§ 3.2 矩阵的乘法

定义2.1(矩阵的乘法)设$A=\left(a_{ij}\right)$是一个$m\times n$矩阵, $B=\left(b_{ij}\right)$是一个$n\times p$矩阵,即A的列数等于B的行数,规定A与B的记AB是一个$m\times p$矩阵,其第i行第j列的元素等于A的第i行各元素与B的第j列对应元素的乘积之和，即,$AB=(c_{ij})_{m\times p}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

具体地

上页 下页 返回

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\
\sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp}
\end{pmatrix}
$$

例如，设$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\7&9&11\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}6&0\\-2&0\\-4&1\end{pmatrix}$，则

$$AB=\begin{pmatrix}1\times6+3\times(-2)+5\times(-4)&1\times0+3\times0+5\times1\\7\times6+9\times(-2)+11\times(-4)&7\times0+9\times0+11\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20&5\\-20&11\end{pmatrix}.$$

定义2.2 对角线上元素全是1，其余元素全是0的n阶单位矩阵，记为I_n或I，即

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

命题2.1 设A,B,C,D是矩阵,a是数,则有

1.乘法结合律:$(AB)C = A(BC)$;

2.分配律:$(A+B)C = AC+BC$, $D(A+B) = DA+DB$.

3.$a(BC) = (aB)C = B(aC)$;

4.$I_m A = AI_n = A$,这里折A是$m\times n$矩阵.

证明 我们只证名结合律.设$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$, $C=(c_{ij})_{p\times q}$
则$(AB)C$和$A(BC)$均有意义切均为$m\times q$矩阵.欲证$(AB)C=A(BC)$,只需证明它们的第i行第j列元素相等.实际上,$(AB)C$的第i行第j列元素等于AB的第i行元素与C的第j列对应元素的乘积,而AB的第i行元素为,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1},$$

上页 下页 返回

故 $(AB)C$ 的 第 i行 第 j列 元 素 为，

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1}\right) c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k2}\right) c_{2j} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kp}\right) c_{pj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}\right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

同理可证$(AB)C$的第i行第j列元素也是$\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$.

于是$(AB)C = A(BC)$.

虽然矩阵的加法和数乘与数的加法和乘法没有本质区别,但矩阵的乘法和数的乘法却有着本质不同:

首先,并非任意两个矩阵可乘:只有当A的列数等于B的行数时,AB才有意义.

其次,矩阵乘法不满足交换律:这可从以下几点来看

1. 当A, B可乘时,B, A未必可乘,即BA未必有意义,自然谈不上AB和BA相等了.

2.即使当$A = A_{m\times n}$, $B = B_{n\times m}$时,AB和BA都有意义,但若$m \neq n$,则AB是m阶矩阵,而BA是n阶矩阵,也谈不上相等.

3.再进一步,当A, B都是n阶矩阵时,AB和BA虽然也都是n阶矩阵,但二者仍可不相等,例如,设

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq AB.$$

最后矩阵的乘法不满足削去律,即当$A\neq 0$时,一般不能由$AB=AC$,或$BA=CA$得出$B=C$..例如,取A,B如上,$C=0$,则$A\neq 0$,且$AB=AC=0$,但$A\neq 0$.

设k是自然数，k个方阵A相乘记为A^k，称为A的k次幂.易知，对于任意方阵A恒有

$$A^k A^m = A^{k+m}, \ (A^k)^m = A^{km};$$

而且，当$AB = BA$时，还有$(AB)^k = A^k B^k$.

当$AB = BA$时，称A, B可换.

上页 下页 返回