§2.2 行列式的基本性质

引理 对一个排列作一次对换后,排列的奇偶性改变

证明 设所考虑的排列为

$$P_1 \quad : \quad p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n,$$

将排列中的两个数 p_i 和 p_j 对换, 则新排列为

$$P_2 \quad : \quad p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n.$$

上页 下页 返回

首先证明,当这两个元素相邻时,即 $j=i+1$ 时, P_1 和 P_2 的奇偶性不相同.

若 $p_i<p_{i+1}$, 则易知 P_2 的反序数比 P_1 反序数大1; 若 $p_i>p_{i+1}$, 则易知 P_2 的反序数比 P_1 的反序数小1. 无论哪种情况, P_1 和 P_2 的反序数的奇偶性都不相同,故 P_1 和 P_2 的奇偶性不相同.

现在考虑一般情况.注意到,要把 p_i 和 p_j 对换,可通过一系列的相邻元素的互换来实现:

先把p_i依次与其后面的 $p_{i+1},\cdots,p_j$ 互换, 共$j-i$ 次; 接着再将p_j 依次与其前面的$p_{j-1},\cdots,p_{i+1}$ 互换,共 $j-i-1$ 次. 总计进行了$2j+2i-1$次相邻互换,便将 P_1 变成 P_2. 因为每次互换两个相邻元素后, 排列的奇偶性改变一次,所以经过了 $2j-2i-1$次奇偶性的改变后,P_1变成了 P_2,于是,P_1和 P_2 的奇偶性必不相同.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

即,D'是把D的行作为列而得到行列式.

D'称为D的转置行列式,显然,D也是D'的转置行列式.

上页 下页 返回

性质1 行列式与其转置行列式相等

证明由行列式的定义可知, D' 的展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

现在对换其中的因子以使行标排列成为自然排列,那么,列标排列同时由自然排列变成另外一个排列,设为 $q_1q_2\cdots q_n$.由引理可知,它与排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的奇偶性相同.因此,

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}.$$

于是,上面的一般项实际上等于

上页 下页 返回

$$(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n},$$

这恰好是D的展开式中的一般项,故

$$D' = D.$$

我们规定:

- 两个行(或列)相等是指它们的对应元素都相等;
- 两个行(或列)相加指的是将其所有对应的元素相加;
- 一个数乘以一个行(或列)指的是用此数乘以这个行(或列)的所有元素.

性质2　设n阶行列式D, D_1, D_2除第i行(列)以外的诸行(列)全相同，且D的第i行(列)是D_1和D_2的第i行(列)之和,则$D = D_1 + D_2$.

证明设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

上页　下页　返回

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则由行列式的定义,

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots (b_{ip_i} + c_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots a_{np_n} \\ &\quad + \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots c_{ip_i} \cdots a_{np_n} \\ &= D_1 + D_2. \end{aligned}$$

性质3 用一个数c乘以行列式的某一行(列)等于用c乘以该行列式.

证明设$D = \det(a_{ij})$是一个n阶行列式, 将D的第i行乘以数c可得,

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据行列式的定义,

$$D_1 = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots(ca_{ip_i})\cdots a_{np_n}$$

$$= c\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$= cD.$$

推论1 行列式某行 (列)元素的公因子可提到行列式外.

推论2 若行列式的某行(列)元素全为0 ,则行列式等于0.

性质4 把行列式的两行(列)互换位置,则行列式变号.

证明 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然D_1是通过对换D的第i行和第j行而得到的行列式. 注意到,D的展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_2}\cdots a_{jp_2}\cdots a_{np_n}.$$

而D_1的展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_2}\cdots a_{ip_2}\cdots a_{np_n}.$$

由引理可知,$\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)$和$\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)$的奇偶性不同,故

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)},$$

于是$D=-D_1$.

上页 下页 返回

为了叙述简洁,有时把一个行列式按列的形式记为$|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n|$,其中$\alpha_k$表示该行列式的第$k$列.

推论 若行列式有两行(列)元素全对应相等,则行列式等于0 .

证明 考虑列的情况.设所考虑的行列式为$D=|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n|$,其中$\alpha_i=\alpha_j$.将$D$的第$i$列和第$j$ 列互换位置可得,

$$D_1=|\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_j \quad \cdots \quad \alpha_i \quad \cdots \quad \alpha_n|.$$

上页 下页 返回

因为$\alpha_i = \alpha_j$,所以$D = D_1$.另一方面,由定理可知, $D = -D_1$,从而$D = -D$,故$D = 0$.

推论 若行列式的两行(列)元素对应成比例,则行列式等于0 .

性质5 把行列式的某一行(列)的a倍加到另一行(列),行列式的值不变.

证明 考虑列的情况.设所考虑的行列式为$D = |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n|$,将$D$的第$i$列的$a$倍加到第$j$列可得,

i列的a倍加到第j列可得,

$$D_1 = | \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_i \quad \cdots \quad \alpha_j + a\alpha_i \quad \cdots \quad \alpha_n |.$$

于是,由定理和上面的推论可得,

$$D_1 = | \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_j \quad \cdots \quad \alpha_i \quad \cdots \quad \alpha_n |.$$

例 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

解 把行列式 D 化成三角形行列式.

$$D = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$
= (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}
$$

$$
= (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.
$$

上页 下页 返回