UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E CIÊNCIAS ATUARIAIS

Processos estocásticos

Disciplina ofertada pelo DECAT/UFS
Código: ESTAT0077
Nível: Graduação
Carga horária: 60h
Período: 2020.2
Professor responsável e ministrante: Luiz Henrique Dore

Aula 12: notas complementares

1 Comportamento dos valores futuros de um processo de Markov

Sejam A, B e C eventos quaisquer. A probabilidade condicional de $B \cap C$ dado A pode ser escrita como

$$\begin{aligned}P(B \cap C|A) = \frac{P(B \cap C \cap A)}{P(A)} &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)} \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \\ &= P(B|A) P(C|A \cap B). \end{aligned} \tag{1}$$

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo estocástico qualquer. Sejam A_{n+1}, A_{n+2} eventos associados a esse processo estocásticos nos instantes de tempo t_{n+1}, t_{n+2}. Defina os eventos A, B e C como

$$A = \{X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}\}, \quad B = X(t_{n+1}) \in A_{n+1} \quad \text{e} \quad C = X(t_{n+2}) \in A_{n+2}.$$

Utilizando essa notação e a fórmula (1), obtém-se

$$\begin{aligned}P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = P[B \cap C|A] = \\ = P[B|A] \times P[C|A \cap B] = \\ = P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}|X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] \times \\ \times P[X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}].\end{aligned} \tag{2}$$

Suponha que $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo de Markov. Fazendo $\tilde{A} = X(t_n) = x_{t_n}$, obtém-se

$$\begin{aligned}P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}|X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = \\ = P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}|X(t_n) = x_{t_n}] = P[B|\tilde{A}]\end{aligned} \tag{3}$$

e

$$\begin{aligned}P[X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = \\ = P[X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_{n+1}) \in A_{n+1}] = \\ = P[X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_n) = x_{t_n}] = P[C|\tilde{A} \cap B].\end{aligned} \tag{4}$$

Substituindo (3) e (4) em (2) e utilizando a fórmula (1), obtém-se

$$\begin{aligned}P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = \\ = P[B|\tilde{A}] \times P[C|\tilde{A} \cap B] = P[B \cap C|\tilde{A}] = \\ = P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_n) = x_{t_n}].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = \\ = P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_n) = x_{t_n}].\end{aligned} \tag{5}$$

Daí, pode-se concluir que [1, p. 74].

$$\begin{aligned}P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_{n+2}) \in A_{n+2}, \cdots|X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = \\ = P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_{n+2}) \in A_{n+2}|X(t_n) = x_{t_n}].\end{aligned} \tag{6}$$

A equação (6) diz que os valores futuros de um processo de Markov são influenciados apenas pelo valor do processo observado mais recentemente.

2 O passeio aleatório é uma cadeia de Markov

Sabe-se que

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \quad \forall\, n \in \{1, 2, \cdots\},$$

onde $Y_1, \cdots, Y_n$ são variáveis aleatórias independentes tais que

$$P[Y_n = y_n] = \begin{cases} 1-p & \text{se } y_n = -1; \\ p & \text{se } y_n = 1. \end{cases}$$

Logo, $X_{n+1} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n + Y_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$ e

$$\begin{aligned} &P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ &\qquad = P[X_n + Y_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ &\qquad = P[Y_{n+1} = j - X_n | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ &\qquad = P[Y_{n+1} = j - i | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1]. \end{aligned} \tag{7}$$

Como $Y_1, \cdots, Y_n$ e Y_{n+1} são independentes, tem-se que Y_{n+1} é independente de

$$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n,\ X_{n-1} = Y_1 + \cdots + Y_{n-1},\ \cdots,\ X_2 = Y_1 + Y_2 \text{ e } X_1 = Y_1.$$

Logo,

$$P[Y_{n+1} = j - i | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = P[Y_{n+1} = j - i]. \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7), obtém-se

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] &= P[Y_{n+1} = j - i] = \\ &= P[Y_{n+1} = j - i | X_n = i] = \\ &= P[Y_{n+1} = j - X_n | X_n = i] = \\ &= P[X_n + Y_{n+1} = j | X_n = i] = \\ &= P[X_{n+1} = j | X_n = i]. \end{aligned} \tag{9}$$

O passeio aleatório satisfaz a propriedade de Markov e, portanto, é uma cadeia de Markov.

3 A cadeia de Ehrenfest é um passeio aleatório

O número de bolas na caixa 1, representado por X_n, pode ser escrito como

$$X_n = x_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \quad \forall\, n \in \{1, 2, \cdots\},$$

onde x_0 é o número inicial de bolas na caixa 1 e $Y_1, \cdots, Y_n$ são variáveis aleatórias tais que

$$P[Y_{n+1} = y_{n+1} | X_n = i] = \begin{cases} \frac{i}{d} & \text{se } y_{n+1} = -1; \\ 1 - \frac{i}{d} & \text{se } y_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Logo, $X_{n+1} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n + Y_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$ e

$$\begin{aligned} &P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ &\qquad = P[X_n + Y_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ &\qquad = P[Y_{n+1} = j - X_n | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ &\qquad = P[Y_{n+1} = j - i | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ &\qquad = P[Y_{n+1} = j - i | X_n = i] = P[Y_{n+1} = j - X_n | X_n = i] = \\ &\qquad = P[X_n + Y_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_{n+1} = j | X_n = i]. \end{aligned} \tag{10}$$

A cadeia de Ehrenfest satisfaz a propriedade de Markov e, portanto, é uma cadeia de Markov.

4 Processo de médias móveis de ordem 1

Seja $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ um processo de médias móveis de ordem 1. Isto é,

$$X_n = \mu + \alpha Y_{n-1} + Y_n, \tag{11}$$

onde $\{Y_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é um ruído branco. Vamos mostrar que

$$X_n = \mu \sum_{i=0}^{n-1} (-\alpha)^i - \sum_{i=1}^{n} (-\alpha)^i X_{n-i} + Y_n, \quad \forall\, n \in \{1, 2, \cdots\}, \text{ com } X_0 = Y_0. \tag{12}$$

Para chegar à equação (12), note que

1. $X_1 = \mu + \alpha Y_0 + Y_1$;
2. $X_2 = \mu + \alpha Y_1 + Y_2$. Pela equação acima,
$$Y_1 = -\mu + X_1 - \alpha Y_0.$$
Logo,
$$X_2 = \mu - \alpha\mu + \alpha X_1 - \alpha^2 Y_0 + Y_2;$$
3. $X_3 = \mu + \alpha Y_2 + Y_3$. Pela equação acima,
$$Y_2 = -\mu + \alpha\mu - \alpha X_1 + X_2 + \alpha^2 Y_0.$$
Logo,
$$X_3 = \mu - \alpha\mu + \alpha^2\mu - \alpha^2 X_1 + \alpha X_2 + \alpha^3 Y_0 + Y_3;$$
4. $X_4 = \mu + \alpha Y_3 + Y_4$. Pela equação acima,
$$Y_3 = -\mu + \alpha\mu - \alpha^2\mu + \alpha^2 X_1 - \alpha X_2 + X_3 - \alpha^3 Y_0.$$
Logo,
$$X_4 = \mu - \alpha\mu + \alpha^2\mu - \alpha^3\mu + \alpha^3 X_1 - \alpha^2 X_2 + \alpha X_3 - \alpha^4 Y_0 + Y_4.$$

Daí, postulamos

$$X_n = \mu \sum_{i=0}^{n-1} (-\alpha)^i - \sum_{i=1}^{n} (-\alpha)^i X_{n-i} + Y_n, \quad \forall\, n \in \{1, 2, \cdots\}, \text{ com } X_0 = Y_0,$$

que é a equação (12). Vamos mostrar, por indução, que (12) vale para todo $n \in \{1, 2, \cdots\}$.

1. Fazendo $n = 1$, obtém-se
$$\begin{aligned} X_1 &= \mu \sum_{i=0}^{0} (-\alpha)^i - \sum_{i=1}^{1} (-\alpha)^i X_{n-i} + Y_1 = \\ &= \mu(-\alpha)^0 - (-\alpha)^1 X_0 + Y_1 = \mu + \alpha X_0 + Y_1 = \mu + \alpha Y_0 + Y_1. \end{aligned}$$
Portanto, a equação (12) vale para $n = 1$.
2. Supondo que (12) vale para n, obtém-se
$$Y_n = -\mu \sum_{i=0}^{n-1} (-\alpha)^i + \sum_{i=1}^{n} (-\alpha)^i X_{n-i} + X_n. \tag{13}$$

3. Vamos mostrar que (12) vale para $n+1$, supondo que vale para n. Sabe-se que

$$X_{n+1} = \mu + \alpha Y_n + Y_{n+1}. \tag{14}$$

Supondo que (12) vale para n, pode-se substituir Y_n em (14) por (13). Nesse caso,

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= \mu + \alpha Y_n + Y_{n+1} = \\
&= \mu - \alpha\mu \sum_{i=0}^{n-1} (-\alpha)^i + \alpha \sum_{i=1}^{n} (-\alpha)^i X_{n-i} + \alpha X_n + Y_{n+1} = \\
&= \mu + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (-\alpha)^{i+1} - (-\alpha) \sum_{i=1}^{n} (-\alpha)^i X_{n-i} + \alpha X_n + Y_{n+1} = \\
&= \mu + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (-\alpha)^{i+1} - \sum_{i=1}^{n} (-\alpha)^{i+1} X_{n-i} + \alpha X_n + Y_{n+1} = \\
&= \mu + \mu \sum_{i=1}^{n} (-\alpha)^i - \sum_{i=2}^{n+1} (-\alpha)^i X_{n-(i-1)} + \alpha X_n + Y_{n+1} = \\
&= \mu \sum_{i=0}^{n} (-\alpha)^i - \sum_{i=2}^{n+1} (-\alpha)^i X_{n+1-i} - (-\alpha) X_n + Y_{n+1} = \\
&= \mu \sum_{i=0}^{n} (-\alpha)^i - \sum_{i=1}^{n+1} (-\alpha)^i X_{n+1-i} + Y_{n+1}.
\end{aligned}$$

Logo, (12) vale para $n+1$. Conclui-se, por indução, que (12) vale para todo $n \in \{1, 2, \cdots\}$.

5 Processo autorregressivo de ordem 1

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ um processo autorregressivo de ordem 1. Isto é,

$$X_n = \mu + \alpha X_{n-1} + \epsilon_n, \tag{15}$$

onde $\{\epsilon_n, n = 1, 2, \cdots\}$ é um ruído branco. Vamos mostrar que

$$X_n = \mu \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \epsilon_{n-i} + \alpha^n X_0, \quad \forall\ n \in \{1, 2, \cdots\}. \tag{16}$$

Para chegar à equação (16), note que

1. $X_1 = \mu + \alpha X_0 + \epsilon_1$;
2. $X_2 = \mu + \alpha X_1 + \epsilon_2$. Substituindo X_1 pela equação acima, obtemos
$$X_2 = \mu + \alpha\mu + \alpha^2 X_0 + \alpha\epsilon_1 + \epsilon_2;$$
3. $X_3 = \mu + \alpha X_2 + \epsilon_3$. Substituindo X_2 pela equação acima, obtemos
$$X_3 = \mu + \alpha\mu + \alpha^2\mu + \alpha^3 X_0 + \alpha^2\epsilon_1 + \alpha\epsilon_2 + \epsilon_3.$$

Daí, postulamos

$$X_n = \mu \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \epsilon_{n-i} + \alpha^n X_0, \quad \forall\ n \in \{1, 2, \cdots\}.$$

que é a equação (16). Vamos mostrar, por indução, que (16) vale para todo $n \in \{1, 2, \cdots\}$.

1. Fazendo $n = 1$, obtém-se
$$X_1 = \mu \sum_{i=0}^{0} \alpha^i + \sum_{i=0}^{0} \alpha^i \epsilon_{1-i} + \alpha^1 X_0 = \mu\alpha^0 + \alpha^0\epsilon_1 + \alpha X_0 = \mu + \alpha X_0 + \epsilon_1.$$
Portanto, a equação (16) vale para $n = 1$.
2. Vamos mostrar que (16) vale para $n + 1$, supondo que vale para n. Sabe-se que
$$X_{n+1} = \mu + \alpha X_n + \epsilon_{n+1}. \tag{17}$$
Supondo que (16) vale para n, pode-se substituir X_n em (17) por (16) . Nesse caso,
$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \mu + \alpha\mu \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \epsilon_{n-i} + \alpha^{n+1} X_0 + \epsilon_{n+1} = \\ &= \mu + \mu \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{i+1} \epsilon_{n-i} + \alpha^{n+1} X_0 + \epsilon_{n+1} = \\ &= \mu + \mu \sum_{i=1}^{n} \alpha^i + \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \epsilon_{n-(i-1)} + \alpha^{n+1} X_0 + \epsilon_{n+1} = \\ &= \mu \sum_{i=0}^{n} \alpha^i + \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \epsilon_{n+1-i} + \epsilon_{n+1} + \alpha^{n+1} X_0 = \mu \sum_{i=0}^{n} \alpha^i + \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \epsilon_{n+1-i} + \alpha^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

Logo, (16) vale para $n + 1$. Conclui-se, por indução, que (16) vale para todo $n \in \{1, 2, \cdots\}$.

Agora, vamos utilizar (16) para mostrar que, se X_0 é uma variável aleatória tal que

$$E[X_0] = \frac{\mu}{1-\alpha} \quad \text{e} \quad V[X_0] = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}, \tag{18}$$

então $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é um processo estacionário no sentido amplo com

$$m_X(n) = m_X = \frac{\mu}{1-\alpha} \quad \text{e} \quad C_X(n, n+k) = C_X(k) = \frac{\sigma^2\alpha^k}{1-\alpha^2}. \tag{19}$$

Calculando $m_X(n) = E[X_n]$, a partir de (16), obtemos

$$m_X(n) = E[X_n] = \mu \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i E[\epsilon_{n-i}] + \alpha^n E[X_0].$$

Como $\{\epsilon_n, n = 1, 2, \cdots\}$ é um ruído branco, tem-se que $E[\epsilon_n] = 0$, $\forall\ n \in \{1, 2, \cdots\}$. Logo,

$$m_X(n) = \mu \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i + \alpha^n E[X_0].$$

A fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica nos dá

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}. \tag{20}$$

Portanto,

$$m_X(n) = \mu \cdot \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} + \alpha^n E[X_0] = \frac{\mu}{1-\alpha} - \frac{\mu\alpha^n}{1-\alpha} + \alpha^n E[X_0].$$

Supondo que $E[X_0] = \frac{\mu}{1-\alpha}$, obtemos

$$m_X(n) = \frac{\mu}{1-\alpha} - \frac{\mu\alpha^n}{1-\alpha} + \frac{\mu\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{\mu}{1-\alpha},$$

confirmando a primeira parte de (18) e (19). Para mostrar a segunda parte, primeiramente devemos lembrar que a covariância entre duas variáveis aleatórias satisfaz a seguinte propriedade:

$$Cov\left(a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i W_i, b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_j Z_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov(W_i, Z_j),$$

onde $a_0, a_1, \cdots, a_m, b_0, b_1, \cdots, b_n$ são constantes reais e $W_1, \cdots, W_m, Z_1, \cdots, Z_n$ são variáveis aleatórias. Utilizando essa propriedade, pode-se escrever $C_X(n, n+k) = Cov(X_n, X_{n+k})$ como

$$\begin{aligned} C_X(n, n+k) &= Cov\left(\mu \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \epsilon_{n-i} + \alpha^n X_0, \mu \sum_{j=0}^{n+k-1} \alpha^j + \sum_{j=0}^{n+k-1} \alpha^j \epsilon_{n+k-j} + \alpha^{n+k} X_0\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n+k-1} \alpha^i \alpha^j Cov(\epsilon_{n-i}, \epsilon_{n+k-j}) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \alpha^{n+k} Cov(\epsilon_{n-i}, X_0) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n+k-1} \alpha^j \alpha^n Cov(\epsilon_{n+k-j}, X_0) + \alpha^n \alpha^{n+k} Cov(X_0, X_0). \end{aligned}$$

Sabemos que $Cov(X_0, X_0 = V[X_0]$. Além disso, como, X_0 é independente de $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n+k}$,

$$Cov(\epsilon_{n+k-j}, X_0) = 0, \quad \forall\, j \in \{0, \cdots, n+k-1\}.$$

Logo,

$$C_X(n, n+k) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n+k-1} \alpha^i \alpha^j Cov(\epsilon_{n-i}, \epsilon_{n+k-j}) + \alpha^{2n+k} V[X_0].$$

Do fato de $\{\epsilon_n, n = 1, 2, \cdots\}$ ser um ruído branco, podemos concluir que

$$Cov(\epsilon_{n-i}, \epsilon_{n+k-j}) = \begin{cases} 0, & \text{se } n-i \neq n+k-j; \\ Cov(\epsilon_{n-i}, \epsilon_{n-i}) = V[\epsilon_{n-i}] = \sigma^2, & \text{se } n-i = n+k-j. \end{cases}$$

Note que $n - i = n + k - j \Rightarrow j = i + k$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n+k-1} \alpha^i \alpha^j Cov(\epsilon_{n-i}, \epsilon_{n+k-j}) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^{i+k} Cov(\epsilon_{n-i}, \epsilon_{n-i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i \alpha^{i+k} \sigma^2 = \alpha^k \sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^i = \alpha^k \sigma^2 \cdot \frac{1 - \alpha^{2n}}{1 - \alpha^2},$$

onde a última igualdade é obtida utilizando a fórmula (20). Desse modo,

$$C_X(n, n+k) = \alpha^k \sigma^2 \cdot \frac{1 - \alpha^{2n}}{1 - \alpha^2} + \alpha^{2n+k} V[X_0] = \frac{\alpha^k \sigma^2}{1 - \alpha^2} - \frac{\alpha^{2n+k} \sigma^2}{1 - \alpha^2} + \alpha^{2n+k} V[X_0].$$

Supondo que $V[X_0] = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$, obtemos

$$C_X(n, n+k) = \frac{\alpha^k \sigma^2}{1 - \alpha^2} - \frac{\alpha^{2n+k} \sigma^2}{1 - \alpha^2} + \frac{\alpha^{2n+k} \sigma^2}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha^k \sigma^2}{1 - \alpha^2} = C_X(k),$$

confirmando a segunda parte de (18) e (19). Das equações (18) e (19), obtemos

$$V_X[n] = V_X = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}, \quad R_X(n, n+k) = R_X(k) = \frac{\alpha^k \sigma^2}{1 - \alpha^2} + \frac{\mu^2}{(1 - \alpha)^2} \quad \text{e} \quad \rho_X(k) = \alpha^k,$$

para todo $n, k \in \{0, 1, \cdots\}$.

6 Cálculo da probabilidade de transição da cadeia de fila no exemplo 9

Vamos calcular $P[X_{n+1} = j|X_n = i]$ [1, p. 76]. Pela lei da probabilidade total [1, p. 6],

$$P[X_{n+1} = j|X_n = i] = P[X_{n+1} = j, Z_n = 0|X_n = i] + P[X_{n+1} = j, Z_n = 1|X_n = i]. \quad (21)$$

Pela fórmula (1),

$$P[X_{n+1} = j, Z_n = 0|X_n = i] = P[Z_n = 0|X_n = i]P[X_{n+1} = j|X_n = i, Z_n = 0] \quad (22)$$

e

$$P[X_{n+1} = j, Z_n = 1|X_n = i] = P[Z_n = 1|X_n = i]P[X_{n+1} = j|X_n = i, Z_n = 1]. \quad (23)$$

Substituindo (22) e (23) em (21), obtém-se

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = j|X_n = i] = P[Z_n = 0|X_n = i]P[X_{n+1} = j|X_n = i, Z_n = 0]+ \\ + P[Z_n = 1|X_n = i]P[X_{n+1} = j|X_n = i, Z_n = 1]. \end{aligned} \quad (24)$$

Conforme visto no exemplo 9, $X_{n+1} = X_n - Z_n + Y_n$. Logo,

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = j|X_n = i, Z_n = z] &= P[X_n - Z_n + Y_n = j|X_n = i, Z_n = z] = \\ &= P[Y_n = j - X_n + Z_n|X_n = i, Z_n = z] = \\ &= P[Y_n = j - i + z|X_n = i, Z_n = z] = P[Y_n = j - i + z], \end{aligned} \quad (25)$$

onde a última igualdade decorre da suposição, adotada no exemplo 9, de que Y_n é independente de Z_n e X_n. Substituindo (25) em (24), obtém-se

$$P[X_{n+1} = j|X_n = i] = P[Z_n = 0|X_n = i]P[Y_n = j-i]+P[Z_n = 1|X_n = i]P[Y_n = j-i+1]. \quad (26)$$

Como Y_n segue distribuição de Poisson com parâmetro λ, tem-se que

$$P[Y_n = y] = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, & \text{se } y \geq 0; \\ 0, & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (27)$$

Viu-se, no exemplo 9, que $P[Z_n = 0|X_n = 0] = 1$ e, portanto, $P[Z_n = 1|X_n = 0] = 0$. Logo, supondo que $i = 0$, tem-se que

$$P[X_{n+1} = j|X_n = i] = P[X_{n+1} = j|X_n = 0] = P[Y_n = j] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}, \quad \forall\, j \in \{0, 1, \cdots\}. \quad (28)$$

Conforme visto, no exemplo 9, que, se $i > 0$, então

$$P[Z_n = z|X_n = i] = \begin{cases} q, & \text{se } z = 1; \\ 1 - q, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Logo, supondo $i > 0$, tem-se que

$$P[X_{n+1} = j|X_n = i] = (1 - q)P[Y_n = j - i] + qP[Y_n = j - i + 1].$$

Se $j < i - 1$, então $j - i < -1$, $j - i + 1 < 0$ e, pela fórmula (27), tem-se que

$$P[X_{n+1} = j|X_n = i] = (1 - q)P[Y_n = i - j] + qP[Y_n = i - j + 1] = 0. \quad (29)$$

Se $j = i - 1$, então $j - i = -1$, $j - i + 1 = 0$ e, pela fórmula (27), tem-se que

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = (1-q)P[Y_n = -1] + qP[Y_n = 0] = qp[Y_n = 0] = qe^{-\lambda}. \tag{30}$$

Se $j > i - 1$, então $j - i \geq 0$, $j - i + 1 \geq 1$ e, pela fórmula (27), tem-se que

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = j | X_n = i] = (1-q)P[Y_n = j - i] + qP[Y_n = j - i + 1] = \\ = (1-q)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{j-i}}{(j-i)!} + q\frac{e^{-\lambda}\lambda^{j-i+1}}{(j-i+1)!}. \end{aligned} \tag{31}$$

As equações (28), (29), (30) e (31) dão $P[X_{n+1} = j | X_n = i]$, conforme desejado. Nota-se ainda que, como $P[Z_n = 0 | X_n = i] = 1 - P[Z_n = 1 | X_n = i]$, pode-se escrever (26), como

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = (1 - q_i)P[Y_n = j - i] + q_i P[Y_n = j - i + 1],$$

onde

$$q_i = P[Z_n = 1 | X_n = i] = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0; \\ q, & \text{se } i > 0. \end{cases}$$

e

$$P[Y_n = y] = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, & \text{se } y \geq 0; \\ 0, & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

A probabilidade $P[X_{n+1} = j | X_n = i]$ pode ser obtida diretamente dessas três últimas expressões.

Referências

[1] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer, New York, NY, EUA, 2007.