§2.5 Cramer法则

设有n个元方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (5.1)$$

其系数构成的n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为此方程组的系数行列式.

Cramer法则 设线性方程组的系数行列式$D \neq 0$,则方程组有唯一一组解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n=\frac{D_n}{D} \qquad (5.3)$$

其中D_k是把D的第k列元素分别换成常数项$b_1, b_2, \ldots, b_n$ 而得到的行列式,即

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{1k+1} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中$k = 1, 2, \ldots, n.$

证明 首先证明(5.3)是方程组(5.2)的解.将(5.3)代入(5.2)的第一个方程可得,

$$a_{11}\frac{D_1}{D}+a_{12}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{1n}\frac{D_n}{D}$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}D_k$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\sum_{j=1}^{n}b_jA_{jk}$$

上页 下页 返回

$$=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_jA_{jk}$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{jk}$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}b_j\delta_{1j}$$

$$=b_1.$$

故(5.3)满足(5.2)的第一个方程. 同理可验证(5.3)也满足(5.2)的其它方程. 于是(5.3)是(5.2)的解.

现在证明方程组的解只有(5.3).

设 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 是的解.代入可得

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = b_n \end{cases}.$$

于是,

上页 下页 返回

同理可得, $Dc_2 = D_2, \ldots, Dc_n = D_n$. 故,

$$c_1 = \frac{D_1}{D}, c_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, c_n = \frac{D_n}{D}.$$

例5.1 解方程组

$$\begin{cases} 2x+y \quad\;\; =0 \\ 3x-y+2z=1, \\ 2x+y-2z=2 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=8,$$

而且,

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=6,\ D_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=-4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-10.$$

由Cramer法则可知方程组的解为

$$x=\frac{3}{4},\quad y=-\frac{1}{2},\quad z=-\frac{4}{5}.$$