第三章 矩阵

》矩阵的研究背景.

》矩阵研究的主要内容.

背景

矩阵概念的出现与线性方程组和行列式的研究有关,首先出现在19世纪中叶W.R. Hamilton以及A.Cayley的研究工作.矩阵论的基本结果应归于K. Weierstrass, C. Jordan 与F.G. Frobenius 等人的工作.矩阵这个术语是J.J. Sylvester (1850)首次使用的.

返回

本章所介绍的矩阵的主要内容是:

本章的主要内容之一是矩阵的几种最基本的“运算",
二元运算:加法、乘法,
一元运算:逆、数乘、转置、伴随,
数值函数:行列式、秩数，以及它们之间的关系.另一个重要内容是矩阵的初等(行)变换及其标准形.

返回

§3.1 矩阵的线性运算

定义1.1 由集合S中的元素$a_{ij}(i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n)$所构成的$m$行$n$列的矩形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为S上一个$m\times n$矩阵，通常简记为$(a_{ij})_{m\times n}$或(a_{ij}).

一个$n\times n$矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵.在一个n阶矩阵中,从左上角至右下角的一串元素$a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$称为矩阵的对角线.

只有一行或一列的矩阵分别称为行向量或列向量.特被地,$1\times n$矩阵称为n元行(向量);$n\times 1$矩阵称为n元列(向量).向量将用希腊小写字母α,β等表示

如果两个矩阵的行数、列数都分别相等,而且所有对应位置的元素都分别相等,则说这两个矩阵相等.

矩阵常用大写字母A,B,C,...等表示;特别地,$m\times n$矩阵也常用$A_{m\times n}, B_{m\times n}$等表示.

下面引入矩阵的运算.

从今之后,除非特别说明,矩阵均指数域Ω上的矩阵

定义1.2(矩阵的加法)设A,B都是$m\times n$矩阵,把它们对应位置的元素相加而得到的$m\times n$矩阵称为A,B的和,记为$A+B$即,若$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$,则规定

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,则记$-A=(-a_{ij})m\times n$,称为A的负矩阵.我们也可以定义矩阵的减法:$B-A$等于B的元素减去A的对应元素所得矩阵.显然$B-A=B+(-A)$.

定义1.3 (矩阵的数乘)用数c去乘矩阵A的所有元素而得到的矩阵称为c与A的积,记为cA或Ac.即,若A=(a_{ij}),则规定

$$cA=(ca_{ij})=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

元素全是0的矩阵称为$m\times n$零矩阵,记为0或$0_{m\times n}$,它们和数中的0相似.

上页 下页 返回

命题1.1 设A,B,C均为m $\times$ n矩阵,a,b是数,则有

1.加法结合律:$A + B) + C = A + (B + C)$;

2.加法交换律:$A + B = B + A$;

3. $A + 0_{m\times n} = A$;

4. $A + (-A) = 0_{m\times n}$;

5. $a(A + B) = aA + bB$;

6. $(a + b)A = aA + bA$;

7. $(ab)A = a(bA)$.

定义1.4对于一组$m\times n$矩阵$A_1,\ldots,A_t$和数$c_1,\ldots,c_t$，矩阵

$$c_1A_1+\cdots+c_tA_t$$

称为$A_1,\ldots,A_t$的一个线性组合.

例如，设E_{ij}表示第i行第j列元素为1，其余元素为零的$m\times n$矩阵（称为$m\times n$矩阵单位），则容易验证，对于任意$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$，均有

$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$，即每个矩阵都是矩阵单位的线性组合比如

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}=2E_{11}-E_{12}-3E_{22}.$$

特别地，设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则每个n元列都是$\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$的线性组合.比如

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n e_n .$$