第十三届全国大学生数学竞赛初赛
《非数学类》试题

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\,\dfrac{x-\ln\left(e^x+x\right)}{x}=$____.

2、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

3、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$________.

4、过三条直线 $L_1:\begin{cases}x=0,\\ y-z=2,\end{cases}$ $L_2:\begin{cases}x=0,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$ 与 $L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y-z=0\end{cases}$ 的圆柱面方程为________.

5、记 $D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\leq\pi\right\}$，则

$$\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_.$$

二、(14 分) 设 $x_1=2021$，$x_n^2-2\left(x_n+1\right)x_{n+1}+2021=0(n\geq 1)$. 证明数列 $\left\{x_n\right\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，证明：方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数.

四、(14 分) 对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$$

计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$.

五、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

六、(14 分) 设 $\left\{a_n\right\}$ 与 $\left\{b_n\right\}$ 均为正实数列，满足：$a_1=b_1=1$ 且 $b_n=a_nb_{n-1}-2$，$n=2,3,\cdots$. 又设 $\left\{b_n\right\}$ 为有界数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，并求该级数的和.