UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DECAT DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E CIÊNCIAS ATUARIAIS

Processos estocásticos

Disciplina ofertada pelo DECAT/UFS

Código: ESTAT0077
Nível: Graduação
Carga horária: 60h
Período: 2020.2

Professor responsável e ministrante: Luiz Henrique Dore

Aula 13: cadeias de Markov homogêneas e probabilidades de transição

Sumário

Metas

1. Apresentar as definições de probabilidades de transição e de matrizes de transição.
2. Introduzir a noção de cadeias de Markov homogêneas e as consequências da suposição de homogeneidade.

Objetivos

- Após estudar essa aula, o aluno ou aluna será capaz de:
  1. representar uma cadeia de Markov em termos das probabilidades de transição e da matriz de transição da cadeia;
  2. caracterizar uma cadeia de Markov homogênea;
  3. em situações simples, calcular as probabilidades de transição de uma cadeia de Markov homogênea e construir a sua matriz de transição.

Pré-requisitos

1. Aula 12.

Introdução

- Nas aulas 6 e 12, falou-se sobre a dificuldade de se tratar matematicamente processos estocásticos genéricos.
- Esse problema pode ser contornado adotando-se suposições a respeito do comportamento do processo.
- Tais suposições restringem o processo estocástico, de forma a facilitar o seu estudo.
- Na aula 12, adotou-se a suposição de que o valor do processo estocástico, num dado instante de tempo, depende apenas do valor observado mais recentemente.
- Essa suposição é conhecida como propriedade de Markov.
- Processos estocásticos, munidos da propriedade de Markov, são denominados processos de Markov.

Introdução

- A propriedade de Markov introduz várias vantagens ao processo estocástico.
- Uma delas diz respeito à distribuição de ordem k do processo.
- Observando as equações 7, 9 e 15, na aula 12, pode-se concluir que, se $\{X(t), t \geq 0\}$ é Markoviano, então a distribuição de ordem k desse processo, nos tempos $t_1 < \cdots, < t_k$, depende apenas da distribuição de $X(t_1)$ e das distribuições condicionais de $X(t_j)$, dado $X(t_{j-1})$, para cada $j \in \{2, \cdots, k\}$.
- No caso de uma cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$, que é um processo de Markov com tempo discreto e espaço de estados discreto, isso significa dizer que (equação 15, aula 12)

$$P[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n] =$$
$$= P[X_0 = i_0]P[X_1 = i_1 | X_0 = i_0] \cdots P[X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}]. \quad (1)$$

Introdução

- A probabilidade $P[X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}]$, na equação (1), é a **probabilidade de transição do estado i_{n-1} do processo para o estado i_n, no tempo** n.
- A noção de probabilidade de transição leva à noção de matriz de transição.
- A matriz de transição de uma cadeia de Markov, no tempo n, é a matriz cujo elemento (i, j) é a probabilidade de transição do estado i para o estado j no tempo n .
- Percebe-se, pela equação (1), que a distribuição de ordem k de uma cadeia de Makov fica completamente determinada quando são conhecidas a distribuição da cadeia no instante inicial e as probabilidades de transição ou, equivalentemente, as matrizes de transição, nos tempos $n \in \{0, 1, \cdots\}$.

Introdução

- Uma suposição, frequentemente adotada na prática, que facilita a obtenção das probabilidades de transição é a suposição de homogeneidade.
- Uma cadeia de Markov é homogênea se as probabilidades de transição independem do tempo nos quais as transições ocorrem.
- Por exemplo, se uma cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é homogênea, então a transição do estado i para o estado j nos tempos 2 e 5 ocorrem com a mesma probabilidade, isto é,

$$P[X_3 = j|X_2 = i] = P[X_6 = j|X_5 = i].$$

- A homogeneidade da cadeia de Markov implica na constância da sua matriz de transição com relação ao tempo.

Introdução

- Dessa forma, a distribuição de probabilidade de uma cadeia de Markov é completamente determinada pela distribuição da cadeia no tempo inicial e por uma única matriz, que é a sua matriz de transição.
- Mais ainda, no contexto de cadeias de Markov, homogeneidade equivale à estacionaridade no sentido estrito.
- Isto é, uma cadeia de Markov é homogênea se, e somente se, ela é estacionária no sentido estrito.
- Ao longo desse curso de processos estocásticos, só serão estudas cadeias de Markov homogêneas.
- O caso geral, além de ser potencialmente mais complicado, não é tão utilizado na prática [2, p. 78].

Tópico 23: probabilidades de transição

Definição 1

A probabilidade de transição do estado i para o estado j de uma cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$, no tempo n, é definida como

$$p_{i,j}(n) = P[X_n = j | X_{n-1} = i].$$

- A probabilidade de transição de o estado i para o estado j de uma cadeia de Markov, no tempo n, é a probabilidade de que a cadeia, estando no estado i no tempo $n-1$, evolua para o estado j após uma unidade de tempo.
- As probabilidades de transição exercem papel fundamental no cálculo de probabilidades relativas a uma cadeias de Markov.

Tópico 23: probabilidades de transição

- Viu-se, na aula 12, que a distribuição de ordem $n+1$ da cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$, nos tempos $0, 1, \cdots, n$, é

$$P[X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n] = \\ = P[X_0 = i_0] \cdot p_{i_0,i_1}(1) \cdot p_{i_1,i_2}(2) \cdots p_{i_{n-1},i_n}(n). \quad (2)$$

- Pode-se concluir que a distribuição de ordem n de uma cadeia de Markov é determinada pela distribuição da cadeia no instante de tempo inicial e pelas probabilidades de transição nos demais instantes de tempo.
- Em algumas situações, o estado inicial da cadeia de Markov é conhecido.
- No passeio aleatório, descrito no exemplo 1 da aula 2, a partícula se encontra, inicialmente, na origem. Ou seja, o estado inicial do passeio aleatório é 0.

Tópico 23: probabilidades de transição

- Na cadeia de Ehrenfest, descrita no exemplo 2 da aula 4, há quatro bolas na caixa 1, inicialmente. Ou seja, o estado inicial dessa cadeia de Ehrenfest é 4.
- O estado inicial da cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é representado pela variável aleatória X_0.
- Se, inicialmente, a cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ se encontra no estado i_0, então a distribuição de ordem n dessa cadeia, nos tempos $1, \cdots, n$, é

$$P[X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n | X_0 = i_0] = \\ = p_{i_0,i_1}(1) \cdot p_{i_1,i_2}(2) \cdots p_{i_{n-1},i_n}(n). \quad (3)$$

- Pode-se concluir que, se o estado inicial da cadeia de Markov é conhecido, então a distribuição de ordem n é determinada apenas pelas probabilidades de transição.

Tópico 23: probabilidades de transição

Exemplo 1

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ o passeio aleatório, no exemplo 1 da aula 2. Pelo que foi visto no exemplo 1 da aula 12, o passeio aleatório é uma cadeia de Markov com probabilidade de transição

$$p_{i,j}(n) = P[X_n = j | X_{n-1} = i] = \begin{cases} 1-p & \text{se } j = i-1; \\ p & \text{se } j = i+1. \end{cases}$$

Como, inicialmente, a partícula se encontra na origem, tem-se que a distribuição de ordem n, nos tempos $1, \cdots, n$, é

$$P[X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n | X_0 = 0] =$$
$$= p_{0,i_1}(1) \cdot p_{i_1,i_2}(2) \cdots p_{i_{n-1},i_n}(n).$$

Tópico 23: probabilidades de transição

Continuação do exemplo 1

A probabilidade de que, nos tempos 1, 2, 3 e 4, a partícula se encontre nas posições 1, 2, 1 e 0, respectivamente, é

$$P[X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0 | X_0 = 0] =$$
$$= p_{0,1}(1) \cdot p_{1,2}(2) \cdot p_{2,1}(3) \cdot p_{1,0}(4) =$$
$$= p \cdot p \cdot (1-p) \cdot (1-p) = p^2(1-p)^2.$$

Se, no tempo 3, a partícula se encontra na posição 3, então a probabilidade de que ela retorne para a origem, após três unidades de tempo, é

$$P[X_4 = 2, X_5 = 1, X_6 = 0 | X_3 = 3] =$$
$$= p_{3,2}(4) \cdot p_{2,1}(5) \cdot p_{1,0}(6) = (1-p)^3.$$

Tópico 23: probabilidades de transição

Exemplo 2

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, descrita no exemplo 4 da aula 2. Se $d = 6$, então, pelo que foi visto no exemplo 5 da aula 12, esse processo estocástico é uma cadeia de Markov com probabilidade de transição

$$p_{i,j}(n) = P[X_n = j | X_{n-1} = i] = \begin{cases} i/6 & \text{se } j = i - 1; \\ 1 - i/6 & \text{se } j = i + 1. \end{cases}$$

Supondo que, inicialmente, a caixa 1 contém 2 bolas, tem-se que, a distribuição de ordem n, nos tempos $1, \cdots, n$ é

$$P[X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n | X_0 = 2] =$$
$$= p_{2,i_1}(1) \cdot p_{i_1,i_2}(2) \cdots p_{i_{n-1},i_n}(n).$$

Tópico 23: probabilidades de transição

Continuação do exemplo 2

A probabilidade de que, nos tempos 1, 2, 3 e 4, a caixa 1 contenha 3, 2, 3 e 4 bolas, respectivamente, é

$$P[X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4 | X_0 = 2] =$$
$$= p_{2,3}(1) \cdot p_{3,2}(2) \cdot p_{2,3}(3) \cdot p_{3,4}(4) =$$
$$= (1 - 2/6)\,(3/6)\,(1 - 2/6)\,(1 - 3/6) = 1/9.$$

Se $P[X_4 = 2] = 1$, isto é, se, no tempo 4, a caixa 1 tem 2 bolas, então a probabilidade de que todas as bolas se encontrem na caixa 1, após quatro passos, é (fórmula 9, aula 12)

$$P[X_5 = 3, X_6 = 4, X_7 = 5, X_8 = 6 | X_4 = 2] =$$
$$= p_{2,3}(5) \cdot p_{3,4}(6) \cdot p_{4,5}(7) \cdot p_{5,6}(8) =$$
$$= (1 - 2/6)\,(1 - 3/6)\,(1 - 4/6)\,(1 - 5/6) = 1/54.$$

Tópico 23: probabilidades de transição

Exemplo 3

[1, p. 250] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1\}$ e probabilidades de transição

$$p_{i,j}(n) = \begin{cases} 1/3 + 1/(n+1) & \text{se } i = 0 \text{ e } j = 0; \\ 2/3 - 1/(n+1) & \text{se } i = 0 \text{ e } j = 1; \\ 1/2 & \text{se } i = 1 \text{ e } j = 0; \\ 1/2 & \text{se } i = 1 \text{ e } j = 1. \end{cases}$$

Se $P[X_0 = 1] = P[X_0 = 1] = 1/2$, então

$$P[X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1] =$$

$$= P[X_0 = 1] \cdot p_{1,0}(1) \cdot p_{0,0}(2) \cdot p_{0,1}(3) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Tópico 24: matrizes de transição

Definição 2

Seja $\{X_n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov. A matriz de transição de $\{X_n = 0, 1, \cdots\}$, no tempo n, é a matriz $\boldsymbol{P}(n)$ cujo elemento (i, j) é $p_{i,j}(n) = P[X_n = j | X_{n-1} = i]$.

- A matriz de transição de uma cadeia de Markov é a matriz cujo, elemento localizado na posição (i, j), é a probabilidade de transição do estado j da cadeia para o estado i, no tempo n.
- A matriz de transição no tempo n contém as probabilidades de transição da cadeia de Markov correspondente no tempo n.
- As dimensões da matriz de transição dependem da quantidade de estados que a cadeia de Markov pode assumir.

Tópico 24: matrizes de transição

- Se o espaço de estados da cadeia de Makov possui um número finito de elementos, então a matriz de transição correspondente a essa cadeia tem dimensões finitas.
- Por exemplo, se $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados é $S_{X_n} = \{0, 1, \cdots, d\}$, então a matriz de transição dessa cadeia, no tempo n, é a matriz $\boldsymbol{P}(n)$ tal que

$$\boldsymbol{P}(n) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{0,0}(n) & p_{0,1}(n) & \cdots & p_{0,d}(n) \\ p_{1,0}(n) & p_{1,1}(n) & \cdots & p_{1,d}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{d,0}(n) & p_{d,1}(n) & \cdots & p_{d,d}(n) \end{bmatrix} \end{array}. \tag{4}$$

- Nesse caso, $\boldsymbol{P}(n)$ tem dimensões $(d+1) \times (d+1)$.

Tópico 24: matrizes de transição

- Se o espaço de estados da cadeia de Makov possui um número infinito de elementos, então a matriz de transição dessa cadeia tem dimensões infinitas.
- Por exemplo, se $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados é $S_{X_n} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, então a matriz de transição dessa cadeia, no tempo n, é a matriz $\boldsymbol{P}(n)$ tal que

$$\boldsymbol{P}(n) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{0,0}(n) & p_{0,1}(n) & p_{0,2}(n) & \cdots \\ p_{1,0}(n) & p_{1,1}(n) & p_{1,2}(n) & \cdots \\ p_{2,0}(n) & p_{2,1}(n) & p_{2,2}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}. \tag{5}$$

- Nesse caso, $\boldsymbol{P}(n)$ tem dimensões infinitas.

Tópico 24: matrizes de transição

- Na matriz de transição no tempo n, as linhas correspondem aos estados iniciais, isto é, aos estados no tempo n, e as colunas aos estados finais, isto é, aos estados no tempo $n+1$.
- Pode-se ver que, a i-ésima linha de uma matriz de transição contém as probabilidades de transição do estado i para cada um dos estados da cadeia de Markov correspondente.
- Por exemplo, a linha 1 matriz de transição (4) contém as probabilidades de transição do estado 1 para cada um dos estados $j \in \{0, 1, \cdots, d\}$.
- Já a linha d matriz de transição (4) contém as probabilidades de transição do estado d para cada estado $j \in \{0, 1, \cdots, d\}$.
- A linha 2 matriz de transição (5) contém as probabilidades de transição do estado 2 para cada estado $j \in \{0, 1, 2, \cdots\}$.

Tópico 24: matrizes de transição

- A diagonal da matriz de transição contém as probabilidades de permanência no estado atual da cadeia.
- Isto é, o i-ésimo elemento da diagonal da matriz de transição no tempo n é a probabilidade de que, estando no estado i no tempo n, a cadeia permaneça no estado i após um passo.
- Como, para todo (i, j), $p_{i,j}(n)$ é uma probabilidade, tem-se que

$$p_{i,j}(n) \geq 0. \tag{6}$$

- Além disso, como os elementos da i-ésima linha de $\boldsymbol{P}(n)$ são as probabilidades $p_{i,j}(n)$, $\forall\ j \in S_{X_n}$, tem-se que

$$\sum_{j \in S_{X_n}} p_{i,j}(n) = \sum_{j \in S_{X_n}} P[X_{n+1} = j | X_n = i] = 1. \tag{7}$$

Tópico 24: matrizes de transição

- Matrizes que satisfazem as condições (6) e (7) são denominadas matrizes estocásticas.

Definição 3

Uma matriz $\boldsymbol{A}$, cujo elemento na posição (i, j) é $a_{i,j}$, é dita ser uma matriz estocástica se

1. $a_{i,j} \geq 0$, para todo (i, j);
2. $\sum_j a_{i,j} = 1$, para todo i.

- Ou seja, uma matriz é estocástica se seus elementos são não negativos e se a soma de todos os seus elementos numa mesma linha é igual a 1.
- Portanto, matrizes de transição são matrizes estocásticas.

Tópico 24: matrizes de transição

- Qualquer matriz estocástica pode ser vista como a matriz de transição de alguma cadeia de Markov, em algum instante de tempo.
- Por outro lado, associada a cada cadeia de Markov, num dado instante de tempo n, há uma matriz estocástica, que é a matriz de transição da cadeia no instante de tempo n.

Definição 4

Uma matriz A, cujo elemento na posição (i, j) é $a_{i,j}$, é dita ser duplamente estocástica se A é estocástica e se

$$\sum_i a_{i,j} = 1, \quad \text{para todo } j.$$

Tópico 24: matrizes de transição

- Ou seja, uma matriz é duplamente estocástica se seus elementos são não negativos, se a soma de todos os seus elementos numa mesma linha é igual a 1 e se a soma de todos os seus elementos numa mesma coluna também é igual a 1.
- Matrizes duplamente estocásticas exercem papel relevante na descrição do comportamento de cadeias de Markov **irredutíveis**, **aperiódicas** e com espaço de estados finito.
- Pode-se mostrar que, se a matriz de transição de uma cadeia de Markov **irredutível**, **aperiódica** e com espaço de estados finito é duplamente estocástica, então quando $n \to \infty$, os estados da cadeia tendem a se distribuir de maneira uniforme [2, p. 97].
- Esse assunto será estudado no tópico 39, do presente curso, que trata da **distribuição estacionária** de uma cadeia de Markov.

Tópico 24: matrizes de transição

Exemplo 4

Seja A a matriz 4×4 definida como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 2/4 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/8 & 3/4 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

Todos os elementos de A são não negativos. Seja $a_{i,j}$ o elemento de A na posição (i, j), tem-se que

$$\sum_{j=1}^{4} a_{1,j} = a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} =$$

$$= 0 + 1/3 + 2/3 + 0 = 1.$$

Tópico 24: matrizes de transição

Continuação do exemplo 4

Analogamente,

$$\sum_{j=1}^{4} a_{2,j} = \sum_{j=1}^{4} a_{3,j} = \sum_{j=1}^{4} a_{4,j} = 1.$$

Logo, a matriz A é uma matriz estocástica. Entretanto, A não é duplamente estocástica, pois a soma dos elementos na segunda coluna não é igual a 1, como se vê abaixo:

$$\sum_{i=1}^{4} a_{i,2} = a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} + a_{4,2} =$$

$$= 1/3 + 1/4 + 0 + 1/8 = 11/24 \neq 1.$$

Tópico 24: matrizes de transição

Exemplo 5

Seja A a matriz 5×5 definida como

$$A = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ 2/5 & 0 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Todos os elementos de A são não negativos. Seja $a_{i,j}$ o elemento de A na posição (i, j), tem-se que

$$\sum_{j=1}^{5} a_{1,j} = 1/5 + 1/5 + 3/5 + 0 + 0 = 1.$$

Tópico 24: matrizes de transição

Continuação do exemplo 5

Analogamente, $\sum_{j=1}^{5} a_{2,j} = \sum_{j=1}^{5} a_{3,j} = \sum_{j=1}^{5} a_{4,j} = \sum_{j=1}^{5} a_{5,j} = 1$. Logo, a matriz A é uma matriz estocástica. Nota-se que

$$\sum_{i=1}^{5} a_{i,1} = a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} + a_{4,1} + a_{5,1} =$$

$$= 1/5 + 1/5 + 2/5 + 1/5 + 0 = 1.$$

Ou seja, a soma da primeira coluna é 1. Analogamente, a soma de cada uma das demais colunas é 1, isto é,

$$\sum_{i=1}^{5} a_{i,2} = \sum_{i=1}^{5} a_{i,3} = \sum_{i=1}^{5} a_{i,4} = \sum_{i=1}^{5} a_{i,5} = 1.$$

Conclui-se que A é uma matriz duplamente estocástica.

Tópico 24: matrizes de transição

Exemplo 6

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ o passeio aleatório, no exemplo 1 da aula 2. Pelo que foi visto no exemplo 1, a matriz de transição do passeio aleatório é a matriz

$$\boldsymbol{P}(n) = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}.$$

Pode-se ver que essa é duplamente estocástica.

Tópico 24: matrizes de transição

Exemplo 7

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest no exemplo 2. A matriz de transição dessa cadeia de Markov é a matriz

$$\boldsymbol{P}(n) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/6 & 0 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/6 & 0 & 3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Claramente, essa não é duplamente estocástica.

Tópico 24: matrizes de transição

Exemplo 8

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Markov no exemplo 3. A matriz de transição desse processo é a matriz

$$\boldsymbol{P}(n) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \qquad 0 \qquad & \qquad 1 \qquad \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/3 + 1/(n+1) & 2/3 - 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Por ser uma matriz de transição, $\boldsymbol{P}(n)$ é uma matriz estocástica. Para $\boldsymbol{P}(n)$ ser duplamente estocástica, a soma de cada uma das suas colunas deve ser 1. Ou seja, deve-se ter

$$p_{0,0}(n) + p_{1,0}(n) = 1/3 + 1/(n+1) + 1/2 = 1;$$
$$p_{0,1}(n) + p_{1,1}(n) = 2/3 - 1/(n+1) + 1/2 = 1.$$

Tópico 24: matrizes de transição

Continuação do exemplo 8

Da primeira equação acima, tem-se que

$$1/3 + 1/(n+1) + 1/2 = 1 \Leftrightarrow 5/6 + 1/(n+1) = 1 \Leftrightarrow n = 5.$$

Substituindo $n = 5$ na segunda equação, obtém-se

$$2/3 - 1/(n+1) + 1/2 = 4/6 - 1/6 + 3/6 = 6/6 = 1.$$

Portanto, se $n = 5$, então $P(n) = P(5)$ é uma matriz duplamente estocástica. Entretanto, para todos os outros valores de n diferentes de 5, $P(n)$ não é duplamente estocástica.

Tópico 25: cadeias de Markov homogêneas

Definição 5

Uma cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é dita ser homogênea se suas probabilidades de transição são constantes com relação ao tempo, isto é, se para todo $i, j \in S_{X_n}$, $p_{i,j}(n)$ é constante com relação a n.

- Se uma cadeia de Markov é homogênea, então as probabilidades de transição não dependem do tempo e são escritas como

$$p_{i,j}(n) = p_{i,j}.$$

- A matriz de transição de uma cadeia de Markov homogênea é constante com relação ao tempo, podendo ser escrita como

$$\boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{P}.$$

Tópico 25: cadeias de Markov homogêneas

- Na cadeia de Markov homogênea, a transição do estado i para o estado j ocorre com probabilidade $p_{i,j}$, em qualquer tempo.
- Associada a uma cadeia de Markov homogênea, há uma única matriz de transição $\boldsymbol{P}$, cujo elemento na posição (i,j) é a probabilidade $p_{i,j}$.
- Por exemplo, se $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov homogênea, com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, \cdots, d\}$, então a matriz de transição associada a essa cadeia é a matriz

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,d} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{d,0} & p_{d,1} & \cdots & p_{d,d} \end{bmatrix} \end{array}. \tag{8}$$

Tópico 25: cadeias de Markov homogêneas

- Se $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov homogênea com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, então a matriz de transição associada a essa cadeia é a matriz

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}. \tag{9}$$

- Pela equação (2), se a cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é homogênea, então a distribuição de ordem $n + 1$ dessa cadeia, nos tempos $0, 1, \cdots, n$, é

$$P[X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n] = P[X_0 = i_0] \cdot p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n}. \tag{10}$$

Tópico 25: cadeias de Markov homogêneas

- Ou seja, a distribuição de ordem n de uma cadeia de Markov homogênea é determinada pela distribuição da cadeia no tempo inicial e pela matriz de transição associada à cadeia.
- Se a cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é homogênea e seu estado inicial é i_0, então a distribuição de ordem n dessa cadeia, nos tempos $1, \cdots, n$, é

$$P[X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n | X_0 = i_0] = p_{i_0,i_1} \cdot p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n}. \quad (11)$$

- Ou seja, a distribuição de ordem n de uma cadeia de Markov homogênea, cujo estado inicial é conhecido, é determinada apenas pela matriz de transição associada à cadeia.
- Nota-se que, se $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov homogênea, então $P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_1 = j | X_0 = i] = p_{i,j}$.

Tópico 25: cadeias de Markov homogêneas

Exemplo 9

O passeio aleatório, no exemplo 1 da aula 2, é uma cadeia de Markov, pois, pelo que foi visto no exemplo 1, as probabilidades de transição são constantes com relação ao tempo. A matriz de transição associada a essa cadeia encontra-se no exemplo 6.

Exemplo 10

A cadeia de Ehrenfest, no exemplo 4 da aula 2, é uma cadeia de Markov homogênea. As probabilidades de transição, dadas no exemplo 5 da aula 12, são constantes no tempo. O caso em que $X_0 = 2$ e $d = 6$ é tratado no exemplo 2. A matriz de transição, nesse caso particular, é dada no exemplo 7.

Tópico 25: cadeias de Markov homogêneas

Exemplo 11

As cadeias de Markov, apresentadas nos exemplos 6, 7 , 8 e 9 da aula 12, são homogêneas. Nesses exemplos, são dadas as probabilidades de transição das respectivas cadeias de Markov.

Referências I

[1] Pierre Brenaud, *Markov chains: gibbs fields, monte carlo simulation, and queues*, 1 ed., Springer, New York, NY, EUA, 1999.

[2] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer, New York, NY, EUA, 2007.