第二章 行列式

<u>》行列式的研究背景.</u>

本章目录：

背景

- 行列式来源于线性方程组的研究,是17世纪末由G. Leibniz发明的. H. Cramer是第一个发表这一主题的人(1750). 行列式的基础理论奠基于A. Vandermonde, P. Laplace, A-L. Cauchy 和C.G.J. Jacobi等人的工作.``行列式"这个名词首先由C.F.

C.F. Guass (1801)使用.现代意义的行列式概念和符号是由Cauchy (1841)创立的. 行列式理论完善于19世纪.

行列式不仅是线性代数及其它数学分支的重要工具,而且也是自然科学及工程技术许多领域的重要工具..

返回

§2.1行列式的定义

一般地，n元一次方程就叫做n元线性方程. 一个以$x_1,\ldots,x_n$为变量的n元线性方程总可写成如下形式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$均为常数. 一组n元线性方程就构成了一个n元线性方程组. 首先考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

将第一个方程乘以a_{12}, 第二个方程乘以 a_{22} , 然后相减, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

同理可得,

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则可得方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

定义二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

用行列式的记号,方程组的解可表为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

类似地, 通过考虑三元线性方程组可知,三阶行列式应定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

其中左上角元素和右下角元素的连线称为行列式的(主)对角线;右上角元素和左下角元素的连线称为行列式的次对角线.

从二阶和三阶行列式的定义可以看出:
二阶行列式的展开式中的每一项都是两个既不同行又不同列的元素之积,共2项,各行的符号可由所谓对角线法则来确定:主对角线上两个元素所确定的项带正号,次对角线上两个元素所确定的项带负号.
三阶行列式的展开式中的每一项都是三个既不同行又不同列的元素之积, 共计6项,各项的符号可由下面所谓对角线法则来确定:考察以此项中三元素为顶点的三角形(或直线),若有一个边平行于主对角线,则该项带正号;若有一个边平行于次对角线,则该项带负号.

一般地, n阶行列式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记为$\det(a_{ij})$,其中的元素串$a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$称为行列式的对角线.从二、三阶行列式的定义可以想像到, n阶行列式的展开式中的一般项应为n个既不同行又不同列的元素之积并带有适当的正负号,即

$$\pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

上页 下页 返回

n阶行列式的值就是所有这样的项之和.因为一般项中的$a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$ 取自不同的行和列,故它们的列标互不相同,即$p_1, p_2 \cdots p_n$是 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列.另一方面, 既然一般项中因子的行标已按自然顺序 $1, 2, \ldots, n$ 排列,故一般项恰好由其列标排列唯一确定. 因为共有$n!$个这样的排列,故一个n 阶行列式的展开式中共有$n!$个项.

设$p_1p_2\cdots p_n$是一个排列,对于此排列中的任意两个数,若大的数排在小的数前面, 则称这两个数成了一个反序,反序的总数称为此排列的反序数,记为$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.反序数为偶数的排列称为偶排列,反序数为奇数的排列称为奇排列.

现在再考察二、三阶行列式可知,其各项的符号有以下规律: 当列标排列是偶排列时带正号,否则带负号. 例如,三阶行列式的一般项为

上页 下页 返回

Definition

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

n阶行列式

而三阶行列式的值可记为

$$\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

定义　n 阶行列式

$$\det(a_{ij}) = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中$p_1p_2\cdots p_n$是n排列, 每个n排列确定一项, 共有$n!$项, 求和是对这$n!$项求和.下面的两种形状的行列式分别称为上、下三角行列式,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 上,下三角行列式等于对角线上元素之积.

证明 设 $\det(a_{ij})$ 是一个上三角行列式,则 $a_{ij}=0,\ 1\le j<i\le n.$ 由行列式的定义,

$$\det(a_{ij})=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

但是,对于任意n排列$p_1p_2\cdots p_n$ 只有当 $p_n=n, p_{n-1}=n-1,\cdots,p_1=1$ 时, 它所对应的那一项才有可能不等于零,

故 $\det(a_{ij})=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$