UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DECAT DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E CIÊNCIAS ATUARIAIS

Processos estocásticos

Disciplina ofertada pelo DECAT/UFS

Código: ESTAT0077
Nível: Graduação
Carga horária: 60h
Período: 2020.2

Professor responsável e ministrante: Luiz Henrique Dore

Aula 6: Incremento e estacionaridade.

Sumário

Metas

1. Apresentar as noções de incremento do processo, de processos estacionários no sentido amplo e de processos estacionários no sentido estrito.

Objetivos

- Após estudar essa aula, o aluno ou aluna será capaz de:
  1. classificar os incrementos de um processo estocástico quanto à independência e à estacionaridade;
  2. em situações simples, verificar se os incrementos do processo são independentes e se eles são estacionários;
  3. distinguir estacionaridade estrita de estacionaridade ampla;
  4. em situações simples, verificar se o processo é estacionário no sentido estrito;
  5. verificar se o processo estocástico é estacionário no sentido amplo.

Pré-requisitos

1. Aula 4.

Introdução

- Conforme visto nas aulas anteriores, um processo estocástico é um conjunto $\{X(t), t \geq 0\}$, cujos elementos são variáveis aleatórias indexadas pelo tempo t.
- Isto é, $X(t)$ é uma variável aleatória que pode vir a ser observada num instante de tempo t.
- Viu-se que, assim como uma variável aleatória é determinada pela sua distribuição de probabilidade, um processo estocástico é determinado pela sua distribuição de ordem k.
- A distribuição de ordem k de um processo estocástico é a distribuição conjunta dos valores do processo em k instantes de tempo distintos.
- Isto é, a distribuição de ordem k do processo é a distribuição conjunta do vetor $(X(t_1), \cdots, X(t_k))$, $\forall\ t_1, \cdots, t_k$ e k.

Introdução

- Da maneira como foi formulado até então, é difícil realizar uma análise matemática de um processo estocástico.
- Para tornar um processo estocástico matematicamente tratável, é necessário adotar suposições sobre o seu comportamento.
- Por exemplo, pode-se adotar suposições sobre a estrutura de dependência entre as variáveis aleatórias que formam o processo.
- Pode-se adotar suposições sobre a distribuição de ordem k do processo.
- Na presente aula, é feita uma breve exposição sobre processos estocásticos munidos de algumas suposições.
- As duas primeiras suposições dizem respeito aos incrementos do processo.

Introdução

- O incremento do processo, num dado intervalo de tempo, é a diferença entre os valores do processo no início e no fim do intervalo de tempo.
- Aqui, considera-se processos com incrementos independentes e/ou com incrementos estacionários.
- A terceira suposição, a estacionaridade no sentido estrito, se refere à distribuição de ordem k.
- Segundo essa suposição, a distribuição de ordem k do processo não muda quando os instantes de tempo nos quais a distribuição é calculada são transladados para frente por um mesmo valor.
- A quarta suposição, a estacionaridade no sentido amplo, impõe restrições às distribuições de ordem 1 e 2 do processo.

Introdução

- De acordo com a estacionaridade no sentido amplo, a função média do processo é constante com relação ao tempo e a função de autocovariância depende apenas da distância entre os instantes de tempo nos quais ela é calculada.
- Por ser mais fácil de ser verificada, a estacionaridade no sentido amplo é mais adotada, na prática, do que mais adotada do que a estacionaridade no sentido estrito.

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

Definição 1

O incremento do processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$, nos tempos $t_1 < t_2$ é definido como

$$X(t_2) - X(t_1).$$

Definição 2

Diz-se que o processo $\{X(t), t \geq 0\}$ possui incrementos independentes se, $\forall\ t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, os incrementos

$$X(t_2) - X(t_1) \quad \text{e} \quad X(t_4) - X(t_3)$$

são independentes [1, p. 50].

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

Definição 3

O processo $\{X(t), t \geq 0\}$ é dito ser um processo com incrementos estacionários se, $\forall\ t_1 < t_2$ e $\forall\ s > 0$, os incrementos

$$X(t_2) - X(t_1) \quad \text{e} \quad X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$$

possuem a mesma distribuição de probabilidade [1, p. 50].

- O incremento de um processo é a variação **aditiva** que o processo sofre ao longo de um intervalo de tempo.
- Se o processo possui incrementos independentes, as variações do processo em intervalos de tempo distintos são independentes.

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

- Um incremento de um processo é uma característica associada ao comportamento do processo num dado intervalo de tempo no qual o processo pode ser observado.
- Se o processo possui incrementos estacionários, a distribuição dos incrementos não muda quando o intervalo de tempo é deslocado para frente.
- Em particular, os incrementos correspondentes aos intervalos de tempo $[0, s)$ e $[0 + t, s + t) = [t, t + s)$ possuem a mesma distribuição de probabilidade, pois o segundo intervalo resulta do deslocamento do primeiro t unidades de tempo para frente.
- Nesse caso, $X(s) - X(0)$ e $X(t + s) - X(t)$ são variáveis aleatórias igualmente distribuídas.

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

- Em outras palavras, qualquer que seja o valor de t, a distribuição de $X(t+s) - X(t)$ é igual à distribuição de $X(s) - X(0)$.
- Isto é, a distribuição de probabilidade de $X(t+s) - X(t)$ não depende de t; ela depende apenas de s, o comprimento do intervalo $[t, t+s)$.
- Isso equivale a dizer que, quando os incrementos do processo são estacionários, a distribuição do incremento depende apenas do comprimento do intervalo ao qual ele se refere.

Exemplo 1

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ o passeio aleatório, visto no exemplo 1 da aula 2.

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

Continuação do exemplo 1

No exemplo 5 da aula 4, viu-se que X_n, $\forall\ n \geq 1$,

$$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n,$$

onde $Y_1, \cdots, Y_n$ são variáveis aleatórias independentes. Dessa forma, dados $n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4$, os incrementos

$$X_{n_2} - X_{n_1} = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} Y_i \quad \text{e} \quad X_{n_4} - X_{n_3} = \sum_{i=n_3+1}^{n_4} Y_i$$

são independentes. Logo, o passeio aleatório é um processo com incrementos independentes.

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

Continuação do exemplo 1

No exemplo 5 da aula 4 , viu-se também que

$$P[Y_n = y_n] = \begin{cases} 1-p & \text{se } y_n = -1; \\ p & \text{se } y_n = 1. \end{cases}$$

Sejam $W_1, \cdots, W_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição de Bernoulli com parâmetro p. Isto é,

$$P[W_n = w_n] = \begin{cases} 1-p & \text{se } w_n = 0; \\ p & \text{se } w_n = 1. \end{cases}$$

Nota-se que Y_n pode ser escrita como $Y_n = 2W_n - 1$.

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

Continuação do exemplo 1

Logo,

$$X_{n_2} - X_{n_1} = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} Y_i = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} (2W_i - 1) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_2} W_i - \sum_{i=n_1+1}^{n_2} 1 =$$

$$= 2 \cdot S(n_1, n_2) - (n_2 - n_1),$$

onde $S(n_1, n_2) = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} W_i$. Portanto,

$$P[X_{n_2} - X_{n_1} = y] = P\left[S(n_1, n_2) = \frac{y + (n_2 - n_1)}{2}\right].$$

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

Continuação do exemplo 1

Analogamente,

$$P[X_{n_2+k} - X_{n_1+k} = y] =$$
$$= P\left[S(n_1+k, n_2+k) = \frac{y + [(n_2+k) - (n_1+k)]}{2}\right] =$$
$$= P\left[S(n_1+k, n_2+k) = \frac{y + (n_2 - n_1)}{2}\right].$$

Como $S(n_1, n_2)$ é a soma de $n_2 - n_1$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma Bernoulli com parâmetro p, tem-se que $S(n_1, n_2)$ segue distribuição binomial com parâmetros $n_2 - n_1$ e p.

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

Continuação do exemplo 1

Da mesma forma, nota-se também que $S(n_1 + k, n_2 + k)$ é a soma de $(n_2 + k) - (n_1 + k) = n_2 - n_1$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma Bernoulli com parâmetro p. Portanto, $S(n_1 + k, n_2 + k)$ segue distribuição binomial com parâmetros $n_2 - n_1$ e p. Dessa maneira, conclui-se que $S(n_1, n_2)$ e $S(n_1 + k, n_2 + k)$ possuem a mesma distribuição de probabilidade. Logo,

$$P[X_{n_2+k} - X_{n_1+k} = y] =$$

$$= P\left[S(n_1 + k, n_2 + k) = \frac{y + (n_2 - n_1)}{2}\right] =$$

$$= P\left[S(n_1, n_2) = \frac{y + (n_2 - n_1)}{2}\right] = P[X_{n_2} - X_{n_1} = y].$$

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

Continuação do exemplo 1

Ou seja, $X_{n_2} - X_{n_1}$ e $X_{n_2+k} - X_{n_1+k}$ possuem a mesma distribuição. Portanto, o passeio aleatório é um processo com incrementos estacionários.

Exemplo 2

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ o processo no exemplo 8 da aula 2. Nesse caso, $X(t)$ é definida como

$$X(t) = Yt,$$

onde Y é uma variável aleatória qualquer.

Tópico 12: incremento de um processo estocástico

Continuação do exemplo 2

Esse processo estocástico possui incrementos estacionários, pois, dados $t_1 < t_2$, tem-se que

$$P[X(t_2+s)-X(t_1+s)\leq x] = P[Y(t_2+s)-Y(t_1+s)\leq x] =$$
$$= P[Yt_2 - Yt_1 \leq x] = P[X(t_2)-X(t_1)\leq x].$$

Porém, ele não possui incrementos independentes. De fato, supondo que Y não é constante, então $Var[Y] > 0$. Nesse caso, dados $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, se $X(t_2)-X(t_1)$ e $X(t_4)-X(t_3)$ fossem variáveis aleatórias independentes, então a covariância entre elas seria zero. Não é isso o que ocorre, pois

$$Cov[X(t_2)-X(t_1), X(t_4)-X(t_3)] =$$
$$= Cov[(t_2-t_1)Y, (t_4-t_3)Y] = (t_2-t_1)(t_4-t_3)Var[Y] > 0.$$

Tópico 13: estacionaridade no sentito estrito

Definição 4

Diz-se que o processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é estacionário no sentido estrito (ESE) se sua função de distribuição de ordem k é tal que [1, p. 52]

$$F(x_1, \cdots, x_k; t_1, \cdots, t_k) = \\ = F(x_1, \cdots, x_k; t_1 + s, \cdots, t_k + s),$$

para todo $t_1, \cdots, t_k$, s e k.

- Se um processo estocástico é ESE, então sua distribuição de ordem k não muda quando os tempos são deslocados s unidades para frente.

Tópico 13: estacionaridade no sentito estrito

- Equivalentemente, se o processo $\{X(t), t \geq 0\}$ é ESE, então os vetores $(X(t_1), \cdots, X(t_k))$ e $(X(t_1 + s), \cdots, X(t_k + s))$ possuem a mesma distribuição, para todo $t_1, \cdots, t_k$, s e k.

Exemplo 3

O processo $\{X(t), t \geq 0\}$ tal que, $\forall\ t \geq 0$, $X(t) = Y$, onde Y é uma variável aleatória qualquer é ESE. De fato, sua função de distribuição de ordem k, nos tempos $t_1, \cdots, t_k$ é

$$F(x_1, \cdots, x_k; t_1, \cdots, t_k) = P\left[X(t_1) \leq x_1, \cdots, X(t_k) \leq x_k\right] =$$
$$= P[Y \leq x_1, \cdots, Y \leq x_k] = P\left[Y \leq \min\{x_1, \cdots, x_k\}\right],$$

de onde se conclui que

$$F(x_1, \cdots, x_k; t_1 + s, \cdots, t_k + s) = F(x_1, \cdots, x_k; t_1, \cdots, t_k).$$

Tópico 13: estacionaridade no sentito estrito

Exemplo 4

Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função de distribuição F_X. O processo estocástico $\{X_n, n \geq 1\}$ é ESE. De fato, sua função de distribuição de ordem k, nos tempos $n_1, \cdots, n_k$ é

$$F(x_1, \cdots, x_k; n_1, \cdots, n_k) = P[X_{n_1} \leq x_1, \cdots, X_{n_k} \leq x_k] =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} P[X_{n_i} \leq x_i] = \prod_{i=1}^{k} F_X(x_i),$$

de onde se conclui que

$$F(x_1, \cdots, x_k; n_1 + s, \cdots, n_k + s) = \prod_{i=1}^{k} F_X(x_i) =$$

$$= F(x_1, \cdots, x_k; n_1, \cdots, n_k).$$

Tópico 14: estacionaridade no sentido amplo

- A estacionaridade no sentido estrito é adotada com o intuito de tornar o processo estocástico matematicamente tratável.
- Entretanto, na prática, costuma ser difícil verificar se o processo é estacionário no sentido estrito.
- Isso ocorre pelo fato de que a estacionaridade no sentido estrito é uma propriedade que se refere à distribuição de ordem k do processo e, em geral, a distribuição de ordem k de um processo é difícil de ser obtida.
- Dessa forma, ao invés de adotar-se a estacionaridade no sentido estrito, adota-se uma versão mais fraca de estacionaridade.
- Essa versão mais fraca de estacionaridade está associada apenas às distribuições de ordem 1 e 2 do processo, o que torna sua verificação mais factível.

Tópico 14: estacionaridade no sentido amplo

- Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo estocástico ESE, com tempo e espaço de estados contínuos.
- A função de densidade de probabilidade de ordem 1 desse processo satisfaz $f(x;t) = f(x;t+s)$, para todo t e s.
- Em particular, fazendo $t = 0$, obtém-se $f(x;s) = f(x;0)$.
- Como s é arbitrário, tem-se que a função de densidade de probabilidade de ordem 1 não muda com o tempo.
- Consequentemente, a função média fica dada por

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;t)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;0)dx = E[X(0)] = m_X(0) = m_X.$$

Tópico 14: estacionaridade no sentido amplo

- Portanto, a função média é constante com o tempo.
- Ainda supondo que $\{X(t), t \geq 0\}$ é ESE, tem-se que sua função de densidade de ordem 2, nos instantes $t_1 < t_2$, satisfaz

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + s, t_2 + s).$$

- Em particular,

$$f(x_1, x_2; 0, t) = f(x_1, x_2; s, t + s).$$

- Fazendo $s = t_1$ e $t = t_2 - t_1$ na equação acima, obtém-se

$$f(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f(x_1, x_2; t_1, t_2).$$

- Logo, a função de densidade de ordem 2 depende de t_1 e t_2 apenas através de $t_2 - t_1$.

Tópico 14: estacionaridade no sentido amplo

- Consequentemente, a função de autocorrelação fica dada por

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_2 - t_1) dx = R_X(t_2 - t_1).
\end{aligned}
$$

- Como $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1)$, pode-se concluir que

$$
R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(t_1 - t_2) = R_X\left(|t_1 - t_2|\right).
$$

- Segue-se que a função de autocovariância fica dada por

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2) = \\
&= R_X(|t_1 - t_2|) - m_X^2 = C_X(|t_2 - t_1|).
\end{aligned}
$$

Tópico 14: estacionaridade no sentido amplo

- Com isso, se o processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é ESE, então
  1. $m_X(t) \equiv m_X$, isto é, sua função média é constante no tempo;
  2. $C_X(t_1, t_2) \equiv C_X(t_2 - t_1)$, isto é, sua função de autocovariância depende de t_1 e t_2 apenas através de $|t_1 - t_2|$, que é a distância entre os instantes de tempo t_1 e t_2.

Definição 5

O processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é dito ser estacionário no sentido amplo (ESA), se ele satisfaz as seguintes condições:

1. $m_X(t) \equiv m_X$, isto é, sua função média é constante no tempo;
2. $C_X(t_1, t_2) \equiv C_X(|t_2 - t_1|)$, isto é, sua função de autocovariância depende de t_1 e t_2 apenas através de $|t_2 - t_1|$, que é a distância entre os instantes de tempo t_1 e t_2.

Tópico 14: estacionaridade no sentido amplo

- Dizer que um processo estocástico é estacionário no sentido amplo significa dizer que sua função média é constante e que sua função de autocovariância depende apenas da distância entre os instantes de tempo nos quais ela é calculada.
- Nota-se que, nesse caso,

$$E[X^2(t)] = R_X(t,t) = R_X(|t-t|) = R_X(0) = E[X^2(0)].$$

- Portanto, o segundo momento de um processo ESA é constante.
- Conforme visto no tópico 9, a função de variância pode ser escrita como $V_X(t) = C_X(t,t)$. Logo, se o processo é ESA,

$$V_X(t) = C_X(t,t) = C_X(|t-t|) = C_X(0) = V_X(0).$$

- Isto é, a função de variância de um processo ESA é constante.

Tópico 14: estacionaridade no sentido amplo

- Conforme visto no tópico 9, o coeficiente de autocorrelação pode ser escrito como $\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1,t_2)}{\sqrt{V_X(t_1)V_X(t_2)}}$. Portanto, se o processo é ESA, então

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(|t_1 - t_2|)}{\sqrt{V_X(0)V_X(0)}} = \frac{C_X(|t_1 - t_2|)}{V_X(0)} = \rho_X(|t_1 - t_2|).$$

- Ou seja, o coeficiente de autocorrelação de um processo ESA depende apenas da distância entre os instantes de tempo nos quais ele é calculada.
- Se o processo não é estacionário no sentido amplo, então ele não é estacionário no sentido estrito.
- Entretanto, se o processo é estacionário no sentido amplo, ele não necessariamente é estacionário no sentido estrito.

Tópico 13: estacionaridade no sentito amplo

Exemplo 5

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ o passeio aleatório no exemplo 1 da aula 2. Conforme visto no exemplo 5 da aula 4,

$$m_X(n) = n(2p - 1).$$

Se $p \neq \frac{1}{2}$, então a função média depende do tempo n. Nesse caso, tem-se que o passeio aleatório não é ESA. Supondo que $p = \frac{1}{2}$, então $m_X(n) = 0$. Nesse caso, a média do processo é constante. Entretanto, viu-se, no exemplo 17 da aula 4, que a função de variância desse processo é

$$V_X(n) = 4np(1 - p).$$

Logo, se $p = \frac{1}{2}$, então $V_X(n) = n$.

Tópico 13: estacionaridade no sentito amplo

Continuação do exemplo 5

A função de variância depende do tempo n. Logo, também no caso em que $p = \frac{1}{2}$, o passeio aleatório não é ESA. Pode-se concluir que, para todo $0 < p < 1$, o passeio aleatório não é um processo ESA. Consequentemente, ele não pode ser ESE.

Exemplo 6

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ o processo no exemplo 8 da aula 2. Nesse caso, $X(t)$ é definida como $X(t) = Yt$, onde Y é uma variável aleatória qualquer. A função média desse processo é

$$m_X(t) = t \cdot E[Y].$$

Tópico 13: estacionaridade no sentito amplo

Continuação do exemplo 6

Se $E[Y] \neq 0$, então $m_X(t)$ depende do tempo. Nesse caso, o processo não é ESE. Se $E[Y] = 0$, então $m_X(t) = 0$ é constante. Supondo Y não é uma variável aleatória constante, então $V_X(Y) > 0$. Nesse caso,

$$V_X(t) = t^2 \cdot Var(Y) > 0.$$

Pode-se concluir que, se Y não é constante, então esse processo não é ESE. Consequentemente, ele não pode ser ESA.

Exemplo 7

O ruído branco $\{Y_n, n = 0, 1, \cdots\}$, definido no exemplo 20 da aula 4, é um processo ESA.

Tópico 13: estacionaridade no sentito amplo

Continuação do exemplo 7

De fato, por definição, a função média do ruído branco é constante, pois $m_Y(n) = 0$. Portanto, a primeira condição da definição (5) é satisfeita. Se $m \neq n$, então Y_n e Y_m são independentes. Logo, $C_Y(m,n) = 0$. Se $m = n$, então $C_Y(m,n) = C_Y(m,m) = V_Y(m) = \sigma^2$. Dessa forma, a função de autocovariância pode ser escrita como

$$C_X(m,n) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } n - m = 0; \\ 0 & \text{se } |n-m| > 0. \end{cases}$$

Ou seja, $C_X(m,n) = C_X(|n-m|)$ é função apenas da distância entre os tempos m e n. A segunda condição da definição (5) é satisfeita. Pode-se concluir que o ruído branco, definido no exemplo 20 da aula 4, é um processo ESA.

Tópico 13: estacionaridade no sentito amplo

Exemplo 8

O processo de médias móveis de ordem 1 $\{X_n, n = 1, \cdots\}$, no exemplo 20 da aula 4, é tal que

$$X_n = \mu + \alpha Y_{n-1} + Y_n,$$

onde $\{Y_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é um ruído branco. Conforme demonstrado nas notas complementares da aula 4, as funções média e de autocovariância do processo de médias móveis são, respectivamente,

$$m_X(n) = \mu \quad \text{e} \quad C_X(m,n) = \begin{cases} (\alpha^2+1)\sigma^2 & \text{se } n-m=0; \\ \alpha\sigma^2 & \text{se } |n-m|=1; \\ 0 & \text{se } |n-m|>1. \end{cases}$$

Tópico 13: estacionaridade no sentito amplo

Continuação do exemplo 8

Como a função média é constante e a função de autocovariância depende apenas da distância entre os instantes de tempo, o processo de médias móveis de ordem 1 é um processo estocástico ESA. Pode-se mostrar que, se as variáveis aleatórias no ruído branco $\{Y_n, n = 0, 1, \cdots\}$ são identicamente distribuídas, então, além de ser ESA, o processo de médias móveis de ordem 1 também é ESE.

Referências I

[1] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer, New York, NY, EUA, 2007.