§3.7初等变换与初等矩阵

定义**7.1** 下列三种对矩阵的变换称为矩阵的初等行**(**列**)**变换

1. 把第i行（列）和第j行（列）互换位置，记为$r_i \leftrightarrow r_j \quad (c_i \leftrightarrow c_j)$;

2. 用非零数a去乘以第i行(列)，记为$ar_i \quad (ac_i)$;

3. 把第i行(列)的a倍加到第j行(列)，记为$ar_i + r_j \quad (ac_i + c_j)$.

定义**7.2** 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换

上页 下页 返回

定义7.3 设A是一个$m\times n$矩阵,如果各非零行的第一个非零元(称为主元)从上到下依次后缩,且零行都位于最下面几行,则称A是阶梯矩阵.进一步,若阶梯矩阵A的各行的主元均为1,且这些1所在的列中的其余元素都是0,则称A是约化阶梯矩阵.

例如,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分别是阶梯矩阵和约化阶梯矩阵.

命题7.1 在一个约化阶梯矩阵中,主元所在的列(姑且称为主列)依次为$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$,而且其它列均可表示成它前面的那些主列的线性组合.

命题**7.2** 每个矩阵都可用初等行变换化成约化阶梯矩阵.

证明 设$A=(a_{ij})$是$m \times n$矩阵.如果A的元素全都是零,则A已经是阶梯矩阵.如果A的元素

不全是零,则必有某一列元素不全为零,不妨设第一个非零列是第k列,且$a_{ik} \neq 0$.将第i行和第1行互换,并设所得矩阵为B,则B的$(1,k)$位置的元素为$a_{ik} \neq 0$.现在可将B的第一行乘以适当的倍数加到其它各行而把B化成如下形状:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1k} & b_{1k+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{2k+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{mk+1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

现在对上面的矩阵中除第一行以外的其余各行如上处理,并继续下去,最后可得一个阶梯矩阵**C.** 用第二种行变换将**C**的每一主元化成**1**,再用第三种行变换将主元所在列中的其余元素化成**0**,即得约化阶梯矩阵.

　　用初等行变换把矩阵化成某种特殊形式(通常是阶梯矩阵)是很有用的,可以用俩解决许多类计算问题,比如,求行列式,求秩数,求逆矩阵,化简列向量组,解线性方程组等.不能因某些计算烦琐而厌弃.实际上,和逻辑推理能力一样,计算能力也是一项重要的基本功.

例7.1 用初等变换将矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$

化成约化阶梯矩阵.

解

$$A\xrightarrow[-1r_1+r_3]{1r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3;-1r_3]{1r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

命题**7.3** 任何矩阵都可用初等变换化成标准形式

命题7.4 对单位矩阵做一次初等变换所得到的矩阵称为该变换所对应的初等矩阵,简称为初等矩阵.

从定义可知,初等矩阵共有以下几种形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & \vdots & \ddots & & & \\
& & a & \cdots & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & \cdots & a & & \\
& & & \ddots & \vdots & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

命题**7.4** 初等矩阵都是可逆矩阵,且其逆为同一种的初等矩阵.

定理**7.1** 设**A**是任意矩阵,则对**A**做一次初等行(列)变换恰等于在**A**的左(右)边乘上相应的初等矩阵.

证明 设$A=(a_{ij})$,,把矩阵A按列分块为

$A=(\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)$.令$P$表示上面的第四种

初等矩阵,直接验算即可知

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_i \quad \cdots \quad \alpha_j \quad \cdots \quad \alpha_n)P_{n\times n} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_i & \cdots & (\alpha_j + a\alpha_i) & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

等式的右端是把A的第i列的a倍加到第j列所得之结果,而左端则是用此变换对应的初等矩阵右乘A之结果.其他情况可类似验证.

命题**7.5** 可逆矩阵可用有限个初等变换化成单位矩阵.

证明 设A是一个n阶可逆矩阵,则用行变换可将其化成一个约化阶梯矩阵B.往证B是一个单位矩阵.由定理7.1可知,有初等矩阵$J, K, \ldots, L$使得$JK\cdots LA = B$,从而$|B| = |J||K|\cdots|L||A| \neq 0$.于是$B$必为单位矩阵

定理7.2 可逆矩阵恰为有限个初等矩阵之积.

证明 因为初等矩阵均为可逆矩阵,故初等矩阵之积仍为可你矩阵.反之,设**A**是一个可你矩阵.由上面的命题可知,有初等矩阵

$J, K, \ldots, L$使得$JK\cdots LA = I$.因此$A = L^{-1}\cdots K^{-1}J^{-1}$,

且$L^{-1}\cdots K^{-1}J^{-1}$均为初等矩阵.

定理7.3 设A,B是矩阵,则

1. A可用有限次初等行变换化成B当且仅当有可逆矩阵P使得$B=PA$;

2. A可用有限次初等变换化成B当且仅当有可逆矩阵Q使得$B=AQ$;

3. A可用有限次初等变换化成B当且仅当有可逆矩阵P,Q使得$B=PAQ$.

证明 只证1,余者类似.设A可用初等行变换化成B,则由定理7.1可知,有初等矩阵$J,K,\ldots,L$使得$JK\ldots LA=B$. 令$P=JK\ldots L$,则$B=PA$.因为初等矩阵都是可逆矩阵,故P是可逆矩阵.另一方面,设有可逆矩阵P使得$B=PA$.由上一个定理可知,P是初等矩阵之积,而且左乘一个初等矩阵等价于做一次行变换,故A可用行变化化成B.

定义7.5 设A,B均为$m\times n$矩阵,若A经有限次初等(行)变换化成B,则称A和B(行)等价.

定义7.6 设S是一个非空集合.S上的一个等价关系指的是S的元素之间的一种具有以下性质的关系($a\sim b$表示a和b具有这种关系):

1. 自身性: 对任意的$a\in S$均有,$a\sim a$;
2. 对称性: 若$a\sim b$,则必有$b\sim a$;

3. 传递性: 若$a \sim b$,且$b \sim c$,则必有$a \sim c$.

例如,**“相等”是一个集合S上的一个等价关系.再如,“行列式相等”是n阶矩阵集合上的一个等价关系.**

命题7.6 矩阵的(行)等价是$m \times n$矩阵集合上的一个等价关系.

设**A**可逆,则**A**可用初等行变换化成单位矩阵,故有初等矩阵**J,K,…,L**使得

上页 下页 返回

$$JK\cdots LA = I,\quad JK\cdots LI = A^{-1}.$$

因为左乘一个初等矩阵相当于做一次初等行变换,所以上面的第一式表明,A可经一些初等行变换化成单位矩阵;第二式则表明同样的变换可将单位矩阵化成A的逆.因此,若同时对A和I做相同的初等行变换,那么当A变成I时,I也就变成了A的逆.注意到,用同一个初等行变换同时去变A和I,等价于对矩阵$(A\ I)$做一个同样的初等行变换,故只需将$(A\ I)$用初等行变换(不可做列变换)化成$(I\ B)$的形式,则B即为A的逆.

例7.2 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，求A的逆.

解

$$(A\ \ I)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0\\2&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2\times r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&0&1&1&-2&0\\0&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\times r_3+r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&1&1&-2&0\end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

最后,我们介绍分块矩阵的初等变换:

1. 互换两行;

2. 用可逆矩阵左(右)乘某一行;

3. 把某一行(列)左(右)乘一个矩阵的结果加到另一行(列).

相应地,有初等分块矩阵---对单位矩阵的分块矩阵做一次分块初等变换所得之矩阵.直接验证可知,对分块矩阵做一次初等行(列)变换等价于左(右)乘响应的初等矩阵.

例如,对于2×2的分块矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,其中

A是**m**阶可逆矩阵,**D**是**n**阶矩阵,我们经常需要用分块初等变换把它们化成一个上三角的分块矩阵,并用相应的分块初等矩阵将这一过程表达成一个等式.这可如下考虑:设

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ P & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ PA+C & PB+D \end{pmatrix},$$

令$PA+C=0$可得$P=-CA^{-1}$,于是,所需要的等式即为

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

类似地,有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$