Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančna matematika – 1. stopnja

Urška Komatar, Ian Lampič

Intransitive dice

Projekt pri predmetu Finančni praktikum

Ljubljana, 2023

Kazalo

1. Predstavitev osnovnega problema

1.1. **Problem.** Naj bo $p > \frac{1}{2}$ konstanta, A, B in C pa 6 - strane kocke z različnimi števili na svojih straneh, tako da kocka A premaga B z verjetnostjo vsaj p, B premaga C z verjetnostjo vsaj p in C premaga A z verjetnostjo vsaj p. Želimo poiskati maksimalni p tako, da bo obstajala trojica kock, za katere bo veljala dana lastnost. Kasneje si bova ogledala še primere s štirimi kockami, trostranimi kockami, štiristranimi kockami in kockami s petimi stranmi.

1.2. **Ideja reševanja.** Najprej bova sestavila pomožno funkcijo, ki bo za argumente prejela seznam treh seznamov. V vsakem seznamu bo 6 naravnih števil, ki bodo predstavljale števila na kocki. Če so A, B in C slučajne spremenljivke, ki povedo, koliko pokaže posamezna kocka, bo torej funkcija vračala $min(P(A > B), P(B > C), P(C > A))$. Nato bi naredila krovno funkcijo, ki bi sprejela naravno število n. Znotraj te funkcije bi generirala seznam seznamov z elementi prvih n naravnih števil in na vsakem takem seznamu poklicala pomožno funkcijo. Medtem bi beležila dobljene verjetnosti in na koncu vrnila maksimum teh vrednosti. Za vsa nadaljna vprašanja bova funkcijo prilagodila danim zahtevam in ponovila postopek.

1.3. **Primeri netranzitivnih kock.**

1.3.1. *Primer.*

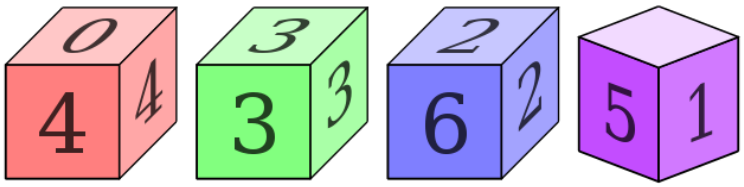
- A: 2, 2, 6, 6, 7, 7
- B: 1, 1, 5, 5, 9, 9
- C: 3, 3, 4, 4, 8, 8

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > A) = \frac{5}{9}$$

Primer, ko je $p = \frac{5}{9}$

1.3.2. *Efronove kocke.* Efronove kocke so set štirih netranzitivnih kock A, B, C in D z naslednjimi številkami na stranicah:

- A: 4, 4, 4, 4, 0, 0
- B: 3, 3, 3, 3, 3, 3
- C: 6, 6, 2, 2, 2, 2
- D: 5, 5, 5, 1, 1, 1



Vsaka kocka je premagana s prejšnjo z verjetnostjo $\frac{2}{3}$:

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > D) = P(D > A) = \frac{2}{3}$$

B ima na vseh straneh enako število (B je konstantna). A ima 4 od 6 števil višja od B, torej verjetnost da A premaga B je $\frac{2}{3}$, medtem ko C pa ima 4 od 6 števil manjša od B, torej B premaga C z verjetnostjo $\frac{2}{3}$.
$P(C > D)$ izračunamo s seštevanjem pogojnih verjetnosti:

- C pokaže 6 ($P = \frac{1}{3}$); premaga D z verjetnostjo 1

- C pokaže 2 ($P = \frac{2}{3}$); premaga D le, če D pokaže 1 ($P = \frac{1}{2}$)

Torej verjetnost da C premaga D je naslednja:

$$(\frac{1}{3} \cdot 1) + (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$$

S podobnim izračunom dobimo še verjetnost, da D premaga A.

2. Reševanje osnovnega problema

2.1. **Primerjava kock.** V prvem koraku sva naredila funkcijo, ki sprejme dva seznama, ju uredi po naraščajočem vrstnem redu ter šteje, koliko števil prvega seznama je večjih od števil iz drugega seznama. Seznama predstavljata dve kocki, števila v njih pa so števila na stranicah kock.

```
def comparison(sez1, sez2):
count = 0
p = []
sez1.sort()
sez2.sort()
for i in range(len(sez1)):
    for j in range(len(sez2)):
        if sez1[i] > sez2[j]:
            count += 1
    p.append(count)
    count = 0
return p
```

2.2. **Intranzitivnost.** V naslednjem delu sva naredila funkcijo, ki sprejme seznam seznamov, kar predstavlja dane kocke. Nato paroma na kockah pokliče funkcijo *comparison* in v prej definiran prazen seznam shranjuje vsote seznamov, ki jih vrne funkcija *comparison*. V zadnjem koraku poišče minimum danih vrednosti novega seznama, kar predstavlja najmanjšo verjetnost, da med danimi kockami ne velja tranzitivnost in poleg tega vrne še kocke, na katerih se je izvedla funkcija.

```
def intransitive(dice):
numb_of_dice = len(dice)
lst_of_probs = []
for i in range(numb_of_dice - 1):
    comparison(dice[i], dice[i+1])
    lst_of_probs.append((sorted(dice[i]),
    sorted(dice[i + 1]), sum(comparison(dice[i], dice[i+1]))))
lst_of_probs.append((sorted(dice[numb_of_dice-1]),
sorted(dice[0]),
sum(comparison(dice[numb_of_dice-1], dice[0]))))
prob = 100 #določena zgornja meja za minimum, ki ne bo presežena
for i in range(len(lst_of_probs)):
    prob = min(prob, lst_of_probs[i][2])
return prob, dice
```

2.3. **Generator kocke.** Naslednja funkcija naredi seznam različnih naravnih števil, ki jih bo izbrala slučajno na intervalu $[1, m]$. Število elementov seznama pa predstavlja število stranic kocke, zato funkcija še sprejme argument *sides*, ki predstavlja ravno to. Torej funkcija vrne seznam, ki bo predstavljal naključno kocko s *sides* stranicami.

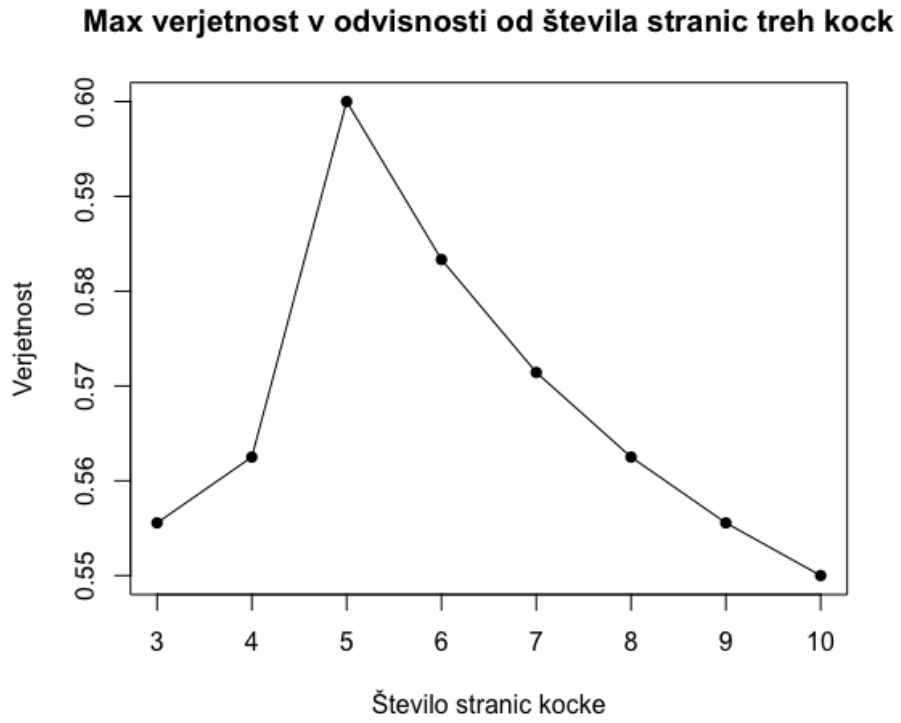
```
def generator_list(m, sides):
st = set()
while len(st) < sides:
    random_num = random.randint(1, m)
    st.add(random_num)
return list(st)
```

2.4. **Krovna funkcija.** Krovna funkcija m-krat naredi naključni seznam z *num_of_dice* kockami in na njih pokliče funkcijo *intransitive*. Generator, ki naredi slučajne sezname ima za zgornjo mejo intervala, na katerem izbira naravna števila vrednost n in število elementov, torej stranic kock, enako argumentu *sides*. Vsako ponovitev shrani v prej definiran prazen seznam. Na koncu vrne maksimum verjetnosti v prej definiranem seznam in pa kocke, ki jim pripade dana verjetnost.

```
def krovna(n, m, sides, num_of_dice):
lst = []
while len(lst) < m:
    dice = []
    for i in range(num_of_dice):
        dice.append(generator_list(n, sides))
    lst.append(intransitive(dice))
max_prob = 0
for i in range(len(lst)):
    if max_prob < lst[i][0]:
        max_prob = lst[i][0]
        lst_with_max = lst[i][1]
return max_prob, lst_with_max
```

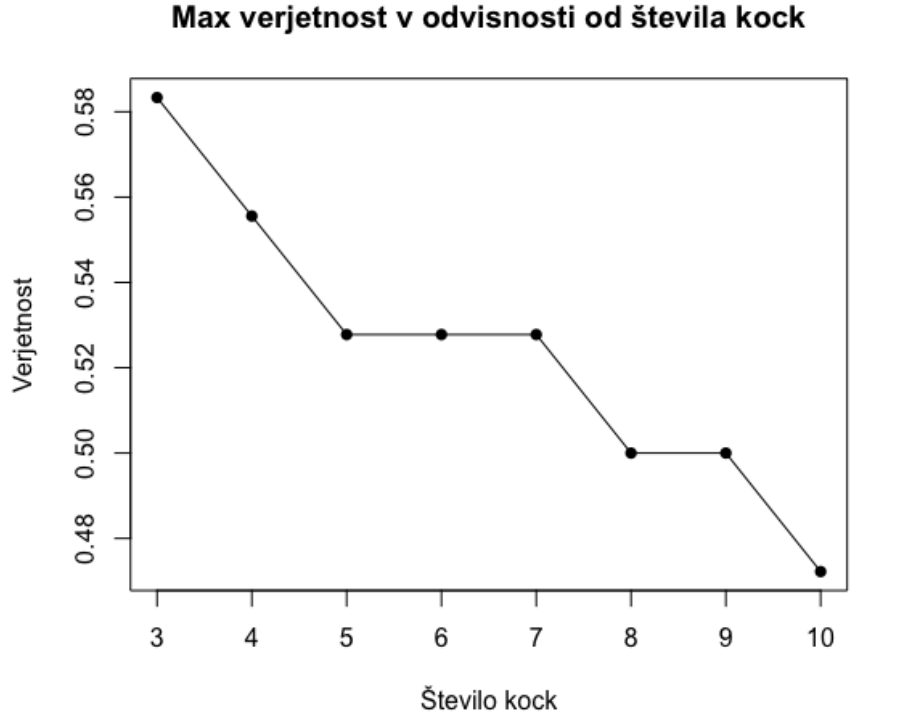
3. Rezultati

3.1. **Rezultati v odvisnosti od k-stranosti.**



Graf predstavlja spreminjanje verjetnosti v odvisnosti od števila stranic. V vseh primerih smo poskus ponovili s tremi kockami. Opazimo, da je maksimum funkcije pri primeru, ko imamo 5-strane kocke. V nobenem primeru ne presežemo verjetnosti 0.6, kar je tudi zgornja meja za dani problem.

3.2. **Rezultati v odvisnosti od števila kock.**



V zgornjem grafu je prikazano, kako število kock vpliva na verjetnost, da za dane kocke ne velja tranzitivnost. V poskusu sva uporabila 3-strane kocke. Ugotovila sva, da verjetnost s povečanjem števila kock počasi pada.

3.3. **Opomba rezultatom.** Za vsak komplet kock sva eksperiment ponovila 2,5 milijonkrat, torej lahko sklepamo zaradi velikega števila ponovitev, da so rešitve zelo blizu pravim, vseeno pa lahko pričakujemo pri kakšnem primeru manjše odstopanje zaradi omejenosti števila ponovitev. Za večjo zanesljivost sva rezultata za primer s tremi in štirimi 6-stranimi kockami preverila tudi pri drugih virih in ugotovila, da se ujemajo z najinimi rešitvami.