Analysis II Cheatsheet

Luna Lorea Zehnder

20. Januar 2025

Def. 0.0 ***Contribution:***
Falls du Fehler findest oder Dinge fehlen, öffne doch ein issue auf GitHub bzw. kannst du auch einen Pullrequest machen wenn du die Zeit dafür hast :)
(Dort findest du jeweils auch gleich die neuste Version dieses Cheatsheets)

1 Basics

1.1 Lineare Algebra

Def. 1.1.0 ***Norm:***
Für $u \in \mathbf{R}^n, ||u|| = \sqrt[2]{u_1^2 + ... + u_n^2}$

Def. 1.1.1 ***Definite Matrizen:***
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heist...
...**positiv definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av > 0$
...**positiv semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av \leq 0$
...**negativ definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av < 0$
...**negativ semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av \geq 0$
...**indefinit** falls es v, w gibt mit $v^T Av > 0 \wedge w^T Aw < 0$
Für die eigenwerte λ von A gilt:

A pos. def.	$\iff$	$\forall \lambda : \lambda > 0$
A pos. semidef.	$\iff$	$\forall \lambda : \lambda \geq 0$
A neg. def.	$\iff$	$\forall \lambda : \lambda < 0$
A neg. semidef.	$\iff$	$\forall \lambda : \lambda \leq 0$
A indef.	$\iff$	A hat pos. und neg. eigenwerte.
$\det(A) \neq 0$	$\implies$	$\forall \lambda : \lambda \neq 0$

1.2 Notation

Def. 1.2.2 ***Landau Notation:***
$U \in \mathbb{R}^n, h : U \to \mathbb{R}, y \in U$
$* \; o(h) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \lim_{\substack{x\to y \\ x\neq y}} \frac{f(x)}{h(x)} = 0\}$
$* \; f = o(h) := f \in o(h)$
$* \; o(f) = o(h) := o(f) \in o(h)$
$* \; f = o(1) \iff \lim_{x\to y} f(x) = 0$
$* \; \lambda o(h) + \mu o(h) = o(h) \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$* \; g \cdot o(h) = o(gh) = o(g) \cdot o(h)$
$* \; o(h^d) = o(h^e) \; \forall e \leq d$ $*$ Für Monome p in $x_i - y_i$ von Grad d: $p = o(||x-y||^e) \; \forall e \leq d$ & $o(p) = o(||x-y||^d)$

1.3 Methoden

Def. 1.3.3 ***Koeffizientenvergleich:***
Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen. $Q(x) = P(x) \iff \deg(Q) = \deg(P) = I \wedge \forall i, 0 \leq i \leq I : q_i = p_i$ Wenn wir unbekannte in den koeffizienten haben können wir damit ein Gleichungsystem machen.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

Def. 2.1.0.1 ***ODE:***
Sei $k \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^{k+2}$, $G : U \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$G(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}) = 0$$

eine ODE k-ter Ordnung.

Def. 2.1.0.2 ***Lösung einer ODE:***
Eine Lösung einer ODE der Ordnung k ist eine k-mal diffbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$G(x, f(x).f'(x), ..., f^{(k)}(x) = 0$$

.

Def. 2.1.0.3 ***Anfangswertproblem:***
Sind bei einer ODE zusäzlich noch Anfangsbedinungen gegeben, dh.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(k-1)}(x_0) = y_k$$

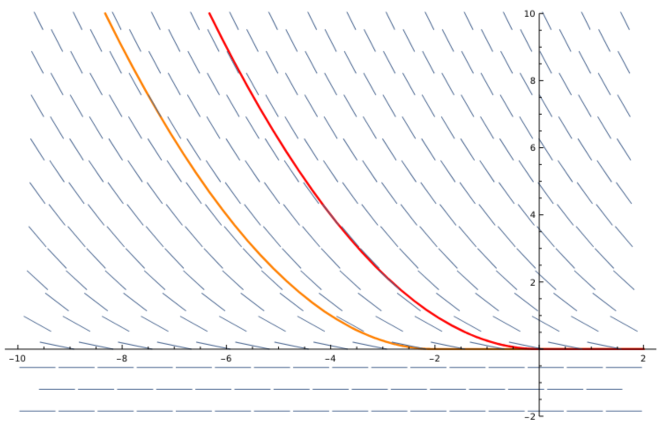
mit $x_0, y_0, ..., y_k \in \mathbb{R}$, dann liegt ein AWP vor.

Rmrk. 2.1.0.4 :
k wird generell minimal angegeben.
$G(x, y) = 0$ ist **keine** ODE.
Lässt sich eine ODE als $y^{(k)} = F(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ schreiben so nennen wir diese **explizit**.
Stammfunktionsprobleme sind spezialfälle einer ODE, eg $y' = 1/x$.
Sind ODEs nicht von x abhängig so nennt man diese **Autonom**. Eg. $y'' = 1/m$

2.1 Einführung

Prop. 2.1.6 ***Existenz- und Eindeutigkeitssatz:***
Ein AWP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ mit $F \to \mathbb{R}$ stetig für $U \in \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in U$, hat eine Lösung.
Ist F stetig differenzierbar, so gibt es eine **eindeutige maximale** Lösing. (Maximal bedeutet, es ist nicht eine Einschränkung einer anderen Lösung mit grösserem Intervall.)

Def. 2.1.7 ***Vektorfelddarstellung:***
Eine Explizize ODE der Form $y' = F(x, y)$ mit $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lässt sich durch das Vektorfeld $V : U \to \mathbb{R}^2, V(x, y) = (1, F(x, y))$ visualisieren. Eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ des ODE hat als Graph eine Kurve beschrieben durch $\phi : I \to \mathbb{R}^2, \phi(x) = (x, f(x))$ mit $\phi'(x) = (1, f'(x)) = V(x, y)$. D.h. ϕ ist an jedem Punkt tangential zum Vektorfeld V.



2.2 Lineare ODE

Def. 2.2.1 ***Lineare ODE:***
Eine Lineare ODE ist eine ODE von Ordnung $k \geq 1$ der Form
$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + ... + a_0 y = b$$
Koeffizienten $a_{k-1}, ..., a_0$ und inhomogenität b sind Funktionen $I \to \mathbb{C}$ für ein offenes Intervall $I \in \mathbb{R}$. Falls $b = 0$, heisst die lineare ODE **homogen**, sonst **inhomogen**. Falls wir eine inhomogene lineare ODE haben, ist die **zugehörige homogene lineare ODE**:
$$y^{(k)} + ... + a_0 y = 0$$
Eine Lösung ist eine k-mal differenzierbare $f : I \to \mathbb{C}$
$$f^{(k)}(x) + ... + a_0(x)f(x) = b(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
wobei $f^{(j)} = (Re\ f(x))^{(j)} + i \cdot (Im\ f(x))^{(j)}$
Def. 2.2.5 ***Superpositionsprinzip:***
$$\begin{array}{rll} f_0 & \text{Lösung der ODE mit inhomogenität} & b \\ g_0 & \text{Lösung der ODE mit inhomogenität} & c \\ \lambda f_0 + \mu g_0 & \text{Lösung der ODE mit inhomogenität} & \lambda b + \mu c. \end{array}$$
Def. 2.2.8 ***:***
Für eine lineare ODE (1) k-ter Ordnung mit stetigen $a_{k-1}, ..., a_0, b$ gilt:
$*$ Die Lösungen der zugehörigen homogenen ODE (2) bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum S mit $\dim_{\mathbb{C}} S = k$
$*$ Die inhomogene ODE (1) hat eine Lösung f_0. Die Menge aller Lösungen bildet dann den affinen Raum
$$f_0 + S = \{f_0 + f \mid f \in S\}$$
$*$ Für beliebige $x_0 \in I$ und $y_0, ..., y_{k-1} \in \mathbb{C}$ hat das dazugehörige AWP (1) genau eine Lösung.

Sind $a_{k-1}, ..., a_0, b$ reellwertig, dann gilt:
$*$ Reelwertige Lösungen der zugehörigen homogenen ODE (2) bilden einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum $S_{\mathbb{R}}$ von S mit $dim_{\mathbb{R}} = k$
$*$ Die inhomogene ODE (1) hat eine reelwertige Lösung f_0 und die Menge aller Lösungen bildet den affinen $\mathbb{R}$-Raum
$$f_0 + S_{\mathbb{R}}$$
$*$ Für $y_0, ..., y_{k-1} \in \mathbb{R}$ hat das zugehörige AWP genau eine reelwertige Lösung.
Ex. 2.2.8.1 ***Lösungsstrategie für Lineare ODEs:***

1. Finde eine Basis $f_1, ..., f_k$ des Lösungsraums S der homogenen ODE
   $k = 1$: finde eine Lösung $f_1 \neq 0$.
2. Finde eine einzelne Lösung f_0 der inhomogenen ODE (Partikulärlösung). Allg. Lösung: $f_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$.
   $k = 1$: allg. Lösung $f_0 + \lambda f_1$
3. Einsetzen der Anfangswerte $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem für $\lambda_1, ..., \lambda_k$ mit eindeutiger Lösung.
   $k = 1$: $f_0(x_0) + \lambda f_1(x_0) = y_0 \implies \lambda = \frac{y_0 - f(x_0)}{f_1(x_0}$

2.3 Lineare ODE erster Ordnung

Zu lösen: $y' + ay = b$ mit gegebenen stetigen $a, b : I \to \mathbb{C}$
Prop. 2.3.1 ***Die Lösungen der ODE:***
Die Lösungen für die homogene ODE
$$y' + ay = 0$$
sind genau die Funktionen $ze^{-A(x)}$ für $z \in \mathbb{C}$ und A eine Stammfunktion von a.
Für die inhomogene ODE
$$y' + ay = b$$
Ansatz $f(x) = z(x) \cdot e^{-A(x)}$. Einsetzen in die ODE gibt uns $f' + af = b$
$\iff z'e^{-A} + zae^{-A} - aze^{-A} = b$
$\iff z'e^{-A} = b$
$\iff z' = e^A b$
$\iff z$ ist Stammfunktion von $e^A b$

2.4 Lineare ODEs mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(k)}, a_{k-1}y^{(k-1)}, ..., a_0 y = b$$
für $a_{k-1}, ..., a_0 \in \mathbb{C}$ und $b : I \to \mathbb{C}$.

2.4.1 Homogene ODE

Def. 2.4.0.1 ***Charakteristisches Polynom:***
$$P(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + ... + a_0$$
Ist das Charakteristische Polynom der linearen ODE.
Prop. 2.4.0.2 ***Lösen der homogenen ODE:***

1. $P(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C} \implies e^{\alpha x}$ löst die homogene ODE.
2. Hat P keine mehrfachen Nullstellen, so ist $\{e^{\alpha x} \mid P(\alpha) = 0\}$ eine Lösungsbasis.

Prop. 2.4.0.3 ***Basis des Lösungsraums:***
Hat P die Nullstellen $\alpha_1, ..., \alpha_l$ mit Vielfachheit $v_1, ..., v_l$, so ist bildet die Menge
$$\{x^j e^{\alpha_i x} \mid 1 \leq i < l, 0 \leq j < v_{i-1}\}$$
eine Bases des Lösungsraums.
Rmrk. 2.4.0.3 ***:***
Falls $a_0, ..., a_{k-1} \in \mathbb{R}$, dann gilt:
$$P(\alpha) = 0 \iff P(\overline{\alpha}) = 0$$
Man findet eine Basis des reelwertigen Lösungsraum, indem man $e^{\alpha x}, e^{\overline{\alpha} x}$ ersetzt durch
$$e^{\beta x}\cos(\gamma x), e^{\beta x}\sin(\gamma x)$$
für $\alpha = \beta + i\gamma$.

2.4.2 Inhomogene ODE

Def. 2.4.1 ***Methode der unbestimmten Koeffizienten:***
Wir schauen uns dafür die Form der Inhomogenität an:

* $b(x) = x^d e^{\alpha x}$ (Spezialfälle: $b = x^d$, $b = e^{\alpha x}$)
  $\implies$ es gibt eine Lösung $f_0(x) = Q(x)e^{\alpha x}$, für ein Polynom Q mit $\deg Q \le d + j$, wobei α j-fache Nullstelle von P (falls $P(\alpha) \ne 0 \iff j = 0$)

* $b(x) = x^d \cos(\alpha x)$ oder $x^d \sin(\alpha x)$
  $\implies$ es gibt eine Lösung $f_0(x) = Q_1(x)\cos(\alpha x) + Q_2 \sin(\alpha x)$, für Polynome Q_1, Q_2 mit Grad jeweils $\deg(Q_i) \le d + j$, falls α_i j-fache Nullstelle von P

Anleitung:

1. Benutze das Superpositionsprinzip (2.2.5) um die inhomogenität so aufzuteilen, dass sie auf die oben genannten gleichungen passen.

2. Finde die passende Funktion f_0 indem du α aus der (teil) inhomogenität abliest und in die vorgegebene Funktion einsetzt.

3. Setze f_0 für y in die ODE ein bzw die jeweiligen ableitungen.

4. Finde die Q_i für welche die Gleichung für alle x gilt mit hilfe des Koeffizientenvergleichs. (Die Q_i sind jeweils von der Form $q_0 x^i + q_1 x^{i-1} + ... + q_i$ wobei $i = \deg Q$)

5. Setze die Q_i in f_0 ein um eine Lösung zu erhalten.

6. Berechne die lösung der ursprungs ODE indem du die resultate der Teilhomogenitäten nach dem Superpositionsprinzip wieder zusammenrechnest.

2.5 Other Methods

Def. 2.6.1 ***Separation der Variablen:***
Für ODEs der Form $y' = a(y) \cdot b(x)$ und a, b stetig. Für jede Nullstelle $y_0 \in \mathbb{R}$ von a gibt es eine Konstante Lösung $y(x) = y_0$.

Für $a(y) \ne 0$: ODE $\iff \frac{y'}{a(y)} = b(x)$
$\iff \int \frac{y'}{a(y)} dx = \int b(x) dx + c$ für $c \in \mathbb{R}$

1. Finde Stammfunktion A,B von $\frac{1}{a}, b$
   * Kettenregel: $\int \frac{y'}{a(y)} dx = A(y) + c$
   $\implies A(y) = B(x) + c$

2. Falls A eine Umkehrfunktion hat, dann ist $y = A^{-1}(B(x) + x)$

3 Differenzielle Analysis in $\mathbb{R}^n$

3.1 Einleitung

* $[a, b] \to \mathbb{R}^m$ Pfad oder Weg

* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Skalarfeld

* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

3.2 Stetigkeit

Def. 3.2.1 ***Konvergenz einer Folge:***
Eine Folge $x_1, x_2, ... \in \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $y \in \mathbb{R}^n$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \forall k \ge N : ||x_k - y|| < \varepsilon$$

Dann schreibt man $\lim_{i \to \infty} x_i = y$.

$$\lim_{i\to\infty} x_i = y \iff \lim_{i\to\infty} ||x_i - y|| = 0$$
$$\iff \lim_{i\to\infty} x_{i,j} = y \;\; \forall j \in \{1, ..., n\}$$

Def. 3.2.3 ***Stetigkeit:***
Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **stetig bei** $x_0 \in U$ falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U$:

$$||x - x_0|| < \delta \implies ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$$

und **stetig** falls f bei jedem punkt $x_0 \in U$ stetig ist.
Prop. 3.2.4 :
f stetig bei $x_0 \iff$ Für jede Folge $x_0, x_1, ... \in U$ mit $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$ gilt $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(x_0)$
Def. 3.2.5 ***Konvergenz einer Funktion:***
$f : U \to \mathbb{R}^m$ konvergiert bei $x_0 \in U$ gegeb $y \in \mathbb{R}^m$ falls $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in U$:

$$||x - x_0|| < \delta \text{ und } x \ne x_0 \implies ||y - f(x)|| < \varepsilon$$

Dann schreibt man $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x \ne x_0}} f(x) = y$.
Prop. 3.2.7 :
$f : U \to V, g : V \to \mathbb{W}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ f, g stetig $\implies g \circ f : U \to W$ ist stetig.

$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x \ne x_0}} f(x) = y \iff$ Für jede Folge $x_1, x_2, ... \in U \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$ gilt $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = y$
Def. 3.2.11 *$U \subseteq \mathbb{R}^n$* ***heisst:***

* **beschränkt** falls $\{||x|| \mid x \in U\} \subseteq \mathbb{R}_0^+$

* **abgeschlossen** falls $x_1, x_2, ... \in U$, $\lim_{k\to\infty} x_k = y \in \mathbb{R}^n \implies y \in U$

* **kompakt** falls U beschränkt und abgeschlossen.

* **offen** falls $\forall x \in U \, \exists \delta > 0$:

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - y_i| < \delta \text{ für alle } i\}$$

Prop. 3.2.13 :
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann:

(1) $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abg $\implies f^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ abg.

(2) $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen $\implies f^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Prop. 3.2.15 :
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer und kompakt, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig $\implies f$ nimmt auf U $Min.$ und $Max.$ an, d.h. es gibt $x_+, x_- \in U$ sodass $\forall y \in U : f(x_-) \le f(y) \le f(x_+)$

3.3 Parzielle Ableitungen

Prop. 3.3.2 *:*
$U \in\subseteq^n$ offen $\iff \mathbb{R}^n \setminus U$ abgeschlossen.
Def. 3.3.5 *i-te partielle Ableitung:*
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$. Für $i \in \{1, ..., n\}$ ist die i-te partielle Ableitung von f bei $y \in U$

$$\partial_i f(y) = g'(y_i) \in \mathbb{R}$$

für $g : \{t \in \mathbb{R} \mid (y_1, ..., t, ..., y_n)) \in U\} \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(y_1, ..., t, ..., y_n)$$

falls g bei y diffbar ist.
Weitere Schreibweisen:
$\partial_i f = \partial_{x_i} f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}$
Def. 3.3.9 *Jacobimatrix:*
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$. Die $m \times n$-Matrix

$$J_f(x) = (\partial_j f_i(x))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

heisst Jacobimatrix von f bei x.
Def. 3.3.11 *Gradient und Divergent:*
Gradient: Wenn für die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen existieren für $x_0 \in U$, dann ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

Divergent Wenn für eine Funktion $f = \{f_1, ..., f_m\} : U \to \mathbb{R}^m$ alle partiellen ableitungen für alle f_i bei $x_0 \in U$ existieren, ist der Divergent die Trace der Jakobimatrix

$$div(f)(x_0) = Tr(J_f(x_0))$$

3.4 Das Differential

Def. 3.4.2 *Differenzierbarkeit:*
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine Funktion und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung ist, dann ist f bei $x_0 \in U$ differenzierbar mit Differenzial A, falls:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

Prop. 3.4.4 *Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen:*
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine differenzierbare Funktion dann gilt:

1. Die Funktion f ist stetig auf U
2. Für die Funktion $f = [f_1, ..., f_m]$ existieren alle $\partial_{x_j} f_i$ mit $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$

Prop. 3.4.6 *Differenzierbarkeit bei Funktionsoperationen:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar:

1. $f + g$ ist differenzierbar und $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. Falls $m = 1 : f \cdot g$ differenzierbar.
3. Falls $m = 1, g \neq 0 : \frac{f}{g}$ differenzierbar.

Prop. 3.4.7 *Differenzial von elementaren Funktionen:*
Prop. 3.4.9 *Kettenregel:*
$U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar.
Funktionen: Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.
Jakobi Matrizen: $J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0) \cdot J_f(x_0)$.
Gradienten: $\bigtriangledown_{g \circ f} = Jg \circ f^T, \bigtriangledown_g = J_g^T$ also $\bigtriangledown_{g \circ f}(x_0) = J_f(x_0)^T \cdot \bigtriangledown_g(f(x_0))$.
Def. 3.4.11 *Der Tangentialraum:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x_0 \in U$, $A = df(x_0)$. Der Tangentialraum bei x_0 des Graphen von f ist der Graph von $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$, also $T = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
Def. 3.4.13 *Richtungsableitung:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x_0 \in U$. Die Richtungsableitung von f bei x_o in Richtung v ist

$$D_v f(x_o) := J_g(0) = \begin{pmatrix} g'(0)_1 \\ \vdots \\ g'(0)_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

für die Hilfsfunktion $g : \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in U\} \to \mathbb{R}^m$ $g(t) = f(x_0 + tv)$
Prop. 3.4.15 *Richtungsableitung von differenzierbaren Funktionen Berechnen:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, x_0 \in U$.
$\implies D_v f(x_0) = df(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$ was auch bedeutet, dass die Richtungsableitung linear vom Richtungsvektor abhängen.
$\implies D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0)$
Ex. 3.4.17 *Richtungsableitung von allgemeinen stetigen Funktionen berechnen.:*
$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ Sollte die daraus resultierende Funktion nicht linear von v abhängig sein, so ist f nicht differenzierbar.

3.5 Höhere Ableitungen

Def. 3.5.1 *C Notation:*
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
$C^0(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig}\}$
$C^k(U, \mathbb{R}^m) :=$
$\{f : U \to \mathbb{R}^m \mid \forall i, j : \partial_j f_i \in C^{k-1}\}$
$\{f : U \to \mathbb{R}^m \mid \text{alle } \partial_{j_i} ... \partial j_k f_i \in C^0(U, \mathbb{R}^m\}$
= k-mal stetig differenzierbar

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \bigcup_{k=0}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R}^m)$$

= Beliebig oft differenzierbar bzw. glatt.
Ex. 3.5.2 *Nützliche C Regeln:*
$*$ **Polynome** mit n Variablen sind in $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
$*$ $f \in C^k \iff f_1, ..., f_m \in C^k$
$*$ C^k ist ein **Vektorraum**
$*$ Für $k \neq 0$ ist $\partial_j : C^k(U, \mathbb{R}) \to C^{k-1}(U, \mathbb{R})$ $*$ $C^k(U, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen unter **Produkten** und **Summen**. (sofern diese Definiert sind). $*$ Eine **Verknüpfung** von C^k Funktionen ist wieder C^k.
Prop. 3.5.4 *Satz von Schwarz:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. Im Allgemeinen wenn $f \in C^k$ dann lassen sich k partielle Ableitungen beliebig vertauschen.
Def. 3.5.9 *Die Hessische:*
$U \in R^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}, x_0 \in U$. Die Hessische von f

bei x_0 ist die quadratische $n \times n$-Matrix

$$H_f(x_0) = (\partial_i \partial_j f(x_0))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Nach dem Satz von Schwarz ist H symmetrisch, falls $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

3.6 Taylorpolynome

Def. 3.7.1 ***Das k-te Taylorpolynom von f bei y:***
$f \in C^k(U, \mathbb{R}), y \in U$.

$$T_k f(x) = \sum_{|i| \leq k} \frac{\partial_i f(y) \cdot (x-y)^i}{i!}$$
$$f(x) = T_k f(x) + o(||x-y||^k)$$

$*$ $i = (i_1, ..., i_n), i_j \in \mathbb{Z}$ ist ein Tupel.
$*$ $|i| = i_1 + ... + i_n$
$*$ $\partial_i = \partial_1^{i_1} ... \partial_n^{i_n}$
$*$ $(x-y)^i = (x_1 - y_1)^{i_1} \cdot ... \cdot (x_n - y_n)^{i_n}$
$*$ $i! = i_1! \cdot ... \cdot i_n!$

$$f(x) = g(x)h(x)$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(x) T_k h(x)$$
$$f(x) = g(x) + h(x)$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(x) + T_k h(x)$$
$$f(x) = g(h(x))$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(T_k h(x))$$

Am ende des Cheatsheets sind Lucas Werners 'Some Useful Integrals and Trigonometric Identities' eingefügt.

3.7 Kritische Punkte

Def. 3.8.0 ***Extremstellen:***
Für $U \subseteq \mathbb{R}^n, f: U \to \mathbb{R}$ Dann hat f bei $y \in U$ ein
lokales Minimum falls $\exists \varepsilon > 0$ sodass: $||x-y|| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \leq f(x)$
lokales Maximum falls $\exists \varepsilon > 0$ sodass: $||x-y|| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \geq f(x)$
lokales Extremum falls y ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.
globales Minimum falls $x \in U \implies f(y) \leq f(x)$
globales Minimum falls $x \in U \implies f(y) \geq f(x)$
globales Extremum falls y ein globales Minimum oder ein globales Maximum ist. Bmkg: Globale Extrema sind jeweils auch lokale Extrema

Prop. 3.8.1 :
$y \in U$ eine lokale Extremstelle $\implies$ y ist ein Kritischer Punkt.

Def. 3.8.2 :
$y \in U$ heisst **kritischer Punkt** falls $\nabla f(y) = 0$

Def. 3.8.6 ***Nicht-degenerierte-Stellenn:***
Für $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m, f \in C^2$ Ein Punkt $x \in U$ heist nicht-degeneriert, falls für die Hessische $H_f(x)$ gilt, dass $\det(H_f(x)) \neq 0$.

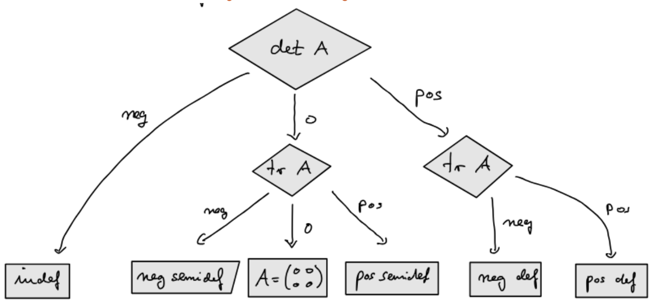
Def. 3.8.7.1 ***Extremstellen im eindimensionalen bereich:***
$*$ $f'(y) = 0, f''(y) > 0 \implies y$ ist lokale Minimalstelle.
$*$ $f'(y) = 0, f''(y) < 0 \implies y$ ist lokale Maximalstelle.
$*$ y ist Sattelpunkt $\implies f'(y) = 0, f''(y) = 0$

Def. 3.8.7.2 ***Extremstellen auf Funktionen $f: (U \in \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$:***

$*$ $H_f(y)$ pos. def.	$\implies$	y ist lok. Minimalstelle.
	$\implies$	$H_f(y)$ ist pos. semidefinit.
$*$ $H_f(y)$ neg. def.	$\implies$	y ist lok. Maximalstelle.
	$\implies$	$H_f(y)$ ist neg. semidefinit
$*$ $H_f(y)$ indef.	$\implies$	y ist Sattelpunkt.
$*$ $\det(H_f) \neq 0$	$\implies$	$H_f(y)$ ist pos. def. oder neg. def. oder indef.

(Siehe Lineare Algebra basics)

Rmrk. 3.8.7.3 ***Definitheit für 2×2 Matrizen A:***



Rmrk. 3.8.8 ***If someone wants to contribute this pls do Oo. (Sylvester Kriterium):***

3.8 Umkehrsatz

Def. 3.10.0 ***lokale umkehrbarkeit:***
$U \in R^n$ offen. $f: U \to \mathbb{R}^n$ heisst **lokal umkehrbar** bei $y \in U$ falls offene $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ existieren mit $y \in V, f(y) \in w$, sodass $f|_V : V \to W$ bijektiv ist.
Bzw. es existiert $g: W \to V$ sodass $f|_V \circ g = id_W, g \circ f|_W = id_V$. g ist die umkehrfunktion von $f|_V$

Def. 3.10.2 ***Satz der Umkehrfunktion:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n, f \in C^k, k \geq 1$ und $J_f(y)$ eine invertierbare Matrix, dann ist f lokal umkehrbar bei y, die Umkehrfunktion g ist C^k und

$$J_g(f(y)) = (J_f(y))^{-1}$$

4 Integralrechnung

Def. 4.1.1.1 ***Integrale:***
Für $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist
$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, ..., \int_a^b f_n(t)dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

4.1 Wegintegral

Def. 4.1.1.2 ***Weg:***
Ein **Weg** ist ein stetiges $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Man sagt γ ist ein Weg **von** $\gamma(a)$ **nach** $\gamma(b)$. Wir betrachten nur Wege γ, die **stückweise** C^1 sind, d.h. es gibt $k \geq 1$ und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ sodass $\gamma|_{(t_i - 1, t_i)}$ für alle $1 \leq i \leq k$ C^1 ist.

Def. 4.1.1.3 ***Wegintegral der Zweiten Art:***
Sei $\gamma: [a.b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $U \in \mathbb{R}^n$ mit Bild$(\gamma) \subseteq U$, und $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist das **Wegintegral von f entlang** γ

$$\int_\gamma f(s) \cdot d\overrightarrow{s} := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

Def. 4.1.4 ***Orientierte Umparametrisierungen:***
Die OU eines Weges $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\delta: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ mit $\delta = \gamma \circ \varphi$, für ein $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ welches stetig, diffbar auf (c,d) und streng monoton wachsend ist mit $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$. (Insbesondere ist φ bijektiv.)

Prop. 4.1.5 ***Umparametriesierte Wegintegrale:***
Ist δ eine OU von γ, dann gilt

$$\int_\gamma f(s)\cdot d\overrightarrow{s} = \int_\delta f(s)\cdot d\overrightarrow{s}$$

Def. 4.1.8 ***Konservative Vektorfelder:***
$U \in \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig. Falls für alle Punktpaare $v, w \in U$ und alle Wege γ, δ von v nach w gilt

$$\int_\gamma f(s)\cdot d\overrightarrow{s} = \int_\delta f(s)\cdot d\overrightarrow{s}$$

dann heisst f konservativ.
Rmrk. 4.1.9 ***Geschlossene Wege:***
Ein Weg $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ heisst geschlossen. Für solche wege kann man $\oint_\gamma$ schreiben.
Prop. ***Wegintegrale konservativer Felder über geschlossene Wege:***
$U \in \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^m$ konservativ $\iff \oint_\gamma f(s)\cdot d\overrightarrow{s} = 0$ für alle geschlossenen Wege $\gamma: [a,b] \to U$.
Def. 4.1.9.1 ***Konvexe Mengen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ heisst konvex, falls alle Strecken mit Endpunkten in U, selbst in U enthalten sind.
Def. 4.1.9.2 ***Sternförmige Mengen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ heisst sternförmig, falls es ein x_0 gibt, sodass für jedes $x \in U$ die Strecke mit Endpunkten x, x_0 in U enthalten sind.
Def. 4.1.9.3 ***Wegzusammenhängende Mengen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ heisst wegzusammenhängend, falls für alle $x, y \in U$ ein Weg von x nach y existiert.
Rmrk. 4.1.9.4 ***Implikationen:***
Konvex $\implies$ Sternförmig $\implies$ Wegzusammenhängend.
Prop. 4.1.9.5 ***Sternförmige konservative felder:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen und **sternförmig**, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i f_j = \partial_j f_i \implies f$ konservativ.
Prop. 4.1.10 ***Potential:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$ konservativ. Dann gibt es ein $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $f = \bigtriangledown g$. Ein solches g heisst **Potential** von f. Falls U wegzusammenhängend ist, dann ist das Potential bis auf addition einer Konstanten eindeutig.
Prop. 4.1.13 ***Jakobimatrix eines konservativen Feldes:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$ C^1. f konservativ $\implies \partial_i f_j = \partial_j f_i$ für $i, j \in \{1, ..., n\} \iff J_f(x)$ symmetrisch für alle $x \in U$.
Def. 4.1.20 ***Rotation - Curl:***
$U \in \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Dann ist die Rotation von f das C^0 Vektorfeld

$$rot(f) = curl(f) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

Rmrk. ***Übersicht konservativität:***

$f = \nabla g \iff f$ konservativ $\iff \oint_\gamma f(s)\cdot d\vec{s} = 0$

falls U sternförmig $\Uparrow$ $\Downarrow$

J_f symmetrisch $\underset{n=3}{\iff}$ curl $f = 0$

4.2 Das Riemannintegral in $\mathbb{R}^n$

Für $U \in \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: U \to \mathbb{R}$ stetig kann man das Riemannintegral von f über U definieren, geschrieben

$$\int_U f(x)dx \text{ oder } \int_U f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$$

Es ist gleich dem Rauminhalt, der in R^{n+1} zwischen U und dem Graphen von f eingeschlossen wird, wobei anteile mit $f < 0$ negativ sind.
Eigenschaften des Riemannintegral in $\mathbb{R}^n$:
Def. 4.2.0.1 ***Kompatibilität:***
$n = 1, U = [a,b] \implies \int_U f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
Def. 4.2.0.2 ***Linearität:***
$\int_U af(x) + bg(x)dx = a\int_U f(x)dx + b\int_U g(x)dx$
Def. 4.2.0.3 ***Inlkusion-Exklusion:***
$\int_{U\cup V} f(x)dx = \int_U f(x)dx + \int_V f(x)dx - \int_{U\cap V} f(x)dx$
Def. 4.2.0.4 ***Satz von Fubimi für 'Quader':***
$U_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, U_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ kompakt. Dann:

$$\begin{aligned} \int_{U\times V} f(x)dx &= \int_{U_1}\left(\int_{U_2} f(x_1,x_2)dx_2\right)dx_1 \\ &= \int_{U_2}\left(\int_{U_1} f(x_1,x_2)dx_1\right)dx_2 \end{aligned}$$

Def. 4.2.0.5 ***Allgemeiner Satz von Fubimi:***
$U \subseteq \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$
$V = \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \mid \exists x_2 : (x_1, x_2) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$
$W(x_1) = \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \mid (x_1, x_2) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$
Falls $g: V \to \mathbb{R}, g(x_1) = \int_{W(x_1)} f(x_1, x_2)dx$ stetig ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_U f(x)dx &= \int_V g(x_1)dx_1 \\ &= \int_U \int_{W(x_1)} f(x_1,x_2)dx_2dx_2 \end{aligned}$$

Def. 4.2.0.6 ***Positivität:***
$f \leq g \implies \int_U f(x)dx \leq \int_U g(x)dx$
$f \geq 0, U \subseteq V \implies \int_U f(x)dx \leq \int_V f(x)dx$
Def. 4.2.0.7 ***Dreiecksungleichung:***
$\left|\int_U f(x)dx\right| \leq \int_U |f(x)|\, dx$
Def. 4.2.0.8 ***Volumen:***
Das Volumen von U ist definiert als $vol(U) := \int_U 1dx$. Der Satz von Fubimi kann zur berechnung des Volumens verwendet werden. zB Schnittfläche üver Höhe integrieren.
Def. 4.2.3 ***Parametrisierte und vernachlässigbare Mengen:***

(1) Für $1 \leq m \leq n$ ist eine **parametrisierte m-Menge** in $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion

$$f: [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \to \mathbb{R}^n$$

die C^1 auf $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_m, b_m)$ ist.

(2) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **vernachlässigbar** falls $B \subseteq Bild(f_1) \cup \cdots \cup Bild(f_n)$ für m_i-Mengen f_i mit $m_i < n$.

Prop. 4.2.5 :
Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und vernachlässigbar, dann $\int_U f(x)dx = 0$ für alle $f \in C^0(U, \mathbb{R})$.

4.3 Uneigentliche Integrale

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert man das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Def. 4.3.0.1 :
Für $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ stetig, ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} f(x,y)dxdy$$

Rmrk. 4.3.0.2 :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \lim_{S\to\infty} \int_{[-S,S]^2} f(x,y)dxdy \\ &= \lim_{S\to\infty} \int_{-S}^{S}\int_{-S}^{S} f(x,y)dxdy\end{aligned}$$

Falls $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$ konvergiert und stetig ist, dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

Def. 4.3.1 :
$f : [a, \infty) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, dann

$$\int_{[a,\infty)\times[c,d]} f(x,y)dxdy := \lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$

4.4 Die Transformationsformel

Def. 4.4.0 *Substitutionsregel:*
$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

Def. 4.4.2 *Transformationsformel:*

$$\int_{\overline{U}} f(\varphi(x))|\det J_\varphi(x)|dx = \int_{\overline{V}} f(y)dy$$

falls:

* $\overline{U}$ kompakt, $\overline{U} = U \cup B$ mit U offen, B vernachlässigbar
* $\overline{V}$ kompakt, $\overline{V} = V \cup C$ mit V offen, C vernachlässigbar
* $f : \overline{V} \to \mathbb{R}$ stetig
* $\varphi : \overline{U} \to \overline{V}$ stetig
* $\varphi(U) = V, \varphi|_u$ injektiv und C^1
* $|\det J_\varphi(x)|$ lässt sich stetig auf $\overline{U}$ fortsetzen.

4.5 Der Schwerpunkt

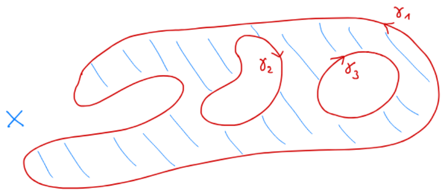
Def. 4.5.0 *Der Schwerpunkt:*
Der **Schwerpunkt** $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ einer kompakten Menge $U \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $\overline{x}_i = \frac{1}{vol(u)} \int_U x_i dx$

4.6 Satz von Green

Def. 4.6.1 *Einfache Geschlossene Kurve:*
Eine **einfach geschlossene Kurve** in $\mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, sodass für $s, t \in [a, b]$ mit $s < t$ gilt:

$$\gamma(s) = \gamma(t) \iff s = a \text{ und } t = b.$$

Def. 4.6.3 *Satz von Green:*
$X \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, mit Rand ∂X gleich der disjunkten Vereinigung einfach geschlossener Kurven $\gamma_1, ..., \gamma_k$. Ausserdem liege X stets links von γ_i.



Beispiel eines $X \subseteq \mathbb{R}^2$ wie im Satz von Green.

$f : U \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld für ein offenes U mit $X \subseteq U$. Dann:

$$\int_X \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} dxdy = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f \cdot d\overrightarrow{s}.$$

5 Usefull formulas

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x - C$
$n \cdot x^{n-1}$	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ {\scriptstyle n\neq -1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$x\log\lvert x\rvert - x$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\underbrace{1+\tan(x)^2}_{=\frac{1}{\cos(x)^2}}$	$\tan(x)$	$-\log\lvert\cos(x)\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$2\sin(x)\cos(x)$	$\sin(x)^2$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos(x)^2$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
$2\tan(x)^3 + 2\tan(x)^2$	$\tan(x)^2$	$\tan(x) - x$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\underbrace{1-\tanh(x)^2}_{=\frac{1}{\cosh(x)^2}}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$x\operatorname{arcsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh}(x)$	$x\operatorname{arccosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$x\operatorname{arctanh}(x) + \ln(1-x^2)$
$\frac{-1}{(ax+b)^2}$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\log\lvert ax+b\rvert$
$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{a}{c}x + \frac{ad-bc}{c^2}\log\lvert cx+d\rvert$
$\frac{-2x}{(x^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\frac{-2x}{(x^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{1}{a}x\right)$

Trigonometric Identities.

- $\cos(-z) = \cos(z)$, **'even' function.**
- $\sin(-z) = -\sin(z)$, **'odd' function.**
- $\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$
- $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, **Euler.**
- $\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$, **Pythagoras.**
- $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

Addition.

- $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
- $\sin(z-w) = \sin(z)\cos(w) - \cos(z)\sin(w)$
- $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
- $\cos(z-w) = \cos(z)\cos(w) + \sin(z)\sin(w)$
- $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
- $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$
- $\sin(z) + \sin(w) = 2\sin(\frac{1}{2}(z+w))\cos(\frac{1}{2}(z-w))$
- $\sin(z) - \sin(w) = 2\cos(\frac{1}{2}(z+w))\sin(\frac{1}{2}(z-w))$
- $\cos(z) + \cos(w) = 2\cos(\frac{1}{2}(z+w))\cos(\frac{1}{2}(z-w))$
- $\cos(z) - \cos(w) = -2\sin(\frac{1}{2}(z+w))\sin(\frac{1}{2}(z-w))$

Multiplication.

- $\sin(z)\sin(w) = \frac{1}{2}(\cos(z-w) - \cos(z+w))$
- $\sin(z)\cos(w) = \frac{1}{2}(\sin(z+w) + \sin(z-w))$
- $\cos(z)\cos(w) = \frac{1}{2}(\cos(z-w) + \cos(z+w))$
- $\sin(z)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2z))$
- $\cos(z)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2z))$

Hyperbolic Identities.

- $\cosh(-z) = \cosh(z)$, **'even' function.**
- $\sinh(-z) = -\sinh(z)$, **'odd' function.**
- $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$
- $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$
- $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
- $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
- $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
- $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Taylor Series Expansions.

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(z-c)^n}{n!} = f(c) + f'(c)(z-c) + \frac{f''(c)(z-c)^2}{2!} + \dots$
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$
- $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$
- $\log(1+z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Derivative Rules.

- **Linearity:** $\alpha \in \mathbb{R} : (\alpha f \pm g)' = \alpha f' \pm g'$
- **Multiplication:** $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- **Division:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- **Chain Rule:** $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$
- **Inverse:** $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \overset{\circ f}{\Longleftrightarrow} (f^{-1}) \circ f = \frac{1}{f'}$

Integration Tricks.

- **Linearity:** $\alpha \in \mathbb{R} : \int (\alpha f + g)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x$
- **Partial Integration:** $\int (f \cdot g')\,\mathrm{d}x = fg - \int (f' \cdot g)\,\mathrm{d}x$
- **Substitution:** $\int_a^b (f \circ \phi) \cdot \phi'\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\,\mathrm{d}x$
- **Partial Fraction Decomposition:** to do, sry :U