哈爾濱工業大學

第5章 电容元件和电感元件

主讲教师 齐超

提要 本章介绍电容元件、电感元件。它们是重要的储能元件。其端口电压、电流关系不是代数关系而是微分或积分关系，因此又称为动态元件。通过本章学习，应掌握电容元件、电感元件、互感元件的特性方程、能量计算及各种等效变换。此外还介绍理想变压器。

本章目次

基本要求：熟练掌握电容元件端口特性方程、能量计算及串并联等效变换。

电容构成原理

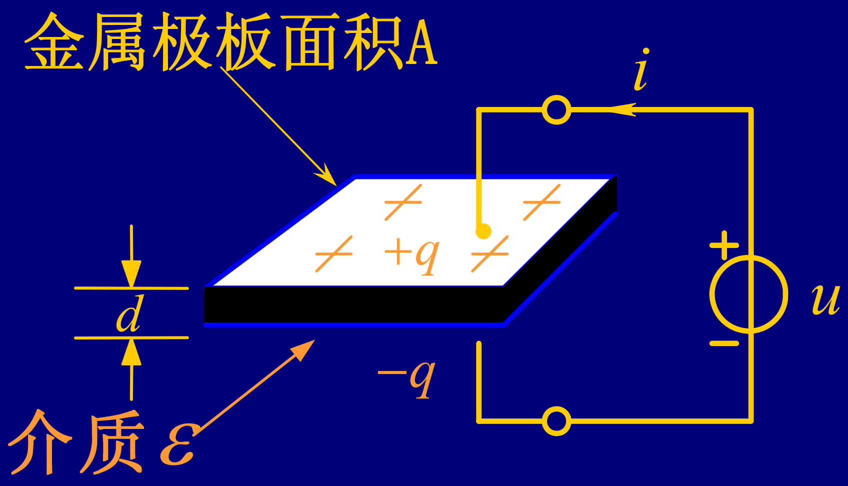


图5.1 电容的基本构成

电容的电路符号

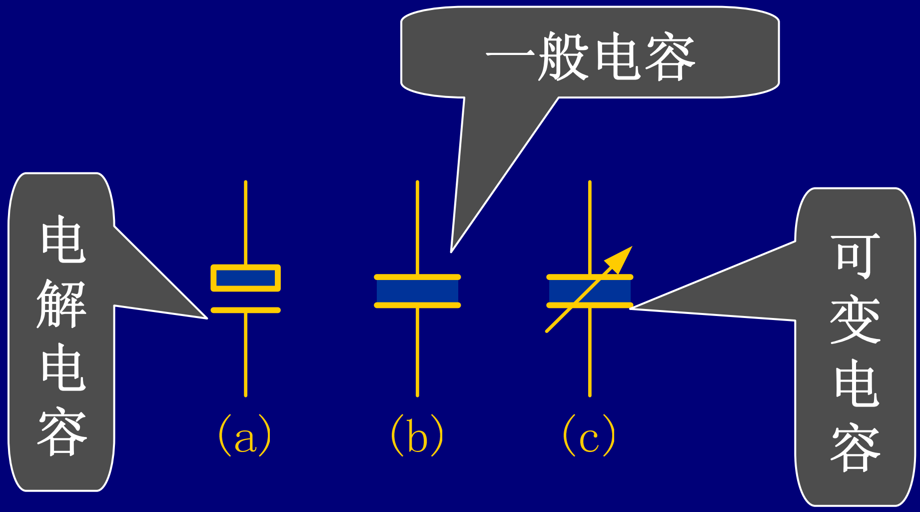
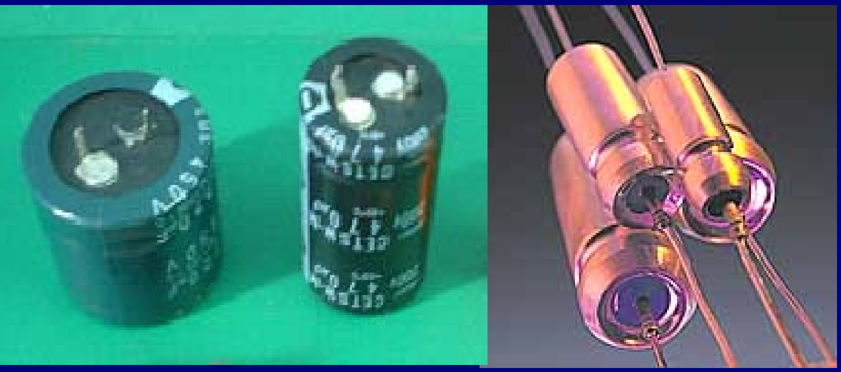
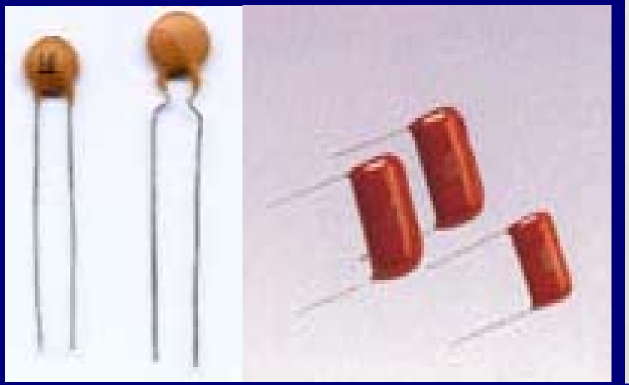


图 5.2 电容的电路符号

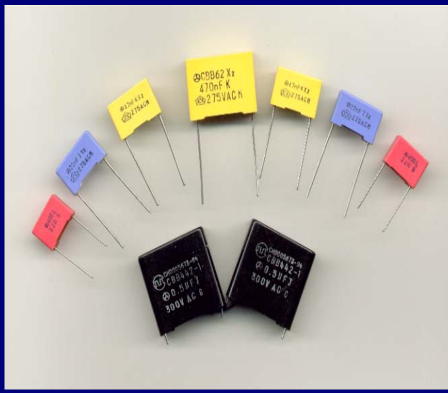
实际电容器示例



电解电容器

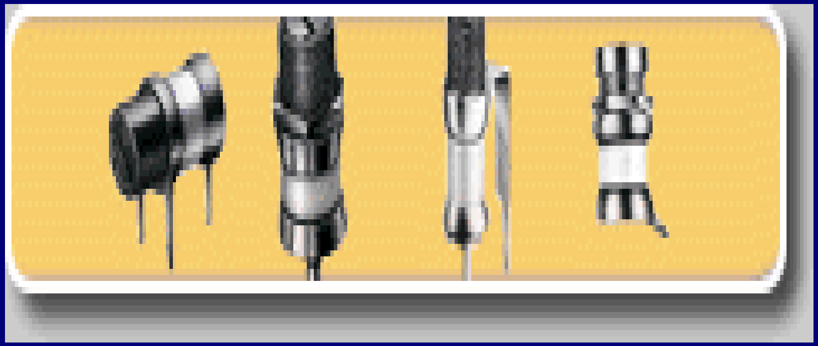


瓷质电容器

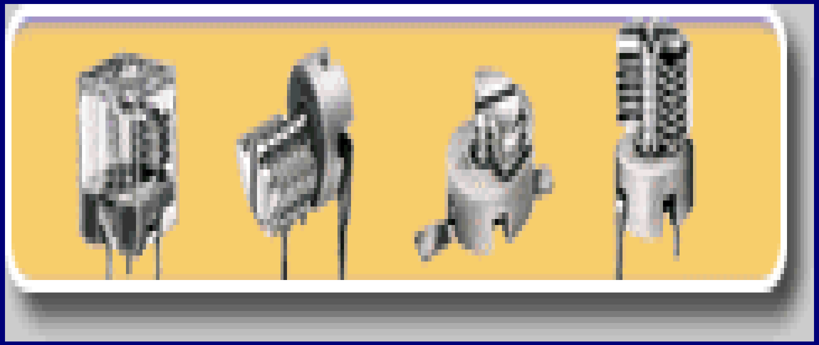


聚丙烯膜电容器

图 5. 3a 固 定 电 容 器



管式空气可调电容器



片式空气可调电容器

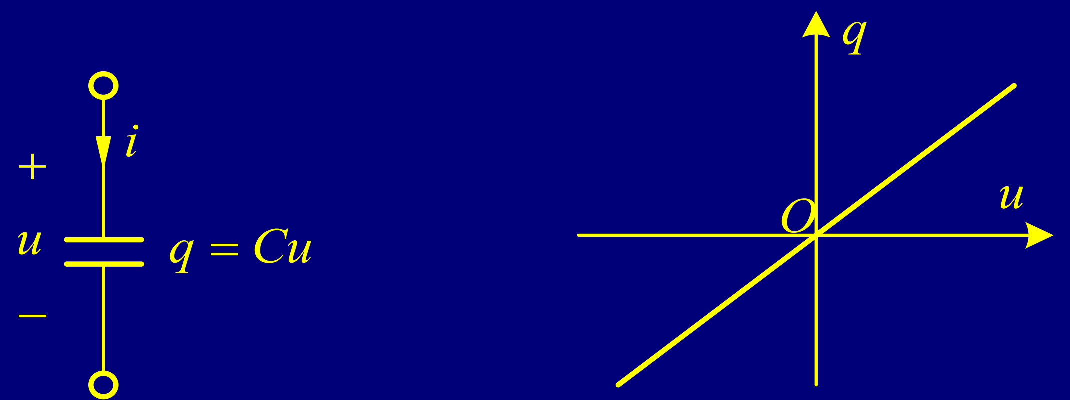
5.3b 可 变 电 容 器

当电容器填充线性介质时，正极板上存储的电荷量q与极板间电压u 成正比

$$q = Cu$$

电容[系数]，单位：F(法拉)表示。常用单位有μF(微法) 及pF(皮法)，分别表示为10^{-6}F及10^{-12}F。

在 u、q 取关联参考方向且 C 是正值时，线性电容的电路符号和它的电荷、电压关系曲线如图 5.4 所示。



(a) (b)

图5.4 线性电容电路符号和特性

极板上电荷量增多或减少，在电容的端线中就有电流产生，如图5.4(a)所示。

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=C\dot{u} \longrightarrow$$ （电容元件的VCR方程）

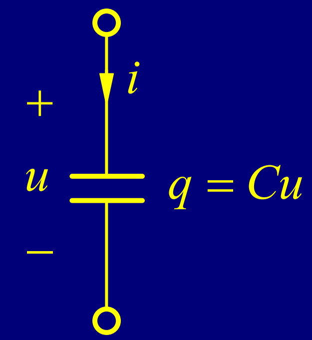


图5.4(a)

可见线性电容的端口电流并不取决于当前时刻电压，而与端口电压的时间变化率成正比，所以电容是一种动态元件。

已知电流 ***i***，求电荷 ***q***，反映电荷量的积储过程

$$q(t)=\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (5.5)$$

• 物理意义：t 时刻电容上的电荷量是此刻以前由电流充电（或放电）而积累起来的。所以某一瞬时的电荷量不能由该瞬间时刻的电流值来确定，而须考虑此刻以前的全部电流的“历史”，所以电容也属于记忆元件。对于线性电容有

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (5.6)$$

•在关联参考方向下，输入线性电容端口的功率

$$p = ui = Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}u^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}Cu^2) \qquad (5.8)$$

电容存储的电场能量

当 $|u(t)|\uparrow$ → 储能↑ 即吸收能量→吸收功率

当 $|u(t)|\downarrow$ → 储能↓ 即释放能量→发出功率

所以电容是储能元件。

同时电容的输入功率与能量变化关系为

$$p = \mathrm{d}w_{\mathrm{e}} / \mathrm{d}t$$

电容储能随时间的增加率

反之截止到 t 瞬间，从外部输入电容的能量为

$$w_{\mathrm{e}}(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{t} (Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi})\mathrm{d}\xi = C\int_{-\infty}^{t} u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}Cu^2\Big|_{u(-\infty)}^{u(t)} \quad (5.9)$$

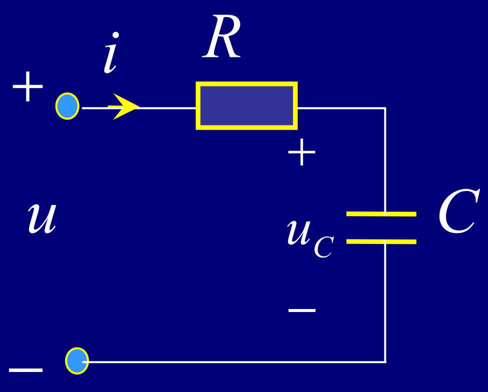
假设 $u(-\infty)=0$， 当 $C>0$ 时，有 $w_{\mathrm{e}} \geq 0$

式（**5.8)**、**(5.9)**说明电容吸收的总能量全部储存在电场中，所以电容又是无损元件。

- 从全过程来看，电容本身不能提供任何能量，正值的电容是无源元件。

综上所述，正值电容是一种动态、记忆、无损、储能、无源元件。

[补充5.1] 图示RC串联电路，设$u_C(0)=0$，$i(t)=I\,e^{-t/RC}$。求在$0<t<\infty$时间内电阻消耗的电能和电容存储的电能，并比较二者大小。



补充 5.1

[解] 电阻消耗的电能为

$$W_R=\int_0^{\infty}p_R(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}i^2R\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\infty}(I\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})^2R\mathrm{d}t=0.5R^2I^2C$$

电容最终储存的电荷为

$$q_C(\infty)=Cu_C(0)+\int_0^{\infty}i\mathrm{d}t=RCI$$

电容最终储能为

$$W_C=\frac{Cu_C^2(\infty)}{2}=\frac{q_C^2}{2C}=0.5R^2I^2C$$

由此可知 $W_R=W_C$

•在使用电容器时，除了要关注其电容值外，还要注意它的额定电压。使用时若电压超过额定电压，电容就有可能会因介质被击穿而损坏。为了提高总电容承受的电压，可将若干电容串联起来使用，如图**5.5(a)**所示。

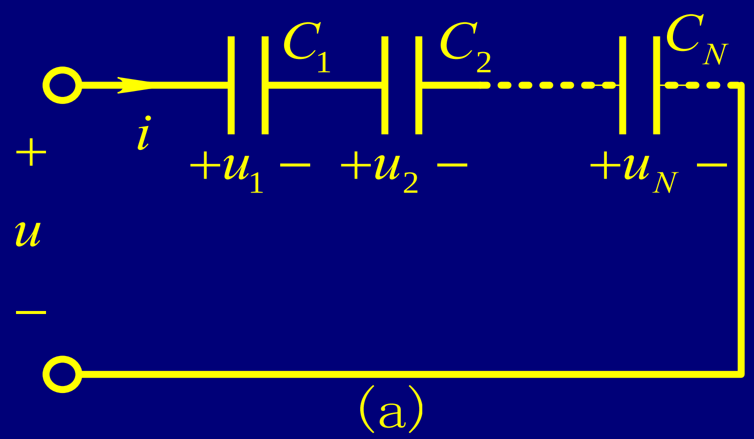


图 **5.5(a)** 电容的串联

设在串联前电容上无电荷，根据**KVL**及电容元件的电压-电流关系得

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi + \cdots + \frac{1}{C_N}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{C_{\mathrm{eq}}}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

串联等效电容的倒数等于各电容的倒数之和。如图**5.5(b)**所示。

$$\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}$$

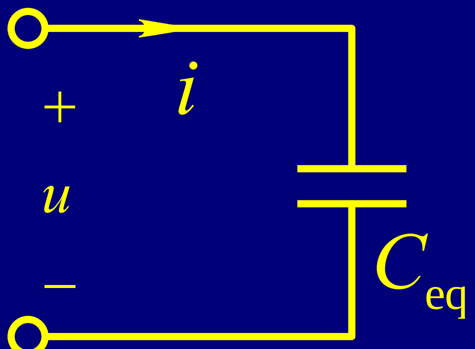


图5. 5(b) 等效电容

为了得到电容值较大电容，可将若干电容并联起来使用，如图**5.6(a)**所示。

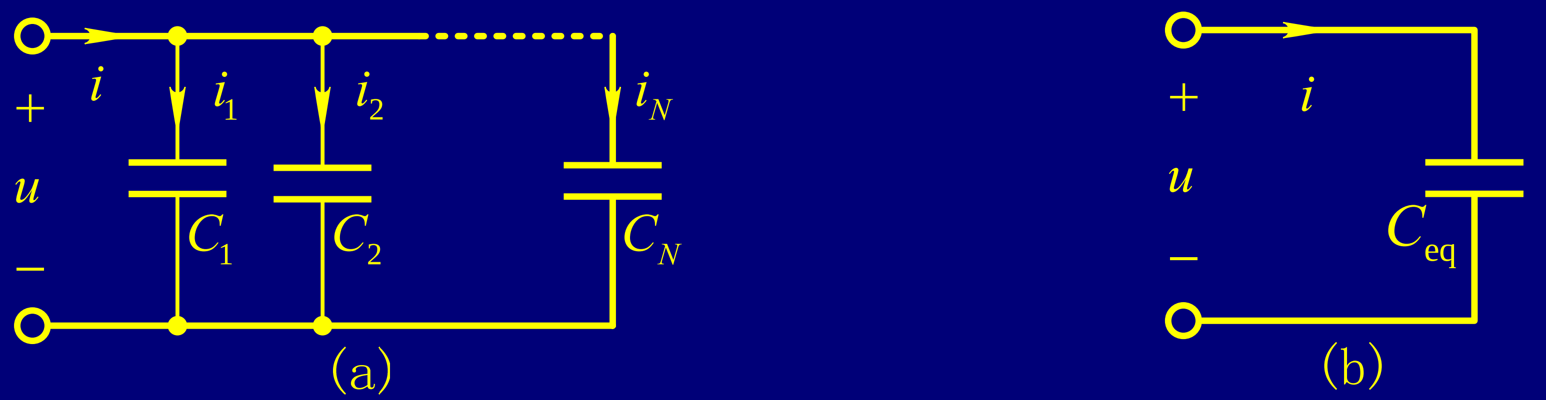


图 5.6 电容的并联等效

由于并联电容的总电荷量等于各电容的电荷量之和，即

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_N = (C_1 + C_2 + \cdots + C_N)u = C_{\mathrm{eq}}u$$

所以并联等效电容等于各电容之和，等效电路如图 **5.6(b)**所示

$$C_{\mathrm{eq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

注：如果在并联或串联前电容上存在电荷，则除了须计算等效电容外还须计算等效电容的初始电压。

例题 5.1

图示电路，设 $C_1 = 0.5\text{F}$ ，$C_2 = 0.25\text{F}$ ， 电路处于直流工作状态。计算两个电容各自储存的电场能量。

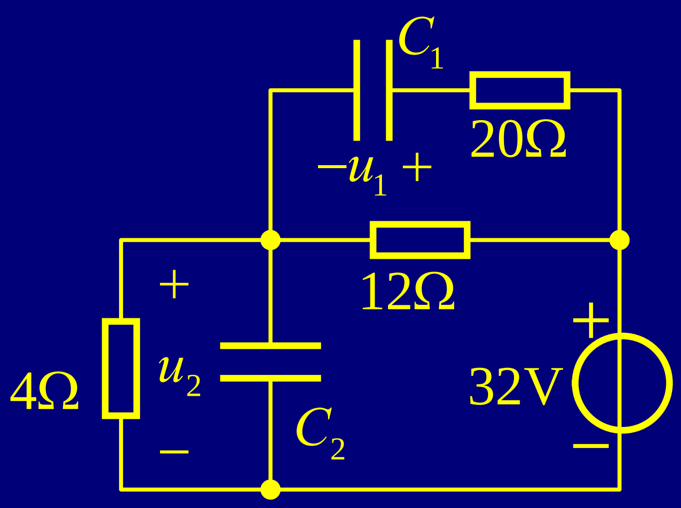


图 5.7

解 在直流电路中电容相当于开路，据此求得电容电压分别为

$$U_1 = \frac{12\Omega}{(12+4)\Omega} \times 32\text{V} = 24\text{V}$$

$$U_2 = 32\text{V} - U_1 = 8\text{V}$$

所以两个电容储存的电场能量分别为

$$w_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = 144\text{J} \quad ; \quad w_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = 8\text{J}$$

例题 5.2

设 **0.2F** 电容流过的电流波形如图 **(a)**所示，已知 $u(0)=30\text{V}$ 。试计算电容电压的变化规律并画出波形。

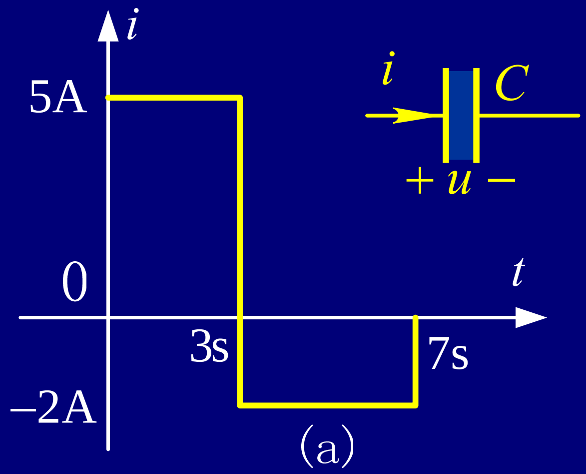


图 5.8（a）

解 电容电压计算如下

(1) $0 \le t < 3\text{s}$ ： $i=5\text{A}>0$ ， 电容充电

$$u=u(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi=30\text{V}+\frac{1}{0.2\text{F}}\int_0^t 5\text{A}\mathrm{d}\xi=30\text{V}+25t$$

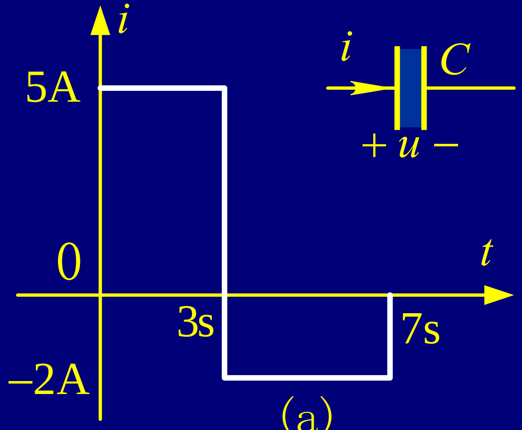
并且 $u(3\text{s})=(30+25\times3)\text{V}=105\text{V}$

(2) $3\text{s} \le t < 7\text{s}$ ： $i = -2\text{A} < 0$ ， 电容放电

$$u = u(3\text{s}) + \frac{1}{C}\int_{3\text{s}}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

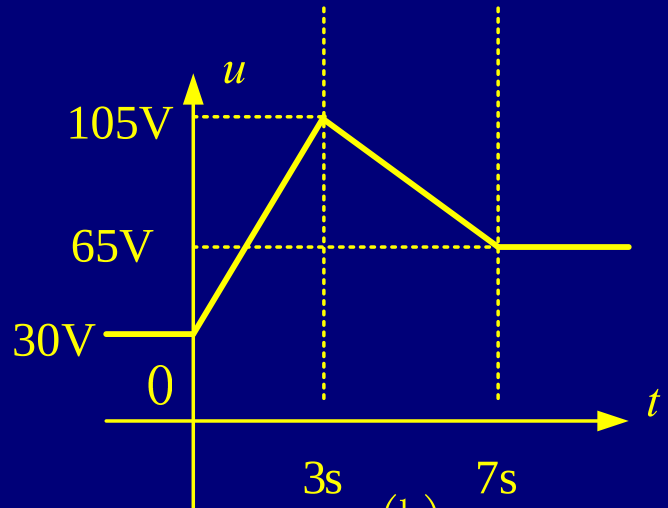
$$= 105\text{V} + \frac{1}{0.2\text{F}}\int_{3\text{s}}^{t} (-2)\text{A}\,\mathrm{d}\xi = 135\text{V} - 10t$$

并且 $u(7\text{s}) = 65\text{V}$



(a)

(3) $t \ge 7\text{s}$ ： 此时 $i = 0$ ， 电容电压保持不变， $u(t) = u(7\text{s}) = 65\text{V}$



(b)

例题5.2

电容电压的变化规律波形如右图

基本要求：熟练掌握电感元件端口特性方程、能量计算及串并联等效变换。

几种实际的电感线圈如图5.9所示。

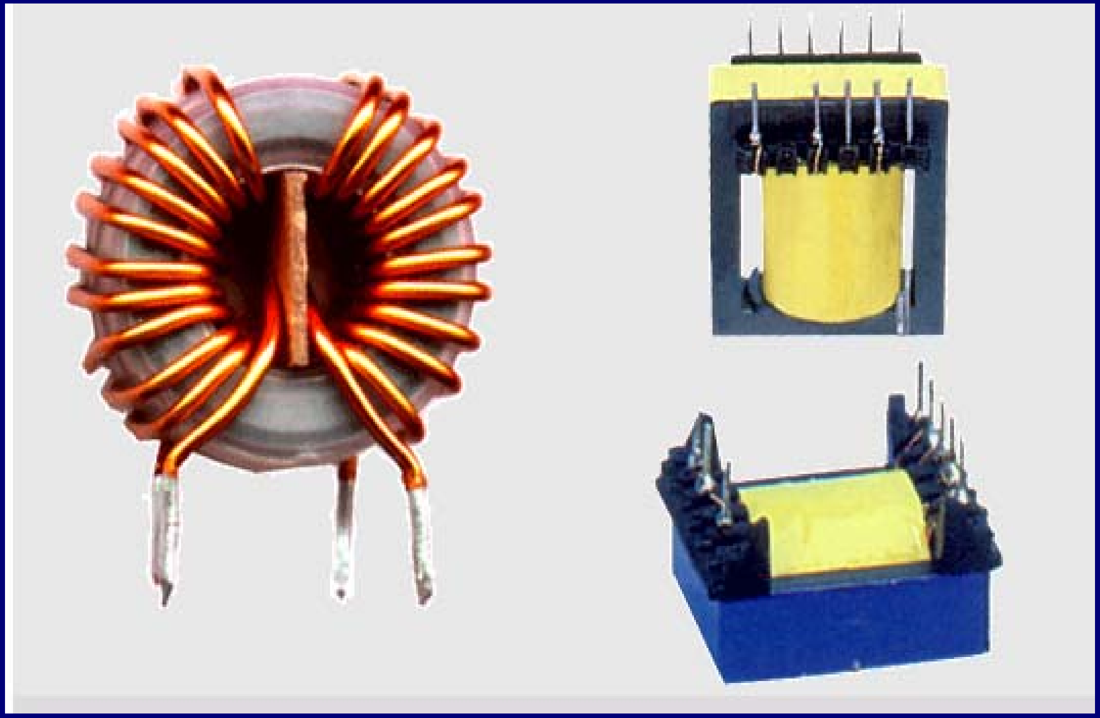


图5.9 几种实际电感线圈示例

尽管实际的电感线圈形状各异，但其共性都是线圈中通以电流 ***i***，在其周围激发磁场(**magnetic filed**)，从而在线圈中形成与电流相交链的磁通(**flux**) Φ （两者的方向遵循右手螺旋法则），与线圈交链成磁链 Ψ ，如图**5.10**所示。

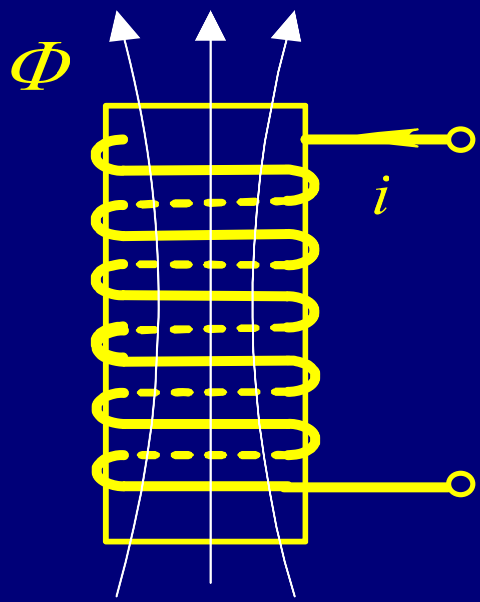


图**5.10** 电感线圈原理示意图

电感元件的特性用电流与磁链关系来表征，其电路符号如图5.11所示

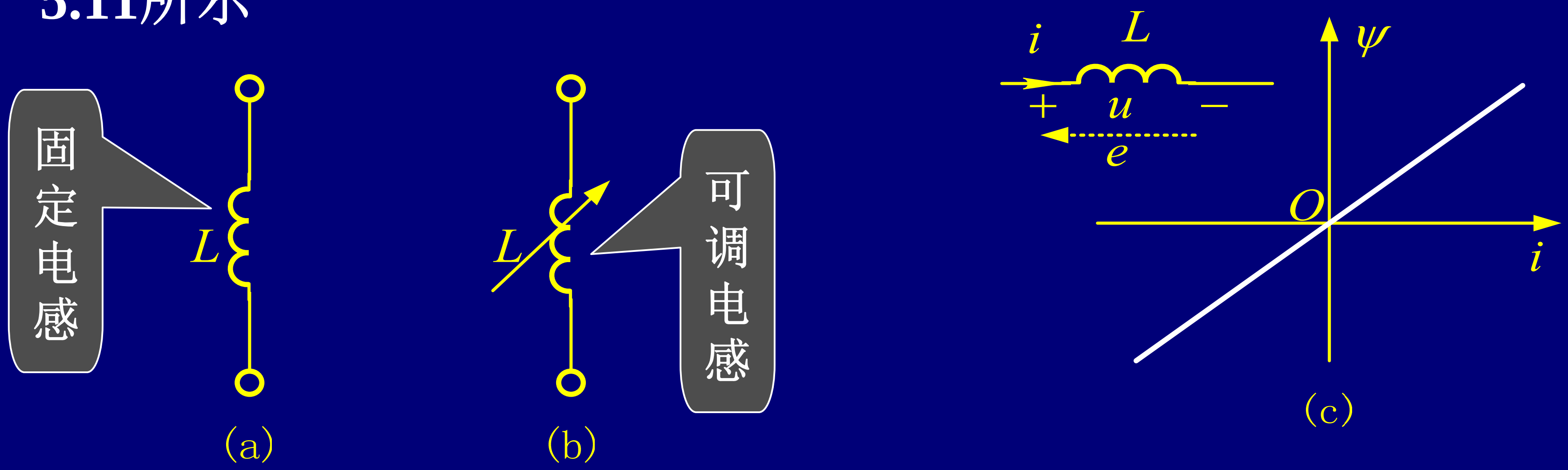


图5.11 线性电感的符号及其特性

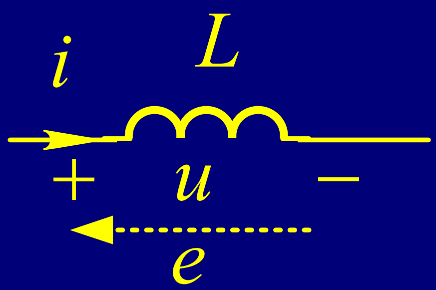
如果线圈的磁场存在于线性介质，称为线性电感，磁链与电流成正比

$$\psi = Li$$

电感[系数](inductance)。单位亨[利] (符号H)

对应的磁链-电流关系是一条通过平面原点的直线且位于Ⅰ、Ⅲ象限，图5.11(c)表示其特性 .

根据电磁感应定律和楞茨定律，当电压、电流方向如下图所示，并且电流与磁通的参考方向遵循右螺旋法则时，端口电压 $\boldsymbol{u}$ 与感应电动势 $\boldsymbol{e}$ 关系如下



$$u=-e=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \qquad (5.17)$$

对线性电感，其端口特性方程

$$u=-e=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad (5.18)$$

即线性电感的端口电压与端口电流的时间变化率成正比。因为电感上电压-电流关系是微分或积分关系，所以电感也属动态元件。

若已知电压求磁链或电流，则

$$\Psi(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi=\psi(t_0)+\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (5.19)$$

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (5.20)$$

此两式表明，电感中某一瞬间的磁链和电流决定于此瞬间以前的全过程的电压，因此电感也属于记忆元件。

线性电感吸收的功率为

$$p=ui=iL\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}Li^2)=\frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$$

电感存储的磁场能量(w_{m})

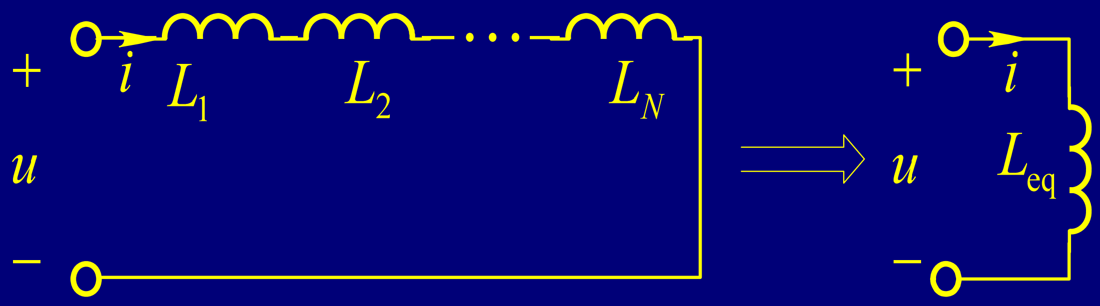
截止到 **t** 时刻电感吸收的能量为:

$$w_{\mathrm{m}} = \int_{-\infty}^{t} p(\xi)\mathrm{d}\xi = L\int_{i(-\infty)}^{i} i(\xi)\mathrm{d}i(\xi) = \frac{1}{2}Li^2\Big|_{i(-\infty)}^{i}$$

若假设$i(-\infty)=0$, 则有 $w_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{\psi^2}{2L}$　电感也是储能元件。

上式说明电感吸收的总能量全部储存在磁场中，所以电感又是无损元件。

电感的串联：电感也可以串联或并联。仿照电容串、并联电路的分析可以得出结论：电感串联时，等效电感等于各电感之和，即



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$$

图5.12 电感的串联等效

电感的并联： 电感并联时，等效电感的倒数等于各电感倒数之和，即

$$\frac{1}{L_{\mathrm{eq}}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_N}$$

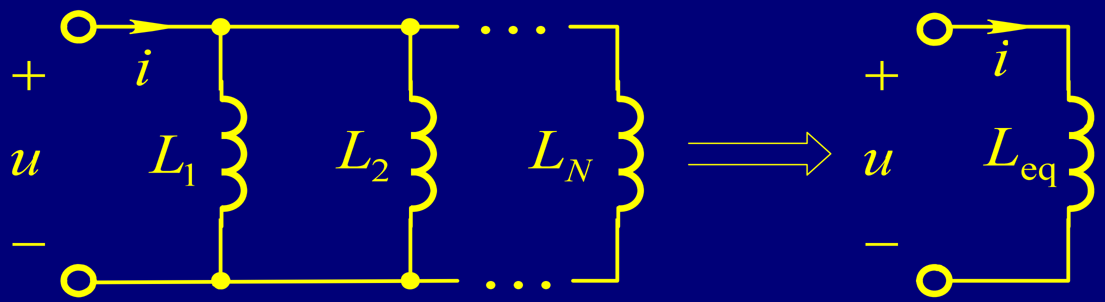
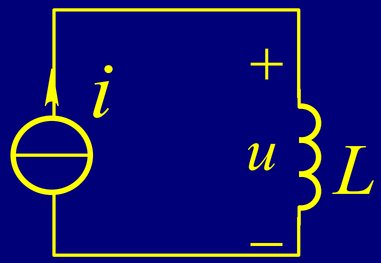


图5.13 电感的并联等效

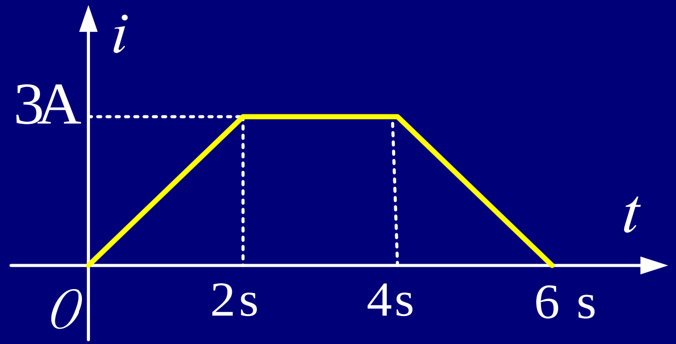
说明： 从电路模型上讲，电感在串联或并联之前可以假设存在一定的磁链或电流。这样，串联或并联联接后，除须计算等效电感外，还须计算等效电感的初始磁链或初始电流。

例题 5.3

电路如图 (a)所示， 0.1H电感通以图 (b)所示的电流。求时间 $t>0$ 电感电压、吸收功率及储存能量的变化规律。



(a)



(b)

图5.14　例题5.3

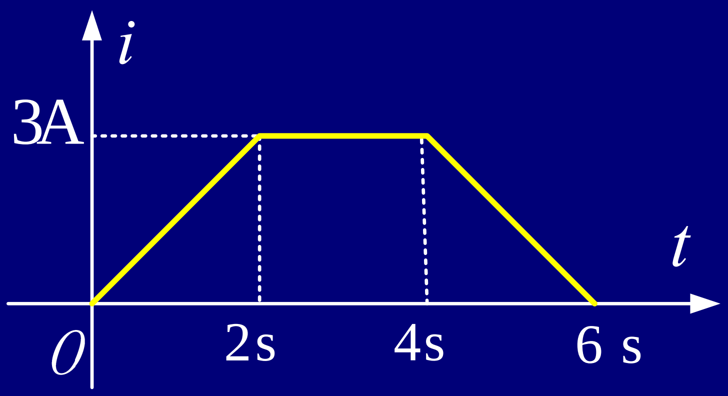
解　根据电流的变化规律，分段计算如下

(1) $0<t<2\text{s}$:　$i=1.5t$ A

$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=(0.1\times1.5)\text{V}=0.15\text{V}$$

$$p=ui=0.225\,t\ \text{W}\qquad w_{\text{m}}=\frac{1}{2}Li^2=0.1125t^2\text{J}$$

(2) $2\text{s} < t < 4\text{s}$: $i = 3\text{ A}$



(b)

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$p = ui = 0$$

$$w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}Li^2 = 0.45\ \text{J}$$

(3) $4\text{s} < t < 6\text{s}$: $i = (-1.5t + 9)\ \text{A}$

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -0.1\times1.5\text{V} = -0.15\text{V}$$

$$p = ui = (0.225t - 1.35)\text{W}$$

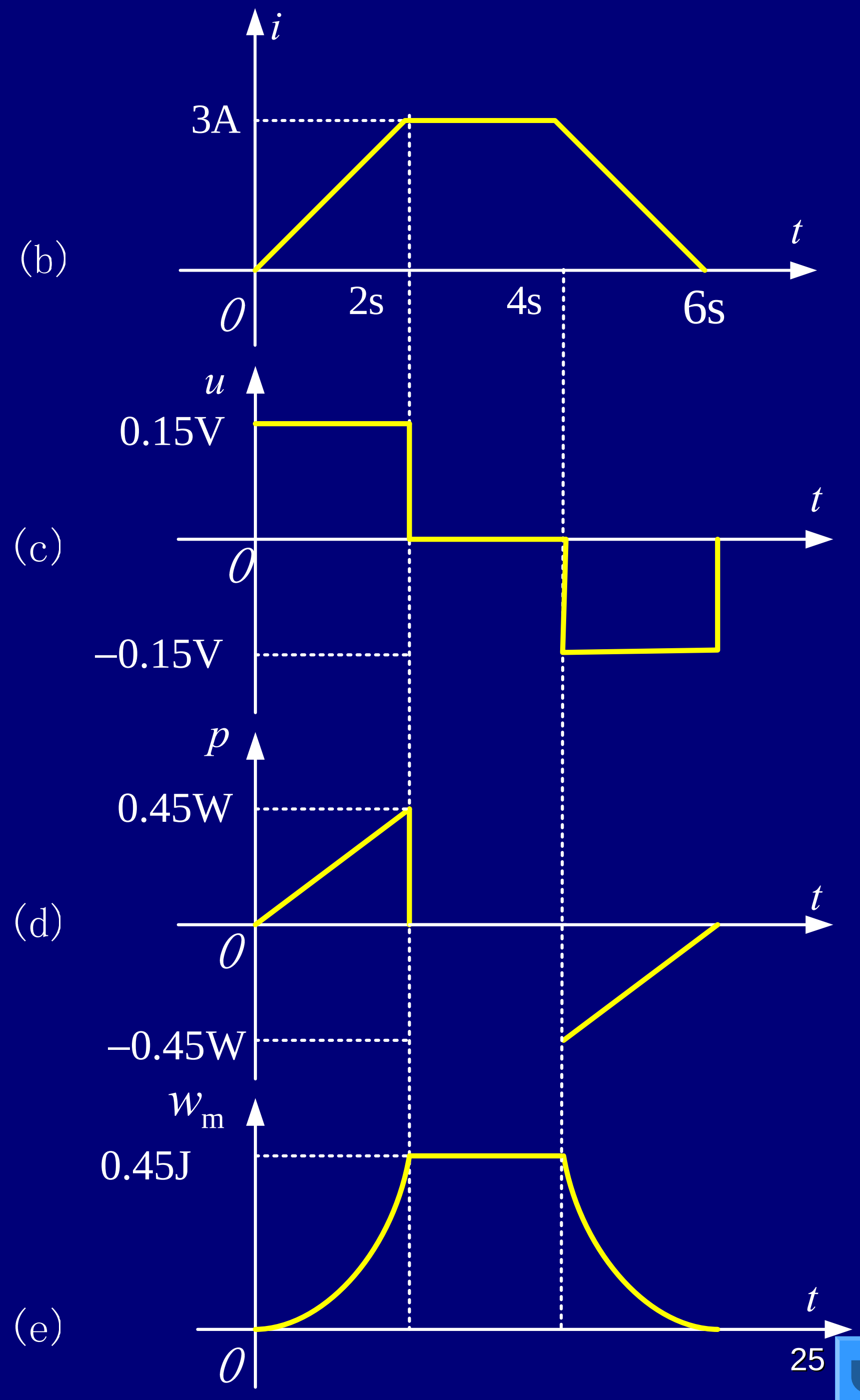
$$w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}Li^2 = (0.1125t^2 - 1.35t + 0.45)\,\text{J}$$

(4) $t > 6\text{s}$**：** $i = 0$

电压、功率及能量均为零。

各时段的电压、功率及能量的变化规律如右图 **(c)**、**(d)**、**(e)** 所示。

小结：本题可见，电流源的端电压取决于外电路，即决定于电感。而电感电压与电流的变化率成正比。因而当 $2\text{s} < t < 4\text{s}$ 时，虽然电流最大，电压却为零。



基本要求：透彻理解同名端的概念、熟练掌握互感元件端口方程和互感元件的串并联等效电路。

当几个线圈之间存在着磁耦合，便形成了多端口电感。本节只讨论二端口电感，习惯上称为互感[元件]，如图5.15所示。

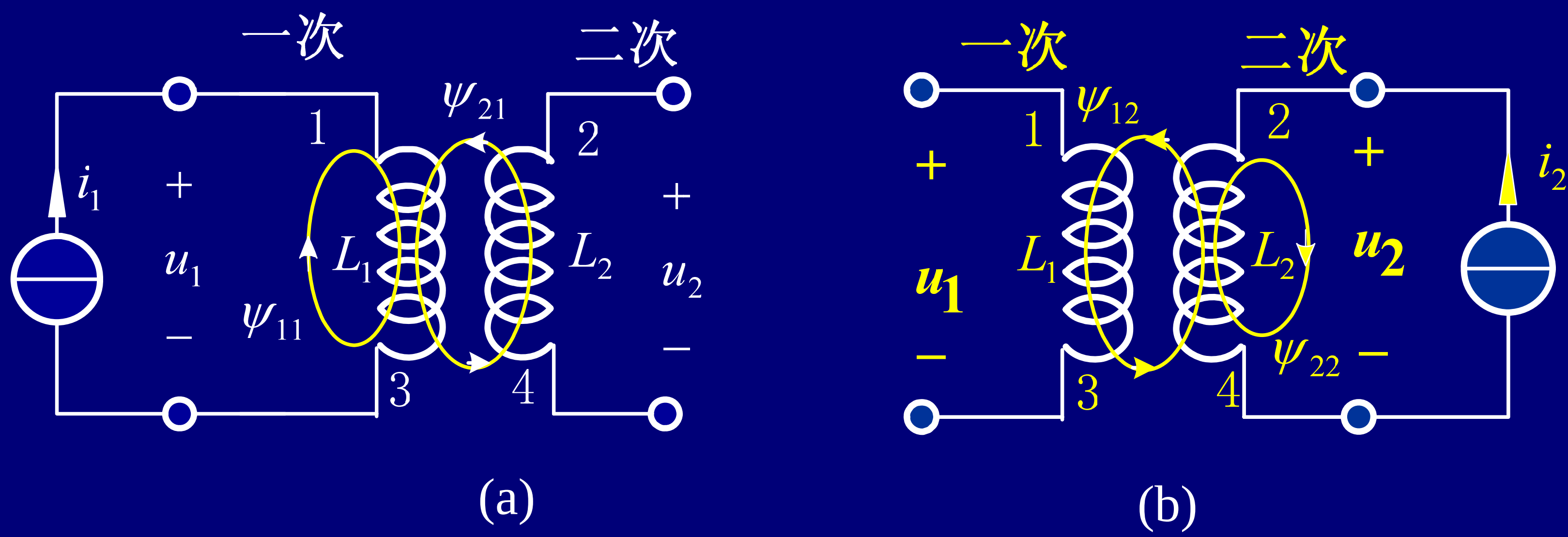
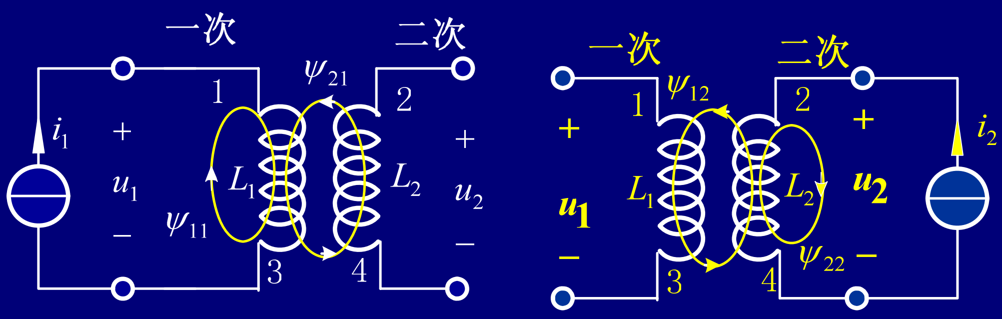


图5.15　两个线圈的磁耦合



(a) (b)

图5.15 两个线圈的磁耦合

	i_1	i_2
自感应磁链	ψ_{11}	ψ_{22}
互感应磁链	ψ_{21}	ψ_{12}

每一线圈的总磁链是自感磁链和互感磁链代数和。在线性条件下，自感磁链和互感磁链均正比与激发它们的电流，设电流与自感磁链的参考方向符合右手螺旋关系，则

$$\psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_{11} i_1 \pm L_{12} i_2$$

$$\psi_2 = \pm\psi_{21} + \psi_{22} = \pm L_{21} i_1 + L_{22} i_2$$

式中互感磁链前正负号，由自感磁链和互感磁链的方向而定，一致取“+”；否则取“–”

L_{11}、L_{22} ——自感；　简写成 L_1、L_2

L_{12}、L_{21} —— 互感；　一般实际线圈 $L_{12} = L_{21} = M$

在图5.16a中，可明显地判断自感磁链和互感磁链的方向是相同或相反。但当将实际线圈抽象成图5.16(b)所示的电路模型时，就靠电流进、出同名端来判断互感磁链的+（或 -）。

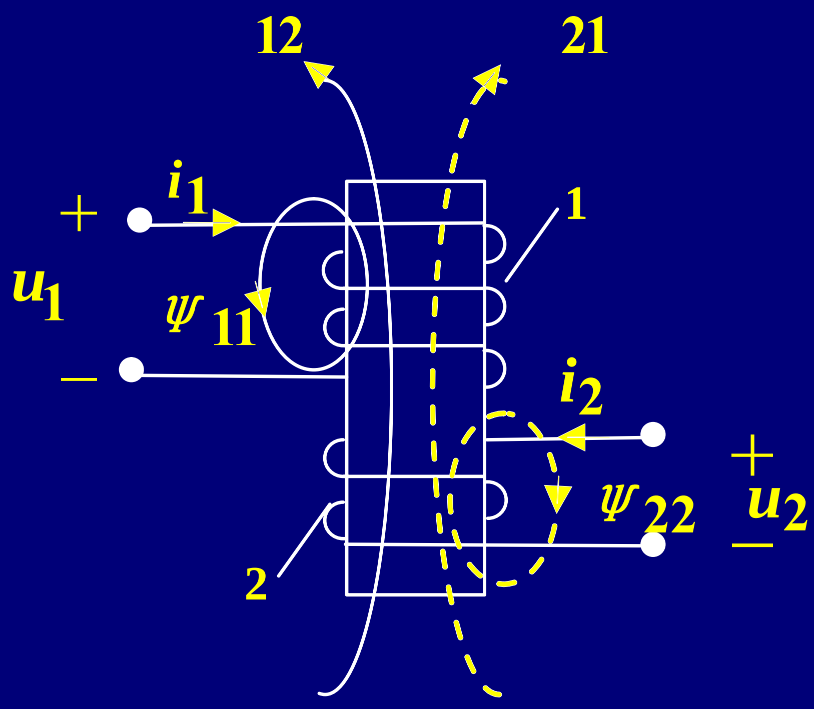


图 5.16a 互感

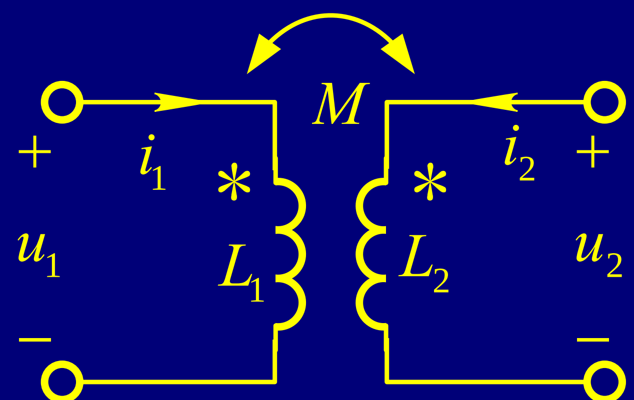


图5. 16 b 互感元件的模型

同名端 使所激发的自感磁链和互感磁链方向一致的两个线圈电流的进端或出端。

换言之，两个端口电流都流进（或流出）同名端，表示它们所激发的自感磁链和互感磁链方向一致，（总磁链在原自感磁链基础上增强）。当两个电流的参考方向是从非同名端流入时，它们所激发的自感磁链与互感磁链方向相反，（总磁链在原自感磁链基础上削弱）。如图5.17所示。

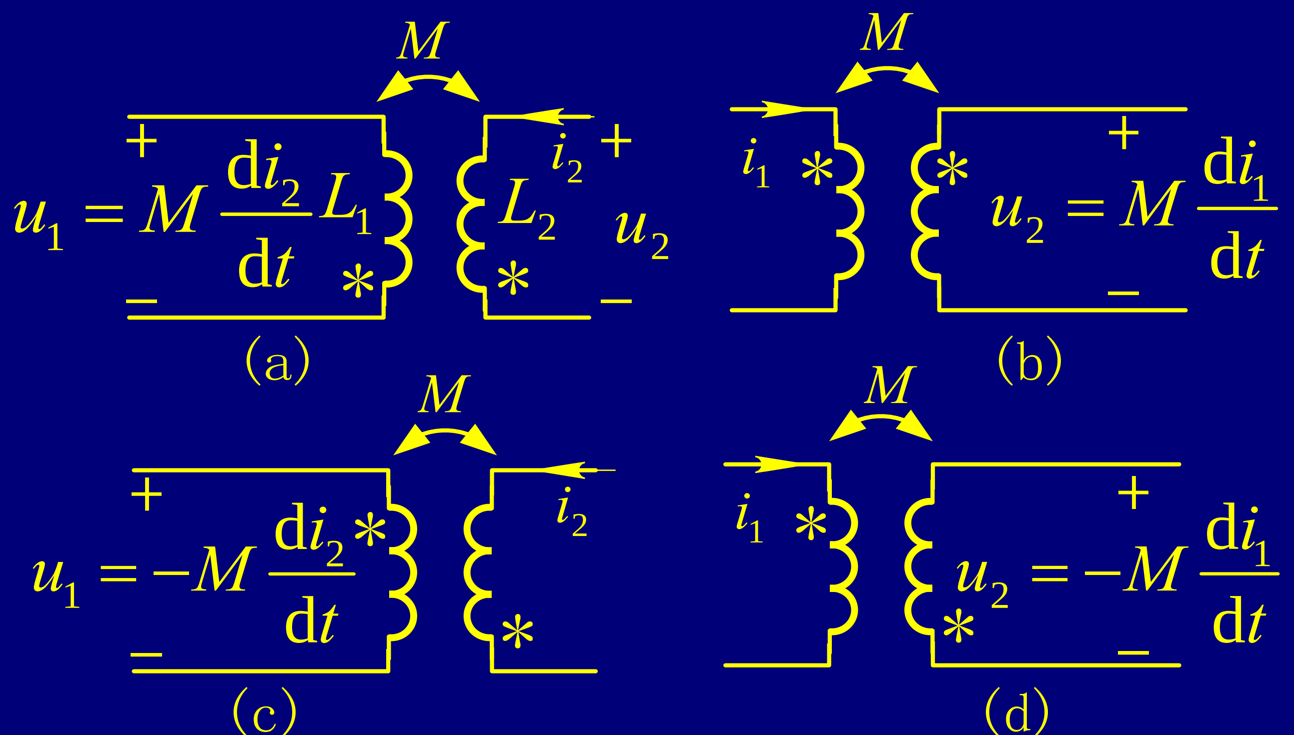


图5.17　同名端与互感电压的符号关系举例

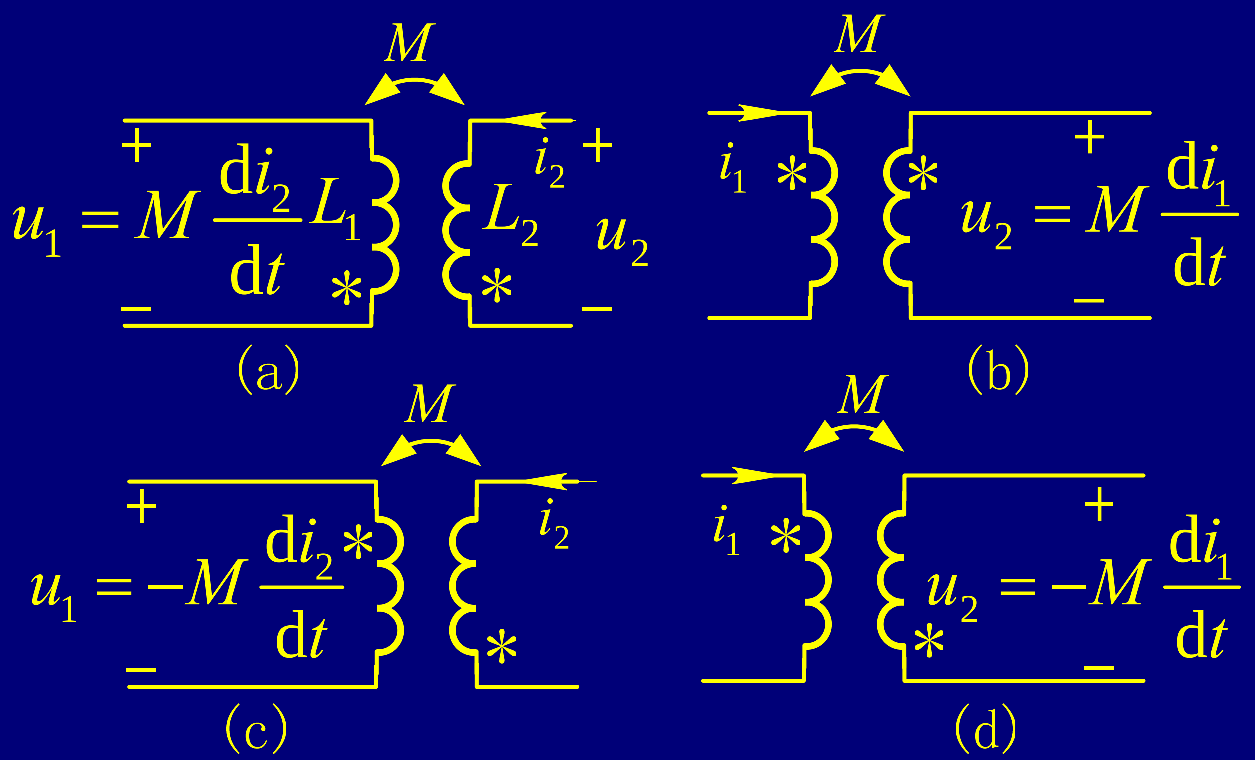
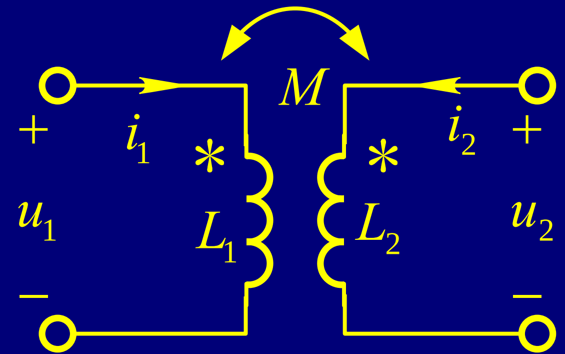


图5.17　同名端与互感电压的符号关系举例

同名端也可以等价说成：当某线圈电流增加时，流入电流的端子与另一线圈互感电压为正极性的端子为同名端。根据这一原理，在实验中，使某线圈流入递增电流，通过测试另一线圈互感电压的极性便可找出同名端。

根据电磁感应定律，在端口电压、电流为关联参考方向，并且自感磁通与电流符合右手螺旋关系时，互感元件的电压电流关系方程为

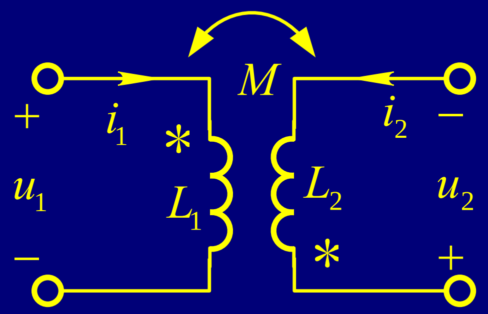


互感元件的符号

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} = L_{11}\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = \dfrac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} = \pm L_{21}\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \pm M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

若式中 $\boldsymbol{u_1}$、$\boldsymbol{i_1}$ 或 $\boldsymbol{u_2}$、$\boldsymbol{i_2}$ 的参考方向相反，则 $\boldsymbol{L_1}$ 或 $\boldsymbol{L_2}$ 前应添入负号；若$\boldsymbol{u_1}$、 $\boldsymbol{i_2}$ 或 $\boldsymbol{u_2}$、 $\boldsymbol{i_1}$ 的参考方向相对星标 * 是相同的，则 $\boldsymbol{M}$ 前取正号，否则应取负号。

[补充5.2] 列出图示两个互感元件的特性方程



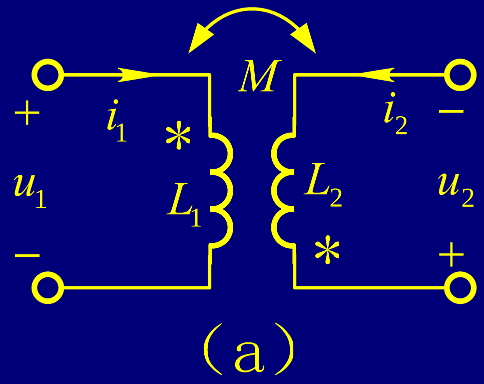
（a）

分析

1）从图(a)知，端口 1 的电压和电流为关联参考方向，自感电压 u_{11} 前为 正，

2）引起互感电压 u_{12} 的电流 i_2 参考方向是从所在端口2的非 * 指向 * 端，与引起 u_{11} 的电流 i_1 从自端口 * 端指向非 * 端方向相反，因此 u_{12} 前取 负;

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d} i_1}{\mathrm{d} t} - M \frac{\mathrm{d} i_2}{\mathrm{d} t}$$



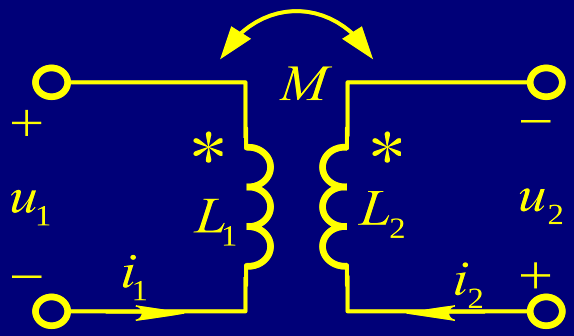
3）端口 2 的电压和电流为非关联参考方向,自感电压 u_{22}**前为负，**
4）引起互感电压u_{21}**的电流** i_1 **参考方向是从端口1的 * 指向非 * 端，相对与端口2来说与** u_2 **的参考方向关联一致，故** u_{21}**前取正。**

$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

上述列写互感方程的方法称为逐项判断法。
故图（**a**）所示的互感元件特性方成为

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$



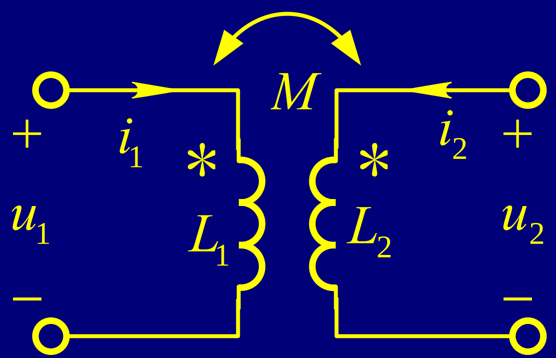
（b）

基于相似解释，图（b）所示互感元件的特性方程。

$$u_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

互感总功率，在关联参考方向下



$$P = u_1 i_1 + u_2 i_2$$

$$= [L_1(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t) \pm M(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)]i_1 + [\pm M(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t) + L_2(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)]i_2$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_1 i_1^2) \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M i_1 i_2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_2 i_2^2)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2) = \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$$

正如一端口电感那样，输入互感的总能量将全部转化为磁场能量

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M\, i_1\, i_2 \qquad w_{\mathrm{m}} \geq 0$$

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M\, i_1\, i_2 \qquad w_{\mathrm{m}} \geq 0$$

如果没有磁耦合，$M=0$，磁能就是两个自感元件分别储能之和。存在磁耦合时，要增减一项$M\,i_1\,i_2$，增与减要视互感的作用是使磁场增强还是使磁场减弱而定。

定义耦合系数 $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

用来衡量互感耦合的程度

$$0 \leq k \leq 1 \quad \begin{cases} k = 0 & \text{两个线圈无耦合} \\ k = 1 & \text{两个线圈全耦合} \end{cases}$$

含互感元件电路的连接

1　互感元件的串联

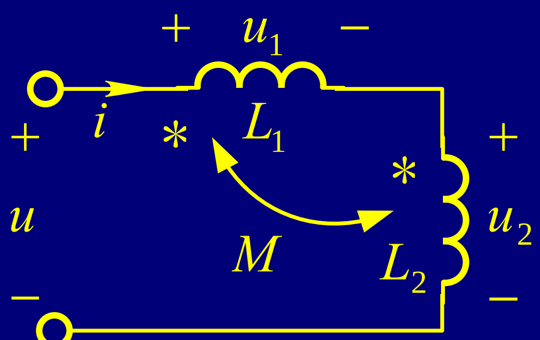


图5.18 a

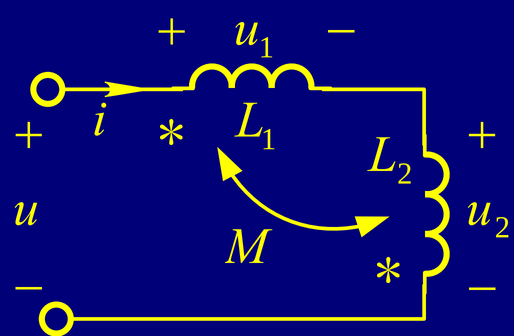


图5.18 b

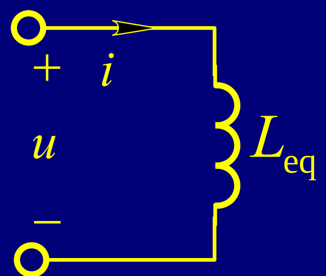


图5.18 c

电流从同名端流入

→正串(或顺接)

电流从异名端流入

→反串(或反接)

$$u=u_1+u_2=(L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\pm M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t})+(\pm M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t})=(L_1+L_2\pm 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=L_{eq}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

由此可得串联等效电感如图5.18c所示　为 $L_{eq}=L_1+L_2\pm 2M$

注：正串2*M*前取正,等效电感大于俩自感之和;反串2*M*前取负，等效电感小于俩自感之和。

2　互感元件的并联

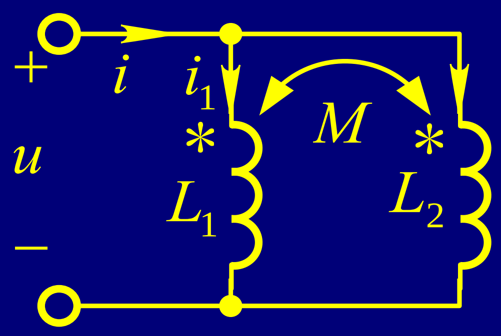


图5. 19(a)　互感两同名端并联电路

图5.19(a)表示两个同名端相接。为求其等效电路，分别列KCL和KVL方程：

$$u = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$u = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad (2)$$

$$i = i_1 + i_2 \qquad (3)$$

（3）代入（1）得：

$$u = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (L_1 - M)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_a\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_b\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

（3）代（2）得：

$$u = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (L_2 - M)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_a\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_c\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

由此消去互感的等效电路如图5. 19(b)

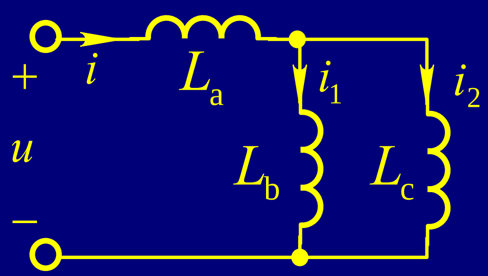
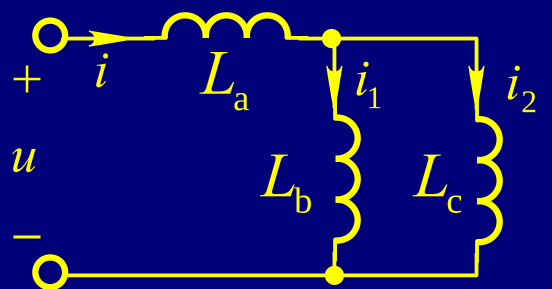


图5. 19(b)

图中各等效电感为

$$\left.\begin{aligned} L_a &= M \\ L_b &= L_1 - M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned}\right\} \quad (5.36)$$

如无需计算电流 i_1、i_2，根据电感的串、并联等效，图**5.19(b)**可进一步等效成一个电感，如图**5.19(c)**，



(b)

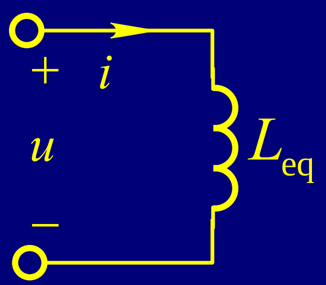


图**5.19(c)**

等效电感

$$L_{eq} = L_a + \frac{L_b L_c}{L_b + L_c} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

同理，异名端连接时的总等效电感为

$$L' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

对于实际的耦合线圈，无论何种串联或何种并联，其等效电感均为正值。所以自感和互感满足如下关系

$$M \le \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \qquad M \le \sqrt{L_1 L_2}$$

耦合系数满足

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \le 1$$

3 互感线圈的T型联接

如图5.20(a)所示，图5.20(b)是不含磁耦合的等效电路

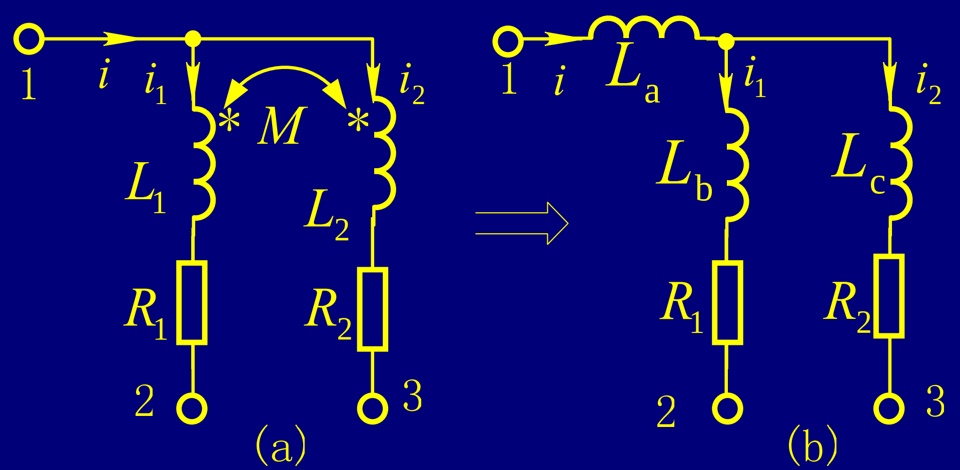


图5.20 互感的T型等效电路

由于耦合线圈含有电阻，在较接近实际的电路模型中两自感都含有串联电阻。

图5.20(b)中各等效电感为

$$\left.\begin{aligned} L_a &= M \\ L_b &= L_1 - M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned}\right\}$$

其等效电感的计算与式(5.36)相同。就是说，即便模型中含有串联电阻，也可以通过这种方法来消除互感，得到无互感等效电路。

一个实际耦合电感，例如空心变压器(一种绕在非铁磁材料上的变压器)，一般需要考虑绕组电阻，此时可用带有串联等效电阻的互感来表示其电路模型，如图5.21所示。

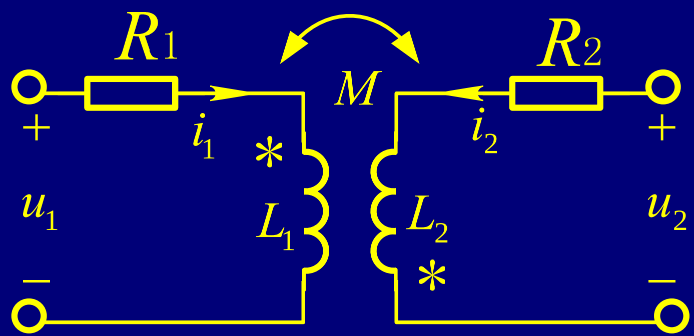


图5. 21　变压器电路模型

图中$\boldsymbol{u_1}$与$\boldsymbol{i_2}$参考方向相对星标*是相反的，$\boldsymbol{u_2}$与$\boldsymbol{i_1}$也是相反的，故$\boldsymbol{M}$前均应取负号，端口特性方程将是：

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = R_2 i_2 - M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

基本要求：熟练掌握理想变压器特性方程，理解实际变压器与理想变压器的关系、理想变压器的电阻变换作用。

理想变压器是实际电磁耦合元件的一种理想化模型，如图 5.22 和 5.23。

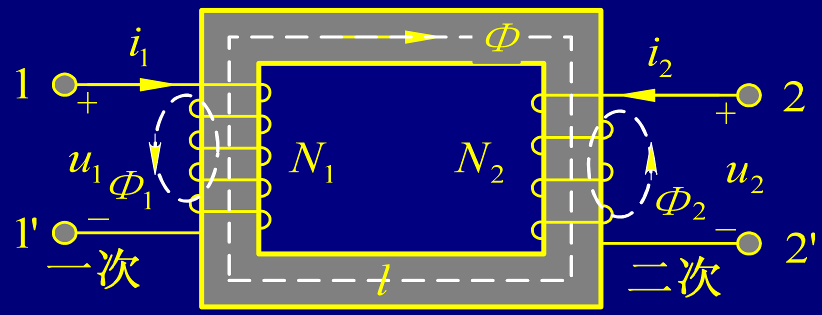


图5. 22 变压器示意图

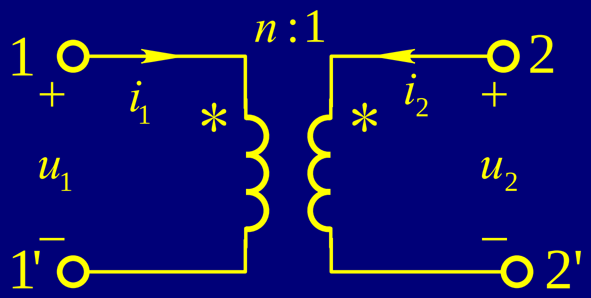


图5. 23 理想变压器的符号

理想化认为

1) 铁心的磁导率 $\mu \to \infty$

相应有

2)每个线圈的漏磁通为零,即两个线圈为全耦合 $\Psi_1 = N_1\Phi, \quad \Psi_2 = N_2\Phi$

3)线圈电阻为零, 端口电压等于感应电动势 $u_1 = \dfrac{d\Psi_1}{dt} = N_1\dfrac{d\Phi}{dt}, \quad u_2 = \dfrac{d\Psi_2}{dt} = N_2\dfrac{d\Phi}{dt}$

4)铁心的损耗为零 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$

由此得图5.23理想变压器的端口方程 $\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{N_1}{N_2} = n$ 或 $u_1 = n u_2$； $\dfrac{i_1}{i_2} = -\dfrac{N_2}{N_1} = -\dfrac{1}{n}$ 或 $i_1 = (-1/n)i_2$

变比（匝数比）

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{N_1}{N_2}=n \text{ 或 } u_1=nu_2 \qquad (5.45) \qquad\qquad \frac{i_1}{i_2}=-\frac{N_2}{N_1}=-\frac{1}{n} \text{ 或 } i_1=(-1/n)i_2 \qquad (5.47)$$

理想变压器方程与 *u*、*i* 的参考方向和两线圈同名端位置有关图5.24 给出了一些同名端与理想变压器端口方程的关系示例。

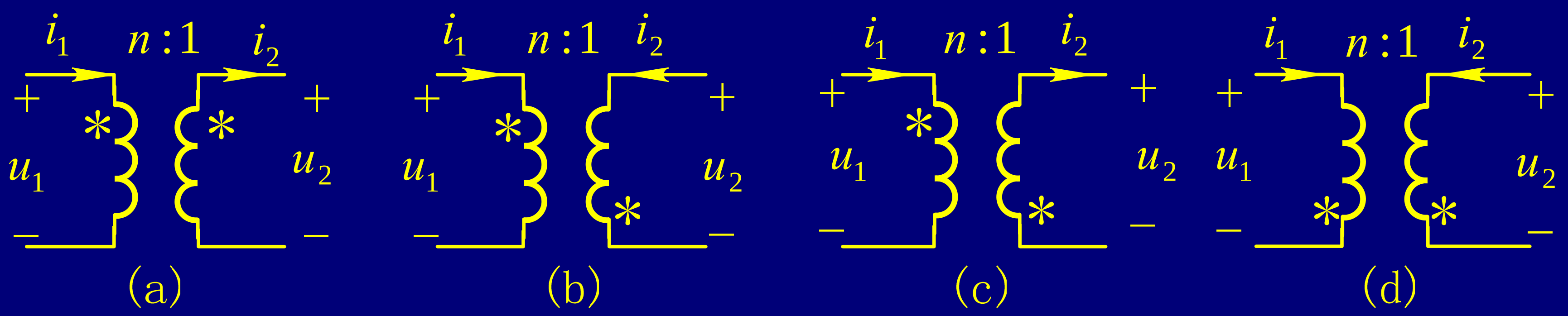


图5.24　同名端与理想变压器端口方程的关系示例

对应的特性方程分别为(注意符号)

$$\begin{cases} u_1=nu_2 \\ i_1=\dfrac{1}{n}i_2 \end{cases} \quad \text{(a)} \qquad \begin{cases} u_1=-nu_2 \\ i_1=\dfrac{1}{n}i_2 \end{cases} \quad \text{(b)} \qquad \begin{cases} u_1=-nu_2 \\ i_1=-\dfrac{1}{n}i_2 \end{cases} \quad \text{(c)} \qquad \begin{cases} u_1=nu_2 \\ i_1=-\dfrac{1}{n}i_2 \end{cases} \quad \text{(d)}$$

理想变压器输入的总功率为

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (nu_2)(-\frac{i_2}{n}) + u_2 i_2 = -u_2 i_2 + u_2 i_2 = 0 \qquad (5.48)$$

说明 变压器元件不仅是无源的,而且每一瞬间输入功率等于输出功率, 即传输过程中既无能量的损耗, 也无能量的存储, 属于非能元件.

在实际中变压器不但可以变压、变流，还可用于变换电阻。图5.25(a)所示电路中

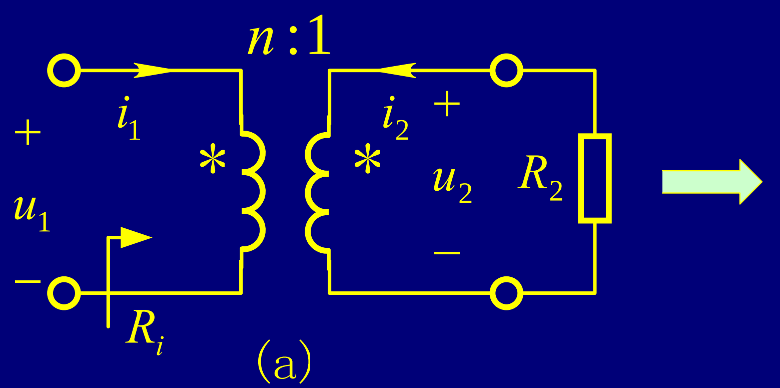


图5.25(a) 变压器电阻变换

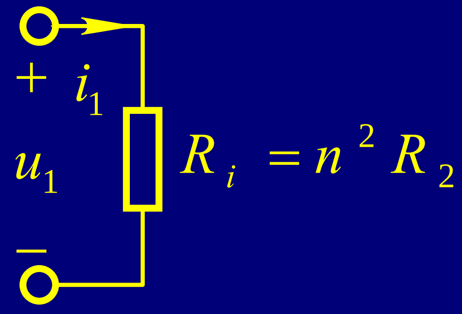


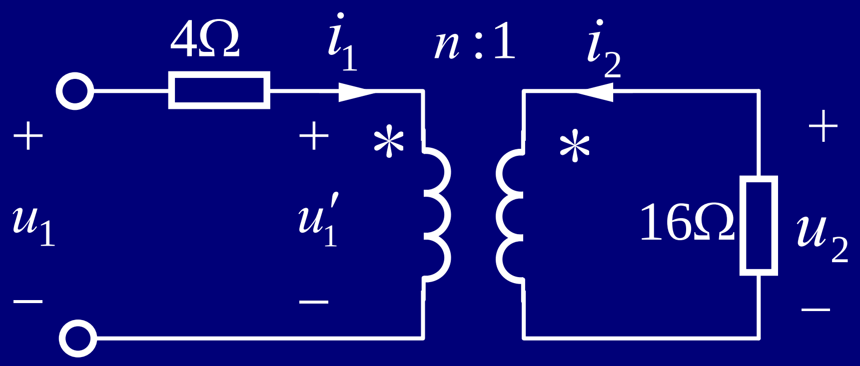
图5. 25(b)

变压器输入端口等效电阻为

$$R_i = \frac{u_1}{i_1} = \frac{nu_2}{-i_2/n} = n^2 R_2$$

亦即当理想变压器输出端口接电阻 R_2 时，折算到输入端口的等效电阻为 $n^2 R_2$ 。如图5.25(b)所示。

[补充5.3] 图示电路中，要求 $u_2 = u_1$,变比**n**应为多少?



解 由变压器特性方程可知

$$\begin{cases} u_1' = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 = -\dfrac{1}{n} \times (-\dfrac{u_2}{16}) \end{cases} \quad (1)$$

对左回路应用KVL方程

$$u_1 = 4i_1 + u_1' = 4i_1 + nu_2 \quad (2)$$

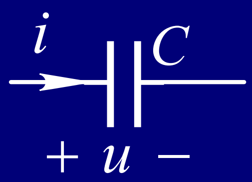
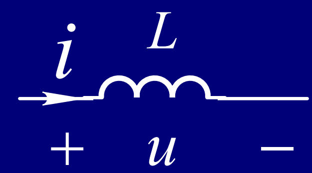
将式(1)代入式(2)，考虑到 $u_2 = u_1$ ，可得

$$u_1 = (\frac{1}{4n} + n)u_2 = (\frac{1}{4n} + n)u_1$$

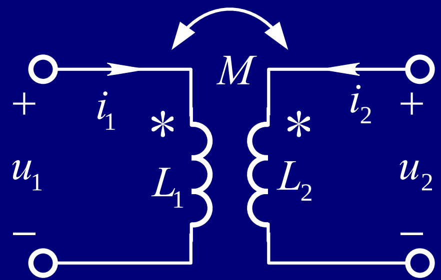
$$\frac{1}{4n} + n = 1$$

解得 $n = 0.5$

本章小结

	电容元件	电感元件
电路模型		
VCR方程	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$i = \dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi$
	$u = \dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
吸收能量	$w_\mathrm{e} = \dfrac{1}{2}Cu^2 = \dfrac{q^2}{2C}$	$w_m = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{\psi^2}{2L}$

互感特性方程

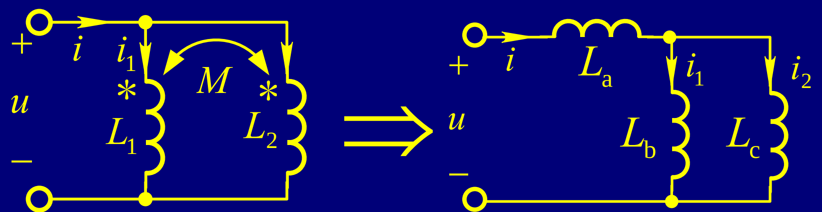


$$\begin{cases} u_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

互感串联等效

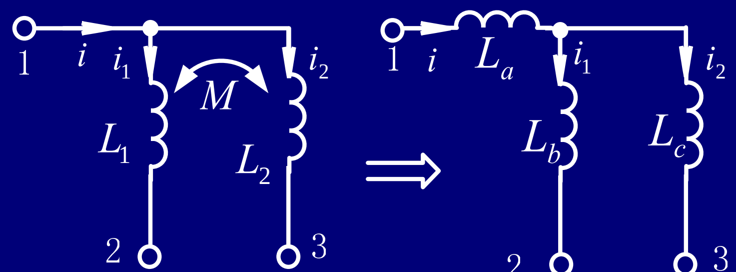
$$L_{\mathrm{eq}} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

互感并联等效



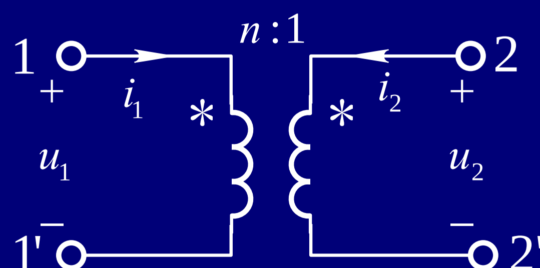
$$\begin{cases} L_{\mathrm{a}} = M \\ L_{\mathrm{b}} = L_1 - M \\ L_{\mathrm{c}} = L_2 - M \end{cases}$$

互感“T”联等效



(a) (b)

理想变压器



特性方程 $\begin{cases} u_1 = n u_2 \\ i_1 = -i_2 / n \end{cases}$

变换电阻 $R_i = n^2 R_2$