UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E CIÊNCIAS ATUARIAIS

Processos estocásticos

Disciplina ofertada pelo DECAT/UFS

Código: ESTAT0077
Nível: Graduação
Carga horária: 60h
Período: 2020.2

Professor responsável e ministrante: Luiz Henrique Dore

Aula 4: funções média, de autocorrelação e de autocovariância

Sumário

Metas

1. Introduzir a função média, a função de autocorrelação, a função de autocovariância, a função de variância e o coeficiente de autocorrelação.

Objetivos

- Após estudar essa aula, o aluno ou aluna será capaz de:
  1. definir e interpretar a função média, a função de autocorrelação, a função de autocovariância, a função de variância e o coeficiente de autocorrelação;
  2. calcular essas quantidades em situações simples.

Pré-requisitos

1. Aula 2.

Introdução

- Conforme visto na aula 2, um processo estocástico pode ser definido como um conjunto $\{X(t), t \geq 0\}$, cujos elementos são variáveis aleatórias unicamente identificadas por um índice t.
- Os processos estocásticos podem ser utilizados como modelos para fenômenos, cujas observações apresentam algum tipo de interdependência como, por exemplo, uma interdependência temporal; nesse contexto, o índice t é referido como tempo.
- Estudar uma variável aleatória significa estudar sua distribuição de probabilidade.
- Isso também vale para um processo estocástico.
- A distribuição de probabilidade de um processo estocástico é determinada pela distribuição de ordem k do processo.

Introdução

- A distribuição de ordem k de um processo estocástico é a distribuição de probabilidade conjunta do processo estocástico em k instantes de tempo distintos.
- A distribuição de probabilidade de ordem k de um processo estocástico pode ser especificada a partir da sua função de distribuição de ordem k (ver definição 4, aula 2).
- Se o espaço de estados do processo é discreto, sua distribuição de ordem k pode ser especificada a partir da sua função de probabilidade de ordem k (ver definição 6, aula 2).
- Se o espaço de estados do processo é contínuo, sua distribuição de ordem k pode ser especificada a partir da sua função de densidade probabilidade de ordem k (ver definição 6, aula 2).

Introdução

- Três características relacionadas à distribuição de ordem k de um processo, bastante importantes no contexto dos processos estocástico, são a função média, a função de autocovariância e a função de autocorrelação.
- Na presente aula, são apresentadas definições para as funções média, de autocovariância e de autocorrelação.
- São apresentadas também algumas propriedades dessas funções e alguns exemplos envolvendo o cálculo e a interpretação dessas funções .
- A presente aula trata também de uma função denominada coeficiente de correlação, a qual quantifica o grau de associação linear entre o processo estocástico em dois instantes distintos de tempo.

Tópico 7: função média

Definição 1

A função média, no tempo t, de um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é definida como [1, p. 49]

$$m_X(t) = E[X(t)].$$

- A função média é, simplesmente, a função que retorna a média do processo num instante qualquer de tempo.
- A função média é uma característica associada à distribuição de ordem 1 do processo estocástico.
- A fórmula da função média depende da natureza do espaço de estados $S_{X(t)}$ do processo estocástico.

Tópico 7: função média

- Se $S_{X(t)}$ é discreto, então

$$m_X(t) = \sum_{x \in S_{X(t)}} x \cdot p(x;t),$$

onde $p(x;t)$ é a função de probabilidade de ordem 1 do processo.

- Se $S_{X(t)}$ é contínuo, então

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x;t) dx,$$

onde $f(x;t)$ é a função de densidade de ordem 1 do processo.

Exemplo 1

Seja $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ o passeio aleatório, descrito no exemplo 1 da aula 2.

Tópico 7: função média

Continuação do exemplo 1

Se os arremessos da moeda são independentes, então a função de probabilidade de ordem 1, no tempo 2, é dada por

$$p(x;2) \equiv P[X_2 = x] = \begin{cases} 2p(1-p) & \text{se } x = 0; \\ p^2 & \text{se } x = 2; \\ (1-p)^2 & \text{se } x = -2. \\ 0 & \text{outros casos,} \end{cases}$$

onde $p := P[\{\text{Coroa}\}]$ (ver exemplo 13, aula 2). Portanto, o valor a função média em $t = 2$ é

$$\begin{aligned} m_X(2) = E[X_2] = \sum_{x_2 \in S_{X_2}} x_2 P[X_2 = x_2] = \\ = -2 \cdot P[X_2 = -2] + 0 \cdot P[X_2 = 0] + 2 \cdot P[X_2 = 2] = \\ = -2 \cdot (1-p)^2 + 0 \cdot 2p(1-p) + 2 \cdot p^2 = 2(2p-1). \end{aligned}$$

Tópico 7: função média

Exemplo 2

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, descrita no exemplo 4 da aula 2. Se $d = 10$ e $X_0 = 4$, a função de probabilidade de ordem 1, no tempo 1, é (exemplo 14, aula 2)

$$p(x_1; 1) = P[X_1 = x_1] = \begin{cases} 4/10, & \text{se } x_1 = 3; \\ 6/10, & \text{se } x_1 = 5; \end{cases}$$

Portanto, o valor a função média em $t = 1$ é

$$\begin{aligned} m_X(1) = E[X_1] = \sum_{x_1 \in S_{X_1}} x_1 P[X_1 = x_1] = \\ = 3 \cdot P[X_1 = 1] + 5 \cdot P[X_1 = 5] \\ = 3 \cdot \frac{4}{10} + 5 \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{10} = 4,2. \end{aligned}$$

Tópico 7: função média

Exemplo 3

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, descrita no exemplo 4 da aula 2. Se $d = 10$ e $X_0 = 4$, a função de probabilidade de ordem 1, no tempo 2, é (exemplo 14, aula 2)

$$p(x_2; 2) = P[X_2 = x_2] = \begin{cases} 12/100, & \text{se } x_2 = 2; \\ 58/100, & \text{se } x_2 = 4; \\ 30/100, & \text{se } x_2 = 6. \end{cases}$$

Portanto, o valor a função média em $t = 2$ é

$$m_X(2) = E[X_2] = \sum_{x_2 \in S_{X_2}} x_2 P[X_2 = x_2] =$$

$$= 2 \cdot P[X_2 = 2] + 4 \cdot P[X_2 = 4] + 6 \cdot P[X_2 = 6] =$$

$$= 2 \cdot \frac{12}{100} + 4 \cdot \frac{58}{100} + 6 \cdot \frac{30}{100} = \frac{436}{100} = 4,36.$$

Tópico 7: função média

Exemplo 4

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ o processo estocástico descrito no exemplo 15 da aula 2. A função de densidade de probabilidade de ordem 1, no tempo t, é (ver exemplo 15, aula 2)

$$f(x;t) = \begin{cases} 1/x & \text{se } t < x < te; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, a função média é

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x;t)dx = \int_t^{te} x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \int_t^{te} 1 \cdot dx = te - t = t(e-1).$$

Tópico 7: função média

Exemplo 5

Seja $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ o passeio aleatório, descrito nos exemplo 1 da aula 2. Para cada, $n \in \{1, 2, \cdots\}$, seja Y_n a variável que corresponde ao deslocamento da partícula que resulta do n-ésimo lançamento da moeda. Isto é,

$$Y_n = \begin{cases} -1 & \text{se a face da moeda é cara;} \\ 1 & \text{se a face da moeda é coroa.} \end{cases}$$

Para cada $n \in \{1, 2, \cdots\}$, a posição X_n da partícula, após n arremessos da moeda pode, é a soma dos deslocamentos em cada arremesso. Isto é,

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

Tópico 7: função média

Continuação do exemplo 5

Fazendo $p = P[\{\text{Coroa}\}]$, tem-se que

$$P[Y_n = y_n] = \begin{cases} 1 - p & \text{se } y_n = -1; \\ p & \text{se } y_n = 1. \end{cases}$$

Portanto,

$$E[Y_n] = -1 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = 2p - 1$$

e a função média do passeio aleatório é

$$\begin{aligned} m_x(n) &= E[X_n] = E[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n] = \\ &= E[Y_1] + E[Y_2] + \cdots + E[Y_n] = n(2p - 1). \end{aligned}$$

Em particular, $m_X(2) = 2(2p - 1)$, como no exemplo 1.

Tópico 8: função de autocorrelação

Definição 2

A função de autocorrelação, nos tempos t_1 e t_2, de um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é definida como [1, p. 49]

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)].$$

- A função de autocorrelação é a média do produto do processo estocástico em dois instantes de tempo distintos.
- A função de autocorrelação é uma característica associada à distribuição de ordem 2 do processo estocástico.
- A fórmula da função autocorrelação depende da natureza do espaço de estados $S_{X(t)}$ do processo estocástico.

Tópico 8: função de autocorrelação

- Se $S_{X(t)}$ é discreto, então
$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{x_1 \in S_{X(t_1)}} \sum_{x_2 \in S_{X(t_2)}} x_1 x_2 \cdot p(x_1, x_2; t_1, t_2),$$
onde $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ é a função de probabilidade de ordem 2.
- Se $S_{X(t)}$ é contínuo, então
$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \cdot f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$
onde $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$ é a função de densidade de ordem 2.

Exemplo 6

Experimentos independentes, do tipo sucesso/fracasso, para os quais a probabilidade de sucesso é a mesma em cada experimento, são **experimentos de Bernoulli** [1, p. 51].

Tópico 8: função de autocorrelação

Continuação do exemplo 6

Por exemplo, pode-se lançar um dado um número indefinido de vezes, de maneira independente, e definir o sucesso como sendo o número "6". Um processo de Bernoulli é uma sequência $\{X_1, X_2, \cdots\}$ de variáveis aleatórias de Bernoulli associadas a experimentos de Bernoulli. Isto é, $X_k = 1$ se o k-ésimo experimento é um sucesso e $X_k = 0$ caso contrário. A função de probabilidade de ordem 1, no tempo k, é

$$p(x;k) \equiv P[X_k = x] = \begin{cases} 1-p & \text{se } x = 0; \\ p & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

onde p é a probabilidade de sucesso. Logo, a função média é

$$m_X(k) = E[X_k] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

Tópico 8: função de autocorrelação

Continuação do exemplo 6

Se $k_1 \neq k_2$, então

$$X_{k_1} X_{k_2} = \begin{cases} 1 & \text{se } X_{k_1} = X_{k_2} = 1; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como X_{k_1} e X_{k_2} são independentes, tem-se que

$$P[X_{k_1} = 1, X_{k_2} = 1] = P[X_{k_1} = 1] P[X_{k_2} = 1] = p^2.$$

Portanto,

$$P[X_{k_1} X_{k_2} = x] = \begin{cases} p^2 & \text{se } x = 1; \\ 1 - p^2 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

Tópico 8: função de autocorrelação

Continuação do exemplo 6

Logo, se $k_1 \neq k_1$, a função de autocorrelação em k_1 e k_2 é

$$R_X(k_1, k_2) = E[X_{k_1} X_{k_2}] = 0 \cdot (1 - p^2) + 1 \cdot p^2 = p^2.$$

Se $k_1 = k_2 = k$, então $X_{k_1} X_{k_2} = X_k^2$. Como X_k só pode assumir os valores 0 ou 1, tem-se que $X_k^2 = X_k$. Logo, se $k_1 = k_2 = k$,

$$R_X(k_1, k_2) = R_X(k, k) = E[X_k^2] = E[X_k] = p.$$

Portanto, a função de autocorrelação em k_1 e k_2 é

$$R_X(k_1, k_2) = \begin{cases} p^2 & \text{se } k_1 \neq k_2; \\ p & \text{se } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Tópico 8: função de autocorrelação

Exemplo 7

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, no exemplo 4 da aula 1. Se $d = 10$ e $X_0 = 4$, a função de probabilidade de ordem 2, nos tempos 1 e 2, é (exemplo 14, aula 2)

$$p(x_1, x_2; 1, 2) = \begin{cases} 12/100, & \text{se } x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2; \\ 28/100, & \text{se } x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 4; \\ 30/100, & \text{se } x_1 = 5 \text{ e } x_2 = 4; \\ 30/100, & \text{se } x_1 = 5 \text{ e } x_2 = 6. \end{cases}$$

Portanto, a função de autocorrelação nos tempos 1 e 2 é

$$R_X(1, 2) = \sum_{x_1 \in S_{X_1}} \sum_{x_2 \in S_{X_2}} x_1 x_2 \cdot p(x_1, x_2; 1, 2) =$$

$$= 3 \cdot 2p(3, 2; 1, 2) + 3 \cdot 4p(3, 4; 1, 2) + 5 \cdot 4p(5, 4; 1, 2) + 5 \cdot 6p(5, 6; 1, 2) =$$

$$= 6 \cdot \frac{12}{100} + 12 \cdot \frac{28}{100} + 20 \cdot \frac{30}{100} + 30 \cdot \frac{30}{100} = \frac{1.908}{100} = 19,08.$$

Tópico 8: função de autocorrelação

Exemplo 8

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ o processo no exemplo 15 da aula 2. A variável aleatória $X(t)$ é definida como $X(t) = e^Y t$. Logo,

$$X(t_1) \cdot X(t_2) = (e^Y t_1)(e^Y t_2) = t1 \cdot t2 \cdot e^{2Y}.$$

Daí, obtém-se

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[t_1 t_2 e^{2Y}] = t_1 t_2 E[e^{2Y}].$$

Como $Y \sim U(0, 1)$, tem-se que

$$E[e^{2Y}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2y} \cdot f_Y(y)dy = \int_0^1 e^{2y} \cdot 1 \cdot dy = \frac{1}{2}e^{2y} =$$
$$= \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

Portanto, $R_X(t_1, t_2) = \frac{t_1 t_2}{2}(e^2 - 1)$.

Tópico 9: função de autocovariância

Definição 3

A função de autocovariância, nos tempos t_1 e t_2, de um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é definida como

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= Cov[X(t_1), X(t_2)] \\ &= E\left[(X_1 - m_X(t_1))(X_2 - m_X(t_2))\right] \end{aligned}$$

- A função de autocovariância, nos tempos t_1 e t_2, é a covariância entre $X(t_1)$ e $X(t_2)$.
- A função de autocovariância, nos tempos t_1 e t_2, é a covariância do processo, no tempo t_1, com ele próprio, no tempo t_2.
- A função de autocovariância é uma característica associada à distribuição de ordem 2 do processo estocástico.

Tópico 9: função de autocovariância

- Se $S_{X(t)}$ é discreto, então

  $$C_X(t_1,t_2) = \sum_{x_1 \in S_{X(t_1)}} \sum_{x_2 \in S_{X(t_2)}} (x_1 - m_X(t_1))(x_2 - m_X(t_2)) \cdot p(x_1,x_2;t_1,t_2),$$

  onde $p(x_1,x_2;t_1,t_2)$ é a função de probabilidade de ordem 2.

- Se $S_{X(t)}$ é contínuo, então

  $$C_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_X(t_1))(x_2 - m_X(t_2)) \cdot f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2,$$

  onde $f(x_1,x_2;t_1,t_2)$ é a função de densidade de ordem 2.

- Pode-se mostrar que a função de autocovariância pode ser escrita, em termos das funções média e de autocorrelação, da seguinte maneira [1, p. 49]

$$C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2). \qquad (1)$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 9

No exemplo 6, viu-se que a função média de um processo de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, é

$$m_X(k) = E[X_k] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

e que a função de autocorrelação é

$$R_X(k_1, k_2) = \begin{cases} p^2 & \text{se } k_1 \neq k_2; \\ p & \text{se } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Utilizando esses resultados e a fórmula (1), obtém-se

$$C_X(k_1, k_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } k_1 \neq k_2; \\ p(1-p) & \text{se } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 10

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, no exemplo 4 da aula 1. Nos exemplos 2, 3 e 7 da presente aula, viu-se que

$$m_X(1) = \frac{42}{10}, \quad m_X(2) = \frac{436}{100} \quad \text{e} \quad R_X(1,2) = \frac{1908}{100}.$$

Utilizando esses resultados e a fórmula (1), obtém-se

$$\begin{aligned} C_X(1,2) = R_X(1,2) - m_X(1)m_X(2) = \\ = \frac{1.908}{100} - \frac{42}{10} \cdot \frac{436}{100} = \\ = \frac{768}{1.000} = 0,768. \end{aligned}$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 11

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ o processo no exemplo 15 da aula 2. Nos exemplos 4 e 8 da presente aula, viu-se que

$$m_X(t) = t(e-1) \quad \text{e} \quad R_X(t_1, t_2) = \frac{t_1 t_2}{2}(e^2 - 1).$$

Utilizando esses resultados e a fórmula (1), obtém-se

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) &= \\ &= \frac{t_1 t_2}{2}(e^2 - 1) - t_1 t_2 (e-1)^2 = \\ &= \frac{t_1 t_2}{2}(e-1)(3-e) \end{aligned}$$

Tópico 9: função de autocovariância

Definição 4

A função de variância, no tempos t, de um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é definida como

$$V_X(t) = Var[X(t)] = E\left[(X - m_X(t))^2\right].$$

- A função de variância é, simplesmente, a função que retorna a variância do processo num instante de tempo qualquer.
- A função de variância é uma característica associada à distribuição de ordem 1 do processo estocástico.
- A fórmula da função média depende da natureza do espaço de estados $S_{X(t)}$ do processo estocástico.

Tópico 9: função de autocovariância

- Se $S_{X(t)}$ é discreto, então
$$V_X(t) = \sum_{x \in S_{X(t)}} (x - m_X(t))^2 \cdot p(x;t),$$
onde $p(x;t)$ é a função de probabilidade de ordem 1 do processo.
- Se $S_{X(t)}$ é contínuo, então
$$V_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_X(t_1))^2 \cdot f(x;t)dx,$$
onde $f(x;t)$ é a função de densidade de ordem 1 do processo.
- É fácil ver que a função de variância, no tempo t, é igual à função de autocovariância, calculada em dois instantes de tempos iguais a t. Isto é, $V_X(t) = C_X(t,t)$ [1, p. 50]. Logo, a função de variância pode ser escrita como
$$V_X(t) = C_X(t,t) = R_X(t,t) - m_X(t)m_X(t) = E[X(t)^2] - m_X(t)^2. \quad (2)$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 12

Seja $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ o passeio aleatório, descrito no exemplo 1 da aula 2. No exemplo 1, viu-se que

$$m_x(2) = 2(2p - 1).$$

A partir da função de probabilidade de ordem 1 no tempo 2, que se encontra no exemplo 1, obtém-se

$$R_X(2,2) = E[X_2^2] = \sum_{x_2 \in S_{X_2}} x_2^2 P[X_2 = x_2] =$$
$$= 4 \cdot (1-p)^2 + 0 \cdot 2p(1-p) + 4 \cdot p^2 = 4(2p^2 - 2p + 1).$$

Utilizando esses resultados e a fórmula 2, tem-se que

$$V_X(2) = R_X(2,2) - m_X(2)^2 = 4(2p^2 - 2p + 1) - 4(2p-1)^2 = 8p(1-p).$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 13

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, descrita no exemplo 4 da aula 2. No exemplo 2, viu-se que, se $d = 10$ e $X_0 = 4$, então $m_X(1) = 42/10$. A partir da função de probabilidade de ordem 1 no tempo 1, que se encontra no exemplo 2, obtém-se

$$R_X(1,1) = E[X_1^2] = \sum_{x_1 \in S_{X_1}} x_1^2 P[X_1 = x_1] =$$
$$= 3^2 \cdot P[X_1 = 1] + 5^2 \cdot P[X_1 = 5]$$
$$= 9 \cdot \frac{4}{10} + 25 \cdot \frac{6}{10} = \frac{186}{10} = 18,6.$$

Utilizando esses resultados e a fórmula 2, tem-se que

$$V_X(1) = R_X(1,1) - m_X(1)^2 = \frac{186}{10} - \left(\frac{42}{10}\right)^2 = \frac{96}{100} = 0,96.$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 14

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, descrita no exemplo 4 da aula 2. No exemplo 3, viu-se que, se $d = 10$ e $X_0 = 4$, então $m_X(2) = 436/100$. A partir da função de probabilidade de ordem 1 no tempo 2, que se encontra no exemplo 3, obtém-se

$$R_X(2,2) = E[X_2^2] = \sum_{x_2 \in S_{X_2}} x_2^2 P[X_2 = x_2] =$$
$$= 2^2 \cdot P[X_1 = 2] + 4^2 \cdot P[X_1 = 4] + 6^2 \cdot P[X_2 = 6]$$
$$= 4 \cdot \frac{12}{100} + 16 \cdot \frac{58}{100} + 36 \cdot \frac{30}{100} = \frac{2.056}{100} = 20,56.$$

Utilizando esses resultados e a fórmula 2, tem-se que

$$V_X(2) = R_X(2,2) - m_X(2)^2 = \frac{2.056}{100} - \left(\frac{436}{100}\right)^2 = \frac{15.504}{10.000} = 1,5504.$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 15

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ o processo no exemplo 15 da aula 2. No exemplo 8, viu-se que $C_X(t_1, t_2) = \frac{t_1 t_2}{2}(e-1)(3-e)$. Utilizando esse resultado e a fórmula 2, tem-se que $V_X(t) = \frac{t^2}{2}(e-1)(3-e)$.

Exemplo 16

No exemplo 9, viu-se que a função de autocovariância de um processo de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, é

$$C_X(k_1, k_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } k_1 \neq k_2; \\ p(1-p) & \text{se } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Utilizando esse resultado e a fórmula 2, tem-se que

$$V_X(k) = C_X(k, k) = p(1-p).$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 17

Seja $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ o passeio aleatório, descrito nos exemplo 1 da aula 2. No exemplo 5, viu-se que X_n pode ser escrita como

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

onde $Y_1, \cdots, Y_n$ são variáveis aleatórias independentes tais que

$$P[Y_n = y] = \begin{cases} 1 - p & \text{se } y = -1; \\ p & \text{se } y = 1. \end{cases}$$

Como $Y_1, \cdots, Y_n$ são independentes, tem-se que

$$V_X(n) = Var[X_n] = Var[Y_1 + \cdots + Y_n] =$$
$$= Var[Y_1] + \cdots + Var[Y_n].$$

Tópico 9: função de autocovariância

Continuação do exemplo 17

Sabe-se que $Var[Y_n] = E[Y_n^2] - (E[Y_n])^2$. Conforme visto no exemplo 5, $E[Y_n] = 2p - 1$. Além disso, como Y_n só pode assumir os valores 1 ou -1, tem-se que $P[Y_n^2 = 1] = 1$. Logo, $E[Y_n^2] = 1$ e

$$Var[Y_n] = E[Y_n^2] - (E[Y_n])^2 = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p).$$

Dessa forma, conclui-se que

$$V_X(n) = Var[X_n] = Var[Y_1] + \cdots + Var[Y_n] = n4p(1-p).$$

Em particular, se $n = 2$, então

$$V_X(n) = V_X(2) = 8p(1-p),$$

como no exemplo 12.

Tópico 9: função de autocovariância

Definição 5

O coeficiente de autocorrelação, nos tempos t_1 e t_2, de um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é definido como [1, p. 49]

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{V_X(t_1)V_X(t_2)}} = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)C_X(t_2, t_2)}}.$$

- O coeficiente de autocorrelação, nos tempos t_1 e t_2, corresponde ao coeficiente correlação entre $X(t_1)$ e $X(t_2)$.
- O coeficiente de autocorrelação mede o grau de associação linear do processo estocástico, num tempo t_1, com o próprio processo, num tempo $t_2 \neq t_1$.

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 18

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, no exemplo 4 da aula 1. Nos exemplos 10, 13 e 14, viu-se que

$$C_X(1,2) = \frac{768}{1000}, \quad V_X(1) = \frac{86}{100} \quad \text{e} \quad V_X(2) = \frac{15.504}{10.000}.$$

O coeficiente de autocorrelação, nos tempos 1 e 2, é

$$\rho_X(1,2) = \frac{C_X(1,2)}{\sqrt{V_X(1)V_X(2)}} = \frac{768/1.000}{\sqrt{86/100 \cdot 15.504/10.000}} = \\ = \frac{768}{\sqrt{86 \cdot 15.504}} \approx 0,6651.$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 19

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ o processo no exemplo 15 da aula 2. Nos exemplos 11 e 15 , viu-se que

$$C_X(t_1, t_2) = \frac{t_1 t_2}{2}(e-1)(3-e) \quad \text{e} \quad V_X(t) = \frac{t^2}{2}(e-1)(3-e).$$

O coeficiente de autocorrelação, nos tempos t_1 e t_2, é

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{V_X(t_1) V_X(t_2)}} =$$

$$= \frac{\frac{t_1 t_2}{2}(e-1)(3-e)}{\sqrt{\frac{t_1^2}{2}(e-1)(3-e) \cdot \frac{t_2^2}{2}(e-1)(3-e)}} = 1.$$

Tópico 9: função de autocovariância

Exemplo 20

O processo estocástico $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ é dito ser um ruído branco se ele satisfaz as seguintes condições:

1. $m_Y(n) = 0$;
2. $V_Y(n) = \sigma^2$, onde $\sigma^2 > 0$ é uma constante;
3. Se $m \neq n$, então Y_m e Y_n são independentes.

Seja $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ um ruído branco. O processo estocástico $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ definido como

$$X_n = \mu + \alpha Y_{n-1} + Y_n.$$

é um **processo de médias móveis de ordem 1**. O arquivo **mediasMoveis.pdf**, na pasta da presente aula, contém os cálculos de $m_X(n)$, $R_X(m, n)$, $C_X(m, n)$ e $\rho_X(m, n)$.

Referências I

[1] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer, New York, NY, EUA, 2007.