Aplicaţii ale geometriei în informatică
Laborator

Paul A. Blaga

Laboratorul 1

În lista de probleme de mai jos, triunghiul ABC are vârfurile $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$. Reprezentaţi, de fiecare dată, pe aceeaşi figură, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

Folosind modelul problemei rezolvate, rezolvaţi problemele 2–5. Cu excepţia forfecării, nu utilizaţi formula finală, ci determinaí matricile transformărilor elementare, apoi înmulţiţi-le. Puteţi utiliza Maple sau alt software pentru înmulţirea matricilor.

1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de unghi $30°$ în jurul punctului $Q(2,2)$, urmată de o translaţie de vector $(1,2)$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Soluţie. Rotaţia faţă de punctul $Q(2,2)$ se scrie ca o combinaţie dintre translaţia de vector $(-2,-2)$, care duce centrul de rotaţie în origine, rotaţia de unghi $30°$ faţă de origine şi translaţia de vector $(2,2)$, care duce centrul de rotaţie înapoi în Q sau, în termeni de matrici omogene de transformare,

$$\mathrm{Rot}\left((2,2),30°\right) = \mathrm{Trans}(2,2)\cdot \mathrm{Rot}(30°)\cdot \mathrm{Trans}(-2,-2).$$

Matricile celor trei transformări elementare sunt

$$\mathrm{Trans}(-2,-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Rot}(30°) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Trans}(2,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, matricea de rotaţie în jurul lui Q este

$$\mathrm{Rot}(Q,30^\circ)=\mathrm{Trans}(2,2)\cdot\mathrm{Rot}(30^\circ)\cdot\mathrm{Trans}(-2,-2)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3-\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Matricea translaţiei, în schimb, este

$$\mathrm{Trans}(1,2)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Începem cu prima transformare, în care se efectuează mai întâi rotaţia, urmată de translaţie. Aşadar, matricea primei transformări este

$$T_1=\mathrm{Trans}(1,2)\cdot\mathrm{Rot}\left((2,2),30^\circ\right)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 4-\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

În consecinţă, imaginea triunghiului este dată de

$$\begin{bmatrix}A' & B' & C'\end{bmatrix}=T_1\cdot\begin{bmatrix}A & B & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 4-\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2} & \sqrt{3}+\frac{7}{2} & \frac{5}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+5 & \frac{\sqrt{3}}{2}+4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

deci coordonatele carteziene ale vârfurilor triunghiului $A'B'C'$ sunt $A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}\right)$, $B'\left(\sqrt{3}+\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+5\right)$, $C'\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+4\right)$. (Vezi figura 1.1) Inversăm, acum, ordinea

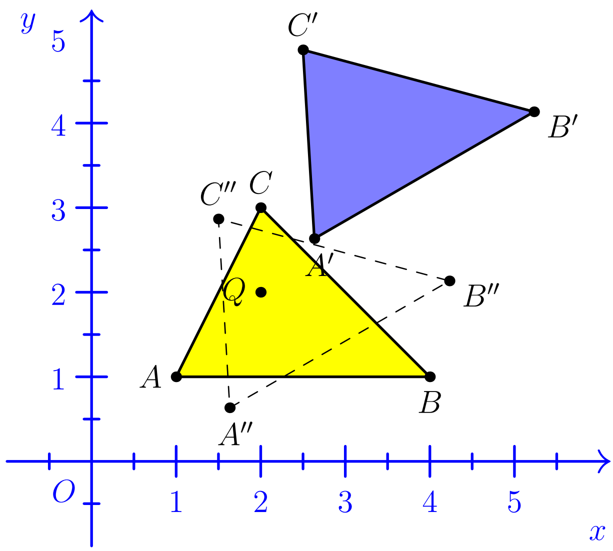

Figura 1.1 – Rotaţie, urmată de translaţie

celor două transformări. Transformarea care se obţine este

$$T_2 = \mathrm{Rot}((2,2),30^\circ)\cdot\mathrm{Trans}(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, imaginea triunghiului este dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = T2 \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+2 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ceea ce înseamnă că punctele triunghiului imagine au coordonatele carteziene $A'\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$,

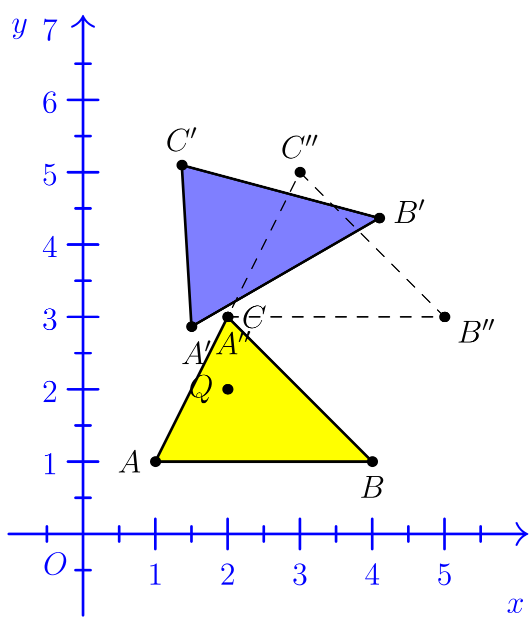

Figura 1.2 – Translaţie urmată de rotaţie

$B'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}\right)$, $C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\right)$. (Vezi figura 1.2)

$\square$

2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală $(2, 1)$, relativ la punctul $Q(2, 2)$, urmată de o rotaţie de unghi $90°$ faţă de origine.

3. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o forfecare de unghi $45°$, relativ la punctul $Q(2, 2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(2, 1)$.

4. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta $2x + 3y - 5 = 0$.

5. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin rotaţia cu $90°$ în jurul punctului C, urmată de reflexia relativ la dreapta AB.