§1.2 多项式的整除性

定义2.1 设$f(x), g(x)\in\Omega[x]$,若有$h(x)\in\Omega[x]$使得$f(x)=g(x)h(x)$,则称$g(x)$整除$f(x)$,也称$g(x)$是$f(x)$的一个因式,$f(x)$是$g(x)$的一个倍式,记为$g(x)\mid f(x)$(否则,记为$g(x)\nmid f(x)$);进一步,若还有$0<\deg g(x)<\deg f(x)$,则称$g(x)$是$f(x)$的一个真因式(其它因式称为平凡因式).

例如,$x^2-1=(x+1)(x-1)=2(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2})$, 所以, $x+1, x-1$均为x^2-1的真因式,而2和$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$都是$x^2-1$的平凡因式.

命题2.1 设$f, g, h \in \Omega[x]$

1.若$f \mid g, g \mid h$,则$f \mid h$;

2.若$f \mid g, f \mid h$,则$f \mid (g \pm h)$;

3.若$f \mid g$,则$f \mid gh$.

4.若$f \mid g, g \mid f$,则$f = cg$,其中c为Ω中的非零常数.

证明 只证明(4).设$f \mid g, g \mid f$,则有$u, v \in \Omega[x]$使得$g = uf$, $f = vg$,从而$f = (uv) f$,进而$\deg f = \deg(uv) + \deg f$,因此$\deg(uv) = 0$.于是,$\deg u + \deg v = 0$,故$\deg u = \deg v = 0$,因此u是一个非零常数.

上页 下页 返回

带余除法

对于任意多项式$f(x)$和非零多项式$g(x)$有唯一的一对多项式$q(x)$和$r(x)$,使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \text{ 且 } r(x) = 0 \text{ 或 } \deg r(x) < \deg g(x).$$

上页 下页 返回

证明　先证存在性.设

$$f = ax^m + \text{低次项},$$

$$g = bx^n + \text{低次项},\ b \neq 0$$

若$f=0$或$\deg f < n$,则取$q=0, r=f$即可.若f不等于0,且次数$\geq n$,
则用g去消f的首项,可得“商”$q_1 = \frac{a}{b}x^{m-n}$及“余”$f_1 = f - q_1 g$,
从而

$$f = q_1 g + f_1,$$

若$f_1 = 0$或$\deg f_1 \leq n$,则取$q = q_1,\ r = f_1$即可.若f_1不等于0,且其次数$\geq n$,
则再用g去消f_1的首项,并设所得的“商”和“余”分别为q_2, f_2,则有

$$f_1 = q_2 g + f_2.$$

如此继续下去注意到的次数逐渐降低,即

$$\deg f > \deg f_1 > \deg f_2 > \cdots,$$

所以上述过程不可能无限地进行下去,即有自然数k,使得

$$f_{k-1} = q_{k-1}g + f_k,$$

且$f_k = 0$或$\deg f_k < n$.注意到

$$f = (q_1 + q_2 + \cdots + q_k)g + f_k.$$

因此,取$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_k$及$r = f_k$即可.

下面证明唯一性　假设还有$p, s \in \Omega[x]$使得$f = pg + s$,且$s = 0$或$\deg s < n$,则有$(q-p)g = r - s$.若$r \neq s$,则$q - p \neq 0$,从而

$$\deg(r-s) = \deg(q-p) + \deg g \geq n,$$

矛盾.于是必有$r = s$,从而$q = p$.