Analysis II Cheatsheet

Luna Lorea Zehnder

29. November 2024

Def. 0.0 ***Contribution:***
Falls du Fehler findest oder dinge fehlen öffne doch ein issue auf GitHub bzw. kannst du auch einen Pullrequest machen wenn du die Zeit dafür hast :)
(Dort findest du jeweils auch gleich die neuste Version dieses Cheatsheets)

1 Basics

1.1 Lineare Algebra

Def. 0.0 ***Skalarprodukt:***

Def. 0.1 ***Norm:***
Für $u \in \mathbf{R}^n, ||u|| = \sqrt[2]{u_1^2 + ... + u_n^2}$

Def. 0.2 ***Definite Matrizen:***
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heist...
...**positiv definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T A v > 0$
...**positiv semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T A v \leq 0$
...**negativ definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T A v < 0$
...**negativ semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T A v \geq 0$
...**indefinit** falls es v, w gibt mit $v^T A v > 0 \land w^T A w < 0$
Für die eigenwerte λ von A gilt:

A pos. def.	$\iff$	$\forall \lambda : \lambda > 0$
A pos. semidef.	$\iff$	$\forall \lambda : \lambda \geq 0$
A neg. def.	$\iff$	$\forall \lambda : \lambda < 0$
A neg. semidef.	$\iff$	$\forall \lambda : \lambda \leq 0$
A indef.	$\iff$	A hat pos. und neg. eigenwerte.
$\det(A) \neq 0$	$\implies$	$\forall \lambda : \lambda \neq 0$

1.2 Notation

Def. 0.3 ***Landau Notation:***
$U \in \mathbb{R}^n, h : U \to \mathbb{R}, y \in U$

$* \; o(h) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \lim\limits_{\substack{x \to y \\ x \neq y}} \frac{f(x)}{h(x)} = 0\}$
$* \; f = o(h) := f \in o(h)$
$* \; o(f) = o(h) := o(f) \in o(h)$
$* \; f = o(1) \iff \lim\limits_{x \to y} f(x) = 0$
$* \; \lambda o(h) + \mu o(h) = o(h) \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$* \; g \cdot o(h) = o(gh) = o(g) \cdot o(h)$
$* \; o(h^d) = o(h^e) \; \forall e \leq d$ $*$ Für Monome p in $x_i - y_i$ von Grad d: $p = o(||x-y||^e) \; \forall e \leq d$ & $o(p) = o(||x-y||^d)$

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

Def. 2.1.0.1 ***ODE:***
Sei $k \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^{k+2}$, $G : U \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$G(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}) = 0$$

eine ODE k-ter Ordnung.

Def. 2.1.0.2 ***Lösung einer ODE:***
Eine Lösung einer ODE der Ordnung k ist eine k-mal diffbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$G(x, f(x).f'(x), ..., f^{(k)}(x) = 0$$

.

Def. 2.1.0.3 ***Anfangswertproblem:***
Sind bei einer ODE zusäzlich noch Anfangsbedinungen gegeben, dh.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(k-1)}(x_0) = y_k$$

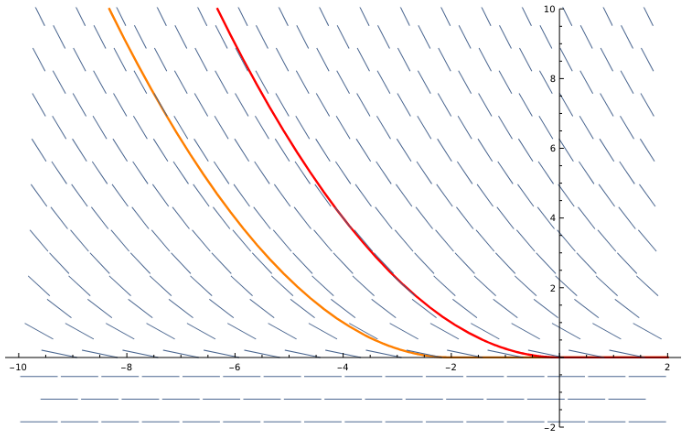
mit $x_0, y_0, ..., y_k \in \mathbb{R}$, dann liegt ein AWP vor.

Rmrk. 2.1.0.4 ***:***
k wird generell minimal angegeben.
$G(x, y) = 0$ ist **keine** ODE.
Lässt sich eine ODE als $y^{(k)} = F(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ schreiben so nennen wir diese **explizit**.
Stammfunktionsprobleme sind spezialfälle einer ODE, eg $y' = 1/x$.
Sind ODEs nicht von x abhängig so nennt man diese **Autonom**. Eg. $y'' = 1/m$

2.1 Einführung

Prop. 2.1.6 ***Existenz- und Eindeutigkeitssatz:***
Ein AWP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ mit $F \to \mathbb{R}$ stetig für $U \in \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in U$, hat eine Lösung.
Ist F stetig differenzierbar, so gibt es eine **eindeutige maximale** Lösung. (Maximal bedeutet, es ist nicht eine Einschränkung einer anderen Lösung mit grösserem Intervall.)

Def. 2.1.7 ***Vektorfelddarstellung:***
Eine Explizize ODE der Form $y' = F(x, y)$ mit $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lässt sich durch das Vektorfeld $V : U \to \mathbb{R}^2, V(x, y) = (1, F(x, y))$ visualisieren. Eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ des ODE hat als Graph eine Kurve beschrieben durch $\phi : I \to \mathbb{R}^2, \phi(x) = (x, f(x))$ mit $\phi'(x) = (1, f'(x)) = V(x, y)$. D.h. ϕ ist an jedem Punkt tangential zum Vektorfeld V.



2.2 Lineare ODE

Def. 2.2.1 ***Lineare ODE:***
Eine Lineare ODE ist eine ODE von Ordnung $k \geq 1$ der Form

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + ... + a_0 y = b$$

Koeffizienten $a_{k-1}, ..., a_0$ und inhomogenität b sind Funktionen $I \to \mathbb{C}$ für ein offenes Intervall $I \in \mathbb{R}$. Falls $b = 0$, heisst die lineare ODE **homogen**, sonst **inhomogen**. Falls wir eine inhomogene lineare ODE haben, ist die **zugehörige homogene lineare ODE**:

$$y^{(k)} + ... + a_0 y = 0$$

Eine Lösung ist eine k-mal differenzierbare $f : I \to \mathbb{C}$

$$f^{(k)}(x) + ... + a_0(x)f(x) = b(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

wobei $f^{(j)} = (Re\ f(x))^{(j)} + i \cdot (Im\ f(x))^{(j)}$
Def. 2.2.8 :
Für eine lineare ODE (1) k-ter Ordnung mit stetigen $a_{k-1}, ..., a_0, b$ gilt:
$*$ Die Lösungen der zugehörigen homogenen ODE (2) bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum S mit $\dim_{\mathbb{C}} S = k$
$*$ Die inhomogene ODE (1) hat eine Lösung f_0. Die Menge aller Lösungen bildet dann den affinen Raum

$$f_0 + S = \{f_0 + f \mid f \in S\}$$

$*$ Für beliebige $x_0 \in I$ und $y_0, ..., y_{k-1} \in \mathbb{C}$ hat das dazugehörige AWP (1) genau eine Lösung.

Sind $a_{k-1}, ..., a_0, b$ reellwertig, dann gilt:
$*$ Reelwertige Lösungen der zugehörigen homogenen ODE (2) bilden einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum $S_{\mathbb{R}}$ von S mit $dim_{\mathbb{R}} = k$
$*$ Die inhomogene ODE (1) hat eine reelwertige Lösung f_0 und die Menge aller Lösungen bildet den affinen $\mathbb{R}$-Raum

$$f_0 + S_{\mathbb{R}}$$

$*$ Für $y_0, ..., y_{k-1} \in \mathbb{R}$ hat das zugehörige AWP genau eine reelwertige Lösung.
Ex. 2.2.8.1 *Lösungsstrategie für Lineare ODEs:*

1. Finde eine Basis $f_1, ..., f_k$ des Lösungsraums S der homogenen ODE
   $k = 1$: finde eine Lösung $f_1 \neq 0$.
2. Finde eine einzelne Lösung f_0 der inhomogenen ODE (Partikulärlösung). Allg. Lösung: $f_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$.
   $k = 1$: allg. Lösung $f_0 + \lambda f_1$
3. Einsetzen der Anfangswerte $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem für $\lambda_1, ..., \lambda_k$ mit eindeutiger Lösung.
   $k = 1$: $f_0(x_0) + \lambda f_1(x_0) = y_0 \implies \lambda = \frac{y_0 - f(x_0)}{f_1(x_0}$

2.3 Lineare ODE erster Ordnung

Zu lösen: $y' + ay = b$ mit gegebenen stetigen $a, b : I \to \mathbb{C}$
Prop. 2.3.1 *Die Lösungen der ODE:*
Die Lösungen für die homogene ODE

$$y' + ay = 0$$

sind genau die Funktionen $ze^{-A(x)}$ für $z \in \mathbb{C}$ und A eine Stammfunktion von a.
Für die inhomogene ODE

$$y' + ay = b$$

Ansatz $f(x) = z(x) \cdot e^{-A(x)}$. Einsetzen in die ODE gibt uns $f' + af = b$
$\iff z'e^{-A} + zae^{-A} - aze^{-A} = b$
$\iff z'e^{-A} = b$
$\iff z' = e^A b$
$\iff z$ ist Stammfunktion von $e^A b$

2.4 Other Methods

Def. 2.6.1 *Separation der Variablen:*
Für ODEs der Form $y' = a(y) \cdot b(x)$ und a, b stetig. Für jede Nullstelle $y_0 \in \mathbb{R}$ von a gibt es eine Konstante Lösung $y(x) = y_0$.
Für $a(y) \neq 0$: ODE $\iff \frac{y'}{a(y)} = b(x)$
$\iff \int \frac{y'}{a(y)} dx = \int b(x)dx + c$ für $c \in \mathbb{R}$

1. Finde Stammfunktion A,B von $\frac{1}{a}, b$
   $*$ Kettenregel: $\int \frac{y'}{a(y)} dx = A(y) + c$
   $\implies A(y) = B(x) + c$
2. Falls A eine Umkehrfunktion hat, dann ist $y = A^{-1}(B(x) + x)$

3 Differenzielle Analysis in $\mathbb{R}^n$

3.1 Parzielle Ableitungen

Def. 3.3.11 *Gradient und Divergent:*
Gradient: Wenn für die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen existieren für $x_0 \in U$, dann ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

Divergent Wenn für eine Funktion $f = \{f_1, ..., f_m\} : U \to \mathbb{R}^m$ alle partiellen ableitungen für alle f_i bei $x_0 \in U$ existieren, ist der Divergent die Trace der Jakobimatrix

$$div(f)(x_0) = Tr(J_f(x_0))$$

3.2 Das Differential

Def. 3.4.2 *Differenzierbarkeit:*
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine Funktion und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung ist, dann ist f bei $x_0 \in U$ differenzierbar mit Differenzial A, falls:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

Prop. 3.4.4 *Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen:*
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine differenzierbare Funktion dann gilt:

1. Die Funktion f ist stetig auf U
2. Für die Funktion $f = [f_1, ..., f_m]$ existieren alle $\partial_{x_j} f_i$ mit $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$

Prop. 3.4.6 *Differenzierbarkeit bei Funktionsoperationen:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar:

1. $f + g$ ist differenzierbar und $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. Falls $m = 1 : f \cdot g$ differenzierbar.
3. Falls $m = 1, g \neq 0 : \frac{f}{g}$ differenzierbar.

Prop. 3.4.7 *Differenzial von elementaren Funktionen:*
Prop. 3.4.9 *Kettenregel:*
$U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar.
Funktionen: Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.
Jakobi Matrizen: $J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0) \cdot J_f(x_0)$.
Gradienten: $\bigtriangledown_{g \circ f} = Jg \circ f^T, \bigtriangledown_g = J_g^T$ also $\bigtriangledown_{g \circ f}(x_0) = J_f(x_0)^T \cdot \bigtriangledown_g(f(x_0))$.

Def. 3.4.11 ***Der Tangentialraum:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x_0 \in U$, $A = df(x_0)$. Der Tangentialraum bei x_0 des Graphen von f ist der Graph von $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$, also $T = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
Def. 3.4.13 ***Richtungsableitung:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x_0 \in U$. Die Richtungsableitung von f bei x_o in Richtung v ist

$$D_v f(x_o) := J_g(0) = \begin{pmatrix} g'(0)_1 \\ \vdots \\ g'(0)_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

für die Hilfsfunktion $g: \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in U\} \to \mathbb{R}^m$ $g(t) = f(x_0 + tv)$
Prop. 3.4.15 ***Richtungsableitung von differenzierbaren Funktionen Berechnen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, x_0 \in U$.
$\implies D_v f(x_0) = df(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$ was auch bedeutet, dass die Richtungsableitung linear vom Richtungsvektor abhängen.
$\implies D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0)$
Ex. 3.4.17 ***Richtungsableitung von allgemeinen stetigen Funktionen berechnen.:***
$D_v f(x_0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$ Sollte die daraus resultierende Funktion nicht linear von v abhängig sein, so ist f nicht differenzierbar.

3.3 Höhere Ableitungen

Def. 3.5.1 ***C Notation:***
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
$C^0(U, \mathbb{R}^m) := \{f: U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig}\}$
$C^k(U, \mathbb{R}^m) :=$
$\{f: U \to \mathbb{R}^m \mid \forall i, j: \partial_j f_i \in C^{k-1}\}$
$\{f: U \to \mathbb{R}^m \mid \text{alle } \partial_{j_i} ... \partial j_k f_i \in C^0(U, \mathbb{R}^m\}$ $C^\infty(U, \mathbb{R}^m) :=$
$=$ k-mal stetig differenzierbar
$\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R}^m)$
$=$ Beliebig oft differenzierbar bzw. glatt.
Ex. 3.5.2 ***Nützliche C Regeln:***
$*$ **Polynome** mit n Variablen sind in $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
$*$ $f \in C^k \iff f_1, ..., f_m \in C^k$
$*$ C^k ist ein **Vektorraum**
$*$ Für $k \neq 0$ ist $\partial_j : C^k(U, \mathbb{R}) \to C^{k-1}(U, \mathbb{R})$ $*$ $C^k(U, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen unter **Produkten** und **Summen**. (sofern diese Definiert sind). $*$ Eine **Verknüpfung** von C^k Funktionen ist wieder C^k.
Prop. 3.5.4 ***Satz von Schwarz:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. Im Allgemeinen wenn $f \in C^k$ dann lassen sich k parzielle Ableitungen beliebig vertauschen.
Def. 3.5.9 ***Die Hessische:***
$U \in R^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}, x_0 \in U$. Die Hessische von f bei x_0 ist die quadratische $n \times n$-Matrix

$$H_f(x_0) = (\partial_i \partial_j f(x_0))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Nach dem Satz von Schwarz ist H symmetrisch, falls $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

3.4 Taylorpolynome

Def. 3.7.1 ***Das k-te Taylorpolynom von f bei y:***
$f \in C^k(U, \mathbb{R}), y \in U$.

$$T_k f(x) = \sum_{|i| \leq k} \frac{\partial_i f(y) \cdot (x-y)^i}{i!}$$
$$f(x) = T_k f(x) + o(||x - y||^k)$$

$*$ $i = (i_1, ..., i_n), i_j \in \mathbb{Z}$ ist ein Tupel.
$*$ $|i| = i_1 + ... + i_n$
$*$ $\partial_i = \partial_1^{i_1} ... \partial_n^{i_n}$
$*$ $(x-y)^i = (x_1 - y_1)^{i_1} \cdot ... \cdot (x_n - y_n)^{i_n}$
$*$ $i! = i_1! \cdot ... \cdot i_n!$

$$f(x) = g(x)h(x)$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(x) T_k h(x)$$
$$f(x) = g(x) + h(x)$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(x) + T_k h(x)$$
$$f(x) = g(h(x))$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(T_k h(x))$$

Nützliche Taylorreihen:
ür $k \neq \infty$ addiere den Fehler $o(||x - y||^2)$

$\sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$
$\cos(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$
$\tan(x)$ $\forall x < \frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$
$\sec(x)$ $\forall x < \frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \cdots$
	Do More!

3.5 Kritische Punkte

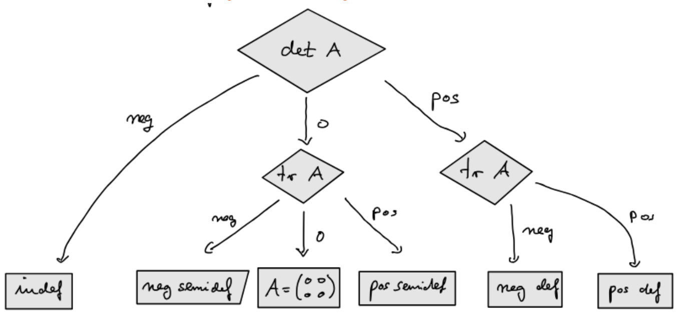
Def. 3.8.0 ***Extremstellen:***
Für $U \subseteq \mathbb{R}^n, f: U \to \mathbb{R}$ Dann hat f bei $y \in U$ ein
lokales Minimum falls $\exists \varepsilon > 0$ sodass: $||x - y|| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \leq f(x)$
lokales Maximum falls $\exists \varepsilon > 0$ sodass: $||x - y|| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \geq f(x)$
lokales Extremum falls y ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.
globales Minimum falls $x \in U \implies f(y) \leq f(x)$
globales Minimum falls $x \in U \implies f(y) \geq f(x)$
globales Extremum falls y ein globales Minimum oder ein globales Maximum ist. Bmkg: Globale Extrema sind jeweils auch lokale Extrema
Prop. 3.8.1 ***:***
$y \in U$ eine lokale Extremstelle $\implies$ y ist ein Kritischer Punkt.
Def. 3.8.2 ***:***
$y \in U$ heisst **kritischer Punkt** falls $\bigtriangledown f(y) = 0$
Def. 3.8.6 ***Nicht-degenerierte-Stellenn:***
Für $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m, f \in C^2$ Ein Punkt $x \in U$ heist nicht-degeneriert, falls für die Hessische $H_f(x)$ gilt, dass $\det(H_f(x)) \neq 0$.
Def. 3.8.7.1 ***Extremstellen im eindimensionalen bereich:***
$*$ $f'(y) = 0, f''(y) > 0 \implies y$ ist lokale Minimalstelle.
$*$ $f'(y) = 0, f''(y) < 0 \implies y$ ist lokale Maximalstelle.
$*$ y ist Sattelpunkt $\implies f'(y) = 0, f''(y) = 0$
Def. 3.8.7.2 ***Extremstellen auf Funktionen $f: (U \in$***

$\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$**:**

- $H_f(y)$ pos. def. $\implies$ y ist lok. Minimalstelle.
  $\implies$ $H_f(y)$ ist pos. semidefinit.
- $H_f(y)$ neg. def. $\implies$ y ist lok. Maximalstelle.
  $\implies$ $H_f(y)$ ist neg. semidefinit
- $H_f(y)$ indef. $\implies$ y ist Sattelpunkt.
- $\det(H_f) \neq 0$ $\implies$ $H_f(y)$ ist pos. def. oder neg. def. oder indef.

(Siehe Lineare Algebra basics)

Rmrk. 3.8.7.3 ***Definitheit für*** 2×2 ***Matrizen A:***



Rmrk. 3.8.8 ***If someone wants to contribute this pls do Oo. (Sylvester Kriterium):***

3.6 Umkehrsatz

Def. 3.10.0 ***lokale umkehrbarkeit:***
$U \in R^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^n$ heisst **lokal umkehrbar** bei $y \in U$ falls offene $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ existieren mit $y \in V, f(y) \in w$, sodass $f|_V : V \to W$ bijektiv ist.
Bzw. es existiert $g : W \to V$ sodass $f|_V \circ g = id_W, g \circ f|_W = id_V$. g ist die umkehrfunktion von $f|_V$

Def. 3.10.2 ***Satz der Umkehrfunktion:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n, f \in C^k, k \geq 1$ und $J_f(y)$ eine invertierbare Matrix, dann ist f lokal umkehrbar bei y, die Umkehrfunktion g ist C^k und

$$J_g(f(y)) = (J_f(y))^{-1}$$