§3.5 方阵的行列式

定义5.1 设$A=(a_{ij})$是一个n阶矩阵，则A自然地确定了一个n阶行列式$\det(a_{ij})$，这个行列式称为A的行列式，记作$|A|$或$\det A$.

行列式乘法定理 设A,B均为n阶矩阵，则$|AB|=|A||B|$.

证明 设$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$均为n阶矩阵，则由$Laplace$可得

$$|A||B|=\begin{vmatrix} A & 0 \\ I & B \end{vmatrix}.$$

上页 下页 返回

$m \times n$

将上式右端的行列式的第1列的$-b_{1j}$倍,…,第n列的$-b_{nj}$倍都加到$n+j$列$(j=1,2,\ldots,n)$可得

$$|A||B|=\begin{vmatrix} A & -AB \\ I & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n\ |I||-AB|$$

$$=(-1)^{n+n}\ |AB|=|AB|.$$

定义5.2 设A是一个$m\times n$矩阵.A的一个k阶正方子块的行列式政委A的k阶子式.

由$A=(a_{ij})_{m\times n}$的第$i_1,i_2,\ldots,i_k$行及$j_1,j_2,\ldots,j_k$列所确定k阶子块记为

上页 下页 返回

$$A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{Bmatrix},$$

即

$$\text{式}_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{Bmatrix} = \det\left(A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}.$$

当A是n阶矩阵时,式$_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{Bmatrix}$在$A$

中的余子式与代数余子式分别记为

式$_A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$,代余式$_A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$

显然

代余式$_A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} = (-1)^t$余式$_A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$,

其中$t=i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k$.不过要注意,这里余子式虽然是这样记法,但它实质是一个$n-k$阶行列式,而非k阶行列式.

使用上面的记号,Laplace定理(按第$j_1,j_2,\ldots,j_k$)列展开)可表述为

$$|A|=\sum_{\mu}A\begin{Bmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{Bmatrix}_A\begin{Bmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{Bmatrix},$$

这里$\sum\limits_{\mu}$表示在$\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_k$的要求下对其一切可能求和.

上页 下页 返回

引理5.1 设U是$m\times n$矩阵,V是$n\times m$矩阵,则

$$\begin{vmatrix} I_n & V \\ U & 0 \end{vmatrix} = (-1)^m \ |UV\ |.$$

证明 因为

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -U & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & V \\ U & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & V \\ 0 & -UV \end{pmatrix},$$

所以,取行列式并由行列式乘法定理可得,

上页 下页 返回

$$\begin{vmatrix} I_n & V \\ U & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & V \\ 0 & -UV \end{vmatrix} = (-1)^m \ |UV| .$$

Binet-Cauchy公式 设U是$m \times nj$矩阵,V是$n \times m$矩阵,$m \le n$,则

$$|UV| = \sum_{\mu \quad U} \left\{ \begin{matrix} -------- \\ \mu_1\ \mu_2 \cdots \mu_m \\ \ \end{matrix} \right\}_V \left\{ \begin{matrix} \mu_1\ \mu_2 \cdots \mu_m \\ -------- \\ \ \end{matrix} \right\},$$

即$|UV|$等于U的所有m阶子式与其在V中对应的m阶子式乘积之和.

证明 设$A=\begin{pmatrix} I_n & V \\ U & 0 \end{pmatrix}$,则由上引理可得$|UV|=(-1)^m\,|A|$.

现在对于$|A|$的后m个行用$Laplace$定理可得,

$$A\,|=\sum_{\mu}\text{式}_U\left\{\begin{matrix} - - - - - - - - - - - \\ \mu_1 \quad \cdots \quad \mu_m \\ \end{matrix}\right\}\text{代余式}_A\left\{\begin{matrix} n+1 & \cdots & n+m \\ \mu_1 & \cdots & \mu_m \\ & & \end{matrix}\right\}$$

$$=\sum_{\mu}\text{式}_U\left\{\begin{matrix} - - - - - - - - - - - \\ \mu_1 \quad \cdots \quad \mu_m \\ \end{matrix}\right\}(-1)^s\ |\,\hat{I}_n\ V\ |,$$

上页 下页 返回

其中$s=n+1+\cdots+n+m+\mu_1+\cdots+\mu_m$,而$\hat{I}_n$表示从$I_n$中去掉第$\mu_1,\ldots,\mu_m$列后剩余的各的列组成$n\times(n-m)$矩阵.不妨设这些剩余第的诸列依次为$\nu_1,\ldots,\nu_{n-m}$列,则易知$\hat{I}_n$的第$\mu_1,\ldots,\mu_m$行中的元素全是0,且其余的第$\nu_1,\cdots,\nu_{n-m}$行恰好组成一个$n-m$阶单位矩阵.于是对$|\hat{I}_n V|$的前$n-m$个列用$Laplace$定理可得,

上页 下页 返回

$$|\hat{I}_n V| = 1 \cdot_{|\hat{I}_n V|} \begin{Bmatrix} \nu_1 & \cdots & \nu_m \\ 1 & \cdots & n-m \\ & & \end{Bmatrix} = (-1)^t_V \begin{Bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_m \\ - - - - & - - - - & - - \\ & & \end{Bmatrix},$$

其中$t = \nu_1 + \cdots + \nu_{n-m} + 1 + \cdots + n - m$.于是,

$$|UV| = (-1)^m \, |A|$$

$$= (-1)^{m+s+t} \sum_{\mu} {}_U \begin{Bmatrix} - - - - - - - - - - \\ \mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_m \\ \ \end{Bmatrix}_V \begin{Bmatrix} \mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_m \\ - - - - - - - - - - \\ \ \end{Bmatrix}.$$

上页 下页 返回

因为

$$\mu_1+\cdots+\mu_m+\nu_1+\cdots+\nu_{n-m}=1+\cdots+n,$$

故 $m+s+t=m(m+1)+n(n+1)$ 是一个偶数,于是,

$$|UV|=\sum_{\mu\quad U}\left\{\begin{array}{c} ---------- \\ \mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_m \\ \ \end{array}\right\}_V\left\{\begin{array}{c} \mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_m \\ ---------- \\ \ \end{array}\right\}.$$