Fundamentos de Inferência Bayesiana

Victor Fossaluza

2020-08-11

Sumário

Essas notas de aula tem o intuito apenas de ser um guia de estudos e não necessariamente irá apresentar todo o conteúdo da disciplina de *Inferência Bayesiana*. Além disso, esta é uma versão preliminar e está bem longe de ser uma versão final, de modo que podem haver muitos erros e correções ou sugestões serão bem vindas!

Capítulo 1

Probabilidade Subjetiva

A construção de probabilidade subjetiva apresentada aqui pode ser encontrada em DeGroot (1970).

- Ω: *espaço amostral*, conjunto não vazio.
- $\mathcal{A}$: *σ-álgebra de subconjuntos* de Ω, isto é,

  1. $\Theta \in \mathcal{A}$;
  2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
  3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$.

- Os elementos de $\mathcal{A}$ são chamados de *eventos* e serão denotados por $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, ...$

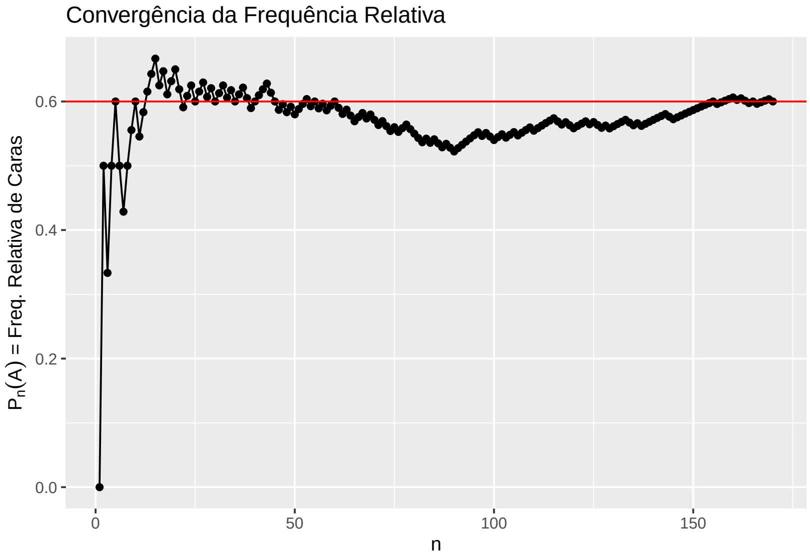
1.1 Definição Axiomática

- $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ é uma *medida de probabilidade* se
  1. $P(\Omega) = 1$;
  2. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ com $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $P\left(\bigcup\limits_{i \geq 1} A_i\right) = \sum\limits_{i \geq 1} P(A_i)$.

1.2 Interpretações de Probabilidade

- **Interpretação Clássica** (De Moivre, Laplace)
  - baseia-se na equiprobabilidade dos resultados;
  - $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
  - **Exemplo:** um lançamento de moeda, A = "cara", $P(A) = \frac{1}{2}$.

- **Interpretação Frequentista** (Venn, von Mises, Reichenbach, etc.)
  - quase unânime na primeira metade do século XX e ainda é a mais aceita;
  - baseia-se na regularidade das frequências relativas (lei dos grandes números);
  - $P(A) = lim \frac{A_n}{n}$, onde A_n é o número de ocorrências de A em n realizações *idênticas e independentes* do experimento;
  - Supõe que é possível repetir indefinidamente o experimento nas mesmas circustâncias.
  - **Exemplo:** um lançamento de moeda, A = "cara".



- **Interpretação Lógica** (Keynes, Jeffreys, Carnap, etc.)
  - medida de "vínculo parcial" entre uma evidência e uma hipótese;
  - baseia-se em relações objetivas entre proposições.
  - **Exemplo:** considere duas proposições: "até agora todos os lançamentos resultaram em cara" e "será realizado um novo lançamento". Pode-se afirmar que "provavelmente o resultado do novo lançamento será cara".

- **Interpretação Subjetivista** (Ramsey, de Finetti, Savage, etc)
  - probabilidade como medida subjetiva de crença;
  - baseada na experiência de cada indivíduo, portanto única.
  - **Exemplo:** suponha que Bruno lançou uma moeda 3 vezes e todos os resultados foram cara. Esse indivíduo, em posse dessa informação, pode acreditar que o resultado cara é mais provável que coroa. Contudo, quando pergunta sobre a probabilidade de cara ao seu colega Olavo, ignorante com relação a moeda, ele responde que é 1/2.

1.3 Relação de Crença $\precsim$

$\precsim$: relação de "crença" em $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$

- $A \prec B$: acredito mais em B que em A ($B \succ A$)
- $A \sim B$: acredito igualmente em B e A
- $A \precsim B$: acredito em B pelo menos tanto quanto em A

Objetivo: sob certas condições em $\precsim$, obter uma medida de probabilidade P que representa (concorda) com $\precsim$.

$$A \precsim B \iff P(A) \leq P(B)$$

1.4 Suposições sobre $\precsim$

SP1: Para $A, B \in \mathcal{A}$, exatamente uma das afirmações a seguir deve valer:

$$A \prec B \ , \ B \prec A \text{ ou } A \sim B.$$

SP2: $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tais que $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e $A_i \precsim B_i$, $i = 1, 2$. Então

$$A_1 \cup A_2 \precsim B_1 \cup B_2.$$

Além disso, se $A_i \prec B_i$ para algum i, então $A_1 \cup A_2 \prec B_1 \cup B_2$.

SP3: Se A é um evento, então $\emptyset \precsim A$. Além disso, $\emptyset \prec \Omega$.

SP4: Se $A_1, A_2, ...$ uma sequência decrescente de eventos, isto é, $A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n$, e B tal que $B \precsim A_n, \forall n$ então

$$B \precsim \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

SP5: Existe uma variável aleatória $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-mensurável, tal que $X(\omega) \in [0, 1], \forall \omega \in \Omega$ e, se I_1 e I_2 são intervalos contidos em $[0, 1]$, $\{X \in I_1\} \precsim \{X \in I_2\} \Leftrightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$.

- Se $I = [a, b] \subseteq [0, 1]$, $\lambda(I) = b - a$ é o comprimento do intervalo I (medida de Lebesgue).
- "Experimento auxiliar" ; $X \sim$ Uniforme[0,1].
- $\{X \in [a, b]\} \sim \{X \in (a, b]\} \sim \{X \in [a, b)\} \sim \{X \in (a, b)\}$.

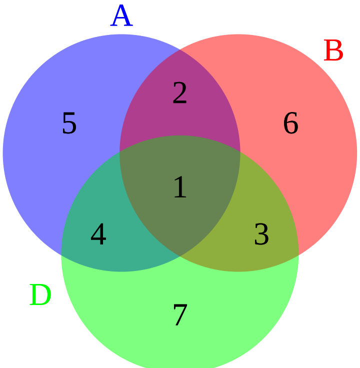
Lema 1: $A, B, D \in \mathcal{A}$ tais que $A \cap D = B \cap D = \emptyset$. Então

$$A \precsim B \ \Leftrightarrow \ A \cup D \precsim B \cup D$$

Demo:
$(\Rightarrow)$ $A \precsim B \Rightarrow A \cup D \precsim B \cup D$ (SP2)
$(\Leftarrow)$ $B \prec A \Rightarrow B \cup D \prec A \cup D$ (SP2)

Teorema 1: Se $A \precsim B$ e $B \precsim D$ então $A \precsim D$.

Demo:



(i) $(1) \cup (2) \cup (4) \cup (5) \precsim (1) \cup (2) \cup (3) \cup (6) \;\Rightarrow\; (4) \cup (5) \precsim (3) \cup (6)$.

(ii) Analogamente, $(2) \cup (6) \precsim (4) \cup (7)$
De (i) e (ii) e pelo Lema 1, $(4) \cup (5) \cup (2) \cup (6) \precsim (3) \cup (6) \cup (4) \cup (7)$
$\Rightarrow\; (2) \cup (5) \precsim (3) \cup (7) \;\Rightarrow\; (2) \cup (5) \cup (1) \cup (4) \precsim (3) \cup (7) \cup (1) \cup (4)$.

Teorema 2 (generalização do SP2): Se $A_1, \ldots, A_n$ são eventos disjuntos e $B_1, \ldots, B_n$ são também eventos disjuntos tais que $A_i \precsim B_i$, para $i = 1, \ldots, n$, então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Se $A_i \prec B_i$ para algum i, então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \prec \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Demo: Exercício.

Teorema 3: Se $A \precsim B$ então $A^c \succsim B^c$.

Demo: Do Lema 1, $A \cup (A^c \cap B^c) \precsim B \cup (A^c \cap B^c) \Rightarrow B^c \cup (A \cap B) \precsim A^c \cup (A \cap B)$
$\Rightarrow B^c \precsim A^c$.

Resultado: Para todo evento A, $A \precsim \Omega$.

Demo: Por SP3, $\emptyset \precsim A^c$. Tomando $D = A$ no Lema 1, $\emptyset \cup A \precsim A^c \cup A \Rightarrow A \precsim \Omega$.

Teorema 4: Se $A \subseteq B$ então $A \precsim B$.

Demo: Suponha, $B \prec A$. Tomando $D = B^c$ no Lema 1, $B \cup B^c \prec A \cup B^c \Rightarrow \Omega \prec A \cup B^c$.
Absurdo!

Exemplo 1: $\omega_0 \in \Omega$. $A \precsim B \Leftrightarrow \{\omega_0 \in B$ **ou** $\omega_0 \notin (A \cup B)\}$. Mostre que $\precsim$ obedece a SP1 a SP4.

(SP1)
$A \precsim B \Leftrightarrow \omega_0 \in B \cup (A \cup B)^c \Rightarrow B \prec A \Leftrightarrow \omega_0 \in B^c \cap (A \cup B) \Leftrightarrow \omega_0 \in A \cap B^c$.
Analogamente, $A \prec B \Leftrightarrow \omega_0 \in B \cap A^c$.
$A \sim B \Leftrightarrow A \precsim B$ e $B \precsim A \Leftrightarrow \omega_0 \in [B \cup (A \cup B)^c] \cap [A \cup (A \cup B)^c] \Leftrightarrow \omega_0 \in (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$.

(SP2)
$A_i \precsim B_i, i = 1, 2 \Leftrightarrow \omega_0 \in [B_1 \cup (A_1 \cup B_1)^c] \cap [B_2 \cup (A_2 \cup B_2)^c] \Leftrightarrow \omega_0 \in [(B_1 \cup B_2) \cap D^c] \cup (A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2)^c$,
com $D = (A_1 \cap B2) \cup (A_2 \cap B1)$.
$A_1 \cup A_2 \precsim B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow \omega_0 \in (B_1 \cup B_2) \cup (A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2)^c$
Como $(B_1 \cup B_2) \cap D^c \subseteq (B_1 \cup B_2)$, vale o SP2.

(SP3)
$\emptyset \precsim A \Leftrightarrow \omega_0 \in A \cup (\emptyset \cup A)^c \Leftrightarrow \omega_0 \in A \cup A^c = \Omega$.
Como Ω é não-vazio, $\exists \omega_0 \in \Omega$ e, portanto, $\emptyset \prec \Omega$.

(SP4) Exercício!

Exemplo 2: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $A \precsim B \Leftrightarrow \{B$ é infinito **ou** A e B são finitos com $|A| \leq |B|\}$. Verifique se $\precsim$ satisfaz SP1 a SP4.

Teorema 5: Se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ é uma sequência crescente de eventos e B é tal que $A_n \precsim B, \forall n$ então

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \precsim B.$$

Demo: $A_n^c \supseteq A_{n+1}^c$ e, pelo Teo 3, $A_n^c \succsim B^c$, $\forall n$.
Por SP4, $\bigcap_{n\geq 1} A_n^c \succsim B^c \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \precsim B$.

Teorema 6: $(A_n)_{n\geq 1}$ e $(B_n)_{n\geq 1}$ sequências tais que $A_i \cap A_j = B_k \cap B_l = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $\forall k \neq l$.

$$A_i \precsim B_i, \forall i \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\geq 1} A_n \precsim \bigcup_{n\geq 1} B_n.$$

Se existe ao menos um j tal que $A_j \prec B_j$ então $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} A_n \prec \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

Demo: Da extensão de SP2, temos que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ (Teo 5)

$\exists n_0$ tal que $A_{n_0} \prec B_{n_0}$. De SP2, temos que, para $n \geq n_0$,

$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i = \bigcup_{i=1}^{n_0-1} A_i \cup A_{n_0} \prec \bigcup_{i=1}^{n_0-1} B_i \cup B_{n_0} = \bigcup_{i=1}^{n_0} B_i \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{n_0} A_i \prec \bigcup_{i=1}^{n_0} B_i.$

Da primeira parte, temos que $\displaystyle\bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} A_i \precsim \bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} B_i$ e, por SP2,

$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i \cup \bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} A_i \prec \bigcup_{i=1}^{n_0} B_i \cup \bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} B_i$

provando o resultado.

1.5 Medida de Probabilidade que "representa" $\precsim$

Teorema 7: Seja $A \in \mathcal{A}$. Então $\exists! a^* \in [0, 1]$ tal que $A \sim \{X \in [0, a^*]\}$.

Demo: Seja $U(A) = \{a \in [0, 1] : A \precsim \{X \in [0, a]\}\}$.
$1 \in U(A)$ pois $\Omega = \{X \in [0, 1]\} \succsim A \;\Rightarrow\; U(A) \neq \emptyset$.
Tome $a^* = \inf U(A)$.

(i) Considere $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n \in [0, 1], \forall n \geq 1$, tal que $a_n \geq a_{n+1} \geq a^*$ e $a_n \downarrow a^*$. Então, $\forall n \geq 1$, $\{X \in [0, a_n]\} \succsim A$.

Por SP4, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \in [0, a_n]\} \succsim A \;\Rightarrow\; \{X \in [0, a^*]\} \succsim A$

(ii) Se $a^* = 0$, $\{X \in [0, 0]\} \sim \emptyset \precsim A$ (por SP3).
Se $a^* > 0$, considere $(a_n)_{n\geq 1}$ com $a_n \leq a_{n+1} < a^*$ e $a_n \uparrow a^*$.

$\{X \in [0, a_n]\} \precsim A, \forall n \geq 1$ e, pelo Teo 5, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \in [0, a_n]\} \precsim A \;\Rightarrow\; \{X \in [0, a^*)\} \sim \{X \in [0, a^*]\} \precsim A$.

De (i) e (ii), temos que $A \sim \{X \in [0, a^*]\}$.

a^* é único pois se $a_1 < a^* < a_2$ são outros valores quaisquer, segue que $\{X \in [0, a_1]\} \prec \{X \in [0, a^*]\} \prec \{X \in [0, a_2]\}$ e só um desses eventos pode ser equivalente à A.

Teorema 8: A probabilidade do evento A, $P(A)$, é definida como $a^* \in [0,1]$ tal que $A \sim \{X \in [0, a^*]\}$. Assim, $A \sim \{X \in [0, P(A)]\}$. A função de probabilidade assim definida satisfaz:

$$A \precsim B \;\Leftrightarrow\; P(A) \leq P(B).$$

Demo: Do Teo 7, $A \sim \{X \in [0, P(A)]\}$ e $B \sim \{X \in [0, P(B)]\}$.
$A \precsim B \;\Leftrightarrow\; \{X \in [0, P(A)]\} \precsim \{X \in [0, P(B)]\} \;\Leftrightarrow\; \lambda([0, P(A)]) \precsim \lambda([0, P(B)])$
$\Leftrightarrow\; P(A) \leq P(B)$.

Teorema 9: A função $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ que, para cada $A \in \mathcal{A}$, associa $P(A)$ tal que $A \sim \{X \in [0, P(A)]\}$ é uma medida de probabilidade (no sentido σ-aditiva).

Demo: (i) $P(A) \geq 0$.
$\Omega \sim \{X \in [0,1]\} \Rightarrow P(\Omega) = 1$.
$\emptyset \sim \{X \in [0,0]\} \Rightarrow P(\emptyset) = 0$
$\emptyset \precsim A \Rightarrow 0 \leq P(A)$.

(ii) Seja A e B tal que $A \cap B = \emptyset$. Vamos mostrar que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Pelo Teo 8, $A \sim \{X \in [0, P(A)]\}$, $B \sim \{X \in [0, P(B)]\}$, $A \cup B \sim \{X \in [0, P(A \cup B)]\}$.
Como $A \subseteq A \cup B$ e, por SP3, $A \precsim A \cup B$, vale que $P(A) \leq P(A \cup B)$. Vamos verificar que $B \sim \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\}$.
Suponha, por absurdo, $B \prec \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\}$.
$A \precsim \{X \in [0, P(A)]\} \overset{SP2}{\Longrightarrow} A \cup B \prec \{X \in [0, P(A)]\} \cup \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\}$
$\Rightarrow\; A \cup B \prec \{X \in [0, P(A)] \cup (P(A), P(A \cup B)]\} \;\Rightarrow\; A \cup B \prec \{X \in [0, P(A \cup B)]\} \sim$ (Absurdo!)
Analogamente, $B \succ \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\}$ é absurdo! Logo, $B \sim \{X \in (P(A), P(A \cup B)]\} \sim \{X \in [0, P(A \cup B) - P(A)]\}$.
Como $B \sim \{X \in [0, P(B)]\}$, temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Corolário 1: Se $A_1, ..., A_n$ são eventos disjuntos, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Demo: Indução.

Teorema 10: Seja $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ uma seq. decrescente de eventos tais que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$. Então $\lim_{n \uparrow \infty} P(A_n) = 0$.

Demo: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \Rightarrow P(A_1) \geq P(A)_2 \geq ....$
Além disso, $\lim_{n \uparrow \infty} P(A_n) = b$. Como $P(A_n) \geq b$, $\forall n$, segue que $A_n \succsim \{X \in [0, b]\}$, $\forall n$.
Por SP4, $\emptyset = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \succsim \{X \in [0, b]\}$.
Se $b > 0$, então $\{X \in [0, b]\} \succ \{X \in [0, b/2]\} \succsim \emptyset$. Como essa relação contradiz a anterior, temos que b deve ser igual a 0.

Exercício 1: Use o Corolário 1 e o Teorema 10 para conculuir a demonstração do Teorema 9, mostrando que P é σ-aditiva, isto é,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) \quad , \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j.$$

Solução: Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ sequência de eventos disjuntos. Segue do Corolário 1 que
(i) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) + P\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\right)$, $n = 1, 2, ...$
Considere $B_n = \bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j$, $n \geq 1$, uma sequência decrescente de eventos tais que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.
Pelo Teorema 10, segue que $\lim_{n\uparrow\infty} B_n = 0$. Assim, tomando o limite do lado direito de (i), segue que
$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) + \lim_{n\uparrow\infty} P\left(B_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$.

Teorema 11: Se a relação de crença $\precsim$ obedece SP1 a SP5 então $\exists!\ P : \mathcal{A} \to [0,1]$, medida de probabilidade, tal que P representa $\precsim$.

Demo: Exercício!

1.6 Medida de Probabilidade Condicional

Nova Relação: $(A|D) \precsim (B|D)$ (Sabendo que D ocorreu, B é preferível a A).

- Para $D = \Omega$, temos o caso anterior: $A \precsim B \Leftrightarrow (A|\Omega) \precsim (B|\Omega)$.
- Suponha que vale as suposições SP1 a SP5 e, adicionalmente,

SP6: $(A|D) \precsim (B|D) \Leftrightarrow (A \cap D) \precsim (B \cap D) \quad \Big((A \cap D|\Omega) \precsim (B \cap D|\Omega)\Big)$

Teorema 12: $\forall A, B, D \in \mathcal{A}$, considere $\precsim$ satisfazendo SP1 a SP6. Então $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ de modo que para cada $A \in \mathcal{A}$ é associada $P(A) \in [0,1]$ tal que $A \sim \{X \in [0, P(A)]\}$ é uma medida de probabilidade que representa $\precsim$, isto é,

$$(A|\Omega) \precsim (B|\Omega) \Leftrightarrow P(A) \leq P(B).$$

Além disso, se $D \in \mathcal{A}$ é tal que $P(D) \geq 0$, então

$$(A|D) \precsim (B|D) \Leftrightarrow P(A|D) \leq P(B|D),$$

onde $P(\cdot|D) : \mathcal{A} \to [0,1]$ é uma medida de probabilidade tal que

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}.$$

Capítulo 2

Introdução à Inferência Bayesiana

2.1 Notação

- **Inferência Estatística:** fazer afirmações sobre quantidades não observáveis em um determinado contexto.
- θ : **parâmetro** - quantidade desconhecida de interesse (não-observável em determinado contexto).
- Θ : **espaço paramétrico** - conjunto onde θ toma valores (supostamente conhecido).
- $E = (X, \theta, \{f(x|\theta)\})$: **experimento** - "*tornar visível algo que antes era invisível*" ou, mais especificamente no nosso contexto, observar uma realização $x \in \mathfrak{X}$ de um vetor aleatório X com alguma distribuição $f(x|\theta)$. Essa distribuição pertence, na maioria dos casos, à uma família de distribuições fixada mas que depende do parâmetro desconhecido de interesse θ. Note que na grande maioria dos problemas do dia a dia de um estatístico ele se utiliza de resultados experimentais para fazer afirmações sobre θ e este, por sua vez, é não-observável em geral.
- $\mathfrak{X}$: **espaço amostral** - conjunto onde X toma valores (supostamente conhecido).
- $\mathcal{F}$: σ-álgebra de (sub)conjuntos de $\mathfrak{X}$.
- Neste espaço amostral, defini-se uma família $\mathcal{P} = \{P(\cdot|\theta) : \theta \in \Theta\}$, isto é, um conjunto de distribuições (condicionais) para X indexadas por θ.
- $(\mathfrak{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$: modelo estatístico (clássico).
- $V_X(\theta) = f(x|\theta)$: função de verossimilhança.

2.2 Inferência Clássica (ou Frequentista)

- θ é considerado fixo (apesar de desconhecido) e, portanto, não recebe uma distribuição de probabilidade.
- Baseia-se no "princípio"da amostragem repetida (interpretação frequentista de probabilidade), isto é, supõe que é possivel realizar infinitas vezes o experimento. Assim, o x é apenas um dos possiveis resultados (hipóteticos) do experimento.
- Probabilidade somente é definida em (uma $\sigma - lgebra$ de) $\mathfrak{X}$.

2.3 Inferência Bayesiana

- Baseia-se na interpretação subjetivista de probabilidade, de modo que a *SUA* incerteza sobre algo desconhecido deve ser quantificada (traduzida) em termos de probabilidade.

- Assim, Sua incerteza sobre o parâmetro (desconhecido) é representada por uma distribuição de probabilidade, θ é tratado como uma v.a. e *SUA* distribuição para θ antes da realização do experimento , $f(\theta)$, é chamada de **distribuição a priori**. Note que a atribuição de uma distribuição a prior para θ independe da natureza do parâmetro, ele pode ser a proporção de indivíduos que avalia positivamente o governo atual (quantidade essa que muda a todo instante) ou ainda a milésima casa do π (algum número de 0 a 9, fixo porém desconhecido no momento dessa leitura).

- A atualização de *SUA* incerteza sobre θ, incorporando uma nova informação trazida pelos dados x (representada por $f(x|\theta)$) é feita pelo *Teorema de Bayes*:

- **Teorema de Bayes:**

$$\underbrace{f(\theta|x)}_{dist.posteriori} = \frac{f(\theta)f(x|\theta)}{\displaystyle\int_\Theta f(x|\theta)dP_\theta} \propto \underbrace{f(\theta)}_{priori} \overbrace{f(x|\theta)}^{verossimilhana}.$$

- Toda a inferência sobre θ será baseada exclusivamente em $f(\theta|x)$, não sendo necessário considerar pontos amostrais que poderiam mas não foram observados (como é feito na inferência frequentista).

- **Observação:** será utilizada a notação geral para integral (de Lebesgue):

$$\int_\Theta f(x|\theta)dP_\theta = \begin{cases} \displaystyle\int_\Theta f(x|\theta)f(\theta)d\theta & (caso \quad contnuo) \\ \displaystyle\sum_\Theta f(x|\theta)f(\theta) & (caso \quad discreto) \end{cases}$$

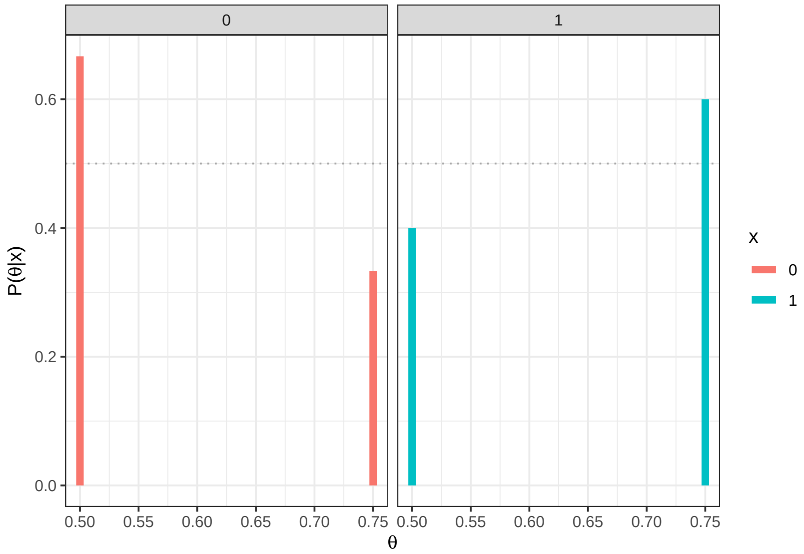
Exemplo 1.a: Suponha que existem duas moedas, uma delas tem $\theta = 1/2$ (honesta) e a outra $\theta = 3/4$ (viesada). Uma moeda é escolhida e é feito um lançamento da moeda selecionada. Nesse experimento, tem-se $X|\theta \sim Ber(\theta)$, com $\Theta = \{1/2, 3/4\}$ e $\mathfrak{X} = \{0, 1\}$. Como "chutar" o valor de θ?

Considere que não existe razão para você acreditar que há algum tipo de preferência na escolha de uma ou outra moeda, isto é, considere que a priori $f(\theta = 1/2) = f(\theta = 3/4) = 1/2$. Suponha que o lançamento resultou em cara ($x = 1$). Então

$$f(\theta = 3/4|X = 1) = \frac{f(X = 1|\theta = 3/4)f(\theta = 3/4)}{\sum_\theta f(X = 1|\theta)f(\theta)} = \frac{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{3/4}{5/4} = \frac{3}{5} = 1 - \underbrace{f(\theta = 1/2|X = 1)}_{2/5}$$

Se, no entando, o resultado do lançamento da moeda fosse coroa ($x = 0$), teríamos

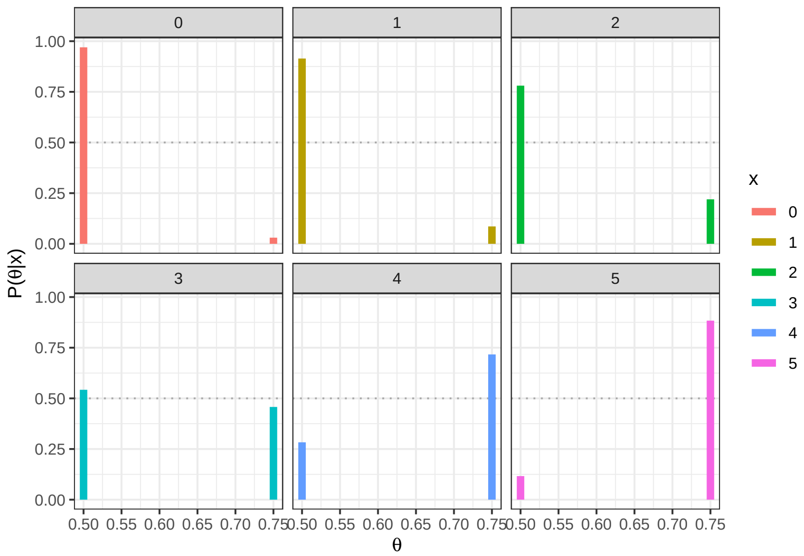
$$P(\theta = 3/4|X = 0) = \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1/2}{1/2 + 2/2} = \frac{1}{3}$$



Assim, se sua decisão for escolher o valor mais provável de θ após observar x, a conclusão seria que a moeda é viesada ($\theta = 3/4$) se for observado cara ($x = 1$) e que a moeda é honesta ($\theta = 1/2$) se o resultado for coroa ($x = 0$).

Exemplo 1.b: Considere agora que serão realizados n lançamentos da moeda, de modo que agora tem-se $X|\theta \sim Bin(n, \theta)$, $\theta \in \{1/2, 3/4\}$, $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Suponha que observa-se $X = x$.

$$f(\theta = 3/4|X = x) = \frac{f(x|\theta = 3/4)f(\theta = 3/4)}{\sum\limits_{\theta \in \{1/2, 3/4\}} f(x|\theta)f(\theta)} = \frac{\binom{n}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{n-x}\frac{1}{2}}{\binom{n}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{n-x}\frac{1}{2} + \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2^n}{3^x}\right)} = \frac{3^x}{3^x + 2^n}.$$



Note que o Exemplo 1.a é um caso particular desse exemplo quando $n = 1$. Se novamente sua decisão é baseada no valor mais provável de θ, temos

$$f(\theta = 3/4|X = x) > \frac{1}{2} \iff \frac{3^x}{3^x + 2^n} > \frac{1}{2} \iff 3^x > 2^n \iff \frac{x}{n} = \bar{x} > \log_3 2 \approx 0,63.$$

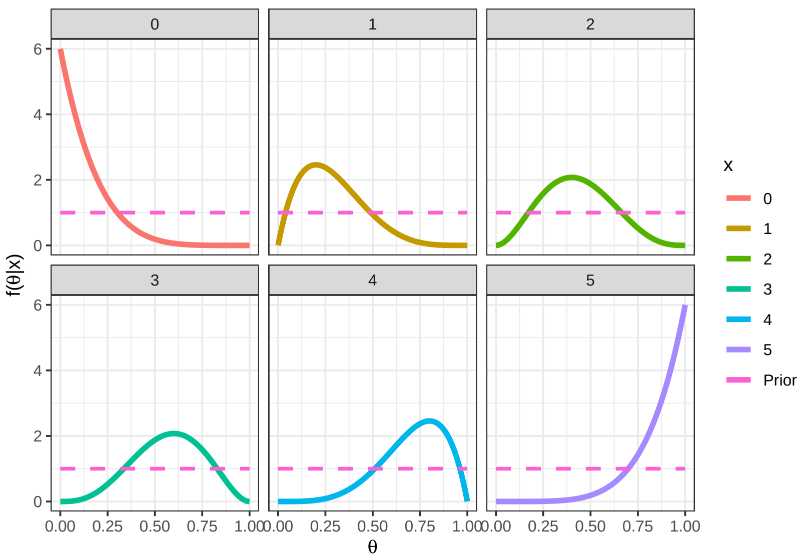
Exemplo 1.c: Considere uma moeda será lançada n vezes mas que θ é desconhecido, de modo que $\Theta = [0,1]$. Para simplificar, vamos assumir $f(\theta) = \mathbb{I}_{[0,1]}(\theta)$, isto é, $\theta \sim Unif(0,1) \sim Beta(1,1)$. Essa priori corresponde ao caso onde você acredita que todos os valores possíveis para θ são igualmente "prováveis", assim como nos exemplos anteriores. Novamente, $X|\theta \sim Bin(n,\theta)$

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{\int_0^1 f(x|\theta)f(\theta)d\theta} = \frac{\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \quad \mathbb{I}_{[0,1]}(\theta)}{\int_0^1 \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}d\theta} = \frac{\dfrac{\Gamma(1+x+1+n-x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(1+n-x)} \quad \theta^x(1-\theta)^{n-x} \quad \mathbb{I}_{[0,1]}(\theta)}{\underbrace{\int_0^1 \dfrac{\Gamma(1+x+1+n-x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(1+n-x)} \quad \theta^x(1-\theta)^{n-x}d\theta}_{1}}$$

$$= \frac{\Gamma(1+x+1+n-x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(1+n-x)} \quad \theta^x(1-\theta)^{n-x} \quad \mathbb{I}_{[0,1]}(\theta).$$

Logo $\theta|x \sim Beta(1+x, 1+n-x)$. Nesse exemplo, o valor "mais provável" (com maior densidade a posteriori) para θ é a moda da distribuição, $Moda(\theta|x) = \dfrac{(1+x)-1}{(1+x)+(1+n-x)-2} = \dfrac{x}{n} = \bar{x}$.

Exemplo 1.d Por fim, suponha que no exemplo anterior, sua opinião a priori é representada por uma distribuição beta qualquer com parâmetros a e b, $a,b > 0$. Desta forma, $X|\theta \sim Bin(n,\theta)$ e $\theta \sim Beta(a,b)$. Calculando a distribuição a posteriori de forma similar ao exemplo anterior, temos que $\theta|X = x \sim Beta(a+x, b+n-x)$.



Suponha que $a = b = 1$ (como no exemplo anterior), $n = 5$ e $x = 2$, de modo que $\theta|x = 2 \sim Beta(3,4)$. Algumas medidas resumo da distribuição posterior para esse exemplo são

- $Moda(\theta|x) = \dfrac{a+x-1}{a+b+n-2} = \dfrac{2}{5} = 0,4;$
- $E[\theta|x] = \dfrac{a+x}{a+b+n} = \dfrac{3}{7} = 0,43;$

- $Med(\theta|x) \approx \dfrac{a+x-1/3}{a+b+n-2/3} = \dfrac{8/3}{19/3} \approx 0,42;$

- $Var(\theta|x) = \dfrac{(a+x)(b+n-x)}{(a+b+n)^2(a+b+n+1)} = \dfrac{12}{392} \approx 0,031.$

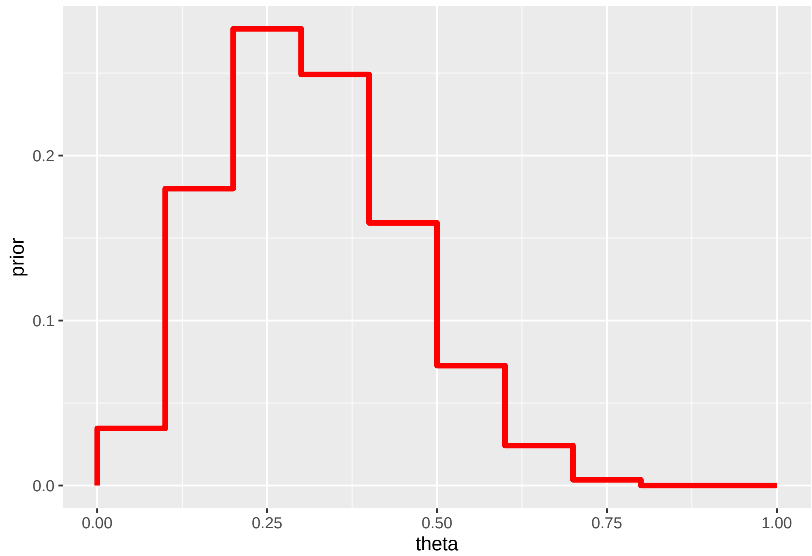
2.4 Distribuição a Priori

- A priori é sempre subjetiva (assim como a escolha do modelo estatístico)!
  - Por exemplo, dizer que os dados seguem uma distribuição normal, é uma escolha subjetiva, muitas vezes baeadas nas facilidades mathemáticas que essa distribuição proporciona.
  - Do mesmo modo, suponha que dois indivíduos que consideram que a distribuição do parêmetro é simétrica, com mesmas suposições sobre média e variância. O primeiro pode optar por representar sua distribuição usando uma distribuição Normal, enquanto o segundo pode utilizar uma distribuição T ou Cauchy.
- Não existe "opinião errada", existem opiniões diferentes, dado o nível de conhecimento e as experiências prévias do indivíduo.
- A priori deve ser sua opinião apenas sobre o parâmetro θ e não deve depender de fatores como o desenho do experimento ou o objetivo do estudo.

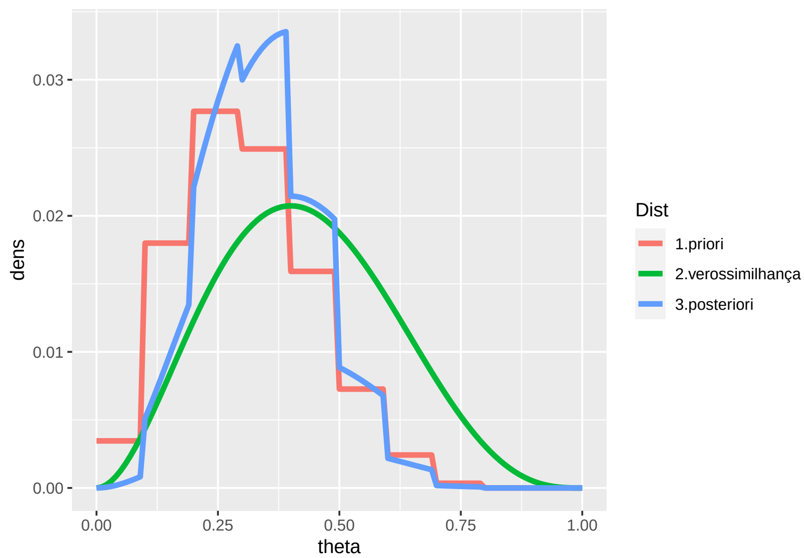
2.4.1 Prioris Baseada na Opinião de um Especialista

2.4.1.1 Método do Histograma

- Muitas vezes, para "extrair" o conhecimento de um especialista, podemos dividir o espaço paramétrico em regiões e pedir para o especialista "ordenar" esses conjuntos, utilizando "pesos" que refletem a crença que o parâmetro esteja em cada uma daquelas regiões.
- **Exemplo 1.** (*Bayesian Computation with R*, Albert,J., pág 27)
  - Seja θ uma proporção desconhecida ($\Theta = [0,1]$);
  - Considere a partição $T = \{[0,0.1),[0.1,0.2),\ldots,[0.9,1]\}$;
  - Suponha que um especialistas atribui pesos $p = (1,5.2,8,7.2,4.6,2.1,0.7,0.1,0,0)$ a esse intervalos;
  - A piori, nesse caso, é o histograma apresentado a seguir.



- Voltando ao exemplo da moeda, suponha novamente que foram observados $x = 2$ sucessos em $n = 5$ lançamentos. A posteriori nesse caso pode ser obtida multiplicando a distribuição a priori pela verossimilhança e "padronizando" a função obtida. Assim:



2.4.1.2 Elicitação de Hiperparâmetros

- Nessa abordagem, a priori é obtida da seguinte maneira:
    1. Escolha uma família de distribuições conveniente. O conceito de "conveniência" aqui pode levar em conta, por exemplo, o suporte da distribuição, se é flexível o suficiente para acomodar diversos tipos de opinião, se permite a obtenção analítica da posteriori e assim por diante;
    2. Obtenha um conjunto de medidas resumo (como média, variância, quantis, etc.);
    3. Utilize as medidas resumo para calcular hiperparâmetros da distribuição escolhida.

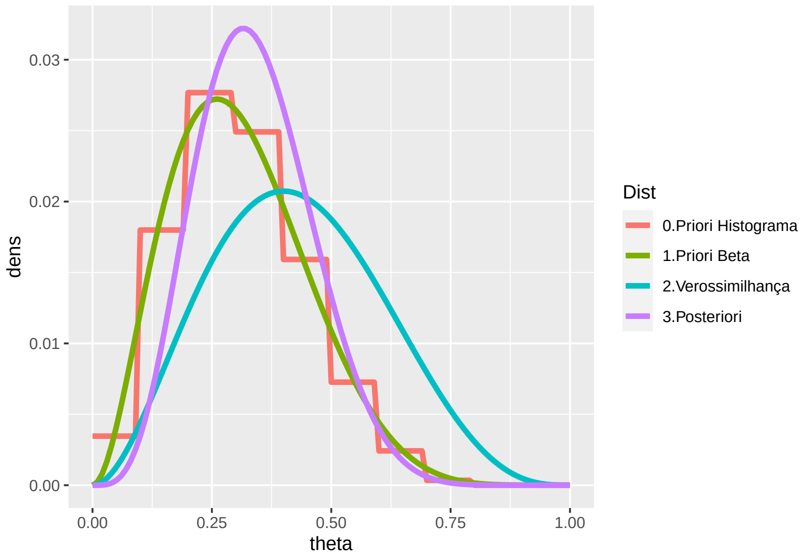
- **Exemplo:** Na seção anterior, a priori dada pelo histograma tem média $m = 0.31$ e variância aproximadamente $v = 0.02$. Podemos utilizar como priori, por exemplo, uma distribuiçaõ beta com essa média e variância, já que a beta tem um suporte conveniente e facilita as contas, como também já vimos. Assim, vamos considerar uma distribuição $Beta(a,b)$ e escolher a e b satisfazendo:

  (i) $E[\theta] = \dfrac{a}{a+b} = m \iff b = \left(\dfrac{1-m}{m}\right) a$

  (ii) $Var(\theta) = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = 0.02 \iff a = \dfrac{m(m-m^2-v)}{v}$

Resolvendo o sistema temos, de forma geral, que $a = \dfrac{m(m-m^2-v)}{v}$ e $b = \dfrac{(1-m)(m-m^2-v)}{v}$.

Assim, no nosso exemplo, teríamos uma $Beta(3, 6.7)$. Além disso, já vimos que, nesse caso, a distribuição a posteriori é $Beta(3+x, 6.7+n-x)$. Considerando novamente $n = 5$ e $x = 2$, temos:



2.4.2 Prioris Conjugadas

Como visto no exemplo da moeda, quando distribuição a priori era $Beta(a,b)$, a posteriori era facilmente obtida e também estava na classe das distribuições $Beta$. Em particular, quando observa-se x sucessos em n realizações de ensaios de Bernoulli, a distribuição a posteriori é $Beta(a+x, b+n-x)$. Isso ocorre pois essa distribuição pertence à uma classe bastante espefícica de distribuições a priori, chamadas distribuições conjugadas.

Definição Seja $\mathcal{P} = \{f(x|\theta) : \theta \in \Theta\}$ uma família de distribuições (condicionais) para X e considere $\mathcal{C} = \{h(\theta|a) : a \in A\}$ uma família de distribuições para θ. Dizemos que (a família) $\mathcal{C}$ é **conjugada** para $\mathcal{P}$ se, $\forall\ h(\theta) \in \mathcal{C}$, $h(\theta|x) \propto f(x|\theta)h(\theta) \in \mathcal{C}, \forall x \in \mathfrak{X}$.

Resultado 1. Seja X v.a. tal que, condicional ao conhecimento de θ, $X|\theta \sim Bin(n,\theta)$. Considere que, a priori, $\theta \sim Beta(a,b)$. Então, $\theta|X = x \sim Beta(a+x, b+n-x)$. Por tanto, a família $\mathcal{C} = \{Beta(a_1, a_2) : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^2\}$ é conjugada para $\mathcal{P} = \{Bin(n,\theta) : \theta \in [0,1]\}$.

- Esse resultado também vale se
  1. $X_1, ..., X_n$ são v.a.s *condicionalmente independentes e identicamente distribuidas* (c.i.i.d.) com $X_i|\theta \sim Ber(\theta)$
  2. $X_i|\theta \sim Geo(\theta)$, $i = 1, ..., n$ *c.i.i.d.*
  3. $X_i|\theta \sim BinNeg(k, \theta)$
     $\theta \sim Beta(a, b) \Rightarrow \theta|X = x \sim Beta(a + s, b + f)$ onde s é o número de sucessos e f é o número de fracassos.

Resultado 2. (*generalização do resultado anterior para o caso onde o número de categorias é maior que 2*)

Seja $X|\theta \sim Multinomial(n, \theta)$, isto é, sua função de probabilidade é dada por

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x_1, x_2, ..., x_k} \prod_{i=1}^{k-1} \theta^i \underbrace{\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i\right)^{n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i}}_{{\theta_k}^{x_k}}$$

onde $\theta_i \in [0, 1]$ com $\sum_{i=1}^{K} \theta_i = 1$, $x_i \in \{0, 1, ..., n\}$ com $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ e $\binom{n}{x_1, x_2, ..., x_k} = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!}$.

Considere que, a priori, $\theta \sim Dirichlet(a_1, ..., a_k)$, $a_i > 0, i = 1, ..., k$, isto é, a f.d.p. a priori para θ é dada por

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{K} a_i)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)...\Gamma(a_k)} \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{a_i - 1} \underbrace{\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i\right)}_{\theta_k}^{a_k - 1}.$$

Então, a distribuição a posteriori para θ é $\theta|X = x \sim Dirichlet(a_1 + x_1, ..., a_k + x_k)$.

Demo: Para verificar o resultado, basta ver que
$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{\int_\Theta f(x|\theta)f(\theta)d\theta} \propto f(x|\theta)f(\theta) \propto \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{(a_i + x_i - 1)} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i\right)^{(a_k + x_k) - 1}$

Resultado 3. seja $X_1, ..., X_n$ v.a. c.i.i.d tais que $X_i|\theta \sim Unif(0, \theta)$ e considere que, a priori,$\theta \sim Pareto(a, b)$. Então $\theta|X = x \sim Pareto\left(a + n, max\{b, x_{(n)}\}\right)$.

Demo:
$f(x|\theta) \overset{ci}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \overset{id}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x_{(n)}) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}_{[x_{(n)}, +\infty)}(\theta)$
onde $x_{(n)} = max\{x_1, ..., x_n\}$.

$f(\theta) = \frac{ab^a}{\theta^{a+1}} \mathbb{I}_{[b,+\infty]}(\theta)$.
Então
$f(\theta|x) \propto f(x|\theta)f(\theta) = \frac{1}{\theta^{a+n+1}} \mathbb{I}_{[x_{(n)},+\infty)}(\theta) \mathbb{I}_{[b,+\infty)}(\theta) = \frac{1}{\theta^{a+n+1}} \mathbb{I}_{[max\{b, x_{(n)}\}, +\infty)}(\theta)$
$\Rightarrow \theta|X = x \sim Pareto(a + n, max\{b, x_{(n)}\})$.

Resultado 4. Seja $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m$ v.a. condicionalmente independentes tais que $X_i|\theta \sim Exp(\theta), i = 1, ..., n$ e $Y_j|\theta \sim Poisson(\theta), j = 1, ..., m$. Considere que, a priori, $\theta \sim Gama(a, b)$. Então $\theta|x, y \sim Gama(a + n + \sum_j y_j \ , \ b + m + \sum_i x_i)$.

Demo:

$f(x, y|\theta) \overset{ci}{=} f(x|\theta)f(y|\theta) \overset{ci}{=} \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \prod_{j=1}^m f(y_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} \prod_{j=1}^m \dfrac{\theta^{y_j} e^{-\theta}}{y_j!} = \dfrac{1}{\prod_{j=1}^m y_j!} \theta^{n+\sum_j y_j} e^{-(m+\sum_i x_i)\theta}$

$f(\theta) = \dfrac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}$

$f(\theta|x, y) \propto f(x, y|\theta)f(\theta) \propto \theta^{[a+n+\sum_j y_j]-1} e^{-[b+m+\sum_i x_i]\theta}$

$\Rightarrow \theta|x, y \sim Gama(a + n + \sum_j y_j, b + m + \sum_i x_i)$

Resultado 5. Seja $\mathcal{P} = \{f(x|\theta) : \theta \in \Theta\}$ e $\mathcal{C} = \{h(\theta|a) : a \in A\}$ uma *família conjugada* para $\mathcal{P}$. Considere $\mathcal{M} = \{h(\theta) = \sum_{i=1}^m w_i h_i(\theta) : h_i \in \mathcal{C} \text{ e } w_i > 0, \ \sum_{i=1}^m w_i = 1\}$. Então $\mathcal{M}$ é *família conjugada* para $\mathcal{P}$.

Demo: Como $\mathcal{C}$ é conjugada para $\mathcal{P}$, para toda função $h_i \in \mathcal{C}$, temos que $f_i(\theta|x) \propto h_i(\theta)f(x|\theta) \in \mathcal{C}$. Então

$$h \in \mathcal{M} \ \Rightarrow \ f(\theta|x) \ \propto \ h(\theta)f(x|\theta) \ \propto \ \sum_{i=1}^m w_i \underbrace{h_i(\theta)f(x|\theta)}_{\in \mathcal{C}} \ \propto \ \sum_{i=1}^m w_i^* f_i(\theta|x) \in \mathcal{M}.$$

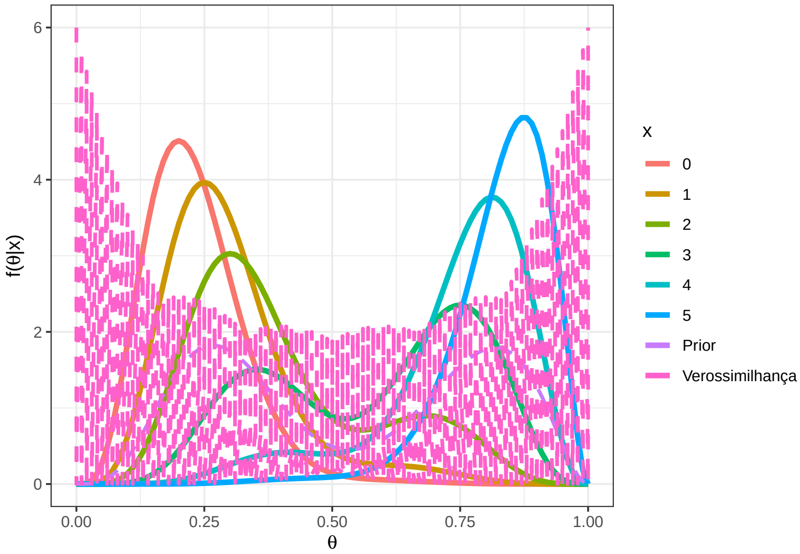
Exemplo. Seja $X|\theta \sim Bin(n, \theta)$ e $f(\theta) = wf_1(\theta) + (1 - w)f_2(\theta)$, onde $f_1 \sim Beta(a_1, b_1)$ e $f_2 \sim Beta(a_2, b_2)$.

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{\int_0^1 f(x|\theta)f(\theta)} = \frac{f(x|\theta)[wf_1(\theta) + (1 - w)f_2(\theta)]}{w \int_0^1 f_1(\theta)f(x|\theta)d\theta + (1 - w) \int_0^1 f_2(\theta)d\theta}$$

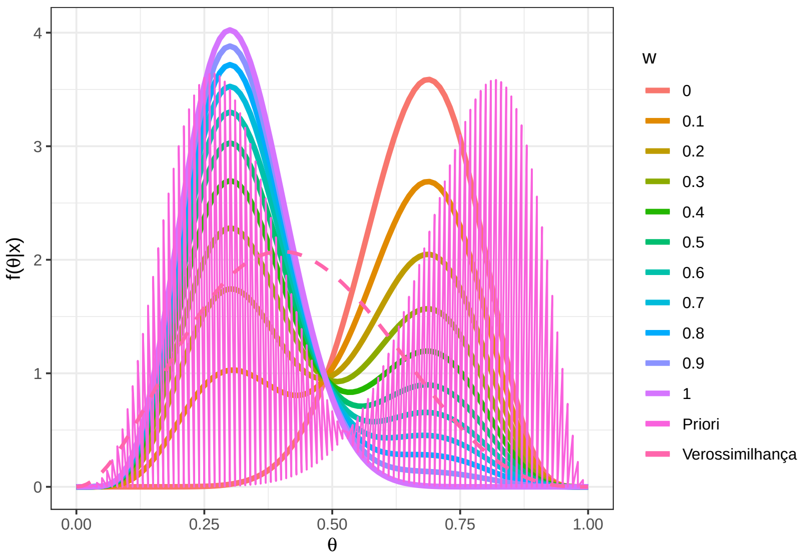
$$\propto \frac{w\binom{n}{x}\frac{\Gamma(a_1+b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)}\theta^{a_1+x-1}(1-\theta)^{b_1+n-x-1} + (1-w)\binom{n}{x}\frac{\Gamma(a_2+b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)}\theta^{a_2+x-1}(1-\theta)^{b_2+n-x-1}}{\underbrace{w\binom{n}{x}\frac{\Gamma(a_1+b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)}\frac{\Gamma(a_1+x)\Gamma(b_1+n-x)}{\Gamma(a_1+b_1+n)}}_{A} + \underbrace{(1-w)\binom{n}{x}\frac{\Gamma(a_2+b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)}\frac{\Gamma(a_2+x)\Gamma(b_2+n-x)}{\Gamma(a_2+b_2+n)}}_{B}}$$

$$\propto \underbrace{\frac{A}{A+B}}_{w^*} Beta(a_1 + x, b_1 + n - x) + \underbrace{\frac{B}{A+B}}_{1-w^*} Beta(a_2 + x, b_2 + n - x)$$

Primeiramente, suponha que $n = 5$, e temos uma mistura das distribuições $Beta(5, 12)$ e $Beta(10, 3)$, com $w = 0.5$. O gráfico a seguir apresenta as distribuições a priori, a verossimilhança e a posteriori para cada possível valor de x em $\{0, 1, \dots, 5\}$.



Agora, suponha que $n = 5$ e foi observado $x = 2$. Novamente, considere a mistura das distribuições $Beta(5, 12)$ e $Beta(10, 3)$ mas agora com pesos w variando no conjunto $\{0, 0.1, \dots, 0.9, 1\}$.



Capítulo 3

Apendice: Breve Resumo de Medida e Probabilidade

3.1 Breve Resumo de Medida e Probabilidade

- Ω: espaço amostral (um conjunto não vazio).
- $\mathcal{A}$: *σ-álgebra de subconjuntos* de Ω, isto é,

  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
  3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}$.

- Os elementos de $\mathcal{A}$ são chamados de *eventos* e serão denotados por $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, ...$
- $(\Omega, \mathcal{A})$: *espaço mensurável.*
- Usualmente, denota-se a σ-álgebra gerada por um conjunto $\mathcal{C}$ como $\sigma(\mathcal{C})$. Por exemplo:

  - $\sigma(\Omega) = \{\emptyset, \Omega\}$ (σ-ágebra trivial);
  - Para $A \subset \Omega$, $\sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$;
  - $\sigma(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (partes de $\mathbb{N}$, todos o subconjuntos de $\mathbb{N}$);
  - $\sigma\left(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ (borelianos de $\mathbb{R}$)

- $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ é uma *medida* se

  1. $\mu(\emptyset) = 0$;
  2. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ com $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $\mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} \mu\left(A_i\right)$.

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é chamado de *espaço de medida.*

Exemplo 1 (medida de contagem): Seja Ω um conjunto não vazio e $A \subseteq \Omega$. Defina $\mu(A) = |A|$ como o número de elementos (cardinalidade) de A. Assim, $\mu(\Omega) > 0$, $\mu(\emptyset) = 0$ e, se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de eventos disjuntos, então $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$. Note que $\mu(A) = \infty$ é possivel se Ω tem infinitos elementos.

Exemplo 2 (medida de Lebesgue): Seja $\Omega = \mathbb{R}$ e $A \subseteq \Omega$ um intervalo. Se A é limitado, defina $\mu(A)$ como o comprimento do intervalo A. Se A não é limitado, $\mu(A) = \infty$. Note que $\mu(\mathbb{R}) = \infty$, $\mu(\emptyset) = 0$ e, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2$ é um intervalo (ou uma união de intervalos disjuntos), então $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Exemplo 3: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função contínua e não nula. Para cada intervalo A, defina $\mu(A) = \int_A f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x)f(x)dx$. Então, $\mu(\mathbb{R}) > 0$, $\mu(\emptyset) = 0$ e, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2$ é um intervalo (ou uma união de intervalos disjuntos), então $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Definição: Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ_1 e μ_2 medidas nesse espaço. Dizemos que μ_2 é *absolutamente contínua* com relação à μ_1 se, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu_1(A) = 0 \ \Rightarrow \ \mu_2(A) = 0$.

Nesse caso, dizemos que μ_2 é dominada por μ_1 ou que μ_1 é uma medida dominante para μ_2 e denotamos $\mu_2 \ll \mu_1$.

Teorema (de Radon-Nikodin): Seja $\mu_2 \ll \mu_1$ com μ_1 σ-finita. Então, $\exists f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu_2(A) = \int_A f(x)d\mu_1(x).$$

Além disso, se $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é μ_2-integrável, então

$$\int g(x)d\mu_2(x) = \int g(x)f(x)d\mu_1(x).$$

A função $f = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}$ é chamada de derivada de Radon-Nikodin da medida μ_2 com relação à medida μ_1 e é única μ_1-q.c.

- $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ é uma *medida de probabilidade* se
  1. $P(\Omega) = 1$;
  2. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ com $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$.
- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: espaço de probabilidade
- Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ e $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ dois espaços mensuráveis. Se $X : \Omega \longrightarrow \mathfrak{X}$ é chamado de *quantidade aleatória* se uma função mensurável, isto é, se $\forall B \in \mathcal{F}$, $A = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Se $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ (σ-álgebra de Borel), X é chamado *variável aleatória*.
- A medida de probabilidade induzida por X recebe o nome de *distribuição de* X:

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$$

Exemplo 1: Seja $\Omega = \mathfrak{X} = \mathbb{R}$ com a σ-álgebra de Borel e f uma função não negativa tal que $\int f(x)dx = 1$. Defina $\mu(A) = \int_A f(x)dx$ e $X(\omega) = \omega$. Então, X é uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade (f.d.p.) f e $\mu_x = \mu$. Além disso, μ_X é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue ($\mu_X \ll \lambda$) e $\frac{d\mu_X}{d\lambda} = f$.

Exemplo 2: Seja $\Omega = \mathbb{R}$ com a σ-álgebra de Borel, $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, ...\}$ um conjunto enumerável. Seja f uma função não negativa definida em $\mathfrak{X}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_1) = 1$. Defina $\mu(A) = \sum_{\{i:x_i \in A\}} f(x_i)$. Então X é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade (f.d.p.) f e $\mu_X = \mu$. Além disso, μ_X é absolutamente contínua com relação à medida de contagem ($\mu_X \ll \nu$) e $\frac{d\mu_X}{d\nu} = f$.

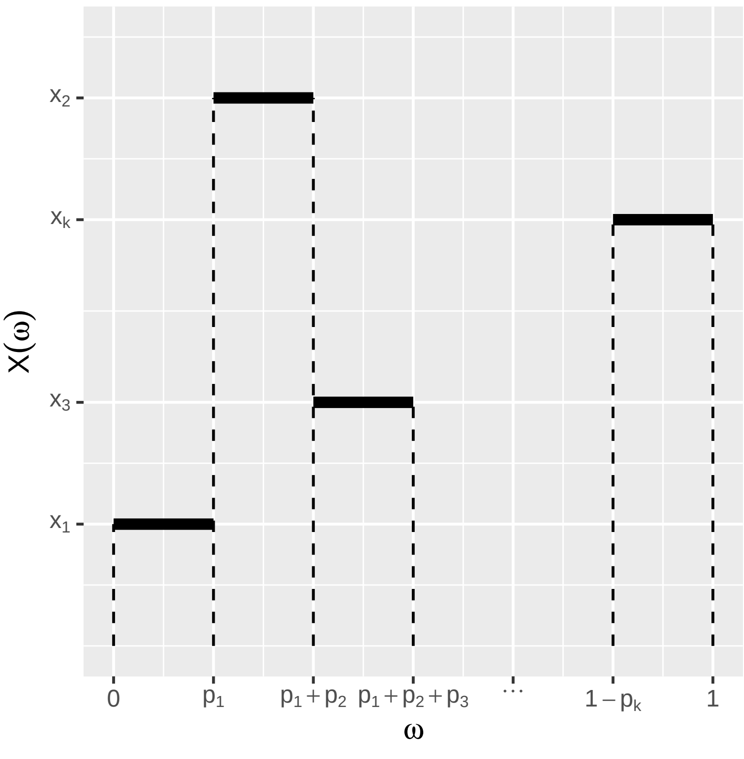
3.2 Valor Esperado de X (OU uma ideia da tal Integral de Lebesgue)

Por simplicidade, considere $\Big(\Omega = [0,1]\ ,\ \ \mathcal{A} = \mathcal{B}\left([0,1]\right)\ ,\ \ P = \lambda\Big)$.

Considere uma variável aleatória discreta $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, assumindo valores em $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ com probabilidades $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ com $x_i \geq 0, \forall i$. Já vimos que o *valor esperado* (ou *esperança*) de X é $E[X] = \sum x_i P(X = x_i) = \sum x_i p_i$.

Podemos definir essa v.a. como

$$X(\omega) = \begin{cases} x_1, & 0 & \leq \omega \leq & p_1 \\ x_2, & p_1 & < \omega \leq & p_1 + p_2 \\ \vdots \\ x_j, & \sum_{i=1}^{j-1} p_j & < \omega \leq & \sum_{i=1}^{j} p_j \\ \vdots \\ x_k, & 1 - p_k & < \omega \leq & 1 \end{cases}$$



Assim, temos que

- $P_X(X = x_1) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_1\}) = \lambda([0, p_1]) = p_1$,
- $P_X(X = x_j) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}) = \lambda\left(\left[\sum_{i=1}^{j-1} p_i, \sum_{i=1}^{j} p_i\right]\right) = p_j$, $j \in \{2, \ldots, k\}$.

Definição: Uma função mensurável (v.a.) $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é dita *simples* se assumir um número finito de valores.

Definição: Considere $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ v.a. assumindo valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ e $A_1, A_2, \ldots, A_k$ eventos disjuntos em $\mathcal{A}$. Seja $X(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \mathbb{I}_{A_i}(\omega)$, uma função simples com $A_i = X^{-1}(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$. A *integral de Lebesgue* de X em relação à medida P é

$$E[X] = \int_\Omega X dP = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i).$$

3.3 Propriedades da integral (*de Lebesque*) de X (v.a) em relação a P

P1. $\int_\Omega X dP \geq 0$,

P2. $\int_\Omega cX dP = c \int_\Omega X dP$.

P3. $\int_\Omega (X|Y) dP = \int_\Omega X dP + \int_\Omega Y dP$

Demo (P1): Segue de $x_i \geq 0$ e $P(A_i) \geq 0$.

Demo (P2):
Para X v.a. temos
$X = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \mathbb{I}_{A_i}$ e cX (também v.a.)
$cX = \sum_{i=1}^{k} (cx_i) \, \mathbb{I}_{A_i}$, logo
$\int_\Omega cX dP = \sum_{i=1}^{k} (cx_i) P(A_i) = c \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i) = c \int_\Omega X dP$

Demo (P3):
$X = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \mathbb{I}_{A_i}$ e $Y = \sum_{j=1}^{l} y_j \, \mathbb{I}_{B_j}$.

$$\begin{aligned} X + Y &= \sum_{i=1}^{k} x_i \, \mathbb{I}_{A_i} + \sum_{j=1}^{l} y_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} x_i \, \mathbb{I}_{A_i \cap B_j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} y_j \, \mathbb{I}_{A_i \cap B_j} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow X + Y = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (x_i + y_j) \, \mathbb{I}_{A_i \cap B_j}$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega (X + Y) dP &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (x_i + y_j) P(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (x_i) P(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (y_j) P(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i) + \sum_{j=1}^{l} y_j P(B_j) \\ &= \int_\Omega X dP + \int_\Omega Y dP. \end{aligned}$$

Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável não negativa e considere o conjunto de funções $\mathcal{C}_X = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad f \text{ simples}, f \leq x\}$.

(INCLUIR GRÁFICOS DE f1 e f2)

Definimos, nesse caso, o *valor esperado de X* por
$E[X] = \int_\Omega XdP = sup\{\int_\Omega fdP : f \in \mathcal{C}_X\}$.

Resultado

$X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, com $X \leq Y$. Então $E[X] \leq E[Y]$.

> **Demo:** Como $X \leq Y$ (isto é, $X(w) \leq Y(w)\ \forall w \in \Omega$), $\mathcal{C}_X \subseteq \mathcal{C}_Y$
> $\Rightarrow sup\{\int_\Omega fdP : f \in \mathcal{C}_X\} \leq sup\{\int_\Omega fdP : f \in \mathcal{C}_Y\} \Rightarrow \int_\Omega XdP \leq \int_\Omega YdP$.

Definição: Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e $E \in \mathcal{A}$ definimos $E(X\ \mathbb{I}_E) = \int_E XdP = \int_\Omega X\ \mathbb{I}_E dP$. Se $E, F \in \mathcal{A}$ com $E \subseteq F$, $\int_E XdP \leq \int_F xdP$.

Resultado: Para toda função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, existe uma sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ de funções simples não-negativas tais que $f_n(w) \leq f_{n+1}(w)$, $\forall w \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$ com $f_n(w) \uparrow X(w)$, $\forall w \in \Omega$.

Exemplo de sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ atendendo as condições anteriores

Para cada n, considere $1 + n2^n$ conjuntos em $\mathcal{A}$:

- $E_j^n = \left\{w \in \Omega : \dfrac{j}{2^n} \leq X(w) \leq \dfrac{j+1}{2^n}\right\}$, $j = 0, 1, ..., n2^n - 1$.
- $E_{n2^n}^n = \{w \in \Omega : X(w) \geq n\}$

e defina $X_n(w) = \sum_{j=0}^{n2^n} \dfrac{j}{2^n}\ \mathbb{I}_{E_j^n}(w)$. Pode-se provar que $(X_n)_{n\geq 1}$ é tal que

- X_n é simples, $\forall n \geq 1$
- $X_n \leq X_{n+1}$
- $X_n(w) \uparrow X(w)$

(INCLUIR GRÁFICOS DA CONVERGÊNCIA)

Propriedades: Se $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ são funções mensuráveis (v.a.) então

(1) $\int_\Omega cXdP = c\int_\Omega XdP, c \geq 0$

(2) $\int_\Omega (X + Y)dP = \int_\Omega XdP + \int_\Omega YdP$

Demo (1) Seja $X_n \uparrow X$, $X_n \geq 0$ simples. Então $cX_n \uparrow cX$, $cX_n \geq 0$, simples.

$$\begin{aligned}\int_\Omega cXdP &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega cX_n dP \\ &= \lim_{n\to\infty} c\int_\Omega X_n dP \\ &= c\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP \\ &= c\int_\Omega XdP.\end{aligned}$$

Demo (2) Exercício.

Exemplo: Suponha que X assume valores em $\mathbb{N}$. Pode-se escrever $X = \sum_{i=1}^{\infty} i\ \mathbb{I}_{A_i}$, com $A_i = x^{-1}(\{i\})$.

Defina $X_n = \sum_{i=1}^{n-1} i\ \mathbb{I}_{A_i} + n\ \mathbb{I}_{\underset{j=n}{\cup} A_j}$. Então X_n é simples, $X_n \geq 0$, $X_n \leq X_{n+1}$ e $X_n \uparrow X$, de modo que $E(X) = \int_\Omega XdP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP$. Além disso,

$$\begin{aligned}\int_\Omega X_n dp &= \sum_{i=1}^{n-1} iP(A_i) + nP\left(\underset{j=n}{\cup} A_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} iP(X=i) + nP(X \geq n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} P(X=i) + nP(X\geq n) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1} P(X=i) + nP(X\geq n) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} P(j \leq X \leq n-1) + nP(X \geq n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(X \geq j),\end{aligned}$$

então, $E(X) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P(X\geq j) = \sum_{j=1}^{n} P(X \geq j)$.

Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $X^-, X^+ : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dados por

- $X^- = max\{-X, 0\}$ (parte negativa de X) e
- $X^+ = max\{X, 0\}$ (parte positiva de X)

(INCLUIR GRÁFICO DAS PARTES POSITIVAS E NEGATIVAS DE X)

Note que $X = X^+ - X^-$

Se $\int_\Omega X^+ dP < \infty$ ou $\int_\Omega X^- dP < \infty$, definimos

$E(X) = \int XdP = \int_\Omega X^+ dP - \int_\Omega X^- dP = E(X^+) - E(X^-)$.

Além disso, seja $|X| = X^+ + X^-$. Então $E[|X|] < \infty$ se $E(X^+) < \infty$ e $E(X^-) < \infty$, e, nesse caso, dizemos que X é *integrável*.

Propriedades:

(1) $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y) >$ **Demo:** $X \leq Y \Rightarrow \begin{cases} X^+ \leq Y^+ \\ X^- \geq Y^- \end{cases}$
$E(X) = E(X^+) - E(X^-) \leq E(Y^+) - E(Y^-) = E(Y)$.

(2) $c \in \mathbb{R}$, $E(cX) = cE(X)$
> **Demo:** $(cX)^+ = \begin{cases} cX^+, \ c \geq 0 \\ (-c)X^-, \ c < 0 \end{cases}$
$(cX)^- = \begin{cases} cX^-, \ c \geq 0 \\ (-c)X^+, \ c < 0 \end{cases}$
Para $c < 0$, $E[cX] = E[(X)^+] - E[(cX)] = E[(-c)X^-] - E[(-c)X^+] = (-c)E[X^-] + cE[X^+]$ $= cE[X]$.

(3) X, Y integráveis. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
> **Demo:** $\int_\Omega X^+ + Y^+ dP < \infty$ ou $\int_\Omega X^- + Y^- dP < \infty$
$X + Y = (X+Y)^+ - (X+Y)^- = X^+ - X^- + Y^+ - Y^-$
$\Rightarrow (X+Y)^+ + X^- + Y^- = X^+ + Y^+ + (X+Y)^-$
$\Rightarrow \int_\Omega (X+Y)^+ dP + \int_\Omega X^- dP + \int_\Omega Y^- dP$
$= \int_\Omega X^+ dP + \int_\Omega Y^+ dP + \int_\Omega (X+Y)^- dP$.
$|X+Y| = |X^+ - X^- + Y^+ - Y^-| \leq X^+ + X^- + Y^+ + Y^-$
$\Rightarrow \underbrace{\int_\Omega (X+Y)^+ dP - \int_\Omega (X+Y)^- dP}_{\int_\Omega (X+Y) dP} = \underbrace{\int_\Omega X^+ dP - \int_\Omega X^- dP}_{\int_\Omega X dP} + \underbrace{\int_\Omega Y^+ dP - \int_\Omega Y^- dP}_{\int_\Omega Y dP}.$

3.4 Funções de Variáveis Aleatórias

Considere agora uma v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma função real $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina $Y = g(X)$. Então

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_Y)$$

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \overset{Y=g(X)}{\longrightarrow} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_Y)$$

Logo, se g é uma função mensurável, $Y = g(X)$ também é v.a. e as medidas induzidas por X e Y são

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P\left(\{w \in \Omega : X(w) \in A\}\right)$$

$$P_Y(B) = P_X(g^{-1}(B)) = P_X\left(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \in B\}\right) = P\left(\{w \in \Omega : g\left(X(w)\right) \in B\}\right).$$

Assim, uma pergunta natural é como obter o valor esperado de Y.

$E(Y) = \int_\Omega Y dP = \int_\Omega g(X) dP \overset{?}{=} \int_\mathbb{R} g dP$.

(1) Seja g simples $g = \sum_{i=1}^k g_i \, \mathbb{1}_{B_i}$, $g_1, ..., g_k \in \mathbb{R}$ e $B_1, ..., B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\int_\Omega Y dP = \int_\Omega g(x) dP = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^k g_i \, \mathbb{1}_{B_i}(x)\right) dP = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^k g_i \, \mathbb{1}_{X^{-1}(B_i)}\right) dP \overset{def}{=} \sum_{i=1}^k g_i P(X^{-1}(B_i)) =$ $\sum_{i=1}^k g_i P_X(B_i) = \int_\mathbb{R} \left(\sum_{i=1}^k g_i \, \mathbb{1}_{B_i}\right) dP = \int_\mathbb{R} g dP_X$.

(2) Seja g não negativa $g \geq 0$, e $(g_n)_{n \geq 1}$, $g_n \geq 0$ simples tal que $g_n \uparrow g$. Como g_n é simples:

$\int_\Omega g_n(x) dP = \int_\mathbb{R} g_n dP_X \overset{limite}{\Rightarrow} \int_\Omega g(x) dP = \int_\mathbb{R} g dP_X$.

(3) Agora $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\int_\Omega g^+(x)dP = \int_\mathbb{R} g^+ dP_X$,

$\int_\Omega g^-(x)dP = \int_\mathbb{R} g^- dP_X$,

logo, $\int_\Omega g(x)dP = \int_\mathbb{R} g dP_X$.

Suponha agora X v.a. discrtea assumindo valores em $\{x_1, x_2, ...\}$ com probabilidade 1.

$P(X \in A) = \sum\limits_{i:x_i \in A} P(X = x_i)$

Vamos "verificar" que $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P(X = x_i)$

(1) g simples

$g = \sum_{i=1}^{k} g_i \, \mathbb{I}_{B_i}$, $g_1, ..., g_k \in \mathbb{R}$ $B_1, ..., B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$E[g(X)] = ... \sum_{i=1}^{k} g_i P(X \in B_i) = \sum_{i=1}^{k} g_i \sum_{j:x_j \in B_i}^{k} P(X = x_j) = \sum_{i=1}^{k} g_i \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_i}(x_j)P(X = x_j) =$
$\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} g_i \, \mathbb{I}_{B_i}(x_j)\right)}_{g(x_j)} P(X = x_j)$.

(2) $g \geq 0$, $g_n \geq 0$, g_n simples tal que $g_n \uparrow g$

$\int_\Omega g(X)dP = \underset{n\to\infty}{lim} \int_\Omega g_n(X)dP = \underset{n\to\infty}{lim} \left\{\sum_{j=1}^{\infty} g_n(x_j)P(X = x_j)\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j)P(X = x_j)$

Suponha agora X v.a. absolutamente contínua com densidade f_X,

$P(X \in A) = \int_A f_X(t)dt$.

Assim, em geral, vale que:

X discreto: $E[g(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j)P(X = x_j)$ e se

X contínua (absolutamente): $E[g(X)] = \int_\mathbb{R} g(x_j)f_X(x)dx$

Esses resultados valem também se $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ e $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemplos

1. $X \sim Poisson(\lambda)$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \Rightarrow E(X) = \lambda.$$

2. Ainda no Exemplo, considere $g(\mu) = e^\mu$

$$E[g(x)] = \sum_{x=0}^{\infty} g(x)P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda e}(\lambda e)^x}{x!}}_{1} =$$
$e^{\lambda e - \lambda} = e^{\lambda(e-1)}$.

3. $X \sim Beta(a.b)$ $E[g(X)]$. $g(x) = x^n(1-x)^m$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 x\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+1+b)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 \frac{\Gamma(a+1+b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}x^{(a+1)-1}(1-$$
$$x)^(b-1)dx = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+1+b)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

Definição: Uma função $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ é uma função de distribuição (f.d.) se

(i) F é não-decrescente e contínua à direita;
(ii) $\lim_{x\downarrow-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\uparrow+\infty} F(x) = 1$

Preposição: Se X é uma v.a., então $F_X(x) = P_X(X \leq x)$ é uma f.d. Recíprocamente, se F_X é uma f.d, então existe uma v.a. X com f.d. F_X.

- Podemos usar uma f.d. F para criar uma medida em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Defina $P((a,b])) = F(b) - F(a)$ e extenda essa medida para a σ-álgebra usando o teorema de extensão de Caratheodory.
- Reciprocamente, se P é uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ então $F(x) = P((-\infty, x])$ é uma f.d.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuravel, $\int f(x)dF(x) = \int f(x)dP(x)$
- Se P é uma probabilidade em $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ então uma f.d. conjunta pode ser definida por $F(x_1, ..., x_k) = P((-\infty, x_1] \times ... \times (-\infty, x_k])$, f.d. conjunta do vector aleatório $X = (X_1, ..., X_K)$.

Definição: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espaço de probabilidade e $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}, \mathcal{V})$ espaço mensurável. Considere $X : \Omega \longrightarrow \mathfrak{X}$ uma v.a. e P_X a medida induzida por X de P, i.e. $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$. Suponha que $P_X << \mathcal{V}$. Então, a derivada de Radom-Nicodin $f_X = \frac{d\mu_X}{d\mathcal{V}}$ é a densidade de X com respeito a $\mathcal{V}$.

Proposição: Se $h : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e $f_X = \frac{dP_X}{d\mathcal{V}}$, então $\int h(x)dF_X(x) = \int h(x)f_X(x)d\mathcal{V}$.

3.5 Aula 6

Exemplos (continuação)

4. $X \sim Geo(\theta)$

$P(X = x) = (1-\theta)^{x-1}\theta \ \mathbb{I}_{\{1,2...\}}(x)$ como X é inteira não-negativa, vale que:

$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} P(X = j) \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (1-\theta)^{j-1}\theta \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} (1-\theta)^{i-1} \Rightarrow$
$E(x) = \frac{1}{\theta}$

Se X é contínua não-negativa, então
$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > t)dt.$

Exemplo

$X \sim Exp(\lambda)$

$f_X(x) = \lambda e^{\lambda x} \ \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$

$P(X > t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t}$

Assim, $E(X) = \int_0^{\infty} P(X > t)dt = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}_{1} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$

5. (X, Y) absolutamente contínuo com densidade

$f(x,y) = \frac{1}{y} e^{-y} \ \mathbb{I}_{(0,y)}(x) \ \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y)$; $g(x,y) = xy$

$E(g(X,Y)) = ?$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} xy\frac{1}{y}e^{-y}dx \right] dy = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{2} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)}{1^3} \int_0^{\infty} \frac{1^3}{\Gamma(3)} y^2 e^{-y} dy \Rightarrow$
$E(XY) = 1$

6. $(X_1, ..., X_k) \sim DIR(a_1, ...a_k)$

$g(X_1, ..., X_k) = X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_k^{n_k} (1 - X_1 - ... - X_k)^{n_0}$

$E[g(X_1, ..., X_k)] = \int_{S_k} X_1^{n_1} \cdots X_k^{n_k} (1 - X_1 - ... - X_k)^{n_0} \underbrace{\frac{\Gamma(a_0 + a_1 + ... + a_k)}{\Gamma(a_0)\Gamma(a_1)...\Gamma(a_k)}}_{c(a_0, a_1, ..., a_k)} x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2 - 1} ... x_k^{a_k - 1} (1 - x_1 - ... - x_k)^{a_0 - 1} dx,$

onde $S_k = \{(y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}_+^K : y_1 + ... + y_k \leq 1\}$

Então, $E[g(y_1, ..., y_k)] = c(a_0, a_1, ..., a_k) \int_{S_K} x_1^{a_1 + n_1 - 1} ... x_k^{a_k + n_k - 1} (1 - x_1 - ... - x_k)^{a_0 + n_0 - 1} dx$

$\Rightarrow E[g(x_1, ..., x_k)] = \dfrac{c(a_0, ..., a_k)}{c(a_0 + n_0, a_1 + n_1, ..., a_k + n_k)}$

7. n lançamentos de uma moeda. Dizemos que ocorre um “rum” de tamanho k se são observadas k caras consecutivas.

X : Número de lançamentos de “run” de tamanho k observados.

$n = 4 \ cc\bar{c}c$

$k = 2 \ ccc\bar{c}$

Definimos

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se ocorre rum de tamanho k iniciando no i=ésimo lançamento} \\ 0 & c.c. \end{cases}$

$X = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_i$

$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} X_i\right) = = \sum_{i=1}^{n-k+1} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n-k+1} \{1P(X_i = 1) + 0P(X_i = 0)\} = \sum_{i=1}^{n-k+1} P(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{n-k+1} p^k \Rightarrow$

$E(X) = (n - k + 1)p^k.$

8. Problema dos pareaentos (n objetos)

X : NÚmero de pareamentos

$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ onde

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{há areamento na i-ésima posição} \\ 0, & c.c. \end{cases}$

$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(n-1)!}{n!} \Rightarrow E(X) = 1$

Resultado: $X_1, X_2, ..., X_k$ são v.a. independentes com $E(X_i) < \infty$, $i = 1, ..., k$

Então,

$E(X_1 * X_2 \cdots * X_k) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_k)$

Resultado $(\Omega, \mathcal{A})$ espaço mensurável.

$P_1, P_2 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1)$ probabilidades.

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v.a.

$\int_\Omega X dP1$ e $\int_\Omega X dP2$

$P = \alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2$, $0 < \alpha < 1$.

Então; $\int_\Omega X dP = \alpha \int_\Omega X P_1 + (1 - \alpha) \int_\Omega X dP_2$

1. X simples

$X = \sum_{i=1}^{k} X_i \, \mathbb{I}_{A_i}$

$\int_\Omega XdP = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i[\alpha P(A_i) + (1-\alpha)P_2(A_i)] = \alpha \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i) + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{k} x_i P_2(A_i) = \alpha \int_\Omega XdP_1 + (1-\alpha)\int_\Omega XdP_2$

2. $X \geq 0$

$X_n \uparrow X$, $X_n \geq 0$, simples.

$\int_\Omega XdP = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP = \lim\limits_{n\to\infty} \left\{\alpha \int_\Omega X_n dP_1 + (1-\alpha)\int_\Omega X_n dP_2\right\} = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP_1 + (1-\alpha)\int_\Omega X_n dP_2 = \alpha \int XdP_1 + (1-\alpha)\int_\Omega XdP_2$.

$P_1(\{x_1, x_2, ..., \}) = 1$, P_2 "possui" função densidade de probabilidade f_x, e $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $P(X \in A) = \alpha P_1(X^{-1}(A)) + (1-\alpha)P_2(X^{-1}(A))$

Então:

$E(X) = \int_\Omega XdP = \alpha \int_\Omega XdP_1 + (1-\alpha)\int_\Omega XdP_2 = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_1(X = x_i) + (1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$

Exemplo

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{15} + \dfrac{2}{3}t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

IMAGEM FA F

$\dfrac{1}{15} = P(X = 0) = \underbrace{\alpha}_{1/3} P_1(X = 0) \Rightarrow P_1(X = 0) = \dfrac{1}{5}$, e portanto, $P_1(X = 1) = \dfrac{4}{5}$

$E(X) = \alpha \int_\Omega XdP_1 + (1-\alpha)\int_\Omega XdP_2 = \dfrac{1}{3}\left\{0 * \dfrac{1}{5} + 1 * \dfrac{4}{5}\right\} + \dfrac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \dfrac{1}{3} * \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3}\int_0^1 xdx = \dfrac{4}{15}\dfrac{5}{15} = \dfrac{9}{15}$.

Exemplo

$(\Omega = [0,1]^2, \mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1]^2), P = \lambda)$

$$X(w) = \begin{cases} x_1, & w_1 \leq 1/2 \quad (A_1) \\ x_2, & w_2 > 1/2 \quad (A_2) \end{cases}$$

$$Y(w) = \begin{cases} y_1, & w_1 \leq w_2 \quad (B_1) \\ y_2, & w_1 > w_2 \quad (B_2) \end{cases}$$

IMAGEM DAS PARTIÇÕES

$P_X(x_1) = P(X^{-1}(\{x_1\})) = P(w \in A_1) = \lambda(A_1) = 1/2$

$P_Y(y_1) = P(Y^{-1}(\{y_1\})) = P(w \in B_1) = \lambda(B_1) = 1/2$

$\sigma_X = \{\phi, A_1, A_2, \Omega\} \subseteq \mathcal{B}([0,1]^2)$ (é sub-σ-álgebra)

$\sigma_Y = \{\phi, B_1, B_2, \Omega\} \subseteq \mathcal{B}([0,1]^2)$

Seja $Z(w) = (X(w), Y(w)) = (X,Y)(w)$, $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $Z(w) = \sum_{i=1}^{4} z_i \, \mathbb{I}_{C_i}(w)$ é função simples.

$$Z(w) = \begin{cases} (x_1, y_1) = z_1, & w \in A_1 \cap B_1 = C_1 \\ (x_1, y_2) = z_2, & w \in A_1 \cap B_2 = C_2 \\ (x_2, y_1) = z_3, & w \in A_2 \cap B_1 = C_3 \\ (x_2, y_2) = z_4, & w \in A_2 \cap B_2 = C_4 \end{cases}$$

$P_Z((\underbrace{x_1, y_2}_{z_2})) = P_Z((\underbrace{x_2, y_1}_{z_3})) = \dfrac{1}{8} = \lambda(\underbrace{A_1 \cap B_2}_{C_2}) = \lambda(\underbrace{A_2 \cap B_1}_{C_3})$

$P_Z((\underbrace{x_1, y_1}_{z_1})) = P_Z((\underbrace{x_2, y_2}_{z_4})) = \dfrac{3}{8} = \lambda(\underbrace{A_1 \cap B_1}_{C_1}) = \lambda(\underbrace{A_2 \cap B_2}_{C_4})$

$P_Z(z_1|z_1 \cap z_3) = \dfrac{P_Z(z_1 \cap (z_1 \cup z_3))}{P_Z(z_1 \cup z_3)} = \dfrac{P_Z(z_1)}{P_Z(z_1) + P_Z(z_3)} = \dfrac{3/8}{3/8 + 1/8} = \dfrac{3}{4} = P_Z((X = x_1, Y = y_1)|\overbrace{X \in \{x_1, x_2\}}^{\Omega}, Y = y_1) = P_{X|Y=y_1}(X = x_1|Y = y_1) = 1 - P_{X|y_1}(X = x_2|Y = y_1)$.

$P_{X|y_1}(X = x_1|Y = y_2) = \dfrac{1/8}{4/8} = \dfrac{1}{4}$

Pela aula passada, podeos calcular $E[X|Y = y_1]$ como $E[X|Y = y_1] = \int x dP_{X|Y=y_1}(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i P_{X|Y=y_1}(x_i|y_1)$

Por exemplo, se $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = 2$, temos $E[X|Y = 1] = 1 * \dfrac{3}{4} + 2 * \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$

Analogamente,

$E[X|Y = 2] = 1 * \dfrac{1}{4} + 2 * \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$

$E[X|Y](w) = \begin{cases} 5/4, & w \in B_1 \\ 7/4, & w \in B_2 \end{cases}$

$E[X|Y] = E[X|\sigma_X]$.

3.6 Aula 7

3.6.1 Probabilidade Condicional

Motivação

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ é bem definido se $P(B) > 0$.

Exemplo Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v.a. e considere um experimento em dois estagios onde seleciona-se $X \sim F_X$ e, dado $X = x$, $0 \leq x \leq 1$, uma moeda com probabilidade x é lançada n vezes. Nesse caso, é natural definir $Y|X = x \sim Bin(n, x)$ mesmo que $P(X = x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

3.6.2 Teorema da Medida Produto (para medidas de probabilidade)

Seja $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ um espaço de probabilidade e $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ um espaço mensurável. Para cada $w_1 \in \Omega_1$, defina uma medida de probabilidade $\mu(w_1, .)$ em $\mathcal{A}_2$. Assuma que, para cada $B \in \mathcal{A}_2$, $\mu(., B)$ também é $\mathcal{A}_1$-mensurável. Então, existe uma única medida de probabilidade P em $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ tal que $P(A \times B) = \int_A \mu(w_1, B) dP_1(w_1)$, $\forall A \in \mathcal{A}_1$, $\forall B \in \mathcal{A}_2$.

Se $D(w_1)$ denota uma secção de D em w_1, isto é, $D(w_1) = \{w_2 \in \Omega_2 : (w_1, w_2) \in D\}$, $D \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, então

$P(D) = \int_{\Omega_1} \mu(w_1, D(w_1)) dP_1(w_1)$.

Voltando à probabilidade condicional,

Vamos interpretar (informalmneto por enquanto) $\mu(x, B)$ como $P(Y \in B|X = x)$. Ainda informalmente, vamos pensar no evento $\{X = x\}$. Intuitivamente, a probabilidade que $X \in (x, x + dx]$ é $dF(x)$.

Então, sabendo que $\{X = x\}$, o evento $\{(X,Y) \in C\}$ ocorre se, e somente, $Y \in C(x) = \{y : (x,y) \in C\}$ e a probabilidade desse evento é $\mu(x, C(x))$. Pela regra da probabilidade total,

$P(C) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, C(x)) dF(x)$.

Se $C = \{(x,y) : x \in A, y \in B\} = A \times B$, $C(x) = B$ se $x \in A$ e $C(x) = \phi$ se $x \notin A$, então

$P(C) = P(A \times B) = \int_A \mu(x, B) dF(x)$

Se $\mu(x, B)$ é mensurável em x para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, antão pelo Teorema anterior, P é único.

Exemplo: Se $X \sim Beta(a,b)$ e $Y|X = x \sim Ben(n,x)$ $(\Omega_1 = [0,1], \mathcal{A}_1 = \mathcal{B}([0,1]), P_X)$, onde

$P_X(A) = \int_A dF_X(x) = \int_A f_X(x)dx = \int_A \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$

para $A \in \mathcal{A}_1$. Além disso, considere $\Omega_2 = \{0, 1, ..., n\}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$ e, para cada $x \in [0,1]$,

$\mu(x, B) = P(Y \in B|X = x)$. Então, pra $k = 0, 1, ..., n$; $\mu(x, B) = P(Y \in B|X = x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ (que é mensurável em x).

Tomando $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, P é a única medida de probabilidade determinada por $P_X(ou\ F_X)$ e $\mu(x, .)$.

$P(C) = \int_{\Omega_1} \mu(x, C(x)) dP_X = \int_0^1 \mu(x, C(x)) dF_X(x) = \int_0^1 \mu(x, C(x)) f_X(x)dx$, $C \in \mathcal{A}$.

Por exemplo, se $C = \Omega_1 \times \{k\}$, temos

$P(Y = k) = P(\Omega_1 \times \{k\}) = \int_0^1 P(Y = k|X = x)dF(x) = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-$
$x)^{b-1}dx = \dfrac{\binom{n}{k}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}}{\dfrac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+n-k)}} \int_0^1 \dfrac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+n-k)} x^{a+k-1}(1-x)^{b+n-k-1}dx = \binom{n}{k} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \dfrac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+n-}{\Gamma(a+b+n)}$

$(Y \sim BetaBin(n, a, b))$

Teorema $X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e $B \in \mathcal{A}$. Então $\exists g : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $A \in \mathcal{F}$, $P(\{x \in A\} \cap B) = \int_A g(x) dP_X(x)$.

Além disso, g é única P_X-q.c.

$(g(x) = P(B|X = x)$ é única P_X-q.c. para um dado $B)$

Demo: segue diretamente do Teorema de Radom-Nikodim (se $\mu(A) = P(\{x \in A\} \cap B)$ então λ é medida finita em $\mathcal{F}$ com $\lambda << P_X$)

Exemplo1: $\mathfrak{X}\{x_1, x_2, ...\}$ com $p_i = P(\{X = x_i\}) > 0$. Defina

$g(x_i) = P(B|X = x_i) = \dfrac{P(B \cap \{X = x_i\})}{P(\{X = x_i\})}$, $i = 1, 2, ...$

(g é uma “proposta” para $P(B|\{X = x_i\})$)

Se $A \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathfrak{X})$,

$\int_A g(x)dP_X(x) = \int_{\mathfrak{X}} g(x)\ \mathbb{I}_A(x)dP_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\ \mathbb{I}_A(x_i)P_X(\{x_i\}) = \sum_{x_i \in A} g(x_i)P(\{X = x_i\}) = \sum_{x_i \in A} P(B \cap \{X = x_i\}) = P(\{X \in A\} \cap B)$.

Exemplo 2 $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $X(x,y) = x$, $Y(x,y) = y$ (X,Y) v.a. com densidade f $(P(A) = \int\int_A f(x,y)dxdy$, $A \in \mathcal{A})$.

Nesse caso $P(\{X = x\}) = 0, \forall x$.

Seja $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ a densidade de X.

Defina $f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}$ como a densidade condicional de Y dado $X = x$.

Note que $f(y|x)$ só está definido quando $f_1(x) \neq 0$.

Contudo, se $S = \{(x,y) : f_1(x) = 0\}$ então $P(\{(X,Y) \in S\}) = 0$

$P(\{(X,Y) \in S\}) = \int\int_S f(x,y)dxdy = \int_{\{x:f_1(x)=0\}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right] dx = \int_{\{x:f_1(x)=0\}} f_1(x)dx = 0.$

de modo que podemos ignorar o conjunto onde $f(y|x)$ não está definida.

Se $X = x$, $\forall B \in \mathcal{A}$, B ocorre se e soente se $Y \in B(x) = \{y : (x,y) \in B\}$. Assim, vamos propor

$g(x) = P(\{Y \in B(x)|X = x\}) = \int_{B(x)} f(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_B(x,y)f(y|x)dy,$

Então, se $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$P(\{X \in A\} \cap B) = \int\int_{\substack{x \in A \\ (x,y) \in B}} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_B(x,y)f(y|x)dy\right] \mathbb{I}_A(x)f_1(x)dx = \int_A f_1(x)dx \underbrace{\int_B f(y|x)dy}_{g(x)} dx =$

$\int_A g(x)f_1(x)dx = \int_A g(x)dP_X(x)$

$\Rightarrow g(x) = P(B|X = x)$

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_A \int_B f(x,y)dxdy = \int_A \int_B f(y|x)f_1(x)dydx = \int_B \int_A f(x|y)f_2(y)dxdy$$

Referências Bibliográficas

DeGroot, M. H. (1970). *Optimal Statistical Decisions.* MacGraw-Hill, New York.