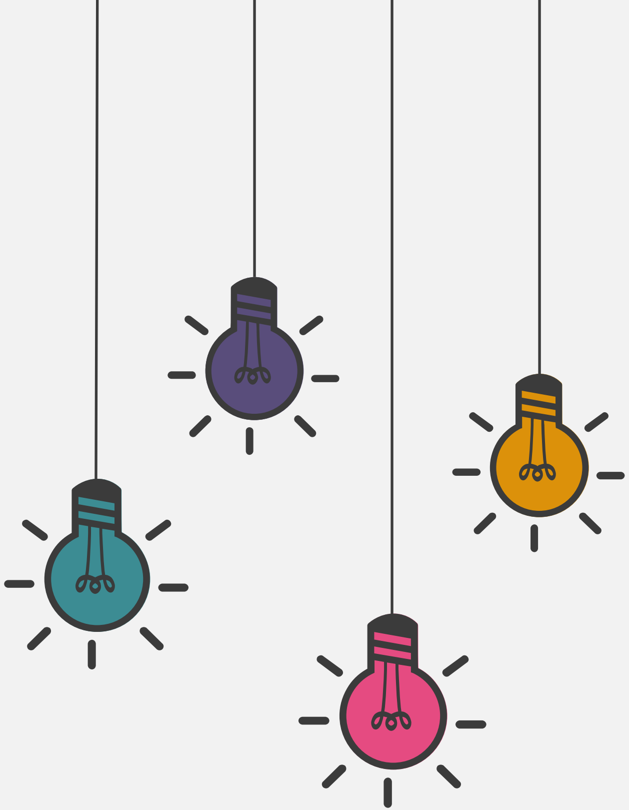


独立性 VS 不相关

Independence versus Zero Correlation

高中统计学 · 第肆课

何濯羽

2024 年 9 月 7 日

目 录

CONTENTS

01 联合分布

Joint Distribution

联合分布的定义

在第贰课和第叁课中，我们只考虑了单个随机变量的概率分布和矩。本节课中，我们将开始研究两个（离散型）随机变量共同的概率分布以及它们之间的特殊关系。

两个变量共同的概率分布被称为“**联合分布**”（joint distribution）。对于两个离散型随机变量，它们所有可能的取值以及相应的概率可以由一张“联合分布列”展示出来。

				Y		
		y_1	y_2	$\cdots$	y_m	总和
	x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
X	x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
	总和	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	

联合分布的CDF与PMF

$F_{X,Y}(x,y) = \Pr(X \le x, Y \le y)$ 被称为“联合累积分布函数”（joint CDF）。

$f_{X,Y}(x,y) = \Pr(X = x, Y = y)$ 被称为“联合概率质量函数”（joint PMF）。

例：

X \ Y	0	2	4	6	总和
0	0.1	0.05	0.08	0.02	0.25
1	0.15	0.1	0.05	0.05	0.35
2	0.13	0.1	0	0.07	0.3
3	0.02	0.05	0.02	0.01	0.1
总和	0.4	0.3	0.15	0.15	**1**

X 的边际分布

Y 的边际分布

符合概率公理的要求

$$
\begin{aligned}
F_{X,Y}(2,2) &= \Pr(X \le 2, Y \le 2) \\
&= \Pr(X=0,Y=0) + \Pr(X=0,Y=2) \\
&\quad + \Pr(X=1,Y=0) + \Pr(X=1,Y=2) \\
&\quad + \Pr(X=2,Y=0) + \Pr(X=2,Y=2) \\
&= 0.1 + 0.05 + 0.15 + 0.1 + 0.13 + 0.1 \\
&= 0.65
\end{aligned}
$$

02 统计独立性

Statistical Independence

定义统计独立性

如果事件 A 和 事件 B 满足

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

那么我们称 A 和 B 为**独立事件**（independent events）。

如果离散型随机变量 X 和 Y 满足

$$\Pr(X = x, Y = y) = \Pr(X = x) \cdot \Pr(Y = y)\text{，即 } f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

或

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

那么我们称 X 和 Y 相互**统计独立**（statistically independent），或相互**随机独立**（stochastically independent），简称“相互独立”。

例：独立性的应用

已知随机变量 X 和 Y 相互独立，你能根据它们的边际分布填满整张联合分布列吗?

		Y			
		0	1	2	总和
X	0	0.08	0.12	0.2	0.4
	1	0.02	0.03	0.05	0.1
	2	0.1	0.15	0.25	0.5
	总和	0.2	0.3	0.5	

原理： 独立 $\Longrightarrow \Pr(X = x, Y = y) = \Pr(X = x) \cdot \Pr(Y = y)$

强大的独立性

如果事件 A 和 B **相互独立**，那么 $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ 且 $\Pr(B|A) = \Pr(B)$。

如果随机变量 X 和 Y **相互独立**，那么 $\Pr(X = x|Y = y) = \Pr(X = x)$ 且 $\Pr(Y = y|X = x) = \Pr(Y = y)$，$\forall x, y$。

如果随机变量 X 和 Y **相互独立**且 $g(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 是两个函数，那么 $g(X)$ 和 $h(Y)$ 也相互独立。

如果随机变量 X 和 Y **相互独立**且存在两个函数 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，那么

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

且

$$E[g(X) \cdot h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

注意：一般情况下，$E(XY) \neq E(X) \cdot E(Y)$。

独立 VS 互斥

事件 A 和 B **相互独立** $\Leftrightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$

事件 A 和 B **互斥** $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

从数学定义上看，“独立”和“互斥”是两个完全不同的概念。

如果 $\Pr(A) > 0$ 且 $\Pr(B) > 0$，那么

- 事件 A 和 B 相互独立 $\Rightarrow$事件 A 和 B 不互斥
- 事件 A 和 B 互斥 $\Rightarrow$ 事件 A 和 B 不相互独立

独立 VS 互斥

证明:

- 当 A 和 B 相互独立时，则必有 $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$。【反证法】假设 A 和 B 互斥，则 $A \cap B = \emptyset$，这意味着 $\Pr(A \cap B) = \Pr(\emptyset) = 0$。这与 $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) > 0$ 相悖，因此，假设错误，即 A 和 B 不互斥。
- 当 A 和 B 互斥时，则必有 $A \cap B = \emptyset$。因为 $\Pr(A \cap B) = \Pr(\emptyset) = 0$ 和 $\Pr(A) \cdot \Pr(B) > 0$，所以 $\Pr(A \cap B) \neq \Pr(A) \cdot \Pr(B)$，即 A 和 B 不相互独立。

03 条件期望 & 均值独立

Conditional Expectation & Mean Independence

注：这一节的内容不属于浙江数学高考范围，也不在人教版数学教材中，但是我认为这些知识点是不可忽略的。这方面知识的缺失，不利于之后线性回归模型的教学。

实际上，这一节的内容是统计学中大多数线性/非线性回归模型的基石。

条件分布（Conditional Distribution）

请回忆一下我们在第壹课中学习的**条件概率定义式**：

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

相似地，我们可以定义条件概率质量函数（conditional PMF）和条件累积分布函数（conditional CDF）：

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\Pr(X = x, Y = y)}{\Pr(X = x)} \text{ 和 } F_{Y|X}(y|x) = \frac{\Pr(Y \leq y, X = x)}{\Pr(X = x)}$$

其中，X 和 Y 均为离散型随机变量。

条件期望的定义

假设随机变量 Y 在给定 $X=x$ 时的条件 PMF 为 $f_{Y|X}(y|x)$。Y 在给定 $X=x$ 时的**条件期望**（conditional expectation）是

$$E(Y|X=x)=\sum_{y\in\mathcal{Y}} y\cdot f_{Y|X}(y|x)=\sum_{y\in\mathcal{Y}} y\cdot \Pr(Y=y|X=x)=\sum_{y\in\mathcal{Y}} y\cdot\frac{\Pr(Y=y,X=x)}{\Pr(X=x)}$$

重点：数学期望 $E(Y)$ 是一个定值，而条件期望 $E(Y|X=x)$ 是一个以 x 为自变量的函数！

例：条件期望的计算

已知随机变量 X 和 Y 拥有如下的联合分布列，请计算 $E(X|Y=2)$ 。

$Y \backslash X$	1	2	3	总和
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
4	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
总和	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

先计算条件概率：

$$\Pr(X=1|Y=2)=\frac{\Pr(X=1,Y=2)}{\Pr(Y=2)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

$$\Pr(X=2|Y=2)=\frac{\Pr(X=2,Y=2)}{\Pr(Y=2)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\Pr(X=3|Y=2)=\frac{\Pr(X=3,Y=2)}{\Pr(Y=2)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

再计算条件期望：

$$E(X|Y=2)=\sum_{x=1}^{3}x\cdot\Pr(X=x|Y=2)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$$

例：条件期望的计算

已知随机变量 X 和 Y 拥有如下的联合分布列，请计算 $E(X|Y=2)$ 。

		X=1	X=2	X=3	总和
Y	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
	3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	4	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
总和		$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

相似地，我们可以算出所有的 $E(X|Y)$：

$$E(X|Y=2)=2,\qquad E(X|Y=3)=\frac{5}{3},\qquad E(X|Y=4)=2$$

通过这个例题，我们可以清楚地看见条件期望 $E(X|Y)$ 是一个以随机变量 Y 为自变量的函数，记为 $m(Y)$。当 Y 的取值 y 给定时，$m(Y)$ 会返回一个定值 $m(y)$。

在此例中，

$$m(y)=E(X|Y=y)=\begin{cases}2\ (y=2)\\ \frac{5}{3}\ (y=3)\\ 2\ (y=4)\end{cases}$$

期望迭代法则

如果 $E(|Y|) < \infty$，那么对于任意随机变量 X，以下等式恒成立：

$$\boldsymbol{E[E(Y|X)] = E(Y)}$$

这个法则在许多统计学的证明中大放异彩。

证明： $$E(Y|X) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \cdot \Pr(Y = y|X)$$

$$E[E(Y|X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \left[\sum_{y \in \mathcal{Y}} y \cdot \Pr(Y = y|X = x) \right] \cdot \Pr(X = x) \right\}$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} \left[\sum_{y \in \mathcal{Y}} y \cdot \Pr(Y = y|X = x) \cdot \Pr(X = x) \right]$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} \left[\sum_{y \in \mathcal{Y}} y \cdot \Pr(Y = y, X = x) \right]$$

$$= \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \cdot \Pr(Y = y) = E(Y)$$

均值独立

当且仅当 $E(Y|X=x)=E(Y)\ \forall x$，我们称随机变量 Y 均值独立（mean independent）于随机变量 X。

当 Y 与 X 相互统计独立时，Y **必定**也均值独立于随机变量 X。

证： $E(Y|X=x)=\sum_{y\in\mathcal{Y}} y\cdot\Pr(Y=y|X=x)=\sum_{y\in\mathcal{Y}} y\cdot\Pr(Y=y)=E(Y)$

"统计独立"保证了该等号的成立。

均值独立

当 Y 均值独立于随机变量 X 时，Y 与 X **不一定**相互统计独立。

例：

		X			
		-1	0	1	总和
Y	-1	0.15	0	0.15	0.3
	0	0	0.4	0	0.4
	1	0.15	0	0.15	0.3
	总和	0.3	0.4	0.3	

计算可得

$$E(Y|X) = E(Y) = 0$$

但是，

$$\exists x, y, \Pr(X = x, Y = y) \neq \Pr(X = x) \cdot \Pr(Y = y)$$

因此，Y 均值独立于 X，但 Y 与 X 不相互统计独立。

均值独立

均值独立**不具有对称性**：X 均值独立于 $Y \nLeftrightarrow Y$ 均值独立于 X。

例:

Y \ X	-1	0	1	总和
-1	0.15	0	0.1	0.25
0	0	0.5	0	0.5
1	0.15	0	0.1	0.25
总和	0.3	0.5	0.2	

计算可得

$$E(Y|X) = E(Y) = 0$$

但是，

$$E(X|Y=y) = \begin{cases} -0.2\ (y=-1) \\ 0\ (y=0) \\ -0.2\ (y=1) \end{cases} \neq E(X)$$

因此，Y 均值独立于 X，但 X 并不均值独立于 Y。

04 线性不相关

Uncorrelatedness

协方差的定义与作用

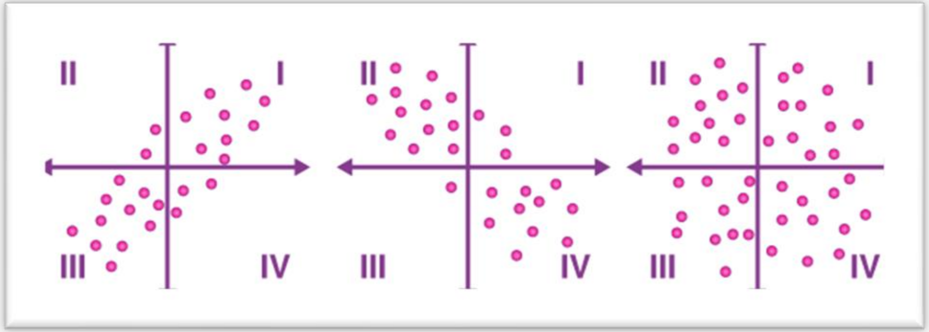
随机变量 X 与 Y 的**协方差**（covariance）是

$$\sigma_{X,Y} = Cov(X,Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

我们可以把 $Cov(X,Y)$ 理解为 X 与 Y 所服从的**联合分布的二阶中心矩。**

协方差可以衡量两个随机变量的线性相关程度（linear relatedness）：

- $Cov(X,Y) > 0$ 意味着 X 与 Y 线性**正相关**。
- $Cov(X,Y) < 0$ 意味着 X 与 Y 线性**负相关**。
- $Cov(X,Y) = 0$ 意味着 X 与 Y 线性**不相关**。



协方差的性质

协方差 $Cov(X,Y)$ 具有以下性质:

- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(X,a) = 0$
- $Cov(aX \pm bY, cZ) = ac \cdot Cov(X,Z) \pm bc \cdot Cov(Y,Z)$
- $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X,Y)$

练习：证明这些性质的成立。

其中，大写字母代表随机变量，小写字母代表常数。

协方差的缺陷

协方差的范围是 $(-\infty, +\infty)$。可是，协方差具有与方差相同的问题：因为随机变量的单位变化势必导致协方差的大小变化，所以协方差的数值大小并不能有效反映线性相关程度的大小。

为了化解单位变量带来的影响，我们创造了“标准差”以对应方差。相似地，我们也可以创造新的统计工具以对应协方差——“相关系数”！

相关系数的定义

随机变量 X 与 Y 的**相关系数**（correlation coefficient）是

$$\rho_{X,Y} = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

我们可以把 $Corr(X,Y)$ 理解为向量 $\bar{\mathbf{X}}$ 与 $\bar{\mathbf{Y}}$ （中心化随机变量）夹角 θ 的余弦值。

$$Corr(X,Y) = \frac{\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}}(x-\mu_X)\cdot(y-\mu_Y)\cdot\Pr(X=x,Y=y)}{\sqrt{\sum_{x\in\mathcal{X}}(x-\mu_X)^2\cdot\Pr(X=x)}\cdot\sqrt{\sum_{y\in\mathcal{Y}}(y-\mu_Y)^2\cdot\Pr(Y=y)}}$$

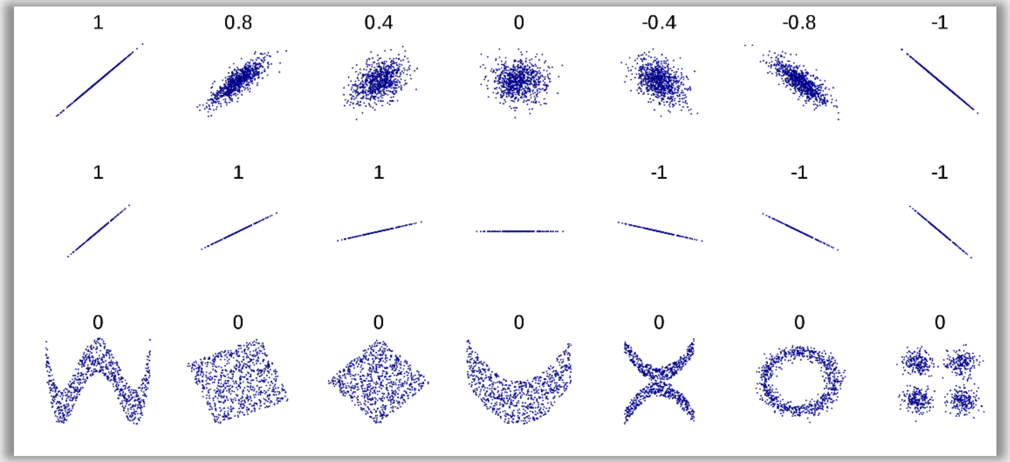
$$\cos\theta = \frac{\bar{\mathbf{X}}\cdot\bar{\mathbf{Y}}}{\|\bar{\mathbf{X}}\|\cdot\|\bar{\mathbf{Y}}\|} = \frac{(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X})\cdot(\mathbf{Y}-\boldsymbol{\mu}_\mathbf{Y})}{\|\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}\|\cdot\|\mathbf{Y}-\boldsymbol{\mu}_\mathbf{Y}\|}$$

相关系数的含义

该结论的证明需要使用柯西-施瓦茨不等式，在此不做展示。

相关系数 $Corr(X,Y)$ 的范围是 $[-1,1]$，其含义为

- $Corr(X,Y)=1$ 意味着 X 与 Y **完美**线性**正相关**。
- $Corr(X,Y)\in(0,1)$ 意味着 X 与 Y 线性**正相关**。
- $Corr(X,Y)=0$ 意味着 X 与 Y 线性**不相关**。
- $Corr(X,Y)\in(-1,0)$ 意味着 X 与 Y 线性**负相关**。
- $Cov(X,Y)=-1$ 意味着 X 与 Y **完美**线性**负相关**。



线性不相关

如果 $Cov(X,Y)=0$ 或 $Corr(X,Y)=0$，那么我们称随机变量 X 与 Y **线性独立**（linear independent）或**线性不相关**（uncorrelated）。

当 Y 均值独立于 X 时， Y **必定**与 X 线性不相关。

证： $Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}\overset{①}{=}E(E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]|X\})=E\{[X-E(X)]\cdot E[Y-E(Y)|X]\}$

因为 $E[Y-E(Y)|X]=E(Y|X)-E[E(Y)|X]\overset{②}{=}E(Y|X)-E(Y)=E(Y)-E(Y)=0$,

所以 $Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)]\cdot E[Y-E(Y)|X]\}=E\{[X-E(X)]\cdot 0\}=0$。

① 期望迭代法则
② 均值独立

线性不相关

当 Y 与 X 线性不相关时，Y **不一定**均值独立于 X。

例：

		X			
		-1	0	1	总和
Y	0	0.1	0.4	0.1	0.6
	1	0.2	0	0.2	0.4
	总和	0.3	0.4	0.3	

计算可得

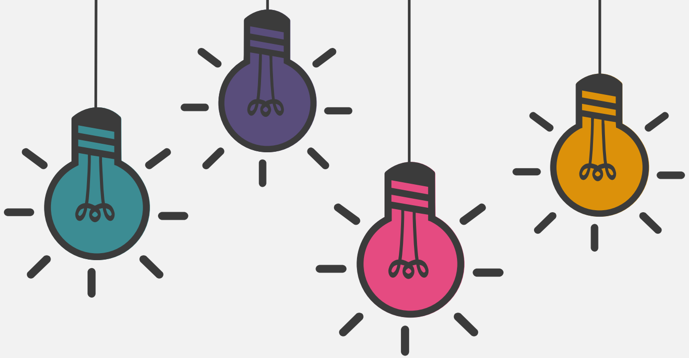
$$E(X) = 0, \qquad E(Y) = 0.4$$

$$Cov(X,Y) = E[(X-0)(Y-0.4)] = 0$$

但是，

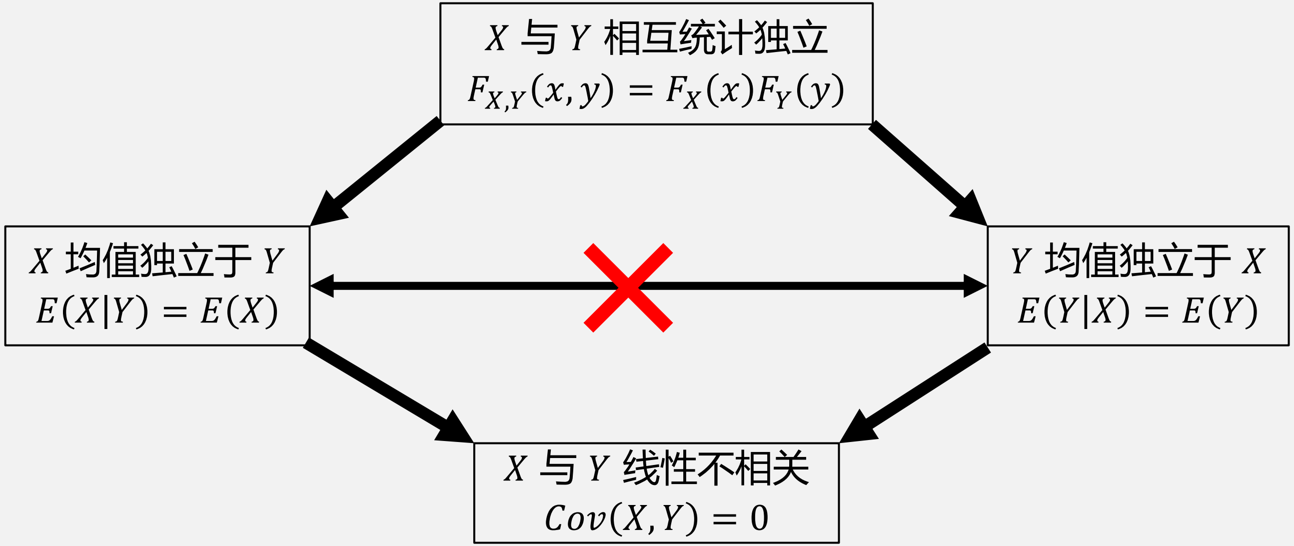
$$E(Y|X=x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\ (x=-1) \\ 0\ (x=0) \\ \frac{2}{3}\ (x=1) \end{cases} \neq E(Y)$$

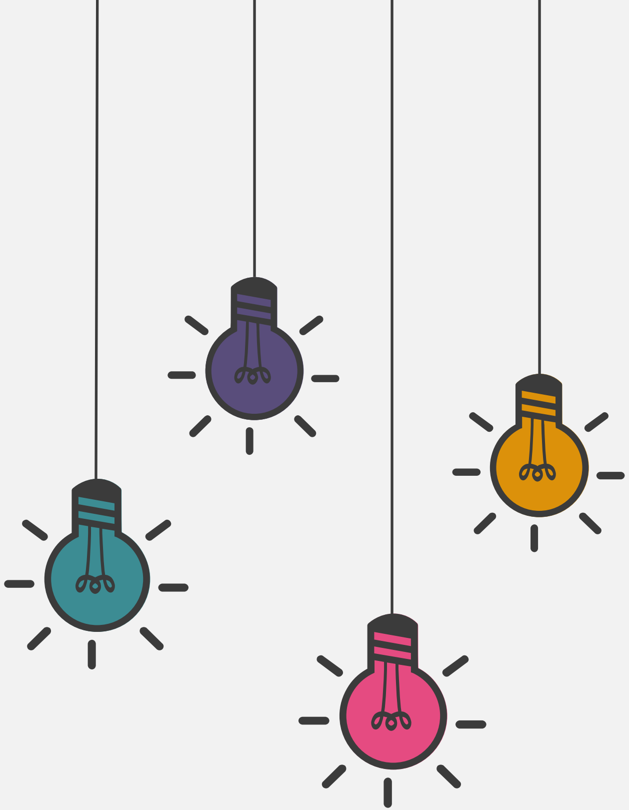
因此，Y 与 X 线性不相关，但 Y 并不均值独立于 X。



总结

统计独立（简称“独立”）是一个非常强劲的变量关系，强于均值独立，强于线性不相关。许多统计学的定理都建立在“独立”假设上。可是在实际研究中，独立是难以严格证明的。许多研究者退而求其次，只证明均值独立，用以说明独立“可能”成立。





感谢您的聆听！

Thanks for your listening!

高中统计学 • 第肆课

何濯羽

2024 年 2 月 15 日