Fundamentos de Inferência Bayesiana

Victor Fossaluza

2020-05-14

Contents

Essas notas de aula tem o intuito apenas de ser um guia de estudos e não necessariamente irá apresentar todo o conteúdo da disciplina de *Inferência Bayesiana*. Além disso, esta é uma versão preliminar e está bem longe de ser uma versão final, de modo que podem haver muitos erros e correções ou sugestões serão bem vindas!

Chapter 1

PROBABILIDADE SUBJETIVA

A construção de probabilidade subjetiva apresentada aqui pode ser encontrada em DeGroot (1970).

1.1 Aula 01

- Ω: *espaço amostral*, conjunto não vazio.

- $\mathcal{A}$: *σ-álgebra de subconjuntos* de Ω, isto é,
  1. $\Theta \in \mathcal{A}$;
  2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
  3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$.
- Os elementos de $\mathcal{A}$ são chamados de *eventos* e serão denotados por $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, ...$

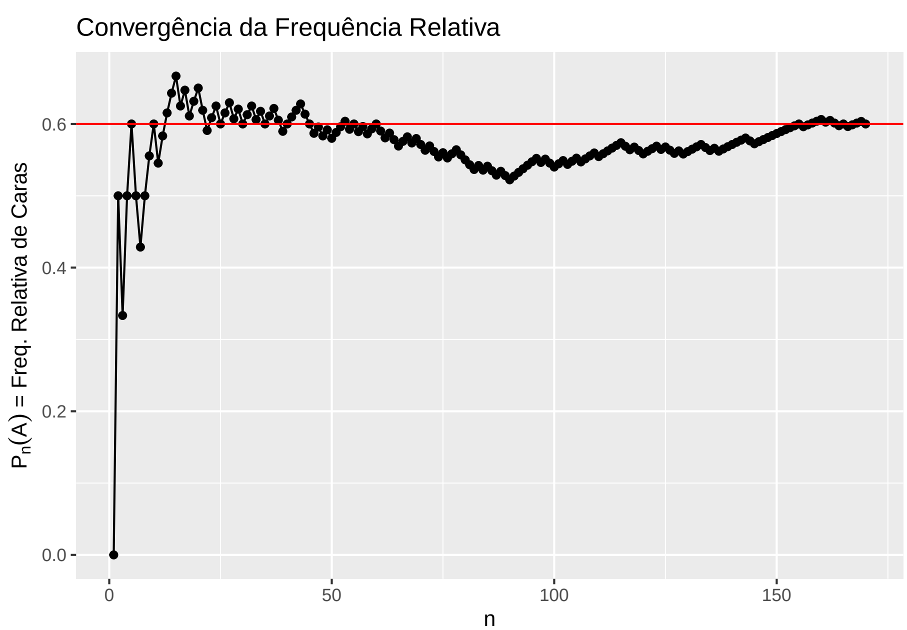
1.1.1 Definição Axiomática

- $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ é uma *medida de probabilidade* se
  1. $P(\Omega) = 1$;
  2. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ com $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} P\left(A_i\right)$.

1.1.2 Interpretações de Probabilidade

- **Interpretação Clássica** (De Moivre, Laplace)
  - baseia-se na equiprobabilidade dos resultados;
  - $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
  - **Exemplo:** um lançamento de moeda, $A =$ "cara", $P(A) = \frac{1}{2}$.

- **Interpretação Frequentista** (Venn, von Mises, Reichenbach, etc.)
  - quase unânime na primeira metade do século XX e ainda é a mais aceita;
  - baseia-se na regularidade das frequências relativas (lei dos grandes números);
  - $P(A) = lim \frac{A_n}{n}$, onde A_n é o número de ocorrências de A em n realizações *idênticas e independentes* do experimento;
  - Supõe que é possível repetir indefinidamente o experimento nas mesmas circustâncias.
  - **Exemplo:** um lançamento de moeda, $A =$ "cara".



- **Interpretação Lógica** (Keynes, Jeffreys, Carnap, etc.)

- medida de "vínculo parcial" entre uma evidência e uma hipótese;
- baseia-se em relações objetivas entre proposições.
- **Exemplo:** considere duas proposições: "até agora todos os lançamentos resultaram em cara" e "será realizado um novo lançamento". Pode-se afirmar que "provavelmente o resultado do novo lançamento será cara".

- **Interpretação Subjetivista** (Ramsey, de Finetti, Savage, etc)
  - probabilidade como medida subjetiva de crença;
  - baseada na experiência de cada indivíduo, portanto única.
  - **Exemplo:** suponha que Bruno lançou uma moeda 3 vezes e todos os resultados foram cara. Esse indivíduo, em posse dessa informação, pode acreditar que o resultado cara é mais provável que coroa. Contudo, quando pergunta sobre a probabilidade de cara ao seu colega Olavo, ignorante com relação a moeda, ele responde que é 1/2.

1.2 Aula 02

1.2.1 Relação de Crença $\precsim$

$\precsim$: relação de "crença" em $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$

- $A \prec B$: acredito mais em B que em A ($B \succ A$)
- $A \sim B$: acredito igualmente em B e A
- $A \precsim B$: acredito em B pelo menos tanto quanto em A

Objetivo: sob certas condições em $\precsim$, obter uma medida de probabilidade P que representa (concorda) com $\precsim$.

$$A \precsim B \iff P(A) \leq P(B)$$

1.2.2 Suposições sobre $\precsim$

SP1: Para $A, B \in \mathcal{A}$, exatamente uma das afirmações a seguir deve valer:

$$A \prec B\ ,\ B \prec A \text{ ou } A \sim B.$$

SP2: $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tais que $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e $A_i \precsim B_i$, $i = 1, 2$. Então

$$A_1 \cup A_2 \precsim B_1 \cup B_2.$$

Além disso, se $A_i \prec B_i$ para algum i, então $A_1 \cup A_2 \prec B_1 \cup B_2$.

SP3: Se A é um evento, então $\emptyset \precsim A$. Além disso, $\emptyset \prec \Omega$.

SP4: Se $A_1, A_2, ...$ uma sequência decrescente de eventos, isto é, $A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n$, e B tal que $B \precsim A_n, \forall n$ então

$$B \precsim \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

SP5: Existe uma variável aleatória $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-mensurável, tal que $X(\omega) \in [0, 1], \forall \omega \in \Omega$ e, se I_1 e I_2 são intervalos contidos em $[0, 1]$, $\{X \in I_1\} \precsim \{X \in I_2\} \Leftrightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$.

- Se $I = [a, b] \subseteq [0, 1]$, $\lambda(I) = b - a$ é o comprimento do intervalo I (medida de Lebesgue).
- "Experimento auxiliar" ; $X \sim$ Uniforme[0,1].
- $\{X \in [a, b]\} \sim \{X \in (a, b]\} \sim \{X \in [a, b)\} \sim \{X \in (a, b)\}$.

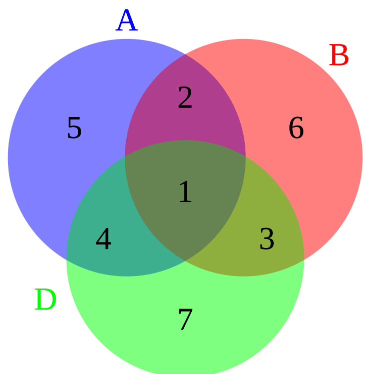
Lema 1: $A, B, D \in \mathcal{A}$ tais que $A \cap D = B \cap D = \emptyset$. Então

$$A \precsim B \;\Leftrightarrow\; A \cup D \precsim B \cup D$$

Demo:
($\Rightarrow$) $A \precsim B \Rightarrow A \cup D \precsim B \cup D$ (SP2)
($\Leftarrow$) $B \prec A \Rightarrow B \cup D \prec A \cup D$ (SP2)

Teorema 1: Se $A \precsim B$ e $B \precsim D$ então $A \precsim D$.

Demo:



(i) $(1) \cup (2) \cup (4) \cup (5) \precsim (1) \cup (2) \cup (3) \cup (6) \quad \Rightarrow \quad (4) \cup (5) \precsim (3) \cup (6)$.

(ii) Analogamente, $(2) \cup (6) \precsim (4) \cup (7)$

De (i) e (ii) e pelo Lema 1, $(4) \cup (5) \cup (2) \cup (6) \precsim (3) \cup (6) \cup (4) \cup (7) \quad \Rightarrow \quad (2) \cup (5) \precsim (3) \cup (7) \quad \Rightarrow \quad (2) \cup (5) \cup (1) \cup (4) \precsim (3) \cup (7) \cup (1) \cup (4)$.

Teorema 2 (generalização do SP2): Se $A_1, \dots, A_n$ são eventos disjuntos e $B_1, \dots, B_n$ são também eventos disjuntos tais que $A_i \precsim B_i$, para $i = 1, \dots, n$, então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Se $A_i \prec B_i$ para algum i, então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \prec \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Demo: Exercício.

Teorema 3: Se $A \precsim B$ então $A^c \succsim B^c$.

Demo: Do Lema 1, $A \cup (A^c \cap B^c) \precsim B \cup (A^c \cap B^c) \Rightarrow B^c \cup (A \cap B) \precsim A^c \cup (A \cap B)$ $\Rightarrow B^c \precsim A^c$.

Resultado: Para todo evento A, $A \precsim \Omega$.

Demo: Por SP3, $\emptyset \precsim A^c$. Tomando $D = A$ no Lema 1, $\emptyset \cup A \precsim A^c \cup A \Rightarrow A \precsim \Omega$.

Teorema 4: Se $A \subseteq B$ então $A \precsim B$.

Demo: Suponha, $B \prec A$. Tomando $D = B^c$ no Lema 1, $B \cup B^c \prec A \cup B^c \Rightarrow \Omega \prec A \cup B^c$. Absurdo!

Exemplo 1: $\omega_0 \in \Omega$. $A \precsim B \Leftrightarrow \{\omega_0 \in B$ **ou** $\omega_0 \notin (A \cup B)\}$. Mostre que $\precsim$ obedece a SP1 a SP4.

(SP1)

$A \precsim B \Leftrightarrow \omega_0 \in B \cup (A \cup B)^c \Rightarrow B \prec A \Leftrightarrow \omega_0 \in B^c \cap (A \cup B) \Leftrightarrow \omega_0 \in A \cap B^c$.

Analogamente, $A \prec B \Leftrightarrow \omega_0 \in B \cap A^c$.

$A \sim B \Leftrightarrow A \precsim B$ e $B \precsim A \Leftrightarrow \omega_0 \in [B \cup (A \cup B)^c] \cap [A \cup (A \cup B)^c] \Leftrightarrow \omega_0 \in (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$.

(SP2)

$A_i \precsim B_i, i = 1,2 \Leftrightarrow \omega_0 \in [B_1 \cup (A_1 \cup B_1)^c] \cap [B_2 \cup (A_2 \cup B_2)^c] \Leftrightarrow \omega_0 \in [(B_1 \cup B_2) \cap D^c] \cup (A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2)^c$,

com $D = (A_1 \cap B2) \cup (A_2 \cap B1)$.

$A_1 \cup A_2 \precsim B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow \omega_0 \in (B_1 \cup B_2) \cup (A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2)^c$

Como $(B_1 \cup B_2) \cap D^c \subseteq (B_1 \cup B_2)$, vale o SP2.

(SP3)

$\emptyset \precsim A \Leftrightarrow \omega_0 \in A \cup (\emptyset \cup A)^c \Leftrightarrow \omega_0 \in A \cup A^c = \Omega$.

Como Ω é não-vazio, $\exists \omega_0 \in \Omega$ e, portanto, $\emptyset \prec \Omega$.

(SP4) Exercício!

Exemplo 2: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $A \precsim B \Leftrightarrow \{B$ é infinito **ou** A e B são finitos com $|A| \leq |B|\}$. Verifique se $\precsim$ satisfaz SP1 a SP4.

Teorema 5: Se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ é uma sequência crescente de eventos e B é tal que $A_n \precsim B, \forall n$ então

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \precsim B.$$

Demo: $A_n^c \supseteq A_{n+1}^c$ e, pelo Teo 3, $A_n^c \succsim B^c$, $\forall n$.

Por SP4, $\bigcap_{n \geq 1} A_n^c \succsim B^c \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \precsim B$.

Teorema 6: $(A_n)_{n \geq 1}$ e $(B_n)_{n \geq 1}$ sequências tais que $A_i \cap A_j = B_k \cap B_l = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $\forall k \neq l$.

$$A_i \precsim B_i, \forall i \ \Rightarrow \ \bigcup_{n \geq 1} A_n \precsim \bigcup_{n \geq 1} B_n.$$

Se existe ao menos um j tal que $A_j \prec B_j$ então $\bigcup\limits_{n \geq 1} A_n \prec \bigcup\limits_{n \geq 1} B_n$.

Demo: Da extensão de SP2, temos que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $\forall n \geq 1 \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{n} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $\forall n \geq 1 \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ (Teo 5)

$\exists n_0$ tal que $A_{n_0} \prec B_{n_0}$. De SP2, temos que, para $n \geq n_0$,

$$\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i = \bigcup_{i=1}^{n_0-1} A_i \cup A_{n_0} \prec \bigcup_{i=1}^{n_0-1} B_i \cup B_{n_0} = \bigcup_{i=1}^{n_0} B_i \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{n_0} A_i \prec \bigcup_{i=1}^{n_0} B_i.$$

Da primeira parte, temos que $\bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} A_i \precsim \bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} B_i$ e, por SP2,

$$\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i \cup \bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} A_i \prec \bigcup_{i=1}^{n_0} B_i \cup \bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} B_i$$

provando o resultado.

1.3 Aula 03

1.3.1 Medida de Probabilidade que "representa" $\precsim$

Teorema 7: Seja $A \in \mathcal{A}$. Então $\exists! a^* \in [0,1]$ tal que $A \sim \{X \in [0, a^*]\}$.

Demo: Seja $U(A) = \{a \in [0,1] : A \precsim \{X \in [0,a]\}\}$.

$1 \in U(A)$ pois $\Omega = \{X \in [0,1]\} \succsim A \;\Rightarrow\; U(A) \neq \emptyset$.

Tome $a^* = \inf U(A)$.

(i) Considere $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n \in [0,1], \forall n \geq 1$, tal que $a_n \geq a_{n+1} \geq a^*$ e $a_n \downarrow a^*$. Então, $\forall n \geq 1$, $\{X \in [0, a_n]\} \succsim A$.
Por SP4, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \in [0, a_n]\} \succsim A \;\Rightarrow\; \{X \in [0, a^*]\} \succsim A$

(ii) Se $a^* = 0$, $\{X \in [0,0]\} \sim \emptyset \precsim A$ (por SP3).
Se $a^* > 0$, considere $(a_n)_{n\geq 1}$ com $a_n \leq a_{n+1} < a^*$ e $a_n \uparrow a^*$.
$\{X \in [0,a_n]\} \precsim A, \forall n \geq 1$ e, pelo Teo 5, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \in [0,a_n]\} \precsim A \;\; \Rightarrow \; \{X \in [0,a^*)\} \sim \{X \in [0,a^*]\} \precsim A$.

De (i) e (ii), temos que $A \sim \{X \in [0,a^*]\}$.

a^* é único pois se $a_1 < a^* < a_2$ são outros valores quaisquer, segue que $\{X \in [0,a_1]\} \prec \{X \in [0,a^*]\} \prec \{X \in [0,a_2]\}$ e só um desses eventos pode ser equivalente à A.

Teorema 8: A probabilidade do evento A, $P(A)$, é definida como $a^* \in [0,1]$ tal que $A \sim \{X \in [0,a^*]\}$. Assim, $A \sim \{X \in [0,P(A)]\}$. A função de probabilidade assim definida satisfaz:

$$A \precsim B \;\Leftrightarrow\; P(A) \leq P(B).$$

Demo: Do Teo 7, $A \sim \{X \in [0,P(A)]\}$ e $B \sim \{X \in [0,P(B)]\}$.

$A \precsim B \quad \Leftrightarrow \quad \{X \in [0,P(A)]\} \precsim \{X \in [0,P(B)]\} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda([0,P(A)]) \precsim \lambda([0,P(B)]) \;\; \Leftrightarrow \;\; P(A) \leq P(B)$.

Teorema 9: A função $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ que, para cada $A \in \mathcal{A}$, associa $P(A)$ tal que $A \sim \{X \in [0,P(A)]\}$ é uma medida de probabilidade (no sentido σ-aditiva).

Demo:

(i) $P(A) \geq 0$.
$\Omega \sim \{X \in [0,1]\} \Rightarrow P(\Omega) = 1$.
$\emptyset \sim \{X \in [0,0]\} \Rightarrow P(\emptyset) = 0$
$\emptyset \precsim A \Rightarrow 0 \leq P(A)$.

(ii) Seja A e B tal que $A \cap B = \emptyset$. Vamos mostrar que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Pelo Teo 8, $A \sim \{X \in [0, P(A)]\}$, $B \sim \{X \in [0, P(B)]\}$, $A \cup B \sim \{X \in [0, P(A \cup B)]\}$.
Como $A \subseteq A \cup B$ e, por SP3, $A \precsim A \cup B$, vale que $P(A) \leq P(A \cup B)$.
Vamos verificar que $B \sim \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\}$.
Suponha, por absurdo, $B \prec \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\}$.
$A \precsim \{X \in [0, P(A)]\} \overset{SP2}{\Longrightarrow} A \cup B \prec \{X \in [0, P(A)]\} \cup \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\} \Rightarrow A \cup B \prec \{X \in [0, P(A)] \cup (P(A), P(A \cup B)]\} \Rightarrow A \cup B \prec \{X \in [0, P(A \cup B)]\} \sim$ (Absurdo!)
Analogamente, $B \succ \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\}$ é absurdo! Logo, $B \sim \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\} \sim \{X \in [0, P(A \cup B) - P(A)]\}$.
Como $B \sim \{X \in [0, P(B)]\}$, temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Corolário 1: Se $A_1, \ldots, A_n$ são eventos disjuntos, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Demo: Indução.

Teorema 10: Seja $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ uma seq. decrescente de eventos tais que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$. Então $\lim\limits_{n \uparrow \infty} P(A_n) = 0$.

Demo: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \Rightarrow P(A_1) \geq P(A)_2 \geq \ldots.$

Além disso, $\lim\limits_{n \uparrow \infty} P(A_n) = b$. Como $P(A_n) \geq b$, $\forall n$, segue que $A_n \succsim \{X \in [0, b]\}$, $\forall n$.

Por SP4, $\emptyset = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \succsim \{X \in [0, b]\}$.

Se $b > 0$, então $\{X \in [0, b]\} \succ \{X \in [0, b/2]\} \succsim \emptyset$. Como essa relação contradiz a anterior, temos que b deve ser igual a 0.

Exercício 1: Use o Corolário 1 e o Teorema 10 para conculuir a demonstração do Teorema 9, mostrando que P é σ-aditiva, isto é,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) \ , \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j.$$

Solução: Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ sequência de eventos disjuntos. Segue do Corolário 1 que

(i) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) + P\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\right)$, $n = 1, 2, ...$

Considere $B_n = \bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j$, $n \geq 1$, uma sequência decrescente de eventos tais que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Pelo Teorema 10, segue que $\lim_{n\uparrow\infty} B_n = 0$. Assim, tomando o limite do lado direito de (i), segue que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) + \lim_{n\uparrow\infty} P\left(B_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

Teorema 11: Se a relação de crença $\precsim$ obedece SP1 a SP5 então $\exists!\ P : \mathcal{A} \to [0,1]$, medida de probabilidade, tal que P representa $\precsim$.

Demo: Exercício!

1.3.2 Medida de Probabilidade Condicional

Nova Relação: $(A|D) \precsim (B|D)$ (Sabendo que D ocorreu, B é preferível a A).

- Para $D = \Omega$, temos o caso anterior: $A \precsim B \Leftrightarrow (A|\Omega) \precsim (B|\Omega)$.

- Suponha que vale as suposições SP1 a SP5 e, adicionalmente,

  SP6: $(A|D) \precsim (B|D) \Leftrightarrow (A \cap D) \precsim (B \cap D) \quad \Big((A \cap D|\Omega) \precsim (B \cap D|\Omega)\Big)$

Teorema 12: $\forall A, B, D \in \mathcal{A}$, considere $\precsim$ satisfazendo SP1 a SP6. Então $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ de modo que para cada $A \in \mathcal{A}$ é associada $P(A) \in [0,1]$ tal que $A \sim \{X \in [0, P(A)]\}$ é uma medida de probabilidade que representa $\precsim$, isto é,

$$(A|\Omega) \precsim (B|\Omega) \Leftrightarrow P(A) \leq P(B).$$

Além disso, se $D \in \mathcal{A}$ é tal que $P(D) \geq 0$, então

$$(A|D) \precsim (B|D) \Leftrightarrow P(A|D) \leq P(B|D),$$

onde $P(\cdot|D) : \mathcal{A} \to [0,1]$ é uma medida de probabilidade tal que

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}.$$

Chapter 2

Literature

Here is a review of existing methods.

Chapter 3

Methods

We describe our methods in this chapter.

Chapter 4

Applications

Some *significant* applications are demonstrated in this chapter.

4.1 Example one

4.2 Example two

Chapter 5

Final Words

We have finished a nice book.

Bibliography

DeGroot, M. H. (1970). *Optimal Statistical Decisions.* MacGraw-Hill, New York.