§3.4 转置以及特殊矩阵

定义4.1 设$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$,把$A$的行写成列而得的$n\times m$矩阵称为$A$的转置矩阵,记为$A^T$,即

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

命题4.1 设A,B均为$m\times n$矩阵,则

1. $\left(A^T\right)^T = A$;

2. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$;

3. $\left(AB\right)^T = B^T A^T$.

证明 **(1)和(2)是显然的.**

现在证明(3). 设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}$,则$AB=(c_{ij})_{m\times p}$,

其中$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$,从而$(AB)^T$的第$i$行第$j$列元素为$c_{ji}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$.

再设$A^T=(a'_{ij})_{n\times m}, B^T=(b'_{ij})_{p\times n}$,则$a'_{ij}=a_{ji}, b'_{ij}=b_{ji}$,从而$B^T A^T$

的第i行第j列元素为

上页 下页 返回

$$\sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

故$(AB)^T = B^T A^T$.

例4.1 对于分块矩阵的转置有,

$$(A \quad B)^T = \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^T = (A^T \quad B^T);$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}.$$

定义4.2 对矩阵A的元素取共轭所得的矩阵称为A的共轭矩阵, 记为$\overline{A}$

定义4.3 时A是一个实方阵. 若$AA^T = A^T A = I$, 则称A是正交矩阵.

定义4.4 设A是一个方阵.若$A^T = A$,则称A是对称矩阵;若$A^T = -A$,则称A是反对称矩阵

对称矩阵与反对称矩阵分别有如下形状:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b & \dots & c \\ b & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d \\ c & \cdots & d & a_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & b \\ -a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ -b & \cdots & -c & 0 \end{pmatrix}$$

对角线以外元素全是**0**的方阵称为对角矩阵;对角线上元素全相等的对角矩阵称为纯量矩阵.对角线元素为**a**纯量矩阵恰为**a*I*.**

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \qquad aI = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

上面的对角矩阵也记作$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

下列形状的方阵称为三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

显然设 $A=(a_{ij})$是n阶矩阵，则

- A是对角矩阵 $\Leftrightarrow a_{ij}=0,\ i \neq j$;
- A是上三角矩阵 $\Leftrightarrow a_{ij}=0,\ i > j$;
- A是下三角矩阵 $\Leftrightarrow a_{ij}=0,\ i < j$.