高中统计学·第陆课练习

何濯羽

2024 年 2 月 22 日

1 相关系数的估计量

我们知道随机变量 X 与 Y 的相关系数是

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

请根据样本类似原则（sample analogue principle），构造一个相关系数的估计量。

2 估计量的无偏性

在某个研究中，被估量是 $\mu_k = E(X^k)$，其中 X 是随机变量，k 是任一正整数。甲同学根据样本类似原则构造了一个估计量：

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

请问：在独立同分布的假设下，这个估计量是 μ_k 的无偏估计量吗？

3 参数估计【拓展】

假设随机变量 X 服从一个以 a 为唯一参数的概率分布 W，即

$$X \sim W(a)$$

已知 X 的数学期望为 $E(X) = \frac{a+1}{2}$。请根据样本类似原则，构造一个 a 的估计量，并检查其是否具有无偏性（在独立同分布的假设下）。

答案

相关系数的估计量

$$\hat{\rho}_{XY}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}}$$

估计量的无偏性

因为

$$\begin{aligned}E(\hat{\mu}_k)&=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)\\&=\frac{1}{n}\cdot n\cdot E(X_i^k)\\&=E(X_i^k)\\&=\mu_k\end{aligned}$$

所以 $\hat{\mu}_k$ 是 μ_k 的无偏估计量。

参数估计

因为 $E(X)=\frac{a+1}{2}$，所以

$$a=2E(X)-1$$

根据样本类似原则，我们可以构造如下的估计量：

$$\hat{a}=2\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-1=2\overline{X}-1$$

因为

$$E\left(\hat{a}\right)=E\left(2\overline{X}-1\right)=2E\left(\overline{X}\right)-1=2E(X)-1=2\cdot\frac{a+1}{2}-1=a$$

所以 $\hat{a}$ 是 a 的无偏估计量。