Tarea sobre definiciones y demostraciones

Gerardo Galván Olvera A01371872

15 de agosto de 2017

1 Definiciones

- Cardinalidad
  La cardinalidad de un **conjunto** es una medida del *número de elementos* en él. Se calcula haciendo una comparción con otro conjunto o utilizando los *números cardinales* dependiendo de la naturaleza del conjunto. Por ejemplo la cardinalidad del conjunto A $A = \{1, 0, -1\}$ es $|A| = 3$

- Función
  Una función es una relación entre dos conjuntos (un conjunto de entradas llamado *dominio* y uno de salidas llamado *codominio* o *rango*), con la propiedad de que a cada elemento del conjunto de entradas le corresponde exactamente un elemento del conjunto de salidas.

- Inyectiva
  La propiedad (de una función) que consiste en corresponder a cada elemento del dominio solo un elemento del contradominio.

- Suryectiva
  La propiedad (de una función) que consiste en que a cada elemento del contradominio le corresponda uno o más elementos del dominio.

- Biyectiva
  Se llama biyectiva a una función que es inyectiva y suryectiva.

2 Demostraciones

- Siendo p la siguiente proposición: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales) el dominio para ésta y $\mathcal{S}$ el conjunto de valores de $\mathbb{N}$ que hacen a p verdadera:

1. Prueba con elemento ínfimo de $\mathbb{N}$:

$$1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

2. Se hipotetiza que para $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

   es decir, $k \in \mathcal{S}$

3. Prueba $k \in \mathcal{S} \Rightarrow k+1 \in \mathcal{S}$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = (\sum_{i=1}^{k} i^2) + (k+1)^2$$

$$\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

- Siendo p la siguiente proposición: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales) el dominio para ésta y $\mathcal{S}$ el conjunto de valores de $\mathbb{N}$ que hacen a p verdadera:

1. Prueba con elemento ínfimo de $\mathbb{N}$:

$$1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1(2)^2}{4} = 1$$

2. Se hipotetiza que para $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

   es decir, $k \in \mathcal{S}$

3. Prueba $k \in \mathcal{S} \Rightarrow k+1 \in \mathcal{S}$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = (\sum_{i=1}^{k} i^3) + (k+1)^3$$
$$\frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$
$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{k^2(k+1)^2 + 6(k+1)^3}{4}$$
$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

- Siendo p la siguiente proposición: $n! \geq 2^{n-1}$, $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales) el dominio para ésta y $\mathcal{S}$ el conjunto de valores de $\mathbb{N}$ que hacen a p verdadera:

1. Prueba con elemento ínfimo de $\mathbb{N}$:

$$1! \geq 2^{1-1}$$
$$1 \geq 1$$

2. Se hipotetiza que para $k \in \mathbb{N}$:

$$k! \geq 2^{k-1}$$

es decir, $k \in \mathcal{S}$

3. Prueba $k \in \mathcal{S} \Rightarrow k+1 \in \mathcal{S}$:

$$(k!)(k+1) \geq 2^{k-1}(k+1)$$

Siendo 1 el elemento ínfimo de $\mathbb{N}$, entonces $(k+1) \geq 2$:

$$(k!)(k+1) \geq 2^{k-1}(k+1) \geq 2^k$$

$$(k+1)! \geq 2^k$$

References

Graham, R. L. (1994). Concrete mathematics: a foundation for computer science. Pearson Education India.