 U_{OC}

开路电压为3Ω电阻两端电压

$$U_{OC}=3\Omega\times5\text{A}=15\text{V}$$

(2) 求等效电阻R_i，电路如图(b)所示

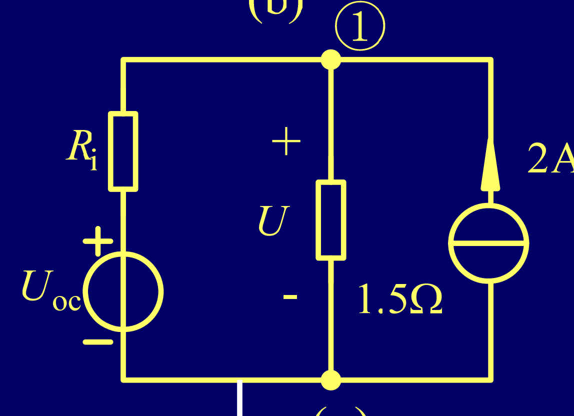


(b)

$$R_i=3\Omega//6\Omega//\left(\left(6\Omega//6\Omega\right)\times2\right)=1.5\Omega$$

(3) 开关闭合后电路如图(c)所示

列节点电压方程



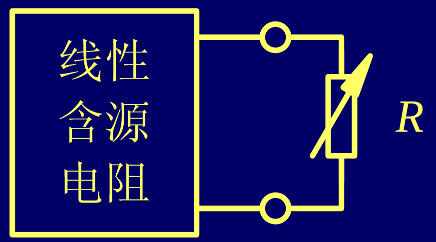
(c)

$$\left(\frac{1}{1.5\Omega}+\frac{1}{1.5\Omega}\right)U=\frac{U_{OC}}{R_i}+2\text{A}=\frac{15\text{V}}{1.5\Omega}+2\text{A}$$

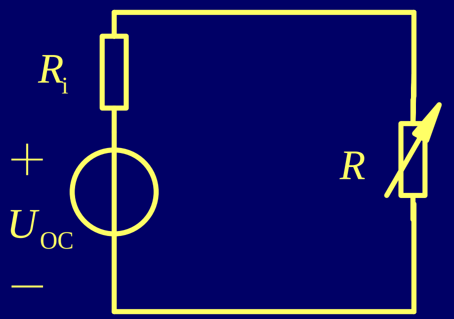
解得 $U=9\text{V}$ $\quad I=\dfrac{U}{3\Omega}=3\text{A}$

例题 3.8

已知图(a)所示电路中 R=10Ω时，其消耗的功率为22.5W；R=20Ω时，其消耗的功率为20W。求当 R=30Ω时它所消耗的功率。



(a)



(b)

[解] 将含源电阻网络等效为戴维南电路。如图(b)所示。负载电阻 R 消耗的功率可表示为

$$P_R=\left(\frac{U_{\text{OC}}}{R_{\text{i}}+R}\right)^2\times R$$

代入两组已知条件得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{U_{\text{OC}}}{R_{\text{i}}+10\Omega}\right)^2\times 10\Omega=22.5\text{W}\\[2ex]\left(\dfrac{U_{\text{OC}}}{R_{\text{i}}+20\Omega}\right)^2\times 20\Omega=20\text{W}\end{cases}$$

联立解得 $R_{\text{i}}=10\Omega$ $U_{\text{OC}}=30\text{V}$ $\Rightarrow$ $P_R=\left(\dfrac{30\text{V}}{10\Omega+R}\right)^2\times R$

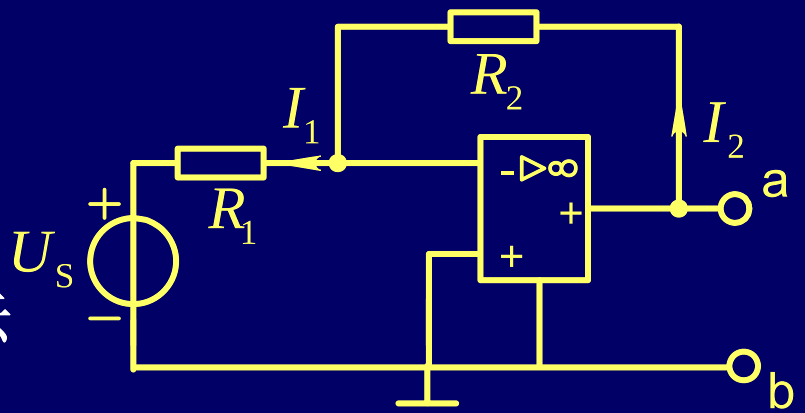
当 $R=30\Omega$ 时

$$\Rightarrow P_R=\left(\frac{U_{\text{OC}}}{R_{\text{i}}+30\Omega}\right)^2\times 30\Omega=\left(\frac{30\text{V}}{(10+30)\Omega}\right)^2\times 30\Omega\approx 16.9\text{W}$$

[补充3.9]　求戴维南等效电路（问能否求出诺顿等效电路？）

[解]　(1) 求开路电压 U_{OC}

$$U_{OC}=-\frac{R_2}{R_1}U_S$$



(a)

(2) 求等效电阻R_i，电路如图(b)所示

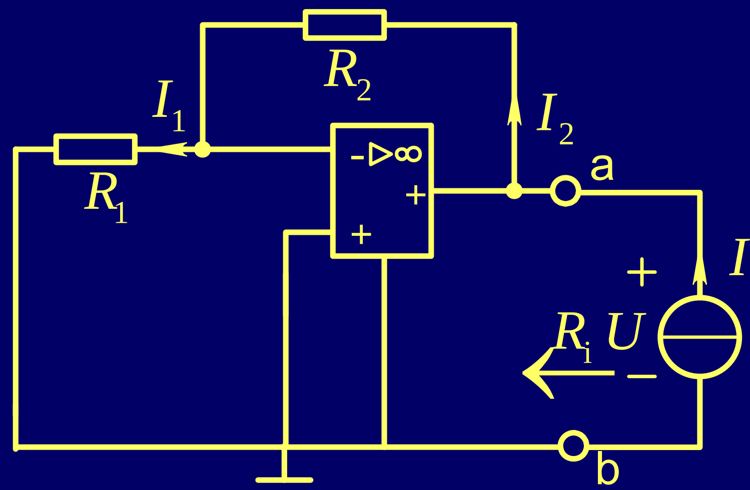
$$U=R_2I_2$$

$$I_1=I_2\quad \text{(虚断)}$$

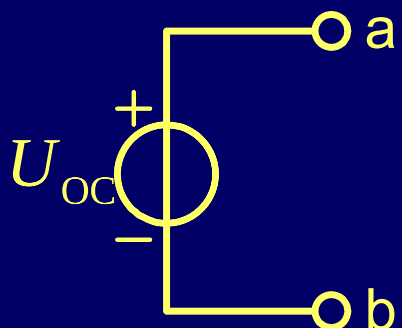
R_1两端的电压为0(虚短)，即

$$I_1=0 \Rightarrow U=0$$

等效电阻 $R_i=\dfrac{U}{I}=0$



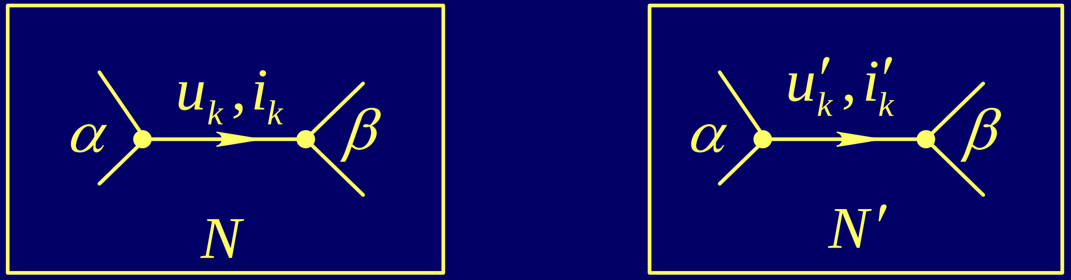
(b)



不可以等效成诺顿电路

基本要求：理解特勒根定理的内容、证明过程、物理意义和普遍适用性。

1 定理

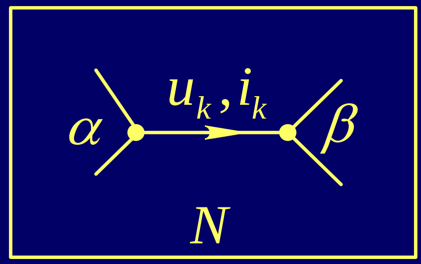


(a) (b)

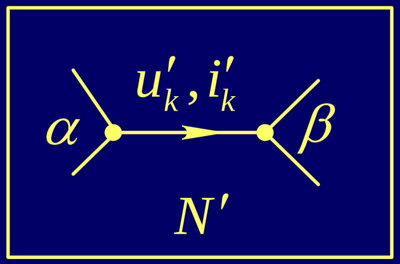
结构相同：
- (1) 节点数与支路数分别相同；
- (2) 节点与支路的连接关系也分别相同；
  （(1)(2)：两个电路的图相同）
- (3) 节点与支路的编号也相同；
- (4) 对应的支路具有相同的**u**，**i** 关联参考方向。

特勒根定理：电路***N***中各支路电压$\boldsymbol{u_k}$与电路 N' 中对应支路电流 i'_k 的乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i'_k = 0 \qquad \text{同样} \qquad \sum_{k=1}^{b} u'_k i_k = 0$$



(a)



(b)

证明：设支路k接在节点 α 与 β 之间，用$u_{n\alpha}$和$u_{n\beta}$分别表示节点 α 和 β 的节点电压，则支路电压u_k可用节点电压之差来表示，于是得到

$$u_k i'_k = (u_{n\alpha} - u_{n\beta}) i'_k = (u_{n\alpha} - u_{n\beta}) i'_{\alpha\beta}$$

因为 $i'_{\alpha\beta} = -i'_{\beta\alpha} \Rightarrow \sum_{k=1}^{b} u_k i'_k = \sum_{\text{所有支路}} (u_{n\alpha} i'_{\alpha\beta} + u_{n\beta} i'_{\beta\alpha})$

对于整个电路存在 $u_{n\alpha} \sum_{\alpha} i'$

$\sum_{\alpha} i'$ 为流出节点 α 的各支路电流之和

$$\sum_{\alpha} i' = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{b} u_k i'_k = 0$$

同样可以证明 第二种表达形式

特勒根定理的特点是在两个电路 N' 和 N 之间建立了电压与电流的量值关系。这只是量值关系，而没有物理意义。

如果将特勒根定理用于一个电路N（即N' 也是N），便得到

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$

式中u_k与i_k参考方向相同，它们的乘积表示支路k吸收的功率，即

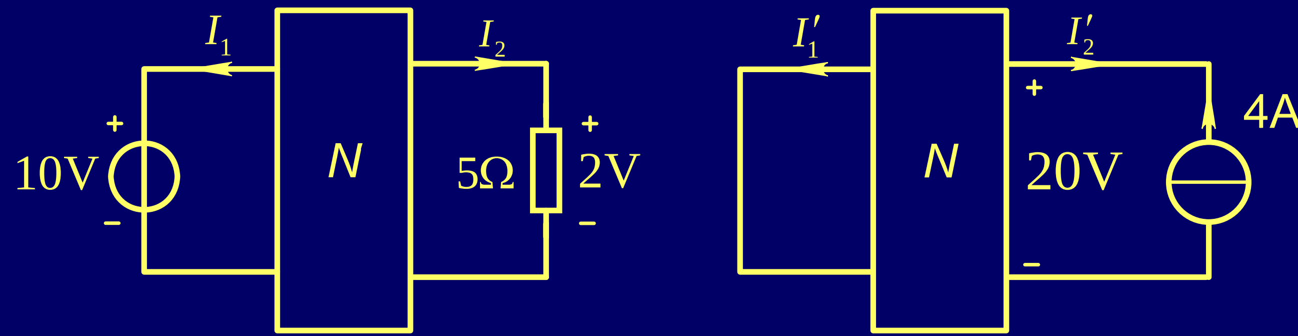
$$p_k = u_k i_k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{b} p_k = 0$$

意义：在任一瞬间，一个电路中各支路吸收功率的代数和等于零。这就是电路的功率守恒定理。

特勒根定理应用于不同电路中时，虽然具有相同的形式，但却不具备任何物理意义，所以称为似功率守恒定理

注：1) 两个电路的对应电压和电流的参考方向取向要一致
2)同一个电路各支路电压、电流参考方向的取向要一致
(全关联或全非关联)

[补充3.10] N为纯电阻网络，利用特勒根定理求出电流 I_1'



[解] 设网络内共有b条支路，各支路电压和电流取关联参考方向，由特勒根定理得

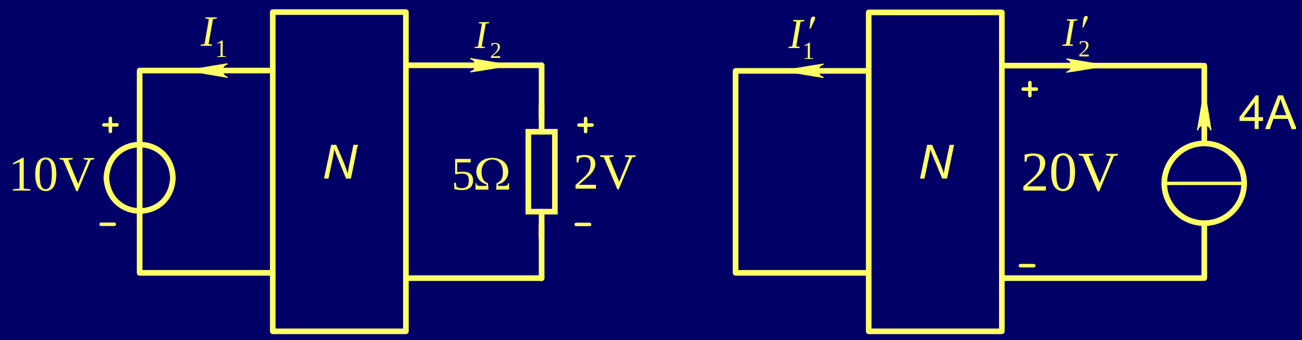
$$\left.\begin{aligned} U_1 I_1' + U_2 I_2' + \sum_{k=3}^{b} U_k I_k' = 0 \\ U_1' I_1 + U_2' I_2 + \sum_{k=3}^{b} U_k' I_k = 0 \end{aligned}\right\}$$

因为N为纯电阻网络，故

$$\sum_{k=3}^{b} U_k I_k' = \sum_{k=3}^{b} R_k I_k I_k' = \sum_{k=3}^{b} R_k I_k' I_k = \sum_{k=3}^{b} U_k' I_k$$

$$U_1 I_1' + U_2 I_2' = U_1' I_1 + U_2' I_2$$

注：对仅由二端电阻组成的二端网络，无论端口外接情况如何，此公式都是成立的，因此可以作为公式来使用



代入已知条件：

对于图(a) $U_1 = 10\text{V}, U_2 = 2\text{V}, I_2 = \dfrac{2\text{V}}{5\Omega} = 0.4\text{A}$

对于图(b) $U_1' = 0, U_2' = 20\text{V}, I_2' = -4\text{A}$

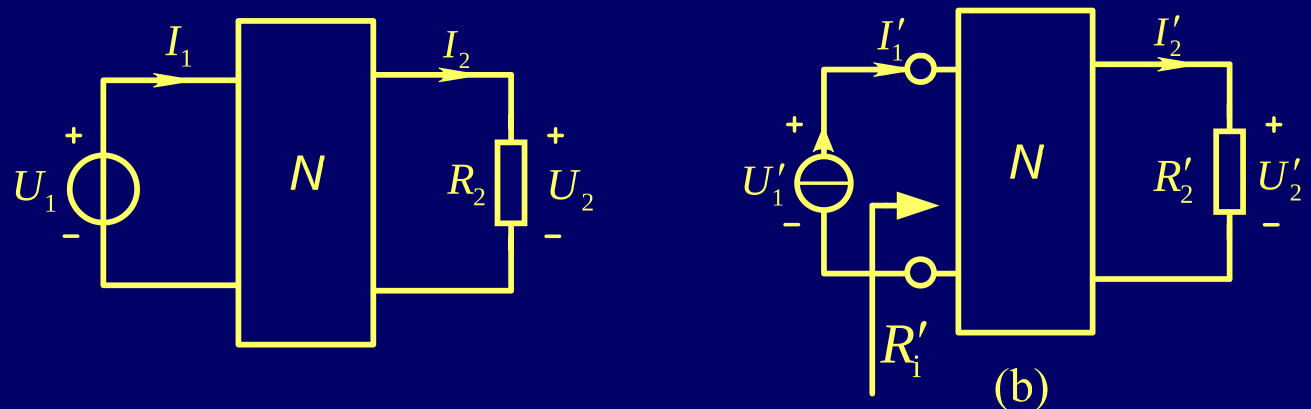
计算 I_1' $10\text{V} \times I_1' + 2\text{V} \times (-4\text{A}) = 0 \times I_1 + 20\text{V} \times 0.4\text{A}$

$\Rightarrow I_1' = 1.6\text{A}$

[补充3.11]　图示电路中N为纯二端电阻网络，

在图(a)中 $U_1 = 4\text{V}, R_2 = 2\Omega, I_1 = 1\text{A}, I_2 = 0.5\text{A}$

在图(b)中 $I_1' = 2\text{A}, R_2' = 4\Omega, U_2' = 3.2\text{V}$　求等效电阻 R_i'



[解]　由特勒根定理得　$-U_1I_1' + U_2I_2' = -U_1'I_1 + U_2'I_2$

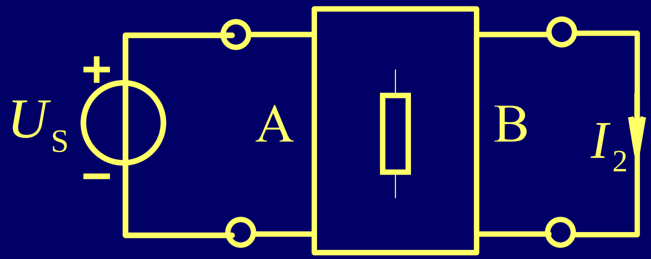
代入已知条件：　$U_2 = R_2I_2 = 2\Omega\times 0.5\text{A}=1\text{V}$　　$I_2' = \dfrac{U_2'}{R_2'} = \dfrac{3.2\text{V}}{4\Omega} = 0.8\text{A}$

$$-4\text{V}\times 2\text{A} + 1\text{V}\times 0.8\text{A} = -U_1'\times 1\text{A} + 3.2\text{V}\times 0.5\text{A}$$

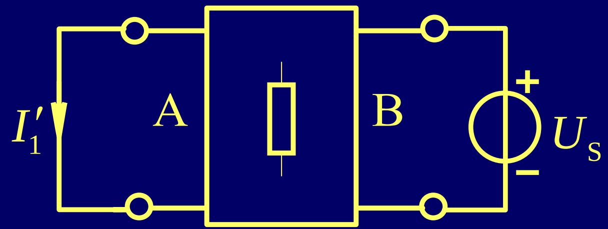
$$\Rightarrow U_1' = 8.8\text{V}$$

$$\Rightarrow R_i' = \frac{U_1'}{I_1'} = \frac{8.8\text{V}}{2\text{A}} = 4.4\Omega$$

基本要求：理解电路的互易性质，掌握互易定理的内容和用互易定理分析电路的方法.



(a)



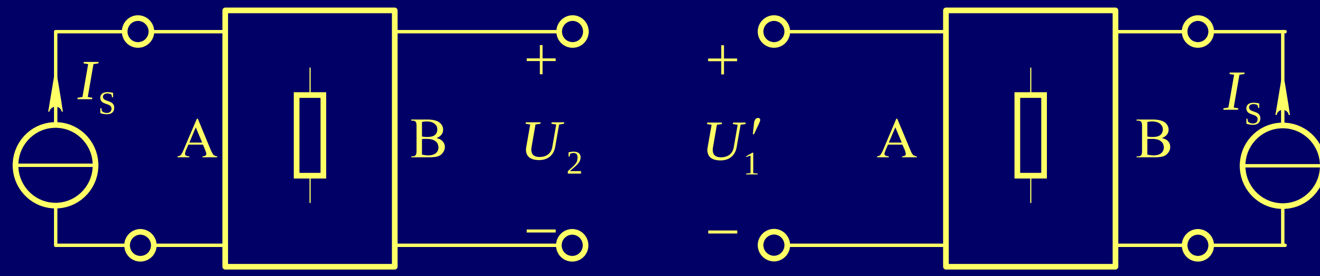
(b)

定理(第一种形式)： 对于含有一个独立电压源和若干线性二端电阻的电路，当此电压源在某一端口**A**作用时，在另一端口**B**产生的短路电流等于把此电压源移到端口**B**作用而在端口**A**所产生的短路电流。

$$I_2 = I_1'$$

证明：$U_1I_1' + U_2I_2' = U_1'I_1 + U_2'I_2 \Rightarrow U_SI_1' + 0\times I_2' = 0\times I_1 + U_SI_2$

$\Rightarrow I_2 = I_1' \Rightarrow U_{S1}I_1' + 0\times I_2' = 0\times I_1 + U_{S2}I_2 \Rightarrow \dfrac{U_{S1}}{U_{S2}} = \dfrac{I_2}{I_1'}$

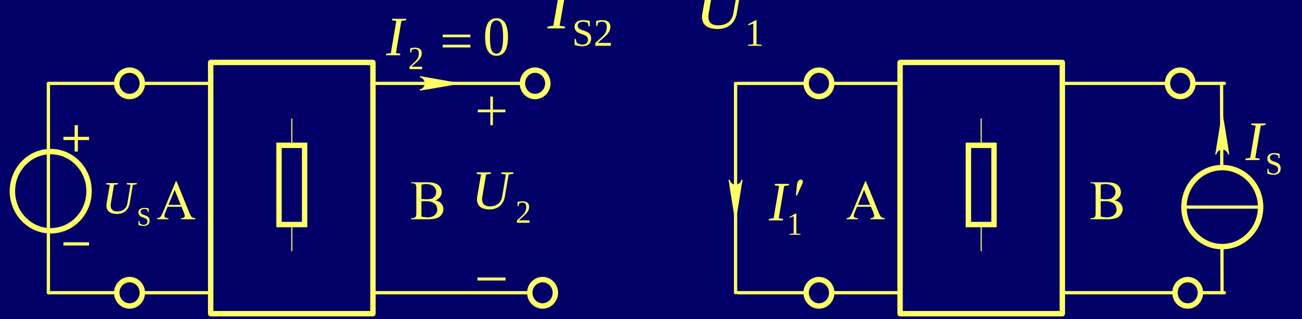


(c) (d)

$$U_2 = U_1'$$

定理(第二种形式)：对于含有一个独立电流源和若干线性二端电阻的电路，当此电流源在某一端口**A**作用时，在另一端口**B**产生的开路电压等于把此电流源移到端口**B**作用而在端口**A**所产生的开路电压。

$$\Rightarrow \quad \frac{I_{S1}}{I_{S2}} = \frac{U_2}{U_1'}$$



(e) (f)

定理(第三种形式)：对于图示电路,如果在数值上$\boldsymbol{I_S}$与$\boldsymbol{U_S}$相等,则$\boldsymbol{U_2}$与I_1'在数值上也相等。其中$\boldsymbol{I_S}$与I_1'、$\boldsymbol{U_S}$与$\boldsymbol{U_2}$分别取同样单位。

$$\Rightarrow \quad \frac{U_2}{U_S} = \frac{I_1'}{I_S}$$

互易定理的应用条件：互易性网络

一般判别方法：

(1) 如果回路电流法方程的互阻$R_{ij}=R_{ji}$或者节点电压方程的互导满足$G_{ij}=G_{ji}$，则该网络一定是互易网络；

(2) 由线性二端电阻、电容、电感、互感、理想变压器及独立电源组成的网络一定是互易网络；

(3) 如果网络中有受控电源或运算放大器，一般来说该网络是非互易的。

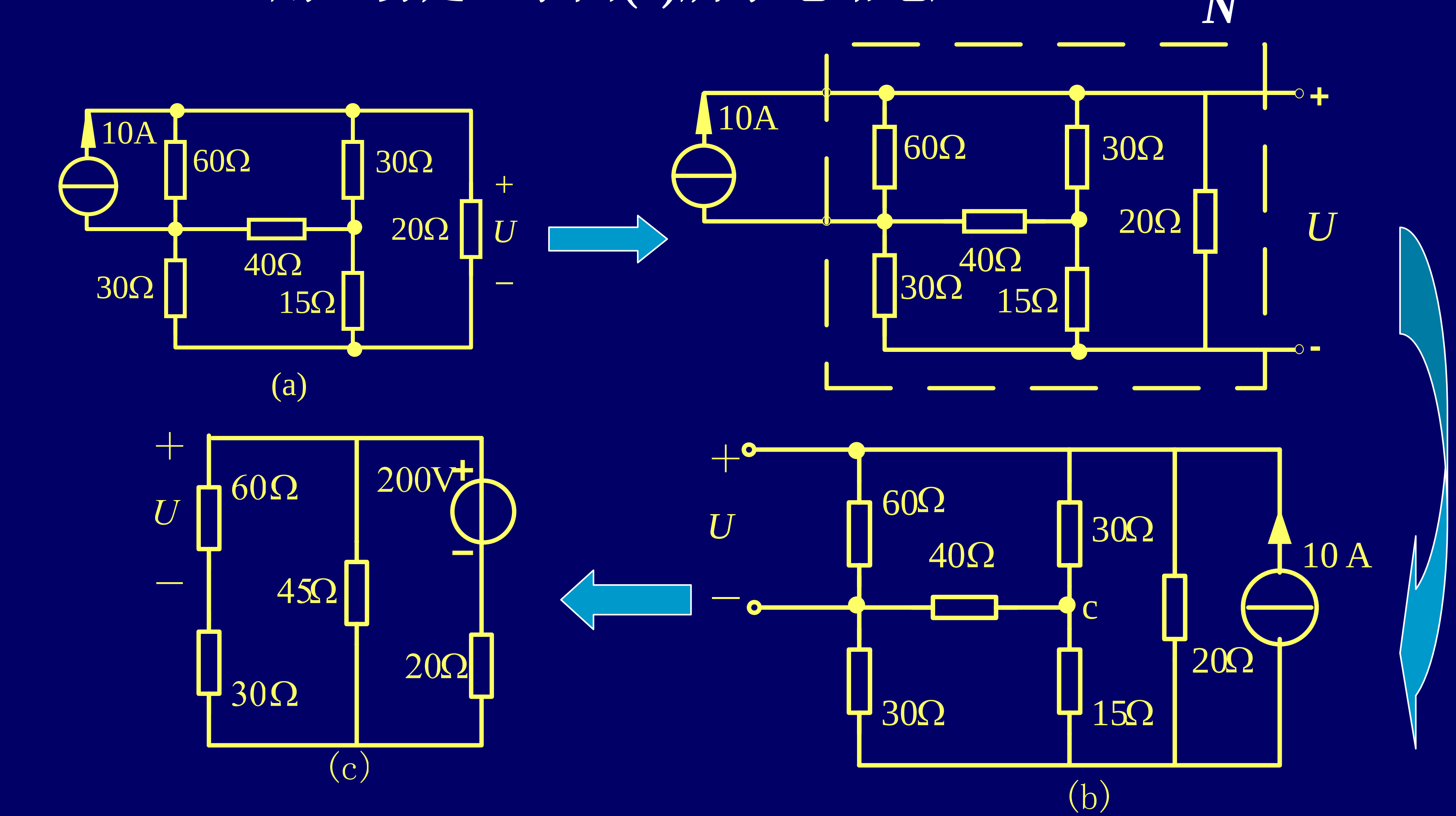
注意：

(1) 互易定理只适用于线性电路，不适用于非线性电路；

(2) 应用互易定理时要注意参考方向，如果两个网络的端口电压和电流的参考方向不一致，则应在不一致的电流和电压前加负号；

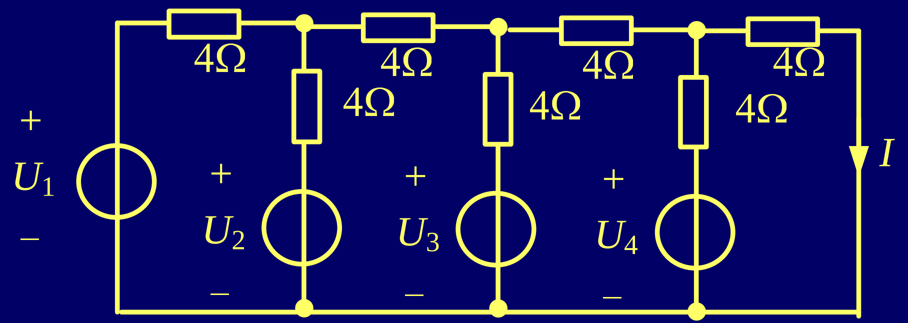
(3) 在激励与响应互换位置时，电路其余结构不能发生变化。

[补充3.12]　用互易定理求图(a)所示电路电压 U 。



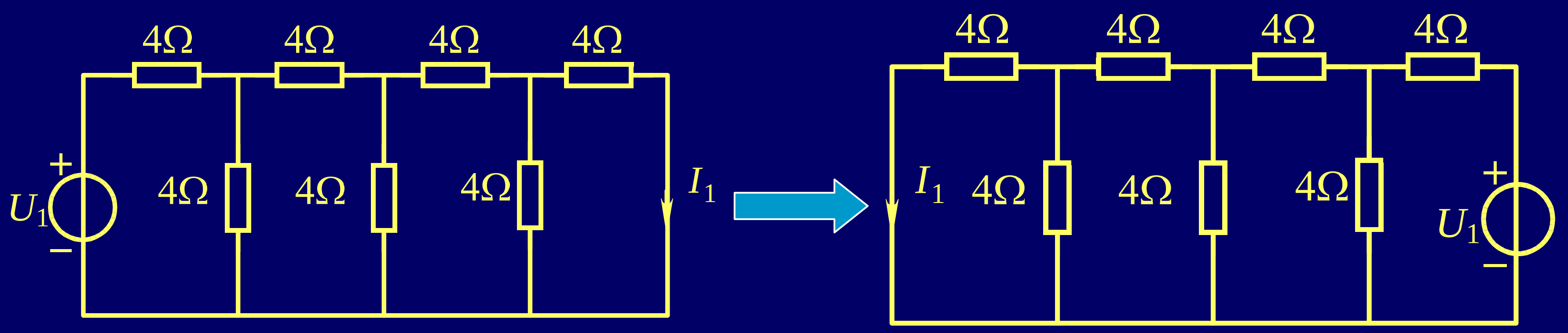
[解]　$$U=\frac{200\text{V}}{\left(20+\dfrac{90\times 45}{90+45}\right)\Omega}\times\frac{90\Omega\times 45\Omega}{(90+45)\Omega}\times\frac{60\Omega}{90\Omega}=80\text{V}$$

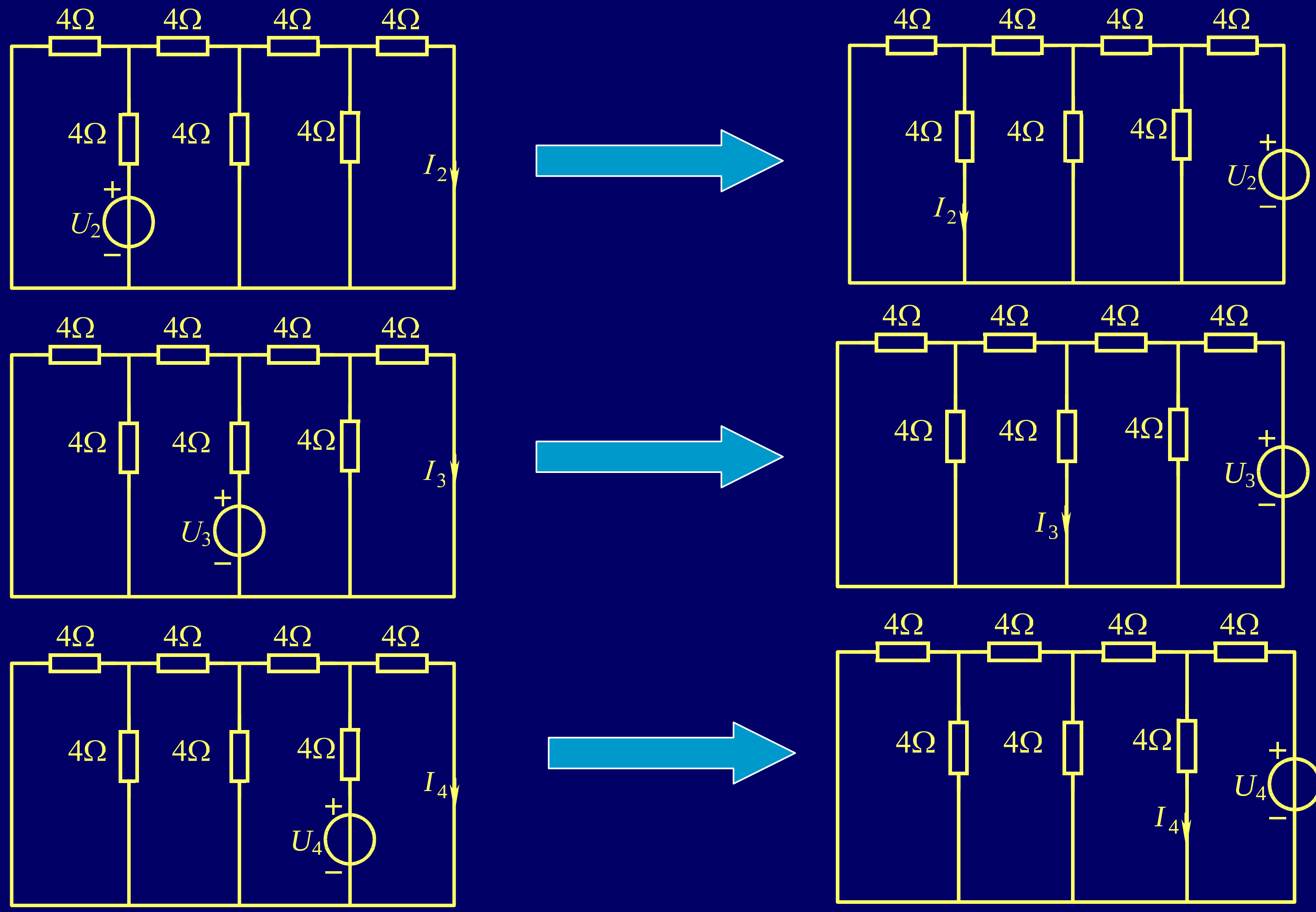
[补充3.13] 图示电路电流 I 可以写成 $I=K_1U_1+K_2U_2+K_3U_3+K_4U_4$。试借助互易定理求各比例系数$K_i(i=1,\ldots,4)$。



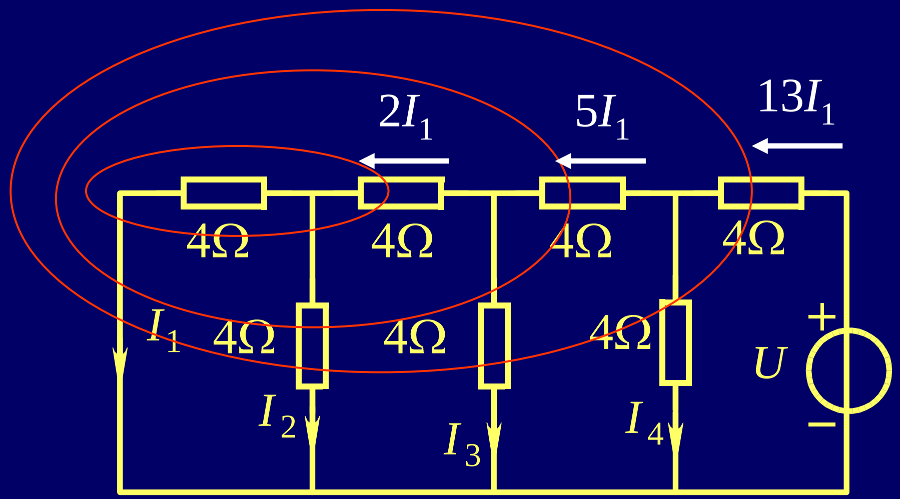
(a)

[解] 则各独立电源单独作用时产生的电流 I 的量值就是相应的比例系数





由叠加定理和互易定理，计算各电压源单独作用时的电流$\boldsymbol{I}$值等效于计算一个电压源作用时的各支路电流值$\boldsymbol{I_1}$、$\boldsymbol{I_2}$、$\boldsymbol{I_3}$、$\boldsymbol{I_4}$。



(b)

设 $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 1\text{V}$

$\Rightarrow I_2 = I_1$

$\Rightarrow I_3 = [4(I_1 + I_2) + 4I_2]/4 = 3I_1$

$\Rightarrow I_4 = [4(I_1 + I_2 + I_3) + 4I_3]/4 = 8I_1$

$\Rightarrow U = 4(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) + 4I_4 = 84I_1 = 1\text{V}$

$\Rightarrow I_1 = \dfrac{1}{84}\text{A}$

$\Rightarrow K_1 = \dfrac{I_1}{U} = \dfrac{1}{84}\text{S}$

$\Rightarrow K_2 = \dfrac{I_2}{U} = \dfrac{1}{84}\text{S}$

$\Rightarrow K_3 = \dfrac{I_3}{U} = \dfrac{3I_1}{U} = \dfrac{1}{28}\text{S}$

$\Rightarrow K_4 = \dfrac{I_4}{U} = \dfrac{8I_1}{U} = \dfrac{2}{21}\text{S}$

3.6 对偶原理

基本要求：了解对偶原理，并能应用对偶原理理解一些电路中的规律。

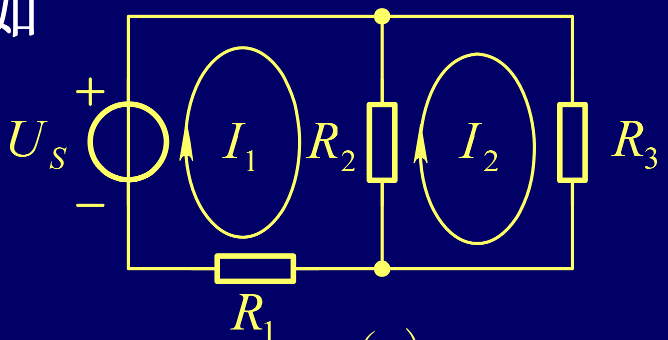
如果电路中某一定理(或方程、关系式等)的表述是成立的，则将其中的概念(变量、参数、元件、结构等)用其对偶因素置换所得的对偶表述也一定是成立的。这就是对偶原理。

表3.1 部分对偶因素

对偶因素		对偶因素	
电压	电流	星形联结	三角形联结
基尔霍夫电压定律	基尔霍夫电流定律	开路	短路
电阻	电导	自阻	自导
电压源	电流源	互阻	互导
电压控制电流源	电流控制电压源	戴维南定理	诺顿定理
电压控制电压源	电流控制电流源	互易定理表述一	互易定理表述二
节点	网孔		
串联	并联		

例如电阻串联时总电阻等于各电阻之和是成立的，那么电导并联时总电导等于各电导之和也是成立的。

例如

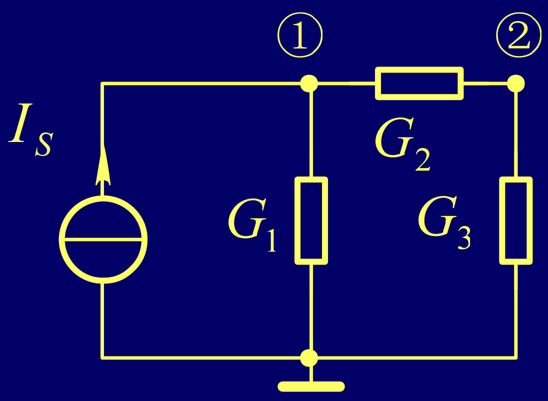


(a)

$$\begin{cases}(R_1+R_2)I_1-R_2I_2=U_S\\-R_2I_1+(R_2+R_3)I_2=0\end{cases}$$

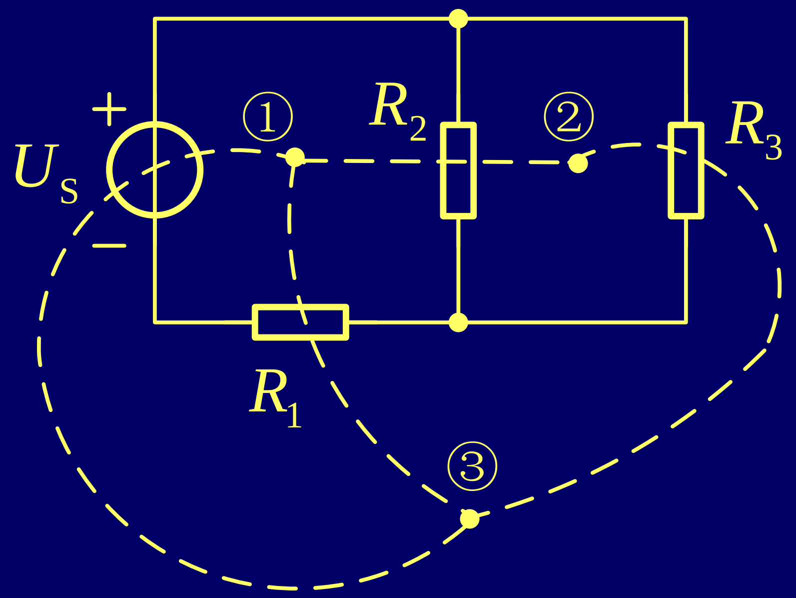
根据对偶原理

$$\begin{cases}(G_1+G_2)U_{n1}-G_2U_{n2}=I_S\\-G_2U_{n1}+(G_2+G_3)U_{n2}=0\end{cases}$$

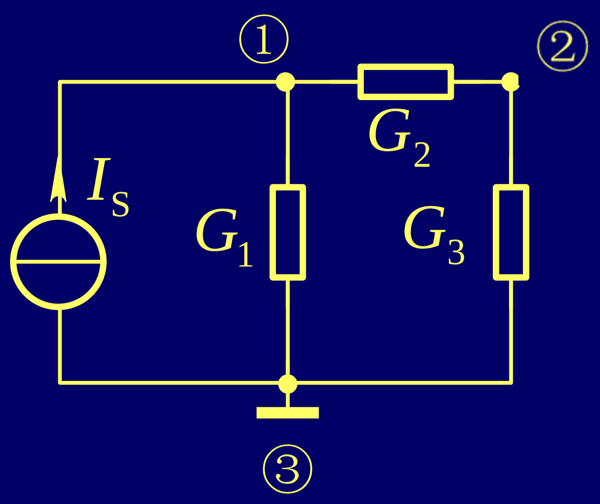


(b)

其实，由一个平面电路可直接画出其对偶电路。仍以上图为例，在每一个网孔内标出一个节点，作为其对偶电路的独立节点，在网孔外标出的节点对应非独立节点(参考节点)。把所标出的节点①、②、③用虚线互相连接便是对偶电路的支路。每两个节点间的每个连线只通过一个元件，把此元件换成对偶元件，便得到对偶电路相应支路的元件。



(a)



(b)

本章小节

1 置换定理：在任意线性或非线性电路中，若某一端口网络的端口电压为U，端口电流为I，则用$U_S=U$的电压源或$I_S=I$的电流源置换该一端口，如果置换后的电路有唯一解，则置换不影响电路其它部分的电压、电流。

2 齐性定理：对只有一个激励作用的线性电路，当该激励乘以系数K时，由此而引起的所有响应也相应地改变到原来量值的K倍。

3 叠加定理：在线性电路中，由几个独立电源共同作用产生的响应等于各个独立电源单独作用时产生相应响应的代数叠 加。齐性定理和叠加定理是反映线性电路本质的重要定理。

4 戴维南定理:线性含源一端口网络的对外作用可以用戴维南电路等效代替，其等效源电压等于此一端口网络的开路电压，其等效电阻是此一端口网络内部各独立电源置零后所得不含独立源一端口网络的等效电阻。

5 诺顿定理：线性含源一端口网络的对外作用可以用诺顿电路等效代替，其等效源电流等于此一端口网络的短路电流，其等效电导是此一端口网络内部各独立电源置零后所得不含独立源一端口网络的等效电导。

6 特勒根定理： 对于两个结构相同的电路 N 和 N' 有

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i'_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{b} u'_k i_k = 0$$

特勒根定理用于同一电路便得到功率守恒定理，即

$$\sum_{k=1}^{b} p_k = 0$$

7 互易定理： 互易定理的三种形式可归纳为：在含有一个独立源和若干线性二端电阻的电路中，若响应与激励互换位置，且满足将激励置零时互换前后的电路是相同的，则响应之比等于激励之比。

8 对偶原理:如果电路中某一定理(或方程、关系式等)的表述是成立的，则将其中的概念(变量、参数、元件、结构等)用其对偶因素置换所得的对偶表述也一定是成立的。