第四章 线性方程组

§4.3 线性方程组的解的结构

上一节, 我们学习了:

1. 线性方程组有解的条件
2. 解线性方程组的Gauss消元法和主元消元法

这一节，我们将进一步讨论线性方程组的解的结构.

注意：在上一节我们得到的都是参量形式的解，在本节我们将把线性方程组的解都写成列向量的形式，这便于讨论方程组的解的结构.

下一页

首先考虑齐次(即常数项为0)线性方程组：AX=0.

命题3.1 齐次线性方程组 AX=0 只有零解当且仅当 A 是列满秩矩阵.

证明：AX=0只有零解 $\Leftrightarrow$ A的列向量线性无关

$\Leftrightarrow$ A是列满秩矩阵

推论3.1 当A是一个 n 阶矩阵时, 线性方程组 AX=0 有非零解的充分必要条件是系数行列式等于 0.

命题3.2 AX=0的有限个解的线性组合仍为AX=0的解.

齐次线性方程组的解向量的集合称为解空间. 解空间的一个极大无关组称为齐次线性方程组的一个基础解系.

可见：线性方程组AX=0的每个解都能用基础解系线性表示. 并且基础解系的线性组合都是AX=0的解.

所以，求AX=0的解，只需求它的一个基础解系.

一个线性方程组的基础解系含有多少个解向量呢？下面的定理回答了这个问题.

定理3.1 设 AX=0 是 n 元齐次线性方程组. 若秩A=r，则 AX=0 的一个基础解系恰为 n-r 个线性无关的解向量.

定理３.1的证明：

证明: 如果 AX=0 有一个基础解系包含 n-r 个向量, 则任意 n-r 个线性无关的解均为基础解系. 因此我们只需证明 AX=0 有一个基础解系恰包含 n-r 个解向量.

当 r=n 时, 系数矩阵 A 是一个列满秩矩阵, 故方程组AX=0只有零解, 因此基础解系包含 n-n=0 个解向量.

当 r<n 时, 方程组有 n-r 个自由变量, 故其参数形式的解由 n-r 个参数给出, 设为

$$
\begin{cases}
x_1 = -b_{1r+1}t_1 - \cdots - b_{1n}t_{n-r} \\
x_2 = -b_{2r+1}t_1 - \cdots - b_{2n}t_{n-r} \\
\quad\vdots \\
x_r = -b_{rr+1}t_1 - \cdots - b_{rn}t_{n-r} \\
x_{r+1} = t_1 \\
\quad\vdots \\
x_n = t_{n-r}
\end{cases},
$$

(其中$t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$ 是任意数.)

写成向量形式为:

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n} \\ \vdots \\ -b_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

简记为：$X = t_1\alpha_1 + \cdots + t_{n-r}\alpha_{n-r}$

显然，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$ 都是 $AX = 0$ 的解，并且 $AX = 0$ 的每个解都可由它们线性表示．而矩阵

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}) = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} & \cdots & -b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -b_{r,r+1} & \cdots & -b_{rn} \\ & & \\ & \mathrm{I}_{\text{n-r}} & \\ & & \end{pmatrix}$$

秩数为 n-r .

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$ 线性无关. 从而为基础解系.

例3.1 求下列方程组的一个基础解系及通解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

解: 将系数矩阵化成约化阶梯矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4\times r_1 + r_4]{-2\times r_1 + r_2 \\ -3\times r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\times r_2+r_4]{-1\times r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\times r_2]{1\times r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ (约化阶梯矩阵)

相应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases},$$

令 $x_2 = a, x_4 = b$ 则可得方程组的参数形式解

$$\begin{cases} x_1 = a - 2b \\ x_2 = a \\ x_3 = 3b \\ x_4 = b \end{cases},$$ (a, b 为任意数)

上页 下页 返回

即 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $\alpha_1 = (1,1,0,0)^T$, $\alpha_2 = (-2,0,3,1)^T$,

a, b

则α_1, α_2是一个基础解系.

从而, 方程组的通解为

$X = a\alpha_1 + b\alpha_2$, 其中$a, b$ 是任意数.

上页 下页 返回

下面考虑一般的线性方程组 AX=b . 此时, AX=0 称为相应的齐次线性方程组.

命题3.3 设β是$AX=b$的一个解, α是$AX=0$的解, 则$\alpha+\beta$是$AX=b$的解;反之, $AX=b$的任意解γ均可表示为$\gamma=\alpha+\beta$, 其中α是$AX=0$的解.

由此可得, 如果设 β 是 n 元线性方程组 AX=b 的任意一个固定解(称为一个特解), $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$ 是相应的齐次线性方程组 AX=0 的一个基础解系, 则 AX=b 的通解为

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{n-r}\alpha_{n-r} + \beta,$$

其中 $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ 是任意数.

上页 下页 返回

总结一下, 我们有下面的定理:

定理 3.2 设 $AX=b$ 是一个 n 元线性方程组, 则

1) 当秩A < 秩(A, b) 时, 方程组无解;
2) 当秩A = 秩(A, b) = n 时, 方程组有唯一解;
3) 当秩A = 秩(A, b) < n 时, 方程组有无穷解.

推论 3.2 当 A 是一个 n 阶矩阵时, 线性方程组 $AX=b$ 有唯一解的充分必要条件是系数行列式不等于0.

注意: 对非齐次线性方程组 $AX=b$, 若 α, β是它的解, 则 $\alpha+\beta$ 一般不再是 $AX=b$ 的解.

但是，我们有下面的命题

上页 下页 返回

命题3.4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 都是 $AX=b$ 的解，α 是它们的一个线性组合： $\alpha=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s$，则

1) 当$c_1+c_2+\cdots+c_s=0$ 时，α是 $AX=0$ 的解；

2) 当$c_1+c_2+\cdots+c_s=1$ 时，α是 $AX=b$ 的解.

AX=b 的通解由其一个特解与 AX=0 的基础解系给出. 但在具体计算时, 既不必预先判断方程组有没有解, 也无需分别求出基础解析和特解后再写出通解.

我们可以直接对增广矩阵做初等行变换, 将其化成阶梯矩阵或类似矩阵, 然后求解相应的方程组, 由此可得出原方程组的通解.

[对于无解的方程组, 最终总会出现矛盾方程 0=c (c≠0),]

上页 下页 返回

例3.2 求方程组

$$
\begin{cases}
x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\
x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3
\end{cases}
$$

的通解及相应的齐次线性方程组的一个基础解系.

解：在本章第2节的例2.1, 我们已经求出参数形式的解：

$$
\begin{cases}
x_1 = -a + b + 2 \\
x_2 = a \\
x_3 = 0 \\
x_4 = -2b + 1 \\
x_5 = b
\end{cases},
$$

进一步可以写出通解：

$$X = a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.\ (\text{其中}a,b\text{是任意数.})$$

构成基础解系　　　　特解

例3.3 当 a, b, c 满足何关系时, 方程组

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=1 \\ a^2x+b^2y+c^2z=1 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷解.

解：系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b).$$

1) 当 a, b, c 互不相同时, $D \neq 0$ 方程组有唯一解.

2) 当 a = b = c 时, 增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \\ a^2 & a^2 & a^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-a^2 \times r_1 + r_3]{-a \times r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

若a ≠ 1 则出现矛盾方程

(a) 当 a ≠ 1 时, 方程组无解;
(b) 当 a = 1 时, 方程组有无穷解.

3) 设 a = b ≠ c . 对增广矩阵做行变换

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & c & 1 \\ a^2 & a^2 & c^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-a^2 \times r_1 + r_3]{-a \times r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(c+a)\times r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)(1-c) \end{pmatrix}$$

(a) 当 a≠1 且 c ≠ 1 时, 方程组无解.

(b) 当a = 1 或 c = 1 时, 方程组有无穷解.

同理可得：

4) 设 $a = c \neq b$.
(a) 当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 1$ 时, 方程组无解.
(b) 当 $a =1$ 或 $b = 1$ 时, 方程组有无穷解.

5) 设 $b = c \neq a$.
(a) 当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 1$ 时, 方程组无解.
(b) 当 $a = 1$ 或 $b = 1$ 时, 方程组有无穷解.

(本节完)