哈爾濱工業大學

第8章 非正弦周期电流电路

主讲教师 齐超

http://www.hitce.net

提要 本章介绍傅里叶级数及应用傅里叶级数和叠加定理分析非正弦周期电流电路的方法，讨论非正弦周期电流、电压有效值和平均功率的计算。

本章目次

基本要求：初步了解非正弦信号产生的原因。

1. 非正弦周期电流的产生

1） 当电路中有多个不同频率的电源同时作用，如图所示

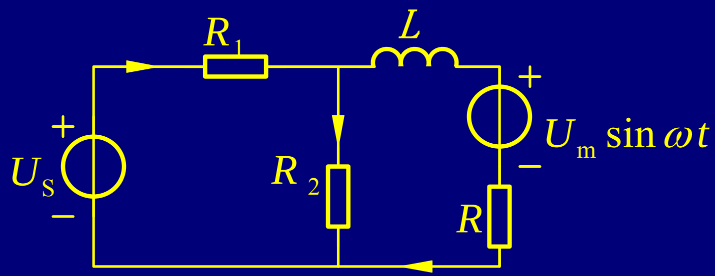


图　不同频率电源作用的电路

引起的电流便是非正弦周期电流，解决方法是？

根据叠加定理，分别计算不同频率的响应，然后将瞬时值结果叠加。

2） 非正弦周期电压源或电流源（例如方波、锯齿波）

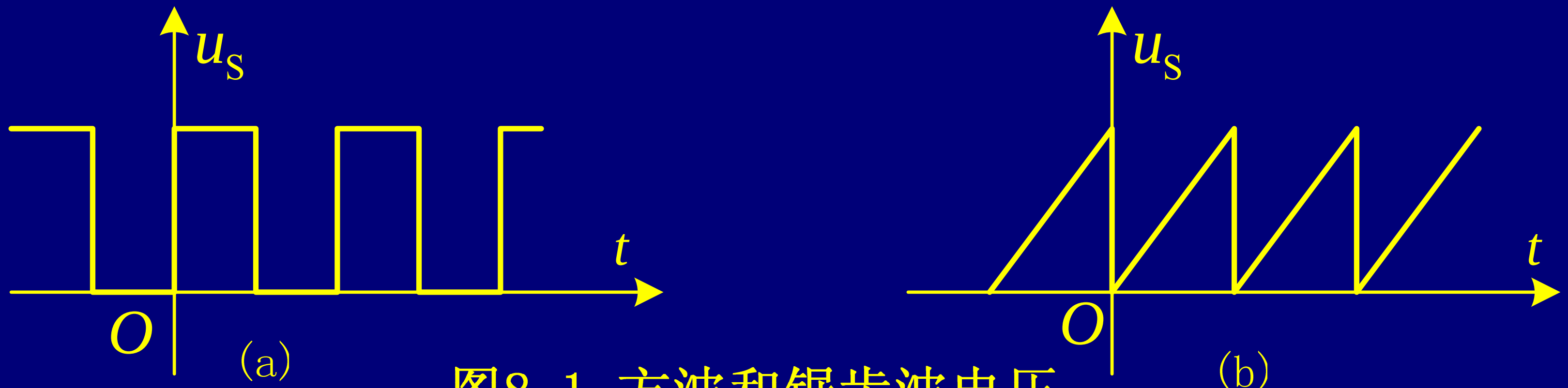


图8.1 方波和锯齿波电压

引起的响应也是非正弦周期量，如何求响应？

3） 有非线性元件引起的非正弦周期电流或电压。例如，由半波整流，全波整流得到的电压，电流

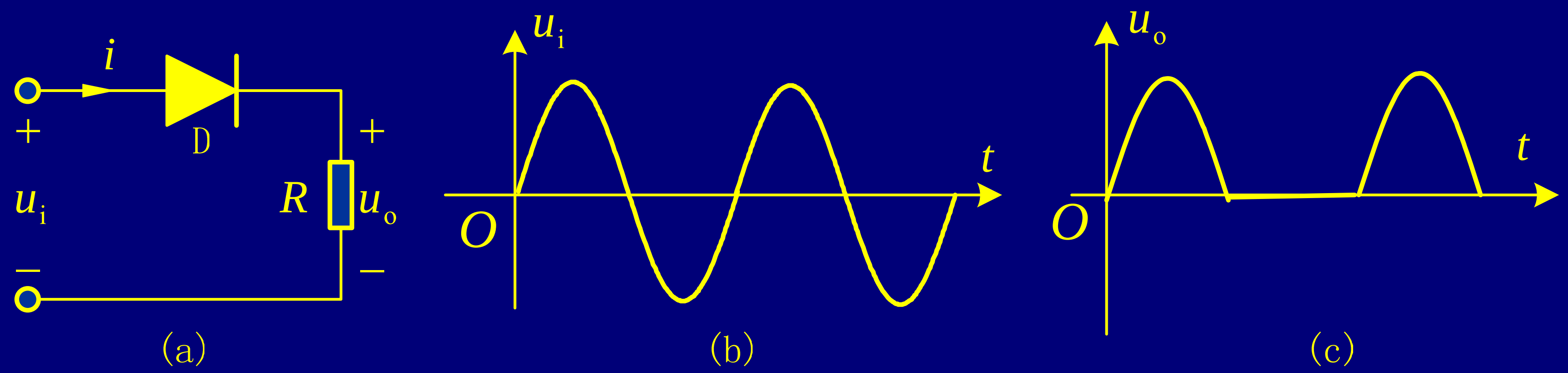


图8.2 二极管整流电路及半波整流电压

响应也是非正弦周期量，如何求响应?

这些非正弦周期函数首先分解为不同频率的傅里叶级数，然后求解不同频率的正弦激励的响应，最后将瞬时值结果叠加。

非正弦周期电流电路分析方法：谐波分析法

基本要求：掌握傅里叶级数的三角形式，理解谐波概念。

1. 傅里叶级数

周期为T，角频率为 ω的周期函数 $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = f(t+kT) \qquad k = 0, 1, 2\cdots$$

当其满足狄里赫利条件即：

1) $f(t)$ 在任何一个周期内，连续或存在有限个间断点；

2) $f(t)$ 在任何一个周期内，只有有限个极大值和极小值；

3) 在任何一个周期内，函数绝对值的积分为有界值，

即 $\int_0^T |f(t)| \mathrm{d}\, t$ 存在

$f(t)$可以分解为如下的傅里叶级数

$$f(t) = A_0 + [\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad (8.1)$$

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)] \qquad (8.1)$$

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$\omega=2\pi/T=2\pi f$$

是角频率，T是$f(t)$的周期。

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

在电路分析中，一般用傅里叶级数的另一种形式。

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}[A_{\mathrm{m}k}\cos\psi_k\cos(k\omega t)-A_{\mathrm{m}k}\sin\psi_k\sin(k\omega t)]$$
$$=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_k) \qquad (8.6)$$

(8.1)、**(8.6)**式比较，得

$$a_k=A_{\mathrm{m}k}\cos\psi_k \qquad b_k=-A_{\mathrm{m}k}\sin\psi_k$$

$$A_{\mathrm{m}k}=\sqrt{a_k^2+b_k^2} \qquad \psi_k=\arctan\frac{-b_k}{a_k}$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underline{A_{mk} \cos(k\omega t + \psi_k)} \qquad (8.6)$$

恒定分量（直流分量）

$k=1$ —— 基波； A_{m1} —— 基波振幅， ψ_1 —— 基波初相

$k=2,3,$ 等 —— 分别称为二次，三次谐波，统称为高次谐波

由于傅里叶级数是收敛的，一般谐波次数越高，振幅越小

2. 谐波分析 将周期函数分解为恒定分量、基波分量和各次谐波的方法。

谐波振幅 A_{mk} 随角频率 $k\omega$ 变动的情形如图8.3所示

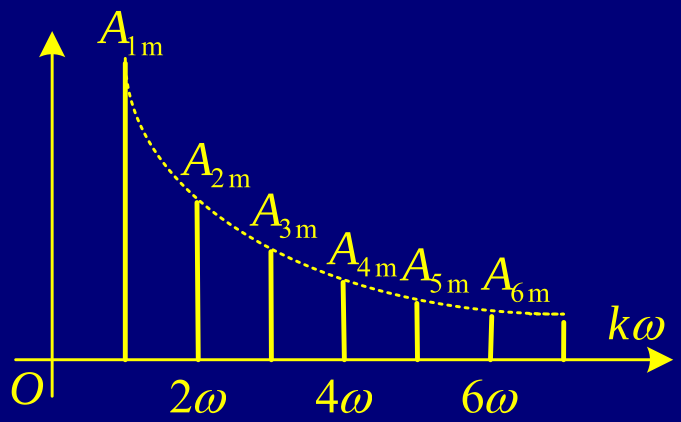


图 8.3 振幅频谱

图中竖线称为谱线，长度表示A_{mk}的量值；相邻两谱线的间隔等于基波角频率 ω。这种谱线间具有一定间隔的频谱称为离散频谱。同样可以画出相位频谱，用以表示各次谐波的初相 ψ_k 随角频率 $k\omega$变动的情形。

例题 8.1

求图所示周期性方波的傅里叶展开式，并画其频谱。

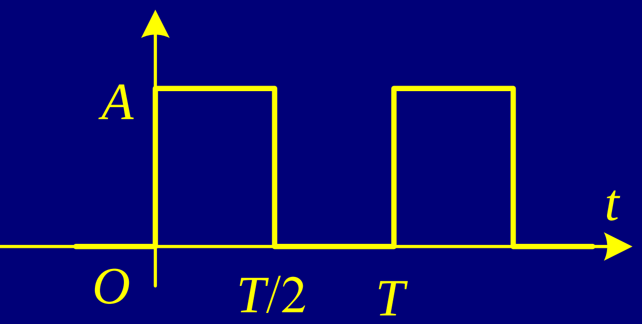


图8.4 周期性方波

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^{T/2} A\mathrm{d}t=\frac{A}{2}$$

解 所给波形在一个周期内的表达式：

$$f(t)=\begin{cases}A, & 当0<t\le T/2\\ 0, & 当T/2<t\le T\end{cases}$$

根据下式求A_0、a_k和 b_k

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} A\cos(k\omega t)\mathrm{d}t=\frac{2A}{k\omega T}\int_0^{T/2}\cos(k\omega t)\mathrm{d}(k\omega t)$$

$$=\frac{2A}{k\omega T}\sin(k\omega t)\Big|_0^{T/2}=\frac{2A}{k\omega T}\sin(k\omega\frac{2\pi/\omega}{2})=0$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} A\sin(k\omega t)\mathrm{d}t=\frac{2A}{k\omega T}(-\cos k\omega t)\Big|_0^{T/2}$$

$$=\frac{A}{k\pi}(1-\cos k\pi)=\begin{cases}\dfrac{2A}{k\pi} & (k=1,3,5,\cdots)\\ 0 & (k=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

因为$a_k=0$，所以 $A_{mk}=b_k, \psi_k=-90^\circ$ 于是得到

$$f(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}[\cos(\omega t-90^\circ)+\frac{1}{3}\cos(3\omega t-90^\circ)+\frac{1}{5}\cos(5\omega t-90^\circ)+\cdots]$$

$$=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots)$$

$$=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\omega t]$$

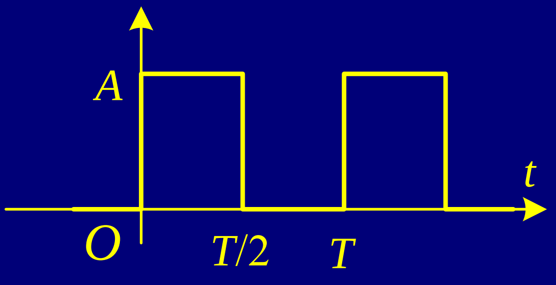


图8.4 周期性方波

说明：式中引入新的正整数 n 以区别原来的正整数 k 。

这一方波的分解情况如图8.5所示

方波振幅频谱和相位频谱如下所示

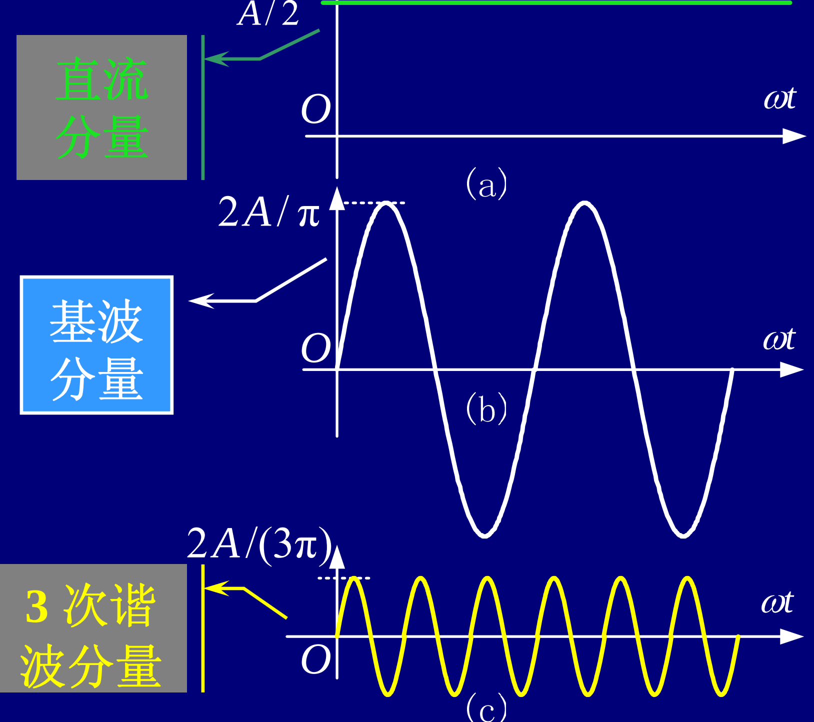


图8.5 周期性方波的波形分解

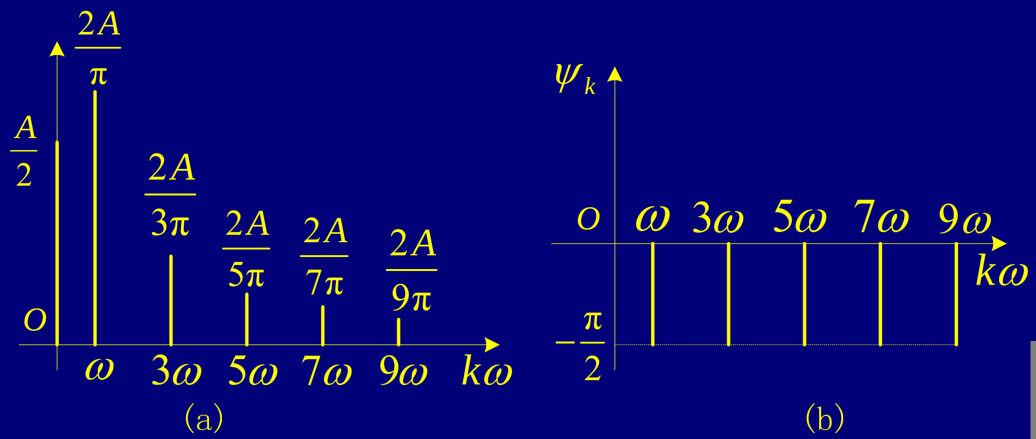
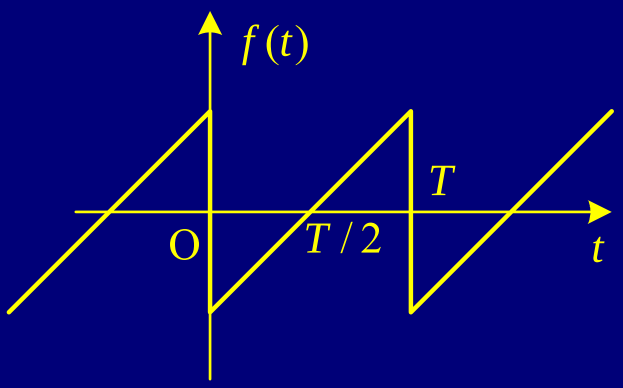


图8.6 周期性方波的振幅频谱和相位频谱

3. 周期函数的波形与傅里叶系数的关系

当周期函数的波形具有某种对称性质时，利用函数对称性可使系数 A_0、a_k、b_k的确定简化。

3.1 $f(t)$为奇函数如图



周 期 性 奇 函 数

即 $f(-t)=-f(t)$ 时，函数关于原点对称，

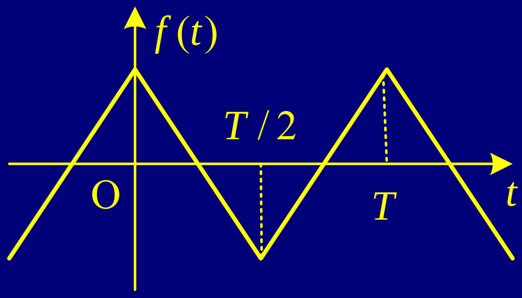
有 $A_0=0$，$a_k=0, b_k\neq 0$

傅里叶级数式

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)]$$

只含有正弦项, 不含恒定分量和余弦项, 因为恒定分量和余弦项都是偶函数.

3.2 $f(t)$为偶函数，即 $f(t)=f(-t)$ 函数对称于纵轴，如图

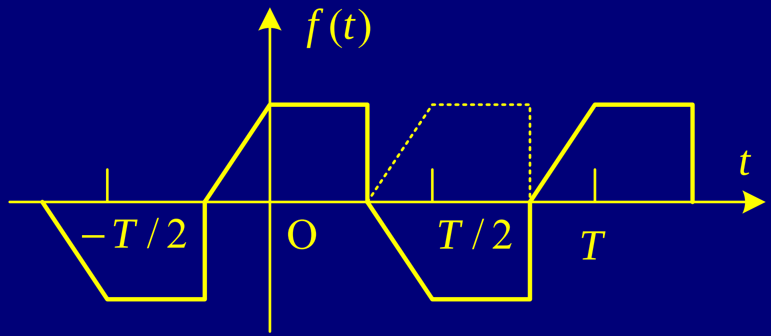


周 期 性 偶 函 数

$a_k\neq 0, b_k=0$

傅里叶级数中只含有余弦项和恒定分量(当$A_0\neq 0$时)，而没有正弦项，这是因为正弦项都是奇函数。

3.3 $f(t)$为镜像对称函数如图



上下半波镜像对称的函数

即 $f(t)=-f(t+T/2)$ ，$A_0=0$

$$a_{2k}=b_{2k}=0$$

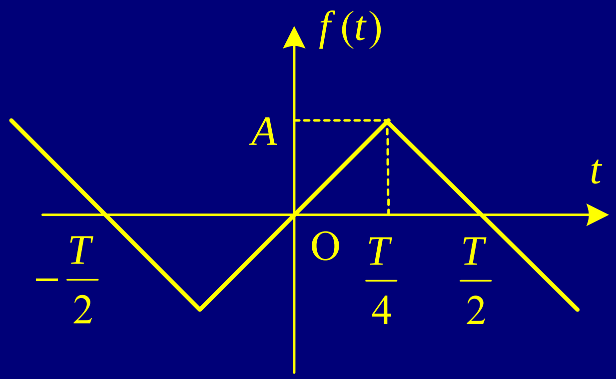
展开式中只有奇次谐波。计算奇次谐波系数，只需计算半个周期内积分

$$a_n=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ \dfrac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ \dfrac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t & n\text{为奇数}\end{cases}$$

- 说明：
- 奇、偶函数与计时起点有关，奇次谐波函数与计时起点无关
- 级数收敛快慢与波形光滑程度及接近正弦波程度有关
- 当存在上述任何一个条件时，谐波分析可简化如下：
- a 不必计算等于零的系数
- b 计算非零系数时，积分区间可减半，同时积分式乘以2。

[补充8.1] 求图所示三角波的傅里叶展开式



代入 $f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t)$

得 $f(t)=\frac{8A}{\pi^2}(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t-\cdots)$

[解] $f(t)=-f(-t)$，$A_0=0$，$a_k=0$，只需求 b_k

$f(t)=-f(t\pm T/2)$，展开式中只有奇次谐波

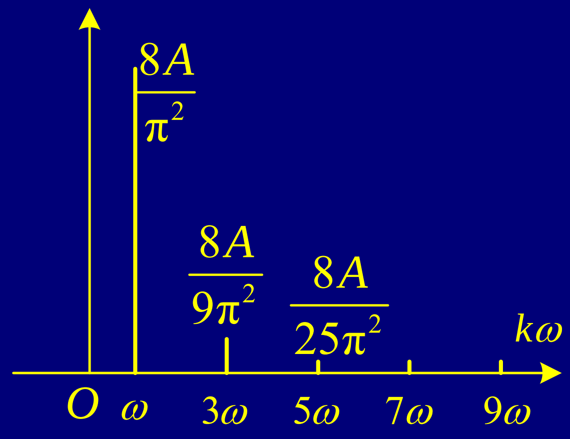
有两个对称条件，可在T /4内积分，并乘以4

当 $0<t\le T/4$ 时 $f(t)=(\frac{4A}{T})t$

$$b_k=\frac{4\times 2}{T}\int_0^{T/4}f(t)\sin(k\omega t)\mathrm{d}t=\frac{8}{T}\int_0^{T/4}\frac{4A}{T}t\sin(k\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{8A}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}\frac{8A}{k^2\pi^2},\text{当}k=1,5,9,\cdots\\-\frac{8A}{k^2\pi^2},\text{当}k=3,7,11,\cdots\end{cases}$$

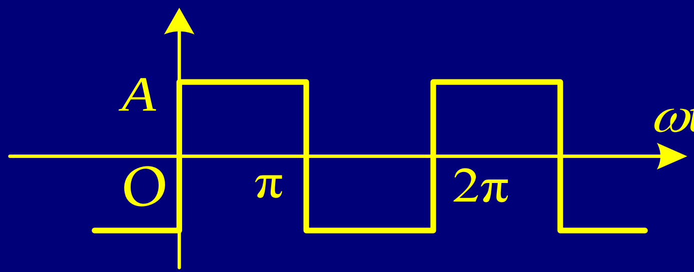
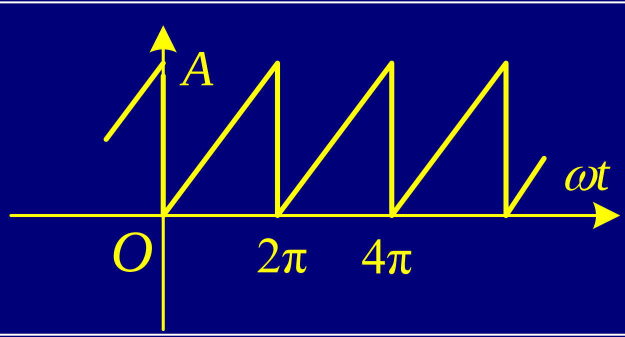
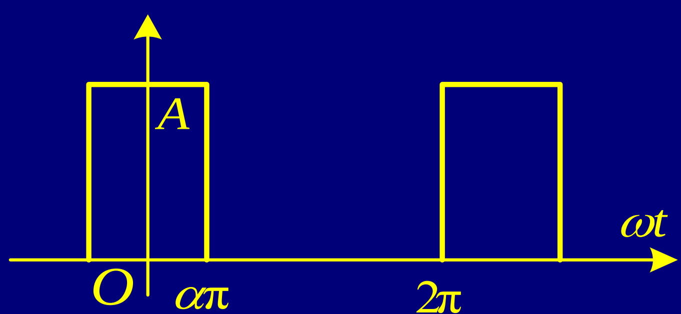
三角波的振幅频谱如图所示



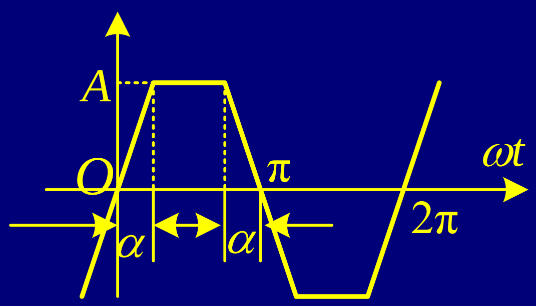
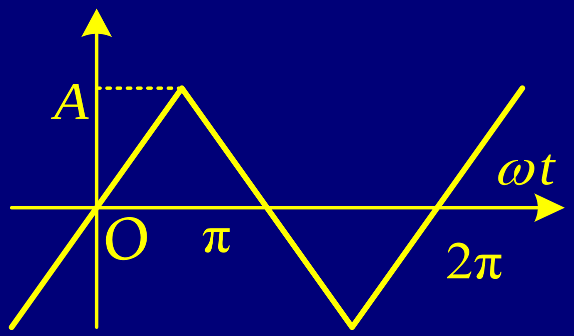
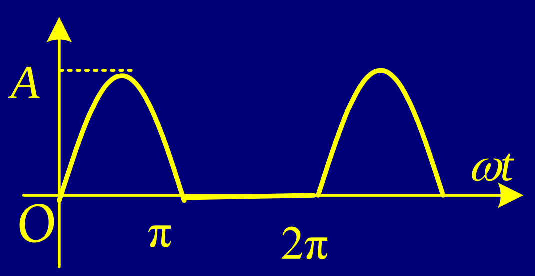
三角波的频谱图

其谐波振幅与k_2成反比。

下面是几种常见周期函数的傅里叶级数

f (*t*)的波形图	*f* (*t*)的傅里叶级数
	$f(\omega t)=\frac{4A}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t$ $+\cdots+\frac{1}{k}\sin k\omega t+\cdots)\quad (k为奇数)$
	$f(\omega t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t$ $+\cdots+\frac{1}{k}\sin k\omega t+\cdots)$
	$f(\omega t)=\alpha A+\frac{2A}{\pi}(\sin\alpha\pi\cos\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\pi\cos 2\omega t$ $+\frac{1}{3}\sin 3\alpha\pi\cos\omega t+\cdots)$

几种常见周期函数的傅里叶级数

***f*(*t*)的波形图**	***f*(*t*)的傅里叶级数**
	$f(\omega t)=\frac{4A}{\alpha\pi}(\sin\alpha\sin\omega t+\frac{1}{9}\sin 3\alpha\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\alpha\sin 5\omega t+\cdots+\frac{1}{k^2}\sin k\alpha\sin k\omega t+\cdots)$ (k为奇数)
	$f(\omega t)=\frac{8A}{\pi^2}(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t-\cdots+\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2}\sin k\omega t+\cdots)$($k$为奇数)
	$f(\omega t)=\frac{A}{\pi}(1+\frac{\pi}{2}\cos\omega t-\frac{2}{3}\cos 2\omega t-\frac{2}{15}\cos 4\omega t-\cdots-\frac{2}{(k-1)(k+1)}\cos k\omega t-\cdots)$ (k为偶数)

基本要求：透彻理解非正弦周期量有效值和平均功率的定义。

■**有效值**：周期量的有效值等于其瞬时值的方均根值，即

$$A=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T[f(t)]^2\mathrm{d}t} \qquad (8.11)$$

1. 当给出函数 $f(t)$ 在一个周期内的表达式，便可以直接代入上式计算有效值。

[补充8.2] 计算图示方波的有效值

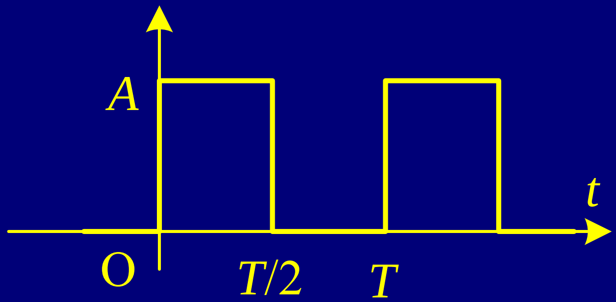


图 周期性方波

[解] 写出所给波形在一个周期内的表达式

$$f(t)=\begin{cases}A,\text{当}0<t\le T/2\\0,\text{当}T/2<t\le T\end{cases}$$

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2}A^2\mathrm{d}t}=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

2． 正弦级数形式求有效值

设 $f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)]=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}\cos(k\omega t+\psi_k)$

代入式 $A=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T[f(t)]^2\mathrm{d}t}$ 得 $A=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T[A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}\cos(k\omega t+\psi_k)]^2\mathrm{d}t}$

根据： $\frac{1}{T}\int_0^T A_0^2\mathrm{d}t=A_0^2$； $\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}^2\cos^2(k\omega t+\psi_k)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_{mk}^2$

$$\frac{1}{T}\int_0^T A_0\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}\cos(k\omega t+\psi_k)\mathrm{d}t=0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k'=1}^{\infty}A_{mk}A_{mk'}\cos(k\omega t+\psi_k)\cos(k'\omega t+\psi_{k'})\mathrm{d}t=0 \qquad (k\neq k')$$

即有 $A=\sqrt{A_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_{mk}^2}=\sqrt{A_0^2+A_1^2+A_2^2+\cdots}$ (8.17)

式中 $A_1=A_{m1}/\sqrt{2}$、$A_2=A_{m2}/\sqrt{2}\cdots$ 分别称为基波、二次谐波…的有效值

式(8.17)表明任意周期量的有效值等于它的恒定分量、基波分量与各谐波分量有效值的平方和的平方根，与各次谐波初相无关。

例题 8.2

已知周期电流 $i=[1+0.707\cos(\omega t-20^\circ)+0.42\cos(2\omega t+50^\circ)]\text{A}$，求其有效值。

解

$$I=\sqrt{(1)^2+\frac{1}{2}(0.707)^2+\frac{1}{2}(0.42)^2}\text{A}=1.16\text{A}$$

- 平均功率

设一端口网络的端口电压、电流取关联参考方向，则其输入的瞬时功率为 $p=ui$

其平均功率就是瞬时功率在一周期内的平均值，即

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t \qquad (8.18)$$

设 $u=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_{uk})$ $\quad i=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_{ik})$

则有 $P=\frac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T[U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_{uk})][I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_{ik})]\mathrm{d}t$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T[U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_{uk})][I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_{ik})]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T U_0I_0\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^T U_0\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_{ik})\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T I_0\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_{uk})\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k'=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}I_{\mathrm{m}k'}\cos(k\omega t+\psi_{uk})\cos(k'\omega t+\psi_{ik'})\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\psi_{uk})\cos(k\omega t+\psi_{ik})\mathrm{d}t$$

$$=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_{\mathrm{m}k}}{\sqrt{2}}\frac{I_{\mathrm{m}k}}{\sqrt{2}}\cos\varphi_k=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos\varphi_k=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P_k$$

式中 U_k 、I_k分别为第 k 次谐波电压和电流的有效值， φ_k 为第 k 次谐波电压与电流间的相位差

非正弦周期电流电路的平均功率等于恒定分量、基波分量和各次谐波分量分别产生的平均功率之和。同时说明：不同频率的电压和电流不产生平均功率。

例题 8.3 已知某无独立电源的一端口网络的端口电压、电流为

$$u=[50+84.6\cos(\omega t+30^\circ)+56.6\cos(2\omega t+10^\circ)]\text{V}$$

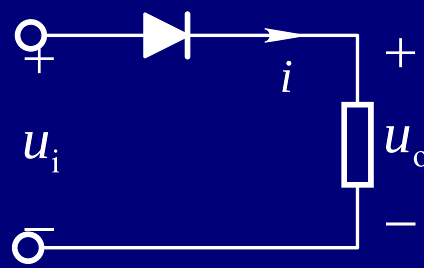
$$i=[1+0.707\cos(\omega t-20^\circ)+0.424\cos(2\omega t+50^\circ)]\text{A}$$

求一端口网络输入的平均功率。

解

$$P=[50\times1+\frac{84.6}{\sqrt{2}}\times\frac{0.707}{\sqrt{2}}\cos(30^\circ+20^\circ)+\frac{56.6}{\sqrt{2}}\times\frac{0.424}{\sqrt{2}}\cos(10^\circ-50^\circ)]\approx78.42\text{ W}$$

[补充8.3] 设图示电路中正弦电压 $u_i=94.2\cos(\omega t-90^\circ)\text{V}$，由于二极管，电流为非正弦周期量 $i=[1+1.57\cos(\omega t-90^\circ)-0.67\cos(2\omega t)-0.13\cos(4\omega t)]\text{A}$ 。试求电流i的有效值和此二端电路输入的平均功率。



[解] 电流 i 的有效值

$$I=\sqrt{1^2+(1.57/\sqrt{2})^2+(0.67/\sqrt{2})^2+(0.13/\sqrt{2})^2}\approx1.57\text{A}$$

平均功率

$$P=\frac{94.2}{\sqrt{2}}\times\frac{1.57}{\sqrt{2}}\cos[-90^\circ-(-90^\circ)]=73.95\text{W}$$

[补充8.4] 图示电路中，已知

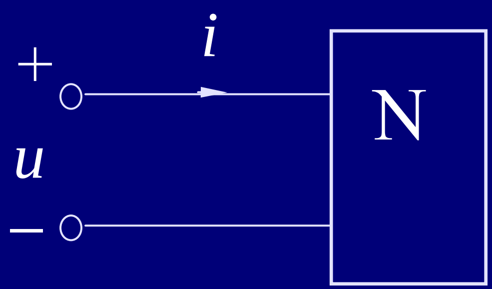
u=100cos(t/s−45°)+50cos(2t/s)+25cos(3t/s+45°)V，

i=80cos(t/s)+20cos(2t/s)+10cos(3t/s)mA。

(1)求一端口网络N的电压u和电流i的有效值。

(2)求一端口网络N消耗的平均功率。

(3)求各频率时N的输入阻抗。



[解] (1) $U=\sqrt{(\frac{100}{\sqrt{2}})^2+(\frac{50}{\sqrt{2}})^2+(\frac{25}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{V}=80.01\mathrm{V}$

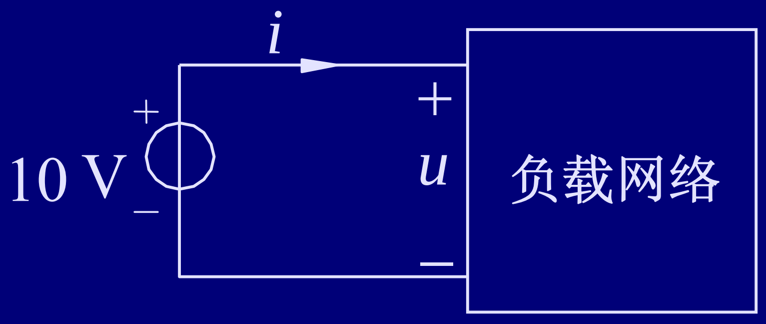
$$I=\sqrt{(\frac{80}{\sqrt{2}})^2+(\frac{20}{\sqrt{2}})^2+(\frac{10}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{mA}=58.74\mathrm{mA}$$

(2) $P=\frac{100\times 80}{2}\cos(-45^\circ)+\frac{50\times 20}{2}\cos 0^\circ+\frac{25\times 10}{2}\cos 45^\circ\,\mathrm{kW}=3.42\mathrm{kW}$

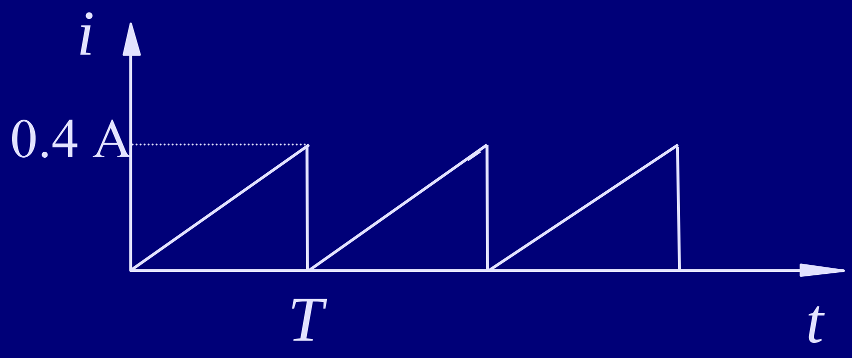
(3) $Z_{(1)}=\frac{100\angle -45^\circ}{80\angle 0^\circ\times 10^{-3}}\mathrm{k\Omega}=1.25\angle -45^\circ\,\mathrm{k\Omega}$ $Z_{(2)}=\frac{50\angle 0^\circ}{20\angle 0^\circ}\mathrm{k\Omega}=2.5\mathrm{k\Omega}$

$$Z_{(3)}=\frac{25\angle 45^\circ}{10\angle 0^\circ}\mathrm{k\Omega}=2.5\angle 45^\circ\,\mathrm{k\Omega}$$

[补充8.5] 求图（a）负载吸收的功率, 电流波形如图（b）所示



（a）



（b）

[解] $u = 10\text{V}$

$$i = \frac{0.4}{T} t\ \text{A} \quad (\ 0 \le t < T\ )$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T 10 \times \frac{0.4}{T} t\,\mathrm{d}t\ \text{W} = 2\text{W}$$

或 $i = \dfrac{0.4}{T} t = \dfrac{0.4}{2} - \dfrac{0.4}{\pi}(\sin \omega t + \dfrac{1}{2}\sin 2\omega t + \cdots)$

$$P = U_0 I_0 = 10 \times \frac{0.4}{2}\ \text{W} = 2\text{W}$$

基本要求：熟练掌握用叠加定理分析非正弦周期电流电路的方法。

- 线性电路在非正弦周期激励时的稳态分析步骤：

1) 把给定的非正弦周期性激励分解为恒定分量和各谐波分量。

2) 分别计算电路在上述恒定分量和各谐波分量单独作用下的响应。求恒定分量响应要用计算直流电路的方法；求各次谐波分量的响应，则要应用计算正弦电流电路的方法（相量法）。

其中，电感、电容对k次谐波的电抗分别为

$$X_{Lk}=k\omega L=kX_{L1}$$ X_{L1}为基波感抗

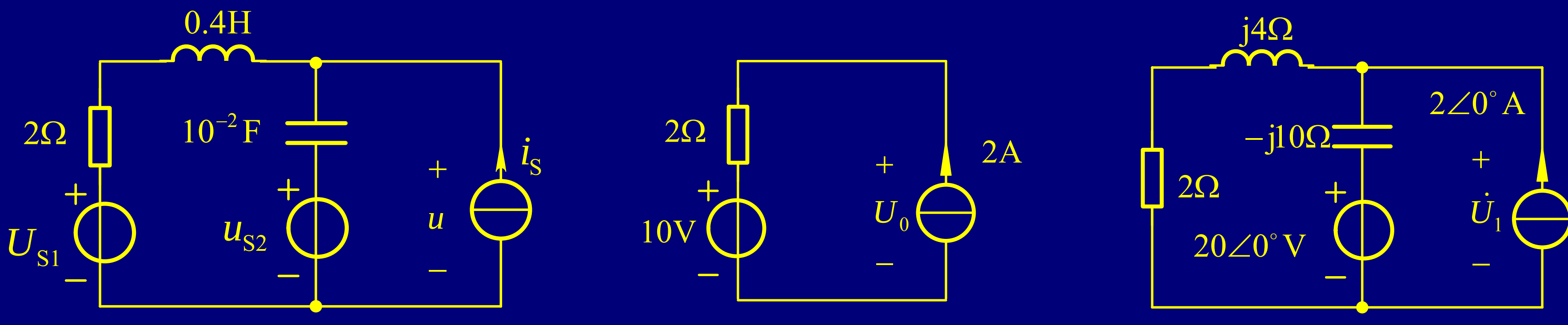
$$X_{Ck}=-\frac{1}{k\omega C}=\frac{1}{k}X_{C1}$$ X_{C1}为基波容抗

3) 根据叠加定理，把恒定分量和各谐波分量的响应相量转化为瞬时表达式后进行叠加。

例题 8.4

图示电路 $U_{S1}=10\text{V}, u_{S2}=20\sqrt{2}\cos\omega t\text{V}, i_S=(2+2\sqrt{2}\cos\omega t)\text{A}, \omega=10\text{rad/s}$.

(1)求电流源的端电压u及其有效值；**(2)** 求电流源发出的平均功率。



(a) （**b**） （**c**）

解 直流分量作用，电路模型如图(b)所示

$$U_0=10\text{V}+2\Omega\times2\text{A}=14\text{V}$$

交流分量作用相量模型如图(c)所示。节点法求电流源端电压相量

$$\left[\frac{1}{(2+\text{j}4)\Omega}+\frac{1}{-\text{j}10\Omega}\right]\dot{U}_1=\frac{20\text{V}}{-\text{j}10\Omega}+2\text{A}$$

解得 $\dot{U}_1=20\angle90^\circ\text{V}$

电流源的端电压及其有效值分别为

$$u=U_0+u_1=[14+20\sqrt{2}\cos(\omega t+90^\circ)]\text{V}$$

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2}=\sqrt{(14)^2+(20)^2}\text{V}=24.4\text{V}$$

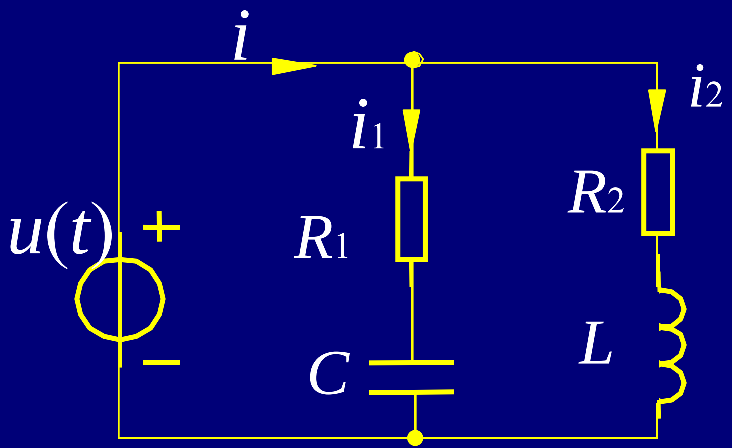
电流源发出的平均功率

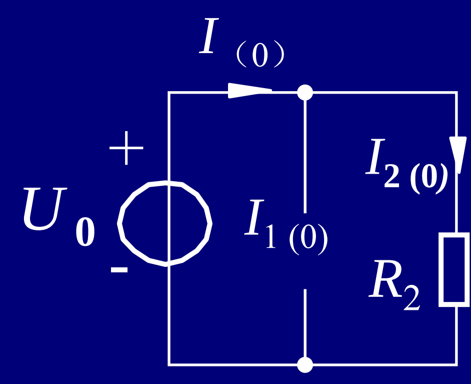
$$P=2U_0+2U_1\cos(90^\circ-0^\circ)$$

$$=(14\times2+20\times2\cos90^\circ)\text{W}=28\text{W}$$

[补充8.6]

图(a) 所示电路，电源电压 $u(t)=[10+100\sqrt{2}\cos\omega t+50\sqrt{2}\cos(3\omega t+30^{\circ})]\text{V}$
$\omega=1000$ rad/s, $R_1=10\ \Omega$, $R_2=4\ \Omega$, $C=100\ \mu\text{F}$, $L=2\text{mH}$
求各支路电流和电源发出的平均功率；在 R_2支路串一电磁式仪表，计算该表读数。





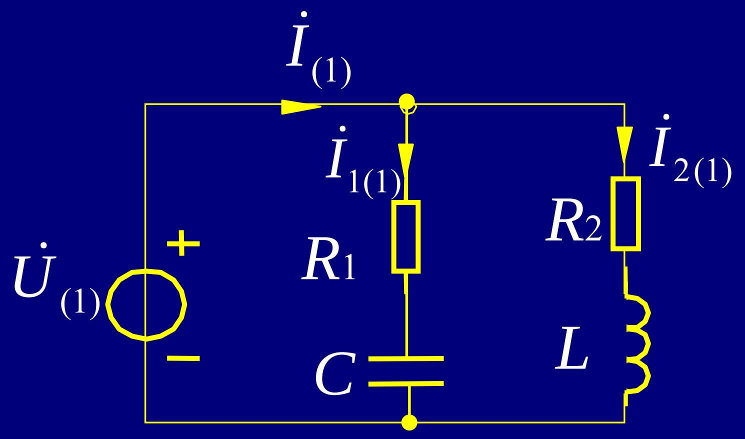
(b)

[解] 1）非正弦周期电源的傅氏级数形式已给定

2) U_0=10V单独作用，电路如图(b)

$$I_{1(0)}=0\,;\quad I_{2(0)}=\frac{U_0}{R_2}=\frac{10}{4}\ \text{A}=2.5\ \text{A}\,;\quad I_{(0)}=I_{2(0)}=2.5\ \text{A}$$

电压源基波单独作用，如图（c）



(c)

$$\dot U_{(1)} = 100\angle 0^\circ\ \text{V}$$

$$X_{C1} = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{1000\times 100\times 10^{-6}}\Omega = -10\Omega\ ;$$

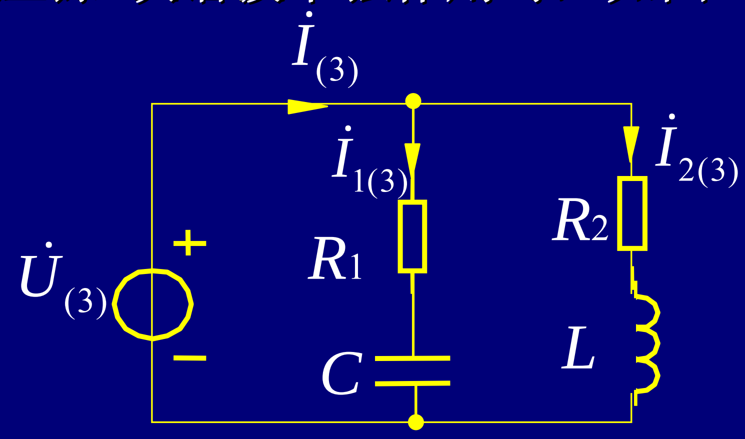
$$X_{L1} = \omega L = 1000\times 2\times 10^{-3}\Omega = 2\Omega$$

$$\dot I_{1(1)} = \frac{\dot U_{(1)}}{R_1 + 1/\mathrm{j}\omega C} = \frac{100\angle 0^\circ}{10-\mathrm{j}10}\text{A} = 7.07\angle 45^\circ\ \text{A}$$

$$\dot I_{2(1)} = \frac{\dot U_{(1)}}{R_2 + \mathrm{j}\omega L} = \frac{100\angle 0^\circ}{4+\mathrm{j}2}\text{A} = 22.37\angle -26.57^\circ\ \text{A}$$

$$\dot I_{(1)} = \dot I_{1(1)} + \dot I_{2(1)} = 25.49\angle -11.3^\circ\ \text{A}$$

电压源3次谐波单独作用时，如图（d）



(d)

$$\dot U_{(3)} = 50\angle 30^\circ\ \text{V}$$

$$X_{C3} = \frac{1}{k}X_{C1} = -\frac{10}{3}\Omega$$

$$X_{L3} = k\,X_{L1} = 3\times 2\Omega = 6\Omega$$

$$\dot I_{1(3)} = \frac{\dot U_{(3)}}{R_1 + \mathrm{j}X_{C3}} = 4.74\angle 48.42^\circ\ \text{A}$$

$$\dot I_{2(3)} = \frac{\dot U_{(3)}}{R_2 + \mathrm{j}X_{L3}} = 6.93\angle -26.31^\circ\ \text{A}$$

$$\dot I_{(3)} = \dot I_{1(3)} + \dot I_{2(3)} = 9.37\angle 2.94^\circ\ \text{A}$$

$I_{1(0)} = 0$；　$I_{2(0)} = 2.5\ \ \text{A}$；　$I_{(0)} = 2.5\ \ \text{A}$

$\dot{I}_{1(1)} = 7.07\angle 45^\circ\ \text{A}$　$\dot{I}_{2(1)} = 22.37\angle -26.57^\circ\ \ \text{A}$　$\dot{I}_{(1)} = 25.49\angle -11.3^\circ\ \text{A}$

$\dot{I}_{1(3)} = 4.74\angle 48.42^\circ\ \text{A}$　$\dot{I}_{2(3)} = 6.93\angle -26.31^\circ\ \text{A}$　$\dot{I}_{(3)} = 9.37\angle 2.94^\circ\ \text{A}$

3) 瞬时叠加

$$i_1 = \sqrt{2}\times 7.07\cos\left(\omega t + 45^\circ\right) + \sqrt{2}\times 4.74\cos\left(3\omega t + 48.42^\circ\right)\ \ \text{A}$$

$$i_2 = 2.5 + \sqrt{2}\times 22.37\cos\left(\omega t - 26.57^\circ\right) + \sqrt{2}\times 6.93\cos\left(3\omega t - 26.31^\circ\right)\ \ \text{A}$$

$$i = 2.5 + \sqrt{2}\times 25.49\cos\left(\omega t - 11.3^\circ\right) + \sqrt{2}\times 9.37\cos\left(3\omega t + 2.94^\circ\right)\ \ \text{A}$$

电源发出的功率：

$$p = U_0 I_0 + U_{(1)} I_{(1)}\cos\psi_1 + U_{(3)} I_{(3)}\cos\psi_3 = 2942\ \text{W}$$

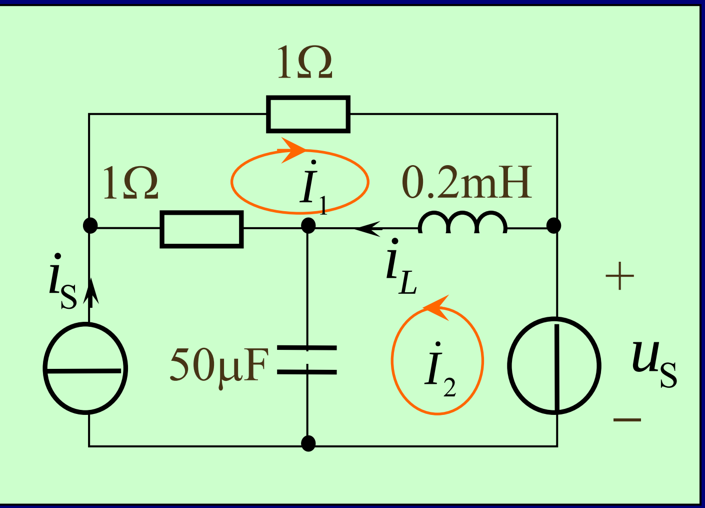
在R_2支路串一电磁式电流表，指针偏角 $\alpha \propto \frac{1}{T}\int_0^T i^2 \mathrm{d}t$ 即所测为有效值

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + I_{2(1)}^2 + I_{2(3)}^2} = 23.55\text{A}$$

[补充8.7] 图示电路中$i_S=[2+\cos(10^4t/s)]$A , $u_S=2\cos(10^4t/s+90°)$V。

(1) 求两电源发出的功率之和。

(2) 求i_L及其有效值。



[解] 电流源直流单独作用时

$$I_{L0} = -\frac{1}{2}\times I_{SO} = -1\text{A} \quad ,$$

$$P_0 = 0.5\times 2^2\,\text{W} = 2\,\text{W}$$

正弦电源作用时

$$\dot U_S = j\sqrt{2}\text{V},\quad \dot I_S = \sqrt{2}/2\angle 0°\text{A}$$

列回路 KVL 方程

$$(2+j2)\dot I_1 + j2\dot I_2 - \sqrt{2}/2\times 1 = 0$$

$$j2\dot I_1 + (2j\text{-}j2)\dot I_2 - j2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = j\sqrt{2}$$

解得 $\dot I_1 = \sqrt{2}\ \text{A}$

$$\dot I_2 = -\sqrt{2} + j0.75\sqrt{2}\text{A} = 1.767\angle -36.87^\circ\ \text{A}$$

两电阻交流作用下吸收功率和为

$$P_1 = I_1^2\times 1 + \left|\dot I_1 - \dot I_{S1}\right|^2\times 1 = 2 + 0.5\text{W} = 2.5\ \text{W}$$

两电源发出功率和为

$$P = P_0 + P_1 = 4.5\ \text{W}$$

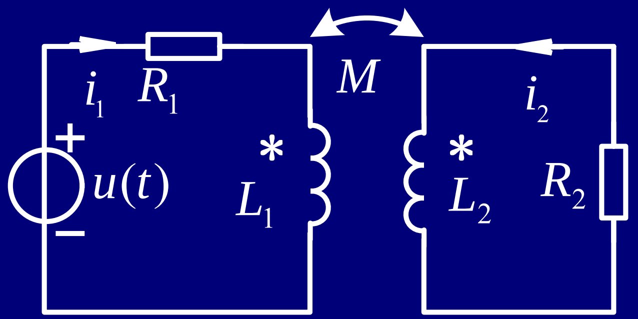
$$\dot I_{L1} = \dot I_1 + \dot I_2 = j1.06\ \ \text{A}$$

故 $i_L = -1 + 1.5\cos(10^4\,\text{t/s} + 90^\circ)\ \ \text{A}$

$$I_L = \sqrt{(-1)^2 + 1.06^2}\,\text{A} = 1.458\ \ \text{A}$$

[补充8.8]图示电路中，$u(t)=[10+8\cos(\omega t)]\text{V}, R_1=R_2=50\Omega, \omega L_1=\omega L_2=50\Omega$

$\omega M=40\Omega$ 。求两电阻吸收的平均功率和电源发出的平均功率。



[解] 当直流单独作用时，电感L_1相当于短路，并且在二次侧不会产生感应电压，二次回路电流为零。

$$I_{2(0)}=0 \qquad I_{1(0)}=\frac{U_{(0)}}{R_1}=\frac{10\text{V}}{50\Omega}=0.2\text{A}$$

电阻R_1吸收的平均功率

$$P_1=I_{1(0)}^2\times R_1+I_{1(1)}^2\times R_1=(0.2^2+0.076^2)\times 50=2.29\text{W}$$

当基波单独作用时

$$\begin{cases}(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_{1(1)}+\mathrm{j}\omega M\dot{I}_{2(1)}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ \\ \mathrm{j}\omega M\dot{I}_{1(1)}+(R_2+\mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_{2(1)}=0\end{cases}$$

电阻R_2吸收的平均功率

$$P_2=I_{2(1)}^2R_2=0.043^2\times 50=0.092\text{W}$$

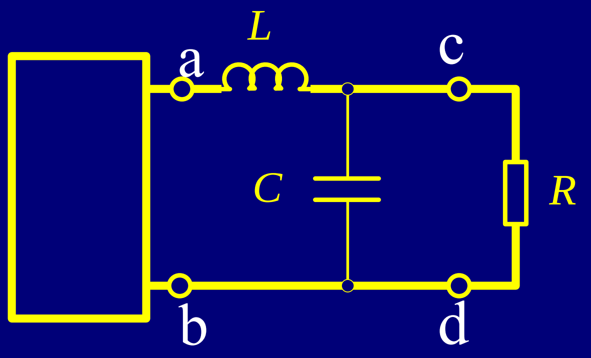
解得 $$\begin{cases}\dot{I}_{1(1)}=0.076\angle-27.26^\circ\ \text{A} \\ \dot{I}_{2(1)}=-0.043\angle 17.84^\circ\ \text{A}\end{cases}$$

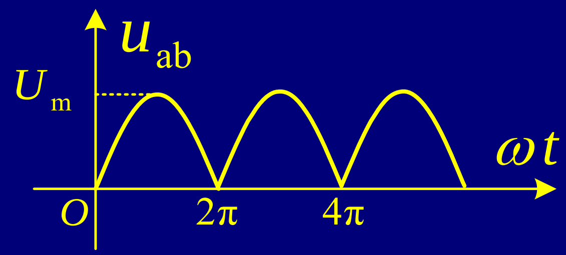
电源发出的平均功率

$$P=P_1+P_2=2.382\text{W}$$

例题 8.5

图(a)中LC构成滤波电路，其中L=5H，C=10μF。设输入为工频正弦经全波整流电压，如图(b)所示，电压振幅 $U_{m}=150\text{V}$ ，负载电阻R=2000Ω。求电感电流 i和负载端电压u_{cd}。





（b）

解 (1)图（b）电压的傅里叶级数为

$$u_{ab}=\frac{4U_{m}}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos\omega t-\frac{1}{15}\cos 2\omega t-\cdots\right)=$$

$$[95.5+45\sqrt{2}\cos(\omega t+180^{\circ})+9\sqrt{2}\cos(2\omega t+180^{\circ})+\cdots]\text{V}$$

(2)分别计算电源电压的恒定分量和各次交流分量引起的响应。

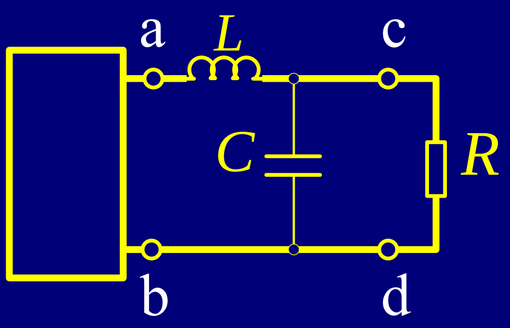
①恒定电压作用时电感相当于短路，电容相当于开路，故

$$I_{0}=\frac{95.5\text{V}}{2000\Omega}=0.0478\text{A};\quad U_{cd0}=95.5\text{V}$$

②电压基波作用。此时基波角频率应为 $\omega=2\times100\pi\ \text{rad/s}$

RC并联电路的阻抗为 $Z_{cd1}=\dfrac{R/(\text{j}\omega C)}{R+1/(\text{j}\omega C)}=\dfrac{R}{1+\text{j}\omega CR}=\dfrac{2000\Omega}{1+\text{j}4\pi}=158\angle-85.4^{\circ}\,\Omega$

ab端口的输入阻抗 $Z_1 = j\omega L + Z_{cd1} = [j1000\pi + (12.6 - j158)]\Omega \approx 2980\angle 90^\circ \Omega$



$$u_{ab} = [95.5 + 45\sqrt{2}\cos(\omega t + 180^\circ) + 9\sqrt{2}\cos(2\omega t + 180^\circ) + \cdots]V$$

$$I_0 = 0.0478A \qquad U_{cd0} = 95.5V$$

$$Z_{cd1} = 158\angle -85.4^\circ \Omega \qquad Z_1 \approx 2980\angle 90^\circ \Omega$$

由此得 $\dot{I}_1 = \dfrac{45\angle 180^\circ V}{2980\angle 90^\circ \Omega} = 0.0151\angle 90^\circ A$

$$\dot{U}_{cd1} = Z_{cd1}\dot{I}_1 = 158\angle -85.4^\circ \Omega \times 0.0151\angle 90^\circ A = 2.39\angle 4.6^\circ V$$

③ 二次谐波的作用角频率加倍

$$Z_{cd2} = \frac{R}{1 + j2\omega RC} = \frac{2000\Omega}{1 + j8\pi} \approx 79\angle -87.7^\circ \Omega$$

$$Z_2 = j2\omega L + Z_{cd2} = j2000\pi + 79\angle -87.7^\circ \approx 6280\angle 90^\circ \Omega$$

$$\dot{I}_2 = \frac{9\angle 180^\circ V}{6280\angle 90^\circ \Omega} = 0.00143\angle 90^\circ A$$

$$\dot{U}_{cd2} = Z_{cd2}\dot{I}_2 = 79\angle -87.7^\circ \times 0.00143\angle 90^\circ = 0.113\angle 2.3^\circ V$$

可见负载电压中二次谐波有效值仅占恒定电压的 $0.113/95.5=0.12\%$ ，所以不必计算更高次谐波的影响。

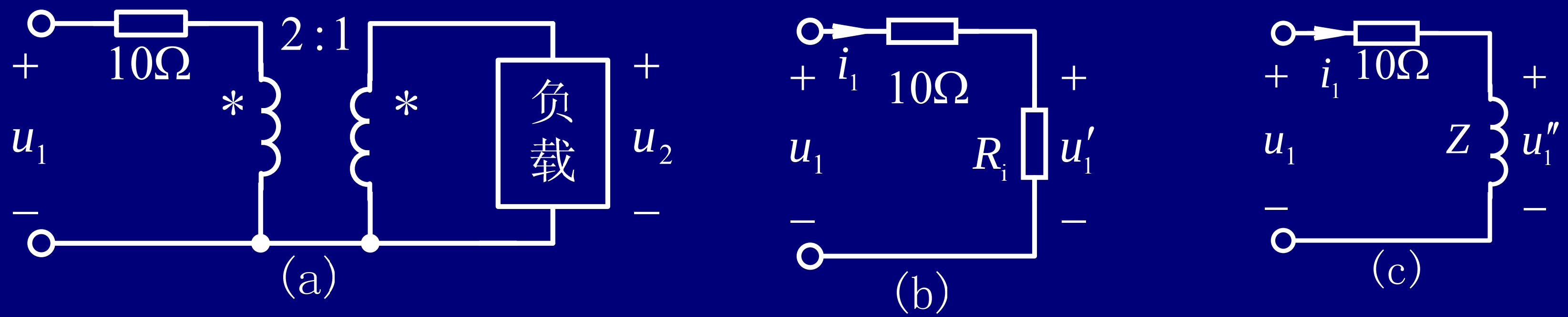
(3) 把相量变化为瞬时表达式叠加。

$$i=I_0+i_1+i_2=$$
$$[47.8+15.1\times\sqrt{2}\cos(\omega t+90^\circ)+1.43\times\sqrt{2}\cos(2\omega t+90^\circ)]\mathrm{mA}$$

$$u_{\mathrm{cd}}=U_{\mathrm{cd0}}+u_{\mathrm{cd1}}+u_{\mathrm{cd2}}=$$
$$[95.5+2.39\times\sqrt{2}\cos(\omega t+4.6^\circ)+0.113\times\sqrt{2}\cos(2\omega t+2.3^\circ)]\mathrm{V}$$

说明:负载电压u_{cd}中最大的谐波，即基波有效值仅占恒定分量的2.5%，表明这个*LC*电路具有滤除各谐波分量作用→滤波电路或滤波器。电感*L*起抑制高频交流的作用→扼流圈。并联电容*C*起减小负载电阻上交流电压的作用→旁路电容。

[补充8.9]已知图**(a)**所示电路中输入电压 $u_1=[(20\cos(\omega t)+10\cos(3\omega t)]\text{V}$ 当负载为下列两种情况时分别计算输出电压u_2：**(1)**负载为电阻R=**10** Ω；**(2)**负载为电感，且 $\omega L=2\Omega$



[解]（**1**）等效电路见图 **(b)**，其中 $R_i=n^2R=40\Omega$

整个电路为电阻性电路

$$u_2=\frac{1}{n}\times u_1'=\frac{1}{2}\times\frac{40}{10+40}\times u_1=[8\cos(\omega t)+4\cos(3\omega t)]\text{V}$$

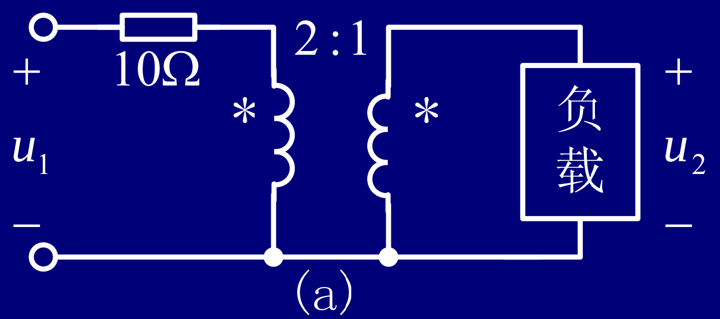
（**2**）等效电路见图 **(c)**，

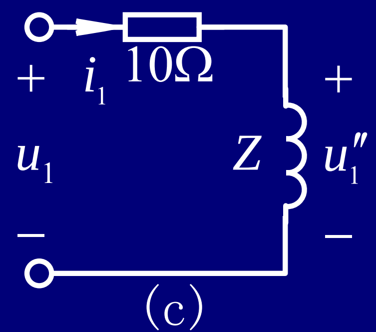
其中对基波 $Z_{(1)}=n^2\times \mathrm{j}\omega L=\mathrm{j}8\Omega$

对三次谐波 $Z_{(3)}=n^2\times \mathrm{j}3\omega L=\mathrm{j}24\Omega$

$u_1 = [(20\cos(\omega t) + 10\cos(3\omega t)]\text{V}$

(2)负载为电感，且 $\omega L = 2\Omega$ 计算输出电压$\boldsymbol{u_2}$。





$Z_{(1)} = \text{j}8\Omega$

$Z_{(3)} = \text{j}24\Omega$

当基波单独作用时

$$\dot{U}_{2(1)} = \frac{1}{n}\times\dot{U}''_{1(1)} = \frac{1}{n}\times\frac{Z_{(1)}}{10+Z_{(1)}}\times\frac{20}{\sqrt{2}}\text{V} = \frac{6.247}{\sqrt{2}}\angle 51.34°\text{V};\quad u_{2(1)}(t) = 6.247\cos(\omega t + 51.34°)\text{V}$$

三次谐波单独作用时

$$\dot{U}_{2(3)} = \frac{1}{n}\times\dot{U}''_{1(3)} = \frac{1}{n}\times\frac{Z_{(3)}}{10+Z_{(3)}}\times\frac{10}{\sqrt{2}}\text{V} = \frac{4.615}{\sqrt{2}}\angle 22.6°\text{V};\quad u_{2(3)}(t) = 4.615\cos(3\omega t + 22.6°)\text{V}$$

由叠加定理得

$$u_2 = u_{2(1)} + u_{2(3)} = [6.247\cos(\omega t + 51.34°) + 4.615\cos(3\omega t + 22.6°)\,]\text{V}$$

本 章 小 结

$$f(t)=A_0+[\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)] \qquad (8.1)$$

$$=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}\cos(k\omega t+\psi_k) \qquad (8.6)$$

$$a_k=A_{mk}\cos\psi_k \qquad b_k=-A_{mk}\sin\psi_k$$

$$A_{mk}=\sqrt{a_k^2+b_k^2} \qquad \psi_k=\arctan\frac{-b_k}{a_k}$$

有效值 $A=\sqrt{A_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_{mk}^2}=\sqrt{A_0^2+A_1^2+A_2^2+\cdots}$

平均功率 $P=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos\varphi_k=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P_k$

计算非正弦周期电流电路的步骤

将非正弦周期性激励分解为恒定分量、基波和各次谐波分量；

分别计算激励中不同频率的分量引起的响应；

最后将响应的各分量的瞬时表达式相加。

谢 谢！