高中统计学 · 第叁课练习

何濯羽

2024 年 2 月 15 日

1 矩的计算

随机变量 X 拥有如下的概率分布列。请问它的数学期望、方差、标准差分别是多少?

X 的取值 x	0	1	2	3
$Pr(X=x)$	0.25	0.35	0.35	0.05

2 随机变量的转换对矩的影响

随机变量 X 代表某商科学院的毕业生在毕业后 3 个月内收获 offer 的数量。X 的概率分布列如下所示。

X 的取值 x	1	2	3	4
$Pr(X=x)$	0.185	0.489	0.185	0.141

1) 请计算 X 的数学期望、方差、标准差。
2) 假设收获越多 offer 的毕业生要求的工资越高。要求的工资数目（Y）和 X 满足如下关系：$Y=6000+2000X^2$。请写出 Y 的概率分布列，然后计算它的数学期望、方差、标准差。

3 数学期望与方差的性质【拓展】

求证：对于离散型随机变量 X，在 $E(|X^2|)<\infty$ 的情况下，以下等式恒成立。

1) $E(a+X)=a+E(X)$;
2) $D(bX)=b^2D(X)$;
3) $D(a+bX)=b^2D(X)$;
4) $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

其中，a 和 b 是常数。

答案

矩的计算

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{3} x \cdot Pr(X=x) = 1.2 \\
D(X) &= \sum_{x=0}^{3} (x-1.2)^2 \cdot Pr(X=x) = 0.76 \\
SD(X) &= \sqrt{D(X)} \approx 0.8718
\end{aligned}
$$

随机变量的转换对矩的影响

(1)

$$
E(X) = 2.282, \quad D(X) = 0.854476, \quad SD(X) \approx 0.924379
$$

(2) Y 的概率分布列为

X 的取值 x	1	2	3	4
Y 的取值 y	62000	68000	78000	92000
$Pr(Y=y)$	0.185	0.489	0.185	0.141

我们有

$$
E(Y) = 72124, \quad D(Y) = 89368624, \quad SD(Y) \approx 9453.498
$$

数学期望与方差的性质

(1)

$$
\begin{aligned}
E(a+X) &= \sum_{x\in\mathcal{X}} (a+x) \cdot Pr(X=x) \\
&= \left[\sum_{x\in\mathcal{X}} a \cdot Pr(X=x)\right] + \left[\sum_{x\in\mathcal{X}} x \cdot Pr(X=x)\right] \\
&= \left[a \sum_{x\in\mathcal{X}} Pr(X=x)\right] + E(X) \\
&= a + E(X)
\end{aligned}
$$

（2） 因为

$$E(bX) = \sum_{x \in \mathcal{X}} bx \cdot Pr(X = x) = b \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot Pr(X = x) = b \cdot E(X) = b\mu_X$$

所以

$$\begin{aligned} D(bX) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} (bx - b\mu_X)^2 \cdot Pr(X = x) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} b^2 (x - \mu_X)^2 \cdot Pr(X = x) \\ &= b^2 \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - \mu_X)^2 \cdot Pr(X = x) \\ &= b^2 D(X) \end{aligned}$$

（3） 根据小题（1）和（2）的发现，我们有

$$E(a + bX) = a + E(bX) = a + b \cdot E(X) = a + b\mu_X$$

于是，

$$\begin{aligned} D(a + bX) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} (a + bx - a - b\mu_X)^2 \cdot Pr(X = x) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} (bx - b\mu_X)^2 \cdot Pr(X = x) \\ &= b^2 D(X) \end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned} D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= E\{X^2 - 2X \cdot E(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - E[2X \cdot E(X)] + E\{[E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$