§1.6 多项式的根

余式定理　$f(x)$除以$x-c$所得的余式等于$f(c)$.

证明　因为$x-c$是一次多项式,故由带余除法可知,它除$f(x)$所得的余式为常数r,而且,有$q(x)\in\Omega[x]$使得$f(x)=(x-c)q(x)+r$.令$x=c$,即得,$f(c)=r$.

由余式定理立即可得

推论6.1　c是$f(x)$的根当且仅当$x-c \mid f(x)$.

定义6.1　若$x-c$是$f(x)$的k重因式,则称c是$f(x)$的一个k重根,此时,k称为c的重数.1重根称为单根;当$k>1$时,k重根统称为重根.

显然,c是f的k重根当且仅当有多项式$g(x)$使得$f(x)=(x-c)^k g(x)$且$g(c)\neq 0$,在计根的个数时,一个k重根应算成k个根.

上页　下页　返回

命题6.1　数域Ω上的n次多项式在Ω中最多有n个不同的根.

证明　若 f 在Ω中没有根,则结论成立. 否则,设$c_1,\ldots,c_t$是 f 在Ω中的所有互不相同的根. 由推论6.1可得,$x-c_i \mid f,\ i=1,2\ldots,t$. 因为$x-c_1,\ldots,x-c_t$两两互质,故由推论3.2可知,$(x-c_1)\cdots(x-c_t)\mid f$,从而$t\le \deg f$.

命题6.2　设$f(x),g(x)\in\Omega[x]$,若对于任意$c\in\Omega$均有$f(c)=g(c)$,则$f(x)=g(x)$.

代数学基本定理　每个次数大于0的多项式在复数域中都有根.

引理6.1　设 $p(x)$是数域Ω上的既约多项式,若 $p(x)$在Ω中有根,则 $p(x)$必为一次式.

引理6.2　复数域上的既约多项式恰为一次式.

定理6.1　复数域上n $(n>0)$的次多项式的标准分解为

$$f(x)=a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_t)^{n_t},$$

其中$n_1,n_2,\ldots,n_t$为自然数,$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$, $a_1,a_2,\ldots,a_t$为互异的复数.

上页 下页 返回

下面考虑实数域上多项式的标准分解.

推论6.2　任意n次多项式在复数域中恰有n个根.

引理6.3　实数域上的既约多项式恰为一次式和判别式小于零的二次式.

证明　显然,一次式是既约多项式.设 f 是一个判别式小于零的实二次式.假如 f 有一个真因式 g,则 g 必为一次式,从而有实根,故 f 有实根,这与 f 的判别式小于0矛盾.于是 f 是既约多项式.

另一方面，设$p \in \mathbb{R}[x]$是既约多项式.若 p有实根，则由引理6.1可知，p是一次式.设 p无实根，并将其视为复数域上的多项式，则由代数学基本定理可设 p在$\mathbb{C}$中有一个根c.因此 $p(c)=0$，取共轭可得，$p(\overline{c})=\overline{p}(\overline{c})=\overline{p(c)}=0$，故$\overline{c}$也是$p$的根.因此，由推论6.1可知，$x-c, x-\overline{c}$都是 p的因式.因$c \notin \mathbb{R}$，故$x-c$和$x-\overline{c}$互质，从而由推论3.2可知，它们的积也是p的因式.

即有复系数多项式q使得 $p=(x-c)(x-\overline{c})q$. 取共轭可得,$p=(x-\overline{c})(x-c)\overline{q}$，其中$\overline{q}$表示将$q$的系数取共轭.于是必有,$q=\overline{q}$,即$q$是一个实系数多项式.注意到是$g=(x-c)(x-\overline{c})$ $=x^2-(c+\overline{c})x+c\overline{c}$实系数多项式.故 p在实数域上有分解$p=gq$.因 p是既约多项式,故q必为一个二次式,且无实根,即判别式小于零.

定理6.2　实数域上n $(n>0)$次多项式的标准分解为

$$f(x)=a(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_s)^{m_s}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_tx+c_t)^{n_t},$$

其中$a,a_i,b_j,c_j\in\mathbb{R},b_j^2-4c_j<0,m_j,n_j$为自然数,

$1\le i\le s,1\le j\le t,$且$m_1+\cdots+m_s+2n_1+\cdots+2n_t=n.$

上页 下页 返回