

# Calculul valorilor proprii și vectorilor proprii prin metodele puterii. Metoda Householder

## Noțiuni teoretice

Pentru început, vom introduce conceptele de valoare și vector propriu folosind următoarea definiție: fiind dată o matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , un număr  $\lambda \in \mathbb{C}$  se numește valoare proprie a matricei  $A$  dacă există un vector nenul  $x \in \mathbb{C}^n$ , numit vector propriu asociat valorii proprii  $\lambda \in \mathbb{C}$ , astfel încât:

$$Ax = \lambda x.$$

Sistemul liniar omogen  $Ax = \lambda x$  admite soluții nenule dacă și numai dacă  $\det(\lambda I_n - A) = 0$ . Polinomul  $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ , de gradul  $n$ , se numește *polinomul caracteristic* al matricei  $A$  iar ecuația  $p(\lambda) = 0$  se numește *ecuație caracteristică* a matricei  $A$ . Valorile proprii ale unei matrice sunt zerourile polinomului caracteristic  $p(\lambda)$ .

*Spectrul de valori proprii* al matricei  $A$  este dat de mulțimea

$$\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

Mai mult, numărul real  $\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \lambda(A)} (|\lambda_i|)$  definește *raza spectrală* a matricei  $A$ .

*Transformarea de asemănare* se definește după cum urmează: spunem că matricele  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sunt asemenea dacă există o matrice nesingulară  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  astfel încât

$$B = TAT^{-1}.$$

În cazul în care matricele  $A$  și  $B$  sunt asemenea, au loc următoarele proprietăți:

- Matricele  $A$  și  $B$  au aceleași valori proprii adică  $\lambda(A) = \lambda(B)$ . Prin urmare, transformarea de asemănare păstrează spectrul de valori proprii al matricei  $A$ .
- Dacă  $x \in \mathbb{C}^n$  este un vector propriu al matricei  $A$ , asociat cu valoarea proprie  $\lambda$ , atunci  $y = Tx \in \mathbb{C}^n$  este vector propriu al matricei  $B$ , pentru aceeași valoarea proprie  $\lambda$ .

Pentru orice matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  există o matrice unitară  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  astfel încât matricea  $S = Q^T A Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitar asemenea cu  $A$  este superior triunghiulară.

În cazul real, pentru orice matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  există o matrice ortogonală  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  astfel încât matricea  $S = Q^T A Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal asemenea cu  $A$  are o structură cvasi-superior triunghiulară:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1q} \\ 0 & S_{22} & \dots & S_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_{qq} \end{bmatrix}$$

unde blocurile diagonale  $S_{ii}, i = 1 : q$  sunt matrice  $1 \times 1$  sau  $2 \times 2$ . Matricele de dimensiune  $2 \times 2$  au valorile proprii complexe. Matricea  $S$  se numește *forma Schur reală* a matricei  $A$ .

În cele ce urmează, vom descrie matematic două proprietăți asociate valorilor proprii ale matricei  $A$ :

- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n A(i, i) = \text{tr}(A)$
- $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$

Funcția OCTAVE care calculează valorile și vectorii proprii pentru o matrice oarecare  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  este *eig*. Un exemplu de utilizare al acestei funcții este următorul:  $[V, L] = \text{eig}(A)$ , unde matricea diagonală  $L$  conține pe diagonala principală valorile proprii ale matricei  $A$  iar coloanele matricei  $V$  reprezintă vectorii proprii ai matricei  $A$ .

## Determinarea vectorilor și valorilor proprii

În continuare, vom studia câteva metode numerice pentru a determina valorile și vectorii proprii ale unei matrice.

### Metoda puterii directe

Fie matricea  $A \in R^{n \times n}$  pentru care considerăm spectrul de valori proprii  $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  și mulțimea de vectori proprii  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , de normă euclidiană unitară, ai matricei  $A$ . Mai mult, presupunem că  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Fie  $y \in \mathbb{C}^n$  un vector de normă euclidiană unitară având o componentă nenulă pe direcția vectorului propriu  $x_1 \in X$ .

Metoda puterii directe presupune definirea șirului vectorial  $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  și a șirului numeric  $(\lambda^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ , după cum urmează:

$$y^{(0)} = y$$

Pentru  $k = 1, 2, \dots, max$

$$z \leftarrow A \cdot y^{(k-1)}$$

$$y^{(k)} \leftarrow \frac{z}{\|z\|_2}$$

$$\lambda^{(k)} \leftarrow (y^{(k)})^T A y^{(k)}$$

Astfel, șirul numeric  $(\lambda^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge către valoarea proprie dominantă, în timp ce șirul vectorial  $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge către vectorul propriu unitar asociat cu valoarea proprie dominantă. Metoda puterii directe converge oricum am alege vectorul  $y$  inițial.

### Metoda puterii inverse

Metoda puterii inverse reprezintă metoda puterii directe aplicată matricei  $B = (A - \mu I)^{-1}$ . Matricea  $B$  va avea o valoare proprie dominantă dacă valoarea  $\mu$  (numită valoare de "deplasare") este o aproximație, chiar și grosieră, a unei valori proprii  $\lambda$  a matricei  $A$ .

Algoritmul metodei puterii inverse este:

$$y^{(0)} = y$$

Pentru  $k = 1, 2, \dots, max$

$$\text{Se rezolvă sistemul liniar } (A - \mu I)z = y^{(k-1)}$$

$$y^{(k)} \leftarrow \frac{z}{\|z\|_2}$$

$$\lambda^{(k)} \leftarrow (y^{(k)})^T A y^{(k)}$$

$$\mu = \lambda^{(k)}$$

Pentru a crește viteza de convergență a algoritmului, valoarea de deplasare  $\mu$  este modificată de la o iterație la alta, utilizând aproximația curentă  $\mu = \lambda^{(k)}$  a valorii proprii  $\lambda$  a matricei  $A$ . Această variantă, este cunoscută sub denumirea de *iterarea cântului Rayleigh*. În metoda puterii inverse, șirul  $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  este convergent către vectorul propriu al matricei  $A$ , asociat valorii proprii  $\lambda$ .

### Metoda deflației

Metoda deflației se folosește doar în cazul matricelor simetrice, cu elemente reale. Folosind metoda puterii directe se determină valoarea proprie dominantă și vectorul propriu corespunzător. Pentru a afla celelalte perechi proprii se procedează astfel:

- Inițial avem o matrice  $A$  cu vectorii proprii  $x_1, x_2, \dots, x_n$  și valorile proprii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Pe  $\lambda_1$  și  $x_1$  îi calculăm folosind metoda puterii directe.
- Construim matricea  $B = (I_n - x_1 y^T)A$ , cu  $y$  ales astfel încât  $x_1 y^T = 1$ . Această matrice va avea valorile proprii  $\{0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$  și vectorii proprii  $\{x_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ , unde  $z_i = x_i - y^T x_i x_1$ ,  $\forall i = 2 : n$ .
- Dacă din matricea  $B$  eliminăm prima linie și prima coloană, matricea obținută, de rang  $n - 1$ , își păstrează perechile proprii mai puțin prima pereche proprie  $(0, x_1)$ . Pe matricea redusă, putem aplica același procedeu, obținându-se valoarea proprie dominantă  $\lambda_2$ . Procesul continuă până se obțin toate valorile proprii ale matricei inițiale.

### Metoda Householder

Metoda propune o procedură de construcție iterativă a unui șir de matrice ortogonal asemenea cu matricea inițială și rapid convergent către forma Schur reală. Dacă prin metodele puterii se obțineau aproximații ale valorilor și vectorilor proprii, prin metoda Householder se urmărește obținerea formei Schur reale, care conține valorile proprii exacte.

Toate versiunile algoritmului QR sunt organizate în două etape:

1. etapa directă, de reducere a matricei date la forma superior Hessenberg prin transformări ortogonale de asemănare;
2. etapa iterativă, de construcție recurentă a unui șir de matrice convergent către

forma Schur reală.

- **Algoritmul QR cu deplasare explicită cu pași simpli**

Considerăm matricea  $H$  ca fiind o matrice superior Hessenberg. Algoritmul este următorul:

$$H_0 = H$$

Pentru  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$H_k - \mu_k I_n = Q_k R_k$$

$$H_{k+1} = Q_k R_k + \mu_k I_n$$

Pentru o alegere convenabilă a lui  $\mu_k$  se poate demonstra că metoda converge rapid către forma Schur reală a matricei  $H$ . De aceea, la fiecare pas facem atribuirea:  $\mu_k = h_{nn}^{(k)}$ . Astfel, algoritmul va fi următorul:

$$\mu = h_{nn}$$

$$H = H - \mu I_n$$

Pentru  $j = 1 : n - 1$

Se determină rotația plană  $P_{j,j+1}$  astfel încât  $(P_{j,j+1}^T H)_{j+1,j} = 0$

$$H = P_{j,j+1}^T H$$

Pentru  $j = 1 : n - 1$

$$H = H P_{j,j+1}$$

$$H = H + \mu I_n$$

- **Algoritmul QR cu deplasare explicită cu pași dubli**

Pentru depășirea dificultăților legate de absența convergenței șirului QR creat de utilizarea pașilor simpli atunci când matricea are valori proprii complexe, se adoptă așa numita strategie a pașilor dubli QR care comprimă într-o singură iterație doi pași simpli QR succesivi. Algoritmul este următorul:

Pentru  $k = 1, 2, \dots$

$$s = h_{n-1,n-1} + h_{n,n}$$

$$p = h_{n-1,n-1} h_{nn} - h_{n,n-1} h_{n-1,n}$$

Se calculează  $M = H^2 - sH + pI_n$

Se factorizează  $M = QR$

$$H = Q^T H Q$$

## Probleme propuse

### Problema 1

Fie matricea tridiagonală:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & a_2 & c_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

Se construiește șirul de polinoame:

$$p_0(\lambda) = 1$$

$$p_1(\lambda) = \lambda - a_1$$

$$p_n(\lambda) = (\lambda - a_n)p_{n-1}(\lambda) - b_n c_{n-1} p_{n-2}(\lambda)$$

a) Arătați că  $p_n(\lambda)$  este polinomul caracteristic al matricei  $A$ .

b) Scrieți o funcție OCTAVE care calculează valorile și vectorii proprii ale matricei  $A$ .

## Problema 2

Să se demonstreze pentru o matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  proprietățile următoare:

a)  $\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right\};$

b)  $\sigma(A - \mu I_n) = \{\lambda_i - \mu\}, \forall \mu \in \mathbb{R};$

c)  $\sigma(A^k) = \{\lambda_i^k\}, \forall k \in \mathbb{N}$

d)  $\sigma((A - \mu I_n)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_i - \mu} \right\}, \forall \mu \in \mathbb{R}.$

## Problema 3

Calculați valorile și vectorii proprii ai unui reflector Householder.

Indicație:  $G^T u = e_1 G$  - este un reflector. Coloanele lui  $G$  sunt vectori proprii.

## Problema 4

Pentru matricea:

Calculul valorilor proprii și vectorilor proprii prin metodele puterii. Metoda Householder

---

$$A = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, c^2 + s^2 = 1$$

calculați valorile și vectorii proprii.

### Problema 5

Să se scrie o funcție Octave pentru a implementa metoda puterii directe.

### Problema 6

Să se scrie o funcție Octave pentru a implementa metoda puterii inverse.