ΔABC, vf. A(1,1), B(4,1), C(2,3)

# Temă Lab 1

2. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală (2,1), relativ la punctul Q(2,2), urmată de o rotație de unghi 90° față de origine.

Sol: Începem cu scalare simplă neuniformă de factori scală (2,1), relativ la punctul Q(2,2).

- mai întâi mutăm punctul P în origine, facem scalare și după mutăm punctul P înapoi

=> matricea omogenă scalării se scrie:

$$S_Q(2,1) = T(2,2) \cdot S(2,1) \cdot T(-2,-2) \quad ①$$

$$T(2,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(-2,-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ① = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(din curs)

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & (1-s_x) \cdot x_0 \\ 0 & s_y & (1-s_y) \cdot y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, unde $s_x, s_y$ sunt factorii de scală, $x_0, y_0$ sunt coordonatele punctului Q.

$$\Rightarrow S_Q(2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & (1-2) \cdot 2 \\ 0 & 1 & (1-1) \cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotația de unghi 90° față de origine este $Rot(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, unde $\theta = 90°$

$$\Rightarrow Rot(90°) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

=> transformarea este dată cu $T = Rot(90°) \cdot S_Q(2,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

=> Imaginea triunghiului este dată de:

$$[A'\ B'\ C'] = T_1 \cdot [A\ B\ C] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

=> Coordonatele carteziene ale vf. ΔA'B'C' sunt:

A'(-1,0), B'(-1,6), C'(-3,2)

---

3. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o forfecare de unghi 45°, relativ la punctul Q(2,2), în direcția v(2,1).

Sol: Avem formula:

$$Shear(Q, v, tg\theta) = \begin{pmatrix} 1 + tg\theta\, v_1 v_2 & -tg\theta\, v_1^2 & tg\theta\, v_1(v_1 q_2 - v_2 q_1) \\ tg\theta\, v_2^2 & 1 - tg\theta\, v_1 v_2 & tg\theta\, v_2(v_1 q_2 - v_2 q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unde $q_1, q_2$ sunt coordonatele punctului Q; $v_1, v_2$ sunt coordonatele versorului v

$$\Rightarrow Shear(Q, v; 1) = \begin{bmatrix} 1+2 & -4 & 2(4-2) \\ 1 & 1-2 & 4-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Imaginea triunghiului este dată de:

$$[A'\ B'\ C'] = Shear(Q, v, 1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Coordonatele carteziene ale vf. $\triangle A'B'C'$ sunt:

$A'(3,2)$, $B'(12,5)$, $C'(-2,1)$

---

4. Determinați imaginea $\triangle ABC$ prin reflexia relativ la dreapta $2x+3y-5=0$

Sol: Formula este: $R_\Delta = T\left(0, -\frac{c}{b}\right) \cdot Rot(\theta) \cdot R_x \cdot Rot(-\theta) \cdot T\left(0, -\frac{c}{b}\right) = \ldots =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & -\frac{2ab}{a^2+b^2} & -\frac{2ac}{a^2+b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2+b^2} & -\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & -\frac{2bc}{a^2+b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avem această formulă pt. că axa de reflexie nu este verticală, adică $b \neq 0$.

$$\Rightarrow R_\Delta = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{20}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{30}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Imaginea triunghiului este dată de:

$$[A'\ B'\ C'] = R_\Delta \cdot [A\ B\ C] = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{20}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{30}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{28}{13} & -\frac{6}{13} \\ 1 & -\frac{23}{13} & -\frac{9}{13} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Coordonatele carteziene ale vf. $\triangle A'B'C'$ sunt:

$A'(1,1)$, $B'\left(\frac{28}{13}, -\frac{23}{13}\right)$, $C'\left(-\frac{6}{13}, -\frac{9}{13}\right)$

---

5. Determinați imaginea triunghiului ABC prin rotație cu 90° în jurul punctului C, urmată de reflexia relativă la dreapta AB.

Sol: Mai întâi rotația cu 90° în jurul punctului $C(2,3)$, ce presupune mutarea punctului în origine, rotația și după mutarea punctului înapoi.

$$\Rightarrow Rot_C(90^\circ) = T(2,3) \cdot Rot(90^\circ) \cdot T(-2,-3)$$

$$T(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T(-2,-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow Rot_C(90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2+3 \\ 1 & 0 & -2+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru aflarea ecuației dreptei AB, observăm că $y_A = y_B = 1 \Rightarrow AB$ este orizontală

$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow y - 1 = 0$

$$\Rightarrow R_\Delta = \begin{pmatrix} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & -\frac{2ab}{a^2+b^2} & -\frac{2ac}{a^2+b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2+b^2} & -\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & -\frac{2bc}{a^2+b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Transformarea este egală cu $T = R_\Delta \cdot Rot_C(90°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Imaginea $\Delta ABC$ este dată de:

$$[A' \, B' \, C'] = T \cdot [A \, B \, C] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Coordonatele carteziene ale vf. $\Delta A'B'C'$ sunt:

$A'(4, 0)$, $B'(4, -3)$, $C'(2, -1)$