哈爾濱工業大學

第10章 线性动态电路暂态过程的时域分析

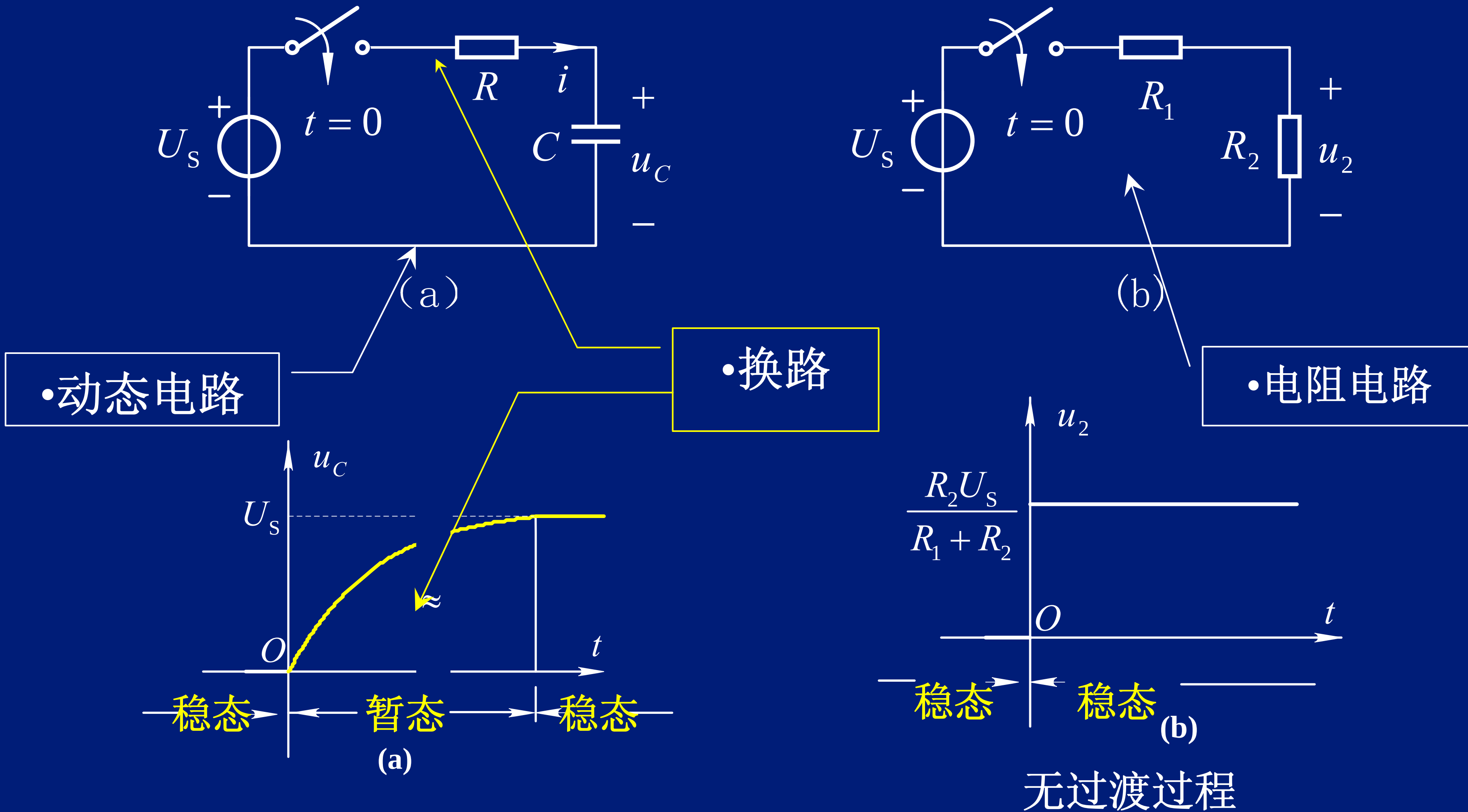
主讲教师 齐超

提要 本章重点讨论一阶线性动态电路暂态过程的时域分析方法。主要内容包括初始值、时间常数、强制分量和自由分量等概念；求解零输入、零状态、全响应及单位阶跃响应的方法；掌握普遍适用的三要素公式。其次了解二阶动态电路在不同条件下解的特点。最后简要介绍状态方程的列写。

本章目次

10.1 动 态 电 路 的 暂 态 过 程

基本要求：了解动态电路暂态过程及时域分析的基本概念。



时域分析：列微分方程；定初值；解微分方程

基本要求：透彻理解换路定律，熟练计算电路量的初始值。

1 电容电压u_C和电感电流i_L初始值的确定

设在线性电容上电压和电流参考方向相同，则有

$$q(t) = Cu_C(t) = \int_{-\infty}^{t} i_C(\xi)\mathrm{d}\xi$$

电容电荷的初始值可表示为

$$q(0_+) = Cu_C(0_+) = \int_{-\infty}^{0_+} i_C(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{0_-} i_C(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi)\mathrm{d}\xi$$

等号右端第一项积分表示t=0-时的电荷 q(0-)，故

$$q(0_+) = Cu_C(0_+) = q(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi)\mathrm{d}\xi$$

若在 $t = 0$ 瞬间电容电流有界，则上式积分为零，于是得

$$q(0_+) = q(0_-) \qquad u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

电感：对偶原理有 $\Psi(0_+)=\Psi(0_-)$ $i_L(0_+)=i_L(0_-)$

$q(0_+)=q(0_-)$ $u_C(0_+)=u_C(0_-)$

$$\left.\begin{aligned}\Psi(0_+)=\Psi(0_-) \quad & i_L(0_+)=i_L(0_-)\\ q(0_+)=q(0_-) \quad & u_C(0_+)=u_C(0_-)\end{aligned}\right\}\text{换路定律}$$

2 除u_C、i_L之外各电压电流初始值的确定

依据电路的结构约束和元件约束，在t=0$_+$瞬间有：

KVL $\sum u(0_+)=0$

KCL $\sum i(0_+)=0$

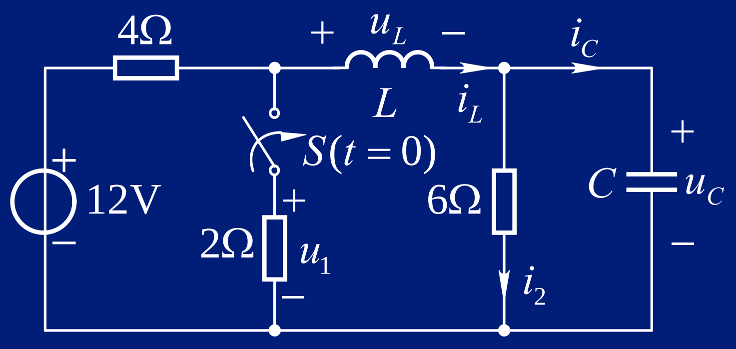
电阻元件 $u_R(0_+)=Ri_R(0_+)$ 或 $i_R(0_+)=Gu_R(0_+)$

电感元件 $i_L(0_+)=i_L(0_-)$ →相当于直流电流源

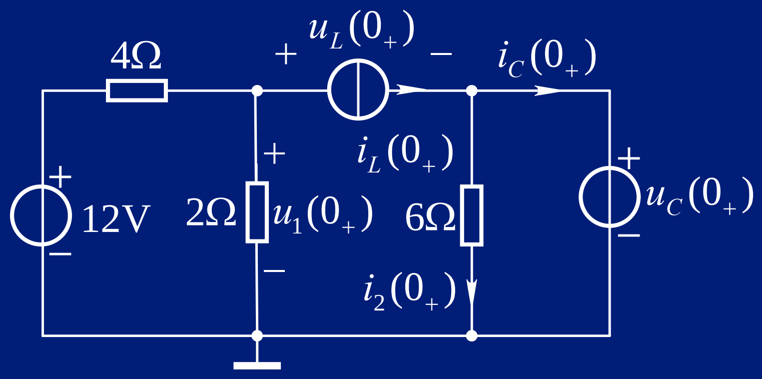
电容元件 $u_C(0_+)=u_C(0_-)$ →相当于直流电压源

于是电路将成为电阻电路，其它初值可用分析直流电路的各种方法来求解

例题 10.1 图(a)所示电路，在$t<0$时处于稳态，$t=0$时开关接通。求初始值$i_L(0_+)$、$u_C(0_+)$、$u_1(0_+)$、$u_L(0_+)$及$i_C(0_+)$。



(a)



(b)

解 开关在接通之前，电路是直流稳态。于是求得

$$i_L(0_-)=\frac{12\text{V}}{(4+6)\Omega}=1.2\text{A} \qquad u_C(0_-)=6\Omega\times i_L(0_-)=7.2\text{V}$$

由换路定律得 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=1.2\text{A} \qquad u_C(0_+)=u_C(0_-)=7.2\text{V}$

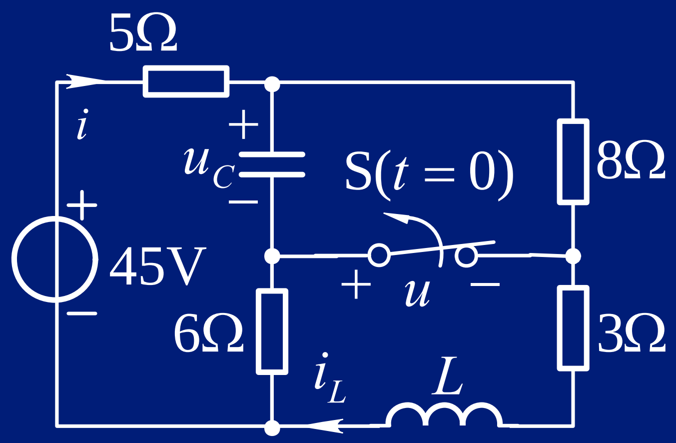
$t=0_+$时的等效电路如图(b)

$$\left(\frac{1}{4\Omega}+\frac{1}{2\Omega}\right)u_1(0_+)=\frac{12\text{V}}{4\Omega}-i_L(0_+)$$

求得 $u_1(0_+)=2.4\text{V}$

$$u_L(0_+)=u_1(0_+)-u_C(0_+)=-4.8\text{V}\,;\quad i_C(0_+)=i_L(0_+)-i_2(0_+)=i_L(0_+)-\frac{u_C(0_+)}{6\Omega}=0$$

[补充10.1] 图示电路 $t<0$时处于稳态， $t=0$时开关断开。求初始值 $u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$ 及开关两端电压 $u(0_+)$



[解] $t<0$时电容开路，电感短路，

3 Ω 与 6 Ω 电阻并联，所以

$$i(0_-)=\frac{45\text{V}}{(5+8+\frac{6\times3}{6+3})\Omega}=3\text{A}$$

$$i_L(0_-)=\frac{6}{6+3}\times i(0_-)=2\text{A}=i_L(0_+)$$

由换路定律得

$$u_C(0_-)=8\times i(0_-)=24\text{V}=u_C(0_+)$$

由**KVL**得开关电压

$$u(0_+)=-u_C(0_+)+8\times i_L(0_+)=(-24+8\times2)\text{V}=-8\text{V}$$

基本要求：掌握一阶电路零输入响应的定义、计算及解的一般形式；理解时间常数的含义及与电路元件参数的关系。

一阶电路

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R}u_C=i_{SC}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_C=\frac{1}{C}i_{SC}$$

$$u_C(0_+)=U_{C0}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=u_{OC}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{L/R}i_L=\frac{1}{L}u_{OC}$$

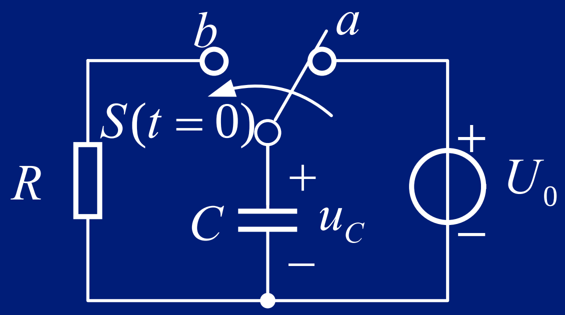
$$i_L(0_+)=L_{L0}$$

只含一个（或可化为一个）动态元件的电路，其暂态过程可用一阶常微分方程描述的电路 → 一阶电路

零输入响应

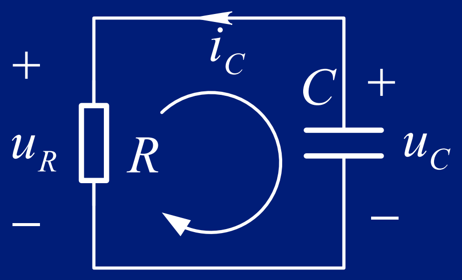
换路后无独立源作用，仅由储能元件原始储能引起的响应。

1 *RC*电路的零输入响应



（a）

$t > 0$



(b)

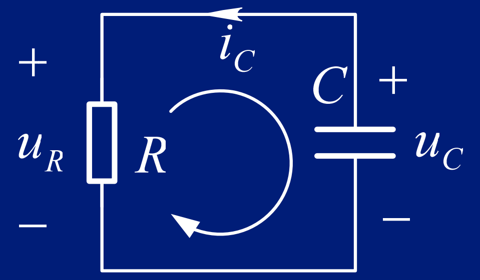
根据KVL列出$t > 0$时电路的微分方程

$$-u_R + u_C = -Ri_C + u_C = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

根据换路定律 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

$$-u_R + u_C = -Ri_C + u_C = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$



***RC*电路的零输入响应**

特征方程 $RCp + 1 = 0$

特征根 $p = -\frac{1}{RC}$

通解 $u_C = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$

代入初值 $u_C(0_+) = Ae^0 = A = U_0$

解得 $u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$

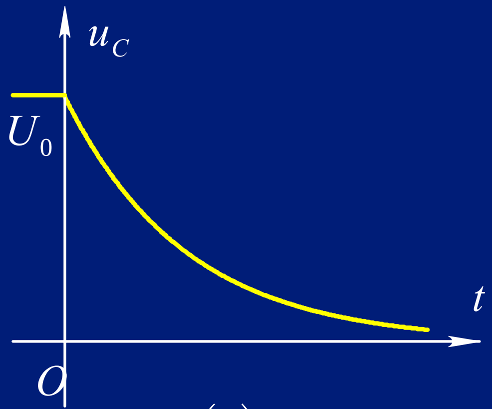
$$i_C = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$

$$= \frac{u_C}{R}$$

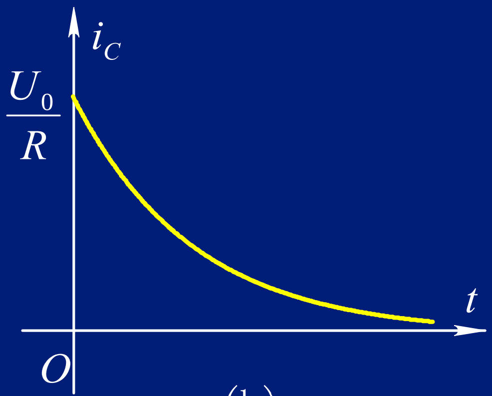
$t = 0$处不连续

$$u_C = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

$$i_C = \frac{u_C}{R} = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$



(a)



(b)

u_C 和 i_C 的变化曲线

可见u_C和i_C的衰减速率取决于RC之积。令

$\tau = RC$ 时间常数（单位：s）

τ 对放电时间的影响

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	…	∞
$u_C(t)$	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.018U_0$	$0.007U_0$	…	0

τ对放电时间的影响——经过 3τ~5τ的时间, 放电基本结束。

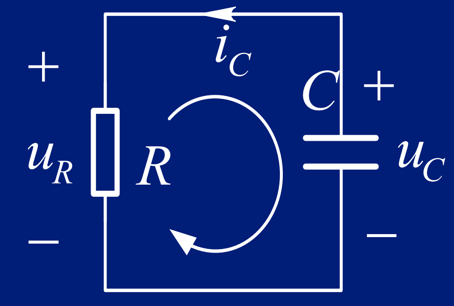
时间常数τ的理解

C越大 → τ越大 ← **R**越大

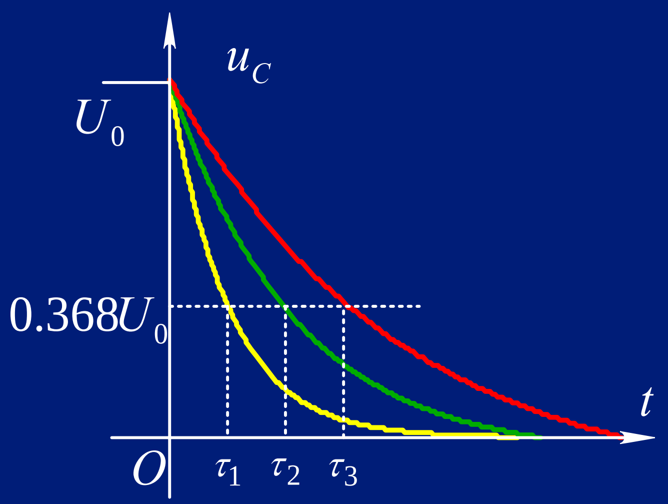
$w_e = Cu_C^2/2$ $\qquad$ $p = u_R^2/R$

电容储能越多 $\qquad$ 电阻消耗功率越小

放电时间越长



***RC*电路的零输入响应**



$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$

不同τ值的 u_C变化规律

放电过程中的能量传递

电容的原始储能

$$W_e(0_+) = \frac{1}{2}Cu_C^2(0_+) = \frac{1}{2}Cu_C^2(0_-) = \frac{1}{2}CU_0^2$$

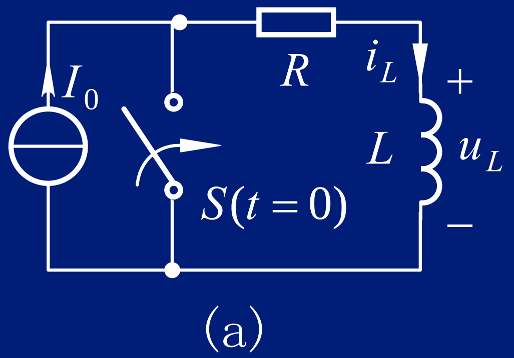
$$\parallel$$

电阻所消耗的能量

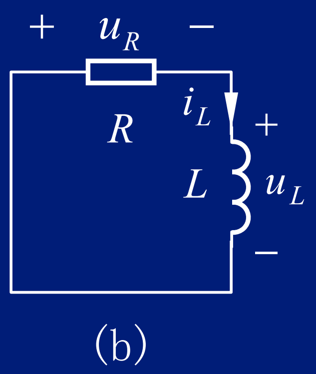
$$\int_{0_+}^{\infty} p_R(t)\mathrm{d}t = \int_{0_+}^{\infty} i_C^2(t)R\mathrm{d}t = \int_{0_+}^{\infty} \left(\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_0^2$$

2 *RL*电路的零输入响应

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_0$$



$t>0$



KVL方程

$$u_L+u_R=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=0$$

特征方程 $Lp+R=0$

特征根 $p=-\dfrac{R}{L}$

通解 $i_L(t)=A\mathrm{e}^{pt}=A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=A\mathrm{e}^{-t/\tau}$

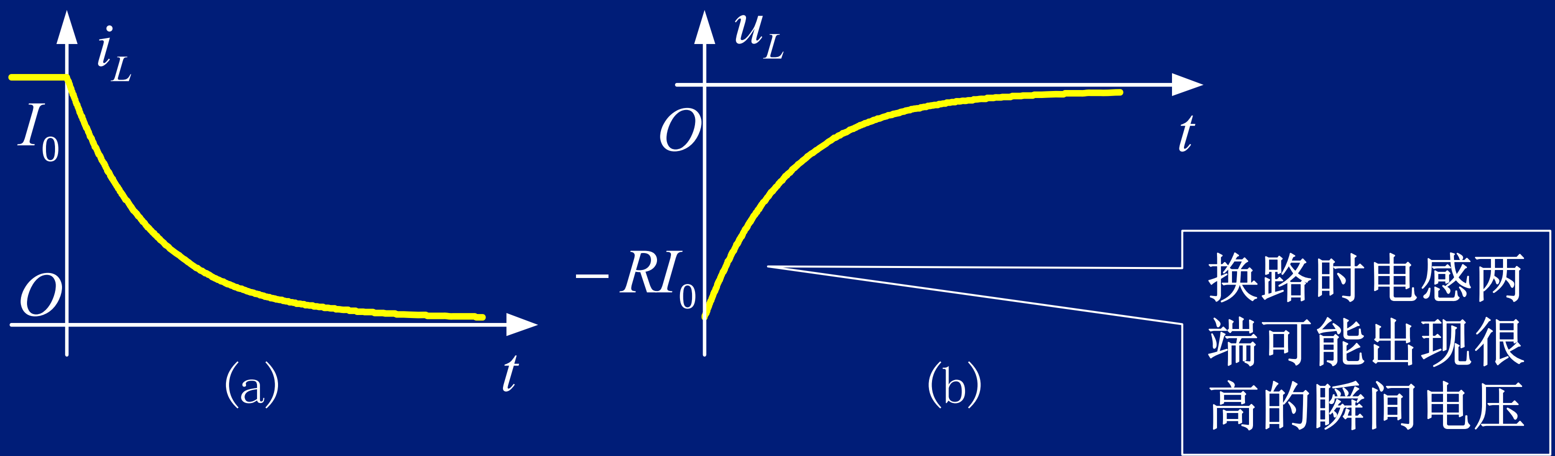
$$i_L(0_+)=A\mathrm{e}^{0}=A=I_0$$

$$i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}=I_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\qquad(t\geq 0)$$

$\tau=L/R$

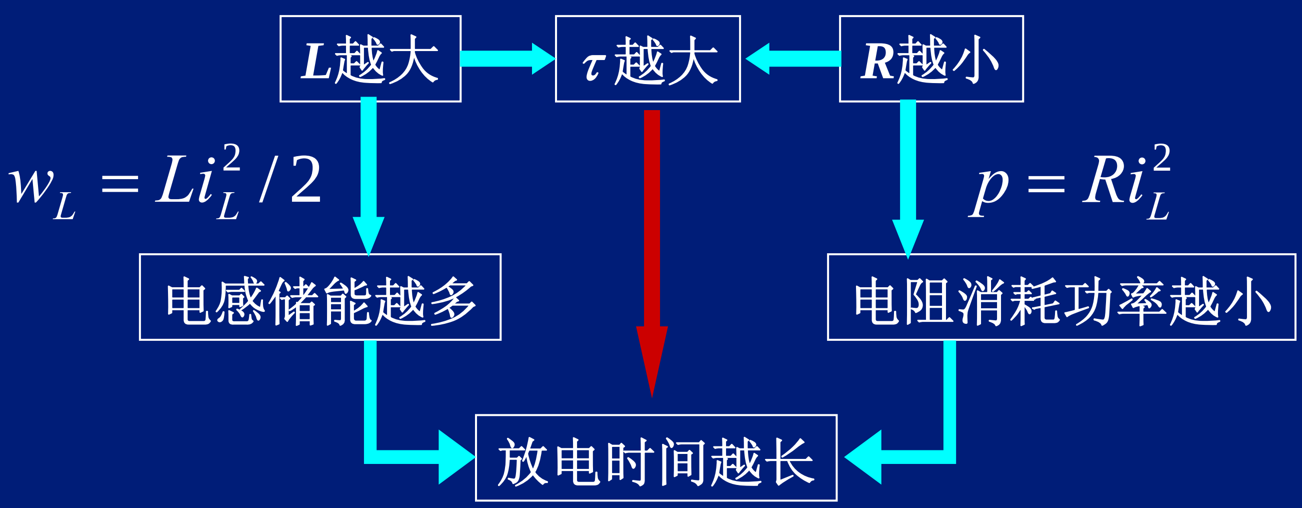
$$u_L=-Ri_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-RI_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\qquad(t>0)$$

$$i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} = I_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\ (t \geq 0) \qquad u_L = -Ri_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -RI_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\ (t > 0)$$



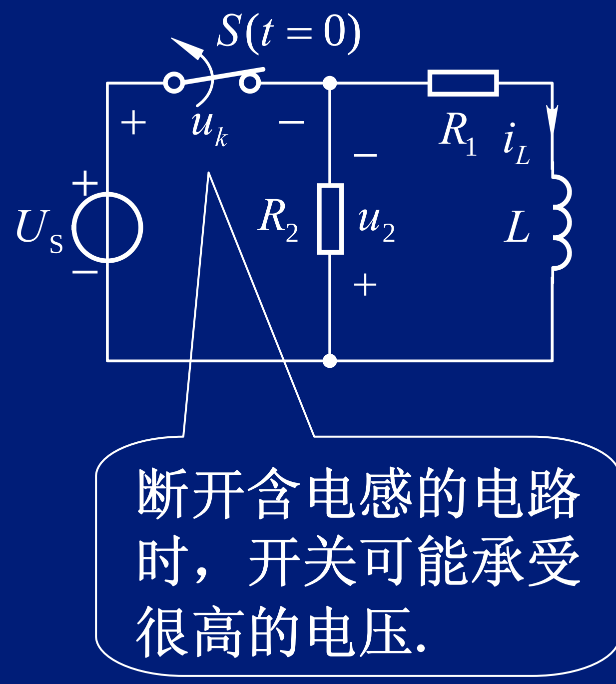
i_L 和 u_L 的变化曲线

时间常数τ的理解



例题 10.2

图示电路，已知U_S=35V，R_1=5Ω，R_2=5kΩ，L=0.4H。t<0时电路处于直流稳态。t=0时开关断开。求t>0时的电流i_L及开关两端电压u_k。



解 i_L的初始值 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=\dfrac{U_S}{R_1}=7\text{A}$

时间常数 $\tau=\dfrac{L}{R}=\dfrac{L}{R_1+R_2}\approx 8\times10^{-5}\text{s}$

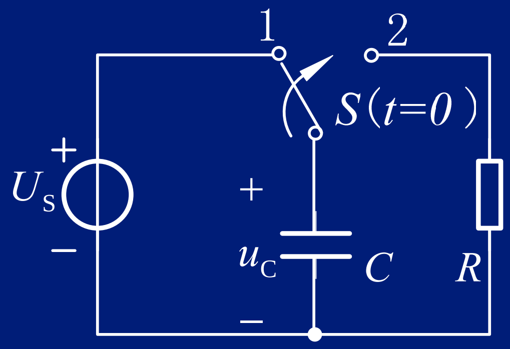
得 $$i_L(t)=i_L(0_+)\text{e}^{-t/\tau}=7\text{e}^{-1.25\times10^4 t}\text{A} \qquad (t\geq 0)$$

再由KVL $$u_k=U_S+u_2=U_S+R_2 i_L=$$

$$(35+3.5\times10^4\text{e}^{-1.25\times10^4 t})\text{V} \qquad (t>0)$$

$t\to 0_+$时，$$u_k(0_+)=(35+3.5\times10^4)\text{V}\approx 3.5\times10^4\text{V}$$

[补充10.2] 图示电路中 C 为高压电容器，且已充电完毕，$u_C(0\text{-})$=10kV。设 t=0 时，开关由端子1打到端子2，15分钟后，u_C 降低为 3.2kV，问



(1) 再经过15分钟后电容电压降为多少？

(2) 如果电容C=15μF，R=？

[解] 全过程为零输入响应

$$u_C(t) = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 10^4\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\ \mathrm{V}$$

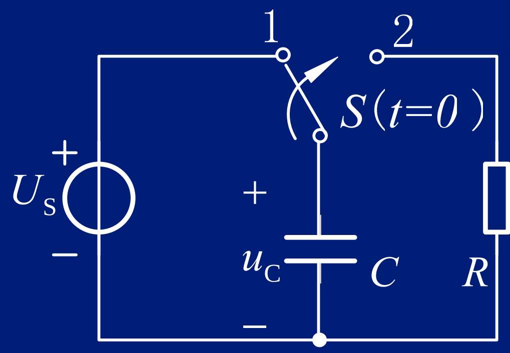
$$t = 15\min = 60\times 15 = 900\ \mathrm{s} \qquad 3.2\times 10^3 = 10\times 10^3\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{900}{\tau}} = 0.32 \rightarrow \ \tau = RC = -\frac{900}{\ln 0.32} \approx 789.87\mathrm{s}$$

$$(1)\quad u_C(30) = 10^4\mathrm{e}^{-\frac{30\times 60}{\tau}} = 10^4\mathrm{e}^{-\frac{15\times 60}{\tau}}\times\mathrm{e}^{-\frac{15\times 60}{\tau}} = 10^4\times 0.32\times 0.32 = 1024\mathrm{V}$$

$$(2)\qquad R = \frac{\tau}{C} = 52.66\mathrm{M\Omega}$$

[补充10.2] 图示电路中 C 为高压电容器，且已充电完毕，$u_C(0\text{-})=10\text{kV}$。设 $t=0$ 时，开关由端子1打到端子2，15分钟后，u_C 降低为 3.2kV，问



(3) 需要多长时间电容电压可降至30V以下？

(4) 若 C 不变，R 变为0.2Ω，电容最大放电电流是多少？若认为 $t=5\tau$ 时放电完毕，那么放电的平均功率是多少？

(3) $$30=10^4\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=10^4\mathrm{e}^{-\frac{t}{790}} \Rightarrow t=-790\ln\frac{3}{1000}=4589\mathrm{s}$$

(4) $$\tau'=15\times0.2\times10^{-6}=3\times10^{-6}\mathrm{s}$$

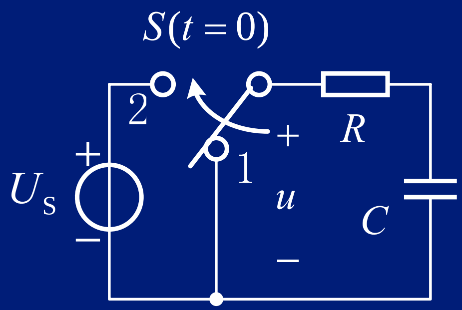
$$u_C(t)=10^4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\times10^6 t}\ \mathrm{V}$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-5\times10^4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\times10^6 t}\ \mathrm{A} \qquad i_{C\max}=i_C(0)=5\times10^4\ \mathrm{A}$$

$$P=W/t=\frac{0.5Cu_C^2(0\_)}{5\tau'}=\frac{15\times10^{-6}\times10^8}{10\times3\times10^{-6}}=50\times10^6\,\mathrm{W}=50\mathrm{MW}$$

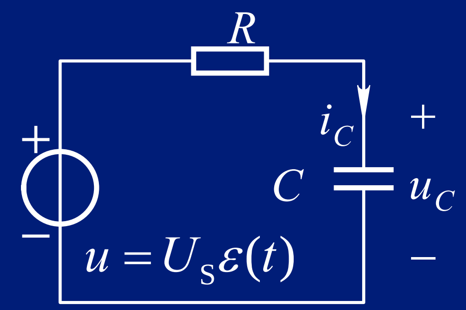
基本要求：掌握单位阶跃函数与单位冲激函数的定义及其相互关系。

1 单位阶跃函数



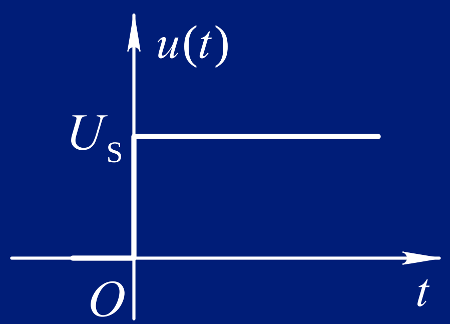
(a)

等效为



(c)

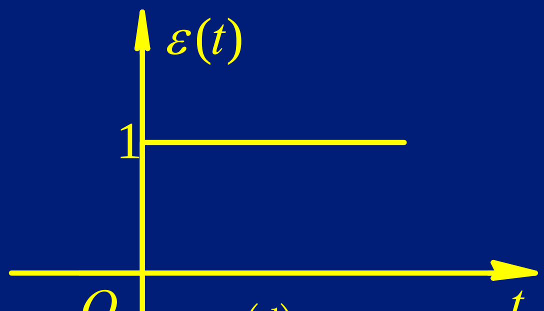
u(t)的波形



(b)

若幅值为1

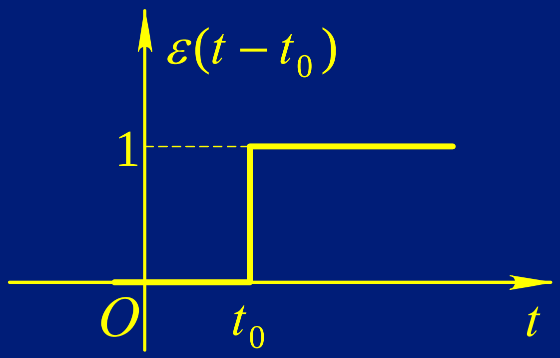
单位阶跃函数



(d)

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

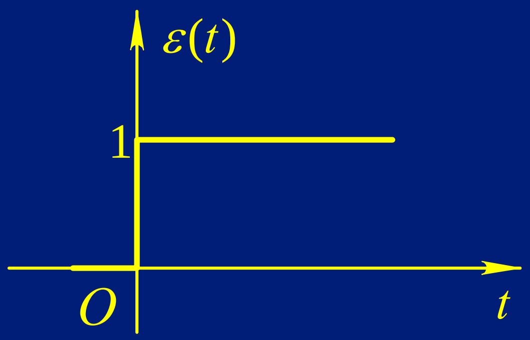
2 单位脉冲函数



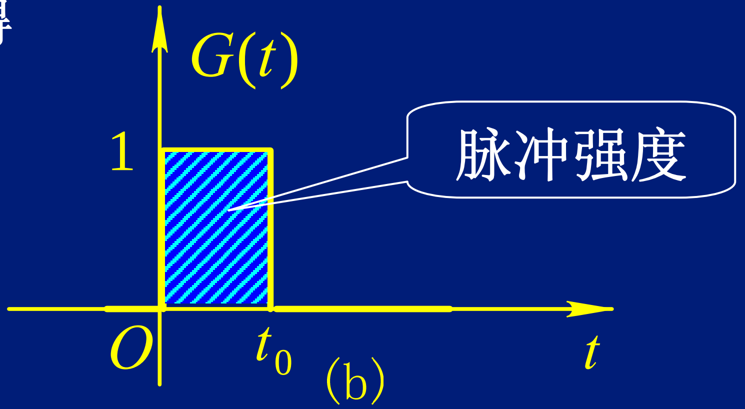
阶跃发生在
$t = t_0$时刻

延迟单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$



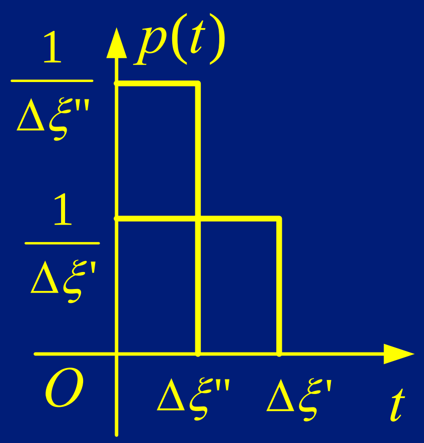
二者相减得到脉冲函数



$$G(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

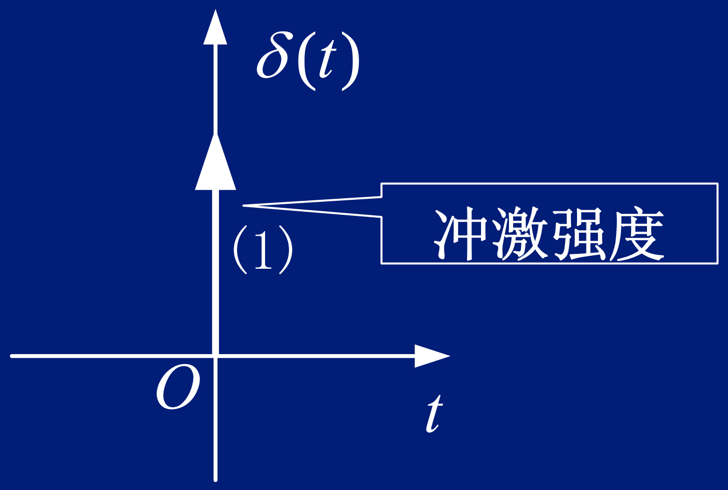
单位脉冲：强度等于1的脉冲。

3 单位冲激函数



单位脉冲函数宽度的变化

宽度趋于零



单位冲激函数

函数表示

$$\begin{cases} \delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \text{奇异} & (t = 0) \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$

延迟单位冲激函数

$\delta(t - t_0)$

4 单位冲激函数的性质

$$\begin{cases} \delta(t) = \delta(-t) \\ \delta(t-t_1) = \delta(t_1-t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \\ f(t)\delta(t-t_1) = f(t_1)\delta(t-t_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_1)\mathrm{d}t = f(t_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)\mathrm{d}\xi = \varepsilon(t) \\ \int_{-\infty}^{t} \delta(\xi-t_1)\mathrm{d}\xi = \varepsilon(t-t_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t) = \varepsilon'(t) \\ \delta(t-t_1) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t-t_1) = \varepsilon'(t-t_1) \end{cases}$$

10.5 一阶电路的零状态响应

基本要求：理解零状态响应的定义、强制分量与自由分量、稳态分量与暂态分量的含义；掌握单位阶跃特性计算。

零状态响应： 电路中储能元件的原始储能为零［即$u_C(0_-)=0$，$i_L(0_-)=0$］，仅由独立电源作用引起的响应。

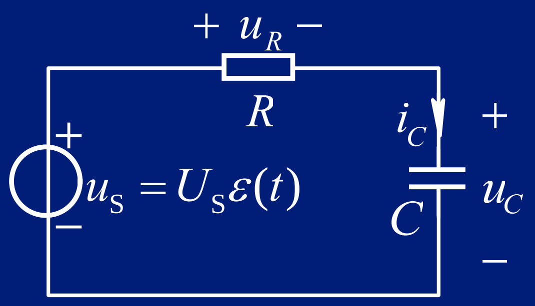
1 阶跃响应与单位阶跃特性

→直流激励零状态响应

阶跃响应： 电路在阶跃电源作用下的零状态响应

单位阶跃特性： $s(t)$ = 阶跃响应 / 阶跃电源幅值

图示电路中$u_C(0_-)=0$，以$u_C(t)$为响应的单位阶跃特性为



$$s(t)=\frac{u_C(t)}{U_S}$$ （无量纲）

$s(t)$ 量值上为单位阶跃电源 $\varepsilon(t)$引起的零状态响应

单位阶跃特性还可能具有电阻或电导的量纲

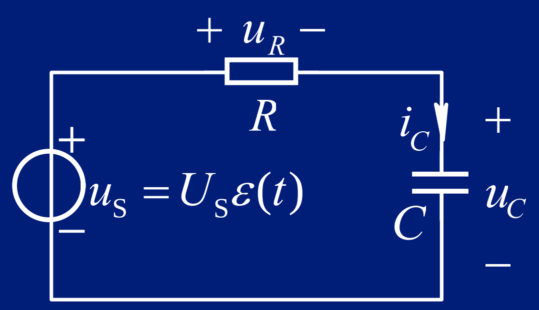
单位阶跃特性

KVL方程 $u_R + u_C = u_S$

$u_R = Ri$

$i = C\mathrm{d}u_C / \mathrm{d}t$

$u_S = U_S\,\varepsilon(t)$



***RC*电路的阶跃响应**

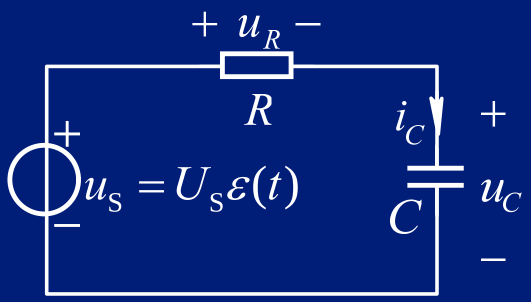
$$\left.\begin{aligned} & RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_S\varepsilon(t) \\ & u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \end{aligned}\right\}$$

代入 $s(t) = \dfrac{u_C(t)}{U_S}$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = \varepsilon(t) \\ s(0_+) = 0 \end{cases}$$

其通解 $s(t) = s_h(t) + s_p(t)$

求解RC一阶电路的单位阶跃特性$s(t)$



RC电路的阶跃响应

$$RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = \varepsilon(t)$$

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t)$$

齐次方程

$$RC\frac{\mathrm{d}s_h(t)}{\mathrm{d}t} + s_h(t) = 0$$

通解为

$$s_h(t) = A\mathrm{e}^{-t/RC} = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$t \to \infty$

$$u_S(\infty) = u_C(\infty) = U_S$$

$u_S = \varepsilon(t)$

$$s(\infty) = 1$$

$$s_p(t) = 1$$

$$\underbrace{s(t) = s_p(t) + s_h(t)}$$

$$s(t) = 1 + A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

当 $t = 0_+$ $\qquad s(0_+) = 1 + A = 0$

$$A = -1$$

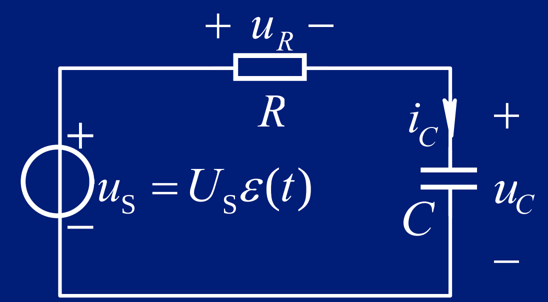
单位阶跃特性

$$s(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

引用$\varepsilon(t)$，定义域至$-\infty < t < \infty$

$$s_C(t) = (1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})\varepsilon(t)$$

利用$s_C(t)$ 求解RC一阶电路零状态响应



RC电路的阶跃响应

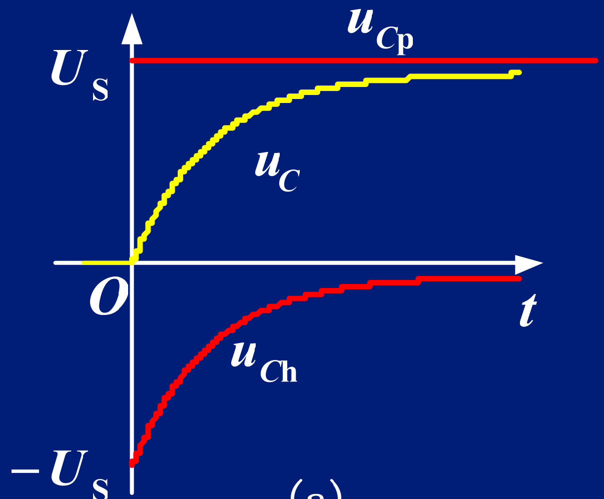
$$s(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad + \qquad s(t) = u_C(t)/U_S$$

$$\Downarrow \ u_S = U_S\,\varepsilon(t)$$

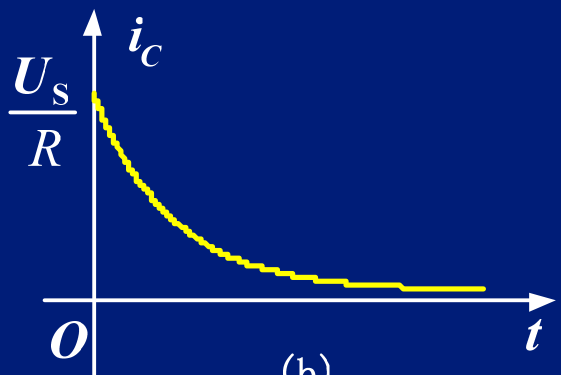
$$u_C(t) = U_S s(t) = U_S(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})\varepsilon(t)$$

$$(-\infty < t < \infty)$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\varepsilon(t)$$



(a)

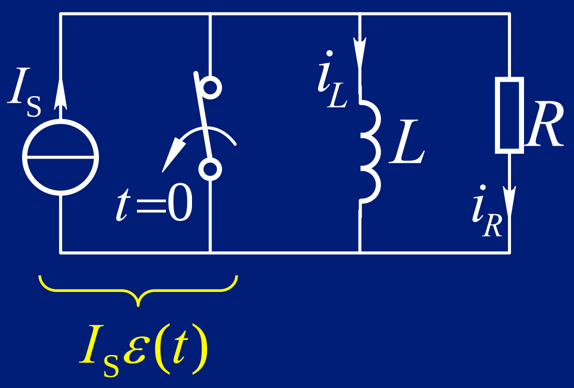


(b)

$$i_C(t) = i_R = \frac{U_S - u_C(t)}{R} = \frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\varepsilon(t)$$

充电结束 $$W_R = \int_0^\infty i_R^2(t)R\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_S^2 = W_e$$

由RL一阶电路零状态响应求解单位阶跃特性



$$i_L(0_+)=0$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}+i_L=I_S$$

$$\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{L/R}i_L=\frac{1}{L}RI_S$$

$$i_L(t)=i_{LP}+i_{Lh}=i_{LP}+Ae^{-\frac{t}{L/R}}=(I_S-I_Se^{-\frac{t}{\tau}})=I_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

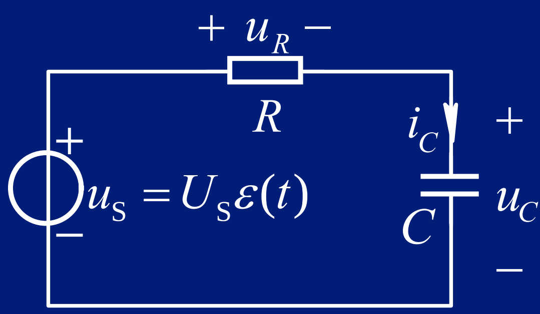
$$(t\geq 0) \qquad (-\infty<t<+\infty)$$

$$s_L(t)=\frac{i_L(t)}{I_S}=(1-e^{-\frac{t}{L/R}})\varepsilon(t)$$

若$t=t_0$时换路，即$i_S=I_S\varepsilon(t-t_0)$

$$i_L(t)=I_S(1-e^{-\frac{t-t_0}{L/R}})\varepsilon(t-t_0) \qquad s_L(t)=(1-e^{-\frac{t-t_0}{L/R}})\varepsilon(t-t_0)$$

延迟阶跃响应 (即$t=t_0$时换路)



t=0时换路 $u_S = U_S\,\varepsilon(t)$

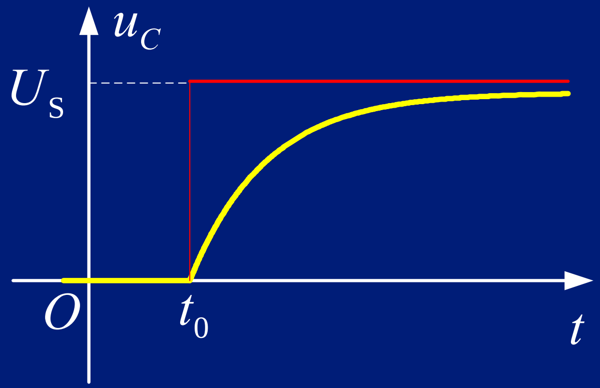
$$u_C(t) = U_S(1-e^{-t/\tau})\varepsilon(t)$$

若 $u_S = U_S\varepsilon(t-t_0)$

$$u_C(t) = U_S(1-e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\varepsilon(t-t_0)$$

$$i_C(t) = \frac{U_S}{R}e^{-t/\tau}\varepsilon(t)$$

$$i_C(t) = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\varepsilon(t-t_0)$$



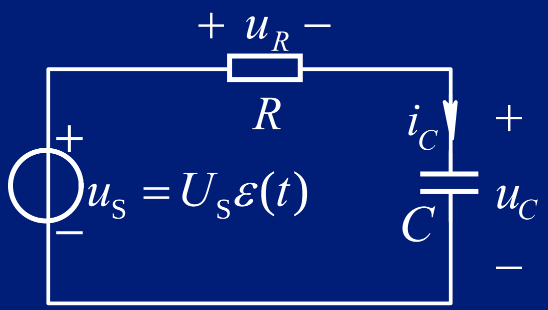
延迟阶跃响应波形

激励	→	响应
$\varepsilon(t)$		$s(t)$
$k\varepsilon(t)$		$ks(t)$
$k\varepsilon(t-t_0)$		$ks(t-t_0)$
$e(t)\varepsilon(t)$		$r(t)s(t)$
$e(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$		$r(t-t_0)s(t-t_0)$

脉冲响应

$$u_S = U_S[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-t_0)]$$

$$\Downarrow$$

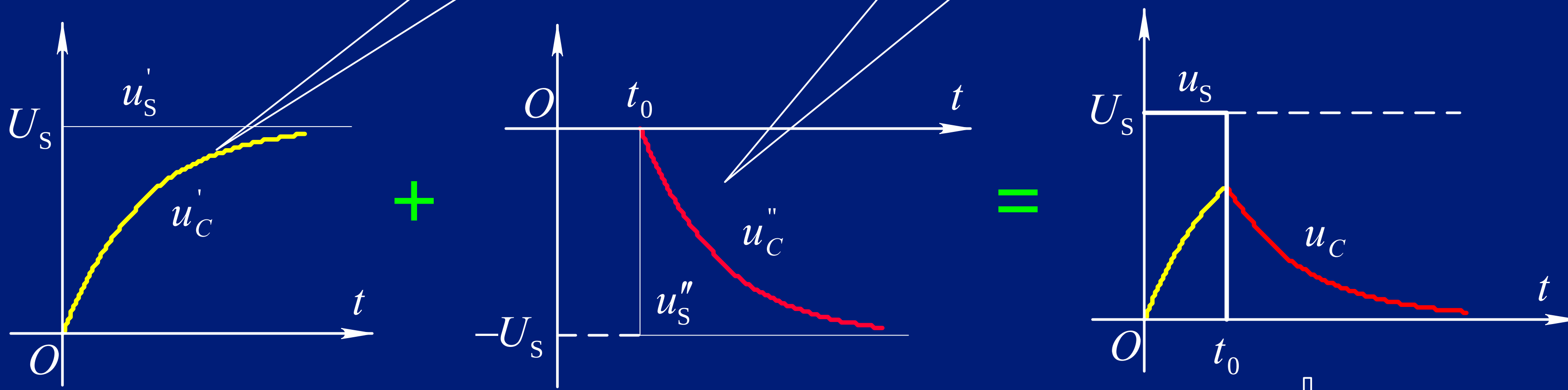


$$u_C(t) = U_S s(t) - U_S s(t-t_0)$$

$$= U_S(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\varepsilon(t) - U_S(1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau})\varepsilon(t-t_0)$$

脉冲响应

$$u_C(t)=U_S s(t)-U_S s(t-t_0)=\boxed{U_S(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\varepsilon(t)}\boxed{-U_S(1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau})\varepsilon(t-t_0)}$$

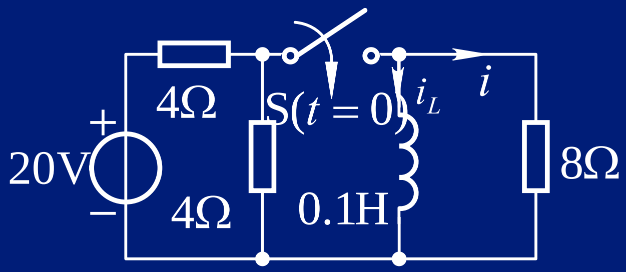


脉 冲 响 应 的 电 压 波 形

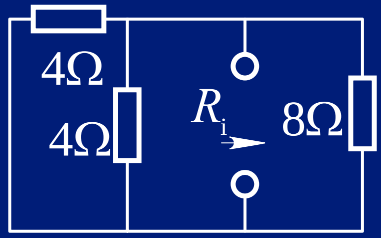
u_C表示为分段函数

$$u_C(t)=\begin{cases}0, & (t<0)\\ U_S(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}), & (0\le t<t_0) \longrightarrow \text{零状态响应}\\ U_S(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})-U_S(1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau})=\underbrace{U_S(1-\mathrm{e}^{-t_0/\tau})\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}}_{\text{零输入响应}}, & (t\ge t_0)\end{cases}$$

[补充10.3] 图(a)所示电路，开关原是断开的，$t=0$ 时接通。求$t>0$ 时的电流 i 。



(a)



(b)

[解] 开关原是断开，由换路定律得 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$

达到稳态时电感处于短路，故 $i_L(\infty)=20/4=5\text{A}$

求等效电阻的电路如图(b)所示。等效电阻 $R_i=(4//4)//8=1.6\Omega$

时间常数 $\tau=L/R_i=(1/16)\text{s}$

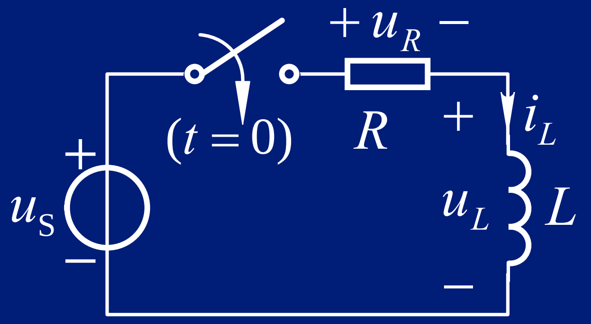
$t>0$后电路为零状态响应，故电感电流

$$i_L(t)=i_L(\infty)(1-e^{-t/\tau})=5(1-e^{-16t})\text{A}\quad(t\ge 0)$$

$$i(t)=\frac{u_L}{8\Omega}=(L\frac{di_L}{dt})/8\Omega=\frac{0.1\times5\times16\times e^{-16t}}{8}=e^{-16t}\text{A}\qquad(t>0)$$

2 一阶电路在正弦电源作用下的零状态响应

设图示电路中，u_S 为正弦电压源



$$u_S = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$

接入角(t=0)时初相

t>0 时, 微分方程 $L\dfrac{di_L}{dt} + Ri_L = u_S$

初始值 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$

通 解 $i_L = i_{Lp} + i_{Lh}$

特解　　齐次通解

(1) 特解 $L\dfrac{di_{LP}}{dt} + Ri_{LP} = u_S$

根据正弦量的相量表达式

$$j\omega L\dot{I}_{mLp} + R\dot{I}_{mLp} = \dot{U}_m$$

解得

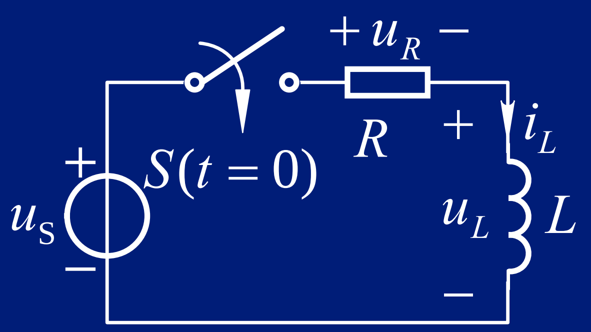
$$\dot{I}_{mLp} = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L} = I_{mLp}e^{j\psi_i} = \frac{U_m}{|Z|}e^{j(\psi_u - \varphi)}$$

表示为正弦量

$$i_{Lp}(t) = I_{mLp}\cos(\omega t + \psi_i)$$

(2) 对应的齐次通解

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=u_\mathrm{S}$$



对应齐次微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}i_{L\mathrm{h}}}{\mathrm{d}t}+Ri_{L\mathrm{h}}=0$$

其通解

$$i_{L\mathrm{h}}(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$+$$

$$i_{L\mathrm{p}}(t)=I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos(\omega t+\psi_\mathrm{i})$$

(3) 微分方程的通解 i_L

$$i_L=I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos(\omega t+\psi_\mathrm{i})+A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

(4) 确定积分常数

$$i_L = I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}}) + A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

由换路定律

令 t=0_+

$$i_L(0_+) = I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos(\psi_{\mathrm{i}}) + A = 0$$

解得

$$A = -I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos\psi_{\mathrm{i}}$$

代回通解公式

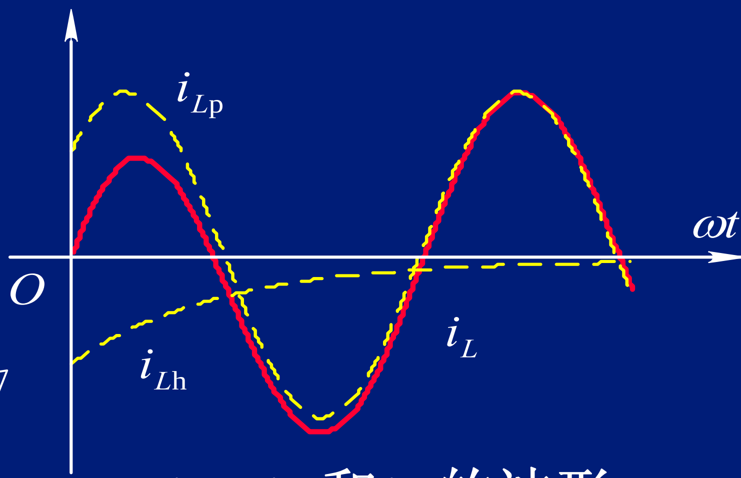
$$i_L = I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}}) - (I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos\psi_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

稳态分量

强制分量

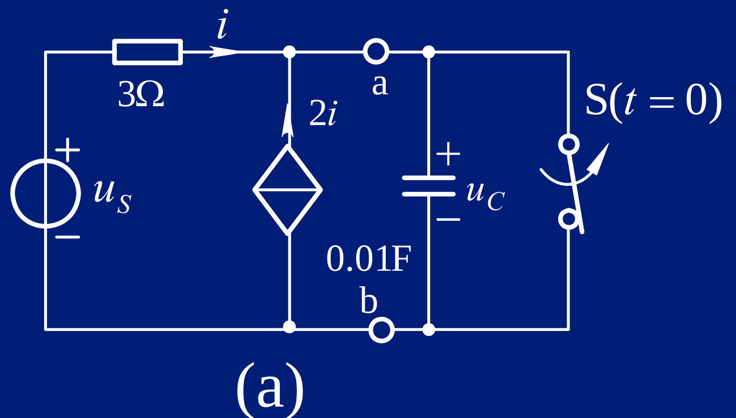
暂态分量

自由分量

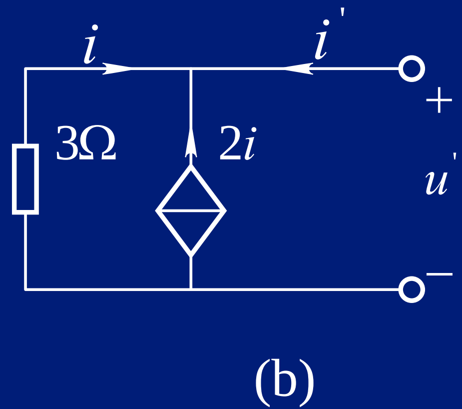


i_L、$i_{L\mathrm{p}}$和$i_{L\mathrm{h}}$的波形

[补充10.4]图(a)所示电路，开关原是接通的， $t=0$ 时断开。已知 $u_S=10\sqrt{2}\cos(100t)\text{V}$ ，求$t>0$电压 u_C



(a)



(b)

[解] $t<0$时电路为零状态，由换路定律

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

$t>0$ 时ab左边戴维南电路

当ab端开路时，由 $i+2i=0 \longrightarrow i=0$

所以开路电压 $u_{OC}=u_S=10\sqrt{2}\cos(100t)\,\text{V}$

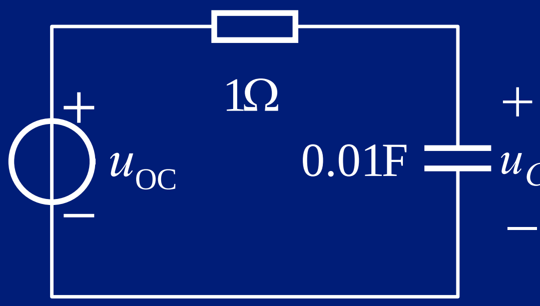
等效内阻电路如图(b)所示

$$R_i=\frac{u'}{i'}=\frac{-3i}{(-i-2i)}=1\Omega$$

$u_{OC} = u_S = 10\sqrt{2}\cos(100t)\,\text{V}$

$R_i = 1\Omega$

$t>0$时等效电路如图(c)所示。



(c)

时间常数 $\tau = R_i C = 0.01\text{s}$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = u_{OC}$$

用相量法计算强制分量 u_{Cp}

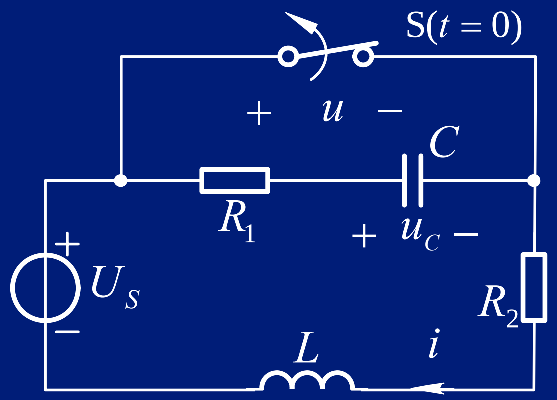
$$\dot{U}_{Cp} = \frac{1/(\mathrm{j}\omega C)}{1+1/(\mathrm{j}\omega C)} \times \dot{U}_{OC} = \frac{-\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} \times 10\angle 0^\circ = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ\text{V}$$

$$u_{Cp}(t) = 10\cos(100t - 45^\circ)\text{V} \longrightarrow u_{Cp}(0_+) = 10\cos(-45^\circ) = 5\sqrt{2}\text{V}$$

代入通解公式

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) - u_{Cp}(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} = [10\cos(100t - 45^\circ) - 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-100t}]\,\text{V}$$

[补充10.5]图所示电路原处于稳态，t=0 时开关打开。要求在 t>0 时满足u=U_S，求电路参数应满足的关系。



[解] $$i(0_+) = i(0_-) = \frac{U_S}{R_2}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

t>0

L：零输入响应

$$i_L(t) = i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_S}{R_2}e^{-\frac{R_2}{L}t}$$

C：零状态响应

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1-e^{-t/\tau}) = U_S(1-e^{-t/R_1C}) \qquad i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R_1}e^{-t/R_1C}$$

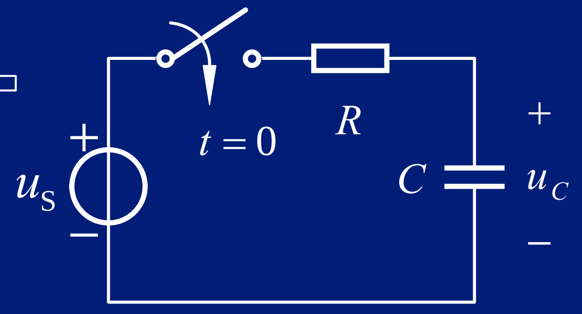
$$i_L = i_C \Rightarrow R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

基本要求：掌握全响应的计算步骤以及全响应与零输入响应和零状态响应的关系。理解叠加定理在线性动态电路中的应用。

全响应：由独立源和储能元件的原始储能共同作用引起的响应。

$$\left.\begin{aligned} & u_C(0_+)=U_0=u_C(0_-)\neq 0 \\ & RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S \end{aligned}\right\}$$

求全响应



RC电路的全响应

仅$u_C(0_-)$作用

零输入

$$RC\frac{\mathrm{d}u'_C}{\mathrm{d}t}+u'_C=0$$

$$u'_C(0_+)=u'_C(0_-)=U_0$$

仅u_S作用

零状态

$$RC\frac{\mathrm{d}''u_C}{\mathrm{d}t}+u''_C=u_S$$

$$u''_C(0_+)=u''_C(0_-)=0$$

$+$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u'_C+u''_C)+(u'_C+u''_C)=u_S \\ u'_C(0_+)+u''_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$

全响应为

$$u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_\mathrm{S}$$

• 全响应 $u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)$

响应与电路状态的关系看

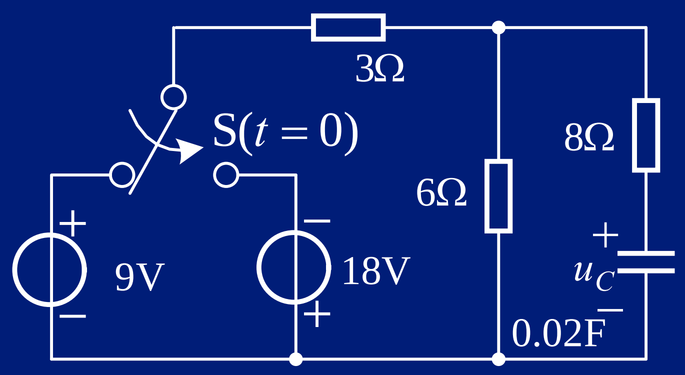
全响应＝ 零输入响应 ＋ 零状态响应

分析：

全响应、零输入响应和零状态响应中都含有自由分量；

- 零输入响应中只有自由分量；
- 零状态响应中一般既含强制分量，也含自由分量。

[补充10.6]图示电路$t<0$ 时处于稳态, $t=0$ 时换路, 求$t>0$ 时的电压u_C。



$t<0$时电容处于开路

$$u_C(0_-)=\frac{6}{6+3}\times 9\text{V}=6\text{V}$$

$t>0$后由换路定律得 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\text{V}$

$U_S=-18\text{V}$，接入电路中

由独立源和储能元件的原始储能共同作用引起的响应

→全响应 $$u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)$$

等效电阻 $$R_i=(8+\frac{6\times 3}{6+3})\Omega=10\Omega$$

时间常数 $$\tau=R_iC=0.2\text{s}$$

$$u_C(\infty)=\frac{6}{6+3}\times(-18\text{V})=-12\text{V}$$

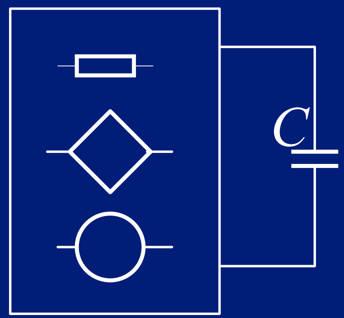
零输入 $$u'_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}=6\mathrm{e}^{-5t}\text{V}$$

零状态 $$u''_C(t)=u_C(\infty)-u_C(\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau}=(-12+12\mathrm{e}^{-5t})\text{V}$$

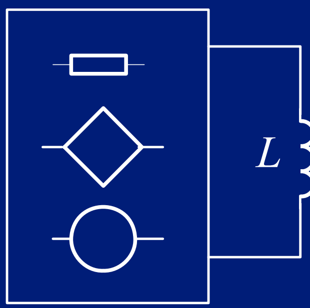
全响应 $$u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)=(-12+18\mathrm{e}^{-5t})\text{V}$$

10.7 求一阶电路暂态过程解的三要素公式

基本要求：熟练掌握一阶电路微分方程解的普遍形式即三要素公式。

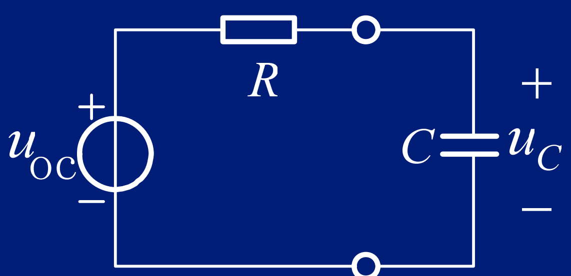


一阶电路的一般形式



戴维南等效

诺顿等效



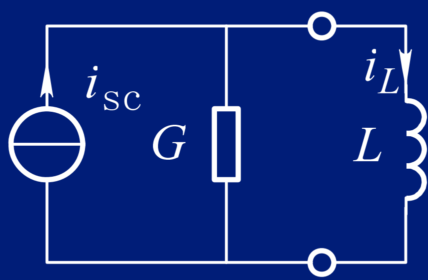
时间常数

响应

激励

$$\tau\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)=g(t)$$

$$f(0_+)=F_0$$



KVL方程
初始条件

$$\begin{cases}RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_{\mathrm{oc}}\\u_C(0_+)=U_0\end{cases}$$

KCL方程
初始条件

$$\begin{cases}GL\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=i_{\mathrm{sc}}\\i_L(0_+)=I_0\end{cases}$$

统一表示为

$$f(0_+) = F_0$$

$$\tau \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = g(t)$$

$$\tau \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = 0$$

通解为

$$f(t) = f_\mathrm{p}(t) + f_\mathrm{h}(t) = f_\mathrm{p}(t) + A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

令t=0_+　$f(0_+) = f_\mathrm{p}(0_+) + A$

$$A = f(0_+) - f_\mathrm{p}(0_+)$$

代入得

$$f(t) = f_\mathrm{p}(t) + [f(0_+) - f_\mathrm{p}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

求暂态解的三要素公式：

利用响应的初始值$f(0_+)$、时间常数τ和特解$f_\mathrm{p}(t)$ (通常用强制分量作为特解)来求响应$f(t)$ 的方法。

经典法：通过列写微分方程求解暂态电路的方法。

全响应＝ 零输入响应 ＋ 零状态响应

$$= f(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} + [f_\mathrm{p}(t) - f_\mathrm{p}(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}]$$

三要素公式：

$$f(t) = f_\mathrm{p}(t) + [f(0_+) - f_\mathrm{p}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

全响应＝ 强制分量 ＋ 自由分量

$f_p(t)$函数形式决定于独立电源 $g(t)$ 与初始值无关；

自由分量总是e指数形式，指数由电路结构和参数决定，与激励无关；指数系数由初值和外加激励决定。

$g(t)$ 的形式	$f_p(t)$ 的形式
K	A
Kt	$A+Bt$
Kt^2	$A+Bt+Ct^2$
$K\mathrm{e}^{-bt}(b \neq 1/\tau)$	$A\mathrm{e}^{-bt}$
$K\mathrm{e}^{-bt}(b = 1/\tau)$	$(A+Bt)\mathrm{e}^{-bt}$
$K\cos(\omega t+\varphi)$	$A\cos(\omega t+B)$

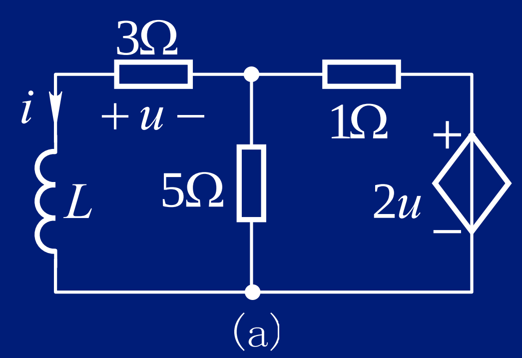
若无外加激励或外加激励是直流或阶跃电源

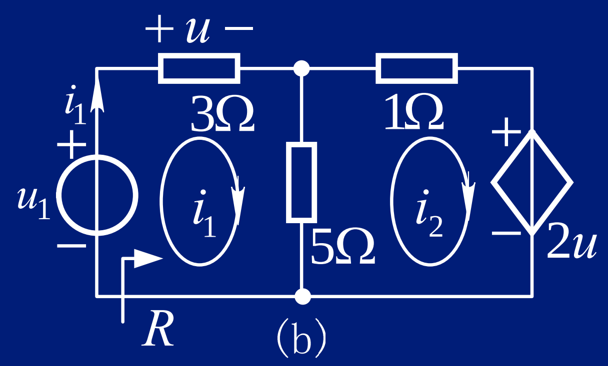
全响应＝ 稳态分量 ＋ 暂态分量

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$= f(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} + f(\infty)(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$$

例题 10.5 图(a)所示电路中，电感电流$i(0_-)=10\text{A}$， $L=(1/6)\text{H}$。求$t\geq 0$时电流 i 的变化规律。





解 i为零输入响应。其稳态值 $i(\infty)=0$； 初值 $i(0_+)=i(0_-)=10\text{A}$

求 τ：等效电阻R求解如图(b)所示。

回路方程
$$\begin{cases}(3+5)\Omega\times i_1-5\Omega\times i_2=u_1\\ -5\Omega\times i_1+(5+1)\Omega\times i_2+2u=0\\ u=3\Omega\times i_1\end{cases}$$

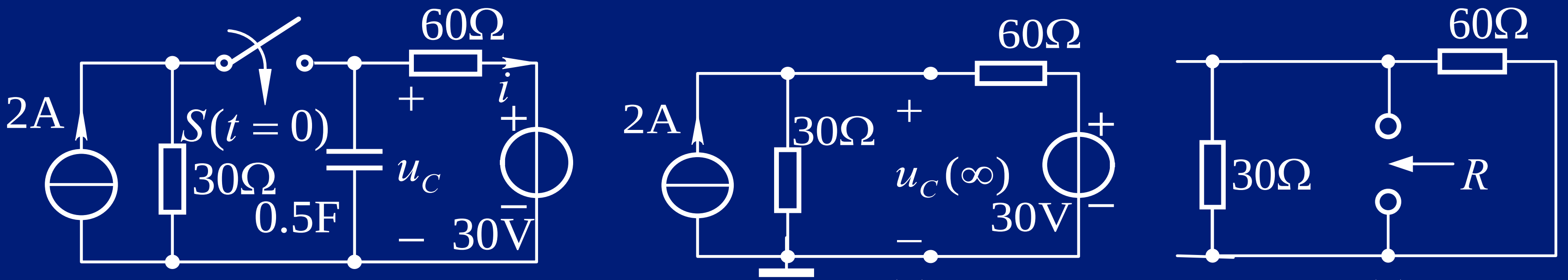
整理得
$$53\Omega\times i_1=6u_1$$

等效电阻 $R=u_1/i_1=53/6\ (\Omega)$ 时间常数 $\tau=\dfrac{L}{R}=\dfrac{1}{53}\text{s}$

由三要素法公式

$$i(t)=i(\infty)+[i(0_+)-i(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}=i(0_+)\text{e}^{-t/\tau}=10\text{e}^{-53t}\ \text{A}\quad(t\geq 0)$$

例题 **10.6** 图(a)所示电路$t<0$时处于稳态。$t=0$时开关接通。求$t>0$时电压u_C和电流 i 。



(a)　　(b)　　(c)

解　$t<0$时求得　$u_C(0_-)=30=u_C(0_+)$

$t\to\infty$时计算电容电压的电路如图(b)所示

节点电压方程　$(\dfrac{1}{30\Omega}+\dfrac{1}{60\Omega})u_C(\infty)=2\text{A}+\dfrac{30\text{V}}{60\Omega}$　　解得 $u_C(\infty)=50$

计算等效电阻的电路如图(c)所示　　$R=\dfrac{30\times 60}{30+60}\Omega=20\Omega$

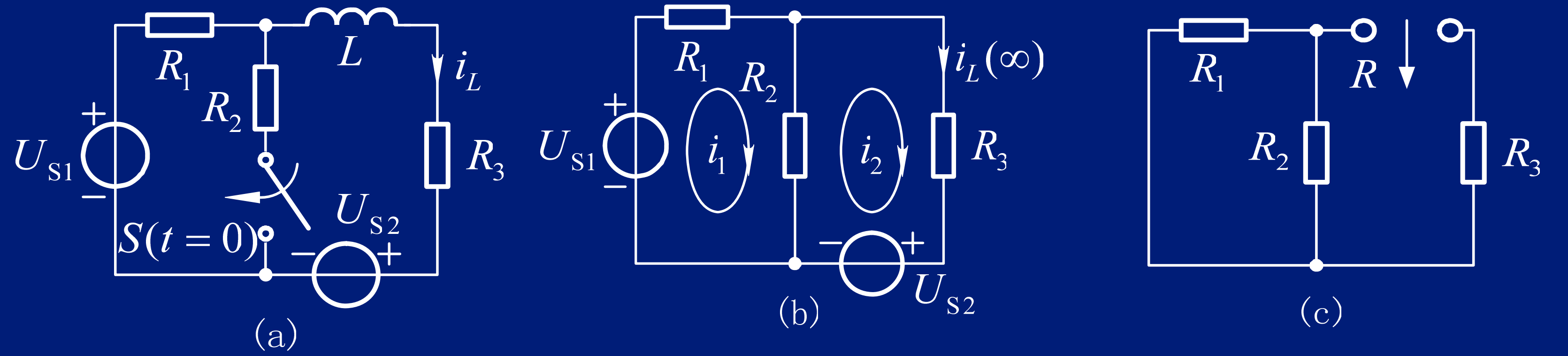
时间常数　$\tau=RC=20\Omega\times 0.5\text{F}=10\text{s}$

由三要素公式得u_C

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}=(50-20\text{e}^{-0.1t})\text{V}\qquad(t\geq 0)$$

电流　$$i(t)=\frac{u_C-30\text{V}}{60\Omega}=\frac{1}{3}(1-\text{e}^{-0.1t})\text{A}\qquad(t>0)$$

例题 **10.7** 图(a)所示电路中 $t<0$ 时处于稳态。设U_{S1}=38V，U_{S2}=12V, R_1=20Ω , R_2=5Ω R_3=6Ω , L=0.2H，求 $t\geq0$ 时的电流i_L 。



解 $t<0$ 时电感电流 $i_L(0_-)=\dfrac{U_{S1}-U_{S2}}{R_1+R_3}=1\text{A}\ =i_L(0_+)$

$t\to\infty$时计算电感电流的电路如图(b)所示

$$\begin{cases}(R_1+R_2)i_1-R_2i_2=U_{S1}\\-R_2i_1+(R_2+R_3)i_2=-U_{S2}\end{cases}$$

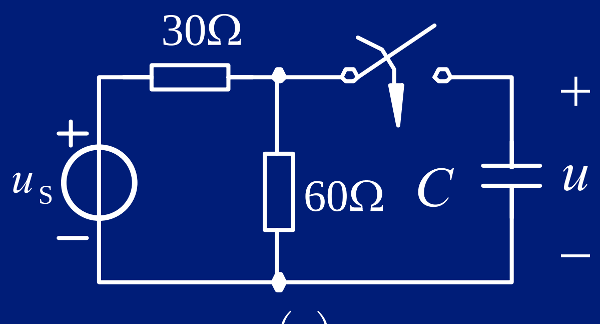
解得 $i_L(\infty)=i_2=0.44\text{A}$

计算等效电阻R的电路如图(c)所示 $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3=10\Omega$

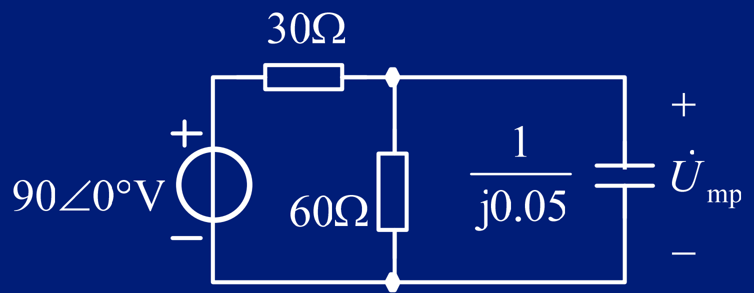
时间常数 $\tau=\dfrac{L}{R}=0.02\text{s}$

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}=(0.44+0.56\text{e}^{-50t})\text{A}\qquad(t\geq0)$$

例题 **10.8** 电路如图(a)所示，C=0.001F，u_S为正弦电压源，幅值为90V，角频率为50rad/s。当u_S为正的最大值时，将开关接通，开关接通前电容电压为10V。求开关接通后电压 u 的变化规律。



(a)



(b)

解 设开关接通时刻 $t=0$，则u_S表示为 $u_S = 90\cos(50t)\text{V}$

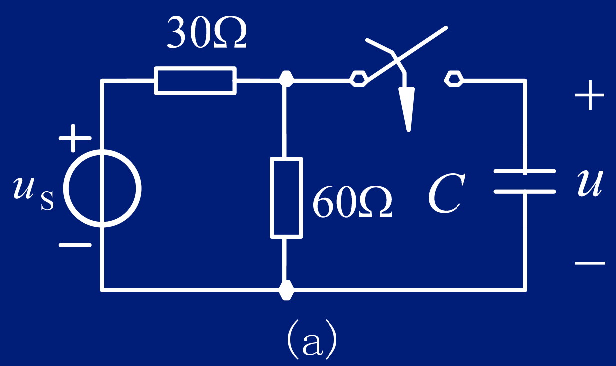
u是电容电压，依题意 $u_C(0_-) = 10\text{V} = u_C(0_+)$

当$t\to\infty$时，达到正弦稳态。相量模型图(b)计算$u_p(t)$

节点电压方程
$$\left(\frac{1}{30\Omega}+\frac{1}{60\Omega}+\text{j}0.05\text{S}\right)\dot{U}_{mp} = \frac{90\angle 0^\circ\text{V}}{30\Omega}$$

$$\dot{U}_{mp} = \frac{3\text{V}}{0.05(1+\text{j})} = 30\sqrt{2}\angle -45^\circ\text{V}$$

$$u_p(t) = 30\sqrt{2}\cos(50t-45^\circ)\ \text{V}$$



$$u_C(0_+) = 10\text{V}$$

$$u_{\text{p}}(t) = 30\sqrt{2}\cos(50t - 45^\circ)\ \text{V}$$

时间常数

$$\tau = RC = \frac{30 \times 60}{30 + 60}\Omega \times 0.001\text{F} = 0.02\text{s}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{\text{p}}(t) + [u(0_+) - u_{\text{p}}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau} \\ &= 30\sqrt{2}\cos(50t - 45^\circ) + [10 - 30\sqrt{2}\cos(-45^\circ)]\mathrm{e}^{-50t} \\ &= 30\sqrt{2}\cos(50t - 45^\circ) - 20\mathrm{e}^{-50t}\text{V} \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$

基本要求：理解卷积积分蕴含的电路概念及其计算。

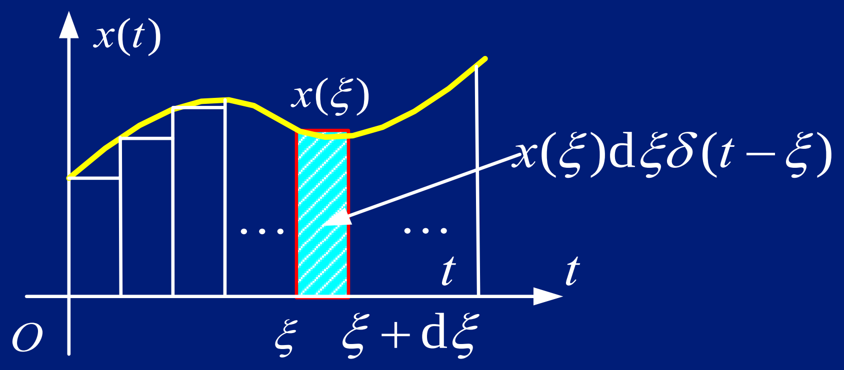
$t=\xi$ 时延迟冲激激励近似为

$$\mathrm{d}x(t)\approx x(\xi)\mathrm{d}\xi\cdot\delta(t-\xi)$$

响应 $\mathrm{d}y(t)\approx x(\xi)\mathrm{d}\xi\cdot h(t-\xi)$

$\delta(t)\xrightarrow{\text{响应}} h(t)$是一阶单位冲激特性

$h(t)=\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$



任意激励分解

$\mathrm{d}\xi\to 0$

$\mathrm{d}y(t)=x(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$ t时刻响应 $y(t)=\int_0^t x(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$

若$x(t)$在0或 t 时刻存在冲激信号

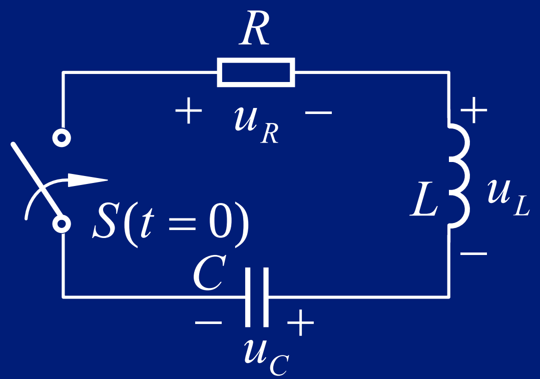
$y(t)=x(t)*h(t)$ $\Longleftarrow$ 卷积 $y(t)=\int_{0_-}^{t_+} x(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$

$y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$ 满足交换率

基本要求：掌握二阶电路微分方程的列写及其求解过程、响应变量及其一阶导数初值的计算、微分方程特征根与响应自由分量性质的关系。

二阶电路 用二阶微分方程描述的电路(一般含有两个储能元件)。

图示电路 设 $u_C(0_-)=U_{C0}>0$ ，t=0时开关接通，求t>0时u_C和回路i



t>0回路**KVL** $u_R+u_L+u_C=0$

元件方程 $u_R=Ri,\quad u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\quad i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

得描述u_C的微分方程

RLC串联电路的零输入响应

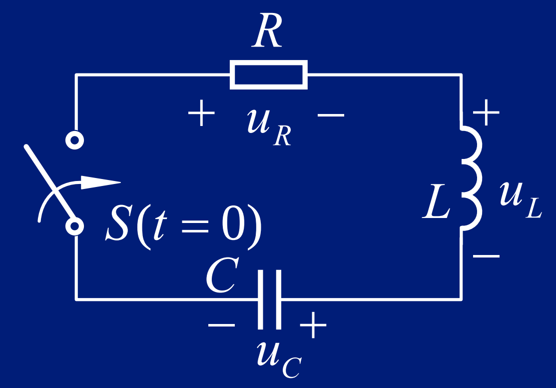
$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

二阶常系数线性齐次微分方程的两个初始条件

$$\begin{cases} u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{C}i(0_+)=\dfrac{1}{C}i(0_-)=0 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0 \qquad u_{C\mathrm{p}}=0$$

零输入



***RLC*串联电路的零输入响应**

特征方程

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$$

特征根

$$p=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

令

$$\alpha=R/(2L)$$

$$\omega_0=1/\sqrt{LC}$$

$$\begin{cases} p_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \\ p_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \end{cases}$$

二阶电路的暂态过程与特征根的关系

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = R/(2L);\ \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = \dfrac{1}{C}i(0_+) = \dfrac{1}{C}i(0_-) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

$\Downarrow$ 通解为

1 $\alpha > \omega_0$ 即参数满足 $R > 2\sqrt{L/C}$

p_1、p_2互异负实根

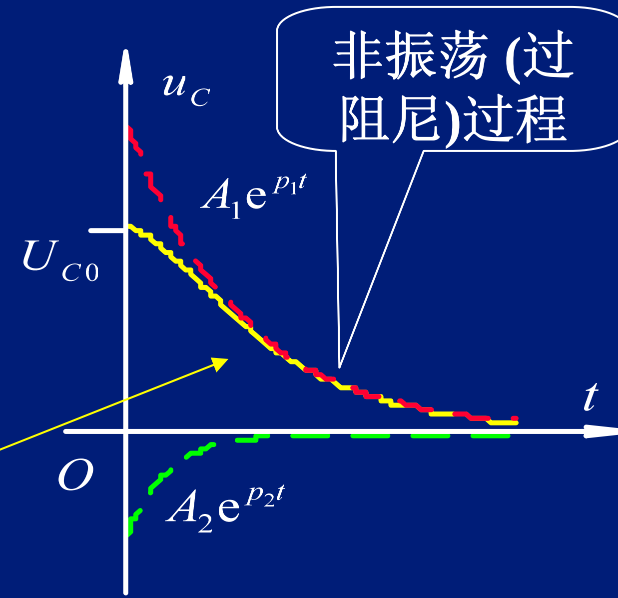
$$u_C = A_1\mathrm{e}^{p_1t} + A_2\mathrm{e}^{p_2t}$$

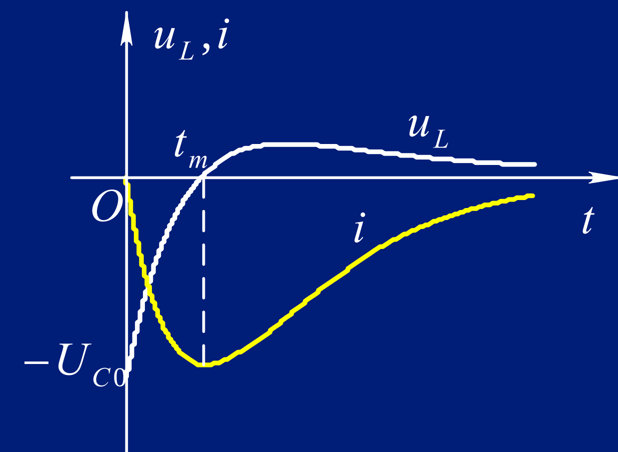
代初值定系数解得

$$u_C = \frac{U_{C0}}{p_2 - p_1}(p_2\mathrm{e}^{p_1t} - p_1\mathrm{e}^{p_2t}) \qquad (t>0)$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_{C0}}{L(p_2 - p_1)}(\mathrm{e}^{p_1t} - \mathrm{e}^{p_2t}) \qquad (t>0)$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{U_{C0}}{p_2 - p_1}(p_1\mathrm{e}^{p_1t} - p_2\mathrm{e}^{p_2t}) \qquad (t>0)$$





$$\begin{cases} u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{C}i(0_+)=\dfrac{1}{C}i(0_-)=0 \end{cases}$$

$$\alpha=R/(2L);\ \omega_0=1/\sqrt{LC}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

通解

2 $\alpha<\omega_0$ 即参数满足 $R<2\sqrt{L/C}$

$$p_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$$

p_2与p_1共轭 $\omega_\mathrm{d}=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$

$$p_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$$

$$u_C=\mathrm{e}^{-\alpha t}(A_1\sin\omega_\mathrm{d}t+A_2\cos\omega_\mathrm{d}t)$$

$$=A\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d}t+\theta)$$

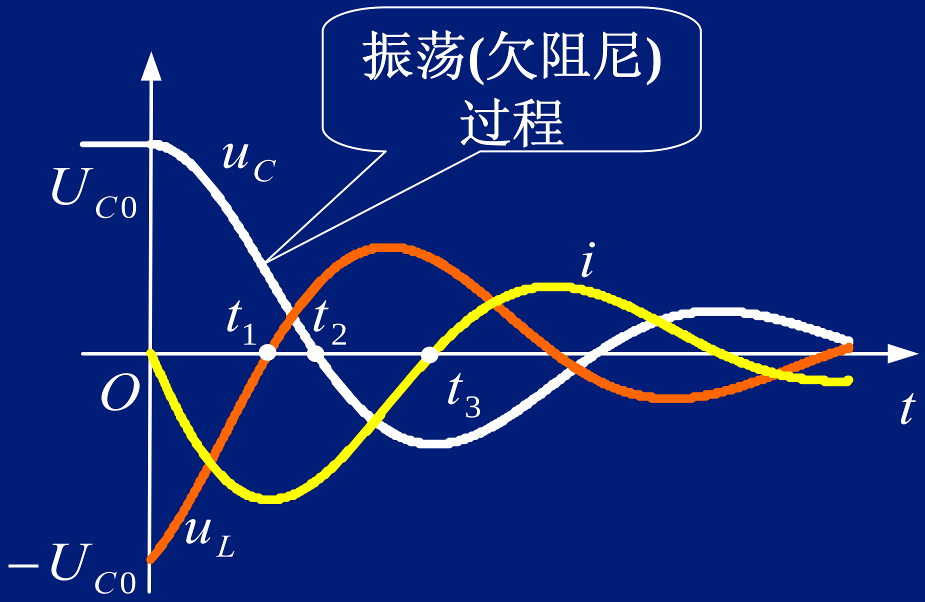
代初值定系数解得

$$u_C=\frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}}U_{C0}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d}t+\theta)$$

$$\theta=\arctan(\omega_\mathrm{d}/\alpha)$$

$$i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{U_{C0}}{\omega_\mathrm{d}L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega_\mathrm{d}t$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}}U_{C0}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d}t-\theta)$$



$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = \dfrac{1}{C} i(0_+) = \dfrac{1}{C} i(0_-) = 0 \end{cases}$$

3 $a = \omega_0$ 即参数满足 $R = 2\sqrt{L/C}$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

P_1、p_2为相等负实根 $p_1 = p_2 = p = -\alpha$

通解为 $u_C = (A_1 + A_2 t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$

代初值定系数解得 $u_C = U_{C0}(1 + at)\mathrm{e}^{-\alpha t}$

临界状态

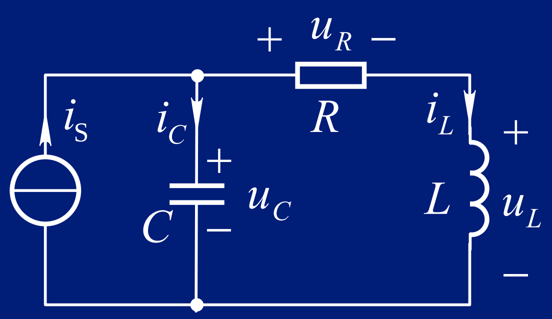
临界电阻

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\alpha^2 C U_{C0} t\mathrm{e}^{-\alpha t} = -\frac{U_{C0}}{L} t\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_{C0}(\alpha t - 1)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

例题 10.12

图所示电路，设 R=20Ω， L=0.1H，C=20μF。求 i_L 的单位阶跃特性 $s(t)$。



解　设 $i_S=\varepsilon(t)$ A，由KCL、KVL得

$$i_C+i_L=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+i_L=i_S \qquad u_L-u_C+u_R=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}-u_C+i_LR=0$$

求导代入整理

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}i_L=\frac{1}{LC}i_S \quad (t>0)$$

代入数据

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+200\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+5\times10^5 i_L=5\times10^5$$

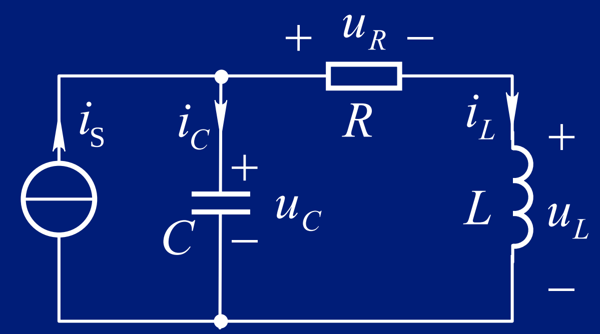
$$\begin{cases} i_L(0_+)=i_L(0_-)=0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{L}u_L(0_+)=\dfrac{1}{L}[-Ri_L(0_+)+u_C(0_+)]=0 \end{cases}$$

通解

$$i_L=i_{Lp}+i_{Lh}$$

i_{Lp} 是激励为 $\varepsilon(t)$ 的稳态解 =1A

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+200\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+5\times10^5 i_L=5\times10^5$$



特征方程 $\quad p^2+200p+5\times10^5=0$

特征根

$$p_{1,2}=\left(\frac{-200\pm\sqrt{200^2-4\times5\times10^5}}{2}\right)\mathrm{s}^{-1}$$

$$=(-100\pm \mathrm{j}700)\mathrm{s}^{-1}=-\alpha\pm\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$$

$\boldsymbol{i_L}$自由分量形式 $\quad i_{Lh}=B\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d}t+\theta)=B\mathrm{e}^{-100t}\sin(700t+\theta)$

通解为

$$\begin{cases} i_L=i_{Lp}+i_{Lh}=1+B\mathrm{e}^{-100t}\sin(700t+\theta) \\ \begin{cases} i_L(0_+)=1\mathrm{A}+B\sin\theta=0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=-100B\sin\theta+700B\cos\theta=0 \end{cases} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} B\approx-1.01\mathrm{A} \\ \theta\approx81.87^\circ \end{cases}$$

完全解 $\quad i_L=[1-1.01\mathrm{e}^{-100t}\sin(700t+81.87^\circ)]\mathrm{A} \qquad (t\geq0)$

激励为$\varepsilon(t)$

$$=[1-1.01\mathrm{e}^{-100t}\sin(700t+81.87^\circ)]\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

$$=s(t)$$

10.10 动态电路的状态变量分析

基本要求：理解状态变量的概念，掌握状态方程标准形式及输出方程的一般列写方法。

经典法处理高阶电路时的不足

- 微分方程的列写困难
- 初始值难以确定
- 求解过程复杂

→ 状态变量分析法

优点

- 状态方程易于列写
- 易于确定初始值
- 便于计算机求数值解

状态变量与状态方程

状态变量 能完整地、确定地描述动态电路时域行为的最少变量，是一组独立的动态变量，如 u_C和 i_L 。

状态方程 由状态变量及其一阶导数组成的一阶微分方程组。

状态方程的列写步骤

取u_C和i_L为状态变量

(1) 对联接单电容的节点列**KCL**方程；
$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \rightarrow C\dot{u}_C$$

(2) 对包含单电感的回路列**KVL**方程；
$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \rightarrow L\dot{i}_L$$

(3) 消去上述方程中的非状态变量；

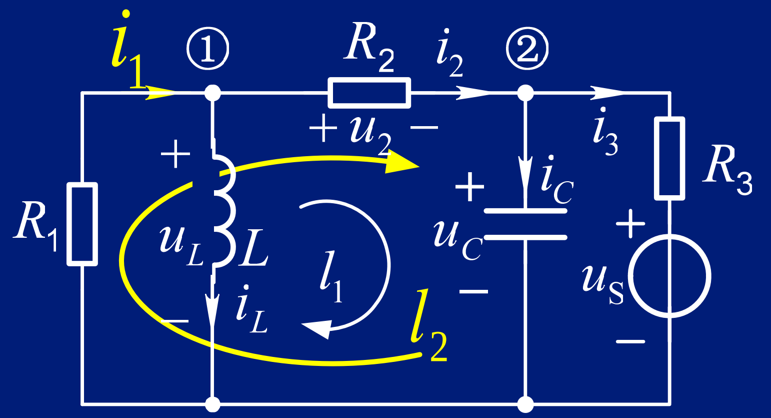
(4) 整理成标准形式的状态方程。

输出方程

将输出变量表示为状态变量和输入激励之间的关系写成矩阵形式的方程。

例题 10.13

列出图示电路状态方程的标准形式。



解

对联接电容的节点②列KCL方程

$$i_C = C\dot{u}_C = i_2 - i_3$$

对包含电感的回路 l_1 列KVL方程

$$u_L = L\dot{i}_L = u_C + u_2$$

消去非状态变量 i_2 、 i_3 和 u_2

$$i_3 = \frac{u_C - u_S}{R_3} \qquad i_2 = i_1 - i_L$$

对回路 l_2 列KVL方程

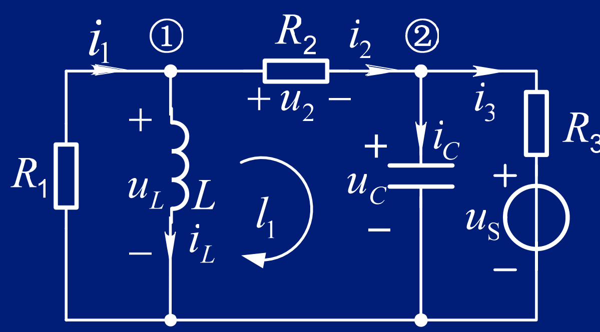
$$R_1 i_1 + R_2 i_2 + u_C = R_1(i_2 + i_L) + R_2 i_2 + u_C = 0$$

解得 $$i_2 = -\frac{u_C}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 i_L}{R_1 + R_2} \qquad u_2 = R_2 i_2 = -\frac{R_2 u_C}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2 i_L}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = -\frac{u_C}{R_1+R_2} - \frac{R_1 i_L}{R_1+R_2} \qquad i_3 = \frac{u_C - u_S}{R_3} \qquad u_2 = R_2 i_2 = -\frac{R_2 u_C}{R_1+R_2} - \frac{R_1 R_2 i_L}{R_1+R_2}$$

代入 $i_C = C\dot{u}_C = i_2 - i_3$　　代入 $u_L = L\dot{i}_L = u_C + u_2$

整理得状态方程标准式



$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{R_1}{C(R_1+R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{CR_3} \\ 0 \end{bmatrix} [u_S]$$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = U_0 \\ i_L(0_+) = I_0 \end{cases}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{BV}$$

- $\boldsymbol{X} = [u_{C1}\ u_{C2} \cdots i_{L1}\ i_{L2} \cdots]^{\mathrm{T}}$　状态变量列向量
- $\dot{\boldsymbol{X}}$　状态变量的一阶导数列向量
- $V = [u_{S1}\ u_{S2} \cdots i_{S1}\ i_{S2} \cdots]^{\mathrm{T}}$　输入列向量
- $\boldsymbol{A}$ 是$n \times n$方阵，n为状态变量个数
- $\boldsymbol{B}$ 是$n \times m$方阵，m为外加激励个数

决定于电路结构和参数

以$\boldsymbol{i_1}$为输出

$i_1 = i_2 + i_L$　整理得输出方程 $[i_1] = \left[-\frac{1}{R_1+R_2}\quad \frac{R_2}{R_1+R_2}\right] \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$

● 本章小结

1 电路量的初始值

换路定律 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ $i_L(0_+) = i_L(0_-)$

除u_C、i_L之外各电压电流初始值的确定通过分析直流电阻电路的各种方法来求解。

KVL $\sum u(0_+) = 0$ **KCL** $\sum i(0_+) = 0$

电阻元件 $u_R(0_+) = Ri_R(0_+)$ 或 $i_R(0_+) = Gu_R(0_+)$

全响应＝ 零输入响应 ＋ 零状态响应

$$= f(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} + [f_\mathrm{p}(t) - f_\mathrm{p}(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}]$$

2 三要素公式

$$f(t) = \underbrace{f_\mathrm{p}(t)}_{\text{特解}} + [\underbrace{f(0_+)}_{\text{初始值}} - f_\mathrm{p}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\underbrace{\tau}_{\text{时间常数}}}$$

全响应＝ 强制分量 ＋ 自由分量

3 $s(t) \sim h(t)$

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \qquad s(t)=\int_{0_-}^{t} h(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)\mathrm{d}\xi$$

4 $x(t) \rightarrow y(t)$

$$y(t)=\int_{0_-}^{t_+} x(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

5 ***RLC*串联零输入参数与暂态过程对应关系**

$R>2\sqrt{L/C}$ p_1、p_2相异负实根 $f_h(t)=A_1\mathrm{e}^{p_1 t}+A_2\mathrm{e}^{p_2 t}$ 过阻尼

$R=2\sqrt{L/C}$ p_1、p_2相等负实根 $f_h(t)=(A_1+A_2 t)\mathrm{e}^{pt}$ 临界

$R<2\sqrt{L/C}$ p_1、p_2共轭复根 $f_h(t)=A\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_d t+\theta)$ 欠阻尼

6 **状态方程标准式**

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BV}$$

谢 谢！