§2.4 行列式 的计算举例

例4.1 计算下面的$n+1$ 阶行列式,

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix},$$

其中空白处的元素均为零.

解 将D_{n+1}按第$n+1$ 列展开,可得

上页 下页 返回

$$D_{n+1}=a_nD_n+(-1)^{1+n+1}b_n\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} \\ c_n & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a_nD_n-a_1\cdots a_{n-1}b_nc_n.$$

即 $D_{n+1}=a_nD_n-a_1\cdots a_{n-1}b_nc_n$，解此递推公式可得,

$$D_{n+1}=a_0a_1\cdots a_n-b_1c_1a_2\cdots a_n-a_1b_2c_2a_3\cdots a_n$$

$$-\cdots\cdots-a_1\cdots a_{n-1}b_nc_n.$$

例4.2 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & ab & \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix},\quad a\neq b.$$

解 把D_n按第一列展开可得,

上页 下页 返回

$$D_n = (a+b)D_{n-1}$$

$$+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

由此可得 $D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$,

从而 $D_n - aD_{n-1} = b^{n-2}(D_2 - D_1) = b^n$.

由a,b 的对称性又可得,

$$D_n - bD_{n-1} = a^n.$$

从这两个等式可解得

$$D_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

上页 下页 返回

例4.3 证明Vandermonde行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

由此可知，$V_n \neq 0 \Leftrightarrow x_1,\ldots,x_n$ 互异.

证明 对n 用数学归纳法.

当$n=2$ 时,结论显然成立.

上页 下页 返回

假设 $V_{n-1}=\prod_{1\le j<i\le n-1}(x_j-x_i).$

从下到上依次将V_n的每一行的$-x_n$倍加到下一行,可得

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1-x_n & \cdots & x_{n-1}-x_n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} x_1-x_n & \cdots & x_{n-1}-x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) \end{vmatrix}$$

$$=(x_1-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)V_{n-1}$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

下面的例子所使用的所谓“加边法”,多用于处理各行(或列)有相同字母的行列式.

例4.4 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a+x_1^2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+x_1^n & a+x_2^n & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}.$$

解

上页 下页 返回

例4.5 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ b & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & x \end{vmatrix},\quad a\neq b.$$

解 把行列式的最后一列看做两列之和,
可得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & & a & a \\ b & x & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b & \vdots & a & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & a \\ b & b & & b & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a & & a & 0 \\ b & x & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b & \vdots & a & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & 0 \\ b & b & & b & x-a \end{vmatrix}.$$

但是,

$$
\begin{vmatrix}
x & a & & a & a \\
b & x & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & b & \vdots & a & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & x & a \\
b & b & & b & a
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
x-b & a-b & \cdots & a-b & 0 \\
0 & x-b & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & a-b & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & x-b & 0 \\
b & \cdots & \cdots & b & a
\end{vmatrix} = a(x-b)^{n-1}.
$$

因此, $D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-b)^{n-1}$

同理可得, $D_n=(x-b)D_{n-1}+b(x-a)^{n-1}$

由此二等式可解得

$$D_n=\frac{a(x-b)^{n-1}-b(x-a)^{n-1}}{a-b}.$$