哈爾濱工業大學

第4章 非线性直流电路

主讲教师　刘洪臣

http://www.hitce.net

提要 非线性电路是广泛存在于客观世界。基于线性方程的电路定理不能用于非线性电路。作为基础，本章研究最简单的非线性电路即非线性直流电路。首先介绍非线性电阻元件特性和非线性直流电路方程的列写方法。然后依次介绍三种近似分析法：数值分析法、分段线性近似法和图解法。

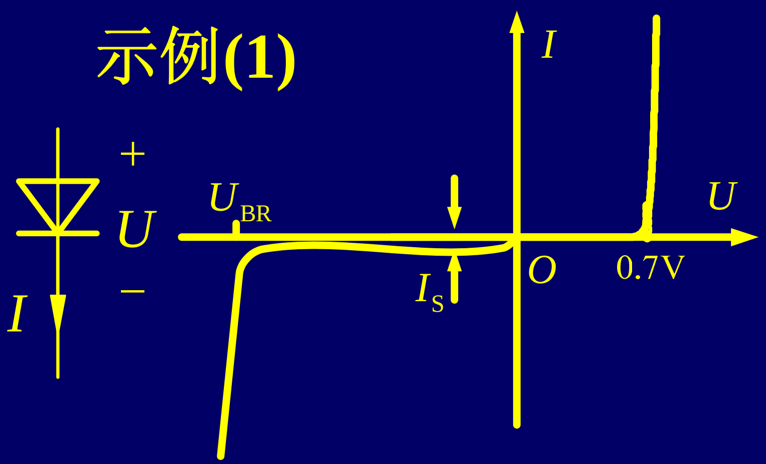
本章目次

基本要求：了解典型非线性电阻的基本特性、非线性电阻的分类。

•**非线性电阻：**端口上的电压、电流关系不是通过 ***U-I*** 平面坐标原点的直线，不满足欧姆定律。

非线性电阻特性示例：

示例(1)



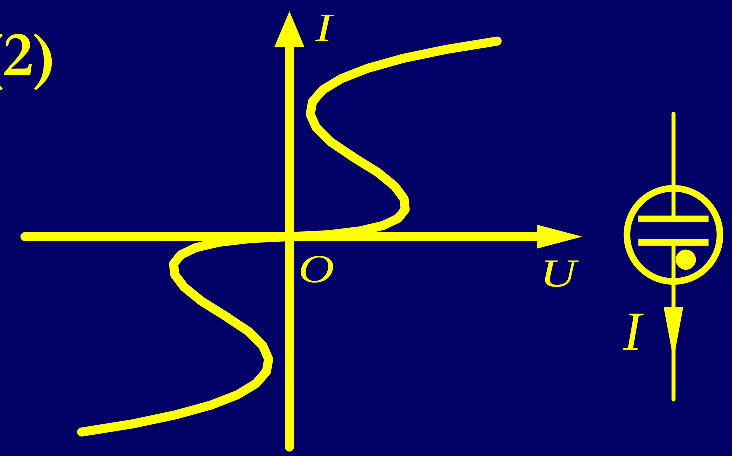
P−N结二极管特性曲线

$$I = I_S(e^{U/U_T} - 1)$$

$$U = U_T \ln(I/I_S + 1)$$

电流是电压的单调函数，称为单调型非线性电阻：

示例(2)

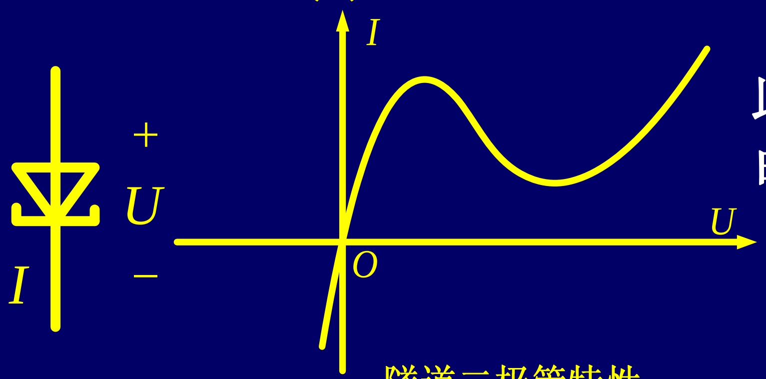


辉光管特性

电压是电流的单值函数，反之不然 。此类电阻称为[电]流[制]型非线性电阻

记作： $U = U(I)$

示例(3)



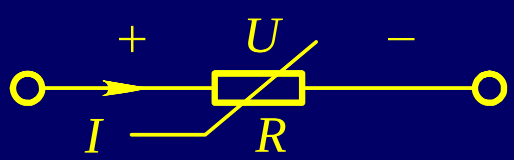
隧道二极管特性

电流是电压的单值函数，反之不然。

此类电阻称为[电]压控[制]型非线性电阻记作：

$$I = I(U)$$

非线性电阻的元件符号



非线性二端电阻的符号

对比：

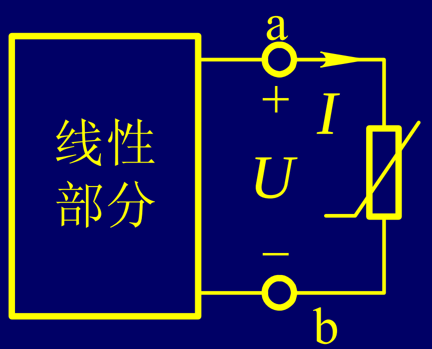
- **线性电阻：** 线性电阻是没有方向性的，其特性曲线对称于坐标原点。
- **非线性电阻：** 通常具有方向性，正向和反向的导电性不同，它们的特性曲线对坐标原点不对称。

基本要求：掌握依据非线性电阻特点，列写非线性直流电路方程的一般方法。

非线性电路的分析思路：依据基尔霍夫定律和元件性质列写电路方程。由于含有非线性电阻，故所得电路方程是非线性代数方程，求解非线性代数方程得到电路解答。基于线性电路推导出来的定理不能用于解非线性电路。

1 电路中只含一个非线性电阻

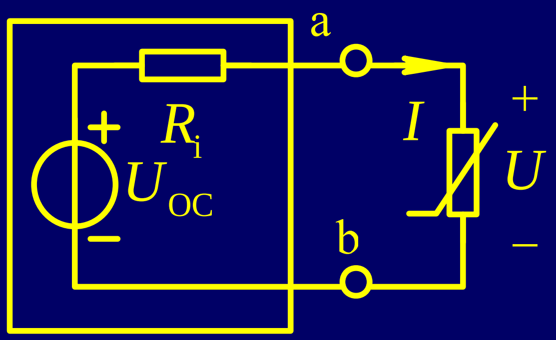
如果电路中只含一个非线性电阻，并且主要对非线性电阻的解答感兴趣，则可将电路划分成线性和非线性两部分，如图 **(a)**所示。



(a)

求解步骤如下:

(1) 利用线性电路的戴维南定理(或诺顿定理)对线性部分进行化简,得图**(b)**所示的简单非线性电路。



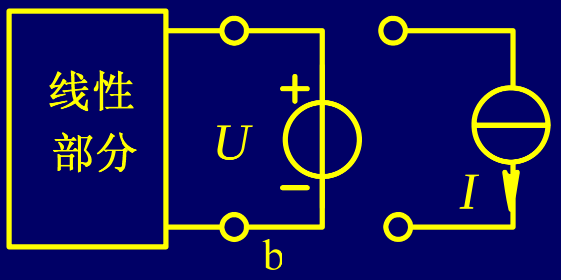
(b)

(2) 列写图**(b)**电路方程。若为流控型电阻即 $U=U(I)$，则应以电流I为变量列**KVL**方程:

$$R_i I + U(I) = U_{OC}$$

若为压控型电阻，即$I=I(U)$，则应以电压U 为变量列**KVL**方程:

$$R_i I(U) + U = U_{OC}$$



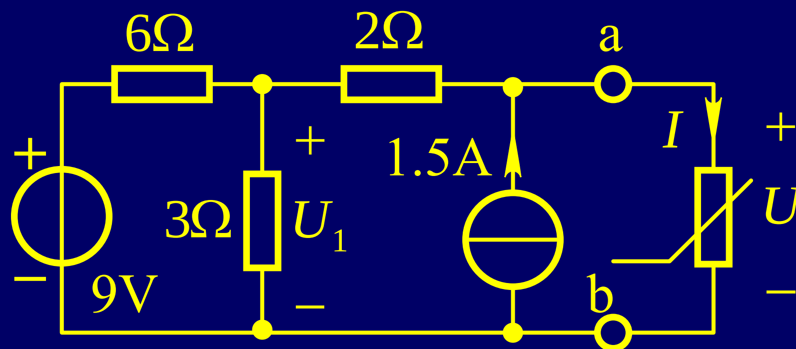
(c)

(3) 如果想进一步求出线性部分的解答，则可根据上述求得的解答，用电压源或电流 源置换非线性电阻，得图**(c)**所示的线性直流电路，对其求解便得到所需解答。

例题 4.1

图示电路，非线性电阻特性为 $U = I^2 - 4I$ (单位：V,A)

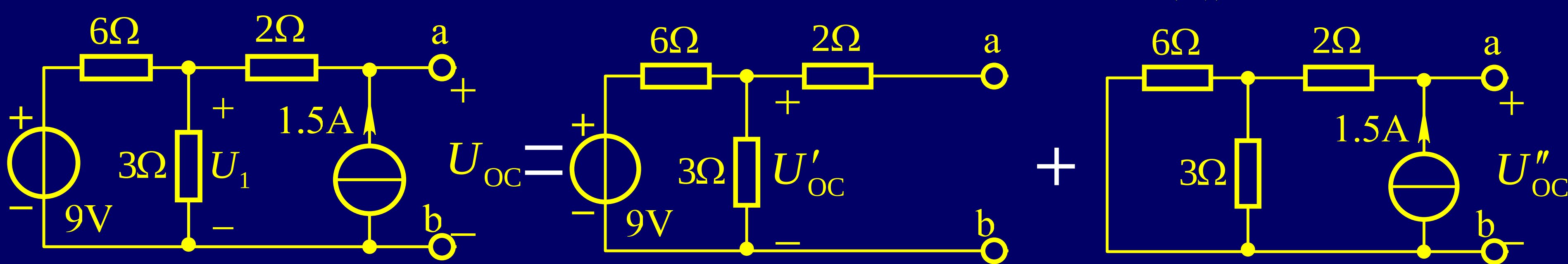
试求电压 U 和U_1的值。



例题4. 1

解

(1) 将a,b左边的线性含源一端口网络等效成戴维南电路，对原图电路，当a,b断开时求得开路电压

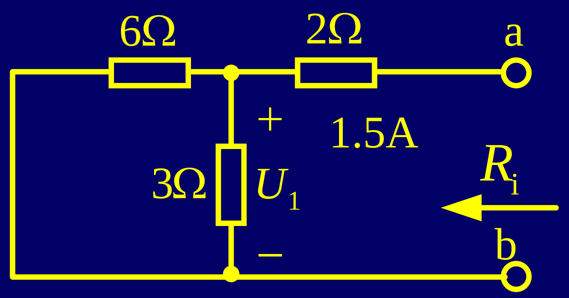


(a) (b) (c)

$$U'_{OC} = \frac{3\Omega}{(3+6)\Omega} \times 9\text{V} = 3\text{V} \qquad U''_{OC} = (2 + \frac{3\times 6}{3+6})\Omega \times 1.5\text{A} = 6\text{V}$$

$$U_{OC} = U'_{OC} + U''_{OC} = 3\text{V} + 6\text{V} = 9\text{V}$$

求等效电阻 $R_{\rm i}=(2+\dfrac{3\times 6}{3+6})\Omega=4\Omega$



(d)

(2) 对图(e)列KVL方程：

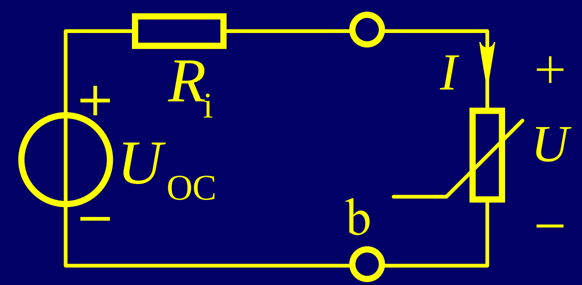
$$4I+I^2-4I=9$$

$$I'=3\text{A} \qquad I''=-3\text{A}$$

代入特性方程得到电压的两个解答：

$$U'=(3^2-4\times 3)\text{V}=-3\text{V}$$

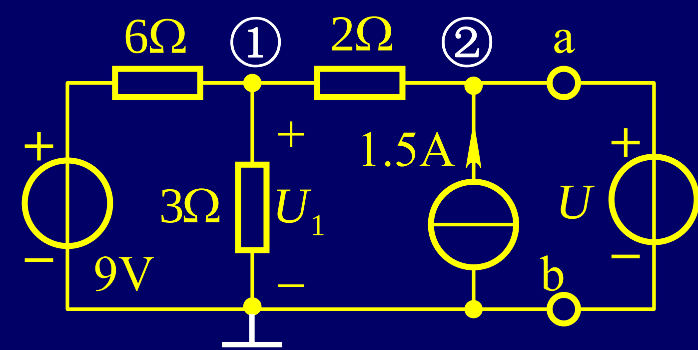
$$U''=[(-3)^2-4\times(-3)]\text{V}=21\text{V}$$



(e)

(3) 用电压源置换非线性电阻得图**(f)**所示的线性直流电路。由节点分析法得：

$$\left(\frac{1}{6\Omega}+\frac{1}{3\Omega}+\frac{1}{2\Omega}\right)U_1-\frac{U}{2\Omega}=\frac{9\text{V}}{6\Omega}$$



(f)

求解得到U_1与 U 的关系：

$$U_1=1.5\text{V}+0.5U$$

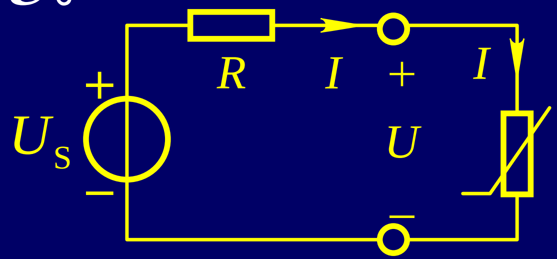
当U分别等于U'和U''时，由上式求得电压U_1的两个值：

$$U'_1=1.5\text{V}+0.5U'=0$$

$$U''_1=1.5\text{V}+0.5U''=12\text{V}$$

例题 4.2

图示电路中非线性电阻特性为 $I=10^{-3}U^{3}$ (单位：A，V)，$R=1\text{k}\Omega$ 求U_S分别为2V、10V和12V时的电压U。



例题4.2

解 对图中电路列KVL方程：

$$RI+U-U_s=0$$

将R及非线性电阻特性代入式(1)得：

$$10^{3}\times10^{-3}U^{3}+U-U_S=U^{3}+U-U_S=0$$

(1) 当 $U_S=2\text{V}$ 时，$U'=1\text{V}$

(2) 当 $U_S=10\text{V}$ 时，$U''=2\text{V}$

(3) 当 $U_S=12\text{V}$ 时，$U'''=2.144\text{V}$

由上面的计算结果可见，虽然(3)中的U_S等于(1)和(2)中U_S的和，但 $U'''\neq U'+U''$ 说明非线性电路不满足叠加定理

[补充4.1]　图示电路，已知 $I=U^2$（单位：V，A），（$U\geq 0$）。求电流I

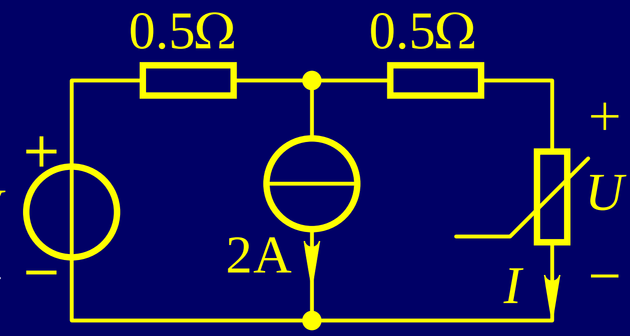
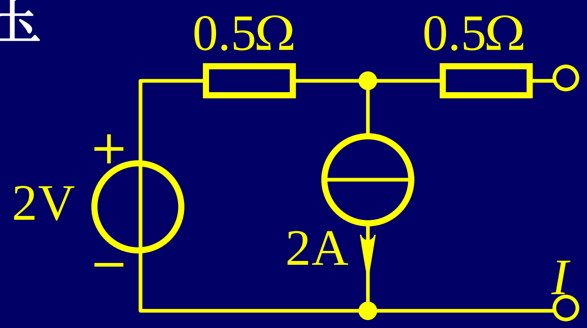


图 题4.1

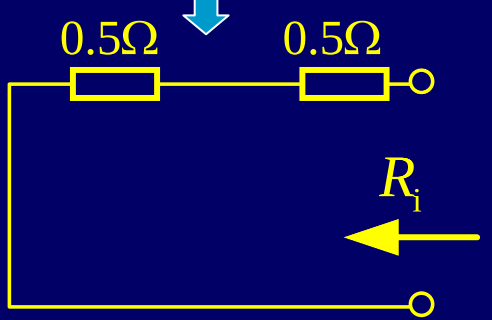
[解] 1) 求开路电压

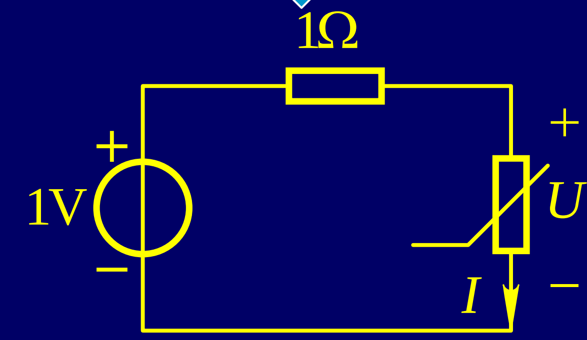
$$U_{OC}=1\text{V}$$



2) 求等效内阻

$$R_i=1\Omega$$





3) 计算电流I　　列KVL方程　$1\Omega\times I+U=1\text{V}$

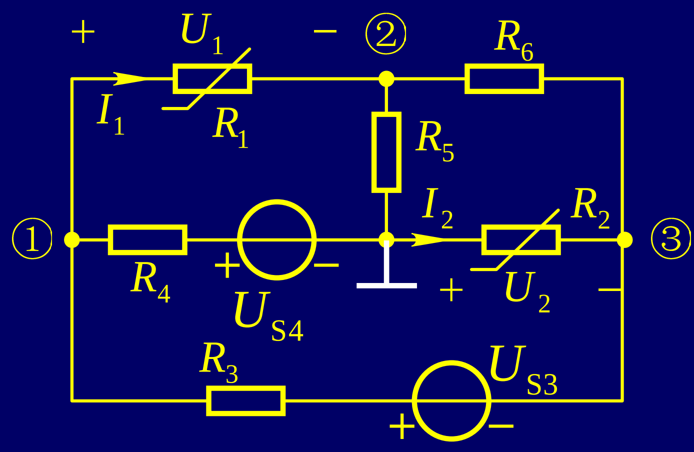
将非线性电阻特性方程代入得　$U^2+U-1=0$

$U'=0.618\text{V}$　$U''=-1.618\text{V}$　（舍去）

$$I=(1\text{S}\times U')^2=0.382\text{A}$$

2 电路中含有多个非线性电阻

解题思路：若电路中含有较多的非线性电阻，宜对电路列写方程组，根据非线性电阻是压控的还是流控的列写不同的方程。



(1)电路中的非线性电阻全部为压控非线性电阻情况

$$R_1: \quad I_1 = I_1(U_1)$$

$$R_2: \quad I_2 = I_2(U_2)$$

1) 把非线性电阻用电压源置换，

2) 以电压作为待求量，把非线性电阻的电流作为变量，列写电路方程，通常选用改进节点电压法。

$$(G_3+G_4)U_{n1} - G_3U_{n3} + I_1 = G_3U_{S3} + G_4U_{S4}$$

$$(G_5+G_6)U_{n2} - G_6U_{n3} - I_1 = 0$$

$$-G_3U_{n1} - G_6U_{n2} + (G_3+G_6)U_{n3} - I_2 = -G_3U_{S3}$$

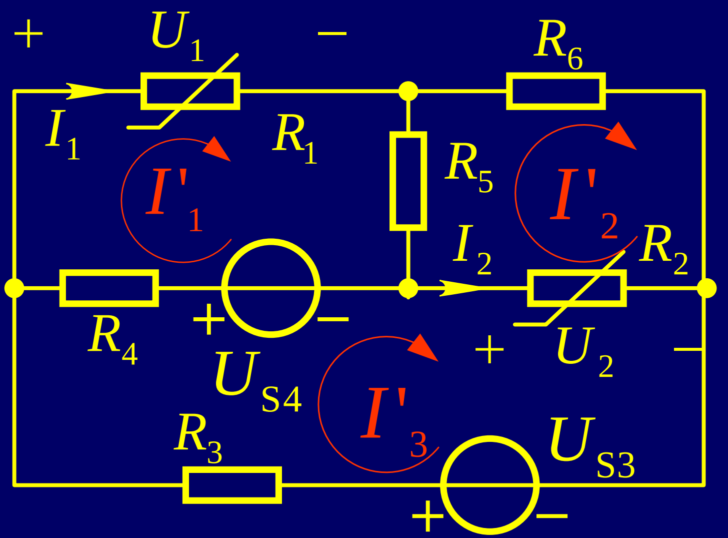
3) 补充非线性电阻的端口特性方程，并将压控电压U用节点电压代替

$$I_1 = I_1(U_1) = I_1(U_{n1} - U_{n2})$$

$$I_2 = I_2(U_2) = I_2(-U_{n3})$$

(2) 电路中的非线性电阻全部为流控非线性电阻，即 $U_1 = U_1(I_1)$

$$U_2 = U_2(I_2)$$



1) 把非线性电阻用电流源置换，

2) 以电流作为待求量，把非线性电阻的电压作为变量列写方程，通常选用回路电流法。

3)补充非线性电阻的端口特性方程，再将流控电流I用回路电流代替

$$(R_4 + R_5)I'_1 - R_5 I'_2 - R_4 I'_3 + U_1 = U_{S4}$$

$$-R_5 I'_1 + (R_5 + R_6)I'_2 - U_2 = 0$$

$$-R_4 I'_1 + (R_3 + R_4)I_3 + U_2 = U_{S3} - U_{S4}$$

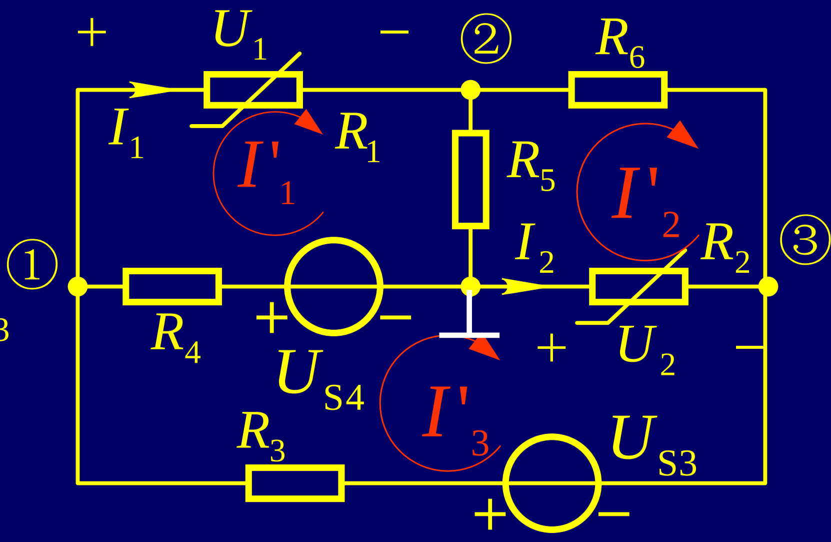
$$U_1 = U_1(I_1) = U_1(I'_1)$$

$$U_2 = U_2(I_2) = U_2(I'_3 - I'_2)$$

用节点电压法来列写方程

$$(G_3+G_4)U_{n1}-G_3U_{n3}+I_1=G_3U_{S3}+G_4U_{S4}$$
$$(G_5+G_6)U_{n2}-G_6U_{n3}-I_1=0$$
$$-G_3U_{n1}-G_6U_{n2}+(G_3+G_6)U_{n3}-I_2=-G_3U_{S3}$$

补充方程 $\begin{cases} U_1=U_{n1}-U_{n2}=U_1(I_1) \\ U_2=-U_{n3}=U_2(I_2) \end{cases}$



(3) 电路中的非线性电阻一个是压控的，一个是流控的，设

$$U_1=U_1(I_1)$$
$$I_2=I_2(U_2)$$

综合运用上面两种方法

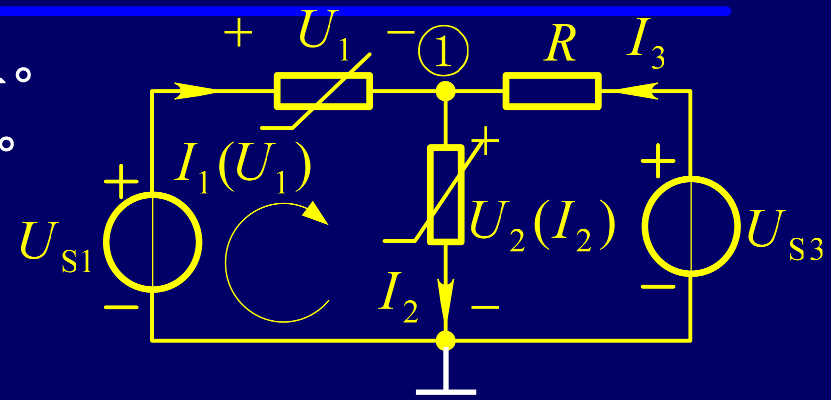
$$\begin{cases} (G_3+G_4)U_{n1}-G_3U_{n3}+I_1=G_3U_{S3}+G_4U_{S4} \\ (G_5+G_6)U_{n2}-G_6U_{n3}-I_1=0 \\ -G_3U_{n1}-G_6U_{n2}+(G_3+G_6)U_{n3}-I_2=-G_3U_{S3} \end{cases}$$

补充方程：

$$U_1=U_{n1}-U_{n2}=U_1(I_1)$$
$$I_2(U_2)=I_2(-U_{n3})$$

例题 4.3

电路含一个压控电阻和一个流控电阻。试列写关于控制量U_1和I_2的联立方程。



解 对节点①列KCL方程：

$$-I_1+I_2-I_3=0$$

将 $I_1=I_1(U_1)$

$I_3=(U_{S3}-U_{S1}+U_1)/R$ 代入上式，得

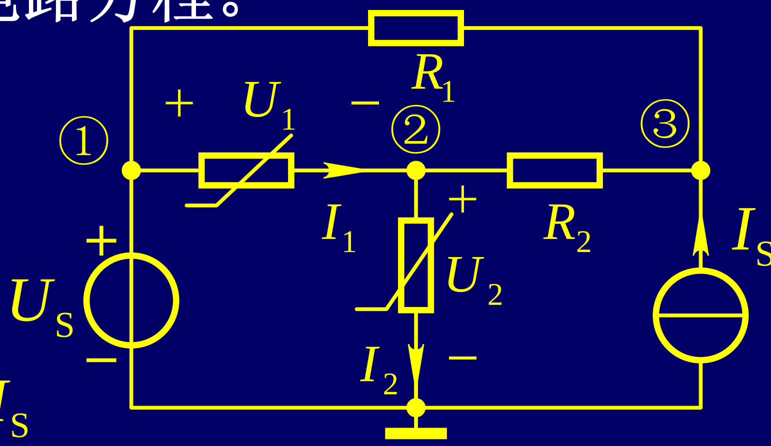
$$\left.\begin{array}{l} -I_1(U_1)+I_2-(U_{S3}-U_{S1}+U_1)/R=0 \\ \text{再对左边回路列KVL方程得} \\ U_2(I_2)-U_{S1}+U_1=0 \end{array}\right\} \text{联立方程}$$

用节点电压法重列此题

$$\frac{U_2(I_2)}{R}=I_1(U_1)-I_2+\frac{U_{S3}}{\mathrm{R}} \Rightarrow \begin{cases} I_1(U_1)-I_2+\dfrac{U_{S3}-U_2(I_2)}{\mathrm{R}}=0 \\ U_2(I_2)=U_{S1}-U_1 \end{cases}$$

[补充4.2]

图示电路中非线性电阻的特性为$U_1=f_1(I_1)$(流控的)，$I_2=f_2(U_2)$(压控的)。试用改进节点电压法列写电路方程。



[解] 1 对图示电路节点②、③列节点电压方程

节点②: $-I_1+G_2U_{n2}+I_2-G_2U_{n3}=0$

节点③: $-G_1U_{n1}-G_2U_{n2}+(G_1+G_2)U_{n3}=I_S$

2 将压控非线性电阻电流用节点电压表示，流控非线性电阻电压用节点电压来表示，即

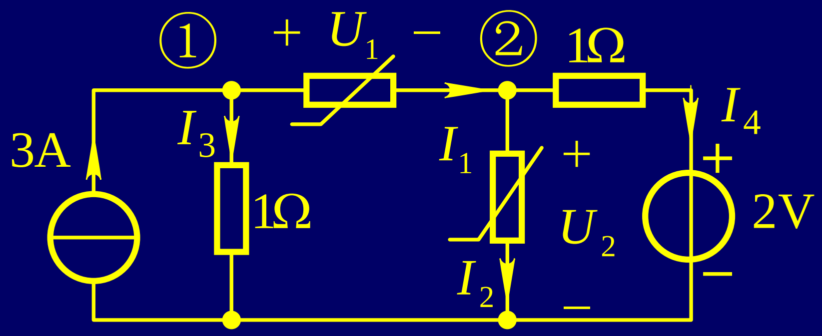
$$I_2=f_2(U_2)=f_2(U_{n2})$$

$$U_{n1}-U_{n2}=U_1=f_1(I_1)$$

3 最终的联立方程

$$\begin{cases}-I_1+G_2U_{n2}+f_2(U_{n2})-G_2U_{n3}=0\\-G_2U_{n2}+(G_1+G_2)U_{n3}=I_S+G_1U_S\\U_{n1}-U_{n2}=f_1(I_1)\end{cases}$$

[补充4.3] 图示电路中两个非线性电阻的伏安特性为 $I_1=U_1^3$ (单位:A,V)，$U_2=I_2^3$ (单位:V,A)。试列出求解 U_1 及 I_2 的二元方程组。



[解] 对节点列KCL方程

节点①: $-3A+I_3+I_1=0$

节点②: $-I_1+I_2+I_4=0$

由图示电路可知

$$I_3=\frac{U_{n1}}{1\Omega}=\frac{U_1+U_2}{1\Omega}$$

$$I_4=\frac{U_{n2}-2V}{1\Omega}=\frac{U_2-2V}{1\Omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_1^{\,3}-I_2^{\,3}-I_2=-2 \\ U_1^{\,3}+U_1+I_2^{\,3}=3 \end{cases}$$

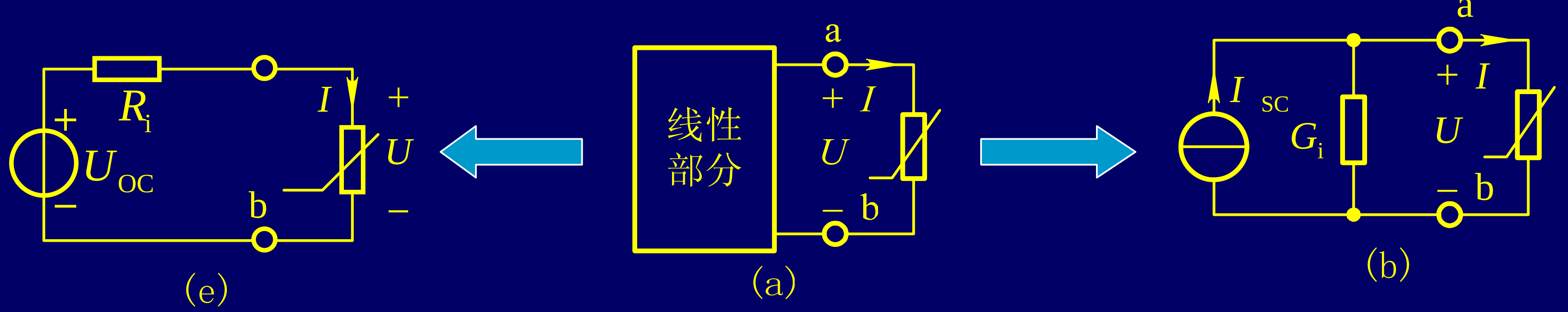
如果非线性电阻特性的解析式比较复杂，譬如是高次幂或超函数等，一般不能直接求解非线性联立方程。下一节将介绍非线性代数方程的数值分析法。

基本要求：了解数值分析法原理，会用牛顿－拉夫逊法计算含一个非线性电阻的电路。

数值分析法：借助计算机算法程序计算得出电路方程的数值结果。

图中含有一个非线性压控电阻，即图中的 I 与 U 存在关系

$$I = I(U)$$



牛顿-拉夫逊法示例

1 根据前文所讲过的解题方法，首先将电路中的线性部分用诺顿电路或戴维南电路进行等效，如图所示，此时线性电路端口上的特性为：

$$-U_{OC} + R_i I + U = 0 \quad 或 \quad G_i U + I - I_{SC} = 0$$

2 将非线性电阻的特性引入到方程中：

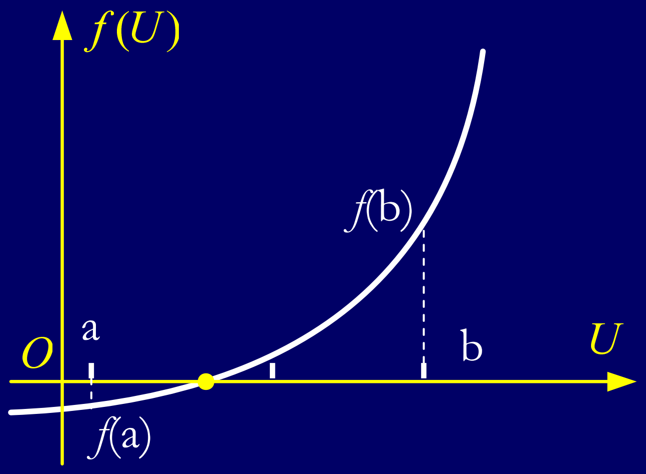
$$I(U)-I_{\mathrm{SC}}+G_{\mathrm{i}}U=0 \quad 或 \quad G_{\mathrm{i}}U+I(U)-I_{\mathrm{SC}}=0$$

求解电路，归结为求上式的根。但这是一个变量*U*的非线性方程，一般不易求出解析解。因此，需要采用数值分析方法进行求解

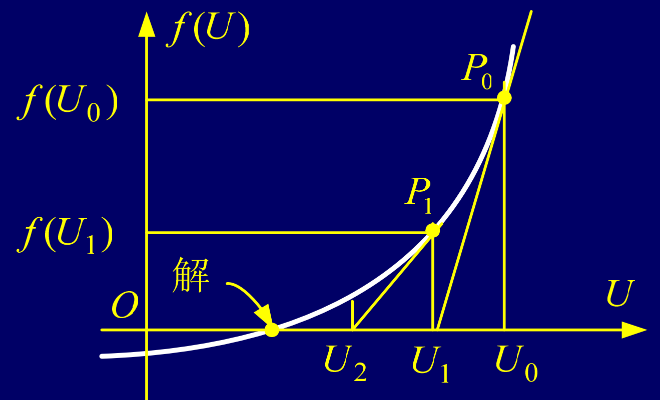
解题思路：令

$$f(U)=I(U)-I_{\mathrm{SC}}+G_{\mathrm{i}}U$$

在*U*—*f*(*U*) 坐标平面上画出 *f*(*U*) 与*U*的关系曲线曲线与横坐标 *U* 的交点就是方程的解答。



3 用牛顿－拉夫逊法进行求解：



牛顿–拉夫逊法原理

设 $f(U)$ 的曲线如右图示，并以此图说明牛顿－拉夫逊法的计算过程：

1) 先假设一电压值 U_0 (称为初值) 代入上式求出 $f(U_0)$，对应图坐标上的P_0 点；

2) 若 $f(U_0)$ 不为零，则然后在 P_0 点作切线，该切线与U轴的交点记作U_1，U_1 比 U_0 更接近方程的解答；

注：由于曲线上的任意一点斜率等于等于该点函数的导数，即

$$f'(U_0)=\frac{0-f(U_0)}{U_1-U_0} \Rightarrow U_1=U_0-\frac{f(U_0)}{f'(U_0)}$$

3) 用U_1代U_0替重复上述过程得到U_2

$$f'(U_1)=\frac{0-f(U_1)}{U_2-U_1} \Rightarrow U_2=U_1-\frac{f(U_1)}{f'(U_1)}$$

重复上述过程得到电压递推公式：

$$f'(U_k)=\frac{0-f(U_k)}{U_{k+1}-U_k} \Rightarrow U_{k+1}=U_k-\frac{f(U_k)}{f'(U_k)}$$

所以，可以借此得到电压序列：

$$U_0,U_1,U_2,\cdots,U_k,U_{k+1},\cdots$$ 逐步趋近于方程的根

4 在电压递推的每一步种都要判断相继两次迭代值的绝对误差是否在容许误差范围之内，即

$$\Delta U=\left|U_{k+1}-U_k\right|<\varepsilon$$

若成立，则结束，称为收敛，此时$\boldsymbol{U_{k+1}}$就是$\boldsymbol{U}$的近似解答；否则继续。也有可能迭代过程永远无法满足上式，则称迭代不收敛或发散。

说明：

1 若 $f(U)$不是单调变化的，有可能因初值选取不当而导致迭代失败。

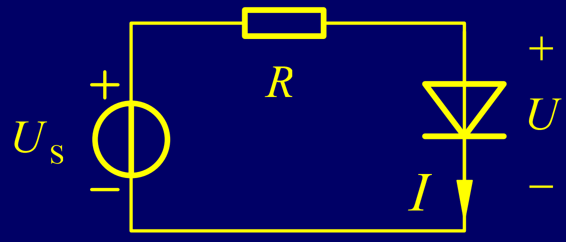
2 若非线性方程存在多解，则对选定的一个初值，只能收敛到其中的一 个解答，这样就出现了丢解的情况。

例题 4.4

试用牛顿-拉夫逊法求解图示**P-N**结二极管电路。二极管特性为：

$I = I_S(e^{U/U_T} - 1)$，其中$I_S = 2.5\times10^{-9}$ A，$U_T = 0.026$V。又已知

$U_S = 5.0$V，$R = 5.1\text{k}\Omega$。规定容许误差 $\varepsilon = 10^{-3}$ V



解 列出回路**KVL**方程：

$$U_R + U - U_S = RI + U - U_S = 0$$

将二极管特性代入上式得：

$$RI_S(e^{U/U_T} - 1) + U - U_S = 0$$

令 $f(U)=RI_S(\mathrm{e}^{U/U_T}-1)+U-U_S$

求取迭代公式:

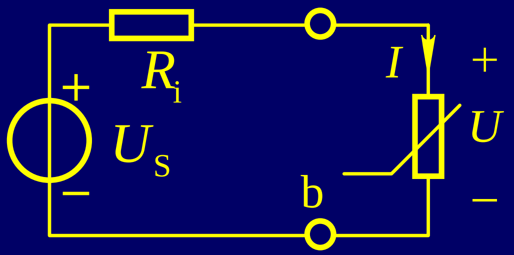
$$U_{k+1}=U_k-\frac{f(U_k)}{f'(U_k)}=\left[U-\frac{RI_S(\mathrm{e}^{U/U_T}-1)+U-U_S}{\frac{RI_S}{U_T}\cdot\mathrm{e}^{U/U_T}+1}\right]_{U=U_k}$$

选取初值U_0。二极管正向导通时两端电压一般小于**0.8V**，因此取U_0**=0.300V**，并进行迭代。

迭代过程

k	U_k /V	I_k /A	$f(U_k)$ /V	$f'(U_k)$
0	0.3000	0.2565×10^{-3}	-3.392×10^{1}	51.31
1	0.3661	3.2610×10^{-3}	1.200×10^{1}	640.7
2	0.3474	1.5869×10^{-3}	3.441	312.3
3	0.3364	1.0388×10^{-3}	6.340×10^{-1}	240.8
4	0.3333	9.2213×10^{-4}	3.612×10^{-2}	181.9
5	0.3330	9.1511×10^{-4}		

[补充4.4] 已知 $U_S=1\mathrm{V}, R_i=1\Omega, I=U^2$ (单位： A， V)
求电流I。（容许误差 $\varepsilon=10^{-3}$ ）



[解] 列出KVL方程(以U为变量)

$$R_i I+U-U_S=0$$

即 $$U^2+U-1=0$$

令 $f(U)=U^2+U-1$ 则 $f'(U)=2U+1$

根据 $$U_{k+1}=U_k-\frac{f(U_k)}{f'(U_k)}$$

k	U_{k+1}	$f(U_{k+1})$	$f'(U_{k+1})$
0	1.0000	1.0000	3.0000
1	0.6667	0.1111	2.3333
2	0.6190	0.0023	2.2381
3	0.6180	0.0001	2.2359
4	0.6180		

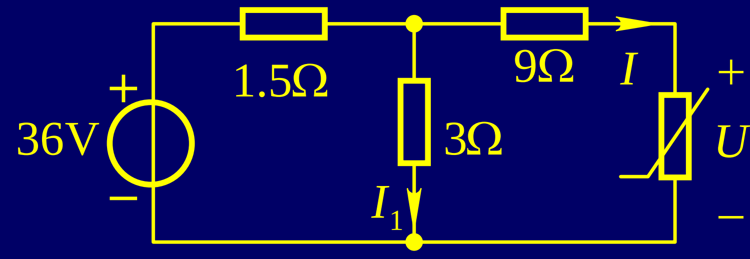
最终解答：

$U\approx 0.618\mathrm{V}$

$I\approx 0.3819\mathrm{A}$

[补充4.5]

图示电路，设I=10 $^{-4}$ (e ^{20U}+e $^{-20U}$)A。试用牛顿—拉夫逊法求电压U和电流I_1，要求电压准确到10^{-3}V。初值分别为U_0=0.6V和U_0= -0.6V。

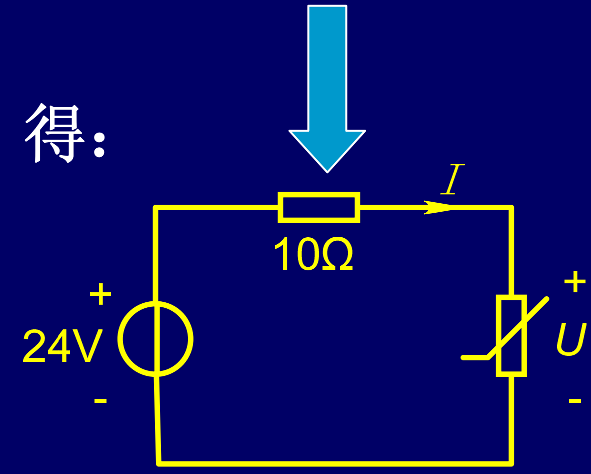


[解] 用戴维南定理对非线性电阻左侧的线性电路进行等效化简，如图(b)所示。 对回路列KVL方程：

$$10I+U-24=0$$

将非线性电阻的电压电流关系式代入，得：

$$10^{-3}(\mathrm{e}^{20U}-\mathrm{e}^{-20U})+U-24=0$$



等效电路图

为求解上述非线性方程，令

$$f(U)=10^{-3}(\mathrm{e}^{20U}-\mathrm{e}^{-20U})+U-24$$

求导数，得：

$$f'(U)=0.02(\mathrm{e}^{20U}-\mathrm{e}^{-20U})+1$$

牛顿-拉夫逊迭代公式为

$$U_{k+1}=U_k-\frac{10^{-3}(e^{20U_k}+e^{-20U_k})+U_k-24}{0.02(e^{20U_k}-e^{-20U_k})+1}$$

(1)取初值 U_0=0.6V，迭代过程列于下表：

k	U_{k+1} /V	$f(U_{k+1})$ /V	$f'(U_{k+1})$ /V
0	0.6	1.3935×10^2	3.2561×10^3
1	0.5572	4.5705×10^1	1.384×10^3
2	0.5242	1.2263×10^1	7.1578×10^2
3	0.5071	1.8765	5.0839×10^2
4	0.5034	8.45×10^{-2}	4.7262×10^2
5	0.5032	-5.18×10^{-3}	4.7083×10^2

即 $U\approx0.5032\text{V}$

电流 $$I_1=\frac{9I+U}{3}=\left.\frac{9\times10^{-4}(e^{20U}+e^{-20U})+U}{3}\right|_{U=0.5032}\approx7.212\text{A}$$

(2)取初值U_0= -0.6V，迭代结果列于下表：

k	U_{k+1} /V	$f(U_{k+1})$ /V	$f'(U_{k+1})$ /V
0	-0.6	1.3815×10^{2}	-3.2541×10^{3}
1	-0.5575	45	-1.3903×10^{3}
2	-0.5251	1.179×10^{1}	-7.2531×10^{2}
3	-0.5088	1.7564	-5.243×10^{2}
4	-0.5069	7.789×10^{-1}	-5.0472×10^{2}
5	-0.5054	8.608×10^{-3}	-4.8928×10^{2}
6	-0.5054		

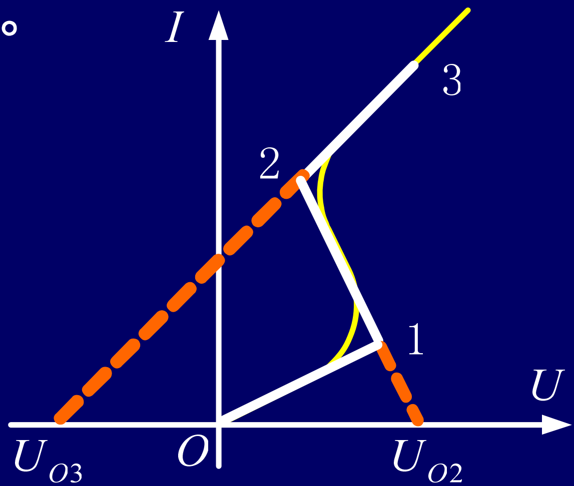
解得 $U\approx -0.5054\text{V}$

电流 $I_1=\dfrac{9I+U}{3}=\left.\dfrac{9\times10^{-4}(\mathrm{e}^{20U}+\mathrm{e}^{-20U})+U}{3}\right|_{U=-0.5054}\approx 7.178\text{A}$

注释：如果非线性方程存在多解，则对应不同的迭代初值，可能收敛到不同的解答。

基本要求：掌握分段线性分析法的原理及分析非线性电路的一般步骤。

分段线性近似法：用一条折线来分段逼近非线性曲线，折线的每一段对应一个线性电路，有时也称为折线法。



折线逼近

对于右图所示的S形曲线，我们可以用三段折线近似的等效它，每段折线的表达式可写成：

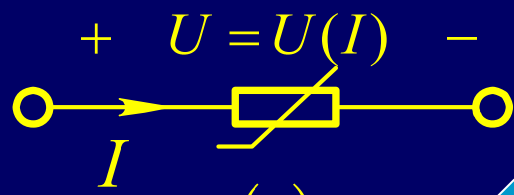
$$U = U_{Ok} + R_{dk} I$$

第*k*段直线与*U*轴交点的坐标

动态电阻是第*k*段直线的斜率

$$R_{dk} = \left(\frac{dU}{dI}\right)_k$$

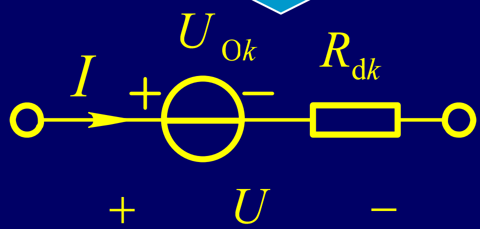
$$\left\{ \begin{array}{ll} U_{O1} = 0 & R_{d1} = (dU/dI)_1 > 0 \\ U_{O2} > 0 & R_{d2} = (dU/dI)_2 < 0 \\ U_{O3} < 0 & R_{d3} = (dU/dI)_3 > 0 \end{array} \right\}$$



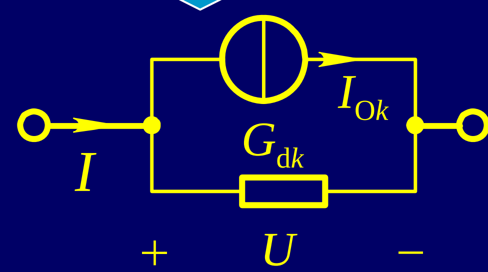
(a)

$$U=U_{\mathrm{O}k}+R_{\mathrm{d}k}I$$

$$I=-\frac{U_{\mathrm{O}k}}{R_{\mathrm{d}k}}+\frac{U}{R_{\mathrm{d}k}}=I_{\mathrm{O}k}+G_{\mathrm{d}k}U$$



(b)

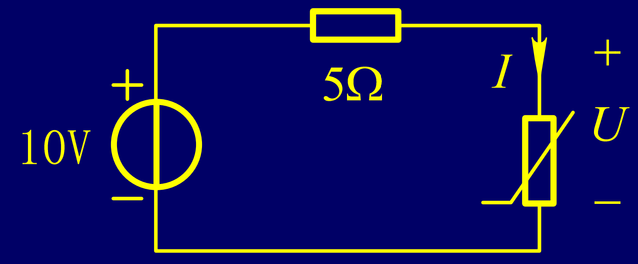


(c)

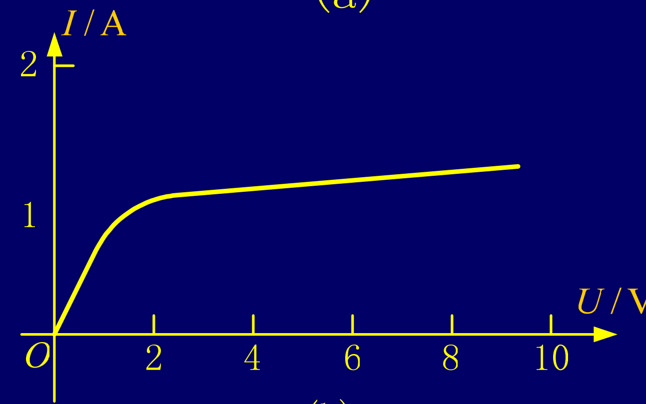
需注意在不同的区段内，模型中电压源$\boldsymbol{U_{\mathrm{O}k}}$与动态电阻$\boldsymbol{R_{\mathrm{d}k}}$将取不同的量值。在相应的范围内，非线性电阻元件的工作可以按图 (b)、(c)模型作近似分析。所以分段线性近似法的实质是把一个非线性电路的计算，分解成若干个区段的线性电路来计算。对于某一区段得到的解答，要检查其是否位于该区段。若位于该区段，便是近似解答；否则是虚解。由于非线性电路可能存在多解，在不能肯定存在唯一解的情况下，须对所有区段进行分析。

例题 4.5

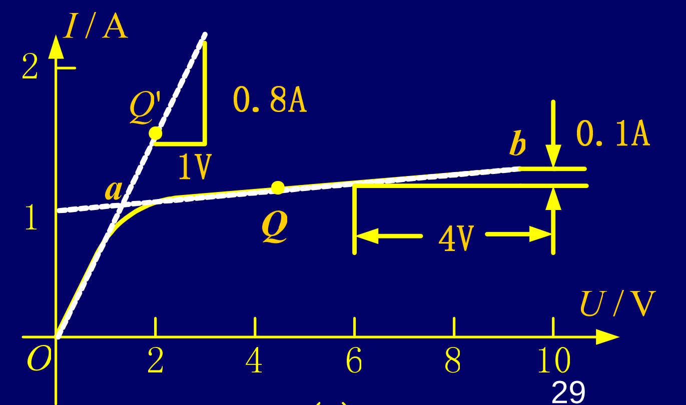
试用分段线性近似法解图(a)电路，其中非线性电阻的特性由图(b)曲线表示。



(a)



(b)



(c)

解 非线性电阻的特性可用**o-a, a-b**两条直线分段逼近。取U为自变量，直线方程是：

$$I = I_{\mathrm{O}k} + G_{\mathrm{d}k} U$$

$0 < U \le 1.5\mathrm{V}$ 时，取**o-a**段

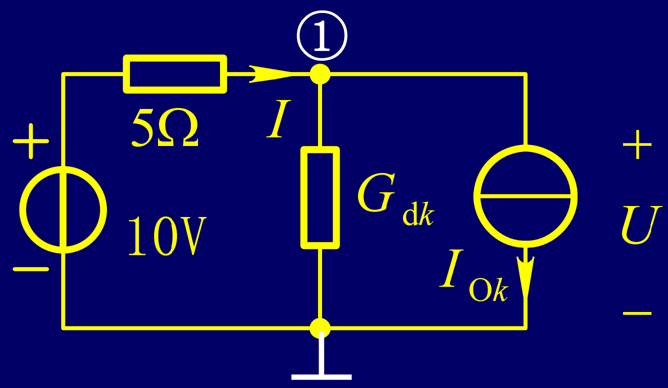
$$I_{\mathrm{O1}} = 0, \quad G_{\mathrm{d1}} = (0.8\mathrm{A})/(1\mathrm{V}) = 0.8\mathrm{S}$$

$U \ge 1.5\mathrm{V}$ 时，取**a-b**段

$$I_{\mathrm{O2}} = 1.0\mathrm{A}, \quad G_{\mathrm{d2}} = (0.1\mathrm{A})/(4\mathrm{V})$$

$$= 0.025\mathrm{S}$$

由节点法可得：



$$U=\frac{\frac{10\mathrm{V}}{5\Omega}-I_{\mathrm{O}k}}{\frac{1}{5\Omega}+G_{\mathrm{d}k}}=\frac{2\mathrm{A}-I_{\mathrm{O}k}}{0.2\mathrm{S}+G_{\mathrm{d}k}}$$

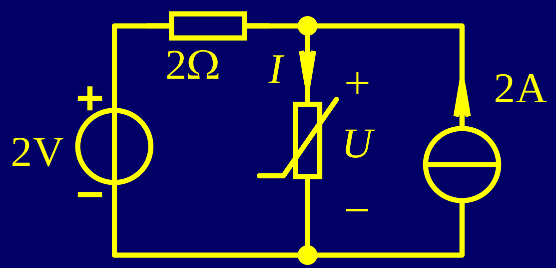
o-a段： $U=\dfrac{2\mathrm{A}-0}{(0.2+0.8)\mathrm{S}}=2\mathrm{V}>1.5\mathrm{V}$ 虚解

a-b段： $U=\dfrac{(2-1)\mathrm{A}}{(0.2+0.025)\mathrm{S}}\approx 4.44\mathrm{V}$

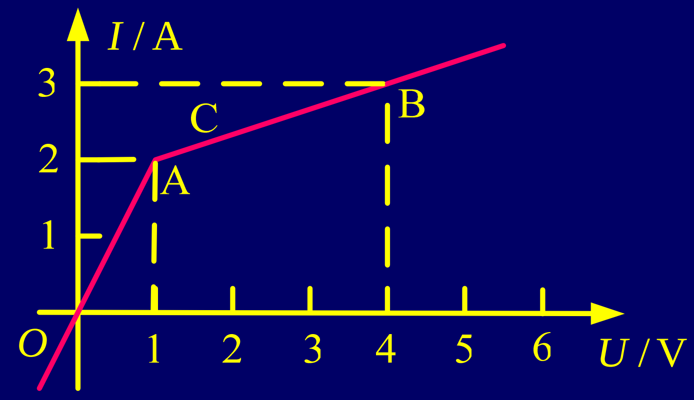
判断解的真实性？

$$I=1\mathrm{A}+0.025\mathrm{S}\times 4.44\mathrm{V}=1.11\mathrm{A}$$

[补充4.6] 图(a)所示电路，设非线性电阻特性如图(b)所示。试求电压U的值。



(a)



(b)

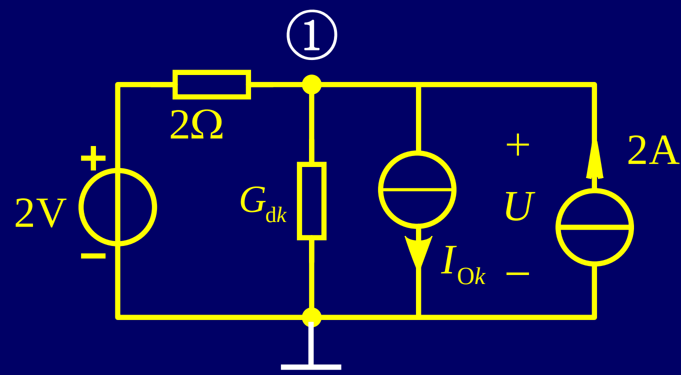
[解] 方法1

(1)先求每一段的直线方程

OA段 $I = 2\text{S} \times U \quad (0 \le U \le 1)$

AB段 $I = \dfrac{1}{3}S \times U + \dfrac{5}{3}\text{A} \quad (U > 1)$

(2)对节点①列节点电压方程

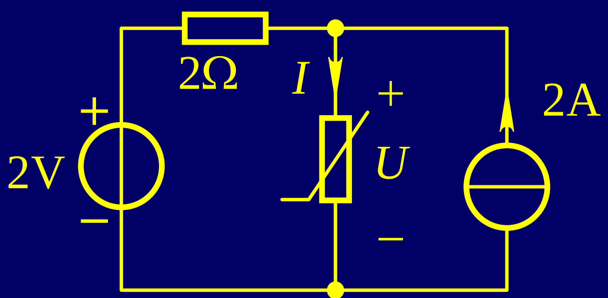


$$(\frac{1}{2\Omega} + G_{dk})U = 2\text{A} + \frac{2\text{V}}{2\Omega} - I_{Ok}$$

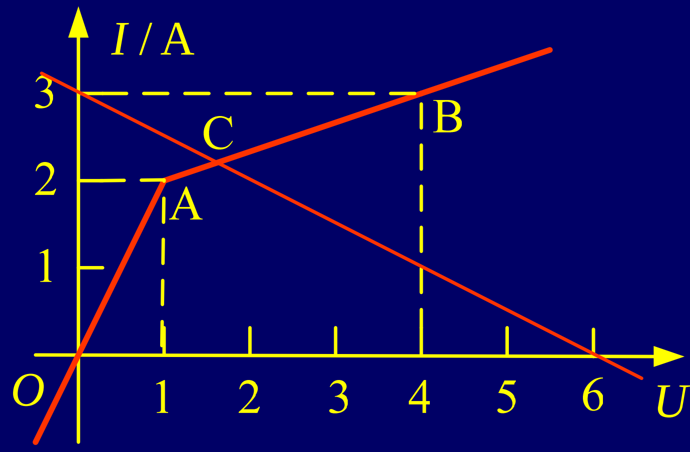
O-A段： $$U=\frac{3\text{A}-I_{\text{O}k}}{0.5\text{S}+G_{\text{d}k}}=\frac{3\text{A}}{0.5\text{S}+2\text{S}}=1.2\text{V}>1\text{V}$$ 虚解

A-B段： $$U=\frac{3\text{A}-I_{\text{O}k}}{0.5\text{S}+G_{\text{d}k}}=\frac{3\text{A-}\dfrac{5}{3}\text{A}}{0.5\text{S}+\dfrac{1}{3}\text{S}}=1.6\text{V}$$

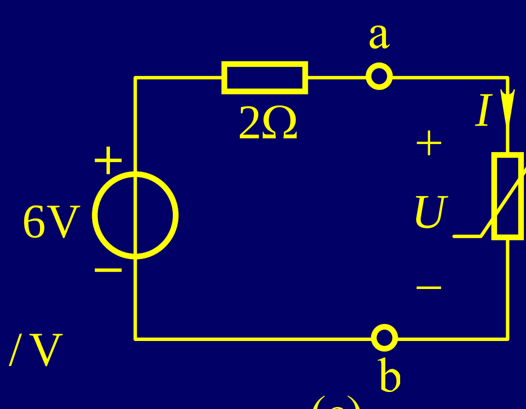
方法2



(a)

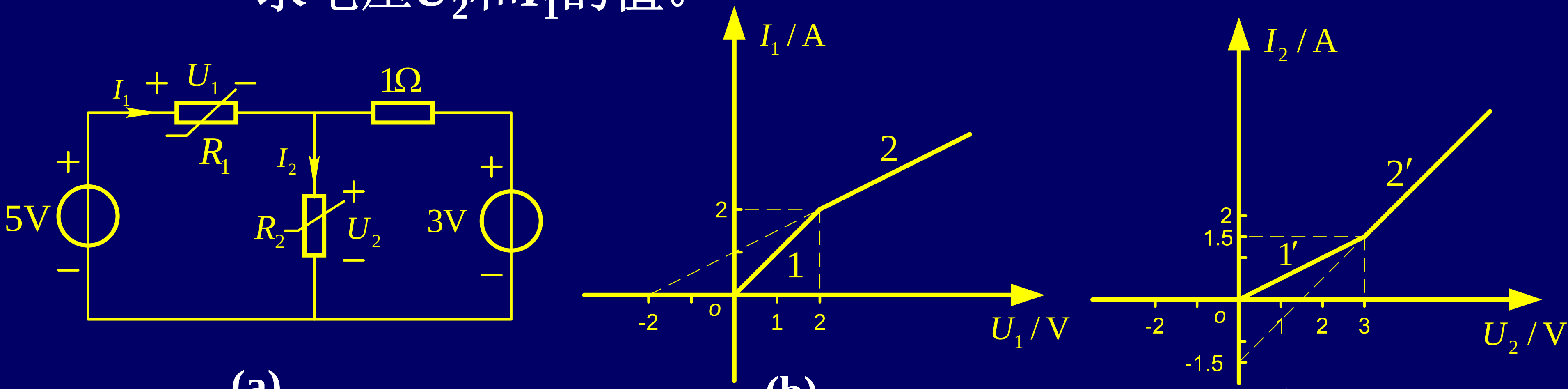


(b)



(c)

[补充4.7] 图(a)所示电路，设非线性电阻特性如图(b)和(c)所示。试求电压U_2和I_1的值。



(a) (b) (c)

[解] (1) 先求每一段的直线方程

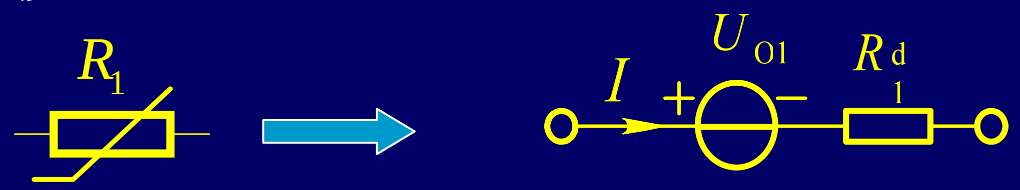
R_1: 1段 $U_1 = 1\Omega \times I_1 \quad (0 \le I_1 \le 2\text{A})$

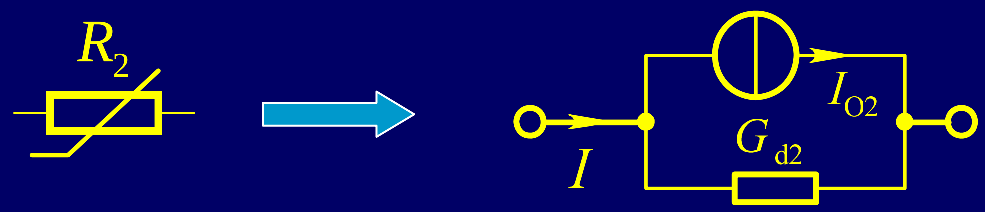
2段 $U_1 = 2\Omega \times I_1 - 2\text{V} \quad (I_1 > 2\text{A})$

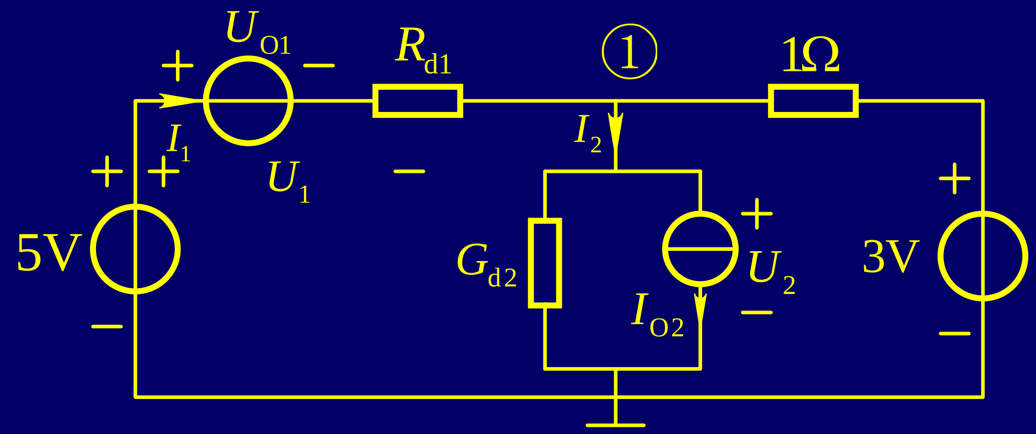
R_2: 1'段 $I_2 = 0.5\text{S} \times U_2 (0 \le U_2 \le 3)$

2'段 $I_2 = 1\text{S} \times U_2 - 1.5\text{A} (U_2 > 3)$

(2) 线性电路模型







(3) 列写节点电压方程

$$\left(\frac{1}{R_{d1}}+\frac{1}{1\Omega}+G_{d2}\right)U_2=\frac{5\text{V}-U_{O1}}{R_{d1}}-I_{O2}+\frac{3\text{V}}{1\Omega}$$

$$U_2=\frac{\dfrac{5\text{V}-U_{\text{O1}}}{R_{\text{d1}}}-I_{\text{O2}}+3\text{A}}{\dfrac{1}{R_{\text{d1}}}+G_{\text{d2}}+1\text{S}}$$

$$I_1=\frac{5\text{V}-U_{\text{O1}}-U_2}{R_{\text{d1}}}$$

$$\boldsymbol{R_1}:\begin{cases}\textbf{1段} & U_1=1\Omega\times I_1 \quad (0\le I_1\le 2\text{A})\\ \textbf{2段} & U_1=2\Omega\times I_1-2\text{V} \quad (I_1>2\text{A})\end{cases}$$

$$\boldsymbol{R_2}:\begin{cases}\textbf{1'段} & I_2=0.5\text{S}\times U_2(0\le U_2\le 3)\\ \textbf{2'段} & I_2=1\text{S}\times U_2-1.5\text{A}(U_2>3)\end{cases}$$

1,1'组合 $R_{\text{d1}}=1\Omega,\quad U_{\text{O1}}=0\quad G_{\text{d2}}=0.5\text{S},\quad I_{\text{O2}}=0$

代入到上式得 $\Rightarrow U_2=3.2\text{V}$ 超出1‘范围，虚解

1,2'组合 $R_{\text{d1}}=1\Omega,\quad U_{\text{O1}}=0\quad G_{\text{d2}}=1\text{S},\quad I_{\text{O2}}=-1.5\text{A}$

代入到上式得 $\Rightarrow U_2=3.1667\text{V},\ I_1=1.8333\text{A}$

均在规定的取值范围内，是真实解

2,1'组合$R_{\text{d1}}=2\Omega,\quad U_{\text{O1}}=-2\text{V}\quad G_{\text{d2}}=0.5\text{S},\quad I_{\text{O2}}=0$

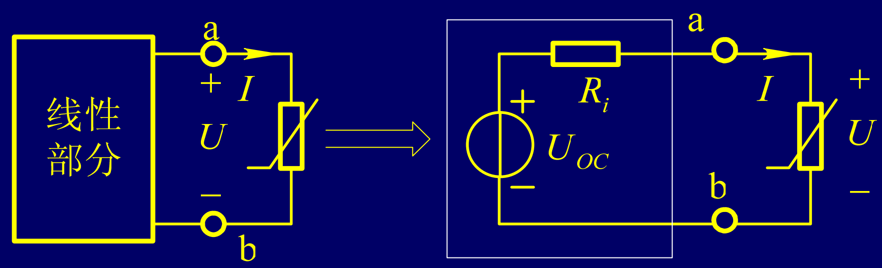
代入到上式得 $\Rightarrow U_2=3.25\text{V}$ 超出1‘范围，虚解

2,2'组合 $R_{d1} = 2\Omega,\quad U_{O1} = -2V\quad G_{d2} = 1S,\quad I_{O2} = -1.5A$

代入到上式得 $\Rightarrow U_2 = 3.2V,\quad I_1 = 1.9A$ **超出2范围，虚解**

基本要求：掌握图解法的基本原理和步骤。

1 对于只含有一个非线性电阻的电路，首先对电路中的线性部分进行戴维南等效；



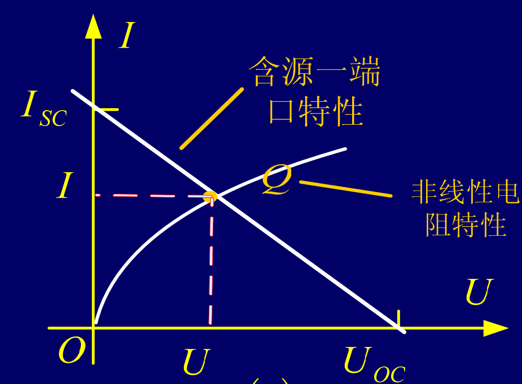
（a）（b）

电路的图解法原理

2 在坐标平面上画出等效电路端口上的特性曲线，它是一条直线；

3 在同一坐标平面上画出非线性电阻的特性曲线；

4 两条线的交点便是电路解答。



（c）

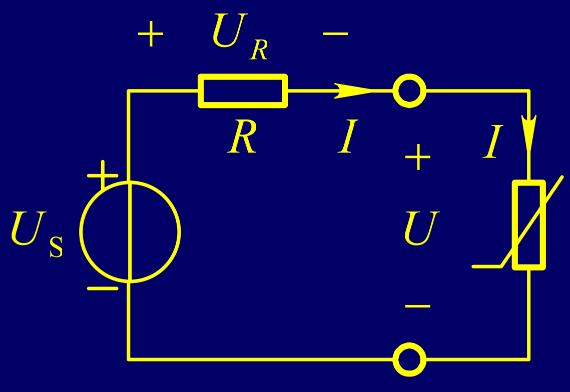
电路的图解法原理

例题 4.6

图(a)所示为分析张弛振荡器工作点的电路。设图中电压源U_S＝9V，非线性电阻为氖管，其特性曲线如图(b)所示。

(1)要求将电路的工作点设计在Q_1和Q_2之间(即负斜率段)，问电阻 R 的取值范围怎样?

(2)若电阻R=1.5kΩ，求此时非线性电阻电压 U 和电流 I。

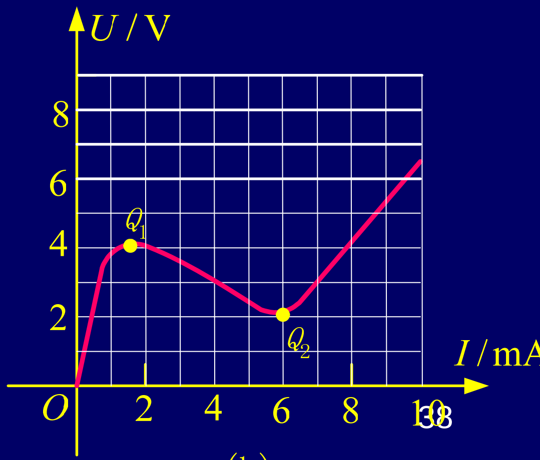


(a)

解

(1)由图(b)可见，Q_1点电流I_1＝1.5mA，电压U_1＝4V 当工作点位于Q_1时，电阻R须满足：

$$R=\frac{U_R}{I_1}=\frac{U_S-U_1}{I_1}=\frac{(9-4)\text{V}}{1.5\times10^{-3}\text{ A}}\approx3.333\text{k}\Omega$$



(b)

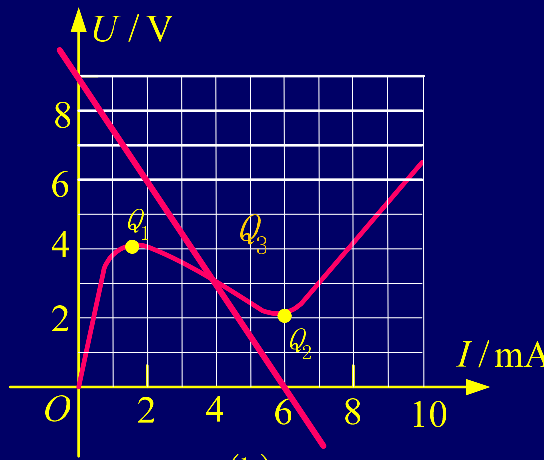
Q_2 点电流 I_2=6mA，电压 U_2=2V。当工作点位于Q_2时，电阻R须满足:

$$R=\frac{U_R}{I_2}=\frac{U_S-U_2}{I_2}=\frac{(9-2)\mathrm{V}}{6\times10^{-3}\mathrm{A}}\approx1.167\mathrm{k}\Omega$$

所以，当 ***R*** 的取值在以上两个电阻之间时则满足要求**(1)**。

(2) 当$\boldsymbol{R}$**＝1.5k**Ω时，线性部分的特性方程为

$$U=U_S-RI=9\mathrm{V}-1.5\mathrm{k}\Omega\times I$$



(b)

作出它在平面上的特性曲线并求出交点，在图中读出交点值。

$$U=3\mathrm{V}$$

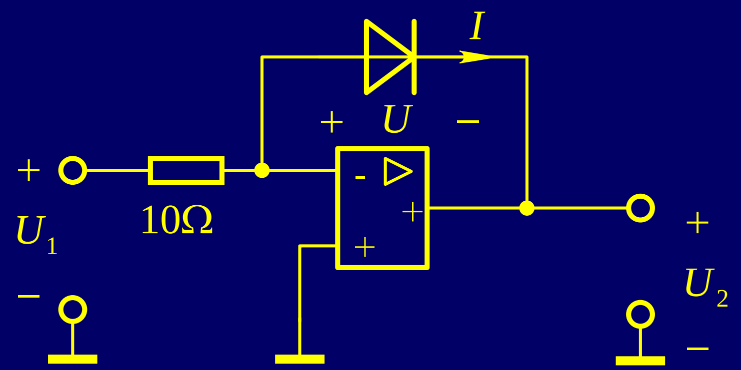
$$I=4\mathrm{mA}$$

[补充4.8]

图示电路中二极管特性近似用 $I=10^{-6}\mathrm{e}^{40U}$ (单位:A,V)表示

(1) 求 U_2 与 U_1 的关系。

(2) 10Ω电阻与二极管交换位置后，再求 U_2 与 U_1 的关系。



图(a)

[解] (1)根据运算放大器输入端口电压为零的条件

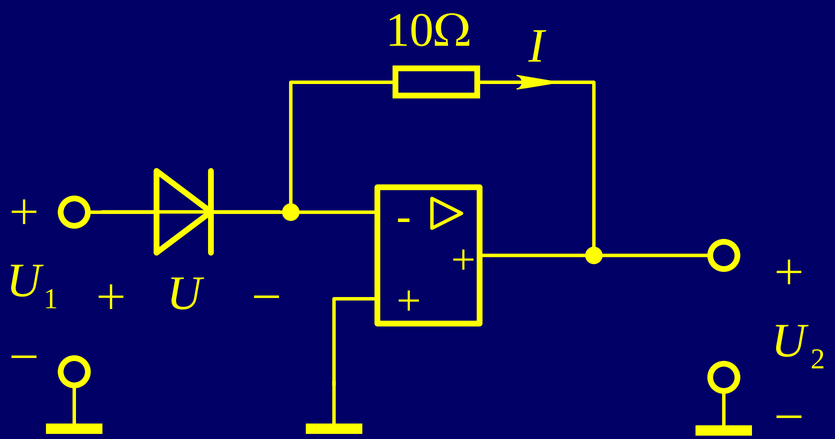
$$U_2+U=0$$

又由二极管特性得 $U=\dfrac{1}{4U}\ln(10^6 I)$

再由运算放大器输入端口电流为零的条件，得 $I=\dfrac{U_1}{10}$

解得 $U_2=-0.025\ln(10^5U_1)\mathrm{V}$ 具有对数运算功能

(2)将10Ω电阻和二极管交换位置后，电路如图(b)所示。电路方程如下



图(b)

$$-U_2 = 10I$$

$$U_1 = U$$

将二极管电压电流特性 $I = 10^{-6} e^{40U}$ 代入解得

$$U_2 = -10^{-5} e^{40U_1} \text{V}$$ 电路具有指数运算功能

1. 非线性电阻元件的端口电压和端口电流关系分为压控型、流控型和单调型三种情况，可用解析函数、曲线或数值表来表达。

2. 含有非线性电阻元件的直流电路方程将是非线性代数方程。如非线性电阻是压控的，宜列节点电压方程；如是流控的，则宜列回路电流方程；如两者都有，可列写改进节点电压法方程。总之，非线性电阻的控制量应取为待求量。

3. 非线性代数方程通常要用数值分析法求解。求解$f(x)=0$的牛顿-拉夫逊法迭代公式是

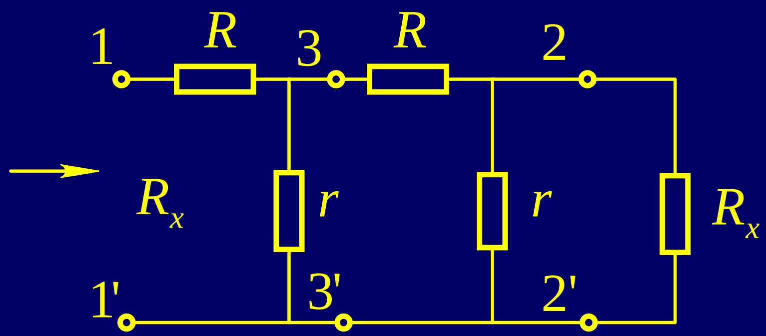
$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k)$$

直至前后两次迭代值之差$|x_{k+1} - x_k|$小于预定的容许误差时$x^{(k+1)}$就是近似解答。

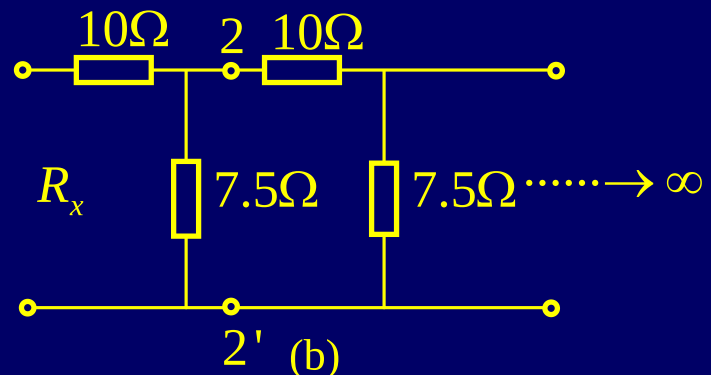
4.非线性电阻元件的特性曲线可用折线逼近，即在一定的工作区段里，分别用线性电路近似等效，称为分段线性化法。但是用此法所得工作点，须逐一判断其是否位于等效区段，以确定其为真解还是虚解。由于线性电路已有成熟计算方法，把一个非线性电路的计算化成若干线性电路的计算，是一种有效的近似方法。

5.电路中存在一个非线性电阻时，图解法是一种有效的方法。在$U-I$平面上，线性一端口的外特性和非线性电阻的特性曲线的交点就是工作点。

习题2.6： 求图(a)和(b)所示电路的等效电阻 R_x

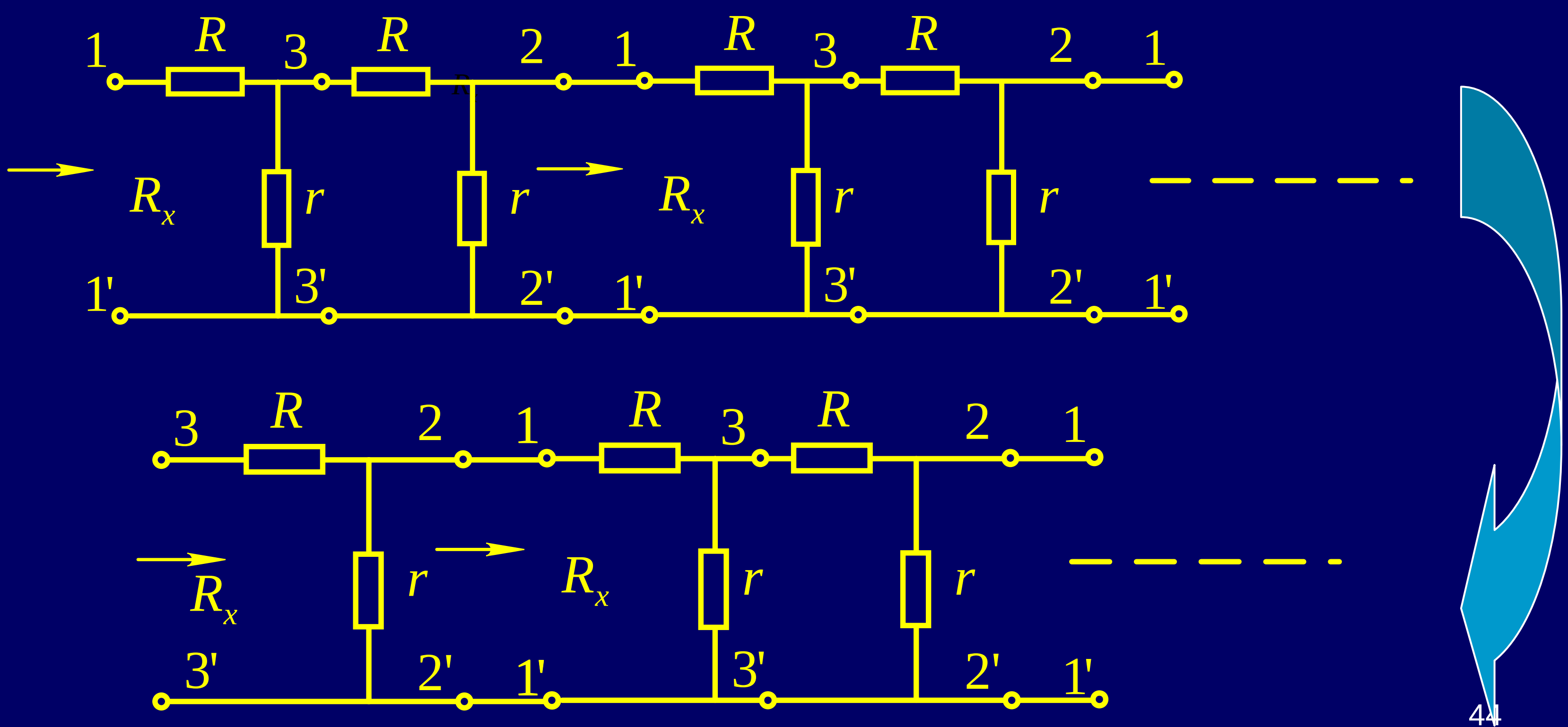


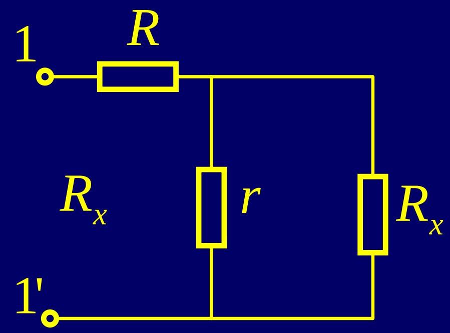
(a)



(b)

习题2.6





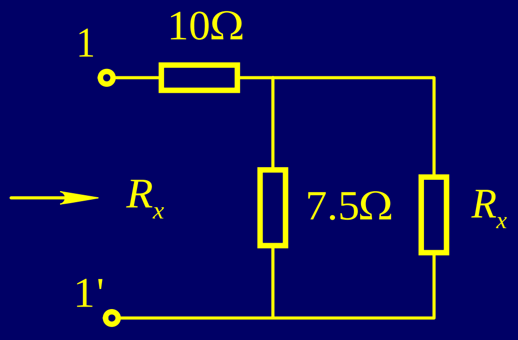
(a-1)

$$R_x = R + \frac{rR_x}{r+R_x} \Rightarrow R_x = (R \pm \sqrt{R^2+4Rr})/2$$

解得 $R_x = (R + \sqrt{R^2+4Rr})/2$

图(b)为无限长链形电路，所以从 $11'$ 和 $22'$ 向右看进去的等效电阻均为 R_x，故计算 R_x 的等效电路如图(b-1)所示

$$R_x = \frac{10+\sqrt{10^2+4\times10\times7.5}}{2}\Omega = 15\Omega$$



(b-1)