第四章 线性方程组

》线性方程组的研究背景.

》线性方程组的发展历史.

》线性方程组研究的主要问题.

本章目录：

背景

线性方程组是线性代数历史上的第一个分支,是线性代数许多思想的源头.比如,行列式和矩阵都产生于方程组的研究.线性方程组不但是最基本最重要的数学理论和研究工具,而且有广泛的应用.

返回

线性方程组的发展历史

- 公元前三世纪左右,巴比伦泥板中就已出现线性方程组.
- 公元前2-1世纪,“九章算术“中，出现了解线性方程组的消元法.
- 1687年，Leibnitz 开创了线性方程组的较为系统的研究.
- 1750年，H.Cramer发表了用行列式解线性方程组的: ---Cramer法则.
- 1849年,Gauss 提出了求数值系数的线性方程组重要方法 ---Gauss消元法
- 1877年,F.G.Frobenius提出了矩阵秩数的概念.
- 19世纪末叶，完成了线性方程组的一般理论的构造.

返回

研究线性方程组主要解决下面三个问题:

1. 方程组是否有解,即解的存在性问题;
2. 若方程组有解,那么有多少解,解与解之间有什么关系,即解的结构问题;
3. 解的求法.

返回

§4.1 列向量组

设 $AX=b$ 是一个 n 元线性方程组,则它的一个解就是一个 n 元列向量(称为解向量).

为了描述 $AX=b$ 的解的结构，我们需要先研究 n 元列向量.

若向量α是向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$的一个线性组合，则称$\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表示.设$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_s\alpha_s$,那么用矩阵乘法表示有：

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_s\end{pmatrix}.$$

我们有下面两个命题：

上页 下页 返回

命题1.1 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性表示当且仅当有t $\times$ s矩阵A，使得$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t)A$; 此时$A$的第$j$列元素恰为$\alpha_j$表示成$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$的线性组合时的系数.

证明：若向量组$a_1,a_2,\ldots,a_s$可由$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性表示，即每个$a_i$均可由$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性表示，则有

$$\alpha_1=a_{11}\beta_1+a_{21}\beta_2+\cdots+a_{t1}\beta_t=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{t1}\end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_s=a_{1s}\beta_1+a_{2s}\beta_2+\cdots+a_{ts}\beta_t=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ts}\end{pmatrix},$$

从而由矩阵的乘法可知:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t)\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & \cdots & a_{ts} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc}\text{第1列} & \qquad & \text{第s列}\end{array}\end{array}.$$

命题成立.

命题1.2 (线性表示的传递性) 设有三个有限向量组: U、V和W. 若U 可由V线性表示, V可由W表示, 则U可由W表示.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "\text{线性表示}"] \arrow[dr] & & U \\
& V \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

下面引入线性相关与线性无关的概念.

定义1.1 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$是一组向量，若有一组不全为零的数$c_1,c_2,\ldots,c_s$使得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=0,$$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关，否则称它们线性无关.

线性关系与方程组的联系：

线性关系		方程组
一组列向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$	$\longleftrightarrow$	矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$
$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关	$\longleftrightarrow$	$AX=0$有非零解
$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关	$\longleftrightarrow$	$AX=0$只有非零解

我们有下面的命题：

命题1.3 对于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$，下列条件等价：

1．$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关；

2.方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_x\alpha_s$只有零解

3. 对于任意一组不全为零的数$c_1,c_2,\ldots,c_s$均有

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s\neq 0,$$

4. 对于任意一组数$c_1,c_2,\ldots,c_s$,若$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=0,$

必有$c_1=c_2=\ldots=c_s=0$

上页 下页 返回

命题1.4 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关的充分必要条件是其中的一个向量可由其余的向量线性表示.

证明 必要性 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关,则有不全为零的数$a_1,a_2,\ldots,a_s$使得

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_s\alpha_s=0$$

不妨设$a_1\neq 0$,则有$\alpha_1=-\frac{a_2}{a_1}\alpha_2-\cdots-\frac{a_s}{a_1}\alpha_s$

即α_1可由$a_2,\ldots,a_s$线性表示.

充分性 不妨设α_1可由$\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表示,即有一组数$a_2,\ldots,a_s$使得$\alpha_1=a_2\alpha_2+\cdots+a_s\alpha_s$,从而

$$(-1)\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_s\alpha_s=0,$$

这表明$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关.

命题1.5 设$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关,而$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关，则$\alpha$可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$唯一地表示.

证明 因$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关,所以有一组不全为零的数$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_s$,使得

$$c_0\alpha + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s = 0,$$

若$c_0 = 0$,则$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s = 0$,

因为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关，必有$c_1 = c_2 = \ldots = c_s = 0$,与$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_s$不全为零矛盾.因此$c_0 \neq 0$.

从而$\alpha = (-\frac{c_1}{c_0})\alpha_2 + \cdots + (-\frac{c_s}{c_0})\alpha_s$，即$\alpha$可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$表示.

现在证明唯一性

设有数$a_i, b_i \quad (i = 1, \dots, s)$使得

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_s\alpha_s,$$

$$\alpha = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_s\alpha_s,$$

则有

$$(a_1 - b_1)\alpha_1 + \cdots + (a_s - b_s)\alpha_s = 0.$$

因$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关，故$a_i = b_i (i = 1, 2, \dots, s)$

线性相关和无关的概念只是简单地把向量组分成两类. 一个线性无关的向量组固然很简单，因为这些向量之间可以说毫无(线性)关系；而线性相关的向量组则相对比较复杂，需要进一步区分. 为此，有下面的定义

定义1.2 设 S 是一个向量组.如果 S 中有 r 个向量线性无关,而且 S 中任意 $r+1$ 个向量必线性相关, 则称 S 的秩数为 r. 记为秩S. 此时 S 中的任意 r 个线性无关向量都叫做 S 的一个极大线性无关组.

例子

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix},$$

其中，α_1,α_2 线性无关，但任意三个向量都线性相关，故向量组的秩数为2 ，且α_1,α_2是一个极大无关组.

对于一个矩阵 A ，有两个自然的向量组，即行向量组和列向量组,那么这两个向量组的秩数以及*A*的秩数三者之间是什么关系?

定义 1.3 矩阵 A 的列 行 向量组的秩数称为 A 的列秩 行 数.

我们有下面的定理：

定理 1.1 矩阵的秩数=行秩数=列秩数.

例1.3 设

$$\alpha_1 = (1,2,0,1)^T, \alpha_2 = (0,1,1,1)^T,$$
$$\alpha_3 = (1,3,1,2)^T, \alpha_4 = (1,1,-1,0)^T$$

求此向量组的秩数及一个极大无关组.

解 考虑向量组构成的矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \xrightarrow{-1\times r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

$$\xrightarrow{-1\times r_2+r_4}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&2&0\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-1\times r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1\times r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见秩$A=2$，故向量组的秩数为2，易知α_1,α_2就是一个极大无关组.

定理1的推论

推论 1.1 一个向量组是线性无关的当且仅当它构成的矩阵是列满秩矩阵.

推论 1.2 一个 n 阶矩阵是可逆矩阵当且仅当它的列向量组是线性无关的.

推论 1.3 任意 n+1 个 n 元向量是线性相关的.

下面讲两个命题

命题1.6 若向量组U ：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可由向量组 V ：$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表示，则秩$U \le$ 秩V.

命题1.7 设U是一个向量组，则U中的一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$是一个极大线性无关组的充分必要条件是

1. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关

2. U中的每个向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性表示.

上页 下页 返回

定义1.4 两个可以互相表示的向量组称为等价向量组.

容易看出：

1. 向量组的等价是一个等价关系；
2. 等价向量组的秩数相同；
3. 任何向量组等价于其极大无关组;
4. 两个向量组等价当且仅当它们的极大无关组等价.

最后我们给出化简向量组的一种技巧

为此先给出一个定义

定义1.5 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$是两个向量组，若对于任意一组数$c_1, c_2, \ldots, c_s$均有

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_s v_s = 0,$$

则说$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$的线性关系一致.

易知,线性关系一致的向量组的线性相(无)关性与秩数都相同,且极大无关组相互对应.

注意，这里不是向量组的等价，是矩阵的行等价。

命题1.8 两个行等价矩阵的列向量组中对应的向量有完全一致的线性关系.

证明：设矩阵$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s)$经初等行变换化成矩阵$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_s)$,则有可逆矩阵$P$使得

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_s) = P(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s) = (P\alpha_1 \quad P\alpha_2 \quad \cdots \quad P\alpha_s),$$

从而$\beta_1 = P\alpha_1, \cdots, \beta_s = P\alpha_s$.因此对于任意一组数$c_1, c_2, \ldots, c_s$均有

$$\begin{aligned} & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_s\beta_s \\ = & c_1P\alpha_1 + c_2P\alpha_2 + \cdots + c_sP\alpha_s \\ = & P(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s) \end{aligned}$$

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_s\beta_s = 0.$$

命题1.8表明，在研究一个列向量组的线性关系时,可用初等行变换将其构成的矩阵化成阶梯矩阵,再通过研究阶梯矩阵的列向量组的线性关系,来得到原向量组的线性关系.

下面通过一个具体的例子来说明这种方法

例1.4 设 $\alpha_1 = (1,1,1,0)^T, \alpha_2 = (0,1,1,1)^T,$

$$\alpha_3 = (1,2,2,1)^T, \alpha_4 = (0,0,1,1)^T, \alpha_5 = (1,3,3,2)^T,$$

求出所有的极大无关组,并将 α_5 表示成某个极大无关组的线性组合.

解 将列向量组构成的矩阵用初等行变换化成约化阶梯矩阵,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\times r_1 + r_3]{-1\times r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\times r_2 + r_4]{-1\times r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1\times r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ （约化阶梯矩阵）

由此可知，向量组的秩数为3，

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4;\quad \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4;\quad \alpha_1,\alpha_4,\alpha_5;$$

$$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\quad \alpha_2,\alpha_4,\alpha_5;\quad \alpha_3,\alpha_4,\alpha_5;$$

是向量组的极大无关组.

最后,把α_5表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$的线性组合：$\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2.$

(本节完)

上页 下页 返回