

## 第十三届全国大学生数学竞赛初赛

### 《数学类 A 卷》试题

一、(15 分) 设不全为零的  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 求直线  $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c}$  绕  $z$  轴旋转所得的旋转曲面方程.

二、(15 分) 设  $B \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$  是单位开球, 函数  $u, v$  在  $\bar{B}$  上连续, 在  $B$  内二阶连续可导, 满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1 - u^2 - v^2)u = 0, & x \in B \\ -\Delta v - (1 - u^2 - v^2)v = 0, & x \in B \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B \end{cases}$$

其中,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ ,  $\partial B$  表示  $B$  的边界. 证明:  $u^2(x) + v^2(x) \leq 1 (\forall x \in \bar{B})$ .

三、(15 分) 设  $f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$  为整系数多项式,  $a_0 \neq 0$ . 设对任意  $0 \leq k \leq 2020$  有  $|a_k| \leq 40$ , 证明:  $f(x) = 0$  的根不可能全为实数.

四、(20 分) 设  $P$  为对称酉矩阵, 证明: 存在可逆复矩阵  $Q$  使得  $P = \bar{Q}Q^{-1}$ .

五、(15 分) 设  $\alpha > 1$ , 证明:

$$(1) \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x dx.$$

$$(2) \text{ 计算 } \int_0^{+\infty} \sin x^3 dx \cdot \int_0^{+\infty} \sin x^{\frac{3}{2}} dx.$$

六、(20 分) 设  $f, g$  为  $\mathbb{R}$  上的非负连续可微函数, 满足:  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$f'(x) \geq 6 + f(x) - f^2(x), g'(x) \leq 6 + g(x) - g^2(x).$$

证明: (1)  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$  以及  $x \in \mathbb{R}$ , 存在  $\xi \in (-\infty, x)$  使得  $f(\xi) \geq 3 - \varepsilon$ .

(2)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立  $f(x) \geq 3$ .

(3)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 存在  $\eta \in (-\infty, x)$  使得  $g(\eta) \leq 3$ .

(4)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立  $g(x) \leq 3$ .