第四章 线性方程组

§4.2 线性方程组的解法

一个线性方程组 AX=B 的解的数量有三种情况: 0, 1,∞. 对于第三种情况,逐个写出这些解是不可能的 .

解线性方程组的本质就是用一组可自由取值的变量 ----(称为自由变量)来表示其余的变量(称为主变量),使得对于自由变量的任一组值, 都能唯一确定主变量的值, 它们一起构成方程组的一个解. 注意：主变量和自由变量的分法并不是唯一的.

自然地,我们应解决以下问题:

1．方程组何时有解?
2．若方程组有解,哪些变量可取作主变量?

下一页

为了解决上面提出的问题，首先引入同解方程组的概念.

设有两个n元线性方程组(I)和(II), 若(I)的每个解都是(II)的解, 反之(II)的每个解都是(I) 的解, 则称这 两个方程组同解.

若矩阵A可经过行初等变换变为矩阵B,则称A与B等价

对方程组AX=b, 矩阵(A b)称为增广矩阵.

命题2.1 若两个线性方程组的增广矩阵行等价, 则这两个方程组同解.

我们有下面的定理:

定理2.1 线性方程组 AX=B 有解的充分必要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩数相等.

下面讨论哪些变量可取作主变量.

我们用一个五阶行列式来说明这个问题.

设线性方程组$AX=b$即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$ 有解

并且秩A=秩(A b)=2,

设$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$就是一个2阶的非奇异子块.

上页 下页 返回

因为增广矩阵的秩数为2, 所以第二行和第三行是增广矩阵的行向量组的一个极大无关组. 从而其它的行都可以用这两行来表示, 因此可以用这两行将其他行化为0.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_2 \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

原方程化为:

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

记为C　　　记为D

则 $\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 即 $C\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

从而 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -C^{-1}D\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

由此可知,可取x_1, x_2变量为主变量,其余的为自由变量.

推广上面的例子，我们有下面的定理：

命题2.2 设线性方程组 AX=B 有解, 且秩A=r . 若 M 是 A 的一个 r 阶非奇异子式, 则 M 所占的方程构成的方程组与原方程组同解, 且以 M 的元素为系数的 r 个变量可取作主变量.

解线性方程组的Gauss-Jordan消元法

在实际计算中, 一般不需要先确定哪些变量是主变量.

通常的做法是：

1. 先对增广矩阵作行变换, 将其中的 r 个列化成 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ 其中，r=秩A .

2. 然后取这 r 个列对应的变量为主变量, 将主变量用其余变量表出,即可得参数形式的解.

例2.1 求解线性方程组

$$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3. \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

解：将增广矩阵用初等行变换化成约化阶梯矩阵,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1\times r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1\times r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\times r_3 + r_2]{-1\times r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

由此得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 2 \\ x_3 = 0, \\ x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_5 + 2 \\ x_3 = 0. \\ x_4 = -2x_5 + 1 \end{cases}$$

取$x_2=a$，$x_5=b$，可得参数形式解

$$\begin{cases} x_1 = -a + b + 2 \\ x_2 = a \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -2b + 1 \\ x_5 = b \end{cases},$$

其中a,b是任意数.

解线性方程组的主元消元法

有时, 化阶梯形不方便, 此时我们采用主元消元法:

1. 在增广矩阵中任意取一个非零系数---称为主元, (注意：不能是常数项)
2. 用初等行变换将主元所在列中其余元素都化为0, 并重复此过程, 直至每个非零行都有一个主元. (注意：一行不能有两个主元)
3. 最后将主元都化为1 , 则主元所在的列就是单位矩阵的列.

取主元对应的变量为主变量即可得出参数形式的解.

我们用一个具体的例子来详细说明这中方法.

例2.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + bx_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \\ x_1 + cx_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

解：对增广矩阵作行初等变换，

选为第一行的主元

选为第二行的主元

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 2 & 1 & 2 \\ 1 & c & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\times r_1 + r_3]{-1\times r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b-a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-a & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

$$\xrightarrow[-2\times r_2+r_3]{-1\times r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 2a-b & 0 & -1 & 0\\ 0 & b-a & 1 & 1 & 1\\ 0 & a+c-2b & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

选为第三行的主元

$$\xrightarrow{-1\times r_3}\begin{pmatrix}1 & 2a-b & 0 & -1 & 0\\ 0 & b-a & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2b-a-c & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[1\times r_3+r_1]{-1\times r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & a+b-c & 0 & 0 & 0\\ 0 & c-b & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2b-a-c & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

从而，得同解方程组：

$$\begin{cases} x_1 + (a+b-c)x_2 = 0 \\ (c-b)x_2 + x_3 = 1. \\ (2b-a-c)x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

取x_2为自由变量即得参数形式的解

$$\begin{cases} x_1 = -(a+b-c)t \\ x_2 = t \\ x_3 = (b-c)t + 1' \\ x_4 = (a-2b+c)t \end{cases}$$

其中 t 为任意常数.