§1.3 最大公约式

定义3.1　设$f(x), g(x)$是$\Omega[x]$中不全为零的多项式,如果$d(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公因式,而且$f(x)$与$g(x)$的任何公因式均能整除$d(x)$,则称$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式.

定理3.1　数域Ω上的任意两个不全为零的多项式$f(x), g(x)$均有最大公因子,且对于它们的任意最大公因式$d(x)$均有$\phi(x), \psi(x) \in \Omega[x]$,使得

$$d(x) = \phi(x) f(x) + \psi(x) g(x).$$

上页　下页　返回

证明　先证明最大公因式的存在性.当$g=0$时,易知f是f,g的一个最大公因式,此时取$\phi=1,\psi=0$即可.若$g\neq 0$,则用g去除f,并设所得的余式为r_1.当$r_1\neq 0$时,再用r_1去除g,并设所得余式为r_2;当$r_2\neq 0$时,用r_2去除r_1,只要所得余式不为零,就用它去除上一个余式,如此辗转下去.因为这些余式的次数逐渐降低,所以辗转相除的过程必在有限步后终止,从而有n使得$r_n\neq 0$但$r_{n+1}=0$.于是,

$$
\begin{aligned}
f &= qg + r_1,\\
g &= q_1 r_1 + r_2,\\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad (3.1)\\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n,\\
r_{n-1} &= q_n r_n.
\end{aligned}
$$

现在证明，r_n就是f, g的一个最大公因式.首先，从(3.1)的最后一个等式依次往上看可知，

$$r_n \mid r_{n-1}, r_n \mid r_{n-2}, \ldots, r_n \mid r_1, r_n \mid g, r_n \mid f,$$

故r_n是f, g的一个最大公因式.其次，设h是f, g的任意一个公因式.则从(3.1)的第一个等式依次往下看可知，

$$h \mid r_1, h \mid r_2, \ldots, h \mid r_{n-1}, h \mid r_n.$$

于是，r_n是f, g的一个最大公因式.

下面证明ϕ, ψ的存在性.从上面的第一个等式可得，$r_1 = f + (-q)g$，将其代入第二式又得$r_2 = (-q_1) f + (1 + qq_1) g$，再代入下一个式子，并如此下去到第n式便可得$\phi, \psi \in \Omega[x]$使得$r_n = \phi f + \psi g$.

上页 下页 返回

例3.1　设$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1,\ g(x)=x^3+x^2-x-1$,求$(f,g)$以及多项式$\phi,\psi$使得$(f,g)=\phi f+\psi g$.

解　辗转相除可按下面的格式进行,

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=q_1 & x^3+x^2-x-1=g & x^4+x^3-3x^2-4x-1=f & x=q \\
 & x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x & x^4+x^3-x^2-x & \\
\hline
 & -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 & -2x^2-3x-1=r_1 & \frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=q_2 \\
 & -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4} & -2x^2-x & \\
\hline
 & -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}=r_2 & -x-1 & \\
 & & -x-1 & \\
\hline
 & & 0=r_3 &
\end{array}
$$

由此可得，$r_2=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$是$f(x)$和$g(x)$的一个最大公因式，故 $(f(x),g(x))=x+1$.进一步，

$$r_2=g-q_1r_1=g-q_1(f-qg)=-q_1f+(1+qq_1)g.$$

令$\phi=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$, $\psi=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}$,则$(f,g)=\phi f+\psi g$.

定理3.2　设$f(x),g(x)\in\Omega[x]$,则 $f(x)$与$g(x)$互质当且仅当有多项式$\phi(x),\psi(x)\in\Omega$使得

$$\phi(x)f(x)+\psi(x)g(x)=1.$$

定义3.2　设 $f(x),g(x)\in\Omega[x]$.若$(f(x),g(x))=1$,则称 $f(x)$与$g(x)$互质.

上页　下页　返回

推论3.1　设$f,g,h\in\Omega[x]$.若$f\mid gh$,且f,g互质,则$f\mid h$.

推论3.2　设$f,g,h\in\Omega[x]$.若$f\mid h, g\mid h$,且f,g互质则$fg\mid h$.

定义3.3　设$f_1, f_2,\ldots, f_s$是Ω上一组不全为零的多项式,若d是它们的一个公因式,且它们的任何公因式都是d的因式,则称d是$f_1, f_2,\ldots, f_s$ Ω上的一个最大公因式.

定理3.3　有$\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_s\in\Omega[x]$使得

$$(f_1, f_2,\ldots, f_s)=\phi_1 f_1+\phi_2 f_2+\cdots+\phi_s f_s.$$

当$(f_1, f_2,\ldots, f_s)=1$时,称$f_1, f_2,\ldots, f_s$互质

定理3.4　$f_1, f_2,\ldots, f_s$互质当且仅当$(f_1, f_2,\ldots, f_s)=1$.