Notas complementares sobre processos de médias móveis

Função média.

$$m_X(n) = E[X_n] = E[\mu + \alpha Y_{n-1} + Y_n] = \mu + \alpha E[Y_{n-1}] + E[Y_n] = \mu.$$

Função de autocorrrelação.

$$\begin{aligned} R_X(m,n) &= E(X_m X_n) = E[(\mu + \alpha Y_{m-1} + Y_m)(\mu + \alpha Y_{n-1} + Y_n)] = \\ &= E[(\mu^2 + \alpha\mu Y_{n-1} + \mu Y_n) + (\alpha\mu Y_{m-1} + \alpha^2 Y_{m-1}Y_{n-1} + \alpha Y_{m-1}Y_n) + (\mu Y_m + \alpha Y_m Y_{n-1} + Y_m Y_n)] = \\ &= \mu^2 + \alpha^2 E(Y_{m-1}Y_{n-1}) + \alpha E(Y_{m-1}Y_n) + \alpha E(Y_m Y_{n-1}) + E(Y_m Y_n). \end{aligned}$$

Se n=m, então

$$R_X(m,n) = R_X(m,m) = \mu^2 + \alpha^2 E(Y_{m-1}Y_{m-1}) + \alpha E(Y_{m-1}Y_m) + \alpha E(Y_m Y_{m-1}) + E(Y_m Y_m) = \mu^2 + \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2.$$

Se $n = m + 1$, então

$$R_X(m,n) = R_X(m,m+1) = \mu^2 + \alpha^2 E(Y_{m-1}Y_m) + \alpha E(Y_{m-1}Y_{m+1}) + \alpha E(Y_m Y_m) + E(Y_m Y_{m+1}) = \mu^2 + \alpha\sigma^2.$$

Se $n = m + 2$, então

$$R_X(m,n) = R_X(m,m+2) = \mu^2 + \alpha^2 E(Y_{m-1}Y_{m+1}) + \alpha E(Y_{m-1}Y_{m+2}) + \alpha E(Y_m Y_{m+1}) + E(Y_m Y_{m+2}) = \mu^2.$$

Pode-se ver que, se $n > m + 1$, então $R_X(m,n) = \mu^2$. Além disso, $R_X(m,m-h) = R_X(m,m+h)$. Isto é, a função de autocorrelação depende apenas da distância entre os instantes de tempo m e n. Logo, a função de autocorrelação pode ser escrita como

$$R_X(m,n) = \begin{cases} \mu^2 + \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2 & \text{se } m = n \\ \mu^2 + \alpha\sigma^2 & \text{se } |m-n| = 1 \\ \mu^2 & \text{se } |m-n| > 1 \end{cases}$$

Função de autocovariância.

$$C_X(m,n) = R_X(m,n) - m_X(m)m_X(n) = R_X(m,n) - \mu^2.$$

Se $n = m$, então

$$C_X(m,n) = C_X(m,m) = V_X(m) = R_X(m,m) - \mu^2 = \mu^2 + \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2 = (\alpha^2+1)\sigma^2.$$

Se $n = m + 1$, então

$$C_X(m,n) = C_X(m,m+1) = R_X(m,m+1) - \mu^2 = \mu^2 + \alpha\sigma^2 - \mu^2 = \alpha\sigma^2.$$

Se $n = m + 2$, então

$$C_X(m,n) = C_X(m,m+2) = R_X(m,m+2) - \mu^2 = \mu^2 - \mu^2 = 0.$$

Pode-se ver que, se $n > m + 1$, então $C_X(m,n) = 0$. Além disso, $C_X(m,m-h) = C_X(m,m+h)$. Isto é, a função de autocovariância depende apenas da distância entre os instantes de tempo m e n. Logo, a função de autocovariância pode ser escrita como

$$C_X(m,n) = \begin{cases} V_X(m) = (\alpha^2+1)\sigma^2 & \text{se } m = n \\ \alpha\sigma^2 & \text{se } |m-n| = 1 \\ 0 & \text{se } |m-n| > 1 \end{cases}$$

Coeficiente de autocorrelação

$$\rho_X(m,n) = \frac{C_X(m,n)}{\sqrt{V_X(m)V_X(n)}}.$$

Se $n = m$, então

$$\rho_X(m,n) = \rho_X(m,m) = 1.$$

Se $n = m + 1$, então

$$\rho_X(m,n) = \rho_X(m,m+1) = \frac{C_X(m,m+1)}{\sqrt{V_X(m)V_X(m+1)}} = \frac{\alpha\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2+1)\sigma^2(\alpha^2+1)\sigma^2}} = \frac{\alpha\sigma^2}{(\alpha^2+1)\sigma^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}.$$

Pode-se ver que, se $n > m+1$, então $\rho_X(m,n) = 0$. Além disso, $\rho_X(m,m-h) = \rho_X(m,m+h)$. Isto é, o coeficiente de autocorrelação depende apenas da distância entre os instantes de tempo m e n. Logo, o coeficiente de autocorrelação pode ser escrito como

$$\rho_X(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ \frac{\alpha}{\alpha^2+1} & \text{se } |m-n| = 1 \\ 0 & \text{se } |m-n| > 1 \end{cases}$$