§3.8 矩阵的秩数

定义8.1 设A是任意矩阵.若$A=0$,则说A的秩数为0;若$A\neq 0$,则A的非零子式的最高阶数就称为A的秩数,记为秩A.

显然,对于任意的$m\times n$矩阵A,均有秩$A\leq \min\{m,n\}$.当秩$A=\min\{m,n\}$时,称是满秩矩阵;特别地,当秩$A=m$时,称之为行满秩的;当秩$A=n$时,称之为列满秩的.

一个n阶矩阵A是可逆矩阵的充分必要条件是秩$A=n$,即A是满秩矩阵.

例如,设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

直接计算即知,A的三阶子式均为0,而且有一个而阶子式不等于0,故秩$A=2$.

上页 下页 返回

命题8.1 秩$A=r$当且仅当A有一个非零的r阶子式,且所有$r+1$阶子式等于0.

证明 必要性是显然的.现在证明充分性.设M是A的一个s阶子式,其中s大于$r+1$.因为M的$r+1$阶子式也是A的$r+1$阶子式,故都等于0,从而对M前$r+1$阶行做Laplace展开即知$M=0$.于是A的任意阶数大于r的子式都是0,故秩$A=r$.

命题8.2 秩$AB \le$ 秩A, 秩B.

上页 下页 返回

证明 当A, B之一为零矩阵时,定理显然成立.

设秩$A = r \neq 0$.如果B的列数$\leq r$,则

$$\text{秩}AB \leq AB\text{的列数} = B\text{的列数} \leq r = \text{秩}A.$$

当B的列数大于r时,在AB中人取一个$r+1$阶子块

C.由矩阵的乘法定义可知$C = UV$,,其中U由A的

$r+1$个行组成,V有B的$r+1$个列组成.注意到U的

$r+1$阶子式全为0,则由$Chauchy$公式可得$|C| = |UV| = 0$.

总之,AB的任意一个$r+1$阶子式都是0,故秩$AB \leq r =$秩A.

同理可证秩$AB \leq$秩B.

定理8.1 设P,Q是可逆矩阵,则

秩$PA=$秩$AQ=$秩$PAQ=$秩A

由上命题可知,

$$秩A = 秩P^{-1}PA \le 秩PA \le 秩A,$$

故秩$PA=$秩A.同理,秩$AQ=$秩A.于是

秩$PAQ=$秩$AQ=$秩A.

推论 **8.1** 初等变换不改变秩数.

例**8.1** 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix},$$

求秩***A.***

解 用初等变换将**A**化成阶梯矩阵**:**

上页 下页 返回

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\1&1&1&1\\2&3&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_4]{-1r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&-1&-2&-3\\0&-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[1r_1+r_4]{1r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故秩$A=2$.

定理8.2 设秩$A=r$,则有可逆矩阵P,Q使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明 由命题7.3及定理7.3可知,有可逆

矩阵P,Q使得$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.再由上面定理

可知,$r=$秩A.

上页 下页 返回

定理8.3 设A, B均为$m \times n$矩阵, A和B等价当且仅当秩$A =$ 秩B.

定理8.4 每个矩阵可用初等行变换化成唯一的约化阶梯矩阵.

证明 因为矩阵行等价是一个等价关系,故只需证明:两个行等价的约化阶梯矩阵必相等.对矩阵的列数用数学归纳法.显然,结论对只有一列的矩阵成立.设$n > 1$,并假设结论对于含有$n-1$列的矩阵成立.设A_1和A_2是两个行等价的$m \times n$约化阶梯矩阵,则有可

上页 下页 返回

逆矩阵P使得$A_1 = PA_2$,从而它们的秩数相同.不妨设秩A_1 = 秩$A_2 = r$.现在将A_i分块成$A_i = (B_i \quad \beta_i)$,则有

$$(L_1 \quad \beta_1) = P(L_2 \quad \beta_2) = (PL_2 \quad P\beta_2),$$

从而

$$L_1 = PL_2, \ \beta_1 = P\beta_2.$$

因此,L_1和L_2行等价.注意到,L_1和L_2都是$m \times (n-1)$约化阶梯矩阵.于是,由归纳法假设可知,$L_1 = L_2$.令$L = L_1$,则$L = PL$.现在分两种情况:

上页 下页 返回

若秩$L < r$,则β_1和β_2均含主元,故$\beta_1 = \beta_2 = \varepsilon_r$,于是,$A_1 = A_2$.

若秩$L = r$,则β_2不含主元,即,A_2的主元都在L中.注意到这些主元所在的列必须依次等于$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$,而且$\beta_2$是它们的线性组合.不妨设

$$L = (\cdots \quad \varepsilon_1 \quad \cdots \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_r \cdots),$$

则由$L = PL$可得

上页 下页 返回

$$(\cdots \ \varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_2 \ \cdots \ \varepsilon_r \ \cdots) = P(\cdots \ \varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_2 \ \cdots \ \varepsilon_r \cdots)$$

$$= (\cdots \ P\varepsilon_1 \ \cdots \ P\varepsilon_2 \ \cdots \ P\varepsilon_r \ \cdots),$$

从而$P\varepsilon_1 = \varepsilon_1, P\varepsilon_2 = \varepsilon_2, \ldots, P\varepsilon_r = \varepsilon_r$.再设

$\beta_2 = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_r\varepsilon_r$,则有

$$\beta_1 = P\beta_2 = c_1 P\varepsilon_1 + c_2 P\varepsilon_2 + \cdots + c_r P\varepsilon_r$$

$$= c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_k\varepsilon_k = \beta_2,$$

从而$\beta_1 = \beta_2$.于是,$A_1 = A_2$.