

第十三届全国大学生数学竞赛初赛

《数学类 B 卷》试题

一、(15 分) 设球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求以点 $M_0(0, 0, a)(a \in \mathbb{R}, |a| > 1)$ 为顶点的与 S 相切的锥面方程.

二、(15 分) 设 $B \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 是单位开球, 函数 u, v 在 \bar{B} 上连续, 在 B 内二阶连续可导, 满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1 - u^2 - v^2)u = 0, & x \in B \\ -\Delta v - (1 - u^2 - v^2)v = 0, & x \in B \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B \end{cases}$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

∂B 表示 B 的边界. 证明:

$$u^2(x) + v^2(x) \leq 1 (\forall x \in \bar{B}).$$

三、(15 分) 设 $f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 为整数系数多项式, $a_0 \neq 0$. 设对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 证明: $f(x) = 0$ 的根不可能全为实数.

四、(20 分) 设 $R = \{0, 1, -1\}$, Γ 为 R 上的 3 阶行列式全体, 即

$$\Gamma = \left\{ \det(a_{ij})_{3 \times 3} \mid a_{ij} \in R \right\}.$$

证明: $\Gamma = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

五、(15 分) 设 f 在 $[-1, 1]$ 内有定义, 在 $x = 0$ 的某邻域内连续可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0$.

证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散.

六、(20 分) 设函数 $f(x) = \ln \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$. 证明函数 f 在 $(-\infty, 0)$ 内为严格凸的, 并且对任

意 $\xi \in (-\infty, 0)$, 存在 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(称 (a, b) 内的函数 S 为严格凸的, 如果对任何 $\alpha \in (0, 1)$ 以及 $x, y \in (a, b), x \neq y$ 成立 $S(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha S(x) + (1 - \alpha)S(y)$.)