Analysis II Cheatsheet

Luna Lorea Zehnder

1. November 2024

Def. 0.0 ***Contribution:***
Falls du Fehler findest oder dinge fehlen öffne doch ein issue auf GitHub bzw. kannst du auch einen Pullrequest machen wenn du die Zeit dafür hast :)
(Dort findest du jeweils auch gleich die neuste Version dieses Cheatsheets)

1 Basics

1.1 Lineare Algebra

Def. 0.0 ***Skalarprodukt:***

Def. 0.1 ***Norm:***
Für $u \in \mathbf{R}^n, ||u|| = \sqrt[2]{u_1^2 + ... + u_n^2}$

Def. 0.2 ***Definite Matrizen:***
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heist...
...**positiv definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av > 0$
...**positiv semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av \leq 0$
...**negativ definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av < 0$
...**negativ semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av \geq 0$
...**indefinit** falls es v, w gibt mit $v^T Av > 0 \wedge w^T Aw < 0$
Für die eigenwerte λ von A gilt:

A pos. def.	$\iff$	$\forall\lambda : \lambda > 0$
A pos. semidef.	$\iff$	$\forall\lambda : \lambda \geq 0$
A neg. def.	$\iff$	$\forall\lambda : \lambda < 0$
A neg. semidef.	$\iff$	$\forall\lambda : \lambda \leq 0$
A indef.	$\iff$	A hat pos. und neg. eigenwerte.
$\det(A) \neq 0$	$\implies$	$\forall\lambda : \lambda \neq 0$

1.2 Notation

Def. 0.3 ***Landau Notation:***
$U \in \mathbb{R}^n, h : U \to \mathbb{R}, y \in U$

* $o(h) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \lim_{\substack{x\to y\\ x\neq y}} \frac{f(x)}{h(x)} = 0\}$
* $f = o(h) := f \in o(h)$
* $o(f) = o(h) := o(f) \in o(h)$
* $f = o(1) \iff \lim_{x\to y} f(x) = 0$
* $\lambda o(h) + \mu o(h) = o(h) \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
* $g \cdot o(h) = o(gh) = o(g) \cdot o(h)$
* $o(h^d) = o(h^e) \ \forall e \leq d$ * Für Monome p in $x_i - y_i$ von Grad d: $p = o(||x-y||^e) \ \forall e \leq d$ & $o(p) = o(||x-y||^d)$

2 Differenzielle Analysis in $\mathbf{R}^n$

2.1 Parzielle Ableitungen

Def. 3.3.11 ***Gradient und Divergent:***
Gradient: Wenn für die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen existieren für $x_0 \in U$, dann ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

Divergent Wenn für eine Funktion $f = \{f_1, ..., f_m\} : U \to \mathbb{R}^m$ alle partiellen ableitungen für alle f_i bei $x_0 \in U$ existieren, ist der Divergent die Trace der Jakobimatrix

$$div(f)(x_0) = Tr(J_f(x_0))$$

2.2 Das Differential

Def. 3.4.2 ***Differenzierbarkeit:***
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine Funktion und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung ist, dann ist f bei $x_0 \in U$ differenzierbar mit Differenzial A, falls:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

Prop. 3.4.4 ***Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen:***
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine differenzierbare Funktion dann gilt:

1. Die Funktion f ist stetig auf U
2. Für die Funktion $f = [f_1, ..., f_m]$ existieren alle $\partial_{x_j} f_i$ mit $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$

Prop. 3.4.6 ***Differenzierbarkeit bei Funktionsoperationen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar:

1. $f + g$ ist differenzierbar und
   $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. Falls $m = 1 : f \cdot g$ differenzierbar.
3. Falls $m = 1, g \neq 0 : \frac{f}{g}$ differenzierbar.

Prop. 3.4.7 ***Differenzial von elementaren Funktionen:***

Prop. 3.4.9 ***Kettenregel:***
$U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar.
Funktionen: Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.
Jakobi Matrizen: $J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0) \cdot J_f(x_0)$.
Gradienten: $\nabla_{g\circ f} = Jg \circ f^T, \nabla_g = J_g^T$ also $\nabla_{g\circ f}(x_0) = J_f(x_0)^T \cdot \nabla_g(f(x_0))$.

Def. 3.4.11 ***Der Tangentialraum:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x_0 \in U$, $A = df(x_0)$. Der Tangentialraum bei x_0 des Graphen von f ist der Graph von $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$, also $T = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Def. 3.4.13 ***Richtungsableitung:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x_0 \in U$. Die Richtungsableitung von f bei x_o in Richtung v ist

$$D_v f(x_o) := J_g(0) = \begin{pmatrix} g'(0)_1 \\ \vdots \\ g'(0)_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

für die Hilfsfunktion $g : \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in U\} \to \mathbb{R}^m$ $g(t) = f(x_0 + tv)$

Prop. 3.4.15 ***Richtungsableitung von differenzierbaren Funktionen Berechnen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, x_0 \in U$.
$\implies D_v f(x_0) = df(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$ was auch bedeutet, dass die Richtungsableitung linear vom Richtungsvektor abhängen.
$\implies D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0)$

Ex. 3.4.17 ***Richtungsableitung von allgemeinen stetigen Funktionen berechnen.:***
$D_v f(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$ Sollte die daraus resultierende Funktion nicht linear von v abhängig sein, so ist f nicht differenzierbar.

2.3 Höhere Ableitungen

Def. 3.5.1 ***C Notation:***
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
$C^0(U,\mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig}\}$
$C^k(U,\mathbb{R}^m) :=$
$\{f : U \to \mathbb{R}^m \mid \forall i,j : \partial_j f_i \in C^{k-1}\}$
$\{f : U \to \mathbb{R}^m \mid \text{alle } \partial_{j_i} ... \partial j_k f_i \in C^0(U,\mathbb{R}^m\}$ $C^\infty(U,\mathbb{R}^m) :=$
$=$ k-mal stetig differenzierbar
$\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} C^k(U,\mathbb{R}^m)$
$=$ Beliebig oft differenzierbar bzw. glatt.
Ex. 3.5.2 ***Nützliche C Regeln:***
∗ **Polynome** mit n Variablen sind in $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
∗ $f \in C^k \iff f_1, ..., f_m \in C^k$
∗ C^k ist ein **Vektorraum**
∗ Für $k \neq 0$ ist $\partial_j : C^k(U,\mathbb{R}) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R})$ ∗ $C^k(U,\mathbb{R})$ ist abgeschlossen unter **Produkten** und **Summen**. (sofern diese Definiert sind). ∗ Eine **Verknüpfung** von C^k Funktionen ist wieder C^k.
Prop. 3.5.4 ***Satz von Schwarz:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U,\mathbb{R})$. Dann gilt: $\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$. Im Allgemeinen wenn $f \in C^k$ dann lassen sich k parzielle Ableitungen beliebig vertauschen.
Def. 3.5.9 ***Die Hessische:***
$U \in R^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}, x_0 \in U$. Die Hessische von f bei x_0 ist die quadratische $n \times n$-Matrix

$$H_f(x_0) = (\partial_i\partial_j f(x_0))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$$

Nach dem Satz von Schwarz ist H symmetrisch, falls $f \in C^2(U,\mathbb{R})$.

2.4 Taylorpolynome

Def. 3.7.1 ***Das k-te Taylorpolynom von f bei y:***
$f \in C^k(U,\mathbb{R}), y \in U$.

$$T_k f(x) = \sum_{|i|\leq k} \frac{\partial_i f(y)\cdot(x-y)^i}{i!}$$
$$f(x) = T_k f(x) + o(||x-y||^k)$$

∗ $i = (i_1, ..., i_n), i_j \in \mathbb{Z}$ ist ein Tupel.
∗ $|i| = i_1 + ... + i_n$
∗ $\partial_i = \partial_1^{i_1} ... \partial_n^{i_n}$
∗ $(x-y)^i = (x_1-y_1)^{i_1} \cdot ... \cdot (x_n-y_n)^{i_n}$
∗ $i! = i_1! \cdot ... \cdot i_n!$

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x)h(x) \\ & \implies T_k f(x) = T_k g(x) T_k h(x) \\ & f(x) = g(x) + h(x) \\ & \implies T_k f(x) = T_k g(x) + T_k h(x) \\ & f(x) = g(h(x)) \\ & \implies T_k f(x) = T_k g(T_k h(x)) \end{aligned}$$

Nützliche Taylorreihen:
ür $k \neq \infty$ addiere den Fehler $o(||x-y||^2)$

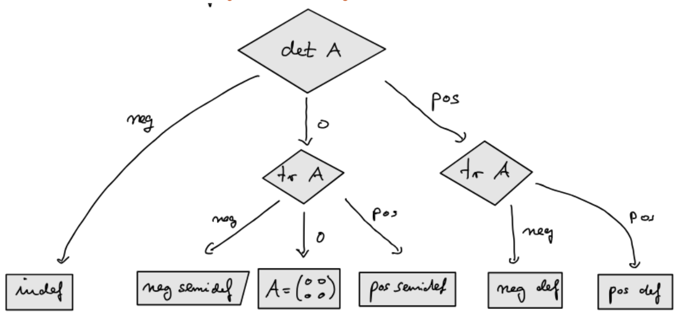
$\sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$
$\cos(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$
$\tan(x)$ $\forall x < \frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$
$\sec(x)$ $\forall x < \frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \cdots$
	Do More!

2.5 Kritische Punkte

Def. 3.8.0 ***Extremstellen:***
Für $U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}$ Dann hat f bei $y \in U$ ein
lokales Minimum falls $\exists\varepsilon > 0$ sodass: $||x-y|| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \leq f(x)$
lokales Maximum falls $\exists\varepsilon > 0$ sodass: $||x-y|| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \geq f(x)$
lokales Extremum falls y ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.
globales Minimum falls $x \in U \implies f(y) \leq f(x)$
globales Minimum falls $x \in U \implies f(y) \geq f(x)$
globales Extremum falls y ein globales Minimum oder ein globales Maximum ist. Bmkg: Globale Extrema sind jeweils auch lokale Extrema
Prop. 3.8.1 ***:***
$y \in U$ eine lokale Extremstelle $\implies$ y ist ein Kritischer Punkt.
Def. 3.8.2 ***:***
$y \in U$ heisst **kritischer Punkt** falls $\bigtriangledown f(y) = 0$
Def. 3.8.6 ***Nicht-degenerierte-Stellenn:***
Für $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m, f \in C^2$ Ein Punkt $x \in U$ heist nicht-degeneriert, falls für die Hessische $H_f(x)$ gilt, dass $\det(H_f(x)) \neq 0$.
Def. 3.8.7.1 ***Extremstellen im eindimensionalen bereich:***
∗ $f'(y) = 0, f''(y) > 0 \implies y$ ist lokale Minimalstelle.
∗ $f'(y) = 0, f''(y) < 0 \implies y$ ist lokale Maximalstelle.
∗ y ist Sattelpunkt $\implies f'(y) = 0, f''(y) = 0$
Def. 3.8.7.2 ***Extremstellen auf Funktionen $f : (U \in \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$:***

∗ $H_f(y)$ pos. def.	$\implies$	y ist lok. Minimalstelle.
	$\implies$	$H_f(y)$ ist pos. semidefinit.
∗ $H_f(y)$ neg. def.	$\implies$	y ist lok. Maximalstelle.
	$\implies$	$H_f(y)$ ist neg. semidefinit
∗ $H_f(y)$ indef.	$\implies$	y ist Sattelpunkt.
∗ $\det(H_f) \neq 0$	$\implies$	$H_f(y)$ ist pos. def. oder neg. def. oder indef.

(Siehe Lineare Algebra basics)
Rmrk. 3.8.7.3 ***Definitheit für 2×2 Matrizen A:***



Rmrk. 3.8.8 ***If someone wants to contribute this pls do Oo. (Sylvester Kriterium):***

2.6 Umkehrsatz

Def. 3.10.0 ***lokale umkehrbarkeit:***
$U \in R^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^n$ heisst **lokal umkehrbar** bei $y \in U$ falls offene $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ existieren mit $y \in V, f(y) \in w$, sodass $f|_V : V \to W$ bijektiv ist.
Bzw. es existiert $g : W \to V$ sodass $f|_V \circ g = id_W, g \circ f|_W = id_V$. g ist die umkehrfunktion von $f|_V$
Def. 3.10.2 ***Satz der Umkehrfunktion:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n, f \in C^k, k \geq 1$ und $J_f(y)$ eine invertierbare Matrix, dann ist f lokal umkehrbar bei y, die Umkehrfunktion g ist C^k und

$$J_g(f(y)) = (J_f(y))^{-1}$$