哈爾濱工業大學

第6章 正弦电流电路

主讲教师 齐超

提要 本章介绍电压、电流随时间按正弦规律变化的电路即正弦电流电路，这是一类在理论上和工程上具有重要意义的电路。主要内容包括：正弦量的相量表示、元件方程和基尔霍夫定律的相量形式、阻抗和导纳的概念、电路方程和电路定理的相量形式、含互感的正弦电流电路的计算、正弦电流电路功率的特点及计算方法。

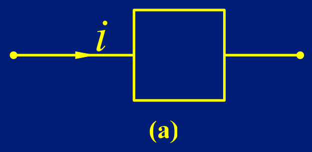
本章目次

6.1 正 弦 电 流

基本要求：掌握正弦量的振幅、角频率和初相位；正弦量的瞬时值、有效值和相位差。

随时间按正弦规律变动的电流称为正弦电流。图6.1（a）表示流过正弦电流的一条支路。

在指定电流参考方向和时间坐标原点之后，正弦电流的波形如图6.1 (b)所示。



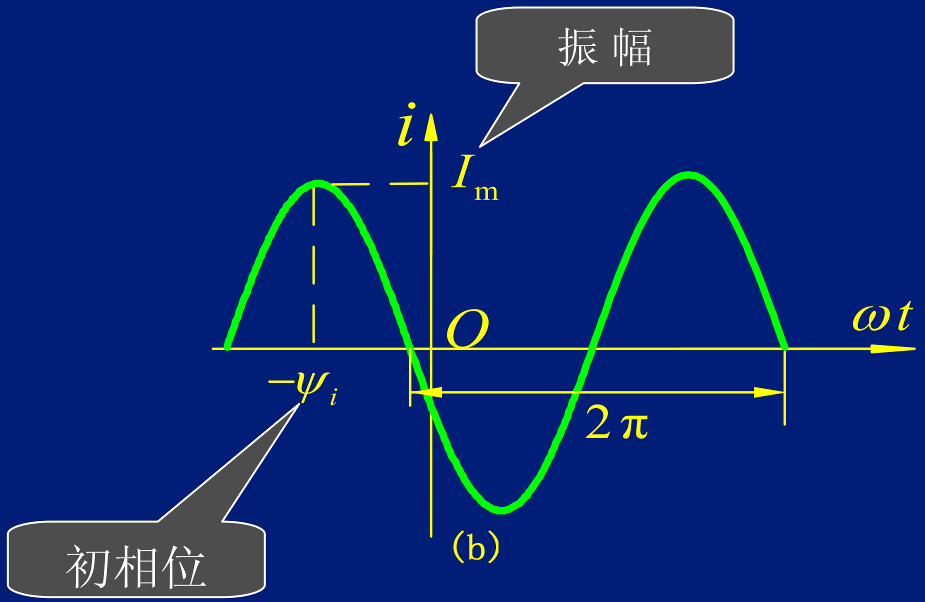


图6. 1　　经过某支路的正弦电流、波形

正弦电流的瞬时值表达式：

$$i = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi_i) \qquad (6.1)$$

振幅或幅值

$$i = I_{\mathrm{m}} \Big|_{\cos(\omega t + \psi_i) = 1}$$

角频率

$$\frac{\mathrm{d}(\omega t + \psi_i)}{\mathrm{d}t} = \omega$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

初 相 $\omega t + \psi_i \rightarrow$ 相位

$(\omega t + \psi_i)\big|_{t=0} = \psi_i$（一般$|\psi_i| \le \pi$）

大小与计时起点有关

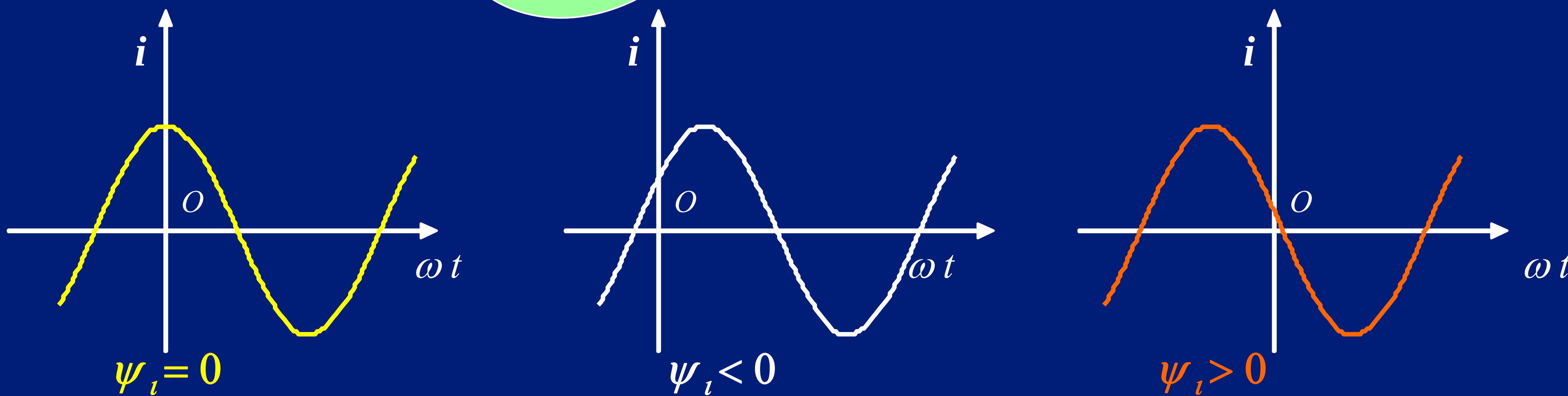


图6.2　$\psi_i = 0$ 与计时起点的关系

我国电力系统标准频率为 50Hz，称为工频，相应的角频率

$$\omega = 2\pi \,\mathrm{rad} \times 50/\mathrm{s} = 100\pi \,\mathrm{rad/s}$$

正弦电流电路常用的几个概念

1 有效值

当周期电流 $i = f(t)$ 和直流 I 分别通过相同的电阻R，若二者作功的平均效果相同，则将此直流 I 的量值规定为周期电流 i 的有效值，用 I 表示。有效值是瞬时值的平方在一个周期内的平均值再开方：

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} i^2 \mathrm{d}t} \qquad (6.3)$$

将$i = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_i)$代入，得有效值与最大值间的关系

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} I_{\mathrm{m}}^2 \cos^2(\omega t + \psi_i)\mathrm{d}t} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \qquad (6.4)$$

2 相位差

同频率正弦电压 $u = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$ 和正弦电流 $i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$ 的相位差为初相之差，即

$$(\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i = \varphi \qquad (6.5)$$

若 $\psi_u - \psi_i = 0$ 则称电压、电流为同相。如图**6.3a**所示。

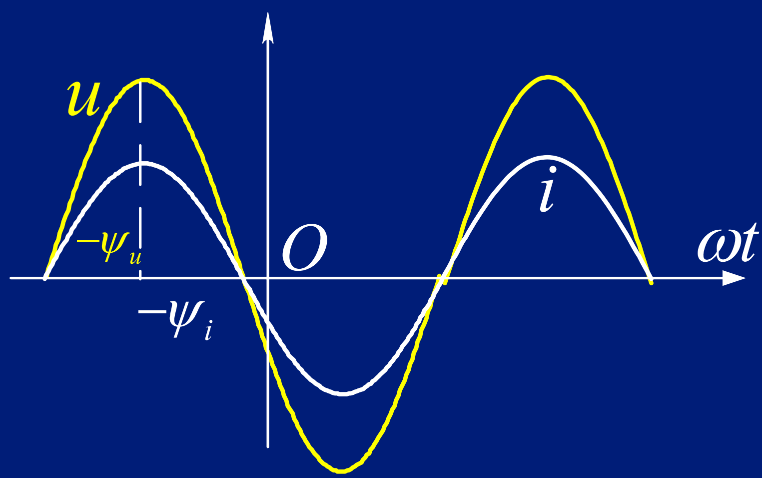


图6.3a ***u***与***i*** 同相

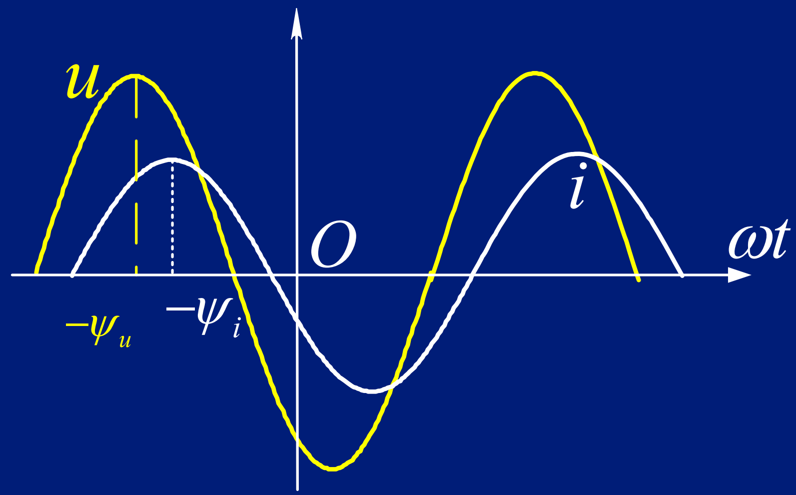


图6.3b ***u***越前于***i***

$\varphi > 0$，则称 ***u*** 越前 ***i*** 于 φ，即 ***u*** 比 ***i*** 先达到最大值或先达到零值，如图**6.3b**所示。

$\varphi < 0$ 则称 ***u*** 滞后 ***i*** 于 φ

越前或滞后的相角通常以**180°**为限。

若两个正弦量的相差为90°，则称它们相位正交, 如图6.3c所示。

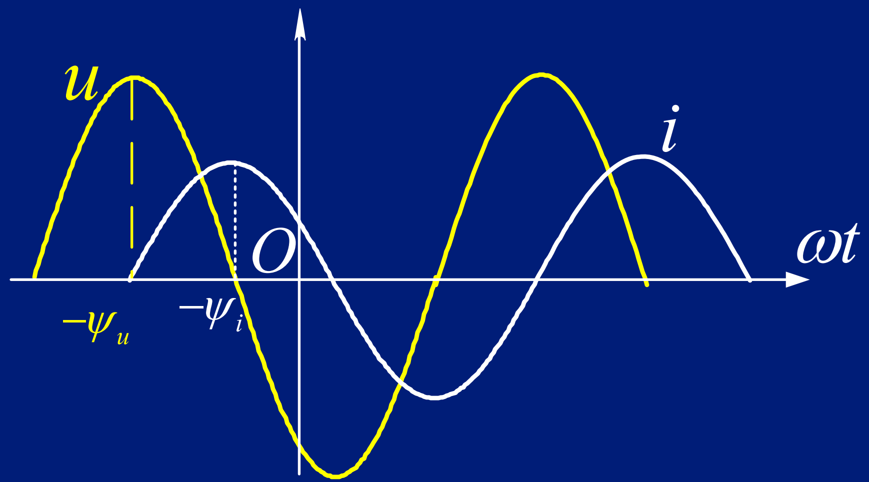


图6.3c　u与i 正交

若两个正弦量的相差为180°则称为相位相反。如图6.3d所示。

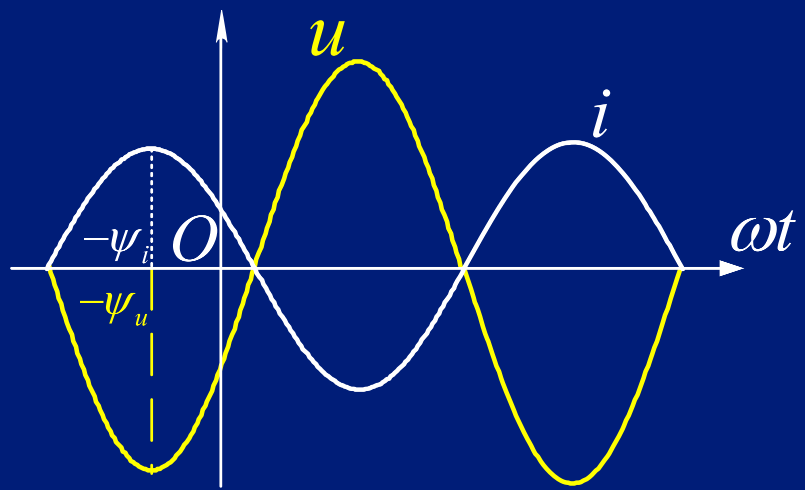


图6.3d　u与i 反相

[补充6.1]

已知图示电路 $u=100\cos(\omega t+10°)\text{V}$、$i_1=2\cos(\omega t+100°)\text{A}$、$i_2=-4\cos(\omega t+190°)\text{A}$、$i_3=5\sin(\omega t+10°)\text{A}$。试写出电压和各电流的有效值、初相位，并求电压越前于电流的相位差。

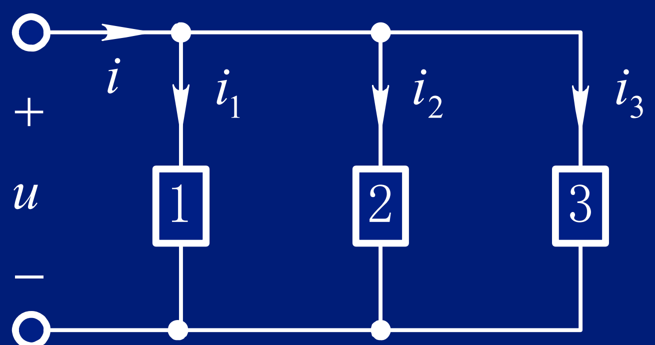


图 题6. 1

[解] 将 i_2 和 i_3 改写为余弦标准式，即

$$i_2=-4\cos(\omega t+190°)\text{A}$$
$$=4\cos(\omega t+190°-180°)\text{A}=4\cos(\omega t+10°)\text{A}$$
$$i_3=5\sin(\omega t+10°)\text{A}$$
$$=5\cos(\omega t+10°-90°)\text{A}=5\cos(\omega t-80°)\text{A}$$

电压、电流的有效值为

$$U=\frac{100}{\sqrt{2}}=70.7\text{V},\ I_1=\frac{2}{\sqrt{2}}=1.414\text{A}$$
$$I_2=\frac{4}{\sqrt{2}}=2.828\text{A},\ I_3=\frac{5}{\sqrt{2}}=3.54\text{A}$$

初相位

$$\psi_u=10^\circ,\ \psi_{i_1}=100^\circ,\ \psi_{i_2}=10^\circ,\ \psi_{i_3}=-80^\circ$$

相位差

$$\varphi_1=\psi_u-\psi_{i_1}=10^\circ-100^\circ=-90^\circ$$
$$\varphi_2=\psi_u-\psi_{i_2}=10°-10°=0^\circ$$
$$\varphi_3=\psi_u-\psi_{i_3}=10°-(-80°)=90^\circ$$

3 参考正弦量

在图6.4中

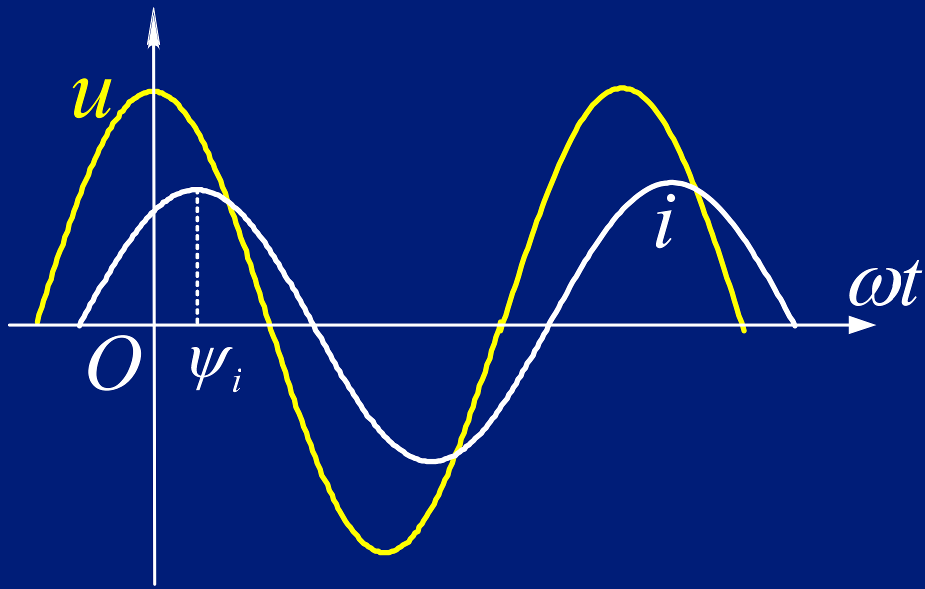


图6.4 *u*为参考正弦量的波形

电压 ***u*** 通过最大值的瞬间作为时间坐标原点(***t*** =0), 此时 $\psi_u = 0$, 正弦电压记为

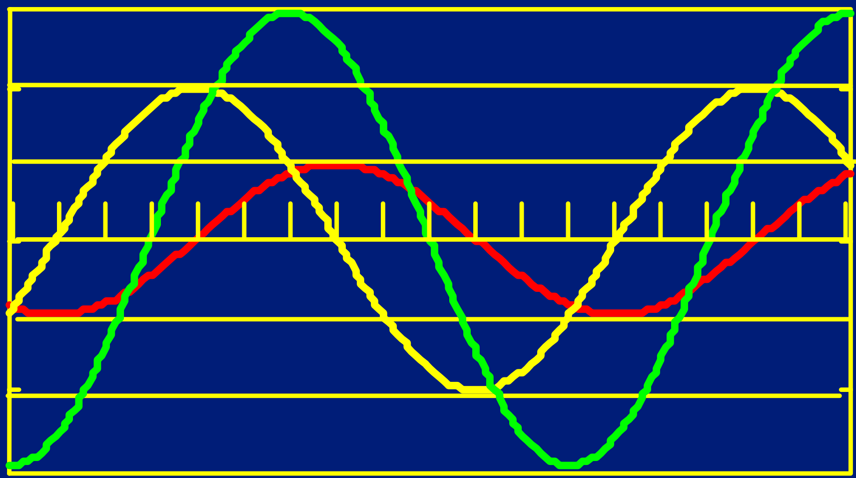
$$u = U_{\mathrm{m}} \cos \omega t$$

初相为零的正弦量称为参考正弦量。

一旦把某一正弦量选作参考正弦量，其它同频率的正弦量的初相也就相应被确定, 图6.4中电流 $i = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t - \psi_i)$ 其初相为 $-\psi_i$ ， 故 ***i*** 的波形图较参考正弦量***u*** 的波形图沿横轴右移 ψ_i 。

例题 6.1

示波器显示三个工频正弦电压的波形如图所示，已知图中纵坐标每格表示5V。试写出各电压的瞬时表达式。



图题 6.1

示波器上显示的三个正 弦波

解 设u_1、 u_2和u_3依次表示图中振幅最大、中等和最小的电压，其幅值分别为15V、10V和5V。

取 u_1为参考正弦量，即

$$u_1 = 15\cos(\omega t)\ \text{V}$$

由图可见u_2 比u_1越前60°

u_3比u_1滞后 30°,于是得

$$u_2 = 10\cos(\omega t + 60^\circ)\text{V}$$

$$u_3 = 5\cos(\omega t - 30^\circ)\text{V}$$

基本要求：掌握正弦量的相量表示法原理、相量运算规则及相量图。

- 正弦电路电压、电流都是随时间按正弦规律变化的函数。在含有电感和(或)电容的正弦电路中，元件方程中含有微积分形式。因此，在时域内对正弦电路进行分析时，需要建立含微积分的电路方程，分析过程如图**6.5**所示。

正弦电流电路 $\xrightarrow{\text{分析}}$ 建立电路方程（含微积分方程） $\xrightarrow{\text{求解}}$ 得时域响应表达式

图**6.5** 时域分析过程示意图

思考：正弦函数微积分或几个同频率正弦函数相加减的结果仍是同频率正弦量。能否用一种简单的数学变换方法以避免繁琐的三角函数运算？ → 相量分析法

• **1.** 复数的表示法

实部　虚部

设***A***是一个复数，可表示为

直角坐标式

$$A = a_1 + \mathrm{j}a_2 \qquad (6.10)$$

模　辐角

• 极坐标式

$$A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = |A|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) \qquad (6.11a)$$

简写为

$$A = |A|\angle\theta \qquad (6.11b)$$

比较式**(6.10)**和**(6.11)**有

$$a_1 = |A|\cos\theta \qquad |A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$a_2 = |A|\sin\theta \qquad \theta = \arctan(a_2/a_1)$$

[补充6.2] 把复数分别化为直角坐标式。

$$A_1 = 10\angle 150^\circ, A_2 = 10\angle -180^\circ, A_3 = 1\angle 90^\circ, A_4 = 1\angle -90^\circ$$

[解]

$$A_1 = 10\angle 150^\circ = 10\cos 150^\circ + \mathrm{j}10\sin 150^\circ \approx -8.66 + \mathrm{j}5$$

$$A_2 = 10\angle -180^\circ = 10\cos(-180^\circ) + \mathrm{j}10\sin(-180^\circ) = -10$$

$$A_3 = 1\angle 90^\circ = \cos 90^\circ + \mathrm{j}\sin 90^\circ = \mathrm{j}$$

$$A_4 = 1\angle -90^\circ = \cos(-90^\circ) + \mathrm{j}\sin(-90^\circ) = -\mathrm{j}$$

复数A还可以用复平面上的点或有向线段表示——相量图，如图6.6 所示。

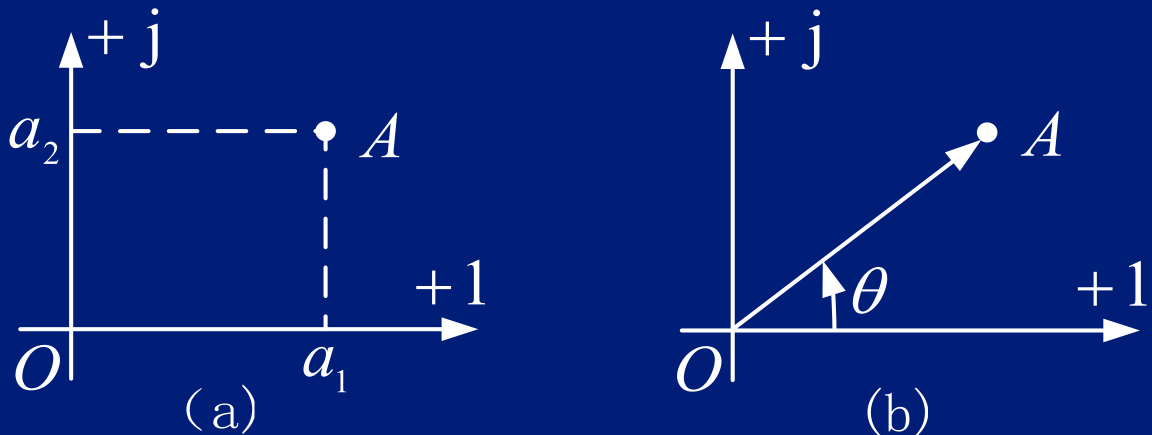


图6.5 用复平面上的点或有向线段表示复数

2. 正弦量的相量表示

• 正弦量一般表达式为: $f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$ (6.9)

设一复数为 $A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$ 根据欧拉公式得

$$A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)+\mathrm{j}A_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi) \qquad (6.14)$$

比较式（6.9)、(6. 14)得

$$f(t)=\mathrm{A}_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)=\mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}]=\mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

其中 $\dot{A}_{\mathrm{m}}=A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}=A_{\mathrm{m}}\angle\psi$ (6.16)

最大值相量

正弦量振幅

正弦量初相

一个正弦量 $f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$ 能够唯一地确定其对应的相量 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$

反之，若已知 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 和角频率 ω，由 $f(t)=\mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

也能唯一地确定 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 所代表的正弦量 $f(t)=\mathrm{A}_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$

例题 6.2

分别写出代表正弦量的相量 $i_1=3\cos\omega t$， $i_2=4\cos(\omega t-150°)$，$i_3=-5\cos(\omega t-60°)$， $i_4=6\sin(\omega t+30°)$.

解

$$i_1 \to \dot{I}_{1m}=3\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$i_2 \to \dot{I}_{2m}=4\angle -150^\circ \text{ A}$$

$$i_3=-5\cos(\omega t-60^\circ)=5\cos(\omega t-60^\circ+180^\circ)$$

$$\to \dot{I}_{3m}=5\angle 120^\circ \text{ A}$$

$$i_4=6\sin(\omega t+30^\circ)=6\cos(\omega t+30^\circ-90^\circ)$$

$$\to \dot{I}_{4m}=6\angle -60^\circ \text{ A}$$

例题 6.3

已知电压相量 U_{1m}=(3-j4)V，U_{2m}=(-3+j4)V，U_3=j4V。写出各电压相量所代表的正弦量（设角频率为 ω)。

解

$$U_{1m}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5\ \text{V} \qquad \psi_1=\arctan\frac{-4}{3}=-53.1^\circ$$

$$\dot{U}_{1m}=5\angle-53.1^\circ\ \text{V} \qquad \rightarrow u_1=5\cos(\omega t-53.1^\circ)$$

$$U_{2m}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5\ \text{V} \qquad \psi_2=\arctan\frac{4}{-3}=126.9^\circ$$

$$\dot{U}_{2m}=5\angle126.9^\circ\ \text{V} \qquad \rightarrow u_2=5\cos(\omega t+126.9^\circ)$$

$$\dot{U}_3=\text{j}4\ \text{V}=4\angle90^\circ\ \text{V} \qquad \rightarrow u_3=4\sqrt{2}\cos(\omega t+90^\circ)$$

关于相量说明

1. 相量是复值常量，而正弦量是时间的余弦函数，相量只是代表正弦量，而不等于正弦量。

2. 复平面上一定夹角的有向线段——相量图6.7所示。

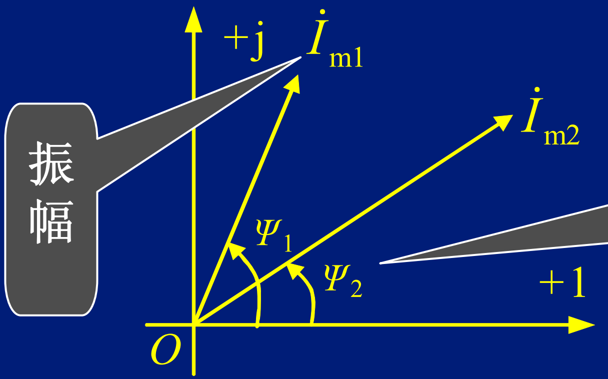


图 6.7 相量图

3. 复数 $A_m e^{j(\omega t+\psi)}$ 的辐角 $\omega t+\psi$ 是随时间均匀递增的，所以这一有向线段将以原点为圆心反时针方向旋转，旋转角速度为 $\frac{d}{dt}(\omega t+\psi)=\omega$ 如图6.8所示

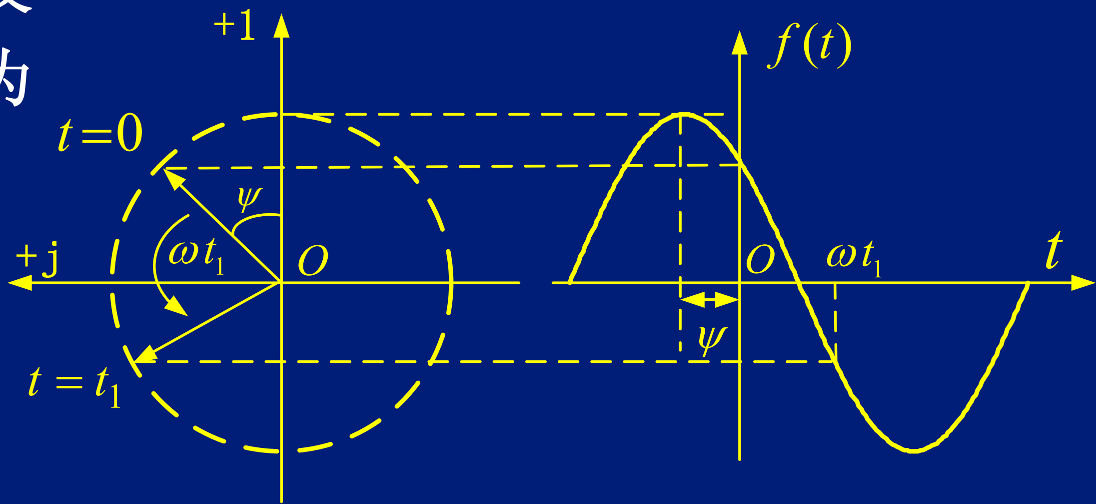


图6.8 旋转相量在实轴上的投影对应于正弦波

旋转相量—旋转相量任何时刻在实轴上的投影对应于正弦量在同一时刻的瞬时值。

$e^{j\omega t}\rightarrow$ 旋转因子

3. 相量运算规则

(1) 惟一性

两个同频率正弦量相等的充要条件是代表这两个正弦量的相量相等。即对于所有的时间t，

$$\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

充要条件为 $\dot{A}_{\mathrm{m}1} = \dot{A}_{\mathrm{m}2}$

(2) 线性性质

N个同频率正弦量线性组合（具有实系数）的相量等于各个正弦量相量的同样的线性组合。设 $f_k(t) = \mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$
(b_k 为实数)，则

$$\sum_{k=1}^{N} b_k \cdot f_k(t) = \mathrm{Re}[(\sum_{k=1}^{N} b_k \dot{A}_{\mathrm{m}k})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

(3) 微分规则

正弦量(角频率为ω) 时间导数的相量等于表示原正弦量的相量乘以因子 jω 。

即设 $f(t) = \mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$ ，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = \mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega \dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

由此可见，由于采用相量表示正弦量，正弦量对时间求导运算变换为用 jω 乘以代表它们的相量的运算。这给正弦电流电路的运算带来极大方便。

例题 6.4

设电感的磁链为正弦量 $\psi = \mathrm{Re}[\dot{\psi}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$,它所引起的感应电压也是同频率的正弦量 $u = \mathrm{Re}[\dot{U}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$, 写出电压相量和磁链相量的关系。

解 当u和 ψ的参考方向符合右螺旋定则时

$$u = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$

根据正弦量的相量表示的惟一性和微分规则，与上述微分关系对应的相量关系式为

$$\dot{U}_{\mathrm{m}} = \mathrm{j}\omega\dot{\psi}_{\mathrm{m}} \quad \text{或} \quad \dot{\psi}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\dot{U}_{\mathrm{m}}$$

6.3 基尔霍夫定律的相量形式

基本要求：透彻理解相量形式的基尔霍夫定律方程,比较与线性直流电路相应方程的异同。

基尔霍夫电流定律KCL的相量形式：

基尔霍夫电流定律方程的时域形式为 $\sum i = 0$

即：在集中电路中，流进 (或流出) 节点端子电流 相量 的代数和恒等于零。

当方程中各电流均为同频率的正弦量时，根据相量的惟一性和线性性质，可得基尔霍夫电流定律方程的相量形式

$$\sum \dot{I}_{\mathrm{m}} = 0 \text{ 或 } \sum \dot{I} = 0$$

振 幅 相 量

$$\dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \angle \psi_i$$

有 效 值 相 量

$$\dot{I} = I \angle \psi_i$$

基尔霍夫电压定律KVL的相量形式：

基尔霍夫电压定律方程的时域形式为 $\sum u = 0$

在集中参数电路中，任意时刻回路全部元件端对的电压代数和恒等于零。

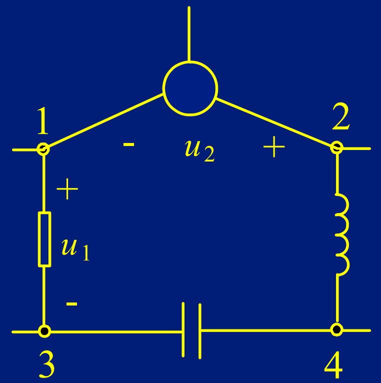
当方程中各电压均为同频率的正弦量时，根据相量的惟一性和线性性质，可得基尔霍夫电压定律方程的相量形式为：

$$\sum \dot{U}_{\mathrm{m}} = 0 \text{ 或 } \sum \dot{U} = 0$$

在集中参数正弦电流电路中，沿任一回路全部元件端对的电压相量代数和恒等于零。

例题 6.5

图 (a) 已知 $u_1=6\sqrt{2}\cos(\omega t+30°)\text{V}$，$u_2=4\sqrt{2}\cos(\omega t+60°)\text{ V}$ 求节点2与3之间的电压 u_{23}，并画出电压相量图。



图题 6.5a

解 设代表电压u_1、u_2、u_{23}的相量分别为

$\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$、$\dot{U}_{23}$

则 $\dot{U}_1=6\angle 30^\circ\text{V}$ 、$\dot{U}_2=4\angle 60^\circ\text{V}$

沿回路1231列相量形式的KVL方程为

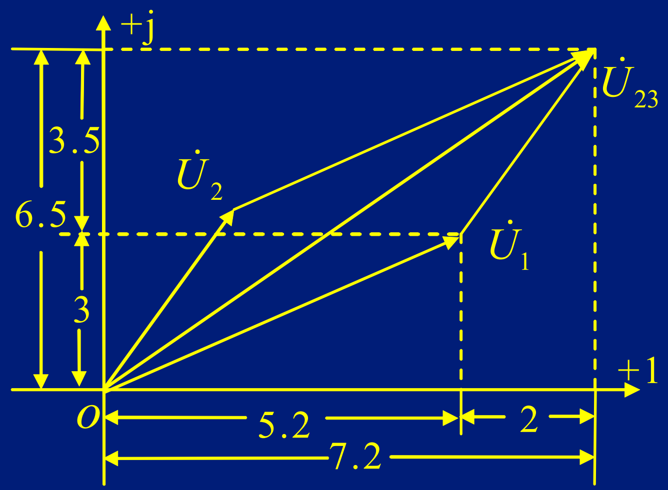
$$-\dot{U}_2+\dot{U}_{23}-\dot{U}_1=0$$

$$\dot{U}_{23}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=6\angle 30^\circ+4\angle 60^\circ$$

$$\approx(5.2+\text{j}3)+(2+\text{j}3.5)=9.7\angle 42.1^\circ$$

$$u_{23}=9.7\sqrt{2}\cos(\omega t+42.1°)\text{ V}$$

电压相量图见 (b)

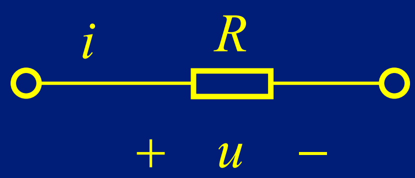


图题 6.5b 用相量图求 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{U}_2$ 之和

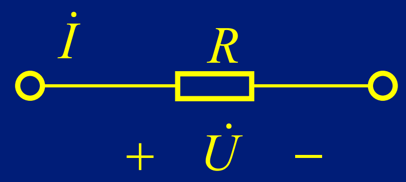
6.4 *RLC* 元件上电压与电流的相量关系

基本要求：熟练掌握相量形式的元件方程，理解元件方程的时域形式与相量形式的对应关系。

1. 电阻元件



频域 $\dot{U}_{\mathrm{m}} = R\dot{I}_{\mathrm{m}}$ 或 $\dot{U} = R\dot{I}$



时域 $u = Ri$

有效值 $U = RI$ 相位 $\psi_u = \psi_i$

在电阻*R*上电压电流有效值(或振幅)之比等于电阻；电压与电流同相位。相量图和波形如图6.9所示。

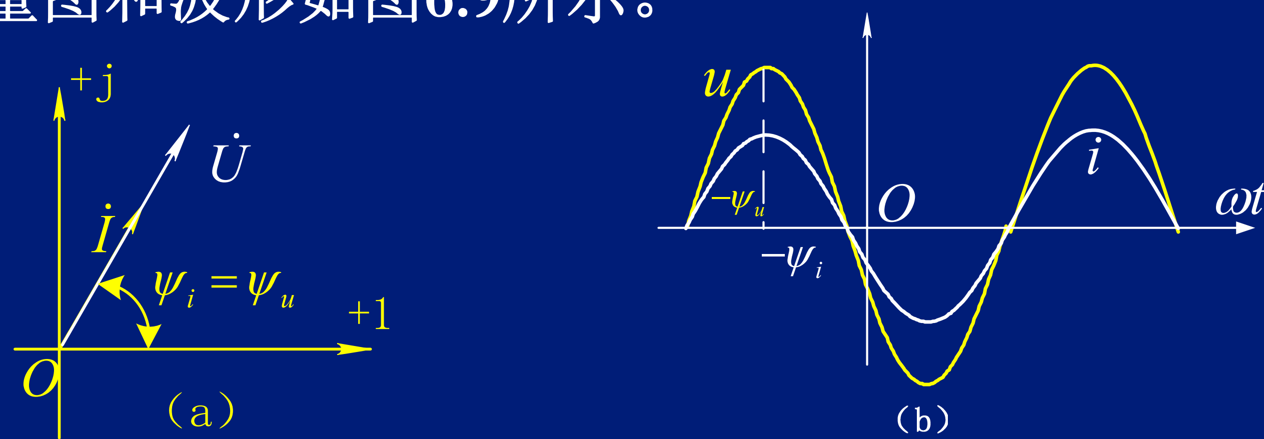


图6.9 电阻元件相量图和波形图

2. 电感元件

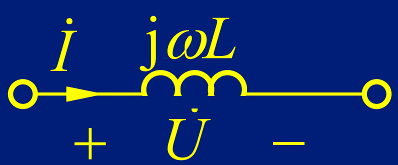
时域 $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

性质 微分

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$$

$X_L = \omega L$ 称为感抗，

单位为 Ω



电感的相量电路模型

有效值 $U = \omega L I$

相位 $\psi_u = \psi_i + \dfrac{\pi}{2}$

结论：电感上电压比电流越前 90°；电压、电流有效值之比等于感抗 X_L。

相量图和波形图如图6.10所示：

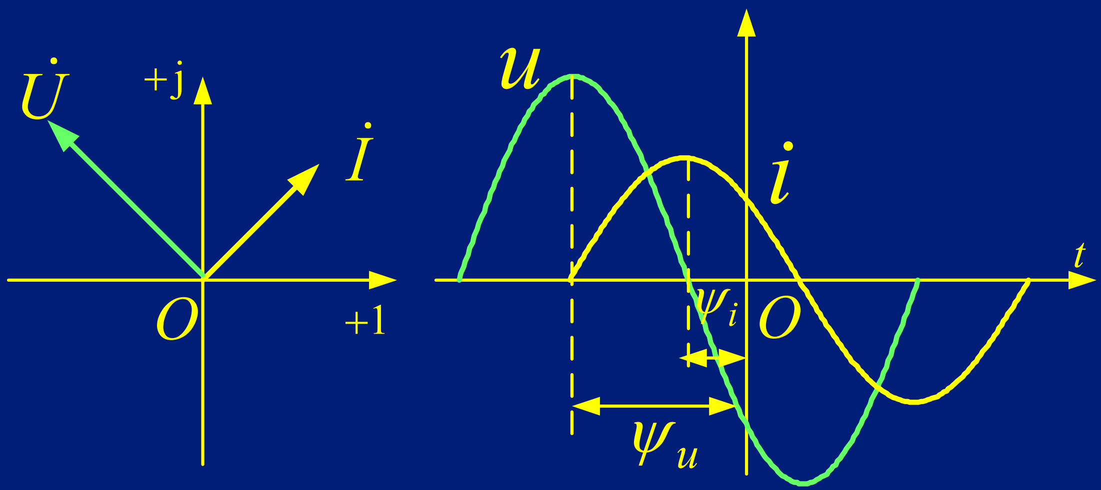
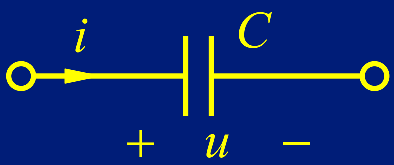


图6.10 电感上电压、电流相量图与波形

3. 电容元件

时域

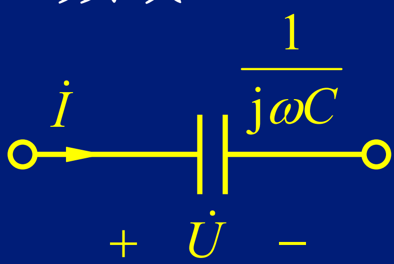


$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \xrightarrow[\text{性质}]{\text{微分}} \dot{I} = \mathrm{j}\omega C\dot{U} \text{ 或 } \dot{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

$$= -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \mathrm{j}X_C\dot{I}$$

$X_C = -\dfrac{1}{\omega C}$ 容抗

频域



电容的相量电路模型

有效值 $U = \dfrac{I}{\omega C} = |X_C| I$

相位 $\psi_u = \psi_i - 90^\circ$

结论： 电压、电流有效值(或振幅)之比等于容抗的绝对值；电压比电流滞后90°。相量和波形如图6.11所示。

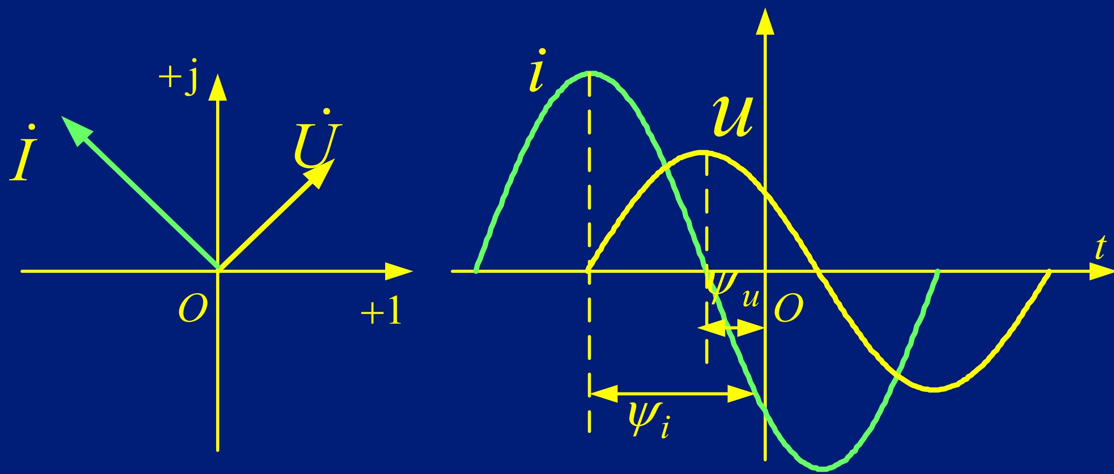


图6.11　电感上电压、电流相量图与波形

[补充6.3]← [补充6.1]

已知图示电路 $u=100\cos(\omega t+10°)\text{V}$、$i_1=2\cos(\omega t+100°)\text{A}$、$i_2=-4\cos(\omega t+190°)\text{A}$、$i_3=5\sin(\omega t+10°)$ A 。试求出电压越前于电流的相位差；并判断其对应的元件。

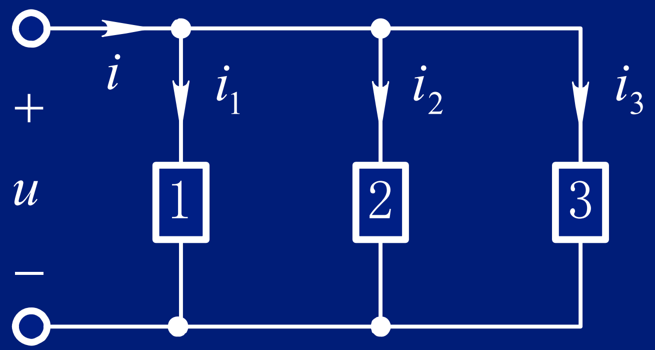


图 题6. 1

[解] 将 i_2 和 i_3 改写为余弦标准式，即

$$i_2=-4\cos(\omega t+190°)\text{A}=4\cos(\omega t+10°)\text{A}$$

$$i_3=5\sin(\omega t+10°)\text{A}=5\cos(\omega t-80°)\text{A}$$

初相位

$$\psi_u=10^\circ,\ \psi_{i_1}=100^\circ,\psi_{i_2}=10^\circ,\psi_{i_3}=-80^\circ$$

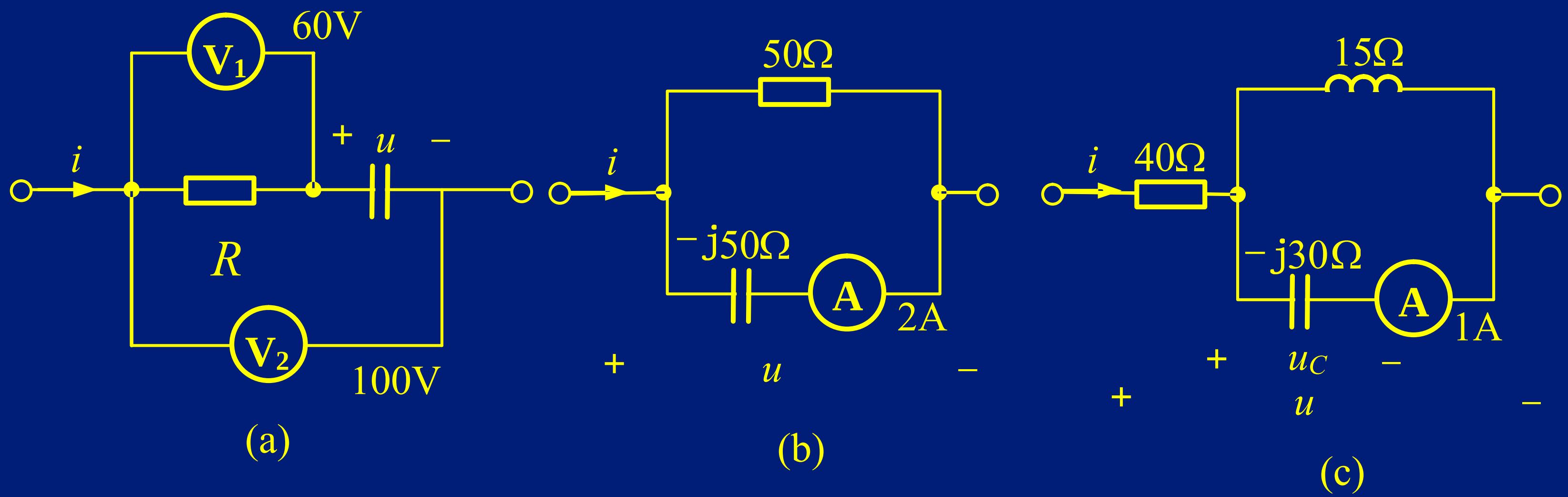
相位差

$$\varphi_1=\psi_u-\psi_{i_1}=10^\circ-100^\circ=-90^\circ \rightarrow$$ 电容元件

$$\varphi_2=\psi_u-\psi_{i_2}=10°-10°=0^\circ \rightarrow$$ 电阻元件

$$\varphi_3=\psi_u-\psi_{i_3}=10°-(-80°)=90^\circ \rightarrow$$ 电感元件

- **[补充6.4] 图示各电路中已标明电压表和电流表的读数，试求电压 *u* 和电流 *i* 的有效值。**



[解] 图(a): $\dot{U}_2=\dot{U}_R+\dot{U}$ $\quad 100\text{V}=\sqrt{(60\text{V})^2+U^2}$ $\quad U=\sqrt{(100\text{V})^2-(60\text{V})^2}=80\text{V}$

图(b): $U=50\Omega\times 2\text{A}=100\text{V},\quad \dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_C=\dfrac{100\text{V}}{50\Omega}+2\angle 90^\circ=2+\text{j}2=2\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \text{A}$

故 $\quad I=2.828\text{A}$

图(c): 以电感与电容的并联电压为参考相量

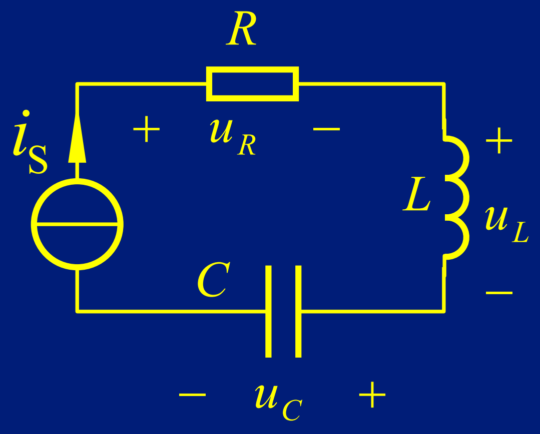
$\dot{U}_C=30\Omega\times 1\text{A}=30\angle 0^\circ\ \text{V}$

故(c)中 $\begin{cases} I=1\text{A} \\ U=50\text{V} \end{cases}$

$\dot{I}=\dot{I}_C+\dot{I}_L=\text{j}-2\text{jA}=-\text{jA},\quad \dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_C=-40\text{j}+30\text{V}=50\angle-53.1^\circ\ \text{V}$

例题 6.6

已知图题6.6所示电路中 $i_S = 0.2\cos(\omega t + 45°)\,\text{A}$，$\omega = 10\text{rad/s}$，$R = 20\Omega$，$L$=3H，$C$=5 ×10^{-3}F。试求电压 u_R、u_L和 u_C。



图题 6 . 6

解

$$i_S = 0.2\cos(\omega t + 45^\circ)\text{A}$$

$$\rightarrow \dot{I}_{mS} = 0.2\angle 45^\circ\ \text{A}$$

感抗和容抗分别为

$$X_L = \omega L = 30\Omega$$

$$X_C = -1/(\omega C) = -20\Omega$$

根据

$$\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_{mS} = 20\times 0.2\angle 45^\circ\ \text{V} = 4\angle 45^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{mL} = \text{j}X_L\dot{I}_{mS} = \text{j}30\times 0.2\angle 45^\circ\ \text{V} = 6\angle 135^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{mC} = \text{j}X_C\dot{I}_{mS} = -\text{j}20\times 0.2\angle 45^\circ\ \text{V} = 4\angle -45^\circ\ \text{V}$$

得各电压的时域表达式

$$u_R = 4\cos(\omega t + 45^\circ)\ \text{V}$$

$$u_L = 6\cos(\omega t + 135^\circ)\ \text{V}$$

$$u_C = 4\cos(\omega t - 45^\circ)\ \text{V}$$

基本要求：透彻理解阻抗的概念以及引入阻抗的理论意义。

直流电路中无源一端口网络（仅由线性电阻和受控源组成的电路）对外可以等效成

电阻 ***R***；

那么不含独立源的线性交流一端口网络，如图6.12所示。

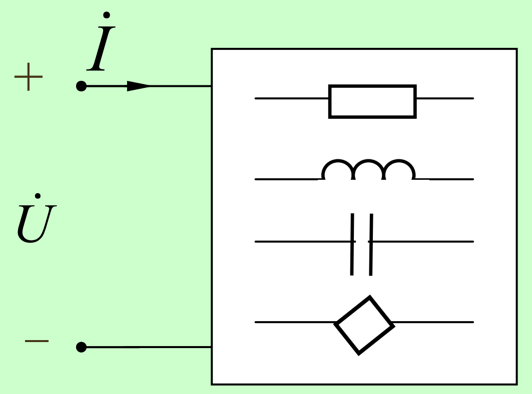
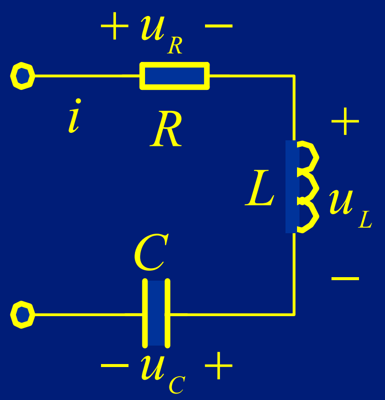


图**6.12** 无独立源交流一端口网络

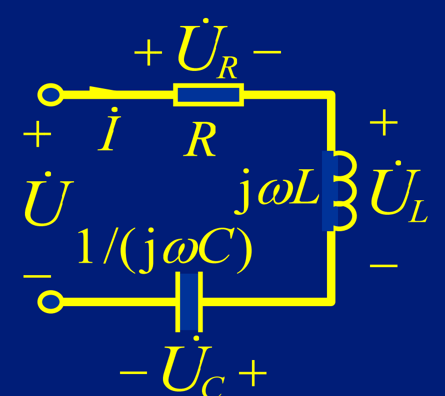
它对外的等效电路是什么？

图6.13 (a) 所示 ***RLC*** 串联电路

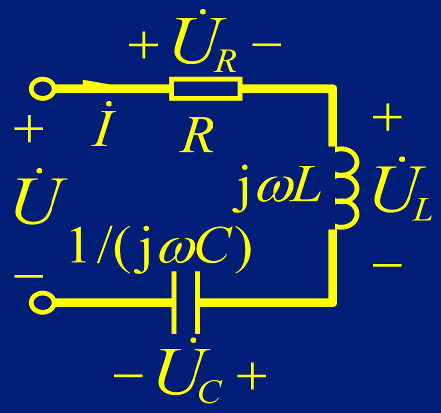


6.13（a）

相量电路模型如图 6.13(b) 所示



6.13(b)

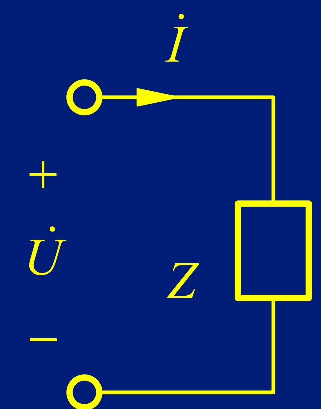


6.13(b)

根据**KVL**的相量形式，图（**b**）所示电路的端口电压相量方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C \\
&= R\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} \\
&= [R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})]\dot{I} \qquad (6.33) \\
&= Z\dot{I} \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

相量形式的欧姆定律



6.13(c)

令 $\mathbf{Z} = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + \mathrm{j}(X_L + X_C) = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\varphi$

阻 抗

电 阻

电 抗
$X = X_L + X_C$

阻抗模
$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}$

阻抗角
$\varphi = \arctan\frac{X_L + X_C}{R}$

等效电路如图6.13 (c)所示。

又根据 $$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\psi_u}{I\angle\psi_i}=\frac{U}{I}\angle(\psi_u-\psi_i)=|Z|\angle\varphi$$

可得 $$\frac{U}{I}=|Z| \qquad (6.41) \qquad\qquad \psi_u-\psi_i=\varphi \qquad (6.42)$$

根据式 $$\varphi=\arctan\frac{X_L+X_C}{R} \qquad (6.36)$$

分析： $X_L>|X_C|$ 时阻抗角 $\varphi>0$

电压 u 越前于电流 i ，R、L、C串联电路呈现感性；

$X_L<|X_C|$ 时阻抗角 $\varphi<0$

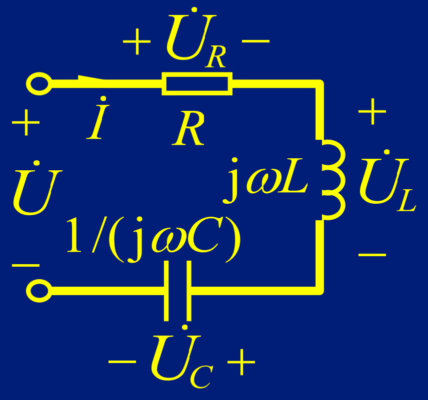
电压 u 滞后于电流 i ， R、L、C串联电路呈现容性；

$X_L=|X_C|$ 时阻抗角 $\varphi=0$

电压 u 与电流 i 同相， R、L、C串联电路呈现阻性。

相量图

RLC **串联电路如图6.13b所示　电压、电流的相量图如图6.14所示**



6.13(b)

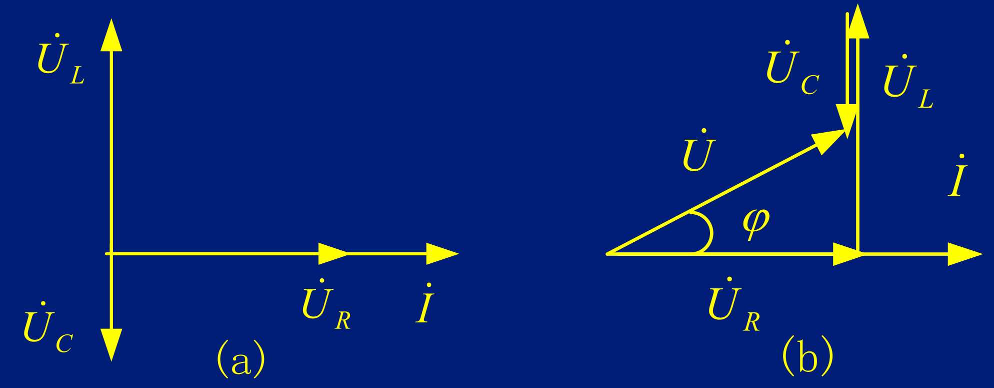


图6.14 ***RLC*串联电路的相量图**

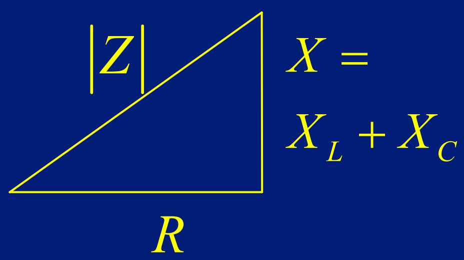


图6.15 阻抗三角形

$$\dot{U}_R = R\dot{I}$$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} = \mathrm{j}X_C\dot{I}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

有效值的关系

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

***R*、*L*、*C*串联电路电压相量图组成直角三角形，它与阻抗三角形相似。如图6.15所示。**

例题 6.7

一个电阻R=15Ω、电感L=12mH的 线圈与C=5μF的电容器相串联，接在电压 $u=100\cos\omega t$ V的电源上，ω=5000rad/s。试求电流i、电容器端电压u_C和线圈端电压u_W。

解 R、L、C串联，其阻抗

$$Z=R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

$$=15+\mathrm{j}[5000\times12\times10^{-3}-1/(5000\times5\times10^{-6})]$$

$$=15+\mathrm{j}20=25\angle53.1^\circ\ \Omega$$

电流相量和瞬时表达式分别为

$$\dot{I}_\mathrm{m}=\frac{\dot{U}_\mathrm{m}}{Z}=\frac{100\angle0^\circ\ \mathrm{V}}{25\angle53.1^\circ\ \Omega}=4\angle-53.1^\circ\ \mathrm{A}$$

$$i=4\cos(\omega t-53.1^\circ)\ \mathrm{A}$$

电容电压相量和瞬时表达式

$$\dot{U}_{C\mathrm{m}}=\mathrm{j}X_C\dot{I}_\mathrm{m}$$

$$=-\mathrm{j}40\times4\angle-53.1^\circ=160\angle-143.1^\circ\ \mathrm{V}$$

$$u_C=160\cos(\omega t-143.1^\circ)\ \mathrm{V}$$

线圈看成RL串联，其阻抗

$$Z_\mathrm{W}=R+\mathrm{j}\omega L$$

$$=(15+\mathrm{j}60)\Omega=62\angle76^\circ\ \Omega$$

线圈电压相量和瞬时表达式

$$\dot{U}_\mathrm{m}=Z_\mathrm{W}\dot{I}_\mathrm{m}$$

$$=62\angle76^\circ\times4\angle-53.1^\circ$$

$$=248\angle22.9^\circ\ \mathrm{V}$$

$$u_\mathrm{W}=248\cos(\omega t+22.9^\circ)\mathrm{V}$$

RLC串联电路波形如图6.16所示。

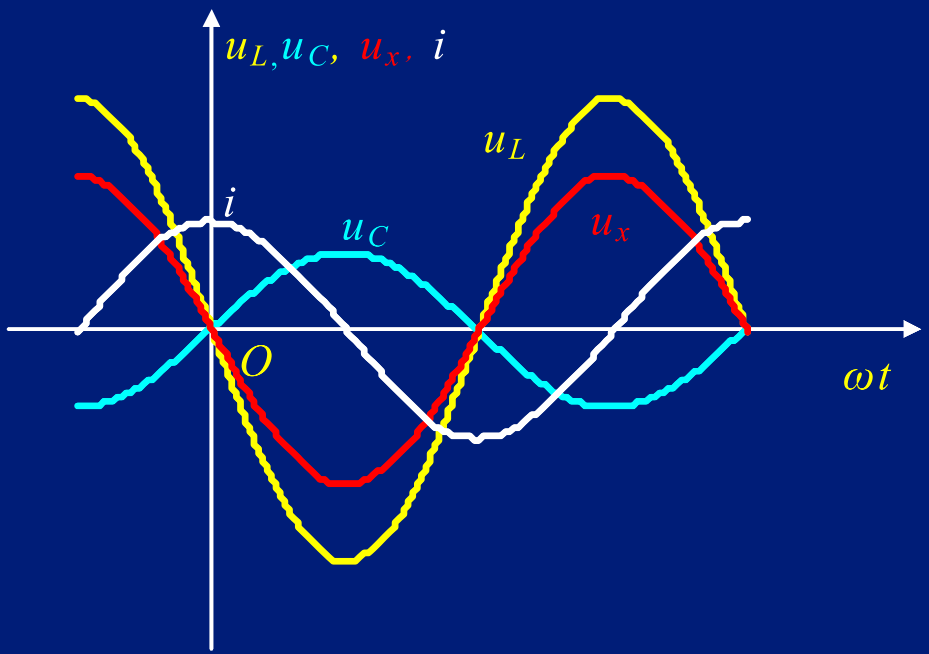
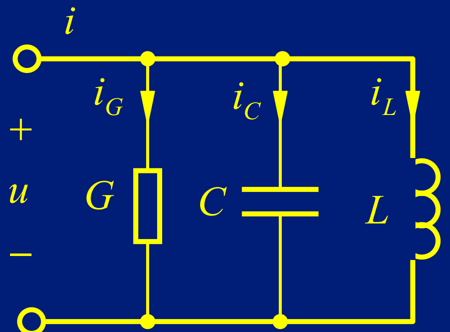


图 6.16 RLC 串联电路中电流和各电压波形

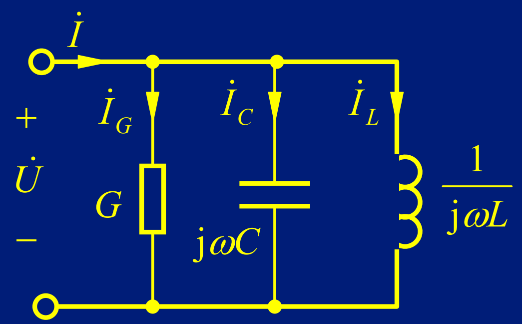
说明：以i为参考正弦量，u_L比 i越前90°，u_C比 i滞后90°。将电感和电容串联部分的电压称为电抗电压，用 $u_X = u_L + u_C$ 来表示。由图可见，u_L和u_C 相位相反，电抗电压 u_X的振幅 U_{mX} 应等于u_L和 u_C 振幅之差。

基本要求：透彻理解导纳的概念以及引入导纳的理论意义、等效阻抗与等效导纳的关系。

以*GCL*并联电路为例，如图6.17 (a)所示。



6.17 (a)



6. 17 (b)

将*GCL*并联电路的时域模型变换成相量模型，如图6.17(b)所示。

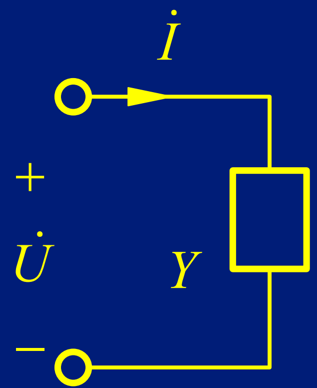
KCL方程相量形式为

$$\dot{I}=\dot{I}_G+\dot{I}_C+\dot{I}_L=G\dot{U}+\mathrm{j}\omega C\dot{U}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\dot{U}=[G+\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})]\dot{U}$$

令 $Y=G+\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})=G+\mathrm{j}(B_C+B_L)=G+\mathrm{j}B=|Y|\angle\varphi_Y$

导 纳　电 导　容 纳　感 纳　电 纳　导纳角

*GCL*并联等效电路如图6.17 (c)所示。



6. 17 (c)

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + \mathrm{j}(B_C + B_L)$$

$$= G + \mathrm{j}B = |Y|\angle\varphi_Y \qquad (6.45)$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + (B_C + B_L)^2} \qquad (6.46)$$

$$\varphi_Y = \arctan\frac{B_C + B_L}{G} \qquad (6.47)$$

$$\dot{I} = [G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})]\dot{U} = Y\dot{U} \qquad (6.48)$$

→ 欧姆定律另一相量形式

端口 $Y = \dfrac{\dot{I}}{\dot{U}} = \dfrac{I\angle\psi_i}{U\angle\psi_u} = \dfrac{I}{U}\angle(\psi_i - \psi_u) = |Y|\angle\varphi_Y$

即有

$$\frac{I}{U} = |Y| \qquad (6.49) \qquad\qquad \psi_i - \psi_u = \varphi_Y \qquad (6.50)$$

综上所述

$|B_L| > B_C$ 时 $\varphi_Y < 0$

端口电流滞后于电压，

GCL并联电路呈现感性；

$|B_L| < B_C$ 时 $\varphi_Y > 0$

端口电流越前于电压，

GCL并联电路呈现容性。

GCL 并联电路的相量图如**6.18**所示。

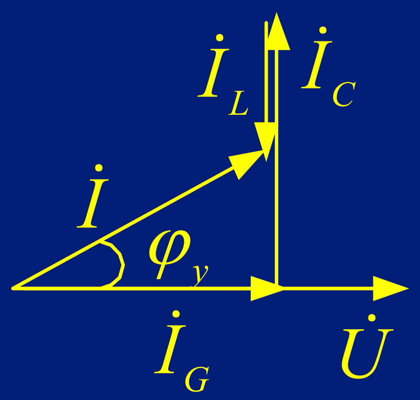


图**6.18** ***GCL***并联电路相量图

$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C + \dot{I}_L$$

有效值 $I = \sqrt{I_G^2 + (I_C - I_L)^2}$

复阻抗与复导纳之间的关系

$$Z = \frac{1}{Y}$$

若 $Z = R + \mathrm{j}\omega L$

则 $Y = \dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{R + \mathrm{j}\omega L} = \dfrac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - \mathrm{j}\dfrac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = G + \mathrm{j}B$

其中， $G = \dfrac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \neq \dfrac{1}{R}$ $\qquad B = -\dfrac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \neq \dfrac{1}{\omega L}$

等效电路如图6.19 (b)所示 。

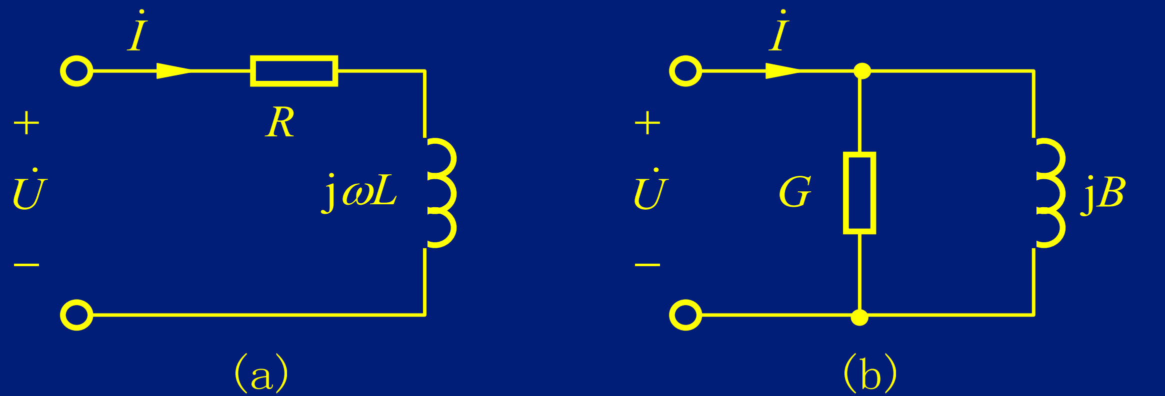


图6.19 ***RL***串联电路及其等效的并联电路

说明： ***Y*** 与 ***Z*** 等效是在某一频率下求出的，故等效的 ***Z*** 或 ***Y*** 与频率有关。

例题 6.8

有一**GCL** 并联电路，其中G=2mS , L=1H , C=1 μ F。试在频率为50Hz 和 400Hz 两种情况下求其串联等效电路的参数。

解 ***GCL*** 并联电路的导纳为 $Y = G + \mathrm{j}[\omega C - 1/(\omega L)]$

其等效阻抗 $Z = \dfrac{1}{Y} = \dfrac{1}{G + \mathrm{j}[\omega C - 1/(\omega L)]}$

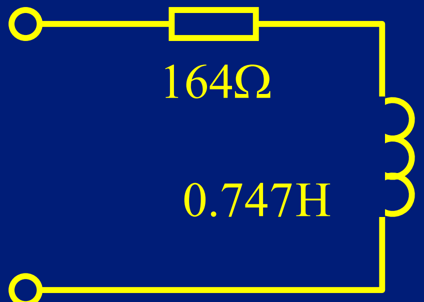
当$f = 50\mathrm{Hz}$时, $\omega = 2\pi f = 100\pi \mathrm{rad/s}$

复阻抗为$Z = \dfrac{1}{2\times 10^{-3}\mathrm{S} + \mathrm{j}[100\pi\times 10^{-6} - 1/(100\pi\times 1)]\mathrm{S}} \approx (164 + \mathrm{j}235)\Omega$

阻抗 ***Z*** 的虚部为正，其串联等效电路是由电阻和感抗构成，其中等效电感为

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{235\Omega}{(100\pi)\,\mathrm{s}^{-1}} \approx 0.747\mathrm{H}$$

等效电路如右图所示 。



(a)

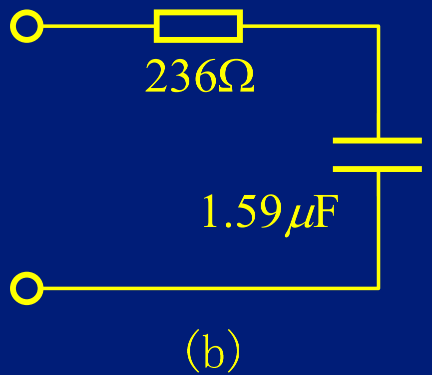
当 $f = 400\text{Hz}$时，$\omega = 800\pi\text{rad/s}$

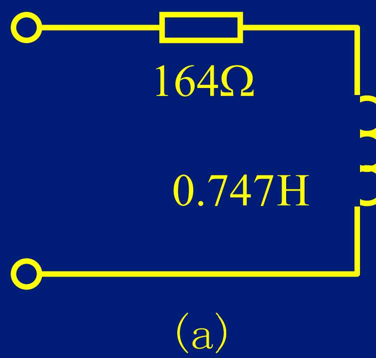
其复阻抗为 $Z = \dfrac{1}{2\times10^{-3}\text{S} + \text{j}[800\pi\times10^{-6} - 1/(800\pi\times1)]} \approx (236 - \text{j}250)\Omega$

阻抗 **Z** 的虚部为负，表明它所对应的等效电路是由电阻和容抗串联构成，等效电容为

$$C = -\frac{1}{\omega X_C} = -\frac{1}{(800\pi)\text{s}^{-1}\times(-250)\Omega} \approx 1.59\mu\text{F}$$

等效电路如图**(b)**所示。



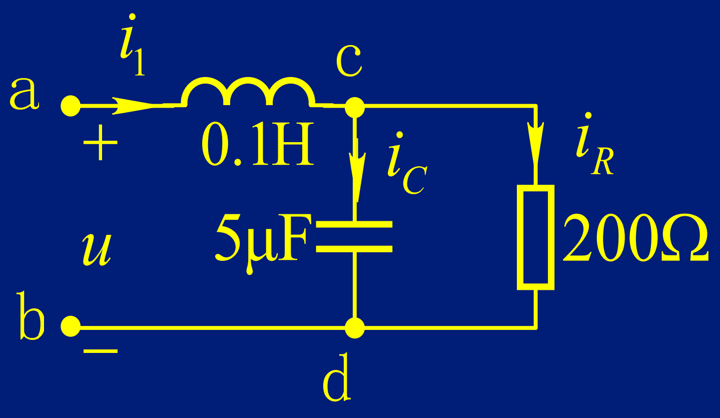


比较图**(a)**、**(b)**可见, 一个实际电路在不同频率下的等效电路，不仅其电路参数不同，甚至连元件类型也可能发生改变。这说明经过等效变换求得的等效电路只是在一定频率下才与变换前的电路等效。

[补充6.5] 在图示电路中已知 $i_R=\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathrm{A}$ ， $\omega=2\times10^3\mathrm{rad/s}$ 。

(1)求 ab 端的等效阻抗和等效导纳。

(2)求各元件的电压、电流及电源电压 u，并作各电压、电流的相量图。



[解] $X_L=\omega L=\left(2\times10^3\right)\mathrm{rad/s}\times0.1\,\mathrm{H}=200\Omega,$

$$X_C=-\frac{1}{\omega C}=-\frac{1}{\left(2\times10^3\right)\mathrm{rad/s}\times\left(5\times10^{-6}\right)\mathrm{F}}=-100\Omega$$

$$(1)\quad Z_{\mathrm{cd}}=\frac{1}{\frac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{\frac{1}{200}+\mathrm{j}\frac{1}{100}}=40(1-\mathrm{j}2)\Omega$$

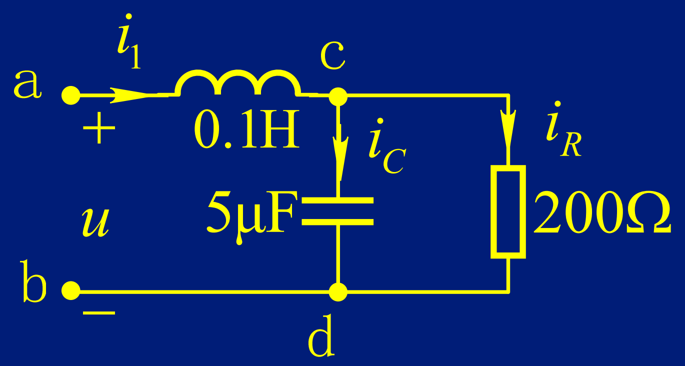
$$Z_{\mathrm{ab}}=\mathrm{j}\omega L+Z_{\mathrm{cd}}=126.49\angle71.56^\circ\,\Omega$$

$$Y_{\mathrm{ab}}=\frac{1}{Z_{\mathrm{ab}}}=(2.5-\mathrm{j}7.5)\mathrm{mS}$$

[补充6.5] 在图示电路中已知 $i_R=\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathrm{A}$， $\omega=2\times10^3\mathrm{rad/s}$ 。

(1)求 ab 端的等效阻抗和等效导纳。

(2)求各元件的电压、电流及电源电压 u，并作各电压、电流的相量图。



(2) $\dot{U}_{\mathrm{cd}}=\dot{I}_R\times R=200\angle0^\circ\,\mathrm{V}$

$\dot{I}_C=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_{\mathrm{cd}}=2\angle90^\circ\,\mathrm{A}$

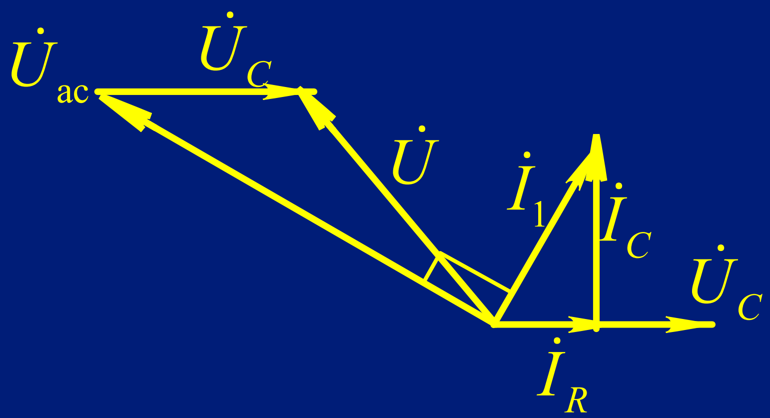
$\dot{I}_1=\dot{I}_C+\dot{I}_R=2.236\angle63.43^\circ\,\mathrm{A}$

$\dot{U}_{\mathrm{ac}}=\mathrm{j}\omega L\times\dot{I}_1=447.2\angle153.43^\circ\,\mathrm{V}$

$\dot{U}=Z_{\mathrm{ab}}\cdot\dot{I}_1=282.83\angle134.99^\circ\,\mathrm{V}$

$u=282.83\sqrt{2}\cos(\omega t+134.99^\circ)\mathrm{V}$

各电压、电流相量图如下



6.7 正弦电流电路的相量分析法

基本要求：熟练掌握正弦电流电路相量分析法原理及步骤、电路方程和电路定理的相量形式。

用相量表示正弦电压、电流并引入阻抗和导纳来表示元件方程，使得相量形式的基尔霍夫定律方程和元件方程均变成了线性代数方程，和直流电路中相应方程的形式是相似的。分析步骤如下：

(1) 将电阻推广为复阻抗，将电导推广为复导纳。

(2) 将激励用相量形式表示，恒定电压、电流推广为电压、电流的相量。

(3) 按线性直流电路分析方法计算相量模型电路。

(4) 将所得的电压、电流相量计算结果变换成正弦表达式。

正弦电流电路相量分析法过程示意如图6.20所示。

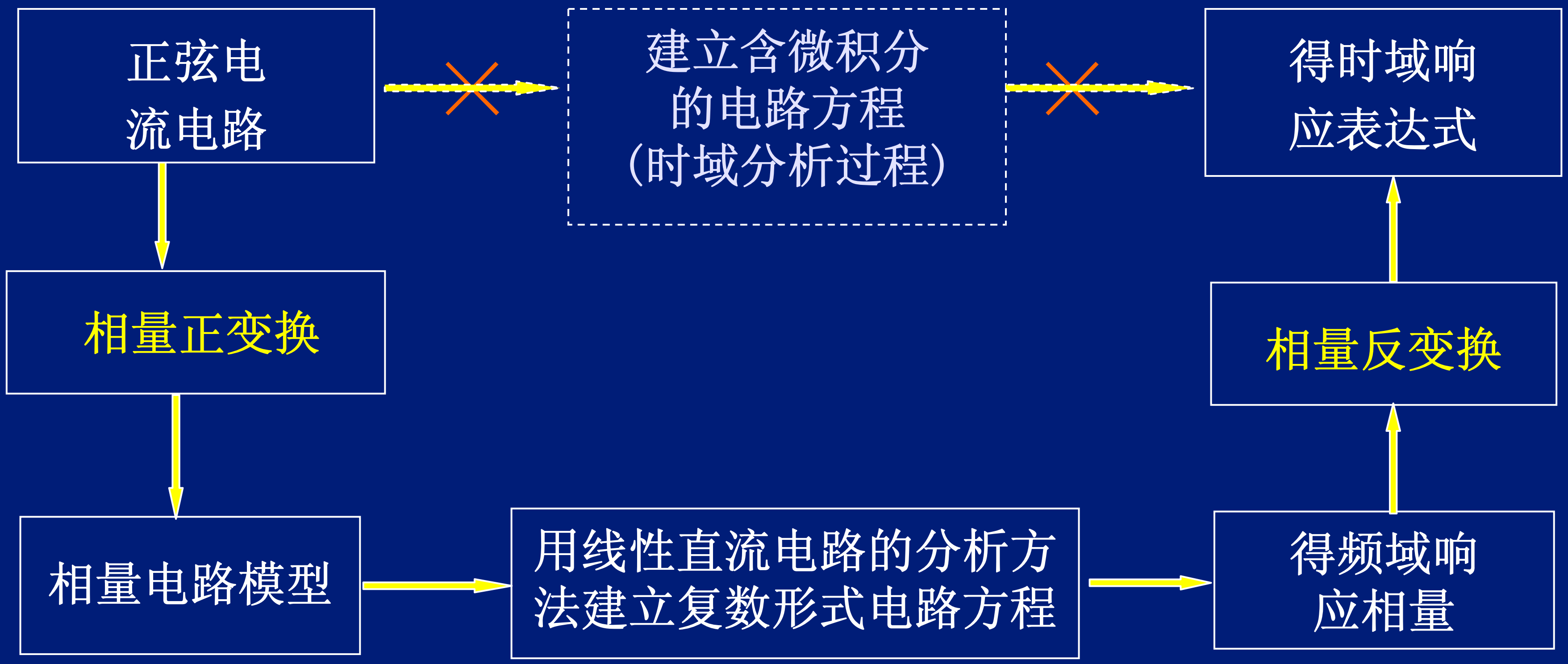
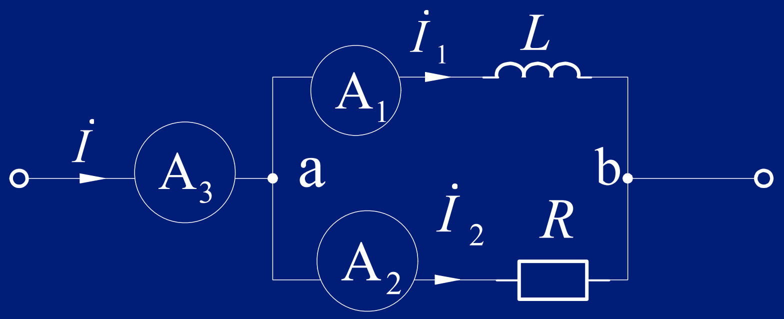


图6.20 正弦电流电路相量分析法过程示意图

[补充6.6] 已知 (A_2) 的读数是5A，ωL 和 R 数值相等，求 (A_1) 和 (A_3) 的读数。



所以 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -\mathrm{j}5 + 5 = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ\ \mathrm{A}$

即 (A_1) 读数为5A，(A_3) 读数为 $5\sqrt{2}\ \mathrm{A}$

[解] 取 $\dot{U}_{ab} = U_{ab}\angle 0^\circ$

$$\frac{U_{ab}}{R} = \frac{U_{ab}}{\omega L} = 5\mathrm{A}$$

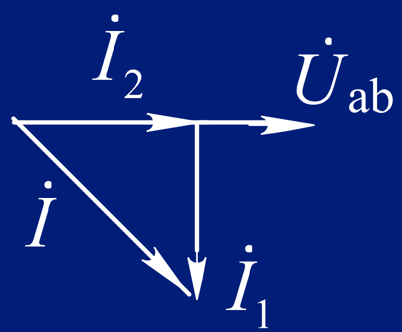
所以 $I_1 = I_2 = 5\mathrm{A}$

L 上电流滞后电压 90°，即

$$\dot{I}_1 = 5\angle -90^\circ\ \mathrm{A}$$

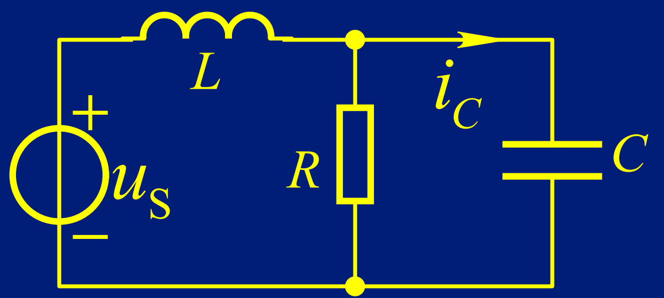
注意：电流表读数均为有效值，有效值不满足KCL方程，而电流相量是满足KCL方程的。

各电压、电流相量图如下

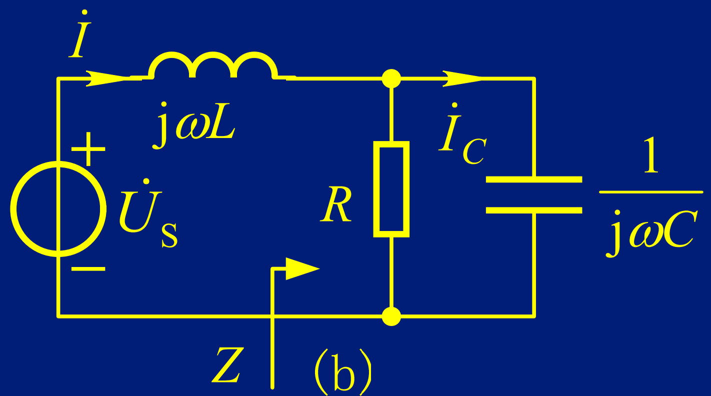


例题 6.9

设图 (a)电路中 $u_S = 60\sqrt{2}\cos(\omega t + 45^\circ)\text{V}$ ，$\omega = 100\text{rad/s}$ ，$R = 10\Omega$ ，$L = 0.1\text{H}$ ，$C = 10^{-3}\text{F}$ 求电流 i_C 。



(a)



(b)

解 将图(a)中时域电路模型变换为相量模型，如图(b)所示，

其中 $\dot{U}_S = 60\angle 45^\circ \text{V}$

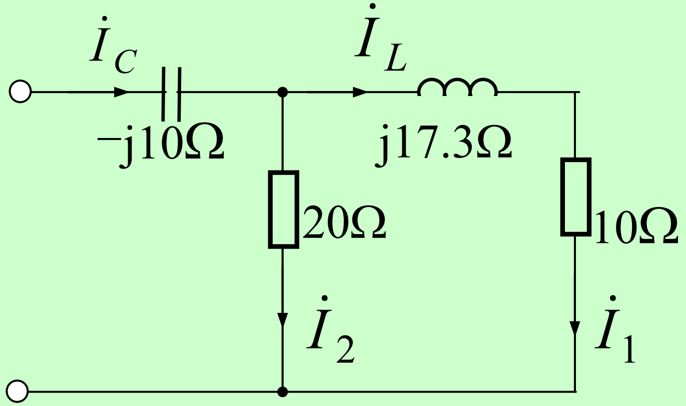
$$Z = R // \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{R \times \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = 5(1-\mathrm{j})\Omega$$

总电流 $\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z + \mathrm{j}\omega L} = \frac{60\angle 45^\circ \text{V}}{[5(1-\mathrm{j}) + \mathrm{j}10]\Omega} = 6\sqrt{2}\ \text{A}$

$$\dot{I}_C = \frac{R}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \times \dot{I} = \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC} \times \dot{I} = 6\angle 45^\circ \text{A}$$

对应时域 $i_C = 6\sqrt{2}\cos(100t + 45^\circ)\text{A}$

[补充6.7] 在图示电路中，各元件电压、电流取关联参考方向。设 $\dot{I}_1 = 1\angle 0^\circ$ A，写出各元件电压、电流相量。



题图

[解] R： $\dot{I}_R = \dot{I}_1 = 1\angle 0^\circ$ A, $\dot{U}_R = 10$V

L： $\dot{I}_L = \dot{I}_1 = 1\angle 0^\circ$ A, $\dot{U}_L = 17.3\angle 90^\circ$ V

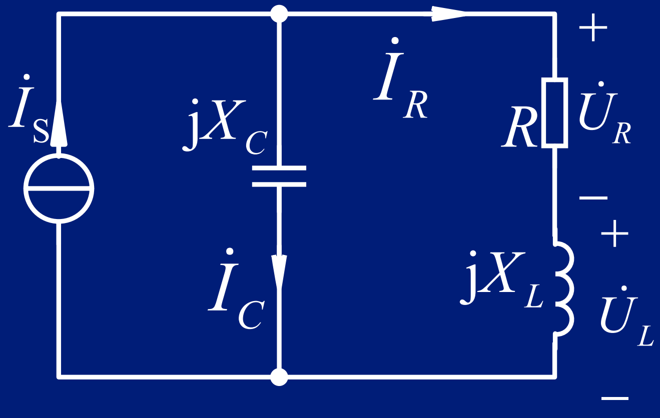
$$\dot{U}_2 = (10 + j17.3)\,\text{V}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / 20\Omega = 1\angle 60^\circ\ \text{A}$$

C： $\dot{I}_C = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1.732\angle 30^\circ$ A

$$\dot{U}_C = -j10\dot{I}_C = 17.32\angle -60^\circ\ \text{V}$$

[补充6.8] 已知图示电路中 $U_R = U_L = 10\text{V}$，$R = 10\Omega$，$X_C = -10\Omega$，求I_S.



[解]设 $\dot{U}_R = 10\angle 0^\circ \text{V}$，则$\dot{U}_L = 10\angle 90^\circ \text{V}$

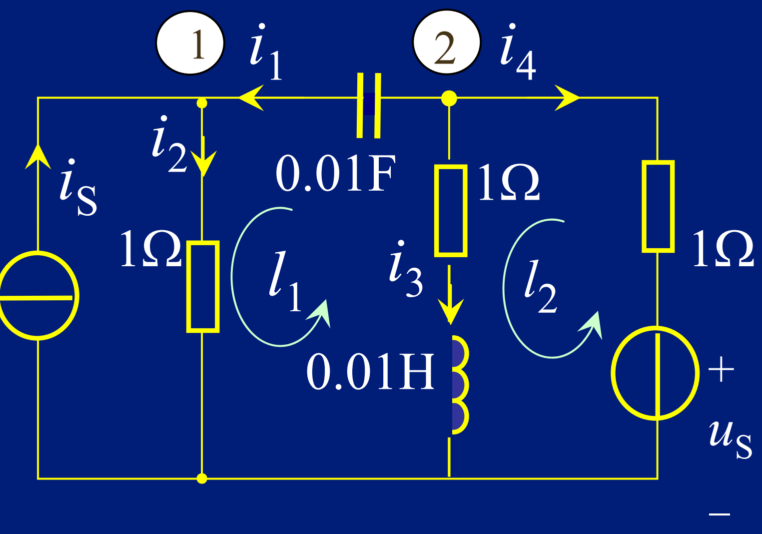
$$\dot{I}_R = \dot{U}_R / R = 1\angle 0^\circ \text{A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_R + \dot{U}_L}{\mathrm{j}X_C} = \frac{10 + \mathrm{j}10}{-\mathrm{j}10} = (-1 + \mathrm{j})\ \text{A}$$

$$\dot{I}_S = \dot{I}_R + \dot{I}_C = 1\angle 0^\circ - 1 + \mathrm{j} = \mathrm{j} = 1\angle 90^\circ \text{A}$$

$$I_S = 1\,\text{A}$$

[补充6.9] 下图所示电路中，$u_S = 4\cos\omega t\,\mathrm{V}$，$i_S = 4\cos\omega t\,\mathrm{A}$，$\omega$=100rad/s。试用支路电流法求电流 i_1。



(a)

[解] 对节点列KCL方程

$$n_1: -\dot I_1 + \dot I_2 - \dot I_S = 0$$

$$n_2: \dot I_1 + \dot I_3 + \dot I_4 = 0$$

回路KVL方程

$$l_1: \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot I_1 + R_2\dot I_2 - (R_3 + \mathrm{j}\omega L)\dot I_3 = 0$$

$$l_2: (R_3 + \mathrm{j}\omega L)\dot I_3 - R_4\dot I_4 = \dot U_S$$

代入 $\dot U_S = 2\sqrt{2}\angle 0^\circ\,\mathrm{V}, \dot I_S = 2\sqrt{2}\angle 0^\circ\,\mathrm{A}$

解得 $\dot I_1 = -1/\sqrt{2}\,\mathrm{A}$, $i_1 = \cos(\omega t + 180^\circ)\mathrm{A}$

[补充6.10]已知图示电路中 g =1S，$u_S = 10\sqrt{2}\sin\omega t$V， $i_S = 10\sqrt{2}\cos\omega t$A ω =1rad/s。求受控电流源的电压 u_{12}。

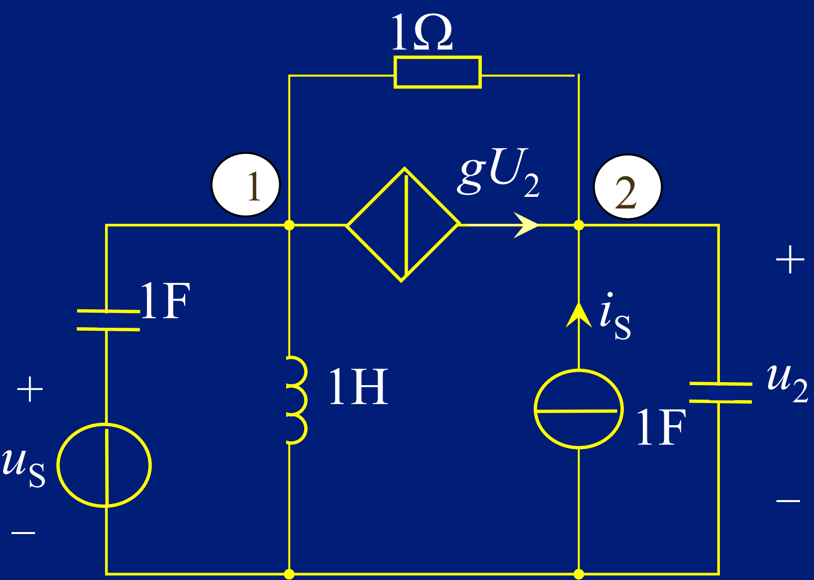


图 题

[解] $\dot{U}_S = 10\angle -90^\circ$ V， $\dot{I}_S = 10\angle 0^\circ$ A

列写节点电压方程：

$$\begin{cases} n_1: \left(j\omega C_1 + \dfrac{1}{j\omega L} + \dfrac{1}{R} \right)\dot{U}_{n_1} - \dfrac{1}{R}\dot{U}_{n_2} = j\omega C_1 \dot{U}_S - g\dot{U}_2 \\ n_2: -\dfrac{1}{R}\dot{U}_{n_1} + \left(j\omega C_2 + \dfrac{1}{R} \right)\dot{U}_{n_2} = \dot{I}_S + g\dot{U}_2 \end{cases}$$

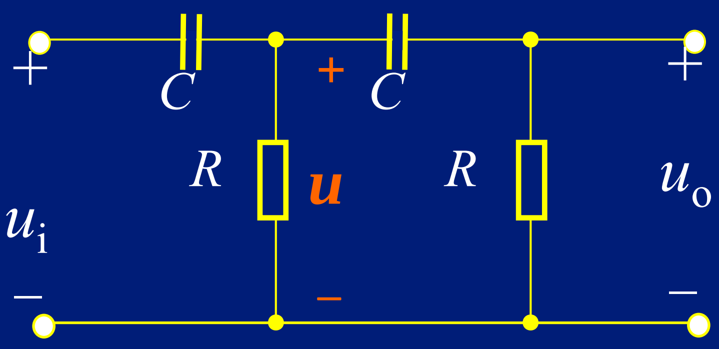
$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{n2}$$

解得 $\dot{U}_{n1} = 10$V $\dot{U}_{n2} = -$j20V

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_{n_1} - \dot{U}_{n_2} = (10 + \text{j}20)\text{V} = 22.36\angle 63.43^\circ \text{ V}$$

$$u_{12} = 22.36\sqrt{2}\cos\left(\omega t + 63.43^\circ\right)\text{V}$$

[补充6.11] 在图示 ***RC*** 移相电路中设 $R=1/(\omega C)$ ，试求输出电压$\boldsymbol{u}_o$和输入电压$\boldsymbol{u}_i$的相位差。



题 图

$$\frac{\dot U}{\dot U_i}=\frac{\dfrac{R(R+1/j\omega C)}{R+R+1/j\omega C}}{1/j\omega C+\dfrac{R(R+1/j\omega C)}{R+R+1/j\omega C}}=\frac{1}{3}(1+j)$$

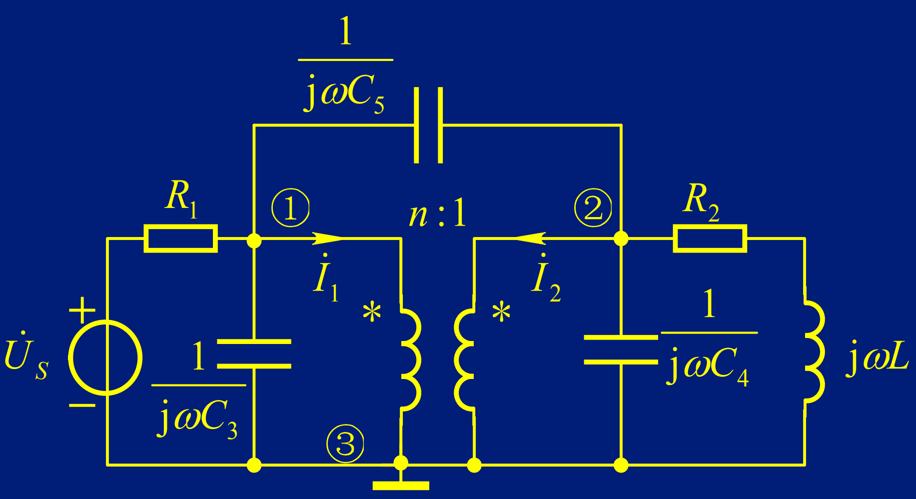
[解] $$\frac{\dot U_o}{\dot U}=\frac{R}{R+1/j\omega C}=\frac{R}{R-jR}=\frac{1}{1-j}$$

$$\frac{\dot U_o}{\dot U_i}=\frac{\dot U_o}{\dot U}\times\frac{\dot U}{\dot U_i}=\frac{1}{1-j}\times\frac{1+j}{3}=\frac{1}{3}j$$

$\boldsymbol{u}_0$越前于 $\boldsymbol{u}_i$ 的相位差为 90°

例题 6.12

列写图示电路的改进节点电压方程。



解 分析：取节点③为参考点时节点①和②的节点电压也是理想变压器的端口电压。理想变压器是二端口元件，其端口电压、电流不服从欧姆定律，所以不能用自导纳和互导纳表示其参数。这时应采用改进节点电压法，即增加端口电流 $\dot I_1$ 、$\dot I_2$ 为变量。

$$(\frac{1}{R_1}+\mathrm{j}\omega C_3+\mathrm{j}\omega C_5)\dot U_1-\mathrm{j}\omega C_5\dot U_2+\dot I_1=\frac{\dot U_S}{R_1}\quad(1)$$

$$-\mathrm{j}\omega C_5\dot U_1+(\frac{1}{R_2+\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C_4+\mathrm{j}\omega C_5)\dot U_2+\dot I_2=0\quad(2)$$

$$\dot U_1=n\dot U_2\quad(3)$$

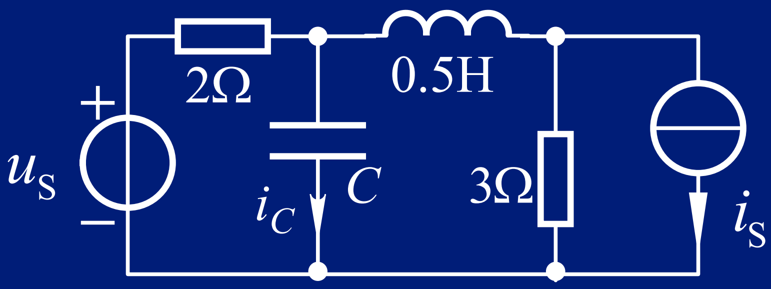
$$\dot I_1=(-1/n)\dot I_2\quad(4)$$

上述节点方程包含 $\dot I_1$、$\dot I_2$ 两个未知量，因此还要引用理想变压器本身的两个方程可解得。

方程**(1)~(4)**联立便可得解。

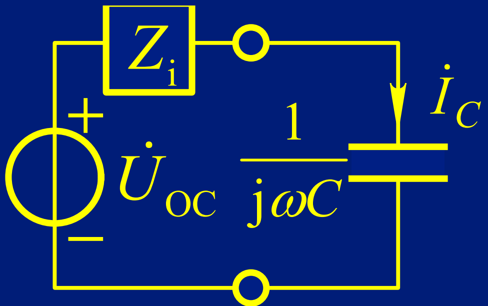
例题 6.13

图示电路中,C=0.05F 时， $i_C=5\sqrt{2}\cos(10t-60^\circ)\text{A}$ ，求当 C=0.25F 时， i_C = ？



(a)

解 对原电路做戴维南等效，如图（b）所示。



(b)

$$Z_i=\frac{2\times(3+j5)}{2+3+j5}\Omega=(1.6+j0.4)\Omega$$

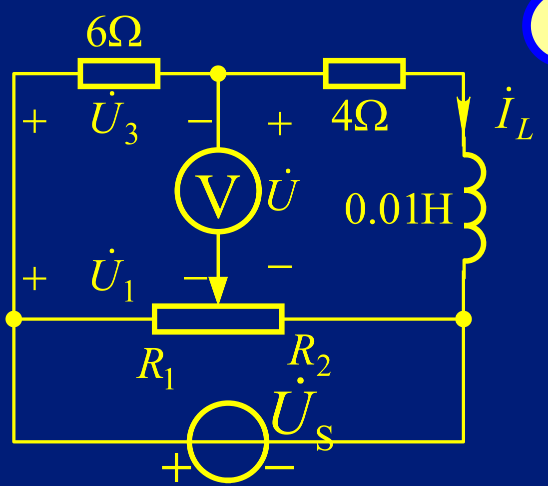
当$C=0.05$F时，$\dot{U}_{oc}=(Z_i+\frac{1}{j\omega C})\dot{I}_C=(Z_i-j2)\times 5\angle-60^\circ=8\sqrt{2}\angle-105^\circ\text{V}$

当$C=0.25$F时，$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_{oc}}{Z_i+1/j\omega C}=5\sqrt{2}\angle-105^\circ\text{ A}$

$$i_C=\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}\cos(10t-105^\circ)\text{A}=10\cos(10t-105^\circ)\text{A}$$

例题 6.14

图(a)所示电路，正弦电压源角频率为 ω=**1000rad/s**，电压表为理想的。求可变电阻比值$\boldsymbol{R_1/R_2}$为何值时，电压表的读数为最小？



(a)

解 理想电压表的阻抗为无穷大，R_1, R_2 为串联，设 $R_1/R_2=r$，R_1分得分压为

$$\dot{U}_1=\frac{R_1\dot{U}_S}{R_1+R_2}=\frac{r}{r+1}\dot{U}_S \quad (1)$$

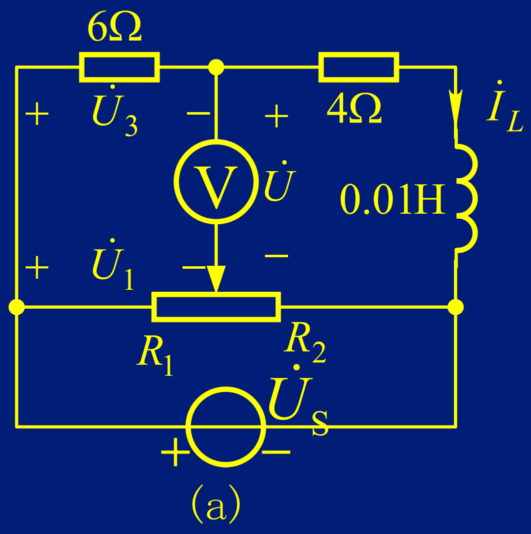
6Ω 电阻电压为 $\dot{U}_3=\dfrac{6\dot{U}_S}{(6+4)+j\omega L}=\dfrac{6\dot{U}_S}{10+j10} \quad (2)$

根据**KVL**，电压表两端电压表达式为

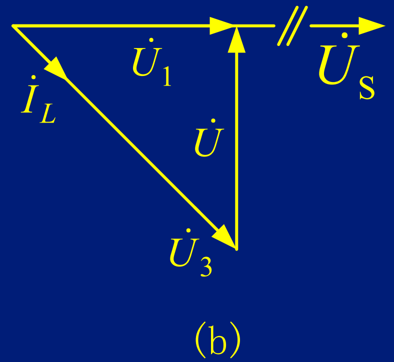
$$\dot{U}=-\dot{U}_3+\dot{U}_1=(\frac{r}{r+1}-0.3+j0.3)\dot{U}_S \quad (3)$$

因其虚部与 r 无关故当实部为零时，$\dot{U}$ 的模即电压表的读数便是最小。因此得

$$\frac{r}{r+1}-0.3=0 \quad 即 \quad r=\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{7}$$



(a)



(b)

通过做出相量图可进一步理解可变电阻改变时电压表读数的变化。设 $\dot{U}_S$ 为参考相量，由式**(1)**、**(2)**、**(3)**画出相量图如图**(b)**所示。

$$\dot{U}_1 = \frac{R_1\dot{U}_S}{R_1+R_2} = \frac{r}{r+1}\dot{U}_S \quad (1)$$

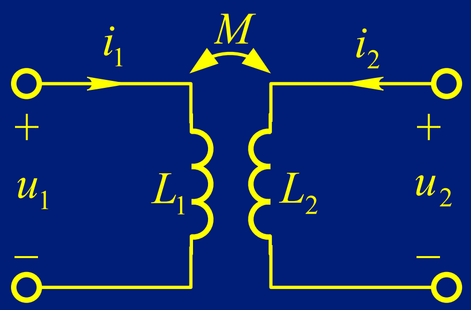
$$\dot{U}_3 = \frac{6\dot{U}_S}{(6+4)+j\omega L} = \frac{6\dot{U}_S}{10+j10} \quad (2)$$

$$\dot{U} = -\dot{U}_3 + \dot{U}_1 = (\frac{r}{r+1} - 0.3 + j0.3)\dot{U}_S \quad (3)$$

说明：由式**(1)**可知，当改变可变电阻时，$\dot{U}_1$的模发生变化而相位不变。再由相量图**(b)**可见，当$\dot{U}_1$ 变到与 $\dot{U}$ 正交即式**(3)**括号中的实部为零时，$\dot{U}$的长度即电压表的读数为最小。

基本要求：掌握互感元件方程的相量形式及其应用，会用支路电流法或回路电流法列写含互感电路的方程，掌握含互感电路的等效化简。

1. 互感元件的相量模型



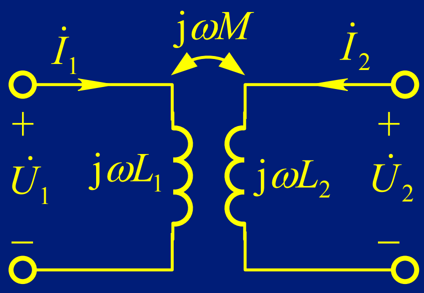


图6.21 互感元件的电路模型

微分方程

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= \pm M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\}$$

相量变换微分规则

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2 \end{aligned}\right\}$$

频域电路模型

说明：由于互感元件方程宜表达成电压是电流的函数，故对含互感的电路宜选用以电流为变量的分析方法，例如支路电流法和回路电流法。

2. 含互感元件电路方程的列写

例题 6.15

列出图6.22所示电路的方程。

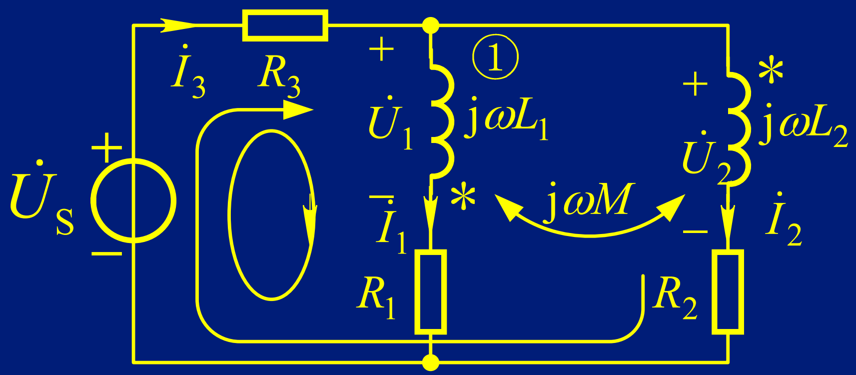


图6.22 例题 6.15

解 支路电流法。对节点①和回路(取左边的网孔和外回路)列写KCL和KVL方程如下

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \qquad (1)$$

$$R_1\dot{I}_1+\dot{U}_1+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_S \qquad (2)$$

$$R_2\dot{I}_2+\dot{U}_2+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_S \qquad (3)$$

式中 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 为互感端口电压，根据式

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1&=\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2\\ \dot{U}_2&=-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

代入(2)、(3)消去 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 得

$$(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_S \qquad (4)$$

$$-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+(R_2+\mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_S \qquad (5)$$

方程(1)、(4)、(5)联立便可得解。

例题 6.16

列出图6.23所示电路的回路电流方程。

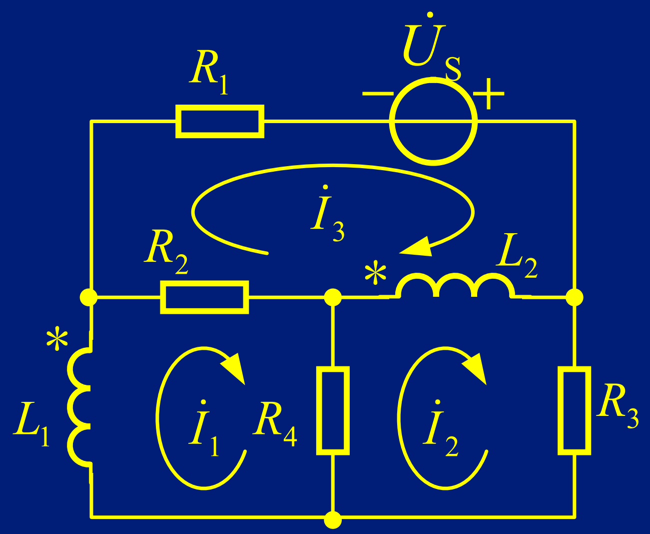


图6.23 例题 6.16

解 回路1 $(R_2+R_4+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1-(R_4+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_2-(R_2-\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_3=0 \quad (1)$

回路2 $-(R_4+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_1+(R_3+R_4+\mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2-\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_3=0$

回路3 $-(R_2-\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2+(R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_3=\dot{U}_S$

方程(1)中$-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$和$\mathrm{j}\omega M\dot{I}_3$分别为回路电流$\dot{I}_2$、$\dot{I}_3$通过互感在回路1中产生的电压。

[补充6.12] 设图示一端口网络中 $u_S = 200\sqrt{2}\cos\omega t\,\text{V}$, $\omega = 10^3$ **rad/s**，求其戴维南等效电路。

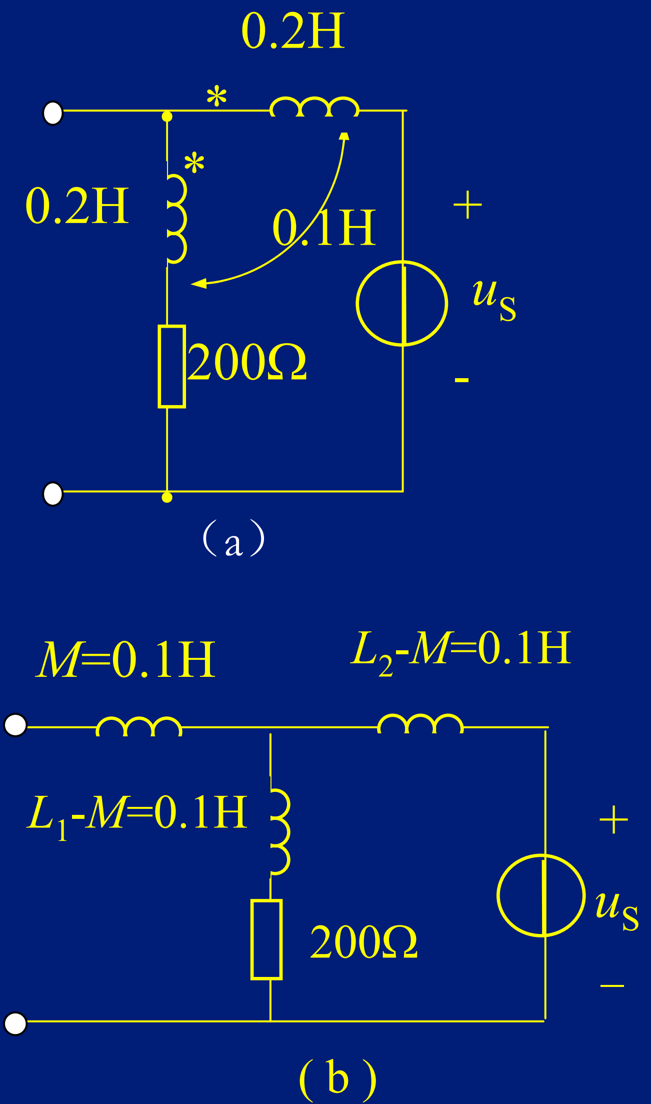


图6.24 补题 6.10

[解] 用消互感法，如图（b）所示

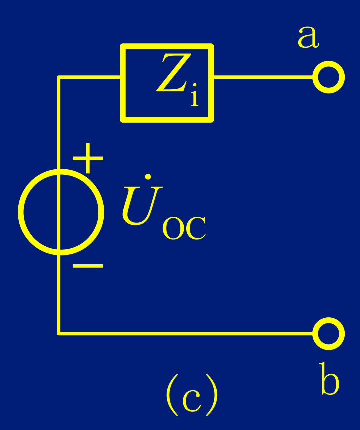
$$\dot{U}_{oc} = \frac{R + j\omega(L_1 - M)}{R + j\omega(L_1 - M) + j\omega(L_2 - M)}\dot{U}_S$$

$$= 25 + j175\,\text{V} = 176.77\angle 81.87^{\circ}\,\text{V}$$

$$Z_i = j\omega M + \frac{\left[R + j\omega(L_1 - M)\right] \times j\omega(L_2 - M)}{R + j\omega(L_1 - M) + j\omega(L_2 - M)}$$

$$= 150 - j50\Omega = 158.1\angle -18.43°\Omega$$

相量形式的戴维南等效电路如图(c)所示



3. 互感的阻抗变换作用

(1) 互感在电路中常用于传输和变换作用，其电路结构如图6.25 (a)所示，此时可将二次侧线圈所在的电路等效到一次恻。

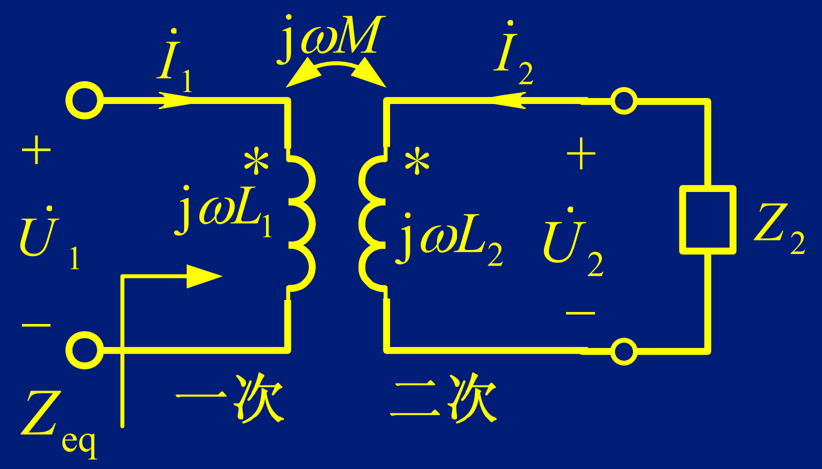


图6.25 (a)

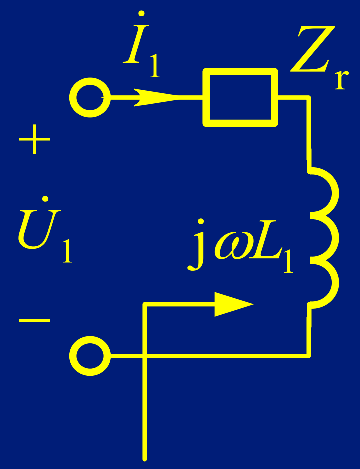
当从一次侧看进去时，相当于无源一端口网络，可用阻抗来等效。对互感一次侧和二次侧所在回路分别列写KVL方程得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 &= \dot{U}_1 \\ \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2 + Z_2\dot{I}_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

即求得从一次侧看进去的等效阻抗为

$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{(\omega M)^2}{Z_2+\mathrm{j}\omega L_2}+\mathrm{j}\omega L_1=Z_r+\mathrm{j}\omega L_1$$

等效电路如图6.25（b）所示



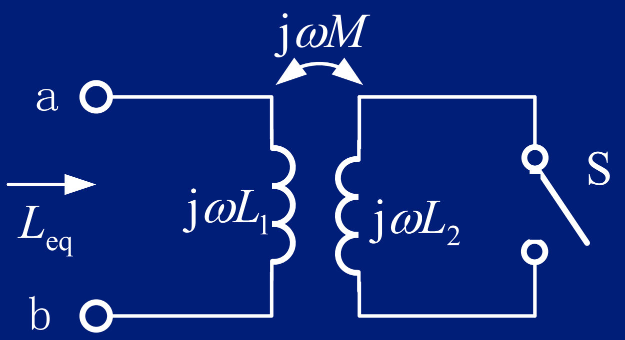
6. 25(b)

$$\text{其中}\, Z_r=\frac{(\omega M)^2}{Z_2+\mathrm{j}\omega L_2}=\frac{(\omega M)^2}{\text{二次侧回路总阻抗}}=R_r+\mathrm{j}X_r \quad (6.63)$$

表示二次侧回路阻抗对等效阻抗的影响，称为二次侧对一次侧的引入阻抗，其实部和虚部分别称为引入电阻和引入电抗。

例题 6.19

(应用一次侧等效电路) 下图所示为耦合系数测试电路。设开关S分别处于断开和接通位置时，用*LCR*表(一种测量二端电感、电容、电阻参数的仪器)测得ab端等效电感为L_{OC}=0.8H，L_{SC}=0.1H。试根据上述结果计算互感的耦合系数。



解 开关断开时，一次侧电感就是此时的等效电感，即

$$L_{OC} = L_1 \qquad (1)$$

当开关接通时，输入端口等效阻抗

$$Z_{eq} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2} = j\omega\left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2}\right) = j\omega L_{SC}$$

$$Z_{eq}=j\omega L_1+\frac{(\omega M)^2}{Z_2+j\omega L_2}=j\omega L_1+\frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2}=j\omega(\frac{L_1L_2-M^2}{L_2})=j\omega L_{SC}$$

得等效电感 $L_{SC}=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_2}$ (2)

$L_{OC}=L_1$ (1)

将 $M=k\sqrt{L_1L_2}$ 及式(1)代入式(2)得

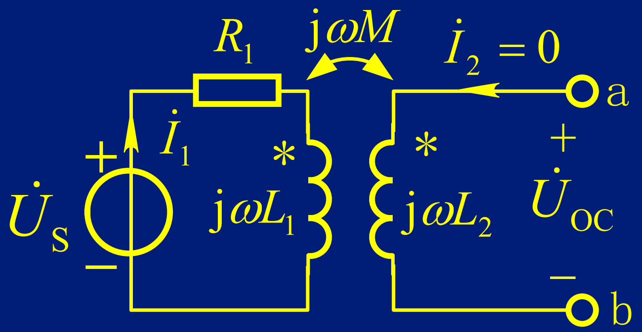
$$k=\sqrt{1-L_{SC}/L_{OC}}=\sqrt{1-0.1/0.8}\approx 0.935$$

---

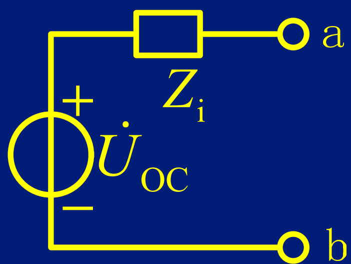
(2) 当互感线圈的一次侧接电源，则从二次侧看进去时相当于含独立源一端口网络，可用戴维南电路或诺顿电路来等效。

例题 6.20

求图 (a)电路的戴维南等效电路。



(a)



(b)

解 当二次侧开路时，端口方程简化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_S &= R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1\\ \dot{U}_{OC} &= j\omega M\dot{I}_1\end{aligned}\right\}$$

解得 $\dot{U}_{OC}=\dfrac{j\omega M}{R_1+j\omega L_1}\dot{U}_S$

计算戴维南等效阻抗，根据式(6.63)，于是

$$Z_i = Z_r' + j\omega L_2 = \frac{(\omega M)^2}{\text{一次侧回路总阻抗}} + j\omega L_2 = \frac{(\omega M)^2}{R_1+j\omega L_1} + j\omega L_2$$

等效戴维南电路如图（b）所示。

6.9 正弦电流电路的功率

基本要求：了解正弦电路瞬时功率的特点；透彻理解平均功率、无功功率、视在功率和功率因数的定义及其计算；熟练掌握*RLC* 元件功率的特点。

1. 瞬时功率

设图6. 26所示

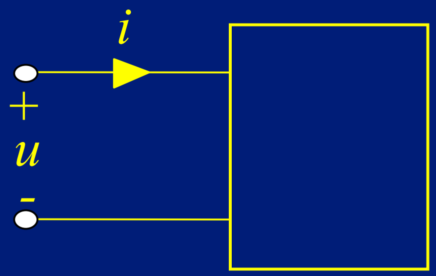


图6. 26 一端口网络

一端口网络的端口电压、电流分别为

$$u = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \psi_u)$$

$$i = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi_i)$$

则一端口网络输入的瞬时功率为

$$p = ui = 2UI\cos(\omega t + \psi_u)\cos(\omega t + \psi_i)$$

$$= UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega\, t + \psi_u + \psi_i)$$

$$p = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

①

②

$|\psi_u - \psi_i| \le 90^\circ$, $UI\cos(\psi_u - \psi_i) \ge 0$

反映一端口网络吸收电能

时间的正弦函数，反映一端口网络与外部电路交换能量。它在一个周期内的平均值等于零。

一端口网络吸收功率的平均值称为平均功率，通常所说交流电路的功率是指平均功率，定义为

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = UI\cos(\psi_u - \psi_i) = UI\lambda \qquad (6.67)$$

$\psi_u - \psi_i = \varphi$

功率因数角

功率因数

在一般情况下 $|\varphi| < 90^\circ$ 有 $0 \le \lambda \le 1$

2．R、L、C 各元件的功率（三种特殊情形）

(1)设一端口网络是一个电阻***R***，此时***u***与 ***i*** 同相，即$\psi_u - \psi_i = 0$ 则瞬时功率

$$p_R = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) = UI[1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]$$

电阻上***u***、***i*** 和***p***的波形如图6.27所示 (初相为零)。

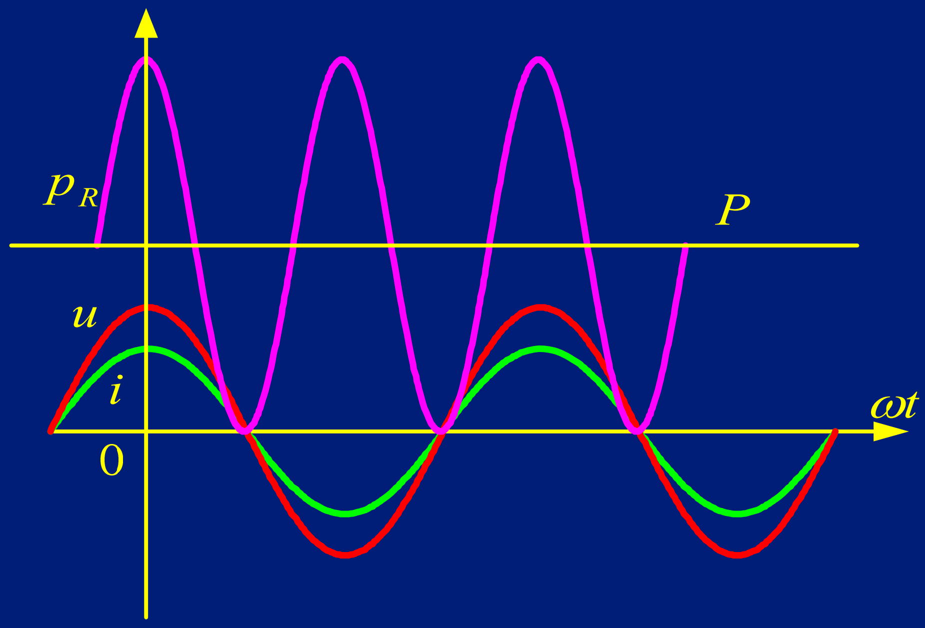


图6.27 电阻上***u***、***i*** 和***p***的波形

① $p_R > 0$正值电阻总是吸收功率，***u*** 与***i***真实方向相同。

② 电阻的平均功率为

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = P_R = \frac{1}{T}\int_0^T UI[1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]\mathrm{d}t = UI = RI^2 = GU^2$$

纯电阻 $P = UI\cos 0^\circ = UI$ 即 $\lambda = 1$

(2)设一端口网络是一个电感L，此时电压 u 比电流 i 越前90°,即

$$\psi_u - \psi_i = 90^\circ$$

瞬时功率 $$p_L = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$
$$= UI\cos 90^\circ + UI\cos\left(2\omega t + 2\psi_i + 90^\circ\right)$$
$$= -UI\sin 2(\omega t + \psi_i)$$

电感上u、i和 p_L的波形如图6.28所示。

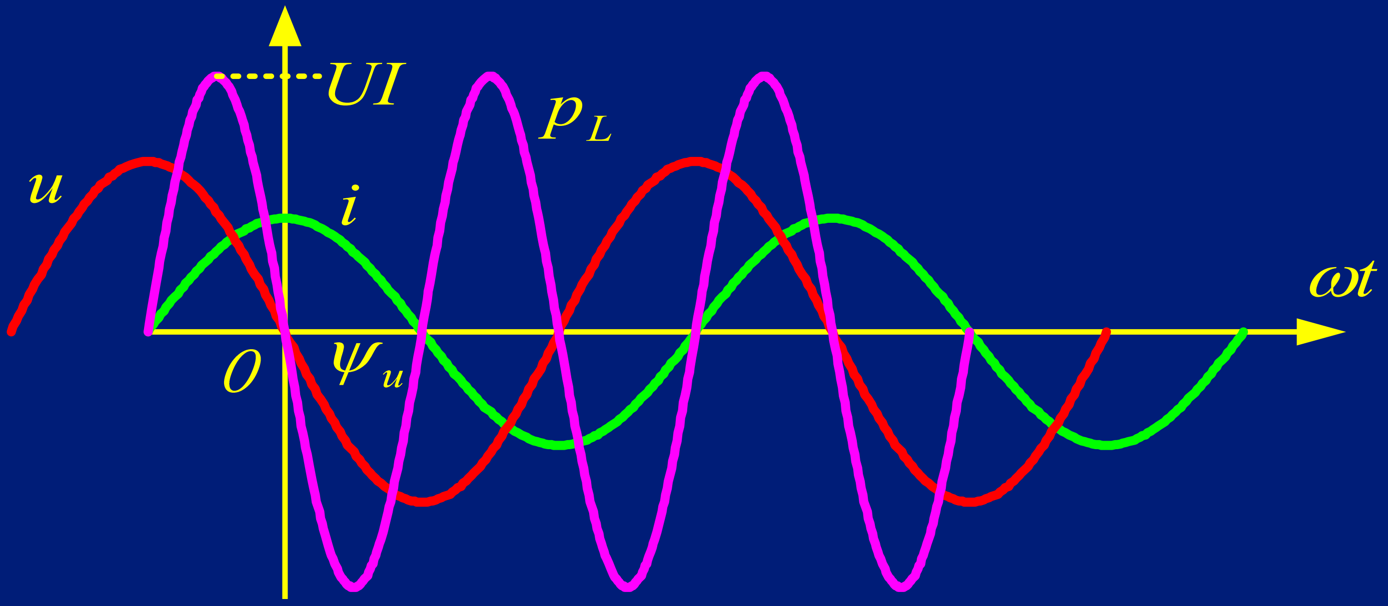


图6.28 电感上u 、i 和P_L的波形

说明：

① 电感吸收瞬时功率是时间的正弦函数，其角频率为 2ω 。

② 因为电感存储磁场能量 $w_L = Li^2/2$ ，

所以$|\,i\,|$增大时，电感吸收功率，$p_L > 0$ ；

$|\,i\,|$减小时，电感发出功率，$p_L < 0$ ；

$|\,i\,|$不变时，电感不消耗功率，$p_L = 0$ ；

③ p_L在一个周期内的平均值等于零，即它输入的平均功率为零，表明在一个周期内电感吸收与释放的能量相等，是无损元件。

(3)设一端口网络是一个电容，此时端口电压**u**比电流***i*** 滞后 90°，

$\psi_u - \psi_i = -90^{\circ}$ 。

$$p_L = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega\, t + \psi_u + \psi_i)$$

$$= UI\cos(-90^{\circ}) + UI\cos\left(2\omega t + 2\psi_i - 90^{\circ}\right)$$

$$= UI\sin 2(\omega\, t + \psi_i)$$

说明：

① 电容吸收瞬时功率是时间的正弦函数，其角频率为 2ω 。

② 因为电容存储电场能量 $w_C = Cu^2/2$ 。

所以$|\boldsymbol{u}|$增大时，$p_c > 0$ 电容吸收功率；

$|\boldsymbol{u}|$减小时，$p_C < 0$ 电容发出功率；

$|\boldsymbol{u}|$不变时，$p_C = 0$ 电容不消耗功率。

结论：在正弦电流电路中，同相位的电压与电流产生平均功率，且等于其有效值之积；而相位正交的电压与电流不产生平均功率。

3. 无功功率和视在功率

由式(6.67)可知，一端口吸收的平均功率为 $P = UI\cos\varphi = UI_P$

$I_P = I\cos\varphi$

电流有功分量

感性一端口相量图如图6.29所示。

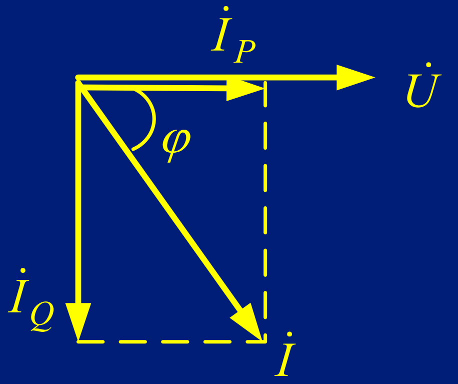


图6.29 感性一端口相量图

为表示电流的无功分量——$I\sin\varphi$

定义无功功率 $Q = UI\sin\varphi$

当阻抗为感性时，电压 u 越前于电流 i，$Q > 0$ 代表感性无功功率

当阻抗为容性时，电压 u 滞后于电流 i，$Q < 0$ 代表容性无功功率

电感和电容的无功功率分别为

$$Q_L = UI\sin 90^\circ = UI = I^2\omega L = I^2 X_L = U^2/(\omega L) = U^2 B_L \qquad (6.75)$$

$$Q_C = UI\sin(-90^\circ) = -UI = -I^2/(\omega C) = I^2 X_C = -U^2\omega C = U^2 B_C \qquad (6.76)$$

(**U**、**I** 为电感或电容的端口电压、电流有效值)

- 无功功率 $Q = UI\sin\varphi$

  有功功率 $P = UI\cos\varphi$

- 视在功率的定义 $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$

表示电气设备容量，
单位伏安（**V·A**）

有功功率、无功功率和视在功率三者的关系可通过一个功率三角形描述，如图6.30所示。

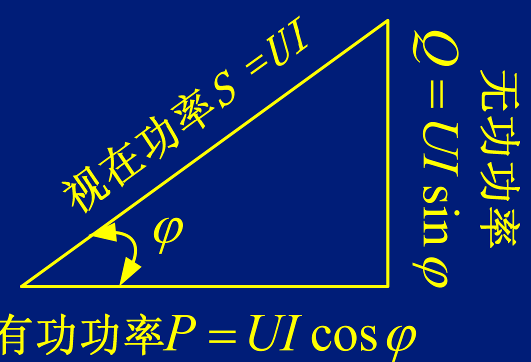
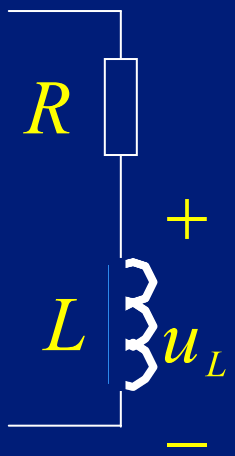


图6.30 功率三角形

例题 6.21

在工频条件下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为100V、5A和300W。求此线圈的电阻、电感和功率因数。



解

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{300\text{W}}{100\text{V}\times 5\text{A}} = 0.6$$

$$\varphi = \arccos 0.6 = 53.1^\circ$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{100\text{V}}{5\text{A}} = 20\Omega$$

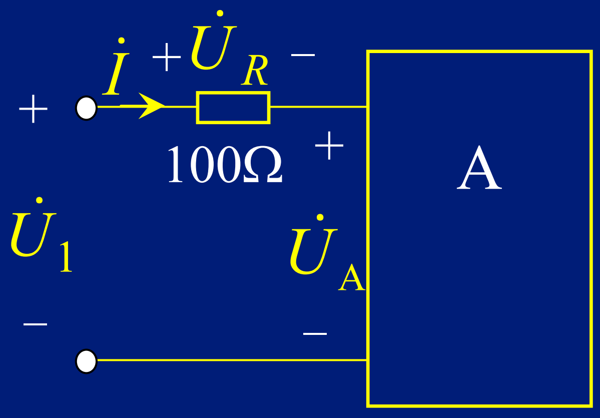
线圈电阻、感抗和电感分别为：

$$R = |Z|\cos\varphi = 20\Omega\times 0.6 = 12\Omega$$

$$X_L = |Z|\sin\varphi = 20\Omega\times 0.8 = 16\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{16\Omega}{2\pi\times 50\text{s}^{-1}} = 51\text{mH}$$

[补充6.13] 图示正弦稳态电路，已知 $U_1=U_R=100$V，$\dot{U}_R$ 滞后于 $\dot{U}_1$ 的相角为60°，求一端口网络 A 吸收的平均功率。



补题 6.11

[解]　设 $\dot{U}_1=100\angle 0^\circ$ V，

则 $\dot{U}_R=100\angle -60^\circ$ V

$$\dot{I}=\dot{U}_R/100\Omega=1\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_A=\dot{U}_1-\dot{U}_R=100\angle 60^\circ \text{ V}$$

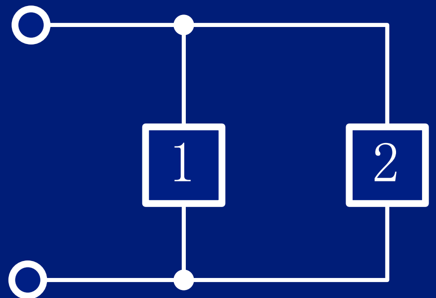
网络A吸收的功率

$$P_A=U_A I\cos[60^\circ-(-60^\circ)]=-50\text{W}$$

[补充6.14]]已知图示电路中负载1和2的平均功率、功率因数分别为

$P_1 = 80\text{W}, \lambda_1 = 0.8$ (感性)和 $P_2 = 30\text{W}, \lambda_2 = 0.6$ (容性)。

试求各负载的无功功率、视在功率以及两并联负载的总平均功率、无功功率、视在功率和功率因数。



[解] 负载1和2的功率因数角分别为

$$\varphi_1 = \arccos\lambda_1 = 36.86^\circ, \varphi_2 = \arccos\lambda_2 = -53.13^\circ$$

负载1、2的视在功率和无功功率分别为

$$S_1 = P_1/\lambda_1 = 80\,\text{W}/0.8 = 100\,\text{VA}，\quad Q_1 = S_1\sin\varphi_1 = 60\,\text{var}$$

$$S_2 = P_2/\lambda_2 = 30\,\text{W}/0.6 = 50\,\text{VA}，\quad Q_2 = S_2\sin\varphi_2 = -40\,\text{var}$$

平均功率和无功功率分别守恒，

两并联负载的总平均功率 $P = P_1 + P_2 = 110\text{W}$

无功功率 $Q = Q_1 + Q_2 = 20\,\text{var}$

视在功率 $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 111.8\text{VA}$

功率因数 $\lambda = P/S = 0.98$

功率因数的提高

如图6.31(a)所示电路

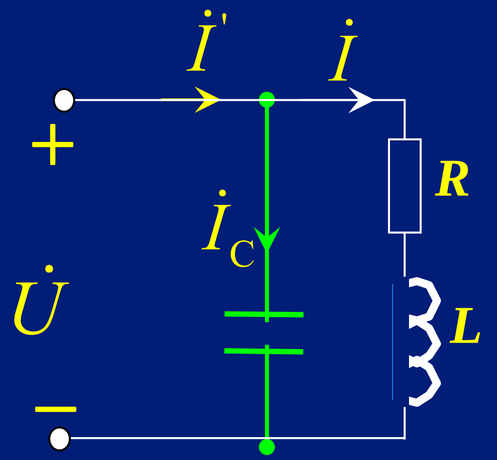


图6.31(a)

提高功率因数的意义：

① 通过减少线路电流来减小线路损耗；
② 提高发电设备利用率。

原理：利用电场能量与磁场能量的相互转换，或者说利用容性无功与感性无功的相互补偿，来减少电源输出电流的无功分量，从而减小电源的无功功率。

原则：确保负载正常工作。

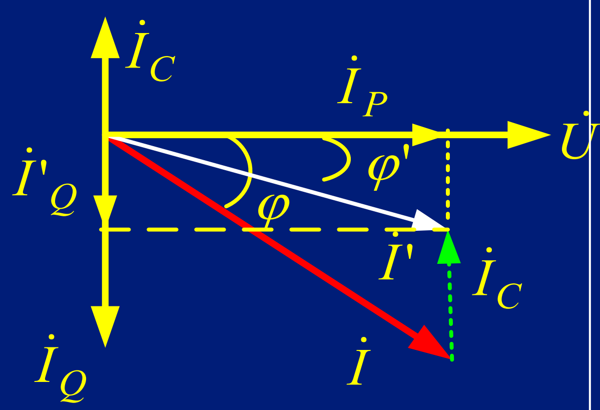


图6. 31(b)

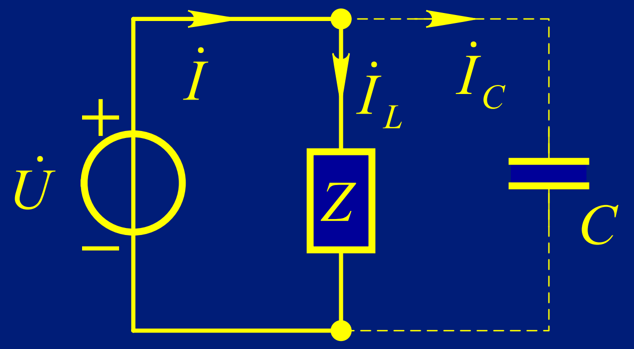
说明：图中电流 $\dot{I}$ 仍表示原来感性负载的电流，$\dot{I}_C$ 是比电压 $\dot{U}$ 超前 $90°$ 的电容电流。此时一端口所需电流为 $\dot{I}'=\dot{I}+\dot{I}_C$，滞后 $\dot{U}$ 的相位差为 φ' 且 $\varphi'<\varphi$。可见，由于在感性负载上并联电容，使得一端口的功率因数由原来的 $\cos\varphi$ 提高到 $\cos\varphi'$，其实际效果是使一端口电流从原来的 I 减小到 I'。

例题 6.22

下图所示电路，感性负载Z接于220V、50Hz正弦电源上，负载的平均功率和功率因数分别为2200W和0.8。

(1) 求并联电容前电源电流、无功功率和视在功率。

(2) 并联电容，将功率因数提高到0.95，求电容大小、并联后电源电流、无功功率和视在功率。



负载功率因数角

$$\varphi = \arccos 0.8 \approx 36.9^\circ$$

电源无功功率等于负载无功功率

$$Q = Q_L = P\tan\varphi = 1650\,\text{var}$$

电源视在功率

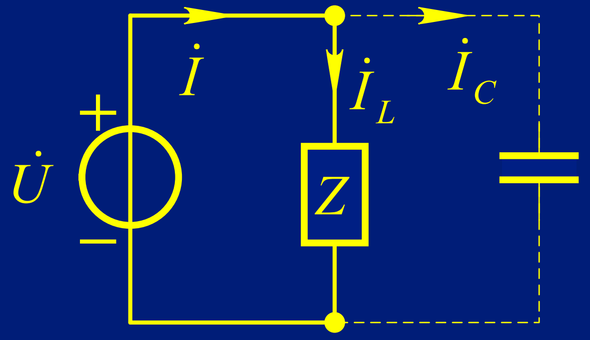
$$S = UI_L = 220\text{V} \times 12.5\,\text{A} = 2750\,\text{V}\cdot\text{A}$$

解 (1) 并联电容前电源电流等于负载电流

$$I = I_L = \frac{P}{U\lambda} = \frac{2200\text{W}}{220\text{V} \times 0.8} = 12.5\text{A}$$

(2) 并联电容后功率因数角

$$\varphi' = \arccos 0.95 \approx 18.2^\circ$$



有功功率不变，无功功率为

$$Q' = P\tan\varphi' \approx 723.11\,\text{var}$$

电源无功功率的差值等于电容上的无功功率

$$Q_C = Q' - Q \approx -926.83\,\text{var}$$

故并联电容为

$$C = -\frac{Q_C}{\omega U^2} = \frac{926.83\,\text{var}}{(100\pi)\text{s}^{-1} \times (220\text{V})^2} \approx 63.32\mu\text{F}$$

并联电容后的电源视在功率

$$S' = \sqrt{P^2 + Q'^2} \approx 2387.26\,\text{V}\cdot\text{A}$$

电源电流 $I' = S'/U \approx 10.85\,\text{A}$ $\quad I' = \dfrac{P}{U\lambda'}$

6.10 复 功 率

基本要求:掌握复功率定义,及其与平均功率、无功功率和视在功率的关系.

设一端口网络的端口　　　　分别用相量表示

电压 $\boldsymbol{u}$ $=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u)$　　　　$\dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}$

电流 $\boldsymbol{i}$ $=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$　　　　$\dot{I}=I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_i}$

复功率： $\tilde{S}=P+\mathrm{j}Q=UI\cos\varphi+\mathrm{j}UI\sin\varphi$

$$=UI\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=UI\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_u-\psi_i)}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}\cdot I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_i}=\dot{U}\overset{*}{I}$$

平均功率　　无功功率

视在功率　　阻抗角

即：复功率等于电压相量与电流相量共轭复相量的乘积。
复功率是直接利用电压和电流相量计算的功率。

$$\left|\tilde{S}\right|=\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{[UI\cos\varphi]^2+[UI\sin\varphi]^2}=UI=S$$

$$\arctan\tilde{S}=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\frac{UI\sin\varphi}{UI\cos\varphi}=\varphi$$

当计算某一阻抗$Z = R + \mathrm{j}X$ 所吸收的复功率时，将式$\dot{U} = Z\dot{I}$ 代入得

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = Z\dot{I}\overset{*}{I} = ZI^2 = RI^2 + \mathrm{j}XI^2 = P + \mathrm{j}Q$$

阻抗为感性时，$\mathrm{j}X$ 前为正号，$\tilde{S}$ 的虚部为正，表示感性无功功率

若为容性，$\mathrm{j}X$ 前为负号，$\tilde{S}$ 的虚部为负，表示容性无功功率

可以证明，任意复杂网络中复功率具有守恒性，即各支路发出的复功率代数和等于零：

$$\sum_{k=1}^{b}\dot{U}_k\overset{*}{I}_k = \sum_{k=1}^{b}P_k + \mathrm{j}\sum_{k=1}^{b}Q_k = 0$$

复功率具有守恒性

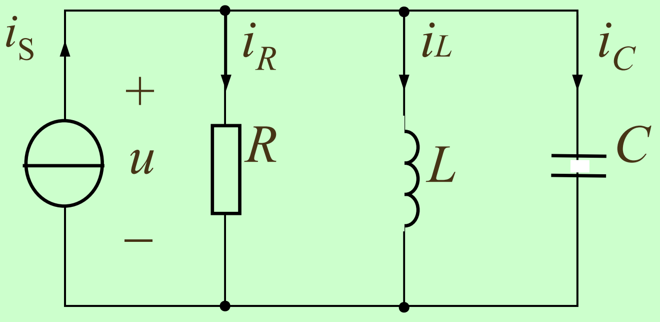
说明：其中实部代数和等于零表明：

各电源发出的平均功率之和等于各负载吸收的平均功率之和；

而虚部代数和等于零表明：

各电源 “发出” 的无功功率和等于各负载 “吸收”的无功功率和。

[补充6.15] 图示电路中I_R=8A，I_L=4A，I_S=10A，X_C=10Ω，求电流源提供的复功率及各负载吸收的复功率，并验证复功率守恒性。



补题 6.15

[解] 由$(I_L - I_C)^2 = I_S^2 - I_R^2$

$$I_L - I_C = \pm\sqrt{I_S^2 - I_R^2} = \pm 6\text{A},$$

得$I_C = 10\text{A}$, $I_C = -2\text{A}$(舍去)

$$U = X_C I_C = 100\,\text{V}$$

设$\dot{I}_S = 10\angle 0^\circ\,\text{A}$

则$\dot{I}_R = 8\angle 0^\circ\,\text{A}$，$\dot{I}_L = 4\angle -90^\circ\,\text{A}$，$\dot{I}_C = 10\angle 90^\circ\,\text{A}$

$$\dot{I}_S = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = (8 + \text{j}6)\text{A}$$

电流源发出复功率

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I}_S = (800 - \text{j}600)\,\text{V}\cdot\text{A}$$

R、L、C 分别吸收复功率

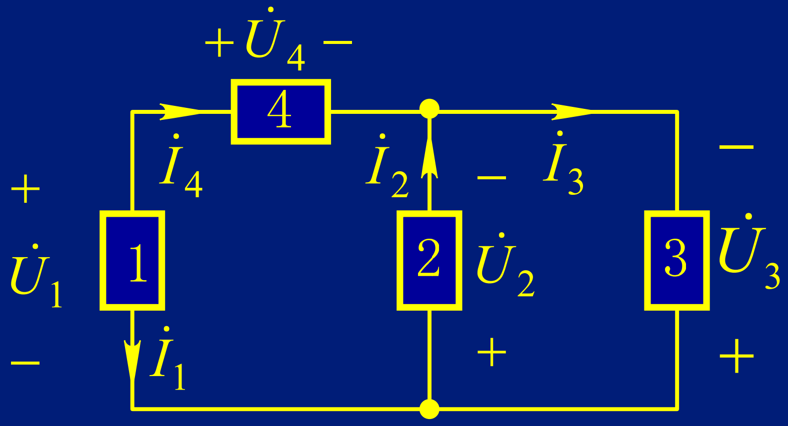
$$\tilde{S}_R = \dot{U}\overset{*}{I}_R = 800\,\text{V}\cdot\text{A}$$

$$\tilde{S}_L = \dot{U}\overset{*}{I}_L = \text{j}400\,\text{V}\cdot\text{A}$$

$$\tilde{S}_C = \dot{U}\overset{*}{I}_C = -\text{j}1000\,\text{V}\cdot\text{A}$$

例题 6.23

图中 $\dot{U}_1=(1+\mathrm{j})\mathrm{V},\ \dot{U}_2=-\mathrm{j}2\mathrm{V},\ \dot{I}_3=(1-\mathrm{j})\mathrm{A},\ \dot{I}_4=(1+\mathrm{j})\mathrm{A}$ ，求各元件功率，并判断其类型



解

$\dot{U}_3=\dot{U}_2=-\mathrm{j}2\ \ (\mathrm{V})$

$\dot{U}_4=\dot{U}_1+\dot{U}_2=1-\mathrm{j}(\mathrm{V})$

$\dot{I}_1=-\dot{I}_4=-1-\mathrm{j}(\mathrm{A})$

$\dot{I}_2=\dot{I}_3-\dot{I}_4=-\mathrm{j}2(\mathrm{A})$

各元件吸收功率

元件1: $\tilde{S}_1=\dot{U}_1\overset{*}{I}_1=$

$(1+\mathrm{j})(-1+\mathrm{j})=-2\mathrm{W}$ 电源

元件2: $\tilde{S}_2=\dot{U}_2\overset{*}{I}_2=$

$-\mathrm{j}2\times\mathrm{j}2=4\mathrm{W}$ 电阻

元件3: $\tilde{S}_3=-\dot{U}_3\overset{*}{I}_3=$

$-(-\mathrm{j}2)\times(1+\mathrm{j})=(-2+\mathrm{j}2)\,\mathrm{var}$

电源

元件4: $\tilde{S}_4=\dot{U}_4\overset{*}{I}_4=$

$(1-\mathrm{j})\times(1+\mathrm{j})=-\mathrm{j}2\,\mathrm{var}$ 电容

可见 $\sum_{k=1}^{4}\tilde{S}_k=\sum_{k=1}^{4}\dot{U}_k\overset{*}{I}_k=0$

基本要求：掌握最大功率传输的概念、最大功率传输定理的条件与结论.

(1) 如图6.32所示

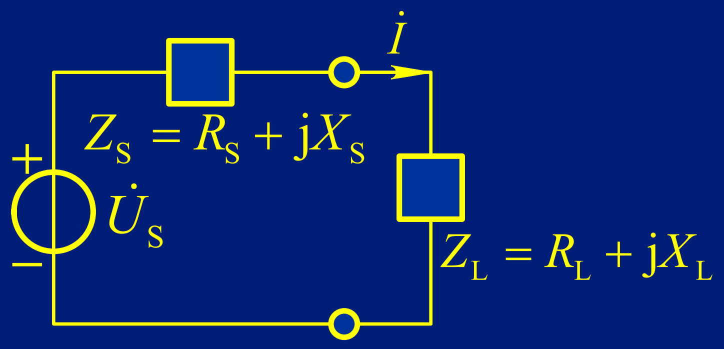


图6.32 讨论传输最大功率的电路

电压源 $\dot{U}_S$，内阻抗 $Z_S = R_S + jX_S$,负载阻抗 $Z_L = R_L + jX_L$ 的实部 R_L 大于零，且 R_L 与 X_L 可随意改变，负载阻抗 Z_L 从给定电源获得最大功率的条件是

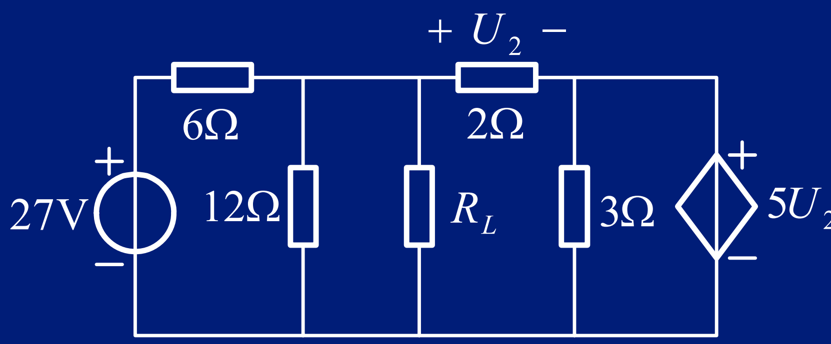
$$Z_L = R_L + jX_L = R_S - jX_S = \overset{*}{Z}_S$$

最大功率传输定理：负载阻抗等于电源内阻抗的共轭复数时(称为共轭匹配)，负载获得最大功率，此时最大功率为：

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2}{4R_L}$$

注： 当负载获得最大功率时, 电源内阻和负载电阻消耗的功率相等，电能的利用率只有50% .

[补充6.16] 图示电路，求电阻R_L为何值时它可以获得最大功率？并求此最大功率P_{max}



[解] 先求负载R_L右端等效电阻

$$R_{in}=\frac{U}{I}=\frac{U_2+5U_2}{U_2/2}=12\Omega$$

当负载R_L开路时,其电压为

$$U_{oc}=\frac{12\,||\,12}{12\,||\,12+6}\times 27=13.5\text{V}$$

当电压源短路时, 从负载 R_L两端看进去的戴维南等效电阻为

$$R_i=(6\,||\,12)\,||\,12=4\,||\,12=3\Omega$$

R_L可以获得最大功率条件 $R_L=R_i=3\Omega$

最大功率为 $P_{max}=\dfrac{U_{oc}^2}{4R_i}=\dfrac{13.5^2}{4\times 3}=15.1875\ \ \text{W}$

(2) 当负载阻抗 $Z_L = |Z_L| e^{j\varphi_L}$ 的模 $|Z_L|$ 可以改变，而阻抗角 φ_L 不能改变时，负载从给定电源获得最大功率的条件是

负载阻抗模与电源内阻抗模相等。

即 $|Z_L| = |Z_S|$

获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2 \cos\varphi_L}{2|Z_S|[1+\cos(\varphi_S - \varphi_L)]}$$

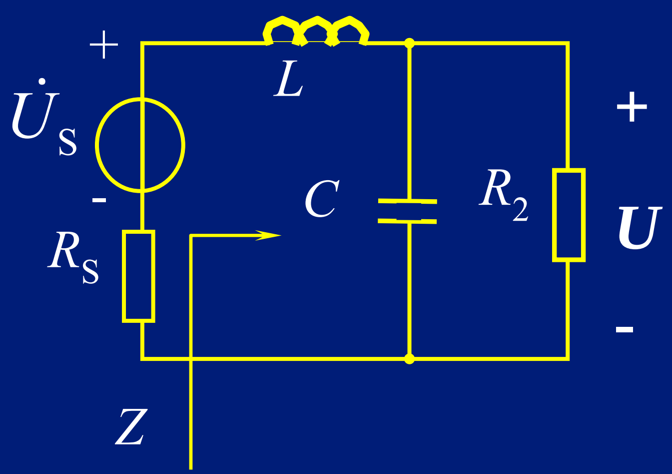
例如，当电源内阻抗为 $Z_S = R_S + jX_S$ 时，

纯电阻负载获得最大功率的条件是 $R_L = |Z_S|$；

如果电源内阻抗也是纯电阻，即 $Z_S = R_S$

电阻负载获得最大功率的条件则是 $R_L = R_S$

[补充6.17]图示电路中电源频率 $f=3.18\times10^4$ kHz，U_S=1V，内阻R_S=125Ω，负载电阻R_2=200Ω。为使 R_2 获得最大功率，L 和 C 应为多少？求出此最大功率。



[解]

$$Z=\mathrm{j}\omega L+\frac{R_2/\mathrm{j}\omega C}{R_2+1/\mathrm{j}\omega C}$$

$$=\frac{R_2}{1+(\omega R_2C)^2}+\mathrm{j}\left[\omega L-\frac{\omega R_2{}^2C}{1+(\omega R_2C)^2}\right]$$

当 $\overset{*}{Z}=R_S$，

即 $\dfrac{R_2}{1+(\omega R_2C)^2}=R_S$， $\omega L-\dfrac{\omega R_2{}^2C}{1+(\omega R_2C)^2}=0$ 时

R_2可获得最大功率，此时可解得

$$C=\frac{\sqrt{R_2/R_S-1}}{\omega R_2}=0.0194\mu\text{F}$$

$$L=R_2R_SC=0.485\text{mH}$$

$$\text{此时 }\dot{U}=\frac{\dfrac{R_2/\mathrm{j}\omega C}{R_2+1/\mathrm{j}\omega C}}{R_S+\mathrm{j}\omega L+\dfrac{R_2/\mathrm{j}\omega C}{R_2+1/\mathrm{j}\omega C}}\times\dot{U}_S$$

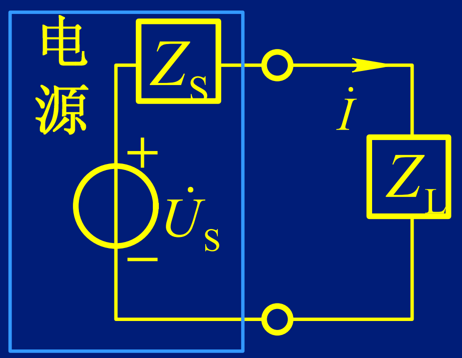
$$P_{\max}=\frac{U^2}{R_2}=2\text{mW}$$

例题 6.24

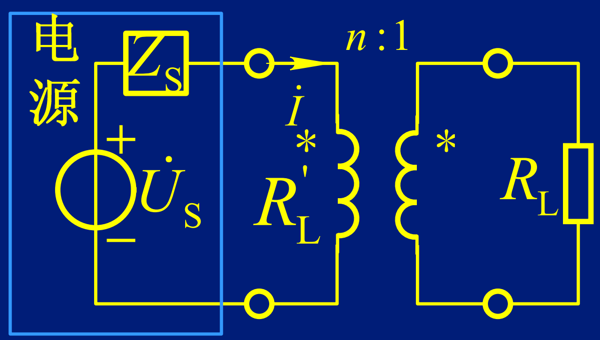
设图(a)所示电路中电源电压 $\dot{U}_S = 12\angle 0^\circ \mathrm{V}$ 、内阻抗 $Z_S = (3 + \mathrm{j}4)\Omega$

(1)图(a)中负载阻抗 Z_L 可任意改变，求此电源可发出的最大功率。

(2) 通过理想变压器接一电阻负载如图(b)所示，$R_L = 20\Omega$，问变比 n 为多少，电源可发出最大功率，求此最大功率。



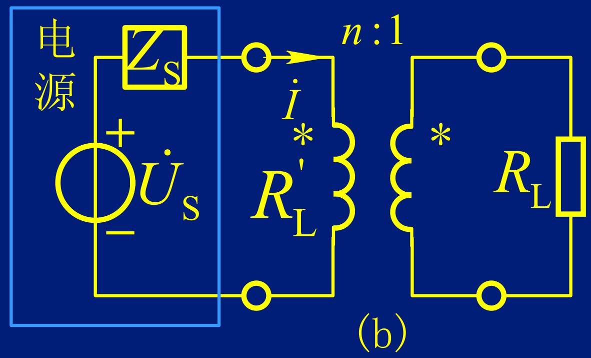
(a)



(b)

解 (1) 当 $Z_L = \overset{*}{Z}_S = (3 - \mathrm{j}4)\Omega$ 电源发出最大功率

$$P_{max} = \frac{U_S^2}{4R_L} = \frac{12^2}{4\times 3}\mathrm{W} = 12\mathrm{W}$$



(2)图(b)中R_L折算到理想变压器的一次侧为

$R_L' = n^2 R_L$ 当 $R_L' = n^2 R_L = |Z_S|$ 时，

负载吸收功率即为电源发出最大功率

$$n^2 R_L = \sqrt{(3\Omega)^2 + (4\Omega)^2} = 5\Omega \qquad n = \sqrt{5\Omega / 20\Omega} = 1/2$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_S + n^2 R_L} = \frac{12\angle 0^\circ \text{ V}}{(3+\text{j}4)\Omega + 20\Omega/4} = \frac{12\text{V}}{(8+\text{j}4)\Omega} = 1.34\angle -26.6^\circ \text{ A}$$

电源发出的最大功率

$$P_{max} = I^2 n^2 R_L = (1.34\text{A})^2 \times 20\Omega / 4 = 9\text{W}$$

本章小结

1 正弦量基本概念

$$f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$$

振幅　　角频率　　初相位

有效值　$I=\sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i^2\mathrm{d}t}$　　$I=I_{\mathrm{m}}/\sqrt{2}=0.707I_{\mathrm{m}}$

相位差　$\varphi=(\omega t+\psi_u)-(\omega t+\psi_i)=\psi_u-\psi_i$

参考正弦量　$f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos\omega t$

正弦量与相量　$f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi) \rightleftarrows \dot{A}_{\mathrm{m}}=A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}=A_{\mathrm{m}}\angle\psi$

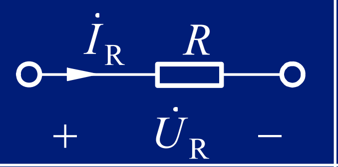
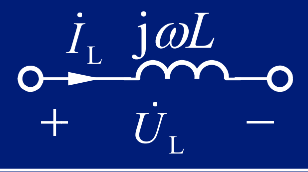
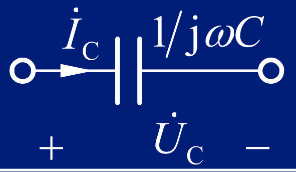
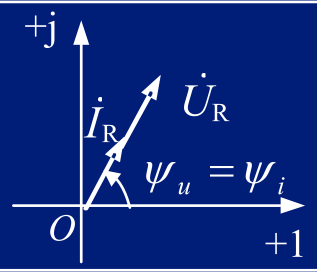
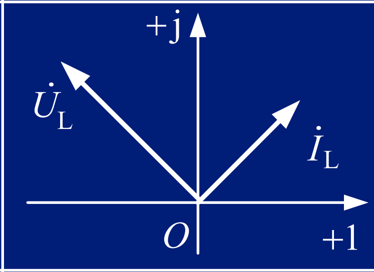
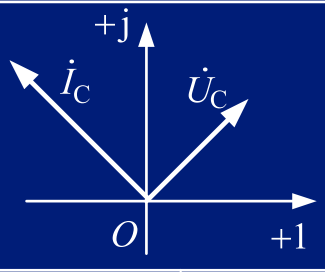
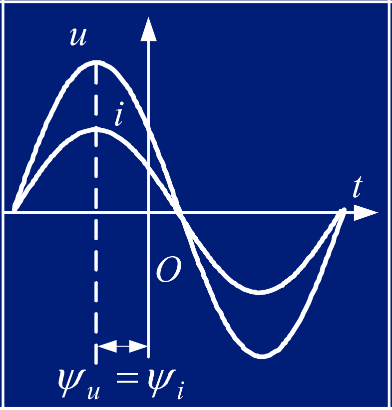
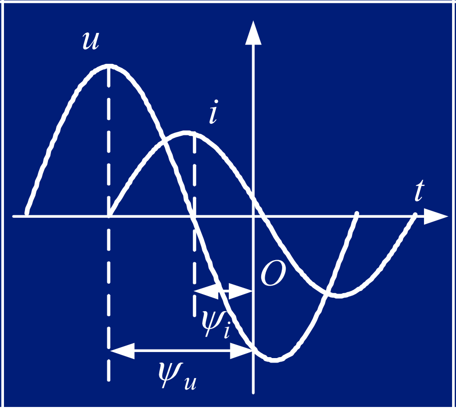
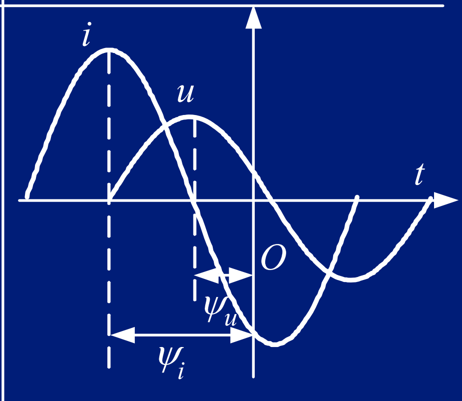
2 电路定律相量形式

（1）基尔霍夫定律的相量形式

① **KCL:**　$\sum\dot{I}_{\mathrm{m}}=0$ 或 $\sum\dot{I}=0$

② **KVL:**　$\sum\dot{U}_{\mathrm{m}}=0$ 或 $\sum\dot{U}=0$

(2) RLC元件上电压、电流关系

电路元件	电阻元件	电感元件	电容元件
时域VCR	$u_{\mathrm{R}} = Ri_{\mathrm{R}}$	$u_{\mathrm{L}} = L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}$	$i_{\mathrm{C}} = C\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$
相量VCR	$\dot{U}_{\mathrm{R}} = R\dot{I}_{\mathrm{R}}$	$\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}}$	$\dot{U}_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_{\mathrm{C}}$
相量模型			
有效值关系	$U_{\mathrm{R}} = RI_{\mathrm{R}}$	$U_{\mathrm{L}} = \omega LI_{\mathrm{L}} = X_{\mathrm{L}}I_{\mathrm{L}}$	$U_{\mathrm{C}} = X_{\mathrm{C}}I_{\mathrm{C}}$
相位关系	$\psi_u - \psi_i = 0$	$\psi_u - \psi_i = 90^\circ$	$\psi_u - \psi_i = -90^\circ$
相量图			
波形图			

3 阻抗和导纳

阻抗 **Z** 等于端口电压相量与电流向量之比，即

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\psi_u}{I\angle\psi_i}=\frac{U}{I}\angle(\psi_u-\psi_i)=|Z|\angle\varphi$$

导纳Y等于端口电流向量与电压相量之比，即

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\frac{I\angle\psi_i}{U\angle\psi_u}=\frac{I}{U}\angle(\psi_i-\psi_u)=|Y|\angle\varphi_Y$$

n 个阻抗串联的等效阻抗为

$$Z_{\mathrm{eq}}=Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$$

n 个导纳并联的等效导纳为

$$Y_{\mathrm{eq}}=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$$

Y 与 Z 的等效

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{R+\mathrm{j}X}=\frac{R}{R^2+X^2}-\mathrm{j}\frac{X}{R^2+X^2}$$

4 正弦稳态电路分析步骤：

(1) 将电阻、电感和电容用阻抗或导纳表示；

(2) 将激励源、支路电压和电流用相量表示；

(3) 在电路相量模型中用线性直流电路的分析方法（回路法，节点法，电路定理）求解响应的相量；

(4) 根据相量与正弦量的对应关系，得到响应的正弦函数表达式。

5 正弦稳态电路的功率

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u)\text{；}\quad i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$

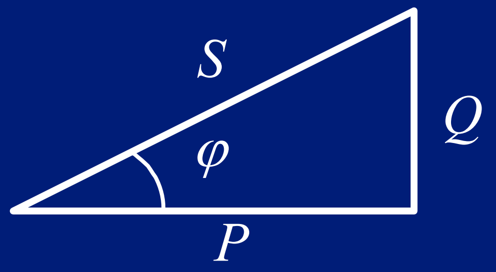
瞬时功率 $p(t)=u(t)\times i(t)$

有功功率 $P=UI\cos\varphi=UI\lambda$

无功功率 $Q=UI\sin\varphi$

视在功率 $S=UI=\sqrt{P^2+Q^2}$

复功率 $\tilde{S}=P+\mathrm{j}Q=UI\cos\varphi+\mathrm{j}UI\sin\varphi=\dot{U}\overset{*}{I}$



功率三角形

6 最大功率传输定理

负载可以任意改变时，它获得最大功率的条件是

$$Z_L=R_L+\mathrm{j}X_L=R_S-\mathrm{j}X_S$$

获得最大功率为

$$P_{L\max}=\frac{U_S^2}{4R_S}$$