§1.5 重因式

定义5.1　设$p(x)$是Ω上的即约多项式,若有自然数k使得$p(x)^k \mid f(x)$,但$p(x)^{k+1} \nmid f(x)$,则称$p(x)$是$f(x)$的一个重因式；1重因式称为单因式；当$k>1$时，k重因式统称为重因式.

显然,既约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式当且仅当

$f(x)=p(x)^k g(x)$,且$p(x) \nmid g(x)$.

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,记

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1,$$

则 $f'(x)$称为 $f(x)$的导式.直接验证可得

1.$(f+g)'=f'+g'$;

2.$(cf)'=cf'$;

3.$(fg)'=f'g+fg'$;

4.$(f^n)'=nf^{n-1}f'$.

定理5.1　设 $p(x)$是 $f(x)$一个既约多项式,则 $p(x)$是 $f(x)$的 k $(k \geq 1)$重因式当且仅当 $p(x)$是 $f(x)$的k重因式(0重因式理解成不是因式).

证明　设 $f = p^k q,\ q \in \Omega[x]$.求导式可得,

$$f' = kp^{k-1}p'q + p^k q'.$$

令$h = kp'q + pq'$,则有 $f' = p^{k-1}h$.注意到$p \nmid p'$,

于是,f是k的重因式 $\Leftrightarrow p \nmid q \Leftrightarrow p \nmid p'q$ (由命题4.1)

$\Leftrightarrow p \nmid h \Leftrightarrow p$是 f'的$k-1$重因式.

上页　下页　返回

推论5.1　设 $p(x)$ 是一个既约多项式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式当且仅当 $p(x)$ 是 $(f(x), f'(x))$ 的 $k-1$ 重因式.

推论5.2　多项式 $f(x)$ 没有重因式的充要条件是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 互质.

下面说明，求标准分解可归结为求无重因式的多项式的标准分解.

假设$f(x)$的标准分解为

$$f=ap_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t},$$

则由推论可知

$$(f,f')=p_1^{k_1-1}p_2^{k_2-1}\cdots p_t^{k_t-1},$$

从而

$$\frac{f}{(f,f')}=ap_1p_2\cdots p_t.$$

例5.1　求多项式$f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$的标准分解.

解:首先, f 的导式为$f'=5x^4-30x^2-40x-115.$
再由辗转相除法可求得

$$(f,f')=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3.$$

用带余除法可求得

$$\frac{f}{(f,f')}=x^2-3x-4=(x-4)(x+1),$$

从而可知 f 的所有既约因式为$x-4, x+1$,且由推论5.1可知,它们分别为 f 的1重和4重因式,故 f 的标准分解为

$$f(x)=(x-4)(x+1)^4.$$

上页 下页 返回