

Definizioni e Teoremi di Algebra (senza esempi)

Completato fino lezione 33

Anno accademico 2021/2022

Contents

1	Capitolo 1	8
1.1	Corrispondenza	8
1.2	Relazione in se	8
1.3	Relazione/Corrispondenza inversa	8
1.4	Relazione di equivalenza	8
1.5	Relazione banale (di uguaglianza)	8
1.6	Relazione caotica	8
1.7	Classe di equivalenza	8
1.8	Insieme quoziente	9
1.9	Partizione insiemistica	9
1.10	Funzione/Applicazione	9
1.11	Iniettiva	9
1.12	Suriettiva	10
1.13	Biunivoca (biiettiva)	10
1.14	Funzione caratteristica	10
1.15	Operazione binaria	10
1.16	Assiomi di Peano	10
1.17	Principio del buon ordinamento di \mathbb{N}	11
1.18	Teor: Divisione con resto su \mathbb{N}	11
2	Calcolo combinatorio	11
2.1	Notazione funzionale	11
2.2	Fattoriale crescente	11
2.3	Fattoriale decrescente	11
2.4	Pigeonhole principle (principio dei cassetti)	11
2.5	Permutazione	11
2.6	Coefficiente binomiale	11
2.7	Formula	12
2.8	Relazione ricorsiva	12
2.9	Simmetria	12
2.10	Relazione d'ordine	12
2.11	POSET (Partial order set)	12

3	I numeri	13
3.1	Costruzione di \mathbb{Z} (interi)	13
3.2	Definizione di \mathbb{Z}	13
3.3	Classi su \mathbb{Z}	13
3.4	Sottoinsiemi di \mathbb{Z}	13
3.5	Somma su \mathbb{Z}	13
3.6	Prodotto su \mathbb{Z} :	13
3.7	Proprietà operazioni su \mathbb{Z}	13
3.8	Divisibilità	14
3.9	Multiplo	14
3.10	Associati	14
3.11	Unità	14
3.12	Irriducibile	14
3.13	Primo	14
3.13.1	Proposizione: in \mathbb{Z} , a è primo $\Rightarrow a$ irriducibile	14
3.13.2	Proposizione: in \mathbb{Z} a irriducibile \Rightarrow a primo	15
3.14	Massimo comune divisore	15
3.14.1	Teor: Esistenza del MCD tra due numeri	15
3.14.2	Prop: se $c a$ e $c b$ allora c divide ogni combinazione lineare di a e b	16
3.15	Proposizione	16
3.15.1	Lemma $MCD(m, m+1)=1$	16
3.16	Algoritmo di Euclide	16
3.16.1	Lemma1: L'algoritmo termina	16
3.16.2	Lemma2: Se $a = bq + r$ $MCD(a, b) = MCD(b, r)$	17
3.16.3	Corollario: $MCD(a, b) = MCD(r_n, 0) = r_n$	17
3.16.4	Lemma3	17
3.17	Coprimi	17
3.17.1	Osservazione1	17
3.17.2	Osservazione 2	17
3.17.3	Proposizione 1	17
3.17.4	Proposizione 2	17
3.18	Equazione diofantea	17
3.18.1	Teor: Soluzione equazione diofantea	18
3.19	Teorema fondamentale dell'aritmetica	18
3.19.1	Osservazione 1	18
3.19.2	Osservazione 2	18
3.19.3	Dimostrazione esistenza	18
3.20	Dimostrazione unicità	19
3.21	Teor. Euclide - Esistenza infiniti primi	19
4	Congruenze	20
4.1	Congruenza modulo n	20
4.2	Proposizione	20
4.3	Quoziente	20
4.4	Proposizione	20

4.5	Osservazione	21
4.6	Proposizione somma	21
4.7	Dimostrazione prodotto	21
4.8	Proposizione	21
4.9	Classi resto invertibili	22
4.10	Teorema Uguaglianza sbagliata	22
4.10.1	Grande teorema di Fermat	23
4.10.2	Piccolo teorema di Fermat	23
4.11	Teorema Eulero-Fermat	23
4.12	Corollario	24
5	Polinomi a coefficienti reali in 1 indeterminata	25
5.1	Descrizione	25
5.2	Somma di polinomi	25
5.3	Rappresentazione come successioni	25
5.3.1	Somma di polinomi	25
5.4	Teorema: $(\mathbb{R}[x], +)$ è un gruppo (commutativo)	25
5.5	Prodotto di polinomi	26
5.6	Teorema $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello	26
5.7	Grado del prodotto	26
5.8	Fatti importanti	26
6	Strutture algebriche	27
6.1	Gruppo	27
6.2	Gruppo commutativo (abeliano)	27
6.3	Anello	27
6.3.1	Anello commutativo	27
6.3.2	Anello unitario	27
6.3.3	Divisore dello zero	27
6.3.4	Dominio di integrità	28
6.3.5	Legge di annullamento del prodotto	28
6.4	Campo	28
6.5	Semigrupp	28
6.5.1	Monoide	28
6.6	Elenco gruppi	28
6.7	Gruppo simmetrico	29
6.7.1	Permutazione	29
6.7.2	S_n	29
6.7.3	Proposizione	29
6.7.4	Proposizione	29
6.7.5	3 ^a notazione: Permutazione come prodotto di cicli disgiunti	29
6.7.6	Orbita	29
6.7.7	Proposizione	30
6.7.8	Permutazione ciclica	30
6.7.9	Teorema prodotto di scambi	30
6.7.10	Teorema parità	30

6.7.11	Pari, dispari	30
6.7.12	Gruppo alterno	30
6.7.13	Segno	30
6.8	Classi coniugate in S_n	31
6.8.1	Definizione	31
6.8.2	Proposizione	31
6.9	Definizione multinsieme	31
6.10	Gruppi finiti	31
6.10.1	Proprietà 1	31
6.10.2	Proprietà 2	31
6.11	Sottogruppi	32
6.11.1	Definizione	32
6.11.2	Criteri di verifica	32
6.11.3	Notazione	32
6.11.4	Proposizione	33
6.12	Proposizione: intersezione di sottogruppi	33
6.13	Proposizione 1	34
6.14	Proposizione 2	34
7	Sottogruppo generato	34
7.1	Definizione	34
7.2	Notazione	34
7.3	Proposizione	34
7.4	$\langle X \rangle$ è il più piccolo sottogruppo che contiene X	34
7.5	Definizione: ordine (periodo)	35
7.6	Definizione: gruppo ciclico	35
7.7	Proposizione	35
7.8	Proposizione	35
7.9	Proposizione: sottogruppi di un gruppo ciclico	36
7.10	Osservazione	36
7.11	Proposizione	36
7.12	Proposizione	36
7.13	Teorema di Lagrange	36
7.13.1	Corollario 1	37
7.13.2	Corollario 2	37
7.14	Definizione: indice di un sottogruppo	37
8	Classi laterali di un sottogruppo	38
8.1	Definizione: congruenza destra modulo	38
8.2	Proposizione	38
8.3	Insieme quoziente	38
8.4	Proposizione	39
8.5	Definizione: congruenza sinistra modulo	39

9 Omomorfismi	40
9.1 Isomorfismo	40
9.2 Omomorfismo	40
9.3 Epimorfismo	40
9.4 Monomorfismo	40
9.5 Isomorfismo 2	40
9.6 Proposizione	40
9.7 Kernel/Nucleo	40
9.8 Proposizione	41
9.9 Omomorfismo di anelli	41
9.10 Proposizione	42
9.11 Proposizione	42
10 Spazi Vettoriali	43
10.1 Definizione spazio vettoriale	43
10.2 Scalare	43
10.3 Sottospazio vettoriale	44
10.4 Proposizione	44
10.5 Definizione: traccia	44
10.6 Definizione: combinazione lineare	45
10.7 Proprietà di calcolo negli spazi vettoriali	45
10.8 Definizione	45
10.9 Osservazione: combinazione lineare banale	45
10.10Definizione: linearmente dipendente	45
10.11Osservazione	45
10.12Osservazione	46
10.13Osservazione	46
10.14Osservazione	46
10.15Osservazione	46
10.16Sottospazio generato da: span	46
10.17Proposizione	46
10.18Sistema di generatori	47
10.19Basi di spazi vettoriali	47
10.20Spazio finitamente generato	47
10.21Proposizione	47
10.22N-upla delle coordinate di v in base B	48
10.23Corollario	48
10.24Teorema: esistenza di una base	48
10.25Proposizione	48
10.26Dimensione di V	48
10.27Osservazione (notazione)	48
10.28Teorema del completamento di una base	48
10.29Teorema	48
10.30Corollario	49
10.31Osservazioni	49
10.32Somma di sottospazi	49

10.33	Proposizione	49
10.34	Teorema di Grossman	50
10.35	Somma diretta di sottospazi	50
10.36	Proposizione	50
11	Sistemi di equazioni lineari	51
11.1	Scrittura	51
11.2	Risolvere sistema di equazioni	51
11.3	Sistemi equivalenti	51
11.3.1	Operazioni elementari di riga	51
11.4	Equivalenza per riga	51
11.5	Proposizione	51
12	Proposizione	52
13	Matrice identica	52
13.1	Corollario	52
13.2	Teorema	52
13.3	Rango	52
13.4	Pivot	52
14	Rango pieno	52
14.1	Proposizione: proprietà del rango	53
14.2	Teorema: Rouchè-Capelli	53
15	Studio dei sistemi omogenei	54
15.1	Proposizione	54
15.2	Teorema: Struttura sulle soluzioni di un sistema	54
15.3	Nota importante	54
16	Applicazioni lineari	55
16.1	Definizione: applicazione lineare (trasformazione lineare o homomorphism of vector space)	55
16.2	Proposizione	55
16.3	Definizione	55
16.4	Definizione	56
16.5	Proposizione (risolvere per esercizio)	56
16.6	Osservazione (!)	56
16.7	Proposizione	56
16.8	Corollario	57
16.9	Corollario	57
16.10	Definizione: rango trasformazione lineare	57
16.11	Teorema della dimensione	57
16.12	Osservazione	58
16.13	Proposizione	58
16.14	Conseguenze della proposizione	59

16.15	Osservazione: iniettività, suriettività	59
16.16	Osservazione: isomorfismo	59
16.17	Esempio isomorfismo	60
16.18	Teorema	60
16.19	Osservazione	61
16.20	Proposizione: ricapitolazione sulle matrici invertibili	61
16.21	Determinante di una matrice quadrata	61
16.21.1	Sistemi $AX = \underline{0}$	62
16.21.2	$n = 1$	62
16.21.3	$n = 2$	62
16.21.4	$n = 3$	62
17	Usi di Gauss-Jordan in vari ambiti	63
17.1	Risolvere $AX = b$	63
17.2	Rango e base ImL_A	63
17.3	Trovare $Ker(L_A) = KerA$	63
17.4	Estrazione insieme di vettori indipendenti	63
17.5	Completamento a un base di \mathbb{R}	63
17.6	Trovare base di $U + W$ e $U \cap W$	64

1 Capitolo 1

Relazione e corrispondenza sono interscambiabili.

1.1 Corrispondenza

Una corrispondenza ρ di X in Y è una terna (ρ, X, Y) dove $\rho \subseteq X \times Y$.

1.2 Relazione in se

Una Relazione di X in se, è una corrispondenza ρ di X in X . Se $(x, y) \in \rho$ si scrive anche $x\rho y$ (notazione infissa), cioè x è in relazione ρ con y .

1.3 Relazione/Corrispondenza inversa

Una corrispondenza ρ di X in Y è la relazione di Y in X denotata con ρ^{-1} data dalla seguente:

$$y\rho^{-1}x \Leftrightarrow x\rho y$$

1.4 Relazione di equivalenza

una relazione su A (cioè un sottoinsieme ρ di $A \times A$) si dice di equivalenza se verifica le tre seguenti proprietà:

Riflessiva: $\forall a \in A, a\rho a$.

Simmetrica: $\forall a, b \text{ in } A, a\rho b \Rightarrow b\rho a$

Transitiva: $\forall a, b, c \in A \text{ se } (a\rho b \wedge b\rho c) \Rightarrow a\rho c$

1.5 Relazione banale (di uguaglianza)

Su A $x, y \in A$ $x\rho y \Leftrightarrow x = y$

1.6 Relazione caotica

Su A $x\rho y \forall x, y \in A$

1.7 Classe di equivalenza

Data la relazione ρ in A , si definisce classe di equivalenza modulo ρ di un elemento $a \in A$ l'insieme di tutti gli elementi che sono equivalenti ad a ; si denota con $[a]_\rho$.

$$[x]_\rho := \{y \in A : y\rho x\}$$

1.8 Insieme quoziente

Data la relazione di equivalenza ρ su A , si definisce insieme quoziente l'insieme delle classi di equivalenza di ρ dato $x \in A$ si denota con A/ρ .

$$A/\rho = \{[x]_\rho : x \in A\}$$

Nota: Relazione di equivalenza e partizioni insiemistiche sono sostanzialmente la stessa cosa.

1.9 Partizione insiemistica

Una partizione insiemistica di A è una famiglia di sottoinsiemi di A non vuoti, tali che ad ogni elemento di A corrisponde un solo sottoinsieme.

$$H = \{A_i : i \in I\}$$

con

$$A_i \subseteq A \quad \forall i \in I$$

con

$$i \neq j, \quad i, j \in I \Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

che equivale a dire:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A$$

cioè la famiglia H ricopre A .

1.10 Funzione/Applicazione

$f : S \rightarrow T$ è un'applicazione di S in T se (f, S, T) è una corrispondenza di S in T , ovvero $f \subseteq S \times T$ che soddisfa la seguente proprietà:

$\forall x \in S \exists ! y$ in T denotato con $y = f(x)$, f è una legge univoca (ben definita).

L'elemento $f(x)$ si chiama **immagine dell'elemento**.

L'immagine di f è un sottoinsieme del codominio T definito da:

$$Im(f) := \{y \in T : \exists x \in S, y = f(x)\}$$

Controimmagine di y è il sottoinsieme di S del dominio definito da:

$$f^{-1}(y) := \{x \in S : f(x) = y\} \subseteq S$$

1.11 Iniettiva

f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, x' \in S : [f(x) = f(x') \Rightarrow x = x']$.

Definizione alternativa: f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, x' \in S : [f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x']$.

f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T \quad |f^{-1}| \leq 1$, ovvero per ogni elemento y in T esiste al più un'immagine.

1.12 Suriettiva

f è suriettiva se $\Rightarrow \forall y \in T \exists x \in S : f(x) = y$

Definizione alternativa: f è suriettiva $\Leftrightarrow f(S) = Im(S) = T$.

f è suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T |f^{-1}(y)| \geq 1$, ovvero per ogni elemento y in T esiste almeno un'immagine.

1.13 Biunivoca (biiettiva)

se f è sia iniettiva che suriettiva.

f è biiettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T |f^{-1}(y)| = 1$, ovvero per ogni elemento y in T esiste una sola immagine.

1.14 Funzione caratteristica

E' la funzione che vale 1 se $x \in S$, 0 se $x \notin S$.

1.15 Operazione binaria

Un'operazione binaria su S , è un'applicazione $m : S \times S \rightarrow S$; notazione funzionale $(s, s') \mapsto m(s, s')$; notazione infissa $sm s'$ o $s * s$.

1.16 Assiomi di Peano

per la costruzione dei naturali \mathbb{N}

1. I numeri formano una classe
2. Lo "zero" è un numero
3. Se a è un numero allora il successore a' è un numero
4. Se $a \neq b$ sono due numeri allora $a' \neq b'$
5. Lo "zero" non è successore di nessun numero ($\nexists a$ numero tale che $zero = a'$)
6. Assioma di induzione:
Se S è una classe di numeri tale che:
 - $zero \in S$
 - Se $a \in S$ allora $a' \in S$

allora ogni naturale è in S .

I naturali sono la più piccola classe che

- Contiene lo zero
- Chiusa rispetto a contenere i successori

1.17 Principio del buon ordinamento di \mathbb{N}

Se $S \subseteq \mathbb{N}, S \neq \emptyset$, allora esiste un minimo in S , cioè esiste $m \in S$ tale che se $h \in \mathbb{N}, h < m$ allora $h \notin S$.

1.18 Teor: Divisione con resto su \mathbb{N}

Siano $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$; allora esistono $q, r \in \mathbb{N}$ tali che

- $a = bq + r$
- $0 \leq r < b$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0; \exists$ unici $q, r \in \mathbb{Z}$ con $a = bq + r \wedge 0 \leq r < b$ TODO: Dimostrazione

2 Calcolo combinatorio

2.1 Notazione funzionale

Insieme delle applicazioni da A verso B

$$B^A = \{f : A \rightarrow B\}$$

2.2 Fattoriale crescente

$$n^{(m)} := n * (n + 1) * \dots * (n + m - 1)$$

2.3 Fattoriale decrescente

$$n_{(m)} := n * (n - 1) * \dots * (n - m + 1)$$

2.4 Pigeonhole principle (principio dei cassetti)

Se ho n oggetti e m cassetti, se $n > m$ e devo disporre tutti gli oggetti nei cassetti allora esiste un cassetto che contiene almeno due oggetti.

2.5 Permutazione

Sia A un insieme. Una biiezione $f : A \rightarrow A$ si chiama anche *permutazione* di A.

2.6 Coefficiente binomiale

Prima interpretazione combinatoria: $\binom{n}{i}$ è il coefficiente di $x^i y^{n-i}$ nello sviluppo $(x + y)^n = \sum_{z_i \in \{x, y\}} z_1 \dots z_n$, ovvero il numero di stringhe binarie (su x, y)

- lunghe n
- con i occorrenze di x

- con $n-i$ occorrenze di y
- $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Seconda interpretazione combinatoria: numero di sottoinsiemi di cardinalità i su un insieme $[n]$ di cardinalità n .

2.7 Formula

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1) * \dots * (n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

2.8 Relazione ricorsiva

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$$

Dimostrazioni algebrica e combinatoria.

2.9 Simmetria

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

Il coefficiente binomiale è simmetrico rispetto al centro della riga n -esima $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ del triangolo rappresentante tutti i coefficienti del coefficiente binomiale.

Dimostrazioni algebrica e combinatoria.

2.10 Relazione d'ordine

Una relazione ρ su X è una relazione d'ordine (o un ordine, o un ordinamento) se valgono per ρ le proprietà:

- (R) $\forall x, x\rho x$
- (AS) $\forall x, y (x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow x = y$
- (T) $\forall x, y, z (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z$

2.11 POSET (Partial order set)

Un insieme munito di una relazione d'ordine si dice parzialmente ordinato.

3 I numeri

3.1 Costruzione di \mathbb{Z} (interi)

Partendo da \mathbb{N} : prendiamo su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione ρ definita sulle coppie $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tale che $(n, m)\rho(n', m') \Leftrightarrow n + m' = m + n'$

3.2 Definizione di \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \rho$$

3.3 Classi su \mathbb{Z}

$\overline{(0, 0)}$ zero
 $\overline{(m, 0)}, m > 0$ positivi
 $\overline{(0, n)}, n > 0$ negativi

3.4 Sottoinsiemi di \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{>0} \cup \{0, 0\} \cup \mathbb{Z}^{<0}$$

3.5 Somma su \mathbb{Z}

$$\overline{(n, m)} + \overline{(n', m')} = \overline{(n + n', m + m')}$$

3.6 Prodotto su \mathbb{Z} :

$$\overline{(n, m)} \cdot \overline{(n', m')} = \overline{(nn' + mm', nm' + mn')}$$

3.7 Proprietà operazioni su \mathbb{Z}

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ (a, b, c coppie $\overline{(n, m)}$) valgono le seguenti:

1. Associatività: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. Commutatività: $a + b = b + a$
3. Esiste uno *zero* per la somma, cioè un elemento $0 : a + 0 = 0 + a = a$
4. $\forall a \in \mathbb{Z}$ esiste un elemento detto *opposto*, denotato con $-a$, cioè un elemento tale che: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
 $a = \overline{(n, m)}$
 $-a = \overline{(m, n)}$
5. Associatività prodotto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. Commutatività prodotto: $a \cdot b = b \cdot a$

7. Esiste un *elemento neutro* per il prodotto, "1", cioè un numero in \mathbb{Z} tale che:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$\overline{(n, m)} \cdot \overline{(1, 0)} = \overline{(n, m)}$$

8. Distributività del prodotto sulla somma:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

3.8 Divisibilità

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$ si dice che a divide b , e si indica $a|b$, se e solo se $\exists c \in \mathbb{Z}$ tale che $b = a \cdot c$ (ovvero $a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c$).

La divisibilità è una relazione sugli interi:

3.9 Multiplo

Se $a|b$ diremo che b è un multiplo di a .

3.10 Associati

a, b sono associate se $a|b$ e $b|a$

Oss1: in \mathbb{N}^* sono associati $\Leftrightarrow a = b$.

Oss2: in generale, in $\mathbb{Z} \Leftrightarrow a = b$ oppure $a = -b$.

3.11 Unità

In \mathbb{Z} sono $+1$ e -1 .

3.12 Irriducibile

Un elemento $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ è irriducibile se $a = b \cdot c \Rightarrow b$ oppure c sono unità.

3.13 Primo

Un elemento $a \in \mathbb{Z}$ si dice primo se:

$$a|b \cdot c \Rightarrow a|b \text{ oppure } b|c$$

3.13.1 Proposizione: in \mathbb{Z} , a è primo $\Rightarrow a$ irriducibile

Sia $a = b \cdot c$: usando l'ipotesi che a è primo allora $a|b$ oppure $a|c$.

Se $a|b \Rightarrow \exists h : b = a \cdot h \Rightarrow a = a \cdot h \cdot c \Rightarrow h \cdot c = 1 \Rightarrow c = \pm 1$

Allora $a = b \cdot (+1)$ oppure $a = b \cdot (-1)$, a è irriducibile.

3.13.2 Proposizione: in \mathbb{Z} a irriducibile \Rightarrow a primo

Ipotesi: a irriducibile

Tesi: a primo Supponiamo che $a|bc \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : bc = ah$,

voglio mostrare che $a|b$ oppure $a|c$ ovvero che se $a \nmid b$ allora $a|c$.

Ora a irriducibile, i suoi divisori sono $a, -a, 1, -1$. $a \nmid b$ allora anche $-a \nmid b \Rightarrow$ i divisori comuni tra a e b sono $1, -1 \rightarrow MCD(a, b) = 1$.

$$\exists(\text{id. Bézout}) \exists h, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 = ah + bk$$

moltiplicando per c

$$c = cah + cbk = a(ck + k) \quad [cb = a]$$

quindi $a|c$.

3.14 Massimo comune divisore

Dati a, b non entrambi nulli, un elemento $d \in \mathbb{Z}$ si chiama massimo comune divisore tra a e b un numero tale che:

- $d|a \wedge d|b$
- Se $c|a \wedge c|b$, allora $c|d$: d è il massimo tra i divisori comuni.

Chiamiamo massimo comune divisore l'unico positivo che soddisfa le due proprietà.

3.14.1 Teor: Esistenza del MCD tra due numeri

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli, esiste un numero $d \in \mathbb{N}^*$ tale che $d = MCD(a, b)$

Il massimo comune divisore si esprime come una combinazione lineare tra a e b , ovvero esistono $s, t \in \mathbb{Z}$ tali che $d = s \cdot a + t \cdot b$ (*identità di Bézout*).

Dimostrazione:

Sia $S = \{xa + yb : x, y \in \mathbb{Z}, xa + yb > 0\}$

1. $S \subseteq \mathbb{N}$
2. $S \neq \emptyset$

a e b sono non entrambi nulli, quindi almeno uno dei due è $\neq 0$. Sia esso a .

Se $a > 0$ allora $1 \cdot a + 0 \cdot b = a > 0$ Se $a < 0$ allora $(-1) \cdot a + 0 \cdot b = a > 0$

TODO: completare dimostrazione

Dimostrazione che $d|a$ e $d|b$:

Dividiamo a per d (divisione col resto): $\exists q, r$ con $a = dq + r$, $0 \leq r < d$

Se $r = 0$ allora $d|a$

Se $r \neq 0$ allora $0 < r < d$

$r = a - dq$; dato che $d \in S \Rightarrow d = x_0a + y_0b$ allora

$$r = a - q(x_0a + y_0b) = a - qx_0a + qy_0b = a(1 - qx_0) - (qy_0)b$$

Quindi $r \in S$ perchè è una combinazione lineare > 0 ma $r < d$, però d è il minimo di $S \Rightarrow$ Assurdo.

Dimostrazione se $d'|a$ e $d'|b$ allora $d'|d$:

Poichè $d'|a$ e $d'|b$ si ha che

$$\exists h : a = d' \cdot h, \exists k : b = d' \cdot k$$

Ora

$$\begin{aligned} d &= x_0a + y_0b \\ &= x_0(d'h) + y_0(d'k) = \\ &= d'(x_0h + y_0k) \Rightarrow d'|d \end{aligned}$$

3.14.2 Prop: se $c|a$ e $c|b$ allora c divide ogni combinazione lineare di a e b

$$\begin{aligned} a &= ch \\ b &= ck \\ \Rightarrow xa + yb &= xch + yck \\ &= c(xh + yk) \Rightarrow \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow c|xa + yb \end{aligned}$$

3.15 Proposizione

$$1 = at + bs \Rightarrow MCD(a, b) = 1$$

3.15.1 Lemma $MCD(m, m+1)=1$

Sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ allora $MCD(m, m+1) = 1$.

Dimostrazione:

$$m + 1 - m = 1 \Rightarrow 1(m + 1) + (-1)m = 1$$

Potendo scrivere 1 come combinazione lineare di m e $m+1$, m e $m+1$ sono primi tra loro.

3.16 Algoritmo di Euclide

3.16.1 Lemma1: L'algoritmo termina

La successione dei resti è un numero $0 \leq \dots < r_2 < r_1 < b$.

3.16.2 Lemma2: Se $a = bq + r$ $MCD(a, b) = MCD(b, r)$

TODO: scrivere dimostrazione

3.16.3 Corollario: $MCD(a, b) = MCD(r_n, 0) = r_n$

Per il lemma 2 $MCD(a, b) = MCD(b, r_1) = MCD(r_1, r_2) = \dots = MCD(r_{n-1}, r_n) = MCD(r_n, 0)$

3.16.4 Lemma3

Se $x \in \mathbb{N}^*$ allora $MCD(x, 0) = x$

3.17 Coprimi

a, b non entrambi nulli, a e b si dicono coprimi (o *primi fra loro*) se $MCD(a, b) = 1$.

3.17.1 Osservazione1

Se a e b sono primi fra loro, allora

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} : 1 = xa + yb$$

3.17.2 Osservazione 2

Se

$$d = MCD(a, b) \Rightarrow \exists x, y : d = ax + by$$

3.17.3 Proposizione 1

Se $\exists x_0, y_0$ con $1 = ax_0 + by_0$ allora a, b sono primi tra loro.

3.17.4 Proposizione 2

Se a e b sono coprimi e dividono un terzo numero c , allora $ab|c$.

3.18 Equazione diofantea

Equazione con una o più incognite sugli interi di cui si cercano le soluzioni intere.

Sono del tipo:

$$ax + by = c$$

3.18.1 Teor: Soluzione equazione diofantea

L'equazione diofante lineare in x e y $ax + by = c$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ possiede soluzioni intere $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow d = MCD(a, b) | c$

(Dim \Rightarrow) La condizione $MCD(a, b) | c$ è necessaria.

Ipotesi: esiste una soluzione di $x^2 + y^2 = z^2$

Tesi: $d |$ termine noto, $d = MCD(a, b) : d | a$ e $d | b \Rightarrow d |$ ogni combinazione lineare di a, b .

Se x_0, y_0 sono una soluzione, allora $ax_0 + by_0 = c \Rightarrow d | c = ax_0 + by_0$

(Dim \Leftarrow) La condizione è sufficiente.

Ipotesi $MCD(a, b) = ah + bk$, per opportuni $h, k \in \mathbb{Z}$

3.19 Teorema fondamentale dell'aritmetica

$\forall n > 1, n \in \mathbb{N}, \exists p_1, \dots, p_j \in \mathbb{N}$ (irriducibili) $\exists h_1, \dots, h_j \geq 1$ tali che:

- $n = p_1^{h_1} \dots p_j^{h_j}$ p_1, \dots, p_j distinti
- la fattorizzazione di $n = p_1^{h_1} \dots p_j^{h_j}$ p_1, \dots, p_j è unica a meno di riordinare i fattori

3.19.1 Osservazione 1

j può essere 1, cioè potrebbe esserci un solo irriducibile nella fattorizzazione di n , anche h possono essere 1. Se n è irriducibile $\Rightarrow n = n$ è la fattorizzazione in irriducibili di n .

3.19.2 Osservazione 2

1 non è considerato irriducibile perché si perderebbe l'unicità della scrittura in irriducibili.

3.19.3 Dimostrazione esistenza

Con principio di induzione in forma forte.

Base: $n=2$, 2 è irriducibile.

Per **oss1** $2 = 2^1$ è la fattorizzazione in primi in irriducibili di 2

Ipotesi induttiva: ogni $2 \leq a < n$ ($2 \leq a \leq n-1$) è fattorizzabile in irriducibili: $\exists \alpha_1 \dots \alpha_t \alpha_i \leq 1$ e q_1, \dots, q_t irriducibili con $a = q_1^{\alpha_1} \dots q_t^{\alpha_t}$

Passo induttivo: provare che n sia prodotto di irriducibili

Primo caso: n irriducibile \rightarrow fatto, per *oss.1*

Secondo caso: n riducibile: $\exists b, c \in \mathbb{Z}, 1 \neq b, c \neq n$ (divisori propri) con

$$n = bc \Rightarrow 2 \leq b, c < n.$$

Allora per b e c vale l'ipotesi induttiva e quindi

$$b = q_1^{\alpha_1} \dots q_t^{\alpha_t} \quad c = x_1^{\beta_1} \dots x_s^{\beta_s}$$

$$n = bc = q_1^{\alpha_1} \dots q_t^{\alpha_t} x_1^{\beta_1} \dots x_s^{\beta_s}$$

3.20 Dimostrazione unicità

Per induzione su m , con m è la lunghezza minima di una fattorizzazione per n .

m : minimo numero di irriducibili di una fattorizzazione di n

Base: $m = 1 \Rightarrow n = n$ è primo.

Se per assurdo $n = q_1 \dots q_s$, $s \geq 2$ allora $n|q_1$ o $n|q_2 \dots q_s$.

Prendiamo $n|q_1$, anche q_1 è primo $\Rightarrow n = q_1$; semplificando da entrambe le parti

$\Rightarrow 1 = q_2 \dots q_s$ che porterebbe ad un assurdo perché $1 = 1$.

Quindi $n = q_1$ ed è l'unica fattorizzazione.

Ipotesi induttiva: se il minimo numero di primi in una fattorizzazione di n è $m - 1$, allora la fattorizzazione è unica a meno dell'ordine.

Passo induttivo: m è il minimo di una fattorizzazione di n .

3.21 Teor. Euclide - Esistenza infiniti primi

L'insieme $P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ è primo}\}$ è infinito.

Dimostrazione: Supponiamo che P sia finito, cioè $P = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Sia $m = p_1 \dots p_n$ il prodotto di tutti i primi.

Considero $m + 1$: per il teorema fondamentale dell'aritmetica $m + 1 = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$, $k_1, \dots, k_n \geq 0$ almeno uno degli esponenti > 0 .

Per il lemma su MCD di un numero ed il suo successivo m e $m+1$ sono coprimi.

Sia j tale che $k_j > 0$, cioè $p_j^{k_j} | m+1$; vale anche $p_j | m$ allora $p_j | MCD(m, m+1) = 1$ che è un assurdo.

4 Congruenze

4.1 Congruenza modulo n

La congruenza modulo n (n fissato) è una relazione di equivalenza definita su \mathbb{Z} .

$$x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow x - y \text{ multiplo di } n \Leftrightarrow n | x - y$$

4.2 Proposizione

La congruenza \pmod{n} è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione:

(R)

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv x \pmod{n} \Leftrightarrow n | (x - x)$$

Vera perché $0 = 0 \cdot n$.

(S)

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow y \equiv x \pmod{n}$$

So che $n | x - y \Leftrightarrow x - y = nh$ per qualche $h \in \mathbb{Z}$.

Moltiplicando per -1 : $y - x = -nh = n(-h)$ quindi $n | y - x \Rightarrow y \equiv x \pmod{n}$

(T)

$$x \equiv y \pmod{n} \wedge y \equiv z \pmod{n} \Rightarrow x \equiv z \pmod{n}$$

$$(x - y) = nh_1 \wedge (y - z) = nh_2$$

$$(x - z) = (x - y) - (y - z) = nh_1 - nh_2 = n(h_1 - h_2) \text{ quindi } n | x - z \Rightarrow x \equiv z \pmod{n}$$

4.3 Quoziente

Il quoziente della congruenza \pmod{n} si denota come $\mathbb{Z}_{/\equiv \pmod{n}} = \{[x]_n : x \in \mathbb{Z}\}$.

Il quoziente \mathbb{Z}_n si chiama anche **interi modulo n** .

4.4 Proposizione

Dati $x, y \in \mathbb{Z}$ si ha: $x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow$ il resto delle divisioni di x e di y per n è lo stesso.

Dimostrazione \Rightarrow (se $x \equiv_n y$ hanno lo stesso resto $x - y = nh$ (per qualche h))

$$x = nh + y$$

Dividendo y per n : $\exists! q, r \in \mathbb{Z} : y = nq + r, 0 \leq r < n$.

Scambiando in x : $x = nh + nq + r = n(h + q) + r$, x ed y hanno quindi lo stesso resto.

4.5 Osservazione

Sia $x = nq + r$, $0 \leq r < n$ la divisione con resto di x per n .
Allora

$$[x]_n = [r]_n \Leftrightarrow x \equiv r \pmod{n} \Leftrightarrow x - r = nq$$

Quindi

$$n \mid x - r$$

4.6 Proposizione somma

La somma classi resto in \mathbb{Z}_n , definita da: $\bar{x} + \bar{y} := \overline{x + y}$, è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta dei rappresentanti.

Dimostrazione Siano $x' \in \bar{x}$, cioè $\bar{x'} = \bar{x}$ e $y' \in \bar{y}$ cioè $\bar{y'} = \bar{y}$, allora

$$x' \equiv x \pmod{n} \Leftrightarrow x' = x + kn$$

$$y' \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow y' = y + hn$$

Da verificare: $\overline{x' + y'} = \overline{x + y} \Leftrightarrow x' + y' = x + y + tn$

Quindi:

$$\begin{aligned} x' + y' &= x + kn + y + hn \\ &= x + y + kn + hn \\ &= x + y + (k + h)n \quad [(k + h) = t] \end{aligned}$$

4.7 Dimostrazione prodotto

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= (x + kn)(y + hn) \\ &= xy + xhn + kny + khn^2 \\ &= xy + n(xh + ky + khn), \quad [(xh + ky + khn) = t] \end{aligned}$$

4.8 Proposizione

$a \in \mathbb{Z}$, \bar{a} invertibile in $\mathbb{Z}_n \Leftrightarrow MCD(a, n) = 1$

Dim \Rightarrow

Ipotesi: $\bar{a} \in \mathbb{Z}$ invertibile

Tesi: $(a, n) = 1$

Esiste $b \in \mathbb{Z} : \bar{a} \cdot \bar{b} = 1$

$$\Leftrightarrow ab \equiv 1 \pmod{n}$$

$$\Leftrightarrow n \mid 1 - ab$$

$$\Leftrightarrow 1 - ab = nk$$

$$\Leftrightarrow 1 = ab + nk$$

$$\Rightarrow MCD(a, n) = 1$$

Dim \Leftarrow

Ipotesi: $MCD(a, n) = 1$

Tesi: \bar{a} è invertibile

Se $MCD(a, n) = 1$ allora esistono $h, k \in \mathbb{Z}$:

$$1 = ah + nk \in \mathbb{Z}$$

$$\bar{1} = \overline{ah + nk}$$

$$\bar{1} = \bar{a}\bar{h} + \bar{n}\bar{k} \in \mathbb{Z}$$

$$\bar{n}\bar{k} = \bar{0}\bar{k}$$

$$\bar{1} = \bar{a}\bar{h} \Rightarrow \bar{h} = (\bar{a})^{-1}$$

4.9 Classi resto invertibili

$$\cup(\mathbb{Z}_n) := \{a \in \mathbb{Z}_n : \bar{a} \text{ invertibile}\} \subseteq \mathbb{Z}_n$$

$$\cup(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{a} : MCD(a, n) = 1\}$$

4.10 Teorema Uguaglianza sbagliata

Se p è primo allora $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ vale:

$$(x + y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$$

$$(\bar{x} + \bar{y})^p = \bar{x}^p + \bar{y}^p \pmod{p}$$

Dimostrazione: $(x + y)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} x^i y^{p-i}$

$$\binom{p}{0} = 1 = \binom{p}{p}$$

$$\binom{p}{0} x^0 y^p = 1 y^p$$

$$\binom{p}{p} x^p y^0 = 1 x^p$$

Considerare con $0 < i < p$ il coefficiente binomiale è:

$$\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{i(i-1)\dots 2 \cdot 1} \in \mathbb{N}$$

$$p \left(\frac{(p-1)\dots(p-i+1)}{i!} \right) \Rightarrow p \mid \binom{p}{i} \forall i = 2, \dots, p-1$$

$$\Rightarrow \binom{p}{i} \equiv 0 \pmod{p}$$

4.10.1 Grande teorema di Fermat

$x^n + y^n = z^n, n \geq 3$ non ha soluzioni intere.

4.10.2 Piccolo teorema di Fermat

$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall p(\text{mod})$ primo si ha che: $a^p \equiv a(\text{mod } p)$ in \mathbb{Z}_p , p primo vale $\bar{a}^p = \bar{a}$.

Dimostrazione per $a \in \mathbb{N}$

Per induzione su a

Base:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ 0^p &\stackrel{?}{\equiv} 0(\text{mod } p) \\ 0^p = 0 \in \mathbb{Z} &\Rightarrow 0^p \equiv (\text{mod } p) \end{aligned}$$

Ipotesi induttiva: supponiamo vera per a l'affermazione $a^p \equiv a(\text{mod } p)$

Passo induttivo: verifichiamo per $(a+1)$.

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \equiv a + 1$$

$a^p \rightarrow a$ e $1^p \rightarrow 1$ per ipotesi induttiva.

Se $a < 0$ è ancora vero?

Se $a < 0$ allora $-a > 0$, cioè $(-a)^p \equiv -a(\text{mod } p)$. Ora:

$$\begin{aligned} 0 &= a - a \\ 0^p &= (a - a)^p \\ 0^p &\equiv (a - a)^p \equiv a^p + (-a)^p \\ &\equiv a^p - a \equiv 0 \cdot (\text{mod } p) \Leftrightarrow a^p \equiv a(\text{mod } p) \end{aligned}$$

4.11 Teorema Eulero-Fermat

Se $(a, p) = 1$ cioè se $\bar{a} \neq \bar{0}$ in \mathbb{Z}_p allora

$$a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$$

Dimostrazione: se $(a, p) = 1$ allora esiste l'inverso moltiplicativo di \bar{a} in \mathbb{Z}_p .

So che

$$\begin{aligned} a^p &\equiv a(\text{mod } p) \\ (\bar{a}^p) &\equiv \bar{a}(\text{mod } p) \\ \Rightarrow \text{moltiplicando per l'inverso} &\Rightarrow \bar{a}^{p-1} = \bar{1} \text{ in } \mathbb{Z}_p \\ \Leftrightarrow a^{p-1} &\equiv 1(\text{mod } p) \end{aligned}$$

4.12 Corollario

Se $(a, p) = 1$ e se p primo allora \bar{a}^{p-2} è l'inverso moltiplicativo di \bar{a} in \mathbb{Z}_p

Dimostrazione: l'inverso di \bar{a} è \bar{x} con $\bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{2}$, ma

$$\bar{a} \cdot \bar{a}^{p-2} = \bar{a}^{p-1} = \bar{1}$$

per il *teorema di Eulero-Fermat*.

5 Polinomi a coefficienti reali in 1 indeterminata

5.1 Descrizione

$$\mathbb{R}[x] := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k : a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, k, k \in \mathbb{N}\}$$

5.2 Somma di polinomi

Dati

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$$

con $k \leq h$

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_k + b_k)x^k + b_{k+1}x^{k+1} + \dots + b_hx^h$$

5.3 Rappresentazione come successioni

Con esempio:

$$p(x) = 1 + 3x - 4x^3 \leftrightarrow (1, 3, 0, -4, 0, 0, \dots)$$

5.3.1 Somma di polinomi

$$p(x) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$q(x) = (b_0, b_1, b_2, \dots)$$

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

a_i, b_i sono i coefficienti di x^i nel polinomio che rappresentano.

5.4 Teorema: $(\mathbb{R}[x], +)$ è un gruppo (commutativo)

Dimostrazione:

- $\mathbb{R}[x]$ è non vuoto
- La somma è associativa

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = (\dots(a_n + b_n) + c_n \dots) = (\dots a_n + (b_n + c_n) \dots) = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$$

- $0 \in \mathbb{R}$ è l'elemento neutro di $\mathbb{R}[x]$

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots \rightarrow (0, 0, 0, \dots)$$

- Ogni polinomio ha il suo opposto: se

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$$

allora l'opposto di $p(x)$ è

$$-p(x) = -a_0 - a_1x - \dots - a_kx^k$$

5.5 Prodotto di polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k \leftrightarrow (a_0, a_1, \dots)$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k \leftrightarrow (b_0, b_1, \dots)$$

$$p(x) \cdot q(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_r x^r \leftrightarrow (c_0, c_1, \dots)$$

$$\begin{aligned} c_0 + c_1x + \dots + c_r x^r &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \\ &\quad + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots \end{aligned}$$

La successione dei coefficienti di $p(x) \cdot q(x)$ è data da:

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

5.6 Teorema $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo, unitario con unità del prodotto uguale a 1 ed è un dominio di integrità. *non dimostrato*

5.7 Grado del prodotto

Se il grado di $p(x) = k$ ed il grado di $q(x) = h$ il grado del prodotto $p(x)q(x) = k + h$

5.8 Fatti importanti

- in $\mathbb{R}[x]$ si può fare la "divisione col resto":

$$\forall a(x), b(x) \in \mathbb{R}, b(x) \neq 0$$

$$\exists! q(x), r(x) \in \mathbb{R} :$$

1. $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$
2. il grado di $r(x) < \text{grado } b(x)$

- Conseguenza della divisione col resto:

$$MCD(m(x), n(x))$$

$$m(x) = n(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$$

$$n(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$$

...

Termina quando il resto è un polinomio di grado 0.

6 Strutture algebriche

6.1 Gruppo

Un insieme S non vuoto, munito di una operazione

$$m : S \times S \rightarrow S$$

$$(a, b) \mapsto m(a, b) = a * b \text{ (notazione infissa)}$$

che verifica i punti 1, 3, 4 si chiama *gruppo* $(S, *)$.

L'operazione su S è dunque:

- associativa
- con elemento neutro e : $\forall x, x * e = e * x = x$
- per ogni elemento x esiste un inverso rispetto al prodotto $*$ cioè un elemento y tale che $x * y = y * x = e$, che si denota x^{-1}

6.2 Gruppo commutativo (abeliano)

Se il gruppo $(S, *)$ soddisfa anche la proprietà 2 (quindi associatività, elemento neutro, opposto, +commutatività).

6.3 Anello

Un anello è una terna $(A, +, \cdot)$ con:

- A insieme non vuoto
- $+$ due operazioni binarie, associative
- $(A, +)$ è un gruppo abeliano
- Distributività: $\forall a, b, c \in A, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

6.3.1 Anello commutativo

Se un anello $(A, +, \cdot)$ il prodotto è commutativo, cioè se $\forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a$.

6.3.2 Anello unitario

Se esiste un elemento di A , che si denota con 1_A , tale che $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$.

6.3.3 Divisore dello zero

Un elemento $a \in A, a \neq 0_A$ di un anello si dice divisore dello zero se esiste $b \in A, b \neq 0$ con $a \cdot b = 0_A$.

6.3.4 Dominio di integrità

Se $(A, +, \cdot)$ è privo di divisori dello zero.

6.3.5 Legge di annullamento del prodotto

Se in un dominio di integrità $a \cdot b = 0_A$ allora $a = 0_A$ oppure $b = 0_A$.

6.4 Campo

Un campo è una terna $(K, +, \cdot)$ con K insieme non vuoto e 2 operazioni.

- $(K, +, \cdot)$ anello commutativo unitario
- Detto 0_k l'elemento neutro della somma e denotato con $K^* = K \setminus \{0_k\}$, deve valere che $\forall x \in K^* : x \cdot x^{-1} = 1_k$

Quindi campo \Leftrightarrow anello commutativo unitario con in più $K \setminus \{0_k\} = (K^*, \cdot)$ gruppo.

6.5 Semigrupp

Sia X un insieme non vuoto.

$*$:

$$X * X \rightarrow Z$$

$$(a.b) \mapsto a * b$$

una operazione binaria associativa: $\forall a, b, c \in X : a + (b + c) = (a + b) + c$

Un insieme X , munito di una operazione associativa si chiama **semigrupp**.

6.5.1 Monoide

Se $(X, +)$ è un semigrupp ed inoltre esiste un elemento 1_X tale che $a + 1_X = 1_X + a = a$ (1_X elemento neutro dell'operazione $+$), allora $(X, +)$ si chiama **monoide**.

6.6 Elenco gruppi

- (A^*, \cdot) è un monoide non commutativo.
- $(\mathbb{N}, +)$ (commutativo) monoide (0 el. neutro) ma non è un gruppo.
- $(\mathbb{Z}, +)$ gruppo commutativo (0 el. neutro).
- $(\mathbb{Q}, +)$ gruppo commutativo (0 el. neutro); $\frac{p}{a} \rightarrow \text{opposto} - \frac{p}{a}$.
- (\mathbb{N}^*, \cdot) monoide, non è un gruppo.
- (\mathbb{Z}^*, \cdot) monoide, non è un gruppo.
- (\mathbb{Q}, \cdot) non è un gruppo, 0 non ha inverso.
- (\mathbb{Q}^*, \cdot) gruppo.
- $(\mathbb{R}, +)$ gruppo.
- (\mathbb{R}^*, \cdot) monoide, gruppo.

$(\mathbb{Z}_n, +)$ gruppo finito commutativo; el. neutro $\bar{0}$.
 (\mathbb{Z}_n, \cdot) monoide, semigrupp (non è un gruppo $\bar{0}$ non è invertibile).
 $(\cup(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ gruppo, el. neutro $\bar{1} = \{\bar{a} : (a, n) = 1\}$ (el. invertibili).

6.7 Gruppo simmetrico

6.7.1 Permutazione

$f : [n] \rightarrow [n]$ si chiama permutazione di n elementi se f è biiettiva.

6.7.2 S_n

$$\begin{aligned}
 S_n &:= \{\sigma : [n] \rightarrow [n] : \sigma \text{ e' biiettiva}\} \\
 &= \{\sigma : \sigma \text{ e' una biiezione}\}
 \end{aligned}$$

6.7.3 Proposizione

$$|S_n| = n!$$

6.7.4 Proposizione

(S_n, \cdot) l'insieme delle permutazioni di n elementi con il prodotto di composizione funzionale è un gruppo di cardinalità $n!$ non commutativo.

Dimostrazione

- S_n non vuoto, $n \geq 1$
- Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto \cdot , la permutazione identica:
 $\sigma \circ id = id \circ \sigma = \sigma$.
- Prodotto associativo $\forall \sigma, \tau, \rho \in S_n$ $(\sigma \circ \tau) \circ \rho(i) = \sigma \circ (\tau \circ \rho)(i) = \sigma(\tau(\rho(i)))$
- $\forall \sigma \in S_n$ esiste un elemento σ^{-1} tale che $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$.

6.7.5 3^a notazione: Permutazione come prodotto di cicli disgiunti

S_n : Definire una relazione di equivalenza su $[n]$ associata a $\sigma \in S_n$.

$$x, y \in [n]$$

$$x \equiv_{\sigma} y \Leftrightarrow \exists i : y = \sigma^i(x)$$

Si osservi che $\sigma \in S_n$, allora la potenza i -esima di σ , con $i \in \mathbb{N}$ è la permutazione $\sigma^i = \sigma \circ \dots \circ \sigma$ per i volte.

6.7.6 Orbita

L'orbita di $x \in [n]$ è la classe di equivalenza di x nella relazione \equiv_{σ} .

$$O_{\sigma}(x) = \{y \in [n] \mid \exists i \text{ con } y = \sigma^i(x)\}$$

6.7.7 Proposizione

Se τ_1 e τ_2 hanno cicli disgiunti $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$

6.7.8 Permutazione ciclica

Chiamo ciclica una permutazione di S_n in cui nella rappresentazione in cicli disgiunti ha al più un solo ciclo di lunghezza > 1

6.7.9 Teorema prodotto di scambi

Ogni permutazione si può scrivere come prodotto di scambi

Dimostrazione 1: Se la permutazione ha un solo ciclo $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_k) =$ un k -ciclo $= (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1}) \dots (a_1, a_3)(a_1, a_2) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$

Dimostrazione 2: Se ho un σ qualunque, allora

$$\sigma = C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_k$$

dove C_i è un ciclo (nella decomposizione in cicli disgiunti)

$$C_1 = (a_1, \dots, a_r) = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1}) \dots (a_1, a_2)$$

$$C_2 = (b_1, \dots, b_j) = (b_1, b_j)(b_1, b_{j-1}) \dots (b_1, b_2)$$

...

$$\sigma = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1}) \dots (a_1, a_2) (b_1, b_j)(b_1, b_{j-1}) \dots (b_1, b_2)$$

6.7.10 Teorema parità

Il numero di scambi usati in diverse fattorizzazioni di una permutazione ha sempre la stessa parità.

6.7.11 Pari, dispari

Una permutazione è pari se il numero di scambi (in una sua fattorizzazione in scambi) è pari, dispari altrimenti.

6.7.12 Gruppo alterno

Le permutazioni pari si chiamano *gruppo alterno*.

6.7.13 Segno

Data σ in S_n , il segno di σ è $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{parità di } (\sigma)}$

6.8 Classi coniugate in S_n

6.8.1 Definizione

Dato G gruppo rispetto ad un'operazione \cdot , un elemento x' si dice coniugato con $x \Leftrightarrow$

$$\exists y \in G \text{ con } : x' = yxy^{-1}$$

In S_n σ, σ' sono coniugate \Leftrightarrow

$$\exists \tau \in S_n : \sigma' = \tau \sigma \tau^{-1}$$

(si dice che σ' è coniugato a σ tramite τ)

TODO: controllare correttezza definizione

6.8.2 Proposizione

Due permutazioni $\sigma, \sigma' \in S_n$ sono coniugate \Leftrightarrow hanno la stessa struttura ciclica.

6.9 Definizione multinsieme

Una partizione λ di un intero n è un multinsieme di naturali ≥ 1 la cui somma da n .

6.10 Gruppi finiti

6.10.1 Proprietà 1

Dato (G, \cdot) gruppo e $x, y \in G$ allora $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ (l'inverso del prodotto è il prodotto degli inversi in ordine inverso).

Dimostrazione: $(xy)^{-1} = ? e_G$ (el. neutro del gruppo).

Ora

$$\begin{aligned} (x \cdot y)^{-1} \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) &= \\ x \cdot (y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} &= \\ x \cdot e_G \cdot x^{-1} &= \\ x \cdot x^{-1} &= \\ e_G \end{aligned}$$

6.10.2 Proprietà 2

In un gruppo vale sempre la cancellazione:

$$ax = bx \Leftrightarrow a = b$$

Dimostrazione: $\exists x^{-1}$: Se $ax = bx$ e multiplico per x^{-1}

$$axx^{-1} = bxx^{-1}$$

$$a \cdot e = b \cdot e$$

$$a = b$$

Conseguenza: Su una riga (qualunque) della tavola moltiplicativa del gruppo ci sono una e una sola volta tutti gli elementi del gruppo.

6.11 Sottogruppi

6.11.1 Definizione

Un sottogruppo S di (G, \cdot) è:

- Un sottoinsieme non vuoto di $S \subseteq G$
- S , con la stessa operazione di G è un gruppo

6.11.2 Criteri di verifica

Per verificare che S sia un sottogruppo di G ;

- Associatività: "*gratis*" : $S \subseteq G$ e il prodotto in G è associativo.

$$1. \forall a, b \in S : a \cdot b \in S \text{ ovvero } S \times S \rightarrow S$$

$$2. e_G \in S$$

$$3. \forall a \in S \subseteq G, a^{-1} \in S$$

6.11.3 Notazione

$$(S, \cdot) \leq (G, \cdot)$$

altrimenti

$$S \not\leq G$$

6.11.4 Proposizione

S non vuoto e $S \subseteq (G, \cdot)$ è un sottogruppo di G se e solo se

$$\forall a, b \in S : a \cdot b^{-1} \in S \quad (*)$$

Dimostrazione

Ipotesi: $\forall a, b : a \cdot b^{-1} \in S$

Tesi: valgono 1, 2, 3 dei criteri di verifica.

Dimostrazione 2:

$S \neq \emptyset : \exists a_0 \in S$ applico $(*)$ ad a_0, a_0 :

$$a_0 \cdot a_0^{-1} = e_G \in S$$

è quindi l'elemento neutro.

Dimostrazione 3:

$\forall a \in S : a^{-1} \in S$? Per 2. $e_G \in S, a \in S$, applico $(*)$

$$e_G \cdot a^{-1} = a^{-1} \in S$$

Dimostrazione 1:

Dati $a, b \in S, a \cdot b \in S$? Per la 3 $b^{-1} \in S$.

Dati a, b^{-1} per $(*)$

$$a \cdot (b^{-1})^{-1} = a \cdot b \in S$$

6.12 Proposizione: intersezione di sottogruppi

Sia (G, \cdot) un gruppo e $H \leq G, K \leq G$ due sottogruppi. Allora:

$$H \cap K \leq G$$

L'intersezione di sottogruppi di G è un sottogruppo di G

Dimostrazione:

1. $1_G \in H \cap K$?

Poiché H e K sono sottogruppi $1_G \in H, K$ e quindi $1_G \in H \cap K$

2. Siano $x, y \in H \cap K$: verifico che $x \cdot y \in H \cap K$.

$x \in H$ e $x \in K$; $y \in H$ e $y \in K$ allora:

$$xy \in H; xy \in K \Rightarrow xy \in H \cap K$$

3. Se $x \in H \cap K \Rightarrow x^{-1} \in H \cap K$?

La dimostrazione è simile a quella del punto precedente

6.13 Proposizione 1

$$H_1, H_2, \dots, H_t \leq G \Rightarrow H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_t \leq G$$

6.14 Proposizione 2

Siano $S, T \leq G$:

$$S \cup T \leq G \Leftrightarrow S \cup T = T \vee S \cup T = S$$

7 Sottogruppo generato

7.1 Definizione

Siano G un gruppo e $X \subseteq G$, si definisce sotto gruppo generato di X il più piccolo sottogruppo di G che contenga X

7.2 Notazione

$$\langle X \rangle := \bigcap_{X \subseteq H \leq G} H$$

7.3 Proposizione

Se $X = \{x, x_2, \dots\} \subseteq G \neq 0$ allora:

$$\langle X \rangle = \{t_1, t_2, \dots, t_r : t_i \in X \text{ oppure } t_i^{-1} \in X\}$$

L'insieme che contiene i prodotti finiti di elementi di X oppure i cui inversi sono in X .

Dimostrazione:

1. $\langle X \rangle$ contiene X , $r = 1, t_i \in X$
2. $\langle X \rangle \leq G$
 - contiene 1_G : sia $\bar{x} \in X$ qualunque $\Rightarrow \bar{x} \in \langle X \rangle, \bar{x}^{-1} \in \langle X \rangle$ e $\bar{x} \cdot \bar{x}^{-1} = 1_G \in \langle X \rangle$
 - $\langle X \rangle$ è chiuso rispetto al prodotto di G
 - Se $t_1, t_2, \dots, t_r \in \langle X \rangle$, e t_1

TODO:CONTROLLARE APPUNTI

7.4 $\langle X \rangle$ è il più piccolo sottogruppo che contiene X

Da dimostrare in proprio, lo ha dato come esercizio

7.5 Defizione: ordine (periodo)

Se un elemento di G ha periodo finito, allora si chiama *ordine* (o periodo) di g il più piccolo positivo tale che $g^m = 1_G$

7.6 Definizione: gruppo ciclico

Un gruppo G si dice ciclico se esiste $g_0 \in G$ tale che $G = \langle g_0 \rangle$ (gruppo che viene generato da un solo elemento).

7.7 Proposizione

Il sottogruppo generato da un elemento (in un gruppo ciclico) è commutativo.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\langle g \rangle &= \{g^h : h \in \mathbb{Z}\} \\ x &= g^h, y = g^k \quad h, k \in \mathbb{Z} \\ x \cdot y &= g^h g^k = g^{h+k} = g^k g^h = y \cdot x\end{aligned}$$

7.8 Proposizione

Sia G gruppo:

1. Se $g \in G$ ha periodo infinito ($\nexists h > 0 : g^h = e$) allora $\exists h, k \in \mathbb{Z}, h \neq k, g^h \neq g^k$: il gruppo ciclico generato da $G, \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$.
2. g ha periodo finito.
Se $n = \text{periodo di } g = o(g) = \text{ord}_G(g)$ ovvero $n = \min\{k > 0 : g^k = e\}$ allora $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ dove queste potenze sono tutte distinte.

Dimostrazione pt.1: Dimostro che se:

$$g^h = g^k \Rightarrow h = k$$

infatti moltiplico per g^{-k} ed ho:

$$g^{h-k} = g^{k-k} \Rightarrow g^{h-k} = g^0 = e$$

ma g è aperiodico

$$\Rightarrow h - k = 0 \Rightarrow h = k$$

Dimostrazione pt.2: so che $\langle g \rangle = \{g^h : h \in \mathbb{Z}\}$ devo dimostrare che ogni elemento g^h sta già in $\{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$.

Divido h per n :

$$\begin{aligned}h &= nq + r, \quad 0 \leq r < n \\ \Rightarrow g^h &= g^{nq+r} = g^{nq} g^r = (g^n)^q g^r = e^q g^r = e g^r = g^r\end{aligned}$$

ed r è un numero $0 \leq r < n$ e quindi è una potenza dell'insieme.

7.9 Proposizione: sottogruppi di un gruppo ciclico

0. Sottogruppi di $(\mathbb{Z}, +)$: sono tutti e soli della forma

$$H = m\mathbb{Z} = \{mh : h \in \mathbb{Z} = \langle m \rangle\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Non dimostrato.

1. I sottogruppi di $\langle g \rangle$ con $g \in (G, \cdot)$, g aperiodico, sono tutti e soli della forma:

$$H = \langle g^m \rangle$$

per qualche $m \in \mathbb{Z}$.

Non dimostrato.

2. I sottogruppi di un gruppo ciclico generato da un elemento di ordine n ($g^n = e$, n più piccolo positivo con $g^n = e$) sono anch'essi ciclici e generati da $\langle g^h \rangle$, $h|n$.

7.10 Osservazione

I sottogruppi di un gruppo ciclico finito verificano la seguente condizione:

$$H \leq \langle g \rangle \Rightarrow |H| \mid o(g) = |\langle g \rangle|$$

L'ordine di un sottogruppo $H \leq \langle g \rangle$ divide l'ordine dell'elemento g , che è anche l'ordine del gruppo.

7.11 Proposizione

In S_n , sia $\sigma(C_1)(C_2)\dots(C_k)$ la fattorizzazione di σ come prodotto dei suoi cicli disgiunti. Allora se m_i = lunghezza di C_i

$$\text{ordine}(\sigma) = \text{lcm}(m_1, m_2, \dots, m_k)$$

7.12 Proposizione

$G = C_n = \langle g \rangle$ gruppo ciclico generato da un elemento di ordine $n = \{id, g, g^2, \dots, g^n\}$.

Tutti e soli i generatori di C_n sono le potenze di g con esponente coprimo con n .

Generatori: g^t , $(t, n) = 1$

7.13 Teorema di Lagrange

Se G è un gruppo finito, allora l'ordine di un sottogruppo divide l'ordine del gruppo:

$$H \leq G \Rightarrow |H| \mid |G| = o(H)|o(G)$$

Oss: non vale sempre il viceversa.

Se $d|o(G) \Rightarrow \exists H \leq G, o(H) = d$

Dimostrazione: Siano $n = o(G)$ e $m = o(H)$, i il numero di calssi laterali destre modulo H .

Ci_d = indice del sottogruppo H nel gruppo G .

$i = |G/\sim_d|$ = numero di classi laterali. Esistono a_1, a_2, \dots, a_i rappresentanti distinti delle classi laterali.

$$G = Ha_1 \dot{\cup} Ha_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} Ha_i \Rightarrow |G| = o(G) =$$

$$= \sum_{j=1}^i |Ha_j| = \sum_{j=1}^i |H| = i \cdot |H| = i \cdot m$$

cioè ho $n = i \cdot m$. $ord(G)$ = numero classi laterali destre $\cdot ord(H)$.

Da questa relazione deduco che:

1. $ord(H) | ord(G)$
2. $i | o(G)$

Oss: ripeto tutto per le classi laterali sinistre $i_s \cdot m = n$.

7.13.1 Corollario 1

Se $|G| = p$ primo, allora gli unici sottogruppi di G sono $H = \{e\}$ oppure $H = G$ (non ci sono sottogruppi intermedi).

7.13.2 Corollario 2

Se $|G| = \text{primo}$, allora G è ciclico (in particolare è abeliano).

Dimostrazione: Se $|G| = p$ primo > 1 .

Sia $x_0 \in G, x_0 \neq e$. Sia $H = \langle x_0 \rangle \neq \{e\}$ ($H = \{e, x_0, x_0^2, \dots\}$), per il *corollario 1*:

$$H = G \Rightarrow G = \langle x_0 \rangle$$

7.14 Definizione: indice di un sottogruppo

L'indice di un sottogruppo H in un gruppo G è:

$$i = i_s = i_d$$

e si denota:

$$i = [G : H]$$

8 Classi laterali di un sottogruppo

8.1 Definizione: congruenza destra modulo

Sia (G, \cdot) un gruppo, sia $H \leq G$ sottogruppo.

Definiamo congruenza destra modulo H la relazione così definita:

$$\forall a, b \in G : a \sim_d b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$$

8.2 Proposizione

$\sim_d \pmod{H}$ è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione:

- (R) $a \sim_d a$?

$$a \cdot a^{-1} = e \in H$$

- (S) $a \sim_d b \Rightarrow b \sim_d a$?

$$ab^{-1} \in H$$

H sottogruppo:

$$(ab^{-1})^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow (b^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = b^{-1} \cdot a \Rightarrow b \sim_d a$$

- (T) $a \sim_d b$ e $b \sim_d c \Rightarrow a \sim_d c$?

$$ab^{-1} \in H \text{ e } bc^{-1} \in H$$

$$(ab^{-1})(bc^{-1}) \in H$$

H è chiuso rispetto al prodotto

$$(ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1} \Rightarrow a \sim_d c$$

8.3 Insieme quoziente

Dato $a \in G$: $[a]_{\sim_d} = H \cdot a$ dove $Ha = \{ha : h \in H\}$, $H = \{e, h_1, h_2, \dots\}$, $Ha = \{e \cdot a, h_1 \cdot a, \dots\}$.

Dimostrazione: devo provare 1. $Ha \subseteq [a]_{\sim_d}$ e 2. $[a]_{\sim_d} \subseteq Ha$.

1.

$$b \in Ha$$

$$\Leftrightarrow \exists h : b = ha$$

moltiplicando per a^{-1}

$$\Leftrightarrow h = ba^{-1}$$

$$\Leftrightarrow ba^{-1} \in G$$

$$\Leftrightarrow b \sim_d a \Leftrightarrow b \in [a]_{\sim_d}$$

è la stessa di sopra ma partendo dalla fine verso l'inizio.

8.4 Proposizione

Tutte le classi laterali destre hanno la stessa cardinalità.

Dimostrazione: dimostro che $|Ha| = |H| \forall a \in A$ ($|Ha| = [a]_{\sim_d}$, per transitività $|Ha| = |Hb|$).

Sia

$$\begin{aligned}\varphi : H &\rightarrow Ha \\ h &\rightarrow ha\end{aligned}$$

- Suriettiva: ogni elemento di Ha è del tipo ha per qualche $h \in H$.
- Iniettiva: $\varphi(a) = \varphi(h') \Rightarrow ha = h'a \Rightarrow$ per la cancellatività nel gruppo $\Rightarrow h = h'$

8.5 Definizione: congruenza sinistra modulo

$$\forall a, b \in G, \quad a \sim_s b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

La classe laterale sinistra : $[a]_{\sim_s} = aH = \{ah : h \in H\}$

9 Omomorfismi

9.1 Isomorfismo

Dati $(G, *)$ e (H, \cdot) due gruppi, un isomorfismo di G in H è

- $\varphi : G \rightarrow H$ una biiezione.
- φ rispetta le operazioni di gruppo, cioè:

$$\forall a, b \in G : \varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \quad \varphi(a) \text{ e } \varphi(b) \in H$$

Si dice che G è isomorfo ad H e si scrive $G \cong H$.

9.2 Omomorfismo

Se $\varphi : G \rightarrow H$ conserva le operazioni di G e H , φ si chiama omomorfismo, ovvero un omomorfismo è un'applicazione tale che:

$$\forall a, b \in G : \varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

9.3 Epimorfismo

Se φ è suriettiva, φ si chiama epimorfismo.

9.4 Monomorfismo

Se φ è iniettiva, si chiama monomorfismo.

9.5 Isomorfismo 2

Se φ è biunivoca, allora φ si chiama isomorfismo.

9.6 Proposizione

L'isomorfismo tra gruppi è una relazione di equivalenza.

9.7 Kernel/Nucleo

Se l'applicazione φ è un omomorfismo, allora viene definito *nucleo* di $\varphi \subseteq G$

$$Ker(\varphi) : \{x \in G : \varphi(x) = e'\}$$

dove:

e = l'elemento neutro di G

e' = l'elemento neutro di G'

9.8 Proposizione

Dato $\varphi : G \rightarrow G'$ omomorfismo, allora:

1. $\varphi(e) = e'$
2. $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$
3. $\text{Ker}(\varphi) \leq G$
4. $\text{Im}\varphi \leq G'$

Dimostrazione 1: Per dimostrare che $\varphi(e)$ è l'elemento neutro di e' devo mostrare che $\forall y \in G'$: $\varphi(e) \cdot y = y$; moltiplicando per y^{-1} (la cancellazione in G') si ottiene:

$$\begin{aligned}\varphi(e)\varphi\varphi^{-1} &= \varphi\varphi^{-1} \\ \Rightarrow \varphi(e) &= e'\end{aligned}$$

Dimostrazione 2: lasciata per esercizio

Dimostrazione 3: $\text{Ker}\varphi \leq G$?

- contiene e : è il punto 1: infatti $\varphi(e) = e'$
- è chiuso rispetto al prodotto: siano $a, b \in \text{Ker}\varphi$ e verifichiamo che $a * b \in \text{Ker}\varphi$:

$$\begin{aligned}a \in \text{Ker}\varphi &\Rightarrow \varphi(a) = e' \\ b \in \text{Ker}\varphi &\Rightarrow \varphi(b) = e' \\ a * b : \varphi(a * b) &= \varphi(a)\varphi(b) = e' \cdot e' = e' \\ &\Rightarrow a * b \in \text{Ker}\varphi\end{aligned}$$

- è chiuso rispetto agli inversi: sia $a \in \text{Ker}\varphi$ (cioè $\varphi(a) = e'$) devo provare che $a^{-1} \in \text{Ker}\varphi$:

$$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = (e')^{-1} = e'$$

quindi $a^{-1} \in \text{Ker}\varphi$

Dimostrazione 4 TODO: Ricontrollare appunti

9.9 Omomorfismo di anelli

Se $(A, +, \cdot)$ è $(A', +, \cdot)$ sono anelli $0_A, 0_{A'}$ i corrispettivi elementi neutri, un omomorfismo di anelli è un'applicazione:

$$\varphi : A \rightarrow A'$$

tale che:

- $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$
- $\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$

$$\text{Ker}\varphi = \{x \in A : \varphi(x) = 0'_A\} \subseteq A \text{ sottoanello}$$

TODO: *qui c'è un insieme che non ho capito

9.10 Proposizione

$\varphi : (G, *) \rightarrow (G', \cdot)$ omomorfismo di gruppi, allora:

$$\varphi \text{ iniettiva} \Leftrightarrow \text{Ker}\varphi = \{e\}$$

$$\varphi \text{ iniettiva} \Leftrightarrow |\varphi^{-1}(y)| \leq 1 \quad \forall y$$

$$\varphi \text{ iniettiva} + \text{omomorfismo} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(e^{-1}) = e$$

Dimostrazione: $\text{Ker} = \text{Ker}\varphi \leq G'$

Consideriamo la congruenza modulo il segno (?) k

$$a \sim_d b \Leftrightarrow ab^{-1} \in K (= \text{Ker}\varphi) \Leftrightarrow \varphi(a * b^{-1}) = e'$$

φ è un morfismo:

$$\Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = e$$

$$\Leftrightarrow \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = e'$$

moltiplicando per $\varphi(b)$

$$\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$\Leftrightarrow \varphi \text{ iniettiva}$$

9.11 Proposizione

$G, G' \quad \varphi : G \rightarrow G'$ omomorfismo, allora:

1. Se G finito, allora l'ordine $\text{Im}\varphi$ divide l'ordine di G (ed anche di G' , se G' è finito).
2. Se G è ciclico, allora $\text{Im}\varphi$ è un sottogruppo ciclico di G'
3. Se $g \in G$ ha periodo finito, allora il periodo di $\varphi(g)$ divide l'ordine di g

10 Spazi Vettoriali

10.1 Definizione spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale V su un campo K è

- Un insieme nn vuoto V , in cui sono definite due operazioni, di cui una interna ed una esterna.

Interna: somma $+$:

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V \\ (v, w) &\mapsto v + w \end{aligned}$$

Esterna: prodotto \cdot per uno scalare:

$$\begin{aligned} K \times V &\rightarrow V \\ (c, v) &\mapsto c \cdot v \end{aligned}$$

- $(V, +)$ è un gruppo commutativo
- $K \times V \rightarrow V$ e $(c, v) \mapsto c \cdot v$ tale che:

– distributività per vettori:

$$\begin{aligned} \forall c \in K, \forall v, w \in V \\ c(v + w) &= cv + vw \\ (v + w)c &= vc + wc \end{aligned}$$

– associatività per gli scalari:

$$\begin{aligned} \forall c, d \in K, \forall v \in V \\ c(dv) &= (cd)v \end{aligned}$$

- distributività per gli scalari:

$$\begin{aligned} \forall c, d \in K, v \in V \\ (c + d)v &= cv + dv \end{aligned}$$

- $1 \cdot v = v$

10.2 Scalare

E' un elemento del campo.

10.3 Sottospazio vettoriale

Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V su R è un sottoinsieme $W \subseteq V$ non vuoto tale che: W rispetto le stesse operazioni di V sia esso stesso uno spazio vettoriale.

- Equivalentemente si deve avere:
 1. $(W, +)$ è un sotto gruppo di $(V, +)$
 2. chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare
- Equivalentemente:
 1. $\forall u, v \in W: u - v \in W$ [$a \cdot b^{-1} \in G$]
 2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in W: \alpha \cdot v \in W$
- Equivalentemente:
 1. $\forall u, v \in W: u - v \in W$
 2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in W: \alpha v \in W$
(Se $\alpha = -1, v \in W$ allora $-v \in W$
 $u \in W$ allora $u - (-v) = u + v$)
- Equivalentemente $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale \Leftrightarrow
 - 1* $\forall u, v \in W: u + v \in W$
 - 2* $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in W: \alpha v \in W$

10.4 Proposizione

$W \subseteq V, W \neq \emptyset$ è un sottospazio vettoriale \Leftrightarrow :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in W: \alpha u + \beta v \in W$$

$\alpha u + \beta v$ si chiama **combinazione lineare** di u e v .

Dimostrazione: la combinazione lineare è equivalente a 1* e 2*. Supponiamo che $\alpha u + \beta v \in W \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in W$

2* \rightarrow in particolare è vero se prendo $\alpha = \alpha, \beta = 0$: $\alpha u + \beta v = \alpha u \in W$.

1* \rightarrow in particolare, se prendo $\alpha = 1, \beta = -1$: so che $1 \cdot u + (-1) \cdot v = u - v \in W$.

10.5 Definizione: traccia

Data una matrice quadrata $A = [a_{i,j}]$ si chiama traccia della matrice il valore (scalare in \mathbb{R}) definito da:

$$tr(A) = a_{11}, a_{22}, a_{33} + \dots + a_{nn}$$

(è la somma degli elementi della diagonale).

10.6 Definizione: combinazione lineare

Dati $v_1, \dots, v_t \in V$ vettori di uno spazio vettoriale V su \mathbb{R} dati t scalari $c_1, c_2, \dots, c_t \in \mathbb{R}$, il vettore $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_t v_t$ si chiama combinazione lineare di vettori v_1, \dots, v_t tramite gli scalari c_1, \dots, c_t .

10.7 Proprietà di calcolo negli spazi vettoriali

V spazio vettoriale su K , 0 è lo zero del campo, $0_V = \underline{0}$ è l'elemento neutro del gruppo $(V, +)$

- $0v = \underline{0}$ vettore nullo $\forall v \in V$
- $(-c)v = -(cv) \forall v \in V, \forall c \in \mathbb{R}$
- $c\underline{0} = \underline{0}$
- Se $cv = \underline{0}$ allora $c = 0$ oppure $v = \underline{0}$

10.8 Definizione

w è combinazione lineare di v_1, v_2, \dots, v_t se esistono degli scalari $c_1, c_2, \dots, c_t \in \mathbb{R}$ tali che:

$$w = c_1 v_1 + \dots + c_t v_t$$

10.9 Osservazione: combinazione lineare banale

Lo "zero" vettoriale è sempre combinazione lineare di un insieme $\{v_1, \dots, v_t\}$ di vettori qualunque:

$$\underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_t$$

10.10 Definizione: linearmente dipendente

Un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente dipendente (sul campo di V) \Leftrightarrow esistono coefficienti $c_1, \dots, c_n \in K$ non tutti nulli, tali che:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \underline{0}$$

10.11 Osservazione

Se almeno uno dei coefficienti $\{c_1, \dots, c_n\}$ è non nullo (sia $c_j \neq 0$), allora si può scrivere (partendo dalla precedente *linearmente dipendente*):

$$c_j v_j = -c_1 v_1 - c_2 v_2 - \dots - c_{j-1} v_{j-1} - c_{j+1} v_{j+1} - \dots - c_n v_n$$

e $c_j \neq 0 \Rightarrow \exists c_j^{-1}$ allora:

$$v_j = -\frac{c_1 v_1}{c_j} - \frac{c_2 v_2}{c_j} - \dots - \frac{c_n v_n}{c_j}$$

10.12 Osservazione

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme linearmente **indipendente** $\Leftrightarrow \underline{0} = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Ovvero: $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono vettori linearmente indipendenti \Leftrightarrow l'unica combinazione lineare di v_1, \dots, v_n è la combinazione lineare banale.

10.13 Osservazione

Il vettore nullo $\underline{0}$ di V è sempre linearmente dipendente da qualunque insieme finito di vettori.

Infatti sia $\{u_1, \dots, u_z\} \subseteq V$ allora:

$$\underline{0} = 1 \cdot \underline{0} = 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_t$$

(un modo equivalente: $0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_t - 1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$)

10.14 Osservazione

Se $S \subseteq V$ con $\underline{0} \in S$, $S = \{\underline{0}, v_1, \dots, v_k\}$ allora S è un insieme di vettori dipendenti: infatti c'è la dipendenza

$$1 \cdot \underline{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k$$

10.15 Osservazione

La proprietà di essere indipendente di $S \subseteq V$, $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ si eredita ai sottoinsiemi, cioè:

$$\forall T \subseteq S, S \text{ indipendente} \Rightarrow T \text{ indipendente}$$

$\{v_1\}$ è un insieme indipendente $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$; $\{\underline{0}\}$ è indipendente.

10.16 Sottospazio generato da: span

Dati v_1, v_2, \dots, v_t vettore di V (spazio vettoriale su un campo) lo *span* dei vettori v_1, \dots, v_t è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene v_1, \dots, v_t

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_t) = \bigcap_{W \leq V \atop \{v_1, \dots, v_t\} \subseteq W} W$$

Altra notazione *Span*: $\langle v_1, \dots, v_t \rangle$

10.17 Proposizione

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_t) = \left\{ \sum_{i=1}^t \alpha_i v_i : \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K \right\}$$

Dimostrazione data per esercizio

10.18 Sistema di generatori

Dato V su K (es. $K = \mathbb{R}$), i vettori $\{v_1, \dots, v_t\}$ sono un sistema di generatori (o insieme di generatori) per V se

$$V = \text{Span}(v_1, \dots, v_t)$$

Se $W \subseteq V$ è un sottospazio, allora $\{u_1, \dots, u_k\}$ sono generatori (sistema di generatori) per W se

$$W = \text{Span}(u_1, \dots, u_k)$$

10.19 Basi di spazi vettoriali

Dato V su K , un insieme $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ si chiama base di V se:

- $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ cioè B sono generatori per V .
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono indipendenti.

10.20 Spazio finitamente generato

Uno spazio vettoriale V (su K), si dice finitamente generato se ammette un insieme finito di generatori.

10.21 Proposizione

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $V \Leftrightarrow \forall v \in V \exists! (c_1, \dots, c_n), c_i \in \mathbb{R}$ con $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$

Dimostrazione \Rightarrow

1. Ipotesi: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V
2. Tesi: $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$

Sia $v \in V$. Siccome B è una base, allora è un insieme di generatori di $V \Rightarrow v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n$ con $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

Perchè sono unici? Siano (d_1, \dots, d_n) con

$$v = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n$$

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$\Rightarrow v - v = 0 = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n - (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) =$$

$$= (d_1 - c_1) v_1 + \dots + (d_n - c_n) v_n$$

ma v_1, \dots, v_n sono indipendenti \Rightarrow i coefficienti $(d_k - c_k)$ sono tutti nulli.

Dimostrazione \Leftarrow fare per esercizio

10.22 N-upla delle coordinate di v in base B

Data $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ordinata di V , se $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$ allora il vettore colonna $[c_1 \dots c_n] \in \mathbb{R}^n$ si chiama vettore delle coordinate di v in base B .

10.23 Corollario

Fissata una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V l'applicazione $\varphi : V \rightarrow K^n$ (K è il campo di V) che manda v in $\varphi(v) = [c_1 \dots c_n]$ (cioè il vettore nelle sue coordinate in base B) è una biiezione.

10.24 Teorema: esistenza di una base

Se V è uno spazio vettoriale finitamente generato (cioè se $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_h)$) allora esiste una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ di V .

Non dimostrato.

10.25 Proposizione

Date due basi $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ di V allora $n = m$.

10.26 Dimensione di V

Se V è finitamente generato, allora si chiama dimensione di V la cardinalità di una qualunque base di V .

10.27 Osservazione (notazione)

Se la dimensione di V è n , allora $\varphi : V \rightarrow K^n$ si scrive $\dim_k V = n$ se $|B| = n$.

10.28 Teorema del completamento di una base

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V , e sia $\{w_1, \dots, w_p\}$ con $\{p \leq n\}$ un insieme di vettori indipendenti. Allora posso completare $\{w_1, \dots, w_p\}$ con $(n-p)$ vettori di B a formare una base (ovvero posso sostituire p vettori di B un altro insieme di p vettori indipendenti).

Dimostrazione fatta parzialmente da vedere per lode.

10.29 Teorema

Le seguenti condizioni sono equivalenti tra loro per un insieme $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ di n vettori:

1. B è una base.
2. B è un insieme di generatori minimale (cioè ogni sottoinsieme S proprio di V genera un sottospazio $\text{Span}(S) \subsetneq V$)

3. B è un insieme di vettori linearmente indipendenti massimale (cioè ogni $T \not\supseteq B$ insieme di vettori che contiene B non è più indipendente).

10.30 Corollario

Se V è finitamente generato e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ $B' = \{v'_1, \dots, v'_m\}$ sono basi di V allora $|B| = |B'|$ ($n = m$).

Dimostrazione: per assurdo $m < n$, allora con il teorema del completamento costruisco $B'' = B' \cup \{n - m \text{ vettori}\}$. B' è una base ma per il pt.3 (teorema precedente) B' è un insieme massimale \Rightarrow contraddizione.

10.31 Osservazioni

- Se $\dim_K V = n$ allora ogni sottoinsieme di n vettori indipendenti è anche un insieme di generatori.
- Se $\dim_K V = n$ allora ogni insieme di n che generano V è anche un insieme indipendente (cioè una base).
- Se $W \leq V$, sottospazio di V con $\dim_K V = n$ allora:
 - $\dim_K W \leq \dim_K V$
 - $\dim_K W = \dim_K V \Leftrightarrow W = V$
 - $W \neq \{0_V\} \Leftrightarrow \dim_K W > 0$

10.32 Somma di sottospazi

Dati $U, W \leq V$ (V spazio vettoriale su R):

1. L'intersezione $U \cap W$ è anche un sottospazio di V

$$U \cap W = \{v \in V : v \in U \wedge v \in W\}$$

Dimostrazione per esercizio

2. (L'unione di due sottospazi non è, in generale, un sottospazio (a meno che non siano uno contenuto nell'altro)). Il più piccolo sottospazio di V che contiene sia U che W si chiama la **somma** di U e W e si denota:

$$U + W = \text{Span}(U \cup W)$$

10.33 Proposizione

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

Per esercizio verificare che $u+w$ è un sottospazio che contiene $U \cup W$ e $\text{Span}(U + W)$

10.34 Teorema di Grossman

$$\dim_K(U + V) = \dim_K U + \dim_K W - \dim_K(U \cap W)$$

10.35 Somma diretta di sottospazi

Quando $U \cap V = \{0_V\}$, cioè ha dimensione 0, allora si parla di somma diretta di sottospazi e si scrive:

$$U \oplus W$$

10.36 Proposizione

Se $U \cap V = \{0_V\}$ allora ogni vettore di $U \oplus W$ si scrive come somma di un elemento di U più un elemento di W in modo unico.

Dimostrazione: supponiamo che $v_0 \in U + W$ si scriva in due modi diversi:

$$v_0 = u + w = u' + w' \quad (\text{con } u, u' \in U; \ w, w' \in W)$$

$$\Rightarrow v_0 - v_0 = 0 = u + w - (u' + w') =$$

$$(u + u') + (w - w') = 0$$

$$\Rightarrow \in U \cap W = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow u - u' = 0 \Rightarrow u = u'$$

$$\Rightarrow w - w' = 0 \Rightarrow w = w'$$

11 Sistemi di equazioni lineari

11.1 Scrittura

Ogni sistema di equazioni lineari si può scrivere nella forma:

$$AX = K$$

X è la colonna delle incognite, K la colonna dei termini noti del sistema

11.2 Risolvere sistema di equazioni

Una soluzione del sistema è una n -upla di reali i cui valori s_1, \dots, s_n sostituiti alle incognite le rendano tutte vere. cioè:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_n \end{bmatrix}$$

con

$$A \cdot S = K$$

11.3 Sistemi equivalenti

Due sistemi $AX = K$ e $BX = K$ sono equivalenti se hanno esattamente le stesse soluzioni.

11.3.1 Operazioni elementari di riga

- $L = L_{ij}$ scambio riga i e riga j
- $L = L_i(c)$ multiplico la riga i per la costante c
- $L = L_{ij}(c)$ sostituisco alla riga i la riga ottenuta sommando ad i c volte la riga j , $c \neq 0$

11.4 Equivalenza per riga

Due matrici A e B dello stesso ordine $n \times m$ sono equivalenti per riga se B si ottiene da A per applicazione successiva di un numero finito di *operazioni elementari* di riga, cioè se:

$$B = L_k \dots L_2 L_1(A)$$

e si scrive:

$$A \sim B$$

11.5 Proposizione

L'equivalenza per riga è una relazione di equivalenza. *Dimostrazione sulle note della prof.*

12 Proposizione

Siano A, B matrici $m \times n$, se una successione di operazioni elementari di riga trasforma A in B , allora le stesse operazioni trasformano la matrice identica in una matrice P tale che $B = P \cdot A$.

In altre parole

$$[A|I] \sim [B|P]$$

13 Matrice identica

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.1 Corollario

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ ed è invertibile, allora l'inversa si trova applicando la riduzione per righe alla matrice A aumentata della matrice I , cioè:

$$[A|I] \sim [I|A^{-1}]$$

13.2 Teorema

Per ogni matrice A $m \times n$ esiste una matrice R $m \times n$:

- ridotta a scala
- $A \sim R$ (riga equivalente ad A)

13.3 Rango

Si chiama rango di una matrice A il numero di pivot di una ridotta scala R riga-equivalente ad A

13.4 Pivot

Primo elemento non nullo in una riga della matrice.

14 Rango pieno

Una matrice A è di rango pieno se $rg(A) = m$ (m =massimo possibile cioè il numero di righe).

14.1 Proposizione: proprietà del rango

Il rango di A ha le seguenti proprietà:

1. Se $A \sim B$ allora $rg(A) = rg(B)$ ($A \sim R \Rightarrow B \sim R$)
2. Se A è di ordine $m \times n$, allora $rg(A) \leq \min\{m, n\}$
3. $rg(A \cdot B) \leq \min\{rg(A), rg(B)\}$
4. $rg(A^t) = rg(A)$, dove A^t è la matrice trasposta di A definita: $(A^t)_{ij} = a_{ji}$ (*scambia le righe con le colonne*).

14.2 Teorema: Rouché-Capelli

Dato un sistema $AX = K$, allora:

1. Se $rg([A|K]) > rg(A)$, allora il sistema è incompatibile: non ci sono soluzioni.
2. Se $rg([A|K]) = rg(A)$, allora ho due casi:
 - (a) Se $n = r = rg(A)$: rango massimo, c'è una sola soluzione.
 - (b) Se $r = rg(A) < n$: ho infinite soluzioni che saranno parametriche, con tanti parametri quante le colonne non pivot (tanti parametri quanto $n - rg(A)$).

15 Studio dei sistemi omogenei

Le matrici con una sola colonna sono scritte come righe con un pedice: $[valori]_{colonna}$.

15.1 Proposizione

Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo (con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$). Allora

$$W = \{X = [x_1 \dots x_n]_{colonna} \in \mathbb{R} : AX = 0\}$$

L'insieme delle soluzioni del S.L.O. è un sottospazio di \mathbb{R}^n

Dimostrazione Se X, X' sono in W allora $\alpha X + \beta X' \in W$? $A(\alpha X + \beta X') = \alpha AX + \beta AX' = \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$

15.2 Teorema: Struttura sulle soluzioni di un sistema

Sia $AX = b$ un sistema lineare (b colonna dei termini noti). Sia $v_0 \in \mathbb{R}^n$ una soluzione del sistema $AX = b$. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ (una soluzione "particolare") Allora ogni altra soluzione di $AX = b$ si scrive nella forma

$$v = v_0 + w \text{ (soluzione generale)}$$

al variare di $w \in W = \{X : AX = \underline{0}\}$ cioè al variare di w nelle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $AX = \underline{0}$.

$$\begin{aligned} & (Av_0 = b, Aw = \underline{0}) \\ \Leftrightarrow & A(v_0 + w) = b \Rightarrow Av_0 + Aw = b + \underline{0} = b \end{aligned}$$

15.3 Nota importante

$A(X + Y) = AX + AY$: la moltiplicazione per una matrice è quindi lineare.

16 Applicazioni lineari

16.1 Definizione: applicazione lineare (trasformazione lineare o homomorfism of vector space)

Un'applicazione lineare è un'applicazione $T : V \rightarrow W$ di spazi vettoriali su K tale che $\forall v, v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in K$ si ha:

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ (T è additiva)
2. $T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v)$ (T è omogenea)

(additiva+omogenea = è lineare).

In altre parole T conserva le operazioni di spazio vettoriale.

16.2 Proposizione

Punti $1 + 2 \Leftrightarrow 3 : \forall \lambda \mu \in K, \forall v_1, v_2 \in V$

$$T(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda T(v_1) + \mu T(v_2)$$

T manda combinazioni lineari in combinazioni lineari (con gli stessi scalari) dei trasformati.

16.3 Definizione

Fissata $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) : A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, sia $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definita da:

$$X \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto L_A(x) := AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

La trasformazione L_A è la moltiplicazione (a destra) per A :

$$L_A : X \mapsto AX$$

ad ogni matrice A corrisponde una trasformazione lineare L_A .

Per esercizio: dimostrare che $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare.

- $L_A(X + Y) = L_A(X) + L_A(Y)$? (*dimostrazione su appunti*)
- $L_A(\lambda X) = \lambda L_A(X)$?

16.4 Definizione

Data una trasformazione lineare $T : V \rightarrow W$, restano determinati due sottoinsiemi:

- Il nucleo di T : $\text{Ker}T$

$$\text{Ker}T = \{v \in V : T(v) = 0_W\} \subseteq V$$

- L'immagine di T : $\text{Im}T$

$$\text{Im}T = \{T(v) : v \in V\} \subseteq W$$

16.5 Proposizione (risolvere per esercizio)

1. $\text{Ker}T \leq V$
2. $\text{Im}T \leq W$
3. T suriettiva $\Leftrightarrow \text{Im}T = W$
4. T iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker}T = \{0\}$

16.6 Osservazione (!)

Calcolare il nucleo di un'applicazione lineare corrisponde a risolvere un sistema omogeneo.

16.7 Proposizione

Un'applicazione lineare $T : V \rightarrow W$ è definita univocamente (ovvero è determinata) quando si conoscono le immagini di T sui vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ di una base di V , se $\dim V = n$: ovvero basta conoscere $T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$ per conoscere tutta la trasformazione lineare T .

Dimostrazione Se conosco T su v_1, \dots, v_n allora v si scrive come $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ (perchè $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ genera v). T è lineare:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n)$$

Questo determina univocamente T :

Devo dimostrare che se esiste un'altra applicazione lineare $S \neq T$ ma che coincide con T sulla base, allora ho una contraddizione. Sia S un'altra applicazione $S : V \rightarrow W$ con $T(v_i) = S(v_i) \forall i = 1, \dots, n$ allora

$$S(v) = \alpha_1 S(v_1) + \dots + \alpha_n S(v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) = T(v)$$

T è determinata completamente dai suoi valori su una base B di V .

16.8 Corollario

Due applicazioni lineari coincidono \Leftrightarrow coincidono sui vettori di una base.

16.9 Corollario

Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base ordinata di V e se $T : V \rightarrow W$ lineare, allora $ImT = Span(\{T(v_1), \dots, T(v_n)\})$: cioè i vettori immagine della base di V generano l'immagine della trasformazione.

In particolare, se $T = L_A$, trasformazione lineare associata ad $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ & \dots & \dots \\ & & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X \rightarrow AX = T(x)$$

allora

$$\begin{aligned} ImT &= Im(L_A) = Span(T(e_1), \dots, T(e_n)) \\ &= Span(A \cdot e_1, A \cdot e_2, \dots, A \cdot e_n) \end{aligned}$$

dove

$$A \cdot e_i = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = A^{(i)}$$

(Quindi questo punto del corollario ci dice che $Im(L_A) = Span(\text{Colonne di } A)$)

$$\begin{aligned} dim Im(L_A) &= \text{dimensione spazio generato dalle colonne} \\ &= \text{numero dei pivot di una ridotta scala equivalente ad } A \end{aligned}$$

16.10 Definizione: rango trasformazione lineare

1. Il rango di una trasformazione lineare $T : V \rightarrow W$ è $rg(T) = dim_K Im(T)$.
2. Il rango di L_A è la dimensione dell'immagine di L_A , che è il rango della matrice A , $ImL_A = \{AX : X \in \mathbb{R}^n\}$.

16.11 Teorema della dimensione

Sia $T : V \rightarrow W$ trasformazione lineare. Allora:

$$dimV = dim_K KerT + dim_K ImT$$

Sia $\{u_1, \dots, u_s\} \subseteq V$ una base di $KerT$

- Generano $KerT$

- Sono indipendenti
- $T(u_1) = \dots = T(u_s) = 0$

Per il teorema del completamento: completo $\{u_1, \dots, u_s\}$ ad una base di V , quindi sia $\{u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_{n-s}\}$ base di V . Si candidano a base di W i vettori $\{w_1, \dots, w_{n-s}\}$.

Dobbiamo mostrare che $t = \{T(w_1), \dots, T(w_{n-s})\}$ è una base di ImT , cioè che $rgT = n - s = \dim V - \dim KerT$

1. t genera $Im(T)$: sappiamo (dal corollario) che l'immagine ImT è lo span di $(T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_s), T(w_1), \dots, T(w_{n-s})) = Span(0_w, T(w_1), \dots, T(w_{n-s}))$
2. Vediamo che $T(w_1), \dots, T(w_{n-s})$ sono indipendenti.
Supponiamo $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-s} \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\alpha_1 T(w_1) + \dots + \alpha_{n-s} T(w_{n-s}) = 0$$

$$\Leftrightarrow T(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{n-s} w_{n-s}) = 0 \quad (T \text{ e' lineare})$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{n-s} w_{n-s} \in KerT$$

$$\Rightarrow \beta_1, \dots, \beta_s : \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{n-s} w_{n-s} = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s$$

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{n-s} w_{n-s} - \beta_1 u_1 - \dots - \beta_s u_s = 0$$

ed è una combinazione lineare dei vettori di una base di V che dà 0

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-s} = -\beta_1 = \dots = -\beta_s = 0$$

16.12 Osservazione

Se v_1, \dots, v_n sono i vettori colonna di \mathbb{R}^n ; sia $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$ la matrice $m \times n$ formata dai vettori.

Allora una combinazione lineare delle colonne v_1, \dots, v_n con gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$) è la stessa cosa di:

$$A_{(m \times n)} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

16.13 Proposizione

- a) $S, T : V \rightarrow W$, S, T lineari, V, W spazi vettoriali allora: $S + T$, $\lambda \cdot S$ sono lineari.
Dove $(S + T)(v) := S(v) + T(v) : \forall v \in V \quad (S + T : V \rightarrow W)$
e dove $(\lambda S)(v) := \lambda S(v) \quad (\lambda S : V \rightarrow W)$
- b) Siano $S : U \rightarrow V$, $T : V \rightarrow W$ allora è possibile definire la composta $T \circ S : U \rightarrow W$, e $T \circ S$ è lineare.

Dimostrazione punto b) (la a) per esercizio)

Da dimostrare: $T \circ S$ è lineare $\Leftrightarrow T \circ S(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha(T \circ S)(v_1) + \beta(T \circ S)(v_2)$

$$(T \circ S)(\alpha v_1 + \beta v_2) = T(S(\alpha v_1 + \beta v_2)) =$$

$$T(\alpha S(v_1) + \beta S(v_2)) = \quad (S \text{ è lineare})$$

$$\alpha T(S(v_1)) + \beta T(S(v_2)) = \quad (T \text{ è lineare})$$

$$\alpha(T \circ S)(v_1) + \beta(T \circ S)(v_2)$$

$$\Rightarrow T \circ S \text{ è lineare}$$

16.14 Conseguenze della proposizione

a) L'insieme $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W, T \text{ lineare}\}$ è uno spazio vettoriale

b) $\mathcal{L}(V, V)$ l'insieme delle trasformazioni lineari da V in se

$$T : V \rightarrow V \quad T \circ S$$

$$S : V \rightarrow V \quad S \circ T$$

$$(\mathcal{L}(V, V), +, \cdot)$$

- è un anello non commutativo
- unitario $id : V \rightarrow V$, $T \cdot id = id \cdot T = T$ (elemento neutro è l'unità del prodotto)
- $0_V : V \rightarrow V$ ($v \mapsto 0_V$) trasformazione lineare nulla (elemento neutro della somma)

c) Se in $\mathcal{L}(V, V)$ ci restringiamo a guardare le trasformazioni invertibili: $(\{T : V \rightarrow V : T \text{ lineare e invertibile}\}, \cdot)$ è un gruppo commutativo.

16.15 Osservazione: iniettività, suriettività

Sia $T : V \rightarrow W$ lineare e $\dim V = \dim W$, allora:

- T invertibile $\Leftrightarrow T$ iniettiva
- T invertibile $\Leftrightarrow T$ suriettiva

16.16 Osservazione: isomorfismo

V e W sono isomorfi (**notazione:** $V \cong W$) $\Leftrightarrow \exists T : V \rightarrow W$ con T biunivoca.

16.17 Esempio isomorfismo

V dimensione finita n ; $B = (v_1, \dots, v_n)$ base ordinata.

$$f_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \mapsto f_B(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dove } v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$f_B(v)$ sono le coordinate di v in base B . Si ha che f_B è un isomorfismo di V in \mathbb{R}^n .

L'isomorfismo $V \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^n$ non è canonico, cioè dipende dalla scelta di una base.

Conseguenza importante: tutti gli spazi vettoriali di dimensione n su K sono tutti isomorfi a K^n .

16.18 Teorema

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})^{\rightarrow [m \cdot n]}$$

Dimostrazione: abbiamo visto già come associare ad una matrice $A_{m \times n}$ un'applicazione lineare di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m .

$A \mapsto L_A$ la trasformazione lineare da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m che agisce per moltiplicazione.

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X \mapsto AX$$

$$L : \text{Matrici } m \times n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$A \mapsto L(A) = L_A$$

- L è biunivoca? C'è l'inversa?
- L è lineare? *Fare da soli*

Inizio dimostrazione primo punto:

$$L : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$A \leftarrow T$$

Ora

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$e_1 \mapsto T(e_1) \in \mathbb{R}^m$$

$$\vdots$$

$$e_n \mapsto T(e_n) \in \mathbb{R}^m$$

Sia $A := [T(e_1) \ T(e_2) \ \dots \ T(e_n)]$ è una matrice $m \times n$.
Devo mostrare che $L_A = T$ (*completare da soli!*)

16.19 Osservazione

Si può dimostrare che $L_A \cdot L_B = L_{A \cdot B}$

16.20 Proposizione: ricapitolazione sulle matrici invertibili

Le seguenti sono equivalenti:

1. $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è invertibile (rispetto al prodotto di matrici)
2. $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è invertibile
3. L_A è iniettiva
4. L_A è suriettiva
5. $\text{Ker} A = \{0\}$
6. $\text{Im} L_A = \mathbb{R}^n$ ($= \text{Im} A$)
7. $\text{rg} A = n$
8. Le colonne di A sono indipendenti
9. Le righe di A sono indipendenti
10. $AX = \underline{0}$ ha l'unica soluzione $X = \underline{0}$
11. $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ il sistema $AX = \underline{b}$ ammette unica soluzione (è $X = A^{-1} \cdot \underline{b}$)
12. I pivot di una ridotta scala sono tutti non nulli
13. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : BA = I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ (*tutti 1 sulla diagonale, resto 0*)
[inversa a sinistra]
14. $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AC = I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ (*tutti 1 sulla diagonale, resto 0*)
15. $[A|I] \sim [I|C]$ (C^{-1} sarà l'inversa)
16. $\det(A) \neq 0$

16.21 Determinante di una matrice quadrata

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \det(A) \text{ (è un numero)}$$

16.21.1 Sistemi $AX = \underline{0}$

A è invertibile $\Leftrightarrow AX = \underline{0}$ ha unica soluzione.

16.21.2 $n = 1$

$A = [a]$ $a \in \mathbb{R}$; $X = x$; $\underline{0} = 0$.

$ax = 0$ ha unica soluzione $\Leftrightarrow a \neq 0 \Leftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}0$ ($x = 0$)

(se $a = 0 : 0 \cdot x = 0$ ha infinite soluzioni). Qui se pongo $\det(a) = a$ ottengo:

$$[a] = A \text{ invertibile} \Leftrightarrow \det(A) = a \neq 0$$

TODO: CONTROLLARE SUL LIBRO

16.21.3 $n = 2$

A invertibile $\Leftrightarrow AX = \underline{0}$ ha unica soluzione $\Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Dimostrazione su appunti lezione 33.

Definisco:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

16.21.4 $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{11} a_{22} a_{33} +$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)$	segno pari
$a_{12} a_{23} a_{31} +$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$	$\varepsilon(\sigma) = 1$
$a_{13} a_{21} a_{32} +$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$	
$-a_{13} a_{22} a_{31}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)$	segno dispari
$-a_{11} a_{23} a_{32}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23)$	$\varepsilon(\sigma) = -1$
$-a_{12} a_{21} a_{33}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)$	

17 Usi di Gauss-Jordan in vari ambiti

17.1 Risolvere $AX = b$

Si applica GJ alla matrice aumentata $[A|b] \rightarrow [R|b']$ con $A \sim R$ e $[A|b] \sim [R|b']$.

$AX = b$ ha le stesse soluzioni di $RX = b'$. Si risolve a questo punto il sistema ridotto $RX = b'$

17.2 Rango e base ImL_A

Si applica $A \rightarrow R$.

Rivedere Corollario ImL_A

Le colonne sono generatori:

$$[A^{(1)}, \dots, A^{(n)}] = A \sim R$$

allora le colonne di A corrispondenti ai pivot sono indipendenti: $A^{(j_1)} \dots A^{(j_r)}$:

$$rg(A) = \dim ImL_A = r$$

e $A^{(j_1)} \dots A^{(j_r)}$ è una base per l'immagine.

17.3 Trovare $Ker(L_A) = Ker A$

$$KerT = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

$$KerL_A = \{X \in \mathbb{R}^n : L_A(X) = \underline{0}\} =$$

$$\{X \in \mathbb{R}^n : AX = \underline{0}\} =$$

= spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad A

$KerA$ = Soluzioni di $AX = 0$: applicando GJ ad A : $A \sim R$ e risolvo ora $RX = 0$.

17.4 Estrazione insieme di vettori indipendenti

Per il problema di estrarre un insieme indipendente più grande possibile da un insieme di vettori di \mathbb{R}^n : ci si chiede dato $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, qual è una base per $Span(v_1, \dots, v_n)$ da estrarre da $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Costruisco la matrice $A = [v_1 \ \dots \ v_k]_{n \times k}$:

$A \sim^{GJ} R$: le colonne di A corrispondenti alle colonne di R dove si trovano i pivot sono indipendenti.

17.5 Completamento a un base di \mathbb{R}

Dati $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ indipendenti, voglio completare $\{v_1, \dots, v_k\}$ a una base di \mathbb{R}^n (se $k < n$).

In questo caso formo un insieme $\{v_1, \dots, v_k, e_1, \dots, e_n\}$. Costruisco

$$A = [v_1 \ \dots \ v_k \ e_1 \ \dots \ e_n]$$

Applico GJ: $A \sim R$ e scelgo le colonne di A corrispondenti ai pivot.

17.6 Trovare base di $U + W$ e $U \cap W$

Per trovare una base di $U + W$ e $U \cap W$ date una base di U e una di W .