§1.7 有理数域上的多项式

定义7.1　设 $f(x)$是一个整系数多项式,若 $f(x)$的系数的公因子只有± 1,则称 $f(x)$是一个本原多项式.

Gauss引理　两个本原多项式的乘积仍为本原多项式.

证明　设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

是两个本原多项式.令

$$h(x)=f(x)g(x)=c_{m+n}x^{m+n}+\cdots+c_1x+c_0,$$

其中$c_k=\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j$,假设$h(x)$不是本原多项式,

则有素数p能整除$h(x)$的所有系数.因为$f(x),g(x)$

都是本原多项式,故有$i,j\ \ (1\le i\le m,1\le j\le n)$

使得

$$p\mid a_0,\ldots,p\mid a_{i-1},p\nmid a_i,$$

$$p\mid b_0,\ldots,p\mid b_{j-1},p\nmid b_j.$$

注意到

$c_{i+j}=a_0b_{i+j}+\cdots+a_{i-1}b_{j+1}+a_ib_j+a_{i+1}b_{j-1}+\cdots+a_{i+j}b_0,$

而且 p整除上式中除a_ib_j以外的所有项,因此,也必有$p\mid a_ib_j$.因为 p是素数,故$p\mid a_i$或$p\mid b_j$,与假设矛盾,因此$h(x)$是本原多项式.

上页 下页 返回

引理7.1　每个非零的有理系数多项式均可分解成一个有理数和一个本原多项式之积,而且这样的分解在不计$\pm$号时是唯一的.

证明　设$f(x)$是$\mathbb{Q}$上的非零多项式,则有整数a使得$af(x)$的系数均为整数.设b是$af(x)$的所有系数的最大公因子,则有$af(x)=bg(x)$,其中$g(x)$是一个本原多项式,从而$f(x)=(a/b)g(x)$是一个有理数a/b和一个本原多项式$g(x)$之积.

假设还有$f(x)=rh(x)$，其中$r\in\mathbb{Q}$，$h(x)$是一个本原多项式.令$r=c/d$，其中$c,d\in\mathbb{Z}$，那么$(a/b)g(x)=(c/d)h(x)$，从而，$adg(x)=bch(x)$.

因为$g(x)$，$h(x)$都是本原多项式，所以ad和bc都是$adg(x)=bch(x)$系数的最大公因子，从而$ad=\pm bc$，于是$r=c/d=\pm a/b$，且有$h(x)=\mp g(x)$.

引理7.2　设$f(x)$是一个非零的整系数多项式,如果 $f(x)$在$\mathbb{Q}[x]$中是可分的,那么$f(x)$在$\mathbb{Z}[x]$中也是可分的,即能分解成两个次数小于$\deg f(x)$的整系数多项式之积.

Eisenstein判别法　设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式,如果有一个素数 p 使得

$p\nmid a_n, p\mid a_{n-1},\ldots, p\mid a_0, p^2\nmid a_0$,则$f(x)$是有理数上的既约多项式.

证明 假设f不是$\mathbb{Q}$上的既约多项式,则由上引理可知, $f=gh$,其中g,h都是次数比$\deg f$小的整系数多项式.设

$$g(x)=b_kx^k+\cdots+b_1x+b_0,$$

$$f(x)=c_mx^m+\cdots+c_1x+c_0,$$

则有$k,m<n,k+m=n$,且$a_n=b_kc_m,a_0=b_0c_0$.由$p\mid a_0$可得$p\mid b_0$或$p\mid c_0$.再由$p^2\nmid a_0$可得p不能同时整除b_0和c_0故不妨设$p\mid b_0,\ p\nmid c_0$.另一方面因$p\nmid a_n$,所以$p\nmid b_n$.设$b_0,b_1\ldots,b_k$中第一个不能被p整除的是b,注意到, $s\le k<n$.
因此, $a_s=b_sc_0+b_{s-1}c_1+\cdots+b_0c_s$中除$b_sc_0$一项全能被$p$整除,从而必有$p\mid b_sc_0$,于是$p\mid b_s$或$p\mid c_0$,它们均和假设矛盾.故$f$必为本原多项式.

上页 下页 返回

命题7.1　设 $f(x)$是一个整系数多项式.若r/s是 $f(x)$的一个有理根,其中r,s是互素的整数,则r,s分别是 $f(x)$的常数项和首项系数的因子.特别地当 $f(x)$是首项系数为1的多项式时,$f(x)$的有理根都是整数,且均为常系数的因子.

证明　设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,则有

$$a_n(r/s)^n+\cdots+a_1(r/s)+a_0=0,$$

乘以s^n可得,

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}s+\cdots+a_1rs^{n-1}+a_0s^n=0,$$

于是,$s\mid a_nr_n,r\mid a_0s_n$,因为$r,s$互素,所以必有$s\mid a_n,r\mid a_0$.

上页 下页 返回

例如,设$f(x)=3x^3-x^2-6x+2$.

若$f(x)$有一个有理根r/s,则必有$r\mid 2$, $s\mid 3$,从而$r/s\in\{\pm1,\pm2,\pm1/3,\pm2/3\}$.

逐个验证可知,$f(x)$只有一个有理根$1/3$.