

Analysis II Cheatsheet

Luna Lorea Zehnder

22. November 2024

Def. 0.0 Contribution:

Falls du Fehler findest oder dinge fehlen öffne doch ein issue auf [GitHub](#) bzw. kannst du auch einen Pullrequest machen wenn du die Zeit dafür hast :)
(Dort findest du jeweils auch gleich die neuste Version dieses Cheatsheets)

1 Basics

1.1 Lineare Algebra

Def. 0.0 Skalarprodukt:

Def. 0.1 Norm:

Für $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$

Def. 0.2 Definite Matrizen:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst...

...**positiv definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T A v > 0$

...**positiv semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T A v \leq 0$

...**negativ definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T A v < 0$

...**negativ semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T A v \geq 0$

...**indefinit** falls es v, w gibt mit $v^T A v > 0 \wedge w^T A w < 0$

Für die eigenwerte λ von A gilt:

A pos. def. $\iff \forall \lambda : \lambda > 0$

A pos. semidef. $\iff \forall \lambda : \lambda \geq 0$

A neg. def. $\iff \forall \lambda : \lambda < 0$

A neg. semidef. $\iff \forall \lambda : \lambda \leq 0$

A indef. \iff A hat pos. und neg. eigenwerte.

$\det(A) \neq 0 \implies \forall \lambda : \lambda \neq 0$

1.2 Notation

Def. 0.3 Landau Notation:

$U \in \mathbb{R}^n, h : U \rightarrow \mathbb{R}, y \in U$

$$* o(h) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \neq y}} \frac{f(x)}{h(x)} = 0\}$$

$$* f = o(h) := f \in o(h)$$

$$* o(f) = o(h) := o(f) \in o(h)$$

$$* f = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow y} f(x) = 0$$

$$* \lambda o(h) + \mu o(h) = o(h) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$* g \cdot o(h) = o(gh) = o(g) \cdot o(h)$$

$$* o(h^d) = o(h^e) \quad \forall e \leq d * \text{Für Monome } p \text{ in } x_i - y_i \text{ von Grad } d: p = o(\|x - y\|^e) \quad \forall e \leq d \text{ \& } o(p) = o(\|x - y\|^d)$$

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

Def. 2.1.0.1 ODE:

Sei $k \geq 1, U \subseteq \mathbb{R}^{k+2}, G : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist

$$G(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$$

eine ODE k -ter Ordnung.

Def. 2.1.0.2 Lösung einer ODE:

Eine Lösung einer ODE der Ordnung k ist eine k -mal diffbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$G(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(k)}(x)) = 0$$

Def. 2.1.0.3 Anfangswertproblem:

Sind bei einer ODE zusätzlich noch Anfangsbedingungen gegeben, dh.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(k-1)}(x_0) = y_k$$

mit $x_0, y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$, dann liegt ein AWP vor.

Rmrk. 2.1.0.4 :

k wird generell minimal angegeben.

$G(x, y) = 0$ ist **keine** ODE.

Lässt sich eine ODE als $y^{(k)} = F(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$ schreiben so nennen wir diese **explizit**.

Stammfunktionsprobleme sind spezialfälle einer ODE, eg $y' = 1/x$.

Sind ODEs nicht von x abhängig so nennt man diese **Autonom**. Eg. $y'' = 1/m$

2.1 Einführung

Prop. 2.1.6 Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Ein AWP $y' = F(x, y), y(x_0) = y_0$ mit $F \rightarrow \mathbb{R}$ stetig für $U \in \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in U$, hat eine Lösung.

Ist F stetig differenzierbar, so gibt es eine **eindeutige maximale** Lösung. (Maximal bedeutet, es ist nicht eine Einschränkung einer anderen Lösung mit grösserem Intervall.)

2.2 Other Methods

Def. 2.6.1 Separation der Variablen:

Für ODEs der Form $y' = a(y) \cdot b(x)$ und a, b stetig. Für jede Nullstelle $y_0 \in \mathbb{R}$ von a gibt es eine Konstante Lösung $y(x) = y_0$.

Für $a(y) \neq 0$: ODE $\iff \frac{y'}{a(y)} = b(x)$

$$\iff \int \frac{y'}{a(y)} dx = \int b(x) dx + c \text{ für } c \in \mathbb{R}$$

1. Finde Stammfunktion A, B von $\frac{1}{a}, b$

* Kettenregel: $\int \frac{y'}{a(y)} dx = A(y) + c$

$$\implies A(y) = B(x) + c$$

2. Falls A eine Umkehrfunktion hat, dann ist $y = A^{-1}(B(x) + c)$

3 Differenzielle Analysis in \mathbb{R}^n

3.1 Parziale Ableitungen

Def. 3.3.11 Gradient und Divergent:

Gradient: Wenn für die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen existieren für $x_0 \in U$, dann ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

Divergent Wenn für eine Funktion $f = \{f_1, \dots, f_m\} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ alle partiellen ableitungen für alle f_i bei $x_0 \in U$ existieren, ist der Divergent die Trace der Jakobimatrix

$$\text{div}(f)(x_0) = \text{Tr}(J_f(x_0))$$

3.2 Das Differential

Def. 3.4.2 Differenzierbarkeit:

Wenn $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung ist, dann ist f bei $x_0 \in U$ differenzierbar mit Differential A , falls:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Prop. 3.4.4 Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen:

Wenn $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion dann gilt:

1. Die Funktion f ist stetig auf U
2. Für die Funktion $f = [f_1, \dots, f_m]$ existieren alle $\partial_{x_j} f_i$ mit $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$

Prop. 3.4.6 Differenzierbarkeit bei Funktionsoperationen:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar:

1. $f + g$ ist differenzierbar und $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. Falls $m = 1$: $f \cdot g$ differenzierbar.
3. Falls $m = 1, g \neq 0$: $\frac{f}{g}$ differenzierbar.

Prop. 3.4.7 Differential von elementaren Funktionen:

Prop. 3.4.9 Kettenregel:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar.

Funktionen: Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

Jakobi Matrizen: $J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$.

Gradienten: $\nabla_{g \circ f} = J_g \circ f^T, \nabla_g = J_g^T$ also $\nabla_{g \circ f}(x_0) = J_f(x_0)^T \cdot \nabla_g(f(x_0))$.

Def. 3.4.11 Der Tangentialraum:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x_0 \in U$, $A = df(x_0)$. Der Tangentialraum bei x_0 des Graphen von f ist der Graph von $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$, also $T = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Def. 3.4.13 Richtungsableitung:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0 \in U$. Die Richtungsableitung von f bei x_0 in Richtung v ist

$$D_v f(x_0) := J_g(0) = \begin{pmatrix} g'(0)_1 \\ \vdots \\ g'(0)_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

für die Hilfsfunktion $g : \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in U\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ $g(t) = f(x_0 + tv)$

Prop. 3.4.15 Richtungsableitung von differenzierbaren Funktionen Berechnen:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0 \in U$.

$\Rightarrow D_v f(x_0) = df(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$ was auch bedeutet, dass die Richtungsableitung linear vom Richtungsvektor abhängen.

$$\Rightarrow D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0)$$

Ex. 3.4.17 Richtungsableitung von allgemeinen stetigen Funktionen berechnen.:

$D_v f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ Sollte die daraus resultierende Funktion nicht linear von v abhängig sein, so ist f nicht differenzierbar.

3.3 Höhere Ableitungen

Def. 3.5.1 C Notation:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

$$C^0(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig}\}$$

$$C^k(U, \mathbb{R}^m) :=$$

$$\{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \forall i, j : \partial_j f_i \in C^{k-1}\}$$

$$\{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \text{alle } \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f_i \in C^0(U, \mathbb{R}^m)\} \quad C^\infty(U, \mathbb{R}^m) :=$$

$$= \text{k-mal stetig differenzierbar}$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R}^m)$$

$$= \text{Beliebig oft differenzierbar bzw. glatt.}$$

Ex. 3.5.2 Nützliche C Regeln:

* **Polynome** mit n Variablen sind in $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

* $f \in C^k \iff f_1, \dots, f_m \in C^k$

* C^k ist ein **Vektorraum**

* Für $k \neq 0$ ist $\partial_j : C^k(U, \mathbb{R}) \rightarrow C^{k-1}(U, \mathbb{R})$ * $C^k(U, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen unter **Produkten** und **Summen**. (sofern diese Definiert sind). * Eine **Verknüpfung** von C^k Funktionen ist wieder C^k .

Prop. 3.5.4 Satz von Schwarz:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.

Im Allgemeinen wenn $f \in C^k$ dann lassen sich k partielle Ableitungen beliebig vertauschen.

Def. 3.5.9 Die Hessische:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in U$. Die Hessische von f bei x_0 ist die quadratische $n \times n$ -Matrix

$$H_f(x_0) = (\partial_i \partial_j f(x_0))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Nach dem Satz von Schwarz ist H symmetrisch, falls $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

3.4 Taylorpolynome

Def. 3.7.1 Das k-te Taylorpolynom von f bei y:

$f \in C^k(U, \mathbb{R}), y \in U$.

$$T_k f(x) = \sum_{|i| \leq k} \frac{\partial_i f(y) \cdot (x-y)^i}{i!}$$

$$f(x) = T_k f(x) + o(\|x - y\|^k)$$

* $i = (i_1, \dots, i_n), i_j \in \mathbb{Z}$ ist ein Tupel.

* $|i| = i_1 + \dots + i_n$

* $\partial_i = \partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n}$

* $(x - y)^i = (x_1 - y_1)^{i_1} \dots (x_n - y_n)^{i_n}$

* $i! = i_1! \cdot \dots \cdot i_n!$

$$f(x) = g(x)h(x)$$

$$\Rightarrow T_k f(x) = T_k g(x) T_k h(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$\Rightarrow T_k f(x) = T_k g(x) + T_k h(x)$$

$$f(x) = g(h(x))$$

$$\Rightarrow T_k f(x) = T_k g(T_k h(x))$$

Nützliche Taylorreihen:

für $k \neq \infty$ addiere den Fehler $o(\|x - y\|^2)$

$\sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$
$\cos(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$
$\tan(x)$ $\forall x < \frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$
$\sec(x)$ $\forall x < \frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots$
Do More!	

3.5 Kritische Punkte

Def. 3.8.0 Extremstellen:

Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ Dann hat f bei $y \in U$ ein **lokales Minimum** falls $\exists \varepsilon > 0$ sodass: $\|x - y\| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \leq f(x)$

lokales Maximum falls $\exists \varepsilon > 0$ sodass: $\|x - y\| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \geq f(x)$

lokales Extremum falls y ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.

globales Minimum falls $x \in U \implies f(y) \leq f(x)$

globales Maximum falls $x \in U \implies f(y) \geq f(x)$

globales Extremum falls y ein globales Minimum oder ein globales Maximum ist. Bmkg: Globale Extrema sind jeweils auch lokale Extrema

Prop. 3.8.1 :

$y \in U$ eine lokale Extremstelle $\implies y$ ist ein Kritischer Punkt.

Def. 3.8.2 :

$y \in U$ heisst **kritischer Punkt** falls $\nabla f(y) = 0$

Def. 3.8.6 Nicht-degenerierte-Stellenn:

Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, f \in C^2$ Ein Punkt $x \in U$ heisst nicht-degeneriert, falls für die Hessische $H_f(x)$ gilt, dass $\det(H_f(x)) \neq 0$.

Def. 3.8.7.1 Extremstellen im eindimensionalen Bereich:

* $f'(y) = 0, f''(y) > 0 \implies y$ ist lokale Minimalstelle.

* $f'(y) = 0, f''(y) < 0 \implies y$ ist lokale Maximalstelle.

* y ist Sattelpunkt $\implies f'(y) = 0, f''(y) = 0$

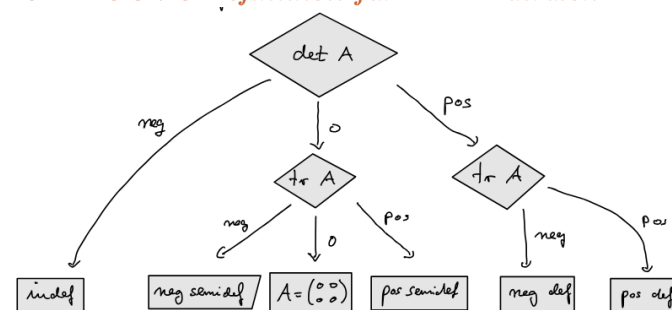
Def. 3.8.7.2 Extremstellen auf Funktionen $f : (U \subseteq$

$\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$:

- * $H_f(y)$ pos. def. $\implies y$ ist lok. Minimalstelle.
- $\implies H_f(y)$ ist pos. semidefinit.
- * $H_f(y)$ neg. def. $\implies y$ ist lok. Maximalstelle.
- $\implies H_f(y)$ ist neg. semidefinit
- * $H_f(y)$ indef. $\implies y$ ist Sattelpunkt.
- * $\det(H_f) \neq 0 \implies H_f(y)$ ist pos. def. oder neg. def. oder indef.

(Siehe Lineare Algebra basics)

Rmrk. 3.8.7.3 Definitheit für 2×2 Matrizen A:



Rmrk. 3.8.8 If someone wants to contribute this pls do Oo. (Sylvester Kriterium):

3.6 Umkehrsatz

Def. 3.10.0 lokale umkehrbarkeit:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst **lokal umkehrbar** bei $y \in U$ falls offene $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ existieren mit $y \in V, f(y) \in w$, sodass $f|_V : V \rightarrow W$ bijektiv ist.

Bzw. es existiert $g : W \rightarrow V$ sodass $f|_V \circ g = id_W, g \circ f|_W = id_V$. g ist die Umkehrfunktion von $f|_V$

Def. 3.10.2 Satz der Umkehrfunktion:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^k, k \geq 1$ und $J_f(y)$ eine invertierbare Matrix, dann ist f lokal umkehrbar bei y , die Umkehrfunktion g ist C^k und

$$J_g(f(y)) = (J_f(y))^{-1}$$