§3.6 可逆矩阵

定义6.1 设A是一个n阶矩阵.若有n阶矩阵B,使得$AB=BA=I$,则称A是一个可逆矩阵(非奇异矩阵、非退化矩阵),并称B是A的一个逆.

例如,设

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix},$$

则$AB=BA=I$,故B是A的一个逆.当然A也是B的一个逆.

命题 6.1 可逆矩阵的逆是唯一的.

证明 设**A**是可逆矩阵,且**B**,**C**均为**A**逆,则有

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

可逆矩阵A的逆矩阵记为A^{-1}

命题6.2 设**A**,**B**均为**n**阶矩阵.

1. 若A可逆,则A^{-1}也可逆,且$(A^{-1})^{-1} = A$,
即A和A^{-1}互为逆;
2. 有限个可逆矩阵之积仍为可逆矩阵,且
$$(AB\cdots C)^{-1} = C^{-1}\cdots B^{-1}A^{-1}.$$

上页 下页 返回

证明 若A可逆,则$AA^{-1}=A^{-1}A=I$,故A是A^{-1}的逆,即$(A^{-1})^{-1}=A$.若$A,B,\cdots,C$均可逆,则由乘法结合律可知,

$$(AB\cdots C)(C^{-1}\cdots B^{-1}A^{-1})$$

$$=(C^{-1}\cdots B^{-1}A^{-1})(AB\cdots C)=I,$$

故 $(AB\cdots C)^{-1}=C^{-1}\cdots B^{-1}A^{-1}$.

定义6.2 设$A=(a_{ij})$是一个n阶矩阵,把每个元素都换成它的代数余子式后再转置,所得之矩阵称为A的伴随矩阵,记为$\widetilde{A}$,即

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其中A_{ij}表示A的第i行第j列元素a_{ij}代数余子式.

命题**6.3** 对于任意**n**阶矩阵**A**均有

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|I.$$

定理6.1 设A是n阶矩阵,则A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$;且当$|A| \neq 0$时,有

$$A^{-1} = |A|^{-1}\widetilde{A}.$$

推论6.1 设A, B均为n阶矩阵,则AB可逆当且仅当A, B均可逆.

推论6.2 设A是n阶矩阵,则A可逆当且仅当有n阶矩阵B使得$AB=I$或$BA=I$.

命题6.4 设A是n阶矩阵,则A可逆当且仅当A^T可逆;此时有,$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

例6.1 设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,且$|A|=ad-bc\neq 0$,则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

例6.2 设A,B都是n阶矩阵,证明

$$|\lambda I-AB|=|\lambda I-BA|.$$

解 若**A**可逆,则

$$|\lambda I-AB|=|A^{-1}||\lambda I-AB||A|=|\lambda I-BA|.$$

一般地,令

$$f(x)=|\lambda I-(A-xI)B|,\ g(x)=|\lambda I-B(A-xI)|,$$

则由行列式的展开式可知，它们都是x的多项式.注意到，$|A-xI|$也是x的多项式，故有无穷多个$c\in\Omega$使得$|A-cI|\neq 0$，即$A-cI$可逆，故有无穷多个$c\in\Omega$使得$f(c)=g(c)$，因此，$f(x)=g(x)$.特别地，当$x=0$时，有$|\lambda I-AB|=|\lambda I-BA|$.