Processos estocásticos

Disciplina ofertada pelo DECAT/UFS
Código: ESTAT0077
Nível: Graduação
Carga horária: 60h
Período: 2020.2
Professor responsável e ministrante: Luiz Henrique Dore

Aula 15: Exercícios de fixação

Exercício 1. [1, p. 143] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ p & 1-p \end{bmatrix} \end{array},$$

onde $0 \leq p \leq 1$.

a) Suponha que $p = 1$ e que $X_0 = 0$. Calcule Calcule $E[X_2]$.
b) Suponha que $p = 1/2$ e que $P[X_0 = 0] = [X_0 = 1] = 1/2$. Defina o processo estocástico $\{Y(t), t \geq 0\}$ como $Y(t) = tX_{[t]}$, onde $[t]$ é a parte inteira de t.
   i) Calcule $C_Y(t, t+1)$.
   ii) O processo $\{Y(t), t \geq 0\}$ é estacionário no sentido amplo? Justifique.
   iii) Calcule $\lim_{n\to\infty} P[X_n = 0]$.

Exercício 2. [1, p. 143] Considere uma cadeia de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ tendo dois estados 0 e 1. Em cada passo, o processo se move do estado 0 para o estado 1 com probabilidade $p \in (0, 1)$, ou do estado 1 para o estado 0 com probabilidade $1 - p$.

a) Calcule $p_{1,1}^{(10)}$.
b) Suponha que $X_0 = 0$. Calcule a função de autocorrelação $R_X(1, 13)$.

Exercício 3. [1, p. 144] A matriz de transição $\boldsymbol{P}$ de uma cadeia de Markov, cujo espaço de estados é $\{0, 1\}$, é dada por

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

Calcule $E[X_2]$, supondo que $P[X_0 = 0] = 1/3$.

Exercício 4. [1, p. 144] Seja $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$, o processo estocástico definido como $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, onde $Y_1, Y_2, \cdots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma Bernoulli com parâmetro $p = 1/3$. Então, o processo estocástico $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov (ver exemplo 8). Calcule $p_{0,2}^{(3)}$.

Exercício 5. [1, p. 144] Seja $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$, um passeio aleatório tal que

$$p_{i,i+1} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad p_{i,i-1} = \frac{1}{3}, \quad \forall\, i \in \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

Calcule $E[X_2 | X_0 = 0]$.

Exercício 6. [1, p. 144] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

a) Calcule $C_X(t_1, t_2)$ em $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$, supondo que $P[X_0 = 0] = P[X_0 = 1] = 1/2$.

b) Encontre $\lim_{n\to\infty} P[X_n = 0|X_0 = 0]$.

Exercício 7. [1, p. 144] Seja $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$, o processo estocástico definido como $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, onde $Y_1, Y_2, \cdots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma Poisson com parâmetro $\lambda = 1$. Então, o processo estocástico $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov (ver exemplo 8). Calcule $p_{1,3}^{(4)}$.

Exercício 8. [1, p. 144] O fluxo de um certo rio pode se encontrar em um dos três estados seguintes:

$$\begin{aligned} 0 &: \text{fluxo baixo;} \\ 1 &: \text{fluxo médio;} \\ 2 &: \text{fluxo alto.} \end{aligned}$$

Suponha que o processo estocástico $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$, onde X_n representa o estado do fluxo do rio no n-ésimo dia, é uma cadeia de Markov. Além disso, suponha que a probabilidade estimada de que o fluxo se mova do estado i para o estado j em um dia é dada pela fórmula

$$p_{i,j} = \frac{1}{2} - |i - j|\theta_i,$$

onde $0 < \theta_i < 1$, para cada $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

a) Calcule a probabilidade de que o fluxo do rio se mova do estado 0 para o estado 1 em um dia.

b) Qual é a probabilidade de que o fluxo do rio se mova do estado 0 para o estado 2 em dois dias.

Exercício 9. [1, p. 145] Uma máquina é constituída por dois componentes, os quais operam de maneira independente um do outro. O tempo de vida T_i (em dias) do componente i segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ_i, $i = 1, 2$. Suponha que os dois componentes são postos em paralelo e que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ln(2)$. Quando a máquina quebra, os dois componentes são substituídos por componentes novos no início do dia seguinte. Seja X_n o número de componentes operando no fim do n-ésimo dia.

a) Mostre que $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é uma cadeia de Markov.

b) Calcule a matriz de transição de $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$.

Exercício 10. [1, p. 145] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

a) Calcule a probabilidade de que o processo se moverá do estado 1 para o estado 2 em quatro passos.

b) Suponha que $X_0 = 1$. Seja N_1 a quantidade de vezes que o estado 1 será visitado, incluindo a visita no tempo inicial. Calcule $E[N_1]$.

Exercício 11. [1, p. 145] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Assumindo que $X_0 = 1$, calcule a probabilidade de que o estado 0 será visitado antes do estado 3.

Exercício 12. [1, p. 146] Uma cadeia de Markov tem as seguintes probabilidades de transição:

$$\begin{aligned} &p_{0,0} = 1; \\ &p_{i,i} = p = 1 - p_{i,i-1} \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, 3, \cdots\}. \end{aligned}$$

Calcule a probabilidade $\rho_{i,0}^{(n)}$ de que a cadeia se moverá do estado i para o estado 0, pela primeira vez, após exatamente n transições, para cada $i \in \{1, 2, \cdots\}$.

Referências

[1] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer, New York, NY, EUA, 2007.