Processos estocásticos

Disciplina ofertada pelo DECAT/UFS
Código: ESTAT0077
Nível: Graduação
Carga horária: 60h
Período: 2020.2

Professor responsável e ministrante: Luiz Henrique Dore

Aula 13: Exercícios de fixação

Exercício 1. [1, p. 76] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de fila, descrita no exemplo 9 da aula 12. Suponha que $\lambda = 2$ e $q = 0,7$.

a) Calcule a matriz de transição dessa cadeia de Markov (considere apenas as quatro primeiras linhas e as quatro primeiras colunas).

b) Supondo que, no tempo 5, há 3 pessoas na fila, calcule a probabilidade de que, no tempo 6, a fila dobre de tamanho.

Exercício 2. Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a ruína do jogador, descrita no exemplo 5 da aula 2. Suponha que $p = 0,45$.

a) Calcule a matriz de transição dessa cadeia de Markov (considere apenas as quatro primeiras linhas e colunas). Essa matriz é duplamente estocástica?

b) Supondo que, inicialmente, o capital do apostador seja 5, calcule a probabilidade de que, nos tempos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, o jogador tenha 6, 7, 6, 5, 4 e 3, respectivamente.

c) Supondo que, no tempo 3, o capital do apostador seja 5, calcule a probabilidade de que o capital do jogador zere no tempo 8.

Exercício 3. Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, cuja distribuição no tempo 0 é aquela descrita no exercício 5 da aula 12. Suponha que $d = 5$.

a) Qual a probabilidade de que, nos tempo 0, 1, 2 e 3, a caixa 1 contenha 2, 3, 4 e 3 bolas, respectivamente?

b) Qual a probabilidade de que, nos tempo 0, 1, 2, 3, 4 e 5, a caixa 1 contenha 2, 3, 4, 3, 4 e 5 bolas, respectivamente?

Exercício 4. Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov homogênea, com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 0 & 3/8 & 4/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 3/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/12 & 1/6 & 0 & 1/12 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/12 & 1/6 & 0 & 1/12 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 2/7 & 3/7 & 0 & 0 & 1/7 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 3/9 & 2/9 & 0 & 2/9 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 \end{bmatrix} \end{array}.$$

a) Essa matriz é duplamente estocástica? Justifique.

b) Quais as probabilidades de transição do estado 0 para o estado 4, do estado 5 para o estado 3, do estado 8 para o estado 2, do estado 10 para o estado 6 e do estado 9 para o estado 4?

c) Se, no tempo n, essa cadeia se encontra no estado 6, qual a probabilidade de que, nos tempos $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ e $n + 4$, ela se encontre nos estados 3, 4, 6 e 8, respectivamente.

Exercício 5. Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov homogênea, com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

a) Mostre que a matriz $\boldsymbol{P}$ é estocástica.

b) A matriz $\boldsymbol{P}$ é duplamente estocástica? Justifique.

Exercício 6. Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov homogênea, com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,45 & 0,15 & 0 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,22 & 0,37 & 0 & 0,41 \\ 0,33 & 0,33 & 0 & 0,33 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

a) Supondo que, inicialmente, a cadeia se encontra no estado 1, calcule a probabilidade de que, nos tempos 1, 2, 3, 4 e 5, a cadeia esteja nos estados 2, 2, 4, 0 e 3.

a) Supondo que, inicialmente, a cadeia se encontra no estado 2, calcule a probabilidade de que, nos tempos 1, 2, 3 e 4, a cadeia esteja nos estados 1, 4, 0 e 3.

c) O que acontece se, em algum momento, essa cadeia assume o estado 3?

Exercício 7. Considere a matriz estocástica $\boldsymbol{A}$, definida como

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta & 0 \\ 0,13 & 0 & 0,87 \end{bmatrix}$$

Quais os valores de α e β tornam essa matriz duplamente estocástica?

Exercício 8. Considere a matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,15 & 0,02 & 0,56 \\ 0,52 & 0,38 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,025 & 0,975 \\ 0,27 & 0 & 0,13 & 0,6 \end{bmatrix}$$

a) Essa matriz representa uma cadeia de Markov? Justifique.

b) Caso a matriz $\boldsymbol{A}$ represente uma cadeia de Markov, quantos estados essa cadeia possui? Rotule esses estados e forneça as probabilidades de transição.

Exercício 9. Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Markov, descrita no exercício 3 da aula 2. Suponha que $d = 4$.

a) Calcule a matriz de transição dessa cadeia de Markov.

b) Supondo que, inicialmente, a caixa 1 contém uma bola preta, calcule a probabilidade de que, nos tempos 1, 2, 3 e 4, a caixa 1 contenha 2, 1, 2 e 3 bolas pretas, respectivamente.

c) Suponha que, no tempo 5, todas as bolas pretas estejam na caixa 1. Qual a probabilidade de que, no tempo 6, a caixa 1 continue com todas as bolas pretas?

d) Suponha que, no tempo 8, a caixa 1 contenha três bolas pretas. Qual a probabilidade de que a caixa 1 continue com esse número de bolas pretas pelos próximos k instantes de tempo?

Exercício 10. Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Markov homogênea, com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, 2\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 5/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Suponha que, no tempo n, a cadeia se encontra no estado 2.

a) Qual a probabilidade de que, em k instantes de tempo, a cadeia saia do estado 2? Você reconhece essa distribuição de probabilidade?

b) Descreva algo relevante que acontece com a cadeia quando, em algum instante de tempo futuro, a cadeia deixa o estado 2?

Exercício 11. Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Markov homogênea, com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

a) Suponha que

$$P[X_0 = 0] = 0,1, \quad P[X_0 = 1] = 0,4, \quad P[X_0 = 2] = 0,2, \quad \text{e} \quad P[X_0 = 3] = 0,3.$$

Qual a probabilidade de que, nos instantes de tempo 0, 1, 2, 3 e 4, a cadeia se encontre nos estados 3, 1, 0, 2 e 3?

b) Suponha que

$$P[X_4 = 0] = 0,5, \quad P[X_4 = 1] = 0,2, \quad P[X_4 = 2] = 0,2, \quad \text{e} \quad P[X_4 = 3] = 0,1.$$

Qual a probabilidade de que, nos instantes de tempo 4, 5, 6 e 7, a cadeia se encontre nos estados 1, 3, 2, 1?

Referências

[1] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer, New York, NY, EUA, 2007.