# §3.9 列满秩矩阵

可逆矩阵要比一般矩阵更容易处理,这是因为有逆的帮助.比如当方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的系数矩阵 $A$ 可逆是立即得出方程组的解为 $\mathbf{x}=A^{-1}\beta$.

本节将讨论可逆矩阵的一种推广---列满秩矩阵.我们将证明这类矩阵与可逆矩阵有许多相似的性质.

**一个矩阵A称为左(右)可逆矩阵,如果有矩阵B使得BA=I (AB=I);此时称B为A的一个左(右)逆.**

从定义立即可知,一个左可逆的$m \times n$矩阵的每个左逆必为右可逆的$n \times m$矩阵.

例如,设$A = (I_r \quad 0)$, $B = \begin{pmatrix} 0_{r \times r} \\ X \end{pmatrix}$,则有$AB = I$.于是,$A$是一个右可逆矩阵,$B$是$A$的一个右逆.因为$X$是任意的,故$A$有无穷多个右逆.因此右可逆矩阵的右逆一般是不唯一的.

定理9.1 设$G$是$m \times r$矩阵,则下列陈述等价：

1. $G$为列满秩矩阵;

2. $G$有一个$r$阶非奇异子块;

3. $G$行等价于$\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$;

4. 有矩阵$H$(必为列满秩矩阵)使得$(G \quad H)$是一个可逆矩阵;

5. 有矩阵$K$(必为行满秩)矩阵使得$KG = I$,即,$G$左可逆.

证明 $(1) \Leftrightarrow (2)$ 由秩数的定义即得.

$(2) \Rightarrow (3)$ 通过初等行变换可将$G$的$r$阶子块

换到最上方,即有可逆矩阵$P$使得$PG = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$,其中

$A$是一个$r$阶非奇异矩阵.令$Q = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -BA^{-1} & I_{m-r} \end{pmatrix}$,

则$Q$可逆,从而$QP$可逆,而且$(QP)A = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$.

上页 下页 返回

$(3)\Rightarrow(4)$ 设$P$是可逆矩阵使得$PG=\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$,

即$G=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$.令$H=P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ I_{m-r} \end{pmatrix}$,则易知$H$

是列满秩矩阵,且有

$$P(G\quad H)=(PG\quad PH)=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}=I_m.$$

因为$(G\quad H)$是$m$阶方阵,故$(G\quad H)$是一个可逆矩阵.

$(4) \Rightarrow (5)$ 将$(G \quad H)^{-1}$按行分块为

$$(G \quad H)^{-1} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix},$$

则

$$I_m = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}(G \ \ H) = \begin{pmatrix} KG & KH \\ LG & LH \end{pmatrix},$$

从而$KG = I_r$.由于$r =$ 秩$KG \leq$ 秩$K \leq r$,

从而必有秩$K = r$,即$K$是行满秩矩阵.

(5) $\Rightarrow$ (1) 由$KG = I_r$可得,

$r =$ 秩$KG \leq$ 秩$G \leq r$,

故秩$G = r$,即$G$是列满秩矩阵.

定理9.2 设$G, H$分别是列和行满秩矩阵,

则秩$GA =$ 秩$AH =$ 秩$A$.

证明 因为$G$是列满秩矩阵,故有矩阵

$K$使得$KG = I$,从而

秩$A =$ 秩$IA =$ 秩$KGA \leq$ 秩$GA \leq$ 秩$A$,

于是,秩$GA =$ 秩$A$.行满秩矩阵的结论类似.

定理9.3 每个非零矩阵$A$都可分解为一个列满秩和一个行满秩矩阵之积,且对于任意两个这样的分解$A = G_1H_1 = G_2H_2$,必有可逆矩阵$P$使得$GP = G_1$, $P^{-1}H = H_1$,且有秩$G$ = 秩$H$ = 秩$A$.

证明 设秩$A = r$,则由定理8.2可知,有可逆矩阵$P,Q$使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}(I_r \quad 0)Q.$$

令$G=P\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}$, $H=(I_r\quad 0)Q$,则$A=GK$,

且易知$G,H$的秩数均为$r$,从而分别为列满秩

和行满秩矩阵.

设$A=G_1H_1=G_2H_2$,其中$G_i,H_i\quad(i=1,2)$

分别是列满秩和行满秩矩阵,则由定理9.2可知,它们的秩数均为$r$.由定理9.1及其行满秩版本可得矩阵$K,L$使得$KG_1=H_1L=I$.于是

$$KG_2H_2L=KG_1H_1L=I_r.$$

上页 下页 返回

注意到$KG_2$和$H_2L$都是$r$阶方阵,则可知它们是可逆矩阵.设$P = KG_2$,则$P^{-1} = H_2L$.于是,用$L$右乘等式$G_1H_1 = G_2H_2$两端可得$G_1 = G_2P^{-1}$,即$G_1P = G_2$.用$K$左乘等式$G_1H_1 = G_2H_2$两端可得$H_1 = PH_2$,即

$$P^{-1}H_1 = H_2.$$

定理9.4 秩$(A+B) \le$ 秩$A+$秩$B$.

证明 设秩$A=r$, 秩$B=s$,并设$A=GH$, $B=G_1H_1$都是满秩分解,则

$$A+B=(G \quad G_1)\begin{pmatrix} H \\ H_1 \end{pmatrix},$$

从而

秩$(A+B) \le$ 秩$(G \quad G_1) \le (G \quad G_1)$的列数 $=r+s=$ 秩$A+$秩$B$.

推论9.1 秩$A-$秩$B\leq$秩$(A-B)\leq$秩$A+$秩$B$.

证明 注意到秩$(-B)=$秩$B$,则可知

秩$(A-B)=$秩$(A+(-B))\leq$秩$A+$秩$B$.

另一方面,因为

秩$A=$秩$((A-B)+B)\leq$秩$(A-B)+$秩$B$,

故秩$A-$秩$B\leq$秩$(A-B)$.

Sylvester 不等式 秩$(AB) \geq$ 秩$A+$ 秩$B-B$.

证明 设$A$是秩为$r$的$m \times n$矩阵,则$B$的行数应为$n$.设$A=GH$是满秩分解,则$H$是行满秩的$r \times n$矩阵.由定理9.1的行满秩版本可知,有行满秩矩阵$H_1$使得$\begin{pmatrix} H \\ H_1 \end{pmatrix}$是一个$n$阶可逆矩阵.于是,

$$AB = GHB = HB = \begin{pmatrix} HB \\ 0 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} H \\ H_1 \end{pmatrix} B - \begin{pmatrix} 0 \\ H_1 B \end{pmatrix} \right)$$

$$\geq B - H_1 B \geq B - H_1$$

$$= B - (n - H) = B - (B - A)$$

$$= A + B - B.$$

推论9.2 设$A, B$均为$n$阶方阵,则

秩$(AB) \geq$ 秩$A +$ 秩$B - n$.