UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DECAT DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E CIÊNCIAS ATUARIAIS

Processos estocásticos

Disciplina ofertada pelo DECAT/UFS

Código: ESTAT0077

Nível: Graduação

Carga horária: 60h

Período: 2020.2

Professor responsável e ministrante: Luiz Henrique Dore

Aula 12: Exercícios de fixação

Exercício 1. Mostre que o passeio aleatório, definido no exemplo 7 da aula 12, é uma cadeia de Markov e mostre como se obtém $P[X_{n+1} = j|X_n = i]$.

Exercício 2. Mostre que a cadeia de Ehrenfest, no exemplo 4 da aula 2, e que a ruína do jogador, no exemplo 5 da aula 2, são casos particulares da cadeia de nascimento e morte, definida no exemplo 8 da aula 12.

Exercício 3. [1, p. 41] Suponha que temos duas caixas e $2d$ bolas, das quais d são pretas d são vermelhas. Inicialmente, d bolas são postas na caixa 1, e as d bolas restantes são postas na caixa 2. Em cada instante de tempo $n \in \{1, 2, \cdots\}$, uma bola é sorteada de cada uma das duas caixas, e as duas bolas são postas nas caixas opostas. Seja X_0 o número de bolas pretas inicialmente na caixa 1 e, para cada $n \in \{1, 2, \cdots\}$, seja X_n o número de bolas pretas na caixa 1, após o n-ésimo sorteio. Mostre que

$$P[X_{n+1} = j|X_n = i] = \begin{cases} i^2/d^2, \text{ se } j = i - 1; \\ 2i(d-i)/d^2, \text{ se } j = i; \\ (d-i)/d^2, \text{ se } j = i + 1; \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Essa cadeia é Markoviana? Justifique.

Exercício 4. [1, p. 41] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S_{X_n} = \{0, 1\}$. Utilizando a notação $p_0 = P[X_0 = 1]$,

$$p = P[X_{n+1} = 1|X_n = 0] \quad \text{e} \quad q = P[X_{n+1} = 0|X_n = 1], \quad \forall\, n \in \{0, 1, \cdots\},$$

mostre que

a) $P[X_1 = 0|X_0 = 0, X_2 = 0] = \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2+pq}$;

b) $P[X_1 \neq X_2] = p_0(1 - p - 1)(p - q) + q(p + 1 - q)$.

Exercício 5. [1, p. 42] Seja $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Ehrenfest, definida no exemplo 4 da aula 2, e suponha que X_0 é uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros d e $1/2$, isto é,

$$P[X_0 = i] = \frac{\binom{d}{i}}{2^d}, \quad i \in \{0, 1, \cdots, d\}.$$

Mostre que $P[X_1 = j] = P[X_0 = j]$, $\forall\, j \in \{0, 1, \cdots, d\}$. Isto é, X_0 e X_1 têm a mesma distribuição de probabilidade.

Referências

[1] P. G. Hoel, S. C. Port, and C. J. Stone, *Introduction to stochastic processes*, Houghton Mifflin, Boston, MA, EUA, 1972.