Definizioni Algebra

Ian

October 2021

Contents

1 Capitolo 1

Relazione e corrispondenza sono interscambiabili.

1.1 Corrispondenza

Una corrispondenza ρ di X in Y è una terna (ρ, X, Y) dove $\rho \subseteq X \times Y$.

1.2 Relazione in se

Una Relazione di X in sè, è una corrispondenza ρ di X in X. Se $(x, y) \in \rho$ si scrive anche $x\rho y$(notazione infissa), cioè x è in relazione ρ con y.

1.3 Relazione/Corrispondenza inversa

Una corrispondenza ρ di X in Y è la relazione di Y in X denotata con ρ^{-1} data dalla seguente:

$$y\rho^{-1}x \Leftrightarrow x\rho y$$

1.4 Relazione di equivalenza

una relazione su A (cioè un sottoinsieme ρ di AxA) si dice di equivalenza se verifica le tre seguenti proprietà:

Riflessiva: $\forall a \in A, a\rho a$.
Simmetrica: $\forall a, b$ in $A, a\rho b \Rightarrow b\rho a$
Transitiva: $\forall a, b, c \in A$ se $(a\rho b \wedge b\rho c) \Rightarrow a\rho c$

1.5 Relazione banale (di uguaglianza)

Su A $x, y \in A$ $x\rho y \Leftrightarrow x = y$

1.6 Relazione caotica

Su A $x\rho y$ $\forall x, y \in A$

1.7 Classe di equivalenza

Data la relazione ρ in A, si definisce classe di equivalenza modulo ρ di un elemento $a \in A$ l'insieme di tutti gli elementi che sono equivalenti ad a; si denota con $[a]_\rho$.

$$[x]_\rho := \{y \in A : y\rho x\}$$

1.8 Insieme quoziente

Data la relazione di equivalenza ρ su A, si definisce insieme quoziente l'insieme delle classi di equivalenza di ρ dato $x \in A$ si denota con $A/_\rho$.

$$A/_\rho = \{[x]_\rho : x \in A\}$$

Nota: Relazione di equivalenza e partizioni insiemistiche sono sostanzialmente la stessa cosa.

1.9 Partizione insiemistica

Una partizione insiemeistica di A è una famiglia di sottoinsiemi di A non vuoti, tali che ad ogni elemento di A corrisponde un solo sottoinsieme.

$$H = \{A_i : i \in I\}$$

con

$$A_i \subseteq A \; \forall i \in I$$

con

$$i \neq j, \;\; i, j \in I \Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

che equivale a dire:

$$\cup_{i \in I} \, A_i = A$$

cioè la famiglia H ricopre A.

1.10 Funzione/Applicazione

$f : S \to T$ è un'applicazione di S in T se (f, S, T) è una corrispondenza di S in T, ovvero $f \subseteq S \times T$ che soddisfa la seguente proprietà:
$\forall x \in S$ $\exists!$ y in T denotato con $y = f(x)$, f è una legge univoca (ben definita).

L'elemento f(x) si chiama **immagine dell'elemento**.

L'immagine di f è un sottoinsieme del codominio T definito da:

$$Im(f) := \{y \in T : \exists \, x \in S, y = f(x)\}$$

Controimmagine di y è il sottoinsieme di S del dominio definito da:

$$f^{-1}(y) := \{x \in S : f(x) = y\} \subseteq S$$

1.11 Iniettiva

f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, x' \in S : [f(x) = f(x') \Rightarrow x = x']$.
Definizione alternativa: f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, x' \in S : [f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x']$.
f è iniettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T \; |f^{-1}| \leq 1$, ovvero per ogni elemento y in T esiste al più un'immagine.

1.12 Suriettiva

f è suriettiva se $\Rightarrow \forall y \in T \ \exists x \in S : f(x) = y$
Definizione alternativa: f è suriettiva $\Leftrightarrow f(S) = Im(S) = T$.
f è suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T \ |f^{-1}(y)| \geq 1$, ovvero per ogni elemento y in T esiste almeno un'immagine.

1.13 Biunivoca (biiettiva)

se f è sia iniettiva che suriettiva.
f è biiettiva $\Leftrightarrow \forall y \in T \ |f^{-1}(y)| = 1$, ovvero per ogni elemento y in T esiste una sola immagine.

1.14 Funzione caratteristica

E' la funzione che vale 1 se $x \in S$, 0 se $x \notin S$.

1.15 Operazione binaria

Un'operazione binaria su S, è un'applicazione $m : S \times S \to S$; notazione funzionale $(s, s') \mapsto m(s, s')$; notazione infissa sms' o $s * s$.

1.16 Assiomi di Peano

per la costruzione dei naturali $\mathbb{N}$

1. I numeri formano una classe
2. Lo "zero" è un numero
3. Se a è un numero allora il successore a' è un numero
4. Se $a \neq b$ sono due numeri allora $a' \neq b'$
5. Lo "zero" non è successore di nessun numero ($\nexists\, a$ numero tale che $zero = a'$)
6. Assioma di induzione:
   Se S è una classe di numeri tale che:
   - $zero \in S$
   - Se $a \in S$ allora $a' \in S$

   allora ogni naturale è in S.

I naturali sono la più piccola classe che

- Contiene lo zero
- Chiusa rispetto a contenere i successori

1.17 Principio del buon ordinamento di $\mathbb{N}$

Se $S \subseteq \mathbb{N}, S \neq \emptyset$, allora esiste un minimo in S, cioè esiste $m \in S$ tale che se $h \in \mathbb{N}, h < m$ allora $h \notin S$.

1.18 Teor: Divisione con resto su $\mathbb{N}$

Siano $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$; allora esistono $q, r \in \mathbb{N}$ tali che

- $a = bq + r$
- $0 \leq r < b$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0; \exists$ unici $q, r \in \mathbb{Z}$ con $a = bq+r \wedge 0 \leq r < b$ TODO: Dimostrazione

2 Calcolo combinatorio

2.1 Notazione funzionale

Insieme delle applicazioni da A verso B

$$B^A = \{f : A \to B\}$$

2.2 Fattoriale crescente

$$n^{(m)} := n * (n+1) * ... * (n+m-1)$$

2.3 Fattoriale decrescente

$$n_{(m)} := n * (n-1) * ... * (n-m+1)$$

2.4 Pigenhole principle (principio dei cassetti)

Se ho n oggetti e m cassetti, se $n > m$ e devo disporre tutti gli oggetti nei cassetti allora esiste un cassetto che contiene almeno due oggetti.

2.5 Permutazione

Sia A un insieme. Una biiezione $f : A \to A$ si chiama anche *permutazione* di A.

2.6 Coefficiente binomiale

Prima interpretazione combinatoria: $\binom{n}{i}$ è il coefficiente di $x^i y^{n-i}$ nello sviluppo $(x+y)^n = \sum_{z_i \in \{x,y\}} z_1 ... z_n$, ovvero il numero di stringhe binarie (su x, y)

- lunghe n
- con i occorrenze di x

- con n-i occorrenze di y
- $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Seconda interpretazione combinatoria: numero di sottoinsiemi di cardinalità i su un insieme $[n]$ di cardinalità n.

2.7 Formula

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)*...*(n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

2.8 Relazione ricorsiva

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$$

Dimostrazioni algebrica e combinatoria.

2.9 Simmetria

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

Il coefficiente binomiale è simmetrico rispetto al centro della riga n-esima $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ del triangolo rappresentante tutti i coefficienti del coefficiente binomiale.

Dimostrazioni algebrica e combinatoria.

2.10 Relazione d'ordine

Una relazione ρ su X è una relazione d'ordine (o un ordine, o un ordinamento) se valgono per ρ le proprietà:

- (R) $\forall x, x\rho x$
- (AS) $\forall x, y\ (x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow x = y$
- (T) $\forall x, y, z\ (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z$

2.11 POSET (Partial order set)

Un insieme munito di una relazione d'ordine si dice parzialmente ordinato.

3 I numeri

3.1 Costruzione di $\mathbb{Z}$ (interi)

Partendo da $\mathbb{N}$: prendiamo su $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ la relazione ρ definita sulle coppie $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tale che $(n,m)\rho(n',m') \Leftrightarrow n+m'=m+n'$

3.2 Definizione di $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\rho}$$

3.3 Classi su $\mathbb{Z}$

$\overline{(0,0)}$ zero
$\overline{(m,0)}, m>0$ positivi
$\overline{(0,n)}, n>0$ negativi

3.4 Sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^{>0}\cup\{0,0\}\cup\mathbb{Z}^{<0}$$

3.5 Somma su $\mathbb{Z}$

$$\overline{(n,m)}+\overline{(n',m')}=\overline{(n+n',m+m')}$$

3.6 Prodotto su $\mathbb{Z}$:

$$\overline{(n,m)}\cdot\overline{n',m'}=\overline{(nn'+mm',nm'+mn')}$$

3.7 Proprietà operazioni su $\mathbb{Z}$

$\forall a,b,c\in\mathbb{Z}$ (a,b,c coppie $\overline{(n,m)}$) valgono le seguenti:

1. Associatività: $(a+b)+c=a+(b+c)$
2. Commutatività: $a+b=b+a$
3. Esiste uno *zero* per la somma, cioè un elemento $0: a+0=0+a=a$
4. $\forall a\in\mathbb{Z}$ esiste un elemento detto *opposto*, denotato con $-a$, cioè un elemento tale che: $a+(-a)=(-a)+a=0$.
   $a=\overline{(n,m)}$
   $-a=\overline{(m,n)}$
5. Associatività prodotto: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
6. Commutatività prodotto: $a\cdot b=b\cdot a$

7. Esiste un *elemento neutro* per il prodotto, "1", cioè un numero in $\mathbb{Z}$ tale che:
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$
$$\overline{(n,m)} \cdot \overline{(1,0)} = \overline{(n,m)}$$

8. Distributività del prodotto sulla somma:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

3.8 Gruppo

Un insieme S non vuoto, munito di una operazione
$$m : S \times S \to S$$
$$(a,b) \mapsto m(a,b) = a * b \ \ (notazione\ infissa)$$
che verifica i punti 1, 3, 4 si chiama *gruppo*$(S,*)$.
L'operazione su S è dunque:

- associativa
- con elemento neutro e: $\forall x, x * e = e * x = x$
- per ogni elemento x esiste un inverso rispetto al prodotto $*$ cioè un elemento y tale che $x * y = y * x = e$, che si denota x^{-1}

3.9 Gruppo commutativo (abeliano)

Se il gruppo $(S,*)$ soddisfa anche la proprietà 2 (quindi associatività, elemento neutro, opposto, +commutatività).

3.10 Anello

Un anello è una terna $(A,+,\cdot)$ con:

- A insieme non vuoto
- $+ \cdot$ due operazioni binarie, associative
- $(A,+)$ è un gruppo abeliano
- Distributività: $\forall a,b,c \in A,\ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

3.11 Anello commutativo

Se un anello $(A,+,\cdot)$ il prodotto è commutativo, cioè se $\forall a,b \in A,\ a \cdot b = b \cdot a$.

3.12 Anello unitario

Se esiste un elemento di A, che si denota con 1_A, tale che $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$.

3.13 Divisore dello zero

Un elemento $a \in A,\ a \neq 0_A$ di un anello di dice divisore dello zero se esiste $b \in A, b \neq 0$ con $a \cdot b = 0_A$.

3.14 Dominio di integrità

Se $(A, +, \cdot)$ è privo di divisori dello zero.

3.15 Legge di annullamento del prodotto

Se in un dominio di integrità $a \cdot b = 0_A$ allora $a = 0_A$ oppure $b = 0_A$.

3.16 Divisibilità

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$ si dice che a divide b, e si indica $a|b$, se e solo se $\exists c \in \mathbb{Z}$ tale che $b = a \cdot c$ (ovvero $a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c$).
La divisibilità è una relazione sugli interi:

3.17 Multiplo

Se $a|b$ diremo che b è un multiplo di a.

3.18 Associati

a,b sono associate se $a|b$ e $b|a$
Oss1: in $\mathbb{N}^*$ sono associati $\Leftrightarrow a = b$.
Oss2: in generale, in $\mathbb{Z} \Leftrightarrow a = b$ oppure $a = -b$.

3.19 Unità

In $\mathbb{Z}$ sono +1 e -1.

3.20 Irriducibile

Un elemento $a \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$ è irriducibile se $a = b \cdot c \Rightarrow\ b$ oppure c sono unità.

3.21 Primo

Un elemento $a \in \mathbb{Z}$ si dice primo se:

$$a|b \cdot c \Rightarrow a|b \textit{ oppure } b|c$$

3.21.1 Proposizione: in $\mathbb{Z}$, a è primo $\Rightarrow\ a$ irriducibile

Sia $a = b \cdot c$: usando l'ipotesi che a è primo allora $a|b$ oppure $a|c$.
Se $a|b \Rightarrow \exists\ h : b = a \cdot h \Rightarrow a = a \cdot h \cdot c \Rightarrow h \cdot c = 1 \Rightarrow c = \pm 1$
Allora $a = b \cdot (+1)$ oppure $a = b \cdot (-1)$, a è irriducibile.

3.21.2 Proposizione: in $\mathbb{Z}$ a irriducibile$\Rightarrow$a primo

Ipotesi: a irriducibile
Tesi: a primo Supponiamo che $a|bc \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : bc = ah$,
voglio mostrare che $a|b$ oppure $a|c$ ovvero che se $a \nmid b$ allora $a|c$.
Ora a irriducibile, i suoi divisori sono $a, -a, 1, -1$. $a \nmid b$ allora anche $-a \nmid b \Rightarrow$i divisori comuni tra a e b sono $1, -1 \rightarrow MCD(a, b) = 1$.

$$\exists \text{(id. Bézout)} \exists\ h, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 = ah + bk$$

moltiplicando per c

$$c = cah + cbk = a(ck + k) \quad [cb = a]$$

quindi $a|c$.

3.22 Massimo comune divisore

Dati a,b non entrambi nulli, un elemento $d \in \mathbb{Z}$ si chiama massimo comune divisore tra a e b un numero tale che:

- $d|a \wedge d|b$
- Se $c|a \wedge c|b$, allora $c|d$: d è il massimo tra i divisori comuni.

Chiamiamo massimo comune divisore l'unico positivo che soddisfa le due proprietà.

3.22.1 Teor: Esistenza del MCD tra due numeri

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli, esiste un numero $d \in \mathbb{N}^*$ tale che $d = MCD(a, b)$
Il massimo comune divisore si esprime come una combinazione lineare tra a e b, ovvero esistono $s, t \in \mathbb{Z}$ tali che $d = s \cdot a + t \cdot b$ (*identità di Bézout*).

Dimostrazione:
Sia $S = \{xa + yb : x, y \in \mathbb{Z}, xa + yb > 0\}$

1. $S \subseteq \mathbb{N}$
2. $S \neq \emptyset$

a e b sono non entrambi nulli, quindi almeno uno dei due è $\neq 0$. Sia esso a.
Se $a > 0$ allora $1 \cdot a + 0 \cdot b = a > 0$ Se $a < 0$ allora $(-1) \cdot a + 0 \cdot b = a > 0$

Dimostrazione che $d|a$ e $d|b$:
Dividiamo a per d (divisione col resto): $\exists\ q, r$ con $a = dq + r,\ 0 \leq r < d$
Se $r = 0$ allora $d|a$
Se $r \neq 0$ allora $0 < r < d$
$r = a - dq$; dato che $d \in S \Rightarrow d = x_0a + y_0b$ allora
$r = a - q(x_0a + y_0b) = a - qx_0a + qy_0b = a(1 - qx_0) - (qy_0)b$

Quindi $r \in S$ perchè è una combinazione lineare > 0 ma $r < d$, però d è il minimo di $S \Rightarrow$Assurdo.

Dimostrazione se $d'|a$ e $d'|b$ allora $d'|d$:
Poichè $d'|a$ e $d'|b$ si ha che

$$\exists h : a = d' \cdot h, \exists k : b = d' \cdot k$$

Ora

$$\begin{aligned} d &= x_0 a + y_0 b \\ &= x_0(d'h) + y_0(d'k) = \\ &= d'(x_0 h + y_0 h) \Rightarrow d'|d \end{aligned}$$

3.22.2 Prop: se $c|a$ e $c|b$ allora c divide ogni combinazione lineare di a e b

$$\begin{gathered} a = ch \\ b = ck \\ \Rightarrow xa + yb = xch + yck \\ = c(xh + yk) \Rightarrow \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow c|xa + yb \end{gathered}$$

3.23 Proposizione

$$1 = at + bs \Rightarrow MCD(a, b) = 1$$

3.23.1 Lemma MCD(m,m+1)=1

Sia $m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$ allora $MCD(m, m+1) = 1$.

Dimostrazione:

$$m + 1 - m = 1 \Rightarrow 1(m + 1) + (-1)m = 1$$

Potendo scrivere *1* come combinazione lineare di *m* e *m+1*, *m* e *m+1* sono primi tra loro.

3.24 Algoritmo di Euclide

3.24.1 Lemma1: L'algoritmo termina

La successione dei resti è un numero $0 \leq ... < r_2 < r_1 < b$.

3.24.2 Lemma2: Se $a = bq + r$ $MCD(a, b) = MCD(b, r)$

TODO: scrivere dimostrazione

3.24.3 Corollario: $MCD(a,b) = MCD(r_n, 0) = r_n 1$

Per il lemma 2 $MCD(a,b) = MCD(b, r_1) = MCD(r_1, r_2) = ... = MCD(r_{n-1}, r_n) = MCD(r_n, 0)$

3.24.4 Lemma3

Se $x \in \mathbb{N}^*$ allora $MCD(x, 0) = x$

3.25 Coprimi

a,b non entrambi nulli, a e b si dicono coprimi (o *primi fra loro*) se *MCD(a,b)=1.*

3.25.1 Osservazione1

Se a e b sono primi fra loro, allora

$$\exists\, x, y \in \mathbb{Z} : 1 = xa + yb$$

3.25.2 Osservazione 2

Se

$$d = MCD(a,b) \Rightarrow \exists\, x, y : d = ax + by$$

3.25.3 Proposizione 1

Se $\exists\, x_0, y_0$ con $1 = ax + by$ allora *a,b* sono primi tra loro.

3.25.4 Proposizione 2

Se a e b sono coprimi e dividono un terzo numero c, allora $ab|c$.

3.26 Equazione diofantea

Equazione con una o più incognite sugli interi di cui si cercano le soluzioni intere.

3.26.1 Teor: Soluzione equazione diofantea

L'equazione diofante lineare in x e y $ax + by = c \;\; a, b, c \in \mathbb{Z}$ possiede soluzioni intere $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow d = MCD(a,b)|c$
(Dim$\Rightarrow$) La condizione $MCD(a,b)|c$ è necessaria.
Ipotesi: esiste una soluzione di $x^2 + y^2 = z^2$
Tesi: $d|$termine noto, $d = MCD(a,b) : d|a$ e $d|b \Rightarrow d|$ ogni combinazione lineare di *a,b*.
Se x_0, y_0 sono una soluzione, allora $ax_0 + by_0 = c \Rightarrow d|c = ax_0 + by_0$

(Dim$\Leftarrow$) La condizione è sufficiente.
Ipotesi $MCD(a,b) = ah + bk$, per opportuni $h, k \in \mathbb{Z}$

3.27 Teorema fondamentale dell'aritmetica

$\forall n > 1, n \in \mathbb{N}, \exists\ p_1, ..., p_j \in \mathbb{N}$ (irriducibili) $\exists h_1, ..., h_j \geq 1$ tali che:

- $n = p_1^{h_1}...p_j^{h_j}$ $\ p_1, ...p_j$ distinti
- la fattorizzazione di $n = p_1^{h_1}...p_j^{h_j}$ $\ p_1, ...p_j$ è unica a meno di riordinare i fattori

3.27.1 Osservazione 1

j può essere 1, cioè potrebbe esserci un solo irriducibile nella fattorizzazione di n, anche h possono essere 1. Se n è irriducibile $\Rightarrow n = n$ è la fattorizzazione in irriducibili di n.

3.27.2 Osservazione 2

1 non è considerato irriducibile perché si perderebbe l'unicità della scrittura in irriducibili.

3.27.3 Dimostrazione esistenza

Con principio di induzione in forma forte.
Base: *n=2*, 2 è irriducibile.
Per **oss1** $2 = 2^1$ è la fattorizzazione in primi in irriducibili di 2
Ipotesi induttiva: ogni $2 \leq a < n \quad (2 \leq a \leq n-1)$ è fattorizzabile in irriducibili: $\exists\ \alpha_1...\alpha_t \alpha_i \leq 1$ e $q_1, ...q_t$ irriducibili con $a = q_1^{\alpha_1}...q_t^{\alpha_t}$
Passo induttivo: provare che n sia prodotto di irriducibili

Primo caso: n irriducibile $\rightarrow$ fatto, per *oss.1*

Secondo caso: n riducibile: $\exists\ b, c \in \mathbb{Z}, 1 \neq b, c \neq n$ (divisori propri) con $n = bc \Rightarrow 2 \leq b, c < n$.
Allora per b e c vale l'ipotesi induttiva e quindi

$$b = q_1^{\alpha_1}...q_t^{\alpha_t} \quad c = x_1^{\beta_1}...x_s^{\beta_s}$$

$$n = bc = q_1^{\alpha_1}...q_t^{\alpha_t} x_1^{\beta_1}...x_s^{\beta_s}$$

3.28 Dimostrazione unicità

Per induzione su m, con m è la lunghezza minima di una fattorizzazione per n.
m: minimo numero di irriducibili di una fattorizzazione di n
Base: $m = 1 \Rightarrow n = n$ è primo.
Se per assurdo $n = q_1...q_s,\ s \geq 2$ allora $n|q_1$ o $n|q_2...q_s$.
Prendiamo $n|q_1$, anche q_1 è primo $\Rightarrow n = q_1$; semplificando da entrambe le parti $\Rightarrow 1 = q_2....q_s$ che porterebbe ad un assurdo perché $1 = 1$.
Quindi $n = q_1$ ed è l'unica fattorizzazione.

Ipotesi induttiva: se il minimo numero di primi in una fattorizzazione di n è $m-1$, allora la fattorizzazione è unica a meno dell'ordine.

Passo induttivo: m è il minimo di una fattorizzazione di n.

3.29 Teor. Euclide - Esistenza infiniti primi

L'insieme $P = \{p \in \mathbb{N} : \text{p è primo}\}$ è infinito.
Dimostrazione: Supponiamo che P sia finito, cioè $P = \{p_1, ..., p_n\}$.
Sia $m = p_1, ...p_n$ il prodotto di tutti i primi.
Considero $m+1$: per il teorema fondamentale dell'aritmetica $m+1 = p_1^{k_1}...p_n^{k_n}$, $k_1, ..., k_n \geq 0$ almeno uno degli esponenti *¿0*.
Per il lemma su MCD di un numero ed il suo successivo m e *m+1* sono coprimi.
Sia j tale che $k_j > 0$, cioè $p_j^{k_k}|m+1$; vale anche $p_j|m$ allora $p_j|MCD(m, m+1) = 1$ che è un assurdo.

4 Congruenze

4.1 Congruenza modulo n

La congruenza modulo n (n fissato) è una relazione di equivalenza definita su $\mathbb{Z}$.

$x \equiv y (mod\ n) \Leftrightarrow x - y$ multiplo di $n \Leftrightarrow n | x - y$

4.2 Proposizione

La congruenza *(mod n)* è una relazione di equivalenza.
Dimostrazione:

(R)

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv x (mod\ n) \Leftrightarrow n | (x - x)$$

Vera perché $0 = 0 \cdot n$.

(S)

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv y (mod\ n) \Rightarrow y \equiv x (mod\ n)$$

So che $n | x - y \Leftrightarrow x - y = nh$ per qualche $h \in \mathbb{Z}$.

Moltiplicando per *-1*: $y - x = -nh = n(-h)$ quindi $n | y - x \Rightarrow y \equiv x (mod\ n)$

(T)

$$x \equiv y (mod\ n) \wedge y \equiv z (mod\ n) \Rightarrow x \equiv z (mod\ n)$$

$(x - y) = nh_1 \wedge (y - z) = nh_2$
$(x - z) = (x - y) - (y - z) = nh_1 - nh_2 = n(h_1 - h_2)$ quindi $n | x - z \Rightarrow x \equiv z (mod\ n)$

4.3 Quoziente

Il quoziente della congruenza *(mod n)* si denota come $\mathbb{Z}_{/\equiv(mod\ n)} = \{[x]_n : x \in \mathbb{Z}\}$.
Il quoziente $\mathbb{Z}_n$ si chiama anche **interi modulo n**.

4.4 Proposizione

Dati $x, y \in \mathbb{Z}$ si ha: $x \equiv y (mod\ n) \Leftrightarrow$ il resto delle divisioni di x e di y per n è lo stesso.
Dimostrazione $\Rightarrow$(se $x \equiv_n y$ hanno lo stesso resto $x - y = nh$ (per qualche h)
$x = nh + y$
Dividendo y per n: $\exists! q, r \in \mathbb{Z} : y = nq + r,\ 0 \leq r < n$.
Scambiando in x: $x = nh + nq + r = n(h + q) + r$, x ed y hanno quindi lo stesso resto.

4.5 Osservazione

Sia $x = nq + r,\ 0 \leq r < n$ la divisione con resto di x per n.
Allora
$$[x]_n = [r]_n \Leftrightarrow x \equiv r(mod\ n) \Leftrightarrow x - r = nq$$
Quindi
$$n|x - r$$

4.6 Proposizione somma

La somma classi resto in $\mathbb{Z}_n$, definita da: $\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}$, è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta dei rappresentanti.
Dimostrazione Siano $x' \in \overline{x}$, cioè $\overline{x'} = \overline{x}$ e $y' \in \overline{y}$ cioè $\overline{y'} = \overline{y}$, allora

$$x' \equiv x(mod\ n) \Leftrightarrow x' = x + kn$$
$$y' \equiv y(mod\ n) \Leftrightarrow y' = y + hn$$

Da verificare: $\overline{x' + y'} = \overline{x + y} \Leftrightarrow x' + y' = x + y + tn$
Quindi:
$$x' + y' = x + kn + y + hn$$
$$= x + y + kn + hn$$
$$= x + y + (k + h)n \ \ [(k + h) = t]$$

4.7 Dimostrazione prodotto

$$x' \cdot y' = (x + kn)(y + hn)$$
$$= xy + xhn + kny + khn^2$$
$$xy + n(xh + ky + khn), \quad [(xh + ky + khn) = t]$$

4.8 Campo

Un campo è una terna $(K, +, \cdot)$ con K insieme non vuoto e 2 operazioni.

- $(K, +, \cdot)$ anello commutativo unitario
- Detto 0_k l'elemento neutro della somma e denotato con $K^* = K \setminus \{0_k\}$, deve valere che $\forall x \in K^* : x \cdot x^{-1} = 1_k$

Quindi campo$\Leftrightarrow$ anello commutativo unitario con in più $K \setminus \{0_k\} = (K^*, \cdot)$ gruppo.

4.9 Proposizione

$a \in \mathbb{Z}, \overline{a}$ invertibile in $\mathbb{Z}_n \Leftrightarrow MCD(a,n) = 1$
Dim $\Rightarrow$
Ipotesi: $\overline{a} \in \mathbb{Z}$ invertibile

Tesi: *(a,n)=1*

Esiste $b \in \mathbb{Z} : \overline{a} \cdot \overline{b} = 1$

$$\Leftrightarrow ab \equiv 1 (mod\ n)$$

$$\Leftrightarrow n|1 - ab$$

$$\Leftrightarrow 1 - ab = nk$$

$$\Leftrightarrow 1 = ab + nk$$

$$\Rightarrow MCD(a,n) = 1$$

Dim $\Leftarrow$
Ipotesi: $MCD(a,n) = 1$

Tesi: $\overline{a}$ è invertibile

Se $MCD(a,n) = 1$ allora esistono $h, k \in \mathbb{Z}$:

$$1 = ah + nk \quad \in \mathbb{Z}$$

$$\overline{1} = \overline{ah + nk}$$

$$\overline{1} = \overline{a}\overline{h} + \overline{n}\overline{k} \quad \in \mathbb{Z}$$

$$\overline{n}\overline{k} = \overline{0}\overline{k}$$

$$\overline{1} = \overline{a}\overline{h} \Rightarrow \overline{h} = (\overline{a})^{-1}$$

4.10 Classi resto invertibili

$$\cup(\mathbb{Z}_n) := \{a \in \mathbb{Z}_n : \overline{a}\ invertibile\} \subseteq \mathbb{Z}_n$$

$$\cup(\mathbb{Z}_n) = \{\overline{a} : MCD(a,n) = 1\}$$

4.11 Teorema Uguaglianza sbagliata

Se p è primo allora $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ vale:

$$(x + y)^p \equiv x^p + y^p (mod\ p)$$

$$(\overline{x} + \overline{y})^p = \overline{x}^p + \overline{y}^p (mod\ p)$$

Dimostrazione:$(x+y)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i y^{p-i}$

$$\binom{p}{0} = 1 = \binom{p}{p}$$

$$\binom{p}{0} x^0 y^p = 1y^p$$

$$\binom{p}{p} x^p y^0 = 1x^p$$

Considerare con $0 < i < p$ il coefficiente binomiale è:

$$\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)...(p-i+1)}{i(i-1)...2 \cdot 1} \in \mathbb{N}$$

$$p(\frac{(p-1)...(p-i+1)}{i!}) \Rightarrow p|\binom{p}{i} \forall i = 2, ..., p-1$$

$$\Rightarrow \binom{p}{i} \equiv 0 (mod\ p)$$

4.11.1 Grande teorema di Fermat

$x^n + y^n = z^n, n \geq 3$ non ha soluzioni intere.

4.11.2 Piccolo teorema di Fermat

$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall p(mod)$ primo si ha che: $a^p \equiv a(mod\ p)$ in $\mathbb{Z}_{|}$, p primo vale $\overline{a}^p = \overline{a}$.

Dimostrazione per $a \in \mathbb{N}$
Per induzione su a

Base:

$$a = 0$$

$$0^p \equiv^? 0(mod\ p)$$

$$0^p = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0^p \equiv (mod\ p)$$

Ipotesi induttiva: supponiamo vera per a l'affermazione $a^p \equiv a(mod\ p)$

Passo induttivo: verifichiamo per $(a+1)$.

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \equiv a + 1$$

$a^p \to a$ e $1^p \to 1$ per ipotesi induttiva.

Se $a < 0$ è ancora vero?
Se $a < 0$ allora $-a > 0$, cioè $(-a)^p \equiv -a(mod\ p)$. Ora:

$$0 = a - a$$

$$0^p = (a - a)^p$$

$$0^p \equiv (a - a)^p \equiv a^p + (-a)^p$$

$$\equiv a^p - a \equiv 0 \cdot (mod\ p) \Leftrightarrow a^p \equiv a(mod\ p)$$

4.12 Teorema Eulero-Fermat

Se $(a, p) = 1$ cioè se $\overline{a} \neq \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_p$ allora

$$a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$$

Dimostrazione: se $(a, p) = 1$ allora esiste l'inverso moltiplicativo di $\overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$.
So che

$$a^p \equiv a(mod\ p)$$

$$(\overline{a}^p) \equiv \overline{a}(mod\ p)$$

$$\Rightarrow moltiplicando\ per\ l'inverso \Rightarrow \overline{a}^{p-1} = \overline{1}\ in\ \mathbb{Z}_p$$

$$\Leftrightarrow a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$$

4.13 Corollario

Se $(a, p) = 1$ e se p primo allora $\overline{a}^{p-2}$ è l'inverso moltiplicativo di $\overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$

Dimostrazione: l'inverso di $\overline{a}$ è $\overline{x}$ con $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{2}$, ma

$$\overline{a} \cdot \overline{a}^{p-2} = \overline{a}^{p-1} = \overline{1}$$

per il *teorema di Eulero-Fermat*.

5 Semigruppo

Sia X un insieme non vuoto.
$*$:

$$X \ * \ X \to Z$$

$$(a.b) \mapsto a * b$$

una operazione binaria associativa: $\forall a, b, c \in X : a + (b + c) = (a + b) + c$
Un insieme X, munito di una operazione associativa si chiama **semigruppo**.

6 Monoide

Se $(X, +)$ è un semigruppo e inoltre esiste un elemento 1_X tale che $a + 1_X = 1_X * a = a$ (1_X elemento neutro dell'operazione $*$), allora $(X, +)$ si chiama **monoide**.

7 Elenco gruppi

$(A^*, \cdot)$ è un monoide non commutativo.
$(\mathbb{N}, +)$ (commutativo) monoide (0 el. neutro) ma non è un gruppo.
$(\mathbb{Z}, +)$ gruppo commutativo (0 el. neutro).
$(\mathbb{Q}, +)$ gruppo commutativo (0 el. neutro); $\frac{p}{a} \to$ *opposto* $-\frac{p}{q}$.
$(\mathbb{N}^*, \cdot)$ monoide, non è un gruppo.
$(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ monoide, non è un gruppo.
$(\mathbb{Q}, \cdot)$ non è un gruppo, 0 non ha inverso.
$(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ gruppo.
$(\mathbb{R}, +)$ gruppo.
$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ monoide, gruppo.
$(\mathbb{Z}_n, +)$ gruppo finito commutativo; el. neutro $\overline{0}$.
$(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ monoide, semigruppo (non è un gruppo $\overline{0}$ non è invertibile.
$(\cup(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ gruppo, el. neutro $\overline{1} = \{\overline{a} : (a, n) = 1\}$ (el. invertibili).

8 Gruppo simmetrico

8.1 Permutazione

$f : [n] \to [n]$ si chiama permutazione di n *elementi* se f è biiettiva.

8.2 S_n

$$\begin{aligned} S_n &:= \{\sigma : [n] \to [n] : \sigma \text{ è } \textit{biiettiva}\} \\ &= \{\sigma : \sigma \text{ è } \textit{una biiezione}\} \end{aligned}$$

8.3 Proposizione

$$|S_n| = n!$$

8.4 Proposizione

$(S_n, \cdot)$ l'insieme delle permutazioni di n elementi con il prodotto di composizione funzionale è un gruppo di cardinalità *n!* non commutativo.
Dimostrazione

- S_n non vuoto, $n \geq 1$
- Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto $\cdot$, la permutazione identica: $\sigma \circ id = id \circ \sigma = \sigma$.
- Prodotto associativo $\forall \sigma, \tau, \rho \in S_n$ $(\sigma \circ \tau) \circ \rho(i) = \sigma \circ (\tau \circ \rho)(i) = \sigma(\tau(\rho(i)))$
- $\forall \sigma \in S_n$ esiste un elemento σ^{-1} tale che $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$.

8.5 3^a notazione: Permutazione come prodotto di cicli disgiunti

S_n: Definire una relazione di equivalenza su $[n]$ associata a $\sigma \in S_n$.

$$x, y \in [n]$$

$$x \equiv_\sigma y \Leftrightarrow \exists i : y = \sigma^i(x)$$

Si osservi che $\sigma \in S_n$, allora la potenza *i-esima* di σ, con $i \in \mathbb{N}$ è la permutazione $\sigma^i = \sigma \circ ... \circ \sigma$ per i volte.

8.6 Orbita

L'orbita di $x \in [n]$ è la classe di equivalenza di x nella relazione $\equiv_\sigma$.

$$O_\sigma(x) = \{y \in [n]\ \exists i \ con\ y = \sigma^i(x)\}$$

8.7 Proposizione

Se τ_1 e τ_2 hanno cicli disgiunti $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$

8.8 Permutazione ciclica

Chiamo ciclica una permutazione di S_n) in cui nella rappresentazione in cicli disgiunti ha al più un solo ciclo di lunghezza> 1

8.9 Teorema prodotto di scambi

Ogni permutazione si può scrivere come prodotto di scambi

Dimostrazione 1: Se la permutazione ha un solo ciclo $\sigma = (a_1, a_2, ..., a_k) =$ un k-ciclo $= (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1})...(a_1, a_3)(a_1, a_2) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$
Dimostrazione 2: Se ho un σ qualunque, allora

$$\sigma = C_1 \cdot C_2 \cdot ... \cdot C_k$$

dove C_i è un ciclo (nella decomposizione in cicli disgiunti)

$$C_1 = (a_1, ..., a_r) = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1})...(a_1, a_2)$$

$$C_2 = (b_1, ..., b_j) = (b_1, b_j)(b_1, b_{j-1})...(b_1, b_2)$$

$$...$$

$$\sigma = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1})...(a_1, a_2)\ (b_1, b_j)(b_1, b_{j-1})...(b_1, b_2)$$

8.10 Teorema parità

Il numero di scambi usati in diverse fattorizzazioni di una permutazione ha sempre la stessa parità.

8.10.1 Pari, dispari

Una permutazione è pari se il numero di scambi (in una sua fattorizzazione in scambi) è pari, dispari altrimenti.

8.11 Gruppo alterno

Le premutazioni pari si chiamano *gruppo alterno*.

8.12 Segno

Data σ in S_n, il segno di σ è $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{parita'\ di\ (\sigma)}$

9 Gruppi finiti

9.1 Proprietà 1

Dato $(G, \cdot)$ gruppo e $x, y \in G$ allora $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ (l'inverso del prodotto è il prodotto degli inversi in ordine inverso)