Universidade Federal de Sergipe

Departamento de Matemática – DMA

Listas de Exercícios

Franklin Zillmer

São Cristóvão, SE - Brasil

2024

Sumário

1 Integrais

1.1 Lista de Exercícios nº1

1. Use o TFC1 para encontrar a derivada da função:

   a) $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1}dt$;

   b) $y = \int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{t+\sqrt{t}}dt$.

2. Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\int_1^4 f'(x)dx = 17$, qual é o valor de $f(4)$?

3. Calcule a integral:

   a) $\int_{-1}^2 x^3 - 2xdx$;

   b) $\int_1^2 \frac{3}{t^4}dt$;

   c) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$;

   d) $\int_1^2 (1+2y)^2 dy$;

   e) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}}dt$;

   f) $\int_{-1}^1 e^{u+1}du$;

   g) $\int_{-1}^0 2x - e^x dx$;

   h) $\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)dt$;

   i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$;

   j) $\int_1^{64} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$;

   k) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2-1}{t^4-1}dt$;

   l) $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5dx$;

   m) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

   n) $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}dx$ $(a > 0)$;

o) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx;$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}dz;$

q) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx;$

r) $\displaystyle\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)dx;$

s) $\displaystyle\int_1^2 x^4(\ln x)^2dx;$

t) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}dx;$

u) $\displaystyle\int \cos^2 x \operatorname{tg}^3 x dx;$

v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x dx;$

w) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}dx;$

x) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx;$

y) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}dx.$

1.2 Respostas da Lista de Exercícios nº1

1. a) $\frac{1}{x^3+1}$

   b) $\sqrt{\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg} x}}\sec^2 x$

2. 29

3. a) $\frac{3}{4}$

   b) $\frac{7}{8}$

   c) $\frac{40}{3}$

   d) $\frac{49}{3}$

   e) π

   f) $e^2 - 1$

   g) $-2 + \frac{1}{e}$

   h) $\frac{256}{15}$

   i) $1 + \frac{\pi}{4}$

   j) $\frac{256}{5}$

   k) $\frac{\pi}{6}$

   l) $\frac{182}{9}$

   m) $e - \sqrt{e}$

   n) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)a^3$

   o) 2

   p) $\ln(e+1)$

   q) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

   r) $\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x + C$

   s) $\frac{32}{5}(\ln 2)^2 - \frac{64}{25}\ln 2 + \frac{62}{125}$

   t) $2\sqrt{x}\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C$

   u) $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$

   v) $\frac{117}{8}$

   w) $-\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x} + C$

   x) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right| + \sqrt{1+x^2} + C$

   y) $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C$

2 Frações Parciais, Integrais Impróprias, Áreas entre Curvas, Volumes e Sequencias

2.1 Lista de Exercícios nº2

1. Calcule a integral usando frações parciais:

   a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx;$

   b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}dx;$

   c) $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}dx.$

2. Calcule as integrais impróprias:

   a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(3x+1)^2}dx;$

   b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}dx;$

   c) $\displaystyle\int_0^\infty se^{-5s}ds;$

   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}dx;$

   e) $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}dx;$

3. Determine a área entre as curvas:

   a) $y = e^x, \quad y = x^2 - 1, \quad x = -1, \quad x = 1;$

   b) $y = x, \quad y = x^2;$

   c) $y = \cos(\pi x), \quad y = 4x^2 - 1.$

4. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas:

   a) $x = 2\sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 9$; em torno do eixo y

   b) $y = x^3, \quad y = x, \quad x \geq 0$; em torno do eixo x

   c) $y = 1 + \sec x, \quad y = 3$; em torno do eixo $y = 1$

   d) $y = x^2, \quad x = y^2$; em torno do eixo $x = -1$

5. Determine o termo geral de cada sequencia.

(a) $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\}$;

(b) $\{2, 7, 12, 17, \dots\}$.

6. Determine se as sequencias a seguir convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite.

   (a) $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$;

   (b) $a_n = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2n\pi}{1+8n}\right)$;

   (c) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$;

   (d) $a_n = \dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$;

   (e) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

7. Determine se a sequencia $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$ é crescente, decrescente ou não monótona. A sequencia é limitada?

8. Mostre que a sequencia a_n definida por $a_1 = 1$, $a_n = 3 - \dfrac{1}{a_n}$ é crescente e que $a_n < 3$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e calcule seu limite.

2.2 Respostas da Lista de Exercícios nº2

1. a) $\dfrac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3 - \ln 4)$;

   b) $-\dfrac{1}{36}\ln|x+5| + \dfrac{1}{6(x+5)} + \dfrac{1}{36}\ln|x-1| + C$;

   c) $\dfrac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + 2\text{tg}^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$.

2. a) $\dfrac{1}{12}$;

   b) ∞;

   c) $\dfrac{1}{25}$;

   d) $\dfrac{\pi}{9}$;

   e) ∞;

3. a) $e - \dfrac{1}{e} + \dfrac{4}{3}$;

   b) $\dfrac{1}{6}$;

   c) $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{3}$.

4. a) 162π;

   b) $\dfrac{4}{21}\pi$;

   c) $2\pi\left(\dfrac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$;

   d) $\dfrac{29}{30}\pi$.

5. **(a)** $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$

   (b) $a_n = 5n - 3$

6. **(a)** Converge $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$

   (b) Converge $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

   (c) Converge $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

   (d) Converge $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

   (e) Converge $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^2$

7. Decrescente e limitada, $0 < a_n \leq \dfrac{1}{5}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

3 Séries

3.1 Lista de Exercícios nº3

1. Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$.

2. Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica. Se for convergente, encontre sua soma.

3. Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para esses valores de x.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$.

4. Use o teste da integral para determinar se a série converge ou diverge.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

5. Determine se a série é convergente ou divergente.

   (a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n}$.

6. Determine se a série é convergente ou divergente.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2 + n + 1}$.

7. Teste a série quanto a convergência ou divergência.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+1}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{3n-1}{2n+1}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$.

8. Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\frac{1}{n}}}{n^3}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

9. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$.

10. **(a)** Use a derivação para encontrar a representação em série de potências para $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$;

    (b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$;

    (c) Use o item (b) para achar uma série de potências para $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$.

11. Calcule a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8} dt$ como uma série de potências. Qual é o raio de convergência?

12. Encontre a série de Maclaurin de $f(x)$. Também encontre o raio de convergência associado.

    (a) $f(x) = (1-x)^{-2}$;

    (b) $f(x) = e^{5x}$.

13. Encontre a série de Taylor de $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ centrada em $a = -1$.

3.2 Respostas da Lista de Exercícios nº3

1. **(a)** Converge $\frac{1}{7}$

   (b) Diverge

   (c) Diverge

   (d) Converge $\frac{5}{2}$

   (e) Diverge

2. $s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{2}$

3. **(a)** $-3 < x < 3 \quad \frac{x}{3-x}$;

   (b) $|x| < \frac{1}{4} \quad \frac{1}{1-4x}$.

4. **(a)** Converge

   (b) Converge

5. **(a)** Diverge

   (b) Converge

   (c) Converge

6. **(a)** Diverge

   (b) Converge

   (c) Converge

   (d) Diverge

   (e) Converge

7. **(a)** Converge

   (b) Diverge

   (c) Converge

8. **(a)** Absolutamente Convergente

   (b) Absolutamente Convergente

   (c) Condicionalmente Convergente

   (d) Absolutamente Convergente

   (e) Diverge

9. **(a)** $R = 1 \quad I = [-1, 1)$;

(b) $R = \infty \quad I = (-\infty, \infty)$;

(c) $R = \dfrac{1}{4} \quad I = \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$.

10. **(a)** $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$;

(b) $\dfrac{1}{(1+x)^3} = \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1) x^n$;

(c) $\dfrac{x^2}{(1+x)^3} = \dfrac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n$.

11. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8} dt = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n+2}, \quad R = 1$

12. **(a)** $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \quad R = 1$;

(b) $e^{5x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{5^n}{n!} x^n, \quad R = \infty$.

13. $f(x) = -1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$.