

Curbe și suprafețe în grafică și designul geometric

Note de curs

Paul A. Blaga

Cuprins

1	Transformări geometrice în plan	7
1.1	Generalități	7
1.2	Reprezentarea geometriei bidimensionale. Coordonate omogene în plan	7
1.3	Translații	9
1.4	Scalarea în raport cu originea	11
1.5	Reflexiile în raport cu axele de coordonate	13
1.6	Rotația în jurul originii	15
1.7	Scalarea față de un punct oarecare	17
1.8	Rotația față un punct oarecare	17
1.9	Reflexia față de o dreaptă oarecare	18
1.10	Forfecarea față de un punct oarecare	21
1.11	Probleme	23
2	Transformări geometrice în spațiu	25
2.1	Convenții	25
2.2	Scalarea	25
2.3	Translația	26
2.4	Reflexiile față de planele de coordonate	26
2.5	Rotațiile față de axele de coordonate	27
2.6	Rotații față de axe oarecare	30
2.7	Scalarea față de un punct oarecare	32

2.8	Reflexia față de un plan oarecare	33
2.9	Probleme	38
3	Elemente de geometria diferențială a curbelor	41
4	Curbe Bézier	43
4.1	Curbe polinomiale în forma lui Bézier	43
4.2	Algoritmul lui de Casteljau	46
4.3	Curbe polinomiale: Trecerea de la o reprezentare la alta	52
4.4	Calculul derivatelor unei curbe Bézier	55
4.5	Precizia liniară și ridicarea gradului	60
4.6	Subdivizarea și micșorarea variației	62
4.7	Probleme rezolvate	64
5	Forma polară a funcțiilor polinomiale (blossoming)	71
5.1	Spații afine	71
5.2	O altă abordare a algoritmului lui de Casteljau	72
5.3	Forma polară	72
6	Curbe B-spline	83
6.1	Definiție și proprietăți de bază	83
6.2	Reprezentarea în baza B-spline	88
6.3	Curbe B-spline deschise	95
6.4	Curbe B-spline uniforme	98
6.5	Curbe B-spline periodice și periodice închise	100
6.6	Probleme rezolvate	102
7	Proiecții	109
7.1	Geometrie analitică plană în coordonate omogene	109
7.2	Geometrie analitică în spațiu în coordonate omogene	111
7.3	Proiecții	113
7.3.1	Proiecția pe o dreaptă	113
7.3.2	Proiecția pe un plan	115
8	Curbe Bézier raționale	119
8.1	Algoritmul lui de Casteljau rațional	121
8.2	Derivarea curbelor Bézier raționale	121
8.3	O altă abordare a derivatelor	125

8.4	Ridicarea gradului unei curbe Bézier rațională	127
8.5	Subdivizarea unei Curbe Bézier rațională	127
9	Curbe B-spline raționale neuniforme (NURBS)	131
9.1	Definiție și proprietăți fundamentale	131
9.2	Derivatele unei curbe B-spline rațională	133
9.3	Algoritmul de Boor rațional	138
10	Suprafețe Bézier și B-spline	139
10.1	Introducere	139
10.2	Suprafețe produs tensorial	141
10.2.1	Introducere	141
10.2.2	Suprafețe Bézier produs tensorial	141
10.3	Derivarea suprafețelor Bézier produs tensorial	148
10.4	Suprafețe B-spline produs tensorial	149
10.4.1	Derivarea unei suprafețe B-spline produs tensorial	152
10.5	Suprafețe Bézier triunghiulare	152
10.5.1	Subdivizarea unei suprafețe Bézier triunghiulare	158
10.5.2	Ridicarea gradului unei suprafețe Bézier triunghiulare	159
10.5.3	Derivarea suprafețelor Bézier triunghiulare	160
10.6	Suprafețe Bézier și B-spline produs tensorial rațională	161
11	Generarea și suprafețelor curbilor prin transformări geometrice	163
11.1	Introducere	163
11.2	Suprafețe extrudate	163
11.2.1	Cazul suprafețelor Bézier polinomiale	163
11.2.2	Cazul suprafețelor B-spline polinomiale	164
11.2.3	Cazul suprafețelor Bézier raționale	165
11.2.4	Cazul suprafețelor B-spline raționale	166
11.3	Suprafețe riglate	166
11.3.1	Cazul suprafețelor Bézier polinomiale	167
11.3.2	Cazul suprafețelor B-spline polinomiale	167
11.4	Generarea de curbe și suprafețe prin translație	168
11.4.1	Generarea de curbe în plan și în spațiu prin translație	168
11.4.2	Generarea de suprafețe prin translație	169
11.5	Generarea de curbe și suprafețe prin rotație	172
11.5.1	Generarea de curbe plane	172
11.5.2	Suprafețe obținute printr-o singură rotație	178

11.5.3	Suprafețe obținute prin compunerea a două rotații: Banda lui Möbius și alte suprafețe “răsucite”	182
11.6	Curbe și suprafețe generate prin rototranslație	184
11.6.1	Curbe cicloidale	184
11.6.2	Elicea cilindrică	187
11.6.3	Elicoidul drept	188
11.6.4	Șurubul din Saint-Gilles	189
11.7	Generarea de curbe și suprafețe prin compunerea de rotații, translații și scalări	191
11.7.1	Elicea conică	191
11.7.2	Melcul	192
11.7.3	Cornul	192
11.7.4	Cochilia	194
11.7.5	Un alt corn	195

CAPITOLUL 1

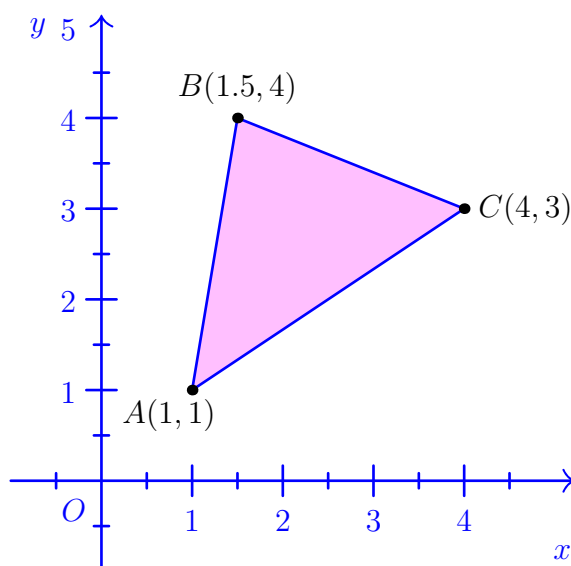
Transformări geometrice în plan

1.1 Generalități

În multe dintre cărțile de grafică pe calculator, transformările geometrice în plan se studiază împreună cu cele în spațiu sau chiar sunt tratate ca un caz particular al celor tridimensionale. Există, după părerea autorului, motive suficiente ca acestor transformări să li se atribuie un spațiu corespunzător. În primul rând, pentru studenții cu puține cunoștințe de geometrie, este mult mai ușor de înțeles și de vizualizat, într-o primă etapă, modul în care acționează transformările în plan, urmând ca apoi să se abordeze transformările spațiale. Pe de altă parte, chiar în grafica tridimensională transformările plane joacă un rol important, întrucât instrumentele pe care se vizualizează grafica sunt, în esență, bidimensionale.

1.2 Reprezentarea geometriei bidimensionale. Coordonate omogene în plan

După cum am văzut mai devreme, în acest curs, forma și dimensiunile obiectelor plane sunt caracterizate prin descrieri numerice bidimensionale, legate de un sistem de coordonate, de obicei sistemul de coordonate carteziane xOy . Elementul de bază al oricărui model bidimensional este punctul. După ce o figură geome-



trică este reprezentată prin intermediul punctelor sale, putem aplica acestora un set de transformări geometrice care, ca efect, vor modifica poziția și forma figurii. În figura ??, de exemplu, este reprezentat un triunghi ABC prin intermediul coordonatelor vârfurilor sale. Convenția pe care o vom adopta, de acum încolo, în toate aplicațiile pe care le vom face, este că fiecare punct este reprezentat ca vectorul coloană al coordonatelor sale. Dacă avem un poligon cu n vârfuri, acesta va fi reprezentat ca o matrice cu n coloane și două linii. Astfel, un triunghi va fi reprezentat printr-o matrice

$$[P]_{\text{Triunghi}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Notăția matricială este foarte utilă pentru definirea și manipularea geometriei în grafica pe calculator. Ar fi foarte util, din acest motiv, ca toate transformările geometrice să poată fi reprezentate sub această formă, cu alte cuvinte, aplicarea unei transformări geometrice asupra unei figuri să se reducă la înmulțirea matricei asociate transformării cu matricea asociată figurii. Din păcate, acest lucru nu este posibil, atâta vreme cât punctele sunt descrise prin intermediul coordonatelor lor obișnuite, adică cele carteziane. Motivul este că, deși majoritatea transformărilor geometrice elementare sunt descrise prin înmulțiri de matrici, translația, de exemplu, este descrisă prin adunarea vectorială. Din fericire, această problemă poate fi rezolvată relativ ușor, prețul plătit fiind utilizarea unui alt sistem de coordonate, care utilizează așa-numitele *coordonate omogene*.

Reprezentarea punctelor în coordonate omogene furnizează o abordare unitară a transformărilor geometrice. Pentru a înțelege coordonatele omogene, să ne închipuim un punct $P_1(x_1, y_1)$, unde x_1 și y_1 sunt coordonatele carteziane bidimensionale ale punctului. Punctul P_1 poate fi privit ca fiind un punct din \mathbb{R}^3 , din planul $z = 1$, cu alte cuvinte, avem $P_1 = P_1(x_1, y_1, 1)$. Punctele de pe dreapta care unește P_1 cu originea sistemului de coordonate, pot fi descrise prin intermediul unui parametru real h , astfel încât:

$$P(x, y, z) = P(hx_1, hy_1, h).$$

Orice punct din plan poate fi reprezentat prin unul dintre punctele de-a lungul acestei drepte din spațiul tridimensional, cu excepția originii, care corespunde lui $h = 0$. Coordonatele ordinare corespund punctului unde dreapta intersectează planul $z = 1$. Diferite puncte din plan sunt reprezentate prin drepte prin origine diferite.

În coordonate omogene, prin urmare, un punct este reprezentat sub forma $P(hx, hy, h)$. Să considerăm, de exemplu, punctul $P(2, 4)$, în coordonate carteziane bidimensionale obișnuite. Următoarele reprezentări omogene identifică, toate, același punct: $P(4, 8, 2)$, $P(6, 12, 3)$, $P(2, 4, 1)$. Date fiind coordonatele omogene ale unui punct, $P(m, n, h)$, coordonatele carteziane obișnuite pot fi determinate din reprezentarea omogenă $P(m/h, n/h, 1)$. Se obține

$$x = \frac{m}{h},$$

$$y = \frac{n}{h}.$$

Atunci cnd se utilizează coordonate omogene, punctele din spațiul bidimensional sunt reprezentate prin matrici de tip $[3 \times n]$, unde n este numărul de puncte care definesc figura geometrică în cauză. În cazul unui triunghi, se obține:

$$[P]_{\text{Triunghi}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Translații

Se numește *translație de vector* $\mathbf{v}(h, k)$ o aplicație care asociază unui punct $A(x, y)$ un punct $A'(x', y')$ astfel încât:

$$\mathbf{r}_{A'} = \mathbf{r}_A + \mathbf{v} \quad (1.3.1)$$

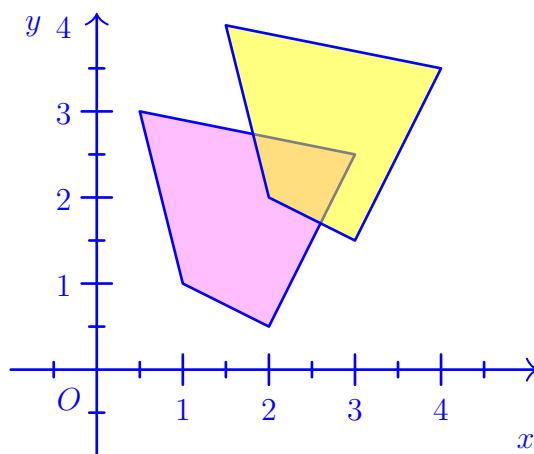


Figura 1.1: Un patrulater și translatatul său de vector $\mathbf{v}(1, 1)$, variația vectorilor de poziție

sau, pe componente

$$x' = x + h, \quad y' = y + k. \quad (1.3.2)$$

Prin convenție, relația (1.3.1) se va scrie, de acum încolo, sub forma:

$$A' = A + \mathbf{v}. \quad (1.3.3)$$

O translație de vector $\mathbf{v}(h, k)$ se notează cu $T(h, k)$ și e considerată ca fiind o aplicație $T(h, k) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată prin

$$T(h, k)(x, y) = (x + h, y + k). \quad (1.3.4)$$

În limbajul matricial, translația de vector $\mathbf{v}(h, k)$ asociază unui punct $A(x, y)$ un punct $A'(x', y')$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

Dacă utilizăm coordonate omogene, atunci translația se poate reprezenta sub formă matricială:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.3.6)$$

după cum se poate verifica ușor, efectuând înmulțirile matriciale. Îcele ce urmează, vom utiliza pentru matricea omogenă asociată unei translații aceeași notație ca și pentru translația însăși, adică vom pune:

$$T(h, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3.7)$$

În figura 1.3 se poate observa cum acționează translația de vector $\mathbf{v}(1, 1)$ asupra unui patrulater de vârfuri $A(.5, 3)$, $B(1, 1)$, $C(2, .5)$, $D(3, 2.5)$. Am indicat, de asemenea, pe figură, modul cum se transformă vectorii de poziție ai vârfurilor patrulaterului. Imaginile vârfurilor sunt punctele $A'(1.5, 4)$, $B'(2, 2)$, $C'(3, 1.5)$, $D'(4, 3.5)$.

Se pot demonstra cu ușurință următoarele proprietăți ale translației:

- (i) Orice translație $T(h, k)$ este o bijecție, iar inversa ei este o translație, $T(-h, -k)$.
- (ii) Mulțimea tuturor translațiilor din plan formează un grup în raport cu compunerea aplicațiilor, elementul neutru fiind aplicația identică, egală, de fapt, cu $T(0, 0)$.
- (iii) Translațiile sunt *izometrii* (păstrează distanțele dintre puncte).
- (iv) Grupul translațiilor este comutativ (adică dacă aplicăm unui punct două translații succesive, nu contează ordinea în care le aplicăm)¹.

1.4 Scalarea în raport cu originea

Scalarea în raport cu originea este, ca și translația, o transformare foarte simplă. Ea se definește ca fiind o aplicație $S(s_x, s_y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, astfel încât pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, să avem

$$S(s_x, s_y)(x, y) = (s_x \cdot x, s_y \cdot y). \quad (1.4.1)$$

Aici s_x, s_y sunt numere reale *nenule* care se numesc *factori de scară*. Dacă un factor de scară s este astfel încât $|s| > 1$, atunci s se numește *mărire*, în timp ce dacă $|s| <$

¹Atenție! Această remarcă nu este specifică tuturor transformărilor geometrice. În general, dacă aplicăm unui punct o secvență de transformări geometrice, ordinea în care le aplicăm este, de regulă, esențială.

1, s se numește *micșorare*. Dacă $s_x = s_y$, vom spune că scalarea este *uniformă*. O scalare uniformă de factor de scală pozitiv se mai numește, uneori, *magnificare*.

Și în cazul scalării, aplicația se poate reprezenta matricial. De aceasta dată, avem de-a face cu o aplicație liniară, căreia îi putem asocia o matrice, pe care o vom nota cu același simbol ca și aplicația, anume $S(s_x, s_y)$. Coloanele matricii aplicației vor fi imaginile vectorilor bazei lui \mathbb{R}^2 , adică ale vectorilor $(1, 0)$, $(0, 1)$. Prin urmare, vom avea

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}.$$

Aceasta înseamnă că imaginea prin scalare a unui punct $A(x, y)$ va fi un punct $A'(x', y')$ astfel încât să avem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S(s_x, s_y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

Și aici, ca și în cazul translației, vom prefera să utilizăm coordonate omogene, ceea ce înseamnă că matricea scalării se va scrie (utilizăm aceeași notație!):

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.3)$$

Exemplul 1.1. Pentru exemplificare, vom considera, din nou, patrulaterul studiat în cazul translației, $ABCD$, cu $A(0.5, 3)$, $B(1, 1)$, $C(2, 0.5)$, $D(3, 2.5)$ și îi vom aplica, de data aceasta, o scalare de factori $s_x = 2$, $s_y = 1.5$. Conform relației (1.4.2), imaginile vârfurilor patrulaterului vor fi date de

$$(A' \ B' \ C' \ D') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0.5 & 2.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 4.5 & 1.5 & 0.75 & 3.75 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Figura originală și rezultatul scalării, împreună cu modul în care scalarea acționează asupra vectorilor de poziție, pot fi văzute în figura 1.1.

Observație. Următoarele observații sunt foarte ușor de demonstrat și sunt lăsate în grija cititorului:

- (i) Orice scalare $S(s_x, s_y)$ este inversabilă, iar inversa ei este $S(1/s_x, 1/s_y)$ (prin urmare este tot o scalare).

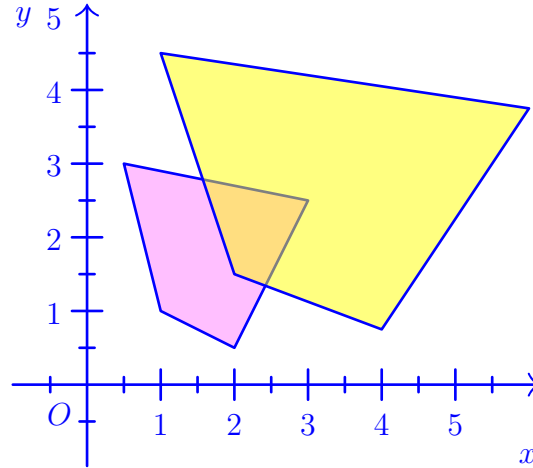


Figura 1.2: O scalare de factori (2, 1.5)

- (ii) Mulțimea tuturor scalărilor formează, în raport cu compunerea aplicațiilor, un grup (comutativ), în care elementul neutru este aplicația identică (adică $S(1, 1)$).
- (iii) Scalarea *nu* este, de obicei, o izometrie (distanța dintre puncte se modifică) ceea ce are ca efect, în particular, modificarea formei și a dimensiunilor unei figuri geometrice prin aplicarea unei scalări.

1.5 Reflexiile în raport cu axele de coordonate

Reflexiile față de axele de coordonate sunt două aplicații, $R_x, R_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, care asociază, fiecare dintre ele, unui punct $A(x, y)$, simetricul punctului față de axa de coordonate corespunzătoare.

Să începem cu R_x . Această aplicație asociază, după cum spuneam, fiecărui punct $A(x, y)$ simetricul său relativ la axa Ox . Este ușor de văzut că simetricul lui A va fi punctul $A'(x, -y)$, așadar $R_x(x, y) = (x, -y)$. Rezultă, de asemenea, imediat, că $R_y(x, y) = (x, -y)$. Ca și în cazul scalării, este ușor de constatat că R_x și R_y sunt aplicații liniare. Matricile lor față de baza canonică a lui \mathbb{R}^2 sunt foarte ușor de determinat. Avem

$$R_x(1, 0) = (1, 0), \quad R_x(0, 1) = (0, -1),$$

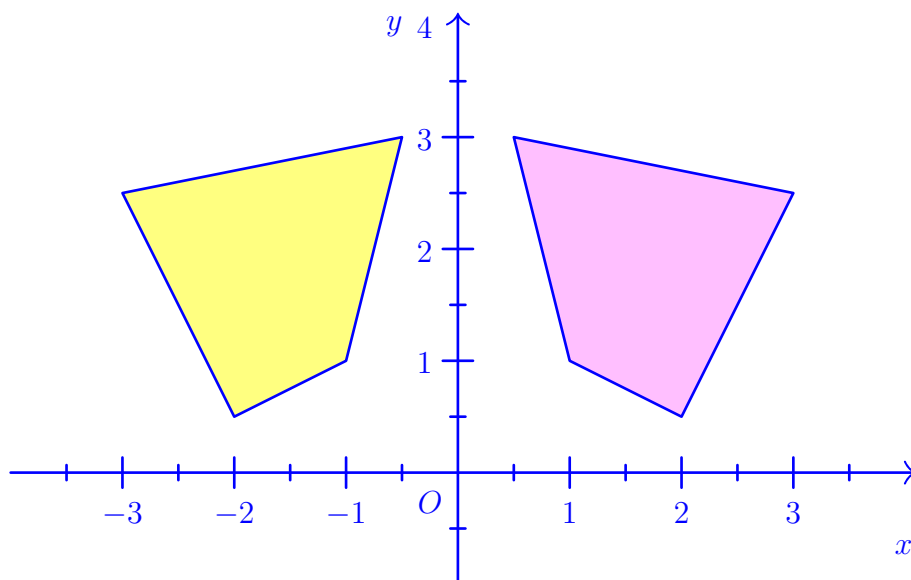


Figura 1.3: Un patrulater $ABCD$ și reflexia sa față de axa Oy , $A'B'C'D'$

prin urmare, matricea lui R_x (notată cu același simbol), va fi

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

sau, în coordonate omogene:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5.2)$$

ceea ce înseamnă că forma matriceală a lui R_x se va scrie:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.5.3)$$

sau, în coordonate omogene,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5.4)$$

Exact la fel, matricea lui R_y va fi

$$R_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5.5)$$

sau, în coordonate omogene:

$$R_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5.6)$$

iar forma matriceală a acestei transformări se va scrie:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.5.7)$$

sau, în coordonate omogene,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5.8)$$

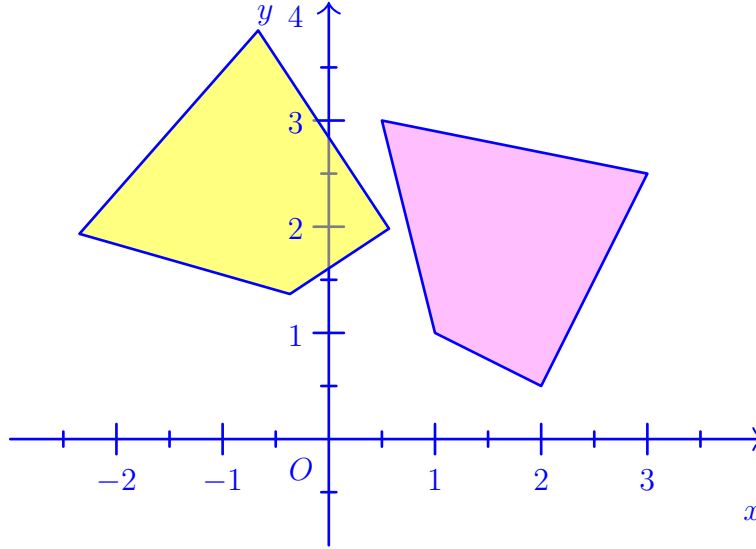
În figura 1.5 se observă cum acționează reflexia R_y asupra unui patrulater. Este clar, din figură, că acțiunea este, de fapt, asupra vectorilor de poziție ale punctelor patrulaterului.

1.6 Rotația în jurul originii

Rotația în plan în jurul originii, cu un unghi θ , este o transformare geometrică $\text{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ care asociază unui punct P din plan un punct P' astfel încât unghiul $\widehat{POP'}$ să fie egal cu $|\theta|$. Dacă unghiul θ este pozitiv, rotația se face în sens trigonometric (în sens opus mersului acelor de ceasornic), în timp ce dacă θ este negativ, rotația se face în sensul mersului acelor de ceasornic.

Problema pe care ne-o punem acum este ca, dacă se dă punctul P , prin coordonatele sale carteziane (x, y) , să determinăm coordonatele carteziane (x', y') ale imaginii sale prin rotație, punctul P' .

Să presupunem că unghiul pe care îl formează vectorul \overrightarrow{OP} cu direcția pozitivă a axei Ox este egal cu α . Fie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – lungimea acestui vector. Este clar că

Figura 1.4: Rotația unui patrulater cu 60° în jurul originii

unghiul dintre $\overrightarrow{OP'}$ și direcția pozitivă a axei Ox este egal cu $\alpha + \theta$. Cum este clar că $\|\overrightarrow{OP'}\| = \|\overrightarrow{OP}\| = r$, avem

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\alpha + \theta) = r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) \\ y' &= r \sin(\alpha + \theta) = r(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) \end{aligned}$$

sau, încă,

$$\begin{aligned} x' &= \underbrace{(r \cos \alpha)}_{=x} \cos \theta - \underbrace{(r \sin \alpha)}_{=y} \sin \theta \\ y' &= \underbrace{(r \cos \alpha)}_{=x} \sin \theta + \underbrace{(r \sin \alpha)}_{=y} \cos \theta \end{aligned}$$

adică, în cele din urmă,

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (1.6.1)$$

În format matricial, transformarea de mai sus se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.6.2)$$

Dacă notăm matricea transformării $\text{Rot}(\theta)$ cu același simbol, adică

$$\text{Rot}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.6.3)$$

atunci rotația în plan de unghi θ în jurul originii se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \text{Rot}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.6.4)$$

Matricea omogenă a rotației se obține ușor, prin bordare, și rezultă (folosim aceeași notație)

$$\text{Rot}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.6.5)$$

1.7 Scalarea față de un punct oarecare

Fie $P(x_0, y_0)$ un punct oarecare din plan. Pentru a efectua o scalare față de P , mutăm punctul P în origine, facem scalarea, apoi îl mutăm înapoi. Prin urmare, matricea omogenă a scalării se va scrie:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_P(s_x, s_y) &= T(x_0, y_0) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot T(-x_0, -y_0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} s_x & 0 & (1-s_x)x_0 \\ 0 & s_y & (1-s_y)y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.8 Rotația față un punct oarecare

Fie $P(x_0, y_0)$ un punct oarecare din plan. Pentru a efectua o rotație în jurul lui P , mutăm punctul P în origine, facem rotația, apoi îl mutăm înapoi. Prin urmare,

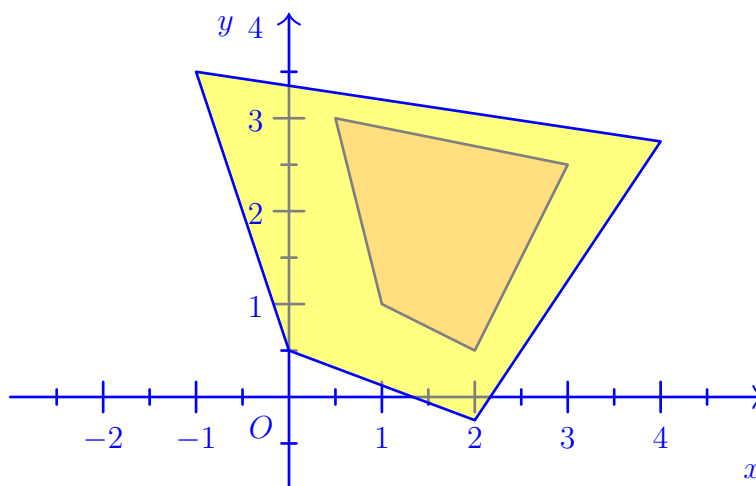


Figura 1.5: Scalarea unui patrulater, de factori de scală $(2, 1.5)$, relativ la punctul $M(2, 2)$

matricea omogenă a rotației se va scrie:

$$\begin{aligned}
 \text{Rot}_P(\theta) &= T(x_0, y_0) \cdot \text{Rot}(\theta) \cdot T(-x_0, -y_0) = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_0(1 - \cos \theta) + y_0 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -x_0 \sin \theta + y_0(1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

1.9 Reflexia față de o dreaptă oarecare

Ideea, de data aceasta, este transformăm dreapta de reflexie într-una dintre axele de coordonate, să facem reflexia față de axa pe care am ales-o, apoi să aducem înapoi dreapta în poziția inițială. Fie, prin urmare, o dreaptă Δ , dată prin ecuația generală,

$$(\Delta) : ax + by + c = 0.$$

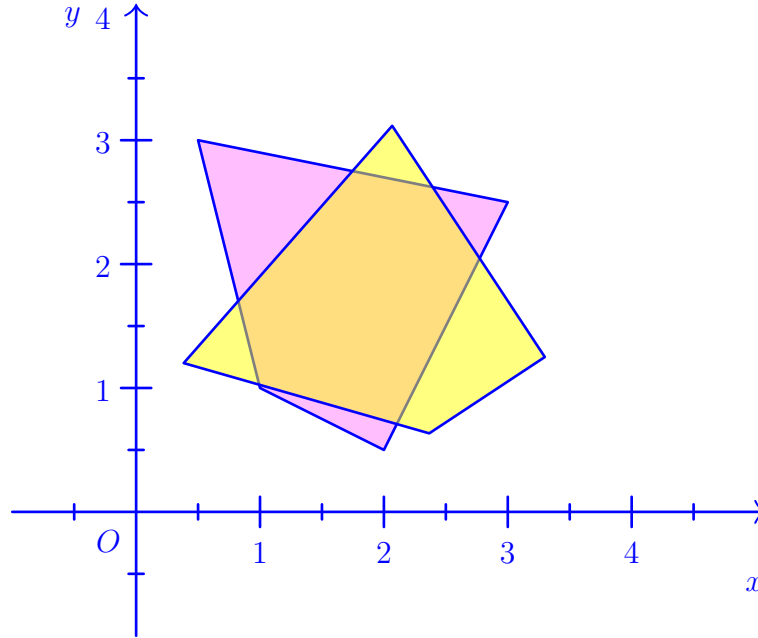


Figura 1.6: Rotația unui patrulater, de unghi 60° , relativ la punctul $M(2, 2)$

Dacă axa de reflexie este verticală (adică $b = 0$), atunci facem o translație de vector $(c/a, 0)$, urmată de reflexia față de Oy și de translația inversă, adică avem:

$$\begin{aligned} R_\Delta &= T(-c/a, 0) \cdot R_y \cdot T(c/a, 0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & c/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2c/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Presupunem, acum, că $b \neq 0$. Executăm următoarele operații:

- 1) Facem o translație de vector $(0, c/b)$, care transformă axa de reflexie într-o dreaptă Δ' , paralelă cu ea, care trece prin origine.
- 2) Panta dreptei Δ (deci și a lui Δ') este

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{a}{b}.$$

Facem, prin urmare, o rotație de unghi $-\theta$ în jurul originii, rotație după care dreapta Δ' se transformă în axa Ox .

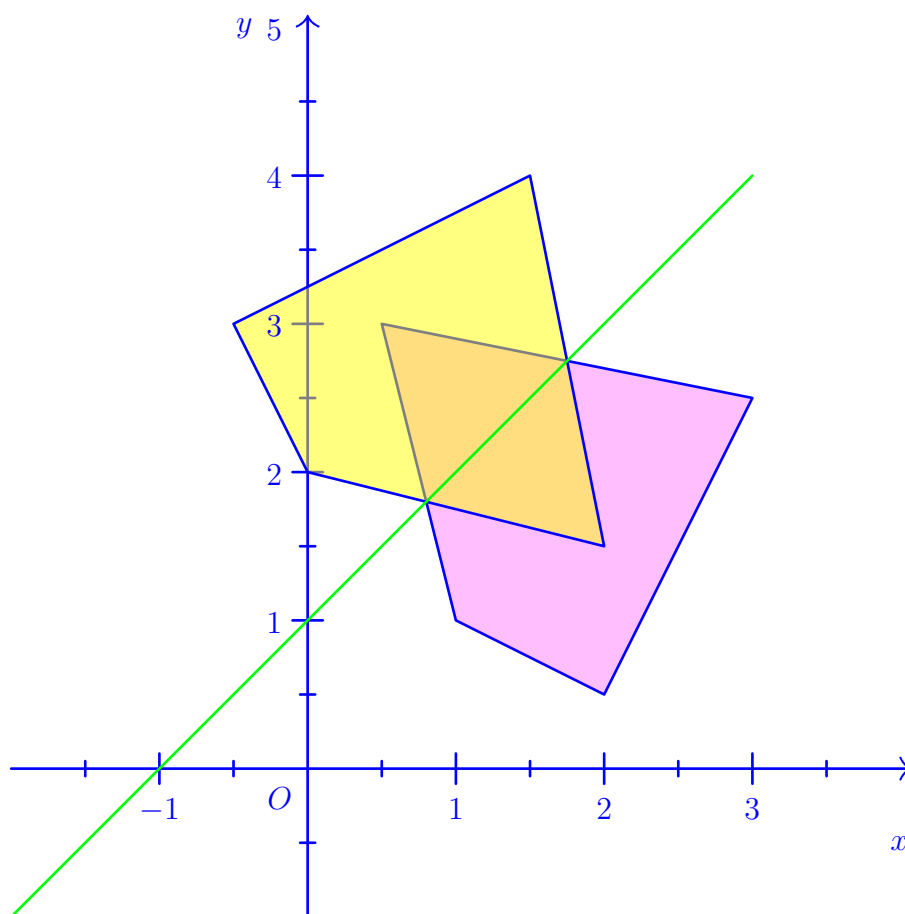


Figura 1.7: Reflexia unui patrulater față de dreapta $y = x + 1$

- 3) Aplicăm reflexia relativ la axa Ox .
- 4) Aplicăm rotația de unghi θ .
- 5) Aplicăm translația de vector $(0, -c/b)$.

Înainte de a scrie matricea, remarcăm că, din moment ce $\operatorname{tg} \theta = -a/b$, se obține imediat că

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \theta = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Prin urmare, transformarea căutată este

$$\begin{aligned}
 R_{\Delta} &= T\left(0, -\frac{c}{b}\right) \cdot \text{Rot}(\theta) \cdot R_x \cdot \text{Rot}(-\theta) \cdot T\left(0, -\frac{c}{b}\right) = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
 &\cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c}{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \frac{2c}{b} \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta & \frac{c}{b} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta - 1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & -\frac{2ab}{a^2 + b^2} & -\frac{2ac}{a^2 + b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2 + b^2} & \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & -\frac{2bc}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1.10 Forfecarea față de un punct oarecare

Fie Q un punct oarecare, fixat din plan și $\mathbf{v}(v_1, v_2)$ – un versor. Fie ℓ dreapta care trece prin Q , de vector director \mathbf{v} . Fie, de asemenea, r un număr real. Se numește *forfecare* relativ la punctul Q , de factor r , în direcția versorului \mathbf{v} , transformarea geometrică ce asociază unui punct P din plan punctul P' , de pe dreapta ℓ_P care este paralelă cu ℓ și trece prin P , obținut din P printr-o deplasare de mărime egală cu $r \cdot \delta_P$, unde δ_P este distanța orientată de la punctul P la dreapta ℓ .

Pentru a determina expresia transformării, începem prin a scrie ecuația generală a dreptei ℓ . Plecăm de la ecuația canonică

$$\frac{X - q_1}{v_1} = \frac{Y - q_2}{v_2},$$

de unde

$$\ell : -v_2 X + v_1 Y + v_2 q_1 - v_1 q_2 = 0. \quad (1.10.1)$$

Astfel, distanța orientată de la $P(x, y)$ la ℓ este

$$\delta_P = \frac{-v_2 x + v_1 y + v_2 q_1 - v_1 q_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

sau, având în vedere că \mathbf{v} este un versor,

$$\delta_P = -v_2x + v_1y + v_2q_1 - v_1q_2. \quad (1.10.2)$$

Astfel, ecuația transformării:

$$P' = P + r\delta_P\mathbf{v}, \quad (1.10.3)$$

se poate scrie

$$P' = P + r(-v_2x + v_1y + v_2q_1 - v_1q_2)\mathbf{v} \quad (1.10.4)$$

sau, dacă proiectăm pe axele de coordonate,

$$\begin{cases} x' = x + r(-v_2x + v_1y + v_2q_1 - v_1q_2)v_1, \\ y' = y + r(-v_2x + v_1y + v_2q_1 - v_1q_2)v_2. \end{cases} \quad (1.10.5)$$

Regrupând termenii din membrii dreپți ai ecuației de mai sus, obținem

$$\begin{cases} x' = (1 - rv_1v_2)x + rv_1^2y + rv_1(v_2q_1 - v_1q_2), \\ y' = -rv_2^2x + (1 + rv_1v_2)y + rv_2(v_2q_1 - v_1q_2). \end{cases} \quad (1.10.6)$$

Ecuațiile de mai sus ne conduc la relația matricială

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - rv_1v_2 & rv_1^2 & -rv_1(v_1q_2 - v_2q_1) \\ -rv_2^2 & 1 + rv_1v_2 & -rv_2(v_1q_2 - v_2q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.10.7)$$

Astfel, matricea forfecării relativ la punctul Q , în direcția vectorului \mathbf{v} , de factor r , este

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{v}, r) = \begin{pmatrix} 1 - rv_1v_2 & rv_1^2 & -rv_1(v_1q_2 - v_2q_1) \\ -rv_2^2 & 1 + rv_1v_2 & -rv_2(v_1q_2 - v_2q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.10.8)$$

Exemplul 1.2. Matricea forfecării relativ la origine, în direcția vectorului \mathbf{i} , de factor r , este

$$\text{Shear}(O, \mathbf{i}, r) = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observație. Parametrul r din definiția forfecării are o interpretare foarte simplă. Fie P_1 proiecția punctului P pe dreapta ℓ . Atunci tangenta unghiului $\theta = \widehat{PP_1P'}$ este egală cu r . Într-adevăr, în triunghiul dreptunghic PP_1P' , cele două catete sunt $r\delta_P$ și δ_P , de unde conchidem că $\operatorname{tg} \theta = r$ (vezi figura).

Drept consecință, matricea forfecării relativ la punctul Q , în direcția vectorului \mathbf{v} , de unghi θ este

$$\operatorname{Shear}(Q, \mathbf{v}, \operatorname{tg} \theta) = \begin{pmatrix} 1 + \operatorname{tg} \theta v_1 v_2 & -\operatorname{tg} \theta v_1^2 & \operatorname{tg} \theta v_1(v_1 q_2 - v_2 q_1) \\ \operatorname{tg} \theta v_2^2 & 1 - \operatorname{tg} \theta v_1 v_2 & \operatorname{tg} \theta v_2(v_1 q_2 - v_2 q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.10.9)$$

Observație. Forfecarea față de un punct oarecare se poate obține și ea determinând, mai întâi, forfecarea față de origine, în direcția unei axe de coordonate și apoi compunând cu rotații și translații. În cazul ei, însă, e posibil să determinăm direct formula generală.

1.11 Probleme

În lista de probleme de mai jos, triunghiul ABC are vârfurile $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(2, 3)$. Reprezentați, de fiecare dată, pe aceeași figură, triunghiul inițial și imaginea sa.

Problema 1.1. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de unghi 30° în jurul punctului $Q(2, 2)$, urmată de o translație de vector $(1, 2)$. Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

Problema 1.2. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2, 2)$.

Problema 1.3. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă, de factori de scală $(2, 1)$, relativ la punctul $Q(2, 2)$.

Problema 1.4. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o forfecare de factor 1, relativ la punctul $Q(2, 2)$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(2, 1)$.

Problema 1.5. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta $2x + 3y - 5 = 0$.

Problema 1.6. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta AB .

Problema 1.7. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta BC , urmată de o forfecare, factor $\sqrt{3}/3$, relativ la punctul A , în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, 1)$.

Problema 1.8. Determinați imaginea triunghiului ABC prin rotația cu 90° în jurul punctului C , urmată de reflexia relativ la dreapta AB .

Problema 1.9. Determinați imaginea triunghiului ABC prin scalarea neuniformă de factori $(1, 2)$ relativ la punctul B , urmată de o rotație de 30° în jurul punctului $Q(1, 1)$.

CAPITOLUL 2

Transformări geometrice în spațiu

2.1 Convenții

În cele ce urmează, punctele și vectorii, reprezentate prin coordonatele (respectiv componentele) lor relativ la un sistem de coordonate vor fi considerați matrici 1-dimensionale, ale căror elemente sunt coordonatele (componentele) punctelor, respectiv vectorilor. Transformările vor fi reprezentate, de la bun început, în coordonate omogene.

2.2 Scalarea

Transformarea prin scalare se obține, analog cu ceea ce se întâmplă în plan, plasând factorii de scalare pe diagonala principală a matricii de transformare. Astfel, transformarea se va scrie:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau, dacă utilizăm coordonate omogene oarecare pentru puncte,

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}.$$

Toate numerele s_x, s_y, s_z (și variantele lor omogene) trebuie să fie strict pozitive.

2.3 Translația

Analog cu cazul plan, în spațiu translația de vector (h, k, l) asociază unui punct de coordonate (x, y, z) punctul de coordonate

$$(x', y', z') = (x, y, z) + (h, k, l).$$

În coordonate omogene, această transformare se poate scrie matricial ca

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau, în coordonate omogene oarecare,

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & H \\ 0 & 1 & 0 & K \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix},$$

cu $M \neq 0$.

2.4 Reflexiile față de planele de coordonate

Reflexiile față de planele de coordonate, în spațiu, sunt analoage cu reflexiile față de axe de coordonate în plan.

Este ușor de constatat că o simetrie față de planul xOy , aplicată unui punct de coordonate (x, y, z) , are ca efect schimbarea semnului celei de-a treia coordonate:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = -z \end{cases}$$

sau, matricial, în coordonate omogene canonice,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea

$$R_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea reflexiei față de planul xOy . În mod analog, pentru reflexiile față de celelalte două plane de coordonate sunt:

$$R_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pentru reflexia față de planul yOz , respectiv

$$R_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pentru reflexia față de planul xOz .

2.5 Rotațiile față de axe de coordonate

În spațiu, rotațiile se produc în jurul unor axe, așa cum rotațiile plane se produc în jurul unor puncte. Se poate demonstra că o rotație în jurul unei axe oarecare

care trece prin origine se poate scrie ca un produs de rotații în jurul axelor de coordonate, de aceea ne ocupăm, mai întâi de aceste rotații particulare.

Este ușor de constatat că dacă facem o rotație de unghi θ_x în jurul axei Ox , atunci efectul asupra unui punct de coordonate (x, y, z) este că coordonata x nu se modifică, în timp ce celelalte două coordonate se modifică așa cum s-ar întâmpla dacă am roti punctul (y, z) cu unghiul θ_x , în planul yOz , în jurul originii. Prin urmare, formulele de transformare sunt

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y \cos \theta_x - z \sin \theta_x, \\ z' = y \sin \theta_x + z \cos \theta_x. \end{cases}$$

În coordonate omogene, matricial, transformarea se va scrie, atunci,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deci matricea unei rotații de unghi θ_x în jurul axei Ox este

$$Rot_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotația cu un unghi θ_y relativ la axa Oy este puțin diferită față de rotația în jurul axei Ox . Motivul este lesne de înțeles. Judecând ca și în cazul rotației în jurul axei Ox , este clar că y rămâne constant, în timp ce x și z se transformă ca și cum punctului (z, x) din planul zOx i s-ar aplica o rotație de unghi θ_y în jurul originii în planul zOy . Prin urmare, vom avea (ordinea coordonatelor este, în mod intenționat, schimbată):

$$\begin{cases} y' = y, \\ z' = z \cos \theta_y - x \sin \theta_y, \\ x' = z \sin \theta_y + x \cos \theta_y. \end{cases}$$

Dacă “restaurăm” ordinea coordonatelor, vom obține:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta_y + z \sin \theta_y, \\ y' = y, \\ z' = -x \sin \theta_y + z \cos \theta_y. \end{cases}$$

În fine, dacă transcriem relațiile de mai sus în formă matricială, în coordonate omogene, se obține:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Așadar, matricea unei rotații de unghi θ_y în jurul axei Oy este dată de

$$Rot_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În fine, dacă aplicăm o rotație de unghi θ_z în jurul axei Oz unui punct de coordonate (x, y, z) , atunci

- a) coordonata z rămâne neschimbată;
- b) coordonatele x și y se schimbă ca și cum punctul de coordonate (x, y) ar face o rotație de unghi θ_z în jurul originii planului xOy , în acest plan,

adică

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta_z - y \sin \theta_z, \\ y' = x \sin \theta_z + y \cos \theta_z, \\ z' = z. \end{cases}$$

Matricial, în coordonate omogene, avem legea de transformare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea unei rotații față de axa Oz , de unghi θ_z este

$$Rot_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6 Rotații față de axe oarecare

Atunci când trebuie să facem o rotație de unghi θ față de o dreaptă oarecare, ceea ce avem de făcut este să transformăm dreapta astfel încât ea să ajungă să coincidă cu una dintre axele de coordonate, să efectuăm rotația cerută în jurul acelei axe, apoi să aducem înapoi dreapta în poziția sa inițială.

Să presupunem, prin urmare, că axa de rotație este dată de un punct $P(x_0, y_0, z_0)$ și un versor director $\mathbf{w}(w_x, w_y, w_z)$.

Atunci rotația se produce în modul următor.

- 1) Facem, mai întâi o translație $T(-x_0, -y_0, -z_0)$. Această translație duce dreapta A_1A_2 într-o dreaptă paralelă cu ea și care trece prin origine. Dacă, cumva, versorul \mathbf{w} este paralel cu axa Ox (adică $w_y = w_z = 0$), atunci matricea de rotație este, pur și simplu,

$$T(x_0, y_0, z_0) \text{Rot}_x(\theta) T(-x_0, -y_0, -z_0).$$

Analog stau lucrurile dacă \mathbf{w} este paralel cu una dintre celelalte două axe de coordonate.

- 2) Presupunem acum că w_y și w_z nu se anulează simultan. Aplicăm o rotație de unghi θ_x în jurul axei Ox astfel încât, după efectuarea rotației, axa de rotație să ajungă în planul xOz . Proiectăm, mai întâi, versorul \mathbf{w} pe planul yOz . Vectorul obținut va fi $\mathbf{w}_1(0, w_y, w_z)$. Unghiul pe care îl face \mathbf{w} cu planul xOz este unghiul pe care îl face \mathbf{w}_1 cu axa Oz . Avem, prin urmare,

$$\sin \theta_x = \frac{w_y}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}}, \quad \cos \theta_x = \frac{w_z}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}}.$$

- 3) Fie \mathbf{w}_2 imaginea vectorului \mathbf{w} prin rotația de la punctul precedent. Atunci

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2 \left(w_x, 0, \sqrt{w_y^2 + w_z^2} \right),$$

prin urmare, dacă notăm cu θ_y unghiul format de \mathbf{w}_2 cu axa Oz , funcțiile trigonometrice ale unghiului θ_y sunt

$$\cos \theta_y = \frac{w_x}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}, \quad \sin \theta_y = \frac{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}.$$

Trebuie precizat că, pentru a suprapune \mathbf{w}_2 peste \mathbf{k} trebuie să rotim acest vector în jurul axei Oy cu $-\theta_y$, nu cu θ_y (pentru că reperul xOz este stâng).

4) Efectuăm rotația de unghi θ , în jurul axei Oz ,

5) Rotim cu θ_y în jurul axei Oy .

6) Rotim cu $-\theta_x$ în jurul axei Ox .

7) Aplicăm translația $T(x_0, y_0, z_0)$.

Prin urmare, transformarea va fi

$$\text{Rot}_\Delta(\theta) = T(x_0, y_0, z_0) \cdot \text{Rot}_x(-\theta_x) \cdot \text{Rot}_y(\theta_y) \cdot \text{Rot}_z(\theta) \cdot \text{Rot}_y(-\theta_y) \cdot \text{Rot}_x(\theta_x) \cdot T(-x_0, -y_0, -z_0)$$

sau

$$\begin{aligned} \text{Rot}_\Delta(\theta) = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w_z}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}} & \frac{w_y}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{w_y w_y}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}} & \frac{w_z}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{w_y^2 + w_z^2} & 0 & w_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w_x & 0 & \sqrt{w_y^2 + w_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{w_y^2 + w_z^2} & 0 & -w_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ w_x & 0 & \sqrt{w_y^2 + w_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w_z}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}} & -\frac{w_y}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{w_y}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}} & \frac{w_z}{\sqrt{w_y^2 + w_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ca un exemplu, să determinăm matricea unei rotații de 30° în jurul dreptei $x = y = z$. În acest caz, versorul director al axei de rotație este

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

Axa de rotație trece prin origine, astfel că nu avem nevoie de cele două translații. Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor $\theta_x, \theta_y, \theta$ sunt, în acest caz,

$$\begin{aligned}\cos \theta_x &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin \theta_x &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos \theta_y &= \frac{\sqrt{6}}{3}, & \sin \theta_y &= \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin \theta &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Prin urmare, descompunerea matricei de rotație va fi

$$\begin{aligned}\text{Rot}_\Delta(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.7 Scalarea față de un punct oarecare

Fie s_x, s_y, s_z trei numere reale nenule și $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat. Pentru a face o scalare de factori de scală (s_x, s_y, s_z) relativ la punctul P , aplicăm o translație care aduce punctul P în origine, facem scalarea de factorii indicați relativ la origine, apoi aplicăm translația care aduce înapoi punctul P în poziția inițială. Avem, cu alte cuvinte,

$$\begin{aligned}
S_P(s_x, s_y, s_z) &= T(x_0, y_0, z_0) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(-x_0, -y_0, -z_0) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)x_0 \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)y_0 \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.8 Reflexia față de un plan oarecare

Ideea, în cazul reflexiei relativ la un plan oarecare, este foarte asemănătoare cu cea din cazul rotației în jurul unei axe oarecare. Într-adevăr, să presupunem că planul nostru este dat prin versorul normal $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ și printr-un punct al său, fie el $P(x_0, y_0, z_0)$. Noi știm să facem reflexiile față de planele de coordonate, prin urmare intenția este să transformăm planul de rotație într-unul dintre aceste plane. În acest scop, trebuie să îndeplinim două condiții:

- planul de reflexie trebuie transformat într-un plan care trece prin origine;
- versorul normal trebuie transformat într-un versor de coordonate.

Dacă cumva planul de reflexie este deja paralel cu unul dintre planele de coordonate (să zicem xOy), atunci \mathbf{n} este, deja, egal cu \mathbf{k} , prin urmare reflexia față de planul Π are o formă foarte simplă:

$$\begin{aligned}
R_{\Pi} &= T(x_0, y_0, z_0) \cdot R_{xy} \cdot T(-x_0, -y_0, -z_0) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dacă Π nu este paralel cu nici unul dintre planele de coordonate, atunci:

- 1) facem întâi translația $T(-x_0, -y_0, -z_0)$ astfel încât planul să treacă prin origine;

- 2) facem o rotație de unghi θ_x în jurul axei Ox , astfel încât planul Π să treacă prin axa Oy (sau, ceea ce este același lucru, astfel încât, astfel încât versorul normal să ajungă în planul xOz);
- 3) facem o rotație de unghi $-\theta_y$ în jurul axei Oy astfel încât planul de reflexie să se suprapună peste planul xOy (adică \mathbf{n} să ajungă să coincidă cu \mathbf{k});
- 4) facem reflexia față de planul xOy ;
- 5) aplicăm inversele transformărilor 1)–3), luate în ordine inversă.

Unghiurile θ_x și θ_y sunt *aceleași* cu care rotim versorul director al axei în cazul rotației în jurul unei axe arbitrare, adică avem:

$$\sin \theta_x = \frac{n_y}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}}, \quad \cos \theta_x = \frac{n_z}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}},$$

respectiv

$$\cos \theta_y = \sqrt{n_y^2 + n_z^2}, \quad \sin \theta_y = n_x.$$

Așadar, matricea reflexiei față de planul Π este

$$R_{\Pi} = T(x_0, y_0, z_0) \cdot \text{Rot}_x(-\theta_x) \cdot \text{Rot}_y(\theta_y) \cdot R_{xy} \cdot \text{Rot}_y(-\theta_y) \cdot \text{Rot}_x(\theta_x) \cdot T(-x_0, -y_0, -z_0)$$

sau

$$\begin{aligned}
R_{\Pi} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_z}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} & \frac{n_y}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{n_y}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} & \frac{n_z}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
& \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n_y^2 + n_z^2} & 0 & n_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -n_x & 0 & \sqrt{n_y^2 + n_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
& \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n_y^2 + n_z^2} & 0 & -n_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_x & 0 & \sqrt{n_y^2 + n_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_z}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} & -\frac{n_y}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{n_y}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} & \frac{n_z}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
& \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemple. a) Să determinăm matricea reflexiei față de planul

$$\Pi : x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

Determinăm, mai întâi, un punct din plan. Dacă punem $y = z = 0$, obținem, imediat, $x = -1$, prin urmare am obținut punctul $P(x_0, y_0, z_0) \equiv P(-1, 0, 0)$. Mai departe, determinăm un vector normal la plan. Fie el $\mathbf{N}(1, 2, -3)$. Atunci versorul normal la plan corespunzător va fi

$$\mathbf{n} = \mathbf{n} \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

Calculăm acum funcțiile trigonometrice ale unghiurilor θ_x și θ_y . După cum am văzut mai sus, avem

$$\sin \theta_x = \frac{n_y}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{14}}}{\sqrt{\frac{4}{14} + \frac{9}{14}}} = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\cos \theta_x = \frac{n_z}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} = \frac{-\frac{3}{\sqrt{14}}}{\sqrt{\frac{4}{14} + \frac{9}{14}}} = -\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\sin \theta_y = n_x = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \theta_y = \sqrt{n_y^2 + n_z^2} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}}.$$

Prin urmare, utilizând formula de mai sus, matricea transformării va fi

$$\begin{aligned} R_{\Pi} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{14}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Vom determina acum matricea reflexiei față de planul

$$\Pi : x - y + 1 = 0.$$

Remarcăm, imediat, că acest plan este paralel cu axa Oz . Constatăm cu ușurință că, de exemplu, punctul $P(0, 1, 0)$ aparține planului, iar în calitate de versor al normalei planului putem lua vectorul

$$\mathbf{n} = \mathbf{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor θ_x și θ_y sunt

$$\sin \theta_x = \frac{n_y}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} = 1,$$

$$\cos \theta_x = \frac{n_z}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} = 0$$

$$\sin \theta_y = n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \theta_y = \sqrt{n_y^2 + n_z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

prin urmare primul unghi este de 90° , iar al doilea este de 45° . Procedând ca la

exemplul precedent, obținem

$$\begin{aligned}
 R_{\Pi} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
 &\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
 &\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
 &\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2.9 Probleme

În această secțiune, ABC este triunghiul de vârfuri $A(1, 2, 2)$, $B(2, 4, 3)$, $C(4, 3, 2)$.

Problema 2.1. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de 45° în jurul drepte care trece prin punctele $P(2, 2, 1)$ și $Q(1, 1, 1)$.

Problema 2.2. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de 30° în jurul dreptei

$$(\Delta) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{2}.$$

Problema 2.3. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de 60° în jurul dreptei

$$(\Delta) : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Problema 2.4. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, relativ la punctul $Q(2, 5, 3)$, de factori de scală $(2, 1, 3)$.

Problema 2.5. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia față de planul $x - y + 2z - 1 = 0$.

Problema 2.6. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia față de planul care trece prin punctele $O(0, 0, 0)$, $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 3, 2)$.

CAPITOLUL 3

Elemente de geometria diferențială a curbelor

CAPITOLUL 4

Curbe Bézier

4.1 Curbe polinomiale în forma lui Bézier

În mod clar, cele mai simple curbe la care ne putem gândi sunt drepte. După cum știm din geometria analitică, ele au o descriere foarte simplă prin intermediul unor funcții de gradul întâi. Astfel, un segment de dreaptă în plan poate fi descris prin ecuațiile

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}, \quad t \in [0, 1], \quad (4.1.1)$$

unde x_0, y_0, a și b sunt constante, sau, în formă vectorială:

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + a \cdot t, y_0 + b \cdot t), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.1.2)$$

Este natural să încercăm să studiem curbe *polinomiale*, cu alte cuvinte curbe obținute înlocuind în ecuațiile (4.1.1), funcțiile de gradul întâi prin funcții polinomiale (de grad mai mare de 1). După cum se știe din analiză, această alegere este departe de a fi accidentală. De fapt, *toate* funcțiile continue pot fi aproximate uniform prin funcții polinomiale (teorema *Weierstrass-Stone*). Nu ne interesează această abordare. Tot ce vrem este să ilustrăm câteva noțiuni de bază legate de cele mai simple curbe utilizate în grafica pe calculator, așa-numitele *curbe Bézier*.

Considerăm, de exemplu, următoarea curbă:

$$\mathbf{r}(t) = (t + 5t + t^3, 1 + t + t^2 + t^3), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.1.3)$$

Să presupunem că deja calculatorul “știe” că aceasta trebuie să fie o curbă cubică. Acum problema este: ce alte informații trebuie să ma furnizăm pentru a descrie complet această curbă? O primă idee ar fi să folosim coeficienții celor două polinoame, cu alte cuvinte să descompunem polinoamele după baza canonică compoșe the polynomials with respect to the canonical basis $\{1, t, t^2, t^3\}$ a spațiului vectorial al polinoamelor cubice. În mod echivalent, asta înseamnă să rescriem (4.1.3) sub forma

$$\mathbf{r}(t) = (0, 1) + (1, 1)t + (5, 1)t^2 + (1, 1)t^3. \quad (4.1.4)$$

Coeficienții vectoriali sunt, desigur, până la niște factori constanți, tocmai derivatele lui \mathbf{r} până la ordinul 3 (inclusiv derivata de ordinul zero), evaluate în origine. Astfel, doar uitându-ne la coeficienți, obținem multe informații despre unul dintre capetele curbei. Totuși, acești coeficienți nu sunt foarte intuitivi și nu este foarte clar (în special pentru non-experti) cum se modifică forma curbei dacă schimbăm unul dintre coeficienți.

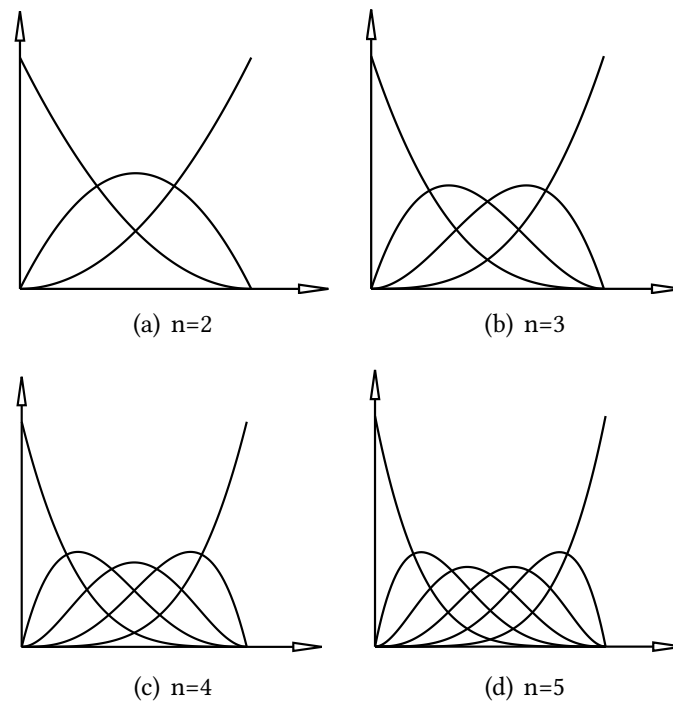
În multe situații, curbele polinomiale sunt folosite în programe de grafică interactivă. Utilizatorii acestor programe nu sunt întotdeauna informaticieni și/sau geometrii. De aceea, trebuie să le fie oferită posibilitatea de a modifica interactiv forma acestor curbe, fără a trece, fără a trece printr-un proces de calcul, într-un mod intuitiv, modificând vectorii care le definesc sau, ceea ce este același lucru, modificând poziția punctelor definite de acești vectori, așa-numitele *puncte de control*.

O modalitate de a realiza acest lucru a fost descoperită, în mod independent, de către doi ingineri francezi, Paul Bézier, care lucra pentru Renault, și André de Casteljau, care lucra pentru Citroen. Ideea lor a fost să utilizeze, în locul bazei canonice a spațiului funcțiilor polinomiale, o altă bază, formată din așa-numitele *polinoame Bernstein*, definite pentru fiecare $n \geq 1$ și fiecare $k \in \{0, \dots, n\}$, prin

$$B_n^k(t) = C_n^k t^k (1 - t)^{n-k}, \quad t \in [0, 1], \quad (4.1.5)$$

unde C_n^k sunt coeficienții binomiali.

Este ușor de verificat că polinoamele Bernstein formează, într-adevăr, o bază a spațiului polinoamelor de gradul n (adică generează spațiul și sunt liniar independente). În fapt, cum sunt $n + 1$ polinoame Bernstein (adică numărul lor coincide cu dimensiunea spațiului), este suficient să demonstrăm fie că sunt liniar independente sau că formează un sistem de generatori.

Figura 4.1: Polinoamele Bernstein pentru $n = 2, 3, 4, 5$

Dacă $n = 1$, avem, evident, numai două polinoame Bernstein, t și $1 - t$. Dacă $n = 2, 3, 4, 5$, graficele lor sunt indicate în figura 4.1. Suntem acum gata să definim curbele Bézier.

Definiția 4.1. Fie P_0, \dots, P_n $n + 1$ puncte în plan, date prin vectorii lor de poziție $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$. Curba Bézier cu punctele de control P_0, \dots, P_n este, prin definiție, curba dată de

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^n B_n^k(t) \mathbf{a}_k. \quad (4.1.6)$$

Cum polinoamele Bernstein au gradul n , rezultă că o curbă Bézier cu $n + 1$ puncte de control este o curbă polinomială de gradul n . Asta nu exclude, totuși, posibilitatea ca termenul de gradul n în t să fie egal cu zero. Înseamnă doar că gradul *maxim* al polinoamelor implicate poate să fie egal cu n . În figura 4.1 am reprezentat grafic mai multe curbe Bézier de grad până la 9, împreună cu poligoanele lor de control.

4.2 Algoritmul lui de Casteljau

Algoritmul lui de Casteljau este un algoritm pentru construirea geometrică a unui punct de pe o curbă Bézier dacă se dă valoarea parametrului asociată punctului de pe curbă. Astfel, fie et P_0, P_1, \dots, P_n cele $n + 1$ puncte de control. Dacă $t \in [0, 1]$, începem prin a divide segmentele $P_i P_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$ în raportul $t/(1 - t)$. Obținem, astfel, alte n puncte, P_0^1, \dots, P_{n-1}^1 . Iterăm această procedură până când rămân doar două puncte, P_0^n și P_1^n . Este nevoie, în mod clar, de n iterații. Atunci, după cum de Casteljau afirmă și noi vom demonstra, punctul $\mathbf{r}(t)$ de pe curbă va fi punctul care divide segmentul $P_0^n P_1^n$ în raportul $t/(1 - t)$.

Describe oare acest algoritm, într-adevăr, curba Bézier căutată? Pentru a răspunde la această întrebare, vom folosi o metodă descrisă de Jens Gravesen, care scoate în evidență aspectul algebric al problemei.

Începem prin a nota cu $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ vectorii de poziție ai punctelor de control și cu $\mathbf{a}_0^l, \dots, \mathbf{a}_{n-l}^l$ vectorii de poziție ai punctelor obținute după iterația de ordinul l (cu convenția că $\mathbf{a}_i^0 = \mathbf{a}_i$, $i = 0, \dots, n$).

Din descrierea geometrică a algoritmului, este clar că o iterație este descrisă prin relația

$$\mathbf{a}_k^l(t) = (1 - t)\mathbf{a}_k^{l-1}(t) + t\mathbf{a}_{k+1}^{l-1}(t), \quad (4.2.1)$$

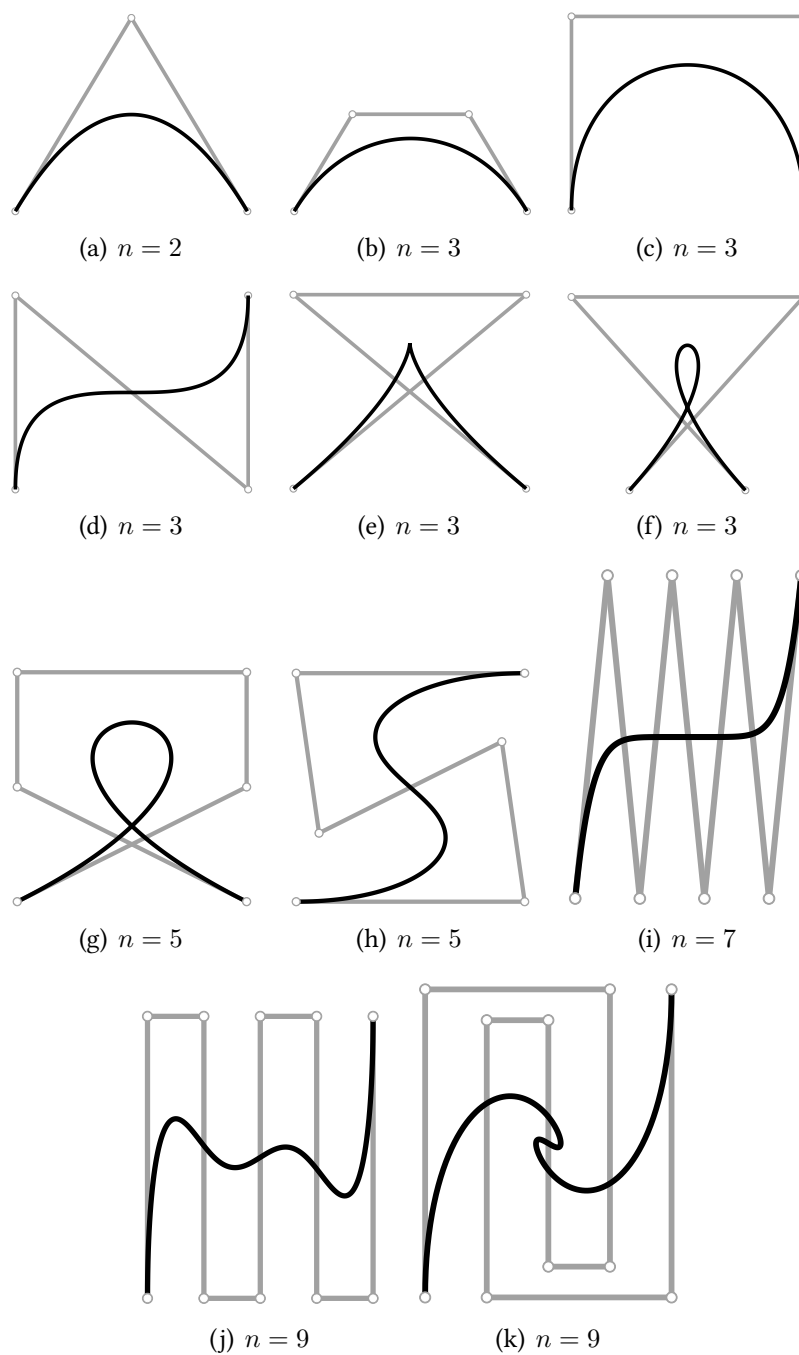


Figura 4.2: Curbe Bézier cu diferite poziții ale punctelor de control

unde $k = 0, \dots, n-l$ și $l = 1, \dots, n$. Relația (4.2.1) poate fi transcrisă cu ușurință în forma matricială

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^l(t) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n-l}^l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{l-1}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n-l+1}^{l-1}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Dacă notăm cu $\mathcal{A}_{n-l}^l(t)$ matricea punctelor obținute după iterația de ordinul l , atunci ultima relație se poate scrie, mai compact, sub forma

$$\mathcal{A}_{n-l}^l(t) = ((1-t)R_{n-l} + tL_{n-l})\mathcal{A}_{n-l+1}^{l-1}(t), \quad (4.2.3)$$

unde matricele R_{n-l} și L_{n-l} sunt matrici din $\mathcal{M}_{n-l, n-l+1}(\mathbb{R})$, date de

$$R_{n-l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.4)$$

respectiv

$$L_{n-l} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Operatorii liniari asociați cu aceste matrici pur și simplu elimină primul, respectiv ultimul punct dintr-un șir de puncte.

Vom folosi acum operatorii R_{n-l} și L_{n-l} pentru a defini alți doi operatori care vor juca un rol central în povestea noastră:

$$\Delta_{n-l} = L_{n-l} - R_{n-l}, \quad (4.2.6)$$

numiți operatorul de *diferență avansată* și *operatorul lui de Casteljau*

$$C_{n-l}(t) = (1-t)R_{n-l} + tL_{n-l}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.2.7)$$

Matricile asociate cu acești operatori sunt

$$\Delta_{n-l} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2.8)$$

respectiv

$$C_{n-l}(t) = \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

Modul în care acționează Δ_{n-l} este clar: el asociază punctelor $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ diferențelor $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}$.

De aici încolo vom scrie indicii operatorilor doar acolo unde este necesar, dacă ei nu sunt clari din context. Înainte de a ne întoarce la algoritmul nostru, menționăm următorul rezultat, elementar, dar util:

Lemma 4.2.1. *Operatorii R și L comută, în sensul că pentru orice $k \geq 2$ avem*

$$R_{k-1}L_k = L_{k-1}R_k. \quad (4.2.10)$$

Demonstrație Nu trebuie să facem nici un calcul, este suficient să ne gândim la modul în care acționează cei doi operatori. Astfel, să presupunem că ni se dă o mulțime formată din $k+1$ puncte, $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k$; atunci L_k elimină \mathbf{a}_0 și apoi, din cele k puncte rămase, R_{k-1} îl elimină pe ultimul, anume pe \mathbf{a}_k . Reciproc, dacă mulțimii de $k+1$ puncte îi aplicăm prima dată R_k , atunci este eliminat mai întâi ultimul punct, anume \mathbf{a}_k și apoi (prin L_{k-1}) primul punct, adică \mathbf{a}_0 . Astfel, în ambele cazuri, rezultatul este același în ambele cazuri, anume $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}$. \square

Corollary 4.2.1. *Oricare doi dintre operatorii $R, L, \Delta, C(t)$ comută, în același sens ca în lema precedentă.*

Demonstrație Am văzut deja că L și R comută. Să verificăm, de exemplu, că R și Δ commută. Avem

$$R_{k-1}\Delta_k = R_{k-1}L_k - R_{k-1}R_k = L_{k-1}R_k - R_{k-1}R_k = (L_{k-1} - R_{k-1})R_k = \Delta_{k-1}R_k.$$

Celelalte reguli de comutare rezultă în același mod, toate fiind consecințe imediate ale comutativității operatorilor de bază, L și R . \square

Suntem gata să demonstrăm prima teoremă importantă.

Teorema 4.2.1. *Curba construită prin algoritmul lui de Casteljau este curba Bézier care corespunde punctelor de control date.*

Demonstrație Curba construită prin algoritmul lui de Casteljau este, așa cum ne putem convinge foarte ușor,

$$\mathbf{r}(t) = C(t)^n \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Ecuția precedentă trebuie citită, desigur, sub forma:

$$\mathbf{r}(t) = C_1(t)C_2(t) \cdots C_n(t) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Înainte de a face demonstrația în toată generalitatea sa, vom trata, mai întâi, cazul special, dar foarte important, al *curbelor Bézier cubice*. În acest caz avem patru puncte de control, $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ și \mathbf{a}_3 . Matricile C până la ordinul al treilea sunt

$$C_1(t) = \begin{bmatrix} 1-t & t \end{bmatrix}, \quad C_2(t) = \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix}, \quad C_3(t) = \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & t \end{bmatrix},$$

de aceea, avem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= C_1(t)C_2(t)C_3(t) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t)\mathbf{a}_0 + t\mathbf{a}_1 \\ (1-t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 \\ (1-t)\mathbf{a}_2 + t\mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t)[(1-t)\mathbf{a}_0 + t\mathbf{a}_1] + t[(1-t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2] \\ (1-t)[(1-t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2] + t[(1-t)\mathbf{a}_2 + t\mathbf{a}_3] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t)^2\mathbf{a}_0 + 2t(1-t)\mathbf{a}_1 + t^2\mathbf{a}_2 \\ (1-t)^2\mathbf{a}_1 + 2t(1-t)\mathbf{a}_2 + t^2\mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \\ &= (1-t)[(1-t)^2\mathbf{a}_0 + 2t(1-t)\mathbf{a}_1 + t^2\mathbf{a}_2] + t[(1-t)^2\mathbf{a}_1 + 2t(1-t)\mathbf{a}_2 + t^2\mathbf{a}_3] = \\ &= (1-t)^3\mathbf{a}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{a}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{a}_2 + t^3\mathbf{a}_3 = B_3^0(t)\mathbf{a}_0 + B_3^1(t)\mathbf{a}_1 + B_3^2(t)\mathbf{a}_2 + B_3^3(t)\mathbf{a}_3, \end{aligned}$$

cu alte cuvinte, r este curba Bézier cu punctele de control $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

În calculele pe care le-am făcut, n-am folosit în modul cel mai eficient reprezentarea algebrică a algoritmului lui de Casteljau. În fapt, am făcut doar iterații. Ideea lui Gravesen a fost să executăm, mai întâi, operațiile *matriciale* și apoi să aplicăm operatorul final punctelor de control. Vom reface calculul, pentru a înțelege mai bine ce se petrece.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(t) &= C_1(t)C_2(t)C_3(t) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 & 0 \\ 0 & (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} B_3^0(t) & B_3^1(t) & B_3^2(t) & B_3^3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = B_3^0(t)\mathbf{a}_0 + B_3^1(t)\mathbf{a}_1 + B_3^2(t)\mathbf{a}_2 + B_3^3(t)\mathbf{a}_3.
 \end{aligned}$$

Se poate vedea că $C(t)^3 \equiv C_1(t)C_2(t)C_3(t)$ este, de fapt, o linie a matricii care are ca și componente tocmai polinoamele Bernstein de gradul trei. Vom vedea acum că acest rezultat este valabil pentru orice număr natural n .

Pe de altă parte, curba Bézier cu punctele de control P_0, \dots, P_n este, după cum am văzut mai devreme, dată de

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^n B_n^k(t)P_k,$$

unde $B_n^k(t)$ sunt polinoamele Bernstein. Trebuie să demonstrăm, prin urmare, că cele două curbe coincid.

Începem prin a evalua $C(t)^n$. După cum știm deja, $C(t) = tL + (1-t)R$, de

aceea (întrucât R și L comută!) putem folosi formula binomului și obținem

$$C(t)^n \equiv (tL + (1-t)R)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} L^k R^{n-k} = \sum_{k=0}^n B_n^k(t) L^k R^{n-k}.$$

Pe de altă parte, este ușor de văzut că

$$L^k R^{n-k}(P_0, \dots, P_n) = P_k.$$

Într-adevăr, după cum am remarcat mai devreme, R șterge un punct din dreapta listei, în timp ce L face același lucru, dar începând din capătul din stânga al listei. Prin urmare, să aplicăm R de $n - k$ ori înseamnă să ștergem punctele de la P_{k+1} până la P_n (în ordine inversă), în timp ce să aplicăm L de k ori înseamnă să ștergem punctele de la P_0 până la P_{k-1} (în această ordine). Ne rămâne, până la urmă, numai punctul P_k .

Astfel, avem

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^n B_n^k(t) P_k = \boldsymbol{\rho}(t).$$

□

4.3 Curbe polinomiale: Trecerea de la o reprezentare la alta

Așa cum am văzut la începutul acestui capitol, o curbă polinomială de gradul n poate fi exprimată cu ajutorul bazei canonice a spațiului vectorial al polinoamelor de grad cel mult n , $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$, sub forma

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \dots + \mathbf{a}_n t^n, \quad (4.3.1)$$

unde $\mathbf{a}_i, i = 0, \dots, n$ sunt vectori constanți. Acești vectori (sau, mai precis, punctele pentru care acești vectori sunt vectori de poziție) se numesc *puncte de control monomiale* ale curbei polinomiale date.

Pe de altă parte, întrucât și polinoamele Bernstein formează o bază a spațiului vectorial al funcțiilor polinomiale de grad cel mult n , definite pe $[0, 1]$, aceeași curbă are o reprezentare de forma

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}_0 B_n^0(t) + \mathbf{b}_1 B_n^1(t) + \mathbf{b}_2 B_n^2(t) + \dots + \mathbf{b}_n B_n^n(t), \quad (4.3.2)$$

unde $\mathbf{b}_i, i = 0, \dots, n$ sunt punctele de control *Bézier* ale curbei date.

Este foarte ușor să stabilim legătura dintre punctele de control monomiale și cele Bézie în cazul curbelor pătratice (în cazul curbelor liniare cele două tipuri de puncte de control, evident, coincid).

Plecând de la forma Bézier a curbei, obținem

$$\mathbf{b}_0(1-t)^2 + \mathbf{b}_2 \cdot 2(1-t)t + \mathbf{b}_2 t^2 = \mathbf{b}_0 + (-2\mathbf{b}_0 + 2\mathbf{b}_1)t + (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)t^2. \quad (4.3.3)$$

Comparând această descompunere cu descompunerea $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2$, obținem imediat

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{a}_1 = 2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad \text{și} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2. \quad (4.3.4)$$

Matricial, această relație se poate scrie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Matricea

$$\text{Bez} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

se numește *matricea Bézier* (de ordinul al doilea).

Matricea Bez este, în mod evident, inversabilă, deci relația (4.3.5) se poate inversa și obținem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3.7)$$

unde matricea

$$\text{Bez}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

este inversa matricei Bez.

Dacă notăm acum $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_0 \quad \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]$ și $\mathbf{b} = [\mathbf{b}_0 \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]$, atunci cele două conversii de mai sus se pot scrie

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \text{Bez} \quad \text{și} \quad \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \text{Bez}^{-1}. \quad (4.3.9)$$

Matricea Bez este, în același timp, matricea de schimbare a bazei, între baza monomială și cea formată din polinoame Bernstein. Dacă

$$B = \begin{bmatrix} B_2^0(t) \\ B_2^1(t) \\ B_2^2(t) \end{bmatrix}$$

și

$$T = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix},$$

atunci

$$B = \text{Bez} \cdot T \quad \text{și} \quad r(t) = b \cdot \text{Bez} \cdot T. \quad (4.3.10)$$

Aceste relații pot fi extinse la un n oarecare. Fie, astfel,

$$B = \begin{bmatrix} B_n^0(t) \\ B_n^1(t) \\ \vdots \\ B_n^n(t) \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}$$

cele două baze ale spațiului funcțiilor polinomiale de grad cel mult n , definite pe interbalul $[0, 1]$ și

$$a = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n] \quad \text{și} \quad b = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n]$$

coeficienții descompunerii unei curbe polinomiale r relativ la baza monomială, respectiv baza Bernstein. Atunci relațiile (4.3.9) și (4.3.10) rămân valabile dacă utilizăm matricile $\text{Bez} = (\text{Bez}_{i,j})$ și $\text{Bez}^{-1} = (\text{Bez}_{i,j}^{-1})$, $0 \leq i, j \leq n$, cu componentele date de

$$\text{Bez}_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} C_n^j C_n^i, & \text{dacă } i \leq j, \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

respectiv

$$\text{Bez}_{i,j}^{-1} = \begin{cases} C_j^i / C_n^i, & \text{dacă } i \leq j, \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Astfel, de exemplu, matricea Bézier de ordinul 3 este

$$\text{Bez}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

matricea Bézier de ordinul 4 este

$$\text{Bez}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -12 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4 Calculul derivatelor unei curbe Bézier

În multe calcule legate de curbe și suprafețe, trebuie să calculăm derivatele funcțiilor care apar. În particular, vom avea nevoie de derivatele de diferite ordine ale unei curbe Bézier. De obicei, pentru funcții arbitrare, derivatele sunt construite doar numeric. Totuși, în cazul curbelor Bézier putem găsi formule *algebrice* de diferențiere foarte simple, exprimate cu ajutorul operatorilor introduși mai devreme.

Începem cu următorul rezultat, privitor la derivata de ordinul întâi:

Propoziția 4.4.1. *Derivata de ordinul întâi a unei curbe Bézier de ordinul n , cu punctele de control date de vectorii de poziție $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ este dată de*

$$\mathbf{r}'(t) = n (\mathbf{a}_1^{n-1} - \mathbf{a}_0^{n-1}),$$

unde \mathbf{a}_0^{n-1} și \mathbf{a}_1^{n-1} sunt penultimele puncte intermediare în algoritmul lui de Casteljau.

Demonstrație Începem cu reprezentarea operatorială a curbei Bézier, folosind operatorul lui Casteljau,

$$\mathbf{r}(t) = C(t)^n \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$

unde, desigur, $C(t)^n$ înseamnă

$$C(t)^n = C_1(t) \cdot C_2(t) \cdots C_n(t).$$

Astfel, în esență, pentru a deriva \mathbf{r} , trebuie doar să știm să derivăm C , ceea ce este mai simplu. Renunțând la indici, avem, după cum am văzut mai devreme,

$$C(t) = R + t\Delta.$$

Cum R și Δ sunt matrici constante, avem, evident,

$$\frac{d}{dt}C(t) = \Delta.$$

Aceasta înseamnă că derivata lui $C(t)^n$ este dată de

$$\frac{d}{dt}(C(t)^n) = \sum_{k=1}^n C(t)^{k-1} \left(\frac{d}{dt}C(t) \right) C(t)^{n-k} = \sum_{k=1}^n C(t)^{k-1} \Delta C(t)^{n-k}.$$

Folosind faptul că C și Δ comută, obținem

$$\frac{d}{dt}(C(t)^n) = n\Delta C(t)^{n-1}.$$

Aici Δ este, de fapt, Δ_1 , în timp ce $C(t)^{n-1}$ trebuie citit

$$C(t)^{n-1} \equiv C_2(t) \cdots C_n(t).$$

Astfel, derivata curbei Bézier este dată de

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \frac{d}{dt}(C(t)^n) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = n\Delta_1 C_2(t) \cdot C_3(t) \cdots C_n(t) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = n\Delta_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0^{n-1} \\ \mathbf{a}_1^{n-1} \end{pmatrix} = \\ &= n \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0^{n-1} \\ \mathbf{a}_1^{n-1} \end{pmatrix} = n(\mathbf{a}_1^{n-1} - \mathbf{a}_0^{n-1}). \end{aligned}$$

□

Observație. Folosind, încă o dată, faptul că operatorii Δ și $C(t)$ comută, în sensul indicat mai sus, formula pentru derivarea lui $C(t)^n$ poate fi scrisă și sub forma

$$\frac{d}{dt}(C(t)^n) = nC(t)^{n-1}\Delta,$$

unde, de data aceasta, Δ este, de fapt, Δ_n , în timp ce $C(t)^{n-1}$ trebuie citit ca

$$C(t)^{n-1} \equiv C_1(t) \cdot C_2(t) \cdots C_{n-1}(t).$$

Astfel, formula pentru derivata curbei Bézier devine

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}'(t) &= nC(t)^{n-1} \Delta \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = nC_1(t) \cdot C_2(t) \cdots C_{n-1}(t) \cdot \Delta_n \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \\
 &= nC(t)^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \\
 &= nC(t)^{n-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1} \end{pmatrix} = C(t)^{n-1} \begin{pmatrix} n(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \\ n(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \\ \vdots \\ n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, *prima derivată a curbei Bézier de ordinul n definită de punctele de control $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ este curba Bézier de gradul $n - 1$, definită de punctele de control $n(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0), \dots, n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1})$* . Nu este nici o surpriză, desigur, că derivata este o curbă Bézier de grad $n - 1$. La urma urmei, $\mathbf{r}(t)$ este o funcție polinomială de gradul n , de aceea este evident că derivata sa este o funcție polinomială de gradul $n - 1$. Ce este remarcabil aici este modul simplu în care se exprimă punctele sale de control în funcție de punctele de control ale curbei inițiale.

Din observația precedentă rezultă imediat că tangentele la capetele curbei Bézier sunt dreptele suport ale primului, respectiv ultimului segment din poligonul de control al curbei. Într-adevăr, după cum am văzut mai devreme, primul și ultimul punct de control de pe orice curbă Bézier se află pe curbă și ele coincid cu cele două capete ale curbei. Aplicând acest rezultat curbei derivate, obținem că

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}'(0) &= n(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0), \\
 \mathbf{r}'(1) &= n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Iterând, obținem, în general, următorul rezultat:

Propoziția 4.4.2. *Derivata de ordinul k al unei curbe Bézier $\mathbf{r}(t)$ de gradul n , cu*

punctele de control $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ este dată de

$$\mathbf{r}^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k C(t)^{n-k} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad (4.4.1)$$

sau de

$$\mathbf{r}^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} C(t)^{n-k} \Delta^k \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

Prima expresie a derivatei (ecuația (4.4.1) spune, pur și simplu, că pentru a obține derivata de ordinul k , trebuie să facem $n-k$ pași în algoritmul lui de Casteljau și apoi să facem diferențe repetate (de k ori). Cea de-a doua formulă (ecuația (4.4.2) spune că derivata de ordinul k este curba Bézier de gradul $n-k$ cu punctele de control obținute efectuând k diferențe repetate ale punctelor de control și apoi înmulțind punctele rezultate cu $n!/(n-k)!$. În fiecare dintre cazuri, procesul de derivare este foarte simplu și se reduce la niște înmulțiri cu matrici rare (pentru care aproape toate elementele sunt zero).

Observație. Observația precedentă arată că derivata de ordinul întâi a curbei Bézier determinate de punctele de control $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ este curba Bézier de grad $n-1$ determinată de punctele $n(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0), \dots, n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1})$. La fel de interesantă este curba determinată de punctele de vectori de poziție $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}$. Acești vectori de poziție nu sunt altceva decât laturile poligonului Bézier al curbei inițiale, iar curba care se obține se numește *hodograful* curbei date.

Exemplul 4.1. Considerăm o curbă cubică ($n = 3$), cu punctele de control $\mathbf{b}_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_1(2, -2, 1)$, $\mathbf{b}_2(3, -2, 1)$, $\mathbf{b}_3(3, -1, 2)$. Vrem să calculăm $\mathbf{r}\left(\frac{1}{3}\right)$ (adică $t_0 = \frac{1}{3}$).

Inițializăm $\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i$, pentru $i = 0, \dots, 3$. Avem acum

- Pasul 1:

$$\mathbf{b}_0^1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0^0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{b}_1^1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_1^0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2^0 = \left(\frac{7}{3}, -2, 1\right),$$

$$\mathbf{b}_2^1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_2^0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_3^0 = \left(3, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

- Pasul 2:

$$\mathbf{b}_0^2 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0^1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^1 = \left(\frac{11}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right),$$

$$\mathbf{b}_1^2 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_1^1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2^1 = \left(\frac{23}{9}, -\frac{17}{9}, \frac{10}{9}\right).$$

- Pasul 3:

$$\mathbf{b}_0^3 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0^2 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^2 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{37}{27}, \frac{20}{27}\right) = (1.66, -1.37, 0.74) = \mathbf{r}\left(\frac{1}{3}\right).$$

Pentru a determina derivata în $1/3$, determinăm, mai întâi, punctele de control ale derivatei. Avem:

- $\mathbf{c}_0 = 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) = (6, 6, -3);$
- $\mathbf{c}_1 = 3(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) = (3, 0, 0);$
- $\mathbf{c}_2 = 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) = (0, 3, 3).$

Aplicăm acum algoritmul lui de Casteljau pentru derivată. Inițializăm $\mathbf{c}_i^0 = \mathbf{c}_i$, $i = 0, 1, 2$. Mai departe, avem,

- Pasul 1:

$$\mathbf{c}_0^1 = \frac{2}{3}\mathbf{c}_0^0 + \frac{1}{3}\mathbf{c}_1^0 = (5, -4, 2),$$

$$\mathbf{c}_1^1 = \frac{2}{3}\mathbf{c}_1^0 + \frac{1}{3}\mathbf{c}_2^0 = (2, 1, 1);$$

- Pasul 2:

$$\mathbf{c}_0^2 = \frac{2}{3}\mathbf{c}_0^1 + \frac{1}{3}\mathbf{c}_1^1 = \left(4, -\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right) = (4, -2.33, 1.66) = \mathbf{r}'\left(\frac{1}{3}\right).$$

4.5 Precizia liniară și ridicarea gradului

Punctele de control P_0, \dots, P_n ale unei curbe Bézier de gradul n pot fi situate toate pe segmentul de dreaptă P_0P_n . În acest caz, ne așteptăm ca *suportul* curbei să fie chiar acest segment. Chiar așa stau lucrurile, după cum ne putem convinge imediat, folosind, de exemplu, algoritmul lui de Casteljau. Totuși, în general, curba este tot de gradul n , în loc să fie de gradul întâi, așa cum pare mai natural pentru un segment de dreaptă. Este, de aceea, natural să ne întrebăm în ce condiții curba Bézier este liniară, chiar dacă inițial a fost construită plecând de la $n + 1$ puncte de control. Vom vedea că punctele de control trebuie să fie uniform distribuite pe segmentul P_0P_n . Această proprietate a curbelor Bézier se numește *precizie liniară*. Mai precis, avem următoarea propoziție.

Propoziția 4.5.1. *Fie $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ vectorii de poziție ai punctelor de control ale unei curbe Bézier $\mathbf{r}(t)$. Atunci*

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{a}_0 + t\mathbf{a}_n$$

dacă și numai dacă avem

$$\mathbf{a}_k = \frac{n - k}{n}\mathbf{a}_0 + \frac{k}{n}\mathbf{a}_n, \quad k = 1, \dots, n - 1.$$

Demonstrație Întrucât $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}_0$, avem

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{a}_0 + t\mathbf{a}_n \iff \mathbf{r}'(t) = \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0.$$

Dar, așa cum am văzut mai devreme, $\mathbf{r}'(t)$ este o curbă Bézier cu punctele de control $n(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0), \dots, n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1})$, deci aceasta se întâmplă dacă și numai dacă

$$n(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{k-1}) = \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0,$$

pentru orice $k = 1, \dots, n$. Asta se întâmplă, în mod clar, dacă și numai dacă

$$\mathbf{a}_k = \frac{n - k}{n}\mathbf{a}_0 + \frac{k}{n}\mathbf{a}_n, \quad k = 1, \dots, n - 1.$$

□

Putem aborda această problemă și dintr-o perspectivă diferită. Putem porni cu o curbă Bézier de gradul întâi, definită de două puncte de control. Propoziția pe care am demonstrat-o ne arată că dacă introducem puncte suplimentare alese

judicios, *aceai* curbă poate fi reprezentată ca o curbă de grad mai mare. Aceasta poate fi necesar dacă vrem mai mult control și, după introducerea punctelor suplimentare, putem să mutăm pentru a obține forma dorită pentru curba noastră. Un procedeu ar se poate utiliza pentru curbe Bézier de grad arbitrar și acest procedeu numește *ridicarea gradului*. Următoarea propoziție ne arată cum funcționează lucrurile. În particular, vom vedea că, prin ridicarea gradului, nu doar că se înserază un punct de control suplimentar, dar toate celelalte se modifică, cu excepția primului și a ultimului, desigur.

Propoziția 4.5.2. *Fie $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ vectorii de poziție ai punctelor de control ale unei curbe Bézier $\mathbf{r}(t)$, de gradul n . Privită ca o curbă de grad $n + 1$, $\mathbf{r}(t)$ are punctele de control $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{n+1}$, date de*

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_k &= \frac{n+1-k}{n+1} \mathbf{a}_k + \frac{k}{n+1} \mathbf{a}_{k-1} \quad k = 1, \dots, n \\ \mathbf{b}_{n+1} &= \mathbf{a}_n. \end{aligned}$$

Demonstrație Este mai simplu să demonstrăm această propoziție folosind reprezentarea Bernstein a curbei Bézier. Vom folosi doar prelația dintre polinoamele Bernstein de gradul n i cele de grad $n + 1$. Remarcăm, înainte de toate, că avem, pentru orice $i = 0, \dots, n$,

$$\begin{aligned} (1-t)B_n^i(t) &= \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n+1-i} t^i = \\ &= \frac{n+1-i}{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!} (1-t)^{n+1-i} t^i = \frac{n+1-i}{n+1} B_{n+1}^i(t) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} tB_n^i(t) &= \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n-i} t^{i+1} = \\ &= \frac{i+1}{n+1} \frac{(n+1)!}{((n+1)-(i+1))!(i+1)!} (1-t)^{(n+1)-(i+1)} t^{i+1} = \frac{i+1}{n+1} B_{n+1}^{i+1}(t). \end{aligned}$$

De aceea,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(t) &\equiv ((1-t) + t)\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n ((1-t)B_n^i(t) + tB_n^i(t)) \mathbf{a}_i = \\
 &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{n+1-i}{n+1} B_{n+1}^i(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{n+1}^{i+1}(t) \right) \mathbf{a}_i = \\
 &= B_{n+1}^0(t) \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{n+1} B_{n+1}^i(t) \mathbf{a}_i + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n+1} B_{n+1}^{i+1}(t) \mathbf{a}_i + B_{n+1}^{n+1}(t) \mathbf{a}_n = \\
 &= B_{n+1}^0(t) \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^n B_{n+1}^i(t) \left(\frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{a}_i + \frac{i}{n+1} \mathbf{a}_{i-1} \right) + B_{n+1}^{n+1}(t) \mathbf{a}_n = \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} B_{n+1}^i(t) \mathbf{b}_i.
 \end{aligned}$$

□

4.6 Subdivizarea și micșorarea variației

Uneori trebuie să înlăturăm o parte dintr-o curbă Bézier. Am vrea, totuși, ca partea din curbă care rămâne să fie reprezentată tot sub forma unei curbe Bézier. Pentru a atinge acest deziderat, trebuie să calculăm un alt set de puncte de control pentru această nouă curbă. Mai întâi, însă, trebuie să vedem cum putem face restricția în sine. Avem nevoie, înainte de toate, de următoarea lemă:

Lemma 4.6.1. *Operatorul lui de Casteljau $C(t)$ este invariant față de schimbare afină de parametru. Aceasta înseamnă că pentru orice trei numere reale a, b, t avem*

$$C((1-t)a + tb) = (1-t)C(a) + tC(b). \quad (4.6.1)$$

Cu alte cuvinte: C aplicat unei combinații afine a lui a și b este combinația afină corespondentă a lui $C(a)$ și $C(b)$, unde “corespondente” înseamnă că folosim același parametru (t în cazul nostru).

Demonstrație Demonstrația se reduce la un calcul direct, folosind expresia lui C în funcție de operatorii L și R . Astfel, membrul stâng al relației (4.6.1) este

$$\begin{aligned}
 C((1-t)a + tb) &= (1 - ((1-t)a + tb))R + ((1-t)a + tb)L = \\
 &= (1 - a + ta - tb)R + (a - ta + tb)L,
 \end{aligned}$$

în timp ce membrul drept este

$$\begin{aligned}(1-t)C(a) + tC(b) &= (1-t)((1-a)R + aL) + t((1-b)R + bL) = \\ &= (1-a+ta-tb)R + (a-ta+tb)L\end{aligned}$$

și, în mod clar, cei doi membrii coincid. \square

Considerăm, acum, o curbă polinomială \mathbf{r} de gradul n , definită pe un interval $[a, b]$, unde a și b sunt numere reale arbitrare. Asociem acestei curbe curba $\boldsymbol{\rho} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ dsată de $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}((1-t)a + tb)$. Atunci, în mod clar, $\boldsymbol{\rho}$ și \mathbf{r} au același suport. De fapt, putem vedea ușor că $\boldsymbol{\rho}$ este doar o reparametrizare a lui \mathbf{r} . $\boldsymbol{\rho}$ este, în mod evident, o curbă polinomială de același grad cu \mathbf{r} , de aceea are, de asemenea, o reprezentare Bézier. Următoarea teoremă ne dă legătura dintre punctele de control ale celor două curbe.

Teorema 4.6.1. *Fie \mathbf{r} o curbă Bézier de gradul n , cu punctele de control $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$. Atunci curba $t \rightarrow \boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}((1-t)a + tb)$ este o curbă Bézier de gradul n cu punctele de control $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ date de*

$$\mathbf{b}_k = C(a)^{n-k}C(b)^k \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}. \quad (4.6.2)$$

Demonstrație Din definiție, avem că

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}((1-t)a + tb) = C((1-t)a + tb)^n \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$

de aceea, ceea ce avem de demonstrat este că

$$C((1-t)a + tb) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = C(t)^n \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}.$$

Folosind lema precedentă și formula binomului, obținem

$$\begin{aligned}
 C((1-t)a + tb) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} &= ((1-t)C(a) + tC(b))^n \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \\
 &= \sum_{i=0}^n C_n^i ((1-t)C(a))^{n-i} (tC(b))^i \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \\
 &= \sum_{i=0}^n C_n^i (1-t)^{n-1} t^i C(a)^{n-i} C(b)^i \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \\
 &= \sum_{i=0}^n C_n^i (1-t)^{n-1} t^i \mathbf{b}_i = C(t)^n \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Acest proces este important, de exemplu, dacă avem o curbă Bézier definită, să zicem, pe $[0, 1]$ și trebuie să renunțăm la o parte a curbei și, apoi, să reprezentăm, din nou, partea rămasă a curbei sub forma unei curbe Bézier. Acest proces se numește *subdivizare*.

El implică, de asemenea, o altă proprietate importantă a curbelor Bézier, pe care nu o demonstrăm aici, anume *proprietatea de diminuare a variației*: *numărul de puncte de intersecție dintre o curbă Bézier și un hiperplan (o linie dreaptă pentru curbe plane, un plan pentru curbe în spațiu), este mai mic sau egal decât numărul de intersecții dintre poligonul de control și același hiperplan*. Demonstrația nu este, de fapt, complicată și se bazează pe faptul că un pas în algoritmul lui de Casteljau nu poate mări numărul de intersecții.

4.7 Probleme rezolvate

Problema 4.1. Reprezentați grafic curbele Bézier definite de punctele de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ și $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3$, cu +desenând, pentru fiecare, și poligoanele de control. Puteți folosi orice software (Maxima, Gnuplot, Matplotlib în Python, Maple, ...).

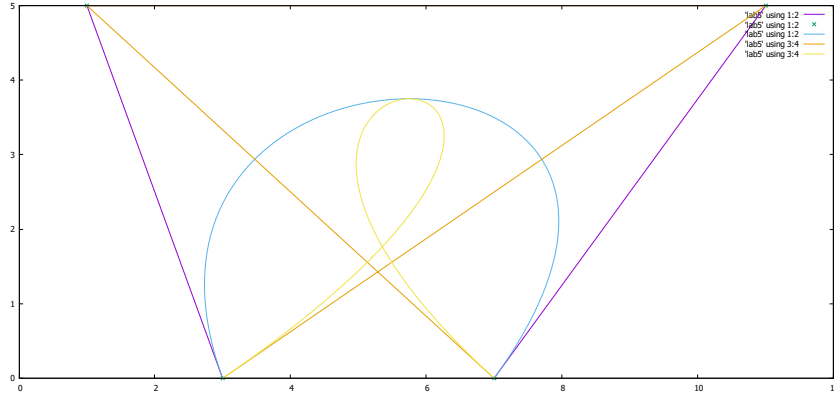


Figura 4.3:

Soluție Vezi figura 4.3. □

Problema 4.2. Calculați derivata curbei Bézier cubice cu punctele de control $\mathbf{b}_0 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (-1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1)$ și $\mathbf{b}_3 = (-1, 0)$ în punctul de parametru $1/2$. Utilizați algoritmul lui de Casteljau pentru derivată, menționând toți pașii intermediari.

Soluție. Punctele de control ale derivatei sunt $\mathbf{c}_0 = 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) = (-6, 3)$, $\mathbf{c}_1 = 3(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) = (6, 0)$ și $\mathbf{c}_2 = 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) = (-6, -3)$. Aplicăm acum algoritmul lui de Casteljau pentru derivată. Inițiem $\mathbf{c}_0^0 = \mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_1^0 = \mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2^0 = \mathbf{c}_0$. Avem de executat doar doi pași:

$$\mathbf{c}_0^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{c}_0^0 + \mathbf{c}_1^0) = \left(0, \frac{3}{2}\right), \quad \mathbf{c}_1^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{c}_1^0 + \mathbf{c}_2^0) = \left(0, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\mathbf{c}_0^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{c}_0^1 + \mathbf{c}_1^1) = \left(0, \frac{3}{2}\right) = (0, 0) = \mathbf{r}'\left(\frac{1}{2}\right).$$

□

Problema 4.3. Converteți curba $\mathbf{r}(t) = (2 - 3t - 4t^2 + 7t^3, -4 + 8t - 5t^3)$ la forma Bézier.

Soluție. În raport cu baza canonică curba se poate scrie ca

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3,$$

cu $\mathbf{a}_0 = (2, -4)$, $\mathbf{a}_1 = (-3, 8)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (7, -5)$. Știm că avem

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \text{Bez}_3^{-1}.$$

Cum

$$\text{Bez}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se obține imediat că

$$\text{Bez}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de unde deducem că

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 = (2, -4),$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_1 = \left(1, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_2 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = (2, -1).$$

□

Problema 4.4. Converteți curba Bézier cubică dată de punctele de control $\mathbf{b}_0(2, -1)$, $\mathbf{b}_1(5, 2)$, $\mathbf{b}_2(7, 3)$ și $\mathbf{b}_3(6, -1)$ la forma monomială.

Soluție. Avem

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \text{Bez}_3.$$

Obținem că

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0 = (2, -1),$$

$$\mathbf{a}_1 = -3\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 = (9, 9),$$

$$\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 = (-3, -6),$$

$$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = (-2, -3).$$

□

Problema 4.5. Considerăm curba Bézier cubică dată de punctele de control $\mathbf{b}_0(-3, 1)$, $\mathbf{b}_1(-4, 4)$, $\mathbf{b}_2(4, 4)$, $\mathbf{b}_3(3, 1)$.

- (i) Determinați punctele de control ale curbei, privită ca o curbă de gradul 4.
- (ii) Reprezentați grafic (cu gnuplot, geogebra, maxima, matplotlib, ...) pe același sistem de axe: curba, punctele de control și poligonul de control ale curbei privite ca o curbă de gradul 3, precum și punctele de control și poligonul de control ale curbei, privite ca o curbă de gradul 4.

Soluție. (i) Fie $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$ punctele de control ale curbei, privită ca fiind o curbă de gradul al patrulea. Atunci avem

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_0 &= \mathbf{b}_0 = (-3, 1), \\ \mathbf{c}_1 &= \frac{3}{4}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{b}_0 = \left(-\frac{15}{4}, \frac{13}{4}\right), \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1) = (0, 4), \\ \mathbf{c}_3 &= \frac{1}{4}\mathbf{b}_3 + \frac{3}{4}\mathbf{b}_2 = \left(\frac{15}{4}, \frac{13}{4}\right), \\ \mathbf{c}_4 &= \mathbf{b}_3 = (3, 1).\end{aligned}$$

(ii) Vezi figura 4.4. □

Problema 4.6. Considerăm curba Bézier de gradul 3 de la problema precedentă.

- (i) Divizați curba la valoarea $1/3$ a parametrului, determinând punctele de control și parametrizările pe intervalul $[0, 1]$ pentru fiecare dintre cele două segmente.
- (ii) Reprezentați grafic (cu gnuplot, geogebra, maxima, matplotlib, ...), pe același sistem de axe: cele două segmente de curbă (cu culori diferite), punctele de control și poligonul de control pentru curba originală, precum și punctele de control și poligoanele de control pentru cele două segmente obținute prin divizare.

Soluție. (i) Aplicăm, mai întâi, curbei algoritmul lui de Casteljau pentru $t = 1/3$. Inițializăm:

$$\mathbf{b}_0^0 = \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1^0 = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2^0 = \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3^0 = \mathbf{b}_3.$$

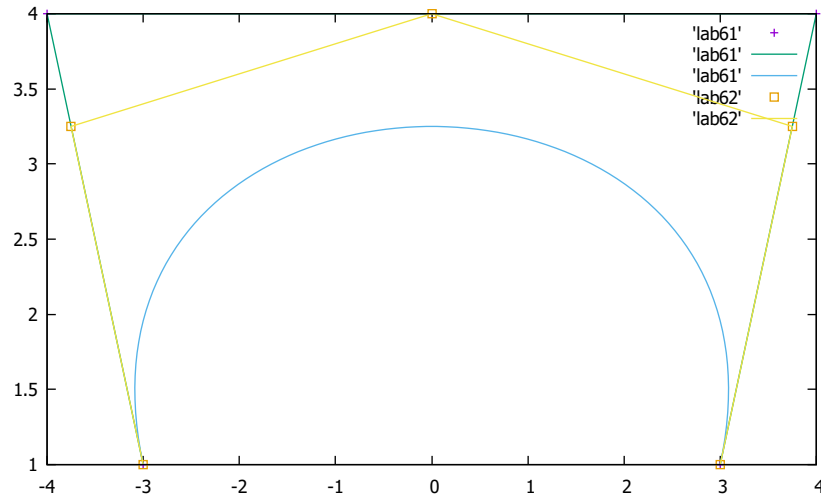


Figura 4.4:

Pasul întâi:

$$\mathbf{b}_0^1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0^0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^0 = \left(-\frac{10}{3}, 2\right),$$

$$\mathbf{b}_1^1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_1^0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2^0 = \left(-\frac{4}{3}, 4\right),$$

$$\mathbf{b}_2^1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_2^0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_3^0 = \left(\frac{11}{3}, 3\right).$$

Pasul al doilea:

$$\mathbf{b}_0^2 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0^1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^1 = \left(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right),$$

$$\mathbf{b}_1^2 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_1^1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

Pasul al treilea:

$$\mathbf{b}_0^3 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0^2 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^2 = \left(-\frac{5}{3}, 3\right).$$

Asta înseamnă că punctele de control ale primei porțiuni de curbă sunt:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_0 &= \mathbf{b}_0^0 = (-3, 1), \\ \mathbf{c}_1 &= \mathbf{b}_0^1 = \left(-\frac{10}{3}, 2\right), \\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{b}_0^2 = \left(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right), \\ \mathbf{c}_3 &= \mathbf{b}_0^3 = \left(-\frac{5}{3}, 3\right).\end{aligned}$$

Punctele de control ale celei de-a doua porțiuni de curbă sunt, în schimb:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_0 &= \mathbf{b}_0^3 = \left(-\frac{5}{3}, 3\right), \\ \mathbf{d}_1 &= \mathbf{b}_1^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right), \\ \mathbf{d}_2 &= \mathbf{b}_2^1 = \left(\frac{11}{3}, 3\right), \\ \mathbf{d}_3 &= \mathbf{b}_3^0 = (3, 1);\end{aligned}$$

(ii) Vezi figura 4.5.

□

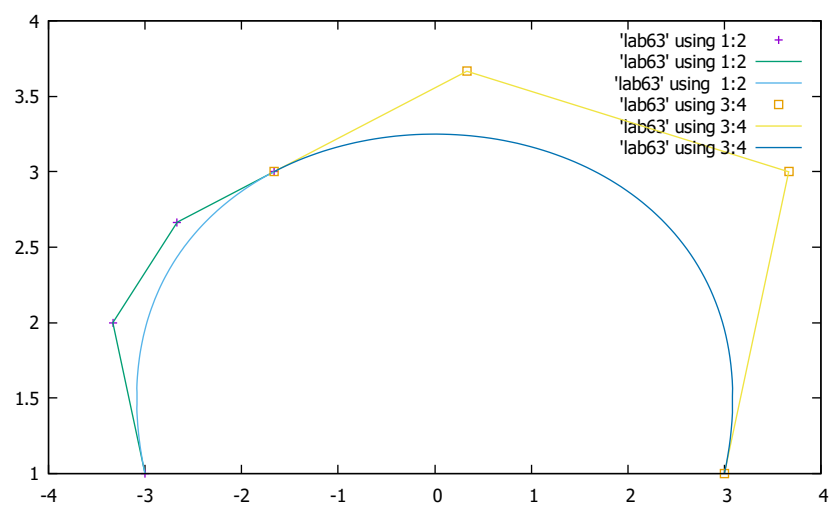


Figura 4.5:

CAPITOLUL 5

Forma polară a funcțiilor polinomiale (blossoming)

5.1 Spații afine

Reamintim următoarea definiție:

Definiția 5.1. Un *spațiu afin* este o pereche $\mathcal{A} = (P, V)$ unde P este o mulțime de puncte, în timp ce V este un spațiu vectorial, împreună cu două operații

- $V \times P \rightarrow P : (\mathbf{v}, p) \rightarrow \mathbf{v} + p$ (adunarea unui vector cu un punct),
- $P \times P \rightarrow V : (p, q) \rightarrow q - p$, unde $(q - p) + p = q$ (diferența a două puncte).

În general, suma a două sau mai multe puncte nu este definită, există, însă două tipuri de combinații de puncte cu coeficienți reali care au sens:

- *combinația afină* este un punct dat de

$$p = \sum_{i=1}^n a_i p_i, \quad \text{unde} \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

O combinație afină în care toți coeficienții sunt pozitivi se numește *combinație convexă*.

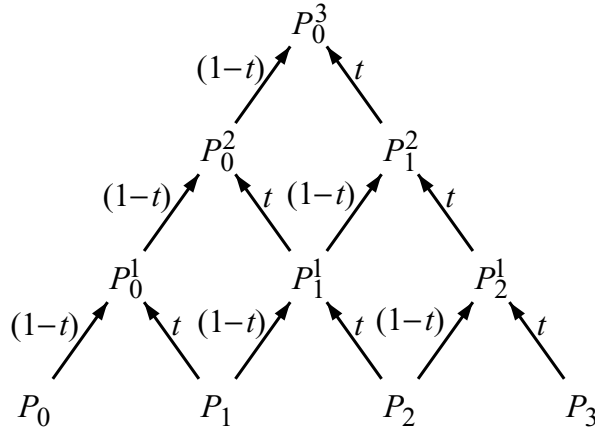


Figura 5.1: Diagramă pentru algoritmul de Casteljau

- combinațiile de forma $\sum_{i=1}^n a_i p_i$ în care suma coeficienților este zero sunt vectori.

Definiția 5.2. O aplicație $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ se numește afină dacă lasă invariante combinațiile afine:

5.2 O altă abordare a algoritmului lui de Casteljau

Algoritmul lui de Casteljau se poate reprezenta sub forma unei diagrame de tip arbore, așa cum se poate vedea în figura 5.2, pentru cazul particular al unei curbe pătratice. Dacă, în aceeași diagramă, inversăm săgețile, obținem o diagramă pentru construirea polinoamelor Bernstein (vezi figura 5.2).

5.3 Forma polară

Definiția 5.3. Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ o funcție polinomială de grad n , scrisă sub forma Bézier, cu punctele de control $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$:

$$F(t) = C(t)^n \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

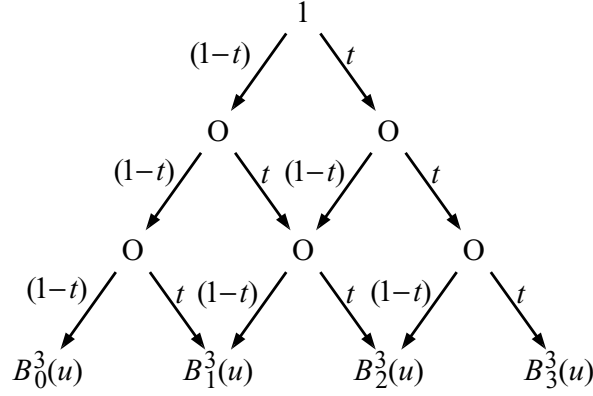


Figura 5.2: Diagramă polinoamele Bernstein

Atunci *forma sa polară* este, prin definiție, aplicația $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, dată de

$$f(t_1, \dots, t_n) = C(t_1) \cdot \dots \cdot C(t_n) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}, \quad (5.3.1)$$

unde, desigur, ca de obicei, produsul operatorilor de Casteljaou trebuie citit ca

$$C(t_1) \cdot \dots \cdot C(t_n) \equiv C_1(t_1) \cdot \dots \cdot C_n(t_n).$$

Forma polară a unei curbe polinomiale se mai numește și *polarizarea* sau *înflorirea* curbei.

Este interesant de văzut ce se întâmplă în cazul în care F este o funcție pătratică cu valori scalare ($k = 1$). În acest caz, desigur, cele trei puncte de control sunt doar numere reale. Vom calcula forma polară a unei astfel de funcții. Înainte de toate, remarcăm că dacă a_0, a_1, a_2 sunt punctele de control¹, atunci avem, folosind reprezentarea cu polinoame Bernstein:

$$F(t) = (1-t)^2 a_0 + 2t(1-t)a_1 + t^2 a_2 = (a_0 - 2a_1 + a_2)t^2 + 2(a_1 - a_0)t + a_0.$$

¹Nu folosim litere îngroșate ca să le notăm deoarece, după cum am spus mai sus, ele sunt numere reale, nu vectori.

Pe de altă parte, pentru forma polară vom avea

$$\begin{aligned}
 f(t_1, t_2) &= C_1(t_1)C_2(t_2) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (1 - t_1 \quad t_1) \begin{pmatrix} 1 - t_2 & t_2 & 0 \\ 0 & 1 - t_2 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \\
 &= (1 - t_1 \quad t_1) \begin{pmatrix} (1 - t_2)a_0 + t_2a_1 \\ (1 - t_2)a_1 + t_2a_2 \end{pmatrix} = (1 - t_1) ((1 - t_2)a_0 + t_2a_1) + \\
 &+ t_1 ((1 - t_2)a_1 + t_2a_2) = t_1t_2(a_0 - 2a_1 + a_2) + t_1(a_1 - a_0) + \\
 &+ t_2(a_1 - a_0) + a_0 = t_1t_2(a_0 - 2a_1 + a_2) + (t_1 + t_2)(a_1 - a_0) + a_0.
 \end{aligned}$$

Regula, în acest caz particular, este clară: pur și simplu *dedublăm* funcția F . Cu alte cuvinte, înlocuim t^2 cu t_1t_2 și t cu $(t_1 + t_2)/2$.

Acest caz particular sugerează că trecerea de la o funcție polinomială la forma sa polară este o generalizare a algoritmului pentru determinarea formei biliniare asociate unei forme pătratice. Remarcăm, totuși, că nici măcar în exemplul nostru foarte simplu, F nu este o formă pătratică în t (dacă ar fi, ar trebui să fie omogenă de gradul doi, cu alte cuvinte ar trebui să avem $a_1 = a_0 = 0$). De aceea, forma polară care i se asociază *nu este*, în general, biliniară. Ca atare, nu ne așteptăm ca forma polară asociată unui polinom de gradul n să fie n -liniară (adică liniară în fiecare dintre cele n variabile). Ea este, totuși, *afină* în fiecare dintre argumentele sale. Într-adevăr, înainte de a formula rezultatul general, vom folosi, ca model, forma polară pe care am calculat-o pentru un polinom scalar de gradul doi. Fie α un număr real oarecare. Atunci avem

$$\begin{aligned}
 f((1 - \alpha)t_1 + \alpha t'_1, t_2) &= ((1 - \alpha)t_1 + \alpha t'_1)t_2(a_0 - 2a_1 + a_2) + \\
 &+ ((1 - \alpha)t_1 + \alpha t'_1 + t_2)(a_1 - a_0) + a_0 = \\
 &= (1 - \alpha)(t_1t_2(a_0 - 2a_1 + a_2) + \\
 &+ (t_1 + t_2)(a_1 - a_0) + a_0) + \\
 &= \alpha(t'_1t_2(a_0 - 2a_1 + a_2) + (t'_1 + t_2)(a_1 - a_0) + a_0) = \\
 &= (1 - \alpha)f(t_1, t_2) + \alpha f(t'_1, t_2),
 \end{aligned}$$

care arată, imediat, că f este, într-adevăr, afină în prima variabilă. Pe de altă parte, f este, în mod evident, simetrică (adică, pentru orice pereche de argumente, avem $f(t_1, t_2) = f(t_2, t_1)$), de aceea f este afină și în al doilea argument.

Un alt lucru evident despre f este că dacă punem $t_1 = t_2 = t$ (sau, folosind o altă expresie, restrângem f la diagonală), avem

$$f(t, t) = F(t).$$

Intenționăm să arătăm că aceste trei proprietăți (simetria, caracterul afin în fiecare variabilă și faptul că restricția la diagonală coincide cu polinomul original) sunt caracteristici generale ale forme polare.

Vom demonstra, mai întâi, o propoziție care este importantă în sine, întrucât sugerează că, într-un anumit sens, primele două proprietăți sunt caracteristice numai funcțiilor de mai multe variabile care sunt forme polare ale unor funcții polinomiale. Pentru a o formula, începem prin a defini mai precis primele două proprietăți.

Definiția 5.4. Fie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție. Spunem că f este *simetrică* dacă pentru orice permutare σ a numerelor $\{1, 2, \dots, n\}$ avem

$$f(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}) = f(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

pentru orice argumente $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$.

Pentru $n = 2$, simetria lui f se reduce la condiția $f(t_1, t_2) = f(t_2, t_1)$, pentru orice numere reale t_1, t_2 . Pentru $n = 3$, situația este, deja, mult mai complicată, iar simetria înseamnă că pentru orice triplet de argumente avem

$$f(t_1, t_2, t_3) = f(t_2, t_3, t_1) = f(t_3, t_1, t_2) = f(t_3, t_2, t_1) = f(t_2, t_1, t_3) = f(t_1, t_3, t_2).$$

Definiția 5.5. Fie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție. Spunem că f este *n-afină* dacă f este afină în fiecare variabilă, adică dacă pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ și pentru orice numere reale $\alpha, t_1, \dots, t_n, t'_i$ avem

$$f(t_1, \dots, t_{i-1}, (1 - \alpha)t_i + \alpha t'_i, t_{i+1}, \dots, t_n) = (1 - \alpha)f(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n) + \alpha f(t_1, \dots, t_{i-1}, t'_i, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

Putem formula acum propoziția promisă.

Propoziția 5.3.1. Dacă $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este o funcție simetrică și *n-afină*, atunci

$$f(t_1, \dots, t_n) = C(t_1) \dots C(t_n) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}, \quad (5.3.2)$$

$$\text{unde } \mathbf{a}_k = f\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k\right), \quad k = 0, \dots, n.$$

Demonstrație Vom demonstra propoziția prin inducție după n . Dacă $n = 1$, atunci, cum putem scrie $t_1 = (1 - t_1) \cdot 0 + t_1 \cdot 1$, avem

$$\begin{aligned} f(t_1) &= f((1 - t_1) \cdot 0 + t_1 \cdot 1) = (1 - t_1)f(0) + t_1f(1) = \begin{pmatrix} 1 - t_1 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \\ &= C(t_1) \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

adică afirmația este adevărată pentru $n = 1$.

Să presupunem, acum, că propoziția este adevărată pentru un $n \geq 1$. Vom arăta că ea este adevărată și pentru $n + 1$. Astfel, fie $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție care este simetrică și $(n + 1)$ -afină. În particular, folosind același truc pe care l-am folosit pentru $n = 1$, din invarianța afină relativ la ultimul argument, obținem

$$f(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) = (1 - t_{n+1})f(t_1, \dots, t_n, 0) + t_{n+1}f(t_1, \dots, t_n, 1).$$

Astfel, f poate fi scrisă ca o combinație de două funcții care depind doar de n variabile,

$$f_0, f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

unde

$$f_0(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n, 0), \quad (5.3.3)$$

$$f_1(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n, 1). \quad (5.3.4)$$

În mod clar, din simetria și caracterul afin ale lui f , rezultă imediat că atât f_0 cât și f_1 sunt simetrice și n -afine.

Dar pentru astfel de funcții, concluzia propoziției este valabilă, în conformitate cu ipoteza de inducție, de aceea f_i , $i = 1, 2$ se pot scrie ca

$$f_i(t_1, \dots, t_n) = C(t_1) \dots C(t_n) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0^i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^i \end{pmatrix}$$

Punctele de control se pot obține cu ușurință, folosind simetria lui f . Astfel, pentru $i = 0$ avem

$$\mathbf{a}_k^0 = f_0(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k, 0) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_{(n+1)-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k) = \mathbf{a}_k,$$

în timp ce pentru $i = 1$ avem

$$\mathbf{a}_k^1 = f_1(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k, 1) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_{(n+1)-(k+1)}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1}) = \mathbf{a}_{k+1}.$$

Ne întoarcem acum la expresia lui f în funcție de f_0 și f_1 . Avem

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) &= (1 - t_{n+1})f_0(t_1, \dots, t_n) + t_{n+1}f_1(t_1, \dots, t_n) = \\ &= (1 - t_{n+1})C(t_1) \dots C(t_n) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0^0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^0 \end{pmatrix} + t_{n+1}C(t_1) \dots C(t_n) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^1 \end{pmatrix} = \\ &= (1 - t_{n+1})C(t_1) \dots C(t_n) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + t_{n+1}C(t_1) \dots C(t_n) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= (1 - t_{n+1})C(t_1) \dots C(t_n)R \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n+1} \end{pmatrix} + t_{n+1}C(t_1) \dots C(t_n)L \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= C(t_1) \dots C(t_n) ((1 - t_{n+1})R + t_{n+1}L) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= C(t_1) \dots C(t_n)C(t_{n+1}) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Înainte de a merge mai departe, trebuie să spunem că, deși gradul *efectiv* al unei funcții polinomiale este bine definit, funcția polinomială poate fi privită ca având orice grad, mai mare decât gradul efectiv, adăugând termeni de grad superior (cu coeficienți nuli, desigur). Astfel, formal, F poate fi privită ca fiind o curbă Bézier de grad mai mare. Pentru a specifica la care reprezentare ne referim, vom utiliza termenul de *formă n -polară*, pentru a scoate în evidență faptul că F este privit ca un polinom de grad n . Astfel, dacă are sens să vorbim despre forma n -polară a unei funcții polinomiale, putem vorbi despre orice formă polară de grad mai înalt.

Putem formula acum teorema de caracterizare pentru forme polare.

Teorema 5.3.1. Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție polinomială de grad cel mult n . Atunci forma sa n -polară satisface următoarele proprietăți:

- (i) f este simetrică;
- (ii) f este n -afină;
- (iii) restricția lui f la diagonală lui \mathbb{R}^n coincide cu F , cu alte cuvinte,

$$f(\underbrace{t, \dots, t}_n) = F(t).$$

Reciproc, dacă f este o funcție $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ care satisface proprietățile (i)–(iii), atunci f este forma polară a lui F .

Demonstrație Demonstrația rezultă imediat din proprietățile operatorului lui de Casteljau și din Propoziția 5.3.1. \square

Forma polară a unei funcții polinomiale poate fi utilizată pentru a descrie proprietățile curbelor Bézier, după cum rezultă din următoarea teoremă, a cărei demonstrație este lăsată cititorului, ca temă:

Teorema 5.3.2. Fie \mathbf{r} o curbă Bézier de grad n , cu punctele de control $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$, definită pe un interval $[a, b]$, și f – forma sa n -polară. Atunci:

- (i) punctele sale intermediare din algoritmul lui de Casteljau sunt date de

$$\mathbf{a}_k^l = f(\underbrace{t, \dots, t}_l, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-l-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k); \quad (5.3.5)$$

- (ii) derivata de ordinul întâi este dată de

$$F'(t) = \frac{n}{b-a} (f(t, \dots, t, b) - f(t, \dots, t, a)); \quad (5.3.6)$$

- (iii) derivata de ordinul k este dată de

$$F^{(k)}(t) = \frac{n!}{(b-a)^k (n-k)!} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f(\underbrace{t, \dots, t}_{n-k}, \underbrace{b, \dots, b}_{k-i}, \underbrace{a, \dots, a}_i); \quad (5.3.7)$$

(iv) forma $(n + 1)$ -polară a lui F este dată de

$$f^*(t_1, \dots, t_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} f(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_{n+1}), \quad (5.3.8)$$

cu convenția că $t_{-1} \equiv t_{n+1}$ și $t_{n+2} \equiv t_1$.

Am văzut mai devreme că forma n -polară a unui polinom de grad cel mult egal cu n este unic determinată de valorile sale pe vectori de forma $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$. Totuși, pentru multe aplicații pe care le vom trata mai târziu, este mai util să folosim și alte șiruri de numere. Vom ilustra cele spuse printr-un exemplu.

Teorema 5.3.3. Fie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție simetrică și n -afină și fie $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{2n}$ un șir de numere reale astfel încât $s_n < s_{n+1}$. Atunci f este determinat în mod unic de valorile $f(s_{i+1}, \dots, s_{i+n})$, $i = 0, \dots, n$.

Demonstrație Fie date numerele t_1, \dots, t_n . Dacă $1 \leq k \leq n$ și $k \leq i \leq n$, atunci remarcăm că

$$t_k = \frac{(s_{i+n-k+1} - t_k)s_i + (t_k - s_i)s_{i+n-k+1}}{s_{i+n-k+1} - s_i} = \left(1 - \frac{t_k - s_i}{s_{i+n-k+1} - s_i}\right) s_i + \frac{t_k - s_i}{s_{i+n-k+1} - s_i} s_{i+n-k+1}.$$

Dacă punem $\alpha_i^k = \frac{t_k - s_i}{s_{i+n-k+1} - s_i}$, atunci $t_k = (1 - \alpha_i^k)s_i + \alpha_i^k s_{i+n-k+1}$, de aceea, din simetria și invarianța afină a lui f , obținem:

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_k, s_{i+1}, \dots, s_{i+n-k}) &= f(t_1, \dots, t_{k-1}, (1 - \alpha_i^k)s_i + \alpha_i^k s_{i+n-k+1}, s_{i+1}, \dots, s_{i+n-k}) = \\ &= (1 - \alpha_i^k)f(t_1, \dots, t_{k-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+n-k}) + \alpha_i^k f(t_1, \dots, t_{k-1}, s_{i+n-k+1}, s_{i+1}, \dots, s_{i+n-k}) = \\ &= (1 - \alpha_i^k)f(t_1, \dots, t_{k-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+n-k}) + \alpha_i^k f(t_1, \dots, t_{k-1}, s_{i+1}, \dots, s_{i+n-k}, s_{i+n-k+1}). \end{aligned}$$

Astfel, dacă știm valorile lui f pe argumente alcătuite din k valori t și $n - k$ valori s , atunci putem ridica numărul argumentelor t cu o unitate. Dacă rulăm algoritmul plecând de la $k = 1$ și continuăm până la $k = n$, atunci plecăm cu valorile $f(s_{i+1}, \dots, s_{i+n})$ și terminăm cu $f(t_1, \dots, t_n)$. \square

Dacă toate argumentele lui f sunt egale, atunci demonstrația teoremei precedente furnizează un algoritm pentru calculul valorilor unui polinom, plecând de la $n + 1$ valori ale formei sale polare. Acest algoritm se numește algoritmul lui *de Boor*. Vom vedea cum funcționează acest algoritm pentru polinoame cubice.

Astfel, fie $s_1 \leq s_2 \leq s_3 < s_4 \leq s_5 \leq s_6$. Alegem $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Presupunem că știm valorile lui f de forma $f(s_{i+1}, s_{i+2}, s_{i+3})$, $i = 1, 2, 3$. Atunci avem

(i) $k = 1, i = 1$

$$f(t_1, s_2, s_3) = (1 - \alpha_1^1)f(s_1, s_2, s_3) + \alpha_1^1 f(s_2, s_3, s_4);$$

(ii) $k = 1, i = 2$

$$f(t_1, s_3, s_4) = (1 - \alpha_2^1)f(s_2, s_3, s_4) + \alpha_2^1 f(s_3, s_4, s_5);$$

(iii) $k = 1, i = 3$

$$f(t_1, s_4, s_5) = (1 - \alpha_3^1)f(s_3, s_4, s_5) + \alpha_3^1 f(s_4, s_5, s_6);$$

(iv) $k = 2, i = 2$

$$f(t_1, t_2, s_3) = (1 - \alpha_2^2)f(t_1, s_2, s_3) + \alpha_2^2 f(t_1, s_3, s_4);$$

(v) $k = 2, i = 3$

$$f(t_1, t_2, s_4) = (1 - \alpha_3^2)f(t_1, s_3, s_4) + \alpha_3^2 f(t_1, s_4, s_5);$$

(vi) $k = 3, i = 3$

$$f(t_1, t_2, t_3) = (1 - \alpha_3^3)f(t_1, t_2, s_3) + \alpha_3^3 f(t_1, t_2, s_4).$$

Forma polară a unui polinom este utilă atunci când trebuie să comparăm derivatele a două funcții polinomiale. Avem, astfel, următoarea teoremă:

Teorema 5.3.4. *Fie F și G două polinoame de grad cel mult n și f, g – formele lor n -polare. Presupunem, în plus, că se dau $t \in \mathbb{R}$ și $r \in \mathbb{N}^*$. Atunci*

$$F^{(k)}(t) = G^{(k)}(t), \quad k = 0, \dots, r,$$

dacă și numai dacă

$$f(t_1, \dots, t_r, t, \dots, t) = g(t_1, \dots, t_r, t, \dots, t),$$

pentru orice $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}$.

Demonstrație Dacă punem $(t_1, \dots, t_r) = (\underbrace{t, \dots, t}_{r-k}, \underbrace{b, \dots, b}_{k-i}, \underbrace{a, \dots, a}_k)$, atunci implicația directă rezultă imediat din formula de derivare (5.3.7).

Pentru a demonstra cealaltă implicație, vom demonstra, mai întâi, prin inducție după k , că

$$f(\underbrace{t, \dots, t}_{n-k}, \underbrace{a, \dots, a}_k) = g(\underbrace{t, \dots, t}_{n-k}, \underbrace{a, \dots, a}_k), \quad k = 0, \dots, r.$$

Dacă $k = 0$, atunci egalitatea noastră se reduce, de fapt, la $F(t) = G(t)$, care este adevărată, din ipoteză. Să presupunem că ecuația este adevărată pentru toate numerele naturale până la $k - 1 \geq 0$. Dacă în formula de derivare (5.3.7), în care a și b sunt arbitrare, punem $b = t$, avem

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f(\underbrace{t, \dots, t}_{n-i}, \underbrace{a, \dots, a}_i) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i g(\underbrace{t, \dots, t}_{n-i}, \underbrace{a, \dots, a}_i).$$

Din ipoteza de inducție, avem

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_k^i f(\underbrace{t, \dots, t}_{n-i}, \underbrace{a, \dots, a}_i) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_k^i g(\underbrace{t, \dots, t}_{n-i}, \underbrace{a, \dots, a}_i).$$

Scăzând cele două egalități, obținem

$$f(\underbrace{t, \dots, t}_{n-k}, \underbrace{a, \dots, a}_k) = g(\underbrace{t, \dots, t}_{n-k}, \underbrace{a, \dots, a}_k),$$

cum era de așteptat. Remarcăm, acum, că funcțiile f^* și g^* ar date de

$$f^*(t_1, \dots, t_r) = f(t_1, \dots, t_r, t, \dots, t)$$

și

$$g^*(t_1, \dots, t_r) = g(t_1, \dots, t_r, t, \dots, t)$$

sunt simetrice și r -afine și tocmai am demonstrat că

$$f^*(\underbrace{t, \dots, t}_k, \underbrace{a, \dots, a}_{r-k}) = g^*(\underbrace{t, \dots, t}_k, \underbrace{a, \dots, a}_{r-k}),$$

de aceea, în conformitate cu teorema 5.3.3, ele trebuie să coincidă. \square

Teorema 5.3.5. Fie F și G două polinoame de grad cel mult n , iar f, g – formele lor n -polare corespunzătoare. Să presupunem că se dau numerele reale

$$s_1 \leq \dots \leq s_{n-r} < s_{n-r+1} = \dots = s_n < s_{n+1} \leq \dots \leq s_{2n-r},$$

cu $1 \leq r \leq n$. Atunci

$$F^{(k)}(s_n) = G^{(k)}(s_n), \quad k = 0, \dots, n-r,$$

dacă și numai dacă

$$f(s_{i+1}, \dots, s_{n+i}) = g(s_{i+1}, \dots, s_{n+i}), \quad i = 1, \dots, n-r+1.$$

Demonstrație Intenția este să aplicăm teorema 5.3.3. În acest scop, construim, mai întâi, un șir de numere corespunzător. Mai precis, punem $t = s_n$, $u_i = s_i$ pentru $i \leq n-r$ și $u_i = s_{i+r}$ pentru $i > n-r$. Aceasta înseamnă că avem

$$u_1 \leq \dots \leq u_{n-r} < \underbrace{t = \dots = t}_r < u_{n-r+1} \leq \dots \leq u_{2n-r}.$$

Definim, acum, f^* și g^* prin

$$f^*(t_1, \dots, t_{n-r}) = f(t_1, \dots, t_{n-r}, \underbrace{t, \dots, t}_r)$$

și

$$g^*(t_1, \dots, t_{n-r}) = g(t_1, \dots, t_{n-r}, \underbrace{t, \dots, t}_r).$$

Conform Teoremei 5.3.3, $f^* = g^*$ dacă și numai dacă

$$f^*(u_{i+1}, \dots, u_{i+n-r}) = g^*(u_{i+1}, \dots, u_{i+n-r}), \quad i = 0, \dots, n-r.$$

Rezultatul este, acum, o consecință directă a Teoremei 5.3.4. □

CAPITOLUL 6

Curbe B-spline

6.1 Definiție și proprietăți de bază

Curbele Bézier sunt foarte utile. Totuși, dacă vrem să avem mai mult control, trebuie să introducem puncte de control suplimentare și, drept consecință, gradele polinoamelor cresc și devin dificil de manevrat. În plus, dacă avem polinoame de grad mare, poligoanele de control nu mai sunt atât de similare cu curba, ceea ce înseamnă că mare parte din intuiția geometrică se pierde. Soluția este să înlocuim curbele Bézier, care sunt polinomiale, cu curbe care sunt polinomiale *pe porțiuni*. Pentru astfel de curbe, inserarea unui nod suplimentar are ca efect mărirea numărului de subintervale, dar gradul polinoamelor rămâne constant și, în practică, doar rareori este mai mare de trei.

Vom introduce, mai întâi, curbele B-spline cu ajutorul formelor polare, urmând ca apoi să introducem niște funcții polinomiale pe porțiuni speciale, numite *funcții B-spline de bază*, care vor juca un rol similar cu polinoamele Bernstein și care vor permite o reprezentare a curbelor B-spline într-o formă similară cu cea utilizată pentru curbele Bézier.

Am văzut, în capitolul precedent, că o formă polară poate fi determinată prescriind valorile sale pe valori luate dintr-o secvență crescătoare de numere reale, verificând anumite proprietăți. Începem, de aceea, cu o noțiune, plecând de la care se pot construi astfel de secvențe, anume noțiunea de *vector de noduri*,

Definiția 6.1. Un șir de noduri sau vector de noduri în grad n (sau ordin $n + 1$) este un șir

$$\underbrace{t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n}_{\text{noduri marginale}} < \underbrace{t_{n+1} \leq t_{n+2} \leq \dots \leq t_N}_{\text{noduri interioare}} < \underbrace{t_{N+1} \leq \dots \leq t_{N+n+1}}_{\text{noduri marginale}},$$

unde $N \geq n$. Primele și ultimele $n + 1$ noduri se numesc *noduri marginale*, restul sunt *noduri interioare*. Dacă $t_{r-1} < t_r = \dots = t_{r+\nu-1}$, atunci spunem că nodul t_r are multiplicitatea ν . Remarcăm că în multe cazuri nodurile marginale au multiplicitatea $n + 1$. Aceasta înseamnă că $t_0 = \dots = t_n$ și $t_{N+1} = \dots = t_{N+n+1}$. În acest caz, spunem că vectorul de noduri are *multiplicitate completă*. Vom vedea mai târziu care este motivul pentru care se preferă, de multe ori, să se utilizeze vectori de noduri cu multiplicitate completă.

Definiția 6.2. O curbă B-spline de grad n cu șirul de noduri t_0, \dots, t_m și *punctele de control sau de Boor* $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$ este o curbă polinomială de gradul n pe porțiuni, definită pe intervalul $[t_n, t_{N+1}]$. Segmentele polinomiale sunt definite pe intervale de forma $[t_r, t_{r+1}]$, cu $t_r < t_{r+1}$ astfel încât formele lor polare să verifice egalitățile

$$f_r(t_{r-n+i}, \dots, t_{r+i-1}) = d_{r-n+i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Observație. Dacă un nod are multiplicitatea n , adică $t_r = \dots = t_{r+n-1}$, atunci unul dintre punctele de control se află pe curbă, deoarece este de forma $f_r(t_r, \dots, t_r)$.

Următoarea teoremă este o consecință imediată a Teoremei 5.3.5 și ne spune cât de neted se îmbină bucățile de B-splines. În mod clar, putem avea probleme doar în noduri (în rest curba este polinomială, deci infinit netedă).

Teorema 6.1.1. Dacă un nod interior t_r are multiplicitatea ν , atunci o curbă B-spline de gradul n este de clasă $C^{n-\nu}$ în punctul t_r .

Observație. Ca o consecință a acestei teoreme, rezultă că dacă un nod interior are multiplicitatea mai mare de n , atunci curba poate fi discontinuă în acel punct.

Astfel, o curbă B-spline de grad n este o curbă polinomială pe porțiuni, astfel încât toate bucățile sunt polinoame de grad cel mult n și aceste bucăți se îmbină, la noduri, cu un anumit grad de netezime, care depinde de multiplicitatea nodurilor interioare. Ne putem pune următoarea întrebare: Dacă ni se dă o curbă polinomială pe porțiuni, ale căror bucăți se îmbină neted cu un anumit grad de netezime, putem să o reprezentăm ca o curbă B-spline? Răspunsul este afirmativ și este dat de următoarea teoremă.

Teorema 6.1.2. *Să presupunem că ni se dau numerele reale u_0, \dots, u_m , întregii pozitivi ν_1, \dots, ν_{m-1} și o curbă \mathbf{r} definită pe intervalul $[u_0, u_m]$ astfel încât $u_{j-1} < u_j$, $j = 1, \dots, m$ și*

(1) *restricția lui \mathbf{r} la fiecare subinterval $[u_{j-1}, u_j]$ este un polinom de grad n , $j = 1, \dots, m$;*

(2) *\mathbf{r} is $C^{m-\nu_j}$ în punctele u_j , $j = 1, \dots, m-1$.*

Atunci curba se poate scrie ca o curbă B-spline cu șirul de noduri

$$t_0, \dots, t_{2n+N} = \underbrace{u_0, \dots, u_0}_{n+1}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{\nu_1}, \dots, \underbrace{u_{m-1}, \dots, u_{m-1}}_{\nu_{m-1}}, \underbrace{u_m, \dots, u_m}_{n+1}$$

unde $N = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \nu_j$. Mai mult, dacă punem $m_r = n + \sum_{j=1}^r \nu_j$, pentru $r = 0, \dots, m$, atunci punctele de control sunt date de

$$\mathbf{d}_i = f_r(t_i, \dots, t_{i+n-1}), \quad \text{pentru } i = m_{r-1} - n + 1, \dots, m_{r-1} + 1,$$

unde f_r este forma polară a segmentului polinomial definit pe $[u_{r-1}, u_r] = [t_{m_{r-1}}, t_{m_{r-1}+1}]$, $r = 1, \dots, m$.

Demonstrație Tot ce avem de demonstrat este că punctele de control sunt bine definite, adică trebuie să arătăm că dacă $m_{r-1} - n_1 \leq i \leq m_{r+l-1} - n + 1$, atunci

$$f_r(t_i, \dots, t_{i+n-1}) = f_{r+l}(t_i, \dots, t_{i+n-1}).$$

Pentru $l = 1$ rezultă din Teorema 5.3.5 și pe urmă putem face inducție după l . \square

Din această teoremă rezultă, în particular, că o curbă B-spline definită pe un șir de noduri dat poate fi interpretată ca fiind o curbă B-spline definită pe un șir de noduri rafinat și ne spune, de asemenea, care sunt noile puncte de control. Procesul se numește *inserare de noduri*, iar următoarea teoremă descrie procesul.

Teorema 6.1.3. *Să presupunem că $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$ sunt punctele de control pentru curba B-spline de gradul n pe șirul de noduri t_0, \dots, t_{N+n+1} . Fie $t^* \in [t_r, t_{r+1}]$, astfel încât $t_n \leq t_r < t_{r+1} \leq t_{N+1}$. Dacă inserăm t^* în șirul de noduri, atunci noile puncte de control sunt date de*

$$\mathbf{d}_i^* = \begin{cases} \mathbf{d}_i & i = 0, \dots, r-n \\ (1-\alpha_i)\mathbf{d}_{i-1} + \alpha_i\mathbf{d}_i & i = r-n+1, \dots, r \\ \mathbf{d}_{i-1} & i = r+1, \dots, N+1, \end{cases}$$

unde

$$\alpha_i = \frac{t^* - t_i}{t_{i+n} - t_i}.$$

Demonstrație Fie $t_0^*, \dots, t_{N+n+2}^*$ noul șir de noduri, adică

$$t_i^* = \begin{cases} t_i & i = 0, \dots, r \\ t^* & i = r + 1 \\ t_{i-1} & i = r + 2, \dots, N + n + 2. \end{cases}.$$

Dacă $i \leq r - n$, atunci $i + n - 1 \leq r - 1$ și, deci,

$$\mathbf{d}_i^* = g(t_i^*, \dots, t_{i+n-1}^*) = g(t_i, \dots, t_{i+n-1}) = \mathbf{d}_i,$$

unde g este forma polară a unui anumit segment polinomial. În același mod, dacă $i \geq r + 1$, atunci

$$\mathbf{d}_i^* = g(t_i^*, \dots, t_{i+n-1}^*) = g(t_{i-1}, \dots, t_{i+n-2}) = \mathbf{d}_{i-1},$$

unde, din nou, g este forma polară a unui anumit segment polinomial. Fie, acum, f forma polară a unui segment polinomial definit pe intervalul $[t_r, t_{r+1}]$ și considerăm $r - n < i < r + 1$. Atunci noile puncte de control sunt date de

$$\mathbf{d}_i^* = f(t_i^*, \dots, t_{i+n-1}^*) = f(t_i, \dots, t_{r-1}, t^*, t_r, \dots, t_{i+n-2}).$$

Procedăm acum ca în demonstrația Teoremei 5.3.3, unde punem $t_1 = t^*$ și $s_i = t_{i+r-n}$ și obținem

$$\begin{aligned} f(t_i, \dots, t_{r-1}, t^*, t_r, \dots, t_{i+n-2}) &= f(s_{i-r+n}, \dots, s_{n-1}, t_1, s_n, \dots, s_{i+2n-r-2}) = \\ &= (1 - \alpha_{i-r+n-1}^1) f(s_{i-r+n-1}, \dots, s_{i+2n-r-2}) + \\ &+ \alpha_{i-r+n-1}^1 f(s_{i-r+n}, \dots, s_{i+2n-r-1}) = \\ &= (1 - \alpha_i) f(t_{i-1}, \dots, t_{i+n-2}) + \alpha_i f(t_i, \dots, t_{i+n-1}) = \\ &= (1 - \alpha_i) \mathbf{d}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{d}_i, \end{aligned}$$

unde

$$\alpha_i = \alpha_{i-r+n-1}^1 = \frac{t_1 - s_{i-r+n-1}}{s_{i-r+2n-1} - s_{i-r+n-1}} = \frac{t^* - t_{i-1}}{t_{i+n-1} - t_{i-1}}.$$

□

Procesul de inserare repetată a *aceluiași* nod până se obține multiplicitatea completă și se obține un punct de pe curbă, se numește *algoritmul lui de Boor* și, în esență, exact algoritmul din demonstrația Teoremei 5.3.3. Esența sa este capturată în următoarea teoremă.

Teorema 6.1.4. *Fie \mathbf{r} o curbă B-spline de grad n , cu nodurile t_0, \dots, t_{N+n+1} și punctele de control $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$. Dacă $t \in [t_r, t_{r+1}]$ și $t_n \leq t_r < t_{r+1} \leq t_{N+1}$, atunci putem determina punctul $\mathbf{r}(t)$ de pe curbă folosind algoritmul lui de Boor. Inițializăm, mai întâi,*

$$\mathbf{d}_i^0(t) = \mathbf{d}_i \quad i = r - n, \dots, r.$$

Atunci, pentru $k = 1, \dots, n$ punem:

$$\alpha_i^k(t) = \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{n+1+i-k} - t_i}, & \text{dacă } t_{n+1+i-k} \neq t_i \\ 0, & \text{dacă } t_{n+1+i-k} = t_i. \end{cases}$$

$$\mathbf{d}_i^k(t) = (1 - \alpha_i^k(t))\mathbf{d}_{i-1}^{k-1}(t) + \alpha_i^k(t)\mathbf{d}_i^{k-1}(t),$$

$i = r - n + k, \dots, r$. În fine, punctul de pe curbă este $\mathbf{r}(t) = \mathbf{d}_r^n(t)$.

Observație. Din algoritmul lui de Boor rezultă că curbele B-spline verifică *proprietatea tare de învelitoare convexă*. Nu numai că curba B-spline este inclusă în învelitoarea convexă a punctelor de control, dar $\mathbf{r}([t_r, t_{r+1}])$ este inclusă în învelitoarea convexă a lui $\{\mathbf{d}_{r-n}, \dots, \mathbf{d}_r\}$.

Stabilim, în final, o formulă pentru calculul derivatei unei curbe B-spline.

Teorema 6.1.5. *Fie \mathbf{r} o curbă B-spline de gradul n , cu nodurile t_0, \dots, t_{N+n+1} și punctele de control $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$. Derivata \mathbf{r}' este o curbă B-spline de gradul $n - 1$, cu șirul de noduri t_1, \dots, t_{N+n} și punctele de control*

$$\mathbf{d}_i' = \frac{n(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i)}{t_{i+n+1} - t_{i+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (6.1.1)$$

Dintr-o perspectivă diferită, dacă $t \in [t_r, t_{r+1}]$, unde $t_r < t_{r+1}$, atunci rulăm algoritmul lui de Boor până la al doilea pas (adică inserăm t ca un nod de multiplicitate $n - 1$). Derivata este atunci dată de

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{n(\mathbf{d}_r^{n-1}(t) - \mathbf{d}_{r-1}^{n-1}(t))}{t_{r+1} - t_r}. \quad (6.1.2)$$

Demonstrație În mod clar, \mathbf{r}' este o curbă polinomială pe porțiuni de gradul $n - 1$ și, dacă \mathbf{r} este $C^{n-\nu}$ la un anumit nod interior, atunci, \mathbf{r}' este $C^{n-\nu-1}$ în același nod. Atunci, din Teorema 6.1.2 rezultă că derivata \mathbf{r}' este o curbă B-spline cu aceleași noduri interioare ca și curba originală. Dacă f este forma n -polară a curbei \mathbf{r} pe intervalul $[t_{i+n-1}, t_{i+n}]$, atunci din formula (5.3.6) rezultă că, pe același interval, forma $(n - 1)$ -polară a lui \mathbf{r}' este dată de

$$(u_1, \dots, u_{n-1}) \rightarrow \frac{n}{t_{i+n-1} - t_{i-1}} (f(u_1, \dots, u_{n-1}, t_{i+n-1}) - f(u_1, \dots, u_{n-1}, t_{i-1})).$$

Atunci, iarăși din Teorema 6.1.2, punctele de control sunt date de

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_i &= \frac{n}{t_{i+n-1} - t_{i-1}} (f(t_i, \dots, t_{i+n-2}, t_{i+n-1}) - f(t_i, \dots, t_{i+n-2}, t_{i-1})) = \\ &= \frac{n}{t_{i+n-1} - t_{i-1}} (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1}). \end{aligned}$$

Astfel, am demonstrat (6.1.1). Pentru a demonstra formula (6.1.2), fie f forma n -polară a lui \mathbf{r} pe intervalul $[t_r, t_{r+1}]$. Cele două puncte din penultimul pas al algoritmului lui de Boor sunt date de

$$\begin{aligned} d_{n-1}^{n-1} &= f(t, \dots, t, s_n) = f(t, \dots, t, t_r) \\ d_{n-1}^n &= f(t, \dots, t, s_{n+1}) = f(t, \dots, t, t_{r+1}) \end{aligned}$$

iar rezultatul este, acum, o consecință a relației (5.3.6). □

6.2 Reprezentarea în baza B-spline

Funcțiile polinomiale pe porțiuni de grad cel mult n , definite prin intermediul unui vector de noduri formează, așa cum se poate demonstra cu ușurință, un spațiu vectorial $n + 1$ -dimensional. Acest spațiu are o bază formată din niște funcții speciale, numite *funcții B-spline*, astfel încât o curbă B-spline cu șirul de noduri t_0, \dots, t_{2n+N} poate fi scrisă, prin analogie cu reprezentarea unei curbe Bézier folosind polinoame Bernstein, ca

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^N N_n^i(t) \mathbf{d}_i, \quad (6.2.1)$$

unde N_n^i sunt funcții *scalare*, polinomiale pe porțiuni, numite *funcții B-spline*. Spre deosebire de cazul polinoamelor Bernstein, ele depind, desigur, de șirul de noduri.

Ele pot fi găsite prin recurență. În acest scop, definim, pentru fiecare $i \in \{0, \dots, N + n + 1\}$ și $1 \leq k \leq N + n - i + 2$,

$$\omega_k^i(t) = \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i}, & \text{dacă } t_i < t_{i+k}, \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Definim, acum,

$$\begin{aligned} N_0^i(t) &= \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}, \quad i = 0, \dots, N + n \\ N_k^i(t) &= \omega_k^i(t) N_{k-1}^i(t) + (1 - \omega_k^{i+1}(t)) N_{k-1}^{i+1}(t), \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

$$k = 1, \dots, N + n, \quad i = 0, \dots, N + n - k.$$

Ca un exemplu, vom determina curba B-spline pătratică definită de nodurile $t_0 = 2, t_1 = 4, t_2 = 5, t_3 = 7, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11$ și punctele de control $\mathbf{d}_0(1, 2), \mathbf{d}_1(3, 5), \mathbf{d}_2(6, 2), \mathbf{d}_3(9, 4)$. Remarcăm imediat că în cazul nostru $n = 2$ și $N = 3$, iar domeniul de definiție al curbei este intervalul $[t_2, t_4] = [5, 8]$. Fiind vorba de o curbă B-spline pătratică, trebuie să determinăm funcțiile B-spline de ordinul al doilea.

Începem cu cele de gradul zero:

$$\begin{aligned} N_0^0(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [2, 4) \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}, \quad N_0^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [4, 5) \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases} \\ N_0^2(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [5, 7) \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}, \quad N_0^3(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [7, 8) \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases} \\ N_0^4(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [8, 10) \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}, \quad N_0^5(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [10, 11) \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}. \end{aligned}$$

Trecem acum la funcțiile B-spline de gradul întâi. Avem:

$$\begin{aligned} N_1^0(t) &= \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} N_0^0(t) + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} N_0^1(t) = \frac{t - 2}{4 - 2} N_0^0(t) + \frac{5 - t}{5 - 4} N_0^1(t) = \\ &= \frac{t - 2}{2} N_0^0(t) + (5 - t) N_0^1(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1^1(t) &= \frac{t-t_1}{t_2-t_1}N_0^1(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2}N_0^2(t) = \frac{t-4}{5-4}N_0^1(t) + \frac{7-t}{7-5}N_0^2(t) = \\ &= (t-4)N_0^1(t) + \frac{1}{2}(7-t)N_0^2(t), \end{aligned}$$

$$N_1^2(t) = \frac{t-t_2}{t_3-t_2}N_0^2(t) + \frac{t_5-t}{t_4-t_3}N_0^3(t) = \frac{t-5}{2}N_0^2(t) + (8-t)N_0^3(t),$$

$$N_1^3(t) = \frac{t-t_3}{t_4-t_3}N_0^3(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_4}N_0^4(t) = (t-7)N_0^3(t) + \frac{1}{2}(10-t)N_0^4(t),$$

$$N_1^4(t) = \frac{t-t_4}{t_5-t_4}N_0^4(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_5}N_0^5(t) = \frac{1}{2}(t-8)N_0^4(t) + (11-t)N_0^5(t).$$

În fine, putem trece la determinarea funcțiilor B-spline de gradul al doilea.

$$\begin{aligned} N_2^0(t) &= \frac{t-t_0}{t_2-t_0}N_1^0(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1}N_1^1(t) = \frac{1}{3}(t-2)N_1^0(t) + \frac{1}{3}(7-t)N_1^1(t) = \\ &= \frac{1}{6}(t-2)^2N_0^0(t) + \frac{1}{3}(-2t^2+18t-38)N_0^1(t) + \frac{1}{6}(7-t)^2N_0^2(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2^1(t) &= \frac{t-t_1}{t_3-t_1}N_1^1(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2}N_1^2(t) = \frac{1}{3}(t-4)N_1^1(t) + \frac{1}{3}(8-t)N_1^2(t) = \\ &= \frac{1}{3}(t-4)^2N_0^1(t) + \frac{1}{3}(-t^2+12t-34)N_0^2(t) + \frac{1}{3}(8-t)^2N_0^3(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2^2(t) &= \frac{t-t_2}{t_4-t_2}N_1^2(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3}N_1^3(t) = \frac{1}{3}(t-5)N_1^2(t) + \frac{1}{3}(10-t)N_1^3(t) = \\ &= \frac{1}{6}(t-5)^2N_0^2(t) + \frac{1}{3}(-2t^2+30t-110)N_0^3(t) + \frac{1}{6}(10-t)^2N_0^4(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2^3(t) &= \frac{t-t_3}{t_5-t_3}N_1^3(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_4}N_1^4(t) = \frac{1}{3}(t-7)N_1^3(t) + \frac{1}{3}(11-t)N_1^4(t) = \\ &= \frac{1}{3}(t-7)^2N_0^3(t) + \frac{1}{3}(-t^2+18t-79)N_0^4(t) + \frac{1}{3}(11-t)^2N_0^5(t). \end{aligned}$$

Putem scrie explicit expresiile funcțiilor B-spline, în funcție de t :

$$N_2^0(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \frac{1}{6}(t-2)^2, & 2 \leq t < 4 \\ \frac{1}{3}(-2t^2+18t-38), & 4 \leq t < 5 \\ \frac{1}{6}(7-t)^2, & 5 \leq t < 7 \\ 0, & 7 \leq t \end{cases}$$

$$N_2^1(t) = \begin{cases} 0, & t < 4 \\ \frac{1}{3}(t-4)^2, & 4 \leq t < 5 \\ \frac{1}{3}(-t^2 + 12t - 34), & 5 \leq t < 7, \\ \frac{1}{3}(8-t)^2, & 7 \leq t < 8 \\ 0, & 8 \leq t \end{cases}$$

$$N_2^2(t) = \begin{cases} 0, & t < 5 \\ \frac{1}{6}(t-5)^2, & 5 \leq t < 7 \\ \frac{1}{3}(-2t^2 + 30t - 110), & 7 \leq t < 8, \\ \frac{1}{6}(10-t)^2, & 8 \leq t < 10 \\ 0, & 10 \leq t \end{cases}$$

$$N_2^3(t) = \begin{cases} 0, & t < 7 \\ \frac{1}{3}(t-7)^2, & 7 \leq t < 8 \\ \frac{1}{3}(-t^2 + 18t - 79), & 8 \leq t < 10 \\ \frac{1}{3}(11-t)^2, & 10 \leq t < 11 \\ 0, & 11 \leq t \end{cases}.$$

Acum putem scrie expresia curbei B-spline cu nodurile și punctele de control date, definită pe intervalul $[5, 8]$, în funcție de t :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (1, 2)N_2^0(t) + (3, 5)N_2^1(t) + (6, 3)N_2^2(t) + (9, 4)N_2^3(t) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6}(7-t)^2(1, 2) + \frac{1}{3}(-t^2 + 12t - 34)(3, 5) + \\ + \frac{1}{6}(t-5)^2(6, 2) & \text{dacă } 5 \leq t < 7, \\ \frac{1}{3}(8-t)^2(3, 5) + \frac{1}{3}(-2t^2 + 30t - 110)(6, 2) + \\ + \frac{1}{3}(t-7)^2(9, 4) & \text{dacă } 7 \leq t \leq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Menționăm, în teorema de mai jos, o serie de proprietăți pe care le au funcțiile B-spline, proprietăți care, la rândul lor, induc proprietăți importante ale *curbelor* B-spline.

Teorema 6.2.1. *Funcțiile B-spline $N_k^i(t)$ verifică următoarele proprietăți:*

Pozitivitate: $N_k^i(t) > 0$ pentru $t \in (t_i, t_{i+k+1})$.

Suport local: $N_k^i(t) = 0$ pentru $t \notin (t_i, t_{i+k+1})$.

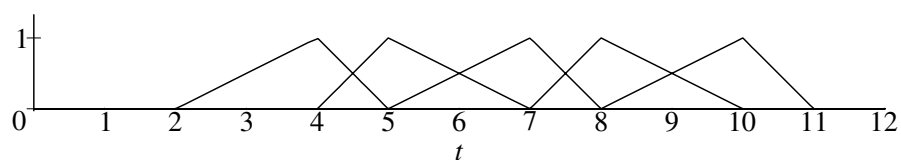


Figura 6.1: Graficul funcțiilor B-spline de gradul 1

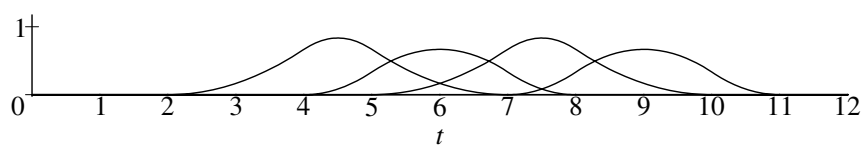


Figura 6.2: Graficul funcțiilor B-spline de gradul 2

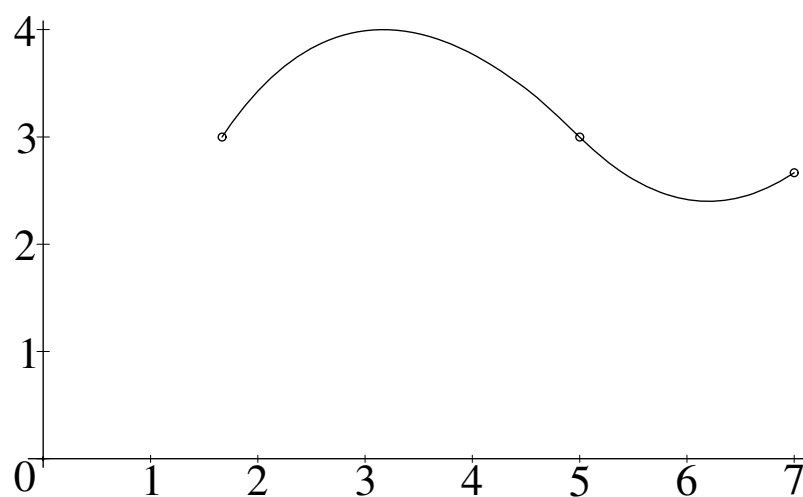


Figura 6.3: Graficul curbei B-spline de gradul 2

Polinomialitate pe porțiuni: $N_k^i(t)$ sunt polinomiale de grad k , pe porțiuni.

Partiția unității: $\sum_{j=r-k}^r N_k^j(t) = 1$, pentru $t \in [t_r, t_{r+1})$.

Continuitate: Dacă un nod interior t_i are multiplicitatea p_i , atunci funcția $N_k^i(t)$ are gradul de netezime C^{k-p_i} pentru $t = t_i$ și este de clasă C^∞ în rest.

Demonstrație Amânăm, deocamdată, demonstrația ultimei proprietăți. Celelalte patru, după cum vom vedea imediat, se demonstrează prin inducție după k .

Începem cu primele trei. Este clar, din definiție, că pentru $k = 0$ toate funcțiile N_0^i îndeplinesc condițiile de pozitivitate, suport local și polinomialitate (de grad 0) pe porțiuni.

Presupunem acum că, pentru un k dat, toate funcțiile B-spline de grad k verifică primele trei proprietăți. Atunci, din relația de recurență obținem

$$N_{k+1}^i(t) = \frac{t - t_i}{t_{k+r+1} - t_i} N_k^i(t) + \frac{t_{i+k+2} - t}{t_{i+k+2} - t_{i+1}} N_k^{i+1}(t),$$

unde $N_k^i(t) > 0$ pentru $t \in (t_i, t_{i+k+1})$, $N_k^i(t) = 0$ pentru $t \notin (t_i, t_{i+k+1})$, $N_{k+1}^i(t) > 0$ pentru $t \in (t_{i+1}, t_{i+k+2})$, $N_{k+1}^i(t) = 0$ pentru $t \notin (t_{i+1}, t_{i+k+2})$. Să presupunem că $t \notin (t_i, t_{i+k+2})$, atunci $t \notin (t_i, t_{i+k+1})$ și $t \notin (t_{i+1}, t_{i+k+2})$. Astfel, $N_k^i(t) = 0$ și $N_k^{i+1}(t) = 0$, de unde rezultă că $N_{k+1}^i(t) = 0$, așa cum trebuie. Mai departe, să presupunem că $t \in (t_i, t_{i+k+2})$. Dacă $t \in (t_i, t_{i+k+1})$, atunci

$$\frac{t - t_i}{t_{k+r+1} - t_i} > 0, \quad \frac{t_{i+k+2} - t}{t_{i+k+2} - t_{i+1}} > 0, \quad N_k^i(t) > 0, \quad N_k^{i+1}(t) \geq 0,$$

ceea ce înseamnă că $N_{k+1}^i(t) > 0$. Altfel, dacă $t \in (t_i, t_{i+k+1})$ avem

$$\frac{t - t_{i-1}}{t_{k+r} - t_{i-1}} > 0, \quad \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_i} > 0, \quad N_k^i(t) \geq 0, \quad N_k^{i+1}(t) > 0,$$

de unde $N_{k+1}^i(t) > 0$. Astfel, în ambele situații, $N_{k+1}^i(t) > 0$, așa cum se cere.

Întrucât produsul de polinoame este tot un polinom, și produsul de funcții polinomiale pe porțiuni este o funcție polinomială pe porțiuni. Același lucru este valabil și pentru suma funcțiilor polinomiale pe porțiuni. Astfel, dacă $N_k^i(t)$ și $N_k^{i+1}(t)$ sunt polinomiale pe porțiuni, la fel este și $N_{k+1}^i(t)$, deci primele trei afirmații sunt demonstrate prin inducție.

Și partiția unității se demonstrează tot prin inducție după k . Pentru $k = 0$, obținem condiția ca $N_0^r(t) = 1$ pe intervalul $[t_r, t_{r+1})$, ceea ce este, evident, adevărat

din definiție. Să presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru funcții de bază de grad $k - 1$. Atunci avem

$$\begin{aligned}
\sum_{j=r-k}^r N_k^j(t) &= N_k^{r-k}(t) + \dots + N_k^{r-1}(t) + N_k^r(t) = \\
&= \left(\frac{t - t_{r-k}}{t_r - t_{r-k}} N_{k-1}^{r-k}(t) + \frac{t_{r+1} - t}{t_{r+1} - t_{r-k+1}} N_{k-1}^{r-k+1}(t) \right) + \\
&+ \dots + \left(\frac{t - t_{r-1}}{t_{r+k-1} - t_{r-1}} N_{k-1}^{r-1}(t) + \frac{t_{r+k} - t}{t_{r+k} - t_r} N_{k-1}^r(t) \right) + \\
&+ \left(\frac{t - t_r}{t_{r+k+1} - t_r} N_{k-1}^r(t) + \frac{t_{r+k+1} - t}{t_{r+k+1} - t_{r+1}} N_{k-1}^{r+1}(t) \right) = \\
&= \frac{t - t_{r-k}}{t_r - t_{r-k}} N_{k-1}^{r-k}(t) + \left(\frac{t_{r+1} - t}{t_{r+1} - t_{r-k+1}} + \frac{t - t_{r-k+1}}{t_{r+1} - t_{r-k+1}} \right) N_{k-1}^{r-k+1} + \\
&+ \dots + \left(\frac{t_{r+k} - t}{t_{r+k} - t_r} + \frac{t - t_r}{t_{r+k} - t_r} \right) N_{k-1}^r(t) + \frac{t_{r+k+1} - t}{t_{r+k+1} - t_{r+1}} N_{k-1}^{r+1}(t) = \\
&= \frac{t - t_{r-k}}{t_r - t_{r-k}} N_{k-1}^{r-k}(t) + N_{k-1}^{r-k+1}(t) + \\
&+ \dots + N_{k-1}^r(t) + \frac{t_{r+k+1} - t}{t_{r+k+1} - t_{r+1}} N_{k-1}^{r+1}(t).
\end{aligned}$$

Dar $N_{k-1}^{r-k}(t) = 0$ dacă $t \notin (t_{r-k}, t_r)$ și $N_{k-1}^{r+1}(t) = 0$ pentru $t \notin (t_{r+1}, t_{r+k+1})$, de aceea

$$\sum_{j=r-k}^r N_k^j(t) = \sum_{j=r-k-1}^r N_k^j(t).$$

Membrul drept al relației de mai sus este egal cu 1, conform ipotezei de inducție, prin urmare partiția unității este demonstrată. \square

Teorema precedentă ne permite să descriem o serie de proprietăți fundamentale ale *curbelor* B-spline, de această dată:

Teorema 6.2.2. *O curbă B-spline*

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^N N_n^i(t) \mathbf{d}_i,$$

de gradul n , cu nodurile t_0, \dots, t_{N+n+1} verifică următoarele proprietăți:

Control local: Fiecare segment de curbă este determinat de $n + 1$ puncte. Dacă $t \in [t_r, t_{r+1})$, cu $n \leq r < r + 1 \leq N + 1$, atunci

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=r-n}^r N_n^i(t) \mathbf{d}_i,$$

Învelitoarea convexă locală: Dacă $t \in [t_r, t_{r+1})$, cu $n \leq r < r + 1 \leq N + 1$, atunci

$$\mathbf{r}(t) \in CH\{\mathbf{d}_{r-n}, \dots, \mathbf{d}_r\}.$$

Continuitatea: Dacă p_i este multiplicitatea unui nod de întrerupere, $t = t_i$, atunci $\mathbf{r}(t)$ este cel puțin de clasă C^{n-p_i} în punctul de întrerupere și de clasă C^∞ în rest.

Invarianța afină: Fie T o transformare afină. Atunci

$$T\left(\sum_{i=0}^N N_n^i(t) \mathbf{d}_i\right) = \sum_{i=0}^N N_n^i(t) T(\mathbf{d}_i).$$

6.3 Curbe B-spline deschise

În cazul curbelor Bézier, curba trece prin primul și ultimul punct de control. În plus, prima și ultima latură a poligonului de control sunt tangente la curbă. Nici una dintre aceste proprietăți nu este verificată pentru o curbă B-spline cu un vector de noduri oarecare.

Există o clasă specială de curbe B-spline pentru care ambele proprietăți sunt verificate. Aceste curbe se caracterizează prin faptul că nodurile marginale ale lor au multiplicitate maximă. Mai precis, dacă curba are gradul n și are nodurile $t_0, t_1, \dots, t_{N+n+1}$, atunci avem

$$t_0 = t_1 = \dots t_n \quad \text{și} \quad t_{N+1} = t_{N+2} = \dots = t_{N+n+1}.$$

Se poate demonstra că $\mathbf{r}(t_n) = \mathbf{d}_0$ și $\mathbf{r}(t_{N+1}) = \mathbf{d}_N$. De asemenea,

$$\mathbf{r}'(t_n) = \frac{n}{t_{n+1} - t_1} (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0) \quad \text{și} \quad \mathbf{r}'(t_{N+1}) = \frac{n}{t_{2N+n-1} - t_{N+n-1}} (\mathbf{d}_N - \mathbf{d}_{N-1}).$$

Astfel, pentru astfel de alegeri ale vectorului de noduri, curba trece prin primul și ultimul punct de control ("interpolează" între aceste puncte) și este tangentă primei și ultimei laturi a poligonului de control, lucruri care nu se întâmplă pentru o alegere arbitrară a vectorului de noduri.

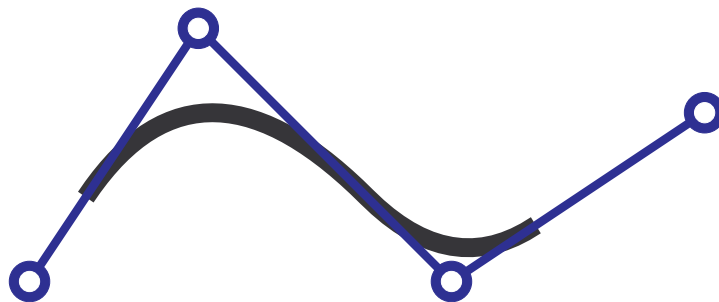


Figura 6.4: Curbă B-spline oarecare

Exemplul 6.1. Considerăm curba de gradul 2, cu vectorul de noduri

$$t_0 = t_1 = t_2 = 0, t_3 = 1, t_4 = 2, t_5 = 3, t_6 = t_7 = t_8 = 4$$

și punctele de control

$$\mathbf{d}_0(-8, -4), \mathbf{d}_1(-5, -1), \mathbf{d}_2(-4, 4), \mathbf{d}_3(1, 3), \mathbf{d}_4(2, -1), \mathbf{d}_5(6, -3).$$

În acest caz avem de-a face cu o curbă B-spline deschisă cu $n = 2$ și $N = 5$. Funcțiile B-spline de gradul zero sunt

$$N_0^i(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases} \quad i = 0, \dots, 7.$$

Funcțiile B-spline de gradul 1 sunt

$$N_1^0(t) = \frac{t-0}{0-0}N_0^0(t) + \frac{0-t}{0-0}N_0^1(t) = 0,$$

$$N_1^1(t) = \frac{t-0}{0-0}N_0^1(t) + \frac{0-t}{1-0}N_0^2(t) = (1-t)N_0^2(t),$$

$$N_1^2(t) = \frac{t-0}{1-0}N_0^2(t) + \frac{2-t}{2-0}N_0^3(t) = tN_0^2(t) + \frac{1}{2}(2-t)N_0^3,$$

$$N_1^3(t) = \frac{t-1}{2-1}N_0^3(t) + \frac{3-t}{3-1}N_0^4(t) = (t-1)N_1^3(t) + (3-t)N_1^4(t),$$

$$N_1^4(t) = \frac{t-2}{3-2}N_0^4(t) + \frac{4-t}{4-2}N_0^5(t) = (t-2)N_0^4(t) + \frac{1}{2}(4-t)N_0^5(t),$$

$$N_1^5(t) = \frac{t-3}{4-3}N_0^5(t) + \frac{4-t}{4-4}N_0^6(t) = (t-3)N_0^5(t),$$

$$N_1^6(t) = \frac{t-4}{4-4}N_0^6(t) + \frac{4-t}{4-4}N_0^7(t) = 0.$$

Funcțiile B-spline de gradul al doilea sunt

$$N_2^0(t) = (1-t)^2N_0^2(t),$$

$$N_2^1(t) = \frac{1}{2}(4-t)tN_0^2(t) + \frac{1}{2}(2-t)^2N_0^3(t),$$

$$N_2^2(t) = \frac{1}{2}t^2N_0^2(t) + \left(-t^2 + 3t - \frac{3}{2}\right)N_0^3(t) + \left(\frac{9}{2} - 3t + \frac{1}{2}\right)N_0^4(t),$$

$$N_2^3(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2N_0^3(t) + \left(-\frac{11}{2} + 5t - t^2\right)N_0^4(t) + \left(8 - 4t + \frac{1}{2}t^2\right)N_0^5,$$

$$N_2^4(t) = \frac{1}{2}(t-2)^2N_0^4(t) + \left(-16 + 10t - \frac{3}{2}t^2\right)N_0^5(t),$$

$$N_2^5(t) = (t-3)^2N_0^5(t).$$

Obținem astfel cele patru segmente ale curbei B-spline de gradul al doilea

$$\mathbf{r}_0(t) = (1-t)^2\mathbf{d}_0 + \frac{1}{2}t(4-t)\mathbf{d}_1 + \frac{1}{2}t^2\mathbf{d}_2, \quad t \in [0, 1],$$

$$\mathbf{r}_1(t) = \frac{1}{2}(2-t)^2\mathbf{d}_1 + \frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3)\mathbf{d}_2 + \frac{1}{2}(t-1)^2\mathbf{d}_3, \quad t \in [1, 2],$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \frac{1}{2}(3-t)^2\mathbf{d}_2 + \frac{1}{2}(-2t^2 + 10t - 11)\mathbf{d}_3 + \frac{1}{2}(t-2)^2\mathbf{d}_4, \quad t \in [2, 3],$$

$$\mathbf{r}_3(t) = \frac{1}{2}(4-t)^2\mathbf{d}_3 + \frac{1}{2}(-3t^2 + 20t - 32)\mathbf{d}_4 + (t-3)^2\mathbf{d}_5, \quad t \in [3, 4].$$

Dacă notăm cu \mathbf{r} curba B-spline cu aceste componente, avem valorile la capete

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0(0) = \mathbf{d}_0 \quad \text{și} \quad \mathbf{r}(4) = \mathbf{r}_3(4) = \mathbf{d}_5.$$

Pentru a determina vectorii tangenți în capete, trebuie să determinăm derivatele în capete. Avem

$$\mathbf{r}'_0(t) = 2(t-1)\mathbf{d}_0 + (2-t)\mathbf{d}_1 + t\mathbf{d}_2,$$

deci

$$\mathbf{r}'(0) = 2(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0) = \frac{2}{t_3 - t_1}(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0),$$

în timp ce

$$\mathbf{r}'(4) = 2(\mathbf{d}_5 - \mathbf{d}_4) = \frac{2}{t_7 - t_5}(\mathbf{d}_5 - \mathbf{d}_4).$$

6.4 Curbe B-spline uniforme

O curbă B-spline *uniformă* este o curbă B-spline care are nodurile egal depărtate (toate, nu doar cele interioare). Ca exemplu, vom considera o curbă pătratică, ce are nodurile date de $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_{N+3} = N+3$. Funcțiile B-spline de ordinul 0 sunt, ca de obicei,

$$N_0^i(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

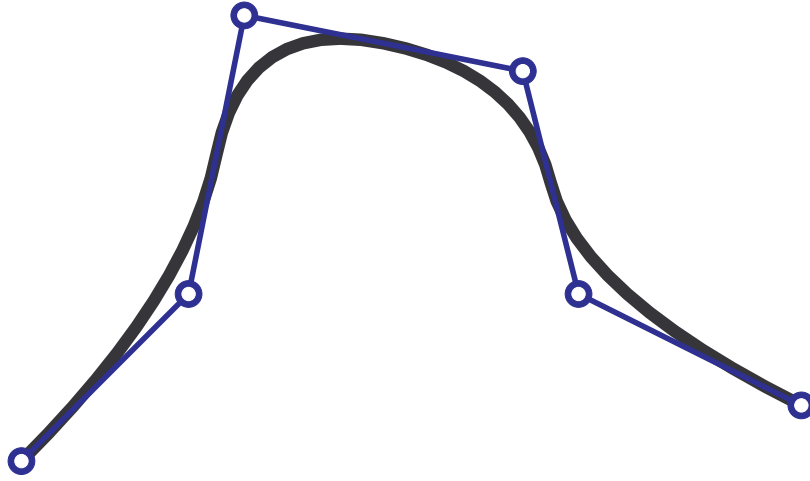


Figura 6.5: Curbă B-spline deschisă

Se obține cu ușurință, prin metoda utilizată mai devreme, că funcțiile B-spline de gradul al doilea sunt

$$N_2^i(t) = \frac{1}{2}(t - i + 1)^2 N_0^i(t) + \frac{1}{2}((t - i + 1)(i + 1 - t) + (i + 2 - t)(t - i)) N_0^{i+1}(t) + \frac{1}{2}(i + 2 - t)^2 N_0^{i+2}(t).$$

Atunci segmentul \mathbf{r}_i al curbei, definit pe $[i + 1, i + 2)$ este dat de

$$\mathbf{r}_i(t) = \frac{1}{2}(i + 2 - t)^2 \mathbf{d}_i + \frac{1}{2}((t - i)(i + 2 - t) + (i + 3 - t)(t - i - 1)) \mathbf{d}_{i+1} + \frac{1}{2}(t - i - 1)^2 \mathbf{d}_{i+2}.$$

Dacă facem schimbarea de parametru $t \rightarrow t + i + 1$, obținem

$$\mathbf{r}_i(t) = \frac{1}{2}(1 - t)^2 \mathbf{d}_i + \frac{1}{2}(1 + 2t - 2t^2) \mathbf{d}_{i+1} + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{d}_{i+2}.$$

Relația se poate scrie matricial sub forma

$$\mathbf{r}_i(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{d}_i \quad \mathbf{d}_{i+1} \quad \mathbf{d}_{i+2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog, pentru o curbă de gradul 3, obținem

$$\mathbf{r}_i(t) = \frac{1}{6} (\mathbf{d}_i \quad \mathbf{d}_{i+1} \quad \mathbf{d}_{i+2} \quad \mathbf{d}_{i+3}) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.5 Curbe B-spline periodice și periodice închise

De multe ori dorim să obținem curbe B-spline închise. În cazul curbelor Bézier este suficient să facem ca primul și ultimul punct de control să coincidă. Lucrurile nu funcționează la fel în cazul curbelor B-spline. Dacă, de exemplu, considerăm exemplul de curbă deschisă prezentat mai devreme și îi mai adăugăm un punct de control, egal cu primul, obținem figura din pagina următoare: poligonul de control se închide, curba – nu!

Ca să obținem o curbă închisă, trebuie să impunem condiții atât asupra punctelor de control cât și asupra nodurilor. O curbă B-spline *periodică* de gradul n și cu $N + 1$ puncte de control se obține alegând arbitrar nodurile $t_0 \leq \dots \leq t_N$ și apoi punând

$$t_{N+i} = t_{N+i-1} + (t_i - t_{i-1}),$$

pentru $i = 1, \dots, n + 1$. Un vector de noduri de acest tip se numește *vector de noduri periodic*.

O curbă *periodică închisă* de grad n și puncte de control $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_N, \mathbf{d}_{N+1} = \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_{N+2} = \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{N+n} = \mathbf{d}_{n-1}$ se obține alegând nodurile $t_0 \leq \dots \leq t_{N+1}$ arbitrar și formând apoi un vector de noduri periodic cu $N + 2n + 2$ noduri.

Exemplul 6.2. Vrem să construim o curbă închisă de gradul $n = 3$. Pornim cu 5 puncte de control, $\mathbf{d}_0(1, 2), \mathbf{d}_1(3, 7), \mathbf{d}_2(6, 6), \mathbf{d}_3(6, -2)$ și $\mathbf{d}_4(1, -1)$. Avem, astfel, $N = 4$, iar $n = 3$. Avem nevoie deci de încă trei puncte suplimentare. Vom pune $\mathbf{d}_5 = \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_6 = \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_7 = \mathbf{d}_2$. Presupunem că primele 6 noduri sunt $t_0 = 0.0, t_1 = 0.5, t_2 = 2.0, t_3 = 3.0, t_4 = 3.1, t_5 = 3.4$. Pentru a obține un vector de noduri

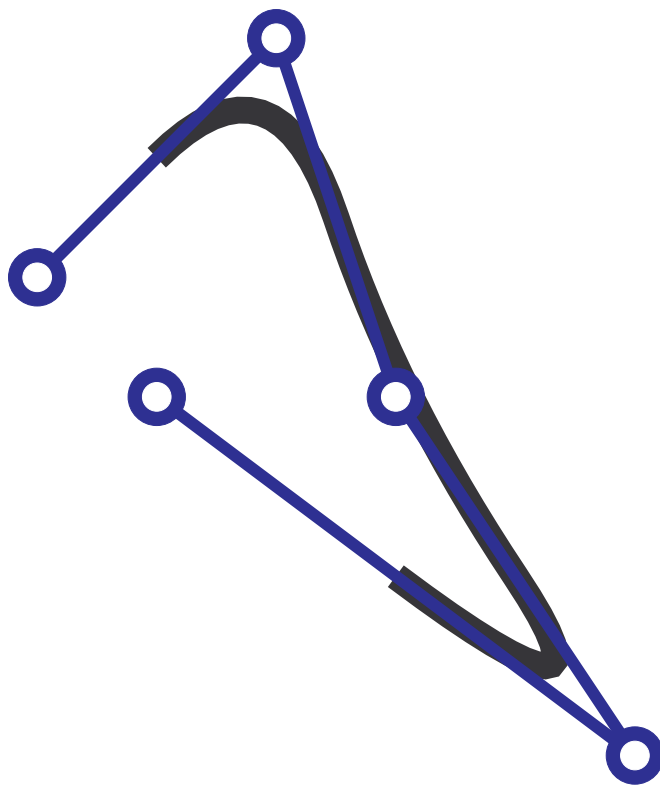


Figura 6.6: Curbă B-spline uniformă

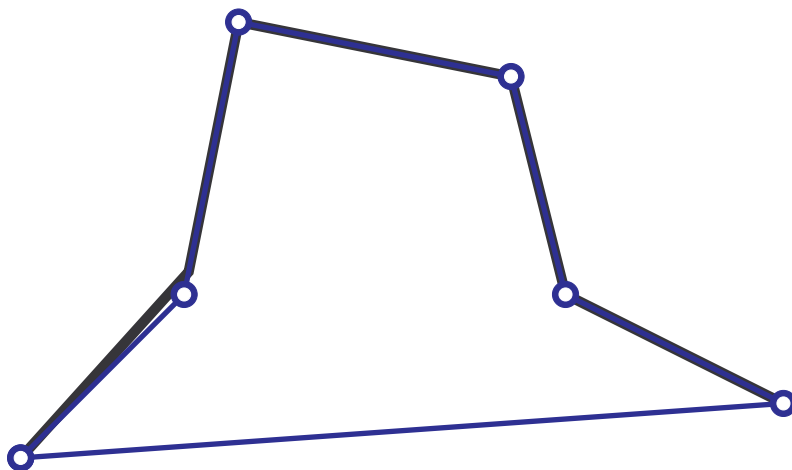


Figura 6.7: Contraexemplu de curbă închisă

periodic, deoarece curba pe care vrem să o construim are gradul 3 și are 8 puncte de control, trebuie să avem 11 noduri. Vom pune, după cum am văzut mai sus,

$$\begin{aligned}
 t_6 &= t_5 + (t_1 - t_0) = 3.4 + (0.5 - 0.0) = 3.9, \\
 t_7 &= t_6 + (t_2 - t_1) = 3.9 + (2.0 - 0.5) = 5.4, \\
 t_8 &= t_7 + (t_3 - t_2) = 5.4 + (5.0 - 2.0) = 6.4, \\
 t_9 &= t_8 + (t_4 - t_3) = 6.4 + (3.1 - 3.0) = 6.5, \\
 t_{10} &= t_9 + (t_5 - t_4) = 6.5 + (3.4 - 3.1) = 6.8, \\
 t_{11} &= t_{10} + (t_6 - t_5) = 6.8 + (5.4 - 3.9) = 8.3
 \end{aligned}$$

În pagina următoare am reprezentat o curbă B-spline închisă, împreună cu poligonul său de control.

6.6 Probleme rezolvate

Problema 6.1. Considerăm curba B-spline definită de nodurile $t_0 = 0, t_1 = 3, t_2 = 4, t_3 = 7, t_4 = 9, t_5 = 12, t_6 = 13$ și punctele de control $\mathbf{d}_0(0, 0), \mathbf{d}_1(1, 2), \mathbf{d}_2(3, 5), \mathbf{d}_3(4, 2)$. Calculați $\mathbf{r}(5)$, folosind algoritmul lui de Boor. Ce grad are curba?

Soluție. Se observă imediat că avem de-a face cu o curbă de gradul al doilea, definită, prin urmare, pe intervalul $[t_2, t_4] = [4, 9]$. Cum $5 \in [4, 9]$, rezultă că indicele

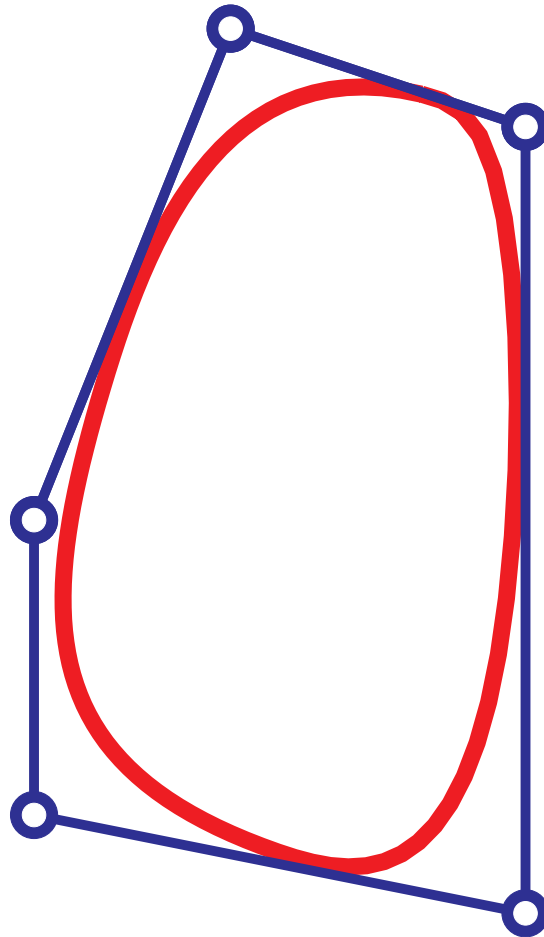


Figura 6.8: Curbă B-spline periodică închisă

r din algoritmul lui de Boor este egal cu 2. Cum $r - n = 0$, punctele de control care intră în calcul sunt $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$.

Facem, mai întâi inițializarea:

$$\mathbf{d}_0^0 = \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1^0 = \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2^0 = \mathbf{d}_2.$$

Calculăm, acum, coeficienții care intră în algoritm, care, după cum se constată ușor,

sunt în număr de trei:

$$\begin{aligned}\alpha_1^1 &= \frac{t - t_1}{t_3 - t_1} = \frac{1}{2}, \\ \alpha_2^1 &= \frac{t - t_2}{t_4 - t_2} = \frac{1}{5}, \\ \alpha_2^2 &= \frac{t - t_1}{t_3 - t_2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Aplicăm acum algoritmul lui de Boor, cu acești coeficienți:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1^1 &= (1 - \alpha_1^1) \mathbf{d}_0^0 + \alpha_1^1 \mathbf{d}_1^0 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ \mathbf{d}_2^1 &= (1 - \alpha_2^1) \mathbf{d}_1^0 + \alpha_2^1 \mathbf{d}_2^0 = \left(\frac{7}{5}, \frac{13}{5}\right), \\ \mathbf{d}_2^2 &= (1 - \alpha_2^2) \mathbf{d}_1^1 + \alpha_2^2 \mathbf{d}_2^1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{23}{15}\right) = \mathbf{r}(5).\end{aligned}$$

□

Problema 6.2. Considerăm lista de noduri $t_0 = 2, t_1 = 3, t_2 = 4, t_3 = 5, t_4 = 6, t_5 = 7, t_6 = 8, t_7 = 9$. Determinați funcțiile B-spline de gradul trei asociate acestei liste de noduri.

Soluție. Scriem, mai întâi, funcțiile B-spline de gradul zero:

$$\begin{aligned}N_0^0(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [2, 3), \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases} & N_0^1(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [3, 4), \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases} \\ N_0^2(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [4, 5), \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases} & N_0^3(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [5, 6), \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases} \\ N_0^4(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [6, 7), \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases} & N_0^5(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [7, 8), \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases} \\ N_0^6(t) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [8, 9), \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}\end{aligned}$$

Vom exprima acum, în primă instanță, funcțiile B-spline de gradul 1, 2 și 3 în funcție de funcțiile de gradul zero. Începem cu funcțiile de gradul 1.

$$\begin{aligned}
 N_1^0(t) &= \frac{t-t_0}{t_1-t_0}N_0^0(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1}N_0^1(t) = (t-2)N_0^0(t) + (4-t)N_0^1(t), \\
 N_1^1(t) &= \frac{t-t_1}{t_2-t_1}N_0^1(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2}N_0^2(t) = (t-3)N_0^1(t) + (5-t)N_0^2(t), \\
 N_1^2(t) &= \frac{t-t_2}{t_3-t_2}N_0^2(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_3}N_0^3(t) = (t-4)N_0^2(t) + (6-t)N_0^3(t), \\
 N_1^3(t) &= \frac{t-t_3}{t_4-t_3}N_0^3(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_4}N_0^4(t) = (t-5)N_0^3(t) + (7-t)N_0^4(t), \\
 N_1^4(t) &= \frac{t-t_4}{t_5-t_4}N_0^4(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_5}N_0^5(t) = (t-6)N_0^4(t) + (8-t)N_0^5(t), \\
 N_1^5(t) &= \frac{t-t_5}{t_6-t_5}N_0^5(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_6}N_0^6(t) = (t-7)N_0^5(t) + (9-t)N_0^6(t).
 \end{aligned}$$

Trecem la funcțiile de gradul al doilea.

$$\begin{aligned}
 N_2^0(t) &= \frac{t-t_0}{t_2-t_0}N_1^0(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1}N_1^1(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 2\right)N_0^0(t) + \\
 &\quad + \left(-t^2 + 7t - \frac{23}{2}\right)N_0^1(t) + \left(\frac{t^2}{2} - 5t + \frac{25}{2}\right)N_0^2(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2^1(t) &= \frac{t-t_1}{t_3-t_1}N_1^1(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2}N_1^2(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2}\right)N_0^1(t) + \\
&\quad + \left(-t^2 + 9t - \frac{39}{2}\right)N_0^2(t) + \left(\frac{t^2}{2} - 6t + 18\right)N_0^3(t), \\
N_2^2(t) &= \frac{t-t_2}{t_4-t_2}N_1^2(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3}N_1^3(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 4t + 8\right)N_0^2(t) + \\
&\quad + \left(-t^2 + 11t - \frac{59}{2}\right)N_0^3(t) + \left(\frac{t^2}{2} - 7t + \frac{49}{2}\right)N_0^4(t), \\
N_2^3(t) &= \frac{t-t_3}{t_5-t_3}N_1^3(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_4}N_1^4(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 5t + \frac{25}{2}\right)N_0^3(t) + \\
&\quad + \left(-t^2 + 13t - \frac{83}{2}\right)N_0^4(t) + \left(\frac{t^2}{2} - 8t + 32\right)N_0^5(t), \\
N_2^4(t) &= \frac{t-t_4}{t_6-t_4}N_1^4(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_5}N_1^5(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 6t + 18\right)N_0^4(t) + \\
&\quad + \left(-t^2 + 15t - \frac{111}{2}\right)N_0^5(t) + \left(\frac{t^2}{2} - 9t + \frac{81}{2}\right)N_0^6(t).
\end{aligned}$$

În fine, pentru funcțiile de gradul al treilea obținem:

$$\begin{aligned}
N_3^0(t) &= \frac{t-t_0}{t_3-t_0}N_2^0(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_1}N_2^1(t) = \left(\frac{t^3}{6} - t^2 + 2t - \frac{4}{3}\right)N_0^0(t) + \\
&\quad + \left(-\frac{t^3}{2} + 5t^2 - 16t + \frac{50}{3}\right)N_0^1(t) + \left(\frac{t^3}{2} - 7t^2 + 32t - \frac{142}{3}\right)N_0^2(t) + \\
&\quad + \left(-\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 18t + 36\right)N_0^3(t), \\
N_3^1(t) &= \frac{t-t_1}{t_4-t_1}N_2^1(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_2}N_2^2(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{3t^2}{2} + \frac{9t}{2} - \frac{9}{2}\right)N_0^1(t) + \\
&\quad + \left(-\frac{t^3}{2} + \frac{13t^2}{2} - \frac{55t}{2} + \frac{229}{6}\right)N_0^2(t) + \left(\frac{t^3}{2} - \frac{17t^2}{2} + \frac{95t}{2} - \frac{521}{6}\right)N_0^3(t) + \\
&\quad + \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{7t^2}{2} - \frac{49t}{2} + \frac{343}{6}\right)N_0^4(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3^2(t) &= \frac{t-t_2}{t_5-t_2}N_2^2(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_3}N_2^3(t) = \left(\frac{t^3}{6} - 2t^2 + 8t - \frac{32}{3}\right)N_0^2(t) + \\
&+ \left(-\frac{t^3}{2} + 8t^2 - 42t + \frac{218}{3}\right)N_0^3(t) + \left(\frac{t^3}{2} - 10t^2 + 66t - \frac{430}{3}\right)N_0^4(t) + \\
&+ \left(-\frac{t^3}{6} + 4t^2 - 32t + \frac{256}{3}\right)N_0^5(t), \\
N_3^3(t) &= \frac{t-t_3}{t_6-t_3}N_2^3(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_4}N_2^4(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{5t^2}{2} + \frac{25t}{2} - \frac{125}{6}\right)N_0^3(t) + \\
&+ \left(-\frac{t^3}{2} + \frac{19t^2}{2} - \frac{119t}{2} + \frac{739}{6}\right)N_0^4(t) + \left(\frac{t^3}{2} - \frac{23t^2}{2} + \frac{175t}{2} - \frac{1319}{6}\right)N_0^5(t) + \\
&+ \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{9t^2}{2} - \frac{81t}{2} + \frac{243}{2}\right)N_0^6(t).
\end{aligned}$$

Dacă explicităm, acum, funcțiile B-spline de gradul zero, obținem:

$$N_3^0(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t^3 - 6t^2 + 12t - 8) & \text{pentru } t \in [2, 3), \\ \frac{1}{6}(-3t^3 + 30t^2 - 96t + 100) & \text{pentru } t \in [3, 4), \\ \frac{1}{6}(3t^3 - 42t^2 + 192t - 284) & \text{pentru } t \in [4, 5), \\ \frac{1}{6}(-t^3 + 18t^2 - 108t + 216) & \text{pentru } t \in [5, 6), \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$$

$$N_3^1(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t^3 - 9t^2 + 27t - 27) & \text{pentru } t \in [3, 4), \\ \frac{1}{6}(-3t^3 + 39t^2 - 165t + 229) & \text{pentru } t \in [4, 5), \\ \frac{1}{6}(3t^3 - 51t^2 + 285t - 521) & \text{pentru } t \in [5, 6), \\ \frac{1}{6}(-t^3 + 21t^2 - 147t + 343) & \text{pentru } t \in [6, 7), \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$$

$$N_3^2(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t^3 - 12t^2 + 48t - 64) & \text{pentru } t \in [4, 5), \\ \frac{1}{6}(-3t^3 + 48t^2 - 252t + 436) & \text{pentru } t \in [5, 6), \\ \frac{1}{6}(3t^3 - 60t^2 + 396t - 860) & \text{pentru } t \in [6, 7), \\ \frac{1}{6}(-t^3 + 24t^2 - 192t + 512) & \text{pentru } t \in [7, 8), \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$$

$$N_3^3(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t^3 - 15t^2 + 75t - 125) & \text{pentru } t \in [5, 6), \\ \frac{1}{6}(-3t^3 + 57t^2 - 357t + 749) & \text{pentru } t \in [6, 7), \\ \frac{1}{6}(3t^3 - 69t^2 + 525t - 1319) & \text{pentru } t \in [7, 8), \\ \frac{1}{6}(-t^3 + 27t^2 - 243t + 729) & \text{pentru } t \in [8, 9), \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

□

CAPITOLUL 7

Proiecții

7.1 Geometrie analitică plană în coordonate omogene

Fie $P(x, y)$ un punct din plan, dat prin coordonatele sale carteziane (x, y) . Acestor coordonate li se asociază coordonatele sale omogene (X, Y, W) astfel încât $x = X/W$ și $y = Y/W$. Presupunem că $W \neq 0$. Vom nota cu $\mathbf{P}(X, Y, W)$ punctul, dat prin coordonatele sale omogene. Coordonatele omogene nu sunt unice, ele sunt definite doar până la un factor nenul. În cele ce urmează, când va fi util, îl vom privi pe \mathbf{P} ca fiind un vector 3D. Din nou, este un vector *omogen*, de componente (X, Y, W) , care sunt unice până la un factor nenul. Dacă adăugăm punctelor obișnuite ale planului punctele care au coordonatele omogene $(X, Y, 0)$ (punctele “de la infinit”) obținem *planul proiectiv*.

Dacă punctul $P(x, y)$ aparține dreptei de ecuație

$$ax + by + c = 0,$$

atunci ecuațiile sale verifică ecuația

$$aX + bY + cW = 0. \quad (7.1.1)$$

Această ecuație se numește *ecuația omogenă a dreptei*.

Dreapta noastră unic determinată de coeficienții a, b, c . Reciproca este adevărată în sensul că fiecărei drepte i se pot asocia coeficienții săi, care sunt unici până la un factor numeric nenul. Vom considera că (a, b, c) sunt coordonatele dreptei și introducem vectorul (omogen)

$$\ell = (a, b, c),$$

pe care îl vom numi *vectorul dreptei*.

Cu noile notații, ecuația dreptei (7.1.1) se poate scrie, cu ajutorul produsului scalar din \mathbb{R}^3 , sub forma:

$$\ell \cdot \mathbf{P} = aX + bY + cW = 0. \quad (7.1.2)$$

Relația (7.1.2) se poate utiliza pentru a rezolva două probleme importante care leagă punctele și dreptele din plan:

- (i) determinarea ecuației dreptei care trece prin două puncte date;
- (ii) determinarea punctului de intersecție a două drepte date.

Determinarea ecuației dreptei. Considerăm două puncte, date prin coordonatele lor omogene, \mathbf{P}_1 și \mathbf{P}_2 . Notăm cu $\ell(a, b, c)$ vectorul dreptei care trece prin ele. Atunci avem relațiile

$$\ell \cdot \mathbf{P}_1 = 0 \quad \text{și} \quad \ell \cdot \mathbf{P}_2 = 0.$$

Din punct de vedere geometric, aceste ecuații înseamnă că vectorul dreptei este perpendicular pe ambele puncte (privite ca vectori, desigur). Dar noi știm că asta înseamnă că putem pune

$$\ell = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2.$$

Ca exemplu, vom determina ecuația dreptei care trece prin punctele $(1, 1)$ și $(2, 3)$. Avem, astfel, $\mathbf{P}_1(1, 1, 1)$ și $\mathbf{P}_2(2, 3, 1)$. Atunci vectorul dreptei va fi

$$\ell = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1),$$

adică ecuația dreptei se poate scrie:

$$-2x + y + 1 = 0.$$

Determinarea punctului de intersecție a două drepte. Presupunem că se dau două drepte (distincte!), prin vectorii lor $\ell_1(a_1, b_1, c_1)$ și $\ell_2(a_2, b_2, c_2)$. Punctul lor de intersecție verifică sistemul de ecuații

$$\ell_1 \cdot \mathbf{P} = 0 \quad \text{și} \quad \ell_2 \cdot \mathbf{P} = 0.$$

Din aceleași motive ca mai sus, soluția evidentă este

$$\mathbf{P} = \ell_1 \times \ell_2.$$

Considerăm, de exemplu, dreptele $3x + 2y - 5 = 0$ și $4x + 7y - 1 = 0$, adică

$$\ell_1 = (3, 2, -5), \quad \ell_2 = (4, 7, -1).$$

Atunci

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = (33, -17, 13),$$

adică obținem punctul de coordonate carteziane $(33/13, -17/13)$. Considerăm, ca al doilea exemplu, dreptele (paralele!) $3x + 2y - 5 = 0$ și $3x + 2y = 0$, adică

$$\ell_1 = (3, 2, -5), \quad \ell_2 = (3, 2, 0).$$

Atunci punctul de “intersecție” este dat de

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (10, 15, 0)$$

sau $\mathbf{P}(2, 3, 0)$. Faptul că punctul de intersecție omogen are zero ca ultimă coordonată, înseamnă că este punctul de la infinit corespunzător direcției celor două drepte paralele.

7.2 Geometrie analitică în spațiu în coordonate omogene

Lucrurile în spațiu stau analog cu ceea ce se întâmplă în plan. Unui punct $P(x, y, z)$ i se asociază $\mathbf{P}(X, Y, Z, W)$, cu $x = X/W, y = Y/W, z = Z/W$. și aici, dacă adăugăm punctele ce au ultima coordonată omogenă zero (punctele de la infinit),

obținem *spațiul proiectiv*. Două drepte paralele se intersectează într-un punct de la infinit, iar două plane paralele se intersectează după o dreaptă, formată din puncte de la infinit. Studiul dreptelor și planelor paralele se poate face și în coordonate omogene, dar nu ne interesează aici. Un plan de ecuație

$$ax + by + cz + d = 0$$

se poate scrie în coordonate omogene sub forma

$$aX + bY + cZ + dW = 0. \quad (7.2.1)$$

Dacă introducem vectorul omogen 4-dimensional

$$\mathbf{n} = (a, b, c, d)$$

și îl numim *vectorul planului*, atunci ecuația (7.2.1) se poate rescrie, folosind produsul scalar euclidian 4-dimensional, sub forma

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = aX + bY + cZ + dW = 0. \quad (7.2.2)$$

Cu ajutorul relației (7.2.1) putem rezolva două probleme importante:

- (a) determinarea planului care trece prin trei puncte;
- (b) determinarea punctului de intersecție a trei plane.

Determinarea ecuației planului care trece prin trei puncte.

Considerăm trei puncte, date prin coordonatele lor omogene, $\mathbf{P}_1(X_1, Y_1, Z_1, W_1)$, $\mathbf{P}_2(X_2, Y_2, Z_2, W_2)$ și $\mathbf{P}_3(X_3, Y_3, Z_3, W_3)$ și fie \mathbf{n} vectorul omogen al planului care trece prin cele trei puncte. Atunci avem

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1 = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 = 0, \quad \text{și} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_3 = 0,$$

adică \mathbf{n} este ortogonal la cele trei puncte. Aceasta înseamnă că trebuie să avem

$$\mathbf{n} = \text{orth}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & W_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & W_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & W_3 \end{vmatrix}. \quad (7.2.3)$$

Determinarea punctului de intersecție a trei plane.

De data aceasta se consideră trei plane, date prin vectorii lor, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ și o trebuie să determinăm punctul lor de intersecție, \mathbf{P} . Întrucât punctul aparține tuturor celor trei plane, el trebuie să verifice egalitățile

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{P} = 0, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{P} = 0, \text{ și } \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{P} = 0,$$

adică punctul trebuie să fie ortogonal celor trei plane, deci

$$\mathbf{P} = \text{orth}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}. \quad (7.2.4)$$

7.3 Proiecții

7.3.1 Proiecția pe o dreaptă

Fie \mathbf{V} un punct din plan și ℓ o dreaptă care nu trece prin \mathbf{V} . Se numește *proiecție centrală* sau *proiecție perspectivă* vin \mathbf{V} pe ℓ aplicația care asociază fiecărui punct \mathbf{P} din plan, diferit de \mathbf{V} , punctul \mathbf{P}' obținut intersectând dreapta \mathbf{VP} cu dreapta ℓ . Punctul \mathbf{V} se numește *centru de perspectivă* sau *punct de vedere*, iar dreapta ℓ se numește *linie de vedere* sau *linie de proiecție*. Liniile prin \mathbf{V} se numesc *proiectori*. Dacă punctul de vedere $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{0}$ este situat la infinit, atunci proiectorii sunt drepte paralele de vector director (v_1, v_2) . În acest caz, proiecția se numește *paralelă*.

Teorema 7.1. *Matricea proiecției perspective dintr-un punct \mathbf{V} (exprimat în coordonate omogene) pe o dreaptă de vector ℓ este dată de*

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{V}\ell^t - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2 \ a_3) - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3 = \\ &= \begin{pmatrix} -v_2a_2 - v_3a_3 & v_1a_2 & v_1a_3 \\ v_2a_1 & -v_1a_1 - v_3a_3 & v_2a_3 \\ v_3a_1 & v_3a_2 & -v_1a_1 - v_2a_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Observație. Pentru proiecția paralelă, $v_3 = 0$ și atunci formula din teoremă se reduce la

$$M = \begin{pmatrix} -v_2a_2 & v_1a_2 & v_1a_3 \\ v_2a_1 & -v_1a_1 & v_2a_3 \\ 0 & 0 & -v_1a_1 - v_2a_2 \end{pmatrix} \quad (7.3.2)$$

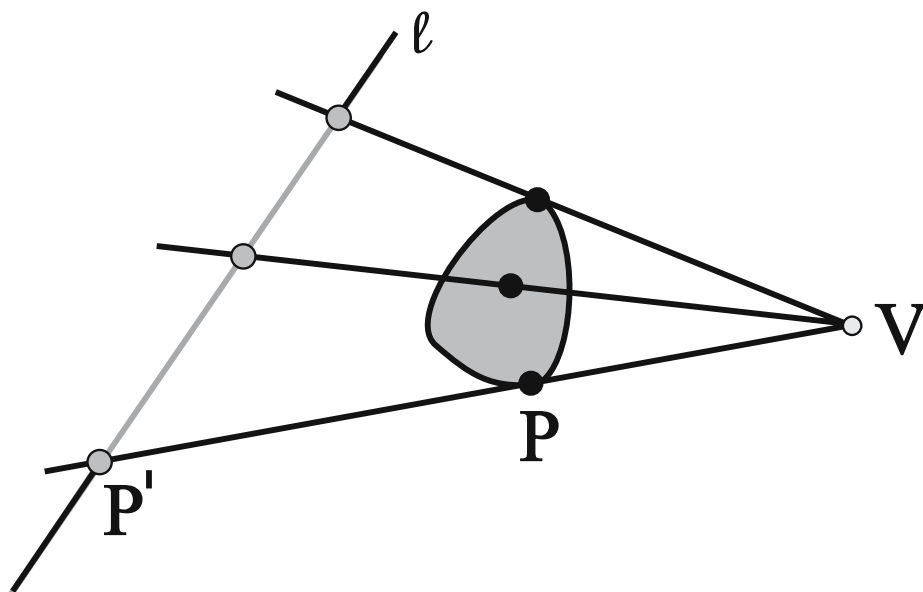


Figura 7.1: Proiecția perspectivă în plan

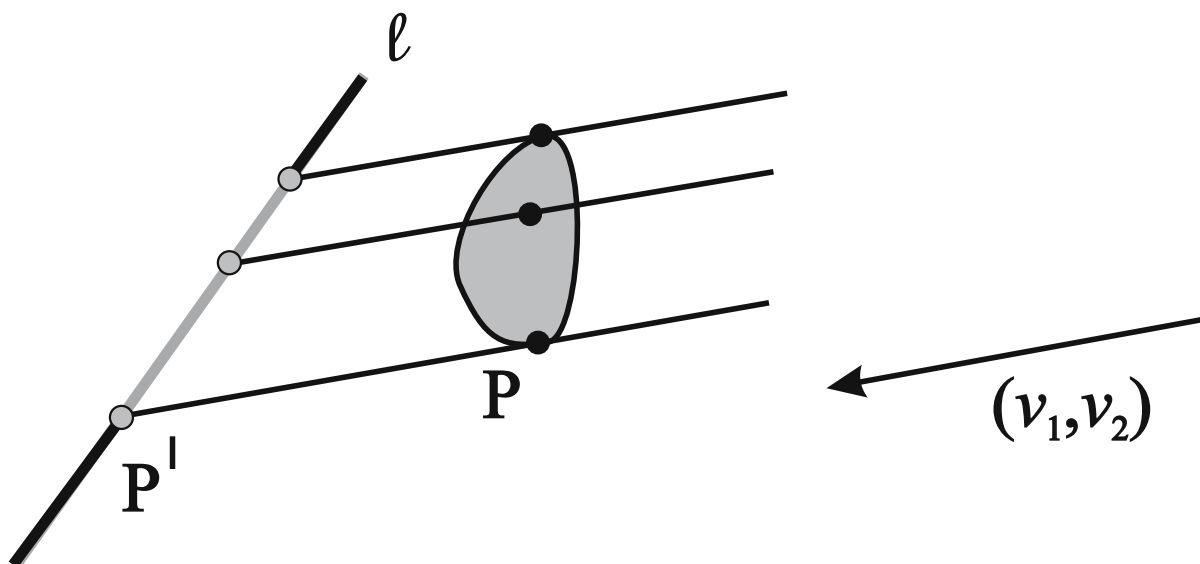


Figura 7.2: Proiecția paralelă în plan

Demonstrația teoremei Imaginea \mathbf{P}' a punctului \mathbf{P} este obținută intersectând dreapta de proiecție ℓ cu dreapta care trece prin \mathbf{V} și \mathbf{P} . Această dreaptă are vectorul omogen $\mathbf{V} \times \mathbf{P}$ și, de aceea, intersectează ℓ în punctul de coordonate omogene $\ell \times (\mathbf{V} \times \mathbf{P})$.

După cum se știe din algebra vectorială, dacă $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sunt trei vectori din \mathbb{R}^3 , atunci

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C},$$

de aceea,

$$\mathbf{P}' = \ell \times (\mathbf{V} \times \mathbf{P}) = (\mathbf{P} \cdot \ell)\mathbf{V} - (\ell \cdot \mathbf{V})\mathbf{P}.$$

Dacă înlocuim vectorii cu matrici coloană și produsul scalar cu înmulțirea matricilor, obținem:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{V}\ell^t\mathbf{P} - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3\mathbf{P} = (\mathbf{V}\ell^t - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3)\mathbf{P} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}.$$

□

Exemplul 7.1. Vrem să proiectăm triunghiul de vârfuri $A(2, 3)$, $B(4, 4)$ și $C(3, -1)$ pe dreapta $5x + y - 4 = 0$, din punctul de coordonate $(10, 2)$. Avem $\mathbf{V}(10, 2, 1)$, $\ell(5, 1, -4)$, iar $\ell \cdot \mathbf{V} = 48$. Astfel, matricea de transformare este

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (5 \ 1 \ -4) - 48 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -40 \\ 10 & -46 & -8 \\ 5 & 1 & -52 \end{pmatrix}.$$

Vom avea, prin urmare,

$$\begin{aligned} (A' \ B' \ C') &= \begin{pmatrix} 2 & 10 & -40 \\ 10 & -46 & -8 \\ 5 & 1 & -52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 8 & -44 \\ -126 & -152 & 68 \\ -39 & -28 & -38 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.3.2 Proiecția pe un plan

Proiecția pe un plan este analoagă proiecției pe o dreaptă. Astfel, se alege un punct \mathbf{V} , *centrul de proiecție sau de perspectivă sau punctul de vedere*, precum și un plan de

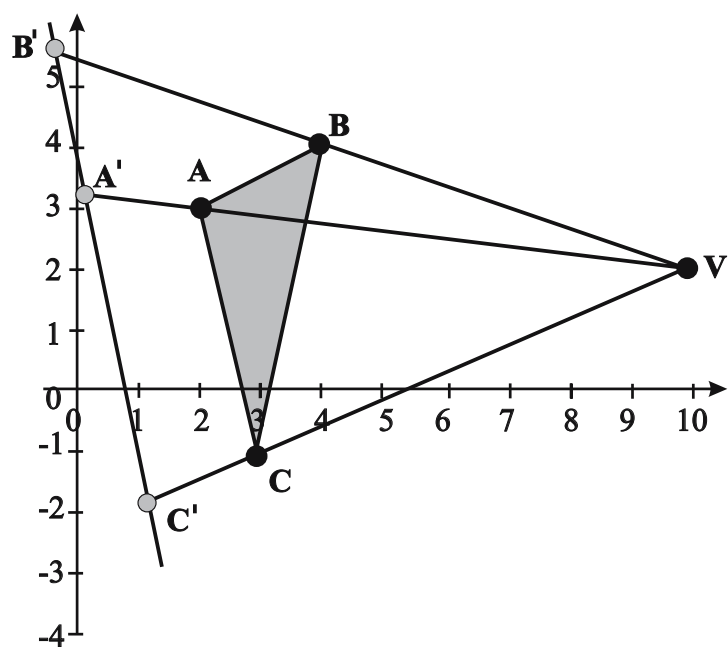


Figura 7.3: Proiecția perspectivă în plan

vector omogen \mathbf{n} , care nu trece prin \mathbf{V} , *planul de vedere sau de proiecție*. Proiecția perspectivă a unui punct \mathbf{P} , diferit de centrul de proiecție, pe planul de proiecție este punctul \mathbf{P}' în care acest plan se intersectează cu dreapta \mathbf{VP} . La fel ca în cazul plan, se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 7.2. *Matricea proiecției perspective dintr-un punct \mathbf{V} (exprimat în coordonate omogene) pe un plan de vector \mathbf{n} este dată de*

$$M = \mathbf{V}\mathbf{n}^t - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})I_4 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \cdot (n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4) - (\ell \cdot \mathbf{V})I_4. \quad (7.3.3)$$

CAPITOLUL 8

Curbe Bézier raționale

Definiția 8.1. O curbă Bézier rațională de gradul n , cu punctele de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ și ponderi scalare w_i este definită prin

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{b}_i B_n^i(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_n^i(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (8.0.1)$$

unde se consideră că dacă $w_i = 0$, atunci $w_i \mathbf{b}_i$ se înlocuiește cu \mathbf{b}_i . Se presupune că nu toate ponderile sunt nule. Dacă $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^2$, curba este plană, dacă $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$, curba este în spațiu.

Fie, acum, $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Definim *punctul de control omogen* $\hat{\mathbf{b}}_i$, punând

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \begin{cases} (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i), & \text{dacă } w_i \neq 0 \\ (x_i, y_i, z_i, 0) & \text{dacă } w_i = 0 \end{cases}. \quad (8.0.2)$$

În coordonate omogene, curba Bézier rațională se poate scrie

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{b}}_i B_n^i(t).$$

Dacă $w_0 = \dots = w_n$, atunci curba Bézier rațională devine curbă Bézier integrală (adică polinomială).

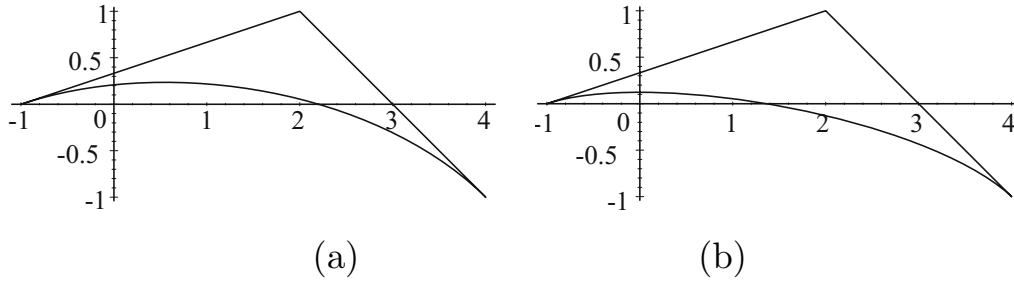


Figura 8.1: Curbe pătraticice raționale

Exemplul 8.1. Considerăm curba rațională pătratică, cu punctele de control $\mathbf{b}_0(-1, 0)$, $\mathbf{b}_1(2, 1)$, $\mathbf{b}_2(4, -1)$ ponderile 1,1,2, respectiv 1,0.6,2. Obținem imaginile din pagina de mai jos.

Sfertul de cerc unitate din primul cadran se poate reprezenta ca o curbă pătratică rațională de puncte de control $\mathbf{b}_0(1, 0)$, $\mathbf{b}_1(1, 1)$ și $\mathbf{b}(0, 1)$ și ponderile $w_0 = w_1 = 1$ și $w_2 = 2$. Atunci

$$\begin{aligned}
 (1-t)^2 w_0 \mathbf{b}_0 + 2t(1-t) w_1 \mathbf{b}_1 + t^2 w_2 \mathbf{b}_2 &= \\
 = (1-t)^2 (1, 0) + 2t(1-t) (1, 1) &= \\
 = (1-t^2, 2t), & \\
 (1-t)^2 w_0 + 2t(1-t) w_1 + t^2 w_2 &= \\
 = (1-t)^2 + 2t(1-t) + 2t^2 &= 1+t^2.
 \end{aligned}$$

Astfel, se obține

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right),$$

care este o parametrizare cunoscută a cercului unitate, cu centrul în origine. O curbă Bézier rațională pătratică are forma

$$\mathbf{r}(t) = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_2^0(t) + w_1 \mathbf{b}_1 B_2^1(t) + w_2 \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{w_0 B_2^0(t) + w_1 B_2^1(t) + w_2 B_2^2(t)}$$

Se poate arăta că această curbă este întotdeauna o conică și anume:

elipsă dacă $w_1^2 - w_0 w_2 < 0$;

parabolă dacă $w_1^2 - w_0 w_2 = 0$;

hiperbolă dacă $w_1^2 - w_0w_2 > 0$.

Curbele Bézier raționale moștenesc o parte din proprietățile curbelor Bézier integrale:

- proprietatea învelitorii convexe;
- invarianța relativ la transformări afine;
- proprietatea de diminuare a variației;
- interpolarea capetelor;
- tangentele la capete.

Ele mai au în plus o proprietate esențială:

- invarianța față de proiecții.

8.1 Algoritmul lui de Casteljau rațional

Se consideră curba Bézier rațională de gradul n cu punctele de control $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ și ponderile w_0, \dots, w_n .

- Se inițializează $w_i^0 = w_i$ și $\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i$, pentru $i = 1, \dots, n$.
- Pentru $j = 1, \dots, n$ și $i = 0, \dots, n - j$, se pune:

$$\begin{aligned} - w_i^j &= (1 - t)w_i^{j-1} + tw_{i+1}^{j-1}, \\ - \mathbf{b}_i^j &= (1 - t)\frac{w_i^{j-1}}{w_i^j}\mathbf{b}_i^{j-1} + t\frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j}\mathbf{b}_{i+1}^{j-1}. \end{aligned}$$

În final, ca și în cazul algoritmului de Casteljau polinomial, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}_0^n$.

8.2 Derivarea curbelor Bézier raționale

Vom deduce o formulă de recurență pentru derivatele unei curbe Bézier raționale. Începem prin a deduce o astfel de formulă pentru o funcție rațională oarecare.

Fie

$$F(t) = \frac{f(t)}{g(t)},$$

unde f și g sunt funcții netede, g fiind o funcție scalară (cu valori reale), în timp ce f poate să fie și o funcție vectorială (cu valori în \mathbb{R}^k), cu $k > 1$. Avem, înainte de toate, relația

$$f(t) = g(t) \cdot F(t).$$

Derivând, folosind regula lui Leibniz, obținem

$$f'(t) = g(t) \cdot F'(t) + g'(t) \cdot F(t). \quad (8.2.1)$$

Din formula (8.2.1), rezultă

$$F'(t) = \frac{f'(t) - g'(t)F(t)}{g(t)}.$$

Dacă mai derivăm încă o dată relația (8.2.1), obținem

$$f''(t) = g(t)F''(t) + 2g'(t)F'(t) + g''(t)F(t),$$

de unde

$$F''(t) = \frac{f''(t) - 2g'(t)F'(t) - g''(t)F(t)}{g(t)}.$$

Se poate demonstra cu ușurință, prin inducție, că

$$f^{(k)}(t) = g(t)F^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^k C_k^i g^{(i)}(t)F^{(k-i)}(t),$$

așadar

$$F^{(k)}(t) = \frac{f^{(k)}(t) - \sum_{i=1}^k C_k^i g^{(i)}(t)F^{(k-i)}(t)}{g(t)}. \quad (8.2.2)$$

Am găsit, astfel, o formulă de recurență care ne dă derivata de ordinul k în funcție de derivata de ordinul k a lui f , de derivatele până la ordinul k ale lui g și de derivatele până la ordinul $k-1$ (inclusiv) ale lui F însăși. Vom aplica acum formula (8.2.2) la cazul particular unei curbe Bézier raționale de gradul n , adică vom pune

$$F(t) \equiv \mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_n^i(t)w_i \mathbf{b}_i}{\sum_{i=0}^n B_n^i(t)w_i}$$

Dacă alegem

$$f(t) = \sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i \mathbf{b}_i$$

și

$$g(t) = \sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i,$$

obținem, pentru primele două derivate,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \frac{(\sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i \mathbf{b}_i)' - (\sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i)' \mathbf{r}(t)}{\sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n (B_n^i(t))' w_i \mathbf{b}_i - \sum_{i=0}^n (B_n^i(t))' w_i \mathbf{r}(t)}{\sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(t) &= \frac{1}{\sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i} \left[\left(\sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i \mathbf{b}_i \right)'' - 2 \left(\sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i \right)' \mathbf{r}'(t) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{i=0}^n B_n^i(t) w_i \right)'' \mathbf{r}(t) \right]. \end{aligned}$$

Rareori avem nevoie de derivate de ordin mai mare de doi și, de foarte multe ori, avem nevoie de ele doar în capetele intervalului de definiție, de aceea vom indica modul în care se calculează aceste valori.

Pentru a calcula valorile $\mathbf{r}'(0)$, $\mathbf{r}'(1)$, $\mathbf{r}''(0)$ și $\mathbf{r}''(1)$, avem nevoie, înainte de toate, de valorile funcțiilor f și g în 0 și 1.

Remarcăm, imediat, că f este o curbă Bézier de grad n , cu punctele de control $w_i \mathbf{b}_i$, cu $i = 0, \dots, n$, în timp ce g este, de asemenea, o curbă Bézier de grad n , cu valori scalare, cu punctele de control w_i , $i = 0, \dots, n$.

Se știe că derivata unei curbe Bézier de grad n , cu punctele de control $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, atunci derivata sa de ordinul întâi este tot o curbă Bézier, de grad $n-1$, cu punctele de control $n(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0), \dots, n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1})$.

Derivata de ordinul al doilea, pe de altă parte, este o curbă Bézier de grad $n-2$, care, fiind derivata derivatei de ordinul întâi, are punctele de control $n(n-1)(\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_0), \dots, n(n-1)(\mathbf{a}_n - 2\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_{n-2})$.

Știm, de asemenea, că orice curbă Bézier interpolează între capetele sale. Așadar, avem

$$\begin{aligned}f'(0) &= n(w_1 \mathbf{b}_1 - w_0 \mathbf{b}_0), \\f'(1) &= n(w_n \mathbf{b}_n - w_{n-1} \mathbf{b}_{n-1}), \\g'(0) &= n(w_1 - w_0), \\g'(1) &= n(w_n - w_{n-1})\end{aligned}$$

în timp ce pentru derivatele de ordinul al doilea obținem

$$\begin{aligned}f''(0) &= n(n-1)(w_2 \mathbf{b}_2 - 2w_1 \mathbf{b}_1 + w_0 \mathbf{b}_0), \\f''(1) &= n(n-1)(w_n \mathbf{b}_n - 2w_{n-1} \mathbf{b}_{n-1} + w_{n-2} \mathbf{b}_{n-2}), \\g''(0) &= n(n-1)(w_2 - 2w_1 + w_0), \\g''(1) &= n(n-1)(w_n - 2w_{n-1} + w_{n-2}).\end{aligned}$$

Avem acum tot ce ne trebuie pentru a calcula valorile primelor două derivate ale lui \mathbf{r} în capetele intervalului de definiție.

Avem:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(0) &= \frac{f'(0) - g'(0)\mathbf{r}(0)}{g(0)} = \frac{n(w_1 \mathbf{b}_1 - w_0 \mathbf{b}_0) - n(w_1 - w_0)\mathbf{b}_0}{w_0} = \\&= \frac{n}{w_0} [w_1 \mathbf{b}_1 - w_0 \mathbf{b}_0 - w_1 \mathbf{b}_0 + w_0 \mathbf{b}_0] = \frac{nw_1}{w_0} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \\ \mathbf{r}'(1) &= \frac{f'(1) - g'(1)\mathbf{r}(1)}{g(1)} = \frac{n(w_n \mathbf{b}_n - w_{n-1} \mathbf{b}_{n-1}) - n(w_n - w_{n-1})\mathbf{b}_n}{w_n} = \\&= \frac{n}{w_n} [w_n \mathbf{b}_n - w_{n-1} \mathbf{b}_{n-1} - w_n \mathbf{b}_n + w_{n-1} \mathbf{b}_n] = \frac{nw_{n-1}}{w_n} (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}),\end{aligned}$$

Cât despre derivatele de ordinul al doilea, avem

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''(0) &= \frac{f''(0) - 2g'(0)\mathbf{r}'(0) - g''(0)\mathbf{r}(0)}{w_0} = \\&= \frac{1}{w_0} [n(n-1)(w_2 \mathbf{b}_2 - 2w_1 \mathbf{b}_1 + w_0 \mathbf{b}_0) - \\&\quad - 2n(w_1 - w_0) \cdot \frac{nw_1}{w_0} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) - n(n-1)(w_2 - 2w_1 + w_0)\mathbf{b}_0]\end{aligned}$$

sau

$$\mathbf{r}''(0) = n(n-1) \frac{w_2}{w_0} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) + n \frac{2w_1 w_0 + (n-1)w_0 w_2 - 2nw_1^2}{w_0^2} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0).$$

Analog se obține

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(1) = & -n(n-1) \frac{w_{n-2}}{w_n} (\mathbf{b}_{n-1} - \mathbf{b}_{n-2}) + \\ & + n \frac{-2w_{n-1}w_n - (n-1)w_nw_{n-2} + 2nw_{n-1}^2}{w_n^2} (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}). \end{aligned}$$

În cazul particular al cubicelor Bézier raționale, obținem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(0) &= \frac{3w_1}{w_0} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \quad \mathbf{r}'(1) = \frac{3w_2}{w_3} (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2), \\ \mathbf{r}''(0) &= \frac{6w_2}{w_0} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) + 3 \frac{2w_0w_1 + 2w_0w_2 - 6w_1^2}{w_0^2} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) = \\ &= \frac{6w_2}{w_0} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) + \left(\frac{6w_1}{w_0} + \frac{6w_2}{w_0} - \frac{18w_1^2}{w_0^2} \right) (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \\ \mathbf{r}''(1) &= -\frac{6w_1}{w_3} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) + 3 \frac{6w_2^2 - 2w_1w_3 - 2w_2w_3}{w_3^2} (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) = \\ &= -\frac{6w_1}{w_3} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) + \left(\frac{18w_2^2}{w_3^2} - \frac{6w_1}{w_3} - \frac{6w_2}{w_3} \right) (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

8.3 O altă abordare a derivatelor

Considerăm reprezentarea omogenă a lui \mathbf{r} :

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = (w(t)\mathbf{r}(t), w(t)) = \sum_{i=0}^n B_n^i(t) \hat{\mathbf{b}}_i = \sum_{i=0}^n B_n^i(t) (w_i \mathbf{b}_i, w_i).$$

$\hat{\mathbf{r}}$ este o curbă Bézier în \mathbb{R}^{k+1} dacă \mathbf{r} este o curbă Bézier în \mathbb{R}^k .

Pe noi ne interesează derivatele lui \mathbf{r} în 0 și 1. Le calculăm, mai întâi, pe cele ale lui $\hat{\mathbf{r}}$. Avem

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}(0) &= \hat{\mathbf{b}}_0, \quad \hat{\mathbf{r}}(1) = \hat{\mathbf{b}}_n, \\ \hat{\mathbf{r}}'(0) &= n(\hat{\mathbf{b}}_1 - \hat{\mathbf{b}}_0), \quad \hat{\mathbf{r}}'(1) = n(\hat{\mathbf{b}}_n - \hat{\mathbf{b}}_{n-1}), \\ \hat{\mathbf{r}}''(0) &= n(n-1)(\hat{\mathbf{b}}_2 - 2\hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_0), \quad \hat{\mathbf{r}}''(1) = n(n-1)(\hat{\mathbf{b}}_n - 2\hat{\mathbf{b}}_{n-1} + \hat{\mathbf{b}}_{n-2}). \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = (w(t)\mathbf{r}(t), w(t)),$$

deci

$$\hat{\mathbf{r}}'(t) = (w'(t)\mathbf{r}(t) + w(t)\mathbf{r}'(t), w'(t)), \quad (8.3.1)$$

de unde

$$(w(t)\mathbf{r}'(t), w'(t)) = \hat{\mathbf{r}}'(t) - (w'(t)\mathbf{r}(t), 0).$$

Punem, în ultima relație, $t = 0$ și găsim

$$\begin{aligned} (w_0\mathbf{r}'(0), w'(0)) &= \hat{\mathbf{r}}'(0) - (w'(0)\mathbf{b}_0, 0) = n(\hat{\mathbf{b}}_1 - \hat{\mathbf{b}}_0) - (n(w_1 - w_0), 0) = \\ &= n(w_1\mathbf{b}_1 - w_0\mathbf{b}_0, w_1 - w_0) - n((w_1 - w_0)\mathbf{b}_0, 0) = \\ &= (nw_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), n(w_1 - w_0)). \end{aligned}$$

Identificând prima componentă din primul membru cu cea din ultimul membru, obținem relația căutată,

$$\mathbf{r}'(0) = \frac{nw_1}{w_0}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0).$$

În exact același mod, se obține

$$\mathbf{r}'(1) = \frac{nw_{n-1}}{w_n}(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}).$$

Ne ocupăm acum de derivata de ordinul al doilea. În acest scop, derivăm încă o dată relația (8.3.1) și obținem

$$\hat{\mathbf{r}}''(t) = (w''(t)\mathbf{r}(t) + 2w'(t)\mathbf{r}'(t) + w(t)\mathbf{r}''(t), w''(t)) \quad (8.3.2)$$

Din (8.3.2) deducem

$$(w(t)\mathbf{r}''(t), w''(t)) = \hat{\mathbf{r}}''(t) - (w''(t)\mathbf{r}(t) + 2w'(t)\mathbf{r}'(t), 0).$$

Evaluăm această relație în 0 și obținem

$$(w_0\mathbf{r}''(0), w''(0)) = \hat{\mathbf{r}}''(0) - (w''(0)\mathbf{r}(0) + 2w'(0)\mathbf{r}'(0), 0).$$

Dar avem:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}''(0) &= n(n-1)(\hat{\mathbf{b}}_2 - 2\hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_0), \\ w''(0) &= n(n-1)(w_2 - 2w_1 + w_0), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{b}_0, \\ w'(0) &= n(w_1 - w_0), \quad \mathbf{r}'(0) = \frac{nw_1}{w_0}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0). \end{aligned}$$

Identificând, ca și mai sus, primele componente, regăsim formula obținută mai devreme.

8.4 Ridicarea gradului unei curbe Bézier raționale

Considerăm o curbă Bézier rațională de gradul n , cu punctele de control $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ și ponderile w_0, \dots, w_n . Reprezentăm curba sub forma omogenă

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=0}^n B_n^i(t) \hat{\mathbf{b}}_i.$$

Aceasta este o curbă Bézier polinomială în \mathbb{R}^{k+1} . Aplicăm algoritmul de ridicare a gradului pentru această curbă. Punctele de control de ordin $n+1$ sunt, după cum se știe, date de:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{c}}_0 &= \hat{\mathbf{b}}_0, \quad \hat{\mathbf{c}}_{n+1} = \hat{\mathbf{b}}_n, \\ \hat{\mathbf{c}}_i &= \frac{n+1-i}{n+1} \hat{\mathbf{b}}_i + \frac{i}{n+1} \hat{\mathbf{b}}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dacă luăm primele k componente ale lui $\hat{\mathbf{c}}_i$ și ultima separat, obținem algoritmul de ridicare a gradului separat pentru punctele de control și ponderi, cu alte cuvinte, algoritmul propriu-zis de ridicare a gradului pentru curbe Bézier raționale:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_i = \frac{iw_{i-1}\mathbf{b}_{i-1} + (n+1-i)w_i\mathbf{b}_i}{iw_{i-1} + (n+1-i)w_i}, \\ \bar{w}_i = \frac{iw_{i-1} + (n+1-i)w_i}{n+1}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \mathbf{b}_0, \quad \bar{w}_0 = w_0, \\ \mathbf{c}_{n+1} &= \mathbf{b}_n, \quad \bar{w}_{n+1} = w_n. \end{aligned}$$

8.5 Subdivizarea unei Curbe Bézier raționale

Subdivizarea unei curbe Bézier raționale se face exact ca și cea a unei curbe Bézier polinomiale, diferența fiind că, de data aceasta, se utilizează algoritmul lui de Casteljau rațional în locul algoritmului lui de Casteljau polinomial.

Astfel, să presupunem că alegem o curbă Bézier de gradul n , cu punctele de control $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ și ponderile w_0, \dots, w_n . Alegem un punct t_0 din intervalul $[0, 1]$. Atunci curba din stânga va avea punctele de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1(t_0), \dots, \mathbf{b}_0^n(t_0) \equiv \mathbf{r}(t_0)$ și ponderile $w_0, w_0^1(t_0), \dots, w_0^n(t_0)$, în timp ce curba din dreapta va avea punctele de control $\mathbf{b}_0^n(t_0) \equiv \mathbf{r}(t_0), \mathbf{b}_1^{n-1}(t_0), \dots, \mathbf{b}_{n-1}^1(t_0), \mathbf{b}_n$ și ponderile $w_0^n(t_0), w_1^{n-1}(t_0), \dots, w_{n-1}^1(t_0), w_n$.

Exemplul 8.2. Considerăm curba Bézier cubică rațională cu punctele de control $\mathbf{b}_0(1, 1)$, $\mathbf{b}_1(2, 7)$, $\mathbf{b}_2(8, 6)$ și $\mathbf{b}_3(12, 1)$ și cu ponderile $w_0 = 1$, $w_1 = w_2 = 2$ și $w_3 = 1$. Aplicăm mai întâi algoritmul lui de Casteljau ponderilor:

$$\begin{aligned} w_0^0 &= w_0 = 1, w_1^0 = w_1 = 2, w_2^0 = w_2 = 2, w_3^0 = w_3 = 1 \\ w_0^1 &= \frac{3}{4}w_0^0 + \frac{1}{4}w_1^0 = \frac{5}{4}, \quad w_1^1 = \frac{3}{4}w_1^0 + \frac{1}{4}w_2^0 = 2, \\ w_2^1 &= \frac{3}{4}w_2^0 + \frac{1}{4}w_3^0 = \frac{7}{4}, \\ w_0^2 &= \frac{3}{4}w_0^1 + \frac{1}{4}w_1^1 = \frac{23}{16}, \\ w_1^2 &= \frac{3}{4}w_1^1 + \frac{1}{4}w_2^1 = \frac{31}{16}, \quad w_2^2 = \frac{3}{4}w_2^1 + \frac{1}{4}w_3^1 = \frac{25}{16}. \end{aligned}$$

Putem aplica acum algoritmul lui de Casteljau pentru puncte. Inițializăm, ca și în cazul ponderilor: $\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i$, pentru $i = 0, \dots, 3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^1 &= \frac{3}{4} \frac{w_0^0}{w_1^0} \mathbf{b}_0^0 + \frac{1}{4} \frac{w_1^0}{w_1^0} \mathbf{b}_1^0 = \left(\frac{7}{5}, \frac{17}{5} \right), \\ \mathbf{b}_1^1 &= \frac{3}{4} \frac{w_1^0}{w_1^1} \mathbf{b}_1^0 + \frac{1}{4} \frac{w_2^0}{w_1^1} \mathbf{b}_2^0 = \left(\frac{7}{2}, \frac{27}{4} \right), \\ \mathbf{b}_2^1 &= \frac{3}{4} \frac{w_2^0}{w_2^1} \mathbf{b}_2^0 + \frac{1}{4} \frac{w_3^0}{w_2^1} \mathbf{b}_3^0 = \left(\frac{60}{7}, \frac{37}{7} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^2 &= \frac{3}{4} \frac{w_0^1}{w_2^2} \mathbf{b}_0^1 + \frac{1}{4} \frac{w_1^1}{w_2^2} \mathbf{b}_1^1 = \left(\frac{49}{23}, \frac{105}{23} \right), \\ \mathbf{b}_1^2 &= \frac{3}{4} \frac{w_1^1}{w_2^2} \mathbf{b}_1^1 + \frac{1}{4} \frac{w_2^1}{w_2^2} \mathbf{b}_2^1 = \left(\frac{3984}{713}, \frac{5873}{713} \right), \\ \mathbf{b}_0^3 &= \frac{3}{4} \frac{w_0^2}{w_3^3} \mathbf{b}_0^2 + \frac{1}{4} \frac{w_1^2}{w_3^3} \mathbf{b}_1^2 = \left(\frac{1473}{460}, \frac{6559}{1150} \right) = \mathbf{r} \left(\frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Astfel, curba din stânga are punctele de control $\mathbf{c}_0 = \mathbf{b}_0(1, 1)$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_0^1\left(\frac{7}{5}, \frac{17}{5}\right)$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_0^2\left(\frac{49}{23}, \frac{105}{23}\right)$ și $\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_0^3\left(\frac{1473}{460}, \frac{6559}{1150}\right)$. Ponderile sale sunt $\bar{w}_0 = w_0 = 1$, $\bar{w}_1 = w_0^1 = \frac{5}{4}$, $\bar{w}_2 = w_0^2 = \frac{23}{16}$ și $\bar{w}_3 = w_0^3 = \frac{25}{16}$.

Curba din dreapta, în schimb, are punctele de control $\mathbf{d}_0 = \mathbf{b}_0^3 \left(\frac{1473}{460}, \frac{6559}{1150} \right)$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}_1^2 \left(\frac{3984}{713}, \frac{5873}{713} \right)$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{b}_2^1 \left(\frac{60}{7}, \frac{37}{7} \right)$ și $\mathbf{d}_3 = \mathbf{b}_3(12, 1)$, în timp ce ponderile sale sunt $\tilde{w}_0 = w_0^3 = \frac{25}{16}$, $\tilde{w}_1 = w_1^2 = \frac{31}{16}$, $\tilde{w}_2 = w_2^1 = \frac{7}{4}$ și $\tilde{w}_3 = w_3 = 1$.

CAPITOLUL 9

Curbe B-spline raționale neuniforme (NURBS)

9.1 Definiție și proprietăți fundamentale

Definiția 9.1. O curbă B-spline rațională de gradul n , cu nodurile $t_0, t_1, \dots, t_{N+n+1}$, cu punctele de control $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$ și cu ponderile w_0, \dots, w_N este curba definită pe intervalul $[t_n, t_{n+N}]$, dată de

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^N w_i \mathbf{d}_i N_n^i(t)}{\sum_{i=0}^N w_i N_n^i(t)}, \quad (9.1.1)$$

unde $N_n^i(t)$ sunt funcțiile B-spline de bază definite pe vectorul de noduri dat, subînțelegând, ca și în cazul curbelor Bézier raționale, că dacă ponderea w_i se anulează, atunci $w_i \mathbf{d}_i$ se înlocuiește cu \mathbf{d}_i .

Această curbă se poate scrie și sub forma

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^N \mathbf{d}_i R_n^i(t), \quad (9.1.2)$$

unde

$$R_n^i(t) = \frac{w_i N_n^i(t)}{\sum_{j=0}^N w_j N_n^j(t)} \quad (9.1.3)$$

se numesc *funcții B-spline de bază raționale*.

De asemenea, tot ca în cazul curbelor Bézier raționale, putem descrie curba și ca o curbă B-spline polinomială, utilizând puncte de control omogene. Mai precis, dacă punctele de control sunt $\mathbf{d}_i(x_i, y_i, z_i)$, definim *punctele de control omogene* punând

$$\hat{\mathbf{d}}_i = \begin{cases} (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i) & \text{dacă } w_i \neq 0, \\ (x_i, y_i, z_i, 0) & \text{dacă } w_i = 0. \end{cases} \quad (9.1.4)$$

Atunci, în coordonate omogene, o curbă B-spline rațională se poate scrie

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=0}^N \hat{\mathbf{d}}_i(t) N_n^i(t). \quad (9.1.5)$$

Și în cazul curbelor B-spline raționale avem aceeași clasificare ca și în cazul curbelor B-spline polinomiale. Ele pot fi deschise, închise, periodice, uniforme sau neuniforme. În grafica pe calculator i designul geometric se preferă curbele B-spline raționale neuniforme, datorită versatilității lor. Ele sunt cunoscute drept *curbe NURBS* (un acronim de la numele în limba engleză, Non-Uniform Rational B-Spline curves).

Exemplul 9.1 (Reprezentarea NURBS a cercului unitate). Considerăm vectorul de noduri

$$0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1,$$

cu punctele de control $\mathbf{d}_0(1, 0)$, $\mathbf{d}_1(1, 1)$, $\mathbf{d}_2(-1, 1)$, $\mathbf{d}_3(-1, 0)$, $\mathbf{d}_4(-1, -1)$, $\mathbf{d}_5(1, -1)$, $\mathbf{d}_6 = \mathbf{d}_0$ și ponderile

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1.$$

Avem, prin urmare, 10 noduri și 7 puncte de control, ceea ce înseamnă că curba B-spline rațională care se obține este o curbă de gradul al doilea, o curbă pătratică. Se poate arăta că această curbă nu este altceva decât cercul unitate, cu centrul în origine.

Curbele B-spline raționale se bucură de o serie de proprietăți similare celor pe care le au curbele B-spline polinomiale. O proprietate suplimentară foarte importantă este invarianța relativ la proiecții. Are loc următoarea teoremă, pe care nu o vom demonstra aici.

Teorema 9.1. *O curbă B-spline rațională satisface următoarele proprietăți:*

(i) **Control local:** Dacă $t \in [t_r, t_{r+1})$, cu $n \leq r \leq N$, atunci

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=r-n}^r w_i \mathbf{d}_i N_n^i(t)}{\sum_{i=r-n}^r w_i N_n^i(t)}.$$

(ii) **Proprietatea de învelitoare convexă (tare):** Dacă toate ponderile sunt pozitive și $t \in [t_r, t_{r+1})$, cu $n \leq r \leq N$, atunci

$$\mathbf{r}(t) \in CH\{\mathbf{d}_{r-n}, \dots, \mathbf{d}_r\}.$$

(iii) **Netezime:** Dacă p_i este multiplicitatea nodului t_i , atunci $\mathbf{r}(t)$ este de grad de netezime cel puțin C^{n-p_i} în $t = t_i$ și C^∞ în rest.

(iv) **Invarianță față de transformări afine:** Dacă T este o transformare afină (a planului sau a spațiului), atunci

$$T \left(\frac{\sum_{i=r-n}^r w_i \mathbf{d}_i N_n^i(t)}{\sum_{i=r-n}^r w_i N_n^i(t)} \right) = \frac{\sum_{i=r-n}^r w_i T(\mathbf{d}_i) N_n^i(t)}{\sum_{i=r-n}^r w_i N_n^i(t)},$$

pentru $t \in [t_r, t_{r+1})$, cu $n \leq r \leq N$.

(v) **Invarianță față de proiecții:** Dacă T este o proiecție, atunci

$$T \left(\sum_{i=0}^N \hat{\mathbf{d}}_i N_n^i(t) \right) = \sum_{i=0}^N T(\hat{\mathbf{d}}_i) N_n^i(t),$$

unde $\hat{\mathbf{d}}_i$ sunt punctele de control omogene.

9.2 Derivatele unei curbe B-spline raționale

Tehnica de calcul a derivatelor unei curbe B-spline raționale este analoagă cu tehnica de derivare a unei curbe Bézier raționale. Astfel, reprezentăm curba sub forma

$$F(t) = \frac{f(t)}{g(t)} \quad (9.2.1)$$

unde

$$\sum_{i=r-n}^r w_i \mathbf{d}_i N_n^i(t)$$

și

$$\sum_{i=r-n}^r w_i N_n^i(t).$$

Atât f , cât și g sunt curbe B-spline polinomiale cu același vector de noduri. Am stabilit deja, atunci când am vorbit despre curbe Bézier raționale, o formulă de recurență pentru calculul derivatei de ordinul k a lui $\mathbf{r}(t)$ în funcție de derivatele sale de ordin inferior și de derivatele funcțiilor f și g :

$$\mathbf{r}^{(k)}(t) = \frac{f^{(k)}(t) - \sum_{i=1}^k C_k^i g^{(i)}(t) \mathbf{r}^{(k-1)}(t)}{g(t)}$$

Problema se reduce, astfel, la calculul derivatelor funcțiilor f și g care sunt, după cum am văzut, curbe B-spline polinomiale.

Începem cu următoarea leamnă, care ne dă regula de derivare a unei funcții B-spline de bază.

Lemma 9.2.1.

$$(N_n^i(t))' = \frac{n}{t_{i+n} - t_i} N_{n-1}^i(t) - \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{n-1}^{i+1}(t).$$

Demonstrație Demonstrația se face prin inducție, folosind formula de recurență pentru funcțiile B-spline de bază. Vom verifica doar pasul inițial. Avem

$$N_1^i(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} N_0^i + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} N_0^{i+1}.$$

Derivăm această relație, ținând cont de faptul că N_0^i și N_0^{i+1} sunt constante. Obținem

$$(N_1^i(t))' = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} N_0^i - \frac{1}{t_{i+2} - t_{i+1}} N_0^{i+1},$$

care e chiar formula din leamnă, pentru $n = 1$.

Mai departe, se folosește formula de recurență generală,

$$N_{r+1}^i(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r+1} - t_i} N_r^i(t) + \frac{t_{i+r+2} - t}{t_{i+r+2} - t_{i+1}} N_r^{i+1}(t),$$

se derivează fiecare termen ca un produs și se folosește ipoteza de inducție. \square

Bazându-ne pe lema pe care tocmai am demonstrat-o, putem stabili regula de derivare a unei curbe B-spline polinomiale:

Teorema 9.2. *Derivata curbei B-spline de gradul n*

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^N \mathbf{d}_i N_n^i(t),$$

cu vectorul de noduri

$$t_0, \dots, t_n, \dots, t_{N+n+1}$$

și cu punctele de control $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$, este curba B-spline de gradul $n - 1$

$$\mathbf{r}'(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{d}_i^{(1)} N_{n-1}^{i(1)}(t),$$

cu punctele de control

$$\mathbf{d}_i^{(1)} = \frac{n(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i)}{t_{i+n+1} - t_{i+1}}, \dots, i = 0, \dots, N - 1,$$

cu vectorul de noduri

$$t_1, \dots, t_n, \dots, t_{N+n-1},$$

iar $N_{n-1}^{i(1)}(t)$ sunt funcțiile B-spline de bază de grad $n - 1$ asociate acestui vector de noduri.

Demonstrație Fie

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^N \mathbf{d}_i N_n^i(t),$$

cu $t \in [t_n, t_{N+1}]$. Folosind lema precedentă, avem:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \sum_{i=0}^N \mathbf{d}_i (N_n^i(t))' = \\ &= \sum_{i=0}^N \mathbf{d}_i \frac{n}{t_{i+n} - t_i} N_{n-1}^i(t) - \sum_{i=0}^N \mathbf{d}_i \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{n-1}^{i+1}(t). \end{aligned}$$

Dar $N_{n-1}^0(t) = N_{n-1}^{N+1}(t) = 0$ pe intervalul $[t_n, t_{N+1}]$, de aceea

$$\mathbf{r}'(t) = \sum_{i=1}^N \frac{n}{t_{i+n} - t_i} (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1}) N_{n-1}^i(t).$$

Dacă înlocuim în sumă pe i cu $i + 1$, obținem că

$$\mathbf{r}'(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{d}_i^{(1)} N_{n-1}^{i(1)}(t).$$

□

Corollary 9.2.1. *Derivata de ordinul k a lui $\mathbf{r}(t)$ este*

$$\mathbf{r}^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{N-k} \mathbf{d}_i^{(k)} N_{n-k}^{i(k)}(t),$$

unde $\mathbf{d}_i^{(0)} = \mathbf{d}_i$, în timp ce

$$\mathbf{d}_i^{(k)} = \frac{(n - k + 1)(\mathbf{d}_{i+1}^{(k-1)} - \mathbf{d}_i^{(k-1)})}{t_{i+n} - t_{i+k-1}}, \quad i = 1, \dots, n + N - k.$$

Exemplul 9.2. Considerăm curba B-spline polinomială, de gradul 3, definită pe nodurile $t_0 = 1.2, t_1 = 1.4, t_2 = 1.5, t_3 = 2.0, t_4 = 2.4, t_5 = 3.1, t_6 = 5.0, t_7 = 6.4, t_8 = 7.3$, cu punctele de control $d_0(2, 1), d_1(4, 8), d_2(5, -1), d_3(3, -2)$ și $d_4(2, -4)$.

Conform teoremei precedente, punctele de control ale derivatei sunt:

- $\mathbf{d}_0^{(1)} = 3 \frac{\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0}{t_4 - t_1} = (6.0, 21.0);$
- $\mathbf{d}_1^{(1)} = 3 \frac{\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1}{t_5 - t_2} = (1.875, -16.875);$
- $\mathbf{d}_2^{(1)} = 3 \frac{\mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_2}{t_6 - t_3} = (-2, -1);$
- $\mathbf{d}_3^{(1)} = 3 \frac{\mathbf{d}_4 - \mathbf{d}_3}{t_7 - t_4} = (-0.75, -1.5).$

Derivata este o curbă de gradul al doilea, definită pe setul de noduri $s_0 = t_1, s_1 = t_2, s_2 = t_3, s_3 = t_4, s_4 = t_5, s_5 = t_6, s_6 = t_7$.

Exemplul 9.3. Considerăm acum o curbă NURBS cu același vector de noduri și aceleași puncte de control ca și curba B-spline polinomială din exemplu precedent, dar punctelor de control le atribuim ponderile $w_0 = 1.0, w_1 = 1.5, w_2 = 2.0, w_3 = 1.5, w_4 = 1.0$. Atunci curba noastră se poate scrie sub forma

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{f}(t)}{g(t)},$$

unde

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^4 w_i \mathbf{d}_i N_3^i(t), \quad g(t) = \sum_{i=0}^4 w_i N_3^i(t).$$

Atunci \mathbf{f} este o curbă B-spline polinomială, cu aceleași noduri ca și \mathbf{r} , dar cu punctele de control $\mathbf{a}_i = w_i \mathbf{d}_i$, în timp ce g este, de asemenea, o curbă B-spline polinomială (cu valori scalare), tot cu același vector de noduri și cu punctele de control egale cu ponderile w_i .

Avem, astfel, $\mathbf{a}_0 = w_0 \mathbf{d}_0 = (2, 1)$, $\mathbf{a}_1 = w_1 \mathbf{d}_1 = (6, 12)$, $\mathbf{a}_2 = w_2 \mathbf{d}_2 = (10, -2)$, $\mathbf{a}_3 = w_3 \mathbf{d}_3 = (4.5, -3)$, $\mathbf{a}_4 = w_4 \mathbf{d}_4 = (2, -4)$.

Dacă vrem să calculăm derivata de ordinul întâi, aplicăm formula

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{\mathbf{f}'(t) - g'(t)\mathbf{r}(t)}{g(t)}.$$

Astfel, pentru a determina valoarea derivatei într-un punct, trebuie să calculăm, în acel punct, valoarea lui \mathbf{r} , precum și valorile lui \mathbf{f}' , g , g' sau, ceea ce este același lucru, valorile lui \mathbf{f} , \mathbf{f}' , g și g' . Aceste valori se pot calcula fie direct, folosind funcțiile B-spline de bază, fie folosind algoritmul lui de Boor.

În ambele abordări, trebuie să cunoaștem punctele de control. Pentru \mathbf{f} și g le-am indicat deja. Aplicând teorema de mai sus, obținem pentru \mathbf{f}' punctele de control

- $\mathbf{a}_0^{(1)} = 3 \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0}{t_4 - t_1} = (12.0, 33.0);$
- $\mathbf{a}_1^{(1)} = 3 \frac{\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1}{t_5 - t_2} = (7.5, -26.25);$
- $\mathbf{a}_2^{(1)} = 3 \frac{\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2}{t_6 - t_3} = (-5.5, -1.0);$
- $\mathbf{a}_3^{(1)} = 3 \frac{\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_3}{t_7 - t_4} = (-1.875, -0.75).$

Punctele de control ale lui g' sunt

- $w_0^{(1)} = 3 \frac{w_1 - w_0}{t_4 - t_1} = 1.5;$
- $w_1^{(1)} = 3 \frac{w_2 - w_1}{t_5 - t_2} = 0.9375;$

- $w_2^{(1)} = 3 \frac{w_3 - w_2}{t_6 - t_3} = -0.5;$
- $w_3^{(1)} = 3 \frac{w_4 - w_3}{t_7 - t_4} = -0.375.$

9.3 Algoritmul de Boor rațional

A calcula valoarea unei curbe NURBS într-un punct înseamnă, de fapt, să calculăm valoarea numărătorului și cea a numitorului. Cum ambele, după cum am văzut, sunt curbe B-spline polinomiale, valorile lor pot fi calculate cu algoritmul lui de Boor polinomial. Combinând cei doi algoritmi, obținem *algoritmul lui de Boor rațional*.

Să presupunem că $t \in [t_r, t_{r+1})$. Inițializăm, pentru $i = r - n, \dots, r$, $\mathbf{d}_i^0 = \mathbf{d}_i$ și $w_i^0 = w_i$. Atunci, pentru $k = 1, \dots, n$ punem

$$\begin{cases} \alpha_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{n+1+i-k} - t_i}, \\ w_i^k(t) = (1 - \alpha_i^k(t)) w_{i-1}^{k-1}(t) + \alpha_i^k(t) w_i^{k-1}(t), \\ w_i^k(t) \mathbf{d}_i^k(t) = (1 - \alpha_i^k(t)) w_{i-1}^{k-1}(t) \mathbf{d}_{i-1}^{k-1}(t) + \alpha_i^k(t) w_i^{k-1}(t) \mathbf{d}_i^{k-1}(t), \end{cases} \quad i = r-n+k, \dots, r.$$

În final, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{d}_r^n(t)$.

CAPITOLUL 10

Suprafețe Bézier și B-spline

10.1 Introducere

Așa cum curbele sunt generalizări ale dreptelor, suprafețele sunt generalizări ale planelor. Ca și pentru plane, avem trei moduri fundamentale de a reprezenta o suprafață:

parametric: ca mulțime a punctelor din spațiu ale căror vectori de poziție verifică o ecuație de forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

unde perechile (u, v) sunt perechi de numere reale dintr-un domeniu U din plan, iar funcțiile x, y, z sunt netede pe acest domeniu;

implicit: ca mulțime a punctelor din spațiu ale căror coordonate verifică o ecuație de forma

$$F(x, y, z) = 0,$$

unde F este o funcție netedă pe un domeniu V din spațiu;

explicit: ca grafic al unei funcții netede f , definită pe un domeniu U din plan,

$$z = f(x, y).$$

Exemple. (a) Planul se poate reprezenta *parametric* printr-o ecuație de forma

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u \cdot \mathbf{a} + v\mathbf{b},$$

unde \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt doi vectori neparaleli din spațiu, *implicit*, folosind ecuația generală a planului,

$$ax + by + cz + d = 0,$$

unde a, b, c, d sunt numere reale astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, sau *explicit*, sub forma

$$z = mx + ny + p.$$

(b) Sfera de rază R , cu centrul în origine, se poate reprezenta fie *implicit*, prin ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

fie *parametric*, prin ecuația

$$\mathbf{r}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u).$$

(c) Elipsoidul de semiaxe a, b, c se poate reprezenta fie *implicit*, prin ecuația canonică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

fie *parametric*, prin ecuația

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u).$$

În cadrul acestui curs ne vom limita la suprafețe date parametric și, mai mult, funcțiile $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ vor putea fi doar:

- polinomiale în u și v ;
- polinomiale pe porțiuni în u și v ;
- raționale în u și v ;
- raționale pe porțiuni în u și în v .

Dacă (u_0, v_0) este un punct din domeniul de definiție al unei suprafețe parametrizate, vom spune că curbele date prin $\boldsymbol{\rho}_1(u) = \mathbf{r}(u, v_0)$, respectiv $\boldsymbol{\rho}_2(v) = \mathbf{r}(u_0, v)$, se numesc *curbe de coordonate* sau *linii de coordonate* pe suprafața dată.

10.2 Suprafețe produs tensorial

10.2.1 Introducere

Ideea de suprafață produs tensorial este să construim o suprafață așa fel încât, prin fiecare punct, liniile de coordonate $u = \text{const}$ sau $v = \text{const}$ să fie curbe Bézier sau B-spline în raport cu coordonata rămasă.

10.2.2 Suprafețe Bézier produs tensorial

Fie n, m două numere naturale. Remarcăm, mai întâi, că familia de funcții $B_n^i \otimes B_m^j$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, unde B_n^i și B_m^j sunt polinoame Bernstein de grad n , respectiv m ,

$$(B_n^i \otimes B_m^j)(u, v) = B_n^i(u)B_m^j(v),$$

formează o bază în spațiul funcțiilor polinomiale de două variabile pe $[0, 1] \times [0, 1]$, de grad cel mult n în u și cel mult m în v . Acest spațiu, în mod clar, are dimensiunea $(n+1) \cdot (m+1)$. Perechea (n, m) se mai numește *bigradul* funcției polinomiale. Astfel, orice funcție polinomială de u și v , de bigrad (n, m) poate fi scris ca o combinație de aceste funcții. Suntem, astfel, conduși la următoarea definiție.

Definiția 10.1. Fie $\mathbf{b}_{i,j}$ $(n+1) \cdot (m+1)$ puncte în \mathbb{R}^3 (identificate cu vectorii lor de poziție). *Suprafața Bézier produs tensorial de bigrad (n, m)* asociată punctelor de control $\mathbf{b}_{i,j}$ este suprafața parametrizată $\mathbf{r} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dată de

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_n^i(u)B_m^j(v) = \sum_{j=0}^m \underbrace{\left(\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_n^i(u) \right)}_{=\mathbf{c}_j(u)} B_m^j(v) = \\ &= \sum_{i=0}^n \underbrace{\left(\sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{i,j} B_m^j(v) \right)}_{=\mathbf{d}_i(v)} B_n^i(u). \end{aligned} \tag{10.2.1}$$

Ultimele două egalități arată că putem să ne gândim la o suprafață Bézier produs tensorial ca fiind fie o curbă Bézier de grad m , dar cu punctele de control dependente de u , fie ca o curbă Bézier de grad n , cu punctele de control dependente de v . O cale alternativă de interpretare a unei suprafețe Bézier produs tensorial este să o privim ca fiind generată de o curbă Bézier care se mișcă în spațiu și se deformează, în același timp.

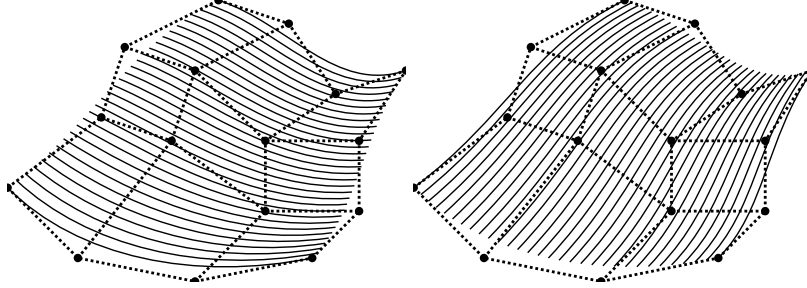


Figura 10.1: Un exemplu de suprafață Bézier produs tensorial bicubică. În stânga sunt desenate liniile de coordonate $v = \text{const}$, iar în dreapta – liniile de coordonate $u = \text{const}$.

Ultimele două egalități din relația (10.2.1) sugerează, de asemenea, modul de determinare a unui punct de pe suprafață atunci când coordonatele sale u și v sunt date: executăm, mai întâi, n pași din algoritmul lui de Casteljau în coloanele rețelei de control, pentru a determina punctele de control \mathbf{c}_j , $j = 0, \dots, m$, apoi executăm m pași în liniile rețelei de control (sau, mai precis, executăm m pași pentru a obține punctul $\mathbf{r}(u, v)$, privit ca un punct de pe curba Bézier de gradul m , determinată de punctele de control $\mathbf{c}_j(u)$, determinate mai înainte).

Astfel, pentru a obține punctul $\mathbf{r}(u, v)$, punem întâi, pentru $j = 0, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i,j}^{0,0}(u, v) &= \mathbf{b}_{i,j}, \quad i = 0, \dots, n \\ \mathbf{b}_{i,j}^{r,0}(u, v) &= (1-u)\mathbf{b}_{i,j}^{r-1,0}(u, v) + u\mathbf{b}_{i+1,j}^{r-1,0}(u, v), \quad r = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-r. \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

Ceea ce am notat cu $\mathbf{c}_j(u)$ sunt exact punctele $\mathbf{b}_{0,j}^{n,0}(u, v)$. Este de remarcat că, până acum, punctele intermediare *nu* depind încă de v , în ciuda notațiilor noastre. Doar acum intră v în joc, odată cu aplicarea algoritmului lui de Casteljau punctelor nou găsite.

Punem acum

$$\mathbf{b}_{0,j}^{n,s}(u, v) = (1-v)\mathbf{b}_{0,j}^{n,s-1}(u, v) + v\mathbf{b}_{0,j+1}^{n,s-1}(u, v), \quad s = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m-s \quad (10.2.3)$$

și găsim, în final, că

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{b}_{0,0}^{n,m}(u, v). \quad (10.2.4)$$

Este ușor de demonstrat că putem, de asemenea, să rulăm, mai întâi, algoritmul lui de Casteljau pe liniile rețelei de control și apoi pe coloane, cu alte cuvinte, putem

să determinăm, mai întâi, punctele de control $\mathbf{d}_i(v)$, $i = 0, \dots, n$ și apoi să rulăm algoritmul lui de Casteljau pe aceste puncte de control și obținem același rezultat. În fine, putem combina un pas în direcția orizontală cu un pas în direcția verticală și obținem ceea ce se numește un *pas de Casteljau direct*:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{r,s}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i,j}^{r-1,s-1}(u, v) & \mathbf{b}_{i,j+1}^{r-1,s-1}(u, v) \\ \mathbf{b}_{i+1,j}^{r-1,s-1}(u, v) & \mathbf{b}_{i+1,j+1}^{r-1,s-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}. \quad (10.2.5)$$

Algoritmul lui de Casteljau poate fi, de asemenea, exprimat folosind *operatori de Casteljau generalizați*. Notăm, astfel, cu ${}_1L$ și ${}_1R$ operatorii care înlătură prima, respectiv ultima linie din rețeaua de control și, în mod analog, cu ${}_2L$ și ${}_2R$ – operatorii care elimină prima, respectiv ultima coloană din rețeaua de control. Acum definim operatorii de Casteljau

$${}_iC(t) = (1-t) \cdot {}_iR + t \cdot {}_iL = {}_iR + t \cdot {}_i\Delta, \quad i = 1, 2, \quad (10.2.6)$$

unde ${}_i\Delta = {}_iL - {}_iR$ sunt operatorii diferență corespunzători. Precizăm că acești operatori trebuie priviți într-o “manieră operațională” mai degrabă decât prin intermediul matricilor lor. Ca și în cazul curbelor Bézier, suprafața Bézier produs tensorial se poate scrie acum în forma compactă

$$\mathbf{r}(u, v) = {}_1C(u)^n {}_2C(v)^m (\mathbf{b}_{i,j}). \quad (10.2.7)$$

Insistăm asupra faptului că analogia cu cazul curbelor Bézier este doar formală. Aici ${}_2C(v)$ nu se înmulțește cu matricea punctelor de control \mathbf{c}_i , mai degrabă este *evaluată* pe această rețea de control. Este instructiv să vedem cum funcționează totul în cazul suprafețelor Bézier produs tensorial de grad $(3, 3)$ (așa-numitele *pânze Bézier bicubice*), care sunt cel mai des întâlnite în practică. În acest caz, matricea punctelor de control este o matrice 4×4 ,

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} & \mathbf{b}_{02} & \mathbf{b}_{03} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{b}_{20} & \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{30} & \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33} \end{bmatrix}. \quad (10.2.8)$$

Atunci, pentru o pereche dată de parametri, (u, v) , avem,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= {}_1C(u)^3 {}_2C(v)^3 (B) = {}_1C(u)^3 {}_2C(v)^2 \left((1-v) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} & \mathbf{b}_{02} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{20} & \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} \\ \mathbf{b}_{30} & \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{01} & \mathbf{b}_{02} & \mathbf{b}_{03} \\ \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33} \end{bmatrix} \right) = \\ &= {}_1C(u)^3 {}_2C(v) \left((1-v) \left((1-v) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} \\ \mathbf{b}_{20} & \mathbf{b}_{21} \\ \mathbf{b}_{30} & \mathbf{b}_{31} \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{01} & \mathbf{b}_{02} \\ \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} \end{bmatrix} \right) + \right. \\ &\quad \left. + v \left((1-v) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{01} & \mathbf{b}_{02} \\ \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{02} & \mathbf{b}_{03} \\ \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33} \end{bmatrix} \right) \right) = \dots \end{aligned}$$

Este ușor de demonstrat că, așa cum se întâmplă în cazul curbelor Bézier, operatorii L, R, C, Δ comută, în același sens, iar proprietățile legate de invarianța afină și de învelitoarea convexă sunt verificate de suprafețele Bézier.

Exemplul 10.1. Se consideră suprafața Bézier produs tensorial bipătratică cu punctele de control $\mathbf{b}_{0,0}(2, 3, 1)$, $\mathbf{b}_{0,1}(2, 5, 3)$, $\mathbf{b}_{0,2}(2, 9, 1)$, $\mathbf{b}_{1,0}(5, 2, 1)$, $\mathbf{b}_{1,1}(5, 6, 4)$, $\mathbf{b}_{1,2}(6, 8, 1)$, $\mathbf{b}_{2,0}(6, 2, 0)$, $\mathbf{b}_{2,1}(8, 6, 3)$, $\mathbf{b}_{2,2}(8, 8, 1)$. Calculați $\mathbf{r}(1/2, 1/2)$, folosind fie algoritmul de Casteljau iterat (întâi după u , apoi după v sau invers), fie algoritmul de Casteljau bidimensional.

Demonstrație Începem prin a utiliza algoritmul lui de Casteljau iterat. Avem:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{2} (\mathbf{b}_{0,0} + \mathbf{b}_{1,0}) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 1 \right), \\ \mathbf{b}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{2} (\mathbf{b}_{0,1} + \mathbf{b}_{1,1}) = \left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{7}{2} \right), \\ \mathbf{b}_{0,2}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{2} (\mathbf{b}_{0,2} + \mathbf{b}_{1,2}) = \left(4, \frac{17}{2}, 1 \right), \\ \mathbf{b}_{1,0}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{2} (\mathbf{b}_{1,0} + \mathbf{b}_{2,0}) = \left(\frac{11}{2}, 2, \frac{1}{2} \right), \\ \mathbf{b}_{1,1}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{2} (\mathbf{b}_{1,1} + \mathbf{b}_{2,1}) = \left(\frac{13}{2}, 6, \frac{7}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{b}_{1,2}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{b}_{1,2} + \mathbf{b}_{2,2}) = (7, 8, 1),$$

$$\mathbf{b}_{0,0}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{b}_{0,0}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbf{b}_{1,0}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \frac{3}{4} \right),$$

$$\mathbf{b}_{0,1}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{b}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbf{b}_{1,1}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) = \left(5, \frac{23}{4}, \frac{7}{2} \right),$$

$$\mathbf{b}_{0,2}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{b}_{0,2}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbf{b}_{1,2}^{1,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{33}{4}, 1 \right).$$

Până acum am aplicat algoritmul lui de Casteljau în raport cu u . Aplicăm acum algoritmul lui de Casteljau în raport cu v curbei Bézier determinată de punctele de control $\mathbf{b}_{0,0}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, $\mathbf{b}_{0,1}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ și $\mathbf{b}_{0,2}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

Avem:

$$\mathbf{b}_{0,0}^{2,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{b}_{0,0}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbf{b}_{0,1}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) = \left(\frac{19}{4}, 4, \frac{17}{8} \right),$$

$$\mathbf{b}_{0,1}^{2,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{b}_{0,1}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbf{b}_{0,2}^{2,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) = \left(\frac{21}{4}, 7, \frac{9}{2} \right)$$

și, în fine,

$$\mathbf{b}_{0,0}^{2,2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \mathbf{r} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{b}_{0,0}^{2,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbf{b}_{0,1}^{2,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) = \left(5, \frac{11}{2}, \frac{53}{8} \right).$$

Aplicăm, acum, algoritmul lui de Casteljau bidimensional sau direct. Avem

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \mathbf{b}_{0,0}^{2,2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{0,1}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \mathbf{b}_{1,0}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \left(\mathbf{b}_{0,0}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbf{b}_{0,1}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbf{b}_{1,0}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \mathbf{b}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Pe de altă parte, utilizând aceeași formulă, avem, pe rând:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{0,1}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \mathbf{b}_{1,0}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{1,1}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} (\mathbf{b}_{0,0} + \mathbf{b}_{0,1} + \mathbf{b}_{1,0} + \mathbf{b}_{1,1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,1}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,1}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{0,2}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \mathbf{b}_{1,1}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{1,2}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,1} & \mathbf{b}_{0,2} \\ \mathbf{b}_{1,1} & \mathbf{b}_{1,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} (\mathbf{b}_{0,1} + \mathbf{b}_{0,2} + \mathbf{b}_{1,1} + \mathbf{b}_{1,2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{1,0}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1,0}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{1,1}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \mathbf{b}_{2,0}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{2,1}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \\ \mathbf{b}_{2,0} & \mathbf{b}_{2,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} (\mathbf{b}_{1,0} + \mathbf{b}_{1,1} + \mathbf{b}_{2,0} + \mathbf{b}_{2,1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1,1}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{1,2}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \mathbf{b}_{2,1}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \mathbf{b}_{2,2}^{0,0} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1,1} & \mathbf{b}_{1,2} \\ \mathbf{b}_{2,1} & \mathbf{b}_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} (\mathbf{b}_{1,1} + \mathbf{b}_{1,2} + \mathbf{b}_{2,1} + \mathbf{b}_{2,2}). \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\mathbf{r}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} (\mathbf{b}_{0,0} + 2\mathbf{b}_{0,1} + \mathbf{b}_{0,2} + 2\mathbf{b}_{1,0} + 4\mathbf{b}_{1,1} + 2\mathbf{b}_{1,2} + \mathbf{b}_{2,0} + 2\mathbf{b}_{2,1} + \mathbf{b}_{2,2}) =$$

□

Cași în cazul curbilor, putem face o *subdivizare* a unei suprafețe produs tensorial. Parcurgând n pași în algoritmul lui de Casteljau pe coloanele rețelei de control se obține o curbă de coordonate în v , în formă Bézier pe suprafață și, în plus, rețeaua de puncte de control pentru cele două părți în care este împărțită suprafața de această curbă. Analog, dacă parcurgem m pași în algoritmul de Casteljau pe liniile rețelei de control, obținem o linie de coordonate în u și rețelele de puncte de control pentru porțiunile de suprafață situate de o parte și de alta a acestei linii de coordonate. Parcurgând toți cei $n + m$ pași, se obține o subdivizare a suprafeței în patru subsuprafețe, obținând, în același timp, rețelele de puncte de control pe fiecare bucată (vezi figura 10.2.2).

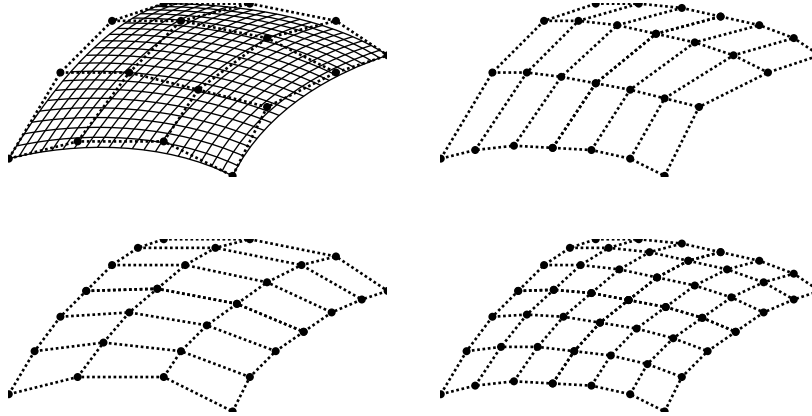


Figura 10.2: Subdivizarea unei suprafețe Bézier produs tensorial. În stânga sus e suprafața cu rețeaua sa de control originală, apoi rețeaua subdivizată la $u=0.5$, apoi rețeaua subdivizată la $v=0.5$ și, în sfârșit, rețeaua subdivizată în ambele direcții.

10.3 Derivarea suprafețelor Bézier produs tensorial

Calculul derivatelor parțiale ale suprafețelor Bézier se reduce, cași în cazul curbelor, la calculul derivatelor operatorilor de Casteljauers. Dar, chiar din definiție, rezultă imediat că

$$\frac{d}{dt} {}_i C(t) = {}_i \Delta. \quad (10.3.1)$$

De aceea, pentru derivatele parțiale mixte de ordin (r, s) avem, ca și în cazul curbelor,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{r+s} \mathbf{r}}{\partial u^r \partial v^s} &= \frac{n!m!}{(n-r)!(m-s)!} {}_1 C(u)^{n-r} {}_2 C(v)^{m-s} {}_1 \Delta^r {}_2 \Delta^s (\mathbf{b}_{i,j}) = \\ &= \frac{n!m!}{(n-r)!(m-s)!} {}_1 \Delta^r {}_2 \Delta^s {}_1 C(u)^{n-r} {}_2 C(v)^{m-s} (\mathbf{b}_{i,j}) \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

Prima reprezentare ne spune, desigur, că derivata de ordin (r, s) a unei suprafețe Bézier produs tensorial de bigrad (n, m) este, de asemenea, o suprafață Bézier produs tensorial, de bigrad $(n-r, m-s)$ și indică, de asemenea, modul în care se calculează noua rețea de control.

Avem, în particular,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) = n {}_1 C(u)^{n-1} {}_2 C(v) {}_1 \Delta(\mathbf{b}_{i,j}), \quad (10.3.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = m {}_1 C(u) {}_2 C(v)^{m-1} {}_2 \Delta(\mathbf{b}_{i,j}) \quad (10.3.4)$$

De aici rezultă că derivatele de ordinul întâi pe frontiera domeniului sunt

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(0, v) = n {}_2 C^m(v) (\mathbf{b}_{1,0} - \mathbf{b}_{0,0}, \dots, \mathbf{b}_{1,m} - \mathbf{b}_{0,m}), \quad (10.3.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(1, v) = n {}_2 C^m(v) (\mathbf{b}_{n,0} - \mathbf{b}_{n-1,0}, \dots, \mathbf{b}_{n,m} - \mathbf{b}_{n-1,m}), \quad (10.3.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, 0) = m {}_1 C^n(u) (\mathbf{b}_{0,1} - \mathbf{b}_{0,0}, \dots, \mathbf{b}_{n,1} - \mathbf{b}_{n,0}), \quad (10.3.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, 1) = m {}_1 C^n(u) (\mathbf{b}_{0,m} - \mathbf{b}_{0,m-1}, \dots, \mathbf{b}_{n,m} - \mathbf{b}_{n,m-1}). \quad (10.3.8)$$

Derivata mixtă de ordinul al doilea la se numește *răsucire* (twist) și e dată de

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}(u, v) = nm {}_1 C(u)^{n-1} {}_2 C(v)^{m-1} {}_1 \Delta {}_2 \Delta(\mathbf{b}_{i,j}).$$

Denumirea e legată de faptul că ea măsoară abaterea celulelor rețelei de control de la a fi paralelograme (vezi figura 10.3).

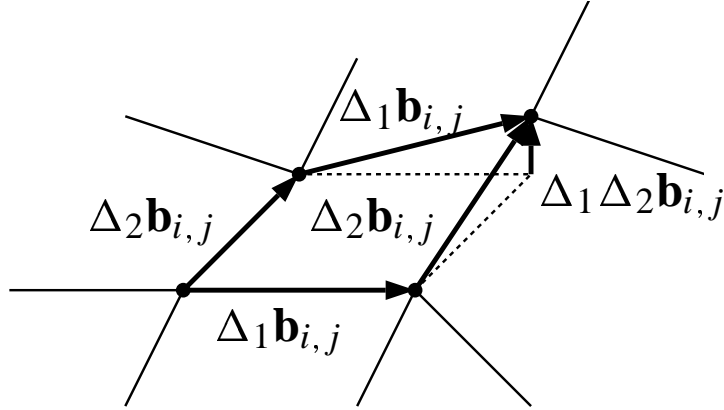
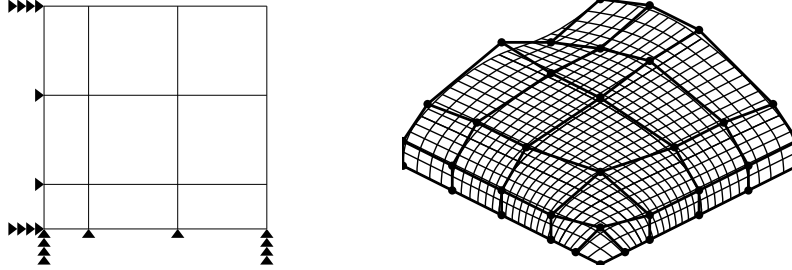


Figura 10.3: Vectorii de răsucire $\Delta_1 \Delta_2 \Delta(\mathbf{b}_{i,j})$ ne spun cât de departe este o celulă a rețelei de control de la a fi un paralelogram.

10.4 Suprafețe B-spline produs tensorial

Suprafețele B-spline produs tensoriale se construiesc, în esență pe aceleași principii ca și suprafețele Bézier produs tensorial, atâta doar că, în loc să folosim polinoane Bernstein, utilizăm funcții B-spline.

Astfel, fie $\mathbf{u} = u_0, \dots, u_{N+n+1}$ și $\mathbf{v} = v_0, \dots, v_{M+m+1}$ doi vectori de noduri. Fie, de asemenea, \mathbb{R}^2 , planul euclidian cu coordonatele carteziane u și v . Liniile verticale $u = u_i, i = 0, \dots, u_{N+n+1}$ și liniile orizontale $v = v_j, j = 0, \dots, M + m + 1$ se numesc *linii de noduri* și lor li se atribuie multiplicități care sunt egale, prin definiție, cu multiplicitățile nodurilor corespunzătoare din cele două șiruri de noduri. Considerăm, de asemenea, o rețea de $(N + 1) \times (M + 1)$ puncte în spațiu, $\mathbf{d}_{i,j}$, numită *rețeaua de control*. Atunci *suprafața B-spline produs tensorial* de bigrad (n, m) , cu vectorii de noduri \mathbf{u} și \mathbf{v} , și cu punctele de control $\mathbf{d}_{i,j}$ este dată de



parametrizarea

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(u, v) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \mathbf{d}_{i,j} N_n^i(u|\mathbf{u}) N_m^j(v|\mathbf{v}) = \sum_{j=0}^M \underbrace{\left(\sum_{i=0}^N \mathbf{d}_{i,j} N_n^i(u|\mathbf{u}) \right)}_{\mathbf{c}_j(u)} N_m^j(v|\mathbf{v}) = \\
 &= \sum_{i=0}^N \underbrace{\left(\sum_{j=0}^M \mathbf{d}_{i,j} N_m^j(v|\mathbf{v}) \right)}_{\mathbf{a}_i(v)} N_n^i(u|\mathbf{u}).
 \end{aligned} \tag{10.4.1}$$

Aici $N_n^i(u|\mathbf{u})$ și $N_m^j(v|\mathbf{v})$ sunt funcțiile B-spline corespunzătoare vectorilor de noduri indicați. Ultimele două egalități sugerează în mod clar că, așa cum se întâmplă în cazul suprafețelor Bézier produs tensorial, pentru un u dat, $\mathbf{r}(u, v)$ poate fi privită ca fiind o curbă B-spline cu vectorul de noduri \mathbf{v} și punctele de control

$$\mathbf{c}_j(u) = \sum_{i=0}^N \mathbf{d}_{i,j} N_n^i(u|\mathbf{u}) \quad j = 1, \dots, m + M.$$

În mod alternativ, pentru un v dat, $\mathbf{r}(u, v)$ poate fi privită ca fiind o curbă B-spline cu vectorul de noduri \mathbf{u} și punctele de control

$$\mathbf{a}_i(v) = \sum_{j=0}^M \mathbf{d}_{i,j} N_m^j(v|\mathbf{v}) \quad i = 1, \dots, n + N.$$

Această remarcă trivială ne spune că, pentru o pereche de parametri (u, v) dată, $\mathbf{r}(u, v)$ poate fi găsită aplicând algoritmul lui de Boor pe coloanele și apoi pe liniile rețelei de control (sau în ordine inversă, nu contează). Mai precis, are loc următoarea teoremă:

Teorema 10.4.1. Fie \mathbf{r} o suprafață B-spline produs tensorial, de bigrad (n, m) , cu nodurile u_0, \dots, u_{N+n+1} și v_0, \dots, v_{M+m+1} și punctele de control $\mathbf{d}_{0,0}, \dots, \mathbf{d}_{N,M}$. Dacă $u \in [u_{k-1}, u_k]$ și $v \in [v_{l-1}, v_l]$, cu $u_{k-1} < u_k$ și $v_{l-1} < v_l$, atunci putem determina punctul $\mathbf{r}(u, v)$ de pe suprafață prin algoritmul lui de Boor. Inițializăm:

$$\begin{aligned} s_i &= u_{k-n+i}, & i &= 1, \dots, 2n, \\ t_j &= v_{l-m+j}, & j &= 1, \dots, 2m, \\ \mathbf{d}_{i,j}^{0,0}(u, v) &= \mathbf{d}_{k+1-n+i, l+1-m+j}, & i &= 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m. \end{aligned}$$

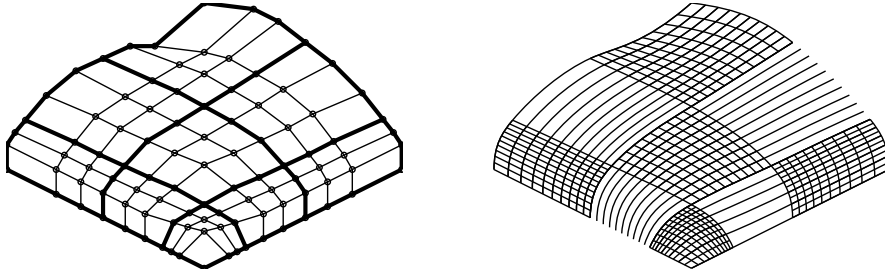
Apoi, pentru $p = 1, \dots, n$ executăm:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^p &= \frac{u - s_i}{s_{n+1+i-p} - s_i} \\ \mathbf{d}_{i,j}^{p,0}(u, v) &= (1 - \alpha_i^p) \mathbf{d}_{i-1,j}^{p-1,0}(u, v) + \alpha_i^p \mathbf{d}_{i,j}^{p-1,0}(u, v) \end{aligned} \right\} \quad \begin{cases} i = p, \dots, n \\ j = 0, \dots, m \end{cases}$$

și apoi, pentru $q = 1, \dots, m$, executăm

$$\left. \begin{aligned} \beta_j^q &= \frac{v - t_j}{t_{m+1+j-q} - t_j} \\ \mathbf{d}_{n,j}^{n,q}(u, v) &= (1 - \beta_j^q) \mathbf{d}_{n,j-1}^{n,q-1}(u, v) + \beta_j^q \mathbf{d}_{n,j}^{n,q-1}(u, v) \end{aligned} \right\} \quad j = q, \dots, m.$$

În final, punctul de pe suprafață este $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{d}_{n,m}^{n,m}(u, v)$.



Cum, din nou, ca și în cazul suprafețelor Bézier produs tensorial, ordinea de execuție a pașilor de Boor, după coloane sau după linii, nu este importantă, putem combina cele două direcții pentru a construi un *pas de Boor direct*:

$$\mathbf{d}_{i,j}^{p,q}(u, v) = (1 - \alpha_i^p) \mathbf{d}_{i-1,j}^{p-1,q}(u, v) + \alpha_i^p \mathbf{d}_{i,j}^{p-1,q}(u, v) = (1 - \beta_j^q) \mathbf{d}_{i,j-1}^{p,q-1}(u, v) + \beta_j^q \mathbf{d}_{i,j}^{p,q-1}(u, v). \quad (10.4.2)$$

Execuția unui pas în algoritmul lui de Boor pentru o suprafață produs tensorial, fie pe linii, fie pe coloane, are ca rezultat rețeaua de control precedentă, cu o linie de noduri suplimentară. Astfel, algoritmul lui de Boor pentru suprafețe înseamnă *inserare repetată de linii de noduri*.

10.4.1 Derivarea unei suprafețe B-spline produs tensorial

Cum liniile de coordonate ale unei suprafețe B-spline produs tensorial sunt curbe B-spline, a calcula derivatele parțial ale unei astfel de suprafețe în raport cu coordonatele revine la a calcula derivatele curbelor B-spline corespunzătoare. Folosind formulele stabilite pentru cazul curbelor B-spline, obținem imediat că:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) = \frac{\mathbf{d}_{n,m}^{n-1,m}(u, v) - \mathbf{d}_{n-1,m}^{n-1,m}(u, v)}{s_{n+1} - s_n}, \quad (10.4.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \frac{\mathbf{d}_{n,m}^{n,m-1}(u, v) - \mathbf{d}_{n,m-1}^{n,m-1}(u, v)}{t_{m+1} - t_m}. \quad (10.4.4)$$

Există, ca și în cazul curbelor B-spline, și o altă perspectivă, anume că derivatele parțiale ale lui \mathbf{r} în raport cu u și v sunt, de asemenea, suprafețe B-spline de bigrade $(n-1, m)$, respectiv $(n, m-1)$, și cu aceleași linii de noduri ca și \mathbf{r} , atâta doar că liniile de noduri cele mai exterioare au fost înlăturate, și cu punctele de control

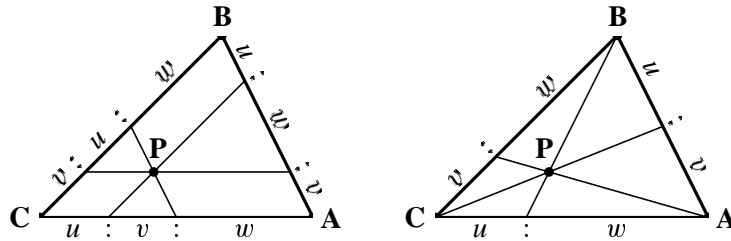
$$n \frac{\mathbf{d}_{i,j} - \mathbf{d}_{i-1,j}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}}, \quad \text{respectiv} \quad m \frac{\mathbf{d}_{i,j} - \mathbf{d}_{i,j-1}}{v_{j+m-1} - v_{j-1}}. \quad (10.4.5)$$

10.5 Suprafețe Bézier triunghiulare

Dacă A, B și C sunt vârfurile unui triunghi nedegenerat din plan, atunci pentru fiecare punct P din plan există un singur triplet de numere reale (u, v, w) astfel încât

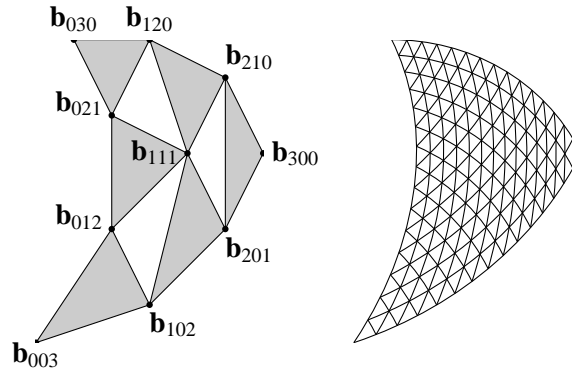
$$\mathbf{P} = u\mathbf{A} + v\mathbf{B} + w\mathbf{C}, \quad \text{și} \quad u + v + w = 1.$$

Aceste numere se numesc *coordonatele baricentrice* ale punctului P . *Rețeaua de con-*



trol a unei suprafețe Bézier triunghiulare de gradul n este formată din $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

puncte, dispuse într-un tabel triunghiular. Punctele rețelei de control vor fi notate folosind trei indici. Preferăm să utilizăm o notație cu indici multipli de forma $\mathbf{i} = (i, j, k)$ sau $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$, unde, desigur, toate componentele unui indice multiplu sunt numere naturale. Astfel, punctele rețelei de control vor fi notate cu $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}$, unde \mathbf{i} este un indice multiplu. Alte notații pe care le vom folosi în cele ce urmează sunt: $|\mathbf{i}| = i + j + k$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ și $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Pentru a descrie



suprafețele Bézier triunghiulare, vom raporta planul la un sistem de coordonate *baricentrice*, în locul celor carteziane. Cu alte cuvinte, vom fixa un triunghi nedegenerat în plan și vom asocia fiecărui punct coordonatele sale carteziane relativ la acest triunghi. Desigur, aceste trei coordonate nu sunt independente, deoarece suma lor trebuie să fie egal cu unu. Totuși, în calculele noastre va fi mai convenabil să utilizăm toate trei coordonatele, în loc să eliminăm una dintre ele, deoarece, în acest mod multe dintre ecuații vor avea o formă mai simetrică.

Vom descrie suprafețele Bézier triunghiulară folosind o abordare algoritmică. Algoritmul pe care îl vom folosi este un analog direct al algoritmului lui de Casteljau pentru curbe Bézier, de aceea îl vom numi, de asemenea, algoritmul lui de Casteljau pentru suprafețe Bézier triunghiulare. Alegem un punct în plan, de coordonate baricentrice $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Vom pune

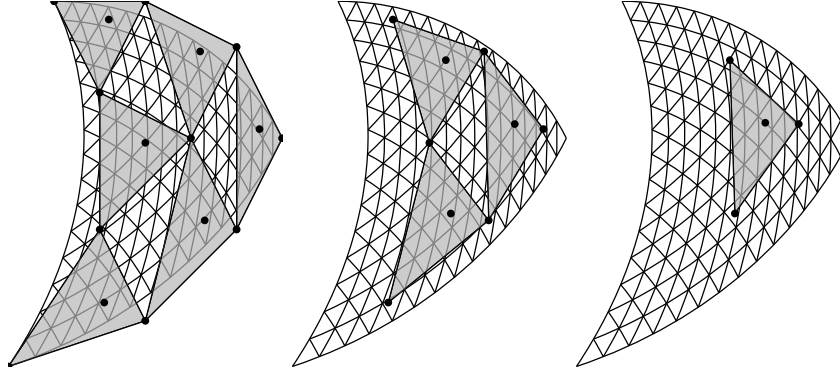
$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^0 = \mathbf{b}_{\mathbf{i}} \quad \text{pentru orice } \mathbf{i} \text{ cu } |\mathbf{i}| = n$$

și pentru $r = 1, \dots, n$:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^{r-1}(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^{r-1}(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^{r-1}(\mathbf{u}) \quad \text{pentru orice } \mathbf{i} \text{ cu } |\mathbf{i}| = n - r.$$

Punctul de pe suprafață este punctul final, adică

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_{\mathbf{000}}^n(\mathbf{u}).$$



Semnificația geometrică a algoritmului lui de Casteljau pentru suprafețe Bézier triunghiulare este foarte simplă. Pornim cu coordonatele baricentrice (u, v, w) și vrem să determinăm punctul de pe suprafață care corespunde acestor coordonate. Inițial, avem un set de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ triunghiuri în spațiu. La primul pas, vom asocia fiecărui astfel de triunghi punctul din planul triunghiului care are coordonatele baricentrice (u, v, w) relativ la acest triunghi. Obținem, în acest mod, o mulțime de $\frac{n(n+1)}{2}$ puncte. După penultimul pas, rămânem cu un singur triunghi, iar punctul pe care îl căutăm va fi punctul din planul acestui triunghi care are coordonatele baricentrice (u, v, w) în raport cu acest triunghi. Este clară, acum, similaritatea cu cazul algoritmului lui de Casteljau pentru curbe Bézier, deoarece acolo, la fiecare pas, împărțim fiecare segment al poligonului de control în raportul $1 - t : t$. Dar, cum $1 - t + t = 1$, rezultă că, pe dreapta reală, $1 - t$ și t sunt coordonatele baricentrice ale punctului în raport cu punctele 0 și 1.

În cazul suprafețelor cubice ($n = 3$), avem următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{b}_{030}^0 & & \\
 & \mathbf{b}_{021}^0 & \mathbf{b}_{120}^0 & & \\
 & \mathbf{b}_{012}^0 & \mathbf{b}_{111}^0 & \mathbf{b}_{210}^0 & \\
 \mathbf{b}_{003}^0 & \mathbf{b}_{102}^0 & \mathbf{b}_{201}^0 & \mathbf{b}_{300}^0 & \\
 & & \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbf{u})} & & \\
 & & \mathbf{b}_{020}^1 & & \\
 & \mathbf{b}_{011}^1 & \mathbf{b}_{110}^1 & & \\
 & \mathbf{b}_{002}^1 & \mathbf{b}_{101}^1 & \mathbf{b}_{200}^1 & \\
 & & \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbf{u})} & & \\
 & & \mathbf{b}_{010}^2 & & \\
 & \mathbf{b}_{001}^2 & \mathbf{b}_{100}^2 & & \\
 & & \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbf{u})} & & \\
 & & \mathbf{b}_{000}^3 & &
 \end{array}
 \quad (10.5.1)$$

Aici un pas din algoritmul lui de Casteljau este descris de operatorul $\mathcal{C}(\mathbf{u})$. Astfel, operatorul $\mathcal{C}(\mathbf{u})$ preia o rețea triunghiulară și produce o rețea triunghiulară mai mică. Formal, \mathbf{r} se poate scrie, folosind operatorul $\mathcal{C}(\mathbf{u})$, ca

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathcal{C}(\mathbf{u})^n(\mathbf{b}_i). \quad (10.5.2)$$

Observație. Exemplul suprafețelor cubice sugerează, de asemenea, modul în care se

construiește rețeaua de control a unei suprafețe Bézier triunghiulare. Astfel, punctele al căror multi-indice conține cel puțin un zero aparțin frontierei rețelei: ele sunt vârfuri în cel mult *două* triunghiuri. Punctele cu doi indici nuli sunt vârfuri în exact un triunghi. Există, desigur, trei astfel de puncte. Dacă așezăm punctele rețelei de control într-un triunghi, cum am făcut în cazul suprafețor cubice, atunci flexcare punct este în același triunghi cu vecinii săi. Astfel, de exemplu, în cazul suprafețelor bipătraticice ($n = 4$) rețeaua de control inițială va fi

$$\begin{array}{c} \mathbf{b}_{040} \\ \mathbf{b}_{031} \mathbf{b}_{130} \\ \mathbf{b}_{022} \mathbf{b}_{121} \mathbf{b}_{220} \\ \mathbf{b}_{013} \mathbf{b}_{112} \mathbf{b}_{211} \mathbf{b}_{310} \\ \mathbf{b}_{004} \mathbf{b}_{103} \mathbf{b}_{202} \mathbf{b}_{301} \mathbf{b}_{400} \end{array}$$

Intenționăm acum să scriem suprafețe Bézier triunghiulare într-o formă care este și mai asemănătoare cu cea a curbelor Bézier. În acest scop, pentru început, mai introducem niște notații. Notăm $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Atunci, pentru orice $\mathbf{u} = (u, v, w)$, avem

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}) = u\mathcal{C}_1 + v\mathcal{C}_2 + w\mathcal{C}_3.$$

Operatorii \mathcal{C}_i sunt analogi cu operatorii R și L din teoria curbelor Bézier. Reamintim că operatorii R și L pur și simplu șterg anumite puncte de control. Efectul operatorului \mathcal{C}_k constă în aplicarea unui pas de Casteljau corespunzător coordonatelor baricentrice \mathbf{e}_k . Astfel, acțiunea sa asupra punctelor de control este de forma:

$$\mathbf{b}_i^r = \mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_k}^{r-1}.$$

Aceasta înseamnă, pur și simplu că se înlătură punctele cu $i_k = 0$ și, pentru restul punctelor, se scade 1 din i_k . Cu alte cuvinte, eliminăm o latură din triunghiul punctelor de control. De exemplu, primul pas în algoritmul lui de Casteljau pentru suprafețe cubice, pentru coordonatele baricentrice $(1, 0, 0)$ este

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_{030} & & \mathbf{b}_{120} \\ \mathbf{b}_{021} \mathbf{b}_{120} & \xrightarrow{\mathcal{C}_1} & \mathbf{b}_{111} \mathbf{b}_{210} \\ \mathbf{b}_{012} \mathbf{b}_{111} \mathbf{b}_{210} & & \mathbf{b}_{102} \mathbf{b}_{201} \mathbf{b}_{300} \\ \mathbf{b}_{003} \mathbf{b}_{102} \mathbf{b}_{201} \mathbf{b}_{300} & & \end{array}$$

În general, dacă iterăm, obținem, pentru o suprafață Bézier triunghiulară de gradul n ,

$$\mathbf{r}(1, 0, 0) = \mathbf{b}_{n00}, \quad \mathbf{r}(0, 1, 0) = \mathbf{b}_{0n0}, \quad \mathbf{r}(0, 0, 1) = \mathbf{b}_{00n},$$

adică obținem colțurile suprafeței. Curbele de frontieră, pe de altă parte, se obțin dacă se pune doar o coordonată baricentrică egală cu zero. În acest caz, algoritmul lui de Casteljau se reduce la algoritmul lui de Casteljau obișnuit, pentru curbe. De exemplu, dacă a doua coordonată este zero,

$$\mathbf{b}_{i,0,r-i}^r(t, 0, 1-t) = (1-t)\mathbf{b}_{i,0,r-i+1}^{r-1}(t, 0, 1-t) + t\mathbf{b}_{i+1,0,r-i}^{r-1}(t, 0, 1-t).$$

Astfel, curbele de frontieră sunt curbe Bézier de grad n , iar poligoanele lor de control sunt poligoanele de control de frontieră ale rețelei de control.

Exemplul 10.2. Să presupunem, de exemplu, că $n = 3$. Atunci triunghiul punctelor de control este

$$\begin{array}{c} \mathbf{b}_{030} \\ \mathbf{b}_{021} \mathbf{b}_{120} \\ \mathbf{b}_{012} \mathbf{b}_{111} \mathbf{b}_{210} \\ \mathbf{b}_{003} \mathbf{b}_{102} \mathbf{b}_{201} \mathbf{b}_{300} \end{array}$$

Vrem să calculăm valoarea suprafeței în centrul de greutate al triunghiului de bază, adică în punctul de coordonate baricentrice $(1/3, 1/3, 1/3)$. Inițializăm, ca de obicei,

$$\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i,$$

pentru toate valorile mutiindicelui \mathbf{i} astfel încât să avem $|\mathbf{i}| = 3$. Aplicăm, acum, primul pas al algoritmului lui de Casteljau:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{020}^1 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{030} + \mathbf{b}_{021}), \\ \mathbf{b}_{011}^1 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{021} + \mathbf{b}_{012}), \\ \mathbf{b}_{110}^1 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{111}), \\ \mathbf{b}_{002}^1 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}_{003}), \\ \mathbf{b}_{101}^1 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{102}), \\ \mathbf{b}_{200}^1 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{300} + \mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{201}). \end{aligned}$$

Trecem acum la pasul al doilea. Obținem

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{010}^2 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{110}^1 + \mathbf{b}_{020}^1 + \mathbf{b}_{011}^1) = \\
&= \frac{1}{9} (\mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{030} + \mathbf{b}_{021} + \mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{021} + \mathbf{b}_{012}) = \\
&= \frac{1}{9} (\mathbf{b}_{210} + 2\mathbf{b}_{120} + 2\mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{030} + 2\mathbf{b}_{021} + \mathbf{b}_{012}), \\
\mathbf{b}_{001}^2 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{101}^1 + \mathbf{b}_{011}^1 + \mathbf{b}_{002}^1) = \\
&= \frac{1}{9} (\mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{021} + \mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}_{003}) = \\
&= \frac{1}{9} (\mathbf{b}_{201} + 2\mathbf{b}_{111} + 2\mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{021} + 2\mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}_{003}) \\
\mathbf{b}_{100}^2 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{200}^1 + \mathbf{b}_{110}^1 + \mathbf{b}_{101}^2) = \\
&= \frac{1}{9} (\mathbf{b}_{300} + \mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{102}) = \\
&= \frac{1}{9} (\mathbf{b}_{300} + 2\mathbf{b}_{210} + 2\mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{120} + 2\mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{102}).
\end{aligned}$$

Am ajuns, în fine, la pasul final,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{000}^3 &= \frac{1}{3} (\mathbf{b}_{100}^2 + \mathbf{b}_{010}^2 + \mathbf{b}_{001}^2) = \\
&= \frac{1}{27} (5\mathbf{b}_{210} + 4\mathbf{b}_{120} + 6\mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}_{030} + 2\mathbf{b}_{021} + \mathbf{b}_{012} + \\
&\quad + 2\mathbf{b}_{300} + 4\mathbf{b}_{201} + 2\mathbf{b}_{102}).
\end{aligned}$$

Întorcându-ne la problema noastră, remarcăm că, pentru un triplet (i, j, k) dat, cu $i + j + k = n$, obținem, așa cum ne putem convinge cu ușurință,

$$\mathbf{b}_{ijk} = \mathcal{C}_1^i \mathcal{C}_2^j \mathcal{C}_3^k(\mathbf{b}).$$

De aceea, pentru niște coordonate baricentrice oarecare $\mathbf{u} = (u, v, w)$, obținem

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathcal{C}^n(\mathbf{u})(\mathbf{b}) = (u\mathcal{C}_1 + v\mathcal{C}_2 + w\mathcal{C}_3)^n(\mathbf{b}) = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \mathcal{C}_1^i \mathcal{C}_2^j \mathcal{C}_3^k(\mathbf{b}) = \\
&= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \mathbf{b}_{ijk} = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_n^{\mathbf{i}}(\mathbf{u}),
\end{aligned}$$

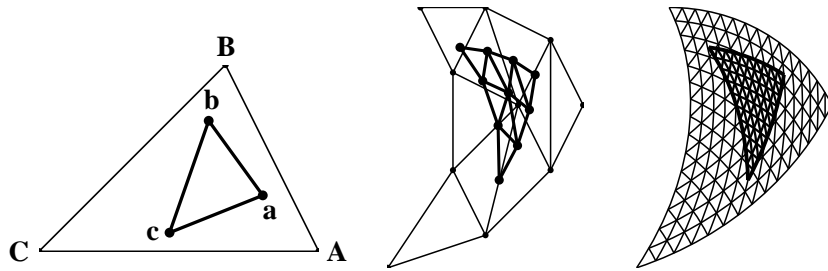
unde

$$B_n^i(\mathbf{u}) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$$

sunt așa-numitele *polinoame Bernstein de trei variabile*.

10.5.1 Subdivizarea unei suprafețe Bézier triunghiulare

Fie \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} seturile de coordonate baricentrice a trei puncte din plan referitor la triunghiul de bază. Vom presupune că cele trei puncte sunt necoliniare. Atunci ele definesc un triunghi și, în mod implicit, un al sistem de coordonate baricentrice. Putem utiliza coordonate baricentrice în raport cu acest nou triunghi și vrem să



găsim punctele de control scrise în aceste coordonate noi, fie ele \mathbf{b}_i^* . Dacă un punct din plan are coordonatele baricentrice $\mathbf{u} = (u, v, w)$ în raport cu noul triunghi, atunci coordonatele sale baricentrice în raport cu triunghiul inițial sunt $u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$. Prin urmare, punctul de pe suprafață corespunzător va fi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathcal{C}^n(u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c})(\mathbf{b}_i) = (u\mathcal{C}\mathbf{a} + v\mathcal{C}\mathbf{b} + w\mathcal{C}\mathbf{c})^n(\mathbf{b}_i) = \\ &= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \mathcal{C}^i(\mathbf{a}) \mathcal{C}^j(\mathbf{b}) \mathcal{C}^k(\mathbf{c})(\mathbf{b}_{ijk}) = \\ &= \sum_{|\mathbf{i}|=n} B_n^{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \mathcal{C}^i(\mathbf{a}) \mathcal{C}^j(\mathbf{b}) \mathcal{C}^k(\mathbf{c})(\mathbf{b}_i), \end{aligned}$$

Găsim, astfel, expresia punctelor de control \mathbf{b}_i^* ,

$$\mathbf{b}_{ijk}^* = \mathcal{C}^i(\mathbf{a}) \mathcal{C}^j(\mathbf{b}) \mathcal{C}^k(\mathbf{c})(\mathbf{b}_i)$$

Aceasta este o generalizare directă a subdivizării pentru curbe Bézier.

10.5.2 Ridicarea gradului unei suprafețe Bézier triunghiulare

O suprafață Bézier triunghiulară de gradul n se poate reprezenta ca o suprafață de gradul $n + 1$, modificând punctele de control printr-un algoritm similar cu cel utilizat pentru ridicarea gradului unei curbe Bézier. Plecăm de la reprezentarea Bernstein a curbei,

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \sum_{i+j+k=n} B_n^{ijk}(\mathbf{u}) \mathbf{b}_{ijk}.$$

Utilizăm acum faptul că $\mathbf{u} = (u, v, w)$, unde u, v, w sunt coordonatele baricentrice ale punctului curent, deci $u + v + w = 1$. Înmulțim membrul drept al relației de mai sus cu $1 = u + v + w$ și obținem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \sum_{i+j+k=n} B_n^{ijk}(\mathbf{u}) \mathbf{b}_{ijk} (u + v + w) = \\ &= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^{i+1} v^j w^k \mathbf{b}_{ijk} + \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^{j+1} w^k \mathbf{b}_{ijk} + \\ &+ \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^{k+1} \mathbf{b}_{ijk} = \sum_{i+j+k=n} \frac{(n+1)!}{(i+1)!j!k!} u^{i+1} v^j w^k \mathbf{b}_{ijk} \frac{i+1}{n+1} + \\ &+ \sum_{i+j+k=n} \frac{(n+1)!}{i!(j+1)!k!} u^i v^{j+1} w^k \mathbf{b}_{ijk} \frac{j+1}{n+1} + \sum_{i+j+k=n} \frac{(n+1)!}{i!j!(k+1)!} u^i v^j w^{k+1} \mathbf{b}_{ijk} \frac{k+1}{n+1} = \\ &= \sum_{i+j+k=n+1} \frac{(n+1)!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \frac{i \mathbf{b}_{i-1jk}}{n+1} + \sum_{i+j+k=n+1} \frac{(n+1)!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \frac{j \mathbf{b}_{ij-1k}}{n+1} + \\ &+ \sum_{i+j+k=n+1} \frac{(n+1)!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \frac{k \mathbf{b}_{ijk-1}}{n+1} = \\ &= \sum_{i+j+k=n+1} \frac{(n+1)!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \frac{i \mathbf{b}_{i-1jk} + j \mathbf{b}_{ij-1k} + k \mathbf{b}_{ijk-1}}{n+1} = \sum_{i+j+k=n+1} B_{n+1}^{ijk}(\mathbf{u}) \mathbf{b}_{ijk}^*, \end{aligned}$$

unde

$$\mathbf{b}_{ijk}^* = \frac{i \mathbf{b}_{i-1jk} + j \mathbf{b}_{ij-1k} + k \mathbf{b}_{ijk-1}}{n+1}.$$

Observație. Este de remarcat că avem niște relații analoage cu anumite relații din cazul curbilor: $\mathbf{b}_{n+100}^* = \mathbf{b}_{n00}$, $\mathbf{b}_{0n+10}^* = \mathbf{b}_{0n0}$ și $\mathbf{b}_{00n+1}^* = \mathbf{b}_{00n}$.

Exemplul 10.3. Dacă plecăm de la o suprafață pătratică, atunci punctele de con-

trol ale suprafeței cubice care se obține prin ridicarea gradului sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{030}^* &= \mathbf{b}_{020}, \\ \mathbf{b}_{021}^* &= \frac{1}{3}(2\mathbf{b}_{011} + \mathbf{b}_{020}), \quad \mathbf{b}_{120}^* = \frac{1}{3}(2\mathbf{b}_{011} + \mathbf{b}_{110}), \\ \mathbf{b}_{012}^* &= \frac{1}{3}(\mathbf{b}_{002} + 2\mathbf{b}_{011}), \quad \mathbf{b}_{111}^* = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_{011} + \mathbf{b}_{101} + \mathbf{b}_{110}), \quad \mathbf{b}_{210}^* = \frac{1}{3}(2\mathbf{b}_{110} + \mathbf{b}_{200}), \\ \mathbf{b}_{003}^* &= \mathbf{b}_{002}, \quad \mathbf{b}_{102}^* = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_{002} + 2\mathbf{b}_{101}), \quad \mathbf{b}_{201}^* = \frac{1}{3}(2\mathbf{b}_{101} + \mathbf{b}_{200}), \quad \mathbf{b}_{300}^* = \mathbf{b}_{200}. \end{aligned}$$

10.5.3 Derivarea suprafețelor Bézier triunghiulare

Ideea pentru diferențierea suprafețelor triunghiulare este să le privim ca fiind restricții ale unor funcții definite pe întregul spațiu la planul de ecuație $u+v+w=1$. În aceste condiții, derivatele parțiale obișnuite nu au o semnificație deosebită, așa că vom vorbi, în schimb, despre derivatele de-a lungul unei direcții date de un vector \mathbf{v} , paralel cu planul $u+v+w=1$,

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \left. \frac{d(\mathbf{u} + t\mathbf{v})}{dt} \right|_{t=0}.$$

Din regula de diferențiere a funcțiilor compuse rezultă imediat că avem

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \alpha \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial u} + \beta \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial v} + \gamma \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial w},$$

unde α, β, γ sunt componentele lui \mathbf{v} .

Pe de altă parte, deoarece $\mathcal{C}(\mathbf{u}) = u\mathcal{C}_1 + v\mathcal{C}_2 + w\mathcal{C}_3$, avem

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\mathbf{u})}{\partial u} = \mathcal{C}_1, \quad \frac{\partial \mathcal{C}(\mathbf{u})}{\partial v} = \mathcal{C}_2, \quad \frac{\partial \mathcal{C}(\mathbf{u})}{\partial w} = \mathcal{C}_3$$

și, cum $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathcal{C}^n(\mathbf{u})(\mathbf{b}_i)$, obținem, folosind regulile de derivare și cele de comutare a operatorilor, că

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{v}}\mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \alpha \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial u} + \beta \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial v} + \gamma \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial w} = \\ &= n(\alpha\mathcal{C}_1 + \beta\mathcal{C}_2 + \gamma\mathcal{C}_3)\mathcal{C}^{n-1}(\mathbf{u})(\mathbf{b}_i) = \\ &= n\mathcal{C}(\mathbf{v})\mathcal{C}^{n-1}(\mathbf{u})(\mathbf{b}_i) = n\mathcal{C}^{n-1}(\mathbf{u})\mathcal{C}(\mathbf{v})(\mathbf{b}_i). \end{aligned}$$

Ultima egalitate ne spune, de fapt, că derivata direcțională este o suprafață triunghiulară de grad $n-1$, în care punctele de control sunt $\mathcal{C}(\mathbf{v})(\mathbf{b}_i)$. Un calcul simplu ne spune că aceste puncte de control se pot calcula cu formula

$$\mathbf{d}_{ijk} = \alpha\mathbf{b}_{i+1jk} + \beta\mathbf{b}_{ij+1k} + \gamma\mathbf{b}_{ijk+1}.$$

10.6 Suprafețe Bézier și B -spline produs tensorial raționale

Suprafețele Bézier și B -spline produs tensorial raționale se definesc prin analogie cu curbele raționale, adaptând definițiile suprafețelor produs tensorial polinomiale.

Definiția 10.2. Suprafața Bézier produs tensorial rațională cu punctele de control $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$ și ponderile $\omega_{i,j} \in \mathbb{R}$, unde $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$ este dată de

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \omega_{i,j} \mathbf{b}_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \omega_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v)}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (10.6.1)$$

adică este proiecția pe \mathbb{R}^d a suprafeței Bézier polinomiale produs tensorial în \mathbb{R}^{d+1} , cu punctele de control $(\omega_{i,j} \mathbf{b}_{i,j}, \omega_{i,j})$.

Suprafețele B -spline produs tensorial raționale se definesc în mod analog:

Definiția 10.3. Suprafața B -spline produs tensorial rațională cu punctele de control $\mathbf{d}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$, vectorii de noduri \mathbf{u} și \mathbf{v} și ponderile $\omega_{i,j} \in \mathbb{R}$, unde $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$ este dată de

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \omega_{i,j} \mathbf{d}_{i,j} N_i^n(u|\mathbf{u}) N_j^m(v|\mathbf{v})}{\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \omega_{i,j} N_i^n(u|\mathbf{u}) N_j^m(v|\mathbf{v})}, \quad (u, v) \in [u_n, u_{n+N}] \times [v_m, v_{m+M}], \quad (10.6.2)$$

adică este proiecția pe \mathbb{R}^d a suprafeței B -spline polinomiale produs tensorial în \mathbb{R}^{d+1} , cu punctele de control $(\omega_{i,j} \mathbf{d}_{i,j}, \omega_{i,j})$ și vectorii de noduri \mathbf{u} și \mathbf{v} .

Algoritmii de Casteljau și de Boor pentru suprafețe produs tensorial polinomiale se adaptează la cazul rațional ca și în cazul curbelor.

CAPITOLUL 11

Generarea și suprafețelor curbelor prin transformări geometrice

11.1 Introducere

Ideea generală a acestui capitol este să construim curbe aplicând unui punct o transformare afină (2d sau 3d), care depinde de un parametru, acest parametru fiind apoi parametrul de-a lungul curbei pe care o construim sau suprafețe aplicând o transformare afină 3d dependentă de un parametru unei curbe date. Vom începe prin a aplica acest gen de metode pentru a construi suprafețe Bézier sau B-spline plecând de la o curbă Bézier sau B-spline.

11.2 Suprafețe extrudate

O *suprafață extrudată* se obține translatând o curbă generatoare $\rho(s)$ într-o anumită direcție dată.

11.2.1 Cazul suprafețelor Bézier polinomiale

Fie $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă Bézier de gradul n , cu punctele de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, \mathbf{v} – un versor și $\delta > 0$ un număr real. Suprafața Bézier (produs tensorial) de bigrad

$(n, 1)$, cu punctele de control $\mathbf{b}_{i,0} = \mathbf{b}_i$ și $\mathbf{b}_{i,1} = \mathbf{b}_i + \delta \mathbf{v}$ se numește *suprafață Bézier polinomială extrudată*, generată de curba ρ , în direcția vectorului \mathbf{v} , de distanță δ .

Exemplul 11.1. Considerăm curba Bézier generatoare dată de punctele de control $\mathbf{b}_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_1(1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2(1, 0, 1)$ și $\mathbf{b}_3(1, 1, 1)$. Alegem versorul $\mathbf{v} \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ și distanța $\delta = 3$. Atunci suprafața Bézier extrudată corespunzătoare este cea care are punctele de control $\mathbf{b}_{0,0} = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_{1,0} = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_{2,0} = \mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_{3,0} = \mathbf{b}_3$ și $\mathbf{b}_{0,1} = \mathbf{b}_0 + \delta \mathbf{v} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{b}_{1,1} = \mathbf{b}_1 + \delta \mathbf{v} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{b}_{2,1} = \mathbf{b}_2 + \delta \mathbf{v} = (3, -2, 2)$, $\mathbf{b}_{3,1} = \mathbf{b}_3 + \delta \mathbf{v} = (3, -1, 2)$. Vezi figura 11.1.

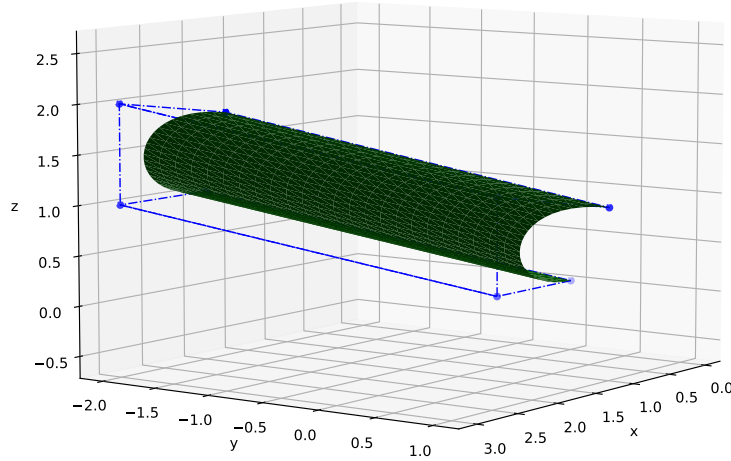


Figura 11.1: Suprafață Bézier extrudată

11.2.2 Cazul suprafețelor B-spline polinomiale

În acest caz, plecăm de la curba B-spline de gradul n dată de punctele de control $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$ și nodurile $u_0, u_1, \dots, u_{N+n+1}$. Suprafața B-spline extrudată de bigrad $(n, 1)$ este suprafața B-spline produs tensorial punctele de control $\mathbf{d}_{i,0} = \mathbf{d}_i$ și $\mathbf{d}_{i,1} = \mathbf{d}_i + \delta \mathbf{v}$, nodurile în direcția u sunt u_0, \dots, u_{N+n+1} , iar nodurile în direcția v sunt $v_0 = 0, v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 1$.

Exemplul 11.2. Presupunem că curba de plecare este curba B spline pătratică dată de punctele de control $\mathbf{d}_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{d}_1(1, 0, 0)$, $\mathbf{d}_2(1, 0, 1)$ și $\mathbf{d}_3(1, 1, 1)$ și nodurile

$t_0 = t_1 = t_2 = 0, t_3 = 1, t_4 = t_5 = t_6 = 2$. Atunci suprafața B-spline extrudată căutată va avea punctele de control $\mathbf{d}_{0,0} = \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_{1,0} = \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_{2,0} = \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_{3,0} = \mathbf{d}_3$ și $\mathbf{d}_{0,1} = \mathbf{d}_0 + \delta \mathbf{v} = (2, -2, 1), \mathbf{d}_{1,1} = \mathbf{d}_1 + \delta \mathbf{v} = (3, -2, 1), \mathbf{d}_{2,1} = \mathbf{d}_2 + \delta \mathbf{v} = (3, -2, 2), \mathbf{d}_{3,1} = \mathbf{d}_3 + \delta \mathbf{v} = (3, -1, 2)$, nodurile în direcția u vor fi $u_i = t_i$, iar nodurile în direcția v vor fi $v_0 = v_1 = 0, v_2 = v_3 = 1$. Suprafața care se obține este reprezentată în figura 11.2.

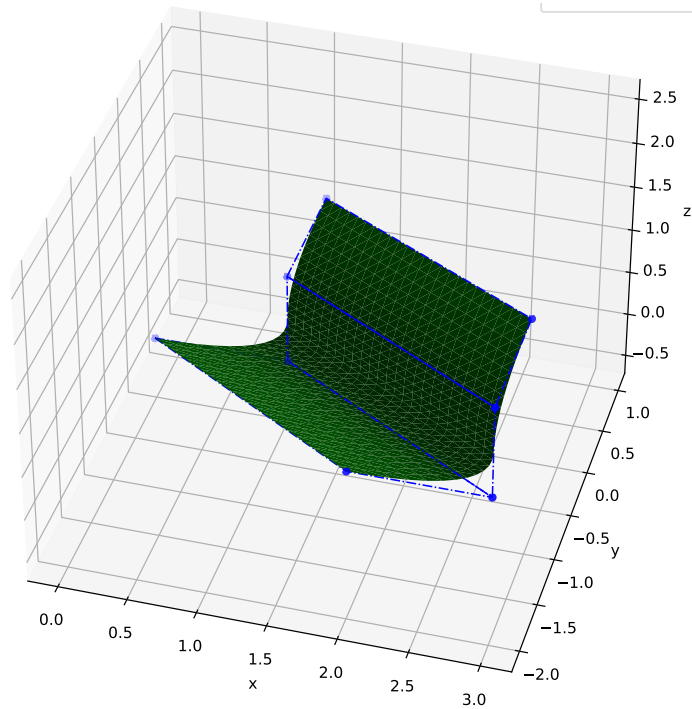


Figura 11.2: Suprafață Bèzier extrudată

11.2.3 Cazul suprafețelor Bézier raționale

Dacă vrem să construim o suprafață Bézier rațională extrudată, de bigrad $(n, 1)$, plecăm de la o curbă Bézier rațională, de gradul n , cu punctele de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ și ponderile w_0, \dots, w_n . Alegem, ca și mai sus, un versor \mathbf{v} și o distanță δ . Atunci suprafața extrudată căutată va avea punctele de control $\mathbf{b}_{i,0} = \mathbf{b}_i$ și $\mathbf{b}_{i,1} = \mathbf{b}_i + \delta \mathbf{v}$ și ponderile $w_{i,0} = w_{i,1} = w_i$.

Exemplul 11.3. Considerăm curba Bézier rațională generatoare dată de punctele

de control $\mathbf{b}_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_1(1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2(1, 0, 1)$ și $\mathbf{b}_3(1, 1, 1)$, precum și cu ponderile $w_0 = 1, w_1 = w_2 = 2, w_3 = 1$. Alegem versorul $\mathbf{v} \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ și distanța $\delta = 3$.

Atunci suprafața Bézier extrudată corespunzătoare este cea care are punctele de control $\mathbf{b}_{0,0} = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_{1,0} = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_{2,0} = \mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_{3,0} = \mathbf{b}_3$ și $\mathbf{b}_{0,1} = \mathbf{b}_0 + \delta\mathbf{v} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{b}_{1,1} = \mathbf{b}_1 + \delta\mathbf{v} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{b}_{2,1} = \mathbf{b}_2 + \delta\mathbf{v} = (3, -2, 2)$, $\mathbf{b}_{3,1} = \mathbf{b}_3 + \delta\mathbf{v} = (3, -1, 2)$ și ponderile $w_{i0} = w_{i1} = w_i$.

11.2.4 Cazul suprafețelor B-spline raționale

Acum plecăm de la curba B-spline rațională de gradul n dată de punctele de control $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$ și nodurile $t_0, t_1, \dots, t_{N+n+1}$, precum și ponderil w_0, \dots, w_N . Suprafața B-spline rațională extrudată de bigrad $(n, 1)$ este suprafața B-spline rațională produs tensorial cu punctele de control $\mathbf{d}_{i,0} = \mathbf{d}_i$ și $\mathbf{d}_{i,1} = \mathbf{d}_i + \delta\mathbf{v}$, nodurile în direcția u sunt u_0, \dots, u_{N+n+1} , iar nodurile în direcția v sunt $v_0 = 0, v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 1$, în timp ce ponderile sunt $w_{i0} = w_{i1} = w_i$.

Exemplul 11.4. Presupunem că curba de plecare este curba B spline pătratică rațională, dată de punctele de control $\mathbf{d}_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{d}_1(1, 0, 0)$, $\mathbf{d}_2(1, 0, 1)$ și $\mathbf{d}_3(1, 1, 1)$ și nodurile $t_0 = t_1 = t_2 = 0, t_3 = 1, t_4 = t_5 = t_6 = 2$, precum și de ponderile $w_0 = 1, w_1 = 2, w_2 = 2, w_3 = 1$. Atunci suprafața B-spline extrudată căutată va avea punctele de control $\mathbf{d}_{0,0} = \mathbf{d}_0$, $\mathbf{d}_{1,0} = \mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_{2,0} = \mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_{3,0} = \mathbf{d}_3$ și $\mathbf{d}_{0,1} = \mathbf{d}_0 + \delta\mathbf{v} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{d}_{1,1} = \mathbf{d}_1 + \delta\mathbf{v} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{d}_{2,1} = \mathbf{d}_2 + \delta\mathbf{v} = (3, -2, 2)$, $\mathbf{d}_{3,1} = \mathbf{d}_3 + \delta\mathbf{v} = (3, -1, 2)$, nodurile în direcția u vor fi $u_i = t_i$, iar nodurile în direcția v vor fi $v_0 = v_1 = 0, v_2 = v_3 = 1$, în timp ce ponderile vor fi $w_{i0} = w_{i1} = w_i$.

11.3 Suprafețe riglate

Suprafețele studiate în paragraful precedent, după cum se observă cu ușurință, sunt suprafețe cilindrice, întrucât vectorul \mathbf{v} este constant. Ne vom ocupa de o situație ceva mai generală, a unor suprafețe care sunt, în continuare, descrise, practic, cu ajutorul unor drepte, dar aceste drepte nu mai sunt, neapărat, paralele între ele.

Vom da o definiție a suprafețelor riglate care nu este cea mai generală. Vom reveni mai târziu asupra acestui tip de suprafețe. Deocamdată suntem interesați doar de cazul suprafețelor “freeform” (Bézier și B-spline). Ideea acestei definiții a suprafețelor riglate este să luăm două curbe, ρ_1 și ρ_2 , definite pe același interval

și să unim cu segmente de dreaptă punctele de pe cele două curbe care corespund aceleiași valori a parametrului.

Suprafața care se obține în acest mod este ceea ce numim *suprafața riglată* definită de cele două curbe. Vom trata, din nou, separat cele patru tipuri de suprafețe freeform pe care le-am studiat (e vorba doar de cele produs tensorial, nu și de suprafețele triunghiulare).

11.3.1 Cazul suprafețelor Bézier polinomiale

Considerăm ρ_1 și ρ_2 două curbe Bézier de gradul n , cu punctele de control $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$, respectiv $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_n$. Suprafața riglată asociată celor două curbe este suprafața Bézier produs tensorial polinomială de bigrad $(n, 1)$, cu punctele de control $\mathbf{b}_{i0} = \mathbf{b}_i$ și $\mathbf{b}_{i1} = \mathbf{c}_i$, pentru $i = 0, \dots, n$.

Observație. Restricția ca cele două curbe să aibă același grad nu este foarte strictă. Putem oricând să aplicăm un algoritm de ridicare a gradului pentru curba de grad mai mic, dacă este cazul. Așa stau lucrurile și cu celelalte tipuri de suprafețe freeform.

Exemplul 11.5. Presupunem că curba ρ_1 este o cubică Bézier definită de punctele de control $\mathbf{b}_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_1(3, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2(3, 3, 0)$ și $\mathbf{b}_3(0, 3, 0)$, în timp ce curba ρ_2 este, de asemenea, o cubică Bézier definită de punctele de control $\mathbf{c}_0(0, 1, 4)$, $\mathbf{c}_1(1, 1, 4)$, $\mathbf{c}_2(1, 2, 4)$ și $\mathbf{c}_3(0, 2, 4)$. Atunci suprafața riglată determinată de cele două curbe este suprafața Bézier polinomială de puncte de control $\mathbf{b}_{0,0}(0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{10}(3, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{20}(3, 3, 0)$, $\mathbf{b}_{3,0}(0, 3, 0)$, $\mathbf{b}_{01}(0, 1, 4)$, $\mathbf{b}_{11}(1, 1, 4)$, $\mathbf{b}_{21}(1, 2, 4)$ și $\mathbf{b}_{31}(0, 2, 4)$. Vezi figura 11.3.

11.3.2 Cazul suprafețelor B-spline polinomiale

Considerăm, de data aceasta, două curbe B-spline polinomiale de același grad n și cu același număr de noduri, $N + n + 2$. Fie $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$ punctele de control ale curbei ρ_1 și $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_N$ – cele ale curbei ρ_2 . Fie, de asemenea, t_0, \dots, t_{N+n+1} nodurile, comune, ale celor două curbe. Atunci suprafața B-spline polinomială riglată determinată de cele două curbe, este cea determinată de punctele $\mathbf{d}_{i1} = \mathbf{d}_i$, $\mathbf{d}_{i2} = \mathbf{c}_i$, nodurile în direcția u sunt $u_i = t_i$, în timp ce nodurile în direcția v sunt $v_0 = v_1 = 0$, $v_2 = v_3 = 1$.

Exemplul 11.6. Considerăm aceleași puncte de control ca și la exemplul precedent, adică $\mathbf{d}_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{d}_1(3, 0, 0)$, $\mathbf{d}_2(3, 3, 0)$ și $\mathbf{d}_3(0, 3, 0)$, respectiv

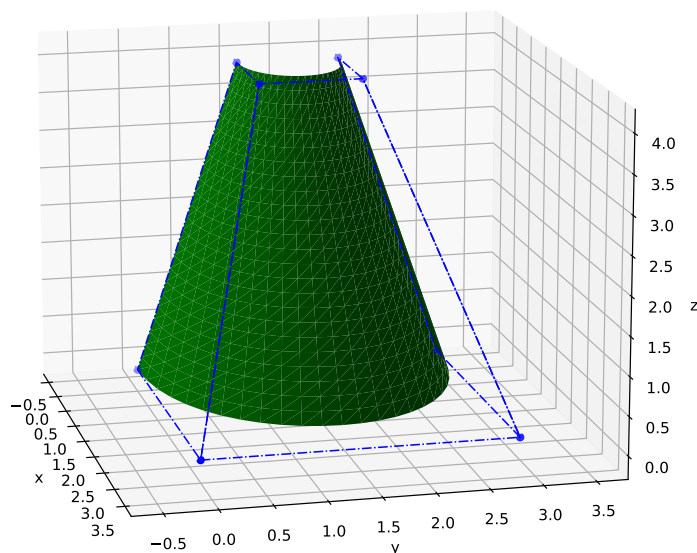


Figura 11.3: Suprafață Bèzier riglată

$c_0(0, 1, 4)$, $c_1(1, 1, 4)$, $c_2(1, 2, 4)$ și $c_3(0, 2, 4)$. Vectorul comun de noduri este
 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Cele două curbe B-spline generatoare sunt, prin urmare, curbe pătratice. Astfel, conform regulilor de mai sus, punctele de control ale suprafeței B-spline riglate generate de cele două curbe sunt $d_{00}(0, 0, 0)$, $d_{10}(3, 0, 0)$, $d_{20}(3, 3, 0)$, $d_{30}(0, 3, 0)$, $d_{01}(0, 1, 4)$, $d_{11}(1, 1, 4)$, $d_{21}(1, 2, 4)$ și $d_{31}(0, 2, 4)$. Nodurile în direcția u sunt $u_i = i$, pentru $i = 0, \dots, 6$, în timp ce nodurile în direcția v sunt $v_0 = v_1 = 0, v_2 = v_3 = 1$.

11.4 Generarea de curbe și suprafețe prin translație

11.4.1 Generarea de curbe în plan și în spațiu prin translație

Atunci când vorbim despre generarea de curbe folosind transformări geometrice, ideea este să plecăm de la un punct dat și să-i aplicăm o transformare geometrică ce depinde de un parametru, iar acest parametru va fi tocmai parametrul de-a lungul curbei.

Începem cu un exemplu foarte simplu, când îi aplicăm unui punct $P(p_1, p_2, p_3)$ o translație reprezentată printr-un vector care e variabil ca modul, dar e constant ca

direcție. Asta înseamnă că îi aplicăm lui P o translație de vector $(at, bt, ct) = \mathbf{t}(t)$, unde a, b, c sunt constante reale, cu $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Se obține astfel curba (scisă în coordonate omogene)

$$\mathbf{r}(t) = \text{Trans}(\mathbf{t}(t)) \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + at \\ p_2 + bt \\ p_3 + ct \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau, în coordonate carteziane,

$$\mathbf{r}(t) = (p_1 + at, p_2 + bt, p_3 + ct)$$

sau

$$\mathbf{r}(t) = P + \underbrace{(a, b, c)}_{=\mathbf{v}} t = P + \mathbf{v}t.$$

Astfel, \mathbf{r} este dreapta care trece prin P , de vector director $\mathbf{v}(a, b, c)$ (sau un segment de dreaptă dacă $t \in (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$).

Acest caz este, desigur, trivial. Este util, prin urmare, să considerăm o translație cu un vector de translație \mathbf{t} neliniar. Fie, prin urmare, $\mathbf{t}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, cu $t \in I \subset \mathbb{R}$. Când t parcurge intervalul I , $\mathbf{t}(t)$ descrie, de fapt o curbă. Dacă plecăm de la un punct P , curba care se obține prin translație este curba

$$\mathbf{r}(t) = (p_1 + f(t), p_2 + g(t), p_3 + h(t)),$$

adică, practic, o curbă identică cu $\mathbf{t}(t)$, translatată cu vectorul $\mathbf{r}_P(p_1, p_2, p_3)$.

Și mai interesant este să înlocuim punctul P cu o curbă $\mathbf{t}_1(t)$ care depinde de același parametru, $t \in I$. Curba care se obține, de data aceasta, este

$$\mathbf{r}(t) = (f(t) + f_1(t), g(t) + g_1(t), h(t) + h_1(t)),$$

translatată lui $\mathbf{t}_1(t)$ cu $\mathbf{t}(t)$ (sau invers!). Curbele care se obțin pe această cale sunt, de regulă, diferite ca formă de curbele inițiale.

11.4.2 Generarea de suprafețe prin translație

Ideea, de data aceasta, este să translatăm o curbă, care depinde de un anumit parametru, de-a lungul unei curbe care depinde de un alt parametru. Împreună, cei doi parametri vor fi parametrii care descriu suprafața pe care vrem să o construim.

Începem, ca și în cazul generărilor de curbe, cu cazul în care vectorul de translație este constant ca direcție, dar variabil ca modul și, eventual, ca sens. Astfel, vectorul de translație va fi de forma $\mathbf{t}(v) = (a, b, c)v$, unde v parcurge un interval I_2 de pe axa reală, iar a, b, c sunt numere reale astfel încât să avem $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Atunci, dacă plecăm de la o curbă dată de

$$\boldsymbol{\rho}(u) = (f(u), g(u), h(u)), \quad u \in I_1,$$

atunci suprafața obținută prin translatare va avea ecuația

$$\mathbf{r}(u, v) = \boldsymbol{\rho}(u) + \mathbf{t}(v) = (f(u) + a \cdot v, g(u) + b \cdot v, h(u) + c \cdot v), \quad (u, v) \in I_1 \times I_2,$$

adică va fi o porțiune din suprafața cilindrică care are curba directoare $\boldsymbol{\rho}$ și are generatoarele paralele cu vectorul (a, b, c) .

Chiar plecând de la aceeași curbă directoare, putem obține suprafețe foarte diferite, în funcție de modul în care alegem direcția generatoarelor.

Exemplul 11.7. Considerăm cercul de ecuație

$$\boldsymbol{\rho}(u) = (8 + 5 \cos u, 9 + 5 \sin u, 0), \quad u \in [0, 2\pi],$$

situat în planul xOy . Îl vom translața cu vectorul $\mathbf{t}(v) = (-v, 0, 2v)$. Obținem suprafața cilindrică

$$\mathbf{r}(u, v) = (8 + 5 \cos u - v, 9 + 5 \sin u, 2v), \quad t \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

(vezi figura 11.4).

Exemplul 11.8. Plecăm, de data aceasta, de la o curbă strâmbă,

$$\boldsymbol{\rho}(u) = (10 \cos u, 10 \sin u, 3 \sin 5u), \quad u \in [0, 2\pi].$$

O translatăm, mai întâi, în direcția vectorului $\mathbf{t}_1(v) = (0, 0, v)$, cu $v \in [-10, 10]$, și obținem suprafața

$$\mathbf{r}(u, v) = (10 \cos u, 10 \sin u, 3 \sin 5u + v)$$

(vezi figura 11.5). Translatăm acum curba în direcția vectorului $\mathbf{t}_2(v) = (0, v, 0)$, cu $v \in [-10, 10]$ și obținem suprafața cilindrică

$$\mathbf{r}(u, v) = (10 \cos u, 10 \sin u + v, 3 \sin 5u)$$

(vezi figura 11.6).

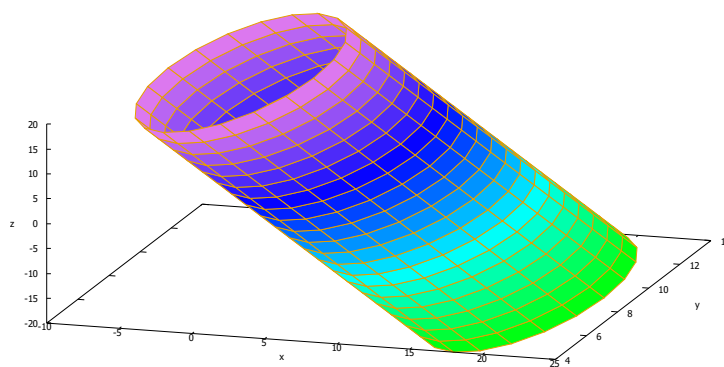


Figura 11.4: Suprafață de translație (cilindrică)

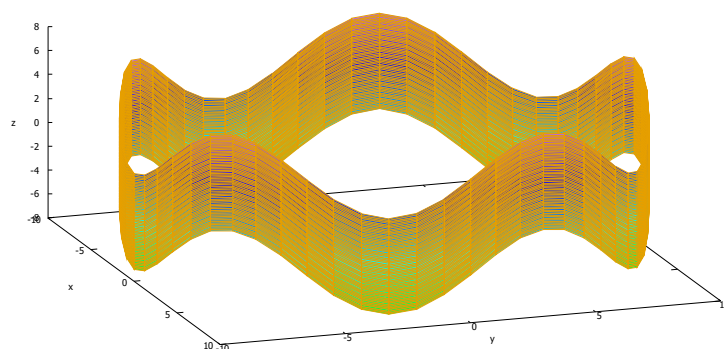


Figura 11.5: Suprafață de translație (cilindrică)

Exemplul 11.9. Vom arăta cum se poate obține paraboloidul hiperbolic translatând două parabole una pe alta. Fie

$$(C_1) \begin{cases} x = 0, \\ z = y^2 \end{cases} \quad \text{și} \quad (C_2) \begin{cases} y = 0, \\ z = -x^2. \end{cases}$$

Avem ecuațiile vectoriale

$$\boldsymbol{\rho}(u) = (0, u, u^2), \quad \mathbf{t}(v) = (v, 0, -v^2).$$

Atunci ecuația care se obține prin translație este

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \cdot u \cdot u^2 - v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

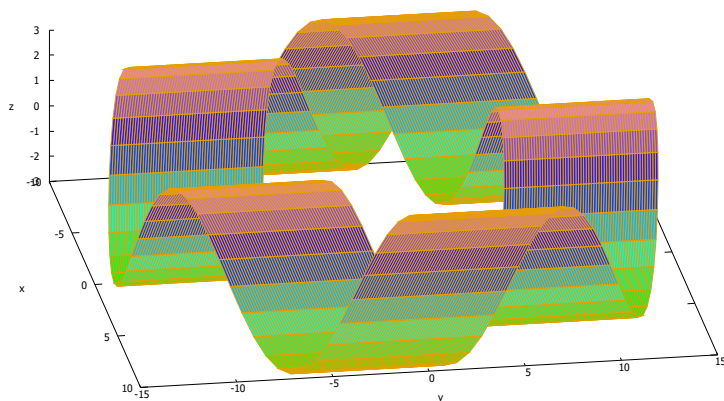


Figura 11.6: Suprafață de translație (cilindrică)

sau

$$z = y^2 - x^2,$$

adică suprafața este un paraboloid hiperbolic.

11.5 Generarea de curbe și suprafețe prin rotație

11.5.1 Generarea de curbe plane

Fie $P(p_1, p_2)$ un punct din plan. Considerăm o rotație de unghi t în jurul originii, pentru a simplifica lucrurile. Atunci când lăsăm t să parcurgă intervalul $[0, 2\pi]$, imaginea lui P prin rotație va parcurge cercul cu centrul în origine și de rază egală cu $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$,

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cos t - p_2 \sin t \\ p_1 \sin t + p_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr, avem

$$(p_1 \cos t - p_2 \sin t)^2 + (p_1 \sin t + p_2 \cos t)^2 = p_1^2 + p_2^2,$$

deci cele două componente ale imaginii lui P verifică ecuația

$$x^2 + y^2 = p_1^2 + p_2^2.$$

Considerăm acum că lui P se aplică două rotații succesive, prima de unghi nt , iar a doua de unghi t . Presupunem că cele două rotații au loc, ambele, relativ la origine. Atunci curba care se obține are ecuația

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \cos nt - \sin t \sin nt & -\cos t \sin nt - \sin t \cos nt \\ \sin t \cos nt + \cos t \sin nt & -\sin t \sin nt + \cos t \cos nt \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(n+1)t & -\sin(n+1)t \\ \sin(n+1)t & \cos(n+1)t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Imaginea acestei curbe este, prin urmare, același cerc, doar că este acoperit de mai multe ori când $t \in [0, 2\pi]$.

Astfel, pentru a obține alte curbe, trebuie să compunem rotații cu centre diferite.

Pentru a descrie rotațiile relativ la centre ce nu coincid cu originea coordonatelor, folosim coordonate omogene. Dacă centrul de rotație este punctul (x_0, y_0) , rotația de unghi t în jurul punctului (x_0, y_0) va fi dată de

$$\begin{aligned}\text{Rot}(x_0, y_0)(t) &= \text{Trans}(x_0, y_0) \text{Rot}(t) \text{Trans}(-x_0, -y_0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & -x_0 \cos t + y_0 \sin t + x_0 \\ \sin t & \sin t & -x_0 \sin t - y_0 \cos t + y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Să presupunem că aplicăm această transformare în jurul unui punct situat pe axa Ox , fie el $C(x_0, 0)$. Atunci formula precedentă devine

$$\text{Rot}(x_0, 0) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & -x_0 \cos t + x_0 \\ \sin t & \cos t & -x_0 \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să presupunem că aplicăm această transformare unui punct situat pe axa Ox , la distanța r față de centrul de rotație. Acest punct va avea coordonatele $(x_0 + r, 0)$.

Imaginea sa prin rotație este dată de

$$\begin{aligned} \text{Rot}(x_0, 0) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & -x_0 \cos t + x_0 \\ \sin t & \cos t & -x_0 \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (x_0 + r) \cos t - x_0 \cos t + x_0 \\ (x_0 + r) \sin t - x_0 \sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + r \cos t \\ r \sin t \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Astfel, dacă t parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, imaginea punctului P va parcurge cercul de ecuație

$$\rho(t) = (x_0 + r \cos t, r \sin t).$$

Dacă rotația se face cu un unghi nt , unde n este un număr real oarecare, atunci, când t parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, imaginea lui P va parcurge o porțiune din cercul de ecuație

$$\rho(t) = (x_0 + r \cos nt, r \sin nt).$$

Să presupunem că acum îi aplicăm acestui cerc încă o rotație, de data aceasta de unghi t , în jurul originii. Curba obținută va avea ecuația

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + r \cos nt \\ r \sin nt \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \cos t + r \cos t \cos nt - r \sin t \sin nt \\ x_0 \sin t + r \sin t \cos nt + r \cos t \sin nt \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t + r \cos(n+1)t \\ x_0 \sin t + r \sin(n+1)t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sau

$$\rho_1(t) = (x_0 \cos t + r \cos(n+1)t, x_0 \sin t + r \sin(n+1)t).$$

Curbele de acest tip se numesc *epitrohoide*. Ele sunt curbe descrise de un punct legat de un disc mobil care se rostogolește, fără să alunece pe un cerc fix, în exteriorul acestuia. Dacă punctul se află pe circumferința cercului fix, atunci curba se numește *epicicloidă*.

Pentru diferite valori ale parametrilor x_0 și n se obțin curbe clasice:

- pentru $x_0 = 2r$ și $n = 1$ se obține cardioida (vezi Figura 11.7):

$$\rho(t) = (2r \cos t + r \cos(2t), 2r \sin t + r \sin(2t));$$

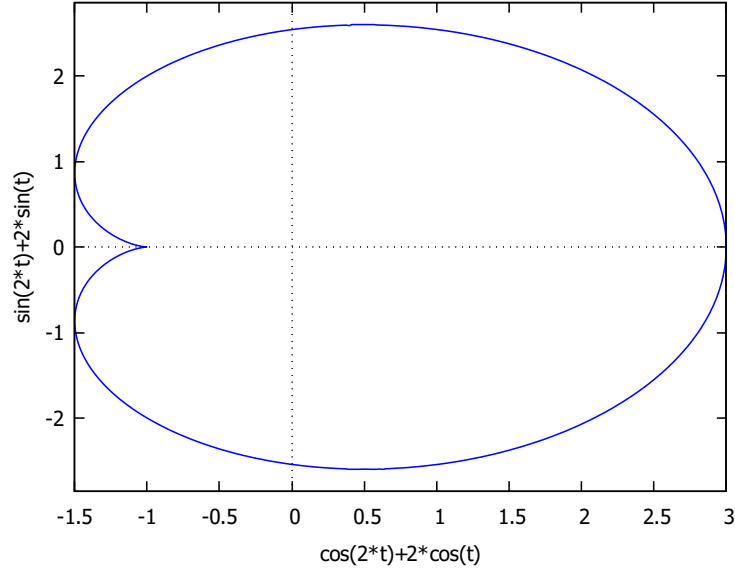


Figura 11.7: Cardioida

- pentru $x_0 = 8r$ și $n = 7$ se obține epicycloida cu 7 puncte de întoarcere (vezi Figura 11.8):

$$\rho(t) = (8r \cos t + r \cos(8t), 8r \sin t + r \sin(8t));$$

Să presupunem, acum, că cercul cu centrul în $(x_0, 0)$ și de rază r este parcurs în sens orar. Atunci punctele acestui cerc sunt descrise prin

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r \cos nt \\ -r \sin nt \end{pmatrix}$$

(pentru că rotația nu se mai face cu unghiul t , ci cu unghiul $-t$). Dacă aplicăm acestui cerc o rotație de unghi t , în sens trigonometric pozitiv, obținem curba

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + r \cos nt \\ -r \sin nt \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t + r \cos t \cos nt + r \sin t \sin nt \\ x_0 \sin t + r \sin t \sin nt - r \cos t \sin nt \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \cos t + r \cos(n-1)t \\ y_0 \sin t - r \sin(n-1)t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

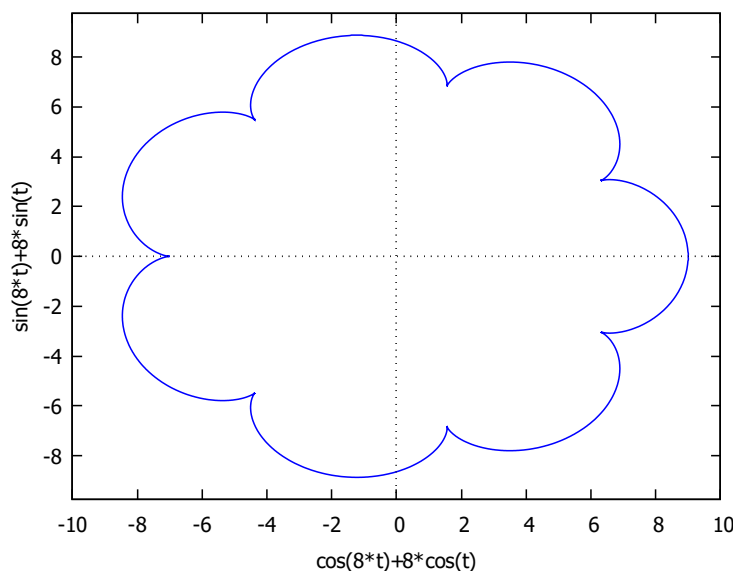


Figura 11.8: Epicicloida cu 7 puncte de întoarcere

sau

$$\rho_1(t) = (x_0 \cos t + r \cos(n-1)t, y_0 \sin t - r \sin(n-1)t).$$

Curbele de acest tip se numesc *hipetrohoide*. Ele se pot descrie în mod analog cu epitrohoidele, cu diferența că cercul mobil se mișcă în interiorul cercului fix. Dacă punctul legat de cercul mobil se află pe circumferința sa, obținem *hipocicloidele*.

Și aici obținem curbe clasice dacă facem alegeri particulare pentru x_0 și n . De exemplu:

- pentru $x_0 = 3r$ și $n = 4$ obținem *astroida* (vezi figura 11.9):

$$\rho(t) = (3 \cos t + \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t);$$

- pentru $x_0 = 9r$ și $n = 10$ obținem hipocicloida cu 10 puncte de întoarcere (vezi figura 11.10):

$$\rho(t) = (9 \cos t + \cos 9t, 9 \sin t - \sin 9t).$$

Observație. Remarcăm că atât epitrohoidele, cât și hipetrohoidele sunt curbe închise dacă și numai dacă n este un număr rațional.

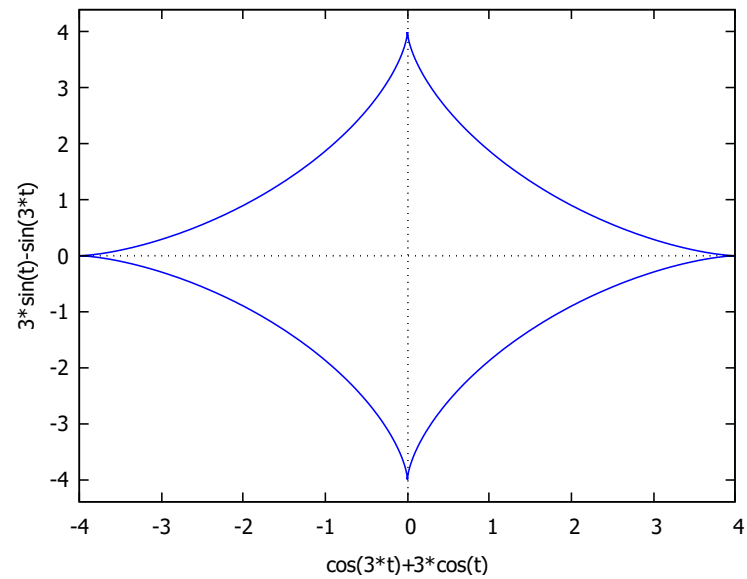


Figura 11.9: Astroida

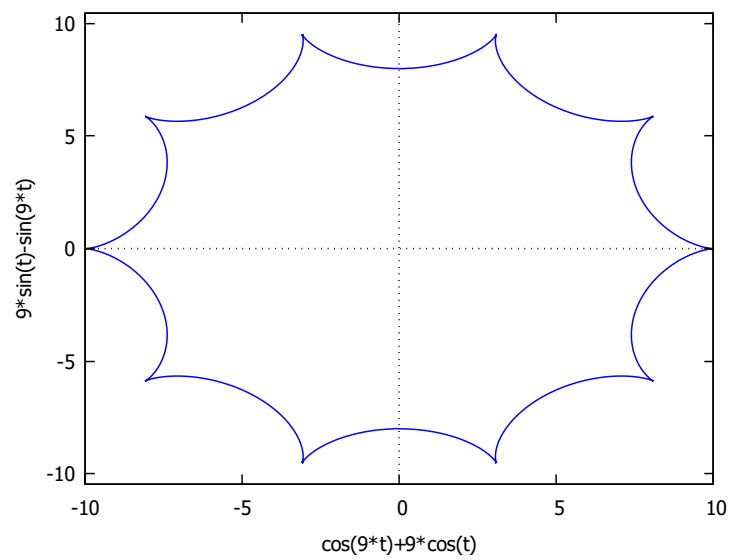


Figura 11.10: Hipocicloida cu 10 puncte de întoarcere

11.5.2 Suprafețe obținute printr-o singură rotație

Ne vom limita la discutarea suprafețelor care se obțin prin rotații în jurul axelor de coordonate. Considerăm o curbă netedă

$$\rho(u) = (f(u), g(u), h(u)), \quad u \in I.$$

Vom stabili, în cele ce urmează, ecuațiile suprafețelor de rotație care se obțin prin rotirea acestei curbe în jurul uneia dintre cele trei axe de coordonate.

1) Suprafețe obținute printr-o rotație în jurul axei Ox .

Suprafața obținută prin rotirea lui ρ în jurul axei Ox este

$$\mathbf{r}_1(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v & 0 \\ 0 & \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ h(u) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \cos v - h(u) \sin v \\ g(u) \sin v + h(u) \cos v \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau

$$\mathbf{r}_1(u, v) = (f(u), g(u) \cos v - h(u) \sin v, g(u) \sin v + h(u) \cos v).$$

Dacă ρ e o curbă plană, situată în planul xOy , atunci ecuația se simplifică și obținem

$$\mathbf{r}_1(u, v) = (f(u), g(u) \cos v, g(u) \sin v).$$

2) Suprafețe obținute printr-o rotație în jurul axei Oy .

Suprafața obținută prin rotirea lui ρ în jurul axei Oy este

$$\mathbf{r}_2(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & 0 & \sin v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ h(u) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \cos v + h(u) \sin v \\ g(u) \\ -f(u) \sin v + h(u) \cos v \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau

$$\mathbf{r}_2(u, v) = (f(u) \cos v + h(u) \sin v, g(u), -f(u) \sin v + h(u) \cos v).$$

Dacă ρ e o curbă plană, situată în planul yOz ($f(u) = 0$), atunci ecuația se simplifică și obținem

$$\mathbf{r}_2(u, v) = (h(u) \sin v, g(u), h(u) \cos v).$$

3) Suprafețe obținute printr-o rotație în jurul axei Oz .

Suprafața obținută prin rotirea lui ρ în jurul axei Oz este

$$\mathbf{r}_3(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ h(u) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \cos v - g(u) \sin v \\ f(u) \sin v + g(u) \cos v \\ h(u) \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau

$$\mathbf{r}_3(u, v) = (f(u) \cos v - g(u) \sin v, f(u) \sin v + g(u) \cos v, h(u)).$$

Dacă ρ e o curbă plană, situată în planul xOz ($g(u) = 0$), atunci ecuația se simplifică și obținem

$$\mathbf{r}_3(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, h(u)).$$

Aceasta este forma cea mai răspândită a unei suprafețe de rotație, văzută, de exemplu, ca fiind obținută prin rotirea unei curbe plane (din planul xOz) în jurul axei Oz .

Exemple. (i) Rotim curba de ecuații

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 2x^2 e^{-x^2/25}, \end{cases} \quad x \in [0, \infty)$$

în jurul axei Oz .

Parametrizăm, mai întâi curba, alegând parametrul astfel încât să obținem

$$\begin{cases} x = 5u, \\ y = 0, \\ z = 50u^2 e^{-u^2}. \end{cases}$$

Am obținut, astfel, curba

$$\rho(u) = (5u, 0, 50u^2 e^{-u^2}).$$

Suprafața de rotație în jurul axei Oz care se obține este

$$\mathbf{r}(u, v) = (5u \cos v, 5u \sin v, 50u^2 e^{-u^2}).$$

(vezi figura 11.11)

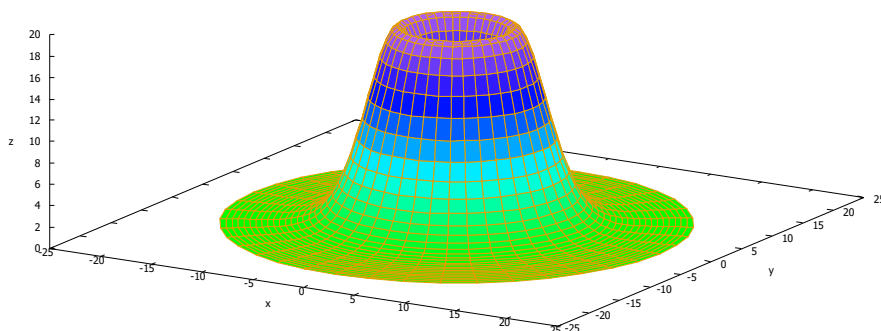


Figura 11.11: Exemplu de suprafață de rotație în jurul axei Oz

(ii) **Conul de rotație în jurul axei Ox .**

Considerăm dreapta

$$\rho(u) = (2u, 0, 1 - u).$$

Suprafața de rotație în jurul axei Ox care se obține este

$$\mathbf{r}(u, v) = (2u, (1 - u) \sin v, (1 - u) \cos v).$$

(vezi figura 11.12)

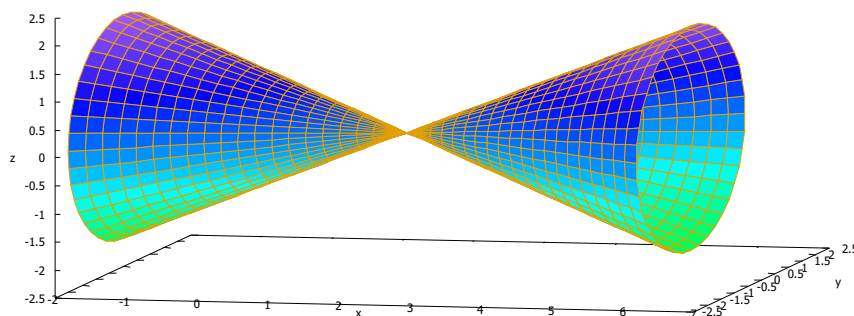


Figura 11.12: Con de rotație

Observație. Remarcăm că suprafața pe care am obținut-o se poate scrie

$$-\frac{(x - 2)^2}{4} + y^2 + z^2 = 0,$$

adică este, într-adevăr, un con de rotație în jurul axei Ox .

(iii) **Torul astroidal.**

Considerăm astroida (în planul xOz)

$$\boldsymbol{\rho}(u) = (3 \cos u + \cos 3u, 0, 3 \sin u - \sin 3u)$$

și o translatăm cu vectorul $\mathbf{v}(6, 0, 0)$. Obținem curba

$$\boldsymbol{\rho}_1(u) = (6 + 3 \cos u + \cos 3u, 0, 3 \sin u - \sin 3u)$$

O rotim în jurul axei Oz și obținem ecuația torului astroidal

$$\mathbf{r}(u, v) = ((6 + 3 \cos u + \cos 3u) \cos v, (6 + 3 \cos u + \cos 3u) \sin v, 3 \sin u - \sin 3u)$$

(vezi figura 11.13)

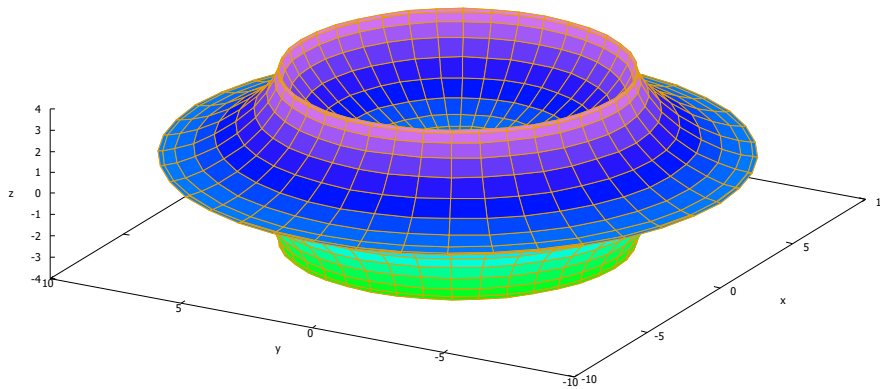


Figura 11.13: Torul astroidal

(iv) **Torul de rotație în jurul axei Ox .**

Plecăm tot de la o curbă plană (cerc) din planul xOz :

$$\boldsymbol{\rho}(u) = (12 + 2 \cos u, 0, 12 + 2 \sin u),$$

și o rotim, de data asta în jurul axei Ox . Obținem suprafața

$$\mathbf{r}(u, v) = (12 + 2 \cos u, -(12 + 2 \sin u) \sin v, (12 + 2 \sin u) \cos v)$$

(vezi figura 11.14)

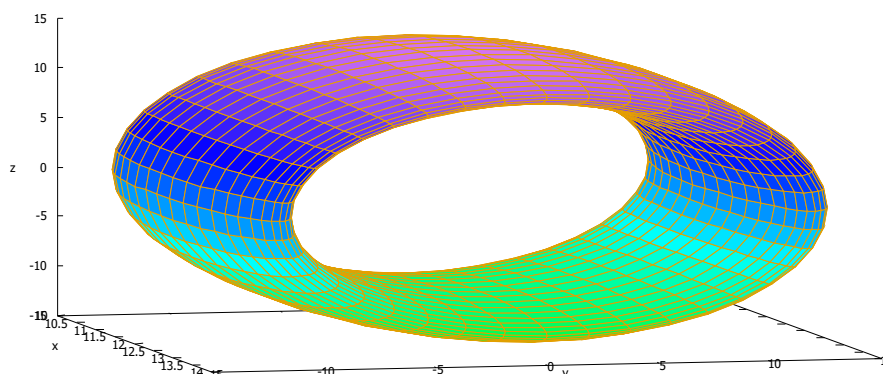


Figura 11.14: Torul de rotație în jurul axei Ox

11.5.3 Suprafețe obținute prin compunerea a două rotații: Banda lui Möbius și alte suprafețe “răsucite”

Plecăm de la segmentul de dreaptă AB , cu $A(0, 8, 0)$ și $B(0, 22, 0)$, situat pe axa Oy , și de ecuație

$$\mathbf{t}(u) = (0, 15 + u, 0).$$

Rotim acest segment de dreaptă în jurul unei axe paralele cu axa Ox , care trece prin mijlocul segmentului AB , punctul $M(0, 15, 0)$.

Determinăm, mai întâi, matricea rotației, fie ea de unghi $v/2$. Ca de obicei, aplicăm, prima dată, o translație care aduce punctul M în origine, deci transformă axa de rotație în axa Ox . Matricea ei va fi, desigur,

$$\text{Trans}(0, -15, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicăm acum rotația de unghi $v/2$ în jurul axei Ox , de matrice

$$\text{Rot}_x\left(\frac{v}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{v}{2} & -\sin \frac{v}{2} & 0 \\ 0 & \sin \frac{v}{2} & \cos \frac{v}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În sfârșit, aplicăm o translație inversă primei, de vector $(0, 15, 0)$, care aduce axa în poziția inițială, de matrice

$$\text{Trans}(0, 15, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea rotației în jurul axei originale este, prin urmare,

$$\begin{aligned} \text{Rot}((0, 15, 0), \mathbf{i}) \left(\frac{v}{2} \right) &= \text{Trans}(0, 15, 0) \text{Rot}_x \left(\frac{v}{2} \right) \text{Trans}(0, -15, 0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{v}{2} & -\sin \frac{v}{2} & 15 \left(1 - \cos \frac{v}{2} \right) \\ 0 & \sin \frac{v}{2} & \cos \frac{v}{2} & -15 \sin \frac{v}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

iar imaginea segmentului prin această rotație este

$$\mathbf{s}(u, v) = \left(0, 15 + u \cos \frac{v}{2}, u \sin \frac{v}{2} \right).$$

Îi aplicăm lui \mathbf{s} încă o rotație, de data asta în jurul axei Oz , de unghi v și, prin urmare, de matrice

$$\text{Rot}_z(v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultatul final, după ce i-am aplicat lui \mathbf{t} cele două rotații, este suprafața

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(-\sin v \left(15 + \cos \frac{v}{2} \right), \cos v \left(15 + \cos \frac{v}{2} \right), u \sin \frac{v}{2} \right),$$

care este chiar *Banda lui Möbius* (vezi figura 11.15) Banda lui Möbius este un exemplu (primul!) de suprafață neorientabilă, care are o singură față. Suprafețe interesante se obțin, de asemenea, dacă, la prima rotație, nu folosim unghiul $v/2$, ci un unghi care este un multiplu întreg al acestuia. Astfel, dacă folosim v în loc de $v/2$, obținem o bandă *dublu răsucită*, care este orientabilă (vezi figura 11.16): Dacă punem, în schimb, $3v/2$ în loc de $v/2$, obținem o bandă *triplu răsucită*, care este, din nou, neorientabilă (vezi figura 11.17): Suprafețe interesante se pot obține și rotind curbe închise relativ la axe diferite, precum curba din figura 11.18, obținută plecând de la o epicicloidă, printr-o dublă rotație.

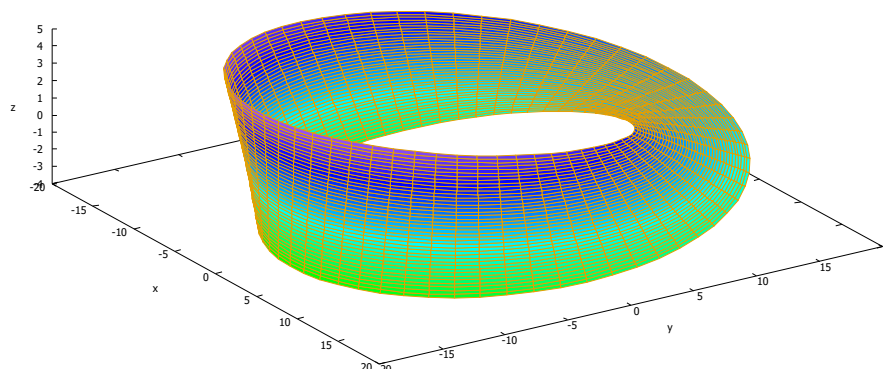


Figura 11.15: Banda lui Möbius

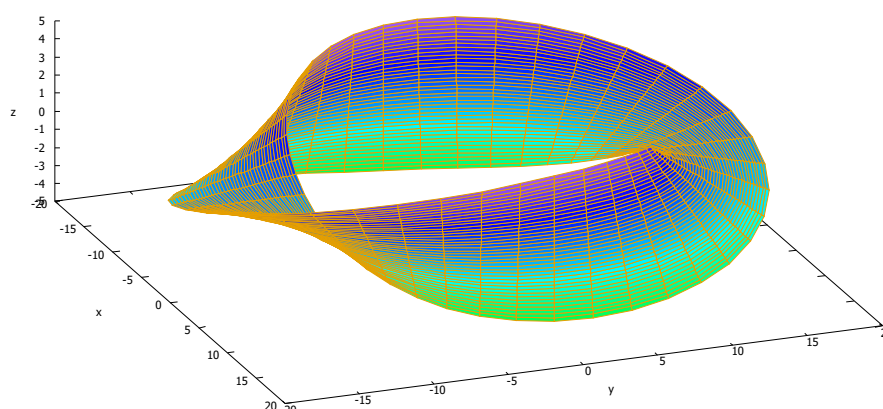


Figura 11.16: Bandă dublu răsucită

11.6 Curbe și suprafețe generate prin rototranslație

11.6.1 Curbe cicloidale

Curbele cicloidale se obțin aplicând unui punct de pe axa Ox o rotație, urmată de o translație.

Considerăm un $R > 0$. Facem, mai întâi, o rotație de unghi $-t$ (adică în sens

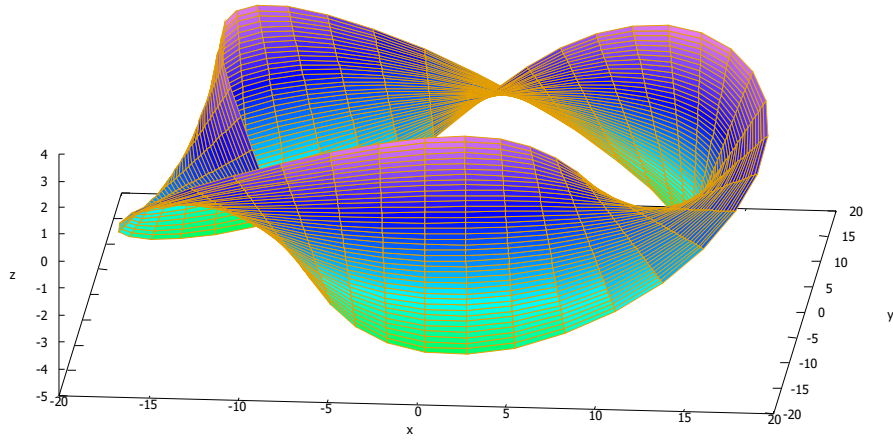


Figura 11.17: Bandă triplu răsucită

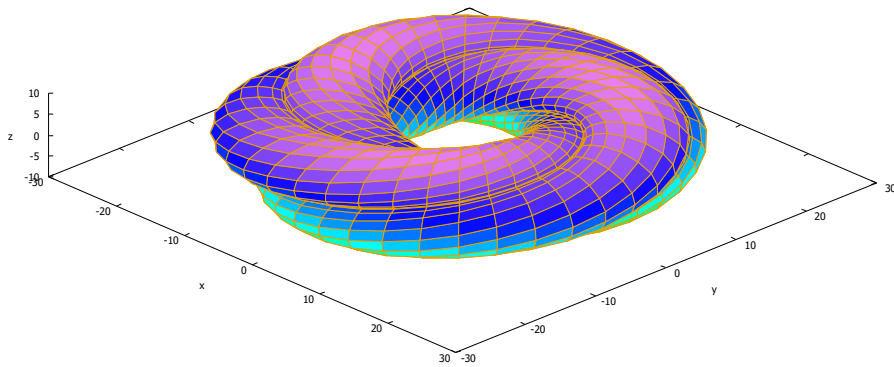


Figura 11.18: Suprafață obținută prin rotirea unei epicicloide

orar) în jurul punctului $C(0, R)$. Matricea rotației este

$$\begin{aligned}
 \text{Rot}(C)(-t) &= \text{Trans}(0, R) \text{Rot}(-t) \text{Trans}(0, -R) = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & R \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) & 0 \\ \sin(-t) & \cos(-t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -R \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & -R \sin t \\ -\sin t & \cos t & R(1 - \cos t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Matricea translației de vector $(Rt, 0)$ este

$$\text{Trans}(Rt, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Rt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci matricea transformării totale este

$$T = \text{Trans}(Rt, 0) \text{Rot}(0, R)(-t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & R(t - \sin t) \\ -\sin t & \cos t & R(1 - \cos t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă aplicăm transformarea originii, obținem ecuația *cicloidei ordinare*,

$$\boldsymbol{\rho}(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$$

(vezi figura 11.19): Cicloida ordinară sau cicloida propriu-zisă este curba descrisă

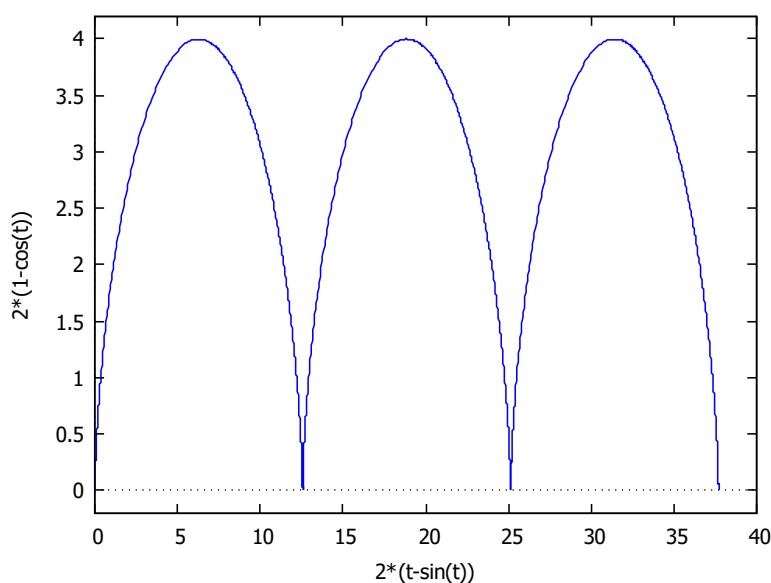


Figura 11.19: Cicloida (ordinară)

de un punct de pe circumferința unui cerc de rază R care se rostogolește, fără să alunece pe o dreaptă (axa Ox).

Dacă, în aceeași mișcare, studiem traiectoria unui punct care este legat de cercul care se rostogolește, dar nu e pe traiectorie, ci în interior sau în exterior, să zicem că distanța de la ele până la centru este egală cu R_1 , atunci se obține:

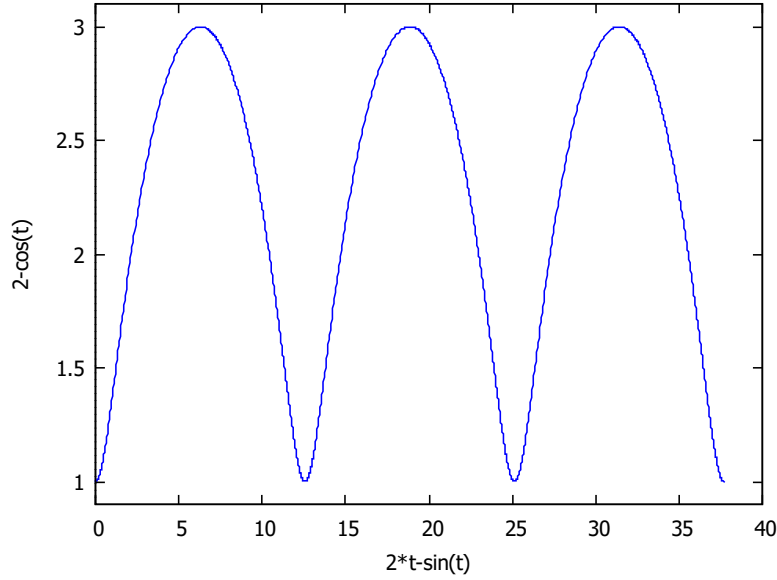


Figura 11.20: Ciclopedia scurtată

- o *ciclopedia scurtată* dacă $R_1 < R$ (vezi figura 11.20);
- o *ciclopedia alungită* dacă $R_1 > R$ (vezi figura 11.21).

Ecuția unei cicloi de generale se găsește aplicând transformarea punctului $(0, R - R_1)$. Ea este

$$\rho(t) = (Rt - R_1 \sin t, R - R_1 \cos t).$$

Dacă $R = R_1$, obținem ciclopedia propriu-zisă, dacă $R_1 < R$ – ciclopedia scurtată, iar dacă $R_1 > R$ – ciclopedia alungită.

11.6.2 Elicea cilindrică

Această curbă se obține aplicând unui punct o rotație de unghi t în jurul axei Oz urmată de o translație de-a lungul aceleiași axe, de vector $(0, 0, kt)$. Astfel, matricea transformării este

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & kt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & kt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

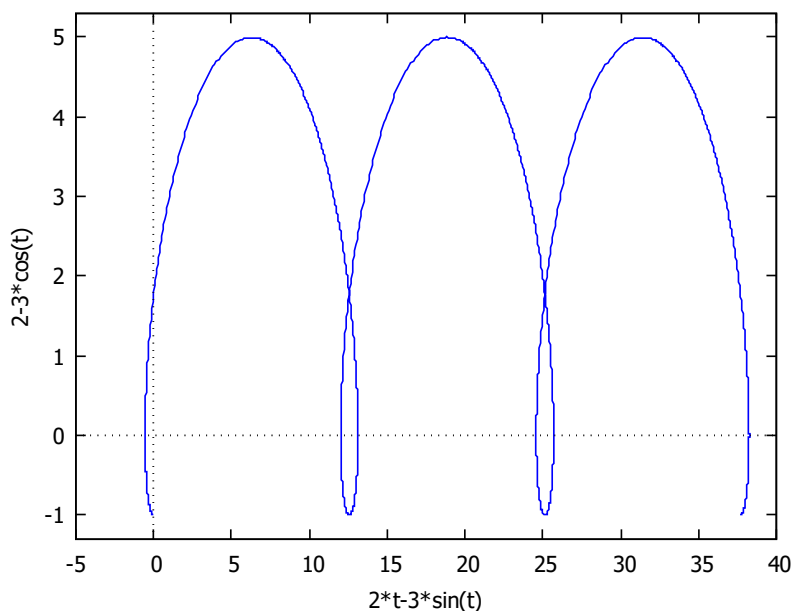


Figura 11.21: Cicloida alungită

Dacă aplicăm transformarea punctului $P(R, 0, 0)$, obținem ecuația elicei cilindrice,

$$\rho(t) = (R \cos t, R \sin t, kt)$$

(vezi figura 11.22).

11.6.3 Elicoidul drept

Elicoidul drept se obține rotind o dreaptă în jurul unei axe perpendiculare pe ea și pe care o intersectează, și care execută, în același timp, o translație în direcția axei de rotație.

Presupunem că, în poziția inițială, dreapta generatoare este axa Ox , de ecuație

$$\rho(u) = (u, 0, 0),$$

axa de rotație fiind axa Oz . Vom aplica o rotație de unghi v în jurul axei Oz , urmată de o translație în direcția axei Oz , de vector $(0, 0, v)$. Atunci matricea de

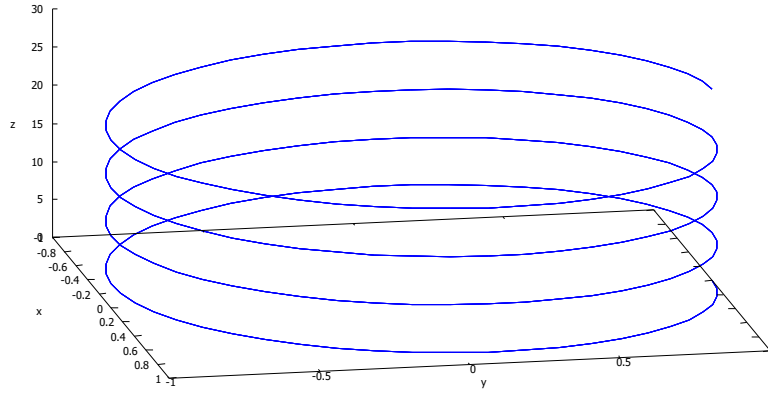


Figura 11.22: Elicea cilindrică

transformare va fi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuția suprafeței se obține aplicând transformarea obținută axei Ox , cu parametrizarea aleasă și obținem

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

(vezi figura 11.23).

11.6.4 Șurubul din Saint-Gilles

Considerăm cercul

$$\rho(u) = (0, 5 + 3 \cos u, 5 + 3 \sin u),$$

situat în planul yOz și îi aplicăm o rotație de unghi v în jurul axei Oz , urmată de o translație în direcția axei de rotație, de vector $(0, 0, 3v)$. Suprafața care se obține

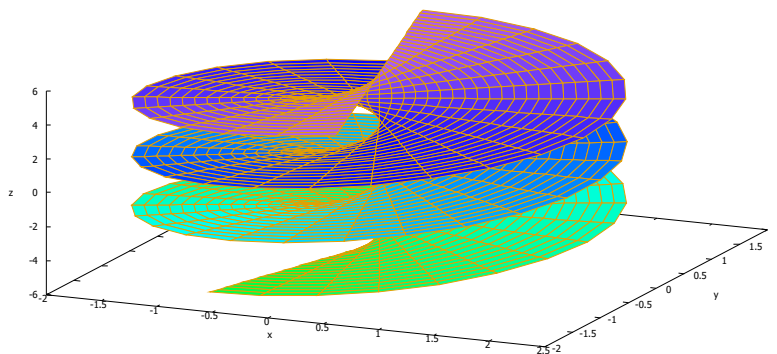


Figura 11.23: Elicoidul drept

(șurubul din Saint-Gilles¹), va avea ecuația

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 + 3 \cos u \\ 5 + 3 \sin u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin v(5 + 3 \cos u) \\ \cos v(5 + 3 \cos u) \\ 5 + 3 \sin u + 3v \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau

$$\mathbf{r}(u, v) = (-\sin v(5 + 3 \cos u), \cos v(5 + 3 \cos u), 5 + 3 \sin u + 3v)$$

(vezi figura 11.24).

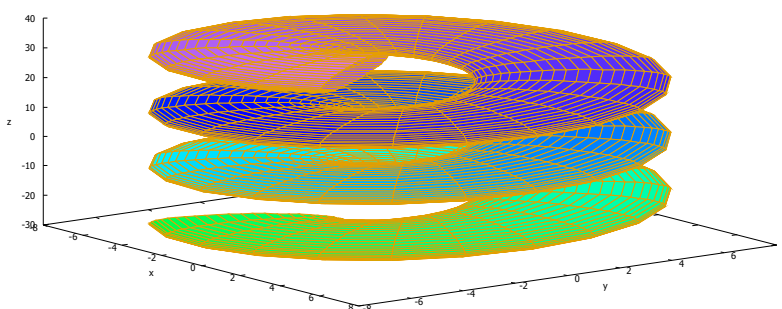


Figura 11.24: Șurubul din Saint-Gilles

¹Suprafața este numită astfel pentru că o construcție de această formă există în biserica din Saint-Gilles du Gard, din Franța.

11.7 Generarea de curbe și suprafețe prin compunerea de rotații, translații și scalări

11.7.1 Elicea conică

Este o curbă interpretabilă ca traiectoria unui punct mobil ce se rotește în jurul unei axe, suferind, în același timp, o translație și o scalare.

Curba se obține ca o compunere de trei transformări:

- o rotație de unghi t în jurul axei Oz ;
- o scalare neuniformă de factori $(at, at, 1)$;
- o translație în direcția axei de rotație, de vector $(0, 0, bt)$.

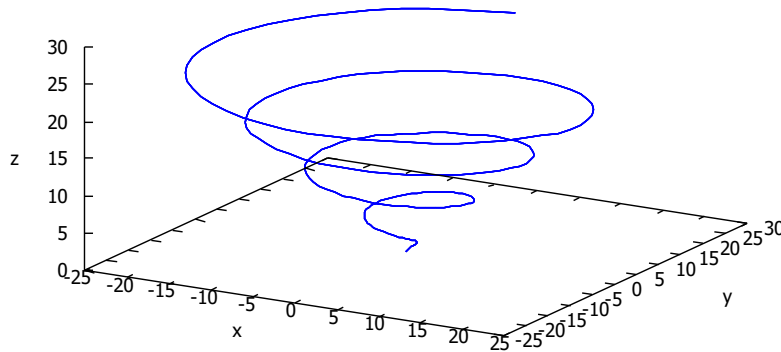


Figura 11.25: Elicea conică

Matricea transformării va fi, deci,

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at & 0 & 0 & 0 \\ 0 & at & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} at \cos v & -at \sin v & 0 & 0 \\ at \sin v & at \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dacă aplicăm transformarea unui punct $P(R, 0, 0)$, obținem ecuația elicei conice,

$$\rho(t) = (Rat \cos t, Rat \sin t, bt)$$

(vezi figura 11.25).

Se observă imediat că curba se află, într-adevăr, pe conul de rotație

$$\frac{x^2}{R^2 a^2} + \frac{y^2}{R^2 a^2} = \frac{z^2}{b^2}.$$

11.7.2 Melcul

Considerăm cercul (sitiat în planul xOz),

$$\rho(u) = (1 + \sin u, 0, \cos u).$$

Îi aplicăm o rotație de unghi v în jurul axei Oz , urmată de o scalare uniformă de factor v . Matricea transformării va fi atunci

$$T = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos v & -v \sin v & 0 & 0 \\ v \sin v & v \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă aplicăm transformarea cercului ρ , obținem ecuația suprafeței:

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \cos v(1 + \sin u), v \sin v(1 + \sin u), v \cos u)$$

(vezi figura 11.26).

11.7.3 Cornul

Considerăm cercul (situat în planul yOz)

$$\rho(u) = (0, 3 + 2 \cos u, 2 \sin u).$$

Îi aplicăm, în ordine,

- o rotație de unghi v în jurul axei Oz ;
- o translație în direcția axei de rotație, de vector $\left(0, 0, \frac{2}{3}v\right)$;

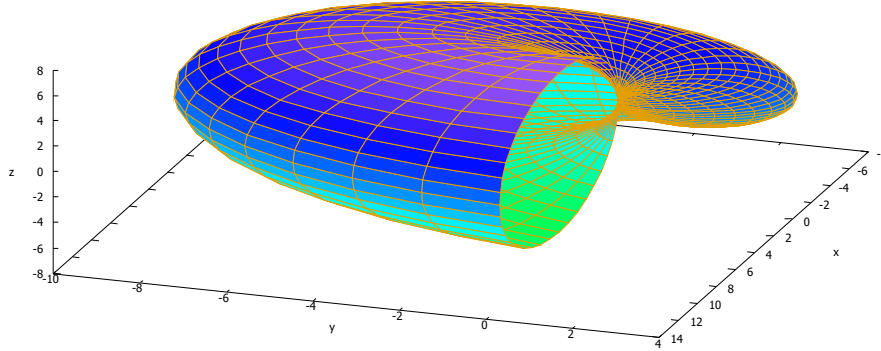


Figura 11.26: Melcul

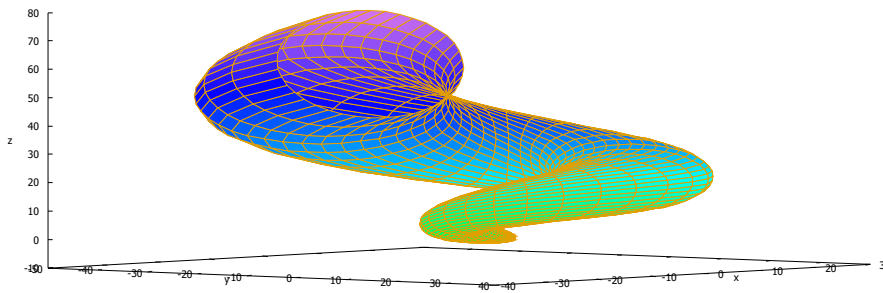


Figura 11.27: Cornul

- o scalare uniformă de factor de scală v .

Astfel, matricea de transformare va fi:

$$T = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3}v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v \cos v & -v \sin v & 0 & 0 \\ v \sin v & v \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3}v^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă aplicăm transformarea cercului, obținem ecuația suprafeței:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(-v \sin v(3 + 2 \cos u), v \cos v(3 + 2 \cos u), 2 \sin u + \frac{2}{3}v^2 \right)$$

(vezi figura 11.27).

11.7.4 Cochilia

Considerăm cercul (din planul xOz)

$$\boldsymbol{\rho}(u) = (3 \sin u, 0, 3 \cos u).$$

Îi aplicăm următoarea secvență de transformări:

- o rotație de unghi v în jurul axei Oz ;
- o scalare neuniformă de factori $(v/3, v/3, 1)$;
- O translație în direcția axei de rotație, de vector $(0, 0, v)$.

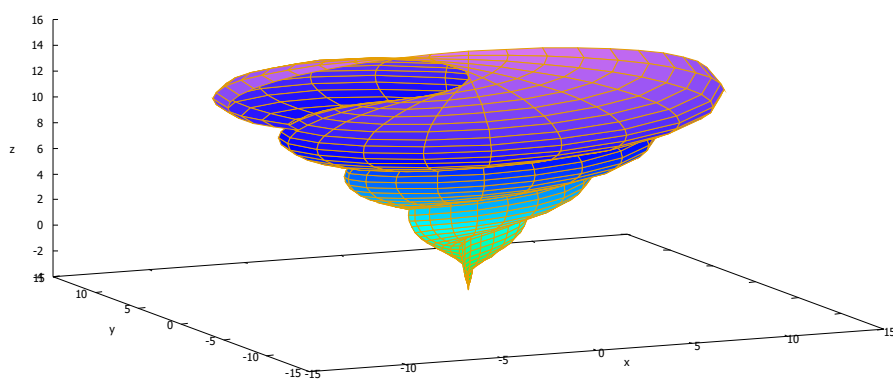


Figura 11.28: Cochilia

Matricea transformării este:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}v \cos v & -\frac{1}{3}v \sin v & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}v \sin v & \frac{1}{3}v \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă aplicăm transformarea cercului, obținem suprafața

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \cos v \sin u, v \sin v \sin u, v + 3 \cos u)$$

(vezi figura 11.28).

11.7.5 Un alt corn

Suprafața se obține aplicând cercului (din planul xOz)

$$\boldsymbol{\rho}(u) = (1 + \cos u, 0, \sin u),$$

aplicându-i următoarele transformări:

- o rotație în jurul axei Oz de unghi v ;
- o translație de vector $(0, 0, -5v/6)$;
- o scalare neuniformă de factori

$$3(e^{0.1v} - 1), 3(e^{0.1v} - 1), 5(e^{0.1v} - 1);$$

- o translație de vector $(0, 0, 20)$.

Se obține, în final, ecuația

$$\mathbf{r}(u, v) = (3 \cos v (e^{0.1v} - 1) (1 + \cos u), 3 \sin v (e^{0.1v} - 1) (1 + \cos u),$$

$$5(e^{0.1v} - 1) \left(\sin u - \frac{v}{3} \right) + 20),$$

unde $u \in [0, 2\pi]$ și $v \in \left[0, \frac{7\pi}{2}\right]$ (vezi figura 11.29).

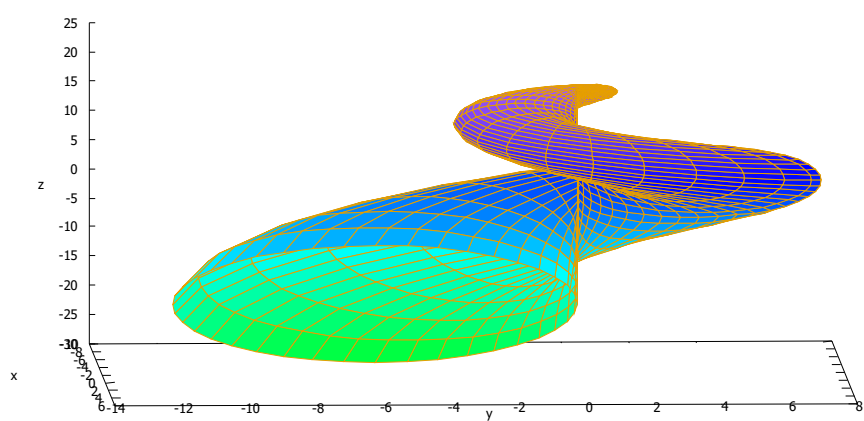


Figura 11.29: Un alt corn