— Temă lab 3 —

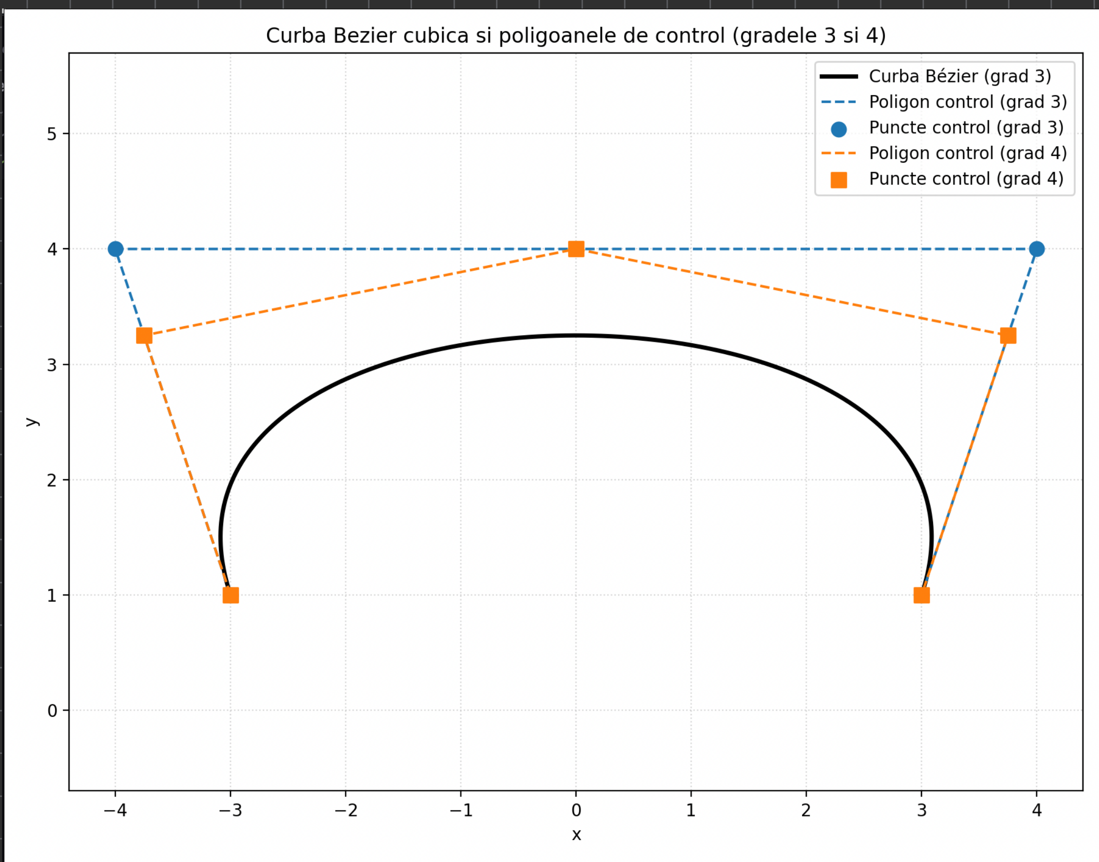
1. Fie curba Bézier cubică dată de punctele de control $b_0(-3,1), b_1(-4,4), b_2(4,4), b_3(3,1)$.
(i) Determinați punctele de control ale curbei, privită ca o curbă de gradul 4.

Soluție: Conform prop. 4.5.2 din curs, avem punctele de control $c_0, \dots, c_4$ date de

$$c_0 = b_0 = (-3,1)$$
$$c_1 = \frac{4-1}{4}\cdot b_1 + \frac{1}{4} b_0 = \frac{3}{4}(-4,4) + \frac{1}{4}(-3,1) = \left(-\frac{12}{4}-\frac{3}{4}, \frac{12}{4}+\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{15}{4}, \frac{13}{4}\right)$$
$$c_2 = \frac{4-2}{4}\cdot b_2 + \frac{2}{4}\cdot b_1 = \frac{2}{4}(4,4) + \frac{2}{4}(-4,4) = \left(\frac{8}{4}-\frac{8}{4}, \frac{8}{4}+\frac{8}{4}\right) = (0,4)$$
$$c_3 = \frac{4-3}{4}\cdot b_3 + \frac{3}{4}\cdot b_2 = \frac{1}{4}(3,1) + \frac{3}{4}(4,4) = \left(\frac{3}{4}+\frac{12}{4}, \frac{1}{4}+\frac{12}{4}\right) = \left(\frac{15}{4}, \frac{13}{4}\right)$$
$$c_4 = b_3 = (3,1)$$

Punctele de control ale curbei, privită ca o curbă de gradul 4 sunt: $c_0(-3,1), c_1\left(-\frac{15}{4}, \frac{13}{4}\right), c_2(0,4), c_3\left(\frac{15}{4}, \frac{13}{4}\right), c_4(3,1)$.

ii) Reprezentați grafic (cu gnuplot, geogebra, maxima, matplotlib, ...) pe același sistem de axe: curba, punctele de control și poligonul de control ale curbei privite ca o curbă de gradul 3, precum și punctele de control și poligonul de control ale curbei, privite ca o curbă de gradul 4.



2. Fie curba Bézier de gradul 3 de la problema precedentă.
(i) Divizați curba la valoarea 1/3 a parametrului, determinând punctele de control și parametrizările pe intervalul $[0,1]$ pt fiecare dintre cele două segmente.

Soluție: Aplicăm algoritmul lui de Casteljau pt. derivată.
Inițiem $b_0^0 = b_0,\ b_1^0 = b_1,\ b_2^0 = b_2,\ b_3^0 = b_3.$, $t_0 = \frac{1}{3}$

Avem de executat 3 pași:

Pasul I: $b_0^1 = (1-t_0)b_0^0 + t_0 \cdot b_1^0 = \frac{2}{3}b_0^0 + \frac{1}{3}b_1^0 = \frac{2}{3}(-3,1) + \frac{1}{3}(-4,4) = \left(\frac{-6}{3} - \frac{4}{3}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)$
$= \left(-\frac{10}{3}, 2\right)$

$b_1^1 = (1-t_0)b_1^0 + t_0 \cdot b_2^0 = \frac{2}{3}b_1^0 + \frac{1}{3}b_2^0 = \frac{2}{3}(-4,4) + \frac{1}{3}(4,4) = \left(\frac{-8+4}{3}, \frac{8+4}{3}\right) = \left(\frac{-4}{3}, 4\right)$

$b_2^1 = \frac{2}{3}b_2^0 + \frac{1}{3}b_3^0 = \frac{2}{3}(4,4) + \frac{1}{3}(3,1) = \left(\frac{8}{3} + \frac{3}{3}, \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}, 3\right)$

Pasul al II-lea: $b_0^2 = (1-t_0)b_0^1 + t_0 b_1^1 = \frac{2}{3}\left(-\frac{10}{3}, 2\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}, 4\right) = \left(-\frac{20}{9} - \frac{4}{9}, \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{24}{9}^{(3}, \frac{8}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$

$b_1^2 = (1-t_0)b_1^1 + t_0 b_2^1 = \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{3}, 4\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{11}{3}, 3\right) = \left(-\frac{8}{9} + \frac{11}{9}, \frac{8}{3} + \frac{3}{3}\right) = \left(\frac{3}{9}, \frac{11}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$

Pasul al III-lea: $b_0^3 = \frac{2}{3}b_0^2 + \frac{1}{3}b_1^2 = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right) = \left(\frac{-16}{9} + \frac{1}{9}, \frac{16}{9} + \frac{11}{9}\right) = \left(\frac{-15}{9}, \frac{27}{9}\right) = \left(\frac{-5}{3}, 3\right)$

Punctele de control la stânga sunt: $c_0 = b_0$, $c_1 = b_0^1$, $c_2 = b_0^2$, $c_3 = b_0^3$, adică

$c_0 = (-3,1)$, $c_1 = \left(-\frac{10}{3}, 2\right)$, $c_2 = \left(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $c_3 = \left(-\frac{5}{3}, 3\right)$

Punctele de control la dreapta sunt: $d_0 = b_0^3$, $d_1 = b_1^2$, $d_2 = b_2^1$, $d_3 = b_3^0$, adică

$d_0 = \left(-\frac{5}{3}, 3\right)$, $d_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $d_2 = \left(\frac{11}{3}, 3\right)$, $d_3 = (3,1)$.

(ii) Reprezentați grafic (cu gnuplot, geogebra, maxima, matplotlib, ...) pe același sistem de axe: cele două segmente de curbă (cu culori diferite), punctele de control și poligonul de control pt. curba originală, precum și punctele de control și poligoanele de control pt. cele două segmente obținute prin divizare.