UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DECAT DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E CIÊNCIAS ATUARIAIS

Processos estocásticos

Disciplina ofertada pelo DECAT/UFS

Código: ESTAT0077
Nível: Graduação
Carga horária: 60h
Período: 2020.2

Professor responsável e ministrante: Luiz Henrique Dore

Aula 12: definição e exemplos de cadeias de Markov

Sumário

Metas

1. Apresentar a definição e alguns exemplos de cadeias de Markov.

Objetivos

- Após estudar essa aula, o aluno ou aluna será capaz de:
  1. caracterizar uma cadeia de Markov;
  2. interpretar a propriedade de Markov;
  3. em situações simples, verificar se um processo estocástico possui a propriedade de Markov.

Pré-requisitos

1. Unidade 1.

Introdução

- Na unidade 1, os processos estocásticos foram tratados de forma genérica.
- Viu-se que um processo estocástico pode ser definido como um conjunto $\{X(t), t \geq 0\}$, cujos elementos são variáveis aleatórias indexadas pelo tempo t.
- Isto é, $X(t)$ é uma variável aleatória que pode vir a ser observada num instante de tempo t.
- Foram apresentadas características dos processos estocásticos como a distribuição de ordem k, a função média, a função de autocorrelação, a função de autocovariância, a função de variância e o coeficiente de autocorrelação.
- Essa abordagem genérica dificulta a análise matemática dos processos estocásticos.

Introdução

- Conforme mencionado na aula 6, um processo estocástico pode se tornar matematicamente tratável se suposições suposições a respeito do seu comportamento forem adotadas.
- Por exemplo, pode-se adotar suposições sobre a distribuição de ordem k do processo.
- Isso foi feito na aula 6, quando foram definidos os processos com incrementos independente se/ou estacionários, estacionários no sentido estrito e estacionários no sentido amplo.
- Uma outra possibilidade é adotar suposições sobre a estrutura de dependência entre as variáveis aleatórias no processo.
- Pode-se, por exemplo, considerar que o valor do processo, num dado instante de tempo, depende apenas do valor observado mais recentemente.

Introdução

- Isto é, o valor do processo no instante de tempo 4, dados os valores nos instantes de tempo 1, 2 e 3, depende apenas do valor no instante de tempo 3, que é o valor observado mais recentemente.
- Nesse caso, a distribuição $X(4)$, dados $X(1)$, $X(2)$ e $X(3)$, depende apenas de $X(3)$. Ou seja,

$$P[X(4) \leq x_4, |X(3) = x_3, X(2) = x_2, X(1) = x_1] = \\ = P[X(4) \leq x_4, |X(3) = x_3].$$

- Essa propriedade é denominada **propriedade de Markov**.
- Processos que possuem a propriedade de Markov são chamados **processos de Markov**.

Introdução

- Pode-se mostrar que, num processo de Markov, os valores futuros são influenciados apenas pelo valor mais recente.
- Processos de Markov com tempo discreto e espaço de estados discreto são denominados **cadeias de Markov**.
- Cadeias de Markov são o tema da unidade 2.
- Na presente aula, os processo de Markov e as cadeias de Markov são definidos.
- São apresentados exemplos de cadeias de Markov, nos quais demonstra-se como verificar se o processo possui a propriedade de Markov.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Definição 1

O processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é dito ser um processo de Markov, ou um processo Markoviano, se [2, p. 61]

$$P[X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = \\ = P[X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_{t_n}],$$

onde $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$.

- Ou seja, se um processo é Markoviano, então, dados os valores nos tempos $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, o valor num dado instante de tempo $t_{n+1} > t_n$ depende apenas do valor tempo t_n.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

- De modo geral, um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo de Markov se [2, p. 73]

$$P[X(t_{n+1}) \in A | X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = \\ = P[X(t_{n+1}) \in A | X(t_n) = x_{t_n}], \quad (1)$$

para todo evento A e instantes $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$.

- A equação (1) diz que a probabilidade do processo sair do estado x_{t_n}, no tempo t_n, para um estado incluso em A, no tempo t_{n+1}, não depende da forma como o processo chegou ao estado x_{t_n}, isto é, não depende do caminho percorrido até x_{t_n}.
- A equação (1) é conhecida como **propriedade de Markov**.
- Portanto, pode-se dizer que um processo é Markoviano se ele satisfaz a propriedade de Markov.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 1

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ o passeio aleatório, no exemplo 1 da aula 2. Viu-se, no exemplo 5 da aula 4, que

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \quad \forall\ n \in \{1, 2, \cdots\},$$

onde $Y_1, \cdots, Y_n$ são variáveis aleatórias independentes tais que

$$P[Y_n = y_n] = \begin{cases} 1 - p & \text{se } y_n = -1; \\ p & \text{se } y_n = 1. \end{cases}$$

A posição da partícula, no tempo $n + 1$, pode ser escrita como

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}, \quad \forall\ n \in \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

Nota-se que Y_{n+1} é independente de

$$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n,\ \cdots,\ X_2 = Y_1 + Y_2,\ X_1 = Y_1.$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 1

Portanto, dados $X_0, X_1, \cdots, X_n$, a distribuição de probabilidade de $X_{n+1} = X_n + Y_n$ depende apenas X_n. Isto é,

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ = P[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

Ou seja, o passeio aleatório é uma cadeia de Markov. Utilizando a independência entre Y_{n+1} e X_n, obtém-se

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = j | X_n = i] &= P[X_n + Y_{n+1} = j | X_n = i] = \\ &= P[Y_{n+1} = j - X_n | X_n = i] = \\ &= P[Y_{n+1} = j - i | X_n = i] = \\ &= P[Y_{n+1} = j - i] = \begin{cases} 1 - p, & \text{se } j = i - 1 \\ p, & \text{se } j = i + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 2

Seja $\{N(t), t \geq 0 \cdots\}$ um processo estocástico, com tempo contínuo e espaço de estados $S_{X_t} = \{0, 1, \cdots\}$, tal que

1. seu estado inicial é zero, isto é, $P[N(0) = 0] = 1$;
2. seus incrementos são independentes;
3. seu incremento, no intervalo $[t_1, t_2)$, segue distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda(t_2 - t_1)$, isto é,

$$P[N(t_2) - N(t_1) = x] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^x e^{\lambda(t_2 - t_1)}}{x!}.$$

O processo $\{N(t), t \geq 0 \cdots\}$ é denominado **processo de Poisson**. O processo de Poisson é um processo Markoviano.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 2

De fato, dados $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
N(t_1) &= N(t_1) - 0 = N(t_1) - N(0) = N(t_1) - N(t_0);\\
N(t_2) &= [N(t_1) - N(t_0)] + [N(t_2) - N(t_1)] = N(t_1) - N(t_0);\\
N(t_3) &= [N(t_1) - N(t_0)] + [N(t_2) - N(t_1)] + [N(t_3) - N(t_2)];\\
&\vdots\\
N(t_k) &= [N(t_1) - N(t_0)] + [N(t_2) - N(t_1)] + \cdots + [N(t_n) - N(t_{k-1})];\\
N(t_{k+1}) &= [N(t_1) - N(t_0)] + [N(t_2) - N(t_1)] + \cdots + [N(t_{k+1}) - N(t_k)].
\end{aligned}$$

Se $Y_i = N(t_i) - N(t_{i-1})$ denota o incremento referente ao intervalo $(t_{i-1}, t_i]$, então, $\forall\, j \in \{1, \cdots, k, k+1\}$,

$$N(t_j) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{j-1} + Y_j = N(t_{j-1}) + Y_j.$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 2

Como, por definição, os incrementos $Y_1, \cdots, Y_k, Y_{k+1}$ são independentes, tem-se que Y_{k+1} é independente de

$$N(t_k) = Y_1 + \cdots + Y_k,\ N(t_{k-1}) = Y_1 + \cdots + Y_{k-1},\ \cdots,\ N(t_1) = Y_1.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
&P[N(t_{k+1}) = y | N(t_k) = x, N(t_{k-1}) = x_{k-1}, \cdots, N(t_1) = x_1] = \\
&= P[N(t_k) + Y_{k+1} = y | N(t_k) = x, N(t_{k-1}) = x_{k-1}, \cdots, N(t_1) = x_1] = \\
&= P[Y_{k+1} = y - N(t_k) | N(t_k) = x, N(t_{k-1}) = x_{k-1}, \cdots, N(t_1) = x_1] = \\
&= P[Y_{k+1} = y - x | N(t_k) = x, N(t_{k-1}) = x_{k-1}, \cdots, N(t_1) = x_1] = \\
&= P[Y_{k+1} = y - x] = P[Y_{k+1} = y - x | N(t_k) = x] = \\
&= P[Y_{k+1} = y - N(t_k) | N(t_k) = x] = P[N(t_{k+1}) = y | N(t_k) = x],
\end{aligned}$$

de onde se conclui que o processo de Poisson é Markoviano.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 2

Por definição, $Y_{k+1} \sim \text{Poisson}[\lambda(t_{k+1} - t_k)]$. Logo,

$$P[N(t_{k+1}) = y | N(t_k) = x] = P[Y_{k+1} = y - x] = \\ = \frac{[\lambda(t_{k+1} - t_k)]^{y-x} e^{\lambda(t_{k+1}-t_k)}}{(y-x)!}.$$

O processo de Poisson é um caso particular de um **processo de contagem** [2, p. 231]. Se $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de contagem, então $N(t)$ é o número de ocorrências de um determinado evento até o tempo t. Tais processos podem ser utilizados para modelar, por exemplo, o número de ocorrências de um sinistro, coberto por uma apólice de seguros, ao longo de um determinado período de tempo [3, p. 119].

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

- Pode-se mostrar que, se $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo de Markov, então (ver as notas complementares)

$$P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_{n+2}) \in A_{n+2}, \cdots | X(t_n) = x_{t_n}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = \\ = P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1}, X(t_{n+2}) \in A_{n+2}, \cdots | X(t_n) = x_{t_n}]. \quad (2)$$

- Portanto, os valores futuros de um processo de Markov são influenciados apenas pelo valor observado mais recentemente.
- Em particular, da equação (2), pode-se concluir que

$$P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1} | X(t_{n-1}) = x_{t_{n-1}}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}] = \\ = P[X(t_{n+1}) \in A_{n+1} | X(t_{n-1}) = x_{t_{n-1}}]. \quad (3)$$

- Isto é, se um processo é Markoviano, então o seu valor, num dado tempo, é influenciado apenas pelo último valor observado.
- Um processo Markoviano "se lembra" apenas do seu estado mais recente, ignorando o seu estado em tempos anteriores.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

- Sejam $t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$.
- Se o processo $\{X(t), t \geq 0\}$ é Markoviano, então a distribuição condicional de $X(t_{n+1})$, dados $X(t_n), X(t_{n-1}), \cdots, X(t_1)$, só depende de $X(t_n)$. Consequentemente, a esperança e a variância condicionais de $X(t_{n+1})$, dados $X(t_n), X(t_{n-1}), \cdots, X(t_1)$, só dependem de $X(t_n)$, isto é,

$$E[X(t_{n+1})|X(t_n), X(t_{n-1}), \cdots, X(t_1)] = E[X(t_{n+1})|X(t_n)] \quad (4)$$

e

$$V[X(t_{n+1})|X(t_n), X(t_{n-1}), \cdots, X(t_1)] = V[X(t_{n+1})|X(t_n)]. \quad (5)$$

- Uma outra importante consequência da propriedade de Markov diz respeito à distribuição de ordem k do processo.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

- Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo com espaço de estados contínuo.
- A distribuição de ordem k desse processo, nos instantes de tempo $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, pode ser representada pela sua função de densidade de probabilidade de ordem k, a qual pode ser escrita como (definição 6, aula 2)

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_k; t_1, \cdots, t_k) &= f(x_0, x_{t_1}, \cdots, x_{t_k}) = \\ &= f(x_{t_1}) f(x_{t_2}|x_{t_1}) f(x_{t_3}|x_{t_2}, x_{t_1}) \cdots f(x_{t_k}|x_{t_{k-1}}, x_{t_{k-2}}, \cdots, x_{t_1}), \end{aligned} \quad (6)$$

  onde $f(x_{t_1})$ é a densidade de $X(t_1)$ e, $\forall\ j \in \{2, \cdots, k\}$, a função $f(x_{t_j}|x_{t_{j-1}}, \cdots, x_{t_1})$ é a função de densidade condicional de $X(t_j)$, dado que $X(t_{j-1}) = x_{t_{j-1}}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}$.
- Pode-se concluir que, se $\{X(t), t \geq 0\}$ é Markoviano, então

$$f(x_{t_1}, \cdots, x_{t_k}) = f(x_{t_1}) f(x_{t_2}|x_{t_1}) f(x_{t_3}|x_{t_2}) \cdots f(x_{t_k}|x_{t_{k-1}}). \quad (7)$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

- Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo com espaço de estados discreto.
- A distribuição de ordem k desse processo, nos instantes de tempo $t_1 < \cdots < t_k$, pode ser representada pela sua função de probabilidade de ordem k, a qual pode ser escrita como (definição 6, aula 2)

$$p(x_1, \cdots, x_k; t_1, \cdots, t_k) = p(x_0, x_{t_1}, \cdots, x_{t_k}) =$$
$$= p(x_{t_1})p(x_{t_2}|x_{t_1})p(x_{t_3}|x_{t_2}, x_{t_1}) \cdots p(x_{t_k}|x_{t_{k-1}}, x_{t_{k-2}}, \cdots, x_{t_1}), \quad (8)$$

  onde $p(x_{t_1}) = P[X(t_1) = x_{t_1}]$ e, $\forall\ j \in \{2, \cdots, k\}$, a função $p(x_{t_j}|x_{t_{j-1}}, \cdots, x_{t_1})$ é a probabilidade de $X(t_j) = x_{t_j}$, dado que $X(t_{j-1}) = x_{t_{j-1}}, \cdots, X(t_1) = x_{t_1}$.
- Pode-se concluir que, se $\{X(t), t \geq 0\}$ é Markoviano, então

$$p(x_{t_1}, \cdots, x_{t_k}) = p(x_{t_1})p(x_{t_2}|x_{t_1})p(x_{t_3}|x_{t_2}) \cdots p(x_{t_k}|x_{t_{k-1}}). \quad (9)$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 3

O processo de médias móveis de ordem 1, visto no exemplo 20 da aula 4, não é um processo Markoviano. De fato, o processo de médias móveis de ordem 1 é definido como

$$X_n = \mu + \alpha Y_{n-1} + Y_n, \quad \forall\ n \in \{1, 2, \cdots\},$$

onde $\{Y_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é um ruído branco. Partindo dessa expressão, pode-se mostrar que (ver notas complementares)

$$X_n = \mu \sum_{i=1}^{n-1} (-\alpha)^i - \sum_{i=1}^{n} (-\alpha)^i X_{n-i} + Y_n, \ \ \forall\ n \in \{1, 2, \cdots\},$$

onde $X_0 = Y_0$.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 3

Como pois Y_n é independente de $X_{n-1}, \cdots, X_1, X_0 = Y_0$ e o processo $\{Y_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é um ruído branco, tem-se que

$$E[Y_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \cdots, X_1 = x_1, X_0 = x_0] = E[Y_n] = 0,$$

Logo,

$$E[X_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \cdots, X_1 = x_1, X_0 = x_0] = \\ = \mu \sum_{i=1}^{n-1} (-\alpha)^i - \sum_{i=1}^{n} (-\alpha)^i x_{n-i}.$$

Daí, conclui-se que a média condicional de X_n, dados os valores de $X_{n-1}, \cdots, X_1, X_0 = Y_0$, depende de todos esses valores, o que, pela equação (4), viola a propriedade de Markov.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 4

Seja $\{\epsilon_n, n = 1, 2, \cdots\}$ um ruído branco. O processo estocástico $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ definido como

$$X_n = \mu + \alpha X_{n-1} + \epsilon_n,$$

onde ϵ_n é independente de $X_{n-1}, \cdots, X_1, X_0$, é um **processo autorregressivo de ordem 1**. Nota-se que

$$P[X_n \leq y | X_{n-1} = x, X_{n-2} = x_{n-2}, \cdots, X_0 = x_0] =$$
$$= P[\mu + \alpha X_{n-1} + \epsilon_n \leq y | X_{n-1} = x, X_{n-2} = x_{n-2} \cdots, X_0 = x_0] =$$
$$= P[\epsilon_n \leq y - \mu - \alpha X_{n-1} | X_{n-1} = x, X_{n-2} = x_{n-2} \cdots, X_0 = x_0] =$$
$$= P[\epsilon_n \leq y - \mu - \alpha x | X_{n-1} = x, X_{n-2} = x_{n-2} \cdots, X_0 = x_0].$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 4

Como ϵ_n é independente de $X_{n-1}, \cdots, X_1, X_0$, tem-se que

$$P[\epsilon_n \leq y - \mu - \alpha x | X_{n-1} = x, X_{n-2} = x_{n-2} \cdots, X_0 = x_0] =$$
$$= P[\epsilon_n \leq y - \mu - \alpha x] = P[\epsilon_n \leq y - \mu - \alpha x | X_{n-1} = x] =$$
$$= P[\epsilon_n \leq y - \mu - \alpha X_{n-1} | X_{n-1} = x] =$$
$$= P[\mu + \alpha X_{n-1} + \epsilon_n \leq y | X_{n-1} = x] = P[X_n \leq y | X_{n-1} = x]$$

Ou seja,

$$P[X_n \leq y | X_{n-1} = x, X_{n-2} = x_{n-2}, \cdots, X_0 = x_0] =$$
$$= P[X_n \leq y | X_{n-1} = x],$$

de onde se conclui que o processo autorregressivo de ordem 1 é um processo Markoviano.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 4

Pode-se mostrar que (ver notas complementares)

$$X_n = \mu \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \epsilon_{n-i} + \alpha^n X_0, \quad \forall\ n \in \{1, 2, \cdots\}.$$

Além disso, se $|\alpha| < 1$ e X_0 é uma variável aleatória tal que

$$E[X_0] = \frac{\mu}{1-\alpha} \quad \text{e} \quad V[X_0] = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2},$$

então o processo autorregressivo de ordem 1 é um processo estacionário no sentido amplo com

$$m_X(n) = m_X = \frac{\mu}{1-\alpha} \quad \text{e} \quad C_X(n, n+k) = C_X(k) = \frac{\sigma^2 \alpha^k}{1-\alpha^2},$$

para todo $n, k \in \{0, 1, \cdots\}$.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

- Os processos de Markov com tempo discreto e espaço de estados discretos recebem uma denominação especial.

Definição 2

Um processo Markoviano $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$, com tempo discreto e espaço de estados discreto, é dito ser uma cadeia de Markov. Nesse caso, a propriedade de Markov pode ser expressa como [2, p. 73]

$$P[X_{n_{k+1}} = j | X_{n_k} = i, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, \cdots, X_{n_0} = i_0] = \\ = P[X_{n_{k+1}} = j | X_{n_k} = i],$$

para todos os estados $i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}, i, j$ e todos os instantes de tempo $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1}$.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

- Pode-se mostrar que, se $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov se, e somente se,

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] = \\ = P[X_{n+1} = j | X_n = i]. \quad (10)$$

- Conforme já mencionado, a equação (2) diz que os valores futuros de um processo de Markov são influenciados apenas pelo valor observado mais recentemente.
- No caso das cadeias de Markov, isso implica que

$$P[X_{n+1} = i_{n+1}, X_{n+2} = i_{n+2}, \cdots | X_n = i_n, X_{n_1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] = \\ = P[X_{n+1} = i_{n+1}, X_{n+2} = i_{n+2}, \cdots | X_n = i_n]. \quad (11)$$

- Em particular,

$$P[X_{n+k} = j | X_n = i, X_{n_1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] = \\ = P[X_{n+k} = j | X_n = i]. \quad (12)$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

- De acordo com as equações (4) e (5), se $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov, então a média e a variância condicionais de X_{n+1}, dados $X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0$, são dadas por

$$E[X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0] = E[X_{n+1}|X_n] \tag{13}$$

e

$$V[X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0] = V[X_{n+1}|X_n]. \tag{14}$$

- Pela equação (9), a distribuição de ordem k de uma cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$, nos tempos $0, 1, \cdots, n$, é dada por

$$P[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n] =$$
$$= P[X_0 = i_0]P[X_1 = i_1|X_0 = i_0] \cdots P[X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}]. \tag{15}$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 5

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, no exemplo 4 da aula 2. Suponha-se que, no tempo n, a caixa 1 contém i bolas. Nesse caso, a probabilidade de que, no tempo $n+1$, a bola selecionada pertença à caixa 1 é $\frac{i}{d}$. Sendo assim,

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = \begin{cases} \frac{i}{d} & \text{se } j = i - 1; \\ 1 - \frac{i}{d} & \text{se } j = i + 1. \end{cases}$$

Ou seja, dados os valores de $X_1, \cdots, X_{n-1}$ e X_n, a distribuição de probabilidade de X_{n+1} depende apenas do valor de X_n. Logo,

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ = P[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

Portanto, a cadeia de Ehrenfest é uma cadeia de Markov.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 6

[2, p. 74] O passeio aleatório, no exemplo 1 da aula 4, pode ser generalizado assumindo-se que, além de poder se mover para a esquerda e para a direita, a partícula pode permanecer na posição em que se encontra. Sejam q, p e r as probabilidades de que, num dado instante de tempo, a partícula se mova para a esquerda, se mova para a direita e permaneça onde está, respectivamente. Sejam $Y_1, \cdots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes tais que

$$P[Y_n = y_n] = \begin{cases} q & \text{se } y_n = -1; \\ p & \text{se } y_n = 1; \\ r & \text{se } y_n = 0, \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad p + q + r = 1.$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 6

A posição da partícula no tempo n pode ser escrita como

$$X_n = Y_1 + Y_2 \cdots + Y_n, \quad \forall\ n \in \{1, 2, \cdots\}.$$

Com argumentos análogos aos do exemplo 1, pode-se mostrar que $\{X_n, n \geq 0\}$ satisfaz a propriedade de Markov. Isto é,

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ = P[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

Portanto, o passeio aleatório $\{X_n, n \geq 0\}$, definido dessa maneira, é uma cadeia de Markov. Além disso

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = \begin{cases} q & \text{se } j = i - 1; \\ p & \text{se } j = i + 1; \\ r & \text{se } j = i, \end{cases} \quad \text{onde} \quad p + q + r = 1.$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 7

O passeio aleatório, no exemplo 6, pode ser generalizado assumindo-se que o deslocamento da partícula depende da sua posição atual. Sejam q_i, p_i e r_i as probabilidades de que a partícula, estando na posição i, se mova para a esquerda, para a direita e não se mova, respectivamente. Nesse caso, a posição da partícula no tempo n pode ser escrita como

$$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n \quad \forall\ n \in \{1, 2, \cdots\},$$

onde $Y_1, \cdots, Y_n$ são variáveis alearórias tais que

$$P[Y_{n+1} = y | X_n = i] = \begin{cases} q_i & \text{se } y = -1; \\ p_i & \text{se } y = 1; \\ r_i & \text{se } y = 0, \end{cases} \quad \text{onde} \quad p_i + q_i + r_i = 1.$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 7

Pode-se mostrar que $\{X_n, n \geq 0\}$ satisfaz a propriedade de Markov. Isto é,

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1] = \\ = P[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

Portanto, o passeio aleatório $\{X_n, n \geq 0\}$, definido dessa maneira, é uma cadeia de Markov. Além disso

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = \begin{cases} q_i & \text{se } j = i - 1; \\ p_i & \text{se } j = i + 1; \\ r_i & \text{se } j = i, \end{cases} \quad \text{onde} \quad p_i + q_i + r_i = 1.$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 8

[1, p. 9] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ o passeio aleatório, definido no exemplo 7, com a suposição de que a posição da partícula não pode ser negativa. Isto é, se a partícula está na origem, ela não pode se mover para a esquerda. Equivalentemente,

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = \begin{cases} q_i & \text{se } j = i - 1; \\ p_i & \text{se } j = i + 1; \\ r_i & \text{se } j = i, \end{cases}$$

onde $p_i + q_i + r_i = 1$ e $q_0 = 0$. O processo $\{X_n, n \geq 0\}$, assim definido, é uma cadeia de Markov conhecida como cadeia de nascimento e morte.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 8

A cadeia de nascimento e morte recebe essa denominação pelo fato de que, tradicionalmente, a variável aleatória X_n é interpretada como sendo o tamanho da população de algum sistema vivo. Nesse caso, uma transição do estado i para o estado $i+1$ corresponde a um "nascimento", enquanto uma transição do estado i para o estado $i-1$ corresponde a uma morte. A ruína do jogador, no exemplo 5 da aula 2, e a cadeia de Ehrenfest (ver exemplo 5) podem ser considerados casos particulares da cadeia de nascimento e morte.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 9

[2, p. 75] Os clientes que chegam a um estabelecimento comercial, aguardam o atendimento numa fila. Seja X_n a variável aleatória que representa o tamanho da fila, isto é, o número de clientes na fila, no tempo $n \in \{0, 1, 2 \cdots\}$. A cada instante, novos clientes podem chegar, aumentando o tamanho da fila e clientes podem ser atendidos, reduzindo o tamanho da fila. Seja Y_n a variável aleatória que representa o número de novos clientes, no período $[n, n+1)$, e seja Z_n a variável aleatória que representa o número de clientes atendidos, nesse mesmo período. O tamanho da fila, no tempo $n+1$, é

$$X_{n+1} = X_n - Z_n + Y_n.$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 9

As seguintes suposições são adotadas:

1. $Y_0, Y_1, \cdots$ são independentes e identicamente distribuídas de acordo com a distribuição de Poisson com parâmetro λ;
2. $Y_0, Y_1, \cdots$ são independentes de $X_0, X_1, \cdots$ e de $Z_0, Z_1, \cdots$;
3. se $X_n = 0$, então nenhum atendimento é realizado durante o período $[n, n+1)$;
4. se $X_n > 0$, então no máximo um cliente é atendido durante o período $[n, n+1)$, e isso ocorre com probabilidade q.

De acordo com a suposição 1, $\forall\ n \in \{0, 1, \cdots\}$,

$$P[Y_n = y] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, \quad y \in \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 9

Pela suposição 2, tem-se que

$$P[Y_n = y | Z_n = z, X_n = i, \cdots, Z_0 = z_0, X_0 = i_0] = P[Y_n = y].$$

Pela suposição 3, se $X_n = 0$, então $Z_n \equiv 0$. Ou seja,

$$P[Z_n = 0 | X_n = 0] = 1.$$

A suposição 4 diz que

$$P[Z_n = z | X_n > 0] = \begin{cases} q, & \text{se } z = 1; \\ 1 - q, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Portanto, a distribuição de Z_n, dados $X_0, \cdots, X_n$, depende apenas de X_n, isto é,

$$P[Z_{n+1} = z | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] =$$
$$= P[Z_{n+1} = z | X_n = i].$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 9

Segue-se que, dados $X_0, \cdots, X_n$, a distribuição de probabilidade de $X_{n+1} = X_n - Z_n + Y_n$ depende apenas de X_n. Isto é,

$$\begin{aligned} & P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] = \\ & \quad = P[X_n + Z_n + Y_n = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] = \\ & \qquad = P[X_n + Z_n + Y_n = j | X_n = i] = P[X_{n+1} = j | X_n = i]. \end{aligned}$$

Pode-se concluir que o processo $\{X_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov. Essa cadeia é um exemplo de um tipo processo estocástico conhecido como fila [2, p. 315]. Processos desse tipo podem ser utilizados para modelar a dinâmica das filas que se formam quando, por exemplo, os indivíduos que vêm em busca de um determinado serviço são atendidos em sequência.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 9

A **Teoria das Filas** é o ramo da matemática dedicado ao estudo de modelos para fenômenos de enfileiramento. Pode-se mostrar que (ver notas complementares), se $i = 0$, então

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_{n+1} = j | X_n = 0] = \\ = P[Y_n = j] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}, \quad \forall\, j \geq 0,$$

e, se $i > 0$, então

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = \begin{cases} qe^{-\lambda}, & \text{se } j = i-1; \\ q\frac{e^{-\lambda}\lambda^{j-i+1}}{(j-i+1)!} + (1-q)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{se } j > i-1. \end{cases}$$

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Exemplo 10

[2, p. 104] Na Inglaterra do século 19, algumas pessoas estavam interessadas na possibilidade de certos nomes de família (particularmente, nomes de famílias aristocratas) desaparecerem, por não haver descendentes do sexo masculino com tais nomes. Sir Francis Galton formulou o problema matematicamente em 1873, e junto com o reverendo Henry William Watson, publicou um trabalho sobre esse assunto em 1874. Como o estatístico francês Irenee-Jules Bienaymé já havia trabalhado com esse tipo de problema antes, os processos estocásticos correspondentes são às vezes chamados de **processos de Bienaymé-Galton-Watson**.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 10

Tais processos mais conhecidos como **processos de ramificação**. Seja $\{Z_{n,j}, n = 0, 1, \cdots ; j = 0, 1, \cdots\}$ um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cujos valores possíveis são os inteiros não negativos $0, 1, 2, \cdots$. Um processo de ramificação é uma cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ definida como

$$X_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{X_n} Z_{n,j}, & \text{se } X_n > 0; \\ 0, & \text{se } X_n = 0, \end{cases}$$

para cada $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$.

Tópico 21: definição e exemplos de cadeias de Markov

Continuação do exemplo 10

No contexto do problema do desaparecimento dos nomes de família, as variáveis aleatórias X_n e $Z_{n,j}$ podem ser interpretadas da seguinte maneira: X_0 é o número de membros da geração inicial, isto é, o número de ancestrais da população. Em geral, supõe-se que $X_0 = 1$. Nesse caso, o processo se refere a uma linhagem específica. A variável aleatória $Z_{n,j}$ denota o número de descendentes do j-ésimo membro da n-ésima geração. Se nenhum indivíduo de uma mesma geração gerar ao menos um descendente, então o nome, estará fadado a desaparecer. Nesse caso, diz-se que o nome será **eventualmente extinto**. Um dos problemas aqui é obter a probabilidade da eventual extinção.

Referências I

[1] P. G. Hoel, S. C. Port, and C. J. Stone, *Introduction to stochastic processes*, Houghton Mifflin, Boston, MA, EUA, 1972.

[2] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer, New York, NY, EUA, 2007.

[3] Jean Lemaire, *Automobile insurance: actuarial models*, Springer, Dordrecht, ZH, NL, 1985.