§2.3 Laplace定理

定义3.1 设D是一个n阶行列式,在D中任意选定k个行, k个列$(1 \le k \le n)$,

1) 这些行、列相交处的元素按其原有的相对位置就构成一个k阶行列式M,称为D的一个k阶子式;

2) 这些行、列以外的元素按其原有的相对位置就构成一个$n-k$阶行列式M称为M的余子式;记为M'.

上页 下页 返回

3) $(-1)^t M'$ 称为 M 的代数余子式，其中 $t = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k$.

4) D 的第 i 行和第 i 列确定的一阶子式恰为 D 的第 i 行第 i 列的元素 a_{ij}，它的代数余子式记为 A_{ij}.

引理3.1 行列式 D 的一个子式 M 和它代数余子式 A 之积 MA 的展开式中的每一项都是 D 的展开式中的一项.

上页 下页 返回

证明：设$D=\det(a_{ij})$是一个n阶行列式，M是D的一个k阶子式. 首先考虑M位于D的左上角的情况. 此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & M & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+11} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & M` & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

上页 下页 返回

而且 $A=(-1)^{1+\cdots+k+1+\cdots+k}M'=M'$.现在,

M 的展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_k)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_k$ 是$1,2,\ldots,k$的一个排列.

令$b_{ij}=a_{k+i\,k+j}$, $1\le i,j\le n-k$,则

$M'=(b_{ij})$,这是一个$n-k$阶行列式,

它的展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_{n-k})}b_{1,q_1}b_{2,q_2}\cdots b_{n-k,q_{n-k}}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_{n-k})}a_{k+1,k+q_1}a_{k+2,k+q_2}\cdots a_{n,k+p_{n-k}},$$

上页 下页 返回

其中 $p_1p_2\cdots p_{n-k}$ 是$1,2,\ldots,n-k$ 的一个排列. 注意到MA展开式中的一般项是M 和M'的一般项之积, 也就是

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_k)+\tau(q_1q_2\cdots q_{n-k})}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}$$

$$a_{k+1\,k+q_1}a_{k+2\,k+q_2}\cdots a_{n\,k+p_{n-k}}.$$

令 $p_{k+j}=k+q_j,\ \ j=1,2,\ldots,n-k,$ 则

$p_i<p_m,$ 其中$1\le i\le k<m\le n.$ 故

$$\tau(p_1\cdots p_k\,p_{k+1}\cdots p_n)=\tau(p_1p_2\cdots p_k)+\tau(q_1q_2\cdots q_{n-k}).$$

于是, MA 展开式中的一般项变成

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_k p_{k+1}\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}a_{k+1\,p_{k+1}}a_{k+2\,p_{k+2}}\cdots a_{np_n},$$

这正好是 D 的展开式中的一项.

下面考虑一般情况. 设 M 位于D的第

$i_1,\ldots,i_k$行,第 $j_1,\ldots,j_k$ 列,其中$i_1<\cdots<i_k$,

$j_1<\cdots<j_k$ 通过一系列的行、列互换可

将 移至左上角：

上页 下页 返回

把第i_1行依次与其上面的第i_1-1, $i_1-2,\cdots,1$行对换,共进行了i_1-1 次互换便将第i_1行换到了第1行;

把第i_2行依次与其上面的第i_2-1, $i_2-2,\cdots,2$行对换,共进行了i_2-2次互换便将第i_2行换到了第2行;

如此继续下去,便把第 $i_1,\ldots,i_k$ 行分别移至第$1,\ldots,k$行的位置,

上页 下页 返回

而且换行的次数共计为

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k).$$

同理,可进行

$$(j_1-1)+(j_2-2)+\cdots+(j_k-k)$$

次列的互换而把第$j_1,\ldots,j_k$ 列分别移至第$1,2,\ldots,k$列. 于是 M 被移至左 上角,而且行、列互换的次数总计为

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)+(j_1-1)$$
$$+(j_2-2)+\cdots+(j_k-k)$$

$$= i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots + j_k - 2(1 + \cdots + k)$$

设经上述行、列互换后得到的行列式为 D_1,并令 $t = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k$,则

$$D = (-1)^{t-2(1+\cdots+k)} D_1 = (-1)^t D_1,$$

因此 D和 D_1 的一般项之间仅相差一个符号$(-1)^t$. 注意到, M 位于D_1的左上角, 并且上述行、列互换的方式并未改变其余诸列的相对位置, 故 M'恰好位于D_1的右下角.

上页 下页 返回

于是, MM'的每一项都是D_1的一项,从而 $MA=(-1)^t MM'$的每一项都是$(-1)^t D_1=D$的一项.

上页 下页 返回

Laplace定理 在n阶行列式D中任意取定k$(1 \le k < n)$ 个行,列,则这k个行,列中的所有的k阶子式与其代数余子式的乘积之和恰为D.

证明 设所选定的这k个列中包含的所有k阶子式为$M_1, M_2, \ldots, M_s$, 此处s是从n个元素中选取k个元素的组合数,即$s = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.再设这些子式的代数余子式分别为

上页 下页 返回

$A_1, A_2, \dots, A_s$ 要证明的是

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_s A_s .$$

由上面的引理可知, $M_i A_i$ 的项都是 D的项. 注意到,当 $i \neq j$时, M_i和 M_j 至少有一行不同,因此 $M_i A_i$和 $M_j A_j$ 无公共项.因为M_i 和 A_i分别共有 $k!$ 和 $(n-k)!$ 项, 所以 $M_i A_i$的展开式中共有 $k!(n-k)!$ 项.于是,

$M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_sA_s$ 总计有 $sk!(n-k)!=n$项,和 D 的展开式中的项数一样, 故必有

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_sA_s.$$

现在看一个例子.设

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&3&1\\5&2&3&1\\3&0&2&1\end{vmatrix}.$$

上页 下页 返回

对 D 中第一、二行作Laplace展开.
包含在这两行中的所有二阶子式为

$$M_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}=1,\quad M_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{vmatrix}=3,$$

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=1, M_4=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{vmatrix}=2,$$

$$M_5=\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix}=1,\quad M_6=\begin{vmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{vmatrix}=1.$$

相应的代数余子式分别为

$$A_1 = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_2 = (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_3 = (-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_4=(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\3 & 1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_5=(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_6=(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix}5 & 2\\3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

因此

$$\begin{aligned}D&=M_1A_1+M_2A_2+M_3A_3\\&\quad+M_4A_4+M_5A_5+M_6A_6=-4.\end{aligned}$$

例3.1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x-2y & x-y & x-2y & x-3y \\ 2x-2y & 2x-y & 2x-2y & 2x-3y \\ 3x-3y & 3x-2y & 4x-5y & 3x-5y \\ 4x & 4x-3y & 5x-7y & 4x-3y \end{vmatrix}.$$

解 将 D 的第一列的 -1 倍分别加到其它各列,

上页 下页 返回

$$D=\begin{vmatrix} x-2y & y & 0 & -y \\ 2x-2y & y & 0 & -y \\ 3x-3y & y & x-2y & -2y \\ 4x & -3y & x-7y & -3y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2y & y & 0 & 0 \\ 2x-2y & y & 0 & 0 \\ 3x-3y & y & x-2y & -y \\ 4x & -3y & x-7y & -6y \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

$$=\begin{vmatrix} x-2y & y \\ 2x-2y & y \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2y & -y \\ x-7y & -6y \end{vmatrix}$$

$$=5xy^2(x-y).$$

在Laplace定理中, $k=1$ 的特殊情况就是重要的按列展开定理.

按列展开定理 行列式等于其中任意一列元素与其代数余子式的乘积之和即对于任意 $k=1,2,\ldots,n$ 均有

$$\det(a_{ij})=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk}.$$

上页 下页 返回

设 $D=\det(a_{ij})$ 是一个n阶行列式,把

D的第k 列元素分别换成$b_1,b_2,\ldots,b_n$

可得行列式

$$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{1k+1} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

因为在一个行列式中第k列元素的

上页 下页 返回

代数余子式与其第k列元素的具体取值无关,因此, D的第k列元素的代数余子式和D_1的第k列元素的代数余子式相同,均记为$A_{1k},A_{2k},\dots,A_{nk}$.

将D_1按第k列展开可得,

$$b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}=D_k.$$

特别地, 取$b_i=a_{ij},\ i=1,2,\dots,n,\ j\neq k$,

则D_j的第j,k 列相同,故$D_k=0$.

上页 下页 返回

因此,

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=D_k=0.$$

于是,我们已经证明了下面的

命题3.1 行列式某一列元素与另一列中对应元素的代数余因子的乘积之和恒为0 ,即,若 $j\neq k$, 则有

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0,\ 1\leq j,k\leq n$$

现在引入Kronecker符号,其定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

使用Kronecker符号,我们有

定理3.1对于n阶行列式$D = \det(a_{ij})$

恒有

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \delta_{ij}D,$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij}D,$$

其中$i, j = 1, 2, \ldots, n$.

上页 下页 返回