Analysis II Cheatsheet

Luna Lorea Zehnder

25. Oktober 2024

1 Basics

1.1 Vector Basics

Def. 0.0 ***Skalarprodukt:***

1.2 Notation

Def. 0.1 ***Landau Notation:***
$U \in \mathbb{R}^n, h : U \to \mathbb{R}, y \in U$
$* \; o(h) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \lim_{\substack{x \to y \\ x \neq y}} \frac{f(x)}{h(x)} = 0\}$
$* \; f = o(h) := f \in o(h)$
$* \; o(f) = o(h) := o(f) \in o(h)$
$* \; f = o(1) \iff \lim_{x \to y} f(x) = 0$
$* \; \lambda o(h) + \mu o(h) = o(h) \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$* \; g \cdot o(h) = o(gh) = o(g) \cdot o(h)$
$* \; o(h^d) = o(h^e) \; \forall e \leq d$ $*$ Für Monome p in $x_i - y_i$ von Grad d: $p = o(||x-y||^e) \; \forall e \leq d$ & $o(p) = o(||x-y||^d)$

2 Differenzielle Analysis in $\mathbb{R}^n$

2.1 Parzielle Ableitungen

Def. 3.3.11 ***Gradient und Divergent:***
Gradient: Wenn für die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen existieren für $x_0 \in U$, dann ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

Divergent Wenn für eine Funktion $f = \{f_1, ..., f_m\} : U \to \mathbb{R}^m$ alle partiellen ableitungen für alle f_i bei $x_0 \in U$ existieren, ist der Divergent die Trace der Jakobimatrix

$$div(f)(x_0) = Tr(J_f(x_0))$$

2.2 Das Differential

Def. 3.4.2 ***Differenzierbarkeit:***
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine Funktion und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung ist, dann ist f bei $x_0 \in U$ differenzierbar mit Differenzial A, falls:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

Prop. 3.4.4 ***Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen:***
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine differenzierbare Funktion dann gilt:

1. Die Funktion f ist stetig auf U
2. Für die Funktion $f = [f_1, ..., f_m]$ existieren alle $\partial_{x_j} f_i$ mit $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$

Prop. 3.4.6 ***Differenzierbarkeit bei Funktionsoperationen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar:

1. $f + g$ ist differenzierbar und $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. Falls $m = 1 : f \cdot g$ differenzierbar.
3. Falls $m = 1, g \neq 0 : \frac{f}{g}$ differenzierbar.

Prop. 3.4.7 ***Differenzial von elementaren Funktionen:***
Prop. 3.4.9 ***Kettenregel:***
$U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar.
Funktionen: Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.
Jakobi Matrizen: $J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$.
Gradienten: $\Delta_{g \circ f} = Jg \circ f^T, \Delta_g = J_g^T$ also $\Delta_{g \circ f}(x_0) = J_f(x_0)^T \cdot \Delta_g(f(x_0))$.
Def. 3.4.11 ***Der Tangentialraum:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x_0 \in U$, $A = df(x_0)$. Der Tangentialraum bei x_0 des Graphen von f ist der Graph von $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$, also $T = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
Def. 3.4.13 ***Richtungsableitung:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x_0 \in U$. Die Richtungsableitung von f bei x_o in richtung v ist

$$D_v f(x_o) := J_g(0) = \begin{pmatrix} g'(0)_1 \\ \vdots \\ g'(0)_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

für die Hilfsfunktion $g : \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in U\} \to \mathbb{R}^m$ $g(t) = f(x_0 + tv)$
Prop. 3.4.15 ***Richtungsableitung von differenzierbaren Funktionen Berechnen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, x_0 \in U$.
$\implies D_v f(x_0) = df(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$ was auch bedeutet, dass die Richtungsableitung linear vom Richtungsvektor abhängen.
$\implies D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0)$
Ex. 3.4.17 ***Richtungsableitung von allgemeinen stetigen Funktionen berechnen.:***
$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ Sollte die daraus resultierende Funktion nicht linear von v abhängig sein, so ist f nicht differenzierbar.

2.3 Höhere Ableitungen

Def. 3.5.1 ***C Notation:***
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
$C^0(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig}\}$
$C^k(U, \mathbb{R}^m) :=$
$\{f : U \to \mathbb{R}^m \mid \forall i, j : \partial_j f_i \in C^{k-1}\}$
$\{f : U \to \mathbb{R}^m \mid \text{alle } \partial_{j_i} ... \partial j_k f_i \in C^0(U, \mathbb{R}^m)\}$
$=$ k-mal stetig differenzierbar
$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \bigcup_{k=0}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R}^m)$
$=$ Beliebig oft differenzierbar bzw. glatt.
Ex. 3.5.2 ***Nützliche C Regeln:***
$*$ **Polynome** mit n Variablen sind in $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
$* \; f \in C^k \iff f_1, ..., f_m \in C^k$
$* \; C^k$ ist ein **Vektorraum**
$*$ Für $k \neq 0$ ist $\partial_j : C^k(U, \mathbb{R}) \to C^{k-1}(U, \mathbb{R})$
$* \; C^k(U, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen unter **Produkten** und **Summen**. (sofern diese Definiert sind). $*$ Eine **Verknüpfung** von C^k Funktionen ist wieder C^k.
Prop. 3.5.4 ***Satz von Schwarz:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. Im Allgemeinen wenn $f \in C^k$ dann lassen sich k parzielle Ableitungen beliebig vertauschen.
Def. 3.5.9 ***Die Hessische:***
$U \in R^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}, x_0 \in U$. Die Hessische von f bei x_0 ist die quadratische $n \times n$-Matrix

$$H_f(x_0) = (\partial_i \partial_j f(x_0))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Nach dem Satz von Schwarz ist H symmetrisch, falls $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

2.4 Taylorpolynome

Def. 3.7.1 ***Das k-te Taylorpolynom von f bei y:***
$f \in C^k(U, \mathbb{R}), y \in U$.

$$T_k f(x) = \sum_{|i| \leq k} \frac{\partial_i f(y) \cdot (x-y)^i}{i!}$$
$$f(x) = T_k f(x) + o(||x-y||^k)$$

* $i = (i_1, ..., i_n), i_j \in \mathbb{Z}$ ist ein Tupel.
* $|i| = i_1 + ... + i_n$
* $\partial_i = \partial_1^{i_1} ... \partial_n^{i_n}$
* $(x-y)^i = (x_1 - y_1)^{i_1} \cdot ... \cdot (x_n - y_n)^{i_n}$
* $i! = i_1! \cdot ... \cdot i_n!$

$$f(x) = g(x)h(x)$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(x) T_k h(x)$$
$$f(x) = g(x) + h(x)$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(x) + T_k h(x)$$
$$f(x) = g(h(x))$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(T_k h(x))$$

Nützliche Taylorreihen:

ür $k \neq \infty$ addiere den Fehler $o(||x-y||^2)$

$$\sin(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$$

für alle x.

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$$

für alle x.

$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

$$\sec(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \cdots$$

für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

To Do: More of them :3