第十三届全国大学生数学竞赛初赛补赛（非数学类）试题

【说明】：这套试卷是因为疫情影响部分赛区延迟比较后的统一竞赛试卷

一、填空题(30 分，每小题 6 分)

1、设 $x_0=1, x_n=\ln\left(1+x_{n-1}\right)(n\geq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n=$________.

2、积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+\tan x}\mathrm{d}x=$________.

3、已知直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z=9\end{cases}$ 和平面 $\pi: 4x-y+z=1$，则直线 L 在平面 π 上的投影直线方程为________.

4、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\arctan\dfrac{2}{4n^2+4n+1}=$________.

5、微分方程 $\begin{cases}(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=2\mathrm{e}^{-y}\\ y(0)=0\end{cases}$ 的解为________.

二、(14 分) 设 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)+\int_{-1}^{1}|x-t|\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，证明：在区间 $(-1,1)$ 内 $f(x)$ 有且仅有两个实根.

三、(14 分) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leq 1\right\}$ 上具有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{\iint_{x^2+y^2\leq r^2}\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan r-\sin r)^2}$.

四、(14 分) 若对于 R^3 中半空间 $\left\{(x,y,z)\in R^3\middle| x>0\right\}$ 内任意有向光滑封闭曲面 S，都有

$$\iint_S xf'(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(xf(x)-f'(x)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-xz\left(\sin x+f'(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶导数连续且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$，求 $f(x)$.

五、(14 分) 设 $f(x)=\int_0^x\left(1-\dfrac{[u]}{u}\right)\mathrm{d}u$，其中 $[x]$ 表示小于等于 x 的最大整数，试讨论 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{f(x)}}{x^p}\cos\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性，其中 $p>0$.

六、(14 分) 设正数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调减少趋于零，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^n x^n$，证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 也发散.