UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DECAT DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E CIÊNCIAS ATUARIAIS

Processos estocásticos

Disciplina ofertada pelo DECAT/UFS

Código: ESTAT0077
Nível: Graduação
Carga horária: 60h
Período: 2020.2

Professor responsável e ministrante: Luiz Henrique Dore

Aula 15: probabilidades de transição em n passos

Sumário

Metas

1. Introduzir a definição a probabilidade de transição em n passos de uma cadeia de Markov.
2. Apresentar as equações de Chapman-Kolmogorov e as matrizes de transição em n passos de uma cadeia de Markov.
3. Introduzir a definição de distribuição inicial da cadeia de Markov.

Objetivos

- Após estudar essa aula, o aluno ou aluna será capaz de:
  1. calcular a probabilidade de transição de um estado para outro a partir das equações de Chapman-Kolmogorov e da matriz de transição da cadeia de Markov;
  2. calcular a probabilidade da primeira visita a um estado j, a partir de um estado i, após n unidades de tempo.
  3. calcular a probabilidade do primeiro retorno a um dado estado após n unidades de tempo;
  4. calcular a distribuição de probabilidade marginal da cadeia em um dado instante de tempo;
  5. calcular características como a média e a variância da cadeia de Markov, num dado instante de tempo, a partir da distribuição marginal nesse instante de tempo.

Pré-requisitos

1. Aula 13.

Introdução

- Seja $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ uma cadeia de Markov homogênea.
- Quaisquer que sejam $i \in S_{X_n}$ e $j \in S_{X_n}$, tem-se que

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{i,j}, \quad \forall\ n \in \{0, 1, \cdots\},$$

onde $0 \leq p_{i,j} \leq 1$ é constante com relação a n.
- As probabilidades de transição regulam o comportamento de uma cadeia de Markov homogênea entre instantes de tempo consecutivos, isto é, separados por uma unidade.
- Na presenta aula, o interesse é caracterizar o comportamento da cadeia de Markov homogênea entre instantes de tempo não consecutivos, isto é, entre instantes de tempo separados por mais do que uma unidade de tempo.

Introdução

- Isso é feito por meio da **probabilidade de transição de um estado i para um estado j em n passos**.
- Essa probabilidade representa a chance com a qual a cadeia passa do estado i para o estado j após n unidades de tempo.
- Essa definição leva, naturalmente, à de **matriz de transição em n passos**, cujo elemento (i, j) é a probabilidade de transição do estado i para o estado j em n passos.
- Um resultado importante relativo às probabilidades de transição em n passos, são as **equações de Chapman-Kolmogorov**.
- As equações de Chapman-Kolmogorov resumem o cálculo das probabilidades de transição em n passos ao cálculo de produtos matriciais envolvendo apenas a matriz de transição.

Introdução

- Isso simplifica, significativamente, o cálculo de probabilidades no contexto de cadeias de Markov homogêneas, possibilitando a obtenção de importantes resultados acerca do comportamento desses processos estocásticos.
- Um desses resultados é a **probabilidade da primeira visita ao estado j, partindo do estado i**.
- Um outro resultado é a **distribuição marginal num dado instante de tempo**.
- A distribuição marginal de $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$, no tempo n, é a distribuição de probabilidade **incondicional** de X_n.
- A distribuição marginal de uma cadeia de Markov homogênea é determinada pelas probabilidades de transição em n passos e pela **distribuição inicial da cadeia**.

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

Definição 1

A probabilidade de transição do estado i de uma cadeia de Markov homogênea $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ para o estado j, em n passos, é definida como [1, p. 79]

$$p_{i,j}^{(n)} = P[X_{k+n} = j | X_k = i].$$

- A probabilidade de transição (definição 1, aula 13) corresponde à probabilidade de transição em 1 passo, isto é, $p_{i,j} = p_{i,j}^{(1)}$.
- A probabilidade de transição determina a evolução da cadeia entre dois instantes de tempo consecutivos.
- A probabilidade de transição em n passos determina a evolução da cadeia entre dois instantes de tempo não consecutivos.

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

Exemplo 1

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ o passeio aleatório, no exemplo 1 da aula 2. Pelo que foi visto no exemplo 1 da aula 12, o passeio aleatório é uma cadeia de Markov homogênea com probabilidade de transição

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1-p & \text{se } j = i-1; \\ p & \text{se } j = i+1. \end{cases}$$

Qual a probabilidade de que a partícula avance da posição 2 no tempo 2 para a posição 4 no tempo 4? Ou seja, qual o valor de $p_{2,4}^{(2)} = P[X_4 = 4 | X_2 = 2]$?

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

Continuação do exemplo 1

Pela lei da probabilidade total [1, p. 6],

$$P[X_4 = 4|X_2 = 2] = \sum_{i \in S_{X_3}} P[X_3 = i, X_4 = 4|X_2 = 2],$$

onde $S_{X_3} = \{1, 3\}$. Utilizando o resultado obtido na seção 1 das notas complementares da aula 12, pode-se escrever

$$P[X_3 = i, X_4 = 4|X_2 = 2] =$$
$$= P[X_3 = i|X_2 = 2]P[X_4 = 4|X_3 = i] = p_{2,i}p_{i,4}.$$

Logo,

$$P[X_4 = 4|X_2 = 2] = \sum_{i \in S_{X_3}} p_{2,i}p_{i,4}.$$

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

Continuação do exemplo 1

Se $i = 1$, então $p_{i,4} = p_{1,4} = 0$. Logo, $p_{2,i}p_{i,4} \neq 0$ apenas quando $i = 3$. Segue-se que

$$p_{2,4}^{(2)} = P[X_4 = 4|X_2 = 2] = p_{2,3}p_{3,4} = p^2.$$

Qual a probabilidade de que a partícula avance da posição 2 no tempo 2 para a posição 3 no tempo 5? Ou seja, qual o valor de $p_{3,5}^{(3)} = P[X_5 = 3|X_2 = 2]$? Pela lei da probabilidade total,

$$P[X_5 = 3|X_2 = 2] = \sum_{i \in S_{X_3}} \sum_{j \in S_{X_4}} P[X_3 = i, X_4 = j, X_5 = 3|X_2 = 2],$$

onde $S_{X_3} = \{1, 3\}$ e $S_{X_4} = \{0, 2, 4\}$.

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

Continuação do exemplo 1

Utilizando resultado na seção 1 das notas complementares da aula 12, pode-se escrever

$$P[X_3 = i, X_4 = j, X_5 = 3|X_2 = 2] =$$
$$= P[X_3 = i|X_2 = 2]P[X_4 = j|X_3 = i]P[X_5 = 3|X_4 = j] = p_{2,i}p_{i,j}p_{j,3}.$$

Logo,

$$P[X_5 = 3|X_2 = 2] = \sum_{i \in S_{X_3}} \sum_{j \in S_{X_4}} p_{2,i}p_{i,j}p_{j,3}.$$

Se $j = 0$, então $p_{j,3} = p_{0,3} = 0$. Logo, só é possível obter

$$p_{2,i}p_{i,j}p_{j,3} \neq 0$$

se $i \in \{1, 3\}$ e $j \in \{2, 4\}$.

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

Continuação do exemplo 1

Como $p_{1,4} = 0$, tem-se que

$$p_{2,3}^{(3)} = P[X_5 = 3 | X_2 = 2] =$$
$$= p_{2,1}p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}p_{3,2}p_{2,3} + p_{2,3}p_{3,4}p_{4,3} =$$
$$= (1-p)p^2 + p(1-p)p + pp(1-p) = 3p^2(1-p).$$

Exemplo 2

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, descrita no exemplo 4 da aula 2. Sabe-se que esse processo estocástico é uma cadeia de Markov homogênea, pois sua probabilidade de transição não depende do tempo (ver exemplo 5 da aula 12).

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

Continuação do exemplo 2

Se $d = 6$, então a probabilidade de transição é

$$p_{i,j} = \begin{cases} i/6 & \text{se } j = i - 1; \\ 1 - i/6 & \text{se } j = i + 1. \end{cases}$$

Se no tempo 7 a caixa 1 tem 5 bolas, qual a probabilidade de que ela chegue ao tempo 11 com 3 bolas? Ou seja, qual o valor de $p_{5,3}^{(4)} = P[X_{11} = 3 | X_7 = 5]$? Pela lei da probabilidade total,

$$P[X_{11} = 3 | X_7 = 5] =$$
$$= \sum_{i \in S_{X_8}} \sum_{j \in S_{X_9}} \sum_{k \in S_{X_{10}}} P[X_8 = i, X_9 = j, X_{10} = k, X_{11} = 3 | X_7 = 5],$$

onde $S_{X_8} = \{4, 6\}$, $S_{X_9} = \{3, 5\}$ e $S_{X_{10}} = \{2, 4, 6\}$.

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

Continuação do exemplo 2

Utilizando resultado na seção 1 das notas complementares da aula 12, pode-se escrever

$$P[X_8 = i, X_9 = j, X_{10} = k, X_{11} = 3 | X_7 = 5] = p_{5,i} p_{i,j} p_{j,k} . p_{k,3}.$$

Logo,

$$P[X_{11} = 3 | X_7 = 5] = \sum_{i \in S_{X_8}} \sum_{j \in S_{X_9}} \sum_{k \in S_{X_{10}}} p_{5,i} p_{i,j} p_{j,k} p_{k,3}.$$

Se $k = 6$, então $p_{k,3} = p_{6,3} = 0$. Logo, $p_{5,i} p_{i,j} p_{j,k} p_{k,3} \neq 0$ apenas se $k \in \{2, 4\}$. Portanto, pode-se concluir que só é possível obter $p_{5,i} p_{i,j} p_{j,k} p_{k,3} \neq 0$ quando

$$i \in \{4, 6\}, \quad j \in \{3, 5\} \quad \text{e} \quad k \in \{2, 4\}.$$

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

Continuação do exemplo 2

Se $i = 6$ e $j = 3$, então $p_{i,j} = p_{6,3} = 0$. Se $j = 5$ e $k = 2$, então $p_{j,k} = p_{5,2} = 0$. Logo, $p_{5,i}p_{i,j}p_{j,k}p_{k,3} \neq 0$ apenas se

$$(i, j, k) \in \{(4,3,2), (4,3,4), (4,5,4), (6,5,4)\}.$$

$$p_{5,3}^{(4)} = P[X_{11} = 3 | X_7 = 5] =$$

$$= p_{5,4}p_{4,3}p_{3,2}p_{2,3} + p_{5,4}p_{4,3}p_{3,4}p_{4,3} +$$

$$+ p_{5,4}p_{4,5}p_{5,4}p_{4,3} + p_{5,6}p_{6,5}p_{5,4}p_{4,3} =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(1 - \frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right) +$$

$$+ \left(\frac{5}{6}\right)\left(1 - \frac{4}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right) + \left(1 - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right) =$$

$$= 800/1296 = 50/81 \approx 0,6173.$$

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

- As probabilidades de transição (em um passo) determinam a distribuição de ordem n da cadeia de Markov homogênea em n instantes de tempo **consecutivos**.
- A distribuição de ordem $n+1$ nos tempos $m, m+1, \cdots, m+n$ é

$$P[X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \cdots, X_{m+n} = i_n] = \\ = P[X_m = i_0] p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}. \quad (1)$$

- A distribuição de ordem n nos tempos $m+1, \cdots, m+n$, dado o valor da cadeia no tempo m, é

$$P[X_{m+1} = i_1, \cdots, X_{m+n} = i_n | X_m = i_0] = p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} \quad (2)$$

- Além disso, como as probabilidades de transição são constantes com relação ao tempo, pode-se escrever

$$P[X_{m+1} = i_1, \cdots, X_{m+n} = i_n | X_m = i_0] = p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} = \\ = P[X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n | X_0 = i_0]. \quad (3)$$

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

- As probabilidades de transição em n passos determinam a função de probabilidade da cadeia de Markov homogênea em n instantes de tempo **não consecutivos**.
- A distribuição de ordem $n+1$ nos tempos $m, m+k_1, \cdots, m+k_n$ é

$$P[X_m = i_0, X_{m+k_1} = i_1, \cdots, X_{m+k_n} = i_n] = \\ = P[X_m = i_0] p_{i_0,i_1}^{(k_1)} p_{i_1,i_2}^{(k_2)} \cdots p_{i_{n-1},i_n}^{(k_n)}. \quad (4)$$

- A distribuição de ordem n nos tempos $m+k_1, \cdots, m+k_n$, dado o valor da cadeia no tempo m, é

$$P[X_{m+k_1} = i_1, \cdots, X_{m+k_n} = i_n | X_m = i_0] = p_{i_0,i_1}^{(k_1)} p_{i_1,i_2}^{(k_2)} \cdots p_{i_{n-1},i_n}^{(k_n)} \quad (5)$$

- Além disso, como as probabilidades de transição em n passos são constantes com relação ao tempo, pode-se escrever

$$P[X_{m+k_1} = i_1, \cdots, X_{m+k_n} = i_n | X_m = i_0] = p_{i_0,i_1}^{(k_1)} p_{i_1,i_2}^{(k_2)} \cdots p_{i_{n-1},i_n}^{(k_n)} = \\ = P[X_{k_1} = i_1, \cdots, X_{k_n} = i_n | X_0 = i_0]. \quad (6)$$

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

- Da equação (5), conclui-se que a distribuição de ordem n, nos instantes de tempo $m+k_1, \cdots, m+k_n$, dado o valor da cadeia no instante de tempo m, depende apenas de $k_1, \cdots, k_n$, que são as distâncias entre os instantes de tempo $m, m+k_1, \cdots, m+k_n$.
- Daí, conclui-se que a distribuição de ordem n, em n instantes de tempo $k_1, \cdots, k_n$ quaisquer, dado o valor num instante de tempo anterior k_0, depende apenas das distâncias entre os instantes de tempo consecutivos na sequência $k_0, k_1, \cdots, k_n$.
- Equivalentemente, a distribuição de ordem n de uma cadeia de Markov homogênea, em n instantes de tempo $k_1, \cdots, k_n$, dado o valor da cadeia num instante de tempo anterior k_0, não muda quando os instantes de tempo $k_0, k_1, \cdots, k_n$ são deslocados m unidades de tempo para frente.

Tópico 29: probabilidades de transição em n passos

- Essa propriedade pode ser lida como um tipo de estacionaridade no sentido estrito (ver tópico 13, aula 6).
- Pela equação (4), a distribuição de ordem $n+1$, nos instantes de tempo $k_0, k_1, \cdots, k_n$, é determinada pela distribuição no tempo inicial k_0 e pelas probabilidades de transição entre os instantes de tempo $k_1, \cdots, k_n$. Pela equação (5), se o estado da cadeia no instante de tempo inicial k_0 é conhecido, então a distribuição de ordem n, nos tempos $k_1, \cdots, k_n$, é determinada pelas probabilidades de transição entre os tempos $k_1, \cdots, k_n$.
- Nota-se que, se o tempo não avança, então a cadeia de Markov homogênea não muda de estado.
- Isto é, se $n = 0$, então $p_{i,i}^{(n)} = p_{i,i}^{(0)} = 1$ e $p_{i,j}^{(0)} = 0$, $\forall\ j \neq i$.

Tópico 30: matrizes de transição em n passos

Definição 2

A matriz de transição em n passos de uma cadeia de Markov homogênea $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é a matriz $\boldsymbol{P}^{(n)}$, cujo elemento na posição (i, j) é $p_{i,j}^{(n)} = P[X_{k+n} = j | X_k = i]$ [1, p. 79].

- A matriz de transição em n passos de uma cadeia de Markov homogênea pode ser obtida calculando-se cada probabilidade de transição em n passos, como nos exemplos 1 e 2.
- Entretanto, esse procedimento é muito trabalhoso.
- Um resultado que reduz o cálculo da matriz de transição em n passos à execução de algumas simples operações de multiplicação de matrizes são as equações de Chapman-Kolmogorov.

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Proposição 1

A probabilidade de transição do estado i de uma cadeia de Markov homogênea para o estado j, em $m+n$ passos, pode ser escrita como.

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{k \in S_{X_m}} p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n)}.$$

Prova (proposição 1)

A prova se encontra nas notas complementares.

- As equações no sistema que se obtém variando-se m, n, i e j são as **equações de Chapman-Kolmogorov** [1, p. 79].

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

- Sabe-se que $p_{i,k}^{(m)}$ é o elemento (i,k) da matriz de transição em m passos $\boldsymbol{P}^{(m)}$ e que $p_{k,j}^{(n)}$ é o elemento (k,j) da matriz de transição em n passos $\boldsymbol{P}^{(n)}$.
- Portanto, $p_{i,j}^{(m+n)}$ é o produto escalar da i-ésima linha de $\boldsymbol{P}^{(m)}$ com a j-ésima coluna de $\boldsymbol{P}^{(n)}$.
- Deduz-se que a matriz de transição em $m+n$ passos $\boldsymbol{P}^{(m+n)}$ é o produto matricial de $\boldsymbol{P}^{(m)}$ com $\boldsymbol{P}^{(n)}$, isto é,

$$\boldsymbol{P}^{(m+n)} = \boldsymbol{P}^{(m)} \cdot \boldsymbol{P}^{(n)}. \tag{7}$$

- Fazendo $m = 1$ em (7), obtém-se

$$\boldsymbol{P}^{(n+1)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(n)}. \tag{8}$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

- Fazendo $n = 1$ em (8), obtém-se $\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^2$.
- Fazendo $n = 2$ em (8), obtém-se $\boldsymbol{P}^{(3)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}^3$.
- Fazendo $n = 3$ em (8), obtém-se $\boldsymbol{P}^{(4)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{(3)} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^3 = \boldsymbol{P}^4$.
- Deduz-se que a matriz de transição em n passos de uma cadeia de Markov homogênea é

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^n, \tag{9}$$

  onde $\boldsymbol{P}$ é a matriz de transição (em um passo) e $\boldsymbol{P}^n$ denota a multiplicação de $\boldsymbol{P}$ por $\boldsymbol{P}$ $n - 1$ vezes.
- Portanto, **a matriz de transição em n passos de uma cadeia de Markov homogênea pode ser obtida multiplicando-se a matriz de transição por ela própria $n - 1$ vezes**.

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Exemplo 3

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, descrita no exemplo 4 da aula 2. Se $d = 6$, então a matriz de transição dessa cadeia de Markov homogênea é (exemplo 7, aula 13)

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/6 & 0 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/6 & 0 & 3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 3

A matriz de transição em 4 passos é $\boldsymbol{P}^{(4)} = \boldsymbol{P}^4 = \boldsymbol{PPPP} \approx$

$$
\approx \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \quad 0 \quad & \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad & \quad 5 \quad & \quad 6 \quad \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0,0741 & 0,0000 & 0,6481 & 0,0000 & 0,2778 & 0,0000 & 0,0000 \\
0,0000 & 0,2901 & 0,0000 & 0,6173 & 0,0000 & 0,0926 & 0,0000 \\
0,0432 & 0,0000 & 0,5309 & 0,0000 & 0,4074 & 0,0000 & 0,0185 \\
0,0000 & 0,1852 & 0,0000 & 0,6296 & 0,0000 & 0,1852 & 0,0000 \\
0,0185 & 0,0000 & 0,4074 & 0,0000 & 0,5309 & 0,0000 & 0,0432 \\
0,0000 & 0,0926 & 0,0000 & 0,6173 & 0,0000 & 0,2901 & 0,0000 \\
0,0000 & 0,0000 & 0,2778 & 0,0000 & 0,6481 & 0,0000 & 0,0741
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Em particular, $p_{5,3}^{(4)} \approx 0,6173$, o que confirma o resultado obtido no exemplo 2. Pode-se ver também que

$$p_{3,3}^{(4)} \approx 0,6296, \; p_{2,6}^{(4)} \approx 0,0185 \text{ e } p_{0,0}^{(4)} \approx 0,0741.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

- Nota-se que, para obter o elemento $p_{i,j}^{(n)}$ de $\boldsymbol{P}^{(n)}$, basta calcular o produto escalar da i-ésima linha de $\boldsymbol{P}^{(n-k)}$ com a j-ésima coluna de $\boldsymbol{P}^{(k)}$.
- Em particular, o elemento $p_{i,j}^{(n)}$ de $\boldsymbol{P}^{(n)}$ é o produto escalar da i-ésima linha de $\boldsymbol{P}^{(n-1)}$ com a j-ésima coluna de $\boldsymbol{P}$ [1, p. 81].

Exemplo 4

[1, p. 80] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Markov homogênea com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1, 2\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 4

A matriz de transição em 2 passos é

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 4/9 & 5/18 & 5/18 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Portanto, $p_{0,0}^{(2)} = 4/9$. Para obter esse resultado, basta conhecer a primeira linha e a primeira coluna da matriz $\boldsymbol{P}$. De maneira similar, para obter $p_{0,0}^{(5)}$, pode-se utilizar $\boldsymbol{P}^{(2)}$ para calcular a primeira linha de $\boldsymbol{P}^{(4)}$ e, em seguida, calcular o produto escalar dessa linha com a primeira coluna de $\boldsymbol{P}$.

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 4

Calculando o produto escalar da primeira linha de $\boldsymbol{P}^{(2)}$ com a primeira coluna de $\boldsymbol{P}^{(2)}$, obtém-se

$$\boldsymbol{P}^{(4)} = \boldsymbol{P}^{(2)} \cdot \boldsymbol{P}^{(2)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 139/324 & 185/648 & 185/648 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \end{array}.$$

Calculando o produto escalar da primeira linha de $\boldsymbol{P}^{(4)}$ com a primeira coluna de $\boldsymbol{P}$, obtém-se

$$p_{0,0}^{(5)} = \frac{139}{324} \cdot \frac{1}{3} + \frac{185}{648} \cdot 0 + \frac{185}{648} \cdot 1 = \frac{833}{1944} \approx 0,4285.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Definição 3

[1, p. 81] A probabilidade de que, partindo do estado i, uma cadeia de Markov homogênea $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ atinja o estado j, **pela primeira vez**, após **exatamente** n passos é

$$\rho_{i,j}^{(n)} = P[X_n = j, X_{n-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i], \ \forall\ n \geq 1.$$

Definição 4

[1, p. 81] A probabilidade de que, partindo do estado i, uma cadeia de Markov homogênea $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ **retorne** ao estado i, **pela primeira vez**, após **exatamente** n passos é

$$\rho_{i,i}^{(n)} = P[X_n = i, X_{n-1} \neq i, \cdots, X_1 \neq i | X_0 = i], \ \forall\ n \geq 1.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

- Nota-se que a probabilidade de que, partindo do estado i, a cadeia atinja o estado j, pela primeira vez, após exatamente um passo, é a probabilidade de transição (em um passo).
- Isto é, $\rho_{i,j}^{(1)} = p_{i,j}$.
- Em alguns casos, é fácil calcular diretamente as probabilidades de primeira chegada em n passos.

Exemplo 5

[1, p. 81] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Markov homogênea com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1\}$ e matriz de transição

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 5

Nesse caso,

$$\begin{aligned}\rho_{0,1}^{(n)} &= P[X_n = 1, X_{n-1} \neq 1, \cdots, X_1 \neq 1 | X_0 = 0] = \\ &= P[X_n = 1, X_{n-1} = 0, \cdots, X_1 = 0 | X_0 = 0] = \\ &= p_{0,0} p_{0,0} \cdots p_{0,0} p_{0,1} = p_{0,0}^{n-1} p_{0,1} = (1/3)^{n-1}(2/3) = \frac{2}{3^n},\end{aligned}$$

para todo $n \in \{1, 2, \cdots\}$. Se $n = 1$, então

$$\rho_{1,0}^{(n)} = \rho_{1,0}^{(1)} = p_{1,0} = 1.$$

Se $n \in \{2, 3, \cdots\}$, então

$$\begin{aligned}\rho_{1,0}^{(n)} &= P[X_n = 0, X_{n-1} \neq 0, \cdots, X_1 \neq 0 | X_0 = 1] = \\ &= P[X_n = 0, X_{n-1} = 1, \cdots, X_1 = 1 | X_0 = 1] = \\ &= p_{1,1} p_{1,1} \cdots p_{1,1} p_{1,0} = 0.\end{aligned}$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 5

Se $n = 1$, então

$$\rho_{0,0}^{(n)} = \rho_{0,0}^{(1)} = p_{0,0} = 1/3.$$

Se $n = 2$, então

$$\begin{aligned}\rho_{0,0}^{(n)} = \rho_{0,0}^{(2)} &= P[X_2 = 0, X_1 \neq 0 | X_0 = 0] = \\ &= P[X_2 = 0, X_1 = 1 | X_0 = 0] = \\ &= p_{0,1} p_{1,0} = (2/3) \cdot 1 = 2/3.\end{aligned}$$

Se $n \in \{3, 4, \cdots\}$, então

$$\begin{aligned}\rho_{0,0}^{(n)} &= P[X_n = 0, X_{n-1} \neq 0, \cdots, X_1 \neq 0 | X_0 = 0] = \\ &= P[X_n = 0, X_{n-1} = 1, \cdots, X_1 = 1 | X_0 = 0] = \\ &= p_{0,1} p_{1,1} \cdots p_{1,1} p_{1,0} = 0.\end{aligned}$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 5

Se $n = 1$, então $\rho_{1,1}^{(n)} = \rho_{1,1}^{(1)} = p_{1,1} = 0$. Se $n = 2$, então

$$\begin{aligned}\rho_{1,1}^{(n)} = \rho_{1,1}^{(2)} &= P[X_2 = 1, X_1 \neq 1 | X_0 = 1] = \\ &= P[X_2 = 1, X_1 = 0 | X_0 = 1] = \\ &= p_{1,0} p_{0,1} = 1 \cdot (2/3) = 2/3.\end{aligned}$$

Se $n \in \{3, 4, \cdots\}$, então

$$\begin{aligned}\rho_{1,1}^{(n)} &= P[X_n = 1, X_{n-1} \neq 1, \cdots, X_1 \neq 1 | X_0 = 1] = \\ &= P[X_n = 1, X_{n-1} = 0, \cdots, X_1 = 0 | X_0 = 1] = \\ &= p_{1,0} p_{0,0} \cdots p_{0,0} p_{0,1} = p_{1,0} (p_{0,0})^{n-2} p_{0,1} = \\ &= 1 \cdot (1/3)^{n-2} (2/3) = \frac{2}{3^{n-1}}.\end{aligned}$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Proposição 2

A probabilidade de transição do estado i de uma cadeia de Markov homogênea para o estado j, em n passos, pode ser escrita como.

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \rho_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n-k)}.$$

Prova (proposição 2)

A prova se encontra nas notas complementares.

- A proposição 2 fornece um método para calcular $\rho_{i,j}^{(k)}$, em termos dos valores de $p_{i,j}^{(n)}$, recursivamente, para cada $k \in \{1, 2, \cdots\}$.

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Exemplo 6

[1, p. 82] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Markov homogênea descrita no exemplo 4. Dos resultados obtidos no exemplo 4 e da proposição 2, tem-se que $\rho_{0,1}^{(1)} = p_{0,1} = \frac{1}{3}$ e

$$\frac{5}{18} = p_{0,1}^{(2)} = \sum_{k=1}^{2} \rho_{0,1}^{(k)} p_{1,1}^{(2-k)} =$$

$$= \rho_{0,1}^{(1)} p_{1,1}^{(1)} + \rho_{0,1}^{(2)} p_{1,1}^{(0)} = \rho_{0,1}^{(1)} p_{1,1} + \rho_{0,1}^{(2)} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \rho_{0,1}^{(2)} = \frac{1}{6} + \rho_{0,1}^{(2)}.$$

Logo,

$$\rho_{0,1}^{(2)} = \frac{5}{18} - \frac{1}{6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 6

A matriz de transição em 3 passos é

$$\boldsymbol{P}^{(3)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{(2)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 23/54 & 31/108 & 31/108 \\ 5/12 & 7/24 & 7/24 \\ 4/9 & 5/18 & 5/18 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Pelos resultados obtidos nesse exemplo e no exemplo 4 e pela proposição 2, tem-se que

$$\frac{31}{108} = p_{0,1}^{(3)} = \sum_{k=1}^{3} \rho_{0,1}^{(k)} p_{1,1}^{(3-k)} = \rho_{0,1}^{(1)} p_{1,1}^{(2)} + \rho_{0,1}^{(2)} p_{1,1}^{(1)} + \rho_{0,1}^{(3)} p_{1,1}^{(0)} =$$

$$= \rho_{0,1}^{(1)} p_{1,1}^{(2)} + \rho_{0,1}^{(2)} p_{1,1} + \rho_{0,1}^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} + \rho_{0,1}^{(3)} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \rho_{0,1}^{(3)}.$$

Logo, $\rho_{0,1}^{(3)} = \frac{31}{108} - \frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{16}{108} = \frac{4}{27}$.

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Definição 5

A função de probabilidade marginal de uma cadeia de Markov homogênea $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$, no tempo n, é definida como

$$a_j^{(n)} = P[X_n = j], \quad j \in S_{X_n}.$$

Definição 6

[1, p. 83] A distribuição inicial de uma cadeia de Markov homogênea $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ é definida como

$$a_i = P[X_0 = i], \quad i \in S_{X_0}.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

- A probabilidade marginal $P[X_n = j]$ pode ser obtida a partir da probabilidade de transição em n passos e da distribuição inicial.

Proposição 3

A função de probabilidade marginal de uma cadeia de Markov homogênea $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$, no tempo n, é dada por

$$P[X_n = j] = \sum_{i \in S_{X_0}} p_{i,j}^{(n)} a_i, \quad \forall j \in S_{X_n}$$

onde $a_j = p[X_0 = j]$ é a distribuição inicial da cadeia.

Prova (proposição 3)

A prova se encontra nas notas complementares.

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

- Conforme já mencionado, em muitas situações, o estado inicial da cadeia é conhecido.
- No passeio aleatório, descrito no exemplo 1 da aula 2, a partícula se encontra, inicialmente, na origem. Ou seja, o estado inicial desse passeio aleatório é 0.
- Em geral, se é conhecido que o estado inicial da cadeia é um determinado estado k, então $a_k = 1 \quad \text{e} \quad a_i = 0, \quad \forall\ i \neq k$.
- Nesse caso, a probabilidade marginal $p[X_n = j]$ fica dada por
$$P[X_n = j] = \sum_{i \in S_{X_0}} p_{i,j}^{(n)} a_i = p_{k,j}^{(n)}. \tag{10}$$
- Ou seja, se o estado inicial de uma cadeia de Markov homogênea é o estado k, então a probabilidade marginal $p[X_n = j]$ é a probabilidade de transição de k para j em n passos.

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

- A partir da função de probabilidade marginal da cadeia, no tempo n, pode-se obter características importantes da variável aleatória X_n, que representa o estado da cadeia no tempo n.
- Por exemplo, a função média de X_n é (ver tópico 7)

$$m_X(n) = E[X_n] = \sum_{i \in S_{X_0}} j \cdot a_j^{(n)}. \tag{11}$$

- O segundo momento de X_n é (ver tópico 8)

$$E[X_n^2] = R_X(n,n) = \sum_{i \in S_{X_0}} j^2 \cdot a_j^{(n)}. \tag{12}$$

- A função variância de X_n é (ver tópico 8)

$$V_X(n) = \sum_{i \in S_{X_0}} [\, j - m_X(n)]^2 \cdot a_j^{(n)} = E[X_n^2] - [m_X(n)]^2. \tag{13}$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Exemplo 7

[1, p. 84] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Markov homogênea descrita no exemplo 4. Se a distribuição inicial dessa cadeia é

$$a_j = P[X_0 = j] = 1/3, \quad \forall\, j \in \{0, 1, 2\},$$

então a função de probabilidade marginal, no tempo 2, é

$$a_j^{(2)} = P[X_2 = j] = \sum_{i=0}^{2} p_{i,j}^{(2)} a_i = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2} p_{i,j}^{(2)} = \frac{p_{0,j}^{(2)} + p_{1,j}^{(2)} + p_{2,j}^{(2)}}{3},$$

para cada $j \in \{0, 1, 2\}$. Dos resultados do exemplo 4, obtém-se

$$a_0^{(2)} = \frac{p_{0,0}^{(2)} + p_{1,0}^{(2)} + p_{2,2}^{(2)}}{3} = \frac{4/9 + 1/2 + 1/3}{3} = \frac{23}{54}.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 7

Analogamente,

$$a_1^{(2)} = \frac{p_{0,1}^{(2)} + p_{1,1}^{(2)} + p_{2,1}^{(2)}}{3} = \frac{5/18 + 1/4 + 1/3}{3} = \frac{31}{108}$$

e

$$a_2^{(2)} = \frac{p_{0,2}^{(2)} + p_{1,2}^{(2)} + p_{2,2}^{(2)}}{3} = \frac{5/18 + 1/4 + 1/3}{3} = \frac{31}{108}.$$

O valor da função média no tempo 2 é

$$m_X(2) = \sum_{i=0}^{2} j \cdot a_j^{(2)} = 0 \cdot \frac{23}{54} + 1 \cdot \frac{31}{108} + 2 \cdot \frac{31}{108} = \frac{93}{108} = \frac{31}{36}.$$

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 7

O segundo momento de X_2 é

$$E[X_2^2] = \sum_{i=0}^{2} j^2 \cdot a_j^{(2)} = 0 \cdot \frac{23}{54} + 1 \cdot \frac{31}{108} + 4 \cdot \frac{31}{108} = \frac{155}{108}.$$

O valor da função de variância no tempo 2 é

$$V_X(2) = E[X_2^2] - [m_X(2)]^2 = \frac{155}{108} - \left(\frac{31}{36}\right)^2 = \frac{899}{1.296} \approx 0,6937.$$

Exemplo 8

[1, p. 85] Sejam $Y_0, Y_1, \cdots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, as quais podem assumir apenas valores inteiros.

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 8

Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ o processo estocástico definido como

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k.$$

Esse processo estocástico é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição (ver as notas complementares)

$$p_{i,j} = P[Y_n = j - i].$$

Como as probabilidades de transição não dependem do tempo no qual a transição ocorre, pode-se concluir que essa cadeia de Markov é homogênea.

Tópico 31: equações de Chapman-Kolmogorov

Continuação do exemplo 8

Essa homogeneidade é com relação ao tempo. Ela implica que a probabilidade de ocorrer uma transição entre dois instantes de tempo k e $k + n$ depende apenas da distância n entre esses dois instantes de tempo (ver tópico 29). O mesmo ocorre com relação aos estados: a probabilidade de ocorrer uma transição do estado i para o estado $i + m$ depende apenas de m, que é a distância entre esses dois estados. Ou seja, além de ser homogênea com relação ao tempo essa cadeia de Markov é homogênea com relação aos estados.

Referências I

[1] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer, New York, NY, EUA, 2007.