§1.1 多项式及整除性

定义1.1 设Ω是一些数组成的集合，而且不只含一个数，如果对于任意，它们的和、差、积、商 (除数不为0) 均含于Ω，则称Ω是一个数域.

命题1.1 每个数域都包含有理数域, 即有理数域是最小的数域.

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$是三个最重要的数域，但数域并非仅此三种，如下面例子所示.

例1.1：设

$$\Omega = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

则Ω是一个数域.

- 数域上Ω的所有一元多项式构成之集合记为Ω[x] .
- 多项式常用 f(x),g(x),…或f,g…等来表示. f(x)的 次数记为degf(x).
- 系数全为0的多项式称为零多项式, 也用0来表示. 从定义可看出, 零多项式没有次数的概念. 零次多项式恰为非零常数.

定义1.2：设x是一个符号，n是一个非负整数，$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Omega$，则形式表达式

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

称为数域Ω上的一个一元多项式，其中$a_i x^i$称为该多项式的i次项，a_i称为i次项的系数；a_0称为常数项；当$a_n \neq 0$时，$a_n x^n$称为该多项式的首项，首项的次数n称为该多项式的次数.

定义1.3：如果多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的同次项系数全相等，则称 $f(x)$和 $g(x)$相等，记为 $f(x) = g(x)$.

上页 下页 返回

和初等代数一样,我们可以定义Ω上的一元多项式的运算.设

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n,$$

则规定它们的加法与减法为（当$m\le n$时）

$$f(x)\pm g(x)=(a_0\pm b_0)+(a_m\pm b_m)x+\cdots+(a_m\pm b_m)x^m\pm b_{m+1}x^{m+1}\pm\cdots\pm b_nx^n;$$

它们的乘法为

$$f(x)g(x)=c_0+c_0x+\cdots+c_{m+n}x^{m+n},$$

其中 $c_k=\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j$.特别地，$c_0=a_0b_0$，$c_{m+n}=a_mb_n$.

设$f(x),g(x)$均不为零，则从定义立即可以看出，

1. $\mathrm{fg}\neq 0$,且$\deg(\mathrm{fg})=\deg \mathrm{f}+\deg \mathrm{g}$;

2. $(\mathrm{f}\pm \mathrm{g})=0$ 或 $\deg(f\pm g)\le\max\{\deg f,\deg g\}$,其中max表示取最大值.

上页 下页 返回

命题1.2 设 $f, g, h \in \Omega[x]$ 则有

1. 加法交换律：$f+g=g+f$;

2. 加法结合律：$(f+g)+h=f+(g+h)$;

3. 乘法交换律：$fg=gf$;

4. 乘法结合律：$(fg)h=f(gh)$;

5. 分配律：$f(g+h)=fg+fh$;

6. 消去律：若 $fg=fh$，且 $f\neq 0$，则 $g=h$.

上页 下页 返回