Definizioni e Teoremi di Algebra (senza esempi)

Iniziata lezione 34

Anno accademico 2021/2022

Contents

1 Capitolo 1 **8**
1.1 Corrispondenza . . . 8
1.2 Relazione in se . . . 8
1.3 Relazione/Corrispondenza inversa . . . 8
1.4 Relazione di equivalenza . . . 8
1.5 Relazione banale (di uguaglianza) . . . 8
1.6 Relazione caotica . . . 8
1.7 Classe di equivalenza . . . 8
1.8 Insieme quoziente . . . 9
1.9 Partizione insiemistica . . . 9
1.10 Funzione/Applicazione . . . 9
1.11 Iniettiva . . . 9
1.12 Suriettiva . . . 10
1.13 Biunivoca (biiettiva) . . . 10
1.14 Funzione caratteristica . . . 10
1.15 Operazione binaria . . . 10
1.16 Assiomi di Peano . . . 10
1.17 Principio del buon ordinamento di $\mathbb{N}$ . . . 11
1.18 Teor: Divisione con resto su $\mathbb{N}$ . . . 11

2 Calcolo combinatorio **11**
2.1 Notazione funzionale . . . 11
2.2 Fattoriale crescente . . . 11
2.3 Fattoriale decrescente . . . 11
2.4 Pigenhole principle (principio dei cassetti) . . . 11
2.5 Permutazione . . . 11
2.6 Coefficiente binomiale . . . 11
2.7 Formula . . . 12
2.8 Relazione ricorsiva . . . 12
2.9 Simmetria . . . 12
2.10 Relazione d'ordine . . . 12
2.11 POSET (Partial order set) . . . 12

3 I numeri **13**
3.1 Costruzione di $\mathbb{Z}$ (interi) 13
3.2 Definizione di $\mathbb{Z}$ 13
3.3 Classi su $\mathbb{Z}$ 13
3.4 Sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ 13
3.5 Somma su $\mathbb{Z}$ 13
3.6 Prodotto su $\mathbb{Z}$: 13
3.7 Proprietà operazioni su $\mathbb{Z}$ 13
3.8 Divisibilità 14
3.9 Multiplo 14
3.10 Associati 14
3.11 Unità 14
3.12 Irriducibile 14
3.13 Primo 14
3.13.1 Proposizione: in $\mathbb{Z}$, a è primo $\Rightarrow$ a irriducibile 14
3.13.2 Proposizione: in $\mathbb{Z}$ a irriducibile$\Rightarrow$a primo 15
3.14 Massimo comune divisore 15
3.14.1 Teor: Esistenza del MCD tra due numeri 15
3.14.2 Prop: se $c|a$ e $c|b$ allora c divide ogni combinazione lineare di a e b 16
3.15 Proposizione 16
3.15.1 Lemma MCD(m,m+1)=1 16
3.16 Algoritmo di Euclide 16
3.16.1 Lemma1: L'algoritmo termina 16
3.16.2 Lemma2: Se $a = bq + r$ $MCD(a, b) = MCD(b, r)$ 17
3.16.3 Corollario: $MCD(a, b) = MCD(r_n, 0) = r_n 1$ 17
3.16.4 Lemma3 17
3.17 Coprimi 17
3.17.1 Osservazione1 17
3.17.2 Osservazione 2 17
3.17.3 Proposizione 1 17
3.17.4 Proposizione 2 17
3.18 Equazione diofantea 18
3.18.1 Teor: Soluzione equazione diofantea 18
3.19 Teorema fondamentale dell'aritmetica 18
3.19.1 Osservazione 1 18
3.19.2 Osservazione 2 18
3.19.3 Dimostrazione esistenza 18
3.20 Dimostrazione unicità 19
3.21 Teor. Euclide - Esistenza infiniti primi 19

4 Congruenze **20**
4.1 Congruenza modulo n 20
4.2 Proposizione 20
4.3 Quoziente 20
4.4 Proposizione - Resto 20

4.5 Osservazione 21
4.6 Proposizione somma 21
4.7 Dimostrazione prodotto 21
4.8 Proposizione - Invertibilità 21
4.9 Classi resto invertibili 22
4.10 Teorema Uguaglianza sbagliata 22
4.10.1 Grande teorema di Fermat 23
4.10.2 Piccolo teorema di Fermat 23
4.11 Teorema Eulero-Fermat 23
4.12 Corollario 24

5 Polinomi a coefficienti reali in 1 indeterminata 25
5.1 Descrizione 25
5.2 Somma di polinomi 25
5.3 Rappresentazione come successioni 25
5.3.1 Somma di polinomi 25
5.4 Teorema: $(\mathbb{R}[x], +)$ è un gruppo (commutativo) 25
5.5 Prodotto di polinomi 26
5.6 Teorema $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello 26
5.7 Grado del prodotto 26
5.8 Fatti importanti 26

6 Strutture algebriche 27
6.1 Gruppo 27
6.2 Gruppo commutativo (abeliano) 27
6.3 Anello 27
6.3.1 Anello commutativo 27
6.3.2 Anello unitario 27
6.3.3 Divisore dello zero 27
6.3.4 Dominio di integrità 28
6.3.5 Legge di annullamento del prodotto 28
6.4 Campo 28
6.5 Semigruppo 28
6.5.1 Monoide 28
6.6 Elenco gruppi 28
6.7 Gruppo simmetrico 29
6.7.1 Permutazione 29
6.7.2 S_n 29
6.7.3 Proposizione 29
6.7.4 Proposizione 29
6.7.5 3^a notazione: Permutazione come prodotto di cicli disgiunti 29
6.7.6 Orbita 29
6.7.7 Proposizione 30
6.7.8 Permutazione ciclica 30
6.7.9 Teorema prodotto di scambi 30
6.7.10 Teorema parità 30

6.7.11 Pari, dispari 30
6.7.12 Gruppo alterno 30
6.7.13 Segno 30
6.8 Classi coniugate in S_n 31
6.8.1 Definizione 31
6.8.2 Proposizione 31
6.9 Definizione multinsieme 31
6.10 Gruppi finiti 31
6.10.1 Proprietà 1 31
6.10.2 Proprietà 2 31
6.11 Sottogruppi 32
6.11.1 Definizione 32
6.11.2 Criteri di verifica 32
6.11.3 Notazione 32
6.11.4 Proposizione 33
6.12 Proposizione: intersezione di sottogruppi 33
6.13 Proposizione 1 34
6.14 Proposizione 2 34

7 Sottogruppo generato **34**
7.1 Definizione 34
7.2 Notazione 34
7.3 Proposizione 34
7.4 $\langle X \rangle$ è il più piccolo sottogruppo che contiene X 34
7.5 Defizione: ordine (periodo) 35
7.6 Definizione: gruppo ciclico 35
7.7 Proposizione 35
7.8 Proposizione 35
7.9 Proposizione: sottogruppi di un gruppo ciclico 36
7.10 Osservazione 36
7.11 Proposizione 36
7.12 Proposizione 36
7.13 Teorema di Lagrange 36
7.13.1 Corollario 1 37
7.13.2 Corollario 2 37
7.14 Definizione: indice di un sottogruppo 37

8 Classi laterali di un sottogruppo **38**
8.1 Definizione: congruenza destra modulo 38
8.2 Proposizione 38
8.3 Insieme quoziente 38
8.4 Proposizione 39
8.5 Definizione: congruenza sinistra modulo 39

9 Omomorfismi **40**
9.1 Isomorfismo 40
9.2 Omomorfismo 40
9.3 Epimorfismo 40
9.4 Monomorfismo 40
9.5 Isomorfismo 2 40
9.6 Proposizione 40
9.7 Kernel/Nucleo 40
9.8 Proposizione 41
9.9 Omomorfismo di anelli 41
9.10 Proposizione 42
9.11 Proposizione 42

10 Spazi Vettoriali **43**
10.1 Definizione spazio vettoriale 43
10.2 Scalare 43
10.3 Sottospazio vettoriale 44
10.4 Proposizione 44
10.5 Definizione: traccia 44
10.6 Definizione: combinazione lineare 45
10.7 Proprietà di calcolo negli spazi vettoriali 45
10.8 Definizione 45
10.9 Osservazione: combinazione lineare banale 45
10.10 Definzione: linearmente dipendente 45
10.11 Osservazione 45
10.12 Osservazione 46
10.13 Osservazione 46
10.14 Osservazione 46
10.15 Osservazione 46
10.16 Sottospazio generato da: span 46
10.17 Proposizione 46
10.18 Sistema di generatori 47
10.19 Basi di spazi vettoriali 47
10.20 Spazio finitamente generato 47
10.21 Proposizione 47
10.22 N-upla delle coordinate di v in base B 48
10.23 Corollario 48
10.24 Teorema: esistenza di una base 48
10.25 Proposizione 48
10.26 Dimensione di V 48
10.27 Osservazione (notazione) 48
10.28 Teorema del completamento di una base 48
10.29 Teorema 48
10.30 Corollario 49
10.31 Osservazioni 49
10.32 Somma di sottospazi 49

10.33 Proposizione . . . 49
10.34 Teorema di Grossman . . . 50
10.35 Somma diretta di sottospazi . . . 50
10.36 Proposizione . . . 50

11 Sistemi di equazioni lineari **51**
11.1 Scrittura . . . 51
11.2 Risolvere sistema di equazioni . . . 51
11.3 Sistemi equivalenti . . . 51
11.3.1 Operazioni elementari di riga . . . 51
11.4 Equivalenza per riga . . . 51
11.5 Proposizione . . . 51
11.6 Proposizione . . . 52
11.7 Matrice identica . . . 52
11.8 Corollario . . . 52
11.9 Teorema . . . 52
11.10 Rango . . . 52
11.11 Pivot . . . 52
11.12 Rango pieno . . . 52
11.13 Proposizione: proprietà del rango . . . 53
11.14 Teorema: Rouchè-Capelli . . . 53

12 Studio dei sistemi omogenei **54**
12.1 Proposizione . . . 54
12.2 Teorema: Struttura sulle soluzioni di un sistema . . . 54
12.3 Nota importante . . . 54

13 Applicazioni lineari **55**
13.1 Definizione: applicazione lineare (trasformazione lineare o homomorfism of vector space) . . . 55
13.2 Proposizione . . . 55
13.3 Definizione . . . 55
13.4 Definizione . . . 56
13.5 Proposizione (risolvere per esercizio) . . . 56
13.6 Osservazione (!) . . . 56
13.7 Proposizione . . . 56
13.8 Corollario . . . 57
13.9 Corollario . . . 57
13.10 Definizione: rango trasformazione lineare . . . 57
13.11 Teorema della dimensione . . . 57
13.12 Osservazione . . . 58
13.13 Proposizione . . . 58
13.14 Conseguenze della proposizione . . . 59
13.15 Osservazione: iniettività, suriettività . . . 59
13.16 Osservazione: isomorfismo . . . 59
13.17 Esempio isomorfismo . . . 60

13.18 Teorema 60
13.19 Osservazione 61
13.20 Proposizione: ricapitolazione sulle matrici invertibili 61
13.21 Determinante di una matrice quadrata 61
13.21.1 Sistemi $AX = \underline{0}$ 62
13.21.2 $n = 1$ 62
13.21.3 $n = 2$ 62
13.21.4 $n = 3$ 62
13.21.5 Definizione determinante 62
13.21.6 Proprietà del determinante 63
13.21.7 Teorema di Binet 63
13.21.8 Corollario di Binet 64
13.21.9 Teorema di Lapalce 64
13.21.10 Metodo alternativo calcolo determinante 64
13.22 Cambiamento di base 65

14 Usi di Gauss-Jordan in vari ambiti **68**
14.1 Risolvere $AX = b$ 68
14.2 Rango e base ImL_A 68
14.3 Trovare $Ker(L_A) = KerA$ 68
14.4 Estrazione insieme di vettori indipendenti 68
14.5 Completamento a un base di $\mathbb{R}$ 68
14.6 Trovare base di $U + W$ e $U \cap W$ 69

1 Capitolo 1

Relazione e corrispondenza sono interscambiabili.

1.1 Corrispondenza

Una corrispondenza ρ di X in Y è una terna (ρ, X, Y) dove $\rho \subseteq X \times Y$.

1.2 Relazione in se

Una Relazione di X in sè, è una corrispondenza ρ di X in X. Se $(x, y) \in \rho$ si scrive anche $x\rho y$(notazione infissa), cioè x è in relazione ρ con y.

1.3 Relazione/Corrispondenza inversa

Una corrispondenza ρ di X in Y è la relazione di Y in X denotata con ρ^{-1} data dalla seguente:

$$y\rho^{-1}x \Leftrightarrow x\rho y$$

1.4 Relazione di equivalenza

una relazione su A (cioè un sottoinsieme ρ di AxA) si dice di equivalenza se verifica le tre seguenti proprietà:

Riflessiva: $\forall a \in A, a\rho a.$
Simmetrica: $\forall a, b$ in $A, a\rho b \Rightarrow b\rho a$
Transitiva: $\forall a, b, c \in A$ se $(a\rho b \wedge b\rho c) \Rightarrow a\rho c$

1.5 Relazione banale (di uguaglianza)

Su A $x, y \in A$ $x\rho y \Leftrightarrow x = y$

1.6 Relazione caotica

Su A $x\rho y$ $\forall x, y \in A$

1.7 Classe di equivalenza

Data la relazione ρ in A, si definisce classe di equivalenza modulo ρ di un elemento $a \in A$ l'insieme di tutti gli elementi che sono equivalenti ad a; si denota con $[a]_\rho$.

$$[x]_\rho := \{y \in A : y\rho x\}$$

1.8 Insieme quoziente

Data la relazione di equivalenza ρ su A, si definisce insieme quoziente l'insieme delle classi di equivalenza di ρ dato $x \in A$ si denota con $A/_\rho$.

$$A/_\rho = \{[x]_\rho : x \in A\}$$

Nota: Relazione di equivalenza e partizioni insiemistiche sono sostanzialmente la stessa cosa.

1.9 Partizione insiemistica

Una partizione insiemeistica di A è una famiglia di sottoinsiemi di A non vuoti, tali che ad ogni elemento di A corrisponde un solo sottoinsieme.

$$H = \{A_i : i \in I\}$$

con

$$A_i \subseteq A \; \forall i \in I$$

con

$$i \neq j, \;\; i, j \in I \Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

che equivale a dire:

$$\cup_{i \in I} \, A_i = A$$

cioè la famiglia H ricopre A.

1.10 Funzione/Applicazione

$f : S \to T$ è un'applicazione di S in T se (f, S, T) è una corrispondenza di S in T, ovvero $f \subseteq S \times T$ che soddisfa la seguente proprietà:
$\forall x \in S$ $\exists!$ y in T denotato con $y = f(x)$, f è una legge univoca (ben definita).

L'elemento f(x) si chiama **immagine dell'elemento**.

L'immagine di f è un sottoinsieme del codominio T definito da:

$$Im(f) := \{y \in T : \exists \, x \in S, y = f(x)\}$$

Controimmagine di y è il sottoinsieme di S del dominio definito da:

$$f^{-1}(y) := \{x \in S : f(x) = y\} \subseteq S$$

1.11 Iniettiva

f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, x' \in S : [f(x) = f(x') \Rightarrow x = x']$.
Definizione alternativa: f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, x' \in S : [f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x']$.
f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T \; |f^{-1}| \leq 1$, ovvero per ogni elemento y in T esiste al più un'immagine.

1.12 Suriettiva

f è suriettiva se $\Rightarrow \forall y \in T \;\; \exists\, x \in S : f(x) = y$
Definizione alternativa: f è suriettiva $\Leftrightarrow f(S) = Im(S) = T$.
f è suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T \; |f^{-1}(y)| \geq 1$, ovvero per ogni elemento y in T esiste almeno un'immagine.

1.13 Biunivoca (biiettiva)

se f è sia iniettiva che suriettiva.
f è biiettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T \; |f^{-1}(y)| = 1$, ovvero per ogni elemento y in T esiste una sola immagine.

1.14 Funzione caratteristica

E' la funzione che vale 1 se $x \in S$, 0 se $x \notin S$.

1.15 Operazione binaria

Un'operazione binaria su S, è un'applicazione $m : S \times S \rightarrow S$; notazione funzionale $(s, s') \mapsto m(s, s')$; notazione infissa sms' o $s * s$.

1.16 Assiomi di Peano

per la costruzione dei naturali $\mathbb{N}$

1. I numeri formano una classe
2. Lo "zero" è un numero
3. Se a è un numero allora il successore a' è un numero
4. Se $a \neq b$ sono due numeri allora $a' \neq b'$
5. Lo "zero" non è successore di nessun numero ($\nexists\, a$ numero tale che $zero = a'$)
6. Assioma di induzione:
   Se S è una classe di numeri tale che:
   - $zero \in S$
   - Se $a \in S$ allora $a' \in S$

   allora ogni naturale è in S.

I naturali sono la più piccola classe che

- Contiene lo zero
- Chiusa rispetto a contenere i successori

1.17 Principio del buon ordinamento di $\mathbb{N}$

Se $S \subseteq \mathbb{N}, S \neq \emptyset$, allora esiste un minimo in S, cioè esiste $m \in S$ tale che se $h \in \mathbb{N}, h < m$ allora $h \notin S$.

1.18 Teor: Divisione con resto su $\mathbb{N}$

Siano $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$; allora esistono $q, r \in \mathbb{N}$ tali che

- $a = bq + r$
- $0 \leq r < b$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0; \exists$ unici $q, r \in \mathbb{Z}$ con $a = bq+r \wedge 0 \leq r < b$ TODO: Dimostrazione

2 Calcolo combinatorio

2.1 Notazione funzionale

Insieme delle applicazioni da A verso B

$$B^A = \{f : A \to B\}$$

2.2 Fattoriale crescente

$$n^{(m)} := n * (n+1) * ... * (n+m-1)$$

2.3 Fattoriale decrescente

$$n_{(m)} := n * (n-1) * ... * (n-m+1)$$

2.4 Pigenhole principle (principio dei cassetti)

Se ho n oggetti e m cassetti, se $n > m$ e devo disporre tutti gli oggetti nei cassetti allora esiste un cassetto che contiene almeno due oggetti.

2.5 Permutazione

Sia A un insieme. Una biiezione $f : A \to A$ si chiama anche *permutazione* di A.

2.6 Coefficiente binomiale

Prima interpretazione combinatoria: $\binom{n}{i}$ è il coefficiente di $x^i y^{n-i}$ nello sviluppo $(x+y)^n = \sum_{z_i \in \{x,y\}} z_1 ... z_n$, ovvero il numero di stringhe binarie (su x, y)

- lunghe n
- con i occorrenze di x

- con n-i occorrenze di y
- $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Seconda interpretazione combinatoria: numero di sottoinsiemi di cardinalità i su un insieme $[n]$ di cardinalità n.

2.7 Formula

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1) * ... * (n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

2.8 Relazione ricorsiva

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$$

Dimostrazioni algebrica e combinatoria.

2.9 Simmetria

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

Il coefficiente binomiale è simmetrico rispetto al centro della riga n-esima $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ del triangolo rappresentante tutti i coefficienti del coefficiente binomiale.

Dimostrazioni algebrica e combinatoria.

2.10 Relazione d'ordine

Una relazione ρ su X è una relazione d'ordine (o un ordine, o un ordinamento) se valgono per ρ le proprietà:

- (R) $\forall x, x\rho x$
- (AS) $\forall x, y \ (x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow x = y$
- (T) $\forall x, y, z \ (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z$

2.11 POSET (Partial order set)

Un insieme munito di una relazione d'ordine si dice parzialmente ordinato.

3 I numeri

3.1 Costruzione di $\mathbb{Z}$ (interi)

Partendo da $\mathbb{N}$: prendiamo su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione ρ definita sulle coppie $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tale che $(n, m)\rho(n', m') \Leftrightarrow n + m' = m + n'$

3.2 Definizione di $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_\rho$$

3.3 Classi su $\mathbb{Z}$

$\overline{(0, 0)}$ zero
$\overline{(m, 0)}, m > 0$ positivi
$\overline{(0, n)}, n > 0$ negativi

3.4 Sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{>0} \cup \{0, 0\} \cup \mathbb{Z}^{<0}$$

3.5 Somma su $\mathbb{Z}$

$$\overline{(n, m)} + \overline{(n', m')} = \overline{(n + n', m + m')}$$

3.6 Prodotto su $\mathbb{Z}$:

$$\overline{(n, m)} \cdot \overline{n', m'} = \overline{(nn' + mm', nm' + mn')}$$

3.7 Proprietà operazioni su $\mathbb{Z}$

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ (a, b, c coppie $\overline{(n, m)}$) valgono le seguenti:

1. Associatività: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. Commutatività: $a + b = b + a$
3. Esiste uno *zero* per la somma, cioè un elemento $0 : a + 0 = 0 + a = a$
4. $\forall a \in \mathbb{Z}$ esiste un elemento detto *opposto*, denotato con $-a$, cioè un elemento tale che: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
   $a = \overline{(n, m)}$
   $-a = \overline{(m, n)}$
5. Associatività prodotto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. Commutatività prodotto: $a \cdot b = b \cdot a$

7. Esiste un *elemento neutro* per il prodotto, "1", cioè un numero in $\mathbb{Z}$ tale che:
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$
$$\overline{(n,m)} \cdot \overline{(1,0)} = \overline{(n,m)}$$

8. Distributività del prodotto sulla somma:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

3.8 Divisibilità

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$ si dice che a divide b, e si indica $a|b$, se e solo se $\exists c \in \mathbb{Z}$ tale che $b = a \cdot c$ (ovvero $a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c$).
La divisibilità è una relazione sugli interi:

3.9 Multiplo

Se $a|b$ diremo che b è un multiplo di a.

3.10 Associati

a,b sono associate se $a|b$ e $b|a$
Oss1: in $\mathbb{N}^*$ sono associati $\Leftrightarrow a = b$.
Oss2: in generale, in $\mathbb{Z} \Leftrightarrow a = b$ oppure $a = -b$.

3.11 Unità

In $\mathbb{Z}$ sono +1 e -1.

3.12 Irriducibile

Un elemento $a \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$ è irriducibile se $a = b \cdot c \Rightarrow\ b$ oppure c sono unità.

3.13 Primo

Un elemento $a \in \mathbb{Z}$ si dice primo se:
$$a|b \cdot c \Rightarrow a|b \textit{ oppure } a|c$$

3.13.1 Proposizione: in $\mathbb{Z}$, a è primo $\Rightarrow$ a irriducibile

Sia $a = b \cdot c$: usando l'ipotesi che a è primo allora $a|b$ oppure $a|c$.
Se $a|b \Rightarrow \exists\ h : b = a \cdot h \Rightarrow a = a \cdot h \cdot c \Rightarrow h \cdot c = 1 \Rightarrow c = \pm 1$
Allora $a = b \cdot (+1)$ oppure $a = b \cdot (-1)$, a è irriducibile.

3.13.2 Proposizione: in $\mathbb{Z}$ a irriducibile⇒a primo

Ipotesi: a irriducibile
Tesi: a primo Supponiamo che $a|bc \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : bc = ah$,
voglio mostrare che $a|b$ oppure $a|c$ ovvero che se $a \nmid b$ allora $a|c$.
Ora a irriducibile, i suoi divisori sono $a, -a, 1, -1$. $a \nmid b$ allora anche $-a \nmid b \Rightarrow$i divisori comuni tra a e b sono $1, -1 \rightarrow MCD(a, b) = 1$.

$$\exists(\text{id. Bézout})\exists\ h, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 = ah + bk$$

moltiplicando per c

$$c = cah + cbk = a(ck + k) \quad [cb = a]$$

quindi $a|c$.

3.14 Massimo comune divisore

Dati a,b non entrambi nulli, un elemento $d \in \mathbb{Z}$ si chiama massimo comune divisore tra a e b un numero tale che:

- $d|a \wedge d|b$
- Se $c|a \wedge c|b$, allora $c|d$: d è il massimo tra i divisori comuni.

Chiamiamo massimo comune divisore l'unico positivo che soddisfa le due proprietà.

3.14.1 Teor: Esistenza del MCD tra due numeri

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli, esiste un numero $d \in \mathbb{N}^*$ tale che $d = MCD(a, b)$
Il massimo comune divisore si esprime come una combinazione lineare tra a e b, ovvero esistono $s, t \in \mathbb{Z}$ tali che $d = s \cdot a + t \cdot b$ (*identità di Bézout*).

Dimostrazione:
Sia $S = \{xa + yb : x, y \in \mathbb{Z}, xa + yb > 0\}$

1. $S \subseteq \mathbb{N}$
2. $S \neq \emptyset$

a e b sono non entrambi nulli, quindi almeno uno dei due è $\neq 0$. Sia esso a.
Se $a > 0$ allora $1 \cdot a + 0 \cdot b = a > 0$
Se $a < 0$ allora $(-1) \cdot a + 0 \cdot b = a > 0$

Per il principio del buon ordinamento, S ammette un elemento minimo: sia esso d. Quindi ogni altra combinazione lineare che sia $< d$ non appartiene ad S.
Dimostrazione che $d|a$ e $d|b$:
Dividiamo a per d (divisione col resto): $\exists\ q, r$ con $a = dq + r,\ 0 \leq r < d$
Se $r = 0$ allora $d|a$

Se $r \neq 0$ allora $0 < r < d$
$r = a - dq$; dato che $d \in S \Rightarrow d = x_0 a + y_0 b$ allora
$r = a - q(x_0 a + y_0 b) = a - q x_0 a + q y_0 b = a(1 - q x_0) - (q y_0) b$
Quindi $r \in S$ perchè è una combinazione lineare > 0 ma $r < d$, però d è il minimo di $S \Rightarrow$Assurdo.

Dimostrazione se $d'|a$ e $d'|b$ allora $d'|d$:
Poichè $d'|a$ e $d'|b$ si ha che

$$\exists h : a = d' \cdot h, \exists k : b = d' \cdot k$$

Ora

$$\begin{aligned} d &= x_0 a + y_0 b \\ &= x_0(d'h) + y_0(d'k) = \\ &= d'(x_0 h + y_0 h) \Rightarrow d'|d \end{aligned}$$

3.14.2 Prop: se $c|a$ e $c|b$ allora c divide ogni combinazione lineare di a e b

$$\begin{gathered} a = ch \\ b = ck \\ \Rightarrow xa + yb = xch + yck \\ = c(xh + yk) \Rightarrow \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow c|xa + yb \end{gathered}$$

3.15 Proposizione

$$1 = at + bs \Rightarrow MCD(a, b) = 1$$

3.15.1 Lemma MCD(m,m+1)=1

Sia $m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$ allora $MCD(m, m + 1) = 1$.

Dimostrazione:

$$m + 1 - m = 1 \Rightarrow 1(m + 1) + (-1)m = 1$$

Potendo scrivere *1* come combinazione lineare di *m* e *m+1*, *m* e *m+1* sono primi tra loro.

3.16 Algoritmo di Euclide

3.16.1 Lemma1: L'algoritmo termina

La successione dei resti è un numero $0 \leq ... < r_2 < r_1 < b$.

3.16.2 Lemma2: Se $a = bq + r$ $MCD(a,b) = MCD(b,r)$

Ogni divisore comune di a e b è anche divisore comune di b ed r: questo dimostra che il $MCD(a,b)|MCD(b,r)$:
Sia $d \in \mathbb{N}$: $d|a \wedge d|b$ e ricavando r da $a = bq + r$, si ha:

$$a = dh \quad b = dk$$

b

$$r = a + b(-q) = dh + dk(-q) = d(h + k(-q))$$

$d|r$ perchè r è combinazione lineare di a e b.
In particolare il

$$MCD(a,b)|a$$

$$MCD(a,b)|b$$

si ha che il $MCD(a,b)|r$ e $MCD(a,b)|b$.
$\Rightarrow MCD(a,b)|MCD(r,b)$

3.16.3 Corollario: $MCD(a,b) = MCD(r_n, 0) = r_n 1$

Per il lemma 2 $MCD(a,b) = MCD(b, r_1) = MCD(r_1, r_2) = ... = MCD(r_{n-1}, r_n) = MCD(r_n, 0)$

3.16.4 Lemma3

Se $x \in \mathbb{N}^*$ allora $MCD(x,0) = x$

3.17 Coprimi

a,b non entrambi nulli, a e b si dicono coprimi (o *primi fra loro*) se *MCD(a,b)=1*.

3.17.1 Osservazione1

Se a e b sono primi fra loro, allora

$$\exists\, x, y \in \mathbb{Z} : 1 = xa + yb$$

3.17.2 Osservazione 2

Se

$$d = MCD(a,b) \Rightarrow \exists\, x, y : d = ax + by$$

3.17.3 Proposizione 1

Se $\exists\, x_0, y_0$ con $1 = ax_0 + by_0$ allora *a,b* sono primi tra loro.

3.17.4 Proposizione 2

Se a e b sono coprimi e dividono un terzo numero c, allora $ab|c$.

3.18 Equazione diofantea

Equazione con una o più incognite sugli interi di cui si cercano le soluzioni intere. Sono del tipo:

$$ax + by = c$$

3.18.1 Teor: Soluzione equazione diofantea

L'equazione diofante lineare in x e y $ax + by = c \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$ possiede soluzioni intere $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow d = MCD(a, b)|c$
(Dim$\Rightarrow$) La condizione $MCD(a, b)|c$ è necessaria.
Ipotesi: esiste una soluzione di $x^2 + y^2 = z^2$
Tesi: $d|$termine noto, $d = MCD(a, b) : d|a$ e $d|b \Rightarrow d|$ ogni combinazione lineare di *a,b*.
Se x_0, y_0 sono una soluzione, allora $ax_0 + by_0 = c \Rightarrow d|c = ax_0 + by_0$

(Dim$\Leftarrow$) La condizione è sufficiente.
Ipotesi $MCD(a, b) = ah + bk$, per opportuni $h, k \in \mathbb{Z}$

3.19 Teorema fondamentale dell'aritmetica

$\forall n > 1, n \in \mathbb{N}, \exists\, p_1, ..., p_j \in \mathbb{N}$ (irriducibili) $\exists h_1, ..., h_j \geq 1$ tali che:

- $n = p_1^{h_1} ... p_j^{h_j} \quad p_1, ...p_j$ distinti
- la fattorizzazione di $n = p_1^{h_1} ... p_j^{h_j} \quad p_1, ...p_j$ è unica a meno di riordinare i fattori

3.19.1 Osservazione 1

j può essere 1, cioè potrebbe esserci un solo irriducibile nella fattorizzazione di n, anche h possono essere 1. Se n è irriducibile $\Rightarrow n = n$ è la fattorizzazione in irriducibili di n.

3.19.2 Osservazione 2

1 non è considerato irriducibile perché si perderebbe l'unicità della scrittura in irriducibili.

3.19.3 Dimostrazione esistenza

Con principio di induzione in forma forte.
Base: *n=2*, 2 è irriducibile.
Per **oss1** $2 = 2^1$ è la fattorizzazione in primi in irriducibili di 2
Ipotesi induttiva: ogni $2 \leq a < n \quad (2 \leq a \leq n - 1)$ è fattorizzabile in irriducibili: $\exists\, \alpha_1 ... \alpha_t \alpha_i \geq 1$ e $q_1, ...q_t$ irriducibili con $a = q_1^{\alpha_1} ... q_t^{\alpha_t}$
Passo induttivo: provare che n sia prodotto di irriducibili

Primo caso: n irriducibile $\rightarrow$ fatto, per *oss.1*

Secondo caso: n riducibile: $\exists\ b, c \in \mathbb{Z}, 1 \neq b, c \neq n$ (divisori propri) con $n = bc \Rightarrow 2 \leq b, c < n$.
Allora per b e c vale l'ipotesi induttiva e quindi

$$b = q_1^{\alpha_1}...q_t^{\alpha_t} \quad c = x_1^{\beta_1}...x_s^{\beta_s}$$

$$n = bc = q_1^{\alpha_1}...q_t^{\alpha_t} x_1^{\beta_1}...x_s^{\beta_s}$$

3.20 Dimostrazione unicità

Per induzione su m, con m è la lunghezza minima di una fattorizzazione per n.
m: minimo numero di irriducibili di una fattorizzazione di n
Base: $m = 1 \Rightarrow n = n$ è primo.
Se per assurdo $n = q_1...q_s,\ s \geq 2$ allora $n|q_1$ o $n|q_2...q_s$.
Prendiamo $n|q_1$, anche q_1 è primo $\Rightarrow n = q_1$; semplificando da entrambe le parti $\Rightarrow 1 = q_2....q_s$ che porterebbe ad un assurdo perché $1 = 1$.
Quindi $n = q_1$ ed è l'unica fattorizzazione.

Ipotesi induttiva: se il minimo numero di primi in una fattorizzazione di n è $m - 1$, allora la fattorizzazione è unica a meno dell'ordine.

Passo induttivo: m è il minimo di una fattorizzazione di n.

3.21 Teor. Euclide - Esistenza infiniti primi

L'insieme $P = \{p \in \mathbb{N} : \text{p è primo}\}$ è infinito.
Dimostrazione: Supponiamo che P sia finito, cioè $P = \{p_1, ..., p_n\}$.
Sia $m = p_1, ...p_n$ il prodotto di tutti i primi.
Considero $m+1$: per il teorema fondamentale dell'aritmetica $m+1 = p_1^{k_1}...p_n^{k_n}$, $k_1, ..., k_n \geq 0$ almeno uno degli esponenti > 0.
Per il lemma su MCD di un numero ed il suo successivo m e *m+1* sono coprimi.
Sia j tale che $k_j > 0$, cioè $p_j^{k_k}|m{+}1$; vale anche $p_j|m$ allora $p_j|MCD(m, m{+}1) = 1$ che è un assurdo.

4 Congruenze

4.1 Congruenza modulo n

La congruenza modulo n (n fissato) è una relazione di equivalenza definita su $\mathbb{Z}$.

$x \equiv y (mod\ n) \Leftrightarrow x - y$ multiplo di $n \Leftrightarrow n | x - y$

4.2 Proposizione

La congruenza *(mod n)* è una relazione di equivalenza.
Dimostrazione:

(R)

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv x(mod\ n) \Leftrightarrow n|(x - x)$$

Vera perché $0 = 0 \cdot n$.

(S)

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv y(mod\ n) \Rightarrow y \equiv x(mod\ n)$$

So che $n|x - y \Leftrightarrow x - y = nh$ per qualche $h \in \mathbb{Z}$.

Moltiplicando per *-1*: $y - x = -nh = n(-h)$ quindi $n|y - x \Rightarrow y \equiv x(mod\ n)$

(T)

$$x \equiv y(mod\ n) \wedge y \equiv z(mod\ n) \Rightarrow x \equiv z(mod\ n)$$

$(x - y) = nh_1 \wedge (y - z) = nh_2$
$(x-z) = (x-y)-(y-z) = nh_1-nh_2 = n(h_1-h_2)$ quindi $n|x-z \Rightarrow x \equiv z(mod\ n)$

4.3 Quoziente

Il quoziente della congruenza *(mod n)* si denota come $\mathbb{Z}_{/\equiv(mod\ n)} = \{[x]_n : x \in \mathbb{Z}\}$.
Il quoziente $\mathbb{Z}_n$ si chiama anche **interi modulo n**.

4.4 Proposizione - Resto

Dati $x, y \in \mathbb{Z}$ si ha: $x \equiv y(mod\ n) \Leftrightarrow$ il resto delle divisioni di x e di y per n è lo stesso.
Dimostrazione $\Rightarrow$**(se** $x \equiv_n y$ **hanno lo stesso resto** $x - y = nh$ (per qualche h)
$x = nh + y$
Dividendo y per n: $\exists! q, r \in \mathbb{Z} : y = nq + r,\ 0 \leq r < n$.
Scambiando in x: $x = nh + nq + r = n(h + q) + r$, x ed y hanno quindi lo stesso resto.

4.5 Osservazione

Sia $x = nq + r,\ 0 \leq r < n$ la divisione con resto di x per n.
Allora

$$[x]_n = [r]_n \Leftrightarrow x \equiv r(mod\ n) \Leftrightarrow x - r = nq$$

Quindi

$$n|x - r$$

4.6 Proposizione somma

La somma classi resto in $\mathbb{Z}_n$, definita da: $\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}$, è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta dei rappresentanti.
Dimostrazione Siano $x' \in \overline{x}$, cioè $\overline{x'} = \overline{x}$ e $y' \in \overline{y}$ cioè $\overline{y'} = \overline{y}$, allora

$$x' \equiv x(mod\ n) \Leftrightarrow x' = x + kn$$

$$y' \equiv y(mod\ n) \Leftrightarrow y' = y + hn$$

Da verificare: $\overline{x' + y'} = \overline{x + y} \Leftrightarrow x' + y' = x + y + tn$
Quindi:

$$\begin{aligned} x' + y' &= x + kn + y + hn \\ &= x + y + kn + hn \\ &= x + y + (k + h)n \ \ [(k + h) = t] \end{aligned}$$

4.7 Dimostrazione prodotto

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= (x + kn)(y + hn) \\ &= xy + xhn + kny + khn^2 \\ xy &+ n(xh + ky + khn), \quad [(xh + ky + khn) = t] \end{aligned}$$

4.8 Proposizione - Invertibilità

$a \in \mathbb{Z}, \overline{a}$ invertibile in $\mathbb{Z}_n \Leftrightarrow MCD(a, n) = 1$
Dim $\Rightarrow$
Ipotesi: $\overline{a} \in \mathbb{Z}$ invertibile

Tesi: *(a,n)=1*

Esiste $b \in \mathbb{Z} : \overline{a} \cdot \overline{b} = 1$

$$\Leftrightarrow ab \equiv 1(mod\ n)$$

$$\Leftrightarrow n|1 - ab$$

$$\Leftrightarrow 1 - ab = nk$$

$$\Leftrightarrow 1 = ab + nk$$

$$\Rightarrow MCD(a,n)=1$$

Dim $\Leftarrow$
Ipotesi: $MCD(a,n)=1$

Tesi: $\overline{a}$ è invertibile

Se $MCD(a,n)=1$ allora esistono $h,k\in\mathbb{Z}$:

$$1=ah+nk \quad \in\mathbb{Z}$$
$$\overline{1}=\overline{ah+nk}$$
$$\overline{1}=\overline{a}\overline{h}+\overline{n}\overline{k} \quad \in\mathbb{Z}$$
$$\overline{n}\overline{k}=\overline{0}\overline{k}$$
$$\overline{1}=\overline{a}\overline{h}\Rightarrow\overline{h}=(\overline{a})^{-1}$$

4.9 Classi resto invertibili

$$\cup(\mathbb{Z}_n):=\{a\in\mathbb{Z}_n:\overline{a}\ invertibile\}\subseteq\mathbb{Z}_n$$
$$\cup(\mathbb{Z}_n)=\{\overline{a}:MCD(a,n)=1\}$$

4.10 Teorema Uguaglianza sbagliata

Se p è primo allora $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ vale:

$$(x+y)^p\equiv x^p+y^p(mod\ p)$$
$$(\overline{x}+\overline{y})^p=\overline{x}^p+\overline{y}^p(mod\ p)$$

Dimostrazione:$(x+y)^p=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}x^iy^{p-i}$

$$\binom{p}{0}=1=\binom{p}{p}$$
$$\binom{p}{0}x^0y^p=1y^p$$
$$\binom{p}{p}x^py^0=1x^p$$

Considerare con $0<i<p$ il coefficiente binomiale è:

$$\binom{p}{i}=\frac{p(p-1)...(p-i+1)}{i(i-1)...2\cdot 1}\in\mathbb{N}$$
$$p(\frac{(p-1)...(p-i+1)}{i!})\Rightarrow p|\binom{p}{i}\forall i=2,...,p-1$$
$$\Rightarrow\binom{p}{i}\equiv 0(mod\ p)$$

4.10.1 Grande teorema di Fermat

$x^n + y^n = z^n, n \geq 3$ non ha soluzioni intere.

4.10.2 Piccolo teorema di Fermat

$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall p(mod)$ primo si ha che: $a^p \equiv a(mod\ p)$ in $\mathbb{Z}_{|}$, p primo vale $\overline{a}^p = \overline{a}$.

Dimostrazione per $a \in \mathbb{N}$
Per induzione su a

Base:

$$a = 0$$
$$0^p \equiv^? 0(mod\ p)$$
$$0^p = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0^p \equiv (mod\ p)$$

Ipotesi induttiva: supponiamo vera per a l'affermazione $a^p \equiv a(mod\ p)$

Passo induttivo: verifichiamo per $(a + 1)$.

$$(a + 1)^p \equiv a^p + 1^p \equiv a + 1$$

$a^p \to a$ e $1^p \to 1$ per ipotesi induttiva.

Se $a < 0$ è ancora vero?
Se $a < 0$ allora $-a > 0$, cioè $(-a)^p \equiv -a(mod\ p)$. Ora:

$$0 = a - a$$
$$0^p = (a - a)^p$$
$$0^p \equiv (a - a)^p \equiv a^p + (-a)^p$$
$$\equiv a^p - a \equiv 0 \cdot (mod\ p) \Leftrightarrow a^p \equiv a(mod\ p)$$

4.11 Teorema Eulero-Fermat

Se $(a, p) = 1$ cioè se $\overline{a} \neq \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_p$ allora

$$a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$$

Dimostrazione: se $(a, p) = 1$ allora esiste l'inverso moltiplicativo di $\overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$.
So che

$$a^p \equiv a(mod\ p)$$
$$(\overline{a}^p) \equiv \overline{a}(mod\ p)$$
$$\Rightarrow moltiplicando\ per\ l'inverso \Rightarrow \overline{a}^{p-1} = \overline{1}\ in\ \mathbb{Z}_p$$
$$\Leftrightarrow a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$$

4.12 Corollario

Se $(a, p) = 1$ e se p primo allora $\overline{a}^{p-2}$ è l'inverso moltiplicativo di $\overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$

Dimostrazione: l'inverso di $\overline{a}$ è $\overline{x}$ con $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{2}$, ma

$$\overline{a} \cdot \overline{a}^{p-2} = \overline{a}^{p-1} = \overline{1}$$

per il *teorema di Eulero-Fermat*.

5 Polinomi a coefficienti reali in 1 indeterminata

5.1 Descrizione

$$\mathbb{R}[x] := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k : a_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., k, k \in \mathbb{N}\}$$

5.2 Somma di polinomi

Dati

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_kx^k$$

con $k \leq h$

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_k + b_k)x^k + b_{k+1}x^{k+1} + ... + b_hx^h$$

5.3 Rappresentazione come successioni

Con esempio:

$$p(x) = 1 + 3x - 4x^3 \leftrightarrow (1, 3, 0, -4, 0, 0, ...)$$

5.3.1 Somma di polinomi

$$p(x) = (a_0, a_1, a_2, ...)$$
$$q(x) = (b_0, b_1, b_2, ...)$$
$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_n + b_n, ...)$$

a_i, b_i sono i coefficienti di x^i nel polinomio che rappresentano.

5.4 Teorema: $(\mathbb{R}[x], +)$ è un gruppo (commutativo)

Dimostrazione:

- $\mathbb{R}[x]$ è non vuoto
- La somma è associativa

  $$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = (...(a_n + b_n) + c_n...) = (...a_n + (b_n + c_n)...) = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$$

- $0 \in \mathbb{R}$ è l'elemento neturo di $\mathbb{R}[x]$

  $$0 = 0 + 0x + 0x^2 + ... \to (0, 0, 0, ...)$$

- Ogni polinomio ha il suo opposto: se

  $$p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k$$

  allora l'opposto di $p(x)$ è

  $$-p(x) = -a_0 - a_1x - ... - a_kx^k$$

5.5 Prodotto di polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k \leftrightarrow (a_0, a_1, ...)$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_kx^k \leftrightarrow (b_0, b_1, ...)$$
$$p(x) \cdot q(x) = c_0 + c_1x + ...c_rx^r \leftrightarrow (c_0, c_1, ...)$$

$$c_0 + c_1x + ...c_rx^r = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 +$$
$$+(a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + ...$$

La successione dei coefficienti di $p(x) \cdot q(x)$ è data da:

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i} = \sum_{i+j=n} a_ib_j$$

5.6 Teorema $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo, unitario con unità del prodotto uguale a 1 ed è un dominio di integrità. *non dimostrato*

5.7 Grado del prodotto

Se il grado di $p(x) = k$ èd il grado di $q(x) = h$ il grado del prodotto $p(x)q(x) = k + h$

5.8 Fatti importanti

- in $\mathbb{R}[x]$ si può fare la "divisione col resto":

  $$\forall a(x), b(x) \in \mathbb{R},\ b(x) \neq 0$$
  $$\exists!\ q(x), r(x) \in \mathbb{R} :$$

  1. $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$
  2. il grado di $r(x) <$ grado $b(x)$

- Conseguenza della divisione col resto:

  $$MCD(m(x), n(x))$$
  $$m(x) = n(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$$
  $$n(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$$
  $$...$$

  Termina quando il resto è un polinomio di grado 0.

6 Strutture algebriche

6.1 Gruppo

Un insieme S non vuoto, munito di una operazione

$$m : S \times S \to S$$

$$(a, b) \mapsto m(a, b) = a * b \;\; (notazione\ infissa)$$

che verifica i punti 1, 3, 4 (vedere proposizioni operazioni su $\mathbb{Z}$) si chiama *gruppo*$(S, *)$.
L'operazione su S è dunque:

1. associativa
2. con elemento neutro e: $\forall x, x * e = e * x = x$
3. per ogni elemento x esiste un inverso rispetto al prodotto $*$ cioè un elemento y tale che $x * y = y * x = e$, che si denota x^{-1}

6.2 Gruppo commutativo (abeliano)

Se il gruppo $(S, *)$ soddisfa anche la proprietà 2 (quindi associatività, elemento neutro, opposto, +commutatività).

6.3 Anello

Un anello è una terna $(A, +, \cdot)$ con:

1. A insieme non vuoto
2. $+ \cdot$ due operazioni binarie, associative
3. $(A, +)$ è un gruppo abeliano
4. Distributività: $\forall a, b, c \in A,\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

6.3.1 Anello commutativo

Se un anello $(A, +, \cdot)$ il prodotto è commutativo, cioè se $\forall a, b \in A,\ a \cdot b = b \cdot a$.

6.3.2 Anello unitario

Se esiste un elemento di A, che si denota con 1_A, tale che $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$.

6.3.3 Divisore dello zero

Un elemento $a \in A,\ a \neq 0_A$ di un anello di dice divisore dello zero se esiste $b \in A, b \neq 0$ con $a \cdot b = 0_A$.

6.3.4 Dominio di integrità

Se $(A, +, \cdot)$ è privo di divisori dello zero.

6.3.5 Legge di annullamento del prodotto

Se in un dominio di integrità $a \cdot b = 0_A$ allora $a = 0_A$ oppure $b = 0_A$.

6.4 Campo

Un campo è una terna $(K, +, \cdot)$ con K insieme non vuoto e 2 operazioni.

- $(K, +, \cdot)$ anello commutativo unitario
- Detto 0_k l'elemento neutro della somma e denotato con $K^* = K \setminus \{0_k\}$, deve valere che $\forall x \in K^* : x \cdot x^{-1} = 1_k$ *(è un gruppo)*

Quindi campo $\Leftrightarrow$ anello commutativo unitario con in più $K \setminus \{0_k\} = (K^*, \cdot)$ gruppo.

6.5 Semigruppo

Sia X un insieme non vuoto.
$*$:

$$X \ * \ X \to Z$$

$$(a.b) \mapsto a * b$$

una operazione binaria associativa: $\forall a, b, c \in X : a + (b + c) = (a + b) + c$
Un insieme X, munito di una operazione associativa si chiama **semigruppo**.

6.5.1 Monoide

Se $(X, +)$ è un semigruppo ed inoltre esiste un elemento 1_X tale che $a + 1_X = 1_X * a = a$ (1_X elemento neutro dell'operazione $*$), allora $(X, +)$ si chiama **monoide**.

6.6 Elenco gruppi

$(A^*, \cdot)$ è un monoide non commutativo.
$(\mathbb{N}, +)$ (commutativo) monoide (0 el. neutro) ma non è un gruppo.
$(\mathbb{Z}, +)$ gruppo commutativo (0 el. neutro).
$(\mathbb{Q}, +)$ gruppo commutativo (0 el. neutro); $\frac{p}{a} \to$ *opposto* $-\frac{p}{q}$.
$(\mathbb{N}^*, \cdot)$ monoide, non è un gruppo.
$(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ monoide, non è un gruppo.
$(\mathbb{Q}, \cdot)$ non è un gruppo, 0 non ha inverso.
$(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ gruppo.
$(\mathbb{R}, +)$ gruppo.
$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ monoide, gruppo.

$(\mathbb{Z}_n, +)$ gruppo finito commutativo; el. neutro $\overline{0}$.
$(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ monoide, semigruppo (non è un gruppo $\overline{0}$ non è invertibile).
$(\cup(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ gruppo, el. neutro $\overline{1} = \{\overline{a} : (a, n) = 1\}$ (el. invertibili).

6.7 Gruppo simmetrico

6.7.1 Permutazione

$f : [n] \to [n]$ si chiama permutazione di n *elementi* se f è biiettiva.

6.7.2 S_n

$$\begin{aligned} S_n &:= \{\sigma : [n] \to [n] : \sigma\ e'\ biiettiva\} \\ &= \{\sigma : \sigma\ e'\ una\ biiezione\} \end{aligned}$$

6.7.3 Proposizione

$$|S_n| = n!$$

6.7.4 Proposizione

$(S_n, \cdot)$ l'insieme delle permutazioni di n elementi con il prodotto di composizione funzionale è un gruppo di cardinalità *n!* non commutativo.
Dimostrazione

- S_n non vuoto, $n \geq 1$
- Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto $\cdot$, la permutazione identica: $\sigma \circ id = id \circ \sigma = \sigma$.
- Prodotto associativo $\forall \sigma, \tau, \rho \in S_n$ $(\sigma \circ \tau) \circ \rho(i) = \sigma \circ (\tau \circ \rho)(i) = \sigma(\tau(\rho(i)))$
- $\forall \sigma \in S_n$ esiste un elemento σ^{-1} tale che $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$.

6.7.5 3^a notazione: Permutazione come prodotto di cicli disgiunti

S_n: Definire una relazione di equivalenza su $[n]$ associata a $\sigma \in S_n$.

$$x, y \in [n]$$

$$x \equiv_\sigma y \Leftrightarrow \exists i : y = \sigma^i(x)$$

Si osservi che $\sigma \in S_n$, allora la potenza *i-esima* di σ, con $i \in \mathbb{N}$ è la permutazione $\sigma^i = \sigma \circ ... \circ \sigma$ per i volte.

6.7.6 Orbita

L'orbita di $x \in [n]$ è la classe di equivalenza di x nella relazione $\equiv_\sigma$.

$$O_\sigma(x) = \{y \in [n]\ \exists i\ con\ y = \sigma^i(x)\}$$

6.7.7 Proposizione

Se τ_1 e τ_2 hanno cicli disgiunti $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$

6.7.8 Permutazione ciclica

Chiamo ciclica una permutazione di S_n in cui nella rappresentazione in cicli disgiunti ha al più un solo ciclo di lunghezza> 1

6.7.9 Teorema prodotto di scambi

Ogni permutazione si può scrivere come prodotto di scambi

Dimostrazione 1: Se la permutazione ha un solo ciclo $\sigma = (a_1, a_2, ..., a_k) =$ un k-ciclo $= (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1})...(a_1, a_3)(a_1, a_2) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$
Dimostrazione 2: Se ho un σ qualunque, allora

$$\sigma = C_1 \cdot C_2 \cdot ... \cdot C_k$$

dove C_i è un ciclo (nella decomposizione in cicli disgiunti)

$$C_1 = (a_1, ..., a_r) = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1})...(a_1, a_2)$$

$$C_2 = (b_1, ..., b_j) = (b_1, b_j)(b_1, b_{j-1})...(b_1, b_2)$$

$$...$$

$$\sigma = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1})...(a_1, a_2)\ (b_1, b_j)(b_1, b_{j-1})...(b_1, b_2)$$

6.7.10 Teorema parità

Il numero di scambi usati in diverse fattorizzazioni di una permutazione ha sempre la stessa parità.

6.7.11 Pari, dispari

Una permutazione è pari se il numero di scambi (in una sua fattorizzazione in scambi) è pari, dispari altrimenti.

6.7.12 Gruppo alterno

Le premutazioni pari si chiamano *gruppo alterno*.

6.7.13 Segno

Data σ in S_n, il segno di σ è $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{parita'\ di\ (\sigma)}$

6.8 Classi coniugate in S_n

6.8.1 Definizione

Dato G gruppo rispetto ad un'operazione $\cdot$, un elemento x' si dice coniugato con $x \Leftrightarrow$

$$\exists y \in G \; con \; : x' = yxy^{-1}$$

In S_n σ, σ' sono coniugate $\Leftrightarrow$

$$\exists \tau \in S_n : \sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$$

(si dice che σ' è coniugato a σ tramite τ)
TODO: controllare correttezza definizione

6.8.2 Proposizione

Due permutazioni $\sigma, \sigma' \in S_n$ sono coniugate $\Leftrightarrow$ hanno la stessa struttura ciclica.

6.9 Definizione multinsieme

Una partizione λ di un intero n è un multinsieme di naturali ≥ 1 la cui somma da n.

6.10 Gruppi finiti

6.10.1 Proprietà 1

Dato $(G, \cdot)$ gruppo e $x, y \in G$ allora $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ (l'inverso del prodotto è il prodotto degli inversi in ordine inverso).

Dimostrazione: $(xy)^{-1} =^? e_G$ (el. neutro del gruppo).
Ora

$$(x \cdot y)^{-1} \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) =$$
$$x \cdot (y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} =$$
$$x \cdot e_G \cdot x^{-1} =$$
$$x \cdot x^{-1} =$$
$$e_G$$

6.10.2 Proprietà 2

In un gruppo vale sempre la cancellazione:

$$ax = bx \Leftrightarrow a = b$$

Dimostrazione: $\exists x^{-1}$: Se $ax = bx$ e moltiplico per x^{-1}

$$axx^{-1} = bxx^{-1}$$

$$a \cdot e = b \cdot e$$

$$a = b$$

Conseguenza: Su una riga (qualunque) della tavola moltiplicativa del gruppo ci sono una e una sola volta tutti gli elementi del gruppo.

6.11 Sottogruppi

6.11.1 Definizione

Un sottogruppo S di $(G, \cdot)$ è:

- Un sottoinsieme non vuoto di $S \subseteq G$
- S, con la stessa operazione di G è un gruppo

6.11.2 Criteri di verifica

Per verificare che S sia un sottogruppo di G;

- Associatività: *"gratis"* : $S \subseteq G$ e il prodotto in G è associativo.

1. $\forall a, b \in S : a \cdot b \in S$ ovvero $S \times S \to S$
2. $e_G \in S$
3. $\forall a \in S \subseteq G$, $a^{-1} \in S$

6.11.3 Notazione

$$(S, \cdot) \leq (G, \cdot)$$

altrimenti

$$S \leq G$$

6.11.4 Proposizione

S non vuoto e $S \subseteq (G, \cdot)$ è un sottogruppo di G se e solo se

$$\forall\, a, b \in S : a \cdot b^{-1} \in S \quad (*)$$

Dimostrazione
Ipotesi: $\forall a, b : a \cdot b^{-1} \in S$
Tesi: valgono 1, 2, 3 dei criteri di verifica.

Dimostrazione 2:
$S \neq \emptyset : \exists a_0 \in S$ applico $(*)$ ad a_0, a_0:

$$a_0 \cdot a_0^{-1} = e_G \ \in S$$

è quindi l'elemento neutro.

Dimostrazione 3:
$\forall a \in S : a^{-1} \in S$? Per 2. $e_G \in S, a \in S$, applico $(*)$

$$e_G \cdot a^{-1} = a^{-1} \ \in S$$

Dimostrazione 1:
Dati $a, b \in S$, $a \cdot b \in S$? Per la 3 $b^{-1} \in S$.
Dati a, b^{-1} per $(*)$

$$a \cdot (b^{-1})^{-1} = a \cdot b \ \in S$$

6.12 Proposizione: intersezione di sottogruppi

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e $H \leq G, K \leq G$ due sottogruppi. Allora:

$$H \cap K \leq G$$

L'intersezione di sottogruppi di G è un sottogruppo di G

Dimostrazione:

1. $1_G \in H \cap K$?
   Poiche H e K sono sottogruppi $1_G \in H, K$ e quindi $1_G \in H \cap K$
2. Siano $x, y \in H \cap K$: verifico che $x \cdot y \in H \cap K$.
   $x \in H$ *e* $x \in K$; $y \in H$ *e* $y \in K$ allora:

   $$xy \in H;\ xy \in K \Rightarrow xy \in H \cap K$$

3. Se $x \in H \cap K \Rightarrow x^{-1} \in H \cap K$?
   La dimostrazione è simila a quella del punto precendente

6.13 Proposizione 1

$$H_1, H_2, ...H_t \leq G \Rightarrow H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_t \leq G$$

6.14 Proposizione 2

Siano $S, T \leq G$:

$$S \cup T \leq G \Leftrightarrow S \cup T = T \vee S \cup T = S$$

7 Sottogruppo generato

7.1 Definizione

Siano G un gruppo e $X \subseteq G$, si definisce sotto gruppo generato di X il più piccolo sottogruppo di G che contenga X

7.2 Notazione

$$\langle X \rangle := \bigcap_{X \subseteq H \leq G} H$$

7.3 Proposizione

Se $X = \{x_, x_2 ...\} \subseteq G \neq 0$ allora:

$$\langle X \rangle = \{t_1, t_2, ..., t_r : t_i \in X \textit{ oppure } t_i^{-1} \in X\}$$

L'insieme che contiene i prodotti finiti di elementi di X oppure i cui inversi sono in X.

Dimostrazione:

1. $\langle X \rangle$ contiene X, $r = 1, t_i \in X$
2. $\langle X \rangle \leq G$
   - contiene 1_G: sia $\overline{x} \in X$ qualunque $\Rightarrow \overline{x} \in \langle X \rangle, \overline{x}^{-1} \in \langle X \rangle$ e $\overline{x} \cdot \overline{x}^{-1} = 1_G \in \langle X \rangle$
   - $\langle X \rangle$ è chiuso rispetto al prodotto di G
   - Se $t_1, t_2, ..., t_r \in \langle X \rangle$, e t_1

TODO:CONTROLLARE APPUNTI

7.4 $\langle X \rangle$ è il più piccolo sottogruppo che contiene X

Da dimostrare in proprio, lo ha dato come esercizio

7.5 Defizione: ordine (periodo)

Se un elemento di G ha periodo finito, allora si chiama *ordine* (o periodo) di g il più piccolo positivo tale che $g^m = 1_G$

7.6 Definizione: gruppo ciclico

Un gruppo G si dice ciclico se esiste $g_0 \in G$ tale che $G = \langle g_0 \rangle$ *(gruppo che viene generato da un solo elemento).*

7.7 Proposizione

Il sottogruppo generato da un elemento (in un gruppo ciclico) è commutativo.
Dimostrazione:

$$\langle g \rangle = \{g^h : h \in \mathbb{Z}\}$$

$$x = g^h,\ y = g^k \quad h, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \cdot y = g^h g^k = g^{h+k} = g^k g^h = y \cdot x$$

7.8 Proposizione

Sia G gruppo:

1. Se $g \in G$ ha periodo infinito ($\nexists\ h > 0 : g^h = e$) allora $\exists\ h, k \in \mathbb{Z}, h \neq k,\ g^h \neq g^k$: il gruppo ciclico generato da G, $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$.
2. g ha periodo finito.
   Se n=periodo di $g = o(g) = ord_G(g)$ ovvero $n = min\{k > 0 : g^k = e\}$ allora $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, ..., g^{n-1}\}$ dove queste potenze sono tutte distinte.

Dimostrazione pt.1: Dimostro che se:

$$g^h = g^k \Rightarrow h = k$$

infatti moltiplico per g^{-k} ed ho:

$$g^{h-k} = g^{k-k} \Rightarrow g^{h-k} = g^0 = e$$

ma g è aperiodico

$$\Rightarrow h - k = 0 \Rightarrow h = k$$

Dimostrazione pt.2: so che $\langle g \rangle = \{g^h : h \in \mathbb{Z}\}$ devo dimostrare che ogni elemento g^h sta già in $\{e, g, g^2, ...g^{n-1}\}$.

Divido h per n:

$$h = nq + r,\ \ 0 \leq r < n$$

$$\Rightarrow g^h = g^{nq+r} = g^{nq} g^r = (g^n)^q g^r = e^q g^r = e g^r = g^r$$

ed r è un numero $0 \leq r < n$ e quindi è una potenza dell'insieme.

7.9 Proposizione: sottogruppi di un gruppo ciclico

0. Sottogruppi di $(\mathbb{Z}, +)$: sono tutti e soli della forma

$$H = m\mathbb{Z} = \{mh : h \in \mathbb{Z} = \langle m \rangle\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

.
Non dimostrato.

1. I sottogruppi di $\langle g \rangle$ con $g \in (G, \cdot)$, g aperiodico, sono tutti e soli della forma:

$$H = \langle g^m \rangle$$

per qualche $m \in \mathbb{Z}$.
Non dimostrato.

2. I sottogruppi di un gruppo ciclico generato da un elemento di ordine n ($g^n = e$, n più piccolo positivo con $g^n = e$) sono anch'essi ciclici e generati da $\langle g^h \rangle, \ h|n$.

7.10 Osservazione

I sottogruppi di un gruppo ciclico finito verificano la seguente condizione:

$$H \leq \langle g \rangle \Rightarrow |H| \,|o(g) = |\langle g \rangle|$$

L'ordine di un sottogruppo $H \leq \langle g \rangle$ divide l'ordine dell'elemento g, che è anche l'ordine del gruppo.

7.11 Proposizione

In S_n, sia $\sigma(C_1)(C_2)...(C_k)$ la fattorizzazione di σ come prodotto dei suoi cicli disgiunti. Allora se m_i =lunghezza di C_i

$$ordine(\sigma) = mcm(m_1, m_2, ..., m_k)$$

7.12 Proposizione

$G = C_n = \langle g \rangle$ gruppo ciclico generato da un elemento di ordine $n = \{id, g, g^2, ..., g^n\}$.
Tutti e soli i generatori di C_n sono le potenze di g con esponente coprimo con n.
Generatori: $g^t, \ (t, n) = 1$

7.13 Teorema di Lagrange

Se G è un gruppo finito, allora l'ordine di un sottogruppo divide l'ordine del gruppo:

$$H \leq G \Rightarrow |H| \,|\, |G| = o(H)|o(G)$$

Oss: non vale sempre il viceversa.

Se $d|o(G) \Rightarrow \exists H \leq G,\ o(H) = d$

Dimostrazione: Siano $n = o(G)$ e $m = o(H)$, i il numero di calssi laterali destre modulo H.
$Ci_d =$ indice del sottogruppo H nel gruppo G.
$i = |G_{/\sim d}|$ = numero di classi laterali. Esistono $a_1, a_2, ..., a_i$ rappresentanti distinti delle classi laterali.

$$G = Ha_1 \dot{\cup} Ha_2 \dot{\cup} ... \dot{\cup} Ha_i \Rightarrow |G| = o(G) =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} |Ha_j| = \sum_{j=1}^{i} |H| = i \cdot |H| = i \cdot m$$

cioè ho $n = i \cdot m$. $ord(G)$ =numero classi laterali destre$\cdot ord(H)$.
Da questa relazione deduco che:

1. $ord(H)|ord(G)$
2. $i|o(G)$

Oss: ripeto tutto per le classi laterali sinistre $i_s \cdot m = n$.

7.13.1 Corollario 1

Se $|G| = p$ primo, allora gli unici sottogruppi di G sono $H = \{e\}$ oppure $H = G$ (non ci sono sottogruppi intermedi).

7.13.2 Corollario 2

Se $|G| = primo$, allora G è ciclico (in particolare è abeliano).
Dimostrazione: Se $|G| = p$ primo> 1.
Sia $x_0 \in G, x_0 \neq e$. Sia $H = \langle x_0 \rangle \neq \{e\}$ $(H = \{e, x_0, x_0^2 ...\})$, per il *corollario 1*:

$$H = G \Rightarrow G = \langle x_0 \rangle$$

7.14 Definizione: indice di un sottogruppo

L'indice di un sottogruppo H in un gruppo G è:

$$i = i_s = i_d$$

e si denota:

$$i = [G : H]$$

8 Classi laterali di un sottogruppo

8.1 Definizione: congruenza destra modulo

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo, sia $H \leq G$ sottogruppo.

Definiamo congruenza destra modulo H la relazione così definita:

$$\forall\, a, b \in G : a \sim_d b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$$

8.2 Proposizione

$\sim_d$ $(mod\ H)$ è una relazione di equivalenza.
Dimostrazione:

- (R) $a \sim_d a$?
$$a \cdot a^{-1} = e\ \in H$$
- (S) $a \sim_d b \Rightarrow b \sim_d a$?
$$ab^{-1} \in H$$
H sottogruppo:
$$(ab^{-1})^{-1}\ \in H$$
$$\Rightarrow (b^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1} \Rightarrow b \sim_d a$$
- (T) $a \sim_d b$ e $b \sim_d c \Rightarrow a \sim_d c$?
$$ab^{-1} \in H\ e\ bc^{-1} \in H$$
$$(ab^{-1})(bc^{-1}) \in H$$
H è chiuso rispetto al prodotto
$$(ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1} \Rightarrow a \sim_d c$$

8.3 Insieme quoziente

Dato $a \in G$: $[a]_{\sim_d} = H \cdot a$ dove $Ha = \{ha : h \in H\}$, $H = \{e, h_1, h_2 ...\}$, $Ha = \{e \cdot a, h_1 \cdot a, ...\}$.

Dimostrazione: devo provare $1.Ha \subseteq [a]_{\sim_d}$ e $2.[a]_{\sim_d} \subseteq Ha$.

1.
$$b \in Ha$$
$$\Leftrightarrow \exists h : b = ha$$
$$\text{moltiplicando per } a^{-1}$$
$$\Leftrightarrow h = ba^{-1}$$
$$\Leftrightarrow ba^{-1} \in G$$
$$\Leftrightarrow b \sim_d a \Leftrightarrow b \in [a]_{\sim_d}$$

è la stessa di sopra ma partendo dalla fine verso l'inizio.

8.4 Proposizione

Tutte le classi laterali destre hanno la stessa cardinalità.

Dimostrazione: dimostro che $|Ha| = |H|$ $\forall a \in A$ ($|Ha| = [a]_{\sim_d}$, per transitività $|Ha| = |Hb|$.
Sia

$$\varphi : H \to Ha$$

$$h \to ha$$

- Suriettiva: ogni elemento di Ha è del tipo ha per qualche $h \in H$.
- Iniettiva: $\varphi(a) = \varphi(h') \Rightarrow ha = h'a \Rightarrow$ per la cancellatività nel gruppo $\Rightarrow h = h'$

8.5 Definizione: congruenza sinistra modulo

$$\forall\ a, b \in G,\ \ a \sim_s b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

La classe laterale sinistra : $[a]_{\sim_s} = aH = \{ah : h \in H\}$

9 Omomorfismi

9.1 Isomorfismo

Dati $(G, *)$ e $(H, \cdot)$ due gruppi, un isomorfismo di G in H è

- $\varphi : G \to H$ una biiezione.
- φ rispetta le operazioni di gruppo, cioè:

$$\forall\ a, b \in G : \varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \quad \varphi(a)\ e\ \varphi(b) \in H$$

Si dice che G è isomorfo ad H e si scrive $G \cong H$.

9.2 Omomorfismo

Se $\varphi : G \to H$ conserva le operazioni di G e H, φ si chiama omomorfismo, ovvero un omomorfismo è un'applicazione tale che:

$$\forall\ a, b \in G : \varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

9.3 Epimorfismo

Se φ è suriettiva, φ si chiama epimorfismo.

9.4 Monomorfismo

Se φ è iniettiva, si chiama monomorfismo.

9.5 Isomorfismo 2

Se φ è biunivoca, allora φ si chiama isomorfismo.

9.6 Proposizione

L'isomorfismo tra gruppi è una relazione di equivalenza.

9.7 Kernel/Nucleo

Se l'applicazione φ è un omomorfismo, allora viene definito *nucleo* di $\varphi \subseteq G$

$$Ker(\varphi) : \{x \in G : \varphi(x) = e'\}$$

dove:
$e =$ l'elemento neutro di G
$e' =$ l'elemento neutro di G'

9.8 Proposizione

Dato $\varphi : G \to G'$ omomorfismo, allora:

1. $\varphi(e) = e'$
2. $\varphi(g^{-1}) = (y(g))^{-1}$
3. $Ker(\varphi) \leq G$
4. $Im\varphi \leq G'$

Dimostrazione 1: Per dimostrare che $\varphi(e)$ è l'elemento neutro di e' devo mostrare che $\forall y \in G'$: $\varphi(e) \cdot y = y$; moltiplicando per y^{-1} (la cancellazione in G') di ottiene:

$$\varphi(e)\varphi\varphi^{-1} = \varphi\varphi^{-1}$$
$$\Rightarrow \varphi(e) = e'$$

Dimostrazione 2: lasciata per esercizio

Dimostrazione 3: $Ker\varphi \leq G$?

- contiene e: è il punto 1: infatti $\varphi(e) = e'$
- è chiuso rispetto al prodotto: siano $a, b \in Ker\varphi$ e verifichiamo che $a * b \in Ker\varphi$:

$$a \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(a) = e'$$
$$b \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(b) = e'$$
$$a * b : \ \varphi(a * b) = \varphi(a)\varphi(b) = e' \cdot e' = e'$$
$$\Rightarrow a * b \in Ker\varphi$$

- è chiuso rispetto agli inversi: sia $a \in Ker\varphi$ (cioè $\varphi(a) = e'$) devo provare che $a^{-1} \in Ker\varphi$:

$$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = (e')^{-1} = e'$$

  quindi $a^{-1} \in Ker\varphi$

Dimostrazione 4 TODO: Ricontrollare appunti

9.9 Omomorfismo di anelli

Se $(A, +, \cdot)$ è $(A', +, \cdot)$ sono anelli $0_A, 0_{A'}$ i corrispettivi elementi neutri, un omomorfismo di anelli è un'applicazione:

$$\varphi : A \to A'$$

tale che:

- $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$
- $\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$

$$Ker\varphi = \{x \in A : \varphi(x) = 0'_A\} \subseteq A \ sottoanello$$

TODO: *qui c'è un insieme che non ho capito

9.10 Proposizione

$\varphi : (G, *) \to (G', \cdot)$ omomorfismo di gruppi, allora:

$$\varphi \ iniettiva \Leftrightarrow Ker\varphi = \{e\}$$

$$\varphi \ iniettiva \leftrightarrow |\varphi^{-1}(y)| \leq 1 \ \forall \ y$$

$$\varphi \ iniettiva + omomorfismo \Leftrightarrow \varphi^{-1}(e^{-1}) = e$$

Dimostrazione: $Ker = Ker\varphi \leq G'$
Consideriamo la congurenza modulo il segno (?) k

$$a \sim_d b \Leftrightarrow ab^{-1} \in K (= Ker\varphi) \Leftrightarrow \varphi(a * b^{-1}) = e'$$

φ è un morfismo:

$$\Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = e$$

$$\Leftrightarrow \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = e'$$

moltiplicando per $\varphi(b)$

$$\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$\Leftrightarrow \varphi \ iniettiva$$

9.11 Proposizione

$G, G' \ \ \varphi : G \to G'$ omomorfismo, allora:

1. Se G finito, allora l'ordine $Im\varphi$ divide l'ordine di G (ed anhe di G', se G' è finito).
2. Se G è ciclico, allora $Im\varphi$ è un sottogruppo ciclico di G'
3. Se $g \in G$ ha periodo finito, allora il perodo di $\varphi(g)$ divide l'ordine di g

10 Spazi Vettoriali

10.1 Definizione spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale V su un campo K è

- Un insieme nn vuoto V, in cui sono definite due operazioni, di cui una interna ed una esterna.
  Interna: somma $+$:
  $$V \times V \to V$$
  $$(v, w) \mapsto v + w$$
  Esterna: prodotto $\cdot$ per uno scalare:
  $$K \times V \to V$$
  $$(c, v) \mapsto c \cdot v$$
- $(V, +)$ è un gruppo commutativo
- $K \times V \to V$ e $(c, v) \mapsto c \cdot v$ tale che:
  - distributività per vettori:
    $$\forall c \in K, \forall v, w \in V$$
    $$c(v + w) = cv + cw$$
    $$(v + w)c = vc + wc$$
  - associatività per gli scalari:
    $$\forall c, d \in K, \forall v \in V$$
    $$c(dv) = (cd)v$$
- distributività per gli scalari:
  $$\forall c, d \in K, v \in V$$
  $$(c + d)v = cv + dv$$
- $1 \cdot v = v$

10.2 Scalare

E' un elemento del campo.

10.3 Sottospazio vettoriale

Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettorialo V su R è un sottoinsieme $W \subseteq V$ non vuoto tale che: W rispetto le stesse operazioni di V sia esso stesso uno spazio vettoriale.

- Equivalentemente si deve avere:
  1. $(W, +)$ è un sotto gruppo di $(V, +)$
  2. chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare
- Equivalentemente:
  1. $\forall\, u, v \in W$: $u - v \in W$ $[a \cdot b^{-1} \in G]$
  2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, v \in W$: $\alpha \cdot v \in W$
- Equivalentemente:
  1. $\forall\, u, v \in W : u - v \in W$
  2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in W : \alpha v \in W$
     (Se $\alpha = -1, v \in W$ allora $-v \in W$
     $u \in W$ allora $u - (-v) = u + v$)
- Equivalentemente $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow$

  1* $\forall\, u, v \in W : u + v \in W$
  2* $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in W : \alpha v \in W$

10.4 Proposizione

$W \subseteq V, W \neq \emptyset$ è un sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow$:

$$\forall\, \alpha\beta \in \mathbb{R}, \forall\, u, v \in W : \; \alpha u + \beta v \in W$$

$\alpha u + \beta v$ si chiama **combinazione lineare** di u e v.

Dimostrazione: la combinazione lineare è equivalente a $1*$ e $2*$. Supponiamo che $\alpha u + \beta v \in W \; \forall\, \alpha\beta \in \mathbb{R}, \forall\, u, v \in W$
$2* \rightarrow$ in particolare è vero se prendo $\alpha = \alpha, \beta = 0$: $\alpha u + \beta v = \alpha u \in W$.
$1* \rightarrow$ in particolare, se prendo $\alpha = 1, \beta = -1$: so che $1 \cdot u + (-1) \cdot v = u - v \in W$.

10.5 Definizione: traccia

Data una matrice quadrata $A = [a_{i,j}]$ si chiama traccia della matrice il valore (scalare in $\mathbb{R}$) definito da:

$$tr(A) = a_{11}, a_{22}, a_{33} + ... + a_{nn}$$

(è la somma degli elementi della diagonale).

10.6 Definizione: combinazione lineare

Dati $v_1, ...v_t \in V$ vettori di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ dati t scalari $c_1, c_2, ..., c_t \in \mathbb{R}$, il vettore $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_tv_t$ si chiama combinazione lineare di vettori $v_1, ..., v_t$ tramite gli scalari $c_1, ..., c_t$.

10.7 Proprietà di calcolo negli spazi vettoriali

V spazio vettoriale su K, 0 è lo zero del campo, $0_V = \underline{0}$ è l'elemento neutro del gruppo (V, t)

- $0v = \underline{0}$ vettore nullo $\forall v \in V$
- $(-c)v = -(cv)\ \forall\ v \in V, \forall c \in \mathbb{R}$
- $c\underline{0} = \underline{0}$
- Se $cv = \underline{0}$ allora $c = 0$ oppure $v = \underline{0}$

10.8 Definizione

w è combinazione lineare di $v_1, v_2, ..., v_t$ se esistono degli scalari $c_1, c_2, ..., c_t \in \mathbb{R}$ tali che:

$$w = c_1v_1 + ... + c_tv_t$$

10.9 Osservazione: combinazione lineare banale

Lo "zero" vettoriale è sempre combinazione lineare di un insieme $\{v_1, ..., v_t\}$ di vettori qualunque:

$$\underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_t$$

10.10 Definzione: linearmente dipendente

Un insieme di vettori $\{v_1, ..., v_n\}$ è linearmente dipendente (sul campo di V) $\Leftrightarrow$ esistono coefficienti $c_1, ..., c_n \in K$ non tutti nulli, tali che:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = \underline{0}$$

10.11 Osservazione

Se almeno uno dei coefficienti $\{c_1, ..., c_n\}$ è non nullo (sia $C_j \neq 0$), allora si può scrivere (partendo dalla precedente *linearmente dipendente*):

$$c_jv_j = -c_1v_1 - c_2v_2 - ... - c_{j-1}v_{j-1} - c_{j+1}v_{j+1} - .... - c_nv_n$$

e $C_j \neq 0 \Rightarrow \exists c_j^{-1}$ allora:

$$v_j = -\frac{c_1v_1}{c_j} - \frac{c_2v_2}{c_j} - ... - \frac{c_nv_n}{c_j}$$

10.12 Osservazione

$\{v_1, ...v_n\}$ è un insieme linearmente **indipendente** $\Leftrightarrow \underline{0} = c_1v_1 + ... + c_nv_n \Leftrightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Ovvero: $\{v_1, ..., v_n\}$ sono vettori linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ l'unica combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$ è la combinazione lineare banale.

10.13 Osservazione

Il vettore nullo $\underline{0}$ di V è sempre linearmente dipendente da qualunque insieme finito di vettori.

Infatti sia $\{u_1, ...u_z\} \subseteq V$ allora:

$$\underline{0} = 1 \cdot \underline{0} = 0u_1 + 0u_2 + ... + 0u_t$$

(un modo equivalente: $0u_1 + 0u_2 + ... + 0u_t - 1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$)

10.14 Osservazione

Se $S \subseteq V$ con $\underline{0} \in S$, $S = \{\underline{0}, v_1, ..., v_k\}$ allora S è un insieme di vettori dipendenti: infatti c'è la dipendenza

$$1 \cdot \underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_k$$

10.15 Osservazione

La proprietà di essere indipendente di $S \subseteq V$, $S = \{v_1, ..., v_t\}$ si eredita ai sottoinsiemi, cioè:

$$\forall\, T \subseteq S,\ S\ indipendente \Rightarrow T\ indipendente$$

$\{v_1\}$ è un insieme indipendente $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$; $\{\underline{0}\}$ è indipendente.

10.16 Sottospazio generato da: span

Dati $v_1, v_2, ..., v_t$ vettore di V (spazio vettoriale su un campo) lo *span* dei vettori $v_1, ..., v_t$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene $v_1, ...v_t$

$$Span(v_1, ..., v_t) = \bigcap_{W \leq V\ \{v_1 ... v_t\} \in W} W$$

Altra notazione Span: $< v_1, ...v_t >$

10.17 Proposizione

$$Span(v_1, ...v_t) = \{\sum_{i=1}^{t} \alpha_i v_i : \alpha_i, ..., \alpha_t \in K\}$$

Dimostrazione data per esercizio

10.18 Sistema di generatori

Dato V su K (es. $K = \mathbb{R}$), i vettori $\{v_1, ...v_t\}$ sono un sistema di generatori (o insieme di generatori) per V se

$$V = Span(v_1, ..., v_t)$$

Se $W \subseteq V$ è un sottospazio, allora $\{u_1, ..., u_k\}$ sono generatori (sistema di generatori) per W se

$$W = Span(u_1, ..., u_k)$$

10.19 Basi di spazi vettoriali

Dato V su K, un insieme $B = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ si chiama base di V se:

- $V = Span(v_1, ..., v_n)$ cioè B sono generatori per V.
- $\{v_1, ..., v_n\}$ sono indipendenti.

10.20 Spazio finitamente generato

Uno spazio vettoriale V(su K), si dice finitamente generato se ammette un insieme finito di generatori.

10.21 Proposizione

$B = \{v_1, ..., v_n\}$ é una base di $V \Leftrightarrow \forall v \in V \exists! \, (c_1, ..., c_n), c_i \in \mathbb{R}$ con $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$

Dimostrazione$\Rightarrow$

1. Ipotesi: $B = \{v_1, ..., v_n\}$ é una base di V
2. Tesi: $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$

Sia $v \in V$. Siccome B è una base, allora è un insieme di generatori di $V \Rightarrow v \in Span(v_1, ..., v_n) \Rightarrow \exists c_1, ..., c_n$ con $v = c_1v_1 + ... + c_nv_n$
Perchè sono unici? Siano $(d_1, ..., d_n)$ con

$$v = d_1v_1 + ... + d_nv_n$$

$$v = c_1v_1 + ... + c_nv_n$$

$$\Rightarrow v - v = 0 = d_1v_1 + ... + d_nv_n - (c_1v_1 + ... + c_nv_n) =$$
$$= (d_1 - c_1)v_1 + ... + (d_n - c_n)v_n$$

ma $v_1, ..., v_n$ sono indipendenti $\Rightarrow$ i coefficienti (d_kv_k) sono tutti nulli.

Dimostrazione $\Leftarrow$ *fare per esercizio*

10.22 N-upla delle coordinate di v in base B

Data $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordinata di V, se $v = c_1v_1 + ... + c_nv_n$ allora il vettore colonna $[c_1 \ ... \ c_n] \in \mathbb{R}^n$ si chiama vettore delle coordinate di v in base B.

10.23 Corollario

Fissata una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ di V l'applicazione $\varphi : V \to K^n$ (K è il campo di V) che manda v in $\varphi(v) = [c_1 \ ... \ c_n]$ (cioè il vettore nelle sue coordinate in base B) è una biiezione.

10.24 Teorema: esistenza di una base

Se V è uno spazio vettoriale finitamente generato (cioè se $V = Span(v_1, ..., v_h)$) allora esiste una base $\{w_1, ..., w_n\}$ di V.
Non dimostrato.

10.25 Proposizione

Date due basi $B = \{v_1, ..., v_n\}$ e $B = \{w_1, ..., w_m\}$ di V allora $n = m$.

10.26 Dimensione di V

Se V è finitamente generato, allora si chiama dimensione di V la cardinalità di una qualunque base di V.

10.27 Osservazione (notazione)

Se la dimensione di V è n, allora $\varphi : V \to K^n$ si scrive $dim_k V = n$ se $|B| = n$.

10.28 Teorema del completamento di una base

Sia $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di V, e sia $\{w_1, ..., w_p\}$ con $\{p \leq n\}$ un insieme di vettori indipendenti. Allora posso completare $\{w_1, ..., w_p\}$ con $(n-p)$ vettori di B a formare una base (ovvero posso sostituire p vettori di B un altro insieme di p vettori indipendenti).
Dimostrazione fatta parzialmente da vedere per lode.

10.29 Teorema

Le seguenti condizioni sono equivalenti tra loro per un insieme $B = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ di n vettori:

1. B è una base.
2. B è un insieme di generatori minimale (cioè ogni sottoinsieme S proprio di V genera un sottospazio $Span(S) \nleq V$)

3. B è un insieme di vettori linearmente indipendenti massimale (cioè ogni $T \supsetneq B$ insieme di vettori che contiene B non è più indipendente).

10.30 Corollario

Se V è finitamente generato e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ $B' = \{v'_1, ..., v_m\}$ sono basi di V allora $|B| = |B'|$ $(n = m)$.

Dimostrazione: per assurdo $m < n$, allora con il teorema del completamento costruisco $B'' = B' \cup \{n - m\ vettori\}$. B' è una base ma per il pt.3 (teorema precedente) B' è un insieme massimale $\Rightarrow$ contraddizione.

10.31 Osservazioni

- Se $dim_K V = n$ allora ogni sottoinsieme di n vettori indipendenti è anche un insieme di generatori.
- Se $dim_K V = n$ allora ogni insieme di n che generano V è anche un insieme indipendente (cioè una base).
- Se $W \leq V$, sottospazio di V con $dim_K V = n$ allora:
  - $dim_K W \leq dim_K V$
  - $dim_K W = dim_R V \Leftrightarrow W = V$
  - $W \neq \{0_V\} \Leftrightarrow dim_K W > 0$

10.32 Somma di sottospazi

Dati $U, W \leq V$ (V spazio vettoriale su R):

1. L'intersezione $U \cap W$ è anche un sottospazio di V

$$U \cap W\{v \in V : v \in U \wedge v \in W\}$$

   Dimostrazione per esercizio

2. (L'unione di due sottospazi non è, in generale, un sottospazio (a meno che non siano uno contenuto nell'altro)). Il più piccolo sottospazio di V che contiene sia V che W si chiama la **somma** di U e W e si denota:

$$U + W = Span(U \cup W)$$

10.33 Proposizione

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

Per esercizio verificare che u+w è un sottospazio che contiene $U \cup W$ *e* $Span(U + W)$

10.34 Teorema di Grossman

$dim_K(U+V) = dim_K U + dim_K W - dim_K(U \cap W)$

10.35 Somma diretta di sottospazi

Quando $U \cap V = \{0_V\}$, cioè ha dimensione 0, allora si parla di somma diretta di sottospazi e si scrive:

$$U \oplus W$$

10.36 Proposizione

Se $U \cap V = \{0_V\}$ allora ogni vettore di $U \oplus W$ si scrive come somma di un elemento di U più un elemento di W in modo unico.

Dimostrazione: supponiamo che $v_0 \in U + W$ si scriva in due modi diversi:

$$v_0 = u + w = u' + w' \ \ (con\ u, u' \in U;\ w, w' \in W)$$

$$\Rightarrow v_0 - v_0 = 0 = u + w - (u' - w') =$$

$$(u + u') + (w - w') = 0$$

$$\Rightarrow \in U \cap W = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow u - u' = 0 \Rightarrow u = u'$$

$$\Rightarrow w - w' = 0 \Rightarrow w = w'$$

11 Sistemi di equazioni lineari

11.1 Scrittura

Ogni sistema di equazioni lineari si può scrivere nella forma:

$$AX = K$$

X è la colonna delle incognite, K la colonna dei termini noti del sistema

11.2 Risolvere sistema di equazioni

Una soluzione del sistema è una n-upla di reali i cui valori $s_1, ..., s_n$ sostituiti alle incognite le rendano tutte vere. cioè:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ ... \\ s_n \end{bmatrix}$$

con

$$A \cdot S = K$$

11.3 Sistemi equivalenti

Due sistemi $AX = K$ e $BX = K$ sono equivalentei se hanno esattamente le stesse soluzioni.

11.3.1 Operazioni elementari di riga

- $L = L_{ij}$ scambio riga i e riga j
- $L = L_i(c)$ moltiplico la riga i per la costante c
- $L = L_{ij}(c)$ sostituisco alla riga i la riga ottenuta sommando ad i c volte la riga j, $c \neq 0$

11.4 Equivalenza per riga

Due matrici A e B dello stesso ordine $n \times m$ sono equivalenti per riga se B si ottiene da A per applicazione successiva di un numero finito di *operazioni elementari* di riga, cioè se:

$$B = L_k...L_2L_1(A)$$

e si scrive:

$$A \sim B$$

11.5 Proposizione

L'equivalenza per riga è una relazione di equivalenza. *Dimostrazione sulle note della prof.*

11.6 Proposizione

Siano A, B matrici $m \times n$, se una successione di operazioni elementari di riga trasforma A in B, allora le stesse operazioni trasformano la matrice identica in una matrice P tale che $B = P \cdot A$.
In altre parole
$$[A|I] \sim [B|P]$$

11.7 Matrice identica

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & & ... & & \\ & & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.8 Corollario

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ ed è invertibile, allora l'inversa si trova applicando la riduzione per righe alla matrice A aumentata della matrice I, cioè:

$$[A|I] \sim [I|A^{-1}]$$

11.9 Teorema

Per ogni matrice A $m \times n$ esiste una matrice R $m \times n$:

- ridotta a scala
- $A \sim R$ (riga equivalente ad A)

11.10 Rango

Si chiama rango di una matrice A il numero di pivot di una ridotta scala R riga-equivalente ad A

11.11 Pivot

Primo elemento non nullo in una riga della matrice.

11.12 Rango pieno

Una matrice A è di rango pieno se $rg(A) = m$ (m=massimo possibile cioè il numero di righe).

11.13 Proposizione: proprietà del rango

Il rango di A ha le seguenti proprietà:

1. Se $A \sim B$ allora $rg(A) = rg(B)$ $(A \sim R \Rightarrow B \sim R)$
2. Se A è di ordine $m \times n$, allora $rg(A) \leq min\{m, n\}$
3. $rg(A \cdot B) \leq min\{rg(A), rg(B)\}$
4. $rg(A^t) = rg(A)$, dove A^t è la matrice trasoposta di A definita: $(A^t)_{ij} = a_{ij}$ *(scambia le righe con le colonne).*

11.14 Teorema: Rouchè-Capelli

Dato un sistema $AX = K$, allora:

1. Se $rg([A|K]) > rg(A)$, allora il sistema è incompatibile: non ci sono soluzioni.
2. Se $rg([A|K]) = rg(A)$, allora ho due casi:
   (a) Se $n = r = rg(A)$: rango massimo, c'è una sola soluzione.
   (b) Se $r = rg(A) < n$: ho infinite soluzioni che saranno paramentriche, con tanti parametri quante le colonne non pivot (tanti parametri quanto $n - rg(A)$).

12 Studio dei sistemi omogenei

Le matrici con una sola colonna sono scritte come righe con un pedice: $[valori]_{colonna}$.

12.1 Proposizione

Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo (con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Allora

$$W = \{X = [x_1 ... x_n]_{colonna} \in \mathbb{R} : AX = 0\}$$

L'insieme delle soluzioni del S.L.O. è un sottospazio di R^n

Dimostrazione Se X, X' sono in W allora $\alpha X + \beta X' \in W$? $A(\alpha X + \beta X') = \alpha AX + \beta AX' = \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$

12.2 Teorema: Struttura sulle soluzioni di un sistema

Sia $AX = b$ un sistema lineare (b colonna dei termini noti). Sia $v_0 \in \mathbb{R}^n$ una soluzione del sistema $AX = b$. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix}$ (una soluzione "particolare") Allora ogni altra soluzione di $AX = b$ si scrive nella forma

$$v = v_0 + w \ \ (\textit{soluzione generale})$$

al variare di $w \in W = \{X : AX = \underline{0}\}$ cioè al variare di w nelle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $AX = \underline{0}$.

$$(Av_0 = b, \ Aw = \underline{0}$$
$$\Leftrightarrow A(v_0 + w) = b \Rightarrow Av_0 + Aw = b + \underline{0} = b)$$

12.3 Nota importante

$A(X + Y) = AX + AY$: la moltiplicazione per una matrice è quindi lineare.

13 Applicazioni lineari

13.1 Definizione: applicazione lineare (trasformazione lineare o homomorfism of vector space)

Un'applicazione lineare è un'applicazione $T : V \to W$ di spazi vettoriali su K tale che $\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda \in K$ si ha:

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ (T è additiva)
2. $T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v)$ (T è omogenea)

(additiva+omogenea = è lineare).
In altre parole T conserva le operazioni di spazio vettoriale.

13.2 Proposizione

Punti $1 + 2 \Leftrightarrow 3 :\ \forall \lambda \mu \in K, \forall v_1, v_2 \in V$

$$T(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda T(v_1) + \mu T(v_2)$$

T manda combinazioni lineari in combinazioni lineari (con gli stessi scalari) dei trasformati.

13.3 Definizione

Fissata $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) : A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1_n} \\ & ... & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$, sia $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da:

$$X \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto L_A(x) := AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ ... \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

La trasformazione L_A è la moltiplicazione (a destra) per A:

$$L_A : X \mapsto AX$$

ad ogni matrice A corrisponde una trasformazione lineare L_A.

Per esercizio: dimostrare che $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare.

- $L_A(X + Y) = L_A(X) + L_A(Y)$*? (dimostrazione su appunti)*
- $L_A(\lambda X) = \lambda L_A(X)$?

13.4 Definizione

Data una trasformazione lineare $T : V \to W$, restano determinati due sottoinsiemi:

- Il nucleo di T: $KerT$

$$KerT = \{v \in V : T(v) = 0_W\} \subseteq V$$

- L'immagine di T: ImT

$$ImT = \{T(v) : v \in V\} \subseteq W$$

13.5 Proposizione (risolvere per esercizio)

1. $KerT \leq V$
2. $ImT \leq W$
3. T suriettiva $\Leftrightarrow ImT = W$
4. T iniettiva $\Leftrightarrow KerT = \{0\}$

13.6 Osservazione (!)

Calcolare il nucleo di un'applicazione lineare corrisponde a risolvere un sistema omogeneo.

13.7 Proposizione

Un'applicazione lineare $T : V \to W$ è definita univocamente (ovvero è determinata) quando si conoscono le immagini di T sui vettori $\{v_1, ..., v_n\}$ di una base di V, se $dimV = n$: ovvero basta conoscere $T(v_1), ..., T(v_n) \in W$ per conoscere tutta la trasformazione lineare T.

Dimostrazione Se conosco T su $v_1, ..., v_n$ allora v si scrive come $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ (perchè $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ genera v). T è lineare:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n)$$

Questo determina univocamente T:
Devo dimostrare che se esiste un'altra applicazione lineare $S \neq T$ ma che coincide con T sulla base, allora ho una contraddizione. Sia S un'altra applicazione $S : V \to W$ con $T(v_i) = S(v_i)$ $\forall i = 1, ..., n$ allora

$$S(v) = \alpha_1 S(v_1) + ... + \alpha_n S(v_n) = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) = T(v)$$

T è determinata completamente dai suoi valori su una base B di V.

13.8 Corollario

Due applicazioni lineari coincidono $\Leftrightarrow$ coincidono sui vettori di una base.

13.9 Corollario

Se $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ base ordinata di V e se $T : V \to W$ lineare, allora $ImT = Span(\{T(v_1), ..., T(v_n)\})$: cioè i vettori immagine della base di V generano l'immagine della trasformazione.

In particolare, se $T = L_A$, trasformazione lineare associata ad $A = \begin{bmatrix} a_{11} & .. & \\ & ... & \\ & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$X \to AX = T(x)$$

allora

$$\begin{aligned} ImT = Im(L_A) &= Span(T(e_1), ..., T(e_n)) \\ &= Span(A \cdot e_1, A \cdot e_2, ..., A \cdot e_n) \end{aligned}$$

dove

$$A \cdot e_i = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = A^{(i)}$$

(Quindi questo punto del corollario ci dice che $Im(L_A) = Span(Colonne\ di\ A)$

$dimIm(L_A)$ = dimensione spazio generato dalle colonne
=numero dei pivot di una ridotta scala equivalente ad A)

13.10 Definizione: rango trasformazione lineare

1. Il rango di una trasformazione lineare $T : V \to W$ è $rg(T) = dim_K Im(T)$.
2. Il rango di L_A è la dimensione dell'immagine di L_A, che è il rango della matrice A, $ImL_A = \{AX : X \in \mathbb{R}^n\}$.

13.11 Teorema della dimensione

Sia $T : V \to W$ trasformazione lineare. Allora:

$$dimV = dim_K KerT + dim_K ImT$$

Sia $\{u_1, ..., u_s\} \subseteq V$ una base di $KerT$

- Generano $KerT$

- Sono indipendenti
- $T(u_1) = ... = T(u_s) = 0$

Per il teorema del completamento: completo $\{u_1, ..., u_s\}$ ad una base di V, quindi sia $\{u_1, ..., u_s, w_1, ..., w_{n-s}\}$ base di V. Si candidano a base di W i vettori $\{w_1, ..., w_{n-s}\}$.
Dobbiamo mostrare che $t = \{T(w_1), ..., T(w_{n-s})\}$ è una base di ImT, cioè che $rgT = n - s = dimV - dimKerT$

1. t genera $Im(T)$: sappieamo (dal corollario) che l'immagine ImT è lo span di $(T(u_1), T(u_2), ..., T(u_s), T(w_1), ..., T(w_{n-s})) = Span(0_w, T(w_1), ..., T(w_{n-s}))$

2. Vediamo che $T(w_1), ..., T(w_{n-s})$ sono indipendenti.
   Supponiamo $\alpha_1, ..., \alpha_{n-s} \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\alpha_1 T(w_1) + ... + \alpha_{n-s} T(w_{n-s}) = 0$$

$$\Leftrightarrow T(\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_{n-s} w_{n-s}) = 0 \;\; (T\ e'\ lineare)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_{n-s} w_{n-s} \in KerT$$

$$\Rightarrow \beta_1, ..., \beta_s :\; \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_{n-s} w_{n-s} = \beta_1 u_1 + ... + \beta_s u_s$$

$$\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_{n-s} w_{n-s} - \beta_1 u_1 - ... - \beta_s u_s = 0$$

   ed è una combinazione lineare dei vettori di una base di V che dà 0

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-s} = -\beta_1 = ... = -\beta_s = 0$$

13.12 Osservazione

Se $v_1, ..., v_n$ sono i vettori colonna di $\mathbb{R}^n$; sia $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$ la matrice $m \times n$ formata dai vettori.
Allora una combinazione lineare delle colonne $v_1, ..., v_n$ con gli scalari $\alpha_1, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n)$ è la stessa cosa di:

$$A_{(m \times n)} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

13.13 Proposizione

a) $S, T : V \to W$, S, T lineari, V, W spazi vettoriali allora: $S + T$, $\lambda \cdot S$ sono lineari.
   Dove $(S + T)(v) := S(v) + T(v) : \forall v \in V \;\; (S + T : V \to W)$
   e dove $(\lambda S)(v) := \lambda S(v) \;\; (\lambda S : V \to W)$

b) Siano $S : U \to V$, $T : V \to W$ allora è possibile definire la composta $T \circ S : U \to W$, e $T \circ S$ è lineare.

Dimostrazione punto b) (la a) per esercizio)
Da dimostrare: $T \circ S$ è lineare $\Leftrightarrow T \circ S(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha(T \circ S)(v_1) + \beta(T \circ S)(v_2)$

$$(T \circ S)(\alpha v_1 + \beta v_2) = T(S(\alpha v_1 + \beta v_2)) =$$
$$T(\alpha S(v_1) + \beta S(v_2)) = \quad \text{(S è lineare)}$$
$$\alpha T(S(v_1)) + \beta T(S(v_2)) = \quad \text{(T è lineare)}$$
$$\alpha(T \circ S)(v_1) + \beta(T \circ S)(v_2)$$
$$\Rightarrow T \circ S \text{ è lineare}$$

13.14 Conseguenze della proposizione

a) L'insieme $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W, T \text{ lineare}\}$ è uno spazio vettoriale

b) $\mathcal{L}(V, V)$ l'insieme delle trasformazioni lineari da V in se

$$T : V \to V \qquad T \circ S$$
$$S : V \to V \qquad S \circ T$$

$(\mathcal{L}(V, V), +, \cdot)$

- è un anello non commutativo
- unitario $id : V \to V$, $T \cdot id = id \cdot T = T$ (elemento neutro è l'unità del prodotto)
- $0_V : V \to V$ $(v \mapsto 0_V)$ trasformazione lineare nulla (elemeno neutro della somma)

c) Se in $\mathcal{L}(V, V)$ ci restringiamo a guardare le trasformazioni invertibili: $(\{T : V \to V : T \text{ lineare e invertibile}\}, \cdot)$ è un gruppo commutativo.

13.15 Osservazione: iniettività, suriettività

Sia $T : V \to W$ lineare e $dimV = dimW$, allora:

- T invertibile $\Leftrightarrow T$ iniettiva
- T invertibile $\Leftrightarrow T$ suriettiva

13.16 Osservazione: isomorfismo

V e W sono isomorfi (**notazione**: $V \cong W$) $\Leftrightarrow \exists\, T : V \to W$ con T biunivoca.

13.17 Esempio isomorfismo

V dimensione finita n; $B = (v_1, ..., v_n)$ base ordinata.

$$f_B : V \to \mathbb{R}^n$$

$$v \mapsto f_B(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dove } v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$$

$f_B(v)$ sono le coordinate di v in base B. Si ha che f_B è un isomorfismo di V in $\mathbb{R}^n$.

L'isomorfismo $V \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$ non è canonico, cioè dipende dalla scelta di una base.

Conseguenza importante: tutti gli spazi vettoriali di dimensione n su K sono tutti isomorfi a K^n.

13.18 Teorema

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})^{\to [m \cdot n]}$$

Dimostrazione: abbiamo visto già come associare ad una matrice $A_{m \times n}$ un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$.
$A \mapsto L_A$ la trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ che agisce per moltiplicazione.

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$X \mapsto AX$$

$$L : Matrici\ m \times n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$
$$A \mapsto L(A) = L_A$$

- L è biunivoca? C'è l'inversa?
- L è lineare? *Fare da soli*

Inizio dimostrazione primo punto:

$$L : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$
$$A \leftarrow T$$

Ora

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$e_1 \mapsto T(e_1) \in \mathbb{R}^m$$
$$\vdots$$
$$e_n \mapsto T(e_n) \in \mathbb{R}^m$$

Sia $A := \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \end{bmatrix}$ è una matrice $m \times n$.
Devo mostrare che $L_A = T$(*completare da soli!*)

13.19 Osservazione

Si può dimostrare che $L_A \cdot L_B = L_{A \cdot B}$

13.20 Proposizione: ricapitolazione sulle matrici invertibili

Le seguenti sono equivalenti:

1. $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è invertibile (rispetto al prodotto di matrici)
2. $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è invertibile
3. L_A è iniettiva
4. L_A è suriettiva
5. $KerA = \{0\}$
6. $ImL_A = \mathbb{R}^n$ $(= ImA)$
7. $rgA = n$
8. Le colonne di A sono indipendenti
9. Le righe di A sono indipendenti
10. $AX = \underline{0}$ ha l'unica soluzione $X = \underline{0}$
11. $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ il sistema $AX = \underline{b}$ ammette unica soluzione (è $X = A^{-1} \cdot \underline{b}$)
12. I pivot di una ridotta scala sono tutti non nulli
13. $\exists\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : BA = I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ *(tutti 1 sulla diagonale, resto 0)* [inversa a sinistra]
14. $\exists\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AC = I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ *(tutti 1 sulla diagonale, resto 0)*
15. $[A|I] \sim [I|C]$ (C^{-1} sarà l'inversa)
16. $det(A) \neq 0$

13.21 Determinante di una matrice quadrata

$$det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$A \mapsto det(A) \ \text{ (è un numero)}$$

13.21.1 Sistemi $AX = \underline{0}$

A è invertibile $\Leftrightarrow AX = \underline{0}$ ha unica soluzione.

13.21.2 $n = 1$

$A = [a]$ $a \in \mathbb{R};$ $X = x;$ $\underline{0} = 0.$
$ax = 0$ ha unica soluzione $\Leftrightarrow a \neq 0 \Leftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}0$ $(x = 0)$
(se $a = 0 : 0 \cdot x = 0$ ha infinite soluzioni). Qui se pongo $det(a) = a$ ottengo:

$$[a] = A \text{ invertibile} \Leftrightarrow det(A) = a \neq 0$$

TODO: CONTROLLARE SUL LIBRO

13.21.3 $n = 2$

A invertibile $\Leftrightarrow$ $AX = \underline{0}$ ha unica soluzione $\Leftrightarrow$ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} \neq 0$. *Dimostrazione su appunti lezione 33.*
Definisco:

$$detA = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} = \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$$

13.21.4 $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{det(A)=} \begin{array}{r|l|c} a_{11}\ a_{22}\ a_{33}+ & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right) = (1)(2)(3) & \text{segno pari} \\ a_{12}\ a_{23}\ a_{31}+ & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right) = (123) & \varepsilon(\sigma) = 1 \\ a_{13}\ a_{21}\ a_{32}+ & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right) = (132) & \\ \hline -a_{13}\ a_{22}\ a_{31} & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right) = (13) & \text{segno dispari} \\ -a_{11}\ a_{23}\ a_{32} & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right) = (23) & \varepsilon(\sigma) = -1 \\ -a_{12}\ a_{21}\ a_{33} & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right) = (12) & \end{array}$$

13.21.5 Definizione determinante

Data $A \in M_n(\mathbb{R})$, si definisce il determinante di A come:

$$detA = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1(\sigma 1)} a_{2(\sigma 2)} ... a_{n(\sigma n)}$$

NOTA: Esempio di matrice di permutazionee su slides lezione 34.

13.21.6 Proprietà del determinante

- $detA = detA^t$
- Se A ha una colonna tutta nulla, allora $detA = 0$ ($A^{(1)}\ A^{(2)}...\underline{0}...A^{(n)}$) colonne dipendenti.
- Se A ha una riga nulla allora il $detA = 0$ ($detA = detA^t$).
- Se due colonne di A sono uguali, allora $detA = 0$.
- Se dure righe di A sono uguali, allora $detA = 0$.
- Se due colonne (risp. righe) sono proporzionali, cioè se $A = [A^{(1)}...A^{(i)}...\lambda A^{(i)}...A^{(n)}]$ allora $detA = 0$ ($\lambda A^{(i)}$ è la colonna j).
- Il valore del determinante non cambia se sommiamo ad una riga (vale anche l'analogo per le colonne) il multiplo di un'altra:

$$A = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots A_{(n)} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{ij}(\lambda)]{} B = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix}$$

  allora $det(A) = det(B)$.

- Se in A si scambiano due colonne (o due righe)

$$A = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{ij}} B = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix}$$

  allora $detA = -detB$.

13.21.7 Teorema di Binet

Siano A, B matrici quadrate $n \times n$ allora:

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

(cioè il determinante è una funzione moltiplicativa sulle matrici).

!! non è additiva: $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

13.21.8 Corollario di Binet

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

se A è invertibile.

13.21.9 Teorema di Lapalce

Calcolo del determinate col metodo di Laplace.

Data A $n \times n$, $n \geq 2$, si ha che (sviluppo lungo la colonna j quindi $A^{(j)}$):

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

$$detA = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + ... + a_{nj}\alpha_{nj}$$

dove α_{ij} si chiama cofattore della matrice A, ed è definito come:

$$\alpha_{ij}(-1)^{i+j} \cdot detA_{ij}$$

A_{ij}: sottomatrice di A che si ottiene cancellando la riga i e la colonna j

1. ovvero: (formula per la colonna j)

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

   i: varia l'indice di riga; j è fisso.

2. formula (sviluppo) lungo la riga i

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

   j: varia l'indice di colonna; i è fisso.

NOTA: vedere appunti lezione 14 per esempio.

13.21.10 Metodo alternativo calcolo determinante

$A \sim B$ usando solo $L_{ik}, L_{ij}(C)$

$A \xrightarrow{L_{ij}} A'$: $detA = -detA'$ ((-1)$\cdot$ numero di scambi di riga)

$A \xrightarrow{L_{ij}(C)} A'$: $detA = detA'$

Non usare $L_i(C)$ perche modifica il determinante.

$$A = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & b_{33} & \\ & & & b_{44} \end{bmatrix}$$

Il $detB$ = prodotto degli elementi sulla diagonale.

Proprietà: Se una matrice B quadrata è triangolare superiore (cioè $b_{ij} = 0$ se $i > j$)

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{bmatrix}$$

allora $detB = b_{11}b_{22}...b_{nn}$ (prodotto degli elementi sulla diagonale.

- In particolare se b è una matrice diagonale, ovvero $b_{ij} = 0$ se $i \neq j$, allora $detA = b_{11}b_{22}...b_{nn}$
- In particolare se

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & & \Huge 0 \\ & \lambda & \\ & \dots & \\ \Huge 0 & & \lambda \end{bmatrix} \text{ per } \lambda \in \mathbb{R}$$

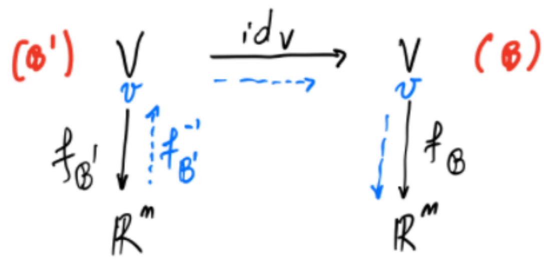
  Allora $detB = \lambda^n$.

- $detI_n = \begin{bmatrix} 1 & & \Huge 0 \\ & \dots & \\ \Huge 0 & & 1 \end{bmatrix} = 1$ (Se a matrice ha tutti 1 sulla diagonale).
- Se P è una matrice di permutazione, allora $detP = \varepsilon(\sigma)$ se $P = P_\sigma$: P_σ è la matrice che ha 1 in posizione a_{ij} se $j = \sigma(i)$ NOTA: Esempio appunti lezione 34.

13.22 Cambiamento di base

- Come mutano le coordinate dei vettori nelle due basi diverse.
- Come mutano le trasformazioni lineari.
- Come cambiano le matrici associate alle trasformazioni quando cambiano le basi.

Siano $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ e $\mathcal{B}' = (v'_1, ..., v'_n)$ due basi ordinate di uno spazio vettoriale V (su $\mathbb{R}$ o su K fissato) di dimensione n su $\mathbb{R}$ (su K...). Siano $f_\mathcal{B}$ ed $f_{\mathcal{B}'}$ gli isomorfismi che mandano i vettori di V nelle coordinate (colonne di $\mathbb{R}^n$) rispettivamente nella base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.



$$id_V : V \to V$$

$$v \mapsto v = id_V(v)$$

(id_V è una trasformazione lineare biunivoca) è l'elemento neutro nella composizione delle trasf.lineari da V in se.

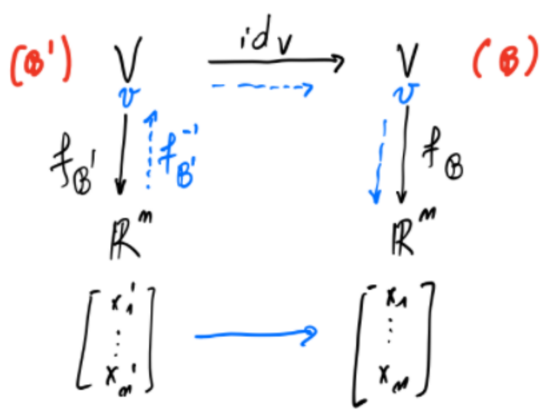
Richiamo Se $\mathcal{B}$ è una base, allora l'applicazione

$$f_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}$$

$$v \to \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Se $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = f_{\mathcal{B}}(v)$ è:

- Lineare
- Biunivoca



$$v = x_1'v_1' + x_2'v_2' + x_3'v_3' = f_{\mathcal{B}'}^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$f_{\mathcal{B}} \circ id_V \circ f_{\mathcal{B}'}^{-1}$$

Siano:

$f_{\mathcal{B}}(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ le coordinate di v in base $\mathcal{B}$

$f_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ le coordinate di v in base $\mathcal{B}'$

Allora esiste un'unica applicazione Ψ che rende il diagramma commutativo:

14 Usi di Gauss-Jordan in vari ambiti

14.1 Risolvere $AX = b$

Si applica GJ alla matrice aumentata $[A|b] \to [R|b']$ con $A \sim R$ e $[A|b] \sim [R|b']$.

$AX = b$ ha le stesse soluzioni di $RX = b'$. Si risolve a questo punto il sistema ridotto $RX = b'$

14.2 Rango e base ImL_A

Si applica $A \to R$.

Rivedere Corollario ImL_A

Le colonne sono generatori:

$$[A^{(1)}, ..., A^{(n)}] = A \sim R$$

allora le colonne di A corrispondenti ai pivot sono indipendenti: $A^{(j_1)}...A^{(j_r)}$:

$$rg(A) = dimImL_A = r$$

e $A^{(j_1)}...A^{(j_r)}$ è una base per l'immagine.

14.3 Trovare $Ker(L_A) = KerA$

$$KerT = \{v \in V : T(v) = 0\}$$
$$KerL_A = \{X \in \mathbb{R}^n : L_A(X) = \underline{0}\} =$$
$$\{X \in \mathbb{R}^n : AX = \underline{0}\} =$$

$=$ spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad A

$KerA$ =Soluzioni di $AX = 0$: applicando GJ ad A: $A \sim R$ e risolvo ora $RX = 0$.

14.4 Estrazione insieme di vettori indipendenti

Per il problema di estrarre un insieme indipendente più grande possibile da un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$: ci si chiede dato $\{v_1, ...v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, qual è una base per $Span(v_1, ..., v_n)$ da estrarre da $\{v_1, ...v_k\}$.
Costruisco la matrice $A = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{bmatrix}_{nxk}$:
$A \sim^{GJ} R$: le colonne di A corrispondenti alle colonne di R dove si trovano i pivot sono indipendenti.

14.5 Completamento a un base di $\mathbb{R}$

Dati $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ indipendenti, voglio completare $\{v_1, ..., v_k\}$ a una base di $\mathbb{R}^n$ (se $k < n$).

In questo caso formo un insieme $\{v_1, ..., v_k, e_1, ..., e_n\}$. Costruisco

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_k & e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix}$$

Applico GJ: $A \sim R$ e scelgo le colonne di A corrispondenti ai pivot.

14.6 Trovare base di $U + W$ e $U \cap W$

Per trovare una base di $U + W$ e $U \cap W$ date una base di U e una di W.