# §3.3 分块矩阵

本节将把前面对于数字矩阵的讨论推广到分块矩阵.分块矩阵是一种非常有用的工具,使用分块矩阵可使表达更简洁. 分块矩阵主要来自两个方面:一方面,用一些已知的矩阵矩堆砌砌成分块矩阵; 另一方面,把一个矩阵矩分割分成一个分块矩阵: 假想在一个矩阵的行之间加上一些横线、列之间加上一些竖线, 这样就把一个矩阵分成了一些小矩阵(称为子块或子矩阵),把每个子块看成一个“元素”, 这个以子块为元素的矩阵就是一个分块矩阵.例如, 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\2&0&1&2&3\\0&2&2&3&4\end{pmatrix}$$

令$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$,则$A$可写成一个$2\times 2$的分快矩阵

$$A=\begin{pmatrix}I_2 & 0_{2\times 3}\\ 2I_2 & B\end{pmatrix}.$$

可根据需要把一个矩阵分成各种各样的分快矩阵,下面是几种常用的分快方法;

1. 把A整个分成一块,此时A就是一个$1\times 1$的分快矩阵;

2. 把A的每一行(列)或若干行(列)看成一块.比如,把A按列分块成$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$,其中$\alpha_i$表示$A$的第$i$列.

上页 下页 返回

3. 把一个矩阵分成一个$2\times 2$的分块方阵$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$,并使$A_1$是一个方阵

4. 把$A_{m\times m}$的每一个元素看成一块,此时A就是一个$m\times n$矩阵分块矩阵,当然,这和不分块的A是一样的.

**. 相加的两个分块矩阵的分块形式必须完全一致;**

**. 相乘的两个分块矩阵中,前面矩阵的列的分法和后面矩阵的行的分法必须完全一致.**

设$A$是一个$m\times n$矩阵,$B$是一个$n\times p$矩阵,而且,对$A$的列的分法和对$B$的行的分法一致,则所得的两个分块矩阵就可和通常的矩阵一样去乘.具体地,设

上页 下页 返回

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}m_1 \\ \}m_2 \\ \ \ \vdots \\ \}m_r \end{array}$$

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}n_1 \\ \}n_2 \\ \ \ \vdots \\ \}n_s \end{array}$$

则 $A, B$ 作为分块矩阵的乘积是

上页 下页 返回

$$
C=\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} \overbrace{\qquad}^{p_1} & \overbrace{\qquad}^{p_2} & \cdots & \overbrace{\qquad}^{p_t} \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\
C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt}
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \}m_1 \\ \}m_2 \\ \vdots \\ \}m_r \end{array}
\end{array}
$$

其中

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{in}B_{nj}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj},$$

$$1\le i\le r,\ 1\le j\le t.$$

直接验证即知，无论对**A,B**怎样分块，它们作为分块矩阵的乘积都和原来为分块是的乘积相同，即**C=AB**

例3.1 设$A$是一个$m\times n$矩阵，$B$是一个$n\times s$矩阵，$C=\left(c_{ij}\right)_{s\times t}$.将$B$按列分块成$B=(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_s)$，则有

$$AB=A(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_s)=(A\beta_1\ \ A\beta_2\ \ \cdots\ \ A\beta_s),$$

$$BC=\left(\beta_1\ \ \cdots\ \ \beta_s\right)\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{st} \end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{s} c_{i1}\beta_i\ \ \cdots\ \ \sum_{i=1}^{s} c_{it}\beta_i\right).$$

上页 下页 返回

定义3.1 设$A=\left(a_{ij}\right)m\times n$.在$A$中任意取定$r\left(1\le r\le m\right)$个行及$s\left(1\le s\le n\right)$个列,则这些行、列的交叉处的元素按它们原来的相对位置所构成的$r\times s$矩阵就称为$A$的一个子块.

由$A$的第$i_1,i_2,\ldots,i_r$行和第$j_1,j_2,\ldots,j_s$列所确定的子块记为

$$块_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix},$$

这里以及以后总设$i_1<i_2<\cdots<i_r$, $j_1<j_2<\cdots<j_r$.

由定义可知

$$
块_A\left\{\begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_s} \end{pmatrix}.
$$

- $A$的第$i$行第$j$列元素恰为快$_A\left\{\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\}$

- $A$的第$i$行为快$_A\left\{\begin{matrix} & & i & \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{matrix}\right\}$,简记为块$_A\left\{\begin{matrix} i \\ - \end{matrix}\right\}$,

- $A$的第$j$列为$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} =_A \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \cdots m \\ j \\ \\ \end{matrix} \right\} =_A \left\{ \begin{matrix} - \\ j \\ \\ \end{matrix} \right\}$;

- $A$的第$i_1, i_2, \ldots, i_r$行构成的子块为

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r n} \end{pmatrix} = \text{块}_A \left\{ \begin{matrix} i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_r \\ \text{————————} \\ \\ \end{matrix} \right\}$$

- $A$的第$j_1, j_2, \ldots, j_s$列构成的子块为

$$\begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \vdots & a_{1j_s} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \vdots & a_{2j_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \vdots & a_{mj_s} \end{pmatrix} =_A \left\{ \begin{matrix} \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ j_1 \quad j_2 \quad \cdots \quad j_s \\ \\ \end{matrix} \right\};$$

- $A$本身也是一个子块,即$A =_A \left\{ \begin{matrix} - \\ - \\ \\ \end{matrix} \right\}$

## 命 题 3.1

$$\text{块}_{AB}\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix} = \text{块}_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \text{---------} \\ \\ \end{Bmatrix}\text{块}_B\begin{Bmatrix} \text{---------} \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \\ \\ \end{Bmatrix};$$

$$\text{块}_{AB}\begin{Bmatrix} i \\ - \\ \\ \end{Bmatrix} = \text{块}_A\begin{Bmatrix} i \\ - \\ \\ \end{Bmatrix}\text{块}_B\begin{Bmatrix} - \\ - \\ \\ \end{Bmatrix} = \text{块}_A\begin{Bmatrix} i \\ - \\ \\ \end{Bmatrix}B;$$

$$\text{块}_{AB}\begin{Bmatrix} - \\ j \\ \\ \end{Bmatrix} = \text{块}_A\begin{Bmatrix} - \\ - \\ \\ \end{Bmatrix}\text{块}_B\begin{Bmatrix} - \\ j \\ \\ \end{Bmatrix} = A\,\text{块}_B\begin{Bmatrix} - \\ j \\ \\ \end{Bmatrix}.$$

上页 下页 返回

命题 3.2

$$
块_{AB\cdots HK}\left\{\begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{matrix}\right\}
$$

$$
= 块_A\left\{\begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ - & - & - & - \\ & & & \end{matrix}\right\} B\cdots H\, 块_K\left\{\begin{matrix} - & - & - & - \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \\ & & & \end{matrix}\right\};
$$

$$\text{块}_{AB\cdots HK}\left\{\begin{matrix} i \\ j \\ \ \end{matrix}\right\} = \text{块}_{A}\left\{\begin{matrix} i \\ - \\ \ \end{matrix}\right\} B\cdots H\,\text{块}_{K}\left\{\begin{matrix} - \\ j \\ \ \end{matrix}\right\};$$

$$\text{块}_{AB\cdots HK}\left\{\begin{matrix} i \\ - \\ \ \end{matrix}\right\} = \text{块}_{A}\left\{\begin{matrix} i \\ - \\ \ \end{matrix}\right\} B\cdots HK;$$

$$\text{块}_{AB\cdots HK}\left\{\begin{matrix} - \\ j \\ \ \end{matrix}\right\} = AB\cdots H\,\text{块}_{K}\left\{\begin{matrix} - \\ j \\ \ \end{matrix}\right\}.$$