

2 Differenzielle Analysis in \mathbb{R}^n

Analysis II Cheatsheet

Luna Lorea Zehnder

25. Oktober 2024

2.1 Parzielle Ableitungen

Def. 3.3.11 Gradient und Divergent:

Gradient: Wenn für die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen existieren für $x_0 \in U$, dann ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

Divergent Wenn für eine Funktion $f = \{f_1, \dots, f_m\} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ alle partiellen Ableitungen für alle f_i bei $x_0 \in U$ existieren, ist der Divergent die Trace der Jakobimatrix

$$\text{div}(f)(x_0) = \text{Tr}(J_f(x_0))$$

2.2 Das Differential

Def. 3.4.2 Differenzierbarkeit:

Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung ist, dann ist f bei $x_0 \in U$ differenzierbar mit Differential A , falls:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Prop. 3.4.4 Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen:

Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion dann gilt:

1. Die Funktion f ist stetig auf U
2. Für die Funktion $f = [f_1, \dots, f_m]$ existieren alle $\partial_{x_j} f_i$ mit $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$

Prop. 3.4.6 Differenzierbarkeit bei Funktionsoperationen:

$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar:

1. $f + g$ ist differenzierbar und $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. Falls $m = 1 : f \cdot g$ differenzierbar.
3. Falls $m = 1, g \neq 0 : \frac{f}{g}$ differenzierbar.

Prop. 3.4.7 Differenzial von elementaren Funktionen:

Prop. 3.4.9 Kettenregel:

$U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar.

Funktionen: Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

Jakobi Matrizen: $J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$.

Gradienten: $\Delta_{g \circ f} = J_g \circ f^T, \Delta_g = J_g^T$ also $\Delta_{g \circ f}(x_0) = J_f(x_0)^T \cdot \Delta_g(f(x_0))$.

Def. 3.4.11 Der Tangentialraum:

$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x_0 \in U, A = df(x_0)$. Der Tangentialraum bei x_0 des Graphen von f ist der Graph von $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$, also $T = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Def. 3.4.13 Richtungsableitung:

$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0 \in U$. Die Richtungsableitung von f bei x_0 in richtung v ist

$$D_v f(x_0) := J_g(0) = \begin{pmatrix} g'(0)_1 \\ \vdots \\ g'(0)_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

für die Hilfsfunktion $g : \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in U\} \rightarrow \mathbb{R}^m, g(t) = f(x_0 + tv)$

Prop. 3.4.15 Richtungsableitung von differenzierbaren Funktionen Berechnen:

$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0 \in U$.

$\Rightarrow D_v f(x_0) = df(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$ was auch bedeutet, dass die Richtungsableitung linear vom Richtungsvektor abhängen.

$\Rightarrow D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0)$

Ex. 3.4.17 Richtungsableitung von allgemeinen stetigen Funktionen berechnen.:

$D_v f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ Sollte die daraus resultierende Funktion nicht linear von v abhängig sein, so ist f nicht differenzierbar.

2.3 Höhere Ableitungen

Def. 3.5.1 C Notation:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

$C^0(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig}\}$

$C^k(U, \mathbb{R}^m) :=$

$\{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \forall i, j : \partial_j f_i \in C^{k-1}\}$

$\{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \text{alle } \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f_i \in C^0(U, \mathbb{R}^m) = k\text{-mal stetig differenzierbar}$

$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \bigcup_{k=0}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R}^m)$

= Beliebig oft differenzierbar bzw. glatt.

Ex. 3.5.2 Nützliche C Regeln:

* **Polynome** mit n Variablen sind in $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

* $f \in C^k \iff f_1, \dots, f_m \in C^k$

* C^k ist ein **Vektorraum**

* Für $k \neq 0$ ist $\partial_j : C^k(U, \mathbb{R}) \rightarrow C^{k-1}(U, \mathbb{R})$

* $C^k(U, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen unter **Produkten** und **Summen**. (sofern diese Definiert sind). * Eine **Verknüpfung** von C^k Funktionen ist wieder C^k .

Prop. 3.5.4 Satz von Schwarz:

$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. Im Allgemeinen wenn $f \in C^k$ dann lassen sich k partielle Ableitungen beliebig vertauschen.

Def. 3.5.9 Die Hessische:

$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in U$. Die Hessische von f bei x_0 ist die quadratische $n \times n$ -Matrix

$$H_f(x_0) = (\partial_i \partial_j f(x_0))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Nach dem Satz von Schwarz ist H symmetrisch, falls $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

Def. 0.0 Contribution:

Falls du Fehler findest oder dinge fehlen öffne doch ein issue auf [GitHub](#) bzw. kannst du auch einen Pullrequest machen wenn du die Zeit dafür hast :)

1 Basics

1.1 Vector Basics

Def. 0.0 Skalarprodukt:

1.2 Notation

Def. 0.1 Landau Notation:

$U \in \mathbb{R}^n, h : U \rightarrow \mathbb{R}, y \in U$

* $o(h) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \neq y}} \frac{f(x)}{h(x)} = 0\}$

* $f = o(h) := f \in o(h)$

* $o(f) = o(h) := o(f) \in o(h)$

* $f = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow y} f(x) = 0$

* $\lambda o(h) + \mu o(h) = o(h) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

* $g \cdot o(h) = o(gh) = o(g) \cdot o(h)$

* $o(h^d) = o(h^e) \quad \forall e \leq d$ * Für Monome p in $x_i - y_i$ von Grad d : $p = o(\|x - y\|^e) \quad \forall e \leq d$ & $o(p) = o(\|x - y\|^d)$

2.4 Taylorpolynome

Def. 3.7.1 Das *k-te Taylorpolynom* von *f* bei *y*:

$f \in C^k(U, \mathbb{R}), y \in U$.

$$T_k f(x) = \sum_{|i| \leq k} \frac{\partial_i f(y) \cdot (x-y)^i}{i!}$$

$$f(x) = T_k f(x) + o(\|x - y\|^k)$$

* $i = (i_1, \dots, i_n), i_j \in \mathbb{Z}$ ist ein Tupel.

* $|i| = i_1 + \dots + i_n$

* $\partial_i = \partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n}$

* $(x - y)^i = (x_1 - y_1)^{i_1} \cdot \dots \cdot (x_n - y_n)^{i_n}$

* $i! = i_1! \cdot \dots \cdot i_n!$

$$f(x) = g(x)h(x)$$

$$\implies T_k f(x) = T_k g(x)T_k h(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$\implies T_k f(x) = T_k g(x) + T_k h(x)$$

$$f(x) = g(h(x))$$

$$\implies T_k f(x) = T_k g(T_k h(x))$$

Nützliche Taylorreihen:

für $k \neq \infty$ addiere den Fehler $o(\|x - y\|^2)$

$$\sin(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

für alle x .

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

für alle x .

$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

$$\sec(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots$$

für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

To Do: More of them :3